

Die scheingeometrische étale Fundamentalgruppe

Dissertation zur Erlangung des Doktorgrades
der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)
der mathematischen Fakultät
der Universität Regensburg

vorgelegt von Stefanie Wolfrath aus Weiden
2008

Promotionsgesuch eingereicht am 11.11.2008

Die Arbeit wurde angeleitet von Prof. Dr. Alexander Schmidt.

Prüfungsausschuss:

Prof. Dr. Uwe Jannsen (Vorsitzender)

Prof. Dr. Alexander Schmidt (Erstgutachter)

Prof. Dr. Klaus Künnemann (Zweitgutachter)

Prof. Dr. Wolfgang Hackenbroch

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen	12
1.1 Étale Morphismen	12
1.2 Die étale Fundamentalgruppe	13
2 Die scheingeometrische étale Fundamentalgruppe	17
2.1 Definition der scheingeometrischen étalen Fundamentalgruppe	18
2.2 Exakte Folgen	26
2.2.1 Faserdicken	26
2.2.2 Bewertungstheorie	29
2.2.3 Faserdicken und die scheingeometrische Fundamentalgruppe	34
3 Beispiele	41
3.1 Modelle	42
3.2 Beispiel 1	45
3.2.1 Hauptfaserbündel	46
3.2.2 Faserdicken regulärer Modelle	48
3.2.3 Konstruktion des Beispiels	50
3.3 Beispiel 2	54
3.3.1 Die Dicke der speziellen Faser	54
3.3.2 Konstruktion eines regulären Modells	55
3.3.3 Eine nicht-triviale scheingeometrische Fundamentalgruppe	59
3.4 Bemerkung zur wahren geometrischen Fundamentalgruppe	60

Einleitung

Um 1960 entwickelte Grothendieck die Theorie der étalen Fundamentalgruppe eines Schemas X in [SGA1], Exposé V und X. Im Blickpunkt stehen dabei die endlichen étalen Morphismen $Y \rightarrow X$. Ist $\bar{x}: \text{Spec}(\Omega) \rightarrow X$ ein geometrischer Punkt von X und $F\text{Et}/X$ die Kategorie der endlichen étalen Morphismen nach X , dann ist die étale Fundamentalgruppe $\pi_1(X, \bar{x})$ des Schemas X zum Basispunkt \bar{x} definiert als die Automorphismengruppe des Funktors

$$F_{\bar{x}}: \begin{array}{ccc} F\text{Et}/X & \rightarrow & \underline{\text{Sets}} \\ (Y \rightarrow X) & \mapsto & \text{Hom}_X(\text{Spec}(\Omega), Y). \end{array}$$

Ist X ein normales zusammenhängendes Schema mit Funktionenkörper K und $\bar{x}: \text{Spec}(\Omega) \rightarrow X$ ein geometrischer Punkt von X , wobei Ω den Körper K enthält, so ist die étale Fundamentalgruppe $\pi_1(X, \bar{x})$ isomorph zur Galoisgruppe

$$\text{Gal}(L/K),$$

wobei L die Vereinigung aller endlichen separablen Körpererweiterungen L_i von K in Ω ist, so dass die Normalisierung von X in L_i étale über X ist.

Für einen Schemamorphismus $Y \rightarrow X$ und einen geometrischen Punkt \bar{y} von Y bezeichnen wir das Bild von \bar{y} in X ebenfalls mit \bar{y} und wir erhalten einen natürlichen Homomorphismus der étalen Fundamentalgruppen

$$\pi_1(Y, \bar{y}) \rightarrow \pi_1(X, \bar{y}).$$

Ist X ein Schema über einem Körper K , \bar{K} ein algebraischer Abschluss von K und \bar{x} ein geometrischer Punkt von $X \times_K \bar{K}$, so können wir die Folge étaler Fundamentalgruppen betrachten:

$$(*) \quad 1 \rightarrow \pi_1(X \times_K \bar{K}, \bar{x}) \rightarrow \pi_1(X, \bar{x}) \rightarrow \pi_1(K, \bar{x}) \rightarrow 1.$$

Ist die geometrische generische Faser $X \times_K \bar{K}$ des Morphismus $X \rightarrow K$ zusammenhängend, so wird in [SGA1], IX, Théorème 6.1 gezeigt, dass (*) exakt ist.

Das Augenmerk dieser Arbeit liegt ebenfalls auf einer Folge étaler Fundamentalgruppen in folgender Grundsituation:

Sei S ein exzellentes eindimensionales Dedekindschema mit vollkommenen Restklassenkörpern und Funktionenkörper k und \mathfrak{X} ein zusammenhängendes reguläres S -Schema. Sei K der Funktionenkörper von \mathfrak{X} und \bar{K} ein algebraischer Abschluss von K . Den algebraischen Abschluss von k in \bar{K} bezeichnen wir mit \bar{k} . Wir nehmen außerdem an, dass der Strukturmorphismus $f: \mathfrak{X} \rightarrow S$ surjektiv und von endlichem Typ mit zusammenhängender geometrischer generischer Faser $\mathfrak{X} \times_S \bar{k}$ ist. Sei \bar{s} ein geometrischer Punkt von $\mathfrak{X} \times_S \bar{k}$.

In dieser Situation gilt unser Interesse der Folge étaler Fundamentalgruppen

$$(**) \quad \pi_1(\mathfrak{X} \times_S \bar{k}, \bar{s}) \xrightarrow{g} \pi_1(\mathfrak{X}, \bar{s}) \xrightarrow{h} \pi_1(S, \bar{s}) \rightarrow 1.$$

Stellen wir zusätzliche Bedingungen an den Morphismus $f: \mathfrak{X} \rightarrow S$, so sind bereits folgende Ergebnisse bekannt:

- ([SGA1], Exposé X, Cor. 1.4) Ist der Strukturmorphismus $f: \mathfrak{X} \rightarrow S$ eigentlich und sind alle Fasern von f geometrisch reduziert, so ist die Folge (***) exakt.
- ([KL], Lemma 2) Ist der Strukturmorphismus $f: \mathfrak{X} \rightarrow S$ glatt, so ist die Folge (***) exakt.

Die Resultate in [SGA1], Exposé X, Cor. 1.4 und [KL], Lemma 2 werden in dieser Arbeit verschärft:

Satz 1. *Sei S ein exzellentes eindimensionales Dedekindschema mit vollkommenen Restklassenkörpern und Funktionenkörper k und \mathfrak{X} ein zusammenhängendes reguläres S -Schema, so dass der Strukturmorphismus surjektiv und von endlichem Typ mit zusammenhängender geometrischer generischer Faser $\mathfrak{X} \times_S \bar{k}$ ist. Sei \bar{s} ein geometrischer Punkt von $\mathfrak{X} \times_S \bar{k}$. Sind alle Fasern von f reduziert, so ist die Folge étaler Fundamentalgruppen*

$$\pi_1(\mathfrak{X} \times_S \bar{k}, \bar{s}) \rightarrow \pi_1(\mathfrak{X}, \bar{s}) \rightarrow \pi_1(S, \bar{s}) \rightarrow 1$$

exakt.

Das bedeutet also, dass in Satz 1 für die Exaktheit der Folge (***) in der Grundsituation weder die Eigenschaft glatt (wie in [KL], Lemma 2) noch die Eigenschaft eigentlich (wie in [SGA1], Exposé X, Cor. 1.4) des Morphismus $\mathfrak{X} \rightarrow S$ gefordert wird.

Im allgemeinen können wir nicht die Exaktheit der Folge (**) erwarten, jedoch ist in der Grundsituation die Folge (**) ein Komplex, das bedeutet $im(g) \subset ker(h)$. Dies ist der Ausgangspunkt für die Definition der schein geometrischen étalen Fundamentalgruppe:

Definition. Die *schein geometrische étale Fundamentalgruppe* des Schemas \mathfrak{X} zum Basispunkt \bar{s} ist definiert als

$$\pi_1^{sch. geo}(\mathfrak{X}, \bar{s}) := ker(h)/im(g).$$

Sei $p \neq 3$ eine Primzahl. Ein Beispiel für ein Schema mit nicht-trivialer schein geometrischer étaler Fundamentalgruppe ist ein reguläres Modell für die Kurve

$$C := Proj(\mathbb{Q}_p[x, y, z]/(x^3 + py^3 + p^2z^3)) \rightarrow Spec(\mathbb{Q}_p)$$

über $Spec(\mathbb{Z}_p)$.

Die schein geometrische étale Fundamentalgruppe eines Schemas \mathfrak{X} kann durch Überlagerungen (das heißt durch endliche étale Morphismen $\mathfrak{Y} \rightarrow \mathfrak{X}$) beschrieben werden:

Die schein geometrische étale Fundamentalgruppe von \mathfrak{X} ist genau dann nicht-trivial, wenn es eine endliche separable Erweiterung $l \subset \bar{k}$ von k gibt, so dass

1. die Normalisierung S^l von S in l über S verzweigt ist und
2. die Normalisierung \mathfrak{X}^{Kl} von \mathfrak{X} im Kompositum Kl innerhalb \bar{K} étale über \mathfrak{X} ist.

Wie wir hier erkennen, ist es beim Studium der schein geometrischen étalen Fundamentalgruppe von \mathfrak{X} von großer Bedeutung nachzuweisen, ob Morphismen der Art $\mathfrak{X}^{Kl} \rightarrow \mathfrak{X}$ verzweigen oder étale sind. Einen Zugang zu solchen Aussagen finden wir durch die Reinheit des Verzweigungsortes für das reguläre Schema \mathfrak{X} . Das bedeutet, dass wir uns bei Fragen zur Verzweigung auf die Punkte von Kodimension Eins beschränken können. In der Grundsituation $\mathfrak{X} \rightarrow S$ können wir die Punkte von Kodimension Eins in \mathfrak{X} bzw. von \mathfrak{X}^{Kl} (außerhalb der generischen Faser) charakterisieren:

Sei $s \in S$ ein abgeschlossener Punkt und \mathfrak{X}_s bzw. \mathfrak{X}_s^{Kl} die Faser von \mathfrak{X} bzw. \mathfrak{X}^{Kl} über dem Punkt s . Die Punkte in Kodimension Eins in \mathfrak{X} bzw. \mathfrak{X}^{Kl} (außerhalb der generischen Faser) sind genau die generischen Punkte der irreduziblen Komponenten der Fasern \mathfrak{X}_s bzw. \mathfrak{X}_s^{Kl} . Die lokalen Ringe in genau diesen Punkten von Kodimension Eins sind diskrete Bewertungsringe. Das bedeutet, dass wir Aussagen über die schein geometrische étale Fundamentalgruppe auf bewertungstheoretische Aussagen zurückführen können. In diesem Zusammenhang definieren wir die Dicke einer Faser \mathfrak{X}_s für einen abgeschlossenen Punkt $s \in S$:

Definition. Sei $s \in S$ ein abgeschlossener Punkt und π ein uniformisierendes Element des diskreten Bewertungsrings $\mathcal{O}_{S,s}$. Seien $(P_i)_{i=1,\dots,n}$ die generischen Punkte der irreduziblen Komponenten $(C_i)_{i=1,\dots,n}$ der Faser \mathfrak{X}_s von \mathfrak{X} über s . Jeder diskrete Bewertungsrings $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},P_i}$ dominiert den diskreten Bewertungsrings $\mathcal{O}_{S,s}$ und wir fassen das uniformisierende Element π von $\mathcal{O}_{S,s}$ über die Abbildung $\mathcal{O}_{S,s} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathfrak{X},P_i}$ auch als ein Element in $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},P_i}$ auf. Wir definieren die *Dicke der Faser* von \mathfrak{X} über s als

$$D(\mathfrak{X}_s) = ggT((l_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},P_i}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},P_i}/\pi\mathcal{O}_{\mathfrak{X},P_i}))_{i=\{1,\dots,n\}}),$$

wobei $l_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},P_i}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},P_i}/\pi\mathcal{O}_{\mathfrak{X},P_i})$ die Länge des $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},P_i}$ -Moduls $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},P_i}/\pi\mathcal{O}_{\mathfrak{X},P_i}$ bezeichnet.

Die Faserdicke von \mathfrak{X}_s ist eine ganze Zahl ≥ 1 . Zwei Ergebnisse, die durch Bewertungstheorie in dieser Arbeit erzielt werden, lauten:

Sei S ein exzellentes eindimensionales Dedekindschema mit vollkommenen Restklassenkörpern und Funktionenkörper k und \mathfrak{X} ein zusammenhängendes reguläres S -Schema, so dass der Strukturmorphismus $f: \mathfrak{X} \rightarrow S$ surjektiv und von endlichem Typ mit zusammenhängender geometrischer generischer Faser $\mathfrak{X} \times_S \bar{k}$ ist. Sei \bar{s} ein geometrischer Punkt von $\mathfrak{X} \times_S \bar{k}$.

Satz 2. *Sind alle Faserdicken des Morphismus $f: \mathfrak{X} \rightarrow S$ gleich Eins, so ist die Folge*

$$\pi_1(\mathfrak{X} \times_S \bar{k}, \bar{s}) \rightarrow \pi_1(\mathfrak{X}, \bar{s}) \rightarrow \pi_1(S, \bar{s}) \rightarrow 1$$

exakt; das heißt, dass die scheingeometrische étale Fundamentalgruppe von \mathfrak{X} trivial ist.

Satz 3. *Sind alle Faserdicken des Morphismus $f: \mathfrak{X} \rightarrow S$ teilerfremd zu einer Primzahl p , so ist die Folge der maximalen pro- p -Faktorgruppen*

$$\pi_1(\mathfrak{X} \times_S \bar{k}, \bar{s})(p) \rightarrow \pi_1(\mathfrak{X}, \bar{s})(p) \rightarrow \pi_1(S, \bar{s})(p) \rightarrow 1$$

exakt.

Der Ausgangspunkt des Studiums der étalen Fundamentalgruppe war das Interesse an abelschen unverzweigten Erweiterungen des Ringes der ganzen Zahlen eines Zahlkörpers. Sei k ein Zahlkörper und \mathcal{O}_k der Ring der ganzen Zahlen von k . In diesem Fall ist die maximal abelsche Faktorgruppe $\pi_1^{ab}(\text{Spec}(\mathcal{O}_k), \bar{s})$ von $\pi_1(\text{Spec}(\mathcal{O}_k), \bar{s})$ isomorph zur Idealklassengruppe von k und damit endlich.

Sei nun \mathfrak{X} ein flaches \mathcal{O}_k -Schema von endlichem Typ, dessen geometrische generische Faser $\mathfrak{X} \times_{\mathcal{O}_k} \bar{k}$ zusammenhängend ist. Sei \mathfrak{X} normal und der Strukturmorphismus

$$\mathfrak{X} \rightarrow S := \text{Spec}(\mathcal{O}_k)$$

surjektiv. Dann hat A. Schmidt in [Sch], Theorem 3.1 gezeigt, dass $\pi_1^{ab}(\mathfrak{X}, \bar{s})$ endlich ist.

Gehen wir in dieser Situation von

$$\pi_1(\mathfrak{X} \times_S \bar{k}, \bar{s}) \rightarrow \pi_1(\mathfrak{X}, \bar{s}) \rightarrow \pi_1(S, \bar{s})$$

zur Folge der maximal abelschen Faktorgruppen

$$\pi_1^{ab}(\mathfrak{X} \times_S \bar{k}, \bar{s}) \xrightarrow{\tilde{g}} \pi_1^{ab}(\mathfrak{X}, \bar{s}) \xrightarrow{\tilde{h}} \pi_1^{ab}(S, \bar{s})$$

über, so impliziert die Endlichkeit von $\pi_1^{ab}(\mathfrak{X}, \bar{s})$ die Endlichkeit von $\ker(\tilde{h})/\text{im}(\tilde{g})$. Die Endlichkeit von $\ker(\tilde{h})/\text{im}(\tilde{g})$ wird in dieser Arbeit in folgender Situation gezeigt:

Satz 4. *Sei S ein exzellentes eindimensionales Dedekindschema mit vollkommenen Restklassenkörpern und Funktionenkörper k und \mathfrak{X} ein zusammenhängendes reguläres S -Schema, so dass der Strukturmorphismus von endlichem Typ mit zusammenhängender geometrischer generischer Faser $\mathfrak{X} \times_S \bar{k}$ ist. Sei $U \subseteq S$ das Bild von \mathfrak{X} in S und \bar{s} ein geometrischer Punkt von $\mathfrak{X} \times_S \bar{k}$. Betrachten wir die Folge der maximal abelschen Faktorgruppen*

$$\pi_1^{ab}(\mathfrak{X} \times_S \bar{k}, \bar{s}) \xrightarrow{\tilde{g}} \pi_1^{ab}(\mathfrak{X}, \bar{s}) \xrightarrow{\tilde{i}} \pi_1^{ab}(U, \bar{s}),$$

so ist $\ker(\tilde{i})/\text{im}(\tilde{g})$ endlich.

Diese Arbeit ist in drei Kapitel unterteilt und wie folgt gegliedert:

Im ersten Kapitel werden grundlegende Definitionen und Sätze im Zusammenhang mit der étalen Fundamentalgruppe wiederholt. Es werden die in den folgenden Kapiteln benötigten Ergebnisse aus [SGA1] und [Mi] zusammengefasst. Wir erinnern an die Definition eines étalen Morphismus sowie der étalen Fundamentalgruppe. Für einen Schemamorphismus $X \rightarrow Y$ und einen geometrischen Punkt \bar{x} von X werden die Eigenschaften des induzierten Homomorphismus $\pi_1(X, \bar{x}) \rightarrow \pi_1(Y, \bar{x})$ der étalen Fundamentalgruppen durch Überlagerungen von X und Y beschrieben.

Das zweite Kapitel ist das Herzstück dieser Arbeit. Es definiert und studiert die scheingeometrische étale Fundamentalgruppe eines Schemas \mathfrak{X} in folgender Grundsituation:

Sei S ein exzellentes eindimensionales Dedekindschema mit vollkommenen Restklassenkörpern. Sei \mathfrak{X} ein zusammenhängendes reguläres S -Schema, so dass der Strukturmorphismus $\mathfrak{X} \rightarrow S$ ein surjektiver Morphismus von endlichem Typ mit zusammenhängender geometrischer generischer Faser ist.

Im ersten Abschnitt des Kapitels erklären wir durch Überlagerungen den Effekt, der zur Existenz der scheingeometrischen étalen Fundamentalgruppe eines Schemas führt. Es wird außerdem der Beweis der Trivialität der scheingeometrischen étalen Fundamentalgruppe nach [KL] in dem Fall wiederholt, dass der Morphismus $\mathfrak{X} \rightarrow S$ glatt ist.

Sei k der Funktionenkörper von S , K der Funktionenkörper von \mathfrak{X} und \bar{K} ein algebraischer Abschluss von K . Der zweite Abschnitt behandelt das Verzweigungsverhalten von $\mathfrak{X}^{Kl}/\mathfrak{X}$, wobei l eine endliche separable Erweiterung von k und \mathfrak{X}^{Kl} die Normalisierung von \mathfrak{X} im Kompositum Kl innerhalb \bar{K} ist. Das Schema \mathfrak{X} ist regulär und damit können wir uns nach der Reinheit des Verzweigungsortes auf die Punkte von Kodimension Eins beschränken, um Aussagen über das Verzweigungsverhalten zu erhalten. Die lokalen Ringe in den Punkten von Kodimension Eins sind diskrete Bewertungsringe. So führen wir Aussagen über die scheingeometrische Fundamentalgruppe auf bewertungstheoretische Aussagen zurück. In diesem Zusammenhang definieren wir die Dicke einer Faser \mathfrak{X}_s des Morphismus $f: \mathfrak{X} \rightarrow S$ über einem abgeschlossenen Punkt $s \in S$ und beweisen Satz 1 und Satz 2. Als Korollar des Studiums der scheingeometrischen Fundamentalgruppe erhalten wir Satz 3 und Satz 4.

Das dritte Kapitel beinhaltet die Konstruktion zweier Schemata mit nicht-trivialer scheingeometrischer étaler Fundamentalgruppe. Dazu benötigen wir die Theorie der Modelle von Kurven. In diesem Zusammenhang wiederholen wir die Sätze und Definitionen aus [Liu], die in den folgenden Abschnitten von Bedeutung sind. Das erste Beispiel erhalten wir in folgender Situation:

Sei E eine elliptische Kurve über einem lokalen Körper k mit guter Reduktion und p die Charakteristik des Restklassenkörpers des Ringes der ganzen Zahlen \mathcal{O}_k von k . Wir fixieren einen algebraischen Abschluss \bar{k} von k und setzen k^{tr} für die maximal zahm verzweigte Erweiterung von k in \bar{k} . Sei C ein Twist der elliptischen Kurve E/k , der nicht isomorph zu E über k^{tr} , jedoch über einer wild verzweigten Erweiterung l/k vom Grad p ist. Das bedeutet insbesondere, dass C keinen k^{tr} -rationalen Punkt hat.

Sei \mathcal{C} ein reguläres Modell von C/k über $\text{Spec}(\mathcal{O}_k)$ und K der Funktionenkörper von \mathcal{C} . Wir beweisen den folgenden Satz:

Satz 5. *Hat die Kurve C keinen k^{tr} -rationalen Punkt, so ist die Dicke der speziellen Faser des regulären Modells \mathcal{C} durch p teilbar.*

Somit erhalten wir ein Schema mit einer von Eins verschiedenen Faserdicke. Beim Übergang zur wild verzweigten Erweiterung l hat die spezielle Faser eines regulären Modells von $E/l \cong C/l$ die Faserdicke Eins. Dieses Kriterium ist hinreichend dafür, dass die Normalisierung von \mathcal{C} in Kl étale über \mathcal{C} ist und somit \mathcal{C} ein Schema mit nicht-trivialer scheingeometrischer étaler Fundamentalgruppe.

Sei $p \neq 3$ eine Primzahl. Ein Beispiel für ein Schema, dessen schein geometrische étale Fundamentalgruppe isomorph zu $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ ist, ist ein reguläres Modell für die Kurve

$$C := \text{Proj}(\mathbb{Q}_p[x, y, z]/(x^3 + py^3 + p^2z^3)) \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{Q}_p)$$

über $\text{Spec}(\mathbb{Z}_p)$. Im dritten Abschnitt des Kapitels wird ein reguläres Modell für C durch sukzessive Aufblasungen und Normalisierung konstruiert. Nach einem Hinweis von J.-L. Colliot-Thélène hat die spezielle Faser eines regulären Modells von C über $\text{Spec}(\mathbb{Z}_p)$ eine durch drei teilbare Faserdicke. Sei \mathcal{C} ein reguläres Modell von C über $\text{Spec}(\mathbb{Z}_p)$ und K der Funktionenkörper von \mathcal{C} . Die Nicht-Trivialität der schein geometrischen étalen Fundamentalgruppe von \mathcal{C} kann beim Übergang von $\text{Spec}(\mathbb{Z}_p)$ bzw. von \mathcal{C} zur Normalisierung von $\text{Spec}(\mathbb{Z}_p)$ in $l := \mathbb{Q}_p(\sqrt[3]{p})$ bzw. von \mathcal{C} in Kl beobachtet werden:

$$\text{Spec}(\mathcal{O}_l)/\text{Spec}(\mathbb{Z}_p) \text{ ist verzweigt und } \mathcal{C}^{Kl}/\mathcal{C} \text{ ist étale.}$$

In diesem Kapitel gilt das Interesse in den beiden Beispielen der schein geometrischen étalen Fundamentalgruppe. Als abschließende Bemerkung betrachten wir die wahre geometrische Fundamentalgruppe eines Schemas, die wie folgt definiert ist:

Definition. Sei k ein Zahlkörper und \mathfrak{X} eine gefaserte Fläche über $\text{Spec}(\mathcal{O}_k)$, so dass das arithmetische Geschlecht der generischen Faser größer als Eins und die Fundamentalgruppe von $\text{Spec}(\mathcal{O}_k)$ trivial ist. Für einen geometrischen Punkt \bar{s} von $\mathfrak{X} \times_{\text{Spec}(\mathcal{O}_k)} \bar{k}$ ist die *wahre geometrische Fundamentalgruppe* $\pi_1^{w.geo}(\mathfrak{X}, \bar{s})$ von \mathfrak{X} definiert als das Bild des Morphismus

$$\pi_1(\mathfrak{X} \times_{\text{Spec}(\mathcal{O}_k)} \bar{k}, \bar{s}) \rightarrow \pi_1(\mathfrak{X}, \bar{s}).$$

Im vierten Abschnitt zeigen wir den folgenden Satz:

Satz 6. Sei k ein Zahlkörper und \mathcal{O}_k der Ring der ganzen Zahlen von k . Sei \mathfrak{X} eine gefaserte Fläche über $\text{Spec}(\mathcal{O}_k)$, so dass das arithmetische Geschlecht der generischen Faser $g := g(\mathfrak{X} \times_{\text{Spec}(\mathcal{O}_k)} k)$ größer als Eins und die étale Fundamentalgruppe von $\text{Spec}(\mathcal{O}_k)$ trivial ist. Sei \bar{s} ein geometrischer Punkt von $\mathfrak{X} \times_{\text{Spec}(\mathcal{O}_k)} \bar{k}$. Angenommen es existiert ein $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(\mathcal{O}_k)$ (mit Absolutnorm $q := \mathfrak{N}(\mathfrak{p})$), so dass Folgendes gilt:

- Der Morphismus $f_{\mathfrak{p}} : \mathfrak{X}_{\mathfrak{p}} \stackrel{def}{=} \mathfrak{X} \times_{\text{Spec}(\mathcal{O}_k)} \mathbb{F}_q \rightarrow \mathbb{F}_q$ ist glatt.
- Es dehnen sich mehr als $(2\sqrt{q} + 1)(g - 1)$ \mathbb{F}_q -rationale Punkte von $\mathfrak{X}_{\mathfrak{p}}$ zu Schnitten von $\text{Spec}(\mathcal{O}_k)$ aus.

Dann ist $\pi_1^{w.geo}(\mathfrak{X}, \bar{s})$ endlich.

Danksagung

Zuerst möchte ich mich herzlich bei Alexander Schmidt für die sehr gute Betreuung während der Entstehung dieser Arbeit bedanken. Er hat mich zum Studium der scheingeometrischen étalen Fundamentalgruppe motiviert und mich in zahlreichen Diskussionen zu diesem Thema weitergebracht.

Außerdem möchte ich mich bei meinem Mann Stefan für die emotionale Unterstützung bedanken.

Mein weiterer Dank gilt Johannes to Baben und Martin Seibold für das Korrekturlesen dieser Arbeit.

Für die finanzielle Unterstützung danke ich der DFG sowie der Universität Regensburg.

Terminologie und Konventionen

Alle Ringe in dieser Arbeit sind noethersch und kommutativ mit 1. Ein Schema ist stets separiert und noethersch.

Sei R ein Ring, so schreiben wir auch kurz R für das affine Schema $\text{Spec}(R)$. Ist $\mathfrak{p} \subset R$ ein Primideal, so bezeichnen wir die Lokalisierung von R in \mathfrak{p} mit $R_{\mathfrak{p}}$.

Ein geometrischer Punkt eines Schemas S ist ein Morphismus $\bar{s} : \text{Spec}(\Omega) \rightarrow S$, wobei Ω ein separabel abgeschlossener Körper ist. Ein Dedekindschema ist ein normales Schema der Dimension Eins oder Null. Die Galoisgruppe einer Galoischen Körpererweiterung l/k bezeichnen wir mit $\text{Gal}(l/k)$.

Es werden außerdem die folgenden Bezeichnungen vereinbart, die während der gesamten Arbeit beibehalten werden:

p	Primzahl
\mathbb{F}_p	endlicher Körper mit p Elementen
\mathbb{Q}_p	Körper der p -adischen Zahlen
\mathbb{Z}_p	Ring der ganzen p -adischen Zahlen.

Sei S ein Schema und $s \in S$.

$\mathcal{O}_{S,s}$	der lokale Ring von S in s
\mathfrak{m}_s	das maximale Ideal von $\mathcal{O}_{S,s}$
$\kappa(s)$	der Restklassenkörper von S in s ($= \mathcal{O}_{S,s}/\mathfrak{m}_s$).

Kapitel 1

Grundlagen

In diesem Kapitel werden die grundlegenden Definitionen und Sätze wiederholt, die in den folgenden Kapiteln benötigt werden.

Als Erstes wird an den Begriff des étalen Morphismus erinnert sowie wichtige Sätze in diesem Zusammenhang angegeben. Der zweite Abschnitt in diesem Kapitel behandelt die étale Fundamentalgruppe eines Schemas X nach [SGA1], Exposé V. Dazu wird die Definition der étalen Fundamentalgruppe $\pi_1(X, \bar{x})$ von X zum Basispunkt \bar{x} als Automorphismengruppe des Faserfunktors zum geometrischen Punkt \bar{x} wiederholt. Ist $f: X \rightarrow Y$ ein Morphismus zusammenhängender Schemata, so erhalten wir eine induzierte Abbildung der étalen Fundamentalgruppen $\tilde{f}: \pi_1(X, \bar{x}) \rightarrow \pi_1(Y, \bar{x})$. Es werden Kriterien rekapituliert, die verschiedene Eigenschaften der Abbildung \tilde{f} implizieren.

1.1 Étale Morphismen

Dieser Abschnitt erinnert an die Definition eines étalen Morphismus sowie an grundlegende Sätze in Zusammenhang mit étalen Morphismen nach [Mi], I.3.

Definition 1.1.1. Sei $f: X \rightarrow Y$ ein Schemamorphismus, der lokal von endlichem Typ ist.

- Sei $x \in X$ und $y := f(x)$. Der Morphismus f heißt *unverzweigt* in x , falls $\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_y \mathcal{O}_{X,x}$ eine endliche separable Körpererweiterung von $\mathcal{O}_{Y,y}/\mathfrak{m}_y$ ist. Ist der Morphismus f bei allen Punkten $x \in X$ unverzweigt, so heißt f *unverzweigt*.
- Der Morphismus f heißt *étale*, falls er unverzweigt und flach ist.

Satz 1.1.2. ([Mi], Prop. I.3.3)

1. Jede offene Immersion ist étale.

2. Die Komposition von zwei étalen Morphismen ist étale.

3. Jeder Basiswechsel eines étalen Morphismus ist étale.

Satz 1.1.3. ([Mi], Prop. 3.17) Sei $f: X \rightarrow Y$ ein étaler Morphismus. Dann gelten die folgenden Aussagen:

1. $\dim(\mathcal{O}_{X,x}) = \dim(\mathcal{O}_{Y,f(x)})$ für alle $x \in X$.

2. Ist Y normal, dann ist auch X normal.

3. Ist Y regulär, dann ist auch X regulär.

Satz 1.1.4. ([EGA IV⁴], Corollaire 17.7.3) Fpqc-Abstieg

Sei $f: X \rightarrow Y$ ein treuflacher und quasikompakter Morphismus, $g: Y' \rightarrow Y$ ein Morphismus und $g': X \times_Y Y' \rightarrow X$ der basisgewechselte Morphismus. Ist der Morphismus g' étale, so auch der Morphismus g .

1.2 Die étale Fundamentalgruppe

Beim Begriff „Fundamentalgruppe“ denkt man zuerst an die Gruppe der Homotopieklassen von Schleifen in einem zusammenhängenden topologischen Raum X zu einem Basispunkt. Möchte man dieses Konzept der Fundamentalgruppe auf Schemata übertragen, so muss man feststellen, dass für Schemata im allgemeinen keine Schleifen zur Verfügung stehen. Man kann jedoch die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, \bar{x})$ eines zusammenhängenden topologischen Raumes X zum Basispunkt \bar{x} auch durch Überlagerungen beschreiben:

Eine stetige Abbildung $f: Y \rightarrow X$ heißt Überlagerungsraum von X , falls jeder Punkt $P \in X$ eine offene Umgebung U hat, so dass $f^{-1}(U)$ eine disjunkte Vereinigung von offenen Mengen U_i ist, wovon jede homöomorph auf U abgebildet werden kann.

Sei $Cov(X)$ die Kategorie der Überlagerungsräume von X mit nur endlich vielen Zusammenhangskomponenten und \underline{Sets} die Kategorie der Mengen. Dann haben wir einen Funktor

$$F_{\bar{x}}: \begin{array}{ccc} Cov(X) & \rightarrow & \underline{Sets} \\ (Y \rightarrow X) & \mapsto & f^{-1}(\bar{x}). \end{array}$$

Der Funktor kann dargestellt werden durch ein Objekt \tilde{X} aus $Cov(X)$. Insbesondere erhalten wir einen Isomorphismus

$$Aut_X(\tilde{X}) \rightarrow \pi_1(X, \bar{x}).$$

In diesem Abschnitt rekapitulieren wir die Definition und Eigenschaften der étalen Fundamentalgruppe eines Schemas nach [SGA1], Exposé V.

Für ein Schema S bezeichne $F\text{Et}/S$ die Kategorie, deren Objekte die endlichen étalen S -Schemata sind und die Morphismen sind Schemamorphismen über S . Unter einer *Überlagerung* verstehen wir einen endlichen étalen Morphismus.

Sei $\bar{s}: \text{Spec}(\Omega) \rightarrow S$ ein fixierter geometrischer Punkt von S . Der *Faserfunktork* der Kategorie $F\text{Et}/S$ bei \bar{s} ist definiert durch

$$F_{\bar{s}}: \begin{array}{ccc} F\text{Et}/S & \rightarrow & \underline{\text{Sets}} \\ (T \rightarrow S) & \mapsto & \text{Hom}_S(\text{Spec}(\Omega), T). \end{array}$$

Definition 1.2.1. Die *étale Fundamentalgruppe* $\pi_1(S, \bar{s})$ des Schemas S zum *Basispunkt* \bar{s} ist definiert als die Automorphismengruppe des Faserfunktors $F_{\bar{s}}$ bei \bar{s} .

Es gibt eine natürliche Linksoperation von $\pi_1(S, \bar{s})$ auf $F_{\bar{s}}(T)$ für alle $T \in F\text{Et}/S$. Nach Grothendieck ([SGA1], Exposé V, Theorem 4.1) gilt das folgende Theorem.

Theorem 1.2.2. *Sei S ein zusammenhängendes Schema und $\bar{s}: \text{Spec}(\Omega) \rightarrow S$ ein geometrischer Punkt von S .*

1. *Die étale Fundamentalgruppe $\pi_1(S, \bar{s})$ ist proendlich und die Operation von $\pi_1(S, \bar{s})$ auf $F_{\bar{s}}(T)$ ist für alle $T \in F\text{Et}/S$ stetig.*
2. *Der Funktor $F_{\bar{s}}$ definiert eine Kategorienäquivalenz zwischen $F\text{Et}/S$ und der Kategorie der endlichen diskreten $\pi_1(S, \bar{s})$ -Mengen.*

Satz 1.2.3. *Der Faserfunktork $F_{\bar{s}}$ ist strikt prodarstellbar, d.h. es gibt eine gerichtete Menge I , ein projektives System $\tilde{T} = (T_i, \phi_{ij})_{i \in I}$ in $F\text{Et}/S$, in denen die Übergangsmorphismen*

$$\phi_{ij}: T_j \rightarrow T_i \quad (i \leq j)$$

Epimorphismen sind und Elemente $f_i \in F_{\bar{s}}(T_i)$, so dass

1. $f_i = \phi_{ij} \circ f_j$
2. *die natürliche Abbildung $\varinjlim_{i \in I} \text{Hom}(T_i, T) \rightarrow F_{\bar{s}}(T)$, die durch die f_i induziert ist, für jedes $T \in F\text{Et}/S$ ein Isomorphismus ist.*

Wir nennen \tilde{T} den universellen Überlagerungsraum von S . Für jedes $T \in F\text{Et}/S$ operiert die Automorphismengruppe $\text{Aut}_S(T)$ von T von rechts auf $F_{\bar{s}}(T)$. Ein zusammenhängendes Objekt $T \in F\text{Et}/S$ heißt *Galoissch*, falls für jedes $g \in F_{\bar{s}}(T)$ die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \text{Aut}_S(T) & \rightarrow & F_{\bar{s}}(T) \\ \sigma & \mapsto & \sigma \circ g \end{array}$$

bijektiv ist.

Bemerkung 1.2.4. ([SGA1], V, §4 g) Die T_i im projektiven System können Galoissch gewählt werden.

Seien also die T_i Galoissch. Eine Abbildung $T_j \rightarrow T_i$, $i \leq j$, induziert einen Homomorphismus $\text{Aut}_S(T_j) \rightarrow \text{Aut}_S(T_i)$. Sei \tilde{T} die universelle Überlagerung von S . Dann haben wir einen Isomorphismus

$$\pi_1(S, \bar{s}) \cong \text{Aut}_S(\tilde{T}) \stackrel{\text{def}}{=} \varprojlim_{i \in I} \text{Aut}_S(T_i).$$

Beispiel 1.2.5. 1. ([SGA1], Exposé V, Prop. 8.1) Ist K ein Körper, $X := \text{Spec}(K)$ und $\bar{s}: \text{Spec}(\Omega) \rightarrow X$ ein geometrischer Punkt von X . Dann ist $\pi_1(X, \bar{s})$ isomorph zur Galoisgruppe $\text{Gal}(K^{\text{sep}}/K)$, wobei K^{sep} den separablen Abschluss von K in Ω bezeichne.

2. ([SGA1], Exposé V, Prop. 8.2) Sei S ein normales und zusammenhängendes Schema und \bar{s} ein geometrischer Punkt, der über dem generischen Punkt $\eta \in S$ liegt. Sei k der Funktionenkörper von S und \bar{k} der Funktionenkörper von \bar{s} . Dann gilt:

$$\pi_1(S, \bar{s}) \cong \text{Gal}(l/k),$$

wobei l die Vereinigung aller endlichen separablen Körpererweiterungen l_i von k in \bar{k} ist, so dass die Normalisierung von S in l_i étale über S ist.

Satz 1.2.6. ([SGA1], Exposé V, Corollaire 5.7) Sei S ein zusammenhängendes Schema und $\bar{s}: \text{Spec}(\Omega) \rightarrow S$ und $\bar{s}': \text{Spec}(\Omega') \rightarrow S$ zwei geometrische Punkte. Dann gibt es einen Isomorphismus der Faserfunktoren zu \bar{s} und zu \bar{s}' :

$$F_{\bar{s}} \cong F_{\bar{s}'}$$

Insbesondere existiert ein Isomorphismus proendlicher Gruppen

$$\pi_1(S, \bar{s}) \cong \pi_1(S, \bar{s}').$$

Seien S' und S zusammenhängende Schemata, $f: S' \rightarrow S$ ein Morphismus und $\bar{s}': \text{Spec}(\Omega) \rightarrow S'$ ein geometrischer Punkt von S' . Das direkte Bild von \bar{s}' in S soll ebenfalls mit \bar{s}' bezeichnet werden. Diese Notation werden wir im Folgenden für direkte Bilder von geometrischen Punkten beibehalten. Der Morphismus f induziert einen Funktor

$$\begin{array}{ccc} F\text{Et}/S & \rightarrow & F\text{Et}/S' \\ (X \rightarrow S) & \mapsto & (X \times_S S' \rightarrow S'). \end{array}$$

Jeder Automorphismus des Faserfunktors zum geometrischen Punkt \bar{s}' für S' induziert einen Automorphismus des Faserfunktors zum geometrischen Punkt \bar{s}' für S , so dass wir einen stetigen Homomorphismus

$$u: \pi_1(S', \bar{s}') \rightarrow \pi_1(S, \bar{s}')$$

proendlicher Gruppen erhalten.

Bemerkung 1.2.7. Die Eigenschaften des Homomorphismus u können nach [SGA1], Exposé V, Kapitel 6 in Termen von Überlagerungen der Schemata angegeben werden.

1. Der Homomorphismus u ist genau dann trivial, falls für alle zusammenhängenden Objekte $X \in F\text{Et}/S$ der Basiswechsel $X \times_S S'$ über S' total zerfällt.
2. Der Homomorphismus u ist genau dann surjektiv, falls $X \times_S S'$ über S' für alle zusammenhängenden Objekte $X \in F\text{Et}/S$ ebenfalls zusammenhängend ist.
3. Der Homomorphismus u ist genau dann injektiv, falls es für jedes zusammenhängende Objekt $X' \in F\text{Et}/S'$ eine Überlagerung X von S und einen S' -Morphismus einer Zusammenhangskomponente von $X \times_S S'$ nach X' gibt.
Ist jede zusammenhängende Überlagerung X' von S' von der Form $X \times_S S'$ für eine zusammenhängende Überlagerung X von S , so ist insbesondere u injektiv.

Bemerkung 1.2.8. Sei S ein zusammenhängendes normales Schema, K der Funktionenkörper von S und $\bar{s}: \text{Spec}(\Omega) \rightarrow \text{Spec}(K)$ ein geometrischer Punkt von $\text{Spec}(K)$. Dann ist mit Beispiel 1.2.5.2 der Homomorphismus

$$\pi_1(\text{Spec}(K), \bar{s}) \rightarrow \pi_1(S, \bar{s})$$

surjektiv.

Satz 1.2.9. ([SGA1], Exposé V, Prop. 6.11) *Seien $f': S'' \rightarrow S'$ und $f: S' \rightarrow S$ Morphismen zusammenhängender Schemata und $\bar{s}'': \text{Spec}(\Omega) \rightarrow S''$ ein geometrischer Punkt von S'' . Wir betrachten die induzierten Homomorphismen auf den Fundamentalgruppen:*

$$\pi_1(S'', \bar{s}'') \xrightarrow{u'} \pi_1(S', \bar{s}'') \xrightarrow{u} \pi_1(S, \bar{s}'').$$

Dann ist $u \circ u'$ genau dann trivial, falls für alle zusammenhängenden Objekte $X \in F\text{Et}/S$ der Basiswechsel $X \times_S S''$ total zerfällt. Die Inklusion $\ker(u) \subset \text{im}(u')$ erhalten wir genau dann, wenn für jedes zusammenhängende Objekt $X' \in F\text{Et}/S'$, so dass $X' \times_{S'} S''$ einen Schnitt über S'' erlaubt, ein Objekt $X \in F\text{Et}/S$ existiert und ein Morphismus einer Zusammenhangskomponente von $X \times_S S'$ nach X' .

Satz 1.2.10. ([SGA1], IX, Théorème 6.1) *Sei X ein geometrisch zusammenhängendes Schema über einem Körper K (d.h. $X \times_K \bar{K}$ ist zusammenhängend, wobei \bar{K} einen algebraischen Abschluss von K bezeichne) und \bar{x} ein geometrischer Punkt von $X \times_K \bar{K}$. Dann ist die Folge étaler Fundamentalgruppen*

$$1 \rightarrow \pi_1(X \times_K \bar{K}, \bar{x}) \rightarrow \pi_1(X, \bar{x}) \rightarrow \pi_1(K, \bar{x}) \rightarrow 1$$

exakt.

Kapitel 2

Die scheingeometrische étale Fundamentalgruppe

Sei S ein exzellentes eindimensionales Dedekindschema mit vollkommenen Restklassenkörpern und k der Funktionenkörper von S . Sei \mathfrak{X} ein zusammenhängendes reguläres S -Schema, so dass der Strukturmorphismus $f: \mathfrak{X} \rightarrow S$ von endlichem Typ und surjektiv mit zusammenhängender geometrischer generischer Faser $\mathfrak{X} \times_S \bar{k}$ ist. Wir fixieren einen geometrischen Punkt $\bar{s}: \text{Spec}(\Omega) \rightarrow \mathfrak{X} \times_S \bar{k}$ und bezeichnen das direkte Bild von \bar{s} in \mathfrak{X} (bzw. S) ebenfalls mit \bar{s} .

In diesem Kapitel führen wir die scheingeometrische étale Fundamentalgruppe von \mathfrak{X} ein und beschreiben durch Überlagerungen von \mathfrak{X} bzw. S den Effekt, der zu deren Existenz führt. Beispiele für Schemata mit nicht-trivialer scheingeometrischer étaler Fundamentalgruppe werden im dritten Kapitel konstruiert.

In diesem Kapitel bezeichne S ein exzellentes eindimensionales Dedekindschema mit vollkommenen Restklassenkörpern. Der Funktionenkörper von S werde mit k bezeichnet.

Wir betrachten stets die folgende

Grundsituation: Sei \mathfrak{X} ein zusammenhängendes reguläres S -Schema. Als reguläres und zusammenhängendes Schema ist \mathfrak{X} integer. Der Funktionenkörper von \mathfrak{X} wird mit K bezeichnet. Wir fixieren einen algebraischen Abschluss \bar{K} von K und setzen \bar{k} für den algebraischen Abschluss von k in \bar{K} . Der Strukturmorphismus $f: \mathfrak{X} \rightarrow S$ sei ein surjektiver Morphismus von endlichem Typ mit zusammenhängender geometrischer generischer Faser $\mathfrak{X} \times_S \bar{k}$.

Für ein integres Schema A mit Funktionenkörper M bezeichne A^N die Normalisierung von A in einer Erweiterung N/M .

Für eine Erweiterung $l \subset \bar{k}$ von k vereinbaren wir folgende Bezeichnungen:

$X := \mathfrak{X} \times_S k$, die generische Faser

$X_l := X \times_k l$

\mathfrak{X}^{Kl} = Normalisierung von \mathfrak{X} im Kompositum Kl innerhalb \bar{K}

$\mathfrak{X}_l := \mathfrak{X} \times_S S^l$.

2.1 Definition der scheingeometrischen étalen Fundamentalgruppe

Sei $f: \mathfrak{X} \rightarrow S$ wie in der Grundsituation. In diesem Abschnitt definieren wir die scheingeometrische étale Fundamentalgruppe von \mathfrak{X} und erklären den Effekt, der zu deren Existenz führt. Anschließend werden Bedingungen an den Morphismus f wiederholt, die zur Trivialität der scheingeometrischen étalen Fundamentalgruppe von \mathfrak{X} führen.

Bevor wir uns jedoch der scheingeometrischen Fundamentalgruppe widmen, geben wir Bemerkungen zur Grundsituation an:

- Bemerkung 2.1.1.**
1. Die geometrische generische Faser $\mathfrak{X} \times_S \bar{k}$ ist normal und zusammenhängend und damit integer. Dies ist nach [Liu], 3, Cor. 2.14 äquivalent dazu, dass K/k eine reguläre Körpererweiterung ist; das heißt, dass die Körper K und \bar{k} linear disjunkt über k sind.
 2. Da das Schema \mathfrak{X} regulär ist, ist auch die generische Faser $\mathfrak{X} \times_S k$ regulär. Das Schema $\mathfrak{X} \times_S k$ ist außerdem ein Schema über dem vollkommenen Körper k . Über einem vollkommenen Körper sind glatt und regulär äquivalent ([Liu], 4, Cor. 3.33) und damit ist die generische Faser glatt über k .
 3. Der Morphismus f in der Grundsituation ist flach, da f surjektiv und \mathfrak{X} ein integrales Schema über einem Dedekindschema ist.

In der Grundsituation ist nach Voraussetzung die geometrische generische Faser zusammenhängend. Ist der Morphismus f eigentlich, so können wir die Aussage verschärfen:

Lemma 2.1.2. *Ist der Morphismus $f: \mathfrak{X} \rightarrow S$ in der Grundsituation eigentlich, so sind bereits alle Fasern geometrisch zusammenhängend.*

Beweis. Der eigentliche Morphismus $f: \mathfrak{X} \rightarrow S$ erlaubt nach [Mu], 6.2 und 6.3.1.1 die Steinfaktorisierung:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{X} & \xrightarrow{f} & S \\ & \searrow f' & \nearrow q \\ & & Y \end{array}$$

Der Morphismus f faktorisiert über Y , wobei

- der Morphismus q endlich ist.
- der Morphismus f' eigentlich ist und für alle $y \in Y$ die Faser $f'^{-1}(y)$ nicht leer und geometrisch zusammenhängend ist.

Sei l der Restklassenkörper des generischen Punktes von Y . Dann ist l/k eine endliche separable Körpererweiterung. Da K/k eine reguläre Körpererweiterung ist, kann jedoch K nur eine Körpererweiterung von l sein, falls $l = k$ gilt. Damit folgt $Y = S$ und insbesondere, dass $f = f'$ geometrisch zusammenhängende Fasern hat. \square

In der Grundsituation $f: \mathfrak{X} \rightarrow S$ ist das Basisschema S ein exzellentes eindimensionales Dedekindschema mit perfekten Restklassenkörpern. Wäre das Basisschema das Spektrum eines Körpers M und Y ein $\text{Spec}(M)$ -Schema mit zusammenhängender geometrischer generischer Faser $Y \times_M \bar{M}$ und \bar{m} ein geometrischer Punkt von $Y \times_M \bar{M}$, so wissen wir nach Satz 1.2.10, dass die Folge étaler Fundamentalgruppen

$$1 \rightarrow \pi_1(Y \times_M \bar{M}, \bar{m}) \rightarrow \pi_1(Y, \bar{m}) \rightarrow \pi_1(\text{Spec}(M), \bar{m}) \rightarrow 1$$

exakt ist. In unserer Grundsituation können wir im allgemeinen nicht die Exaktheit der Folge

$$(*) \quad \pi_1(X_{\bar{k}}, \bar{s}) \xrightarrow{g} \pi_1(\mathfrak{X}, \bar{s}) \xrightarrow{h} \pi_1(S, \bar{s}) \rightarrow 1$$

erwarten. Folgende Aussagen über die Folge (*) erhalten wir jedoch stets in der Grundsituation:

- Sei $S^{\tilde{l}}$ die Normalisierung von S in einer endlichen Erweiterung $\tilde{l} \subset \bar{k}$ von k , so dass $S^{\tilde{l}} \rightarrow S$ étale ist. Da ein étaler Morphismus stabil unter Basiswechsel ist, ist $\mathfrak{X} \times_S S^{\tilde{l}}$ eine Überlagerung von \mathfrak{X} und $\mathfrak{X} \times_S S^{\tilde{l}} \times_S \bar{k}$ zerfällt über $X_{\bar{k}}$ total. Es folgt mit Bemerkung 1.2.7, dass $\text{im}(g) \subset \text{ker}(h)$ gilt, (*) also ein Komplex ist.
- Der Homomorphismus $h: \pi_1(\mathfrak{X}, \bar{s}) \rightarrow \pi_1(S, \bar{s})$ ist surjektiv.

Dies führt nun zu folgenden Definitionen:

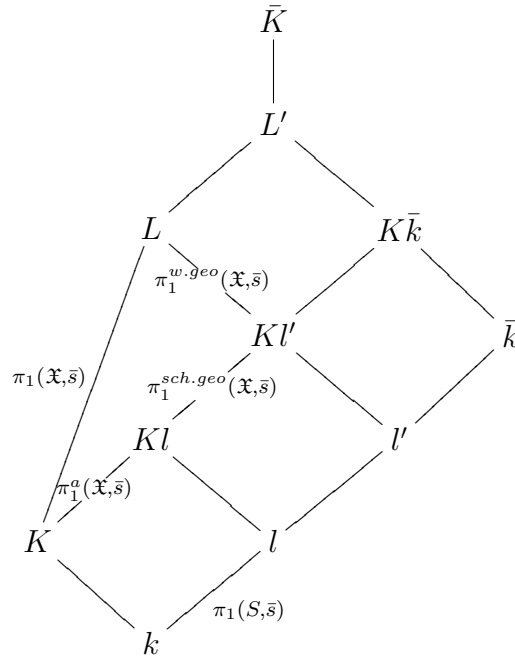
- $\pi_1^{geo}(\mathfrak{X}, \bar{s}) := \ker(h)$ heißt die *geometrische Fundamentalgruppe von \mathfrak{X}* .
- $\pi_1^{w.geo}(\mathfrak{X}, \bar{s}) := g(\pi_1(X_{\bar{k}}, \bar{s})) \subset \pi_1(\mathfrak{X}, \bar{s})$ heißt die *wahre geometrische Fundamentalgruppe von \mathfrak{X}* .
- $\pi_1^{sch.geo}(\mathfrak{X}, \bar{s}) := \ker(h)/\text{im}(g)$ heißt die *scheingeometrische étale Fundamentalgruppe von \mathfrak{X}* (kurz: scheingeometrische Fundamentalgruppe).
- $\pi_1^a(\mathfrak{X}, \bar{s}) := \pi_1(\mathfrak{X}, \bar{s})/\ker(h)$ heißt die *arithmetische Fundamentalgruppe von \mathfrak{X}* .

Alle Schemata, die wir betrachten, sind normal und zusammenhängend. Damit sind die étalen Fundamentalgruppen dieser Schemata isomorph zu Galoisgruppen bestimmter Körpererweiterungen. In dieser Terminologie können wir ein Diagramm konstruieren, das einen Überblick über die eben definierten Fundamentalgruppen ermöglicht:

Dazu führen wir folgende Bezeichnungen ein:

Sei l die maximale Erweiterung von k in \bar{k} , so dass S^l/S étale ist.
 Sei l' die maximale Erweiterung von k in \bar{k} , so dass $\mathfrak{X}^{Kl'}/\mathfrak{X}$ étale ist.
 Sei L die maximale Erweiterung von K in \bar{K} , so dass $\mathfrak{X}^L/\mathfrak{X}$ étale ist.
 Sei L' die maximale Erweiterung von $K\bar{k}$ in \bar{K} , so dass $X_{L'}/X_{\bar{k}}$ étale ist.

Mit diesen Bezeichnungen erhalten wir folgendes Diagramm:



Sei $\tilde{l} \subset l$ eine endliche Erweiterung von k und $\mathfrak{X}^{K\tilde{l}}$ die Normalisierung von \mathfrak{X} in $K\tilde{l}$. Das Schema $\mathfrak{X}^{K\tilde{l}}$ heißt eine *arithmetische Überlagerung* von \mathfrak{X} .

Ist $\mathfrak{Y} \rightarrow \mathfrak{X}$ eine Überlagerung, so dass $\mathfrak{Y} \times_S \bar{k}$ zusammenhängend ist, so nennen wir \mathfrak{Y} eine *wahre geometrische Überlagerung* von \mathfrak{X} .

Unser Ziel ist es nun, die Fundamentalgruppe von \mathfrak{X} und insbesondere die schein-geometrische Fundamentalgruppe von \mathfrak{X} zu verstehen. Dies werden wir mit Hilfe zusammenhängender Überlagerungen von \mathfrak{X} bzw. S . In diesem Zusammenhang spielt der Normalisierungsmorphismus eines integren Schemas eine Rolle, der an dieser Stelle wiederholt wird:

Bemerkung 2.1.3. Sei Y ein integres Schema. Ein Morphismus

$$n : Y' \rightarrow Y$$

heißt *Normalisierungsmorphismus*, falls Y' normal ist und jeder dominante Morphismus $\phi : Z \rightarrow Y$, wobei Z ein normales Schema ist, eindeutig über n faktoriisiert:

$$\begin{array}{ccc} Z & \longrightarrow & Y' \\ \phi \downarrow & \searrow n & \\ Y & & \end{array}$$

Nach [Liu], 4.1, Prop. 1.22 existiert für jedes integre Schema Y ein Normalisierungsmorphismus $n : Y' \rightarrow Y$. Ist das integre Schema Y exzcellent, so ist nach [Liu], 8.2, Theorem 2.39 der Normalisierungsmorphismus n endlich.

Sei nun $f : \mathfrak{X} \rightarrow S$ wie in der Grundsituation und $S^{\tilde{l}}$ die Normalisierung von S in einer endlichen separablen Körpererweiterung $\tilde{l} \subset \bar{k}$ von k , so dass $S^{\tilde{l}} \rightarrow S$ étale ist. Das basisgewechselte Schema $\mathfrak{X} \times_S S^{\tilde{l}}$ ist dann ebenfalls étale über \mathfrak{X} , da nach Satz 1.1.2 étale stabil unter Basiswechsel ist. Außerdem ist $\mathfrak{X} \times_S S^{\tilde{l}}$ als étales Schema über dem regulären Schema \mathfrak{X} nach Satz 1.1.3 ebenfalls regulär, also insbesondere normal. In diesem Fall ist dann $\mathfrak{X} \times_S S^{\tilde{l}}$ bereits seine eigene Normalisierung im Funktionenkörper $K\tilde{l}$ von $\mathfrak{X} \times_S S^{\tilde{l}}$ und damit die Normalisierung von \mathfrak{X} in $K\tilde{l}$:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{X}^{K\tilde{l}} = \mathfrak{X} \times_S S^{\tilde{l}} & \longrightarrow & S^{\tilde{l}} \\ \downarrow \text{étale} & & \downarrow \text{étale} \\ \mathfrak{X} & \longrightarrow & S \end{array}$$

Die Schemata $\mathfrak{X} \times_S S^{\tilde{l}}$, wobei $S^{\tilde{l}}$ die Normalisierung von S in einer endlichen separablen Erweiterung \tilde{l} von k ist und $S^{\tilde{l}} \rightarrow S$ étale ist, bilden den arithmetischen Teil der Fundamentalgruppe von \mathfrak{X} .

Nun beschreiben wir den Effekt, der zur Existenz der scheingeometrischen étalen Fundamentalgruppe führt:

Sei $S^{\tilde{l}}$ die Normalisierung von S in einer endlichen separablen Erweiterung \tilde{l} von k , so dass $S^{\tilde{l}} \rightarrow S$ verzweigt. Wir können nun den Basiswechsel $\mathfrak{X} \times_S S^{\tilde{l}} \rightarrow \mathfrak{X}$ wie eben betrachten. Der fpqc-Abstieg für die Eigenschaft étale (Satz 1.1.4) liefert, dass der Morphismus $\mathfrak{X} \times_S S^{\tilde{l}} \rightarrow \mathfrak{X}$ ebenfalls verzweigt. Damit können wir das Argument aus Satz 1.1.3, um die Normalität des Schemas $\mathfrak{X} \times_S S^{\tilde{l}}$ zu erhalten, nicht anwenden. Im allgemeinen ist das Schema $\mathfrak{X} \times_S S^{\tilde{l}}$ nicht normal und $\mathfrak{X} \times_S S^{\tilde{l}}$ ist im allgemeinen nicht die Normalisierung von \mathfrak{X} im Kompositum $K\tilde{l}$.

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathfrak{X}^{K\tilde{l}} & \xrightarrow{\text{Normalis.}} & \mathfrak{X} \times_S S^{\tilde{l}} & \longrightarrow & S^{\tilde{l}} \\
 & \searrow & \downarrow \text{verzweigt} & & \downarrow \text{verzweigt} \\
 & & \mathfrak{X} & \longrightarrow & S
 \end{array}$$

In diesem Fall besteht die Möglichkeit, dass der Morphismus $\mathfrak{X}^{K\tilde{l}} \rightarrow \mathfrak{X}$ étale ist, obwohl $\mathfrak{X} \times_S S^{\tilde{l}} \rightarrow \mathfrak{X}$ verzweigt. Ein Beispiel für die Existenz einer solchen Situation geben wir im dritten Kapitel dieser Arbeit. Sei also in diesem Fall $\mathfrak{X}^{K\tilde{l}} \rightarrow \mathfrak{X}$ étale. Das Schema $\mathfrak{X}^{K\tilde{l}}$ ist also nicht von der Form $\mathfrak{X} \times_S S^{\tilde{l}}$, wobei $S^{\tilde{l}}$ die Normalisierung von S in einer endlichen separablen Erweiterung \tilde{l} von k ist. Damit ist $\mathfrak{X}^{K\tilde{l}}$ keine arithmetische Überlagerung von \mathfrak{X} . Desweiteren zerfällt $\mathfrak{X}^{K\tilde{l}} \times_S \bar{k}$ vollständig über $X_{\bar{k}}$. Somit ist $\mathfrak{X}^{K\tilde{l}}$ auch keine wahre geometrische Überlagerung von \mathfrak{X} . Die Existenz genau solcher Überlagerungen eines Schemas \mathfrak{X} führt zur Nicht-Trivialität der scheingeometrischen Fundamentalgruppe von \mathfrak{X} . Diese Überlagerungen nennen wir *scheingeometrische Überlagerungen* von \mathfrak{X} .

Bemerkung 2.1.4. Nach [Liu], 8, Theorem 2.39 ist ein Schema von endlichem Typ über einem exzellenten Schema ebenfalls exzellent. Damit ist das Schema \mathfrak{X} in der Grundsituation über dem exzellenten Schema S exzellent. Sei $\tilde{l} \subset \bar{k}$ eine endliche separable Erweiterung von k und $S^{\tilde{l}}$ die Normalisierung von S in \tilde{l} . Da das Schema $\mathfrak{X} \times_S S^{\tilde{l}}$ von endlichem Typ über \mathfrak{X} ist, ist $\mathfrak{X} \times_S S^{\tilde{l}}$ und nach Bemerkung 2.1.3 der Normalisierungsmorphismus

$$\mathfrak{X}^{K\tilde{l}} \rightarrow \mathfrak{X} \times_S S^{\tilde{l}}$$

endlich.

Zusammenfassend können die entsprechenden Fundamentalgruppen von \mathfrak{X} wie folgt charakterisiert werden:

- Bemerkung 2.1.5.**
1. Die arithmetische Fundamentalgruppe $\pi_1^a(\mathfrak{X}, \bar{s})$ klassifiziert die zusammenhängenden Überlagerungen von \mathfrak{X} , die durch einen Basiswechsel von $\mathfrak{X} \rightarrow S$ zur Normalisierung $S^{\tilde{l}}$ von S in einer endlichen Erweiterung \tilde{l} von k in \bar{k} entstehen, so dass $S^{\tilde{l}}/S$ étale ist.
 2. Die geometrische Fundamentalgruppe $\pi_1^{geo}(\mathfrak{X}, \bar{s})$ ist genau dann trivial, falls alle zusammenhängenden Überlagerungen von \mathfrak{X} isomorph sind zu Überlagerungen der Form $\mathfrak{X} \times_S S^{\tilde{l}}$, wobei $S^{\tilde{l}}$ eine Überlagerung von S ist.
 3. Die wahre geometrische Fundamentalgruppe $\pi_1^{w.geo}(\mathfrak{X}, \bar{s})$ ist genau dann trivial, falls alle zusammenhängenden Überlagerungen von \mathfrak{X} isomorph sind zur Normalisierung von \mathfrak{X} im Kompositum $K\tilde{l}$, wobei \tilde{l} eine endliche separable Körpererweiterung von k ist.
 4. Die scheingeometrische étale Fundamentalgruppe $\pi_1^{sch.geo}(\mathfrak{X}, \bar{s})$ von \mathfrak{X} ist genau dann trivial, falls $\mathfrak{X}^{K\tilde{l}}/\mathfrak{X}$ verzweigt für alle endlichen separablen Körpererweiterungen \tilde{l} von k , sobald die Normalisierung von S in \tilde{l} über S verzweigt.

Nach Katz-Lang ([KL], Lemma 2) haben wir das folgende Theorem, welches die Trivialität der scheingeometrischen Fundamentalgruppe von \mathfrak{X} in der Grundsituation liefert, falls der Morphismus $f: \mathfrak{X} \rightarrow S$ glatt ist, genauer:

Theorem 2.1.6. *Sei T ein normales und zusammenhängendes Schema mit Funktionenkörper k . Sei $f: \mathfrak{Y} \rightarrow T$ ein glatter surjektiver Morphismus von endlichem Typ, dessen geometrische generische Faser $\mathfrak{Y}_{\bar{k}}$ zusammenhängend ist. Dann ist für jeden geometrischen Punkt \bar{t} von $\mathfrak{Y}_{\bar{k}}$ die Folge étaler Fundamentalgruppen*

$$\pi_1(\mathfrak{Y}_{\bar{k}}, \bar{t}) \rightarrow \pi_1(\mathfrak{Y}, \bar{t}) \rightarrow \pi_1(T, \bar{t}) \rightarrow 1$$

exakt.

Beweis. Zunächst zeigen wir, dass \mathfrak{Y} normal und zusammenhängend ist. Da f glatt und S normal ist, folgt bereits die Normalität von \mathfrak{Y} .

Nach [EGA IV²], Théorème 2.4.6 ist ein flacher Morphismus von endlichem Typ offen. Weil T integer ist, folgt daraus für alle nicht-leeren offenen Teilmengen $U \subseteq \mathfrak{Y}$: $U \cap \mathfrak{Y}_k \neq \emptyset$. Angenommen \mathfrak{Y} wäre nicht zusammenhängend, dann existieren zwei offene Umgebungen $U_1, U_2 \subset \mathfrak{Y}$ mit $U_1 \cup U_2 = \mathfrak{Y}$ und $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Es folgt

$$(U_1 \cap \mathfrak{Y}_k) \cup (U_2 \cap \mathfrak{Y}_k) = \mathfrak{Y}_k;$$

das heißt, \mathfrak{Y}_k ist nicht zusammenhängend. Das aber steht im Widerspruch dazu, dass die geometrische generische Faser $\mathfrak{Y}_{\bar{k}}$ zusammenhängend ist.

Als normales und zusammenhängendes Schema ist \mathfrak{Y} integer. Der Funktionenkörper von \mathfrak{Y} soll mit F bezeichnet werden. Nun betrachten wir das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & \pi_1(\mathfrak{Y}_{\bar{k}}, \bar{t}) & \longrightarrow & \pi_1(\mathfrak{Y}_k, \bar{t}) & \longrightarrow & \pi_1(k, \bar{t}) \longrightarrow 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \pi_1(\mathfrak{Y}_{\bar{k}}, \bar{t}) & \xrightarrow{g} & \pi_1(\mathfrak{Y}, \bar{t}) & \xrightarrow{h} & \pi_1(T, \bar{t}) \longrightarrow 1. \end{array}$$

Es gilt:

- Das Schema \mathfrak{Y}_k ist ein k -Schema mit zusammenhängender geometrischer generischer Faser $\mathfrak{Y}_{\bar{k}}$. Mit Satz 1.2.10 ist dann die Folge

$$1 \longrightarrow \pi_1(\mathfrak{Y}_{\bar{k}}, \bar{t}) \longrightarrow \pi_1(\mathfrak{Y}_k, \bar{t}) \longrightarrow \pi_1(k, \bar{t}) \longrightarrow 1$$

exakt.

- Die generische Faser \mathfrak{Y}_k ist zusammenhängend und regulär und damit integer. Der Funktionenkörper von \mathfrak{Y}_k stimmt mit dem Funktionenkörper von \mathfrak{Y} überein.
- Das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & & \pi_1(\mathfrak{Y}_k, \bar{t}) \\ & \nearrow & \downarrow \\ \text{Gal}(\bar{F}/F) & & \pi_1(\mathfrak{Y}, \bar{t}) \\ & \searrow & \end{array}$$

liefert die Surjektivität der Abbildung $\pi_1(\mathfrak{Y}_k, \bar{t}) \rightarrow \pi_1(\mathfrak{Y}, \bar{t})$.

- Die Abbildung $\pi_1(k, \bar{t}) \rightarrow \pi_1(T, \bar{t})$ ist nach Bemerkung 1.2.8 surjektiv.

Insgesamt erhalten wir folgendes kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & \pi_1(\mathfrak{Y}_{\bar{k}}, \bar{t}) & \xrightarrow{c} & \pi_1(\mathfrak{Y}_k, \bar{t}) & \longrightarrow & \pi_1(k, \bar{t}) \longrightarrow 1 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \pi_1(\mathfrak{Y}_{\bar{k}}, \bar{t}) & \xrightarrow{g} & \pi_1(\mathfrak{Y}, \bar{t}) & \xrightarrow{h} & \pi_1(T, \bar{t}) \longrightarrow 1. \end{array}$$

Eine Diagrammjagd liefert die Surjektivität von h sowie $h \circ g = 0$. Für die Exaktheit der Folge bleibt also noch $\ker(h) \subset \text{im}(g)$ zu zeigen. Dies ist nach Satz 1.2.9 äquivalent dazu, dass jede zusammenhängende Überlagerung \mathfrak{Z} von \mathfrak{Y} , die

einen Schnitt über $\mathfrak{Y}_{\bar{k}}$ hat, isomorph ist zu einem Schema $\mathfrak{Y} \times_T T'$, wobei T' eine zusammenhängende Überlagerung von T ist. Sei also \mathfrak{Z} eine zusammenhängende Überlagerung von \mathfrak{Y} , die einen Schnitt über $\mathfrak{Y}_{\bar{k}}$ erlaubt. Die Surjektivität der Abbildung $\pi_1(\mathfrak{Y}_k, \bar{t}) \rightarrow \pi_1(\mathfrak{Y}, \bar{t})$ und Bemerkung 1.2.7 liefern, dass \mathfrak{Z}_k zusammenhängend ist. Das bedeutet, dass \mathfrak{Z}_k eine zusammenhängende Überlagerung von \mathfrak{Y}_k ist. Da \mathfrak{Z}_k einen Schnitt über $\mathfrak{Y}_{\bar{k}}$ hat, folgt mit der Exaktheit der Folge

$$1 \rightarrow \pi_1(\mathfrak{Y}_{\bar{k}}, \bar{t}) \rightarrow \pi_1(\mathfrak{Y}_k, \bar{t}) \rightarrow \pi_1(k, \bar{t}) \rightarrow 1$$

und mit Bemerkung 1.2.7 und Satz 1.2.9, dass \mathfrak{Z}_k die Normalisierung von \mathfrak{Y}_k in einer Erweiterung $F\tilde{l}$ ist, wobei \tilde{l} eine endliche separable Erweiterung von k ist. Damit erhalten wir ebenfalls, dass \mathfrak{Z} die Normalisierung von \mathfrak{Y} in $F\tilde{l}$ ist und der Funktionenkörper von \mathfrak{Z} ist $F\tilde{l}$. Es bleibt noch zu zeigen, dass die Normalisierung $S^{\tilde{l}}$ von S in \tilde{l} über S étale ist. Dies erhalten wir mit Satz 1.1.4 für den treuflachen und quasikompakten Morphismus $f: \mathfrak{Y} \rightarrow T$. \square

Die Trivialität von $\pi_1^{sch.geo}(\mathfrak{X}, \bar{s})$ erhalten wir also in der Grundsituation, falls der Morphismus f glatt ist. Ist der Morphismus f nicht notwendig glatt, so wird in [SGA1], Exposé X, Cor. 1.4 die Trivialität der schein geometrischen Fundamentalgruppe in einer weiteren Situation gezeigt. Dazu wiederholen wir zunächst eine

Definition 2.1.7. • Ein Schema X über einem Körper k heißt *separabel* über k , falls für jede Erweiterung K von k gilt, dass

$$X \times_k K$$

reduziert ist.

- Ist $f: X \rightarrow Y$ ein Schemamorphismus, dann heißt X *separabel* über Y , falls f flach ist und für alle $y \in Y$ mit Restklassenkörper $\kappa(y)$ die Faser $X \times_Y \kappa(y)$ separabel über $\kappa(y)$ ist.

Seien X, Y Schemata mit Strukturgarben \mathcal{O}_X und \mathcal{O}_Y . Sei $f: X \rightarrow Y$ ein Schemamorphismus und

$$f^\#: \mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$$

der zugehörige Morphismus von Ringgarben. Ist der Morphismus f eigentlich und gilt $\mathcal{O}_Y \cong f_*\mathcal{O}_X$, so sind nach [EGA III¹], III, Rem. 4.3.4. alle Fasern von f geometrisch zusammenhängend.

Theorem 2.1.8. ([SGA1], Exposé X, Cor. 1.4) *Sei Y ein zusammenhängendes Schema und $f: X \rightarrow Y$ ein eigentlicher und separabler Morphismus. Sei $y \in Y$, $\kappa(y)$ der Restklassenkörper von Y in y und \bar{x} ein geometrischer Punkt von $X \times_Y \kappa(y)$. Gilt $f_*(\mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_Y$, so ist die Folge étaler Fundamentalgruppen*

$$\pi_1(X \times_Y \overline{\kappa(y)}, \bar{x}) \rightarrow \pi_1(X, \bar{x}) \rightarrow \pi_1(Y, \bar{x}) \rightarrow 1$$

exakt.

2.2 Exakte Folgen

Sei $f: \mathfrak{X} \rightarrow S$ der Morphismus in der Grundsituation. In diesem Abschnitt definieren wir die Dicke einer Faser des Morphismus f und studieren die Veränderung der Faserdicke beim Übergang zu $\tilde{f}: \mathfrak{X}^{K\tilde{l}} \rightarrow S^{\tilde{l}}$, wobei \tilde{l} eine endliche separable Erweiterung von k ist. Wir zeigen:

- Beim Übergang zu einer arithmetischen Überlagerung verändern sich die Faserdicken nicht.
- Beim Übergang zu einer scheingeometrischen Überlagerung verkleinern sich die Faserdicken.

Diese Beobachtungen ermöglichen die Beweise der folgenden Sätze:

1. Sind alle Faserdicken von f gleich Eins, so ist

$$\pi_1(X_{\bar{k}, \bar{s}}) \rightarrow \pi_1(\mathfrak{X}, \bar{s}) \rightarrow \pi_1(S, \bar{s}) \rightarrow 1$$

exakt.

2. Sei p eine Primzahl und

$$(*) \quad \pi_1(X_{\bar{k}, \bar{s}}(p)) \rightarrow \pi_1(\mathfrak{X}, \bar{s})(p) \rightarrow \pi_1(S, \bar{s})(p) \rightarrow 1$$

die Folge der maximalen pro- p -Faktorgruppen. Sind alle Faserdicken von f teilerfremd zu p , dann ist $(*)$ exakt.

2.2.1 Faserdicken

Beim Studium der scheingeometrischen Fundamentalgruppe ist ein entscheidender Punkt nachzuweisen, ob Erweiterungen von Schemata unverzweigt sind. In diesem Zusammenhang greifen wir beim regulären Schema \mathfrak{X} auf die Reinheit des Verzweigungsortes zurück, die wir an dieser Stelle rekapitulieren:

Theorem 2.2.1. (Zariski-Nagata) Reinheit des Verzweigungsortes ([SGA1], Exposé X, Théorème de pureté 3.1)

Sei $\phi: X \rightarrow Y$ ein quasi-endlicher und dominanter Morphismus integrier Schemata. Das Schema X sei normal und das Schema Y sei regulär und lokal noethersch. Sei $Z \subseteq X$ der Verzweigungsort von ϕ . Ist $Z \neq X$, dann ist Z rein von Kodimension Eins in X ; das heißt, dass für jede irreduzible Komponente Z' von Z mit generischem Punkt z die Dimension von $\mathcal{O}_{X,z}$ gleich Eins ist.

Sei nun \tilde{l}/k eine endliche separable Körpererweiterung von k und $\mathfrak{X}^{K\tilde{l}}$ die Normalisierung von \mathfrak{X} in $K\tilde{l}$. Die generische Faser $\mathfrak{X} \times_S k$ des Morphismus $f: \mathfrak{X} \rightarrow S$

in der Grundsituation ist nach Bemerkung 2.1.1 glatt. Damit ist auch die generische Faser von $\mathfrak{X}^{K\bar{l}}$ glatt und unverzweigt über der generischen Faser von \mathfrak{X} . Um zu entscheiden, ob $\mathfrak{X}^{K\bar{l}}/\mathfrak{X}$ unverzweigt ist, genügt es also, die Punkte der Kodimension Eins (außerhalb der generischen Faser) in $\mathfrak{X}^{K\bar{l}}$ zu betrachten, da nach Theorem 2.2.1 der Verzweigungsort rein von Kodimension Eins ist.

Für den flachen Morphismus

$$\psi: \mathfrak{X}^{K\bar{l}} \rightarrow S$$

erhalten wir nach [Liu], 4, Theorem 3.12 für $y \in \mathfrak{X}^{K\bar{l}}$ und $s := \psi(y)$ die Gleichheit von Dimensionen:

$$\dim(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_s^{K\bar{l}}, y}) = \dim(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}^{K\bar{l}}, y}) - \dim(\mathcal{O}_{S, s}).$$

Ist $y \in \mathfrak{X}^{K\bar{l}}$ ein Punkt von Kodimension Eins in $\mathfrak{X}^{K\bar{l}}$, der nicht in der generischen Faser liegt, so gilt $\dim(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}^{K\bar{l}}, y}) = 1$ und $\dim(\mathcal{O}_{S, s}) = 1$. Daraus folgt

$$\dim(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_s^{K\bar{l}}, y}) = 0.$$

Ein Punkt $y \in \mathfrak{X}^{K\bar{l}}$ von Kodimension Eins in $\mathfrak{X}^{K\bar{l}}$ mit Bild $s \in S$, der nicht in der generischen Faser liegt, ist also generischer Punkt einer irreduziblen Komponente der Faser $\mathfrak{X}_s^{K\bar{l}}$ über s . So ein Punkt wird durch die Abbildung $\mathfrak{X}^{K\bar{l}} \rightarrow \mathfrak{X}$ auf den generischen Punkt einer irreduziblen Komponente von \mathfrak{X}_s abgebildet. Es genügt also, die Unverzweigtheit an den generischen Punkten der irreduziblen Komponenten der Fasern über den abgeschlossenen Punkten nachzuprüfen.

Aus diesem Grund betrachten wir nun die lokalen Ringe von $\mathfrak{X}^{K\bar{l}}$, \mathfrak{X} und S bei den Punkten von Kodimension Eins:

Sei $s \in S$ ein abgeschlossener Punkt von S .

Da S ein eindimensionales Dedekindschema ist, ist $\mathcal{O}_{S, s}$ ein diskreter Bewertungsring. Sei P der generische Punkt einer irreduziblen Komponente von \mathfrak{X}_s (bzw. $\mathfrak{X}_s^{K\bar{l}}$). Dann ist der lokale Ring $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_s, P}$ (bzw. $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_s^{K\bar{l}}, P}$) ebenfalls ein diskreter Bewertungsring.

Definition 2.2.2. Sei $s \in S$ ein abgeschlossener Punkt und π ein uniformisierendes Element des diskreten Bewertungsringes $\mathcal{O}_{S, s}$. Seien $(P_i)_{i=1, \dots, n}$ die generischen Punkte der irreduziblen Komponenten $(C_i)_{i=1, \dots, n}$ der Faser \mathfrak{X}_s von \mathfrak{X} über s . Jeder diskrete Bewertungsring $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}, P_i}$ dominiert den diskreten Bewertungsring $\mathcal{O}_{S, s}$ und wir fassen das Element $\pi \in \mathcal{O}_{S, s}$ über die Abbildung $\mathcal{O}_{S, s} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathfrak{X}, P_i}$ auch als ein Element in $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}, P_i}$ auf. Für $i \in \{1, \dots, n\}$ heißt die Länge

$$l_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}, P_i}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}, P_i}/\pi\mathcal{O}_{\mathfrak{X}, P_i})$$

des $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}, P_i}$ -Moduls $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}, P_i}/\pi\mathcal{O}_{\mathfrak{X}, P_i}$ die *Vielfachheit der irreduziblen Komponente C_i in \mathfrak{X}_s* .

Lemma 2.2.3. *Die Vielfachheit einer irreduziblen Komponente C_i von \mathfrak{X}_s ist endlich.*

Beweis. Sei $P_i \in \mathfrak{X}$ der generische Punkt von C_i . Der lokale Ring $\mathcal{O}_{S,s}$ ist ein diskreter Bewertungsring. Wir bezeichnen ein uniformisierendes Element für $\mathcal{O}_{S,s}$ mit π . Dann hat nach [Liu], 7, Lemma 1.26 der $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},P_i}$ -Modul $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},P_i}/\pi\mathcal{O}_{\mathfrak{X},P_i}$ endliche Länge, da π Nicht-Nullteiler im eindimensionalen noetherschen lokalen Ring $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},P_i}$ ist. \square

Definition 2.2.4. Seien die Notationen wie in Definition 2.2.2. Wir definieren die *Dicke der Faser \mathfrak{X}_s* von \mathfrak{X} über s als

$$D(\mathfrak{X}_s) = ggT((l_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},P_i}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},P_i}/\pi\mathcal{O}_{\mathfrak{X},P_i}))_{i=\{1,\dots,n\}}).$$

Bemerkung 2.2.5. 1. Eine irreduzible Komponente C_i von \mathfrak{X}_s mit generischem Punkt P_i hat genau dann die Vielfachheit Eins, wenn $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},P_i}/\pi\mathcal{O}_{\mathfrak{X},P_i}$ reduziert ist.

2. Ist eine irreduzible Komponente von \mathfrak{X}_s reduziert, so ist die Dicke von \mathfrak{X}_s gleich Eins.

3. Ist A ein diskreter Bewertungsring mit uniformisierendem Element t , so gilt für alle $n \geq 1$:

$$l_A(A/t^n A) = n.$$

Lemma 2.2.6. *Sei S ein exzellentes eindimensionales Dedekindschema mit vollkommenen Restklassenkörpern und Funktionenkörper k und \mathfrak{X} ein zusammenhängendes reguläres S -Schema, so dass der Strukturmorphismus surjektiv und von endlichem Typ mit zusammenhängender geometrischer generischer Faser $\mathfrak{X} \times_S \bar{k}$ ist. Dann gibt es nur endlich viele Fasern des Morphismus f , deren Faserdicken von Eins verschieden sind.*

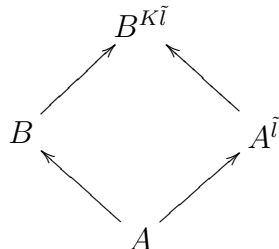
Beweis. Die Abbildung $f: \mathfrak{X} \rightarrow S$ ist nach Voraussetzung flach und von endlichem Typ und damit offen. Der glatte Ort $U \subset \mathfrak{X}$ von f ist nach [Liu], Cor. 6.2.12 offen. Weil \mathfrak{X} regulär und k ein vollkommener Körper ist, ist die generische Faser des Morphismus f glatt und damit der glatte Ort U nicht leer. Es gilt also, dass $\emptyset \neq f(U) \subset S$ offen ist. Das Komplement von U besteht also aus nur endlich vielen Punkten in S . Nur über diesen endlich vielen Stellen können die Fasern nicht reduziert sein und damit die Faserdicken von Eins verschieden. \square

2.2.2 Bewertungstheorie

Sei $\tilde{l} \subset \bar{k}$ eine endliche separable Erweiterung von k . Wie wir im letzten Abschnitt gesehen haben, genügt es, uns in der Grundsituation $f: \mathfrak{X} \rightarrow S$ mit den Punkten von Kodimension Eins außerhalb der generischen Faser zu befassen, um festzustellen, ob die Normalisierung von \mathfrak{X} in $K\tilde{l}$ über \mathfrak{X} verzweigt oder unverzweigt ist. Die Punkte von Kodimension Eins in S, \mathfrak{X} oder $\mathfrak{X}^{K\tilde{l}}$ (außerhalb der generischen Faser) sind diskrete Bewertungsringe. In diesem Zusammenhang studieren wir in diesem Abschnitt diskrete Bewertungsringe und deren Normalisierung in endlichen separablen Erweiterungen des Quotientenkörpers. So können wir in verschiedenen Situationen entscheiden, ob $\mathfrak{X}^{K\tilde{l}}/\mathfrak{X}$ unverzweigt ist oder Aussagen über die Vielfachheiten von irreduziblen Komponenten einer Faser \mathfrak{X}_s machen.

In diesem Abschnitt betrachten wir stets die folgende Situation:

Sei A ein diskreter Bewertungsring mit vollkommenem Quotientenkörper k und vollkommenem Restklassenkörper. Sei K/k eine reguläre Körpererweiterung und $B \subset K$ ein diskreter Bewertungsring, der A dominiert. Sei \tilde{l} eine endliche separable Erweiterung von k . Sei $A^{\tilde{l}}$ die Normalisierung von A in \tilde{l} und $B^{K\tilde{l}}$ die Normalisierung von B in $K\tilde{l}$. Über die natürlichen Abbildungen fassen wir die Elemente von A auch als Elemente von $A^{\tilde{l}}, B$ oder $B^{K\tilde{l}}$ auf.



Wir vereinbaren außerdem die folgenden Bezeichnungen:

Für ein Element r aus einem Ring R sei (r) das von r erzeugte Ideal in R . Ist M/R eine Ringerweiterung, so bezeichnet rM das von r erzeugte Ideal in M .

- π uniformisierendes Element des maximalen Ideals von A
- $\tilde{\pi}$ uniformisierendes Element des maximalen Ideals von B
- $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_s$ die maximalen Ideale von $A^{\tilde{l}}$
- $\mathfrak{q}_1, \dots, \mathfrak{q}_r$ die maximalen Ideale von $B^{K\tilde{l}}$

Da die Ringe $A^{\tilde{l}}$ und $B^{K\tilde{l}}$ semilokale Dedekindringe sind, gibt es nur eine endliche Anzahl von Primidealen in $A^{\tilde{l}}$ und $B^{K\tilde{l}}$.

Satz 2.2.7. Sei \tilde{l} eine endliche Galoissche Erweiterung von k und $B^{K\tilde{l}}/B$ eine unverzweigte Erweiterung. Dann ist $A^{\tilde{l}}$ unverzweigt über A , falls die Länge $l_B(B/\pi B)$ und $[\tilde{l} : k]$ teilerfremd sind.

Beweis. Sei e die Länge des B -Moduls $(B/\pi B)$. Dann gilt:

$$\pi B = (\tilde{\pi}^e).$$

Da $B^{K\tilde{l}}/B$ unverzweigt ist, gilt

$$\tilde{\pi} B^{K\tilde{l}} = \mathfrak{q}_1 \cdots \mathfrak{q}_r$$

und damit

$$\pi B^{K\tilde{l}} = (\mathfrak{q}_1 \cdots \mathfrak{q}_r)^e.$$

Fassen wir andererseits π als ein Element von $A^{\tilde{l}}$ auf, so erhalten wir

$$\pi A^{\tilde{l}} = (\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_s)^m$$

für ein $m \in \mathbb{N}$, das den Grad der Körpererweiterung $[\tilde{l} : k] =: n$ teilt.

Sei $\mathfrak{p}_i B^{K\tilde{l}} = \mathfrak{q}_1^{e_{1,i}} \cdots \mathfrak{q}_r^{e_{r,i}}$ für $i = 1, \dots, s$, dann gilt

$$\pi B^{K\tilde{l}} = \left(\prod_{i=1}^s \mathfrak{q}_1^{e_{1,i}} \cdots \mathfrak{q}_r^{e_{r,i}} \right)^m.$$

Zusammenfassend erhalten wir für das Element π das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccc}
 & \pi B^{K\tilde{l}} = \left(\prod_{i=1}^s \mathfrak{q}_1^{e_{1,i}} \cdots \mathfrak{q}_r^{e_{r,i}} \right)^m = (\mathfrak{q}_1 \cdots \mathfrak{q}_r)^e & \\
 \nearrow & & \nwarrow \\
 \pi B = (\tilde{\pi}^e) & & \pi A^{\tilde{l}} = (\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_s)^m \\
 \nwarrow & & \nearrow \\
 & \pi A &
 \end{array}$$

Daraus folgt $m|e$ und weil m auch den Grad der Körpererweiterung \tilde{l}/k teilt, auch $m|ggT(n, e)$. Nach Voraussetzung gilt $(n, e) = 1$. Also muss bereits $m = 1$ gelten, woraus folgt, dass $A^{\tilde{l}}/A$ unverzweigt ist. \square

Bemerkung 2.2.8. Ist in der Situation von Satz 2.2.7 die Länge $l_B(B/\pi B)$ gleich Eins, so ist $A^{\tilde{l}}/A$ unverzweigt.

Sei $\mathfrak{p}_i \subset A^{\tilde{l}}$ ein maximales Ideal. Die Lokalisierung von $A^{\tilde{l}}$ bei \mathfrak{p}_i ist ein diskreter Bewertungsring. Ein uniformisierendes Element von $A^{\tilde{l}}_{\mathfrak{p}_i}$ bezeichnen wir mit π_i . Seien $\mathfrak{q}_{i1}, \dots, \mathfrak{q}_{it} \subseteq B^{K\tilde{l}}$ die maximalen Ideale in $B^{K\tilde{l}}$, die über \mathfrak{p}_i liegen. Dann sind die Lokalisierungen von $B^{K\tilde{l}}$ bei den Primidealen \mathfrak{q}_{ij} , $j \in \{1, \dots, t\}$ diskrete Bewertungsringe, die den diskreten Bewertungsring $A^{\tilde{l}}_{\mathfrak{p}_i}$ dominieren. Wir definieren die *Dicke von $B^{K\tilde{l}}$ über \mathfrak{p}_i* als

$$D(B^{K\tilde{l}}_{\mathfrak{p}_i}) = ggT((l_{B^{K\tilde{l}}_{\mathfrak{q}_{ij}}}(B^{K\tilde{l}}_{\mathfrak{q}_{ij}}/\pi_i B^{K\tilde{l}}_{\mathfrak{q}_{ij}}))_{j \in \{1, \dots, t\}}).$$

Sei p eine Primzahl und ν_p die p -adische Bewertung von \mathbb{Q} . Der folgende Satz beschreibt die Veränderung der p -Bewertung der Faserdicke beim Übergang zu einer Galoisschen Erweiterung vom Grad p .

Satz 2.2.9. *Sei die Galoissche Erweiterung \tilde{l}/k vom Primzahlgrad p und $B^{K\tilde{l}}$ über B unverzweigt. Ist $A^{\tilde{l}}/A$ verzweigt und $\nu_p(l_B(B/\pi B)) > 0$, dann gilt für das Primideal \mathfrak{p}_1 von $A^{\tilde{l}}$, das über (π) liegt:*

$$\nu_p(D(B^{K\tilde{l}}_{\mathfrak{p}_1})) = \nu_p(l_B(B/\pi B)) - 1.$$

Beweis. Da die Erweiterung $A^{\tilde{l}}/A$ verzweigt ist, liegt nur ein Primideal $\mathfrak{p}_1 \subseteq A^{\tilde{l}}$ über dem Primideal $(\pi) \subseteq A$. Fassen wir π als ein Element in $A^{\tilde{l}}$ auf, so gilt

$$\pi A^{\tilde{l}} = (\mathfrak{p}_1)^p,$$

weil \tilde{l}/k eine Erweiterung vom Grad p ist. Sei $l_B(B/\pi B) = ep^n$ mit $(e, p) = 1$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$. Dann gilt

$$\pi B = (\tilde{\pi}^{ep^n})$$

und

$$\pi B^{K\tilde{l}} = (\mathfrak{q}_1 \cdots \mathfrak{q}_r)^{ep^n},$$

da $B^{K\tilde{l}}/B$ nach Voraussetzung unverzweigt ist. Fassen wir das Primideal \mathfrak{p}_1 als Ideal in $B^{K\tilde{l}}$ auf, so erhalten wir damit

$$\mathfrak{p}_1 B^{K\tilde{l}} = (\mathfrak{q}_1 \cdots \mathfrak{q}_r)^{ep^{n-1}}.$$

Also ist

$$l_{B^{K\tilde{l}}_{\mathfrak{q}_i}}(B^{K\tilde{l}}_{\mathfrak{q}_i}/\mathfrak{p}_1 B^{K\tilde{l}}_{\mathfrak{q}_i}) = ep^{n-1}$$

für alle $i \in \{1, \dots, r\}$. Damit folgt die Behauptung. \square

Satz 2.2.10. Sei $\tilde{l} \subseteq \bar{k}$ eine (nicht notwendig Galoissche) endliche Erweiterung von k und $A^{\tilde{l}}/A$ unverzweigt sowie $B^{K\tilde{l}}/B$ unverzweigt. Sei \mathfrak{p}_i ein maximales Ideal von $A^{\tilde{l}}$. Dann gilt

$$D(B_{\mathfrak{p}_i}^{K\tilde{l}}) = l_B(B/\pi B).$$

Beweis. Sei $l_B(B/\pi B) = e$. Dann gilt

$$\pi B = (\tilde{\pi}^e).$$

Da $A^{\tilde{l}}/A$ und $B^{K\tilde{l}}/B$ unverzweigt sind, gilt

$$\pi A^{\tilde{l}} = \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_s$$

und

$$\tilde{\pi} B^{K\tilde{l}} = \mathfrak{q}_1 \cdots \mathfrak{q}_r.$$

Fassen wir π als ein Element in $B^{K\tilde{l}}$ auf, so gilt wegen $\pi B = (\tilde{\pi}^e)$:

$$\pi B^{K\tilde{l}} = (\mathfrak{q}_1 \cdots \mathfrak{q}_r)^e.$$

Sei $\mathfrak{p}_i \in \{\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_s\}$. Dann gilt für jedes Primideal $\mathfrak{q}_j \in \{\mathfrak{q}_1, \dots, \mathfrak{q}_r\}$, das über \mathfrak{p}_i liegt

$$l_{B_{\mathfrak{q}_j}^{K\tilde{l}}}(B_{\mathfrak{q}_j}^{K\tilde{l}}/\mathfrak{p}_i B_{\mathfrak{q}_j}^{K\tilde{l}}) = e$$

und damit

$$D(B_{\mathfrak{p}_i}^{K\tilde{l}}) = e.$$

□

Bemerkung 2.2.11. 1. In Satz 2.2.9 wurde die Situation, in der $A^{\tilde{l}}/A$ verzweigt ist und $\nu_p(l_B(B/\pi B)) = 0$ gilt, nicht betrachtet. Dies liegt daran, dass nach Satz 2.2.7 die Erweiterung $A^{\tilde{l}}/A$ bereits unverzweigt ist, falls $B^{K\tilde{l}}/B$ unverzweigt ist und $\nu_p(l_B(B/\pi B)) = 0$ gilt. Der Fall, in dem $B^{K\tilde{l}}/B$ unverzweigt ist, $A^{\tilde{l}}/A$ verzweigt und $\nu_p(l_B(B/\pi B)) = 0$ ist, kann also gar nicht auftreten.

2. Sei \tilde{l}/k eine Galoissche Erweiterung vom Primzahlgrad p und $\mathfrak{p}_i \subset A^{\tilde{l}}$ ein Primideal, das über $(\pi) \subset A$ liegt. Dann gilt für alle Primzahlen $q \neq p$:

$$\nu_q(D(B_{\mathfrak{p}_i}^{K\tilde{l}})) = \nu_q(l_B(B/\pi B)).$$

3. Sei \tilde{l}/k eine Galoissche Erweiterung vom Primzahlgrad p und $A^{\tilde{l}}/A$ verzweigt sowie $B^{K\tilde{l}}/B$ verzweigt. Dann gilt für jedes Primideal \mathfrak{p}_i in $A^{\tilde{l}}$:

$$D(B_{\mathfrak{p}_i}^{K\tilde{l}}) = l_B(B/\pi B).$$

Lemma 2.2.12. Sei $\tilde{l} \subset \bar{k}$ eine endliche Galoissche Erweiterung von k vom Grad n . Sei $\mathfrak{p}_i \subset A^{\tilde{l}}$ ein maximales Ideal. Dann gilt für alle zu n teilerfremden Primzahlen p :

$$\nu_p(D(B_{\mathfrak{p}_i}^{K\tilde{l}})) = \nu_p(l_B(B/\pi B)).$$

Beweis. Sei $e := l_B(B/\pi B)$ und e_i der Verzweigungsindex von \mathfrak{p}_i über (π) . Dann gilt

$$\pi B^{K\tilde{l}} = (\mathfrak{q}_1 \cdots \mathfrak{q}_r)^{em}$$

für ein $m \in \mathbb{N}$ mit $m \mid n$.

Seien $\mathfrak{q}_{i1}, \dots, \mathfrak{q}_{iu}$ die Primideale in $B^{K\tilde{l}}$, die über \mathfrak{p}_i liegen, so gilt

$$\mathfrak{p}_i B^{K\tilde{l}} = (\mathfrak{q}_{i1} \cdots \mathfrak{q}_{iu})^{\frac{em}{e_i}}.$$

Damit erhalten wir

$$D(B_{\mathfrak{p}_i}^{K\tilde{l}}) = \frac{em}{e_i}$$

und die Behauptung folgt, da e_i ein Teiler von n ist und $(e_i, p) = 1$ nach Voraussetzung gilt. \square

Lemma 2.2.13. Sei $\tilde{l} \subset \bar{k}$ eine endliche Erweiterung von k , so dass $A^{\tilde{l}}/A$ verzweigt und $B^{K\tilde{l}}/B$ unverzweigt ist. Sei \mathfrak{p}_i ein maximales Ideal in $A^{\tilde{l}}$ und e_i der Verzweigungsindex von \mathfrak{p}_i über (π) . Dann gilt

$$D(B_{\mathfrak{p}_i}^{K\tilde{l}}) = l_B(B/\pi B) : e_i.$$

Beweis. Sei $T_{\mathfrak{p}_i}$ der Trägheitskörper von \mathfrak{p}_i über k und $\mathfrak{p} := \mathfrak{p}_i \cap A^{T_{\mathfrak{p}_i}}$ das Primideal in $A^{T_{\mathfrak{p}_i}}$, das unter \mathfrak{p}_i liegt. Da das Primideal (π) in $A^{T_{\mathfrak{p}_i}}/A$ unverzweigt ist, gilt mit Satz 2.2.10

$$D(B_{\mathfrak{p}}^{K T_{\mathfrak{p}_i}}) = l_B(B/\pi B).$$

Seien $\mathfrak{q}_{i1}, \dots, \mathfrak{q}_{iv}$ die maximalen Ideale von $B^{K\tilde{l}}$, die über \mathfrak{p} liegen. Wir betrachten das Primideal \mathfrak{p} in den Ringerweiterungen $A^{\tilde{l}}$ und $B^{K\tilde{l}}$ von $A^{T_{\mathfrak{p}_i}}$. Es gilt, dass das Primideal \mathfrak{p}_i in der Produktzerlegung von $\mathfrak{p} A^{\tilde{l}}$ die Vielfachheit e_i hat. Außerdem erhalten wir

$$\mathfrak{p} B^{K\tilde{l}} = (\mathfrak{q}_{i1} \cdots \mathfrak{q}_{iv})^{l_B(B/\pi B)},$$

da $B^{K\tilde{l}}/B$ unverzweigt ist. Fassen wir \mathfrak{p}_i als Ideal in $B^{K\tilde{l}}$ auf, so treten also alle Primideale in der Produktzerlegung von $\mathfrak{p}_i B^{K\tilde{l}}$ mit Vielfachheit $l_B(B/\pi B) : e_i$ auf. Damit folgt

$$D(B_{\mathfrak{p}_i}^{K\tilde{l}}) = l_B(B/\pi B) : e_i.$$

\square

2.2.3 Faserdicken und die scheingeometrische Fundamentalgruppe

Bevor wir uns mit der scheingeometrischen Fundamentalgruppe befassen, geben wir an, welche Folgen die Berechnungen des letzten Abschnitts auf die Veränderung der Faserdicken von $f: \mathfrak{X} \rightarrow S$ beim Übergang zu $\mathfrak{X}^{K\bar{l}} \rightarrow S^{\bar{l}}$ haben, wobei $\bar{l} \subset \bar{k}$ eine endliche separable Körpererweiterung von k ist. Die folgenden Lemmata erhalten wir direkt mit den Berechnungen in Abschnitt 2.2.2.

Lemma 2.2.14. *Sei $\bar{l} \subset \bar{k}$ eine endliche Erweiterung von k , so dass $S^{\bar{l}}/S$ étale ist. Sei $s \in S$ ein abgeschlossener Punkt und $\tilde{s} \in S^{\bar{l}}$ ein Punkt über s . Dann gilt*

$$D(\mathfrak{X}_{\tilde{s}}^{K\bar{l}}) = D(\mathfrak{X}_s).$$

Mit anderen Worten: Beim Übergang zu einer étalen Erweiterung von S ändert sich die Faserdicke nicht.

Nach Bemerkung 2.1.5 ist die scheingeometrische Fundamentalgruppe von \mathfrak{X} genau dann nicht trivial, wenn es eine endliche Erweiterung $\bar{l} \subset \bar{k}$ von k gibt, so dass $S^{\bar{l}}/S$ verzweigt und $\mathfrak{X}^{K\bar{l}}/\mathfrak{X}$ étale ist. Inwiefern sich die Faserdicken in genau dieser Situation von $\mathfrak{X} \rightarrow S$ zu $\mathfrak{X}^{K\bar{l}} \rightarrow S^{\bar{l}}$ verändern, wird nun angegeben:

Lemma 2.2.15. *Sei $\bar{l} \subset \bar{k}$ eine endliche Galoissche Erweiterung von k vom Primzahlgrad p , so dass $S^{\bar{l}}/S$ verzweigt und $\mathfrak{X}^{K\bar{l}}/\mathfrak{X}$ étale ist. Sei $\tilde{s}_1 \in S^{\bar{l}}$ ein abgeschlossener Punkt im Verzweigungsort von $S^{\bar{l}}/S$ und $s_1 \in S$ der Punkt, der unterhalb \tilde{s}_1 liegt. Dann gilt*

$$\nu_p(D(\mathfrak{X}_{\tilde{s}_1}^{K\bar{l}})) = \nu_p(D(\mathfrak{X}_{s_1})) - 1$$

und für alle Primzahlen $q \neq p$ erhalten wir:

$$\nu_q(D(\mathfrak{X}_{\tilde{s}_1}^{K\bar{l}})) = \nu_q(D(\mathfrak{X}_{s_1})).$$

Sei $\tilde{s}_2 \in S^{\bar{l}}$ ein abgeschlossener Punkt, der nicht im Verzweigungsort von $S^{\bar{l}}/S$ liegt und $s_2 \in S$ der Punkt, der unterhalb \tilde{s}_2 liegt. Dann gilt

$$D(\mathfrak{X}_{\tilde{s}_2}^{K\bar{l}}) = D(\mathfrak{X}_{s_2}).$$

Die Faserdicke verändert sich also nur bei den Punkten im Verzweigungsort.

Lemma 2.2.16. *Sei $\bar{l} \subset \bar{k}$ eine endliche Erweiterung von k , so dass $\mathfrak{X}^{K\bar{l}}/\mathfrak{X}$ étale ist. Sei $\tilde{s} \in S^{\bar{l}}$ ein abgeschlossener Punkt und $s \in S$ der Punkt, der unter \tilde{s} liegt. Sei \mathfrak{P} das maximale Ideal von $\mathcal{O}_{S^{\bar{l}}, \tilde{s}}$ und e der Verzweigungsindex von \mathfrak{P} über k . Dann gilt*

$$D(\mathfrak{X}_{\tilde{s}}^{K\bar{l}}) = D(\mathfrak{X}_s) : e.$$

Lemma 2.2.17. *Sei l die maximale Erweiterung von k in \bar{k} , so dass S^l/S unverzweigt ist. Gehen wir von der Grundsituation $f: \mathfrak{X} \rightarrow S$ zu $\tilde{f}: \mathfrak{X}^{K^l} \rightarrow S^l$ über, so erhalten wir für einen Punkt $\tilde{s} \in S^l$ und sein Bild $s \in S$:*

$$D(\mathfrak{X}_{\tilde{s}}^{K^l}) = D(\mathfrak{X}_s).$$

Nun haben wir alle Vorbereitungen getroffen, um die Trivialität der scheingeometrischen Fundamentalgruppe in dem Fall zu beweisen, wenn alle Faserdicken in der Grundsituation gleich Eins sind.

Satz 2.2.18. *Sei S ein exzellentes eindimensionales Dedekindschema mit vollkommenen Restklassenkörpern und Funktionenkörper k und \mathfrak{X} ein zusammenhängendes reguläres S -Schema, so dass der Strukturmorphismus surjektiv und von endlichem Typ mit zusammenhängender geometrischer generischer Faser $\mathfrak{X} \times_S \bar{k}$ ist. Sei \bar{s} ein geometrischer Punkt von $\mathfrak{X} \times_S \bar{k}$. Sind alle Faserdicken von \mathfrak{X} über S gleich Eins, dann ist die Folge étaler Fundamentalgruppen*

$$\pi_1(X_{\bar{k}, \bar{s}}) \rightarrow \pi_1(\mathfrak{X}, \bar{s}) \rightarrow \pi_1(S, \bar{s}) \rightarrow 1$$

exakt.

Beweis. Nach Definition ist die Folge (*) genau dann exakt, wenn die scheingeometrische Fundamentalgruppe von \mathfrak{X} trivial ist. Dies ist nach Bemerkung 2.1.5 äquivalent dazu, dass $\mathfrak{X}^{K^{\tilde{l}}}/\mathfrak{X}$ für alle endlichen separablen Körpererweiterungen $\tilde{l} \subset \bar{k}$ von k verzweigt sobald $S^{\tilde{l}}/S$ verzweigt.

Angenommen $\pi_1^{sch.geo}(\mathfrak{X}, \bar{s})$ wäre nicht trivial. Dann gibt es eine endliche Galoische Erweiterung $\tilde{l} \subset \bar{k}$ von k , so dass $S^{\tilde{l}}/S$ verzweigt und $\mathfrak{X}^{K^{\tilde{l}}}/\mathfrak{X}$ étale ist.

Sei $\tilde{k} \subseteq \tilde{l}$ die maximale Erweiterung von k , so dass $S^{\tilde{k}}/S$ étale ist. Gehen wir von der Grundsituation $f: \mathfrak{X} \rightarrow S$ zu $\tilde{f}: \mathfrak{X}^{K^{\tilde{k}}} \rightarrow S^{\tilde{k}}$ über, so erhalten wir die folgende Situation:

- $S^{\tilde{k}}$ ist ein eindimensionales Dedekindschema.
- Das Schema $\mathfrak{X}^{K^{\tilde{k}}}$ ist ein reguläres Schema.
- Der Morphismus \tilde{f} ist surjektiv, flach und von endlichem Typ mit zusammenhängender geometrischer generischer Faser.
- Sei $s' \in S^{\tilde{k}}$ ein abgeschlossener Punkt und $s \in S$ der darunterliegende Punkt. Dann gilt mit Lemma 2.2.14, dass sich die Faserdicken nicht verändern, das heißt

$$D(\mathfrak{X}_{s'}^{K^{\tilde{k}}}) = D(\mathfrak{X}_s).$$

Sei nun $\tilde{k}_2 \subset \tilde{l}$ eine nicht-triviale (nach Voraussetzung verzweigte) Erweiterung von \tilde{k} . Sei $\tilde{t} \in S^{\tilde{k}_2}$ ein Punkt im Verzweigungsort der Erweiterung $S^{\tilde{k}_2}/S^{\tilde{k}}$ und t der unterliegende Punkt in $S^{\tilde{k}}$. Der lokale Ring von $S^{\tilde{k}_2}$ bei \tilde{t} ist ein diskreter Bewertungsring, der den lokalen Ring von $S^{\tilde{k}}$ bei t dominiert. Sei e der Verzweigungsindex des maximalen Ideals von $\mathcal{O}_{S^{\tilde{k}_2}, \tilde{t}}$ über \tilde{k} . Da \tilde{t} ein Punkt im Verzweigungsort ist, gilt $e \neq 1$. Mit Lemma 2.2.16 erhalten wir dann

$$D(\mathfrak{X}_{\tilde{t}}^{K_{\tilde{k}_2}}) = D(\mathfrak{X}_t^{K_{\tilde{k}}}) : e.$$

Insbesondere muss die Faserdicke von $\mathfrak{X}_{\tilde{t}}^{K_{\tilde{k}_2}}$ ein Vielfaches von e sein.

Dies aber steht im Widerspruch zur Annahme, dass die Faserdicken von $\mathfrak{X}^{K_{\tilde{k}}}$ über $S^{\tilde{k}}$ (= Faserdicken von \mathfrak{X} über S) gleich Eins sind. \square

Lemma 2.2.19. *Sei S ein exzellentes eindimensionales Dedekindschema mit vollkommenen Restklassenkörpern und Funktionenkörper k und \mathfrak{X} ein zusammenhängendes reguläres S -Schema, so dass der Strukturmorphismus surjektiv und von endlichem Typ mit zusammenhängender geometrischer generischer Faser $\mathfrak{X} \times_S \bar{k}$ ist. Sei \bar{s} ein geometrischer Punkt von $\mathfrak{X} \times_S \bar{k}$. Sind alle Fasern des Morphismus f reduziert, dann ist die Folge*

$$\pi_1(X_{\bar{k}, \bar{s}}) \rightarrow \pi_1(\mathfrak{X}, \bar{s}) \rightarrow \pi_1(S, \bar{s}) \rightarrow 1$$

exakt.

Beweis. Dies folgt mit Satz 2.2.18 sofort aus der Tatsache, dass alle Faserdicken nach Bemerkung 2.2.5 gleich Eins sind, falls alle Fasern reduziert sind. \square

Satz 2.2.20. *Sei S ein exzellentes eindimensionales Dedekindschema mit vollkommenen Restklassenkörpern und Funktionenkörper k und \mathfrak{X} ein zusammenhängendes reguläres S -Schema, so dass der Strukturmorphismus surjektiv und von endlichem Typ mit zusammenhängender geometrischer generischer Faser $\mathfrak{X} \times_S \bar{k}$ ist. Sei \bar{s} ein geometrischer Punkt von $\mathfrak{X} \times_S \bar{k}$. Sind alle Fasern von \mathfrak{X} über S teilerfremd zu einer Primzahl p , dann ist die Folge der maximalen pro- p -Faktorgruppen*

$$(*) \quad \pi_1(X_{\bar{k}, \bar{s}}(p)) \rightarrow \pi_1(\mathfrak{X}, \bar{s})(p) \rightarrow \pi_1(S, \bar{s})(p) \rightarrow 1$$

exakt.

Beweis. Sei $\tilde{l} \subset \bar{k}$ eine endliche Galoissche Erweiterung von k vom p -Potenzgrad, so dass $\mathfrak{X}^{K_{\tilde{l}}}/\mathfrak{X}$ étale ist. Es genügt zu zeigen, dass $S^{\tilde{l}}/S$ étale ist.

Angenommen $S^{\tilde{l}}/S$ wäre verzweigt. Gehen wir von $f: \mathfrak{X} \rightarrow S$ zu $\tilde{f}: \mathfrak{X}^{K_{\tilde{l}}} \rightarrow S^{\tilde{l}}$ über, so erhalten wir mit Lemma 2.2.15 und Lemma 2.2.13, dass die Faserdicke von $\mathfrak{X}^{K_{\tilde{l}}}$ über einem Verzweigungspunkt durch eine p -Potenz geteilt wird. Insbesondere muss die Faserdicke auf Niveau $f: \mathfrak{X} \rightarrow S$ ein Vielfaches von p sein. Dies aber widerspricht der Annahme, dass die Faserdicken teilerfremd zu p sind. \square

Satz 2.2.21. *Sei S ein exzellentes eindimensionales Dedekindschema mit vollkommenen Restklassenkörpern und Funktionenkörper k und \mathfrak{X} ein zusammenhängendes reguläres S -Schema, so dass der Strukturmorphismus surjektiv und von endlichem Typ mit zusammenhängender geometrischer generischer Faser $\mathfrak{X} \times_S \bar{k}$ ist. Sei l' die maximale Erweiterung von k in \bar{k} , so dass $\mathfrak{X}^{K\bar{l}}/\mathfrak{X}$ étale ist. Dann existiert eine endliche Erweiterung \tilde{l} von k in l' , so dass*

$$\pi_1(X_{\bar{k}}^{K\tilde{l}}, \bar{s}) \rightarrow \pi_1(\mathfrak{X}^{K\tilde{l}}, \bar{s}) \rightarrow \pi_1(S^{\tilde{l}}, \bar{s}) \rightarrow 1$$

exakt ist, wobei \bar{s} einen geometrischen Punkt von $X_{\bar{k}}^{K\tilde{l}}$ bezeichne.

Beweis. Angenommen es existiert keine Galoiserweiterung \tilde{l}/k , so dass $S^{\tilde{l}}/S$ verzweigt und $\mathfrak{X}^{K\tilde{l}}/\mathfrak{X}$ étale ist, so ist bereits die Folge

$$\pi_1(X_{\bar{k}}, \bar{s}) \rightarrow \pi_1(\mathfrak{X}, \bar{s}) \rightarrow \pi_1(S, \bar{s}) \rightarrow 1$$

exakt und wir sind fertig.

Sei ansonsten $\tilde{k} \subset \bar{k}$ eine Galoissche Erweiterung von k , so dass $S^{\tilde{k}}/S$ verzweigt und $\mathfrak{X}^{K\tilde{k}}/\mathfrak{X}$ étale ist. Gehen wir von $f: \mathfrak{X} \rightarrow S$ zu $\tilde{f}: \mathfrak{X}^{K\tilde{k}} \rightarrow S^{\tilde{k}}$ über, so erhalten wir für die Faserdicken folgende Veränderungen:

Sei $\tilde{s} \in S^{\tilde{k}}$ ein Punkt, der nicht im Verzweigungsort des Morphismus $S^{\tilde{k}} \rightarrow S$ liegt und sei $s \in S$ der unterliegende Punkt. Dann gilt mit Lemma 2.2.16

$$D(\mathfrak{X}_{\tilde{s}}^{K\tilde{k}}) = D(\mathfrak{X}_s).$$

Sei $\tilde{s} \in S^{\tilde{k}}$ ein Punkt, der im Verzweigungsort des Morphismus $S^{\tilde{k}} \rightarrow S$ liegt und sei $s \in S$ der unterliegende Punkt. Sei \mathfrak{P} das maximale Ideal des lokalen Ringes von $S^{\tilde{k}}$ bei \tilde{s} und $e := p_1^{e_1} \cdots p_n^{e_n}$ die Zerlegung des Trägheitsgrades von \mathfrak{P} über k in Primfaktoren. Dann gilt mit Lemma 2.2.16

$$\nu_{p_i}(D(\mathfrak{X}_{\tilde{s}}^{K\tilde{k}})) = \nu_{p_i}(D(\mathfrak{X}_s)) - e_i$$

für $i \in \{1, \dots, n\}$ und

$$\nu_p(D(\mathfrak{X}_{\tilde{s}}^{K\tilde{k}})) = \nu_p(D(\mathfrak{X}_s))$$

für alle Primzahlen $p \notin \{p_1, \dots, p_n\}$.

Bei allen Punkten im Verzweigungsort verringert sich also die Faserdicke. Liegt ein Punkt nicht im Verzweigungsort, so bleibt die Faserdicke beim Übergang konstant.

Nun können wir erneut fragen, ob die scheingeometrische Fundamentalgruppe von $\mathfrak{X}^{K\tilde{k}}$ trivial ist. Falls ja, dann sind wir fertig. Ansonsten führen wir obigen Schritt erneut aus und erhalten bei jedem Übergang zu einer nicht-trivialen Erweiterung

\tilde{k} wie oben Faserdicken im Verzweigungsort, die sich verringern. Alle anderen Faserdicken bleiben konstant. Da nach Lemma 2.2.6 nur endlich viele Faserdicken von Eins verschieden und die Faserdicken endlich sind, können wir nach endlich vielen Iterationsschritten annehmen, dass es keine Erweiterung \tilde{l}_1 von \tilde{l} gibt, so dass $S^{\tilde{l}_1}/S$ verzweigt und $\mathfrak{X}^{K\tilde{l}_1}/\mathfrak{X}^{\tilde{l}}$ unverzweigt ist.

Dafür gibt es zwei Möglichkeiten:

1. Die Faserdicken sind nach endlich vielen Schritten alle gleich Eins.
2. Nach Übergang zu $\mathfrak{X}^{K\tilde{k}} \rightarrow S^{\tilde{k}}$ ist die scheingeometrische Fundamentalgruppe von $\mathfrak{X}^{K\tilde{k}}$ trivial, obwohl die Faserdicken nicht alle gleich Eins sind.

Beide Möglichkeiten liefern das gewünschte Ergebnis. \square

Bemerkung 2.2.22. Der Satz 2.2.21 liefert nicht die Endlichkeit der scheingeometrischen Fundamentalgruppe von \mathfrak{X} , denn:

Der Übergang von $f: \mathfrak{X} \rightarrow S$ zu $\tilde{f}: \mathfrak{X}^{K\tilde{l}} \rightarrow S^{\tilde{l}}$ wie im Beweis von Satz 2.2.21 liefert „nur“ die Trivialität der scheingeometrischen Fundamentalgruppe von $\mathfrak{X}^{K\tilde{l}}$, macht jedoch keine Aussagen über die arithmetische Fundamentalgruppe von $\mathfrak{X}^{K\tilde{l}}$. Genau das ist der Punkt: Auch die arithmetische Fundamentalgruppe von $\mathfrak{X}^{K\tilde{l}}$ kann ein „Teil“ der scheingeometrischen Fundamentalgruppe von \mathfrak{X} sein.

Lemma 2.2.23. *Sei $s' \in S'$ ein abgeschlossener Punkt und \mathfrak{P} das maximale Ideal von $\mathcal{O}_{S',s'}$. Dann ist die Trägheitsgruppe von \mathfrak{P} über k endlich.*

Beweis. Sei s das Bild von s' in S . Liegt s' nicht im Verzweigungsort von S'/S , so ist die Trägheitsgruppe von \mathfrak{P} über k trivial. Sei nun $s' \in S'$ ein Punkt im Verzweigungsort von S'/S . Sei $\tilde{l} \subset l'$ eine endliche Erweiterung von k . Wir bezeichnen das Bild von s' in $S^{\tilde{l}}$ mit \tilde{s} . Angenommen \tilde{s} würde im Verzweigungsort von $S^{\tilde{l}}/S$ liegen. Beim Übergang von $f: \mathfrak{X} \rightarrow S$ zu $\tilde{f}: \mathfrak{X}^{K\tilde{l}} \rightarrow S^{\tilde{l}}$ verringert sich nach Satz 2.2.9 die Faserdicke von $\mathfrak{X}^{K\tilde{l}}$ über \tilde{s} . Da die Faserdicke endlich ist, muss der Prozess nach endlich vielen Schritten abbrechen. Damit folgt die Endlichkeit der Trägheitsgruppe von \mathfrak{P} über k . \square

Lemma 2.2.24. *Es gibt nur endlich viele Punkte $s'_1, \dots, s'_n \in S'$, so dass die Trägheitsgruppe des maximalen Ideals \mathfrak{P}_i von \mathcal{O}_{S',s'_i} , $i \in \{1, \dots, n\}$ über k nicht trivial ist.*

Beweis. Sei $s \in S$ ein Punkt, so dass die Faserdicke von \mathfrak{X}_s gleich Eins ist. Sei $s' \in S'$ ein Punkt, der über $s \in S$ liegt. Dann ist die Trägheitsgruppe des maximalen Ideals von $\mathcal{O}_{S',s'}$ trivial. Es können also nur die maximalen Ideale der lokalen Ringe bei den endlich vielen Punkten $s' \in S'$ über den endlich vielen Punkten $s \in S$, so dass die Faserdicke von \mathfrak{X}_s von Eins verschieden ist, eine nicht-triviale Trägheitsgruppe haben. \square

Korollar 2.2.25. $\text{Gal}(l'/l)$ ist in $\text{Gal}(l'/k)$ als Normalteiler von endlich vielen endlichen Trägheitsgruppen erzeugt.

Fordern wir in der Grundsituation zusätzlich, dass das Schema S das Spektrum eines henselschen lokalen Ringes ist, so können wir die scheingeometrische étale Fundamentalgruppe besser charakterisieren:

Definition 2.2.26. ([NSW], Def. 1.1.5 und Def. 1.1.6)

1. Eine *übernatürliche Zahl* ist ein formales Produkt

$$\prod_p p^{n_p},$$

wobei p alle Primzahlen durchläuft und für jedes p ist der Exponent n_p eine nicht-negative ganze Zahl oder das Symbol ∞ .

2. Sei G eine proendliche Gruppe. Die *Ordnung* von G ist definiert als

$$\#G := \text{kgV}(\#(G/U))_U,$$

wobei U alle offenen normalen Untergruppen von G durchläuft.

Lemma 2.2.27. Sei A ein henselscher diskreter Bewertungsring mit perfektem Restklassenkörper und perfektem Quotientenkörper k . Sei $S := \text{Spec}(A)$ und \mathfrak{X} ein zusammenhängendes reguläres S -Schema, so dass der Strukturmorphismus surjektiv und von endlichem Typ mit zusammenhängender geometrischer generischer Faser $\mathfrak{X} \times_S \bar{k}$ ist. Sei n die Faserdicke von \mathfrak{X} über dem abgeschlossenen Punkt von S . Dann ist die Ordnung der scheingeometrischen étalen Fundamentalgruppe ein Teiler von n .

Beweis. Sei $\tilde{l} \subset \bar{k}$ eine endliche separable Erweiterung von k , so dass $S^{\tilde{l}}/S$ verzweigt und $\mathfrak{X}^{K\tilde{l}}/\mathfrak{X}$ étale ist; das heißt, dass $\mathfrak{X}^{K\tilde{l}}$ eine scheingeometrische Überlagerung von \mathfrak{X} ist. Sei \mathfrak{p} das maximale Ideal des lokalen Ringes von $S^{\tilde{l}}$ im abgeschlossenen Punkt von $S^{\tilde{l}}$. Nach Lemma 2.2.16 ist die Ordnung e der Trägheitsgruppe von \mathfrak{p} über k ein Teiler von n . Sei $T_{\mathfrak{p}}$ der Trägheitskörper von \mathfrak{p} über k . Dann ist $\mathfrak{X}^{KT_{\mathfrak{p}}}$ eine arithmetische Überlagerung von \mathfrak{X} und e ein Teiler der Gruppenordnung von $\pi_1^{\text{sch.geo}}(\mathfrak{X}, \bar{s})$. \square

Sei nun S ein exzellentes eindimensionales Dedekindschema mit vollkommenen Restklassenkörpern und Funktionenkörper k und \mathfrak{X} ein zusammenhängendes reguläres S -Schema, so dass der Strukturmorphismus von endlichem Typ mit zusammenhängender geometrischer generischer Faser $\mathfrak{X} \times_S \bar{k}$ ist. Sei $U \subseteq S$ das Bild von \mathfrak{X} in S und \bar{s} ein geometrischer Punkt von $\mathfrak{X} \times_S \bar{k}$.

Wir können von der Folge

$$\pi_1(X_{\bar{k}}, \bar{s}) \xrightarrow{g} \pi_1(\mathfrak{X}, \bar{s}) \xrightarrow{h} \pi_1(S, \bar{s})$$

zur Folge der maximal abelschen Faktorgruppen

$$\pi_1^{ab}(X_{\bar{k}}, \bar{s}) \xrightarrow{\tilde{g}} \pi_1^{ab}(\mathfrak{X}, \bar{s}) \xrightarrow{\tilde{h}} \pi_1^{ab}(S, \bar{s})$$

übergehen.

Korollar 2.2.28. *Die Faktorgruppe $\ker(\tilde{h})/\text{im}(\tilde{g})$ ist endlich.*

Beweis. Sei l^{ab} die maximale abelsche Erweiterung von k , so dass $U^{l^{ab}}/U$ étale ist und l'^{ab} die maximale abelsche Erweiterung von k , so dass $\mathfrak{X}^{Kl'^{ab}}/\mathfrak{X}$ étale ist. Analog zum nicht-abelschen Fall wird die Galoisgruppe $\text{Gal}(l'^{ab}/l^{ab})$ in $\text{Gal}(l'^{ab}/k)$ von endlich vielen endlichen Trägheitsgruppen erzeugt. Da die Trägheitsgruppen abelsch sind, folgt die Endlichkeit von $\text{Gal}(l'^{ab}/l^{ab})$. \square

Bemerkung 2.2.29. Ist der Morphismus $f: \mathfrak{X} \rightarrow S$ surjektiv und S das Spektrum des Ringes der ganzen Zahlen eines Zahlkörpers, so folgt die Endlichkeit von $\ker(\tilde{h})/\text{im}(\tilde{g})$ sofort aus der Endlichkeit von $\pi_1^{ab}(\mathfrak{X}, \bar{s})$, die A. Schmidt in [Sch], Theorem 3.1 gezeigt hat.

Kapitel 3

Beispiele

Das Basisschema S im zweiten Kapitel ist ein exzellentes eindimensionales Dedekindschema mit vollkommenen Restklassenkörpern. Der Funktionenkörper von S wird mit k bezeichnet. Für ein zusammenhängendes reguläres S -Schema \mathfrak{X} , so dass der Strukturmorphismus surjektiv und von endlichem Typ mit zusammenhängender geometrischer generischer Faser ist, haben wir die scheingeometrische Fundamentalgruppe eingeführt. Es wurden Voraussetzungen angeführt und herausgearbeitet, in denen die scheingeometrische Fundamentalgruppe trivial ist, was äquivalent dazu war, dass für einen geometrischen Punkt \bar{s} der geometrischen generischen Faser $\mathfrak{X} \times_S \bar{k}$ die Folge étaler Fundamentalgruppen

$$\pi_1(\mathfrak{X} \times_S \bar{k}, \bar{s}) \rightarrow \pi_1(\mathfrak{X}, \bar{s}) \rightarrow \pi_1(S, \bar{s}) \rightarrow 1$$

exakt ist.

In diesem Kapitel sollen nun Schemata \mathfrak{X} wie in der Grundsituation mit nicht-trivialer scheingeometrischer Fundamentalgruppe konstruiert werden. Wie wir bereits in Kapitel 2 gesehen haben, ist die scheingeometrische Fundamentalgruppe eines S -Schemas \mathfrak{X} wie in der Grundsituation in Kapitel 2 trivial, falls alle Faserdicken gleich Eins sind. Um ein Schema \mathfrak{X} mit nicht-trivialer scheingeometrischer Fundamentalgruppe zu konstruieren, ist es also notwendig, dass mindestens eine Faserdicke von Eins verschieden ist.

Im zweiten Abschnitt (Beispiel 1) ist das Basisschema S das Spektrum des Ringes der ganzen Zahlen eines lokalen Körpers. Sei p die Charakteristik des Restklassenkörpers von \mathcal{O}_k . Zur Konstruktion des gewünschten S -Schemas mit nicht-trivialer scheingeometrischer Fundamentalgruppe benötigen wir im ersten Beispiel die Theorie elliptischer Kurven über einem lokalen Körper k . Das Schema \mathfrak{X} mit nicht-trivialer scheingeometrischer Fundamentalgruppe ist dann ein reguläres Modell eines bestimmten Twists einer elliptischen Kurve über k .

Die spezielle Faser von \mathfrak{X} hat nur Komponenten, deren Vielfachheiten p -Potenzen sind.

Für das zweite Beispiel in diesem Kapitel hat J.-L. Colliot-Thélène den Hinweis gegeben, dass die Komponenten der speziellen Faser eines regulären Modells von

$$\text{Proj}(\mathbb{Q}_p[x, y, z]/(x^3 + py^3 + p^2z^3)) \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{Q}_p)$$

über $\text{Spec}(\mathbb{Z}_p)$ nur Vielfachheiten haben, die durch drei teilbar sind. Ein reguläres Modell dafür wird im zweiten Abschnitt dieses Kapitels durch Aufblasungen und Normalisierung konstruiert.

In den folgenden beiden Beispielen für Schemata mit nicht-trivialer scheingeometrischer Fundamentalgruppe benötigen wir die Theorie der Modelle von Kurven. Daher werden wir im folgenden Abschnitt die Sätze und Definitionen angeben, die für uns relevant sind.

3.1 Modelle

Wir führen die Theorie der gefaserten Flächen und der Modelle nach [Liu], Kapitel 8-10 ein.

Definition 3.1.1. Sei S ein Dedekindschema.

1. Ein integrales, projektives, flaches zweidimensionales S -Schema $\mathcal{C} \rightarrow S$ heißt eine *gefaserte Fläche über S* .
2. Die gefaserte Fläche \mathcal{C} heißt *normal*, falls \mathcal{C} normal ist.
3. Eine reguläre gefaserte Fläche über einem eindimensionalen Dedekindschema heißt eine *arithmetische Fläche*.

Definition 3.1.2. Sei S ein eindimensionales Dedekindschema mit Funktionenkörper k und C eine normale, zusammenhängende projektive Kurve über k .

1. Wir nennen eine normale gefaserte Fläche $\mathcal{C} \rightarrow S$ zusammen mit einem Isomorphismus $\mathcal{C}_k := \mathcal{C} \times_S k \cong C$ ein *Modell von C über S* .
2. Das Modell \mathcal{C} heißt *regulär*, falls \mathcal{C} regulär ist.
3. Ein *Morphismus* $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ von zwei Modellen über C ist ein Morphismus von S -Schemata, der kompatibel ist mit den Isomorphismen $\mathcal{C}_k \cong C$ und $\mathcal{C}'_k \cong C$.

Desingularisierung

Definition 3.1.3. Sei X ein reduziertes Schema. Ein eigentlicher birationaler Morphismus $f: Z \rightarrow X$, wobei Z ein reguläres Schema ist, heißt eine *Desingularisierung* von X . Ist f ein Isomorphismus über jedem regulären Punkt von X , so heißt Z eine *Desingularisierung im starken Sinn*.

Satz 3.1.4. ([Liu], 8, Cor. 3.51) *Sei S ein eindimensionales Dedekindschema und $X \rightarrow S$ eine gefaserte Fläche mit glatter generischer Faser. Dann erlaubt X eine Desingularisierung im starken Sinn.*

Das bedeutet, dass folgende Folge endlich ist:

$$\cdots X_{n+1} \rightarrow X_n \rightarrow \cdots \rightarrow X_1 \rightarrow X,$$

wobei X_1 die Normalisierung von X ist und für alle $i \geq 1$ ist $X_{i+1} \rightarrow X_i$ das Kompositum der Aufblasung $X'_i \rightarrow X_i$ im singulären Ort von X_i und der Normalisierung $X_{i+1} \rightarrow X'_i$. Die Folge endet bei m , falls X_m regulär ist.

Korollar 3.1.5. *Sei S ein eindimensionales Dedekindschema und $X \rightarrow S$ eine normale gefaserte Fläche mit glatter generischer Faser und X^{reg} eine Desingularisierung von X im starken Sinn. Sei $s \in S$ und X_s^{reg} die Faser über s . Hat X_s^{reg} nur irreduzible Komponenten der Vielfachheit Eins, so auch die Faser X_s .*

Minimale reguläre Modelle

Definition 3.1.6. Sei $X \rightarrow S$ eine reguläre gefaserte Fläche.

1. Sei \mathcal{E} eine Menge von integren projektiven Kurven auf X . Eine normale gefaserte Fläche $Y \rightarrow S$ zusammen mit einem projektiven birationalen Morphismus $f: X \rightarrow Y$, so dass für jede integrale vertikale Kurve E auf X die Menge $f(E)$ genau dann ein Punkt ist, wenn $E \in \mathcal{E}$ gilt, heißt eine *Kontraktion* der Kurven $E \in \mathcal{E}$.
2. Ein Primdivisor E auf X heißt ein *exceptioneller Divisor*, falls folgendes gilt:
Es existiert eine reguläre gefaserte Fläche $Y \rightarrow S$ und ein Morphismus $f: X \rightarrow Y$ von S -Schemata, so dass $f(E)$ auf einen Punkt reduziert ist und $f: X \setminus E \rightarrow Y \setminus f(E)$ ein Isomorphismus ist. Ein exceptioneller Divisor E ist also eine integrale Kurve zusammen mit einer Kontraktion zu einem regulären Punkt $f(E)$.

Theorem 3.1.7. (Faktorisierungssatz, [Liu], 9, Theorem 2.2) *Sei S ein Dedekindschema und $f: X \rightarrow Y$ ein birationaler Morphismus von regulären gefaserten Flächen über S . Dann ist f eine endliche Folge von Aufblasungen in abgeschlossenen Punkten.*

Satz 3.1.8. ([Liu], 9, Prop. 2.5) *Sei Y eine reguläre gefaserte Fläche und $f: X \rightarrow Y$ die Aufblasung von Y in einem abgeschlossenen Punkt $y \in Y_s$. Sei E das Schema X_y . Dann gilt $E \cong \mathbb{P}_{\kappa(y)}^1$.*

Definition 3.1.9. Sei $X \rightarrow S$ eine reguläre gefaserte Fläche.

1. Die gefaserte Fläche X heißt *relativ minimal*, falls sie keinen exzeptionellen Divisor enthält.
2. Die gefaserte Fläche X heißt *minimal*, falls jede birationale Abbildung von regulären gefaserten S -Flächen $Y \dashrightarrow X$ ein birationaler Morphismus ist.

Definition 3.1.10. Sei $X \rightarrow S$ eine normale gefaserte Fläche.

1. Eine reguläre gefaserte Fläche $Y \rightarrow S$ zusammen mit einer birationalen Abbildung $Y \dashrightarrow X$ heißt *Modell von X über S* .
2. Ein Morphismus von zwei Modellen Y_1, Y_2 von X ist ein Morphismus gefasertes S -Flächen $Y_1 \rightarrow Y_2$, der kompatibel ist mit den birationalen Abbildungen $Y_1 \dashrightarrow X$ und $Y_2 \dashrightarrow X$.
3. Ein Modell Y von X heißt *das minimale reguläre Modell von X* , falls Y minimal ist als reguläre gefaserte Fläche über S . Existiert das minimale reguläre Modell, so ist es eindeutig.

Satz 3.1.11. ([Liu], 10, Prop. 1.8) *Sei S ein affines Dedekindschema mit Funktionenkörper k und C eine glatte projektive Kurve vom Geschlecht ≥ 1 über k . Dann existiert ein eindeutig bestimmtes minimales reguläres Modell von C über S .*

Korollar 3.1.12. *Sei S ein affines Dedekindschema mit Funktionenkörper k und C eine glatte projektive Kurve vom Geschlecht ≥ 1 über k . Sei \mathcal{C} ein reguläres Modell von C über S und \mathcal{C}_{min} das minimale reguläre Modell von C über S . Sei $s \in S$ ein abgeschlossener Punkt und $\mathcal{C}_{min,s}$ die Faser von \mathcal{C}_{min} über s . Haben alle irreduziblen Komponenten von $\mathcal{C}_{min,s}$ die Vielfachheit Eins, so auch die irreduziblen Komponenten der Faser von \mathcal{C} über s .*

Beweis. Dies folgt direkt aus Theorem 3.1.7 und Satz 3.1.8. □

Reduktion

Sei S ein eindimensionales Dedekindschema mit Funktionenkörper k .

Definition 3.1.13. Sei C eine normale projektive Kurve über k . Wir fixieren einen abgeschlossenen Punkt $s \in S$.

1. Wir nennen die Faser \mathcal{C}_s eines Modells \mathcal{C} von C über S eine *Reduktion von C bei s* .

2. Die Kurve C hat *gute Reduktion* bei $s \in S$, falls C ein glattes Modell über $\text{Spec}(\mathcal{O}_{S,s})$ erlaubt.
3. Die Kurve C hat *gute Reduktion über S* , falls sie gute Reduktion bei allen abgeschlossenen Punkten $s \in S$ hat.

Satz 3.1.14. ([Liu], 10, Prop. 1.21) *Sei C eine glatte projektive Kurve über k vom Geschlecht $g \geq 1$. Sei das Dedekindschema S affin. Dann hat C gute Reduktion über S genau dann, wenn das minimale reguläre Modell von C über S glatt ist.*

Korollar 3.1.15. *Sei das Dedekindschema S affin und C eine glatte projektive Kurve über k vom Geschlecht $g \geq 1$ mit guter Reduktion. Dann haben alle irreduziblen Komponenten der Fasern des minimalen regulären Modells die Vielfachheit Eins.*

3.2 Beispiel 1

Zunächst geben wir die Idee und einen Überblick der Konstruktion an:

Nach Satz 2.2.18 ist die scheingeometrische Fundamentalgruppe eines Schemas \mathfrak{X} wie in der Grundsituation $f: \mathfrak{X} \rightarrow S$ trivial, falls alle Faserdicken gleich Eins sind. Der erste Schritt ist also, ein Schema zu finden, das eine Faser enthält, deren Dicke von Eins verschieden ist.

Im zweiten Schritt benötigen wir nach Bemerkung 2.1.5 eine endliche separable Erweiterung $\tilde{l} \subset \bar{k}$ des Funktionenkörpers k von S , so dass $S^{\tilde{l}}/S$ verzweigt und $\mathfrak{X}^{K\tilde{l}}/\mathfrak{X}$ unverzweigt ist. In dieser Situation verkleinern sich nach Lemma 2.2.16 beim Übergang von $\mathfrak{X} \rightarrow S$ zu $\mathfrak{X}^{K\tilde{l}} \rightarrow S^{\tilde{l}}$ die Faserdicken an den Punkten im Verzweigungsort.

Eine entscheidende Rolle bei der Konstruktion des Beispiels spielt die folgende Beobachtung, die wir in Abschnitt 3.2.2 beweisen werden:

Sei C eine eigentliche, glatte und geometrisch zusammenhängende Kurve vom Geschlecht $g(C) \geq 1$ über einem lokalen Körper k und \mathcal{O}_k der Ring der ganzen Zahlen von k . Sei p die Charakteristik des Restklassenkörpers von \mathcal{O}_k und sei \mathcal{C} ein reguläres Modell von C über $\text{Spec}(\mathcal{O}_k)$.

Wir fixieren einen algebraischen Abschluss \bar{k} von k und setzen k^{tr} für die maximale zahm verzweigte Erweiterung von k in \bar{k} .

Hat die Kurve C keinen k^{tr} -rationalen Punkt, so hat die spezielle Faser \mathcal{C}_s von \mathcal{C} nur irreduzible Komponenten, deren Vielfachheiten durch p teilbar sind. Insbesondere ist p ein Teiler der Faserdicke.

Die Idee ist nun, eine Kurve C über k zu finden, die keinen k^{tr} -rationalen Punkt hat. Die spezielle Faser eines regulären Modells für C über $\text{Spec}(\mathcal{O}_k)$ hat dann nur irreduzible Komponenten mit Vielfachheiten, die durch p teilbar sind. Die Kurve C über k soll eine Kurve vom Geschlecht 1 sein, die selbst keine elliptische Kurve ist (da sie keinen k -rationalen Punkt hat), jedoch über einer wild verzweigten Erweiterung \tilde{l} von k isomorph zu einer elliptischen Kurve mit guter Reduktion sein.

Sei \mathcal{E} ein reguläres Modell der elliptischen Kurve E/\tilde{l} mit guter Reduktion. Nach Korollar 3.1.15 hat die irreduzible Komponente der speziellen Faser von \mathcal{E} die Vielfachheit Eins und mit Korollar 3.1.5 und Korollar 3.1.12 auch die Normalisierung des regulären Modells \mathcal{C} in der Erweiterung $K\tilde{l}$. Insbesondere verändert sich die Faserdicke der speziellen Faser des regulären Modells \mathcal{C} beim Übergang zu $\mathcal{C}^{K\tilde{l}}$. Somit haben wir ein Schema mit nicht-trivialer scheingeometrischer Fundamentalgruppe gefunden.

3.2.1 Hauptfaserbündel

Wie wir eben gesehen haben, werden wir ein Schema mit nicht-trivialer scheingeometrischer Fundamentalgruppe mit Hilfe einer Kurve konstruieren, die über dem Körper k keine elliptische Kurve ist, jedoch über einer Erweiterung von k isomorph zu einer elliptischen Kurve ist. Dazu benötigen wir die Theorie und Bezeichnungen der Hauptfaserbündel für elliptische Kurven, die wir an dieser Stelle nach [Si1], X, §2 und §3 wiederholen werden.

Definition 3.2.1. Sei k ein vollkommener Körper und E über k eine elliptische Kurve.

1. Ein *Twist* der elliptischen Kurve E/k ist eine glatte Kurve C/k , die über \bar{k} isomorph zu E ist. Wir identifizieren zwei Twists, falls sie isomorph über k sind.
2. Ein *Hauptfaserbündel* für E/k ist ein Paar (C, μ) , wobei C/k eine glatte Kurve ist und

$$\mu: C \times E \rightarrow C$$

ein Morphismus, der über k definiert ist und die folgenden Eigenschaften hat:

- $\mu(p, \mathcal{O}) = p$ für alle $p \in C$ und dem neutralen Element \mathcal{O} der elliptischen Kurve, wenn wir E als additive Gruppe auffassen.
- $\mu(\mu(p, P), Q) = \mu(p, P + Q)$ für alle $p \in C$ und $P, Q \in E$.
- Für alle $p, q \in C$ gibt es einen eindeutig bestimmten Punkt $P \in E$, der $\mu(p, P) = q$ erfüllt.

Wir schreiben im folgenden C/k für ein Hauptfaserbündel (C, μ) für E/k .

3. Zwei Hauptfaserbündel C/k und C'/k für E/k heißen *äquivalent*, falls es einen Isomorphismus $C \rightarrow C'$ gibt, der über k definiert ist und verträglich ist mit der Operation von E auf C und C' . Die Äquivalenzklasse, die E enthält, heißt die *triviale Klasse*.

Satz 3.2.2. ([Si1], X, Prop. 3.2 (a)) *Jedes Hauptfaserbündel C/k für E/k ist ein Twist für E/k .*

Satz 3.2.3. *Die Äquivalenzklassen von Hauptfaserbündeln für eine elliptische Kurve E/k über einem vollkommenen Körper k bilden eine Gruppe. Sie heißt die Weil-Châtelet-Gruppe für E/k und wird mit $WC(E/k)$ bezeichnet.*

Ob ein Hauptfaserbündel C/k für die elliptische Kurve E/k bereits über k isomorph zu E ist, kann mit folgendem Satz entschieden werden:

Satz 3.2.4. ([Si1], X, Prop. 3.3) *Ein Hauptfaserbündel C/k liegt genau dann in der trivialen Klasse, wenn $C(k) \neq \emptyset$.*

Nach dem folgenden Theorem können wir ein Hauptfaserbündel C/k für eine elliptische Kurve E/k mit einem Element aus der Gruppe $H^1(\text{Gal}(\bar{k}/k), E(\bar{k}))$ identifizieren:

Theorem 3.2.5. ([Si1], X, Theorem 3.6) *Sei E/k eine elliptische Kurve. Dann gibt es eine natürliche Bijektion*

$$WC(E/k) \rightarrow H^1(\text{Gal}(\bar{k}/k), E(\bar{k})).$$

Ist k ein lokaler Körper, so können wir die Struktur der Weil-Châtelet-Gruppe einer elliptischen Kurve E/k angeben:

Satz 3.2.6. ([Ta]) *Sei E eine elliptische Kurve über einem lokalen Körper k . Dann gilt*

$$WC(E/k) \cong \text{Hom}(E(k), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}).$$

Sei \mathcal{O}_k der Ring der ganzen Zahlen von k mit maximalem Ideal \mathfrak{m}_k . Wir setzen $\mathbb{F} := \mathcal{O}_k/\mathfrak{m}_k$. Sei \tilde{E} die Reduktion von E modulo dem uniformisierenden Element von \mathcal{O}_k . Nach [Si1], VII, Prop. 2.1 gilt für eine elliptische Kurve mit guter Reduktion: $E(k) \cong \mathcal{O}_k \oplus \tilde{E}(\mathbb{F})$ und damit:

$$WC(E/k) \cong (\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)^{[k:\mathbb{Q}_p]} \oplus (\text{endliches}).$$

3.2.2 Faserdicken regulärer Modelle

Dieser Abschnitt zeigt den Zusammenhang zwischen der Existenz rationaler Punkte der Kurve C und den Vielfachheiten der irreduziblen Komponenten der speziellen Faser eines regulären Modells \mathcal{C} von C .

In diesem Abschnitt 3.2.2 und im nächsten Abschnitt 3.2.3 betrachten wir stets folgende Situation:

Sei C eine eigentliche, glatte und geometrisch zusammenhängende Kurve vom Geschlecht $g(C) \geq 1$ über einem lokalen Körper k und \mathcal{O}_k der Ring der ganzen Zahlen von k . Sei p die Charakteristik des Restklassenkörpers von \mathcal{O}_k und sei \mathcal{C} ein reguläres Modell von C über $\text{Spec}(\mathcal{O}_k)$.

Wir fixieren wir einen algebraischen Abschluss \bar{K} des Funktionenkörpers K von C und setzen \bar{k} für den algebraischen Abschluss von k in \bar{K} . Für eine Körpererweiterung l/k bezeichnen wir die durch Basiswechsel entstandene Kurve $C \times_k l$ mit C_l . Der abgeschlossene Punkt von $\text{Spec}(\mathcal{O}_k)$ soll mit s bezeichnet werden.

Satz 3.2.7. *Sei k^{nr} die maximal unverzweigte Erweiterung von k in \bar{k} . Die spezielle Faser \mathcal{C}_s von \mathcal{C} hat genau dann eine irreduzible Komponente der Vielfachheit Eins, wenn $C_{k^{nr}}(k^{nr}) \neq \emptyset$.*

Beweis. Sei $\mathcal{C}^{Kk^{nr}}$ die Normalisierung des regulären Modells \mathcal{C} im Kompositum Kk^{nr} innerhalb \bar{K} . Der abgeschlossene Punkt von $\text{Spec}(\mathcal{O}_{k^{nr}})$ wird mit s' bezeichnet. Gilt nun $C_{k^{nr}}(k^{nr}) \neq \emptyset$, so folgt mit [Liu], 9, Cor. 1.32, dass die spezielle Faser $\mathcal{C}_{s'}^{Kk^{nr}}$ von $\mathcal{C}^{Kk^{nr}}$ eine irreduzible Komponente der Vielfachheit Eins enthält. Da $\text{Spec}(\mathcal{O}_{k^{nr}})/\text{Spec}(\mathcal{O}_k)$ unverzweigt ist, ist auch $\mathcal{C}^{Kk^{nr}}/\mathcal{C}$ unverzweigt. Damit hat mit Lemma 2.2.17 bereits die spezielle Faser \mathcal{C}_s des Modells \mathcal{C} eine irreduzible Komponente der Vielfachheit Eins.

Angenommen die spezielle Faser \mathcal{C}_s von \mathcal{C} hat eine irreduzible Komponente der Vielfachheit Eins. Dann hat mit Lemma 2.2.17 die spezielle Faser der Normalisierung $\mathcal{C}^{Kk^{nr}}$ ebenfalls eine irreduzible Komponente der Vielfachheit Eins. Sei X eine irreduzible Komponente von $\mathcal{C}_{s'}^{Kk^{nr}}$ der Vielfachheit Eins. Der generische Punkt von X ist ein regulärer Punkt in $\mathcal{C}^{Kk^{nr}}$. Bezeichnen wir den Restklassenkörper von s' mit $\kappa(s')$, so folgt, dass der glatte Ort der speziellen Faser

$$\mathcal{C}_{s'}^{Kk^{nr}} \rightarrow \kappa(s')$$

nicht leer ist. Damit ist auch der glatte Ort $\mathcal{C}_{sm}^{Kk^{nr}}$ von $\mathcal{C}^{Kk^{nr}}$ nicht leer.

Da der ganze Abschluss $\mathcal{O}_{k^{nr}}$ von \mathcal{O}_k in k^{nr} ein henselscher lokaler Ring ist, liefert das Henselsche Lemma ([BLR], Prop. 2.35) für den glatten Morphismus

$$\mathcal{C}_{sm}^{Kk^{nr}} \rightarrow \text{Spec}(\mathcal{O}_{k^{nr}})$$

die Surjektivität der Abbildung

$$\psi : \mathcal{C}_{sm}^{Kk^{nr}}(\mathcal{O}_{k^{nr}}) \rightarrow \mathcal{C}_{sm,s'}^{Kk^{nr}}(\kappa(s')).$$

Der Körper $\kappa(s')$ ist separabel abgeschlossen und damit gilt $\mathcal{C}_{sm,s'}^{Kk^{nr}}(\kappa(s')) \neq \emptyset$. Die Surjektivität von ψ impliziert die Liftung jedes $\kappa(s')$ -rationalen Punktes von $\mathcal{C}_{sm,s'}^{Kk^{nr}}$ zu einem Schnitt

$$\text{Spec}(\mathcal{O}_{k^{nr}}) \rightarrow \mathcal{C}_{sm}^{Kk^{nr}}.$$

Desweiteren setzt sich ein Schnitt $\text{Spec}(\mathcal{O}_{k^{nr}}) \rightarrow \mathcal{C}_{sm}^{Kk^{nr}}$ zu einem Schnitt

$$\text{Spec}(\mathcal{O}_{k^{nr}}) \rightarrow \mathcal{C}^{Kk^{nr}}$$

fort. Da der Morphismus $\mathcal{C}^{Kk^{nr}} \rightarrow \text{Spec}(\mathcal{O}_{k^{nr}})$ eigentlich ist, erhalten wir mit [Liu], 3, Theorem 3.25 die Bijektivität der Abbildung

$$\mathcal{C}^{Kk^{nr}}(\mathcal{O}_{k^{nr}}) \rightarrow C_{k^{nr}}(k^{nr}).$$

Damit setzt sich jeder Schnitt $\text{Spec}(\mathcal{O}_{k^{nr}}) \rightarrow \mathcal{C}^{Kk^{nr}}$ zu einem k^{nr} -rationalen Punkt von $C_{k^{nr}}$ fort und es folgt die Behauptung. \square

Satz 3.2.8. *Sei p die Charakteristik des Restklassenkörpers von \mathcal{O}_k und k^{tr} die maximal zahm verzweigte Erweiterung von k in \bar{k} . Hat die spezielle Faser \mathcal{C}_s von \mathcal{C} eine irreduzible Komponente der Vielfachheit n mit $(n, p) = 1$, so gilt $C(k^{tr}) \neq \emptyset$.*

Beweis. Sei X eine irreduzible Komponente der Faser \mathcal{C}_s der Vielfachheit n mit $(n, p) = 1$. Der lokale Ring im generischen Punkt von X ist ein diskreter Bewertungsring B mit Quotientenkörper K . Sei π_B das uniformisierende Element von B und A der lokale Ring von $\text{Spec}(\mathcal{O}_k)$ in s mit uniformisierendem Element π_A . In diesem Fall ist B ein diskreter Bewertungsring, der A dominiert. Fassen wir π_A als ein Element in B auf, so wird das von π_A in B erzeugte Ideal von π_B^n erzeugt:

$$(\pi_A B) = (\pi_B^n).$$

Sei nun l eine zahm verzweigte Erweiterung von k vom Grad m mit $n \mid m$. Dann folgt mit Abhyankars Lemma ([SGA1], X, Lemme 3.6), dass die Normalisierung von A in Kl über der Normalisierung von A in l unverzweigt ist. Damit haben die irreduziblen Komponenten der speziellen Faser der Normalisierung \mathcal{C}^{Kl} von \mathcal{C} in Kl , die über X liegen, die Vielfachheit Eins. Nun können wir Satz 3.2.7 auf

$$\mathcal{C}^{Kl} \rightarrow \text{Spec}(\mathcal{O}_l)$$

anwenden. Wir erhalten einen l^{nr} -rationalen Punkt von C_l und insbesondere einen k^{tr} -rationalen Punkt von C . Dies zeigt die Behauptung. \square

3.2.3 Konstruktion des Beispiels

Die Idee ist nun, eine Kurve C über k zu finden, die keinen k^{tr} -rationalen Punkt hat. Die spezielle Faser eines regulären Modells für C über $\text{Spec}(\mathcal{O}_k)$ hat mit Satz 3.2.8 nur irreduzible Komponenten mit Vielfachheiten, die durch p teilbar sind. Die Kurve C über k soll eine Kurve vom Geschlecht Eins ohne k -rationalen Punkt sein und ist daher keine elliptische Kurve. Über einer Erweiterung von k soll C jedoch isomorph zu einer elliptischen Kurve mit guter Reduktion sein.

In diesem Abschnitt benötigen wir Kohomologiegruppen von Galoisgruppen. In diesem Zusammenhang schreiben wir im folgenden auch kurz $H^1(l/k, \cdot)$ für die erste Kohomologiegruppe von $\text{Gal}(l/k)$.

Satz 3.2.9. *Sei E eine elliptische Kurve über k mit guter Reduktion. Dann gilt*

$$H^1(k^{nr}/k, E(k^{nr})) = 0.$$

Beweis. Sei π ein uniformisierendes Element für \mathcal{O}_k und \mathfrak{m}_k das maximale Ideal von \mathcal{O}_k . Nach Wahl eines minimalen Weierstraßmodells für E/k können die Koeffizienten der Weierstraßgleichung modulo π reduziert werden. Die so erhaltene Kurve über $\mathbb{F} := \mathcal{O}_k/\mathfrak{m}_k$ wird mit \tilde{E} bezeichnet. Sei $\hat{E}(\mathfrak{m}_k)$ die formale Gruppe, die zu E assoziiert ist. Für die elliptische Kurve E mit guter Reduktion haben wir nach [Si1], VII, Prop. 2.1 und Prop. 2.2 eine exakte Folge abelscher Gruppen

$$(*) \quad 0 \rightarrow \hat{E}(\mathfrak{m}_k) \rightarrow E(k) \rightarrow \tilde{E}(\mathbb{F}) \rightarrow 0.$$

Nun betrachten wir E als elliptische Kurve über der maximal unverzweigten Erweiterung k^{nr} von k und gehen zur langen exakten Kohomologiefolge von $(*)$ über:

$$\dots \rightarrow H^1(k^{nr}/k, \hat{E}(\mathfrak{m}_{k^{nr}})) \rightarrow H^1(k^{nr}/k, E(k^{nr})) \rightarrow H^1(k^{nr}/k, \tilde{E}(\mathbb{F})) \rightarrow \dots$$

Nach [Liu], 10, Prop. 2.26 erhalten wir für einen vollständigen diskreten Bewertungsring \mathcal{O} mit endlichem Restklassenkörper und einer elliptischen Kurve F über $Q := \text{Quot}(\mathcal{O})$ eine Bijektion

$$\hat{F}(\mathfrak{m}_Q) \simeq \mathfrak{m}_Q,$$

wobei \mathfrak{m}_Q das maximale Ideal von Q bezeichnet. Damit gilt $H^1(k^{nr}/k, \hat{E}(\mathfrak{m}_{k^{nr}})) = 0$. Da E gute Reduktion hat, ist \tilde{E} eine elliptische Kurve über einem endlichen Körper \mathbb{F} . In diesem Fall gilt nach [Si1], X, Exercise 10.6:

$$H^1(\bar{\mathbb{F}}/\mathbb{F}, \tilde{E}(\bar{\mathbb{F}})) = 0$$

und wegen $\text{Gal}(k^{nr}/k) = \text{Gal}(\bar{\mathbb{F}}/\mathbb{F})$ auch $H^1(k^{nr}/k, \tilde{E}(\bar{\mathbb{F}})) = 0$. Damit folgt der Satz. \square

Nun können wir ein Schema über $\text{Spec}(\mathcal{O}_k)$ konstruieren, dessen spezielle Faser nur irreduzible Komponenten hat, deren Vielfachheiten durch die Charakteristik des Restklassenkörpers von \mathcal{O}_k teilbar sind:

Dazu sei E eine elliptische Kurve über dem lokalen Körper k mit guter Reduktion und p die Charakteristik des Restklassenkörpers \mathbb{F} von \mathcal{O}_k . Sei $\xi \in H^1(\bar{k}/k, E(\bar{k}))$ ein von 0 verschiedenes p -Torsionselement. Nach Theorem 3.2.5 können wir das Element ξ einem Hauptfaserbündel C^ξ für die elliptische Kurve E/k zuordnen.

Wir zeigen nun, dass C^ξ keinen k^{tr} -rationalen Punkt hat, denn dann gilt mit Satz 3.2.8, dass die spezielle Faser eines regulären Modells von C^ξ über $\text{Spec}(\mathcal{O}_k)$ nur irreduzible Komponenten hat, deren Vielfachheiten durch p teilbar sind:

Sei k^{nr} die maximal unverzweigte Erweiterung von k in \bar{k} und k^{tr} die maximal zahl verzweigte Erweiterung von k in \bar{k} . Über die Inflationsabbildungen erhalten wir die folgenden Inklusionen:

$$H^1(k^{nr}/k, E(k^{nr})) \subseteq H^1(k^{tr}/k, E(k^{tr})) \subseteq H^1(\bar{k}/k, E(\bar{k})).$$

Betrachten wir außerdem die Restriktionsabbildungen

$$res: H^1(\bar{k}/k, E(\bar{k})) \rightarrow H^1(\bar{k}/k^{tr}, E(\bar{k}))$$

und

$$res: H^1(k^{tr}/k, E(k^{tr})) \rightarrow H^1(k^{tr}/k^{nr}, E(k^{tr}))$$

so erhalten wir exakte Folgen

$$(*) \quad 0 \rightarrow H^1(k^{tr}/k, E(k^{tr})) \xrightarrow{inf} H^1(\bar{k}/k, E(\bar{k})) \xrightarrow{res} H^1(\bar{k}/k^{tr}, E(\bar{k}))$$

sowie

$$(**) \quad 0 \rightarrow H^1(k^{nr}/k, E(k^{nr})) \xrightarrow{inf} H^1(k^{tr}/k, E(k^{tr})) \xrightarrow{res} H^1(k^{tr}/k^{nr}, E(k^{tr})).$$

Angenommen das von 0 verschiedene p -Torsionselement $\xi \in H^1(\bar{k}/k, E(\bar{k}))$ würde bereits in der Untergruppe $H^1(k^{tr}/k, E(k^{tr}))$ liegen.

Dann gilt $0 = p \cdot res(\xi) \in H^1(k^{tr}/k^{nr}, E(k^{tr}))$. Wegen

$$H^1(k^{tr}/k^{nr}, E(k^{tr})) = \varinjlim_U H^1((k^{tr}/k^{nr})/U, E(k^{tr})^U),$$

wobei U die offenen normalen Untergruppen von k^{tr}/k^{nr} durchläuft, liegt $res(\xi)$ bereits in einer Gruppe $H^1((k^{tr}/k^{nr})/U, E(k^{tr})^U)$ für einen offenen Normalteiler $U \trianglelefteq \text{Gal}(k^{tr}/k^{nr})$. Die Faktorgruppe $(k^{tr}/k^{nr})/U$ bezeichnen wir mit V .

Da $\text{Gal}(\bar{k}/k^{tr})$ die p -Sylowgruppe von $\text{Gal}(\bar{k}/k^{nr})$ ist, ist die Gruppenordnung von V teilerfremd zu p . Sei n die Gruppenordnung der endlichen Gruppe V . Dann gilt $n \cdot H^1(V, E(k^{tr})^U) = 0$. Da $p \cdot \text{res}(\xi) = 0$, muss entweder p die Gruppenordnung n von V teilen oder $\text{res}(\xi) = 0$ gelten. Die Gruppenordnung von V ist jedoch teilerfremd zu p und damit erhalten wir $\text{res}(\xi) = 0$.

Da die Folge (**) exakt ist, muss $\xi \neq 0$ im Bild von inf liegen. Dies aber steht im Widerspruch dazu, dass nach Satz 3.2.9 $H^1(k^{nr}/k, E(k^{nr})) = 0$ gilt. Also liegt das Element ξ nicht in der Untergruppe $H^1(k^{tr}/k, E(k^{tr}))$.

Jetzt zeigen wir, dass die Kurve $C_{k^{tr}}^\xi$ nicht isomorph zur elliptischen Kurve $E_{k^{tr}}$ ist und damit nach Satz 3.2.7 die Kurve C^ξ keinen k^{tr} -rationalen Punkt hat:

Angenommen $C_{k^{tr}}^\xi$ wäre isomorph zu $E_{k^{tr}}$. Dann liegt ξ im Kern der Abbildung

$$\text{res}: H^1(\bar{k}/k, E(\bar{k})) \rightarrow H^1(\bar{k}/k^{tr}, E(\bar{k})).$$

Aus der Exaktheit der Folge (*) folgt nun, dass ξ im Bild der Abbildung

$$\text{inf}: H^1(k^{tr}/k, E(k^{tr})) \rightarrow H^1(\bar{k}/k, E(\bar{k}))$$

liegt. Es wurde jedoch gerade gezeigt, dass ξ kein Element der Untergruppe $H^1(k^{tr}/k, E(k^{tr}))$ ist. Daraus folgt, dass $C_{k^{tr}}^\xi$ nicht isomorph zu $E_{k^{tr}}$ ist.

Nach Satz 3.2.8 hat nun die spezielle Faser jedes regulären Modells von C^ξ über $\text{Spec}(\mathcal{O}_k)$ nur irreduzible Komponenten, deren Vielfachheiten durch p teilbar sind. Sei nun l/k eine Erweiterung vom Grad p , so dass das Bild von ξ unter der Restriktionsabbildung

$$\text{res}: H^1(\bar{k}/k, E(\bar{k})) \rightarrow H^1(\bar{k}/l, E(\bar{k}))$$

trivial wird. Das bedeutet nach Definition der WC -Gruppe, dass die Kurve C_l^ξ isomorph zu E_l ist. Wie wir eben gesehen haben, sind C^ξ und E nicht über k^{tr} isomorph. Also ist insbesondere l/k eine wild verzweigte Erweiterung. Der Isomorphismus $C_l^\xi \cong E_l$ liefert, dass C_l^ξ gute Reduktion hat. Mit Korollar 3.1.15 hat die irreduzible Komponente der speziellen Faser eines regulären Modells von C_l^ξ die Vielfachheit Eins. Mit Korollar 3.1.5 und Korollar 3.1.12 folgt auch, dass die spezielle Faser der Normalisierung eines regulären Modells \mathcal{C}^ξ von C^ξ in Kl nur irreduzible Komponenten der Vielfachheit Eins hat. Beim Übergang zur p -Erweiterung l verringert sich also die p -Bewertung der Dicke der speziellen Faser um Eins. Somit hat die spezielle Faser eines regulären Modells von C_k^ξ nur Komponenten der Vielfachheit p .

Es folgt also, dass die Normalisierung eines regulären Modells \mathcal{C}^ξ von C^ξ in Kl über \mathcal{C}^ξ étale bei allen Punkten der Kodimension Eins ist. Da \mathcal{C}^ξ regulär ist, erhalten wir mit der Reinheit des Verzweigungsortes, dass $(\mathcal{C}^\xi)^{Kl}/\mathcal{C}^\xi$ étale ist.

Das gesuchte Schema ist also ein reguläres Modell \mathcal{C}^ξ von C^ξ über $\text{Spec}(\mathcal{O}_k)$ und der Effekt, der zur Nicht-Trivialität der scheingeometrischen Fundamentalgruppe von \mathcal{C}^ξ führt, kann beim Übergang von \mathcal{C}^ξ zur Normalisierung von \mathcal{C}^ξ in Kl beobachtet werden:

$\text{Spec}(\mathcal{O}_l)/\text{Spec}(\mathcal{O}_k)$ ist wild verzweigt

$(\mathcal{C}^\xi)^{Kl}/\mathcal{C}^\xi$ ist unverzweigt.

3.3 Beispiel 2

In diesem Abschnitt geben wir ein explizites Schema an, das eine nicht-triviale schein geometrische Fundamentalgruppe besitzt. Wie schon im ersten Beispiel bemerkt, hat ein Schema mit nicht-trivialer schein geometrischer Fundamentalgruppe notwendigerweise eine Faser, deren Dicke von Eins verschieden ist.

In diesem Abschnitt sei p eine von 3 verschiedene Primzahl. J.-L. Colliot-Thélène gab den Hinweis, dass die Komponenten der speziellen Faser eines regulären Modells von

$$A := \text{Proj} (\mathbb{Q}_p[x, y, z]/(x^3 + py^3 + p^2z^3)) \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{Q}_p)$$

über $\text{Spec}(\mathbb{Z}_p)$ nur Vielfachheiten haben, die durch drei teilbar sind. Das bedeutet nach Definition der Faserdicke insbesondere, dass die Faserdicke der speziellen Faser durch drei teilbar ist.

Zuerst werden wir einen Beweis dafür angeben, dass die spezielle Faser eines regulären Modells von A nur Komponenten hat, deren Vielfachheiten durch drei teilbar sind und im Anschluss daran ein reguläres Modell von A über $\text{Spec}(\mathbb{Z}_p)$ konstruieren. Sei \mathcal{C} ein reguläres Modell von A und K der Funktionenkörper von A . Der letzte Schritt dieses Abschnitts besteht darin, eine Erweiterung l von \mathbb{Q}_p anzugeben, deren Grad über \mathbb{Q}_p durch drei teilbar ist, so dass die Normalisierung von \mathbb{Z}_p in l über \mathbb{Z}_p verzweigt ist und $\mathcal{C}^{Kl}/\mathcal{C}$ étale ist. Dies impliziert die Nicht-Trivialität der schein geometrischen Fundamentalgruppe eines regulären Modells von A .

3.3.1 Die Dicke der speziellen Faser

Sei K der Funktionenkörper von A . Ist \mathcal{C} ein reguläres Modell von A über \mathbb{Z}_p , so ist der generische Punkt einer irreduziblen Komponente der speziellen Faser von \mathcal{C} ein diskreter Bewertungsring in K , der \mathbb{Z}_p dominiert.

Lemma 3.3.1. *Sei $R \subset K$ ein diskreter Bewertungsring, der \mathbb{Z}_p dominiert. Dann gilt:*

$$3 \mid \nu_R(p).$$

Beweis. Angenommen $\nu_R(p)$ wäre kongruent zu 1 modulo 3. Dann folgt

$$\nu_R(x^3) = 3\nu_R(x) \equiv 0 \pmod{3}$$

$$\nu_R(py^3) = 3\nu_R(y) + \nu_R(p) \equiv 1 \pmod{3}$$

$$\nu_R(p^2z^3) = 3\nu_R(z) + 2\nu_R(p) \equiv 2 \pmod{3}.$$

Mit der verschärften Dreiecksungleichung erhalten wir:

$$\nu_R(x^3 + py^3 + p^2z^3) = \min \{ \nu_R(x^3), \nu_R(py^3), \nu_R(p^2z^3) \}.$$

Wegen $\nu_R(0) = \infty = \nu_R(x^3 + py^3 + p^2z^3)$ folgt

$$\begin{aligned} \nu_R(x^3) &= \nu_R(py^3) = \nu_R(p^2z^3) = \infty \\ \Rightarrow x &= y = z = 0. \end{aligned}$$

Eine analoge Vorgehensweise zur Annahme $\nu_R(p) \equiv 2 \pmod{3}$ liefert ebenfalls $x = y = z = 0$ und die Behauptung folgt. \square

Damit hat also jedes reguläre Modell von A über $\text{Spec}(\mathbb{Z}_p)$ nur durch drei teilbare Faserdicken. Ein solches Modell soll nun konstruiert werden.

3.3.2 Konstruktion eines regulären Modells

Ein offensichtliches Modell von A über \mathbb{Z}_p erhalten wir, indem wir dieselbe Gleichung über \mathbb{Z}_p betrachten. Eine Überdeckung dieses Modells ist durch die folgenden affinen Umgebungen gegeben:

$$\begin{aligned} A_1 &:= \text{Spec}(\mathbb{Z}_p[x, y]/(x^3 + py^3 + p^2)) &\rightarrow \text{Spec}(\mathbb{Z}_p) \\ A_2 &:= \text{Spec}(\mathbb{Z}_p[y, z]/(1 + py^3 + p^2z^3)) &\rightarrow \text{Spec}(\mathbb{Z}_p) \\ A_3 &:= \text{Spec}(\mathbb{Z}_p[x, z]/(x^3 + p + p^2z^3)) &\rightarrow \text{Spec}(\mathbb{Z}_p) \end{aligned}$$

Zuerst betrachten wir die generischen Fasern der drei affinen Umgebungen A_1, A_2 und A_3 : Das Jacobikriterium liefert, dass die generischen Fasern von A_1, A_2 und A_3 glatt über \mathbb{Q}_p sind. Somit ist A ein Schema, dessen Punkte auf der generischen Faser regulär sind. Nun werden die speziellen Fasern der affinen Überdeckung studiert. Im Folgenden bezeichnen A_i, B_i, C_i sowohl das Schema eines Ringes wie auch den Ring selbst, wenn klar ist, was in der jeweiligen Situation gemeint ist.

- Zu $A_1 = \text{Spec}(\mathbb{Z}_p[x, y]/(x^3 + py^3 + p^2))$:

Die maximalen Ideale in $\mathbb{Z}_p[x, y]/(x^3 + py^3 + p^2)$, die p enthalten, sind von der Form $\mathfrak{M} = (p, x, f(y))$, wobei $f(y)$ ein irreduzibles Polynom modulo p ist. Gilt $y \notin \mathfrak{M}$, dann liegt auch $y^3 + p$ nicht in \mathfrak{M} . Also ist $y^3 + p$ eine Einheit in der Lokalisierung $(A_1)_{\mathfrak{M}}$ und

$$p = \frac{-x^3}{y^3 + p}.$$

Ist also $f(y) \neq y$, so wird \mathfrak{M} in $(\mathbb{Z}_p[x, y]/(x^3 + py^3 + p^2))_{\mathfrak{M}}$ von zwei Elementen erzeugt und \mathfrak{M} ist damit ein regulärer Punkt.

Im nächsten Schritt blasen wir A_1 im Punkt (p, x, y) auf. Die Aufblasung wird durch die folgenden affinen Umgebungen B_1, B_2, B_3 überdeckt:

$$\begin{aligned} B_1 &:= \operatorname{Spec}(\mathbb{Z}_p[x', y']/(x'^3 p + p^2 y'^3 + 1)) \\ B_2 &:= \operatorname{Spec}(\mathbb{Z}_p[x', y', p']/(x' + p' x'^2 y'^3 + p'^2, p' x' - p)) \\ B_3 &:= \operatorname{Spec}(\mathbb{Z}_p[x', y', p']/(x'^3 y' + p' y'^2 + p'^2, p - p' y')) \end{aligned}$$

Zum Nachweis der Regularität genügt es, nur die maximalen Ideale zu betrachten, die über dem Ideal (p, x, y) liegen.

- In $\mathbb{Z}_p[x', y']/(x'^3 p + p^2 y'^3 + 1)$ ist p eine Einheit. B_1 ist somit ein regulärer Ring.
- Die maximalen Ideale in $\mathbb{Z}_p[x', y', p']/(x' + p' x'^2 y'^3 + p'^2, p' x' - p)$, die über (p, x, y) liegen, sind von der Form $\mathfrak{N} := (x', p', f(y'))$, wobei $f(y')$ ein irreduzibles Polynom in der Variable y' und irreduzibel modulo p ist. Wegen $p' \in \mathfrak{N}$ gilt $p' x' y'^3 \in \mathfrak{N}$. Daraus folgt $1 + p' x' y'^3 \notin \mathfrak{N}$. Damit ist $1 + p' x' y'^3$ eine Einheit in der Lokalisierung $(B_2)_{\mathfrak{N}}$ und

$$x' = \frac{-p'^2}{1 + p' x' y'^3}.$$

Insbesondere kann jedes maximale Ideal \mathfrak{N} in $(B_2)_{\mathfrak{N}}$ von zwei Elementen erzeugt werden und damit ist auch B_2 regulär.

- In der affinen Umgebung B_3 liegen die maximalen Ideale $\mathfrak{a} = (y', p', f(x'))$ von $\mathbb{Z}_p[x', y', p']/(x'^3 y' + p' y'^2 + p'^2, p - p' y')$ über (x, y, p) , wobei $f(x')$ ein irreduzibles Polynom modulo p ist. Ist $f(x') \neq x'$, so ist $x'^3 + p' y' \notin \mathfrak{a}$ und somit ist $x'^3 + p' y'$ eine Einheit in der Lokalisierung $(B_3)_{\mathfrak{a}}$. In diesem Fall gilt dann:

$$y' = \frac{-p'^2}{x'^3 + p' y'}.$$

Für $f(x') \neq x'$ können die maximalen Ideale \mathfrak{a} in der Lokalisierung $(B_3)_{\mathfrak{a}}$ von zwei Elementen erzeugt werden. Diese Punkte sind damit regulär und im Punkt (y', p', x') wird ein weiteres Mal aufgeblasen.

Die Aufblasung von B_3 im Punkt (y', p', x') wird überdeckt durch die drei affinen Umgebungen C_1, C_2, C_3 :

$$\begin{aligned} C_1 &:= \operatorname{Spec}(\mathbb{Z}_p[x'', y'', p'']/(x''^3 y'' p''^2 + p'' y''^2 + 1, p - p'' y'')) \\ C_2 &:= \operatorname{Spec}(\mathbb{Z}_p[x'', y'', p'']/(x''^2 y'' + p'' x'' y''^2 + p''^2, p - p'' y'' x''^2)) \\ C_3 &:= \operatorname{Spec}(\mathbb{Z}_p[x'', y'', p'']/(x''^3 y''^2 + p'' y'' + p''^2, p - p'' y''^2)). \end{aligned}$$

- In $\mathbb{Z}_p[x'', y'', p'']/(x''^3 y'' p''^2 + p'' y''^2 + 1, p - p''^2 y'')$ ist p'' bereits eine Einheit und damit ist C_1 regulär.
- Das Schema C_2 ist nicht normal, da für das Element $\frac{p''}{x''} \in \text{Quot}(C_2)$ gilt:

$$y'' + \left(\frac{p''}{x''}\right) y''^2 + \left(\frac{p''}{x''}\right)^2 = 0$$

Nehmen wir das Element $\frac{p''}{x''}$ zu $\mathbb{Z}_p[x'', y'', p'']/(x''^2 y'' + p'' x'' y''^2 + p''^2, p - p'' y'' x''^2)$ hinzu, so erhalten wir

$$\tilde{C}_2 := \text{Spec}(\mathbb{Z}_p[x'', y'', z'']/(y'' + z'' y''^2 + z''^2, p - z'' y'' x''^3)).$$

Das Ideal (y', x', p') wird in C_2 zum Hauptideal (x'') . Über (x'') liegt

$$\mathbb{F}_p[y'', z'']/(y'' + z'' y''^2 + z''^2).$$

Das Jacobikriterium liefert, dass $\mathbb{F}_p[y'', z'']/(y'' + z'' y''^2 + z''^2)$ regulär ist.

- Das Schema C_3 ist ebenfalls nicht normal. Für das Element $\frac{p''}{y''} \in \text{Quot}(C_3)$ gilt:

$$\left(\frac{p''}{y''}\right)^2 + \left(\frac{p''}{y''}\right) + x''^3 = 0.$$

Durch Hinzunahme von $\frac{p''}{y''}$ zu C_3 erhalten wir:

$$\tilde{C}_3 := \text{Spec}(\mathbb{Z}_p[x'', y'', z'']/(x''^3 + z'' + z''^2, p'' - z'' y''^3)).$$

Über dem Ideal (x', y', p') liegt eine elliptische Kurve

$$\mathbb{F}_p[x'', z'']/(x''^3 + z'' + z''^2).$$

Damit ist \tilde{C}_3 regulär.

- Zu A_2 : In $\mathbb{Z}_p[y, z]/(1 + py^3 + p^2 z^3)$ ist p eine Einheit und somit ist die spezielle Faser leer. Insbesondere ist A_2 ein reguläres Schema.
- Zu A_3 : Die maximalen Ideale in $\mathbb{Z}_p[x, z]/(x^3 + p + p^2 z^3)$, die p enthalten, sind von der Form $\mathfrak{b} := (p, x, f(z))$, wobei $f(z)$ ein modulo p irreduzibles Polynom ist.

Wegen $1 + pz^3 \notin \mathfrak{b}$ ist $1 + pz^3$ eine Einheit in der Lokalisierung $(A_3)_{\mathfrak{b}}$. Wir erhalten, dass alle maximalen Ideale in der Lokalisierung $(A_3)_{\mathfrak{b}}$ durch zwei Elemente erzeugt werden können, da

$$p = \frac{-x^3}{1 + pz^3}$$

gilt.

Insgesamt erhalten wir, dass ein reguläres Modell \mathcal{C} von A über $\text{Spec}(\mathbb{Z}_p)$ durch die folgenden affinen Umgebungen überdeckt wird:

$$\begin{aligned} A_2 &= \text{Spec}(\mathbb{Z}_p[y, z]/(1 + py^3 + p^2z^3)) \\ A_3 &= \text{Spec}(\mathbb{Z}_p[x, z]/(x^3 + p + p^2z^3)) \\ B_1 &= \text{Spec}(\mathbb{Z}_p[x', y']/(x'^3p + p^2y'^3 + 1)) \\ B_2 &= \text{Spec}(\mathbb{Z}_p[x', y', p']/(x' + p'x'^2y'^3 + p'^2, p'x' - p)) \\ C_1 &= \text{Spec}(\mathbb{Z}_p[x'', y'', p'']/(x''^3y''p''^2 + p''y''^2 + 1, p - p''^2y'')) \\ \tilde{C}_2 &= \text{Spec}(\mathbb{Z}_p[x'', y'', z'']/(y'' + z''y''^2 + z''^2, p - z''y''x''^3)) \\ \tilde{C}_3 &= \text{Spec}(\mathbb{Z}_p[x'', y'', z'']/(x''^3 + z'' + z''^2, p'' - z''y''^3)) \end{aligned}$$

Die speziellen Fasern der einzelnen affinen Umgebungen sind wie folgt gegeben:

- Die spezielle Faser von A_2 ist leer.
- Die spezielle Faser von A_3 ist gegeben durch $\mathbb{F}_p[x, z]/(x^3)$.
- Die spezielle Faser von B_1 ist leer.
- $\mathbb{F}_p[y', \frac{1}{y'}, p']/(p'^3)$ ist die spezielle Faser von B_2 .
- Die spezielle Faser von C_1 ist leer.
- Die spezielle Faser von \tilde{C}_2 besteht aus zwei irreduziblen Komponenten:

$$\mathbb{F}_p[x'', \frac{1}{x''}, z'']/(z''^3)$$

und

$$\mathbb{F}_p[z'', \frac{1}{z''}, y'', x'']/(y'' + z''y''^2 + z''^2, x''^3).$$

- Die zwei irreduziblen Komponenten der speziellen Faser von \tilde{C}_3 sind

$$\mathbb{F}_p[y'', \frac{1}{y''}, x'']/(x''^3)$$

und

$$\mathbb{F}_p[z'', \frac{1}{z''}, x'', y'']/(x''^3 + z'' + z''^2, y''^3).$$

3.3.3 Eine nicht-triviale schein geometrische Fundamentalgruppe

Unser Ziel ist die Konstruktion eines Schemas mit nicht-trivialer schein geometrischer Fundamentalgruppe. Dazu genügt es zu zeigen, dass es eine endliche verzweigte Erweiterung l von \mathbb{Q}_p gibt, so dass die Normalisierung von \mathcal{C} im Kompositum Kl étale über \mathcal{C} ist. Dazu betrachten wir die Erweiterung $l := \mathbb{Q}_p(\sqrt[3]{p})/\mathbb{Q}_p$. Dies ist eine verzweigte Erweiterung vom Grad drei. Über l ist die Kurve

$$\text{Proj}(\mathbb{Q}_p[x, y, z]/(x^3 + py^3 + p^2z^3))$$

isomorph zu

$$A' := \text{Proj}(\mathbb{Q}_p[x', y', z']/(x'^3 + y'^3 + z'^3)),$$

wobei $x = x'$, $y' = \sqrt[3]{p}y$ und $z' = (\sqrt[3]{p})^2z$. Die Kurve A' hat mit dem Jacobi-kriterium gute Reduktion bei p . Mit Korollar 3.1.15 haben dann die irreduziblen Komponenten der speziellen Faser des minimalen regulären Modells die Vielfachheit Eins. Mit Korollar 3.1.12 haben dann auch die irreduziblen Komponenten der speziellen Faser eines beliebigen regulären Modells von C'/l die Vielfachheit Eins.

Sei \mathcal{C}^{Kl} die Normalisierung des regulären Modells \mathcal{C} in Kl . Mit Korollar 3.1.5 hat die spezielle Faser von \mathcal{C}^{Kl} ebenfalls nur irreduzible Komponenten der Vielfachheit Eins. Das bedeutet, dass die Faserdicke beim Übergang zu Normalisierung in Kl durch drei geteilt wird und die Faserdicke von \mathcal{C} über (p) gleich drei ist. Da die Erweiterung l/\mathbb{Q}_p verzweigt ist, folgt mit Satz 2.2.10 und Bemerkung 2.2.11, dass $\mathcal{C}^{Kl}/\mathcal{C}$ étale ist.

Insgesamt erhalten wir, dass die schein geometrische Fundamentalgruppe von \mathcal{C} nicht-trivial ist.

Bemerkung 3.3.2. Die arithmetische Fundamentalgruppe von \mathcal{C} ist isomorph zu $\hat{\mathbb{Z}}$, denn die étale Fundamentalgruppe von \mathbb{Z}_p ist isomorph zu $\hat{\mathbb{Z}}$.

Lemma 3.3.3. *Die schein geometrische étale Fundamentalgruppe von \mathcal{C} ist isomorph zu $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.*

Beweis. Sei \tilde{l}/\mathbb{Q}_p eine endliche Galoissche Erweiterung vom Grad n und $\mathcal{O}_{\tilde{l}}$ der Ring der ganzen Zahlen von \tilde{l} . Sei \mathfrak{p} das maximale Ideal von $\mathcal{O}_{\tilde{l}}$. Angenommen $\mathcal{O}_{\tilde{l}}/\mathbb{Z}_p$ ist verzweigt und $\mathcal{C}^{K\tilde{l}}/\mathcal{C}$ ist étale. Dann hat die Trägheitsgruppe von \mathfrak{p} über \mathbb{Q}_p die Ordnung drei, da die Faserdicke von \mathcal{C} über $(p) \subseteq \mathbb{Z}_p$ gleich drei ist. Sei $T_{\mathfrak{p}}$ die maximal unverzweigte Teilerweiterung von \tilde{l}/\mathbb{Q}_p . Dann ist $T_{\mathfrak{p}}/\mathbb{Q}_p$ eine unverzweigte Galoissche Erweiterung vom Grad $n : 3$ (als Teil der arithmetischen Fundamentalgruppe von \mathcal{C}) und $\tilde{l}/T_{\mathfrak{p}}$ ist eine verzweigte Galoissche Erweiterung vom Grad drei (die schein geometrische étale Fundamentalgruppe von \mathcal{C}). \square

3.4 Bemerkung zur wahren geometrischen Fundamentalgruppe

Der folgende Satz basiert auf Aufzeichnungen eines Vortrags von Yasutaka Ihara über *Fundamental groups of Arithmetic Surfaces* beim *Joint Number Theory Seminar* an der Universität von Kyoto im November 1993. Yasutaka Ihara formulierte die folgende Aussage in ähnlicher Weise (ohne Beweis):

In diesem Abschnitt sei k ein Zahlkörper und \mathcal{O}_k der Ring der ganzen Zahlen von k . Wir fixieren einen algebraischen Abschluss \bar{k} von k .

Satz 3.4.1. *Sei \mathfrak{X} eine gefaserte Fläche über $\text{Spec}(\mathcal{O}_k)$, so dass das arithmetische Geschlecht der generischen Faser $g := g(X_k)$ größer als Eins und die étale Fundamentalgruppe von $\text{Spec}(\mathcal{O}_k)$ trivial ist. Sei \bar{s} ein geometrischer Punkt von $\mathfrak{X} \times_{\mathcal{O}_k} \bar{k}$. Angenommen es existiert ein $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(\mathcal{O}_k)$ (mit Absolutnorm $q := \mathfrak{N}(\mathfrak{p})$), so dass Folgendes gilt:*

- $f_{\mathfrak{p}} : \mathfrak{X}_{\mathfrak{p}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathfrak{X} \times_{\mathcal{O}_k} \mathbb{F}_q \rightarrow \mathbb{F}_q$ ist glatt,
- es dehnen sich mehr als $(2\sqrt{q} + 1)(g - 1)$ \mathbb{F}_q -rationale Punkte von $\mathfrak{X}_{\mathfrak{p}}$ zu Schnitten von $\text{Spec}(\mathcal{O}_k)$ aus.

Dann ist $\pi_1^{w,geo}(\mathfrak{X}, \bar{s}) (:= \text{im}(\pi_1(\mathfrak{X} \times_{\mathcal{O}_k} \bar{k}, \bar{s}) \rightarrow \pi_1(\mathfrak{X}, \bar{s})))$ endlich.

Beweis. Sei \mathfrak{p} ein Primideal in $\text{Spec}(\mathcal{O}_k)$, das die Bedingungen aus dem Satz erfüllt. Sei \mathcal{Y} eine Überlagerung von \mathfrak{X} , so dass $\mathcal{Y} \times_{\mathcal{O}_k} \bar{k}$ zusammenhängend ist und n der Grad der Körpererweiterung der Funktionenkörper $K(\mathcal{Y})/K(\mathfrak{X})$. Jeder Schnitt $\varepsilon : \text{Spec}(\mathcal{O}_k) \rightarrow \mathfrak{X}$ liefert einen étalen Morphismus $\mathcal{Y} \times_{\mathfrak{X}} \mathcal{O}_k \rightarrow \mathcal{O}_k$. Da $\pi_1(\text{Spec}(\mathcal{O}_k)) = 1$ ist, zerfällt $\mathcal{Y} \times_{\mathfrak{X}} \mathcal{O}_k$ nach Bemerkung 1.2.7.1 total; d.h. $\mathcal{Y} \times_{\mathfrak{X}} \mathcal{O}_k$ ist isomorph zu einer direkten Summe von Kopien von \mathcal{O}_k . Über dem Primideal \mathfrak{p} liegen also n Primideale in $\mathcal{Y} \times_{\mathfrak{X}} \mathcal{O}_k$. Wir erhalten insbesondere n verschiedene Abbildungen $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n : \mathbb{F}_q \rightarrow \mathcal{Y} \times_{\mathfrak{X}} \mathcal{O}_k$. Damit liefert jeder Schnitt n \mathbb{F}_q -rationale Punkte von $\mathcal{Y}_{\mathfrak{p}} = \mathcal{Y} \times_{\mathcal{O}_k} \mathbb{F}_q$. Da es mindestens $(2\sqrt{q} + 1)(g - 1)$ Schnitte gibt, folgt

$$\#\mathcal{Y}_{\mathfrak{p}}(\mathbb{F}_q) \geq (2\sqrt{q} + 1)(g - 1)n.$$

Andererseits ist $\mathfrak{X}_{\mathfrak{p}} \rightarrow \mathbb{F}_q$ glatt und $\mathcal{Y}_{\mathfrak{p}} \rightarrow \mathfrak{X}_{\mathfrak{p}}$ étale und damit auch $\mathcal{Y}_{\mathfrak{p}} \rightarrow \mathbb{F}_q$ glatt. Mit der Abschätzung von Hasse-Weil erhalten wir

$$\#\mathcal{Y}_{\mathfrak{p}}(\mathbb{F}_q) \leq 1 + q + 2g(\mathcal{Y}_{\mathfrak{p}})\sqrt{q},$$

wobei $g(\mathcal{Y}_{\mathfrak{p}})$ das (arithmetische) Geschlecht von $\mathcal{Y}_{\mathfrak{p}}$ bezeichnet. Da \mathfrak{X} eine gefaserte Fläche ist, gilt nach [Liu] 8.3.1, Cor. 3.6.(a): $g(\mathfrak{X}_{\mathfrak{p}}) = g$. Die Hurwitz-Formel ([Liu] 7.4.2, Theorem 4.16) liefert für die Überlagerung $\mathcal{Y}_{\mathfrak{p}} \rightarrow \mathfrak{X}_{\mathfrak{p}}$ normaler projektiver Kurven folgende Gleichung:

$$g(\mathcal{Y}_{\mathfrak{p}}) = ng - n + 1.$$

Damit erhalten wir

$$n(2\sqrt{q} + 1)(g - 1) \leq \#\mathcal{Y}_{\mathfrak{p}}(\mathbb{F}_q) \leq 1 + q + 2(nq - n + 1)\sqrt{q}$$

und somit:

$$n \leq \frac{(1 + \sqrt{q})^2}{g - 1}.$$

Dies impliziert die Behauptung.

□

Literaturverzeichnis

- [BLR] BOSCH, S.; LÜTKEBOHMERT, W.; RAYNAUD, M. *Néron models* Springer-Verlag 1990
- [EGA III¹] GROTHENDIECK, A. *Éléments de géométrie algébrique (rédigés avec la collaboration de Jean Dieudonné) III, 1, Étude cohomologique des faisceaux cohérents* ; Inst. des Hautes Études Scientif., Paris 1961
- [EGA IV²] GROTHENDIECK, A. *Éléments de géométrie algébrique (rédigés avec la collaboration de Jean Dieudonné) IV, 2, Étude locale des schémas et des morphismes de schémas* ; Inst. des Hautes Études Scientif., Paris 1965
- [EGA IV⁴] GROTHENDIECK, A. *Éléments de géométrie algébrique (rédigés avec la collaboration de Jean Dieudonné) IV, 4, Étude locale des schémas et des morphismes de schémas* ; Inst. des Hautes Études Scientif., Paris 1967
- [KL] KATZ, N.; LANG, S. *Finiteness Theorems In Geometric Classfield Theory* Enseign. Math. **27** (1981), 285-319
- [Liu] LIU, Q. *Algebraic Geometry and Arithmetic Curves* Reprint of the 1999 original. London Mathematical Society Lecture Note Series, **265**, Cambridge University Press, Cambridge 2000.xvi
- [Ha] HARTSHORNE, R. *Algebraic Geometry* Springer-Verlag 2000
- [Ma] MATSUMURA, H. *Commutative ring theory* Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press 1989
- [Mi] MILNE, J. S. *Étale Cohomology* Princeton mathematical series 33, Princeton University Press, Princeton, New Jersey 1980
- [Mu] MURRE, J. P. *Lectures on an Introduction to Grothendieck's Theory of the Fundamental Group* Tata Institute of Fundamental Research, Bombay 1967
- [Neu] NEUKIRCH, J. *Algebraische Zahlentheorie* Springer-Verlag 1992

- [NSW] NEUKIRCH, J.; SCHMIDT, A.; WINGBERG, K. *Cohomology of number fields* 2nd ed. Springer-Verlag 2008
- [Sch] SCHMIDT, A. *Tame coverings of arithmetic schemes* Math. Ann. **322**, 2002, 1-18
- [SGA1] GROTHENDIECK, A. *Séminaire de Géométrie Algébrique 1* Lecture Notes in Math. 224, Springer-Verlag, Heidelberg 1971
- [Si1] SILVERMAN, J. H. *The Arithmetic of Elliptic Curves* Springer-Verlag 1986
- [Si2] SILVERMAN, J. H. *Advanced Topics in the Arithmetic of Elliptic Curves* Springer-Verlag 1994
- [Ta] TATE, J. *WC-groups over p -adic fields* Séminaire Bourbaki, Volume 1956/57 - 1957/58, Exposés 137-168, Exposé 156, 1966