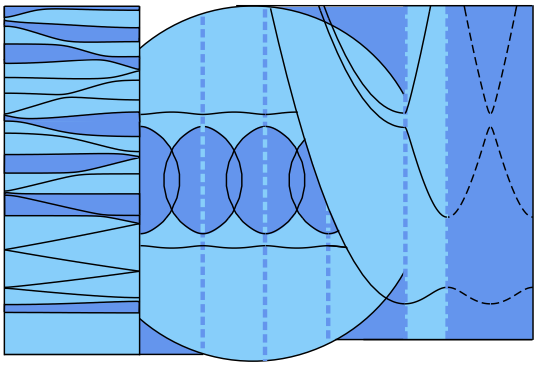
Magnetotransport in zweidimensionalen Elektronensystemen mit periodischer Modulation und Spin-Bahn-Wechselwirkung



Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades der Naturwissenschaften

(Dr. rer. nat.)

am Institut für Physik I - Theoretische Physik

der Universität Regensburg

vorgelegt von **Michael Langenbuch**

aus Forchheim/Oberfranken

September 2002

Promotionsgesuch eingereicht am 19. September 2002.
Promotionskolloquium am 27. November 2002.

Prüfungsausschuß:

Vorsitzender:	Prof. Dr. Werner Wegscheider
1. Gutachter:	Prof. Dr. Ulrich Rössler
2. Gutachter:	Prof. Dr. Vladimir Braun
Weiterer Prüfer:	Prof. Dr. Matthias Brack

Die Arbeit wurde angeleitet von Prof. Dr. Ulrich Rössler.

Bill Watterson: Calvin und Hobbes

Inhaltsverzeichnis

Einführung zum Magnetotransport im lateralen Halbleiter-Übergitter **1**

1 Elektronen in Kristallen und Halbleiter-Heterostrukturen **7**
1.1 Die elektronische Bandstruktur 8
1.2 Die Envelope-Funktions-Näherung und das Vier-Band-Modell 12
1.3 Kristallelektronen und Magnetfeld 16

2 Theorie des Magnetotransports **21**
2.1 Klassische Beschreibung (Drude-Theorie) 21
2.2 Quantenmechanische Beschreibung 24
2.2.1 Kubo-Formel 24
2.2.2 Selbstkonsistente Bornsche Näherung (SCBA) 27
2.3 Vergleich von Drude-Theorie und Kubo-Formel 32

3 Quantenoszillationen im Magnetotransport in lateralen 1D Halbleiter-Übergittern **37**
3.1 Experimentelle Beobachtung und quasiklassische Interpretation 38
3.2 Magnetische Minibandstruktur 47
3.3 Magnetotransportrechnung 53

4 Spin-Bahn-Wechselwirkung im 2DES **57**
4.1 Energiespektrum und Eigenfunktionen 58
4.2 Erweiterung der SCBA für Spin-Bahn-Wechselwirkung 65

4.3 Zwei-Niveau-System mit Spin-Bahn-Kopplung 68
4.4 Auswertung der Kubo-Formel 72

5 Laterale Modulation und Spin-Bahn-Wechselwirkung 83
5.1 Minibandstruktur mit Spin-Bahn-Wechselwirkung 83
5.2 Magnetowiderstandsoszillationen 91

Zusammenfassung 97

Anhang 100

A Energiedispersion für 1D-Modulation 101

B Elektronen im Magnetfeld 103

C Matrixelemente mit Helizität 107

D Vertexkorrekturen 109

Literaturverzeichnis 111

Einführung zum Magnetotransport im lateralen Halbleiter-Übergitter

Der Fortschritt in der Halbleitertechnologie ist die Grundlage für die Entwicklung der elektronischen Datenverarbeitung mit immer schnelleren und kleineren Computern. Neben der Verwendung von Halbleitern für integrierte Schaltkreise (Nobelpreis 2000) werden mit der verbesserten Herstellung und Strukturierung von Halbleitern auch für die Grundlagenforschung interessante Systeme realisiert. So wurden an hochbeweglichen zweidimensionalen Elektronensystemen in Halbleiter-Heterostrukturen der Quanten-Hall-Effekt (Nobelpreis 1985) sowie der gebrochenzahlige Quanten-Hall-Effekt (Nobelpreis 1998) entdeckt, und ein weites Feld für die Erforschung der Physik in niedrigdimensionalen Systemen geöffnet. Bei der Entwicklung von Computern geht es inzwischen nicht nur um die weitere Miniaturisierung, sondern auch um neue Funktionalität in den Schaltelementen. Der Spin als zusätzlicher Freiheitsgrad des Elektrons verspricht dafür auf dem Gebiet der Elektronik die Realisierung neuartiger Bauelemente. Unter dem Begriff Spintronik werden heute alle Anwendungen von magnetischen Speichern bis zu Spin-Transistoren zusammengefaßt, die sich in ihrer Funktionalität auf den Spin der Elektronen beziehen [Wolf01, Awsch02].

Der Vorschlag von Das und Datta [Datt90] zur Realisierung eines Spin-FET (Feld-Effekt-Transistor) mit einem zweidimensionalen Elektronensystem (2DES) entfachte ein reges Interesse an Spin-Effekten in Halbleiter-

Heterostrukturen. Bei diesem Konzept des Spin-FET sollen Elektronen durch ferromagnetische Kontakte Spin-polarisiert in ein 2DES injiziert werden, die Spin-Polarisation über eine Spin-Bahn-Wechselwirkung im 2DES manipuliert und durch einen weiteren ferromagnetischen Kontakt wiederum detektiert werden.

Die Spin-Bahn-Wechselwirkung über den Rashba-Effekt [Rash60] im 2DES spielt dabei eine tragende Rolle und begründete ein eigenes Forschungsgebiet, da sie die Manipulation des Spins über ein elektrisches Feld erlaubt.

Zur Untersuchung der elektronischen Eigenschaften von Halbleiter-Heterostrukturen haben sich Widerstandsmessungen in Abhängigkeit eines angelegten äußeren Magnetfeldes unter dem Namen Magnetotransportmessung etabliert. Aus ihnen lassen sich Informationen über das Energiespektrum und die elektronischen Eigenschaften des Systems gewinnen. Zur Interpretation dieser Daten sind theoretische Modelle nötig, die sich mit dem Ladungstransport in zweidimensionalen Ladungsträgersystemen befassen.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit dem Magnetotransport in lateralen Halbleiter-Übergittern. Das sind 2DES in Halbleiter-Heterostrukturen, denen in der Ebene der freien Bewegung ein periodisches Potential aufgeprägt wird. Ein 2DES wird in Halbleiter-Heterostrukturen realisiert, indem durch Kombination verschiedener Halbleitermaterialien ein Potentialtopf im Leitungsband erzeugt wird, worin sich Ladungsträger sammeln, die nicht mehr an ein Kristallatom gebunden sind. Ist der Quantentopf schmal genug, sind die Energieniveaus energetisch weit getrennt, und ist nur das unterste Niveau besetzt, so erhält man ein zweidimensionales Elektronengas. Diese Situation ist in Abbildung 1(a) schematisch dargestellt. Während die Elektronen in z-Richtung gebunden sind, können sie sich in der xy-Ebene frei bewegen. Ein räumlich periodisches elektrisches oder magnetisches Feld, das künstlich präpariert wird, prägt den Elektronen in der Ebene der freien Bewegung ein periodisches Potential auf. Dies wird als laterales Übergitter bezeichnet. *Übergitter*, da die Gitterkonstante der periodischen Struktur größer als die des zugrundeliegenden Halbleitermaterials ist, und *lateral* spezifiziert, daß es sich um ein Gitter in der Ebene eines 2DES handelt. Nach Art, Amplitude und Gittertyp der Modulation werden verschiedene Formen des lateralen Übergitters unterschieden. In Abbildung 1(b) ist die Potentiallandschaft für eine schwache Modulation in einer Raumrichtung (1D) skizziert. Die Gitterkonstante a von realisierbaren lateralen Übergittern liegt im Nanometerbereich. Mit kurzperiodischen Übergittern werden momentan Übergitter mit einer Gitterkonstanten von etwa $a \approx 100\,\mathrm{nm}$ bezeichnet.

Wie für Bloch-Elektronen im Kristallgitter, deren Energiespektrum durch die periodische Anordnung der Atome bestimmt wird und sich durch eine Bandstruktur beschreiben läßt, werden die elektrischen Eigenschaften der

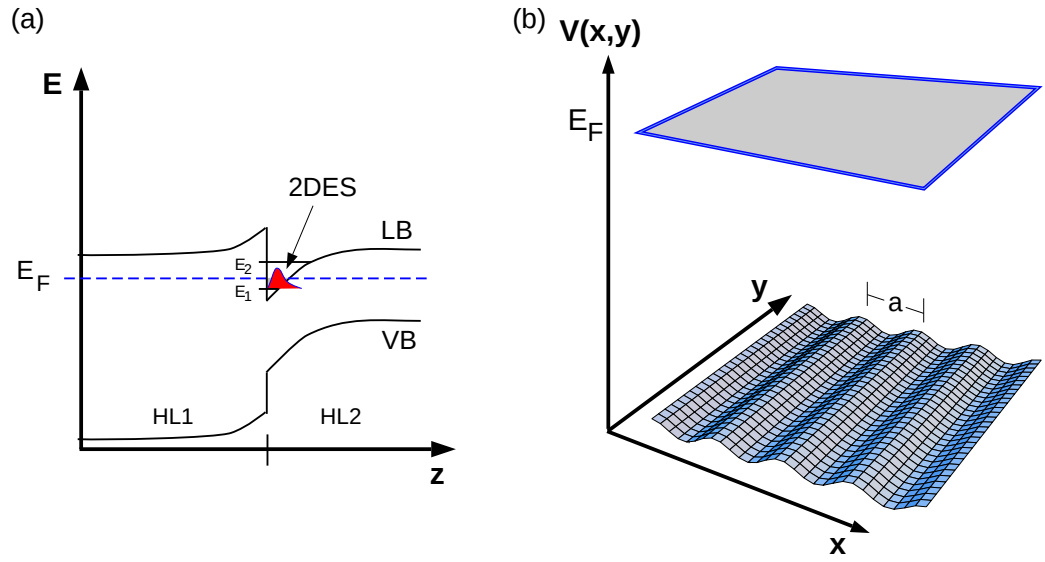


Abbildung 1: (a) Schematischer Bandkantenverlauf in Wachstumsrichtung (z-Richtung) von Leitungsband (LB) und Valenzband (VB) einer Halbleiter-Heterostruktur (HL1 und HL2) mit Potentialtopf an der Grenzfläche. Mit E_1 und E_2 sind zwei Energieniveaus angedeutet, von denen nur E_1 unterhalb der Fermi-Energie E_F liegt, welches so das zweidimensionale Elektronensystem (2DES) trägt. (b) Potentiallandschaft im lateralen Halbleiter-Übergitter in der xy-Ebene für schwache 1D-Modulation in x-Richtung mit Gitterkonstante a.

lateralen Halbleiter-Übergitter durch die Gitterkonstante sowie die Modulationsstärke bestimmt und durch eine Minibandstruktur beschrieben. Es ist mit diesen Systemen ein künstlicher zweidimensionaler "Kristall" realisiert, der ein weites Feld für experimentelle und theoretische Untersuchungen zur Physik von Elektronen in einem periodischen Potential eröffnet.

Durch die im Vergleich zum natürlichen Kristall größere Gitterkonstante und durch die zu freien Elektronen kleinere effektive Masse m^* der Leitungsbandelektronen reichen die im Labor erreichbaren Magnetfelder aus, den Zyklotronradius in die Größenordnung der Gitterkonstante zu zwingen. Den für den Ladungstransport relevanten Ladungsträgern an der Fermi-Energie E_F ist eine Fermi-Wellenlänge $\lambda_\mathrm{F} = h/\sqrt{2m^*E_\mathrm{F}}$ zugeordnet. Im klassischen Grenzfall $\lambda_\mathrm{F} \ll a$, d.h. die Wellennatur der Ladungsträger spielt noch keine Rolle, sind Kommensurabilitätseffekte [Weis89, Weis91] zwischen Gitterkonstante und Zyklotronradius als Magnetowiderstandsoszillationen zu beobachten.

Durch die Herstellung von lateralen Halbleiter-Übergittern mit immer kürzeren Gitterperioden werden quantenmechanische Effekte wichtig. So bildet sich durch das periodische Potential eine Minibandstruktur aus, die sich als Quantenoszillationen im Magnetowiderstand beobachten läßt [Albr99, Deut01].

Weiter kann im Übergang von schwacher zu starker zweidimensionaler Modulation (Antidot-Array) die Entwicklung von integrablen zu chaotischen Systemen studiert werden [Flei92, Silb95] und es wird die Hoffnung genährt, mit diesen Systemen das fraktale Energiespektrum des Hofstadter-Schmetterlings [Hofs76] experimentell nachzuweisen [Albr01], um nur einige der aktuellsten Forschungsfelder an lateralen Übergittern anzusprechen.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der quantenmechanischen Beschreibung des Magnetotransports in lateralen Halbleiter-Übergittern, um insbesondere die Quantenoszillationen auf Grund der Minibandstruktur zu untersuchen. Hierbei kann die quantenmechanische Beschreibung neben der Periodizität auch über die Phasenlage der Oszillationen Auskunft geben, womit verschiedene Leitfähigkeitsmechanismen unterschieden werden. Weiter wird der Einfluß des Spins als quantenmechanischer Freiheitsgrad des Elektrons zusammen mit der Spin-Bahn-Wechselwirkung in der quantenmechanischen Rechnung untersucht. Die Spin-Bahn-Wechselwirkung manifestiert sich bereits im homogenen System über die Streuung an Störstellen und beeinflußt ebenfalls die Magnetowiderstandsoszillationen im Magnetotransport des lateralen Halbleiter-Übergitters.

Grundlage der quantenmechanischen Berechnung ist die Beschreibung der Leitfähigkeit als lineare Antwort des Systems auf ein externes elektrisches Feld. Dies beinhaltet die Auswertung der Kubo-Formel nach Berücksichtigung der Störstellen in der selbstkonsistenten Bornschen Näherung (SCBA). Dieser Formalismus wurde bereits sehr früh entwickelt. Für das zweidimensionale Elektronensystem ist er im Reviewartikel über die elektronischen Eigenschaften der 2DES [Ando82] ausführlich dargestellt.

Diese quantenmechanische Beschreibung wurde für die Berechnung des Magnetotransports in lateralen Halbleiter-Übergitter eingesetzt, denn obwohl die Periodizität der Kommensurabilitäts-Oszillationen im Magnetotransport noch in einem klassischen Bild erklärt werden kann [Been89], konnte erst diese quantenmechanische Beschreibung die Phasenlage der Kommensurabilitäts-Oszillationen in den verschiedenen Widerstandskomponenten eines eindimensional modulierten Übergitters erfolgreich erklären [Gerh89]. Weitere Untersuchungen für laterale Übergitter mit schwacher eindimensionaler Modulation [Vasi89, Zhan90] und mit schwacher zweidimensionaler Modulation [Pfan92], die auf der Auswertung der Kubo-Formel beruhen, folgten. Einhergehend mit der experimentellen Untersuchung von Antidot-Arrays

[Weis91, Weis93] wurde das Verfahren auch auf starke zweidimensionale Modulation [Silb94] mit den unterschiedlichsten Gittertypen [Rott97] verallgemeinert. Der Einfluß der Störstellenstreuung auf den Magnetotransport wurde mit der Berücksichtigung von anisotroper Streuung [Mano01, Gros01] untersucht.

Da durch die periodische Modulation die Bewegung der Elektronen beeinflußt wird und die Spin-Bahn-Wechselwirkung den Spin-Freiheitsgrad mit der Bewegung der Elektronen koppelt, ist es von großem Interesse, laterale Halbleiter-Übergitter und Spin-Bahn-Wechselwirkung in einer Rechnung zu vereinen. Dazu wird in dieser Arbeit die theoretische Beschreibung des Magnetotransports, insbesondere die Behandlung der Störstellenstreuung, für ein unmoduliertes 2DES mit Spin-Bahn-Wechselwirkung erweitert und anschließend der Einfluß der Spin-Bahn-Wechselwirkung auf den Magnetotransport in lateralen Halbleiter-Übergittern untersucht. Der Einfluß der Spin-Bahn-Wechselwirkung auf die Kommensurabilitäts-Oszillationen kann innerhalb einer semiklassischen Näherung abgeschätzt werden [Maga94].

Die Arbeit ist folgendermaßen gegliedert.

Im **ersten Kapitel** werden zunächst die Grundlagen für die Beschreibung von Heterostrukturen dargestellt. Dies ist im Rahmen der Envelope-Funktions-Näherung möglich. Mit der $\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}$-Theorie läßt sich die Spin-Bahn-Wechselwirkung in zweidimensionalen Elektronensystemen aus der Bandstruktur des zugrundeliegenden Halbleiters ableiten. Außerdem wird die Veränderung der elektronischen Eigenschaften im Magnetfeld besprochen.

Das **zweite Kapitel** befaßt sich mit der theoretischen Beschreibung des Magnetotransports in zweidimensionalen Elektronensystemen, insbesondere mit der Berücksichtigung von Streuung, und stellt die klassische Drude-Theorie der quantenmechanischen Beschreibung mit der Kubo-Formel gegenüber.

Im **dritten Kapitel** werden Quantenoszillationen auf Grund der Minibandstruktur für das laterale 1D Halbleiter-Übergitter mittels Berechnung der Minibandstruktur und quantenmechanischer Transportrechnung studiert. Der Unterschied zwischen verschiedenen Leitfähigkeitsmechanismen, der die Phase der Oszillationen bestimmt, wird herausgearbeitet.

Das **vierte Kapitel** behandelt die quantenmechanische Beschreibung des Magnetotransports mit Spin-Bahn-Wechselwirkung eines homogenen zwei-

dimensionalen Elektronensystems. Insbesondere wird die selbstkonsistente Bornsche Näherung für das zweidimensionale Elektronensystem mit Spin-Bahn-Wechselwirkung erweitert.

Das **fünfte Kapitel** untersucht das Zusammenspiel von Spin-Bahn-Wechselwirkung und periodischer elektrostatischer Modulation anhand der Minibandstruktur und der quantenmechanischen Transportrechnung. Damit wird der Einfluß der Spin-Bahn-Wechselwirkung auf die Magnetowiderstandsoszillationen studiert.

Die Zusammenfassung gibt nochmal einen Überblick über die wesentlichen Ergebnisse.

KAPITEL 1

Elektronen in Kristallen und Halbleiter-Heterostrukturen

Die in dieser Arbeit beschriebenen Systeme sind Ladungsträger eines Halbleiters, denen durch verschiedene Materialien oder elektrische Felder Bewegungsebenen vorgegeben werden. Es gilt zu bedenken, daß diese Ladungsträger letztendlich Kristallelektronen sind, welche mit der elektronischen Bandstruktur des Halbleiters beschrieben werden. Die Energiedispersion für Bandkantennahe Zustände im Halbleiter wird in der $\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}$-Theorie aus wenigen Parametern der elektronischen Bandstruktur entwickelt, was in einem einfachen Zwei-Band-Modell zur Effektiv-Massen-Näherung führt. Heterostrukturen zerstören die der elektronischen Bandstruktur zugrundeliegende Translationsinvarianz des Kristallgitters. In der Envelope-Funktions-Näherung läßt sich mit einem Vier-Band-Modell für die Ladungsträger in einem Quantentrog ein effektiver Hamiltonian ableiten, der eine Spin-Bahn-Wechselwirkung enthält, die neben den Materialparametern des Halbleiters von der Form des Quantentrogs abhängt. Wenn die Bewegung der Elektronen vornehmlich durch das periodische Potential des Kristallgitters bestimmt ist, so kann der Einfluß eines äußeren Magnetfeldes als Störung in der elektronischen Bandstruktur behandelt werden. Dies führt über eine semiklassische

Argumentation zu Magnetfeld-abhängigen Oszillationen in der Zustandsdichte an der für die Transporteigenschaften des elektronischen Systems relevanten Fermi-Kante. Die Modifikation der Bandstruktur durch das Magnetfeld kann näherungsweise über eine Magnetfeld-abhängige Wahrscheinlichkeit für das Tunneln durch Energielücken, den magnetischen Durchbruch, beschrieben werden. Erst mit der magnetischen Bandstruktur werden Magnetfeld und periodisches Potential auf dem selben Niveau im Systemhamiltonian berücksichtigt.

1.1 Die elektronische Bandstruktur

In einem Festkörper befinden sich circa 10^{23} Atome pro cm^3 und jedes Atom besitzt Elektronen entsprechend seiner Ordnungszahl. Ordnen sich die Atome, wie es für Metalle und Halbleiter der Fall ist, regelmäßig an und bilden ein translationsinvariantes Kristallgitter, lassen sich die elektronischen Zustände mit einer Bandstruktur beschreiben.

Die Schrödingergleichung für nicht wechselwirkende Elektronen mit der Elektronenmasse m_e in einem periodischen Potential $U(\boldsymbol{r})$ lautet

$$\left(\frac{\boldsymbol{p}^2}{2m_e} + U(\boldsymbol{r}) - E\right)\Psi(\boldsymbol{r}) = 0, \tag{1.1}$$

wobei $\boldsymbol{p}$ den Impulsoperator bezeichnet. Die Lösungen $\Psi(\boldsymbol{r})$ sind nach dem Bloch-Theorem sogenannte Bloch-Funktionen, die aus einer ebenen Welle multipliziert mit einer gitterperiodischen Funktion $u_{n\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r})$ (z.B. [Ashc76]),

$$\Psi(\boldsymbol{r}) = \langle \boldsymbol{r}|n\boldsymbol{k}\rangle = e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}u_{n\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r}) \tag{1.2}$$

bestehen. Der Wellenvektor $\boldsymbol{k}$ liegt in der ersten Brillouin-Zone des Kristallgitters. Jeder Zustand kann eindeutig über $\boldsymbol{k}$ und die Quantenzahl n, den Bandindex, bezeichnet werden, wobei hier, noch ohne Berücksichtigung des Spins, jeder Zustand zweifach Spin-entartet ist. Die Abbildungen 1.1 und 1.2 zeigen die elektronische Bandstruktur bzw. das Energiespektrum der Valenz- und Leitungsbandelektronen aufgetragen über der ersten Brillouin-Zone, für die Halbleiter Gallium-Arsenid (GaAs), bzw. Indium-Arsenid (InAs) aus [Chel76], wie es mit der Pseudopotential-Methode berechnet wurde. Halbleiter besitzen am Temperaturnullpunkt ($T = 0$) nur voll besetzte Valenzbänder, die durch eine Energielücke E_g von freien Zuständen im Leitungsband getrennt sind. Bei endlichen Temperaturen oder durch Dotierung mit Donatoren werden Elektronen ins Leitungsband gebracht, wo sie zum

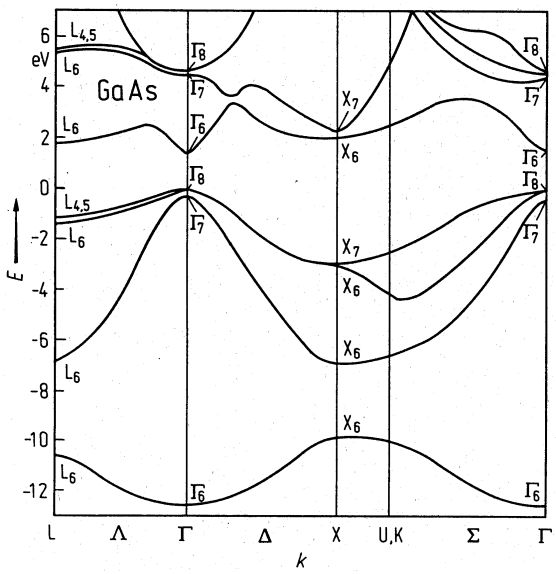


Abbildung 1.1: Elektronische Bandstruktur für GaAs. Die Bänder sind mit den irreduziblen Darstellungen der Zink-Blende-Symmetriegruppe T_d bezeichnet (aus [Chel76]).

Ladungstransport beitragen. Für die Energiedispersion der Elektronen nahe der Bandkanten läßt sich aus wenigen Größen der Bandstruktur eine analytische Funktion mit der $\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}$-Theorie [Kane82] ableiten. Eine verständliche Zusammenfassung findet sich z.B. in [Yu96]. So gilt mit dem Blochansatz aus der Schrödingergleichung (1.1) für die gitterperiodischen Funktionen $u_{n\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r})$:

$$\left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m_e} + \frac{\hbar}{m_e}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{p} + \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m_e} + U(\boldsymbol{r}) - E_{n\boldsymbol{k}}\right) u_{n\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r}) = 0, \tag{1.3}$$

und speziell für $\boldsymbol{k} = \mathbf{0}$, den Γ-Punkt[1],

$$\left(\frac{\boldsymbol{p}^2}{2m_e} + U(\boldsymbol{r}) - E_{n\mathbf{0}}\right) u_{n\mathbf{0}}(\boldsymbol{r}) = 0. \tag{1.4}$$

Wenn die Größen $E_{n\mathbf{0}}$ und $u_{n\mathbf{0}}(\boldsymbol{r})$ bekannt sind, lassen sich die Terme $\frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ und $\frac{\hbar}{m}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{p}$ als Störung behandeln. Für nichtentartete Bänder läßt sich die

[1]Die in dieser Arbeit zur Rechnung verwendeten Halbleiter, GaAs und InAs, sind direkte Halbleiter, d.h. das Leitungsbandminimum bzw. Valenzbandmaximum liegt am Γ-Punkt. Im Prinzip läßt sich für jeden Punkt der Brillouinzone eine analoge Gleichung aufstellen.

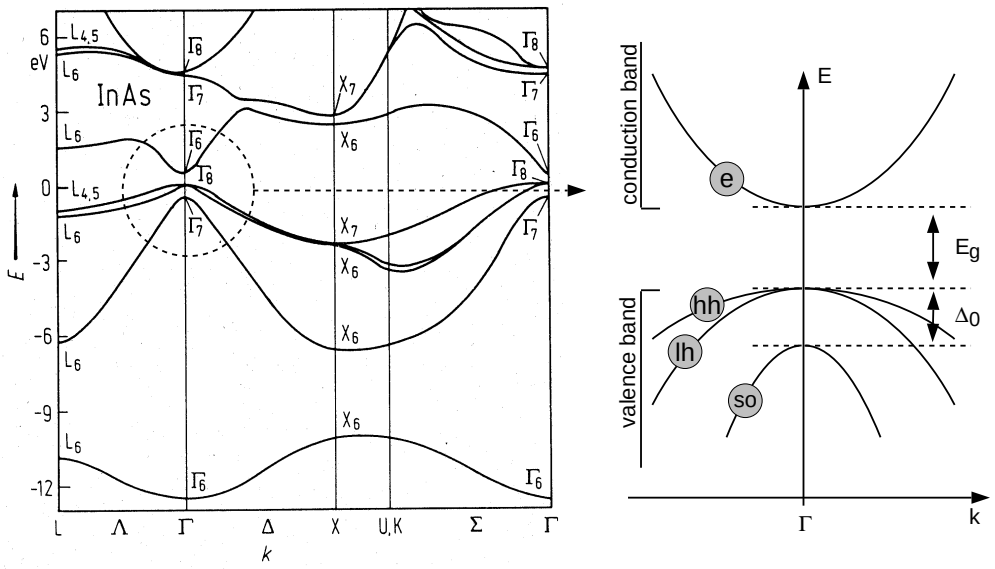


Abbildung 1.2: Elektronische Bandstruktur für InAs. Die Bandstruktur (links) ist mit den irreduziblen Darstellungen der Zink-Blende-Symmetriegruppe T_d bezeichnet (aus [Chel76]). Rechts ist die Region um das Leitungsband-Minimum skizziert. Das Leitungsband (*conduction band*) mit Elektronenzuständen (e) ist durch die Energielücke E_g vom Valenzband (*valence band*) getrennt, welches aus den am Γ-Punkt entarteten Bändern der leichten (lh) und schweren Löcher (hh) und einem um die Energie Δ_0 durch die Spin-Bahn-Wechselwirkung abgespaltenen Spin-split-off-Band (so) besteht.

Energiedispersion um $E_{n\mathbf{0}}$ zu

$$E_{n\boldsymbol{k}} = E_{n\mathbf{0}} + \frac{\hbar^2 k^2}{2m_e} + \frac{\hbar^2}{m_e^2} \sum_{n' \neq n} \frac{\left| \langle n\mathbf{0} \left| \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{p} \right| n'\mathbf{0} \rangle \right|^2}{E_{n\mathbf{0}} - E_{n'\mathbf{0}}} \tag{1.5}$$

entwickeln. Wird der Einfluß des Kristallgitters im Band n nun durch die effektive Masse m_n^* beschrieben,

$$E_{n\boldsymbol{k}} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_n^*}, \tag{1.6}$$

ergibt sich diese mit der Definition der Kaneschen Matrixelemente $\boldsymbol{P}_{nn'}$ als

$$\boldsymbol{P}_{nn'} := \frac{\hbar}{m_e} \langle n\mathbf{0} \left| \boldsymbol{p} \right| n'\mathbf{0} \rangle \tag{1.7}$$

	E_g [eV]	Δ_0 [eV]	P [eV Å]	g^*	m^* [m_e]	m^* [m_e] Gl.(1.9)
GaAs	1.519	0.341	10.493	-0.44	0.0665	0.050
InAs	0.418	0.380	9.197	-14.90	0.0229	0.018

Tabelle 1.1: Bandstruktur-Parameter für GaAs und InAs aus [Land82], und m^* nach Gleichung (1.9).

zu

$$\frac{1}{m_n^*} = \frac{1}{m_e} + \sum_{n' \neq n} \frac{2\left|\boldsymbol{P}_{nn'}\right|^2}{\hbar^2 \left(E_{n\mathbf{0}} - E_{n'\mathbf{0}}\right)} \tag{1.8}$$

Der Energieabstand $E_{n\mathbf{0}} - E_{n'\mathbf{0}}$ bestimmt den Beitrag des Bandes n' zur effektiven Masse von n. Das Band n' trägt zur effektiven Masse des Bandes n aber nur bei, wenn das Kanesche Matrixelement nicht verschwindet. Mit der Symmetrie der Bänder lassen sich die relevanten Kaneschen Matrixelemente über gruppentheoretische Überlegungen benennen.

Damit läßt sich aus einem einfachen Zwei-Band-Modell mit Leitungsband und Valenzband, die durch die Energielücke E_g getrennt und über das Kanesche Matrixelement P gekoppelt sind, die effektive Masse für Leitungsband-Elektronen zu

$$m^* = \left(\frac{1}{m_e} + \frac{2P^2}{\hbar^2 E_g}\right)^{-1}, \tag{1.9}$$

berechnen.

In der Tabelle 1 sind die für die Arbeit relevanten Werte aus der elektronischen Bandstruktur zusammengestellt, wie sie aus dem Experiment bestimmt werden können. Der g-Faktor des freien Elektrons wird für Kristallelektronen durch den effektiven g-Faktor g^* ersetzt. Die aus Gleichung (1.9) berechnete effektive Masse liegt bereits sehr nahe der experimentell bestimmten Größe, obwohl ein sehr einfaches Modell aus Leitungs- und Valenzband zugrunde liegt. Die Werte in Tabelle 1 sind für das Volumenmaterial ermittelt und können für Heterostrukturen abweichen. In dieser Arbeit dienen sie als Anhaltspunkt, an denen sich die Parameter der Rechnungen orientieren. Um der Nichtparabolizität der Energiedispersion an der Leitungsbandkante, die für InAs eine nicht unbedeutende Rolle spielt [Hiro86], Rechnung zu tragen, müßten weitere Bänder und höhere Terme der **kp**-Entwicklung berücksichtigt werden.

1.2 Die Envelope-Funktions-Näherung und das Vier-Band-Modell

Die Beschreibung der Elektronen in einem translationsinvarianten Kristall muß nun für Strukturen erweitert werden, in denen die Translationsinvarianz gebrochen ist. Dazu wird die Envelope-Funktions-Näherung [Lutt55] verwendet. Verschiedene Halbleitermaterialien können durch ortsabhängige Bandkanten erfaßt werden, während Bandverbiegungen durch ein Potential $V(\boldsymbol{r})$, das sich im Vergleich zum Kristallpotential nur langsam ändert, beschrieben werden. Die Schrödingergleichung lautet nun:

$$\left(\frac{\boldsymbol{p}^2}{2m_e} + U(\boldsymbol{r}) + V(\boldsymbol{r}) - E\right)\Psi(\boldsymbol{r}) = 0. \tag{1.10}$$

Wieder wird um den Γ-Punkt ($\boldsymbol{k} = \boldsymbol{0}$) entwickelt, allerdings diesmal nach den Luttinger-Funktionen

$$\chi_{n\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r}) := e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} u_{n\boldsymbol{0}}(\boldsymbol{r}), \tag{1.11}$$

so daß die Wellenfunktion geschrieben werden kann als

$$\Psi(\boldsymbol{r}) = \sum_n \int d\boldsymbol{k}\; a_n(\boldsymbol{k})\, \chi_{n\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r}) \tag{1.12}$$

mit den Entwicklungskoeffizienten $a_n(\boldsymbol{k})$. Die Envelope-Funktionen $\psi_n(\boldsymbol{r})$ sind nun definiert mit

$$\psi_n(\boldsymbol{r}) := \int d\boldsymbol{k}\; e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} a_n(\boldsymbol{k}). \tag{1.13}$$

Aus den Envelope-Funktionen läßt sich nun wiederum die Wellenfunktion als

$$\Psi(\boldsymbol{r}) = \sum_n u_{n\boldsymbol{0}}(\boldsymbol{r})\psi_n(\boldsymbol{r}) \tag{1.14}$$

ausdrücken. Es wird deutlich, daß die Wellenfunktionen der Kristallelektronen $\Psi(\boldsymbol{r})$ aus Produkten von im Ort schnell veränderlichen, gitterperiodischen Anteilen $u_{n\boldsymbol{0}}(\boldsymbol{r})$ und langsam veränderlichen Anteilen $\psi_n(\boldsymbol{r})$, den Envelope-Funktionen, bestehen, wie es in Abbildung 1.3 schematisch skizziert ist.

Für die Envelope-Funktionen läßt sich die Differentialgleichung (1.10) mit der Definition des Impulses $\boldsymbol{p} = -i\hbar\boldsymbol{\nabla}$ vereinfachen, indem Gleichung (1.10) von links mit $u^*_{n\boldsymbol{0}}$ multipliziert und über die Einheitszelle integriert wird.

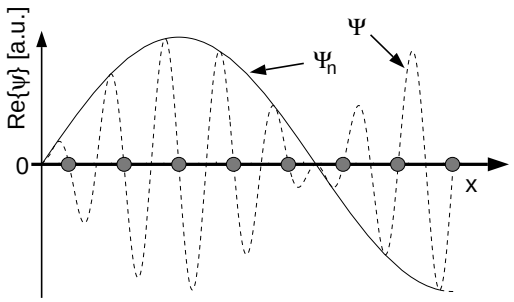


Abbildung 1.3: Der Realteil der Wellenfunktionen schematisch für ein Gitter (mit Kreisen angedeutet) über der Raumkoordinate x aufgetragen. Die Wellenfunktion $\Psi(x)$ (gestrichelt) besteht aus einem schnell veränderlichen gitterperiodischen Anteil und einem langsam veränderlichen Anteil $\Psi_n(x)$ (durchgezogen), der Envelope-Funktion.

Zur Integration besinnt man sich darauf, daß das Potential $V(\boldsymbol{r})$ und die Envelope-Funktion $\psi_n(\boldsymbol{r})$ sich im Ort nur langsam ändern und deshalb innerhalb einer Einheitszelle des Kristallgitters als konstant angesehen werden können. Daher können die Envelope-Funktionen $\psi_n(\boldsymbol{r})$ sowie die Ableitung der Envelope-Funktion aus diesem Integral herausgezogen werden. Aus

$$\frac{\hbar}{m_e}\boldsymbol{k}\psi_n\langle u_{n\mathbf{0}}|\boldsymbol{p}|u_{n'\mathbf{0}}\rangle \;\text{ wird }\; -i\boldsymbol{\nabla}\psi_n\frac{\hbar}{m_e}\langle u_{n\mathbf{0}}|\boldsymbol{p}|u_{n'\mathbf{0}}\rangle \tag{1.15}$$

und es ergibt sich ein Gleichungssystem für die Envelope-Funktionen $\psi_n(\boldsymbol{r})$

$$\left(\frac{\boldsymbol{p}^2}{2m_e}+V-E+E_{n\mathbf{0}}\right)\psi_n(\boldsymbol{r})-\sum_{n'}i\boldsymbol{P}_{nn'}\cdot\boldsymbol{\nabla}\psi_n(\boldsymbol{r})=0, \tag{1.16}$$

Mit dieser Gleichung ist man in der Lage, die Envelope-Funktionen auszurechnen, wenn die Energien $E_{n\mathbf{0}}$, das Potential V, und die Kaneschen Matrixelemente $\boldsymbol{P}_{nn'}$ bekannt sind, wobei all diese Größen vom Ort abhängen können.

Für Elektronen im Leitungsband eines Halbleiters wurde in [Darn93, Ohka74] aus einem Vier-Band-Modell der effektive Hamiltonian für das Leitungsband abgeleitet. Es wurden acht Envelope-Funktionen, nämlich je zwei Spin-Komponenten des Γ_6^c Leitungsbandes, des Γ_8^v Valenzbandes mit schweren und leichten Löchern, sowie des Γ_7^v Spin-Bahn-split-off-Bandes berücksichtigt, wobei nur das Kanesche Matrixelement P zwischen dem s-artigen Leitungsband und den p-artigen Valenzbändern koppelt. Das Magnetfeld

$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}$ wird im Hamiltonian über ein Vektorpotential $\boldsymbol{A}$ im kinetischen Impuls $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{p} + e\boldsymbol{A}$ berücksichtigt. Der Vier-Band-Hamiltonian wird zu einem effektiven Leitungsband-Hamiltonian reduziert und die Schrödingergleichung für den zweikomponentigen Spinor für Elektronen des Leitungsbandes [Darn93] lautet dann:

$$\left(\frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m^*} + V - E + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2} g^* \mu_{\mathrm{B}} \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{B} + \tilde{\alpha} \boldsymbol{\sigma} \left(\boldsymbol{\nabla} V \times \boldsymbol{\pi}\right) - i\tilde{\gamma} \left(\boldsymbol{\nabla} V \cdot \boldsymbol{\pi}\right)\right) \begin{pmatrix} \Psi_1(\boldsymbol{r}) \\ \Psi_2(\boldsymbol{r}) \end{pmatrix} = 0. \quad (1.17)$$

Der kinetische Impuls $\boldsymbol{\pi}$ ist ohne Magnetfeld ($B = 0$) identisch mit dem kanonischen Impuls $\boldsymbol{p}$. In Gleichung (1.17) sind folgenden Abkürzungen verwendet:

$$\frac{1}{m^*} = \frac{2P^2}{3\hbar^2} \left(\frac{2}{E - V + E_g} + \frac{1}{E - V + E_g + \Delta_0}\right), \quad (1.18)$$

$$\tilde{\alpha} = \frac{P^2}{3\hbar} \left(\frac{1}{(E - V + E_g + \Delta_0)^2} - \frac{1}{(E - V + E_g)^2}\right), \quad (1.19)$$

und

$$\tilde{\gamma} = \frac{P^2}{3\hbar} \left(\frac{1}{(E - V + E_g + \Delta_0)^2} + \frac{2}{(E - V + E_g)^2}\right). \quad (1.20)$$

Der effektive g-Faktor wird ausgedrückt durch

$$g^* = \frac{2P^2 e}{3\hbar\mu_{\mathrm{B}}} \left(\frac{1}{E - V + E_g + \Delta_0} - \frac{1}{E - V + E_g}\right), \quad (1.21)$$

mit dem Bohrschen Magneton $\mu_{\mathrm{B}} = e\hbar/(2m_e)$. In der Definition $\boldsymbol{\sigma} := (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ sind die Pauli-Spinmatrizen

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (1.22)$$

in einem Vektor zusammengefaßt.

Die Reduktion des Multiband-Hamiltonian auf den effektiven Leitungsband-Hamiltonian wurde damit erkauft, daß der Energieeigenwert nun im Nenner der Vorfaktoren auftritt. Solange aber die Differenz $E - V$ klein gegenüber $E_g + \Delta_0$ ist, kann die Energieabhängigkeit vernachlässigt werden.

Der Term $\tilde{\alpha}\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\nabla}V \times \boldsymbol{\pi})$ stellt eine Spin-Bahn-Kopplung dar, die neben Materialparametern vom Gradienten des langsam veränderlichen Potentials V, mit dem die Bandverbiegung modelliert wird, abhängt. Diese Art der Spin-Bahn-Wechselwirkung, die entsteht, da die Inversionssymmetrie durch die Bandverbiegung gebrochen wurde, wird Rashba-Term [Rash60] genannt. Die Bandverbiegung entspricht der Situation in einem asymmetrischen Quantentrog.

Die Inversionssymmetrie kann bereits durch die Kristallstruktur des Halbleitermaterials gebrochen werden, wie es zum Beispiel für Zink-Blende-Strukturen der Fall ist. Dies führt zum Dresselhaus-Term [Dres55], der eine Spin-Aufspaltung proportional zu k^3 verursacht und im beschriebenen Vier-Band-Modell, das zu Gleichung (1.17) führt, nicht abgeleitet werden kann[2].

Aus dem Vorfaktor (1.19) ist abzulesen, daß die Kopplung des Spin-Freiheitsgrades an die Bewegung der Elektronen durch den Rashba-Term für Halbleitermaterialien relevant wird, in denen die Energielücke E_g mit dem Abstand des Spin-split-off-Bandes zur Valenzbandkante Δ_0 vergleichbar ist, wie es z.B. in InAs der Fall ist.

Beschränken wir die Betrachtung nun auf ein 2DES in einer Heterostruktur, in der die Elektronen in z-Richtung gefangen sind, während sie sich in der xy-Ebene im Halbleiterkristall frei bewegen. Mit dem langsam veränderlichen Potential $V(\boldsymbol{r})$ kann ein asymmetrischer Quantentrog modelliert werden. Da die Elektronen sich nur in der xy-Ebene bewegen, wird der Gradient des Potentials in z-Richtung $\nabla_z V(\boldsymbol{r})$ in guter Nährerung durch den Erwartungswert des Gradienten ersetzt.

Nun kann der Rashba-Term vom Dresselhaus-Term unterschieden werden, zum einen, da die Inversionssymmetrie im Quantentrog auf die der Rashba-Term sensitiv ist, von außen durch ein Gate verändert werden kann, während der Beitrag des BIA-Terms unverändert bleibt, und zum anderen, da der SIA-Term isotrop in der Ebene des 2DES ist, während der Dresselhaus-Term von der Kristallrichtung abhängt. Die Unterscheidung des dominierenden Terms ist für die richtige Interpretation der Meßdaten aus Magnetotransportexperimenten wichtig [Tara02].

In schmalen asymmetrischen Quantentrögen dominiert nach [Lomm88, Luo90, Silv94] der Rashba-Term. In vielen Experimenten wurde versucht, den Vorfaktor des Rashba-Terms experimentell zu bestimmen. Die verwendeten Systeme sind im Aufbau der Heterostuktur verschieden. In auf InAs-basierenden Systemen wurde $\alpha_z = \tilde{\alpha}\hbar\nabla_z V(\boldsymbol{r})$ in der Größenordnung von 10^{-11} eVm in [Das89, Luo90] bestimmt. In [Nitt97, Heid98, Hu99] wurde diese

[2]Der Rashba-Term wird oft auch mit SIA-Term (structur inversion asymmetry) und der Dresselhaus-Term mit BIA-Term (bulk inversion asymmetry) bezeichnet

Größenordnung bestätigt und es konnte nachgewiesen werden, daß die Stärke der Spin-Bahn-Wechselwirkung durch ein Gate verändert werden kann.

Der Term $-i\tilde{\gamma}\,(\boldsymbol{\nabla} V \cdot \boldsymbol{\pi})$, der sogenannte Darwin-Term, beschreibt eine Wechselwirkung zwischen Impuls und Potentialgradienten, die vom Spin unabhängig ist.

Die Envelope-Funktions-Näherung ermöglicht, das Kristallgitter in der Beschreibung des 2DES mit effektiven Größen zu erfassen. Aus dem vorgestellten Vier-Band-Modell wird deutlich, daß für die Elektronen im Leitungsband neben der effektiven Masse und dem effektiven g-Faktor in asymmetrischen Potentialtöpfen eine Spin-Bahn-Wechselwirkung existiert. Diese kommt dadurch zustande, daß durch die Brechung der Translationssymmetrie in der Halbleiter-Heterostruktur Elektronen- und Lochzustände vermischt werden. Hierbei besteht eine Analogie zur Ableitung der Spin-Bahn-Wechselwirkung für geladene Teilchen im elektrischen Feld aus der Dirac-Gleichung [Zawa70].

Im lateralen Halbleiter-Übergitter wird den Kristallelektronen im 2DES in der Ebene der freien Bewegung ein künstliches periodische Potential aufgeprägt, was wiederum zu einer Bandstruktur führt. Im Vergleich zum periodischen Potential des Kristallgitters, das durch die Atomrümpfe gebildet wird, ist das Übergitterpotential schwach und führt zu Energielücken im meV-Bereich anstatt im eV-Bereich. Weiter ist die Brillouin-Zone des Übergitters kleiner als die des zugrundeliegenden Halbleiterkristalls. Die Bandstruktur zur Beschreibung des Übergitters wird deshalb Minibandstruktur genannt. Bei der Beschreibung des Magnetotransports in lateralen Halbleiter-Übergittern wird in den folgenden Kapiteln der Einfluß des Halbleiterkristalls durch die Effektiv-Massen-Näherung beschrieben und für die Berücksichtigung des Übergitter die Minibandstruktur verwendet.

Der Ladungstransport im Halbleiter-Übergitter findet nicht ausschließlich in Zuständen nahe der Minibandkanten statt und in den später betrachteten Halbleiter-Übergittern sind mehrere Minibänder beteiligt, so daß die Beschreibung der Minibandstruktur des lateralen Übergitters mit einer effektiven Miniband-Masse nicht möglich ist. Nur für extrem kurzperiodische Übergitter [Deut01a], wenn der Ladungstransport im untersten Miniband stattfindet, wird die Effektiv-Massen-Näherung auch zur Beschreibung des Übergitters wieder möglich.

1.3 Kristallelektronen und Magnetfeld

Bei der Beschreibung des Magnetotransports im nächsten Kapitel wird der Einfluß des Magnetfeldes $\boldsymbol{B}$ im Hamiltonian durch die Peierls-Ersetzung

$\boldsymbol{\pi} \rightarrow \boldsymbol{p} + e\boldsymbol{A}$ über das Vektorpotential $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B}$ berücksichtigt und die Elektronendispersion wird direkt abhängig vom Magnetfeld. Die Zustandsdichte freier Elektronen spaltet im Magnetfeld in diskrete Landau-Niveaus auf. Durch die periodische Modulation wird die Entartung der Landau-Niveaus aufgehoben und es entstehen Landau-Bänder, die magnetische Bandstruktur. Dieses Konzept der magnetischen Bandstruktur eignet sich für den Fall, wenn periodisches Potential und Magnetfeld für die Bewegung der Elektronen von vergleichbarer Bedeutung sind.

Geht man aber davon aus, daß die Bewegung der Elektronen im Kristall hauptsächlich durch das periodische Potential des Kristallgitters geprägt ist so kann das Magnetfeld zunächst nur als Störung betrachtet werden.

Für Elektronen im Kristall läßt sich die Veränderung der Zustandsdichte durch das Magnetfeld über folgende Betrachtung erfassen [Ashc76]. Das periodische Potential ist in der Energiedispersion $E(\boldsymbol{k})$ berücksichtigt. Die klassischen Bewegungsgleichungen

$$\hbar \frac{d\boldsymbol{k}}{dt} = -e\,(\boldsymbol{v}(\boldsymbol{k}) \times \boldsymbol{B}) \tag{1.23}$$

und

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{\hbar} \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{k}} E(\boldsymbol{k}) \tag{1.24}$$

machen deutlich, daß sich die Elektronen im $\boldsymbol{k}$-Raum in Ebenen senkrecht zum Magnetfeld auf Äquipotentiallinien der Energiedispersion bewegen. Da die Komponente des Wellenvektors parallel zur Magnetfeldrichtung konstant bleibt, ist die nachfolgende Argumentation für ein zweidimensionales System ausgeführt. Sie lässt sich aber auf dreidimensionale Systeme übertragen. Im 3D-Fall sind die Äquipotentiallinien auf denen sich die Elektronen im $\boldsymbol{k}$-Raum bewegen durch die Schnittlinien von Ebenen senkrecht zum Magnetfeld mit der Fermi-Fläche definiert. Die für die nachfolgende Argumentation wichtigen Flächen im $\boldsymbol{k}$-Raum sind dann die Extremalflächen die von Schnittlinien umfaßt werden.

Im zweidimensionalen System sind die Äquipotentiallinien auf denen sich die Elektronen durch das Magnetfeld bewegen bereits eindeutig definiert. Die Bahnen im Ortsraum erhält man durch Drehung um 90° bzw. $\pi/2$ und Skalierung mit $\lambda_c^2 = \frac{\hbar}{eB}$. Die Wirkung der Bahn kann gemäß der Bohr-Sommerfeld-Quantisierungsbedingung nur diskrete Werte annehmen. Diese Quantisierung der Wirkung führt zu einem energetischen Abstand zweier Energieniveaus $E_{\nu+1}$ und E_ν von

$$E_{\nu+1} - E_\nu = \frac{h}{T(E_\nu)}. \tag{1.25}$$

Aus den Bewegungsgleichungen (1.23) und (1.24) läßt sich die Umlauffrequenz zu

$$T(E) = \frac{\hbar^2}{eB} \frac{\partial A(E)}{\partial E} \tag{1.26}$$

errechnen, wobei $A(E)$ die im $\boldsymbol{k}$-Raum umschlossene Fläche der Bahn eines Teilchens mit der Energie E ist. Für hohe Quantenzahlen läßt sich die Ableitung der Fläche in Gleichung (1.26) als Differenzenquotient ausdrücken.

$$\frac{\partial A(E)}{\partial E} \simeq \frac{A(E_{\nu+1}) - A(E_\nu)}{E_{\nu+1} - E_\nu}. \tag{1.27}$$

Für die Differenz der Flächen ΔA die von Bahnen umschlossen werden, die zu benachbarten Energien gehören, gilt

$$\Delta A = \frac{2\pi eB}{\hbar}. \tag{1.28}$$

Damit läßt sich die Fläche im $\boldsymbol{k}$-Raum bei einer erlaubten Energie ausdrücken gemäß

$$A(E_\nu) = (\nu + \lambda)\Delta A \tag{1.29}$$

mit $\nu = 1, 2, \ldots$, wobei die Konstante λ dabei unabhängig von ν ist. Jetzt können die erlaubten Energieniveaus aus Gleichung (1.25) mit der im $\boldsymbol{k}$-Raum umschlossenen Fläche verknüpft werden.

Viele physikalische Eigenschaften des Elektronensystems hängen von der Zustandsdichte an der Fermi-Energie E_F ab. Ein Magnetfeld führt nun dazu daß die Zustandsdichte an der Fermi-Kante mit $1/B$ oszilliert, und zwar mit der Frequenz [Onsa52]

$$\Delta_{1/B} = \frac{2\pi e}{\hbar} \frac{1}{A(E_F)}. \tag{1.30}$$

Die Oszillation in der Zustandsdichte führt zum Beispiel in der Leitfähigkeit zu Shubnikov-de Haas-Oszillationen oder in der Magnetisierung zum de Haas-van Alphen-Effekt. Die Frequenz der Oszillation gibt nach der Beziehung (1.30) Auskunft über die Fermi-Fläche und somit über die Bandstruktur.

Das semiklassische Bild von Elektronen, die durch das Magnetfeld entlang von Äquipotentiallinien der Bandstruktur im $\boldsymbol{k}$-Raum getrieben werden, trifft für den Grenzfall sehr kleiner Magnetfelder zu. Die Landau-Aufspaltung muß gegenüber den Energielücken in der Bandstruktur durch das periodische Potential vernachlässigbar sein [Cohe61]. Für höhere Magnetfelder wird

die Veränderung der Bandstruktur durch das Magnetfeld relevant. Diese Veränderung der Energiedispersion durch das Magnetfeld kann wiederum näherungsweise beschrieben werden, indem mit steigendem Magnetfeld das Tunneln der Elektronen zwischen verschiedenen Bändern in der Theorie berücksichtigt wird. Das vom Magnetfeld induzierte Tunneln wird magnetischer Durchbruch genannt.

Durch ein periodisches Potential reißen an den Brillouin-Zonenrändern Lücken in der Energiedispersion auf, die darauf beruhen, daß die Elektronen in einem periodischen Potential Bragg-reflektiert werden können. Dies führt zur Bandstruktur. Für die Wahrscheinlichkeit P für fast freie Elektronen mit der Fermi-Energie E_F am Brillouin-Zonenrand nicht Bragg-reflektiertzu werden, sondern eine Energielücke Δ zu durchtunneln, wurde zu

$$P = \exp\left(-\frac{\pi\Delta^2}{4\hbar\omega_\mathrm{c}E_\mathrm{F}\sin(2\theta)}\right) \tag{1.31}$$

aus verschiedenen Modellen [Star67] abgeleitet. Der Winkel θ definiert den $\boldsymbol{k}$-Vektor des Elektrons und entspricht dem Winkel, unter dem das Elektron am Brillouin-Zonenrand Bragg-reflektiert würde. Mit der Zyklotronfrequenz $\omega_c = \frac{eB}{m}$ steigt die Tunnel-Wahrscheinlichkeit mit dem Magnetfeld exponentiell an.

In Abbildung 1.4 sind die Fermi-Konturen für ein zweidimensionales Elektronengas in einem schwachen periodischen Potential skizziert. Das zugrundeliegende Energiespektrum wurde mit zwei Bändern, die energetisch um die Energie Δ getrennt sind, beschrieben. Ohne die Möglichkeit des Tunnelns können die Elektronen vom Magnetfeld nur entlang der geschlossenen Konturen C oder der offenen Konturen O und O' getrieben werden. Der magnetische Durchbruch erlaubt, daß die Elektronen von den offenen Bahnen O und O' in die geschlossenen Bahnen C und umgekehrt mit der Wahrscheinlichkeit P am Brillouin-Zonenrand tunneln. Damit sind für die Elektronen abhängig vom Magnetfeld verschiedene Bahnen möglich und die Abhängigkeit der Periodizität der Zustandsdichte-Oszillationen vom Magnetfeldbereich wird verständlich.

Für den Magnetotransport in lateralen Halbleiter-Übergittern liegen die Energieaufspaltung durch das Magnetfeld und die Energieaufspaltung durch das periodische Potential in der gleichen Größenordnung. Um beides gleichwertig zu berücksichtigen erfolgt die Beschreibung des Energiespektrums in Kapitel 3 mit der magnetischen Minibandstruktur. Dabei wird sowohl das Magnetfeld als auch das periodische Potential des Übergitters direkt im Systemhamiltonian berücksichtigt. In der magnetischen Minibandstruktur ist damit sowohl die Quantisierung der Wirkung gemäß Bohr-Sommerfeld, als auch der magnetische Durchbruch enthalten. Für schwache Magnetfelder

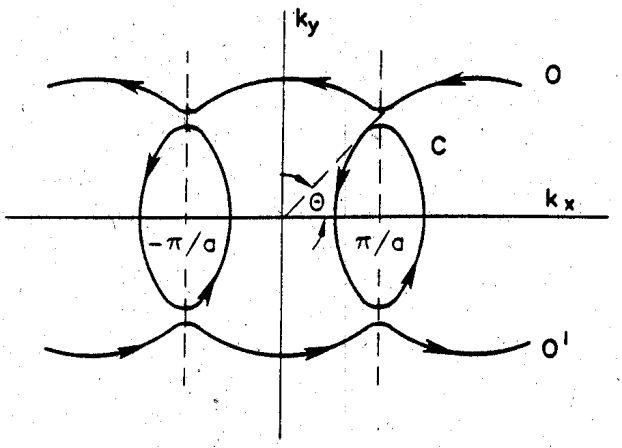


Abbildung 1.4: Energiekonturen an der Fermi-Energie für ein moduliertes zweidimensionales Elektronensystem. Die offenen Trakjektorien mit O und O' bezeichnet, die im realen Raum in y-Richtung laufen, entstehen durch Bragg-Reflexion unter dem Winkel θ. Die geschlossenen Bahnen sind mit C bezeichnet. (aus [Stre90])

kann das laterale Halbleiter-Übergitter allerdings ebenfalls im vorgestellten semiklassischen Bild beschrieben werden, das auf der Bandstruktur im Nullmagnetfeld aufbaut und das Magnetfeld als Störung behandelt. In Kapitel 3 werden beide Bilder miteinander verknüpft.

KAPITEL 2

Theorie des Magnetotransports

In diesem Kapitel soll zunächst die klassische Beschreibung des Elektronentransports nach Drude für ein zweidimensionales Elektronensystem erläutert werden, die bereits den prinzipiellen Verlauf der Leitfähigkeits- und Widerstandskomponenten in Abhängigkeit vom Magnetfeld wiedergibt. Hier wird deutlich, daß Streuung wesentlich zur Modellierung der Leitfähigkeit gehört. Anschließend wird die Kubo-Formel behandelt, mit der aus den Gleichgewichtseigenschaften des Systems die lineare Antwort auf ein äußeres Feld berechnet werden kann. In der quantenmechanischen Beschreibung wird die Streuung mittels Störstellen-gemittelter Greenscher Funktionen berücksichtigt. Ein Vergleich zwischen Drude-Resultat und quantenmechanischem Resultat rundet das Kapitel ab.

2.1 Klassische Beschreibung (Drude-Theorie)

Die Drude-Theorie [Drud1900] ist eine klassische Transporttheorie, in der die kinetische Gastheorie auf die Leitfähigkeit in Metallen angewandt wurde. Mit diesem Modell konnte das Ohmsche Gesetz erklärt werden, nachdem J.J. Thompson drei Jahre zuvor 1897 das Elektron entdeckt hatte. Die Elektronen werden in diesem Modell als geladene Billiardkugeln betrachtet, die

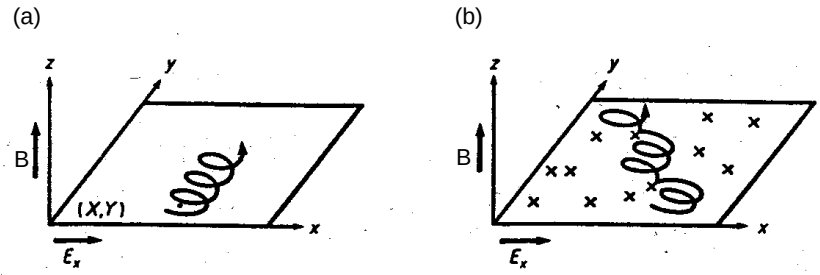


Abbildung 2.1: Bahn eines Elektrons in gekreutztem elektrischen (hier E_x) und magnetischen Feld (hier B). Abbildung (a) zeigt die Bewegung ohne Streuung an Störstellen, während in (b) das Elektron an Störstellen, die durch Kreuze angedeutet sind, gestreut wird. Erst durch die Streuung an diesen Störstellen bewegt sich das Elektron entlang des elektrischen Feldes (aus [Aoki87]).

sich getrieben durch angelegte elektromagnetische Felder gemäß den klassischen Bewegungsgleichungen bewegen und nur von Stößen an Störstellen des Kristalls, wo sie instantan ihre Geschwindigkeit ändern, aus der Bahn geworfen werden. Auf Ladungsträger mit der Ladung $Q = -e$ und der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ wirkt im Magnetfeld $\boldsymbol{B}$ und elektrischem Feld $\boldsymbol{E}$ die Lorentz-Kraft $\boldsymbol{K}_\mathrm{L}$ und es gilt die Newtonschen Bewegungsgleichung

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{K}_\mathrm{L} = -e(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}). \tag{2.1}$$

Aus dieser Bewegungsgleichung folgt für ein 2DES, daß ein Magnetfeld $\boldsymbol{B} = (0, 0, B)$ senkrecht zur Bewegungsebene die Elektronen auf Kreisbahnen zwingt. Diese geschlossenen Trajektorien im Magnetfeld werden Zyklotronbahnen genannt. Ein in x-Richtung angelegtes elektrisches Feld $\boldsymbol{E} = (E_x, 0, 0)$ treibt den Mittelpunkt dieser Zyklotronbewegung mit der Geschwindigkeit $v_\mathrm{D} = E_x/B$ senkrecht zum angelegten elektrischen Feld. Dies wird $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}$-Drift genannt und führt zur Hallspannung. Abbildung 2.1(a) skizziert im klassischen Bild eine Elektronentrajektorie in gekreuztem elektrischen und magnetischen Feld. Erst durch Streuung an Störstellen, siehe Abbildung 2.1(b), entsteht auch Ladungstransport entlang der Richtung des angelegten elektrischen Feldes.

In der klassischen Beschreibung wirkt die Streuung als Dämpfung, die verhindert, daß das Elektron unbeschränkt beschleunigt wird. Mit der mittleren freien Flugzeit τ der Elektronen zwischen zwei Stößen folgt der Dämpfungs-

term

$$\langle \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} \rangle = -\frac{m\boldsymbol{v}}{\tau}, \tag{2.2}$$

und im Gleichgewicht $\langle \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} \rangle = 0$ gilt nun für die Elektronen im System:

$$\frac{m\boldsymbol{v}}{\tau} = -e(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}). \tag{2.3}$$

Für den Fall des 2DES in der xy-Ebene und Magnetfeld senkrecht dazu ergeben sich daraus für den Zusammenhang zwischen Stromdichte[1] $\boldsymbol{j} = -en\boldsymbol{v}$, die von der Elektronendichte n abhängt, und dem elektrischen Feld folgende Beziehungen:

$$E_x = \frac{m}{ne^2\tau}\, j_x + \frac{B}{ne} j_y \tag{2.4}$$

$$E_y = -\frac{B}{ne} j_x + \frac{m}{ne^2\tau}\, j_y. \tag{2.5}$$

Mit Magnetfeld muß der Widerstand demnach als Tensor geschrieben werden

$$\varrho = \begin{pmatrix} \varrho_{xx} & \varrho_{xy} \\ \varrho_{yx} & \varrho_{yy} \end{pmatrix}, \tag{2.6}$$

um den Zusammenhang zwischen Strom und Spannung bzw. elektrischem Feld

$$\boldsymbol{E} = \varrho\, \boldsymbol{j} \tag{2.7}$$

zu beschreiben.

Die Diagonalelemente $\varrho_{xx}, \varrho_{yy}$ heißen Longitudinalwiderstand und die Nichtdiagonalelemente $\varrho_{xy}, \varrho_{yx}$ heißen Transversalwiderstand. Aus den Gleichungen (2.4) und (2.5) ist leicht zu ersehen, daß die Onsager-Casimir Relationen [Onsa31, Casi45] $\varrho_{xy}(B) = \varrho_{yx}(-B)$ erfüllt sind. Die Widerstandskomponenten lauten:

$$\varrho_{xx} = \varrho_{yy} = \frac{m}{ne^2\tau} \qquad \text{und} \qquad \varrho_{xy} = -\varrho_{yx} = \frac{B}{en}. \tag{2.8}$$

Die Leitfähigkeitsmatrix erhält man durch Tensorinversion

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} = \frac{1}{\varrho_{xx}\varrho_{yy} - \varrho_{xy}\varrho_{yx}} \begin{pmatrix} \varrho_{yy} & -\varrho_{yx} \\ -\varrho_{xy} & \varrho_{xx} \end{pmatrix}. \tag{2.9}$$

[1] Für den hier behandelten Fall des 2DES sind die Einheiten der Stromdichte $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$. Die zweidimensionale Elektronendichte wird in $\frac{1}{\mathrm{m}^2}$ angegeben.

Für das homogene System, in dem x- und y-Richtung äquivalent sind, ergeben sich die Leitfähigkeitskomponenten zu:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \frac{\sigma_0}{1 + (\omega_c \tau)^2}, \quad \sigma_{xy} = -\sigma_{yx} = \frac{\sigma_0 \omega_c \tau}{1 + (\omega_c \tau)^2} \tag{2.10}$$

mit der Leitfähigkeit $\sigma_0 = en\mu$, der Zyklotronfrequenz $\omega_c = \frac{eB}{m}$ und der Beweglichkeit der Ladungsträger $\mu = \frac{\tau e}{m}$. Im einfachsten Fall wird angenommen, daß die mittlere Stoßzeit τ unabhängig vom Magnetfeld ist und sie sich so aus der Nullfeldbeweglichkeit berechnen läßt. Für $\omega_c \tau > 1$ vollendet das Elektron bereits einen ganzen Zyklotronradius bevor es gestreut wird. Für diesen Fall wird die quantenmechanische Quantisierung der geschlossenen Bahn relevant. Dies führt zu Shubnikov-de Haas (SdH) Oszillationen, die erst in der quantenmechanischen Beschreibung erfaßt sind.

Im klassischen Bild werden zwei Aspekte der Streuung deutlich. Ohne Magnetfeld ($B = 0$), wenn die Richtung des Ladungstransports sich mit der Richtung des angelegten elektrischen Feldes deckt, führt Streuung zu einer Begrenzung der Leitfähigkeit. Mit Magnetfeld allerdings, wenn die Leitfähigkeit durch einen Tensor beschrieben ist, ermöglicht Streuung erst einen Ladungstransport entlang des elektrischen Feldes.

Im nächsten Abschnitt wird die Leitfähigkeit quantenmechanisch über die Auswertung der Kubo-Formel beschrieben. Dazu ist es somit notwendig die Streuung an Störstellen zu berücksichtigen, um eine endliche Leitfähigkeit zu erhalten.

2.2 Quantenmechanische Beschreibung

2.2.1 Kubo-Formel

Unter Kubo-Formel [Kubo57] versteht man allgemein die Beschreibung der linearen Antwort eines Systems auf die Störung durch eine äußere Kraft [Maha81]. Dazu werden die Gleichgewichtseigenschaften des ungestörten Systems bestimmt und die äußere Kraft in Störungstheorie berücksichtigt. Hier geht es speziell um die Leitfähigkeit, also um die Proportionalität zwischen angelegtem elektrischen Feld und Strom. Während in der klassischen Beschreibung der von den Ladungsträgern getragene Strom berechnet wird, liefert die Kubo-Formel tatsächlich den Proportionalitätsfaktor zwischen elektrischem Feld $\boldsymbol{E}$ und Stromdichte $\boldsymbol{j}$. Zunächst ist der nichtlokale Leitfähigkeitstensor eines zweidimensionalen Systems durch die Beziehung

$$j_\mu(\boldsymbol{r}) = \int d\boldsymbol{r'}\, \sigma_{\mu\nu}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r'})\, E_\nu(\boldsymbol{r'}) \tag{2.11}$$

definiert. Die Indizes bezeichnen die Raumrichtungen $\mu, \nu \in \{x, y\}$. Die quantenmechanische Kubo-Formel beschreibt den makroskopischen Leitfähigkeitstensor, der die räumlich gemittelte Stromdichte als Response auf ein räumlich konstantes mittleres elektrisches Feld angibt. Mit dem ortsabhängigen Leitfähigkeitstensor aus Gleichung (2.11) hängt er für eine Probe mit den Abmessungen L_x und L_y über

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{L_x L_y} \int d\boldsymbol{r}\, d\boldsymbol{r'}\, \sigma_{\mu\nu}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r'}) \tag{2.12}$$

zusammen.

Die Kubo-Greenwood-Formel für den makroskopischen Leitfähigkeitstensor eines zweidimensionalen Elektronensystems bei Streuung an Störstellen lautet (vergleiche z.B. [Stre75])

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{ie^2\hbar}{L_x L_y} \int dE f_0(E) \left\langle \mathrm{Sp} \left\{ v_\mu \frac{d\mathcal{G}^+}{dE} v_\nu \delta(E - \mathcal{H}) - v_\mu \delta(E - \mathcal{H}) v_\nu \frac{d\mathcal{G}^-}{dE} \right\} \right\rangle_{\mathrm{I}}, \tag{2.13}$$

wobei v_μ die Komponenten des Geschwindigkeitsoperators sind und $\mathcal{G}^\pm$ die retardierte (+) bzw. avancierte (-) Greensche Funktion für das System mit einer speziellen Störstellenkonfiguration, beschrieben durch den Hamiltonian $\mathcal{H}$. Die Klammern $\langle ... \rangle_{\mathrm{I}}$ bedeuten, daß für die Leitfähigkeit, die unabhängig von der speziellen Störstellenkonfiguration sein soll, über alle Konfigurationen gemittelt werden muß. Die Berücksichtigung der Störstellen hat sich bereits in der klassischen Beschreibung als wesentlich herausgestellt. Erst die Mittelung über alle Störstellenkonfigurationen führt in der quantenmechanischen Beschreibung zur Irreversibilität und zu einer Art Dissipation, d.h. Energieeigenzustände bekommen eine endliche Lebensdauer. Von der Störstellenmittelung separiert ist die Temperaturmittelung, die in der Verteilungsfunktion

$$f_0(E) = \frac{1}{e^{\frac{E - E_{\mathrm{F}}}{k_{\mathrm{B}} T}} + 1}, \tag{2.14}$$

d.h. der Fermi-Funktion mit E_{F} als Fermi-Energie, der Temperatur T und der Boltzmann-Konstante k_{B}, beinhaltet ist.

Die Greensche Funktion (zum Formalismus siehe [Abri63, Econ83, Doni98]) ist in Energiedarstellung $\mathcal{G}(E)$ definiert über die Resolvente

$$(E - \mathcal{H})\, \mathcal{G}(E) = 1. \tag{2.15}$$

Daraus lässt sich die retardierte Greensche Funktion $\mathcal{G}^+(E)$ und avancierte

Greensche Funktion $\mathcal{G}^-(E)$ über

$$\mathcal{G}^+(E) = \mathcal{G}(E + i\delta) = \frac{1}{E + i\delta - \mathcal{H}} \tag{2.16}$$

$$\mathcal{G}^-(E) = \mathcal{G}(E - i\delta) = \frac{1}{E - i\delta - \mathcal{H}} \tag{2.17}$$

mit $\delta \to 0^+$ ableiten. Der Imaginärteil führt dazu, daß in der Zeitentwicklung die retardierte Greensche Funktion $\mathcal{G}^+$ kausal und die avancierte $\mathcal{G}^-$ akausal ist. Die Spektralfunktion ergibt sich aus den so definierten Greenschen Funktionen über

$$\mathcal{A}(E) = \frac{i}{2\pi}\left(\mathcal{G}^+(E) - \mathcal{G}^-(E)\right) = -\frac{1}{\pi}\,\mathrm{Im}\{\mathcal{G}^+(E)\}\,, \tag{2.18}$$

und die Zustandsdichte $D(E)$ als Spur über die Spektralfunktion,

$$D(E) = \mathrm{Sp}\{\mathcal{A}(E)\}. \tag{2.19}$$

Die Leitfähigkeit aus Gleichung (2.13) läßt sich durch einen symmetrischen $\Phi^s_{\mu\nu} = \Phi^s_{\nu\mu}$ und antisymmetrischen Teil $\Phi^a_{\mu\nu} = -\Phi^a_{\nu\mu}$ [Gerh75] ausdrücken als:

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{e^2\hbar}{4\pi L_x L_y}\int dE\left(-\frac{df_0}{dE}\,\Phi^s_{\mu\nu}(E) + f_0(E)\,\Phi^a_{\mu\nu}(E)\right), \tag{2.20}$$

mit

$$\Phi^s_{\mu\nu} = \mathrm{Sp}\left\{v_\mu\left(2F^{+-}_\nu - F^{++}_\nu - F^{--}_\nu\right)\right\} \tag{2.21}$$

$$\Phi^a_{\mu\nu} = \mathrm{Sp}\left\{v_\mu\left(D^-_\nu - D^+_\nu\right)\right\} \tag{2.22}$$

Hierbei werden mit $F^{\pm\pm}_\mu(E, E')$ die Vertexfunktionen[2] als

$$F^{\sigma\sigma'}_\mu(E, E') = \left\langle \mathcal{G}^\sigma(E)\, v_\mu\, \mathcal{G}^{\sigma'}(E')\right\rangle_{\mathrm{I}} \tag{2.23}$$

definiert, die nun die Störstellenmittelung enthalten und $D^\pm_\mu$ besteht aus Ableitungen der Vertexfunktionen,

$$D^\sigma_\mu = \left\{\left(\tfrac{\partial}{\partial E} - \tfrac{\partial}{\partial E'}\right)F^{\sigma\sigma}_\mu(E, E')\right\}\Big|_{E'=E}. \tag{2.24}$$

Nun müssen die Greenschen Funktionen berechnet und die Störstellenmittelung ausgeführt werden. Die Streuung an Störstellen wird dabei genähert, was im nächsten Unterabschnitt ausgeführt ist.

[2] Vertexfunktionen mit identischem Energieargument $F^{\sigma\sigma'}_\mu(E, E)$ sind mit $F^{\sigma\sigma'}_\mu$ bezeichnet

2.2.2 Selbstkonsistente Bornsche Näherung (SCBA)

Es ist aufwendig, die Greensche Funktion jeweils für unterschiedliche Störstellenkonfigurationen zu berechnen und anschließend darüber zu mitteln. Da die Leitfähigkeit nicht von der speziellen Störstellenkonfiguration abhängt und man nur an den mittleren Eigenschaften des Systems interessiert ist, bietet es sich in erster Näherung an, anstatt der nachträglichen Störstellenmittelung die Greensche Funktion $\mathcal{G}$ durch die Störstellen-gemittelte Greensche Funktion $G = \langle \mathcal{G} \rangle_{\mathrm{I}}$ zu ersetzen. Diese kann in der selbstkonsistenten Bornschen Näherung (SCBA) berechnet werden. Die Indices für die retardierte oder avancierte Funktion werden im folgenden unterdrückt.

Der Hamiltonoperator $\mathcal{H}$ für eine bestimmte Störstellenkonfiguration setzt sich zusammen aus Hamiltonoperator H_0, der das System ohne Störstellen beschreibt, und dem Störstellenpotential V_{I}. Wird das Störstellenpotential von identischen Störstellen mit dem Potential $v_{\mathrm{I}}(\boldsymbol{r})$ an den zufälligen Orten $\boldsymbol{R}_i$ gebildet, ergibt sich V_{I} zu:

$$V_{\mathrm{I}}(\boldsymbol{r}) = \sum_i v_{\mathrm{I}}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{R}_i) \tag{2.25}$$

Mit der Greenschen Funktion $G_0(E)$ des Systems ohne Störstellen, definiert über

$$(E - H_0)G_0 = 1, \tag{2.26}$$

läßt sich Gleichung (2.15) umschreiben zur Dyson-Gleichung [Doni98]

$$\mathcal{G} = G_0 + G_0 \, V_{\mathrm{I}} \, \mathcal{G}. \tag{2.27}$$

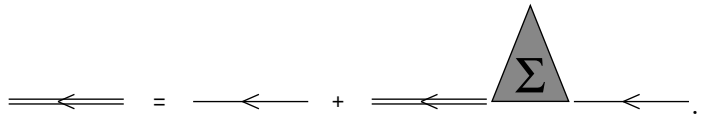
Dies ist eine Integralgleichung für die Greensche Funktion $\mathcal{G}$, die iterativ gelöst werden kann. Mit der Interpretation der Greenschen Funktionen als Propagatoren beschreibt die Dyson-Gleichung die Ausbreitung von Partialwellen von Streuzentrum zu Streuzentrum. Mittelt man in dieser Gleichung über die Störstellenkonfigurationen

$$\langle \mathcal{G} \rangle_{\mathrm{I}} = G_0 + G_0 \langle V_{\mathrm{I}} \mathcal{G} \rangle_{\mathrm{I}} \tag{2.28}$$

und ersetzt das reelle Potential V_{I} durch eine komplexe Selbstenergie Σ, so erhält man

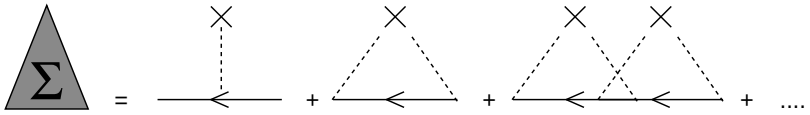
$$G = G_0 + G_0 \, \Sigma \, G, \tag{2.29}$$

wobei $G = \langle \mathcal{G} \rangle_{\mathrm{I}}$ die gemittelte Greensche Funktion ist. In Diagrammen läßt sich diese Gleichung schreiben als

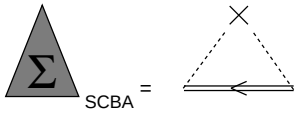


Der einfache Pfeil stellt den Propagator des Systems ohne Störstellen dar, der doppelte Pfeil bezeichnet den Störstellen-gemittelten Propagator im System und die Selbstenergie ist mit Σ gekennzeichnet.

Bislang werden die Störstellen in den Greenschen Funktionen noch exakt behandelt. Um einen Ausdruck zu erhalten, mit dem konkret gerechnet werden kann, wird die Störstellenstreuung genähert. Die Selbstenergie läßt sich nach verschiedenen Streuprozessen aufteilen. Die Streuung wird dabei mit den gestrichelten Linien dargestellt, die von den mit Kreuzen markierten Störstellen ausgehen.



Alle ungekreuzten Diagramme können aufsummiert werden bis auf die Mehrfachstreuung an einer Störstelle. Die selbstkonsistente Bornsche Näherung enthält folgende Graphen:



Diese Näherung heißt selbstkonsistent, da in die Selbstenergie die Störstellengemittelte Greensche Funktion eingeht, in der wiederum die Selbstenergie beinhaltet ist. Bei Entwicklung nach einem vollständigen Satz von Eigenfunktionen, die mit α, β bezeichnet sind, läßt sich somit die Selbstenergie in dieser Näherung schreiben als

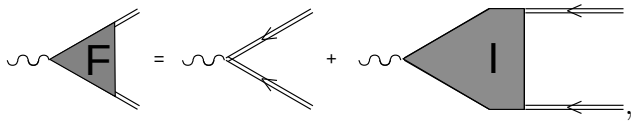
$$\Sigma_{\alpha\alpha'} = \sum_{\beta\beta'} \Gamma_{\alpha\beta\beta'\alpha'}\, G_{\beta\beta'} \tag{2.30}$$

mit

$$\Gamma_{\alpha\beta\beta'\alpha'} = \int \tfrac{dq^2}{(2\pi)^2} \left|\tilde{v}_{\mathrm{I}}(\boldsymbol{q})\right|^2 \langle\alpha|\, e^{i\boldsymbol{qr}}\, |\beta\rangle\, \langle\beta'|\, e^{-i\boldsymbol{qr}}\, |\alpha'\rangle\,. \tag{2.31}$$

Mit $\tilde{v}_{\mathrm{I}}(\mathbf{q})$ ist die Fourier-Transformation des Störstellenpotentials bezeichnet. Aus den Gleichungen (2.29) und (2.30) kann die Selbstenergie bestimmt, sowie anschließend die gemittelte Greensche Funktion angegeben werden.

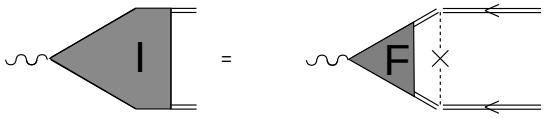
In der Leitfähigkeit treten die Greenschen Funktionen aber nicht separat auf, sondern das Störstellenmittel wird in den Vertexfunktionen über das Produkt zweier Greenscher Funktionen gebildet. Die Mittelung über ein Produkt zweier Größen ist im allgemeinen nicht gleich dem Produkt der gemittelten Größen. Analog zur Dyson-Gleichung läßt sich für die Vertexfunktionen, markiert mit F, die Bethe-Salpeter-Gleichung anhand von Diagrammen überlegen [Econ83]



wobei I einen Integraloperator symbolisiert und die Schlangenlinie den Geschwindigkeitsoperator bezeichnet. Dies läßt sich folgendermaßen als Integralgleichung formulieren:

$$F_\mu^{\sigma\sigma'} = G^\sigma \, v_\mu \, G^{\sigma'} + G^\sigma \, I[F_\mu^{\sigma\sigma'}] \, G^{\sigma'} \tag{2.32}$$

Der zweite Term wird Vertexkorrektur genannt, worin $I[...]$ den Integraloperator darstellt. Wird der Integraloperator konsistent zur SCBA in Gleichung (2.30) behandelt, müssen folgende Diagramme berücksichtigt werden:



Die Vertexkorrekturen werden z.B. bei der Beschreibung der schwachen Lokalisierung ([Ande58] und z.B. [Naga82]) im 2DES wichtig, da die Streuung über die Näherung der SCBA hinaus berücksichtigt werden muß [Alts85].

Bei der Lösung der Gleichungen (2.29) und (2.30) sind in räumlich homogenen Systemen ohne Magnetfeld die Zustände $\{\alpha\}$ ebene Wellen und sowohl Selbstenergie als auch Greensche Funktionen sind somit gleichzeitig in den selben Quantenzahlen diagonal. Dies gilt auch für das System im Magnetfeld, bei Rotationssymmetrie des Störstellenpotentials [Keit67, Wagn90]. Für kurzreichweitige Störstellenpotentiale (δ-Streuer) wird die Selbstenergie darüber hinaus Quantenzahl-unabhängig. Für eine Quantenzahl-unabhängige Selbstenergie läßt sich das Verschwinden der Vertexkorrekturen in (2.32) beweisen [Gerh75], wenn die Vertexkorrektur aus den für die SCBA angegebenen Diagrammen besteht.

Für das zweidimensionale Elektronengas im senkrechten Magnetfeld mit den Energieeigenwerten $E_n = \hbar\omega_c(n + \frac{1}{2})$ berechnet sich die Selbstenergie aus

$$\Sigma^+ = \Gamma^2 \sum_n G_n^+ \tag{2.33}$$

und

$$G_n^+ = \frac{1}{E - E_n - \Sigma^+}. \tag{2.34}$$

mit

$$\Gamma^2 = \frac{1}{2\pi}\hbar\omega_c\frac{\hbar}{\tau}, \tag{2.35}$$

wobei τ die Relaxationszeit für SCBA ohne magnetisches Feld ist. Für kurzreichweitige Störstellen ist diese Relaxationszeit τ identisch mit der mittleren Streuzeit aus der Drude Theorie in Gleichung (2.10) und kann über die Nullfeldbeweglichkeit berechnet werden. Für $B \to 0$ geht so das SCBA Resultat in das Drude Resultat über [Ando82]. Damit der Realteil der Selbstenergie, die aus den Gleichungen (2.33) und (2.34) selbstkonsistent bestimmt wird, nicht divergiert, muß eine Cut-off-Energie eingeführt werden, die aber so gewählt werden kann, daß sie das Ergebnis nicht beeinflußt.

Innerhalb der SCBA läßt sich die Zustandsdichte nach Gleichung (2.24) durch die Selbstenergie ausdrücken:

$$D(E) = \sum_\alpha A_\alpha(E) = \sum_\alpha \frac{1}{\pi}\mathrm{Im}\left\{G_\alpha^+(E)\right\} = -\frac{1}{(\pi\lambda_c\Gamma)^2}\,\Sigma^+. \tag{2.36}$$

Die beschriebene Behandlung der Störstellenstreuung gilt für das homogene 2DES. Für die lateral modulierten Übergitter verändern sich die Eigenfunktionen und die Selbstenergie ist nicht länger Quantenzahl-unabhängig. Man findet keine Basis mehr, in der Selbstenergie und Greensche Funktionen gleichzeitig diagonal in den selben Quantenzahlen sind. Allerdings hat sich die Näherung der Selbstenergie als Quantenzahl-unabhängig auch für modulierte Systeme bewährt [Zhan90, Pfan92, Silb94, Rott97] und wird dort unter dem Namen C-Zahl-Näherung (*complex number approximation*) verwandt.

Ebenso wird für realistischere Störstellenpotentiale als die δ-Streuer die Selbstenergie Quantenzahl-abhängig und Vertexkorrekturen müssen berücksichtigt werden. Dies wurde in [Mano01, Gros01] untersucht. Es zeigt sich, daß dadurch die quantitative Übereinstimmung des berechneten Magnetowiderstandes im Vergleich zum Experiment verbessert werden kann. So war aus klassischen Rechnungen [Menn97] schon bekannt, daß die Berücksichtigung von anisotroper Streuung wesentlich für die Amplitude der Magnetowiderstandsoszillationen ist. Allerdings werden Phasenlage oder Periodizität von Oszillationen, die in dieser Arbeit in der Hauptsache untersucht werden, kaum beeinflußt.

In den Eigenfunktionen des 2DES im Magnetfeld, die über den Landau-Index n abzählbar sind, werden nun die Leitfähigkeiten ausgedrückt. Zur

longitudinalen Leitfähigkeit trägt nur der symmetrische Teil bei und zur Hall-Leitfähigkeit nur der asymmetrische. Es gilt:

$$\sigma_{\mu\mu} = \frac{e^2\pi\hbar}{L_x L_y} \int dE(-\frac{df_0}{dE}) \sum_{n_1 n_2} |\langle n_1|v_\mu|n_2\rangle|^2 \, A_{n_1} \, A_{n_2} \tag{2.37}$$

und

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{2e^2\hbar}{L_x L_y} \int dE f_0 \sum_{n_1 n_2} \mathrm{Im}\left\{\langle n_1|v_\mu|n_2\rangle \, \langle n_2|v_\nu|n_1\rangle\right\} A_{n_1} \, \mathrm{Re}\{\frac{G^+_{n_2}}{dE}\}. \tag{2.38}$$

Die Geschwindigkeitsmatrixelemente sind in Anhang B für das zweidimensionale Elektronengas beschrieben. Es treten für das homogene System nur Matrixelemente auf, deren Landau-Index verschieden ist. Dieser Leitfähigkeitsbeitrag zur Longitudinalleitfähigkeit aus Gleichung (2.37) der durch *inter*-Miniband-Streuung ($n_1 \neq n_2$) getragen ist, ist näherungsweise proportional dem Quadrat der Zustandsdichte und wird Streuleitfähigkeit genannt. Im homogenen 2DES ist er der einzige Leitfähigkeitsmechanismus.

Für die später behandelten modulierten Systeme werden die Landau-Niveaus zu Landau-Minibändern, in denen bei starker Modulation verschiedene Landau-Niveaus gemischt sind. Abgezählt wird dann nicht mehr der Landau-Index sondern der Landau-Minibandindex. Da in den Zuständen der magnetischen Minibänder Zustände aus verschiedenen Landau-Niveaus des homogenen Systems gemischt sind, können Bandbeiträge entstehen, die durch die Gruppengeschwindigkeit in den Bändern bestimmt sind. Die Leitfähigkeit mit $n_1 = n_2$ aus Gleichung (2.37) wird dann Bandleitfähigkeit oder *intra*-Miniband-Leitfähigkeit genannt.

Bei der Berechnung der Hall-Leitfähigkeit ist die Ableitung der Greenschen Funktion wegen der nicht stetigen Ableitung der Selbstenergie in der Implementierung problematisch. Die Ableitung der Greenschen Funktion läßt sich folgendermaßen in ein Integral umschreiben:

$$\frac{dG^\sigma_\alpha}{dE} = \frac{d}{dE}\left(\frac{1}{E - E_\alpha - \Sigma^\sigma}\right) = -\left(\frac{1}{E - E_\alpha - \Sigma^\sigma}\right)^2 \left(1 - \frac{d\Sigma^\sigma}{dE}\right). \tag{2.39}$$

Die Ableitung der Selbstenergie läßt sich über die Selbstkonsistenzgleichung (2.33) ausdrücken, wobei die Summation über die Zustände mit der Zustandsdichte in ein Integral über die Energie umgewandelt wurde:

$$\frac{d\Sigma^\sigma}{dE} = -\Gamma^2 \int dE' \frac{D(E')}{(E - E' - \Sigma^\sigma)^2} \left(1 - \frac{d\Sigma^\sigma}{dE}\right) \tag{2.40}$$

$$1 - \frac{d\Sigma^\sigma}{dE} = \left(1 - \Gamma^2 \int dE' \frac{D(E')}{(E - E' - \Sigma^\sigma)^2}\right)^{-1} \tag{2.41}$$

Damit läßt sich die Ableitung der Greenschen Funktion darstellen zu

$$\frac{dG_\alpha^\sigma}{dE} = -\left(G_\alpha^\sigma\right)^2 \left(1 - \Gamma^2 \int dE' \frac{D(E')}{(E - E' - \Sigma^\sigma)^2}\right)^{-1}. \tag{2.42}$$

Diese Formel wird in der Implementierung verwendet, da die Integration problemloser berechnet werden kann als die Ableitung der Greenschen Funktionen direkt zu bilden.

Die Fermi-Energie wird so bestimmt, daß die Zustandsdichte nach Gleichung (2.36) gefaltet mit der Verteilungsfunktion (2.14) gleich der Elektronendichte n ist.

Jetzt können die Leitfähigkeitskomponenten aus den Gleichgewichtseigenschaften des 2DES unter Auswertung der Kubo-Formel gewonnen werden.

2.3 Vergleich von Drude-Theorie und Kubo-Formel mit SCBA

Bei Entkopplung der Landau-Niveaus ($\Gamma \ll \hbar\omega_c$) läßt sich die komplexe Selbstenergie für einen Zustand n bei der Energie E_n angeben zu:

$$\Sigma^+ = \Lambda_\Sigma + i\Gamma_\Sigma, \tag{2.43}$$

mit

$$\Lambda_\Sigma = \frac{E - E_n}{2} - \mathrm{Sg}\left\{E - (E_n - 2\Gamma)\right\} \mathrm{Re}\left\{\sqrt{\left(\frac{E - E_n}{2}\right)^2 - \Gamma^2}\right\} \tag{2.44}$$

$$\Gamma_\Sigma = -\mathrm{Sg}\left\{E - (E_n - 2\Gamma)\right\} \mathrm{Re}\left\{\sqrt{\Gamma^2 - \left(\frac{E - E_n}{2}\right)^2}\right\}. \tag{2.45}$$

Der Imaginärteil der Selbstenergie ist also in SCBA in diesem Grenzfall eine Halbellipse mit der Breite 4Γ und der Höhe Γ. Abbildung 2.2 zeigt die Selbstenergie für ein separates Niveau bei der Energie $E_n = 0$. In dieser Näherung kann die longitudinale Leitfähigkeit analytisch mit den Formeln von Argyres [Argy60] berechnet und für den Grenzfall $\hbar\omega_c/\Gamma \gg 1$ ergibt sich das Drude-Resultat, wenn die Relaxationszeit $\tau = \hbar/(2\Gamma)$ gesetzt wird. Für die SCBA ist nach Gleichung (2.35) die Streuverbreiterung Γ Magnetfeld-abhängig. Wird

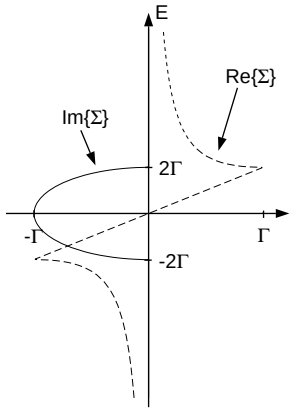


Abbildung 2.2: Realteil (gestrichelt) und Imaginärteil (durchgezogen) der Selbstenergie Σ^+ für isoliertes Landauniveau in SCBA.

die Magnetfeld-abhängige Streuzeit der SCBA in der Drude-Formel (2.10) verwandt, reproduziert sie die quantenmechanische Rechnung für hohe Magnetfelder und hohe Temperaturen bis auf einen geometrischen Faktor (app. SCBA).

In Abbildung 2.3 sind die verschiedenen Leitfähigkeits- und Widerstandskomponenten für das Drude-Modell und die quantenmechanische Rechung in SCBA für typische Parameter von GaAs verglichen. In der Longitudinalleitfähigkeit sind in der quantenmechanischen Rechnung die SdH-Oszillationen mit den Maxima bei den Magnetfeldern

$$B_n = \frac{\pi n_s \hbar}{e}(j + \frac{1}{2})^{-1} \; ; \; j = 0, 1, 2.. \tag{2.46}$$

zu erkennen. Die quantenmechanische Rechnung kann mit Gleichung (2.37) und (2.38) nicht ab $B = 0$ rechnen, da die Zahl der zu berücksichtigenden Landau-Niveaus zu groß wird. Für den Hochtemperaturfall läßt sich das SCBA Resultat mit der Drude-Leitfähigkeit und Magnetfeld-abhängiger Relaxationszeit (app. SCBA) gut beschreiben. Die dargestellte Fermi-Energie ist für kleine Magnetfelder konstant und beginnt bei hohen Magnetfeldern zwischen den Landau-Niveaus zu springen. Diese Oszillation verschwindet, wenn die diskreten Landau-Niveaus bei hoher Temperatur ausgeschmiert sind.

Die Hall-Leitfähigkeit σ_{xy} spiegelt den erwarteten Verlauf wieder und zeigt keine bemerkenswerten Strukturen. Aus den Leitfähigkeitskomponenten lässen sich die Widerstandskomponenten aus Gleichung (2.9) berechnen.

In der Auftragung des longitunalen Widerstandes wird deutlich, daß das SCBA Resultat erst für den Grenzfall $B \to 0$ das Drude-Resultat erreicht.

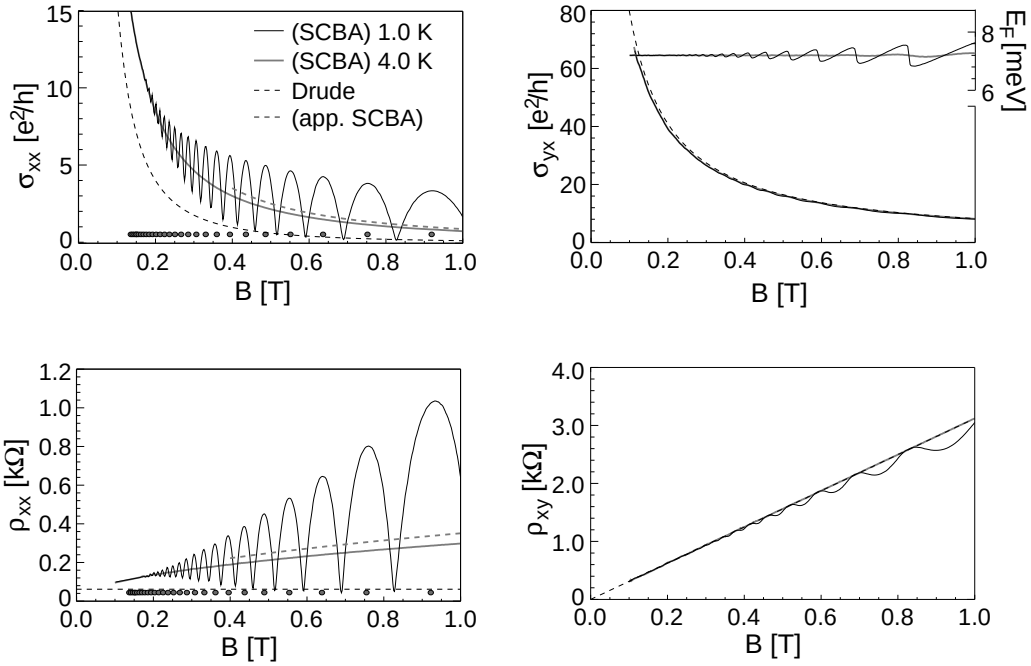


Abbildung 2.3: Vergleich der Leitfähigkeiten σ und Widerstände ϱ des Drude-Modells mit konstanter (Drude) und Magnetfeld-abhängiger (app. SCBA) Streuzeit mit der quantenmechanischen Berechung der Leitfähigkeit für zwei Temperaturen über die Kubo-formel in SCBA für GaAs (m^*= 0.0665 m_e) mit einer Nullfeldbeweglichkeit von $\mu = 50\,\mathrm{m}^2/\mathrm{Vs}$ und Elektronendichte $n_s = 2.0 \cdot 10^{15}\,\mathrm{m}^{-2}$. Rechts oben ist die Fermi-Energie für die quantenmechanische Rechnung abgebildet. Die berechneten Maxima der SdH-Oszillationen nach Gleichung (2.46) sind mit Punkten markiert.

Der Hall-Widerstand reproduziert die Hall-Gerade. Die Girlanden-artigen Abweichungen von der Hall-Geraden bei niedrigen Temperaturen entsprechen Quantenkorrekturen [Suhr96], die im Experiment allerdings von der Quantisierung des Hall-Effekts, der in der theoretischen Beschreibung hier nicht abgeleitet werden kann, verdrängt werden.

Schwache Lokalisierung läßt sich in dieser quantenmechanischen Rechnung nicht beobachten, da nur Streuung an einer Störstelle berücksichtigt wurde. Um Korrelationen zwischen Streuakten zu erfassen, müßten z.B. maximal gekreuzte Diagramme bei der Berechnung der Selbstenergie berücksichtigt werden [Suhr96]. Ebenso findet sich keine Quantisierung des Hall-Widerstandes (z.B. [Hajd94]) durch den Quanten-Hall-Effekt, da hierfür Un-

ordnung auch in den Eigenzuständen des Systems berücksichtigt werden müßte. Auch der gebrochenzahlige Quanten-Hall-Effekt (z.B. [Chak88]) liegt außerhalb der Beschreibung, da keine Wechselwirkung zwischen den Elektronen einbezogen wurde.

Im folgenden wird die quantenmechanische Berechnung der Leitfähigkeit in SCBA auf modulierte Systeme zur Untersuchung der Quantenoszillationen angewandt und in Kapitel 4 für Systeme mit Spin-Bahn-Wechselwirkung erweitert.

KAPITEL 3

Quantenoszillationen im Magnetotransport in lateralen 1D Halbleiter-Übergittern

Magnetotransportmessungen an schwach modulierten lateralen Halbleiter-Übergittern zeigen abgesehen von Shubnikov-de Haas Oszillationen, die auch im unmodulierten 2DES auftreten, noch andere $1/B$-periodische Oszillationen, deren Periodizität neben der Elektronendichte von der Gitterkonstante abhängt. Die Kommensurabilitäts- oder Weiss-Oszillationen werden in einem klassischen Bild durch die Kommensurabilität zwischen Gitterkonstante und Zyklotronradius erklärt. Bei sehr kleinen Magnetfeldern und niedrigen Temperaturen treten Quantenoszillationen auf Grund der Minibandstruktur auf. Diese $1/B$-periodischen Oszillationen werden im folgenden besonders untersucht. Ihre Periodizität läßt sich in einem semiklassischen Bild durch die von der periodischen Modulation veränderten Fermi-Konturen erklären. Die Berücksichtigung des Magnetfeldes zusammen mit dem periodischen Potential im Hamiltonian führt für das Energiespektrum zur magnetischen Minibandstruktur. Daraus wird mit der Auswertung der Kubo-Formel die Magnetoleitfähigkeit bestimmt. Das Energiespektrum aus überlappenden magnetischen Minibän-

dern manifestiert sich im Magnetotransport in den Quantenoszillationen auf Grund der Minibandstruktur. Hierbei wird die Phasenlage dieser Magnetowiderstandsoszillationen durch den Leitfähigkeitsmechanismus bestimmt.

3.1 Experimentelle Beobachtung und quasiklassische Interpretation

Magnetotransportmessungen an lateralen Halbleiter-Übergittern geben Aufschluß über die elektronischen Eigenschaften des Systems. Schon ohne Übergitter sind im Magnetowiderstand des 2DES die Shubnikov-de Haas (SdH) Oszillationen mit der Periodizität

$$\Delta_{1/B}^{\mathrm{SdH}} = \frac{e}{\hbar \pi n_{\mathrm{s}}} \tag{3.1}$$

zu beobachten, mit denen die Elektronendichte im besetzten Subband n_{s}, die mit dem Fermi-Wellenvektor k_{F} über die Beziehung $k_{\mathrm{F}}^2 = 2\pi n_{\mathrm{s}}$ zusammenhängt, bestimmt werden kann. Sie treten auf, wenn die Landau-Niveaus aufgelöst werden. Die diskreten Energieniveaus der Elektronen im Magnetfeld verlieren an Bedeutung, wenn sie entweder durch die Temperaturverbreiterung oder durch die Streuverbreiterung ausgeschmiert werden. Die SdH-Oszillationen werden gedämpft, bis sie schließlich für die Grenzfälle $k_{\mathrm{B}}T \gg \hbar\omega_{\mathrm{c}}$ oder $\omega_{\mathrm{c}}\tau \ll 1$ ganz verschwinden.

In periodisch modulierten Elektronensystemen werden darüber hinaus Kommensurabilitäts-Oszillationen (*commensurability oscillations*, CO) beobachtet [Weis89], die neben der Elektronendichte von der Gitterkonstante a abhängen. Sie werden auch Weiss-Oszillationen genannt. Diese können in einem klassischen Bild [Been89] verstanden werden. Im Magnetfeld bewegen sich die Elektronen auf Kreisbahnen mit dem Radius $R_c = \lambda_{\mathrm{c}}^2 k_{\mathrm{F}}$. Durch die periodische Modulation können die Elektronen auf ihrem Umlauf ein mittleres elektrisches Feld erfahren und der Mittelpunkt der Zyklotronbahnen beginnt sich auf Grund der $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}$-Drift senkrecht zur Modulationsrichtung zu bewegen. Daraus resultiert ein zusätzlicher Leitfähigkeitsbeitrag. Ist die Kommensurabilitätsbedingung

$$2R_{\mathrm{c}} = a(\nu - \frac{1}{4}) \tag{3.2}$$

erfüllt, $\nu = 1, 2, ...$, verschwindet das mittlere elektrische Feld, das die Elektronen mit der Zyklotronbewegung in der Modulation spüren, und die Zyklotronbahnen sind stationär. In Abbildung 3.1 ist links die Situation der

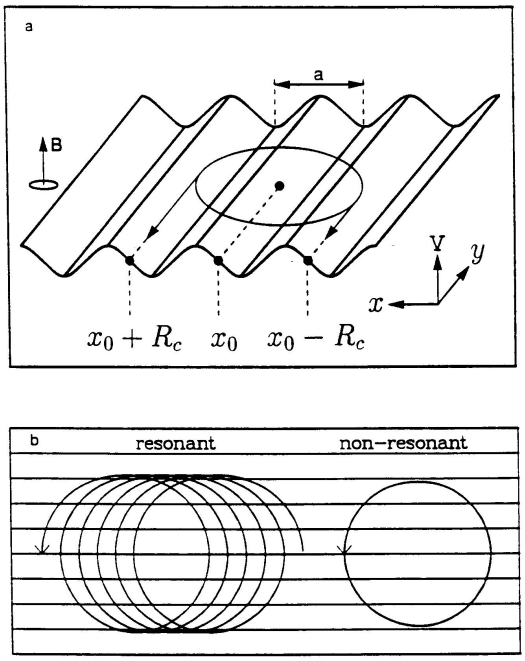


Abbildung 3.1: (a) Potentiallandschaft mit einer Zyklotronbahn; (b) Zyklotronbahnen entfernt von (resonant) und bei der Kommensurabilitäts-Bedingung (non-resonant); Horizontale Striche in (b) markieren die Potentiallandschaft (aus [Been89]).

driftenden Zyklotronbahnen skizziert und rechts die Situation bei der Kommensurabilitätsbedingung. Der Magnetfeld-abhängige Leitfähigkeitsmechanismus führt zu Oszillationen mit der Periodizität

$$\Delta_{1/B}^{\text{Weiss}} = \frac{ea}{2\hbar\sqrt{2\pi n_{\text{s}}}}. \tag{3.3}$$

In der quantenmechanischen Beschreibung [Gerh89, Vasi89, Zhan90], die das Modulationspotential in erster Ordnung Störungstheorie berücksichtigt und die Kubo-Formel auswertet, lassen sich zwei verschiedene Leitfähigkeitsmechanismen unterscheiden. Die Streuleitfähigkeit (Inter-Miniband-Leitfähigkeit), die durch Streuung zwischen verschiedenen Landau-Niveaus getragen wird, und die Bandleitfähigkeit (Intra-Miniband-Leitfähigkeit), die durch Beiträge innerhalb eines Landau-Niveaus getragen wird und den driftenden Orbits im klassischen Bild entspricht. Der Beitrag der Bandleitfähigkeit verschwindet für die Kommensurabilitätsbedingung, während die Streuleitfähigkeit ebenda maximal wird. Im eindimensional modulierten 2DES, in dem die Bandleitfähigkeit nur zu einer Richtung beiträgt, können da-

mit die Gegenphasigkeit der Kommensurabilitäts-Oszillationen in den beiden Leitfähigkeitskomponenten parallel und senkrecht zu Modulationstälern erklärt werden. Für die Aussagen zum Widerstand muß die Tensorinversion (vgl. Gleichung (2.9)) berücksichtigt werden. So wird für ein uni-direktionales in x-Richtung moduliertes Elektronensystem, in dem die Band-Leitfähigkeit dominiert, das Minimum für die Kommensurabilitätsbedingung in der Leitfähigkeit σ_{yy} unter Beachtung der Tensorinversion zu einem Minimum im Widerstand ϱ_{xx}. Da die Gegenphasigkeit im klassischen Bild nicht erklärt werden kann, ist der Aufwand für die quantenmechanische Rechnung gerechtfertigt, obwohl die Landau-Quantisierung für die Kommensurabilitäts-Oszillationen, als klassisch erklärbarer Effekt, keine Rolle spielt.

Für niedrige Temperaturen wurden in Experimenten [Albr99] an einem kurz-periodischen 2D Halbleiter-Übergitter Oszillationen gefunden, deren Periodizität sowohl von der Elektronendichte als auch von der Gitterkonstante abhängt, aber nicht mit der der Weiss-Oszillationen übereinstimmt. In Abbildung 3.2 ist eine typische Meßkurve für eine Gitterkonstante $a = 120\,\mathrm{nm}$ abgebildet. In der Region (1) sind SdH-Oszillationen zu erkennen, die in Region (2) den Weiss-Oszillationen überlagert sind. In Region (3) sind bei niedriger Temperatur $T = 50\,\mathrm{mK}$ sehr deutlich Oszillationen zu erkennen, deren Periodizität sich von SdH- und Weiss-Oszillationen unterscheidet. Sie sollen im folgenden untersucht werden. Die Beobachtung, daß sie bei Erhöhung der Temperatur schneller gedämpft werden als die klassisch erklärbaren Weiss-Oszillationen, ist ein erster Hinweis, sie einem quantenmechanischen Effekt zuzuschreiben.

Berechnet man die Bandstruktur, indem das Übergitter mit

$$V(x, y) = V_0 \cos^2(\tfrac{\pi}{a}x) \cdot \cos^2(\tfrac{\pi}{a}y) \tag{3.4}$$

modelliert, der Hamiltonian in ebene Wellen entwickelt und die Energieeigenwerte über der Brillouin-Zone aufgetragen werden, erhält man die in Abbildung 3.3(a) gezeigte Minibandstruktur. Die Brillouin-Zone ist in Abbildung 3.3(b) gezeigt. In der Minibandstruktur reißt die Parabel der Energiedispersion für freie Elektronen an Brillouin-Zonenrändern auf, und es bilden sich Energielücken. Mit dem Potential, entwickelt in ebene Wellen

$$V(\boldsymbol{r}) = \sum_{\boldsymbol{G}} \tilde{V}_{\boldsymbol{G}}\, e^{i\,\boldsymbol{G}\,\boldsymbol{r}}, \tag{3.5}$$

wobei $\boldsymbol{G}$ die reziproken Gittervektoren sind, können die beiden prominentesten Lücken den entsprechenden Fourier-Koeffizienten $\tilde{V}_{\boldsymbol{G}}$ zuordnet werden. Für erste Ordnung Störungstheorie ist die zu $\boldsymbol{G}$ gehörige Energielücke $\Delta E \approx 2\tilde{V}_{\boldsymbol{G}}$. Die größere Lücke ΔE_1 wird durch den Satz $\tilde{V}_{(\pm1,0)}$ und $\tilde{V}_{(0,\pm1)}$

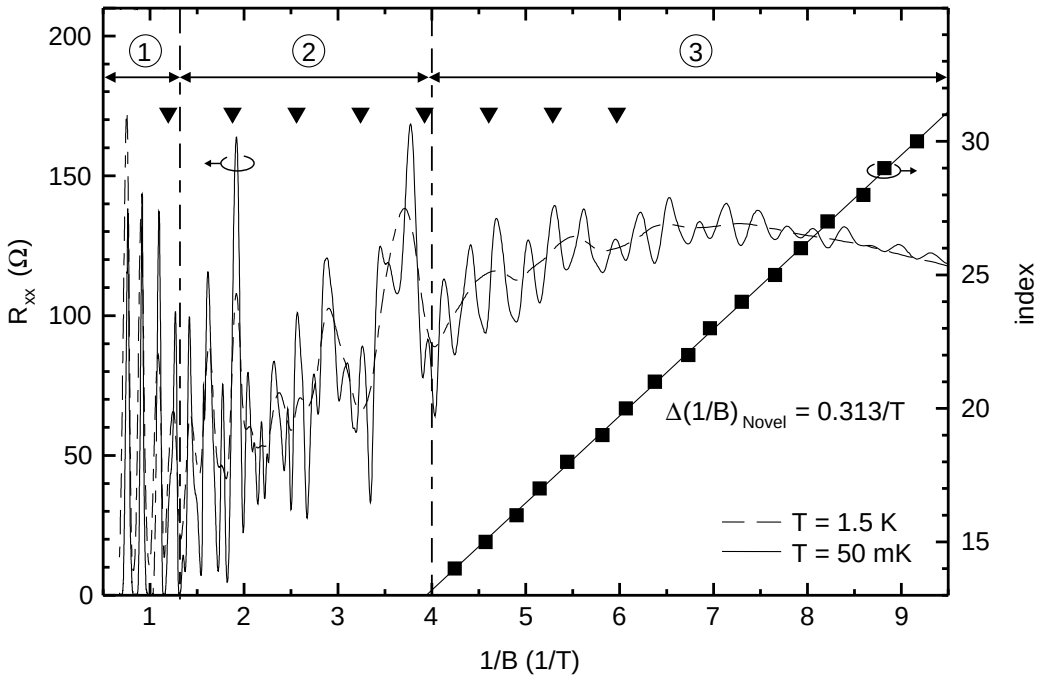


Abbildung 3.2: Meßkurve bei zwei Temperaturen ($T = 1.5\,\mathrm{K}$ und $T = 50\,\mathrm{mK}$) des Magnetowiderstandes als Funktion des inversen Magnetfeldes für ein zweidimensional moduliertes Halbleiter-Übergitter mit Gitterkonstante $a = 120\,\mathrm{nm}$, Elektronendichte $n_\mathrm{s} = 2.84 \times 10^{15}\,\mathrm{m}^{-2}$ und einer Beweglichkeit vor der Strukturierung von $210\,\mathrm{m}^2/\mathrm{Vs}$. Die Dreiecke markieren die Kommensurabilitätsbedingung. Die Minima der Quantenoszillationen durch die Minibandstruktur sind einem Index zugeordnet und die Periodizität $\Delta(1/B)_\mathrm{Novel}$ angegeben. (Aus [Albr99]).

bestimmt, während ΔE_2 mit $\tilde{V}_{(\pm1,\pm1)}$ verknüpft ist. Für die hier verwendete Amplitude $V_0 = 2\,\mathrm{meV}$ erhält man die Werte $\Delta E_1 = 0.5\,\mathrm{meV}$ und $\Delta E_2 = 0.25\,\mathrm{meV}$. Schneidet man das Energiespektrum an der Fermi-Kante, so erhält man die Fermi-Konturen in Abbildung 3.4. Für ein unmoduliertes 2DES ist die Fermi-Kontur durch einen Kreis mit dem Radius k_F gegeben, der in Abbildung 3.4 mit der hellgrauen Fläche markiert ist. Die durch das Übergitter-Potential bedingten Energielücken in der Minibandstruktur führen dazu, daß der Fermi-Kreis aufreißt. Die Energielücken ΔE_1 und ΔE_2 manifestieren sich im $\boldsymbol{k}$-Raum in den Lücken Δ_1 bzw. Δ_2. Zusammenhängende Fermi-Konturen umschließen nun kleinere Flächen, die in Abbildung 3.4 dunkelgrau hinterlegt sind. Während für die 2D-Modulation

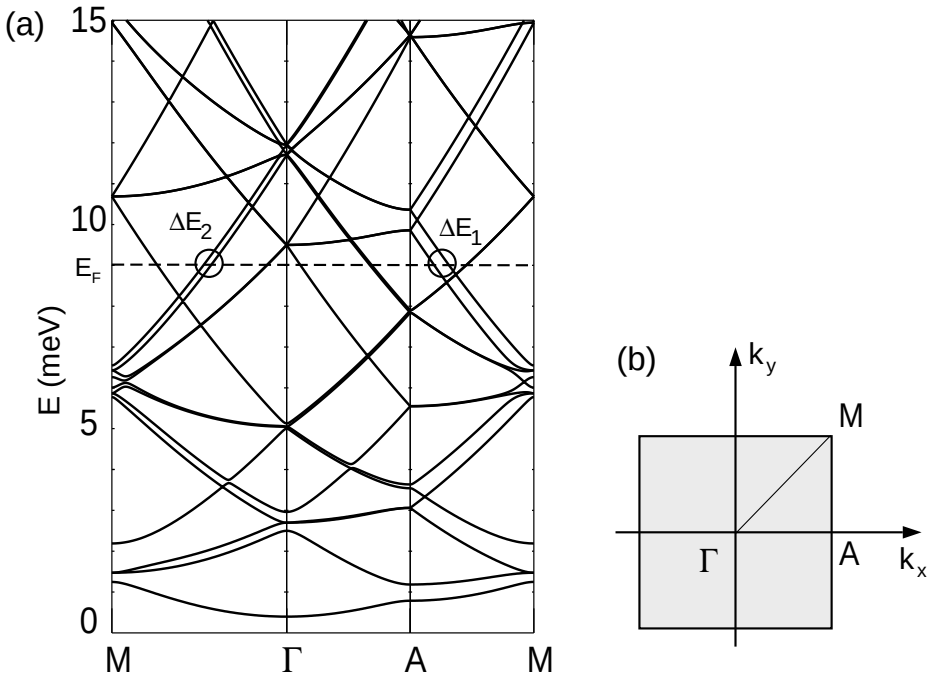


Abbildung 3.3: (a) Minibandstruktur für ein schwach moduliertes 2DES in GaAs ($m^* = 0.0665\,m_e$) mit der Modulationsamplitude $V_0 = 2\,\mathrm{meV}$ und Gitterkonstante $a = 100\,\mathrm{nm}$ Die gestrichelte Linie markiert die Position des Fermi-Schnitts für Abbildung 3.4. ΔE_1 und ΔE_2 sind die prominentesten Energielücken an der Fermi-Kante durch die Modulation. (aus [Albr99]). (b) Brillouin-Zone für quadratisches Übergitter.

x- und y-Richtung äquivalent sind (Abb. 3.4 (links)), entstehen für eine 1D-Modulation in x-Richtung keine Lücken in der Energieabhängigkeit von k_y, d.h. keine Lücken in der Fermi-Kontur an den Brillouin-Zonengrenzen senkrecht zu k_y (Abb. 3.4 (rechts)). So entstehen für 1D- und 2D-Modulation verschieden Flächen.

Da die Kanten dieser kleinen Flächen sich aus um $2\pi/a$ versetzten Paraboloiden der freien Energiedispersion entwickelt haben, lassen sie sich so in guter Näherung berechnen. Für die 2D-Modulation ergibt sich die Schnittfläche von vier Paraboloiden mit der Fermi-Energie zu

$$A^{\mathrm{2D}} = \pi k_{\mathrm{F}}^2 + 4\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 - 4\left(\frac{\pi}{a}\right)\sqrt{k_{\mathrm{F}}^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2} - 4k_{\mathrm{F}}^2 \arcsin\frac{\pi}{ak_{\mathrm{F}}}, \qquad (3.6)$$

und für 1D-Modulation für die Schnittfläche von zwei Paraboloiden und der

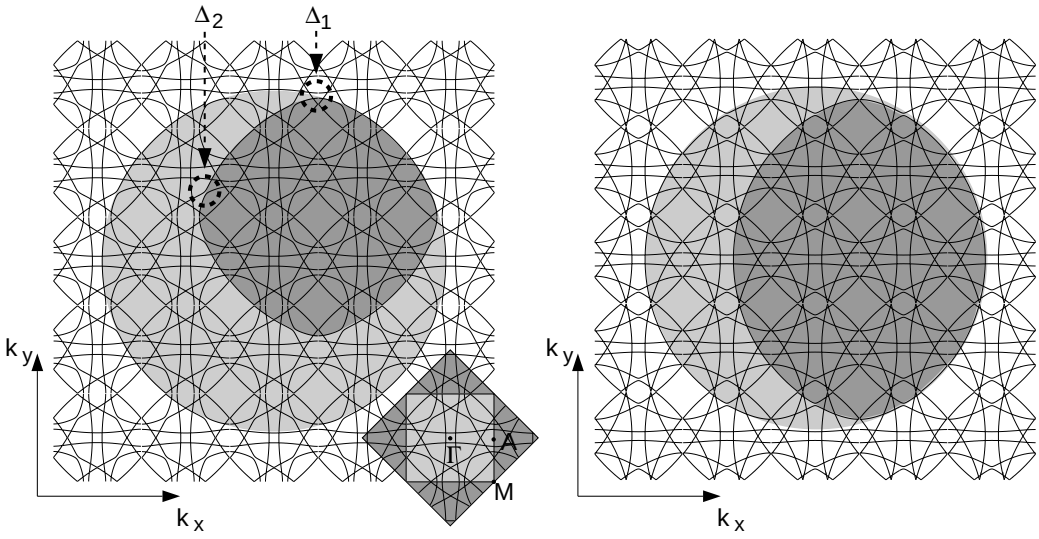


Abbildung 3.4: Fermi-Konturen bei $E_\mathrm{F} = 9\,\mathrm{meV}$ im wiederholten Zonenschema für 2D- (links) und 1D-Modulation (rechts) für die Parameter aus Abbildung 3.3. Die kleinen dunkelgrauen Flächen und die großen hellgrauen Flächen bestimmen über Gleichung (1.30) die Periodizität der Quantenoszillationen auf Grund der Minibandstruktur und der SdH-Oszillationen. Die erste und zweite Brillouin-Zone ist mit grauen Quadraten markiert. Die Lücken der Fermi-Konturen im $\boldsymbol{k}$-Raum Δ_1 und Δ_2 entsprechen den Energielücken ΔE_1 bzw. ΔE_2 in Abbildung 3.3 (nach [Lang00]).

Fermi-Energie zu:

$$A^{1\mathrm{D}} = \pi k_\mathrm{F}^2 - 2\left(\frac{\pi}{a}\right)\sqrt{k_\mathrm{F}^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2} - 2k_\mathrm{F}^2 \arcsin\frac{\pi}{ak_\mathrm{F}}. \tag{3.7}$$

Mit der Vorstellung, daß die Elektronen durch das Magnetfeld auf Äquipotentiallinien der Energiedispersion entlanggetrieben werden, bestimmen diese Flächen zusammen mit der Beziehung (1.30) die $1/B$-Periodizität der Oszillationen im Magnetowiderstand [Lang99]. Abbildung 3.5 zeigt, daß die Abhängigkeit der $1/B$-Periodizität von der Fermi-Energie und der Gitterkonstante vorzüglich mit den experimentellen Daten übereinstimmt.

Der Magnetfeldbereich, in dem die Miniband-Quantenoszillationen beobachtbar sind, ist dadurch bestimmt, daß die Elektronen abhängig vom Magnetfeld durch die Lücken zwischen verschiedenen Fermi-Konturen tunneln

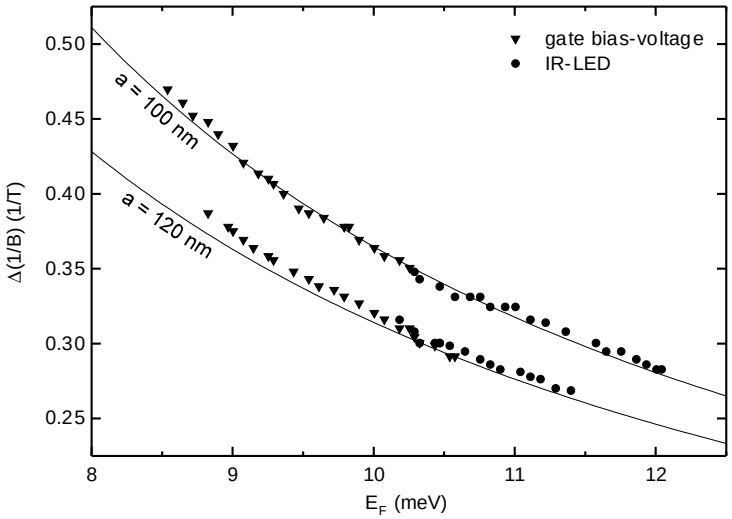


Abbildung 3.5: $1/B$-Periodizität der Miniband-Oszillationen als Funktion der Fermi-Energie E_F für ein 2D laterales Übergitter mit Gitterkonstanten a. Experimentelle Daten (Dreiecke und Punkte) aus [Albr98] sind verglichen mit der Theorie (durchgezogene Linie) Gleichung (1.30) für die Fläche A_2D aus Gleichung (3.6) und effektiver Masse $m^* = 0.0665\, m_e$. (Aus [Albr99]).

können [Albr99, Stre90]. Dieser magnetische Durchbruch findet statt, wenn die Zyklotron-Energie $\hbar\omega_\mathrm{c}$ vergleichbar zur zugehörigen Gap-Energie in der Miniband-Struktur wird. Demnach tauchen die neuartigen Oszillationen auf, wenn das Magnetfeld ausreicht, das schmalere Gap ΔE_2 zu durchtunneln und verschwinden wieder, sobald die Elektronen auch ΔE_1 überwinden können. Für 1D modulierte Systeme wurden inzwischen die Miniband-Oszillationen in [Deut01] nachgewiesen und noch mehr Oszillationsperioden beobachtet, die zu weiteren Flächen korrespondieren. Auch an den 2D modulierten Systemen lassen sich bei genauerer Analyse der experimentellen Daten weitere Oszillationen erahnen [Albr00]. So ergibt sich ein konsistentes Bild, daß in diesen $1/B$-periodischen Oszillationen die Minibandstruktur ausgemessen werden kann.

In Abbildung 3.6 ist die Abhängigkeit der $1/B$-Periode von der Fermi-Energie für die verschiedenen Typen der Magnetowiderstandsoszillationen verglichen. Die Dichteabhängigkeit der $1/B$-Periodizität der Miniband-Oszillationen unterscheidet sich signifikant von den Weiss-Oszillationen. Außerdem verändert sich die $1/B$-Periodizität der Miniband-Oszillationen mit der Dimensionalität der Modulation, was für die Weiss-Oszillationen nicht zu-

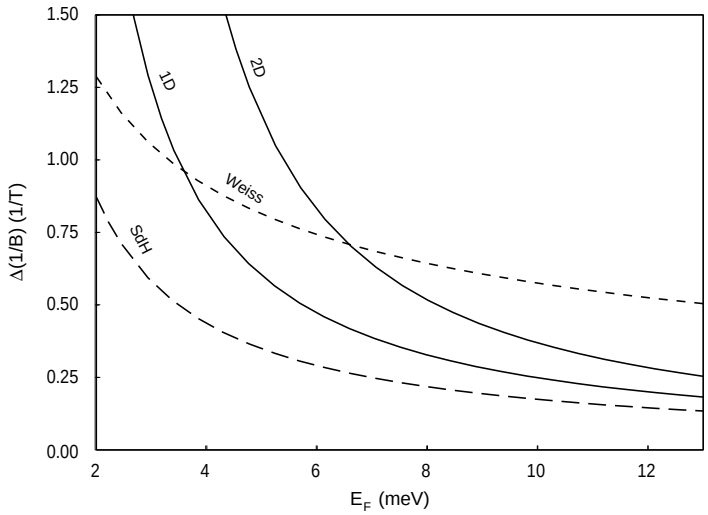


Abbildung 3.6: Abhängigkeit der $1/B$-Periodizität der Miniband-Ozillationen für 1D- und 2D-Modulation, der klassischen Kommensurabilitäts-Oszillationen (Weiss-Oszillationen) und der SdH-Oszillationen von der Fermi-Energie. Das 2DES befindet sich in GaAs ($m^* = 0.0665\, m_e$) und die Gitterkonstante ist $a = 100\,\mathrm{nm}$. (nach [Lang00]).

trifft. Für steigende Elektronendichte nähert sich die $1/B$-Periode der Miniband-Oszillationen den SdH-Oszillationen an, da für das Verhältnis der modifizierten Fläche zur vollen SdH Kreisfläche $A_{\mathrm{1D}}/A_{\mathrm{SdH}} \to 1$ und $A_{\mathrm{2D}}/A_{\mathrm{SdH}} \to 1$ gilt. Für die experimentelle Beobachtung der Quantenoszillationen muß die Fermi-Energie und damit die Elektronendichte so gewählt werden, daß die $1/B$-Periode sich ausreichend von anderen Oszillationen unterscheidet.

In Abbildung 3.7 ist die $1/B$-Periodizität in Abhängigkeit von der Gitterkonstante aufgetragen. Die $1/B$-Periode der Miniband-Oszillationen geht mit großen Gitterkonstanten in die SdH-Oszillationen über, da mit Verkleinerung der Brillouinzone die Parabeln näher zusammenrücken und die Differenzflächen verschwinden. Die $1/B$-Periode der Weiss-Oszillationen, denen die Kommensurabilität zwischen Gitterkonstante und Zyklotronradius zugrunde liegt, nimmt dagegen mit größerer Gitterkonstante zu.

In einem semiklassischen Bild kann also die Periodizität der Quantenoszillationen auf Grund der Minibandstruktur verstanden werden. Die von den Fermi-Konturen eingeschlossenen Flächen bestimmen die $1/B$-Periode und mit dem magnetischen Durchbruch läßt sich das Auftreten bzw. Verschwinden der Oszillationen mit dem Magnetfeld erklären. Im folgenden wird

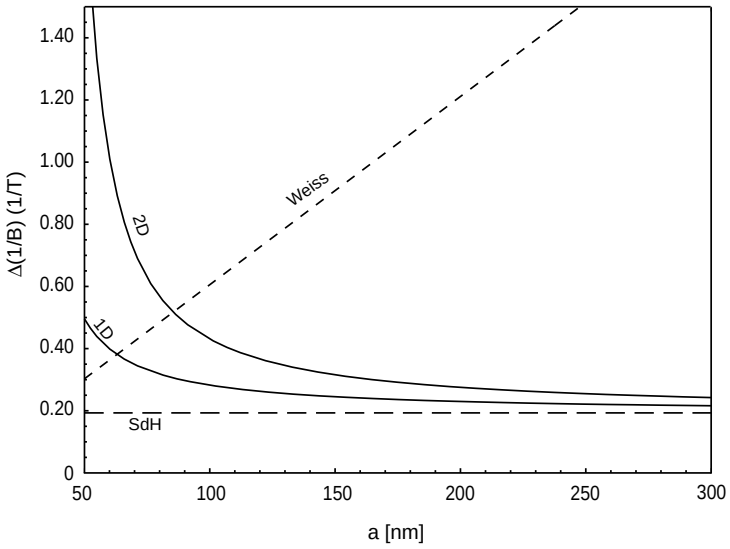


Abbildung 3.7: $1/B$-Periode der Miniband-Oszillationen für 1D- und 2D-Modulation sowie der Kommensurabilitäts- und SdH-Oszillationen in Abhängigkeit der Gitterkonstante a für 2DES in GaAs ($m^* = 0.0665\, m_e$) und die Fermi-Energie $E_\mathrm{F} = 9\,\mathrm{meV}$.

nun sowohl die periodische Modulation als auch das Magnetfeld im Systemhamiltonian berücksichtigt. Dies führt zur magnetischen Minibandstruktur, die im Unterschied zur bisher betrachteten Minibandstruktur nun explizit vom Magnetfeld abhängt. Darauf baut dann die quantenmechanische Berechnung des Magnetotransportes mit Auswertung der Kubo-Formel auf.

3.2 Magnetische Minibandstruktur

Bislang wurde das Magnetfeld nur als Störung betrachtet, welche die Elektronen entlang den für $B = 0$ berechneten Fermi-Konturen treibt. Weiter konnten die Elektronen mit dem Magnetfeld Lücken in der Minibandstruktur überwinden und so waren abhängig vom Magnetfeld verschiedene Fermi-Konturen möglich. Nun wird das Magnetfeld über das Vektorpotential in Landau-Eichung $\boldsymbol{A} = Bx\hat{\boldsymbol{e}}_y$ direkt im Hamiltonian berücksichtigt. Die Entartung der Landau-Niveaus wird durch die Modulation aufgehoben. Für eindimensionale Modulation in x-Richtung bleibt die Zentrumskoordinate $X_0 = -\lambda_c^2 k_y$ eine gute Quantenzahl, da die Translationsinvarianz in y-Richtung nicht gebrochen wird. Die Energieeigenwerte E_{nX_0} bilden die magnetische Minibandstruktur. Zur Berechnung der magnetischen Minibandstruktur wird der Hamiltonian in die Eigenfunktionen für das homogene Elektronensystem mit Magnetfeld, wie im Anhang B angegeben, entwickelt und das Gleichungssystem numerisch gelöst.

Für den Fall der Modulation in zwei Raumrichtungen kommt das fraktale Energiespektrum (Hofstadter-Schmetterling) [Hofs76] zum Tragen. Der Hamiltonian kann zwar in die Ferrari-Funktionen [Ferr90] entwickelt werden, die aber nur für rationale Vielfache eines Flußquantums pro Elementarzelle definiert sind. Um die Miniband-Oszillationen an einem möglichst einfachen System zu verstehen, beschränken wir uns deshalb auf die 1D-Modulation. Außerdem bietet dieses System den Vorteil, daß durch das zu den beiden Meßrichtungen x und y unsymmetrische Potential Streu- und Band-Leitfähigkeit getrennt werden können.

Für das einfache Potential

$$V(x) = \frac{V_0}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{a} x\right) \tag{3.8}$$

läßt sich die Schrödingergleichung ohne Magnetfeld ($B = 0\,\mathrm{T}$) wie im Anhang A beschrieben auf die Mathieusche Differentialgleichung abbilden und analytisch lösen. In Abbildung 3.8 ist die Minibandstruktur für $B = 0$ (rechts) der magnetischen Minibandstruktur (links) gegenüber gestellt.

In der Minibandstruktur für $B = 0\,\mathrm{T}$ bewirkt das Magnetfeld, daß sich die Elektronen im $\boldsymbol{k}$-Raum auf Äquipotentiallinien, wie sie in Abbildung 3.8 (Mitte) zu zwei Energien gezeigt sind, bewegen. Mit diesen Fermi-Konturen und der semiklassischen Argumentation lassen sich die Minibandstruktur bei $B = 0\,\mathrm{T}$ und die magnetische Minibandstruktur verknüpfen. Die Fermi-Konturen bestehen aus offenen und geschlossenen Konturen. Es ist zu erkennen, daß die magnetische Bandstruktur sich aus einem Wechselspiel von gebundene Zuständen, die in der magnetischen Bandstruktur zu quantisierten

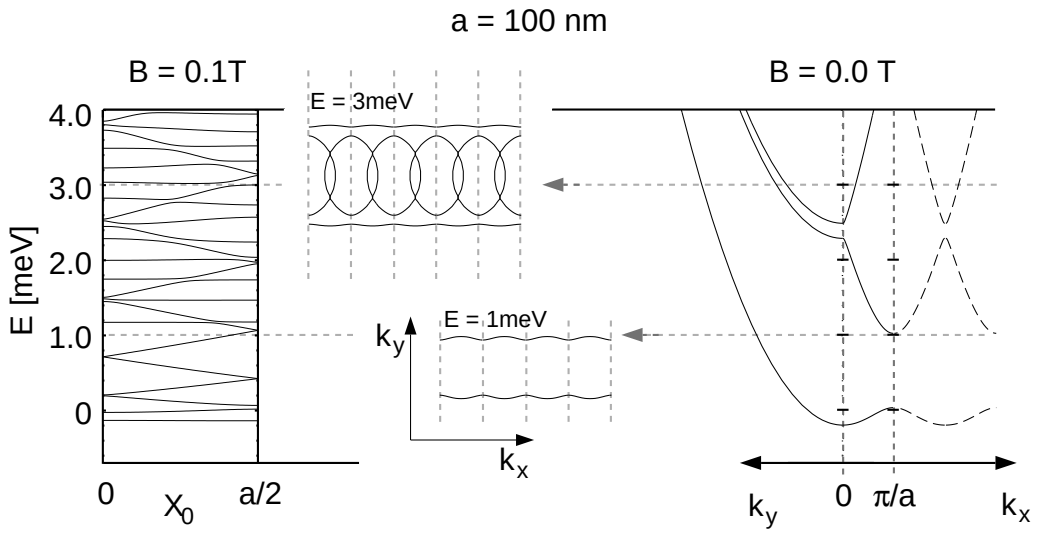


Abbildung 3.8: Gegenüberstellung der magnetischen Minibandstruktur (links) für $B = 0.1\,\mathrm{T}$ und der Minibandstruktur für $B = 0\,\mathrm{T}$ (rechts) eines 2DES in GaAs ($m^* = 0.0665\,m_e$) für einfaches cos-Potential nach Gleichung (3.8) mit $V_0 = 2\,\mathrm{meV}$ und Gitterkonstante $a = 100\,\mathrm{nm}$. In der Mitte sind die Fermi-Konturen aus der Minibandstruktur für $B = 0\,\mathrm{T}$ bei den genannten Energien abgebildet.

Energieniveaus führen, und ungebundenen Zuständen, die sich als Parabel in der magnetischen Bandstruktur wiederfinden, besteht. Für die gewählten Parameter liegt nur ein Subband im Potentialgraben. Für die niedrige Energie $E_\mathrm{F} = 1.0\,\mathrm{meV}$ finden sich nur offene Fermi-Konturen und die magnetische Minibandstruktur wird durch einen kontinuierlichen Zweig gebildet. Für höhere Energien $E_\mathrm{F} = 3.0\,\mathrm{meV}$ existieren sowohl geschlossene als auch offene Fermi-Konturen und die magnetische Minibandstruktur bildet sich aus flachen und dispersiven Zweigen unter Vermeidung von Niveaukreuzungen.

Für größere Gitterkonstanten ebenso wie für höhere Modulationsamplituden [Yagi92] gibt es mehrere dispersive Energiezweige bzw. offene Trajektorien. Abbildung 3.9 zeigt die Gegenüberstellung der magnetischen Minibandstruktur und der Minibandstruktur für $B = 0\,\mathrm{T}$ für die gleichen Parameter wie in Abbildung 3.8 allerdings für eine größere Gitterkonstante $a = 200\,\mathrm{nm}$. Jetzt befinden sich zwei Minibänder im Potentialgraben, wodurch in den Fermi-Konturen deutlich zwei offene Bahnen entstehen, die sich in der magnetischen Minibandstruktur auch als zwei dispersive Zweige wiederfinden bzw. andeuten.

In Abbildung 3.10 ist die Entwicklung der Minibandstruktur für stei-

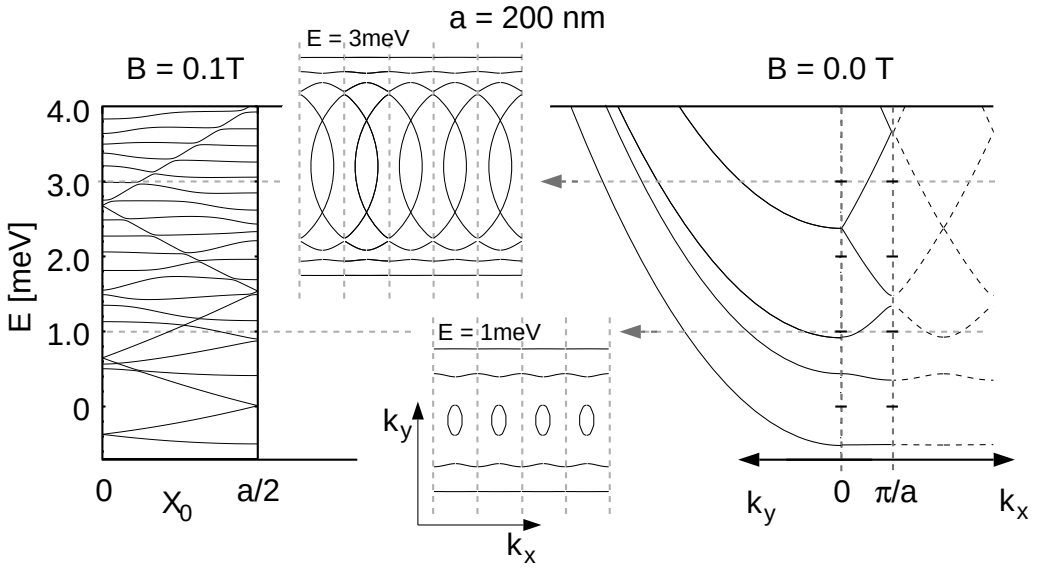


Abbildung 3.9: Gegenüberstellung der magnetischen Minibandstruktur (links) für $B = 0.1\,\mathrm{T}$ und der Minibandstruktur für $B = 0\,\mathrm{T}$ (rechts) eines 2DES in GaAs ($m^* = 0.0665 m_e$) für einfaches cos-Potential nach Gleichung(3.8) mit $V_0 = 2\,\mathrm{meV}$ und Gitterkonstante $a = 200\,\mathrm{nm}$. In der Mitte sind die Fermi-Konturen aus der Minibandstruktur für $B = 0\,\mathrm{T}$ bei den genannten Energien abgebildet.

gende Modulationsamplitude untersucht (links und rechts). Die Zustandsdichte $D(E)$ (Mitte) ist mit der magnetischen Minibandstruktur aus den Störstellen-gemittelten Greenschen Funktionen nach Gleichung (2.36) berechnet. Für schwache Modulation $V_0 = 0.5\,\mathrm{meV}$ ist das Energiespektrum durch die Landau-Niveaus bestimmt. Die leichte Dispersion verschwindet an den Flachbandbedingungen, die sich aus der Kommensurabilitätsbedingung (3.2) mit dem Zyklotronradius $R_\mathrm{c} = \lambda_\mathrm{c}^2\sqrt{2m^*E}/\hbar$ ergibt. Sie ist durch die Dreiecke markiert. Für starke Modulation koppeln die Landau-Niveaus stark und dispersive Bandstücke wechseln sich mit flachen Stücken in einem magnetischen Miniband ab. Die magnetischen Minibänder überlappen und bilden in der Störstellen-verbreiterten Zustandsdichte eine neue Periodizität, die sich von den Landau-Niveaus unterscheidet, wie es durch die Punkte in den Tafeln für die Zustandsdichte zu $V_0 = 0.5\,\mathrm{meV}$ und $V_0 = 2.0\,\mathrm{meV}$ verdeutlicht ist. Dies ist ein erster Hinweis, daß durch die Modulation eine neue $1/B$-Periodizität im Magnetowiderstand entsteht.

Versuchen wir das Zustandekommen der magnetischen Minibandstruktur tiefer zu verstehen. Für den Fall, daß die Modulation eine Lücke zwischen

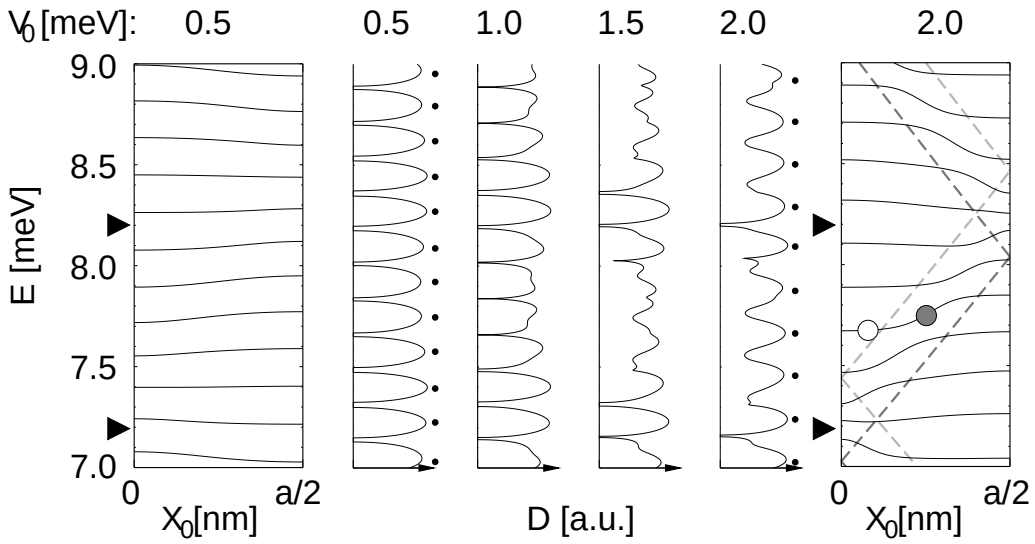


Abbildung 3.10: Ausschnitt der magnetischen Minibandstruktur (links und rechts) und Zustandsdichte D (Mitte) für verschiedene Modulationsamplituden V_0 bei einem Magnetfeld von $B = 0.1\,\mathrm{T}$. Die Periodizität in der Zustandsdichte ist für $V_0 = 0.5\,\mathrm{meV}$ und $V_0 = 2.0\,\mathrm{meV}$ markiert. Folgende Parameter wurden verwendet: Gitterkonstante $a = 100\,\mathrm{nm}$, Beweglichkeit $\mu = 50\,\mathrm{m}^2/\mathrm{Vs}$ und effektive Masse $m^* = 0.0665 m_e$. Die gestrichelten Linien markieren die Dispersion von Elektronen, die in y-Richtung propagieren (hellgrau nach Gleichung (3.10); vergleiche Abbildung 3.11 (b)) und beständig Bragg-reflektiert (dunkelgrau nach Gleichung (3.9); vergleiche Abbildung 3.11) (a)) werden. Die Dreiecke markieren die Flachbandbedingung.

erstem und zweitem Miniband im Energiespektrum öffnet, läßt sich der dispersive Anteil der Bänder einordnen zwischen die Dispersion eines Wellenpakets, das in y-Richtung läuft und beständig bei $k_y = \pi/a$ Bragg-reflektiert wird,

$$E(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m^*} - \frac{1}{12}\frac{\hbar^2\pi^2}{m^* a}\ln(1 + 6\frac{k^2 a^2}{\pi^2}) \tag{3.9}$$

und der Energiedispersion eines Wellenpaket, das sich geradlinig in y-Richtung fortbewegt

$$E(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m^*}. \tag{3.10}$$

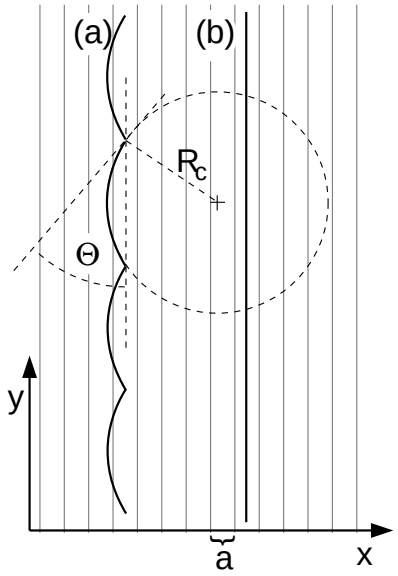


Abbildung 3.11: Elektronenbahnen im lateralen Übergitter. Trajektorie (a) beschreibt ein Elektron, das im Magnetfeld auf einer Kreisbahn mit dem Radius R_c sich bewegend beständig unter dem Winkel Θ Bragg-reflektiert wird. Trajektorie (b) beschreibt dagegen ein Elektron, das vom Magnetfeld nicht mehr beeinflußt wird und sich geradlinig in y-Richtung bewegt.

Die zugrundeliegenden Pfade, die aus den Fermikonturen abgeleitet sind, finden sich in Abbildung 3.11. Die Geschwindigkeit v in y-Richtung wurde mit der Beziehung

$$\frac{d}{dk}E(k) = \hbar v \tag{3.11}$$

und der Randbedingung $E(k = 0) = 0$, sowie der Definition $X_0 = -\lambda_c^2 k$ in die in Abbildung 3.10 (rechts) eingezeichnete Energiedispersion umgerechnet.

In [Zwer99] wurde die Minibandstruktur für größere Gitterkonstanten, mit klassischen Bahnen in Verbindung gebracht. Für den allgemeineren Fall, wenn mehrere Minibänder im Potentialgraben gebunden sind, d.h. mehrer dispersive Energiezweige vorhanden sind, paßt diese vorgeschlagene Identifikation der Region der dispersiven Minibänder mit dem Bereich, in dem gebundene Zustände vorliegen können. Allerdings geben diese rein klassischen Bahnen keinen Hinweis darauf, wo sich im Bereich der gebundenen Zustände die dispersiven Bandstücke befinden. Darüber gibt die Dispersion der Bragg-reflektierten Elektronen Auskunft, wobei die Bragg-Reflektion an

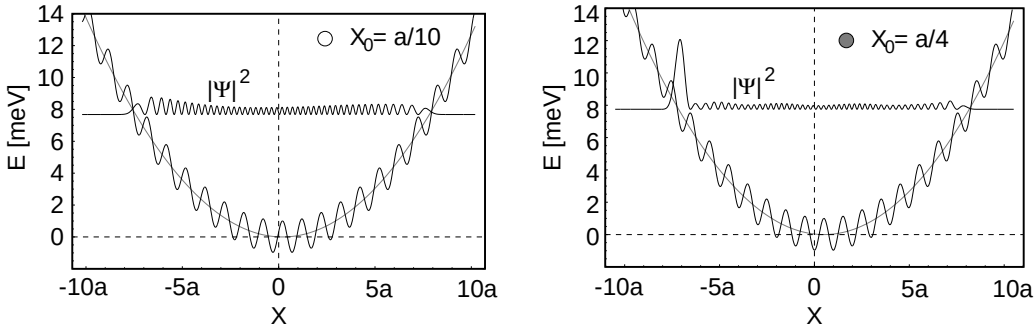


Abbildung 3.12: Betragsquadrat der Wellenfunktion der in Abbildung 3.10 markierten Zustände mit effektiven Potential in Abhängigkeit vom Ort X. Die graue Parabel markiert den Beitrag des Magnetfeldes zum effektiven Potential.

den Wellencharakter der Elektronen geknüpft ist und von den klassischen Bewegungsgleichungen nicht erfaßt wird.

Die Untersuchung der Wellenfunktion unterstützt die Beschreibung der Bandstruktur mit dem Wechselspiel von gebundenen und ungebundenen Zuständen. In Abbildung 3.12 ist in dem effektiven Potential (durchgezogene Linie) in x-Richtung, das durch das Vektorpotential der Modulation (grau) und das Modulationspotential gebildet wird, die Wellenfunktion der in Abbildung 3.10 markierten Zustände eingezeichnet. Die Wellenfunktionen an den stark dispersiven Teilstücken eines magnetischen Minibandes sind in x-Richtung in einem lokalen Minimum des effektiven Potentials lokalisiert ($X_0 = \frac{a}{4}$), während sie an flachen Teilstücken ($X_0 = \frac{a}{10}$) über das ganze effektive Potential ausgedehnt sind.

Unter der Annahme, daß die Geschwindigkeitsmatrixelemente in Gleichung (2.37) unabhängig von den Quantenzahlen sind, ist die Leitfähigkeit proportional dem Quadrat der Zustandsdichte an der Fermi-Kante. Mit steigendem Magnetfeld spreizen die Landau-Niveaus auf und passieren die Fermi-Energie. Auf diesem Wege übersetzt sich die Energieabhängigkeit der Zustandsdichte in die Magnetoleitfähigkeit. Dabei wird aber nicht beachtet, daß zwischen Zuständen von dispersiven Minibandstücken und Zuständen von flachen Minibandstücken sich die Eigenzustände in der Lokalisierung unterscheiden, was sich ebenfalls auf die Leitfähigkeit auswirkt. Im nächsten Abschnitt wird nun die Kubo-Formel ausgewertet, welche die Beschaffenheit der zur Leitfähigkeit beitragenden Eigenfunktionen mit den Geschwindigkeitsmatrixelementen berücksichtigt.

3.3 Magnetotransportrechnung

Aufbauend auf der magnetischen Minibandstruktur wird mit Auswertung der Kubo-Formel die Leitfähigkeit berechnet. Die Streuung wird in der C-Zahl-Näherung berücksichtigt. Die Selbstenergie ergibt sich analog zu Gleichung (2.33) aus

$$\Sigma^+ = \Gamma^2 \sum_n \int_{-a/2}^{a/2} \frac{dX_0}{a}\, G^+_{nX_0}. \tag{3.12}$$

Die Quantenzahl n bezeichnet jetzt nicht mehr den Landau-Index, sondern den magnetischen Minibandindex oder Landau-Bandindex. In Gleichung (2.37) muß nun auch über die Zentrumskoordinate integriert werden, und die Eigenzustände werden durch den Landau-Bandindex und die Zentrumskoordinate bezeichnet. Es gilt:

$$\sigma_{\mu\mu} = \frac{e^2\pi\hbar}{L_x L_y} \int dE(-\frac{df_0}{dE}) \sum_{n_1 n_2} \int_{-a/2}^{a/2} \frac{dX_0}{a}\, |\langle n_1 X_0|v_\mu|n_2 X_0\rangle|^2\, A_{n_1 X_0}\, A_{n_2 X_0}. \tag{3.13}$$

Hier gibt es nun im Unterschied zum homogenen 2DES auch Beiträge für $n_1 = n_2$, die Intra-Miniband-Leitfähigkeit oder Bandleitfähigkeit genannt werden, und solche für $n_1 \neq n_2$, die Inter-Miniband-Leitfähigkeit oder Streuleitfähigkeit heißen. Für eindimensionale Modulation in x-Richtung verschwindet das Matrixelement $\langle nX_0|v_x|nX_0\rangle$, so daß zur Leitfähigkeit in x-Richtung nur die Inter-Miniband-Leitfähigkeit beiträgt.

In Abbildung 3.13 ist die Leitfähigkeit in x-Richtung für zwei verschiedene Temperaturen dargestellt. Das System in einer GaAs-Heterostruktur ($m^* = 0.0665\, m_e$) ist mit der Gitterkonstante $a = 100\,\mathrm{nm}$ und der Modulationsamplitude $V_0 = 2.0\,\mathrm{meV}$ beschrieben. Die Elektronendichte von $n_\mathrm{s} = 2.0 \times 10^{15}\,\mathrm{m}^{-2}$ entspricht einer Fermi-Energie von $E_\mathrm{F} = 7.2\,\mathrm{meV}$ und als Nullfeldbeweglichkeit wurde $\mu = 50\,\mathrm{m}^2/\mathrm{Vs}$ angesetzt. Die Leitfähigkeit ist über das inverse Magnetfeld $1/B$ dargestellt, um die charakteristische Periodizität der Oszillationen hervorzuheben. Für hohe Magnetfelder, also kleine $1/B$-Werte, reproduzieren die Rechnungen die SdH-Oszillationen mit $\Delta^{\mathrm{SdH}}_{1/B} = 0.24\,\mathrm{T}^{-1}$. Für kleine Magnetfelder entspricht die $1/B$-Periodizität $\Delta^{\mathrm{MB}}_{1/B} = 0.37\,\mathrm{T}^{-1}$ den, durch die semiklassische Argumentation in den vorhergehenden Abschnitten erklärten, Miniband-Oszillationen. Bei Erhöhung der Temperatur verschwinden diese Oszillationen schnell, wie es auch im Experiment [Albr99] beobachtet wurde. Es bleiben die Kommensurabilitäts-Oszillationen mit $\Delta^{\mathrm{CO}}_{1/B} = 0.68\,\mathrm{T}^{-1}$ übrig, wie sie in der gestrichelten Kurve zu

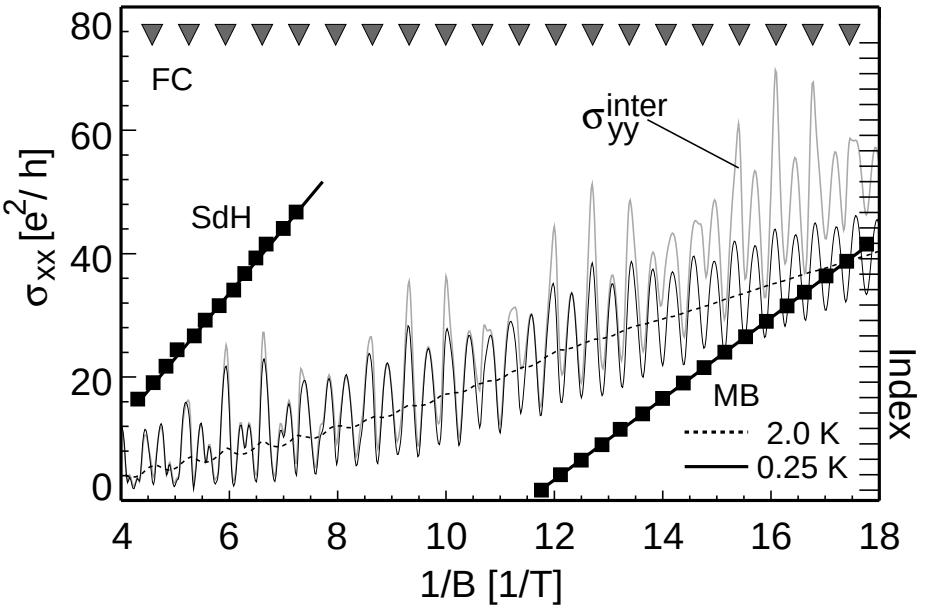


Abbildung 3.13: Berechnete Streuleitfähigkeit $\sigma_{xx} = \sigma_{xx}^{\text{inter}}$ (schwarz) und $\sigma_{yy}^{\text{inter}}$ (grau) für zwei Temperaturen $T = 0.25\,\text{K}$ (durchgezogen) und $T = 2.0\,\text{K}$ (gestrichelt) in einem 2DES in GaAs ($m^* = 0.0665\,m_e$) für eine Beweglichkeit von $50\,\text{m}^2/\text{Vs}$, Gitterkonstante $a = 100\,\text{nm}$ und $V_0 = 2.0\,\text{meV}$. Die Elektronendichte $n_\text{s} = 2.0 \times 10^{15}\,\text{m}^{-2}$ entspricht der Fermi-Energie $E_\text{F} = 7.2\,\text{meV}$. Die Flachbandbedingungen (FC) der CO sind markiert durch Dreiecke. Desweiteren sind die $1/B$-Periodizitäten der SdH- und der Miniband-Oszillationen (MB) markiert.

erkennen sind. Zusätzlich ist in Abbildung 3.13 der Inter-Miniband-Leitfähigkeitsbeitrag $\sigma_{yy}^{\text{inter}}$ der Leitfähigkeit in y-Richtung abgebildet, der sich in Amplitude und Phase kaum von σ_{xx} unterscheidet.

In Abbildung 3.14 ist die Leitfähigkeitskomponente senkrecht zur Modulationsrichtung σ_{yy} abgebildet, die nun auch Intra-Miniband-Beiträge beinhaltet. Für die gewählten Parameter zeigt sich beim Vergleich der Skalen von Abbildung 3.13 und 3.14 eine Dominanz der Bandleitfähigkeit. Wieder lassen sich SdH-, Weiss- und Miniband-Oszillationen erkennen. Einen weiteren Hinweis für die Dominanz der Bandleitfähigkeit gibt die Phasenlage der Weiss-Oszillationen. In der Rechnung zu 2.0 K sind die Maxima in σ_{xx} für hohe Magnetfelder an der Kommensurabilitätsbedingung, während σ_{yy} dazwischen maximal wird.

Um die Quantenoszillationen vom Untergrund zu trennen, ist in Abbil-

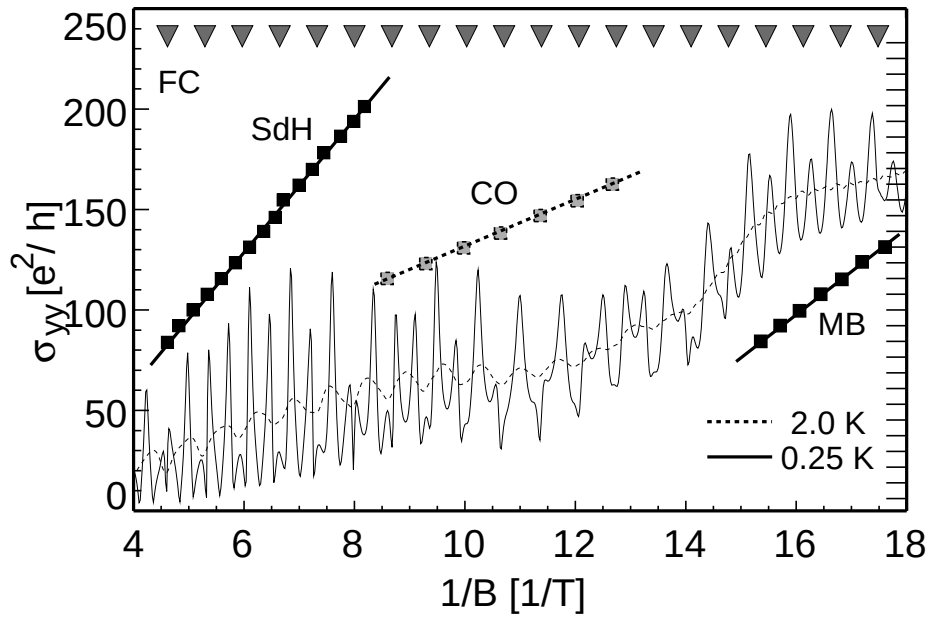


Abbildung 3.14: Berechnete Leitfähigkeit σ_{yy} für die gleichen Parameter wie in Abbildung 3.13. Neben der $1/B$-Periodizität von SdH und MB sind die Kommensurabilitäts-Oszillationen (CO) markiert.

dung 3.15 die Differenz $\Delta\sigma = \sigma(0.25\,\mathrm{K}) - \sigma(2.0\,\mathrm{K})$ der Leitfähigkeiten bei der Temperatur $T = 0.25\,\mathrm{K}$, wenn die Quantenoszillationen beobachtbar sind, und bei $T = 2.0\,\mathrm{K}$, wenn die Quantenoszillationen nicht mehr aufgelöst werden, abgebildet. Es wird deutlich, daß die beiden Leitfähigkeiten parallel und senkrecht zur Modulationsrichtung genau gegenphasig oszillieren. Dies läßt sich anhand der verschiedenen dominierenden Leitfähigkeitsmechanismen verstehen. Während die Inter-Miniband-Leitfähigkeit, die den einzigen Beitrag zu σ_{xx} bildet, mit der Zustandsdichte an der Fermi-Kante korreliert und genau dann maximal wird, wenn die Zustandsdichte maximal wird, besteht für die Intra-Miniband-Leitfähigkeit, die in der Komponente σ_{yy} dominiert, der umgekehrte Zusammenhang. Immer dann, wenn ein stark dispersives Teilstück des magnetischen Minibandes die Fermi-Kante passiert, wird die Zustandsdichte minimal.

Während für die Kommensurabilitäts-Oszillationen der experimentelle Nachweis der Gegenphasigkeit der Magnetowiderstandsoszillationen in den unterschiedlichen Widerstandskomponenten geliefert wurde [Weis92], steht der experimentelle Nachweis für die gegenphasigen Quantenoszillationen auf Grund der Minibandstruktur momentan noch aus. Er wird aber weiteres

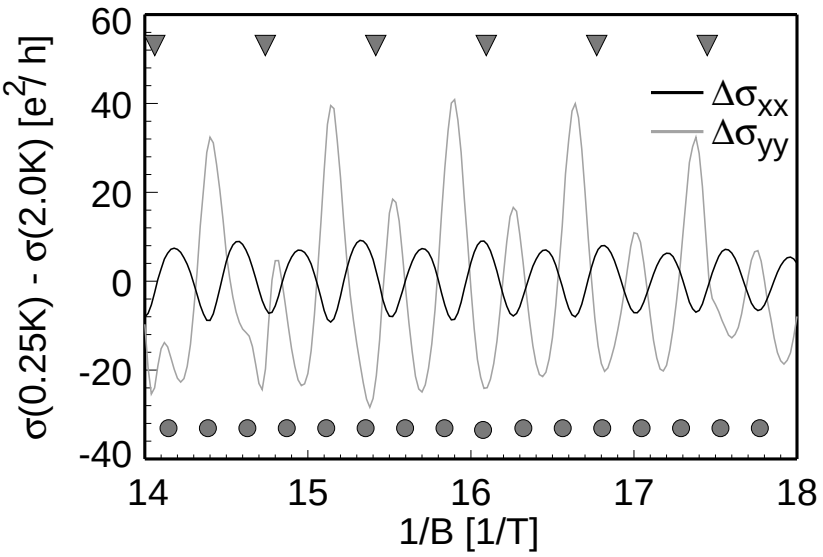


Abbildung 3.15: Differenz der Leitfähigkeiten bei den Termperaturen $T = 0.25\,\mathrm{K}$ und $T = 2.0\,\mathrm{K}$ mit den Parametern von Abbildung 3.13. Die Magnetfelder der SdH-Maximas sind durch Kreise markiert.

Verständnis für das Zusammenspiel von Streu- und Band-Leitfähigkeit geben. Das Auftreten von gegenphasigen Quantenoszillationen würde aufzeigen, daß die einfache Näherung, die Leitfähigkeit sei proportional zum Zustandsdichtequadrat an der Fermi-Kante, nicht mehr stimmt, wenn der Ladungstransport im Magnetfeld von offenen Elektronenbahnen getragen wird. Darüberhinaus wäre der Nachweis für die magnetische Minibandstruktur erbracht.

Für 2D-Übergitter ist die Phasenlage der Miniband-Oszillationen ebenso durch den dominierenden Leitfähigkeitsmechanismus gegeben. Allerdings lassen sich die Mechanismen nicht wie beim 1D modulierten 2DES in den verschiedenen Leitfähigkeitkomponenten separieren, und so ist der direkte experimentelle Nachweis der magnetischen Minibandstruktur nur für das 1D-Übergitter möglich.

Die Miniband-Oszillationen treten auch in Systemen mit einer magnetischen Modulation auf. Dies wurde durch die Berechnungen dieser Quantenoszillationen für den Fall einer magnetischen 1D-Modulation [Lech02] nachgewiesen.

KAPITEL 4

Spin-Bahn-Wechselwirkung im 2DES

In diesem Kapitel wird die Spin-Bahn-Wechselwirkung in ihrem Einfluß auf die Leitfähigkeit für ein homogenes 2DES im Magnetfeld studiert. Dazu werden zunächst das Energiespektrum und die Eigenfunktionen der Elektronen mit Spin-Bahn-Wechselwirkung beschrieben. Durch die Spin-Bahn-Kopplung ist die Spin-Quantenzahl der Elektronen keine Erhaltungsgröße mehr. Im Magnetfeld können die Eigenzustände durch einen Landau-Index und die Helizität charakterisiert werden. Mit Variation des externen Magnetfeldes kommt es durch die Spin-Bahn-Wechselwirkung zu einem Überkreuzen von Landau-Niveaus verschiedener Helizität. Zur Berechnung der Leitfähigkeit wird die Behandlung der Störstellen in der selbstkonsistenten Bornschen Näherung für das Elektronensystem mit Spin-Bahn-Wechselwirkung durch die Einführung einer Helizität-abhängigen Selbstenergie erweitert. Die Berücksichtigung des Spin-Freiheitsgrades in der Streuung zeigt, daß bei Spin-erhaltender Streuung die Streuverbreiterung für Spin-Bahn-gekoppelte Zustände vermindert wird, wenn die Landau-Niveaus mit unterschiedlicher Helizität nicht entartet sind. An den Kreuzungspunkten der Landau-Niveaus dagegen hybridisiert die Selbstenergie und der unterschiedliche Einfluß der Streuung

zwischen Spin-Bahn-gekoppelten Zuständen zu Spin-Eigenzuständen verschwindet. Über diesen Mechanismus schlägt sich das Überkreuzen der Landau-Niveaus in der Leitfähigkeit nieder.

4.1 Energiespektrum und Eigenfunktionen

Durch die Halbleiter-Heterostruktur, mit der das 2DES erzeugt wird, ist die Translationssymmetrie des Kristalls zerstört. Für die im Confinement eingeschlossenen Ladungsträger läßt sich wie in Kapitel 1 beschrieben in der Envelope-Funktions-Näherung aus der Bandstruktur des Halbleiters ein effektiver Hamiltonian entwickeln. Die $\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}$-Entwicklung liefert unter Berücksichtigung von Leitungsband, Lochband (schwere und leichte Löcher) und dem Spin-split-off-Band einen Term, der wie der Spin-Bahn-Term der relativistischen Theorie ein Kreuzprodukt aus Spin und Impuls der Elektronen beinhaltet. Er führt zu einer Kopplung der Bewegung im Spin-Raum an die Bewegung im Orts-Raum und wird durch die Asymmetrie des Confinementpotentials bestimmt, welche eventuell extern reguliert werden kann [Nitt97]. Die Spin-Bahn-Wechselwirkung, die durch Auszeichnung einer Achse entsteht, wird Rashba-Term [Rash60] genannt. Im Fall der Halbleiter-Heterostruktur ist die ausgezeichnete Achse die Wachstumsrichtung.

Bereits ohne Magnetfeld führt dieser Term zu einer Aufspaltung der Spin-Zustände $E^u(\boldsymbol{k}) \neq E^d(\boldsymbol{k})$. Die Spin-Zustände sind mit der z-Richtung als Quantisierungsachse mit *up* (u) und *down* (d) bezeichnet. Da durch das elektrische Feld nur die Rauminversions-Symmetrie nicht aber die Zeitumkehr-Symmetrie gebrochen wird, liegt die Kramers-Entartung [Hell94] $E^u(\boldsymbol{k}) = E^d(-\boldsymbol{k})$ allerdings noch vor, welche erst im Magnetfeld gebrochen ist.

Der effektive Hamiltonian für die Ladungsträger im Leitungsband ist in Gleichung (1.17) nach [Darn93] angegeben. Da der Darwin-Term nicht mit dem Spin zusammenhängt, wird er im Folgenden nicht mehr berücksichtigt. Der Hamiltonian besteht nun aus dem kinetischen Anteil ($\boldsymbol{\pi}$ bezeichnet den kinetischen Impuls), dem Rashba-Term und dem Zeeman-Term,

$$H = \frac{1}{2m^*}\boldsymbol{\pi}^2 + \tilde{\alpha}\,\boldsymbol{\sigma}\,(\boldsymbol{\nabla}V \times \boldsymbol{\pi}) + \frac{1}{2}g^*\mu_{\mathrm{B}}\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{B}, \tag{4.1}$$

wobei $\boldsymbol{\sigma}$ wieder den Vektor der Pauli-Spinmatrizen aus Gleichung (1.22) darstellt. Der Vorfaktor $\tilde{\alpha}$ des Rashba-Terms nach Gleichung (1.19) ist vom Halbleitermaterial abhängig. Im folgenden orientieren sich die Parameter an InAs. Für InAs ist die Energielücke zwischen Leitungsband und Valenzband in der gleichen Größenordnung mit der Abspaltung des Spin-split-off-Bandes von der Valenzbandkante und der Rashba-Term ist somit nicht mehr, wie z.B.

in GaAs, vernachlässigbar klein. Für die Elektronen im 2DES, die sich in der xy-Ebene bewegen, ist für einen asymmetrischen Quantentrog die Inversionssymmetrie in z-Richtung gebrochen. Wird die Ableitung des Potentials nach dem Ort in den Vorfaktor $\boldsymbol{\alpha} = \tilde{\alpha}\hbar\boldsymbol{\nabla}V$ eingearbeitet, so gilt, wenn nur die Ableitung nach der z-Komponente des Potentials $V(\boldsymbol{r})$ nicht verschwindet, $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z) = (0, 0, \alpha_z)$. Da die z-Richtung weiter nicht mehr berücksichtigt wird, sei der Erwartungswert der Ableitung des Potentials nach dem Ort $\langle\boldsymbol{\nabla}V\rangle$ für die Elektronen des 2DES verwendet. Jetzt sind sowohl die Materialparameter als auch der Potentialgradient, die beide die Stärke der Spin-Bahn-Kopplung bestimmen, im Vorfaktor α_z zusammengefaßt . Für das Magnetfeld senkrecht zur Bewegungsebene der Elektronen $\boldsymbol{B} = B\hat{\boldsymbol{e}}_z$ läßt sich der Hamiltonian aus Gleichung (4.1) durch

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2m^*}\left(\pi_x^2 + \pi_y^2\right) - \frac{\alpha_z}{\hbar}\left(\sigma_x\pi_y - \sigma_y\pi_x\right) + \frac{1}{2}g^*\mu_\mathrm{B}\sigma_z B = \\ &= \frac{1}{2m^*}\left(\pi_x^2 + \pi_y^2\right) - \frac{\alpha_z}{\hbar}\begin{pmatrix} 0 & \pi_y + i\pi_x \\ \pi_y - i\pi_x & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}g^*\mu_\mathrm{B}B\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{4.2}$$

ausdrücken. Während die Spin-Aufspaltung durch den Zeeman-Term für den Grenzfall $B \to 0$ verschwindet, bleibt die Aufspaltung durch den Spin-Bahn-Term erhalten. Für verschwindendes Magnetfeld $B = 0$ lautet die Energiedispersion

$$E_{\boldsymbol{k}} = \frac{\hbar^2\boldsymbol{k}^2}{2m^*} \pm \alpha_z|\boldsymbol{k}|. \tag{4.3}$$

Sie besteht für ein eindimensionales System, z.B. $k_x = 0$, aus zwei Parabeln, deren Ursprung gegeneinander verschoben ist. Für das zweidimensionale System wird diese Figur um den Ursprung des $\boldsymbol{k}$-Raumes rotiert.

Die Spin-Bahn-Wechselwirkung führt zu einer Spin-Aufspaltung des Leitungsbandes von

$$\Delta_\mathrm{SO} = 2\alpha_z|\boldsymbol{k}| \tag{4.4}$$

für Zustände mit gleichem Wellenvektor $\boldsymbol{k}$.[1] Diese Spin-Aufspaltung wurde in verschiedenen Experimenten an den unterschiedlichsten Materialsystemen untersucht. Im Experiment besteht die Schwierigkeit, daß die Spinaufspaltung gewöhnlich an der Fermi-Energie bestimmt wird und somit auch von der Elektronendichte abhängt. Außerdem sind in dem einfachen Modell aus Gleichung (4.4) weder die Nichtparabolizität der Energiedispersion

[1] Der Parameter α_z hat die Einheiten einer Energie mal Länge (eVm für Elektronenvolt Meter), während der später eingeführte Parameter $\bar{\alpha}_z$ für eine $\boldsymbol{k}$-unabhängige Spin-Bahn-Kopplung die Einheit einer Energie hat (meV für Millielektronenvolt).

noch andere Effekte der Kristall-Struktur, wie z.B. der BIA-Term, berücksichtigt. Wie in [Wink94] anhand selbstkonsistenter Bandstrukturrechnungen für Heterostrukturen gezeigt wurde, führen diese Effekte dazu, daß die Spin-Aufspaltung nicht mehr linear von k abhängt und anisotrop wird. Im Experiment lassen sich die verschiedenen Effekte schwer diskriminieren. In [Nitt97, Heid98, Schä98, Hu99] wurde die Aufspaltung des Leitungsbandes in Magnetotransportexperimenten durch Analyse der Frequenzen der SdH-Oszillationen für 2DES in InAs-basierten Heterostrukturen bestimmt. Daraus wurde mit verschiedenen Modellen die Spin-Bahn-Kopplungskonstante α_z in der Größenordnung von 10^{-11} eVm ermittelt und nachgewiesen, daß sich α_z über die Spannung an einem flächigen Gate, das die Asymmetrie des Quantentrogs bestimmt, beeinflussen läßt. Damit wurde auch ausgeschlossen, daß der Ursprung der Spin-Aufspaltung im BIA-Term liegt.

Führt man das Magnetfeld über die Peierls-Ersetzung ein und formuliert den Hamiltonian aus Gleichung (4.2) für das 2DES mit Magnetfeld in den Leiteroperatoren, wie sie im Anhang B beschrieben sind, erhält man

$$H = \hbar\omega_c \begin{pmatrix} a^\dagger a + \frac{1}{2} + \beta & \alpha a \\ \alpha a^\dagger & a^\dagger a + \frac{1}{2} - \beta \end{pmatrix}. \tag{4.5}$$

mit

$$\beta = \frac{g^* \mu_B B}{2\hbar\omega_c} \tag{4.6}$$

und

$$\alpha = -\frac{\alpha_z \sqrt{2}}{\lambda_c \hbar\omega_c}. \tag{4.7}$$

In Abbildung 4.1(a) ist das Energiespektrum für $B = 0$ und $B \neq 0$ zunächst ohne Spin-Bahn-Wechselwirkung nur mit Zeeman-Term für in InAs typische Parameter aufgetragen. Während für $B = 0$ keine Spin-Aufspaltung vorhanden ist, führt der Zeeman-Term zu einer proportional zur Landau-Aufspaltung mit steigendem Magnetfeld zunehmenden Spin-Aufspaltung. Dagegen zeigt Abbildung 4.1(b) das Energiespektrum mit Spin-Bahn-Wechselwirkung, wobei $\alpha_z = 2.0 \cdot 10^{-11}$ eVm berücksichtigt wurde. Es ist deutlich zu ersehen, daß die Spin-Bahn-Wechselwirkung zu einem Überkreuzen von Landau-Niveaus führt. Verknüpft man die SdH-Oszillationen im Magnetotransport mit der Zustandsdichte an der Fermi-Energie, wird deutlich, daß die Spin-Bahn-Wechselwirkung zu einer Schwebung führt, wie sie zur Bestimmung von α_z in den oben angeführten Experimenten verwendet wurde. Analysiert man die Eigenfunktionen [Rash60], ergibt sich, daß sie nicht

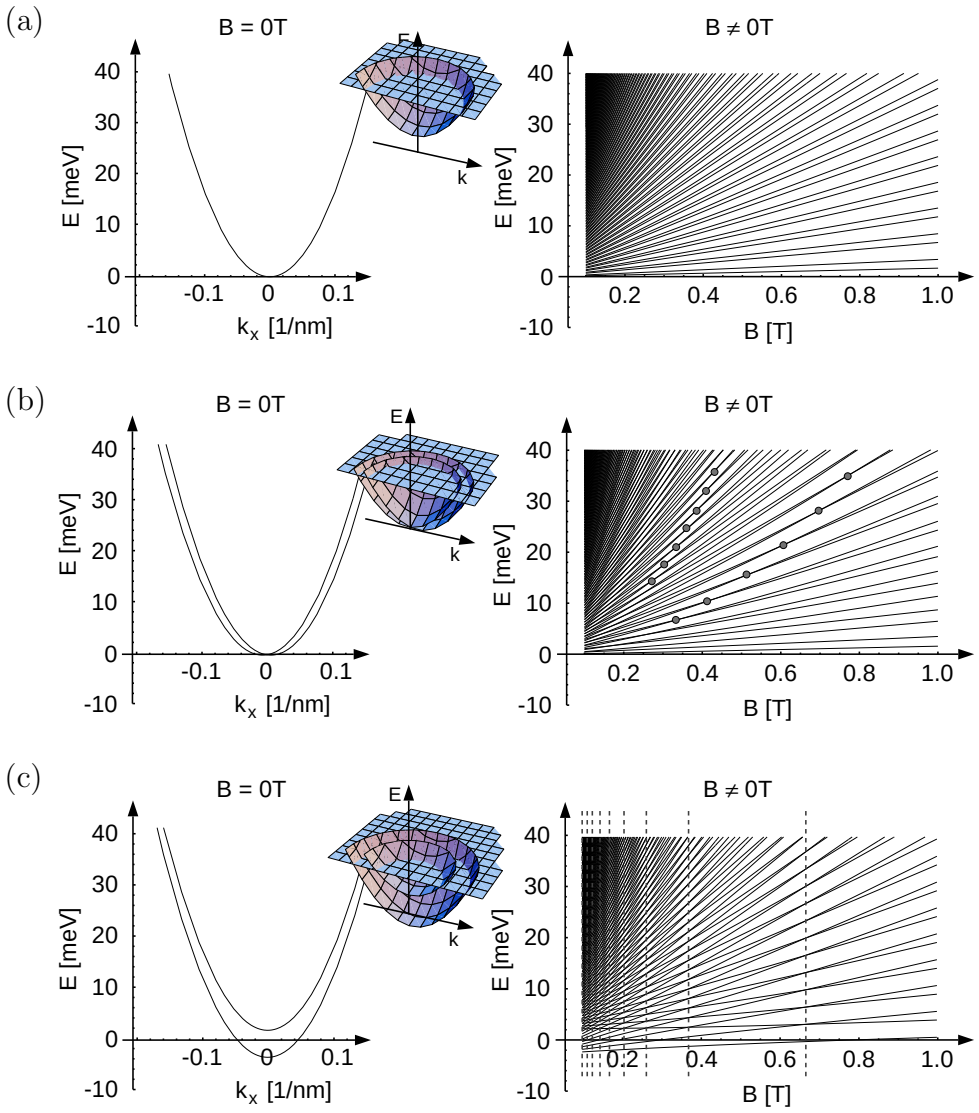


Abbildung 4.1: Energiedispersion ohne Magnetfeld $B = 0$ (links) und Energiespektrum in Abhängigkeit vom Magnetfeld B (rechts) für Elektronen in InAs ($m^* = 0.0229\, m_e$, $g^* = -14.9$) (a) ohne Spin-Bahn-Wechselwirkung $\alpha_z = 0\,\mathrm{eVm}$; (b) mit Spin-Bahn-Wechselwirkung $\alpha_z = 2.0 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{eVm}$; (c) mit konstanter Spin-Bahn-Wechselwirkung $\bar{\alpha}_z = 2.5\,\mathrm{meV}$. Im Landau-Fächer von (b) markieren die Kreise die Kreuzungspunkte von Landau-Niveaus und in(c) sind die Magnetfelder nach Gleichung (4.27) mit gestrichelten Linien markiert. Der Inset in der Mitte verdeutlicht jeweils die Energiedispersion ohne Magnetfeld in der Nähe von $\boldsymbol{k} = \mathbf{0}$.

mehr in Spin-*up*/Spin-*down* Zustände eingeteilt werden können. Die Spin-Quantenzahl wird ersetzt durch die Helizität und die Elektronen lassen sich einteilen nach *rechts*-(r)- und *links*-(l)-Zuständen. Für $|\beta| < \frac{1}{2}$ lauten die Eigenzustände nun

$$|\Psi_{rn}\rangle = \begin{pmatrix} c^u_{rn}\Phi_n \\ c^d_{rn}\Phi_{n+1} \end{pmatrix} \text{ und } |\Psi_{ln}\rangle = \begin{pmatrix} c^u_{ln}\Phi_{n-1} \\ c^d_{ln}\Phi_n \end{pmatrix}, \tag{4.8}$$

wobei die Komponenten des Spinors weiterhin *up*/*down*-Zustände in Bezug auf die Magnetfeldachse senkrecht zum zweidimensionalen Elektronengas bezeichnen und Φ_n die Eigenzustände der Elektronen im Magnetfeld nach Anhang B sind. Die Koeffizienten lauten für die *rechts*-Zustände

$$c^u_{nr} = \frac{\alpha\sqrt{n+1}}{\sqrt{(n+1)\alpha^2 + \left((\frac{1}{2}-\beta) - \sqrt{d_r}\right)^2}}, \tag{4.9}$$

$$c^d_{nr} = \frac{\left(\frac{1}{2}-\beta-\sqrt{d_r}\right)}{\sqrt{(n+1)\alpha^2 + \left((\frac{1}{2}-\beta) - \sqrt{d_r}\right)^2}}, \tag{4.10}$$

$$\tag{4.11}$$

und für *links*-Zustände

$$c^u_{nl} = \frac{\alpha\sqrt{n}}{\sqrt{n\alpha^2 + \left((\frac{1}{2}-\beta) + \sqrt{d_l}\right)^2}}, \tag{4.12}$$

$$c^d_{nl} = \frac{\left(\frac{1}{2}-\beta+\sqrt{d_l}\right)}{\sqrt{n\alpha^2 + \left((\frac{1}{2}-\beta) + \sqrt{d_l}\right)^2}}, \tag{4.13}$$

$$\tag{4.14}$$

mit $d_r = \sqrt{(n+1)\alpha^2 + (\frac{1}{2}-\beta)^2}$ und $d_l = \sqrt{n\alpha^2 + (\frac{1}{2}-\beta)^2}$. Die zugehörigen Energiewerte lauten

$$E_{nr} = \hbar\omega_c \left(1 + n - \sqrt{(n+1)\alpha^2 + \left(\tfrac{1}{2}-\beta\right)^2}\right), \tag{4.15}$$

$$E_{nl} = \hbar\omega_c \left(n + \sqrt{n\alpha^2 + \left(\tfrac{1}{2}-\beta\right)^2}\right). \tag{4.16}$$

Die Quantenzahl $n = 0, 1, 2, \ldots$ zählt die Zustände durch. Die Eigenzustände aus der Gleichung (4.8) lassen sich mit dem Landau-Index n und der Helizität τ elegant ausdrücken mit

$$|n, \tau\rangle = \sum_\sigma c^\sigma_{n\tau} \left|n - \tfrac{\sigma-\tau}{2}, \sigma\right\rangle, \tag{4.17}$$

wobei die Helizität τ die Zustände nach *rechts:* $\tau = 1$ und *links:* $\tau = -1$ klassifiziert. Die Spin-Quantenzahl σ nimmt die Werte *up:* $\sigma = 1$ und *down:* $\sigma = -1$ an. Die Quantenzahlen *rechts* und *links* sind so konstruiert, daß die *rechts*-Zustände sich für verschwindende Spin-Bahn-Wechselwirkung in *up*-Zustände entwickeln und *links* in *down*. Für $|\beta| > \frac{1}{2}$ müßte den Zuständen ein anderer Landau-Index passend zugewiesen werden.

Die Koeffizienten $c^{\sigma}_{n\tau}$ hängen neben α und β auch von der Quantenzahl n ab, was sie für die Durchführung der SCBA im Hinblick auf eine Quantenzahl-unabhängige Selbstenergie ungeeignet macht. In der Leitfähigkeit sind hauptsächlich die Zustände an der Fermi-Kante relevant, für die bei kleinen Magnetfeldern B der Landau-Index groß gegen eins ist ($n \gg 1$). Damit ist es naheliegend, die n-Abhängigkeit der Koeffizienten zu vernachlässigen und eine konstante Spin-Bahn-Aufspaltung anzunehmen. Dies wird mit der Ersetzung

$$\alpha\sqrt{n+\frac{1}{2}} \to \bar{\alpha} \tag{4.18}$$

mit

$$\bar{\alpha} = \tfrac{\bar{\alpha}_z}{2\hbar\omega_c} \tag{4.19}$$

erreicht. Unter Beibehaltung des Charakters der Eigenzustände als Kombination von *up* und *down* Zuständen und der Näherung $\frac{n+1}{n} \to 1$, die für große Quantenzahlen gerechtfertigt ist, lauten die Quantenzahl-unabhängigen Entwicklungskoeffizienten nun:

$$c^u_r = \frac{\bar{\alpha}}{\sqrt{\bar{\alpha}^2 + \left((\frac{1}{2}-\beta) - \sqrt{\bar{d}}\right)^2}}, \tag{4.20}$$

$$c^d_r = \frac{\left(\frac{1}{2}-\beta-\sqrt{\bar{d}}\right)}{\sqrt{\bar{\alpha}^2 + \left((\frac{1}{2}-\beta) - \sqrt{\bar{d}}\right)^2}} \tag{4.21}$$

$$\tag{4.22}$$

und

$$c^u_l = \frac{\bar{\alpha}}{\sqrt{\bar{\alpha}^2 + \left((\frac{1}{2}-\beta) + \sqrt{\bar{d}}\right)^2}}, \tag{4.23}$$

$$c^d_l = \frac{\left(\frac{1}{2}-\beta+\sqrt{\bar{d}}\right)}{\sqrt{\bar{\alpha}^2 + \left((\frac{1}{2}-\beta) + \sqrt{\bar{d}}\right)^2}} \tag{4.24}$$

mit $\bar{d} = \sqrt{\bar{\alpha}^2 + (\frac{1}{2} - \beta)^2}$. Die zugehörigen Eigenenergien sind über

$$E_{nr} = \hbar\omega_c \left(1 + n - \sqrt{\bar{\alpha}^2 + \left(\tfrac{1}{2} - \beta\right)^2}\right), \tag{4.25}$$

$$E_{nl} = \hbar\omega_c \left(n + \sqrt{\bar{\alpha}^2 + \left(\tfrac{1}{2} - \beta\right)^2}\right) \tag{4.26}$$

gegeben, mit n : ganzzahlig. Für verschwindende Spin-Bahn-Wechselwirkung gehen die *rechts*-Zustände wieder in *up* und die *links*-Zustände in *down* über. Das Energiespektrum für die konstante Spin-Aufspaltung durch Spin-Bahn-Wechselwirkung ist in Abbildung 4.1(c) gezeigt. Das Überkreuzen der Landau-Niveaus findet nun für alle Niveaus gleichzeitig bei den Magnetfeldern

$$B_j = \frac{\bar{\alpha}_z m^*}{2\hbar e \sqrt{\frac{1}{4} j^2 - \left(\frac{1}{2} - \frac{g^* \mu_B m^*}{\hbar e}\right)^2}} \tag{4.27}$$

mit $j = 1, 2, \ldots$ statt. Die Magnetfelder sind in Abbildung 4.1(c) (rechts) markiert. Für verschwindendes Magnetfeld lautet die Energiedispersion

$$E_{\boldsymbol{k}} = \frac{\hbar^2 \boldsymbol{k}^2}{2m^*} \pm \bar{\alpha}_z \tag{4.28}$$

und die Spin-Aufspaltung beträgt

$$\Delta_{\mathrm{SO}} = 2\bar{\alpha}_z. \tag{4.29}$$

Sie ist unabhängig vom Wellenvektor der Elektronen. In [Luo90] wurde bereits über ein solches Modell nachgedacht, allerdings ohne die Eigenzustände zu betrachten. Realistische Berechnungen der Spin-Aufspaltung ergeben eine Sättigung der Spin-Aufspaltung für wachsenden Wellenvektor [Wink94] auf Grund der Nichtparabolizität des Leitungsbandes. In Experimenten wurde mit Bestimmung der Spin-Aufspaltung bei Veränderung der Elektronendichte dieser Sachverhalt bestätigt [Hu99]. Das Modell für die Spin-Bahn-Wechselwirkung mit konstanter Spin-Aufspaltung ist deshalb nicht nur eine gute Näherung für den Hamiltonian (4.1), wenn nur die für den Transport relevanten Zustände an der Fermi-Energie betrachtet werden, sondern beschreibt auch phänomenologisch die experimentelle Situation. Es beinhaltet die zwei wesentlichen Aspekte der Spin-Bahn-Wechselwirkung, nämlich das Überkreuzen der Landau-Niveaus und die Form der Eigenzustände als Überlagerung von *up* und *down* Spin-Zuständen mit verschiedener Landau-Quantenzahl des Systems ohne Spin-Bahn-Wechselwirkung. Für dieses Modell der konstanten Spin-Bahn-Wechselwirkung werden im folgenden die SCBA-Näherung mit einer Spin-abhängigen Selbstenergie erweitert und die Transportgrößen berechnet.

4.2 Erweiterung der SCBA für Spin-Bahn-Wechselwirkung

Für das 2DES mit Spin-Bahn-Wechselwirkung werden in einem ersten Schritt zur Berechnung der Leitfähigkeit nun in den Greenschen Funktionen, durch welche die Bewegung der Elektronen im System charakterisiert ist, Störstellen im Rahmen der SCBA berücksichtigt.

Die Spin-Quantenzahl ist beim Streuakt, der im Ortsraum eine Impulsänderung verursacht, eine Erhaltungsgröße. Eine Ausnahme bilden hierbei die Fälle der magnetischen Störstellen oder Spin-Bahn-Wechselwirkung mit dem Störstellenpotential, die hier aber nicht betrachtet werden. Somit sei das Potential der Störstellen $V_{\mathrm{I}}(\boldsymbol{r})$ diagonal in *up/down*-Zuständen, womit sichergestellt ist, daß bei einem Streuakt der Spin-Zustand (*up/down*) nicht beeinflußt wird.

Da aber im System mit Spin-Bahn-Kopplung der Impuls der Elektronen mit dem Spin verbunden ist, besteht die Möglichkeit, durch Impulsstreuung die Helizität zu ändern und von einem *rechts*-Zustand in einen *links*-Zustand und umgekehrt zu streuen. Das Streupotential ist also nicht diagonal in der Helizität der Zustände *rechts/links* des Systems mit Spin-Bahn-Wechselwirkung.

Für die Berechung der Störstellen-Mittelung wird nun Gleichung (2.31) mit den Eigenfunktionen des Systems mit Spin-Bahn-Wechselwirkung ausgewertet. Die Eigenzustände, über die in Gleichung (2.31) summiert wird, sind jetzt durch $\alpha = \{n, \tau\}$ und $\beta = \{m, \tilde{\tau}\}$ charakterisiert[2], wobei n, m den Landauindex bezeichnen und $\tau, \tilde{\tau}$ die Helizität. Wieder wird ein kurzreichweitiges Störstellenpotential verwendet, so daß die Fourier-Transformierte des Störstellenpotentials eine Konstante ist. Man erhält

$$\Gamma_{\alpha\beta\beta'\alpha'} = \Gamma^2 \sum_{\sigma\sigma'} \left(c^{\sigma}_{n\tau}\right)^* c^{\sigma}_{m\tilde{\tau}} \left(c^{\sigma'}_{m'\tilde{\tau}'}\right)^* c^{\sigma'}_{n'\tau'} \times \tag{4.30}$$

$$\times\, \delta_{n-\frac{\sigma-\tau}{2},n'-\frac{\sigma'-\tau'}{2}} \;\cdot\; \delta_{m-\frac{\sigma-\tilde{\tau}}{2},m'-\frac{\sigma'-\tilde{\tau}'}{2}}. \tag{4.31}$$

Die Streuverbreiterung Γ ist über Gleichung (2.35) mit der Nullfeldbeweglichkeit verbunden. Die beiden Kronecker-Symbole haben die Form

$$\delta_{n',n-\theta} \qquad \text{mit} \qquad \theta = \tfrac{1}{2}(\sigma - \sigma' - \tau + \tau') = -2, -1, 0, 1, 2 \tag{4.32}$$

$$\delta_{m',m-\mu} \qquad \text{mit} \qquad \mu = \tfrac{1}{2}(\sigma - \sigma' - \tilde{\tau} + \tilde{\tau}') = -2, -1, 0, 1, 2. \tag{4.33}$$

[2]Die griechischen Buchstaben α und β werden hier für die Indizierung der Zustände verwendet. Wenn α bzw. β als Index auftauchen, ist immer ein Zustand und nicht der Spin-Bahn-Kopplungsparameter bzw. nicht der Zeeman-Parameter gemeint. Somit besteht keine Verwechslungsgefahr.

Mit den Gleichungen der SCBA für die Selbstenergie und die Greenschen Funktionen (2.33) bzw. (2.34) folgt daraus, daß die Selbstenergie Σ und die Greensche Funktion G in den Orts-Quantenzahlen die Diagonalelemente $n = n'$, $m = m'$, sowie Elemente in der ersten $n' = n \pm 1$, $m' = m \pm 1$ und zweiten Nebendiagonalen $n' = n \pm 2$, $m' = m \pm 2$ haben. Außerdem hängen die Größen nun von der Helizität ab.

Um ein einfaches Gleichungssystem zur Bestimmung der Selbstenergie zu erhalten, werden die Nichtdiagonalelemente in den Ortsquantenzahlen mit $\theta = \mu = 0$ in den Gleichungen (4.32) und (4.33) vernachlässigt. Damit gilt $\sigma - \sigma' = \tau - \tau' = \tilde{\tau} - \tilde{\tau}'$. Diese Näherung wird hier als Diagonalnäherung in den Orts-Quantenzahlen bezeichnet. Sie ist für hohe Magnetfelder, wenn die Landau-Niveaus entkoppeln, gerechtfertigt, wird jedoch auch für kleine Magnetfelder beibehalten. So vereinfachen sich die Gleichungssysteme, und Selbstenergie sowie Greensche Funktion lassen sich schreiben als

$$\Sigma_{nn'}^{\tau\tau'} = \Sigma^{\tau\tau'}\delta_{nn'} \qquad \text{und} \qquad G_{mm'}^{\tau\tau'} = G_{m}^{\tau\tau'}\delta_{mm'}, \tag{4.34}$$

wobei G und Σ hier und im folgenden, um eine Überfülle an Indices zu vermeiden, die retardierte Greensche Funktion G^{+} bzw. Selbstenergie Σ^{+} bezeichnen. Desweiteren wird das Modell der konstanten Spin-Aufspaltung durch die Spin-Bahn-Wechselwirkung verwendet, wodurch die Abhängigkeit der Koeffizienten $c_{n\tau}^{\sigma}$ von der Ortsquantenzahl n entfällt. Für die Spin-Komponenten der Selbstenergie und der Greenschen Funktion gelten nun die Gleichungen:

$$\Sigma^{\tau\tau'} = \Gamma^2 \sum_{m} \sum_{\tilde{\tau}\tilde{\tau}'} \alpha_{\tilde{\tau}\tilde{\tau}'}^{\tau\tau'} G_{m}^{\tilde{\tau}\tilde{\tau}'} \tag{4.35}$$

mit

$$\alpha_{\tilde{\tau}\tilde{\tau}'}^{\tau\tau'} = \sum_{\sigma\sigma'} \left(c_{\tau}^{\sigma}\right)^{*} c_{\tilde{\tau}}^{\sigma} \left(c_{\tilde{\tau}'}^{\sigma'}\right)^{*} c_{\tau'}^{\sigma'}\, \delta_{\sigma-\sigma',\tau-\tau'}\, \delta_{\sigma-\sigma',\tilde{\tau}-\tilde{\tau}'} \tag{4.36}$$

und

$$\left(G_{m}^{-1}\right)^{\tau\tau'} = \left(G_{0m}^{\tau}\right)\delta_{\tau\tau'} - \Sigma^{\tau\tau'}. \tag{4.37}$$

Die Diagonalelemente der Selbstenergie in der Helizität ergeben sich mit $\Sigma^{\tau\tau} \equiv \Sigma^{\tau}$ und $G_{m}^{\tau\tau} \equiv G_{m}^{\tau}$ zu:

$$\Sigma^{\tau} = \Gamma^2 \sum_{m\tilde{\tau}} \alpha_{\tau\tilde{\tau}} G_{m}^{\tilde{\tau}}, \tag{4.38}$$

wobei gilt

$$\alpha_{\tilde{\tau}\tilde{\tau}'}^{\tau\tau} \equiv \alpha_{\tau\tilde{\tau}}\delta_{\tilde{\tau}\tilde{\tau}'} \quad \text{und} \quad \alpha_{\tau\tilde{\tau}} = \sum_{\sigma} \left|c_{\tau}^{\sigma}\right|^2 \left|c_{\tilde{\tau}}^{\sigma}\right|^2. \tag{4.39}$$

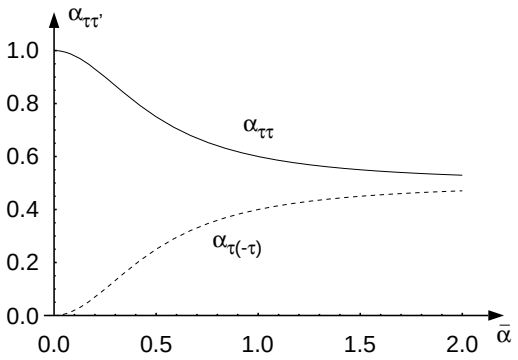


Abbildung 4.2: Abhängigkeit des Mischungskoeffizienten $\alpha_{\tau\tau'}$ aus Gleichung (4.39) von $\bar{\alpha}$ bei $\beta = 0$.

Für die Nicht-Diagonalelemente gilt

$$\Sigma^{\tau(-\tau)} = \Gamma^2 \sum_{m\tau} \beta_\tau G_m^{\tau(-\tau)} \tag{4.40}$$

mit

$$\alpha^{\tau(-\tau)}_{\tilde{\tau}\tilde{\tau}'} \equiv \beta_\tau \, \delta_{\tilde{\tau}\tau} \delta_{\tilde{\tau}'(-\tau)} \quad \text{und} \quad \beta_\tau = |c_\tau^\tau|^2 \, |c_{(-\tau)}^{(-\tau)}|^2 = \beta_{-\tau}. \tag{4.41}$$

Die Nicht-Diagonalelemente der Selbstenergie in der Helizität werden wiederum vernachlässigt. Für das im nächsten Abschnitt behandelte Zwei-Niveau-System stellt sich heraus, daß auch ohne Vernachlässigung der Nicht-Diagonalelemente apriori, also Tensorinversion von Gleichung (4.37), für die Nicht-Diagonalelemente $\Sigma^{\tau(-\tau)} \equiv 0$ eine Lösung ist. Da dies aber nicht die einzige Lösung sein und nicht im allgemeinen Fall mit allen Landau-Niveaus gelten muß, wird im folgenden von der Diagonalnäherung der Selbstenergie in der Helizität gesprochen.

Für die Zustandsdichte der *rechts/links*-Zustände analog zu Gleichung (2.36) besteht der Zusammenhang:

$$D^\tau(E) = \frac{1}{L_x L_y} \mathrm{Sp}\{A^\tau\} = -\frac{1}{(\pi \lambda_\mathrm{c} \Gamma)^2} \sum_{\tau'} (\alpha^{-1})_{\tau\tau'} \, \mathrm{Im} \left\{ \Sigma^{\tau'}(E) \right\}. \tag{4.42}$$

Die Abhängigkeit des Mischungsfaktors $\alpha_{\tau\tau'}$ von $\bar{\alpha}$ ist in Abbildung 4.2 dargestellt. Wie aus Gleichung (4.39) sofort zu ersehen ist, gilt:

$$\alpha_{\tau\tau} + \alpha_{\tau(-\tau)} = 1. \tag{4.43}$$

Für kleine $\bar{\alpha}$, d.h. wenn die Landau-Aufspaltung die Spin-Aufspaltung überwiegt, ist die von der Helizität abhängige Selbstenergie hauptsächlich durch die Zustände mit der gleichen Helizität bestimmt, d.h. der Mischungsfaktor $\alpha_{\tau\tau'}$ wird zu einem Kronecker-Delta $\alpha_{\tau\tau'} \to \delta_{\tau\tau'}$. Wenn die Spin-Aufspaltung die Landau-Aufspaltung überwiegt, also für $\bar{\alpha} > 1$, setzt sich die Selbstenergie aus beiden Spinkomponenten der Greenschen Funktionen zusammen und im Grenzfall $\bar{\alpha} \to \infty$ gilt $\alpha_{\tau\tau'} \to \frac{1}{2}$. Die Zeeman-Aufspaltung vergrößert oder verkleinert je nach Vorzeichen das Gewicht der Landau-Aufspaltung. Da die Landau-Aufspaltung proportional mit dem Magnetfeld wächst und die Aufspaltung durch die Spin-Bahn-Wechselwirkung dagegen konstant bleibt, nimmt mit steigendem Magnetfeld $\bar{\alpha}$ ab, wie es auch Gleichung (4.19) zu entnehmen ist, und für den Mischungskoeffizienten gilt wieder $\alpha_{\tau\tau'} \to \delta_{\tau\tau'}$.

Die Erweiterung der SCBA unterscheidet sich von der Quantenzahl-unabhängigen Selbstenergie insofern als die Selbstenergie von der Helizität-Quantenzahl abhängt und die Selbstenergie für die beiden Helizitäten nicht separat berechnet werden kann, da sie im Gleichungssystem (4.34) und (4.37) gekoppelt sind. Für verschwindende Spin-Bahn-Wechselwirkung geht die hier entwickelte Berechnung der Selbstenergie wieder in die übliche SCBA mit Quantenzahl-unabhängiger Selbstenergie über.

4.3 Zwei-Niveau-System mit Spin-Bahn-Kopplung

Bevor wir uns der Berechnung der Leitfähigkeit zuwenden, untersuchen wir die Auswirkung der Spin-Bahn-Wechselwirkung auf die Helizität-abhängige Selbstenergie an einem System aus zwei Zuständen. Die zwei Niveaus unterscheiden sich durch ihre Helizität, die für den Fall verschwindender Spin-Bahn-Kopplung in die Spin-Quantenzahl übergeht. Die zwei Niveaus liegen bei den Energien E_u und E_d bzw. E_r und E_l. Für dieses System ist die Diagonalnäherung in den Orts-Quantenzahlen noch eine Lösung des Gleichungssystems.

In Abbildung 4.3(a) ist die jeweilige Selbstenergie mit Real- und Imaginärteil zusammen mit der Zustandsdichte für zwei reine Spin-Zustände (*up*/*down*) dargestellt. Zur Berechnung der Selbstenergie aus Gleichung (4.38) gilt $\alpha_{\tau\tilde{\tau}} = \delta_{\tau\tilde{\tau}}$. Spin-erhaltende Störstellen können nicht zwischen diesen Zuständen streuen. Bei Veränderung des energetischen Abstandes (ΔE) der Niveaus wird die Form der Selbstenergie und der Zustandsdichte des *up*-Zustandes (schwarz), bzw. des *down*-Zustandes (grau) nicht verändert. Anders, wenn die Zustände keine reinen Spin-Zustände sind. In Abbildung

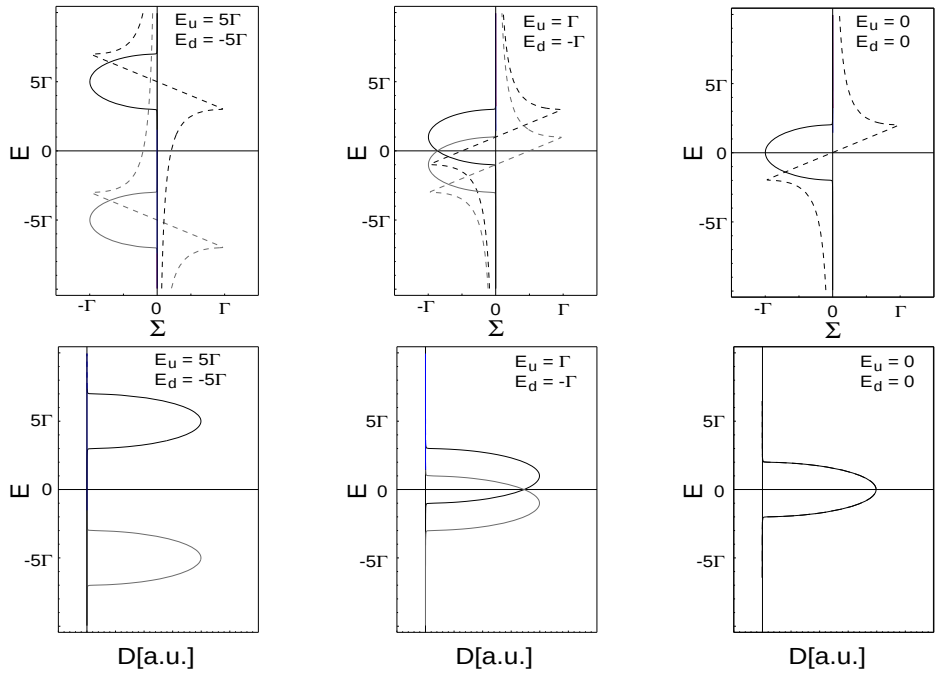


Abbildung 4.3 (a): Selbstenergie $\Sigma(E)$ mit Realteil (gestrichelt) und Imaginärteil (durchgezogen) sowie Zustandsdichte $D^{\tau}(E)$ nach Gleichung (4.42) für zwei Spin-Eigenzustände (*up* bzw. *down*) an der Energie E_u (schwarz) und E_d (grau). Die Niveaus nähern sich von links nach rechts in der Energie an. Für den Fall der Entartung in der dritten Spalte liegen die Linien der beiden Zustände (schwarz und grau) übereinander.

4.3(b), wird die Entwicklung für zwei Niveaus unterschiedlicher Helizität, d.h. *rechts* und *links* dargestellt. Für dieses System können die Spin-erhaltenden Streuzentren zwischen den Niveaus streuen. Für die Mischungsmatrix $\alpha_{\tau\tilde{\tau}}$, für deren Einträge im Grenzfall dominierender Spin-Bahn-Wechselwirkung $\alpha_{\tau\tilde{\tau}} \rightarrow 0.5$ gilt, wurde $\alpha_{\tau\tau} = 0.6$ gewählt, womit die übrigen Einträge nach Gleichung (4.43) ebenfalls festgelegt sind. Die Selbstenergie des *rechts*-Zustandes (schwarze Linie) bekommt nun neben dem Imaginärteil bei der Energie E_r auch bei der Energie E_l einen nicht-verschwindenden Imaginärteil. Das gleiche gilt für die Selbstenergie des *links*-Zustandes (graue Linie). Die Hybridisierung der Selbstenergie kommt dadurch zustande, daß die Streuung nun zwischen den beiden Niveaus mit unterschiedlicher Helizität vermittelt. Im gleichen Zuge werden die Höhe, die umgekehrt proportional zur Lebenszeit ist, und die Breite der Halbellipse des Imaginärteils kleiner, wenn

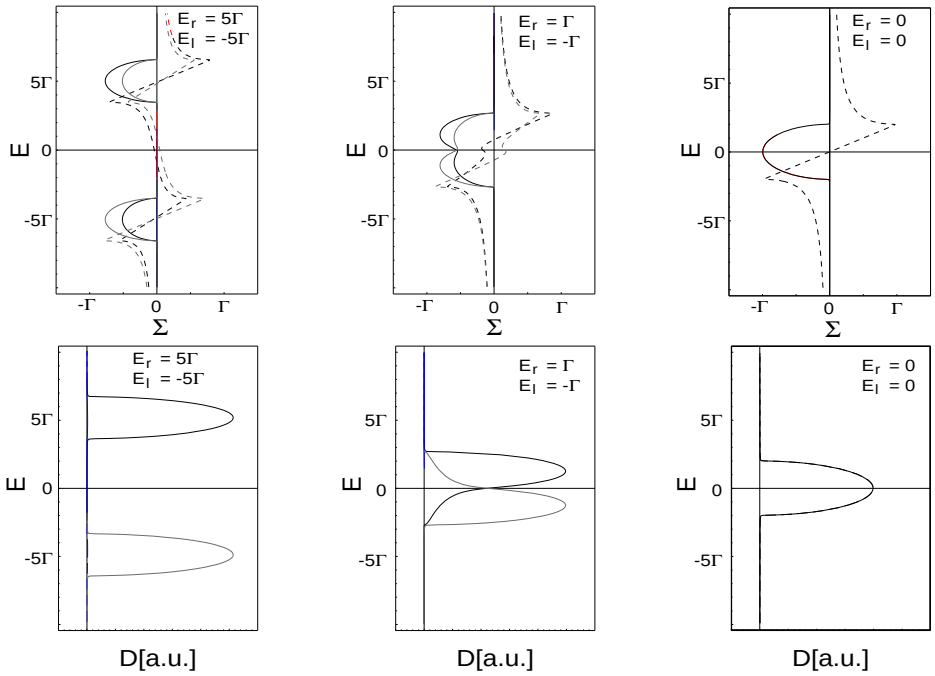


Abbildung 4.3 (b): Entwicklung der Selbstenergie $\Sigma(E)$ mit Realteil (gestrichelt) und Imaginärteil (durchgezogen) und Entwicklung der Zustandsdichte $D^{\tau}(E)$ nach Gleichung (4.42) für zwei Eigenzustände in der Helizität (*rechts* und *links*) an der Energie E_r und E_l, analog Abbildung 4.3(a). Hier in Abbildung (b) sind die Niveaus Spin-Bahn-gekoppelte Zustände und der Mischungskoeffizient ist $\alpha_{\tau\tau} = 0.6$. Die schwarzen Linien beschreiben den *rechts*- und die grauen Linien den *links*-Zustand. Für den Fall der Entartung in der dritten Spalte liegen die Linien (schwarz und grau) wieder übereinander.

die Niveaus nicht entartet sind $\Delta E \gg \Gamma$. Der Einfluß der Spin-erhaltenden Streuung unterscheidet sich also je nachdem ob Spin-Eigenzustände vorliegen oder nicht.

Dieses Ergebnis, daß die Spin-Bahn-Wechselwirkung die Streuung beeinflußt, läßt sich vom Zwei-Niveau-System auf die Landau-Niveaus im Magnetfeld übertragen.

Davor sei noch der Dyakonov-Perel-Mechanismus [Dyak72] erwähnt, der für die Spin-Streuung relevant ist und ebenfalls auf der Spin-Bahn-Wechselwirkung beruht. Über diesen Mechanismus wird die Spin-Streuung in einem System mit Spin-Bahn-Kopplung unterdrückt, da der Spin durch die Spin-

Bahn-Kopplung um eine Achse präzediert, die sich bei jeder Impuls-Streuung verändert. So bleibt eine anfängliche Spin-Polarisation bei häufiger Streuung länger erhalten.

Hier geht es nun nicht um Spin-, sondern um Impuls-Streuung. Es stellt sich mit der Berücksichtigung des Spin-Freiheitsgrades bei der Streuung heraus, daß für ein zweidimensionales Elektronensystem im Magnetfeld, wenn das Energiespektrum in diskrete Landau-Niveaus aufspaltet, durch die Spin-Bahn-Wechselwirkung die Impuls-Streuung unterdrückt wird. Dies gilt, wenn die Landau-Niveaus mit verschiedener Helizität nicht entartet sind. Diese Verminderung der Effizienz der Streuung kommt dadurch zustande, daß ein Teil der Zustände, in die gestreut werden kann, durch eine Energielücke getrennt sind.

Dies wird nur durch eine Spin-Aufspaltung mit Spin-Bahn-Wechselwirkung erreicht. Durch die Zeemann-Aufspaltung wird zwar die Energieentartung zwischen *up*- und *down*-Niveaus ebenfalls aufgehoben, aber eine Spin-erhaltende Streuung kann sowieso nicht zwischen *up* und *down* streuen, so daß diese Aufspaltung die Streueffizienz nicht beeinflußt.

Sind die Niveaus energetisch entartet, $E_u = E_d$ und $E_r = E_l$, so läßt sich nicht mehr unterscheiden, ob Spin-Eigenzustände oder Spin-Bahn-gekoppelte Zustände zugrunde liegen. In der Zustandsdichte, die nach Gleichung (4.42) berechnet ist, wirkt sich die Streuung in einer Verbreiterung aus, die für Spin-Bahn-gekoppelte Zustände, wenn sie nicht entartet sind, kleiner ist als für Spin-Eigenzustände. Sind die beiden Niveaus entartet, ist auch die Verbreiterung der Zustandsdichte für beide Fälle identisch.

Für maximal Spin-Bahn-gekoppelte Zustände, wenn $\alpha_{\tau\tau} = \alpha_{\tau(-\tau)} = \frac{1}{2}$ gilt, sind die Höhe und Breite der Halbellipsen der Selbstenergie mit $\frac{1}{\sqrt{2}}$ reduziert, wenn die *rechts-/links*-Niveaus nicht energetisch entartet sind ($\Delta E \gg \Gamma$). Da sowohl die Höhe als auch die Breite proportional zur Streuverbreiterung Γ sind, entspricht die Reduzierung der Halbellipse in der Selbstenergie mit der Näherung $\Gamma = \frac{\hbar}{2\tau_r}$, wobei τ_r hier die Transportstreuzeit bezeichnet, einer Verlängerung der Streuzeit um $\sqrt{2}$, d.h. $\tau_r' \rightarrow \sqrt{2}\tau_r$. Wenn die Niveaus energetisch entartet sind, verbreitert die Streuung die Niveaus in gleicher Weise unabhängig ob sie zu *up-/down-* oder *rechts-/links*-Zuständen gehören. Die Selbstenergie der Spin-Bahn-gekoppelten Zustände hybridisiert. Bei der energetischen Entartung der Niveaus wird also die Transportrelaxationszeit, die man aus dem Imaginärteil der Selbstenergie gewinnen kann, von der Spin-Bahn-Wechselwirkung nicht beeinflußt. Die Veränderung der Streueffizienz wird sich auf die Leitfähigkeit niederschlagen, wie es im nächsten Abschnitt gezeigt ist.

4.4 Auswertung der Kubo-Formel

Für die Berechnung der Leitfähigkeit wird nun die Kubo-Formel nach Gleichung (2.37) und (2.38) ausgewertet. Hierin ist die Störstellenmittelung bereits ausgeführt, indem die Greenschen Funktionen durch die Störstellengemittelten Funktionen ersetzt sind. Für die sogenannte c-Zahl Näherung, die für das homogene System und kurzreichweitige Störstellen eigentlich in SCBA gar keine Näherung ist, verschwinden die Vertexkorrekturen in der Bethe-Salpeter-Gleichung (2.32) [Gerh75]. Die Erweiterung der SCBA für den Fall mit Spin-Bahn-Wechselwirkung geht nun über die Darstellung der Selbstenergie als komplexe Zahl insofern hinaus, als die Selbstenergie von der Helizität abhängig ist. Dennoch kann gezeigt werden, daß die Vertexkorrekturen ebenfalls verschwinden. Der Beweis ist im Anhang D geführt und geht analog zu dem Beweis für die Selbstenergie als komplexe Zahl, nachdem die Nicht-Diagonalelemente der Selbstenergie vernachlässigt wurden.

Weiter werden für die Auswertung der Kubo-Formel die Geschwindigkeitsmatrixelemente benötigt. In [Mole01] ist der Geschwindigkeitsoperator für verschwindendes Magnetfeld diskutiert. Für das 2DES lassen sich die Komponenten aus der Bewegungsgleichung

$$i\hbar\frac{d}{dt}\boldsymbol{r} = [\boldsymbol{r}, H] \tag{4.44}$$

berechnen, wobei der Hamiltonian H das System mit Spin-Bahn-Wechselwirkung beschreibt. Für die Spin-*up*/- *down* Spinoren ergeben sich so die Komponenten des Geschwindigkeitsoperators zu

$$v_x = \tfrac{1}{m^*}\left(\pi_x + \tfrac{\alpha_z}{\hbar}\sigma_y\right) \tag{4.45}$$

$$v_y = \tfrac{1}{m^*}\left(\pi_y - \tfrac{\alpha_z}{\hbar}\sigma_x\right) \tag{4.46}$$

Im Magnetfeld lassen sich die kinetischen Impulse mit den Leiteroperatoren ausdrücken. Um in einer einheitlichen Notation zu bleiben, werden allerdings hier die Leiteroperatoren nicht wie in [Rash60] umdefiniert, sondern mit Erzeugern $a^\dagger$ und Vernichtern a des Systems ohne Spin-Bahn-Wechselwirkung ausgedrückt über

$$v_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\frac{1}{\lambda_c m^*}\left[i(a^\dagger - a) - \alpha\sigma_y\right] \tag{4.47}$$

$$v_y = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\frac{1}{\lambda_c m^*}\left[(a^\dagger + a) + \alpha\sigma_x\right]. \tag{4.48}$$

Die Geschwindigkeitsmatrixelemente besitzen nun Nicht-Diagonalelemente.

Für den Fall der konstanten Spin-Bahn-Aufspaltung müssen diese Geschwindigkeitsmatrixelemente mit der Ersetzung $\alpha\sqrt{n+\frac{1}{2}} \to \bar{\alpha}$ modifiziert werden und lauten:

$$v_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\frac{1}{\lambda_c m^*}\left[i(a^\dagger - a) - \frac{\bar{\alpha}}{\sqrt{a^\dagger a + \frac{1}{2}}}\sigma_y\right] \tag{4.49}$$

$$v_y = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\frac{1}{\lambda_c m^*}\left[(a^\dagger + a) + \frac{\bar{\alpha}}{\sqrt{a^\dagger a + \frac{1}{2}}}\sigma_x\right]. \tag{4.50}$$

Für beide Modelle sind für hohe Quantenzahlen die Nicht-Diagonalelemente gegenüber den Diagonalelementen vernachlässigbar klein. In Anhang C sind die Geschwindigkeitsmatrixelemente in der *rechts/links* Basis angegeben.

Für die Hall-Leitfähigkeit wird für die Energieableitung der Greenschen Funktion der Zusammenhang nach Gleichung (2.39)

$$\frac{d}{dE}G_n^\tau(E) = -(G_n^\tau)^2\left(1 - \frac{d}{dE}\Sigma^\tau\right) \tag{4.51}$$

verwendet, wobei der Faktor mit der Ableitung der Selbstenergie nach der Energie nun aus dem Gleichungssystem

$$1 - \frac{\Sigma^\tau}{dE} = 1 + \Gamma^2 \sum_{\tau'} \alpha_{\tau\tau'} \int dE' \frac{N_0^{\tau'}(E')}{(E - E' - \Sigma^{\tau'})^{-2}}\left(1 - \frac{d\Sigma^{\tau'}}{dE}\right) \tag{4.52}$$

bestimmt wird. $N_0^\tau(E)$ bezeichnet die Zahl der Zustände verschiedener Helizität und ist mit der Zustandsdichte D_0^τ ohne Streuverbreiterung über

$$N_0^\tau(E) = D_0^\tau(E)\, L_x L_y \tag{4.53}$$

verknüpft.

Der Einfluß der Spin-Bahn-Kopplung soll nun im Vergleich zu dem System ohne Spin-Bahn-Kopplung erörtert werden. Abbildung 4.4 stellt die Widerstandskomponenten des Systems mit Spin-Bahn-Wechselwirkung (a) für Parameter, die typisch für das Materialsystem InAs sind, den Widerstandskomponenten ohne Spin-Bahn-Wechselwirkung (b) gegenüber. Die Widerstandskomponenten sind über $1/B$ angetragen. Der Longitudinalwiderstand ρ_{xx} in Abbildung 4.4(a) zeigt im Vergleich zu ρ_{xx} in Abbildung 4.4(b) eine Schwebung in den SdH-Oszillationen. Die ohne Spin-Bahn-Wechselwirkung erwarteten Maxima, die durch die grauen Punkte markiert sind und die in

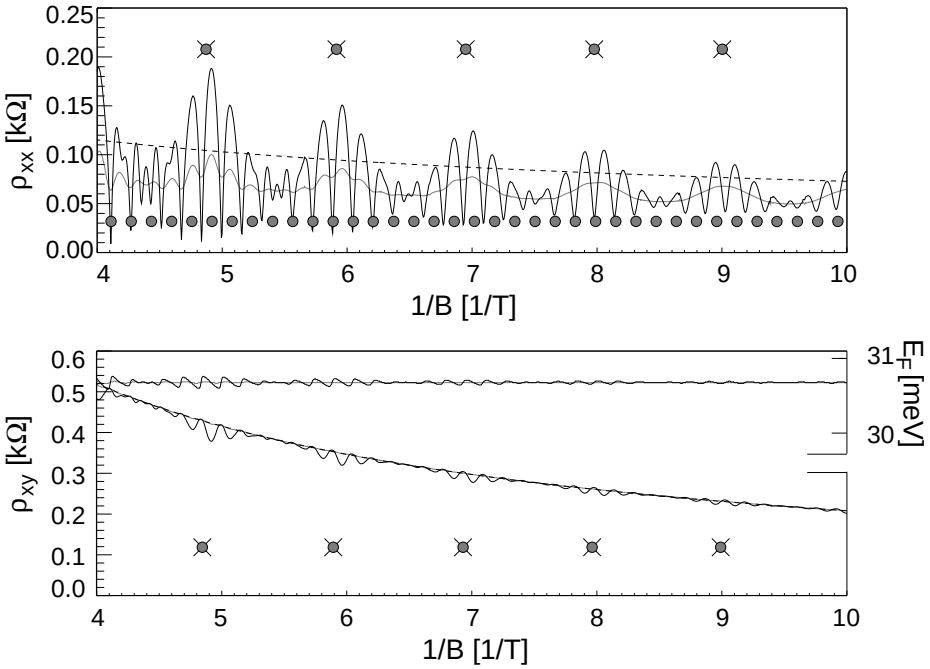


Abbildung 4.4 (a): Berechneter longitudinaler Widerstand (ρ_{xx}) und Hall-Widerstand (ρ_{xy}) für InAs ($m^* = 0.0229\, m_e, g^* = -14.9$) bei einer Elektronendichte von $n_s = 3.0 \times 10^{15}\,\mathrm{m}^{-2}$ und Nullfeldbeweglichkeit $\mu = 50\,\mathrm{m}^2/\mathrm{Vs}$ für zwei Temperaturen $T = 1\,K$ (schwarz) und 3 K (grau) (a) mit Spin-Bahn-Wechselwirkung von $\bar{\alpha}_z = 2.5\,\mathrm{meV}$. und (b) ohne Die Punkte markieren die erwarteten Maxima der SdH-Oszillationen ohne Spin-Aufspaltung und die Symbole mit Kreuzen das Magnetfeld, nach Gleichung (4.27) an denen die Landau-Niveaus verschiedener Helizitäten überkreuzen. Im Graphen für den Hall-Widerstand ist die Fermi-Energie aufgenommen. Die gestrichelte Linie stellt den klassischen Grenzfall der SCBA bei Entkopplung der Landau-Niveaus dar.

Abbildung 4.4(b) mit den Maxima der berechneten Leitfähigkeit übereinstimmen, fallen in Abbildung 4.4(a) von Knoten zu Knoten abwechselnd mit den Maxima und mit den Minima der berechneten Leitfähigkeit zusammen. Daneben ist der longitudinale Widerstand im Zusammenhang mit dem Überkreuzen der Landau-Niveaus unterschiedlicher Helizität, welches durch die Kreuze markiert ist, moduliert. Er geht zwischen den Kreuzungspunkten der Landau-Niveaus zurück. Dies tritt bei Erhöhung der Temperatur auf $T = 3\,K$, wenn die SdH-Oszillationen gedämpft sind, deutlich zu Tage. Die

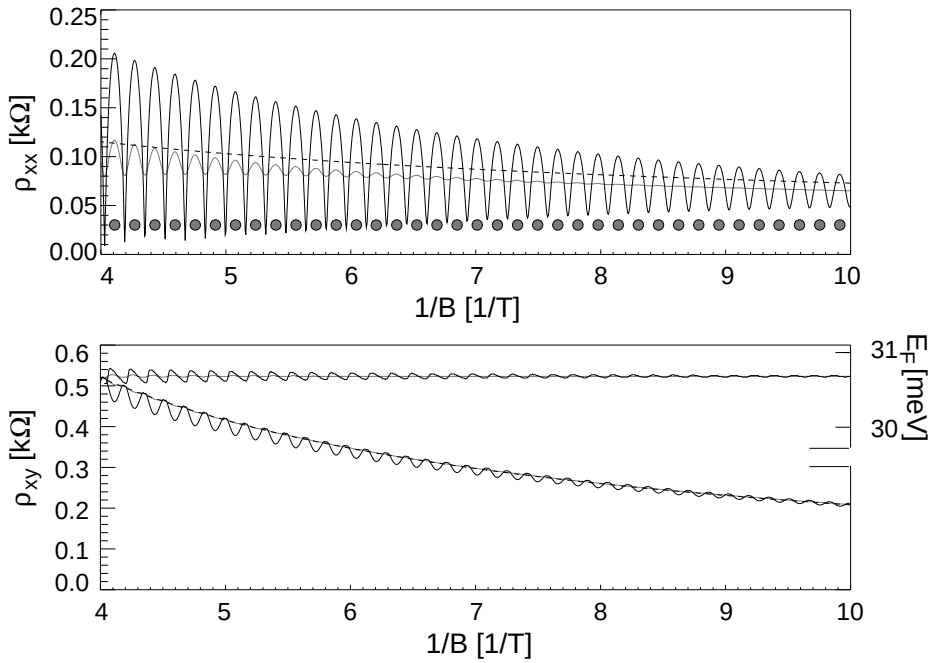


Abbildung 4.4 (b): Berechneter longitudinaler Widerstand (ρ_{xx}) und Hall-Widerstand (ρ_{xy}) für die selben Parameter wie Abbildung 4.4(a) hier ohne Spin-Bahn-Wechselwirkung.

gestrichelte Linie markiert zum Vergleich den klassischen Grenzfall der SCBA bei vollständiger Entkopplung der Landau-Niveaus, wie er in Kapitel 2 erläutert wurde. Im Hall-Widerstand, der über B aufgetragen eine Gerade ergäbe, und in der Auftragung der Fermi-Energie, die bei hohen Magnetfeldern zwischen den Landau-Niveaus springt, sind keine Besonderheiten, die über das veränderte Energiespektrum durch die Spin-Bahn-Wechselwirkung hinausgehen, zu erkennen.

Da der Widerstand durch Tensorinversion aus der Leitfähigkeit gebildet wird, wodurch die longitudinale mit der transversalen Leitfähigkeits-Komponente vermischt wird, betrachten wir im folgenden direkt die berechnete longitudinale Leitfähigkeit. Für $\sigma_{xy} \gg \sigma_{xx}$ gilt $\varrho_{xx} \sim \sigma_{yy}$. Abbildung 4.5(a) zeigt die Leitfähigkeit σ_{xx} und die thermodynamische Zustandsdichte an der Fermi-Kante D_{F}, die zu den Widerständen in Abbildung 4.4 führen. Die thermodynamische Zustandsdichte an der Fermi-Kante wird analog zur Leitfähigkeit über

$$D_F = \int dE \left(-\frac{df_0}{dE} \right) D(E) \tag{4.54}$$

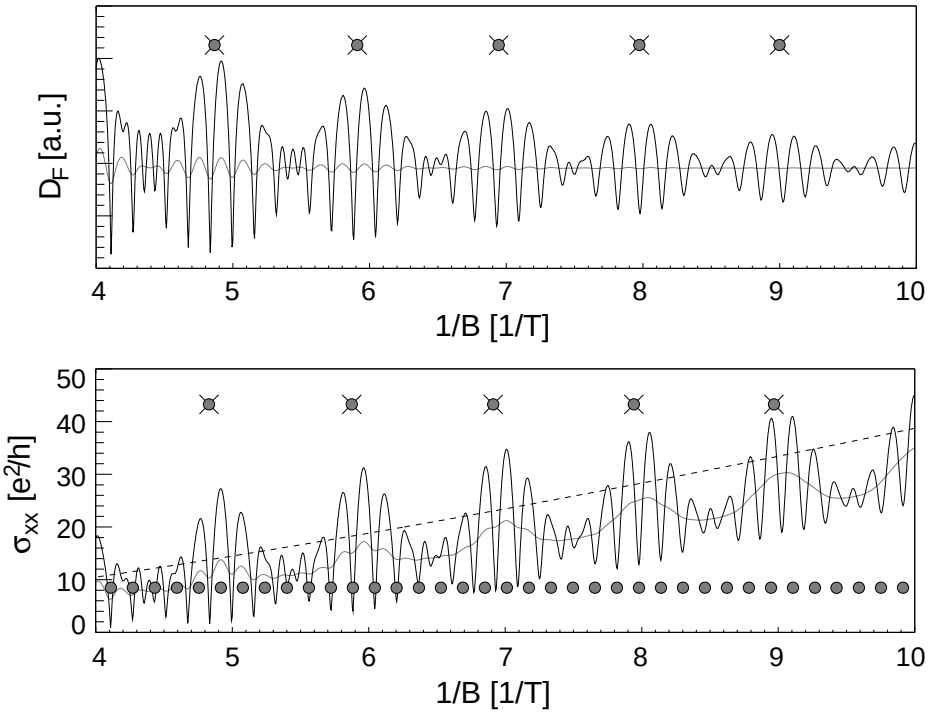


Abbildung 4.5 (a): Berechnete Zustandsdichte an der Fermikante D_F und longitudinale Leitfähigkeit mit den gleichen Parametern wie in Abbildung 4.4 bei zwei Temperaturen $T = 1\,K$ (schwarz) und $T = 3\,\mathrm{K}$ (grau) (a) mit Spin-Bahn-Wechselwirkung von $\bar{\alpha}_z = 2.5\,\mathrm{meV}$ Die Punkte markieren die erwarteten Maxima der SdH-Oszillationen ohne Spin-Aufspaltung und die Symbole mit Kreuzen in (a) die Magnetfelder, nach Gleichung (4.27), bei denen die Landau-Niveaus verschiedener Helizität überkreuzen. Die gestrichelte Linie in der Leitfähigkeit stellt den klassischen Grenzfall der SCBA bei Entkopplung der Landau-Niveaus dar.

berechnet, mit $D(E) = D^r(E) + D^l(E)$.

Die Leitfähigkeit sowie die Zustandsdichte oszillieren $1/B$-periodisch, wobei die Spin-Bahn-Wechselwirkung sich in dem typischen Schwebungsmuster niederschlägt. Bei Erhöhung der Temperatur schmieren die SdH-Oszillationen sowohl in der Zustandsdichte als auch in der Leitfähigkeit aus. Während aber die Zustandsdichte strukturlos wird und sich für die Systeme mit Spin-Bahn-Wechselwirkung (a) und ohne Spin-Bahn-Wechselwirkung (b) nicht unterscheidet, bleibt in der Leitfähigkeit in Abbildung 4.5(a) die Modulation im Zusammenhang mit dem Überkreuzen der Landau-Niveaus bestehen. Im

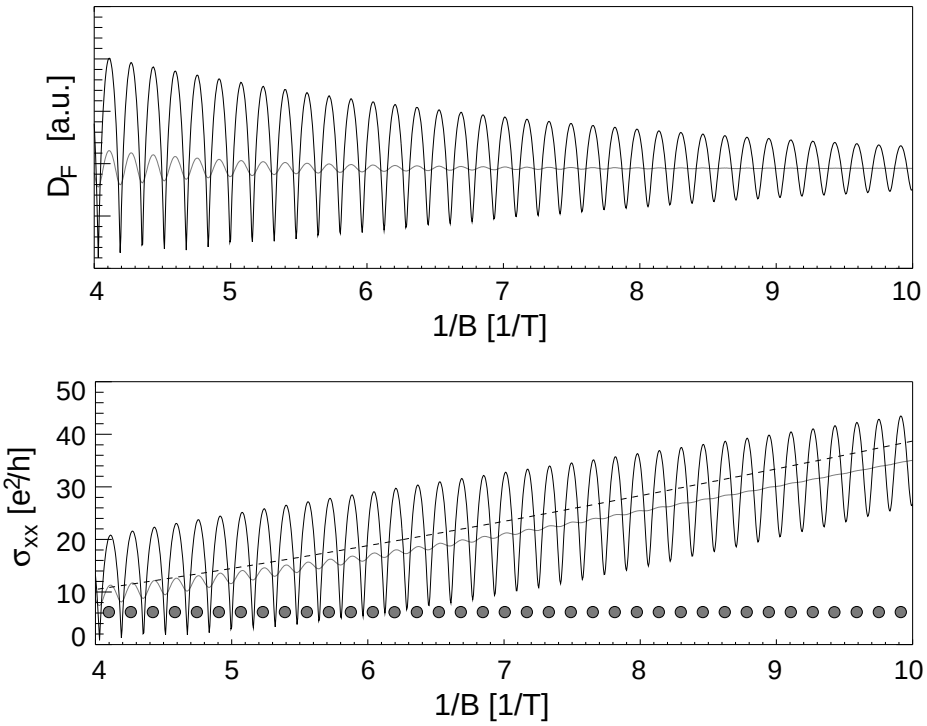


Abbildung 4.5 (b): Berechnete Zustandsdichte an der Fermikante D_F und longitudinale Leitfähigkeit analog Abbildung 4.5(a). Hier ohne Spin-Bahn-Wechselwirkung $\bar{\alpha}_z = 0.0\,\mathrm{meV}$ zum Vergleich.

Vergleich zum klassischen Grenzfall bei Entkopplung der Landau-Niveaus (gestrichelte Linie) wird deutlich, daß die Leitfähigkeit zwischen den Kreuzungspunkten der Landau-Niveaus durch die Spin-Bahn-Wechselwirkung verringert ist. Die Leitfähigkeit wird nämlich von der Streuleitfähigkeit, die proportional zur Streuverbreiterung ist ($\sim \Gamma$), gebildet. Wie im vorherigen Abschnitt an Hand des Zwei-Niveau-Systems erläutert wurde, ist die Effizienz der Streuung zwischen den Kreuzungspunkten der Landau-Niveaus verkleinert. Die Leitfähigkeit wird maximal um $1/\sqrt{2}$ unterdrückt. Die Modulation auf Grund des Überkreuzens der Landau-Niveaus ist nur in der Leitfähigkeit zu beobachten, die als Korrelationsfunktion die Summe über Produkte von Spektralfunktionen der verschiedenen Zustände enthält, während die Zustandsdichte nur die einfache Summe der Spektralfunktionen abbildet.

Der Einfluß der Streuung ist durch den Mischungskoeffizienten $\alpha_{\tau\tau'}$ bei der Berechnung der Selbstenergie gegeben. In den Leitfähigkeitsrechnungen ist er abhängig von den Entwicklungskoeffizienten c_τ^σ der *rechts*/*links* Zustände und damit vom Magnetfeld. Um den Einfluß der Erweiterung der

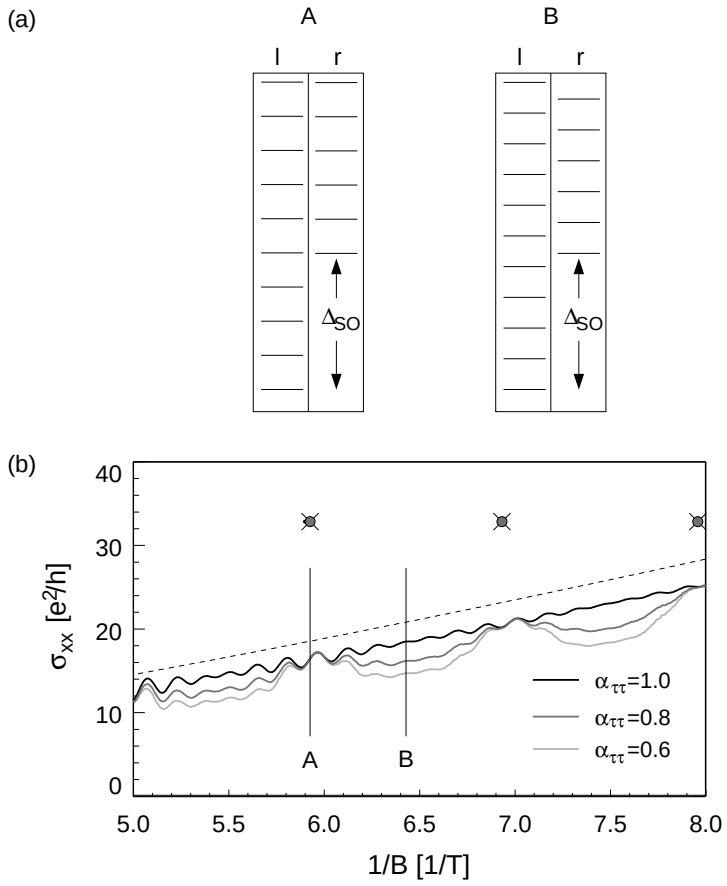


Abbildung 4.6: (a) Die Situationen bei Entartung der Landau-Niveaus mit unterschiedlicher Helizität A und ohne Entartung B sind schematisch dargestellt, wie sie in der Leitfähigkeit markiert sind. (b) Longitudinale Leitfähigkeit σ_{xx} für verschiedene α_{rr} bei $T = 3\,\mathrm{K}$ für die gleichen Parameter wie in Abbildung 4.4. Die Kreuze markieren das Überkreuzen der Landauniveaus unterschiedlicher Helizität und die gestrichelte Linie den klassischen Grenzfall der SCBA bei Entkopplung der Landau-Niveaus.

SCBA auf die Leitfähigkeit zu untersuchen, wollen wir die Mischungskoeffizienten jetzt losgelöst von dem Energiespektrum verändern. Im Energiespektrum wird die Spin-Bahn-Kopplung berücksichtigt, aber indem $\alpha_{\tau\tau'}$ variiert wird, ist die Streuung entweder zwischen *rechts*- und *links*-Niveaus möglich ($\alpha_{\tau,\tau'} \to \frac{1}{2}$) oder nicht ($\alpha_{\tau\tau'} = \delta_{\tau\tau'}$). Letzterer Fall stellt die Situation dar, daß die Helizität mit verschwindender Spin-Bahn-Wechselwirkung in die reine Spin-Quantenzahl übergeht.

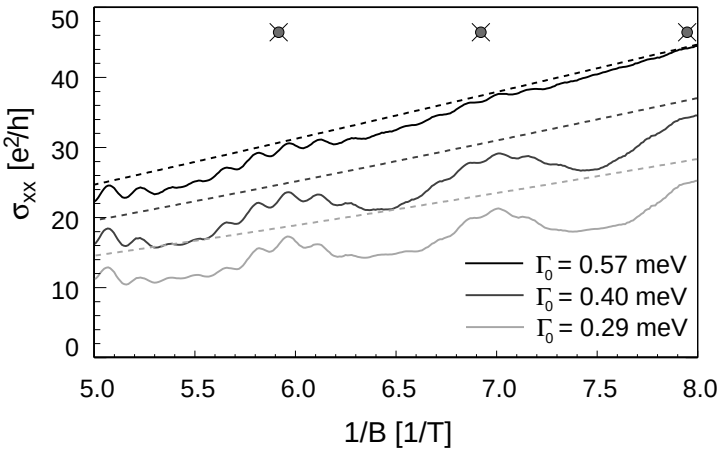


Abbildung 4.7: Longitudinale Leitfähigkeit σ_{xx} für die gleichen Parameter wie in Abbildung 4.4 mit festem $\alpha_{rr} = 0.6$ und verschiedene Γ_0 bei $T = 3\,\mathrm{K}$. Die gestrichelten Linien markieren jeweils den klassischen Grenzfall der SCBA bei Entkopplung der Landau-Niveaus.

In Abbildung 4.6(b) ist die Abhängigkeit der Leitfähigkeit von $\alpha_{\tau\tau}$ gezeigt. Darüber in Abbildung 4.6(a) sind zur Erklärung des Ergebnisses zwei Situationen A und B schematisch dargestellt. In Situation A sind die Energieniveaus energetisch entartet. So wird die Streuverbreiterung auch bei Berücksichtigung der Tatsache, daß zwischen Niveaus unterschiedlicher Helizität gestreut werden kann $\alpha_{\tau\tau} \to 0.5$, nicht verändert. Anders im Fall B, wenn die Landau-Leitern der r/l-Zustände nicht entartet sind. Wird hier in der Streuung berücksichtigt, daß zwischen den Landau-Leitern *rechts* und *links* gestreut werden kann $\alpha_{\tau\tau} \to 0.5$, sinkt die Effizienz der Streuung und damit die Leitfähigkeit.

Abbildung 4.7 zeigt die Abhängigkeit der Leitfähigkeitsänderung von Γ_0. Hier erkennt man, daß für wachsende Streuverbreiterung die Oszillationen in der Leitfähigkeit verschwinden. Wenn die Streuverbreiterung so groß ist, daß die Landau-Niveaus nicht mehr aufgelöst werden, so ist der Effekt der Erniedrigung der Leitfähigkeit nicht mehr zu beobachten.

Abschließend läßt sich bemerken, daß die Nicht-Diagonalelemente im Geschwindigkeitsoperator in den Rechnungen zwar berücksichtigt wurden, allerdings führen sie zu keiner ausgeprägten Veränderung der Leitfähigkeit solange die Fermi-Energie wie in dem hier betrachteten System groß gegen die Landau-Aufspaltung sowie die Spin-Bahn-Aufspaltung ist, d.h. der Transport in Zuständen mit hohem Landau-Index stattfindet.

Wenn sich der Transport nur in den Zuständen mit großem Landau-

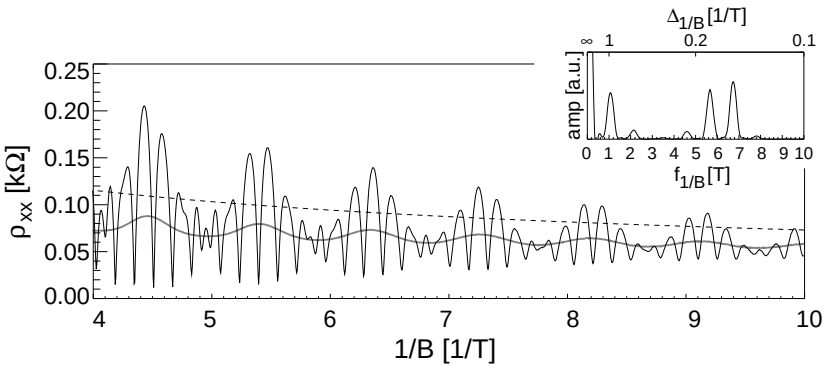


Abbildung 4.8: Longitudinaler Magnetowiderstand ρ_{xx} bei zwei Temperaturen $T = 1\,\mathrm{K}$(schwarz) und $T = 3\,\mathrm{K}$(grau) für InAs mit $m^* = 0.0229\,m_e, g = -14.9$ mit Spin-Bahn-Wechselwirkung $\alpha_z = 2.0 \times 10^{-11}\,\mathrm{eVm}$. Die Nullfeldbeweglichkeit beträgt $\mu = 50\,\mathrm{m}^2/\mathrm{Vs}$. Im Inset ist das Amplitudenquadrat der Fourier-Transformierten der Leitfähigkeit über der Frequenz $f_{1/B}$ und der Periode $\Delta_{1/B}$ abgebildet.

Index an der Fermi-Kante abspielt, ist die verwendete konstante Spin-Bahn-Wechselwirkung eine gute Näherung. Wird die ursprüngliche Spin-Bahn-Wechselwirkung proportional zum Impuls der Ladungsträger verwendet, wird $\alpha_{\tau\tau'}$ Quantenzahl-abhängig. Um dennoch eine Quantenzahl-unabhängige Selbstenergie zu erhalten muß der Mischungskoeffizient mit $\alpha_{\tau\tau'} = \frac{1}{2}$ künstlich festgelegt werden. Eine solche Rechnung ist in Abbildung 4.8 gezeigt, und in den wesentlichen Aspekten ergibt sich kein Unterschied zu den Rechnungen mit konstanter Spin-Bahn-Wechselwirkung.

In der Fourier-Analyse sind verschiedene Frequenzen zu erkennen. Die zwei benachbarten Peaks bei $f_{1/B} \approx 6$ bilden die zwei Frequenzen der SdH-Oszillationen ab, während der Peak bei $f_{1/B} \approx 1$ von der Modulation durch das Überkreuzen der Landau-Niveaus verursacht wird.

Damit konnte nun der Einfluß der Spin-Bahn-Wechselwirkung auf die Leitfähigkeit, wie sie mit der Kubo Formel in SCBA berechnet wird, verstanden werden. Interessant ist, daß sich neben den Schwebungen in den SdH-Oszillationen das Überkreuzen der Landau-Niveaus durch Spin-Bahn-Wechselwirkung über die Streuung im Widerstand manifestiert. Die Modulation ist zu beobachten solange die Streuverbreiterung klein genug ist, daß die diskreten Landau-Niveaus aufgelöst werden können. Die Temperatur kann die SdH-Oszillationen aber bereits vollständig unterdrückt haben. Dieses Ergebnis wurde bislang noch nicht theoretisch abgeleitet, allerdings

erhält es Unterstützung, da ein ähnlicher Effekt in den SdH-Oszillationen für zwei besetzte Subbänder vorhergesagt wurde [Aver01]. Die Beobachtung der überkreuzenden Landau-Niveaus ermöglicht Schwebungen, die auch durch Inhomogenitäten in der Elektronendichte zustande kommen [Bros99] können, von den Schwebungen auf Grund der Spin-Bahn-Wechselwirkung zu unterscheiden.

Im nächsten Kapitel wird dem System ein laterales Übergitter hinzugefügt und das Augenmerk auf die Veränderung des Energiespektrums gelegt. Dabei sollen die Effekte der Streuung eine untergeordnete Rolle spielen.

KAPITEL 5

Laterale Modulation und Spin-Bahn-Wechselwirkung

Nachdem die Spin-Bahn-Wechselwirkung im homogenen 2DES untersucht wurde, kann nun eine laterale periodische Modulation in die Rechnung mitaufgenommen werden. Die zwei Äste des durch die Spin-Bahn-Wechselwirkung bereits bei verschwindendem Magnetfeld aufgespaltenen Energiespektrums manifestieren sich zusammen mit der periodischen Modulation in zwei gegeneinander verstimmten Frequenzen der für das laterale Übergitter typischen $1/B$-periodischen Oszillationen im Magnetotransport. Dies wird mit Hilfe der Minibandstruktur für $B = 0$ erläutert und anschließend durch Berechnung der Leitfähigkeitskomponenten nachgewiesen. Während für das homogene System im Magnetfeld die Helizität eine Erhaltungsgröße ist, mischt das periodische Potential diese Zustände.

5.1 Minibandstruktur mit Spin-Bahn-Wechselwirkung

Das Energiespektrum der Elektronen des lateralen Halbleiter-Übergitters ist mit der Minibandstruktur wiedergegeben. Die Minibänder bilden sich, in-

dem die parabolische Energiedispersion des homogenen Systems durch die laterale Modulation aufreißt. In Kapitel 3 wurde der Einfluß des Halbleitermaterials im Energiespektrum des lateralen Halbleiter-Übergitters allein durch die effektive Masse berücksichtigt. Nun wird für die Beschreibung der Halbleiter-Heterostruktur eine Spin-Bahn-Kopplung auf Grund des Rashba-Effekts hinzugenommen. Der Hamiltonian für die Spinzustände, quantisiert entlang der z-Achse, lautet jetzt

$$H = \begin{pmatrix} \frac{1}{2m^*}(\pi_x^2 + \pi_y^2) & \frac{\alpha_z}{\hbar}(\pi_x + i\pi_y) \\ \frac{\alpha_z}{\hbar}(\pi_x - i\pi_y) & \frac{1}{2m^*}(\pi_x^2 + \pi_y^2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V(x,y) & 0 \\ 0 & V(x,y) \end{pmatrix}. \tag{5.1}$$

Der erste Term trägt der Heterostruktur mit Elektronen der effektiven Masse m^* und Spin-Bahn-Kopplung α_z Rechnung. Dies führt für $V(x,y) \equiv 0$ zu dem in Kapitel 4 diskutierten Energiespektrum aus zwei Energieästen. Das Potential $V(x,y)$, diagonal in den Zuständen *up*/*down*, führt nun weiter zu einem Aufspalten des Energiespektrums in Minibänder. Im linken Teil der Abbildung 5.1 ist das Energiespektrum für ein eindimensionales Potential

$$V(x,y) = V(x) = \frac{V_0}{2}\cos(\frac{2\pi}{a}x) \tag{5.2}$$

mit der Übergitterkonstante $a = 75\,\mathrm{nm}$ und der Modulationshöhe $V_0 = 6\,\mathrm{meV}$ entlang der k_x- und k_y-Achse der Brillouin-Zone gezeigt. Zur Berechnung wurde der Hamiltonian (5.1) in der ersten Brillouin-Zone in ebene Wellen entwickelt und die resultierende Matrix diagonalisiert. Die über der Brillouin-Zone aufgetragen Eigenwerte bilden die Minibandstruktur. Obwohl das betrachtete System nur in x-Richtung periodisch moduliert ist, wurde für die Rechnung und die Darstellung in y-Richtung eine künstliche Periodizität angenommen (sogenanntes leeres Gitter), so daß sich eine quadratische Brillouin-Zone ergibt. In der Abhängigkeit der Energiedispersion von k_y ist die zum Betrag des Wellenvektors k proportionale Aufspaltung durch die Spin-Bahn-Wechselwirkung $\Delta_{\mathrm{SO}} = 2\alpha_z k$ zu erkennen. Die Rückfaltung erfolgt an der künstlichen Brillouin-Zonengrenze. In der Energiedispersion auf der k_x-Achse findet sich die Energielücke zwischen erstem und zweiten Miniband für den inneren Ast der Energiedispersion innerhalb der ersten Brillouin-Zone und für den äußeren Ast außerhalb. Genau auf der Brillouin-Zonengrenze senkrecht zur Modulationsrichtung sind die Energieäste entartet. Diese Entartung ist intuitiv zu verstehen, da am Brillouin-Zonenrand ohne Spin-Bahn-Wechselwirkung die Energiedispersion flach wird, d.h. die Gruppengeschwindigkeit verschwindet. Damit verschwindet ebenfalls die Aufspaltung durch die Spin-Bahn-Kopplung.

Im vorangegangenen Kapitel wurde das Modell der konstanten Spin-Bahn-Wechselwirkung verwendet, da für den Magnetotransport hauptsächlich

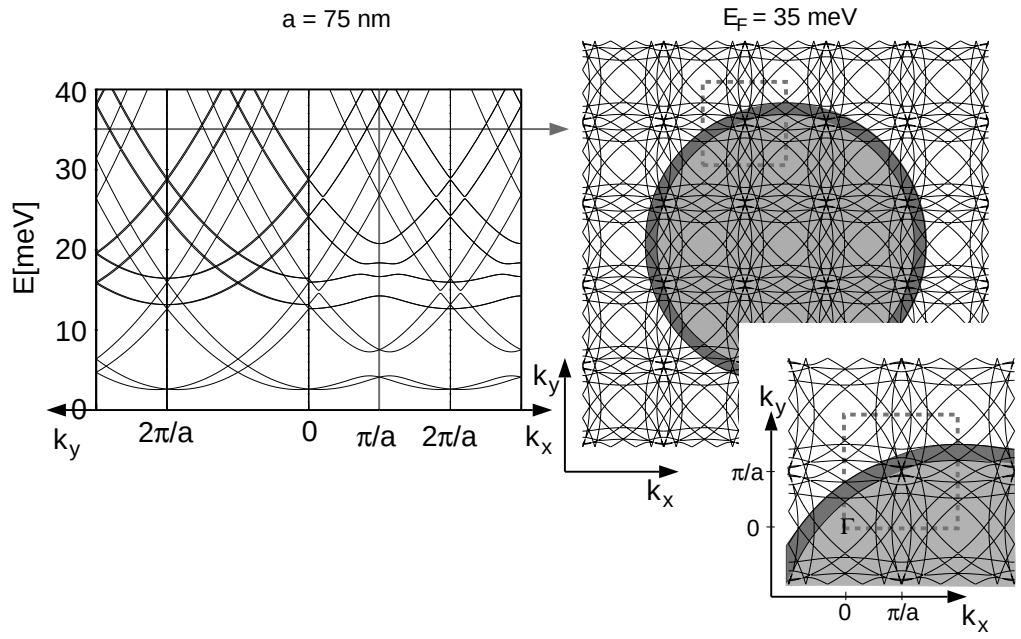


Abbildung 5.1: Minibandstruktur im wiederholten Zonenschema für Leitungsbandelektronen von InAs ($m^* = 0.0229\, m_e$) unter Berücksichtigung der Spin-Bahn-Wechselwirkung $\alpha_z = 2.0 \times 10^{-11}\,\mathrm{eVm}$ in einem eindimensionalen Kosinus-Potential in x-Richtung nach Gleichung (5.2) mit Gitterkonstante $a = 75\,\mathrm{nm}$ und Modulationsamplitude $V_0 = 6\,\mathrm{meV}$. Links ist die Minibandstruktur entlang der k_x- und k_y-Richtung abgebildet. In k_y-Richtung ist eine künstliche Periodizität (leeres Gitter) mit der Gitterkonstante a eingeführt. Rechts sind die Fermi-Konturen bei der Energie $E_F = 35\,\mathrm{meV}$ im wiederholten Zonenschema abgebildet. Der dunke-l bzw. hellgraue Kreis markiert die Spin-aufgespaltenen Fermi-Kreise ohne Modulation. Der Inset zeigt die Fermi-Konturen des markierten Ausschnitts in der Vergrößerung.

die Zustände an der Fermi-Kante relevant sind. In Abbildung 5.2 ist das Energiespektrum analog zu Abbildung 5.1 gezeigt, allerdings nun mit konstanter Spin-Aufspaltung $\Delta_{\mathrm{SO}} = 2\bar{\alpha}_z$ und $\bar{\alpha}_z = 2.5\,\mathrm{meV}$. Bei kleinen k-Werten beruht der Unterschied in der Minibandstruktur zwischen den beiden Modellen für die Spin-Bahn-Wechselwirkung auf dem unterschiedlichen Betrag der Spin-Aufspaltung. Die Energieentartung an der Brillouin-Zonengrenze oder die verschobenen Energielücken bleiben als wesentliche Merkmale im Energiespektrum erhalten. Die Entartung am Γ-Punkt ($\mathbf{k} = \mathbf{0}$) an der Leitungs-

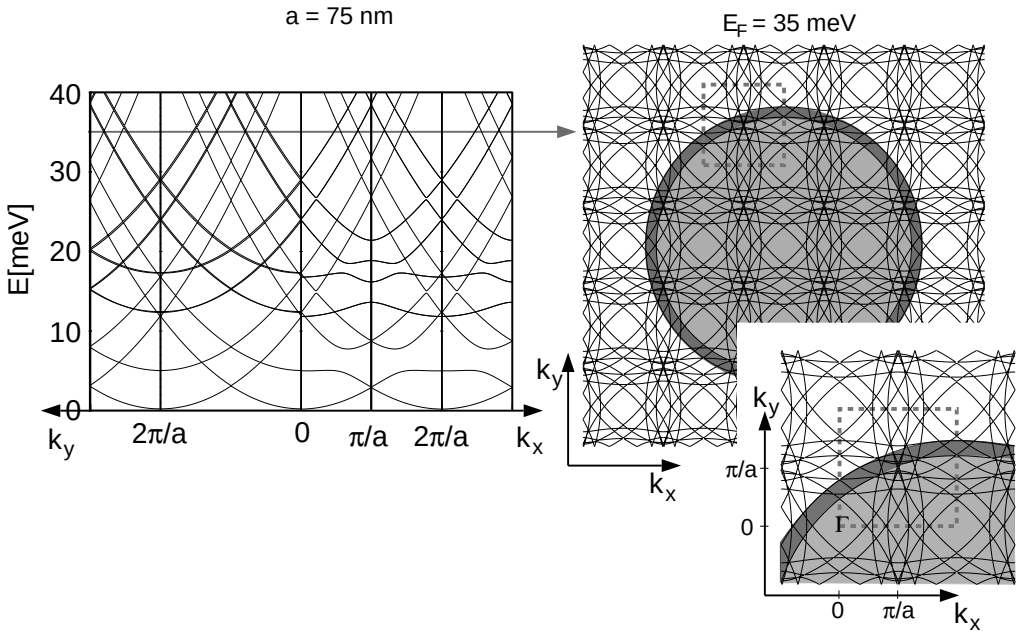


Abbildung 5.2: Minibandstruktur analog zu Abbildung 5.1 für Leitungsbandelektronen von InAs ($m^* = 0.0229\,m_e$) unter Berücksichtigung einer jetzt konstanten Spin-Bahn-Wechselwirkung mit $\bar{\alpha}_z = 2.5\,\mathrm{meV}$ in einem eindimensionalen Kosinus-Potential in x-Richtung nach Gleichung (5.2) mit Gitterkonstante $a = 75\,\mathrm{nm}$ und Modulationsamplitude $V_0 = 6\,\mathrm{meV}$. Links ist die Minibandstruktur entlang der k_x- und k_y-Achse abgebildet. In k_y-Richtung ist eine künstliche Periodizität (leeres Gitter) mit der Gitterkonstante a eingeführt. Rechts sind die Fermi-Konturen bei der Energie $E_\mathrm{F} = 35\,\mathrm{meV}$ im wiederholten Zonenschema abgebildet. Der dunkel- bzw. hellgraue Kreis markiert die Spin-aufgespaltenen Fermi-Kreise ohne Modulation. Der Inset zeigt die Fermi-Konturen des markierten Ausschnitts in der Vergrößerung.

bandkante entfällt. Die Energiedispersion an der Fermi-Kante, die in den Fermi-Konturen bei $E_\mathrm{F} = 35\,\mathrm{meV}$ abgebildet ist, bleibt wie erwartet nahezu unverändert.

Werden nun die Fermi-Konturen analysiert, wie sie in Abbildung 5.1 (rechts) oder Abbildung 5.2 (rechts) für $E_\mathrm{F} = 35\,\mathrm{meV}$ abgebildet sind, fällt zunächst auf, daß sich die Fermi-Konturen durch die Spin-Bahn-Kopplung und die damit verbundene Aufspaltung des Energiespektrums in zwei Äste verdoppeln. Die zwei Fermi-Kreise, die wie Eisenbahnschienen nebeneinan-

der liegen, werden weiter durch die Modulation an der Brillouin-Zonengrenze aufgebrochen, so daß sich für beide Kreise eigene Ellipsen bilden, die so wiederum paarweise auftreten.

Wird senkrecht zum 2DES ein Magnetfeld angelegt, lassen sich die Fermi-Konturen, wie in Kapitel 1 und 3 erläutert, durch eine Drehung um den Winkel $\pi/2$ und Skalierung mit dem Quadrat der magnetischen Länge λ_c^2 in einem semiklassischen Bild in Trajektorien im Orts-Raum übersetzen, entlang derer die Elektronen durch das externe Magnetfeld getrieben werden. Für schwache Magnetfelder laufen die Elektronen demnach entlang der durch die Spin-Bahn-Wechselwirkung unterschiedlich großen Ellipsen, bis das Magnetfeld ausreicht, die Energielücken zu durchtunneln und die Elektronen wieder den markierten Fermi-Kreisen folgen. Aufgrund der unterschiedlichen Flächen, die umrundet werden, je nachdem ob das Elektron auf der rechten oder auf der linken Schiene läuft, resultieren die paarweise auftretenden Fermi-Konturen in gegeneinander verstimmten Frequenzen der Magnetowiderstandsoszillationen und sowohl in den neuartigen Quantenoszillationen als auch für die SdH-Oszillationen wird ein Schwebungsmuster erwartet. Die semiklassische Argumentation, welche die Fermi-Konturen in Magnetowiderstandsoszillationen übersetzt, berücksichtigt zwar den Spinfreiheitsgrad nicht explizit, allerdings beruht sie auf dem Energiespektrum, in dem sich die Spin-Bahn-Kopplung in einer Energieaufspaltung manifestiert. So ist für alle Zustände auf den Fermi-Kreisen der Betrag der Ableitung der Energiedispersion nach dem Wellenvektor k senkrecht zur Energiekontur bei fester Energie gleich, woraus folgt, daß die Gruppengeschwindigkeit ohne angelegtes Magnetfeld identisch ist. Indem die Elektronen vom Magnetfeld im semiklassischen Bild dennoch entlang zweier unterschiedlich großer Fermi-Kreise - je nach Schiene - getrieben werden, ist die Beeinflussung der Bahn-Bewegung durch die Spin-Bahn-Kopplung über das Energiespektrum berücksichtigt.

Die Periodizitäten der SdH-Oszillationen $\Delta_{1/B}^{\mathrm{SdH:+/-}}$ ergeben sich, wenn man in Gleichung (3.1) die Spin-Aufspaltung als zwei Bänder mit verschiedener Elektronendichte und somit unterschiedlicher Fermi-Energie betrachtet, zu

$$\Delta_{1/B}^{\mathrm{SdH:+/-}} = \frac{e\hbar}{m^*(E_{\mathrm{F}} \pm \frac{1}{2}\Delta_{\mathrm{SO}})}, \tag{5.3}$$

wobei Δ_{SO} die Spin-Aufspaltung an der Fermi-Energie ist. Die Periodizitäten der neuartigen Quantenoszillationen auf Grund der Minibandstruktur bestimmen sich für ein 1D-Übergitter über die Beziehung (1.30), wobei durch die Spin-Aufspaltung zwei Flächen möglich sind. Aus der Fläche (3.7) ergibt

sich mit der Spin-Aufspaltung Δ_{SO}

$$A^{\mathrm{1D:+/-}} = \frac{2m^*(E_{\mathrm{F}} \pm \frac{1}{2}\Delta_{\mathrm{SO}})\pi}{\hbar^2} - 2\left(\frac{\pi}{a}\right)\sqrt{\frac{2m^*(E_{\mathrm{F}} \pm \frac{1}{2}\Delta_{\mathrm{SO}})}{\hbar^2} - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2} - \\ - \frac{4m^*(E_{\mathrm{F}} \pm \frac{1}{2}\Delta_{\mathrm{SO}})}{\hbar^2} \arcsin \frac{\pi\hbar}{a\sqrt{2m^*(E_{\mathrm{F}} \pm \frac{1}{2}\Delta_{\mathrm{SO}})}}. \tag{5.4}$$

Für das 2D-Übergitter ergeben sich die Frequenzen analog aus der Fläche (3.6) mit der Beziehung (1.30).

Neben den reinen Quantenoszillationen, die aus der Minibandstruktur und dem Energiespektrum folgen, hat die Spin-Bahn-Wechselwirkung ebenfalls Einfluß auf die Kommensurabilitäts-Oszillationen. Aus den Spin-aufgespaltenen Fermi-Kreisen folgen zwei unterschiedliche Zyklotronradien, was sich in einer Schwebung der Kommensurabilitäts-Oszillationen niederschlägt [Maga94]. Die Periodizität der sich überlagernden Oszillationen ist über die Beziehung

$$\Delta_{1/B}^{\mathrm{CO:+/-}} = \frac{ea}{2\sqrt{2m^*(E_{\mathrm{F}} \pm \frac{1}{2}\Delta_{\mathrm{SO}})}}. \tag{5.5}$$

aus der Gleichung (3.3) abzuleiten, wenn die verschiedenen Zyklotronradien mit der Kommensurabiliätsbedingung in Beziehung gesetzt werden.

Bevor wir nun die magnetische Minibandstruktur mit Spin-Bahn-Wechselwirkung untersuchen, betrachten wir die Vergrößerung der Energiekonturen in Abbildung 5.1 oder 5.2. Ohne die Modulation ($V_0 = 0$) wäre die innere Fermi-Kontur von der äußeren getrennt. Stellt man sich das Magnetfeld vor, wie es die Elektronen auf den Äquipotentiallinien der Energiedispersion entlangtreibt, werden ohne Modulation Elektronen nicht von der inneren Kontur auf die äußere wechseln. Deshalb können die Elektronen mit Spin-Bahn-Wechselwirkung im homogenen System, wie in Kapitel 4 ausgeführt, anhand ihrer Helizität unterschieden werden. Nur die Streuung macht den Übergang zwischen Zuständen mit verschiedener Helizität möglich. Eine andere Situation ergibt sich mit Modulation, welche die Helizitäten vermischt. Eine Analyse der Fermi-Konturen zeigt, daß dann zwischen den inneren und äußeren Teilstücken mit dem Durchtunneln schon kleiner Energielücken gewechselt werden kann.

Anstatt dem Magnetfeld nur die Rolle zuzuweisen, die Elektronen entlang der Fermi-Konturen zu treiben, soll nun die magnetische Minibandstruktur diskutiert werden. Zu deren Berechnung wird, wie bereits in Kapitel 3 durchgeführt, im Hamiltonian explizit das externe magnetische Feld berücksichtigt.

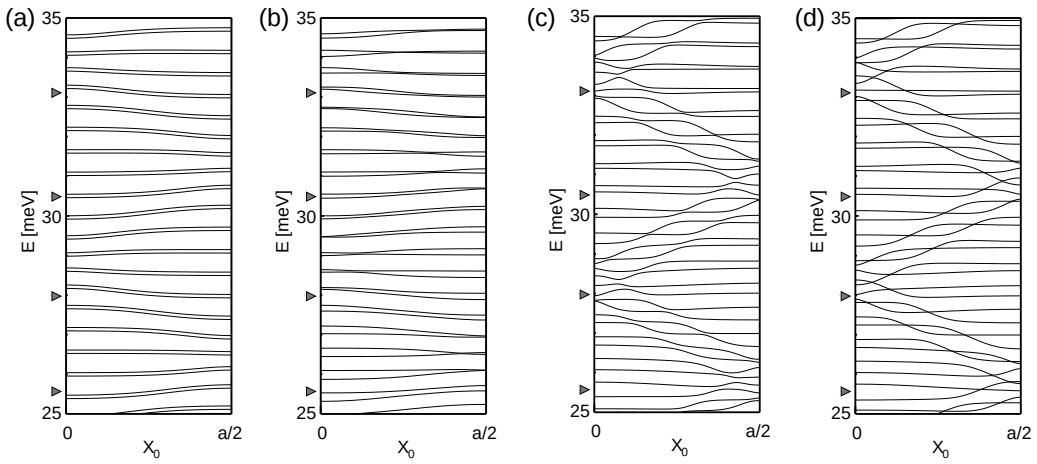


Abbildung 5.3: Ausschnitt aus der magnetische Minibandstruktur für Elektronen mit $m^* = 0.0229\,m_e$ und $g^* = -14.9$ für Kosinus-Potential nach Gleichung (5.2). (a) mit $V_0 = 3\,\mathrm{meV}$ und ohne Spin-Bahn-Wechselwirkung; (b) mit Spin-Bahn-Wechselwirkung $\alpha_z = 0.5 \times 10^{-11}\,\mathrm{eVm}$ (c) mit $V_0 = 9\,\mathrm{meV}$ und Spin-Bahn-Wechselwirkung; (d) gleiche Situation wie in (c) allerdings Modulationspotential nur mit Diagonalelementen in der Helizität berücksichtigt. Die Dreiecke an den Energieachsen markieren die Flachbandbedingungen.

Mit dem Magnetfeld quantisiert das Energiespektrum in Landau-Niveaus, deren Entartung wiederum durch die Modulation aufgehoben wird. Der Hamiltonian 5.1, der das 2DES mit Spin-Bahn-Kopplung und Modulation beschreibt, wird nun nach den Eigenfunktionen des homogenen 2DES mit Spin-Bahn-Wechselwirkung entwickelt und diagonalisiert. Während das homogene System ($V_0 = 0$) Eigenfunktionen mit definierter Helizität $\tau \in \{rechts/links\}$ besitzt, ist die Helizität, wie oben bereits in der semiklassischen Argumentation angedeutet, im lateralen Übergitter keine gute Quantenzahl mehr. Die Matrixelemente des Modulationspotentials $\langle n' X_0' \tau' | e^{iqx} | n X_0 \tau \rangle$, wie im Anhang C angegeben, verschwinden nicht allgemein für $\tau' \neq \tau$, so daß in der magnetischen Minibandstruktur die Landau-Bänder nicht nach der Helizität unterschieden werden können. In Abbildung 5.3 sind einige Beispiele zur magnetischen Minibandstruktur des lateralen Halbleiter-Übergitters mit der Gitterkonstante $a = 75\,\mathrm{nm}$ in InAs abgebildet.

Ohne Spin-Bahn-Aufspaltung, wenn nur die Zeemann-Aufspaltung mit $g^* = -14.9$ berücksichtigt wird, sind die Spin-aufgespaltenen magnetischen Minibänder für ein 1D-Übergitter mit einer Modulationsamplitude von $V_0 =$

3 meV in Abbildung 5.3(a) parallel. Die Flachbandbedingung stimmt nicht mehr exakt mit den flachen magnetischen Minibändern überein, da die Übergitterkonstante $a = 75\,\mathrm{nm}$ so kurz und die Modulationsamplitude so groß ist, daß die Störungsrechnung, aus der die Flachbandbedingung abgeleitet wird, nicht mehr zutrifft. Mit Hinzunahme einer schwachen Spin-Bahn-Wechselwirkung $\alpha_z = 0.5 \times 10^{-11}\,\mathrm{eVm}$ in Abbildung 5.3(b) können dispersive und flache Bänder zusammenfallen. Bei Erhöhung der Modulationsstärke auf $V_0 = 9\,\mathrm{meV}$ in Abbildung 5.3(c) und (d) bilden sich zwei stark dispersive Äste aus. In Abbildung 5.3(d) ist das Modulationspotential nur durch die Diagonalelemente in der Helizität berücksichtigt, d.h. die magnetischen Minibänder besitzen noch eine definierte Helizität. Die Bänder überkreuzen sich nun und die vermiedenen Bandkreuzungen verschwinden. Im Vergleich von Abbildung 5.3(c) und (d) wird deutlich, daß die Struktur des magnetischen Minibandschemas auch ohne Diagonalelemente erhalten bleibt. Dies paßt mit den Erkenntnissen aus der Analyse der Fermi-Konturen zusammen, da auch mit Modulationen innere und äußere Schienen annähernd unterschieden werden können.

Im Magnetotransport werden die Veränderungen in der Minibandstruktur zwischen Abbildung 5.3(c) und (d) nicht auffallen, da die durch Nicht-Diagonalelemente der Modulation verursachten Energielücken so klein sind, daß sie von der Störstellen-Verbreiterung überdeckt werden. Die in Kapitel 4 eingeführte Erweiterung der Theorie mit einer Helizität-abhängigen Selbstenergie braucht aber eine definierte Helizität der Greenschen Funktion. Dafür wäre die Minibandstruktur in Abbildung 5.3(d) geeignet, da die Modulation die Helizitäten nicht mischt. Es besteht für die folgenden Magnetotransportrechnungen also der Zwiespalt, ob auf die korrekte Behandlung der Spin-erhaltenden Streuung in SCBA oder auf die vollständige Beschreibung der Modulation bestanden werden soll.

In Kapitel 4 wurde die korrekte Beschreibung der Spin-erhaltenden Streuung in SCBA ausführlich diskutiert. Da die Auswirkung der Streuung auf den Magnetotransport am homogenen System verstanden wurde, bietet es sich nun an Abstriche in der Behandlung der Streuung zu machen und dafür aber die Modulation vollständig einzuschließen. Im folgenden wird also die SCBA für das laterale Halbleiter-Übergitter weitergeführt, obwohl die Helizität keine gute Quantenzahl mehr ist. Dafür werden die Mischungskoeffizienten zu $\alpha_{\tau\tilde{\tau}} = \frac{1}{2}$ gesetzt. Damit ist nun die Selbstenergie für *rechts*- und *links*-Zustände identisch. Für den Grenzfall verschwindender Spin-Bahn-Kopplung gelangt man damit aber nicht mehr zur SCBA ohne Berücksichtigung des Spin-Freiheitsgrades zurück, wo $\alpha_{\tau\tilde{\tau}} \to \delta_{\tau\tilde{\tau}}$ gilt.

5.2 Magnetowiderstandsoszillationen

Aufbauend auf der magnetischen Minibandstruktur werden nun unter Auswertung der Kubo-Formel die Magnetotransportgrößen berechnet. Im vorausgegangenen Abschnitt wurde eine Aufspaltung der verschiedenen $1/B$-periodischen Magnetowiderstandsoszillationen vorhergesagt.

In der quantenmechanischen Rechnung mischt das Modulationspotential die Zustände unterschiedlicher Helizität. Damit ist die Helizität anders als beim homogenen System keine Erhaltungsgröße. Zur Berücksichtigung der Streuung werden nun in Gleichung (4.38) zur Bestimmung der Selbstenergie die Mischungskoeffizienten $\alpha_{\tau\tilde{\tau}} = \frac{1}{2}$ gesetzt und die Berechnung der Selbstenergie von den Koeffizienten der Eigenzustände in der *up*/*down*-Basis getrennt. Damit sind wir auch nicht mehr auf die Unabhängigkeit der Koeffizienten von der Quantenzahl n angewiesen und es kann jetzt die k-abhängige Spin-Bahn-Wechselwirkung verwendet werden. Im folgenden wollen wir unser Augenmerk auf die Magnetowiderstandsoszillationen richten, die tatsächlich durch die Veränderung des Energiespektrums zustandekommen, nachdem wir die Spin-Bahn-Wechselwirkung im Zusammenhang mit der Streuung in Kapitel 4 verstanden haben.

In Abbildung 5.4 ist die longitudinale Leitfähigkeit für ein System in InAs ($m^* = 0.0229\, m_e$) dargestellt, wobei diesmal für die Modulation nach Gleichung (5.2) mit Gitterkonstante $a = 75\,\mathrm{nm}$ eine Modulationsamplitude $V_0 = 3.0\,\mathrm{meV}$ gewählt wurde. Anstatt die Elektronendichte festzulegen, wurde diesmal aus numerischen Gründen die Fermi-Energie bei $E_\mathrm{F} = 30\,\mathrm{meV}$ fixiert, was einer Elektronendichte von $n_\mathrm{s} = 2.9 \times 10^{15}\,\mathrm{m}^{-2}$ entspricht. Die Nullfeldbeweglichkeit liegt bei $\mu = 50\,\mathrm{m}^2/\mathrm{Vs}$.

In Abbildung 5.4(a) ist die Leitfähigkeit für das laterale Übergitter ohne Spin-Bahn-Wechselwirkung ($\alpha_z = 0$) dargestellt. Bei der tiefen Temperatur von $T = 1.0\,\mathrm{K}$ sind die SdH-Oszillationen zu erkennen, deren Einhüllende von den Kommensurabilitäts-Oszillationen bestimmt ist. Mit Erhöhung der Temperatur verschwinden die SdH-Oszillationen und die Kommensurabilitäts-Oszillationen bleiben übrig. Die Kommensurabilitäts-Oszillationen sind in den beiden Leitfähigkeitskomponenten gegenphasig. Da in der SCBA der Mischungskoeffizient $\alpha_{\tau\tilde{\tau}} = \frac{1}{2}$ gesetzt ist, was für verschwindende Spin-Bahn-Kopplung zum falschen Grenzfall führt, bleibt die Leitfähigkeit deutlich unter dem Grenzfall der SCBA für entkoppelte Landau-Niveaus (gestrichelte Linie), obwohl in σ_{yy} als zusätzlicher Term die Band-Leitfähigkeit beiträgt.

Weiter markieren die Kommensurabilitätsbedingungen nicht mehr exakt die Position der Maxima in σ_{xx} oder Minima in σ_{yy}, was auf die kleine Gitterkonstante zurückzuführen ist. Dies wurde bereits in der magnetischen Minibandstruktur deutlich und auch im Experiment bereits beobachtet [Albr00].

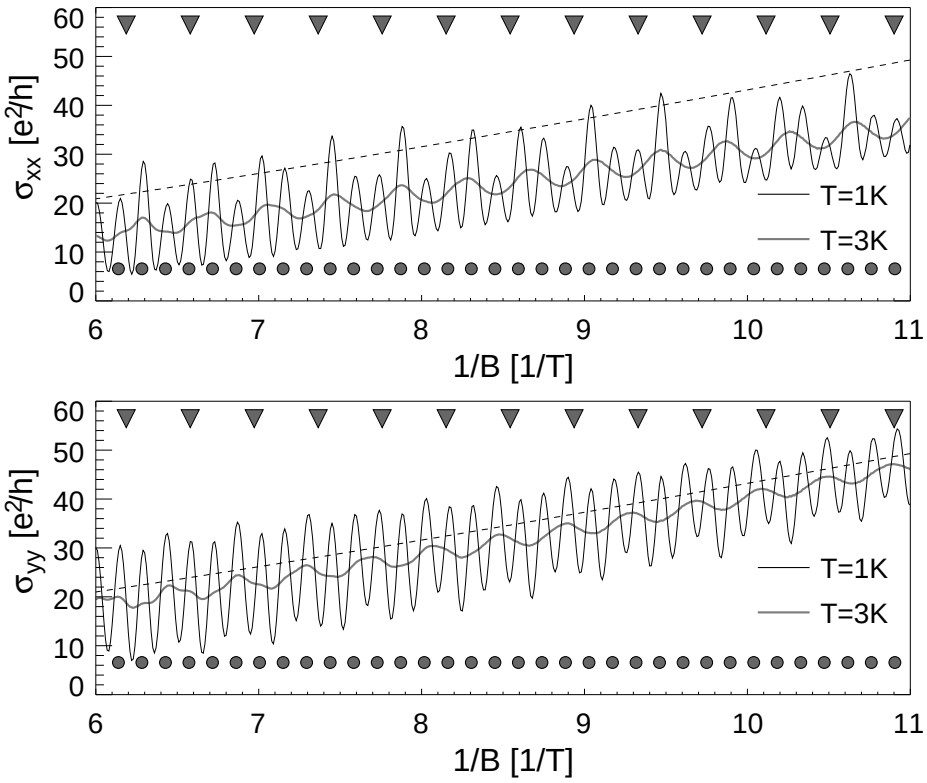


Abbildung 5.4 (a): Longitudinale Leitfähigkeiten σ_{xx} und σ_{yy} für ein 2DES in InAs ($m^* = 0.0229\,m_e$) mit einer Nullfeldbeweglichkeit $\mu = 50\,\mathrm{m}^2/\mathrm{Vs}$ bei zwei Temperaturen. Das laterale Übergitter ist mit einer Kosinus-Modulation nach Gleichung (5.2) mit $V_0 = 3.0\,\mathrm{meV}$ und $a = 75\,\mathrm{nm}$ modelliert. Die Fermi-Energie wurde bei $E_\mathrm{F} = 30\,\mathrm{meV}$ fixiert, was einer Elektronendichte von $n_\mathrm{s} = 2.9 \times 10^{15}\,\mathrm{m}^{-2}$ entspricht. Es ist keine Spin-Bahn-Wechselwirkung berücksichtigt ($\alpha_z = 0.0\,\mathrm{eVm}$), allerdings wurde $\alpha_{\tau\tilde{\tau}} = \frac{1}{2}$ gesetzt. Die Dreiecke markieren die Kommensurabilitäts-Bedingung und die Kreise die Maxima der SdH-Oszillationen ohne Spin-Bahn-Wechselwirkung. Die gestrichelte Kurve gibt das SCBA-Resultat bei Entkopplung der Landau-Niveaus wieder.

In Abbildung 5.4(b) sind die Leitfähigkeitskomponenten σ_{xx} und σ_{yy} für das 2DES mit Spin-Bahn-Wechselwirkung $\alpha_z = 2.0 \times 10^{-11}\,\mathrm{eVm}$ dargestellt. In den SdH-Oszillationen der Tieftemperatur-Kurve ($T = 1.0\,\mathrm{K}$) schlägt sich die Spin-Bahn-Wechselwirkung deutlich in einer Schwebung nieder. Bei höherer Temperatur $T = 3.0\,\mathrm{K}$ sind die SdH-Oszillationen ausgedämpft. Es

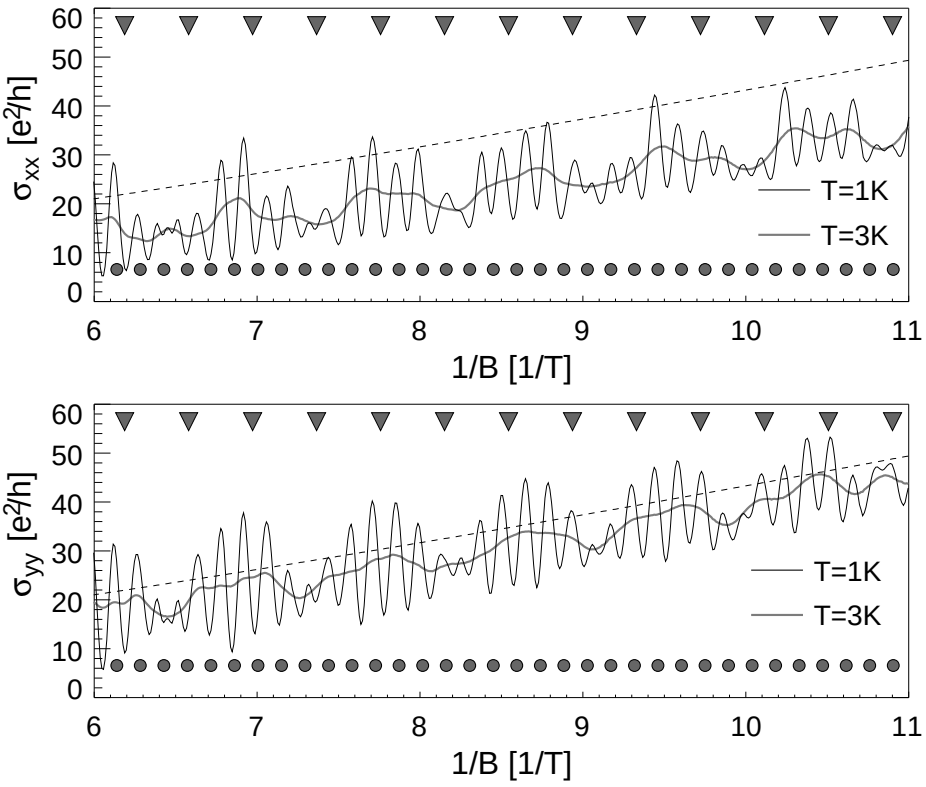


Abbildung 5.5 (b): Longitudinale Leitfähigkeiten σ_{xx} und σ_{yy} für die gleichen Parameter wie in Abbildung 5.4(a), aber hier ist eine Spin-Bahn-Wechselwirkung von $\alpha_z = 2.0 \times 10^{-11}$ eVm berücksichtigt.

bleibt eine langsame Oszillation übrig, die mit dem Überkreuzen der Landau-Niveaus durch die Spin-Bahn-Wechselwirkung korreliert. Dieser Modulation überlagert sind die Kommensurabiliäts-Oszillationen, deren genaue Periodizität aber aus der Abbildung nicht ersichtlich wird.

Um die Perioden der verschiedenen Oszillationen genau zu untersuchen wurden die berechneten Leitfähigkeiten Fourier-transformiert. Im Intervall des inversen Magnetfeldes $1/B$ von $6\,\mathrm{T}^{-1}$ bis $1/B = 11\,\mathrm{T}^{-1}$ wurde der oszillatorische Anteil der Leitfähigkeiten separiert, indem die Differenz der Daten bei zwei Temperaturen $T = 1.0\,\mathrm{K}$ und $T = 8.0\,\mathrm{K}$ gebildet wurde. Artefakte durch die Fourier-Transformation eines endlichen Datensatzes sind durch die Verwendung eines Hanning-Fensters [Pres92] unterdrückt.

In Abbildung 5.6 ist das Betragsquadrat des Fourier-Spektrums für verschiedene Stärken der Spin-Bahn-Wechselwirkung aufgetragen. Man erkennt das Aufspalten der verschiedenen 1/B-periodischen Oszillationen mit wach-

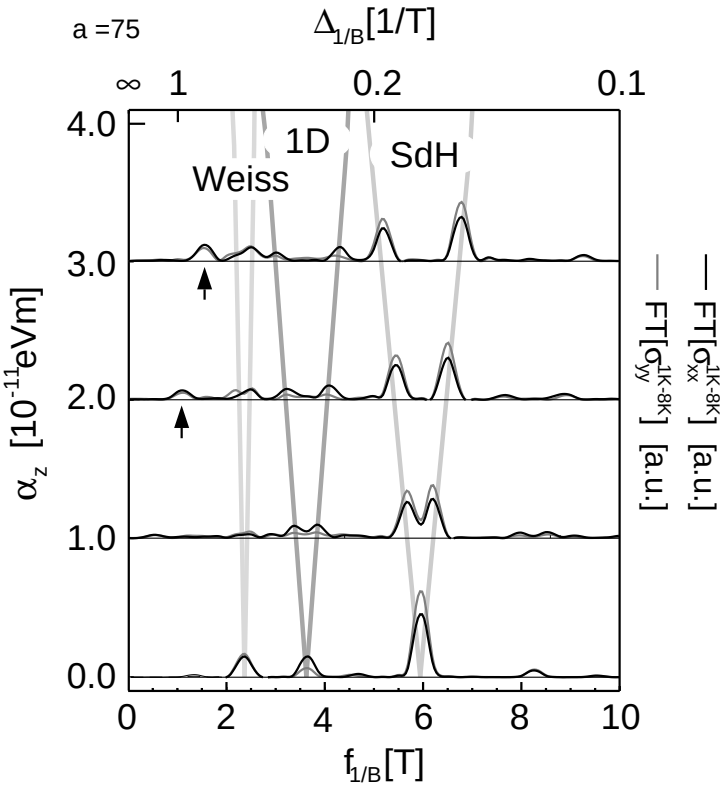


Abbildung 5.6: Betragsquadrat des Fourier-Spektrums der Leitfähigkeiten σ_{xx} und σ_{yy} für Parameter wie in Abbildung 5.4 und verschiedene Stärken der Spin-Bahn-Wechselwirkung α_z. Die Aufbereitung der Daten ist im Text beschrieben. Die Periode der Kommensurabilitäts-Oszillationen (Weiss) nach Gleichung (5.5), der Quantenoszillationen auf Grund der Minibandstruktur (1D) nach Gleichung (1.30) mit (5.4) und die SdH-Oszillationen (SdH) nach Gleichung (5.3) sind eingetragen. Die Pfeile weisen auf den Beitrag durch das Überkreuzen der Landau-Niveaus.

sender Spin-Bahn-Kopplung. Die Periode der Kommensurabilitäts-Oszillationen nach Gleichung (5.5), der Quantenoszillationen auf Grund der Minibandstruktur nach Gleichung (1.30) mit (5.4) und die SdH-Oszillationen nach Gleichung (5.3) sind eingetragen und sagen die Maxima des Fourier-Spektrum der quantenmechanischen Rechnung genau vorher. Für $\alpha_z \geq 2.0 \times 10^{-11}\,\mathrm{eVm}$ ist für kleinere Frequenzen $f_{1/B}$ neben dem Kommensurabilitäts-Gewicht der Beitrag durch die überkreuzenden Landau-Niveaus, markiert mit Pfeilen, zu erkennen.

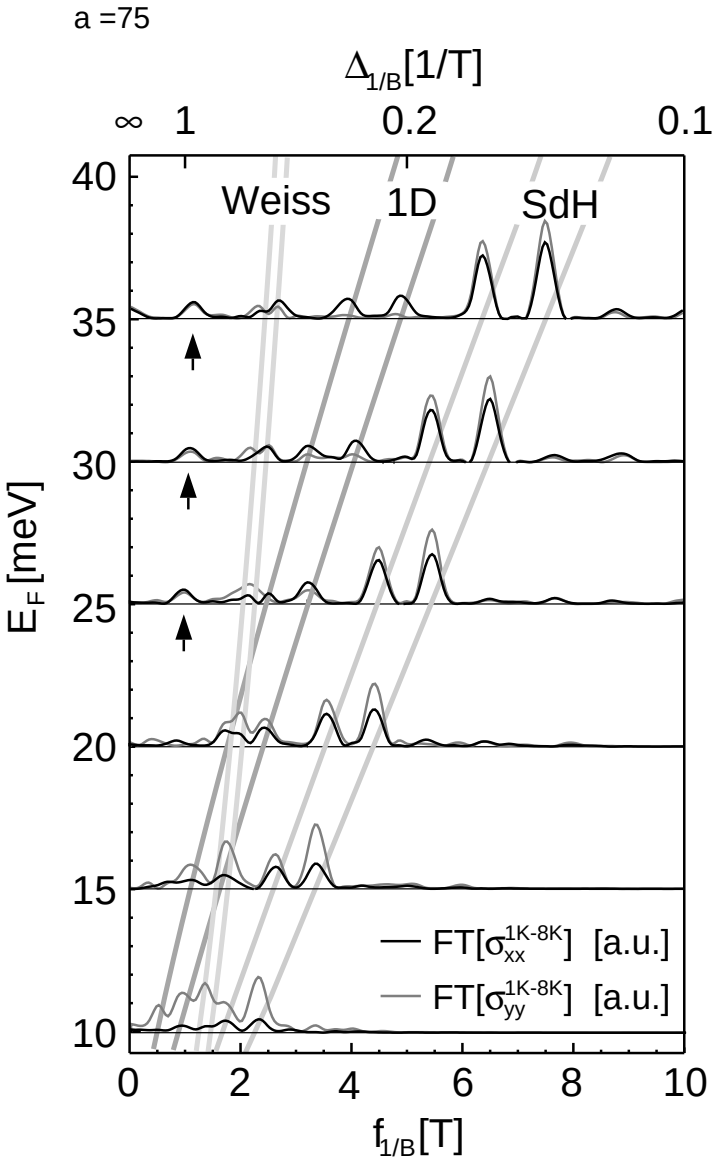


Abbildung 5.7: Betragsquadrat des Fourier-Spektrums der Leitfähigkeiten σ_{xx} und σ_{yy} für Parameter wie in Abbildung 5.4 und verschiedene Fermi-Energien. Die Aufbereitung der Daten ist im Text beschrieben. Die Periode der Kommensurabilitäts-Oszillationen (Weiss) nach Gleichung (5.5), der Quantenoszillationen auf Grund der Minibandstruktur (1D) nach Gleichung (1.30) mit (5.4) und die SdH-Oszillationen (SdH) nach Gleichung (5.3) sind eingetragen. Die Pfeile weisen auf den Beitrag durch das Überkreuzen der Landau-Niveaus.

In Abbildung 5.7 ist die Abhängigkeit der Periodizität der Magnetowiderstandsoszillationen von der Fermi-Energie untersucht. Für kleine Fermi-Energien $E_F = 10\,\mathrm{meV}$ ist das Gewicht der Oszillationen in der Bandleitfähigkeits-dominierten Leitfähigkeitskomponente σ_{yy} deutlich höher. Allerdings lassen sich die verschiedenen $1/B$-Perioden noch nicht trennen. Für hohe Fermi-Energie E_F sind sie klar unterscheidbar und alle beobachtbaren Frequenzen stimmen gut mit den Vorhersagen überein. Wieder läßt sich neben den Kommensurabilitäts-Oszillationen bei kleineren Frequenzen die Signatur der durch die Spin-Bahn-Wechselwirkung überkreuzenden Landau-Niveaus erkennen, worauf die Pfeile verweisen.

Bei den hier untersuchten Systemen findet der Magnetotransport in Minibändern mit hohem Minibandindex statt. Beim Transport in niedrigen Minibändern sind auch Effekte der Nichtdiagonalelemente der Geschwindigkeitsmatrixelemente zu erwarten, die hier für hohe Minibänder keine Rolle spielen. Sie sind in der numerischen Rechnung zwar berücksichtigt, ihr Beitrag zur Leitfähigkeit ist aber vernachlässigbar klein.

Die quantenmechanische Rechnung kann als Leitfaden für die wachsende Zahl von Rechnungen dienen, die den Spin in semiklassischen Näherungen [Aman01] berücksichtigen.

Die Spin-Bahn-Wechselwirkung wirkt sich in der quantenmechanischen Beschreibung also über zweierlei Effekte im Magnetotransport von lateralen Halbleiter-Übergittern aus. Einerseits führt die Spin-Bahn-Wechselwirkung zu einer Modulation der Streueffizienz. Dieser Effekt, mit dem das Überkreuzen der Landau-Niveaus im Magnetowiderstand zu beobachten ist, tritt auch ohne Modulation auf. Andrerseits verändert die Spin-BahnWechselwirkung das Energiespektrum im lateralen Übergitter. Dies äußert sich, wie in der quantenmechnanischen Rechnung gezeigt wurde, in einer Schwebung in den Magnetowiderstandsoszillationen. Dabei werden sowohl die klassischen d.h. die Kommensurabilitäts-Oszillationen als auch die Quantenoszillationen verändert.

Zusammenfassung

Im Mittelpunkt der vorliegenden Arbeit steht die quantenmechanische Rechnung zum Magnetotransport in lateralen Halbleiter-Übergittern und der Einfluß der Spin-Bahn-Wechselwirkung in zweidimensionalen Elektronensystemen ohne und mit Modulation.

Laterale Halbleiter-Übergitter eignen sich hervorragend für das Studium der Physik von Elektronen im *periodischen Potential*. Diese Systeme werden in Halbleiter-Heterostrukturen realisiert, indem einem zweidimensionalen Elektronensystem in der Ebene der freien Bewegung ein periodisches Potential aufgeprägt wird. Für das Elektronensystem in der Halbleiter-Heterostruktur existiert eine *Spin-Bahn-Wechselwirkung* (Rashba-Term), die neben den Materialparametern des Halbleiters von der Asymmetrie des Confinementpotentials bestimmt wird. Mit dieser Wechselwirkung kann der Spin-Freiheitsgrad der Elektronen durch ein externes elektrisches Feld manipuliert werden, wodurch sie für den Einsatz in der Spintronik von großem Interesse ist.

In der experimentell zugänglichen Meßgröße des Magnetowiderstandes, d.h. der Abhängigkeit des Widerstandes des Systems von einem externen Magnetfeld, spiegeln sich das Energiespektrum und die elektronischen Eigenschaften des Ladungsträgersystems in verschiedenen $1/B$-periodischen Oszillationen wieder. Für die Interpretation solcher Meßdaten zeigt die durchgeführte quantenmechanische Berechnung des Magnetotransports grundlegende Zusammenhänge auf, indem sie zum einen die physikalischen Mechanismen der im Experiment beobachteten Phänomene offenlegt, als auch neue, noch nicht beobachtete Effekte voraussagt.

Es wurde gezeigt, daß die vollständige quantenmechanische Berechnung der Magnetoleitfähigkeit für ein Elektronensystem mit eindimensionaler elektrostatischer Modulation neben den Shubnikov-de Haas-Oszillationen und den Kommensurabilitäts-Oszillationen auch die im Experiment beobachteten Quantenoszillationen auf Grund der durch das periodische Potential gebildeten Minibandstruktur reproduziert. Die Periodizität dieser Oszillationen war bisher in einem semiklassischen Bild mit den von Elektronenbahnen eingeschlossenen Flächen im $\boldsymbol{k}$-Raum erklärt.

Die quantenmechanische Berechnung des Magnetotransports, welche sowohl die periodische Modulation als auch das externe Magnetfeld im Systemhamiltonian berücksichtigt, konnte diese Oszillationen auf die Ausbildung einer charakteristischen magnetischen Minibandstruktur aus überlappenden magnetischen Minibändern zurückführen. Diese magnetische Minibandstruktur entsteht unter Vermeidung von Niveaukreuzungen aus einem kontinuierlichen Energiedispersionszweig, der mit offenen Bahnen in einem semiklassischen Bild in Verbindung steht, und flachen Landau-Bändern, die den Zyklotronbahnen entsprechen.

Mit der Auswertung der Kubo-Formel übersetzt sich die magnetische Minibandstruktur über verschiedene Leitfähigkeitsmechanismen in den Magnetotransport. Die Inter-Miniband-Leitfähigkeit ist durch die Zustandsdichte bestimmt, während die Intra-Miniband-Leitfähigkeit von der Dispersion der magnetischen Minibänder getragen ist. Während das semiklassische Bild nur die Periodizität der Quantenoszillationen erklären konnte, stellte sich mit der quantenmechanischen Rechnung heraus, daß die Phasenlage der Minibandoszillationen vom dominierenden Leitfähigkeitsmechanismus abhängt. Für ein in einer Raumrichtung moduliertes, laterales Halbleiter-Übergitter sagt so die quantenmechanischen Rechnung voraus, daß eine Gegenphasigkeit der Quantenoszillationen in den Leitfähigkeitskomponenten senkrecht und parallel zur Modulationsrichtung beobachtbar sein sollte. Damit könnte die Ausbildung einer magnetischen Minibandstruktur, die sich über verschiedene Leitfähigkeitsmechanismen im Magnetotransport niederschlägt, im Experiment nachgewiesen werden.

Neben den Quantenoszillationen auf Grund der Minibandstruktur wurde der Einfluß der Spin-Bahn-Wechselwirkung auf den Magnetotransport in lateralen Halbleiter-Übergittern durch quantenmechanische Berechnung untersucht. Diese Rechnung zum Magnetotransport für zweidimensionale Elektronensysteme mit Spin-Bahn-Wechselwirkung erfordert die Erweiterung der selbstkonsistenten Bornschen Näherung zur Berücksichtigung der Störstellen bei der Auswertung der Kubo-Formel um den Spin-Freiheitsgrad. Die Spin-Bahn-Wechselwirkung führt dazu, daß der Spin keine gute Quantenzahl mehr ist. Für die Eigenzustände des Elektronensystems ohne laterale Modulation

wird die Helizität, die hier mit *rechts* und *links* bezeichnet wurde, bestimmend. Im Rahmen dieser erweiterten SCBA zeigt sich durch die Berechnung des Magnetowiderstandes für ein homogenes zweidimensionales Elektronensystem, daß sich die Spin-Bahn-Wechselwirkung neben Schwebungen in den Shubnikov-de Haas-Oszillationen in einer Modulation der Leitfähigkeit niederschlägt, die mit dem Überkreuzen der Landau-Niveaus zusammenhängt. Diese vorhergesagte Modulation auf Grund der Kreuzungen der Landau-Niveaus kann ausgenutzt werden, die Spin-Bahn-Wechselwirkung in den Magnetotransportmessungen zu identifizieren.

Aufbauend auf dem Verständnis, wie sich das Überkreuzen der Landau-Niveaus durch Streuung im Magnetowiderstand auswirkt, wurde der Einfluß der Spin-Bahn-Wechselwirkung in 2DES im Zusammenhang mit einer periodischen Modulation, die das Energiespektrum verändert, studiert. Die quantenmechanische Rechnung zeigt, daß sich die Spin-Bahn-Wechselwirkung in einer Schwebung in den Magnetowiderstandsoszillationen des lateralen Halbleiter-Übergitters niederschlägt. Die Frequenzen der Shubnikov-de Haas Oszillationen, der Kommensurabilitäts-Oszillationen und der neuartigen Quantenoszillationen spalten durch die Spin-Bahn-Wechselwirkung auf. Die aus der quantenmechanischen Rechnung bestimmte Aufspaltung ist dabei in Übereinstimmung mit klassischen und semiklassischen Modellen.

Die Rechnungen für die modulierten Systeme mit Spin-Bahn-Wechselwirkung greifen den experimentellen Möglichkeiten voraus, da momentan die Technologie für Indium-Arsenid noch nicht vorhanden ist, Proben mit ausreichender Beweglichkeit herzustellen, um die beschriebenen Magnetowiderstandsoszillationen über mehrere Perioden zu beobachten. Neben der Funktion als Wegweiser für die Experimente können die quantenmechanischen Rechnungen aber auch herangezogen werden, um die wachsende Zahl von semiklassischen Näherungen zur Beschreibung des Spin-Freiheitsgrades an diesen Systemen zu überprüfen.

Im Hinblick auf die Untersuchung der Miniband-Oszillationen wurden weiterführende Rechnungen bereits begonnen, in denen die Quantenoszillationen für den Fall einer magnetischen Modulation untersucht werden. Darüber hinaus könnten analoge Untersuchungen der magnetischen Minibandstruktur für laterale Übergitter mit Modulation in beiden Raumrichtungen sowie komplexer Einheitszelle in Angriff genommen werden, um so das Verständnis der Physik von Elektronen im periodischen Potential noch weiter zu vertiefen.

ANHANG A

Energiedispersion für 1D-Modulation

Ausgehend von der Schrödingergleichung für ein Elektron, das sich in der xy-Ebene in einer Potentiallandschaft gegeben durch $V(x,y) = \frac{V_0}{2}\cos\left(\frac{2\pi}{a}x\right)$ bewegt,

$$\left(\frac{1}{2m}\left(-i\hbar\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{r}}\right)^2 + \frac{V_0}{2}\cos\left(\frac{2\pi}{a}x\right) - E\right)\Psi(x,y) = 0, \tag{A.1}$$

ermöglicht der Ansatz

$$\Psi(x,y) = e^{ik_y y}\cdot\phi(x) \tag{A.2}$$

die Separation der Raumkoordinaten. Somit sind die Energieeigenwerte gegeben durch $E = E_x + E_y$ mit

$$E_y = \frac{\hbar^2 k_y^2}{2m} \tag{A.3}$$

und der Bestimmungsgleichung für E_x,

$$\left(\frac{2mE_x}{\hbar^2} - \frac{2mV_0}{\hbar^2 2}\cos\left(\frac{2\pi}{a}x\right)\right)\phi(x) + \frac{d^2}{dx^2}\phi(x) = 0. \tag{A.4}$$

Diese läßt sich nun [Suhr94] mit der Substitution $z = x\frac{\pi}{a}$ auf die Mathieusche Differentialgleichung zurückführen .

$$y'' + (\alpha - 2q\cos(2z))\, y = 0 \tag{A.5}$$

mit

$$\alpha = \left(\frac{a}{\pi}\right)^2 \frac{2mE_x}{\hbar^2} \quad \text{und} \quad q = \left(\frac{a}{\pi}\right)^2 \frac{mV_0}{\hbar^2 2}. \tag{A.6}$$

Für reelles q hat die Differentialgleichung Eigenwerte α, die zu periodischen Lösungen, den Mathieu-Funktionen [Grad80, Wolfr96], führen. Da der Hamiltonian gerade ist, interessieren jetzt auch nur die geraden Lösungen, nämlich

$$Cl_{2n}(z,q) \quad \text{sowie} \quad Cl_{2n+1}(z,q), \tag{A.7}$$

in der Notation von [Grad80]. Nach dem Floquet'schen Theorem [Wolfr96] kann jede Mathieu-Funktion durch $e^{irz}f(z)$ ausgedrückt werden, wobei $f(z) = f(z + 2\pi)$. Der charakteristische Exponent r, von dem die Eigenwerte α abhängen, läßt sich als Wellenvektor in der ersten Brillouin-Zone interpretieren. Als Lösung für E_x ergibt sich

$$E_x = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \frac{\hbar^2}{2m} \cdot \mathrm{MathieuCharA}(k_x \frac{a}{2\pi}, q). \tag{A.8}$$

Die Funktion $\mathrm{MathieuCharA}(r,q)$ liefert gerade die Eigenwerte, zu denen die Mathieusche Differentialgleichung durch die periodischen Funktionen (A.7) gelöst wird. Die Eigenwerte lassen sich aus einem linearen Gleichungssystem [Grad80] berechnen.

ANHANG B

Elektronen im Magnetfeld

Die Schrödingergleichung für ein Elektron im 2DES mit einem Magnetfeld senkrecht zur Bewegungsrichtung lautet

$$\left(\frac{1}{2m}\left(\boldsymbol{p}+e\boldsymbol{A}\right)^2-E\right)\Psi(\boldsymbol{r})=0. \tag{B.1}$$

Der kinetische Impuls $\boldsymbol{\pi}=\boldsymbol{p}+e\boldsymbol{A}$ ergibt sich durch die Erweiterung des kanonischen Impulse $\boldsymbol{p}$ durch das Vektorpotential $\boldsymbol{A}$. Mit der Landau-Eichung $\boldsymbol{A}=B\cdot(0,x,0)$ hängt der Hamiltonian nicht von y ab, und diese Translationssymmetrie in y-Richtung bleibt auch erhalten, wenn noch ein zusätzliches Potential in x-Richtung hinzukommt. Mit dem Ansatz:

$$\Psi(\boldsymbol{r})=\frac{1}{L_y}e^{ik_y y}\cdot\phi(x) \tag{B.2}$$

ergibt sich für die x-Abhängigkeit der Wellenfunktion ein harmonischer Oszillator

$$\left(\frac{1}{2m}p_x^2+\frac{m\omega_c^2}{2}\left(x-X_0\right)^2-E\right)\Psi(x,y)=0, \tag{B.3}$$

mit der Zentrumskoordinate

$$X_0=-\lambda_c^2 k_y, \tag{B.4}$$

der magnetischen Länge

$$\lambda_c^2 = \frac{\hbar}{eB}, \tag{B.5}$$

und der Zyklotronfrequenz,

$$\omega_c = \frac{eB}{m}. \tag{B.6}$$

Die Lösung zu Gleichung (B.1) läßt sich nun schreiben als

$$\Psi_{k_y,n}(x,y) = \chi_{k_y}(y) \cdot \phi_{k_y,n}(x) \tag{B.7}$$

mit

$$\chi_{k_y}(y) = \frac{1}{L_y} e^{ik_y y} \tag{B.8}$$

und

$$\phi_{k_y,n}(x) = \phi_n(x - X_0) = \phi_n(x + \lambda_c^2 k_y). \tag{B.9}$$

Die Funktionen $\phi_n(\xi)$, $n = 0, 1, 2, ...$ stellen die Lösungen des Harmonischen Oszillators dar, die normiert lauten:

$$\phi_n(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_c}} e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\lambda_c^2}} h_n(\frac{x}{\lambda_c}) \tag{B.10}$$

mit h_n als normiertes Hermite-Poynom [Grad80], das über

$$h_n(x) = \frac{(-1)^n}{(2^n n! \sqrt{\pi})^{1/2}} e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \tag{B.11}$$

definiert ist. Die Wellenfunktionen im Ortsraum nach Gleichung (B.7) sind durch den Landau-Index n und die Zentrumskoordinate X_0 charakterisiert und lassen sich als $|nX_0\rangle$ bezeichnen. Die Energie hängt nicht von X_0 ab und lautet

$$E_n = \hbar\omega_c(n + \frac{1}{2}). \tag{B.12}$$

Werden die energetisch entarteten Zustände $|nX_0\rangle$, $X_0 \in [-\frac{L_x}{2}, \frac{L_x}{2}]$ mit $|n\rangle$ bezeichnet, so ist jeder Zustand bei Berücksichtigung der zweifachen Spin-Entartung mit $\frac{L_x L_y}{\pi\lambda_c^2}$ entartet. Die Geschwindigkeitsmatrixelemente lauten $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\pi}/m$:

$$\langle n' X_0' | v_x | nX_0 \rangle = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \frac{1}{\lambda_c m} \delta_{X_0, X_0'} i \left(\sqrt{n}\, \delta_{n,n'+1} - \sqrt{n+1}\, \delta_{n,n'-1} \right) \tag{B.13}$$

und

$$\langle n' X_0' | v_y | n X_0 \rangle = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \frac{1}{\lambda_c m} \delta_{X_0, X_0'} \left(\sqrt{n}\, \delta_{n,n'+1} + \sqrt{n+1}\, \delta_{n,n'-1} \right) \tag{B.14}$$

Ein periodisches Potential in x-Richtung kann in Fourier-Komponenten mit q als reziproken Gittervektor zerlegt werden. Die Matrixelemente lauten:

$$\begin{aligned} \langle X_0' n' | e^{iqx} | X_0 n \rangle = \quad & \delta_{X_0, X_0'}\, e^{iqX_0 - \frac{1}{4}q^2\lambda_c^2}\, 2^{\frac{1}{2}(m-M)} \sqrt{\frac{m!}{M!}} \times \\ \times \quad & i^{M-m}\, (q\lambda_c)^{M-m}\, \mathrm{L}_m^{M-m}(\frac{1}{2} q^2 \lambda_c^2). \end{aligned} \tag{B.15}$$

Mit L_n^α sind die Laguerre-Polynome [Grad80] bezeichnet.

Mit den Leiteroperatoren

$$a^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1}\, |n+1\rangle \tag{B.16}$$

$$a |n\rangle = \sqrt{n}\, |n-1\rangle \tag{B.17}$$

läßt sich der Hamiltonian Darstellungs-frei schreiben und die Matrixelemente für den kinetischen Impuls lauten

$$\pi_x = p_x = i \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \frac{1}{\lambda_c} (a^\dagger - a) \tag{B.18}$$

$$\pi_y = p_y + eBx = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \frac{1}{\lambda_c} (a^\dagger + a). \tag{B.19}$$

Von X_0 wird der Hamiltonian erst durch das Übergitterpotential abhängig.

ANHANG C

Matrixelemente mit Helizität

Die Komponenten des Geschwindigkeitsoperators nach Gleichung (4.47) lassen sich aus dem Operator $b^\dagger$ definiert als

$$b^\dagger = \begin{pmatrix} a^\dagger & \alpha \\ 0 & a^\dagger \end{pmatrix} \tag{C.1}$$

zusammensetzen über

$$v_x = i\frac{\hbar}{\sqrt{2}}\frac{1}{\lambda_c m^*}(b^\dagger - b) \tag{C.2}$$

$$v_y = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\frac{1}{\lambda_c m^*}(b^\dagger + b). \tag{C.3}$$

Die Matrixelemente von $b^\dagger$ lauten in der *rechts-/links*-Basis bezeichnet nach Gleichung (4.17)

$$\begin{aligned} \langle n'\tau'|b^\dagger|n\tau\rangle = \quad & (a^u_{n'\tau'})^*(a^u_{n\tau})\sqrt{n - \frac{1-\tau}{2} + 1}\,\delta_{n'-\frac{1-\tau'}{2},n-\frac{1-\tau}{2}+1} + \\ + \quad & \alpha(a^u_{n'\tau'})^*(a^d_{n\tau})\delta_{n'-\frac{1-\tau'}{2},n-\frac{-1-\tau}{2}} + \\ + \quad & (a^d_{n'\tau'})^*(a^d_{n\tau})\sqrt{n - \frac{-1-\tau}{2} + 1}\,\delta_{n'-\frac{-1-\tau'}{2},n-\frac{-1-\tau}{2}+1}. \end{aligned} \tag{C.4}$$

Die Matrixelemente des Modulationspotentials lauten

$$\langle n' X_0' \tau' | e^{iqx} | n X_0 \tau \rangle = \\ + \quad \sum_\sigma a^*_{\tau' n' \sigma} a_{\tau n \sigma} \langle n' - \frac{\sigma - \tau'}{2} X_0', \sigma | e^{iqx} | n - \frac{\sigma - \tau}{2} X_0, \sigma \rangle. \tag{C.5}$$

An den Matrixelementen ist zu ersehen, daß das Potential *rechts* und *links*-Zustände vermischt.

ANHANG D

Vertexkorrekturen

Im folgenden wird gezeigt, daß die Vertexkorrekturen für die erweiterte SC-BA mit Berücksichtigung des Spin-Freiheitsgrades in der Nährung, daß die Selbstenergie diagonal in der Helizität und in den Orts-Quantenzahlen ist, verschwinden. Der Beweis geht analog zu dem der C-Zahl-Näherung [Gerh75].

Mit der in Vergleich zu Gleichung (2.23) etwas allgemeineren Definition der Vertexfunktion

$$F_{\alpha\alpha'}(z,z';v_\mu) = \langle \mathcal{G}_\alpha(z)\, v_\mu\, \mathcal{G}_\alpha(z')\rangle_{\mathrm{I}} \tag{D.1}$$

läßt sich in der Bethe-Salpeter-Gleichung, die analog zu (2.32) lautet

$$F_{\alpha,\alpha'}(z,z';v_\mu) = G_\alpha v_\mu G_{\alpha'} + G_\alpha I_{\alpha\alpha'}\left[F_{\beta,\beta'}(z'',z''';v_\mu)\right] G_{\alpha'} \tag{D.2}$$

ein Ausdruck für den Integralkern ableiten, mit den konsistenten Näherungen zur Selbstenergie:

$$I_{\alpha\alpha'}(z,z';v_\mu) = \Gamma_{\alpha\beta\beta'\alpha'} F_{\beta\beta'}(z,z';v_\mu) \tag{D.3}$$

mit Γ aus Gleichung (4.30). Mit den Diagonalnäherungen in den Quantenzahlen (sowohl Orts- als auch Spinquantenzahlen) gilt mit $\alpha = \{\,{}^{\tau}_{n}\,\}$ wenn τ die Spinquantenzahl des Spin-Bahn-Systems $\tau \in \{r,l\}$ und n die Ortsquantenzahl bezeichnet.

$$F^{\tau}_{n}(z,z';v_\mu) = G^{\tau}_{n}(z)\left(v_\mu + I^{\tau}_{n}(z,z';v_\mu)\right) G^{\tau}_{n}(z'). \tag{D.4}$$

mit

$$I_{n}^{\tau}(z,z';v_\mu) = \sum_{\substack{\kappa \\ m}} \alpha_{\tau\kappa} F_{m}^{\kappa}(z,z';v_\mu) \tag{D.5}$$

In diese Gleichung wird (D.4) eingesetzt und für den Integralkern gilt nun das Gleichungsystem:

$$\sum_{\substack{\tau \\ m}} \alpha_{\kappa\tau} G_{m}^{\tau} I_{m}^{\tau} G_{m}^{\tau} - \delta_{\kappa\tau} I_{n}^{\tau} = -\sum_{\substack{\tau \\ m}} \alpha_{\kappa\tau} G_{m}^{\tau} v_\mu G_{m}^{\tau}. \tag{D.6}$$

Die Argumente der Greenschen Funktion und des Integralkerns sind nicht mehr angegeben. Die rechte Seite des Gleichungssystems lässt sich unter Verwendung der Bewegungsgleichung

$$v_\mu = -\frac{i}{\hbar}[r_\mu, H] \tag{D.7}$$

umschreiben zu

$$\sum_{\substack{\tau \\ m}} \frac{i}{\hbar} \alpha_{\kappa\tau} \left(G_{m}^{\tau} r_\mu H G_{m}^{\tau} - G_{m}^{\tau} H r_\mu G_{m}^{\tau} \right) \tag{D.8}$$

nun vertauschen H und G, da beide diagonal in allen Quantenzahlen sind. Unter Ausnutzen, daß unter der Spur zyklisches Vertauschen am Ergebnis nichts ändert, zeigt man, daß beide Summanden sich gegenseitig wegheben und der Ausdruck (D.8) verschwindet. Damit folgt, daß Gleichung (D.6) nur erfüllt werden kann, wenn die Vertexkorrekturen verschwinden.

Literaturverzeichnis

[Abri63] A.A. Abrikosov, L.P.Gorkov and I.E. Dzyaloshinski: *Methods of Quantum Field Theory in Statistical Physics*, Prentice-Hall, New Jersey (1963).

[Albr98] C. Albrecht, J.H. Smet, D. Weiss, K. von Klitzing, V. Umansky, H. Schweizer: *Novel Magneto-Resistance Oscillations in Short Period Lateral Superlattices*, Physica B **249-251**,914 (1998).

[Albr99] C. Albrecht, J.H. Smet, D. Weiss, K. von Klitzing, R. Hennig, M. Langenbuch, M. Suhrke, U. Rössler, V. Umansky, H. Schweizer: *Fermiology of Two-Dimensional Lateral Superlattices*, Physical Review Letters **83**, 2234 (1999).

[Albr00] C. Albrecht: *Quantenmechanische Transporteffekte in kurzperiodischen lateralen Übergittern*, Dissertation, MPI Stuttgart (2000).

[Albr01] C. Albrecht, J.H. Smet, K. von Klitzing, D. Weiss, V. Umansky, H. Schweizer: *Evidence of Hofstadter's Fractal Energy Spectrum in the Quantized Hall Conductance*, Physical Review Letters **86**, 147 (2001).

[Alts85] B.L. Altshuler and A.G. Aronov: *Electron-Electron Interaction In Disordered Conductors*, in *Modern Problems in Condensed Matter Science*, Vol. 10, Editors: A.L. Efros, M. Pollak, North-Holland Physics Publishing, Amsterdam, 1 (1985).

[Aman01] C. Amann: *Semiklassische Näherungen zur Spin-Bahn-Kopplung*, Dissertation, Regensburg (2001).

[Ande58] P.W. Anderson: *Absence of Diffusion in Certain Random Lattices*, Physical Review **109**, 1492 (1958).

[Ando82] T. Ando, A.B. Fowler and F. Stern: *Electronic Properties of Two-dimensional Systems*, Reviews of Modern Physics **54**, 437 (1982).

[Aoki87] H. Aoki: *Quantised Hall-Effect*, Reports on Progress in Physics **50**, 655 (1987).

[Argy60] P.N. Argyres: *Quantum Theory of Transport in a Magnetic Field*, Physical Review **117**, 315 (1960).

[Ashc76] N.W. Ashcroft, I. Mermin: *Solid State Physics*, Saunders College, Washington, (1976).

[Aver01] N.S. Averkiev, L.E. Golub, S.A. Tarasenko, and M. Willander: *Theory of Magneto-Oscillation Effects in Quasi-Two-Dimensional Semiconductor Structures*, Journal of Physics: Condensed Matter **13**, 2517 (2001).

[Awsch02] D.D. Awschalom, D. Loss, N. Samarth (Editors): *Semiconductor Spintronics and Quantum Computation*, NanoScience and Technology, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg (2002).

[Been89] C.W. Beenakker: *Guiding-Center-Drift Resonance in a Periodically Modulated Two-Dimensional Electron Gas*, Physical Review Letters **62**, 2020 (1989).

[Bros99] S. Brosig, K. Ensslin, R. J. Warburton, C. Nguyen, B. Brar, M. Thomas, H. Kroemer: *Zero-Field Spin Splitting in InAs-AlSb Quantum Wells Revisited*, Physical Review B **60**, R13989 (1999).

[Bych84] Yu.A. Bychkov and É.I. Rashba: *Properties of a 2D Electron Gas with Lifted Spectral Degeneracy* translated from Pis'ma v Zhurnal Eksperimental'noi i Teoreticheskoi Fiziki **39**, 66 (1984) in Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters (JETP Letters) **39**, 78 (1984).

[Casi45] H.B.G. Casimir: *On Onsager's Principle of Microscopic Reversibility*, Review of Modern Physics **17**, 343 (1945).

[Chak88] T. Chakraborty and P. Pietiläinen (Editors): *The Fractional Quantum Hall Effect*, Springer Series in Solid-State Sciences, Vol. **85**, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, NewYork (1988).

[Chel76] J.R. Chelikowsky and M.L. Cohen: *Nonlocal Pseudopotential Calculations for the Electronic Structure of Eleven Diamond and Zinc-Blende Semicondductors*, Physical Review B **14**, 556 (1976).

[Cohe61] M.H. Cohen and L.M. Falicov: *Magnetic Breakdown in Crystals*, Physical Review Letters **7**, 231 (1961).

[Darn93] T. Darnhofer and U. Rössler: *Effects of Band Structure and Spin in Quantum Dots*, Physical Review B **47**, R16020 (1993).

[Das89] B. Das, D.C. Miller, S. Datta, R. Reifenberger, W.P. Hong, P.K. Bhattacharya, J. Singh, M. Jaffe: *Evidence for Spin Splitting in* $In_xGa_{1-x}/In_{0.52}Al_{0.48}As$ *Heterostructures as* $B \rightarrow 0$, Physical Review B **39**, R1411 (1989).

[Datt90] S. Datta and B. Das: *Electronic Analog of the Electro-Optic Modulator*, Applied Physics Letters **56**, 665 (1990).

[Deut01] R.A. Deutschmann, W. Wegscheider, M. Rother, M. Bichler, G. Abstreiter, C. Albrecht, J.H. Smet: *Quantum Interference in Artificial Band Structures*, Physical Review Letters **86**, 1857 (2001).

[Deut01a] R.A. Deutschmann: *Two Dimensional Electron Systems in Atomically Precise Periodic Potentials*, Dissertation, TU München (2001)

[Doni98] S. Doniach and E.H. Sondheimer: *Green's Functions for Solid State Physicists*, Imperial College Press, London (1998).

[Dres55] G. Dresselhaus: *Spin-Orbit Coupling Effects in Zinc Blende Structures*, Physical Review **100**, 580 (1955).

[Drud1900] P. Drude: *Zur Elektronentheorie I.*, Annalen der Physik, 1:566 (1900) und P. Drude: *Zur Elektronentheorie II.*, Annalen der Physik, 3:369 (1900).

[Dyak72] M. I. D'yakonov and V. I. Perel':*Spin Relaxation of Conduction Electrons in Noncentrosymmetric Semiconductors*, Fizika Tverdogo Tela **13**, 3581 (1971) übersetzt in Soviet Physics Solid State **13**, 3023 (1972).

[Econ83] E.N. Economou: *Green's Functions in Quantum Physics*, Solid State Sciences **7**, Springer-Verlag, Berlin, NewYork, Tokyo (1983).

[Ferr90] R. Ferrari: *Two-Dimensional Electrons in a Strong Magnetic Field: A Basis for Single-Particle States*, Physical Review B **42**, 4598 (1990).

[Flei92] R. Fleischmann, T. Geisel, and R. Ketzmerick: *Magnetoresistance due to Chaos and Nonlinear Resonances in Lateral Surface Superlattices*, Physical Review Letters **68**, 1367 (1992).

[Gerh75] R.R. Gerhardts: *Self-Consistent Transport Equations for the Electron-Impurity System in a Magnetic Field*, Zeitschrift für Physik B **22**, 327 (1975).

[Gerh89] R.R. Gerhardts, D.Weiss, and K. von Klitzing: *Magnetoresistance Oscillations in a Periodically Modulated Two-Dimensional Electron Gas*, Physikal Review Letters **62**, 1173 (1989).

[Grad80] I.S. Gradshteyn, I.M. Ryzhik: *Tabel of Integrals, Series, and Products*, Academic Press, NewYork, London (1980).

[Gros01] J. Groß, R.R. Gerhardts: *Quantum Magnetotransport Calculations for 2D Electron Systems with Weak 1D Modulation and Anisotropic Scattering*, Physica B **298**, 83 (2001).

[Hajd94] J. Hajdu and M. Janßen: *Introduction to the Theory of the Integer Quantum Hall Effect*, VCH-Verlag, Weinheim u.a. (1994).

[Heid98] J.P. Heida, B.J. van Wees, J.J. Kuipers, and T.M. Klapwijk: *Spin-Orbit Interaction in a Two-Dimensional Electron Gas in a InAs/AlSb Quantum Well with Gate-Controlled Electron Density*, Physical Review B **57**, 11911 (1998).

[Hell94] K.-H. Hellwege: *Einführung in die Festkörperphysik*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, NewYork, (1994).

[Henn99] R. Hennig: *Elektronenbahnen im Magnetotransport durch laterale zweidimensionale Halbleiter-Übergitter*, Dissertation, Regensburg (1999), Logos-Verlag, Berlin (2000).

[Hiro86] T. Hiroshima, R. Lang: *Effects of Conduction-Band Nonparabolicity on Quantized Energy Levels of a Quantum Well*, Applied Physics Letters **49**, 456 (1986).

[Hofs76] D.R. Hofstadter: *Energy Levels and Wave Functions of Bloch Electrons in Rational and Irrational Magnetic Fields*, Physical Review B **14**, 2239 (1976).

[Hu99] C.-M. Hu,J. Nitta, T. Akazaki, H. Takayanagi, J. Osaka, P. Pfeffer, W. Zawadzki: *Zero-Field Spin Splitting in an Inverted*

$In_{0.53}Ga_{0.47}As/In_{0.52}Al_{0.48}As$ Heterostructure: Band Nonparabolicity Influence and the Subband Dependence., Physical Review B **60**, 7736 (1999).

[Kane82] E.O. Kane in: *Handbook on Semiconductors*, Band 1, Hrsg. T.S Moss and W. Paul, North-Holland Publishing Company, Amsterdam (1982), S.194.

[Keit67] H. Keiter: *Über den Einfluß der Coulomb-Wechselwirkung zwischen den Elektronen auf den Restwiderstand im Magnetfeld*, Zeitschrift für Physik **198**, 215 (1967).

[Kubo57] R. Kubo: *Statistical-Mechanical Theory of Irreversible Processes I*, Journal of the Physical Society of Japan (JPSJ) **12**, 570 (1957).

[Land82] Landolt-Börnstein, Neue Serie III, Hrsg.: O. Madelung, Band 17a: *Halbleiter* (1982) und Band 22a: *Halbleiter* (1987), Springer, Berlin.

[Lang99] M. Langenbuch: *Minibandeffekte und Spin-Bahn-Wechselwirkung im Magnetotransport von lateralen Halbleiter-Übergittern*, Diplomarbeit, Regensburg (1999).

[Lang00] M. Langenbuch, R. Hennig, M. Suhrke, U. Rössler, C. Albrecht, J.H. Smet, D. Weiss: *Minibands, Magnetic Breakdown, and Novel Magnetoresistance Oscillations in Short-Period Lateral Superlattices*,Physica E **6**, 565 (2000).

[Lang02] M. Langenbuch, M. Suhrke, U. Rössler :*Magnetotransport Calculations for Two-Dimensional Electrons with Spin-Orbit Interaction*, Proceedings of the 2nd International Conference on Physics and Applications of Spin-Related Phenomena, accepted for publication, Journal of Superconductivity (2002).

[Lech02] C. Lechner: *Minibandstruktur und Leitfähigkeitsoszillationen in lateralen Übergittern mit eindimensionaler magnetischer Modulation*, Diplomarbeit, Regensburg (2002).

[Lech02b] C. Lechner, M. Langenbuch, M. Suhrke, U. Rössler: *Quantum Oscillations in the Magnetotransport of Lateral Superlattices due to Miniband Formation*, Proceedings of 26th International Conference on the Physics of Semiconductors, Edinburgh (2002).

[Lomm88] G. Lommer, F. Malcher and U. Rössler: *Spin-Splitting in Semiconductor Heterostructures for $B \to 0$*, Physical Review Letters **60**, 728 (1988).

[Lu98] J.P. Lu, J.B. Shukla, M. Shayegan, L. Wissinger, U. Rössler and R. Winkler: *Tunable Spin-Splitting and Spin-Resolved Ballistic Transport in GaAs/AlGaAs Two-Dimensional Holes*, Physical Review Letters **81**, 1282 (1998).

[Luo90] J. Luo, H. Munekata, F.F. Fang, P.J. Stiles: *Effects of Inversion Asymmetry on Electron Energy Band Structures in GaSb/InAs/GaSb Quantum Wells*, Physical Review B **41**, 7685 (1990).

[Lutt55] J.M. Luttinger and W. Kohn: *Motion of Electrons and Holes in Perturbed Periodic Fields*, Physical Review **97**, 869 (1955).

[Maga94] L.L. Magarill: *Beats of Weiss Oscillationes in Lateral-Surface Superlattices*, Superlattices and Microstructures **16**, 257 (1994).

[Maha81] G.D. Mahan: *Many-Particle Physics*, Plenum Press, New York (1981).

[Mano01] A. Manolescu, R.R. Gerhardts, M. Suhrke, R. Rössler: *Anisotropic Scattering and Quantum Magnetoresistivities of a Periodically Modulated Two-Dimensional Electron Gas*, Physical Review B **63**, 115322 (2001).

[Menn97] R. Menne and R.R. Gerhardts: *Magnetoresistance of a Two-Dimensional Electron Gas With Spatially Periodic Lateral Modulations: Exact Consequences of Boltzmann's Equation*, Physical Review B **57**, 1707 (1998).

[Mole01] L.W. Molenkamp and G. Schmidt: *The Rashba Hamiltonian and Electron Transport*, Physical Review B **64**, R121202 (2001).

[Naga82] Y. Nagaoka, H. Fukuyama (Editors): *Anderson Localization*, Springer Series in Solid-State Sciences, Vol. 39, Berlin, Heidelberg, NewYork (1982).

[Nitt97] J. Nitta,T. Akazaki, H. Takayanagi, T. Enoki: *Gate Control of Spin-Orbit Interaction in an Inverted* $In_{0.53}Ga_{0.47}As/In_{0.52}Al_{0.48}As$ *Heterostructure*, Physical Review Letters **78**, 1335 (1997).

[Ohka74] F.J. Ohkawa and Y. Uemura: *Quantized Surface States of a Narrow-Gap Semiconductor*, Journal of the Physical Society of Japan **37**, 1325 (1974).

[Onsa31] L. Onsager: *Reciprocal Relations in Irreversible Processes*, Physical Review **37**, 405 (1931).

[Onsa52] L. Onsager: *Interpretation of the de Haas-van Alphen Effect*, Philosophical Magazine **43**, 1006 (1952).

[Pfan92] D. Pfannkuche and R.R. Gerhardts: *Theory of Magnetotransport in Two-Dimensional Electron Systems Subjected to Weak Two-Dimensional Superlattice Potentials*, Physical Review B **46**, 12606 (1992).

[Pres92] W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T.Vetterling, B.P. Flannery: *Numerical Recipes in Fortran*, University Press, Cambridge (1992).

[Rash60] É.I Rashba *Properties of Semiconductors with an Extremum Loop I. Cyclotron and Combinational Resonance in a Magnetic Field Perpendicular to the Plane of the Loop* translated from Fizika Tverdogo Tela **2**, 1224 (1960) in Soviet Physics Solid State **2**, 1109 (1960).

[Rott97] P. Rotter: *Theoretische Untersuchungen zum Magnetotransport in lateralen Übergittern*, Dissertation, Regensburg (1997)

[Schä98] Th. Schäpers, G. Engels, J. Lange, Th. Klocke, M. Hollfelder, and H. Lüth: *Effect of the Heterointerface on the Spin Splitting in Modulation Doped $In_xGa_{1-x}As/InP$ Quantum Wells for $B \to 0$*, Journal of Applied Physics **98**, 4324 (1998).

[Silb94] H. Silberbauer: *Quanten-Magnetotransport und Quantenchaos in Antidot-Übergittern*, Dissertation, Regensburg (1994).

[Silb95] H. Silberbauer, P.Rotter, U .Rössler, and M. Suhrke: *Quantum Chaos in Magnetic Band Structures*, Europhysics Letter **31**, 393 (1995).

[Silv94] E.A. de Andrada e Silva, G.C. La Rocca, and F. Bassani: *Spin-Split Subbands and Magneto-Oscillations in III-V Asymmetric Heterostructures*, Physical Review B **50**, 8523 (1994).

[Star67] R.W. Stark and L.M. Falikov: *Magnetic Breakdown in Metals*, Progress in low temperature physics (edited by C.J. Gorter) Vol.V, North Holland Publication Company, Amsterdam (1967).

[Stre75] P. Středa and L. Smrčka: *Galvanometric Effects in Alloys in Quantizing Magnetic Fields*, Physica Status Solidi **70**, 537 (1975).

[Stre90] P. Středa and A.H. MacDonald: *Magnetic Breakdown and Magnetoresistance Oscillationes in a Periodically modulated Two-Dimensional Electron Gas*, Physical Review B **41**, 11892 (1990).

[Suhr94] M. Suhrke, P.E. Selbmann: *Weak localization in lateral surface superlattices*, Physical Review B **49**, 1908 (1994).

[Suhr96] M. Suhrke: *Theorie des Elektronentransports in niedrigdimensionalen Halbleiterstrukturen*, Habilitation, Regensburg (1996).

[Tara02] S.A. Tarasenko and N.S. Averkiev: *Interference of Spin Splittings in Magneto-Oscillation Phenomena in Two-Dimensional Systems*, translated from Pis'ma v Zhurnal Eksperimental'noi i Teoreticheskoi Fiziki **75**, 669 (2002) in Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters (JETP Letters) **75**, 552 (2002).

[Vasi89] P. Vasilopoulos, F.M. Peeters: *Quantum Magnetotransport of a Periodically Modulated Two-Dimensional Elektron Gas*, Physical Review B **63**, 2120 (1989).

[Wagn90] M. Wagner: *Transport in mikrostrukturierten Systemen*, Dissertation, Hamburg (1990).

[Weis89] D. Weiss, K. von Klitzing, K. Ploog, and G. Weimann *Magnetoresistance Oscillations in a Two-Dimensional Electron Gas Induced by a Submicrometer Periodic Potential*, Europhysics Letters **8**, 179 (1989).

[Weis91] D. Weiss, M.L. Roukes, A. Menschig, P. Grambow, K. von Klitzing, and G. Weimann *Electron Pinball and Commensurate Orbits in a Periodic Array of Scatterers*, Physical Review Letters **66**, 2790 (1991).

[Weis92] D. Weiss: *Kommensurabilitätseffekte in lateralen Übergittern*, Habilitation, Max-Planck-Institut für Festkörperforschung, Stuttgart (1992).

[Weis93] D. Weiss, K. Richter, A. Menschig, R.Bergmann, H.Schweizer, K. von Klitzing, and G. Weimann *Quantized Periodic Orbits in Large Antidot Arrays*, 4118 (1993).

[Wink94] R. Winkler: *Einteilchenzustände und Exzitonen in geschichteten Halbleiterstrukturen*, Dissertation, Regensburg (1994).

[Wolf01] S.A. Wolf, D.D. Awschalom, R.A. Buhrman, J.M. Daughton, S. von Molnár, M.L. Roukes, A.Y. Chtchelkanova, D.M. Treger: *Spintronics: A Spin-Based Electronics Vision for the Future*, Science **294**, 1488 (2001).

[Wolfr96] S. Wolfram: *The Mathematica Book*, 3rd. ed., Wolfram Media, University Press, Cambridge (1996).

[Yagi92] R. Yagi and Y. Iye: *Oscillatory Magnetoresistance in Two-Dimensional Electron Systems in a Periodically Modulated Magnetic Field*, Journal of the Physical Society of Japan **62**, 1279 (1992).

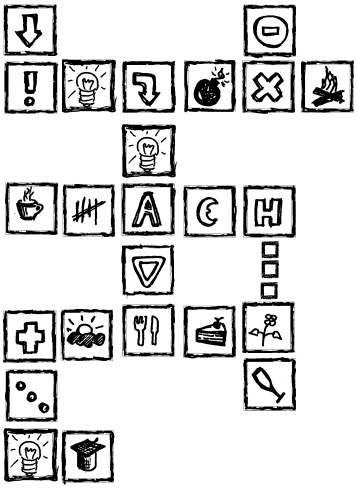
[Yu96] P.Y. Yu and M. Cardona: *Fundamentals of Semiconductors*, Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York (1996).

[Zawa70] W. Zawadzki: *"Relativistic" Phenomena in Semiconductors*, Optical properties of solids, edited by E.D. Haidemenakis, Gordon and Breach, Science Publisher, NewYork London Paris, 179 (1970).

[Zhan90] C. Zhang, R.R. Gerhardts: *Theory of Magnetotransport in Two-Dimensional Electron Systems with Unidirectional Periodic Modulation*, Physical Review B **41**, 12850 (1990).

[Zima74] J.M. Ziman: *Prinzipien der Festkörpertheorie*, Akademie-Verlag, Berlin (1974).

[Zwer99] S.D.M. Zwerschke, A. Manulescu, R.R. Gerhardts: *Planar Cyclotron Motion in Unidirectional Superlattices Defined by Strong Magnetic and Electric Fields: Trace of Classical Orbits in the Energy Spectrum*, Physical Review B **60**, 5536 (1999).



Danksagung

Der Versuch zu Promovieren bleibt immer auch ein Abenteuer, von dem nicht genau festgelegt ist, wohin der Weg führt. Ich möchte mich an dieser Stelle bei allen herzlich bedanken, denen ich während meiner Promotion begegnet bin und die ich hier gar nicht alle namentlich erwähnen kann. Sie alle haben das Abenteuer erst bunt und lebendig gemacht.

Den Expeditionsleitern Prof.Dr. Ulrich Rössler und Dr.habil. Michael Suhrke bin ich zu großem Dank verpflichtet, daß Sie mir beste Unterstützung und gute Landmarken auf meinem Weg lieferten. Ihr Zuspruch und Vorbild hat mich sicher auf dem Weg gehalten.

Allen Mitgliedern des Lehrstuhls Prof. Schröder, von und mit denen ich als Jungdoktorand viel lernen durfte, und allen Mitgliedern des jetzigen Lehrstuhls Prof. Richter danke ich für die freundliche Aufnahme und fröhliche Atmosphäre, die sich bei der Arbeit und um die Tee- und Kaffeetassen entwickelt hat. Vielen Dank an Angela Reißer, da Sie sich um Alles am Lehrstuhl so trefflich kümmert.

Viele Kontakte auch über den Heimat-Lehrstuhl hinaus mit den Experimentatoren der Lehrstühle Prof. Wegscheider und Prof. Weiss sowie den Kernteilchen-Theoretikern haben nicht nur meinen physikalischen Horizont enorm erweitert.

Den Kollegen meiner Arbeitsgruppe Ralf, Oliver, Hans-Jürgen, Martin, Roland, Andreas, Josef und Christian sei Dank für viele durchstandene Erkundungstouren in unbekannte Gebiete der Physik in Vorlesungen und Seminaren.

Mit meinen Kollegen Josef Kainz und Harald Dobler ist es eine Freude, das Arbeitszimmer zu teilen. Bei Ihnen bedanke ich mich auch, daß sie mit Andreas Wensauer Kapitel dieser Arbeit korrekturgelesen haben. Vielen Dank an Christian Lechner, der sich mit Begeisterung in den Magnetotransport stürzte, sowie an Roland Onderka und Christian Amann, mit denen ich viel über Spin und Semiklassik gelernt habe.

Fritz Wünsch und Rudolf Holzer haben sich mit unserem alten und neuen

Linsupp-Team aus Rago, Coco, Alex, Jörg, Holger, Peter, Christian, u.v.a. sowie dem Rechenzentrum große Verdienste um die Pflege des Expeditionsequipments erworben.
Die Deutsche Forschungsgemeinschaft hat die Expedition im Rahmen der Forschergruppe Ferromagnet-Halbleiter-Nanostrukturen finanziell unterstützt.
Der Dank an meine Familie, Eltern sowie meine Schwester mit ihrem Mann, wäre wieder mal zu lang.

weiterhin Frohes Forschen,

Euer Michael Langenbuch