

DIE VOLLSTÄNDIGKEIT DES OPERATORENSYSTEMS
{ \neg , \wedge , \vee , \supset } FÜR DIE INTUITIONISTISCHE AUSSAGENLOGIK
IM RAHMEN DER GENTZENSEMANTIK*

VON FRANZ V. KUTSCHERA

K. Lorenz hat die Vollständigkeit des Operatorensystems, bestehend aus Negation, Konjunktion, Disjunktion und Implikation, für die intuitionistische Aussagenlogik im Rahmen der spieltheoretischen Semantik bewiesen, wie sie von P. Lorenzen [5] entwickelt worden ist. Hier soll der entsprechende Beweis unter Zugrundelegung der auf G. Gentzen [2] zurückgehenden Semantik geführt werden, wie sie insbesondere von H. B. Curry [1] und P. Lorenzen [4] in verschiedenen Versionen entwickelt wurde. Dazu muß zunächst die hier verwendete Fassung dieser Semantik genauer bestimmt werden.

1 Gentzenkalküle

1.1 S-Formeln

Wir setzen eine Sprache L voraus, für die ein Formelbegriff definiert ist. Als Mitteilungszeichen für Formeln von L verwenden wir die Buchstaben „A“, „B“, „C“, . . . Der Begriff der *S-Formel* über L sei dann bestimmt durch folgende Bedingungen:

- a) Formeln von L sind S-Formeln über L .
- b) (\rightarrow) ist eine S-Formel über L .
- c) Sind S_1, \dots, S_n, T , bzw. S_1, \dots, S_n , bzw. T S-Formeln über L , so sind auch die Ausdrücke $(S_1, \dots, S_n \rightarrow T)$, bzw. $(S_1, \dots, S_n \rightarrow)$, bzw. $(\rightarrow T)$ S-Formeln über L . Dabei nennen wir S_1, \dots, S_n die *Vorderformeln* und T die *Hinterformel* der entsprechenden S-Formeln.
- d) Nur die Ausdrücke nach den Bedingungen (a) bis (c) sind S-Formeln über L . Die äußeren Klammern um S-Formeln werden gelegentlich auch weggelassen. Als Mitteilungszeichen für S-Formeln verwenden wir die Buchstaben „S“, „T“, „U“, „V“, „W“. Δ, Γ, Π seien im folgenden endliche (ev. leere) Reihen von S-Formeln, die durch Kommata getrennt sind, Ω, Ω' sind stets S-Formelreihen, die aus höchstens einem Glied bestehen.

Wir bezeichnen Formeln als S-Formeln vom S-Grad 0 und (\rightarrow) als S-Formel vom S-Grad 1. Und wenn n das Maximum der S-Grade der S-Formeln Δ, Ω ist, so sei $n + 1$ der S-Grad von $\Delta \rightarrow \Omega$. S-Formeln vom Grad 1 bezeichnen wir wie üblich auch als *Sequenzen*.

* Eingegangen am 27. 8. 1966.

Wir sagen, S sei *S-Teilformel* von S und die *S-Teilformeln* der *S-Formeln* Δ, Ω seien auch *S-Teilformeln* von $\Delta \rightarrow \Omega$. Wir sagen ferner, S sei eine *positive S-Formel*, wenn S keine *S-Teilformel* ohne *Hinterformel* enthält. Die *S-Teilformeln* von S vom Grad 0 nennen wir die *Formelkomponenten* von S .

1.2 Der Beweisbegriff für positive S-Formeln

Es sei ein formaler Kalkül K über L definiert durch Auszeichnung einer entscheidbaren Menge von Formeln von L als Axiome und durch Angabe einer entscheidbaren Menge von Grundregeln, die besagen, wie sich aus endlich vielen Formeln eine neue Formel gewinnen läßt¹.

Als *Ableitung* einer Formel B aus Formeln A_1, \dots, A_n in K bezeichnet man dann eine endliche Folge von Formeln, deren letztes Glied B ist und für deren sämtliche Glieder gilt: sie sind Axiome von K oder Annahmeformeln aus A_1, \dots, A_n oder gehen aus vorhergehenden Gliedern der Folge durch einmalige Anwendung einer der Grundregeln von K hervor. Man nennt demnach B in K aus A_1, \dots, A_n *ableitbar* (symbolisch $A_1, \dots, A_n \rightarrow B$) wenn es eine solche Ableitung gibt und man nennt B in K *beweisbar*, wenn B in K aus der leeren Formelmengemenge ableitbar ist (symbolisch $\rightarrow B$). B ist also in K ableitbar genau dann, wenn B in dem Kalkül K' beweisbar ist, der aus K entsteht durch Hinzunahme der Formeln A_1, \dots, A_n zu den Axiomen.

Man kann nun K einen Sequenzenkalkül \bar{K} zuordnen, der wie folgt bestimmt ist:

A1) Ist A Axiom von K , so ist $\rightarrow A$ Axiom von \bar{K} ,

A2) Ist $\Delta \rightarrow A$ eine Grundregel von K , so ist $\Delta \rightarrow A$ ein Axiom von \bar{K} .

Die Axiome von \bar{K} nach A1 und A2 bezeichnen wir als *spezielle* Axiome von \bar{K} , da sie von K abhängen. Daneben soll \bar{K} folgende weiteren Axiome und Regeln enthalten²:

RF) $A \rightarrow A$	(Prinzip der Reflexivität)
VV) $\Delta \rightarrow A \vdash \Delta, B \rightarrow A$	(Prinzip der Prämissenverdünnung)
TR) $\Delta \rightarrow A; \Delta, A \rightarrow B \vdash \Delta \rightarrow B$	(Prinzip der Transitivität)
ST) $\Delta, A, B, \Gamma \rightarrow C \vdash \Delta, B, A, \Gamma \rightarrow C$	(Prinzip der Prämissenvertauschung)
SK) $\Delta, A, A \rightarrow B \vdash \Delta, A \rightarrow B$	(Prinzip der Prämissenkontraktion)

Die Anwendung der *Strukturregeln* ST und SK wird im folgenden nicht explizit hervorgehoben.

Es gilt nun der

Satz 1: Die Sequenz $\Delta \rightarrow A$ ist in \bar{K} beweisbar genau dann, wenn A in K aus den Formeln Δ ableitbar ist.

¹ Wie man Axiomenschemata und Axiome unterscheidet, so sollen hier auch Regelschemata und Regeln unterschieden werden. In der Formulierung eines Regelschemas kommen also Formelschemata vor und eine Regel entsteht aus einem Regelschema durch Ersetzung aller Mitteilungszeichen für Formeln durch bestimmte Formeln der Objektsprache.

² Zur Formulierung der Regeln von \bar{K} verwenden wir das Symbol „ \vdash “ anstelle von „ \rightarrow “, um klar zwischen S-Formeln und Regeln zu unterscheiden.

Wir führen den Beweis durch Induktion nach der Länge l der Ableitung. a) Es liege eine Ableitung \mathfrak{B} von A aus Δ in K vor. Ist $l = 1$, so ist A Axiom von K und $\rightarrow A$ ist Axiom von \bar{K} nach A1, so daß man mit VV $\Delta \rightarrow A$ erhält, oder A ist eine Annahmeformel aus Δ und man erhält $\Delta \rightarrow A$ in \bar{K} aus $A \rightarrow A$ mit VV. Sei die Behauptung bewiesen für alle $l \leq n$ und sei nun $l = n + 1$. Ist dann A Axiom oder Annahmeformel, so argumentiert man wie oben. Andernfalls geht A in \mathfrak{B} durch Anwendung einer Grundregel $B_1, \dots, B_n \rightarrow A$ von K auf vorhergehende Glieder B_1, \dots, B_n hervor. Dann ist

1) $B_1, \dots, B_n \rightarrow A$ Axiom von \bar{K} nach A2 und nach Induktionsvoraussetzung sind die Sequenzen.

2) $\Delta \rightarrow B_1$ bis $\Delta \rightarrow B_n$ in \bar{K} beweisbar. Aus (1) und (2) erhält man aber durch mehrfache Anwendung der Regeln VV und TR die Sequenz $\Delta \rightarrow A$.

b) Es liege ein Beweis \mathfrak{B} von $\Delta \rightarrow A$ in \bar{K} vor. Ist seine Länge $l = 1$, so ist $\Delta \rightarrow A$ Axiom von \bar{K} . Die Axiome von \bar{K} nach A1, A2, RF stellen aber gültige Ableitungsbeziehungen in K dar. Sei die Behauptung bewiesen für alle $l \leq n$ und sei nun $l = n + 1$. Ist dann $\Delta \rightarrow A$ Axiom von \bar{K} , so argumentiert man wie oben. Andernfalls entsteht $\Delta \rightarrow A$ in \mathfrak{B} durch Anwendung einer der Regeln VV bis SK und nach Induktionsvoraussetzung ist bereits bewiesen, daß die entsprechenden Prämissen gültige Ableitungsbeziehungen in K darstellen. Ist aber A aus Δ ableitbar, so erhält man eine Ableitung von A aus Δ, B , wenn man der vorliegenden Ableitung den Satz B voranstellt. Ist B aus Δ, A ableitbar, und A aus Δ , so erhält man eine Ableitung von B aus Δ , wenn man in der ersten Ableitung die Formel A durch die zweite Ableitung ersetzt. Die Strukturregeln endlich erledigen sich in einfacher Weise, da es für die Gültigkeit einer Ableitungsbeziehung nicht auf die Reihenfolge und die Häufigkeit der Aufführung der Prämissen ankommt.

Ableitungsbeziehungen in K sind bisher nur zwischen Formeln erklärt worden, d. h. zwischen positiven S-Formeln vom Grad 0. Es soll nun eine Erweiterung des Ableitungsbegriffs vorgenommen werden, durch die für K Ableitungsbeziehungen zwischen positiven S-Formeln beliebigen Grades erklärt werden.

Betrachtet man zunächst auch positive S-Formeln vom Grad 1, so lassen sich auf Grund der bisherigen Bestimmungen diejenigen Ableitungsbeziehungen für K auszeichnen, die durch positive S-Formeln vom Grad ≤ 2 dargestellt werden, die in \bar{K} beweisbar sind, wofern man dort anstelle der Sequenzen nun positive S-Formeln vom Grad ≤ 2 betrachtet. Da die Axiome RF und die Grundregeln von \bar{K} die allgemeinen Eigenschaften eines Ableitungsbegriffes ausdrücken, besagt diese Festsetzung, daß auch die neu einzuführenden Ableitungsbeziehungen zwischen S-Formeln vom Grad ≤ 1 diese allgemeinen Eigenschaften haben sollen. Da nun eine S-Formel $\Delta \rightarrow A$ vom Grad 1 eine Ableitungsbeziehung in K zwischen Formeln dargestellt und bereits erklärt ist, wann A in K aus den Δ -Formeln ableitbar ist, wird man zusätzlich festlegen, daß $\Delta \rightarrow A$ in K beweisbar ist, wenn A in K aus Δ ableitbar ist, bzw. allgemein, daß $\Delta \rightarrow A$ in K aus Γ ableitbar ist, wenn A in K aus Γ und Δ ableitbar ist. Das ergibt für den Kalkül \bar{K} die zusätzliche Regel:

PB) $\Delta, \Gamma \rightarrow S \vdash \Delta \rightarrow (\Gamma \rightarrow S)$ (Prinzip der Prämissenbeseitigung).

Ferner wird man festlegen, daß S in K aus Formeln Δ und einer Sequenz $\Gamma \rightarrow T$ ableitbar ist, wenn S in K aus den Δ -Formeln mit Hilfe der Regel $\Gamma \rightarrow T$ ableitbar ist, d. h. wenn S in dem Kalkül K' beweisbar ist, der aus K entsteht durch Hinzunahme der Δ -Formeln zu den Axiomen und der Regel $\Gamma \rightarrow T$ zu den Grundregeln von K . Ist S nun auf Grund dieser Bestimmungen ableitbar aus Δ und der Regel $\Gamma \rightarrow T$, d. h. ableitbar vermittels einer Anwendung der Sequenz $\Gamma \rightarrow T$ als Regel und nicht schon auf Grund der vorherigen Bestimmungen, so muß gelten, daß die Γ -Formeln aus Δ ableitbar sind und aus Δ und den Γ -Formeln S ableitbar ist. Das erste ist notwendig, da sonst die Regel $\Gamma \rightarrow T$ ist in der Ableitung nicht angewendet werden kann, das zweite, weil die Anwendung dieser Regel sonst zur Ableitung von S nicht hinreicht. Diese Bestimmung ist nun für \bar{K} durch eine zusätzliche Regel auszudrücken. Schreibt man kurz $\Delta \rightarrow \Gamma$ für $\Delta \rightarrow T_1; \dots; \Delta \rightarrow T_n$, wo Γ die S-Formelreihe $T_1 \dots T_n$ ist, so kann man diese Regel so formulieren:

PE) $\Delta \rightarrow \Gamma; \Delta, T \rightarrow S \vdash \Delta, (\Gamma \rightarrow T) \rightarrow S$ (Prinzip der Prämisseneinführung)

Die Bezeichnung dieses Prinzips versteht sich daraus, daß es mit der Umkehrung PE') $\Delta \rightarrow (\Gamma \rightarrow T) \vdash \Delta, \Gamma \rightarrow T$ der Regel PB äquivalent ist.

Damit sind nun Ableitungsbeziehungen zwischen positiven S-Formeln vom Grad ≤ 1 für K erklärt. Seien nun bereits Ableitungsbeziehungen zwischen positiven S-Formeln vom Grad $\leq n$ für K erklärt und sei K_n der Kalkül, der aus \bar{K} entsteht durch Hinzunahme der Regeln PB und PE und Zulassung von S-Formeln vom Grad $\leq n + 1$ anstelle der Sequenzen, so sind die K gültigen Ableitungsbeziehungen, die durch S-Formeln vom Grad $n + 2$ dargestellt werden, zu erklären durch den Kalkül \bar{K}_{n+1} . Ist \bar{K}_∞ der Kalkül, der aus \bar{K} durch Hinzunahme der Regeln PB, PE und der Zulassung beliebiger positiver S-Formeln entsteht, so definiert \bar{K}_∞ die in K gültigen Ableitungsbeziehungen zwischen beliebigen positiven S-Formeln. Der Satz 1 gilt dann in der Formulierung:

Satz 1': Die S-Formel $\Delta \rightarrow S$ ist in \bar{K}_∞ beweisbar genau dann, wenn S in K aus den S-Formeln Δ ableitbar ist.

Um zu zeigen, daß die Bestimmung der in K gültigen Ableitungsbeziehungen durch den Kalkül \bar{K}_∞ mit der skizzierten intuitiven Erklärung dieser Ableitungsbeziehungen übereinstimmt, ist noch zu zeigen, daß in \bar{K}_n genau die positiven S-Formeln vom Grad $\leq n + 1$ beweisbar sind, die in \bar{K}_∞ beweisbar sind. Daß die in \bar{K}_n beweisbaren S-Formeln auch in \bar{K}_∞ beweisbar sind, ist trivial, da \bar{K}_n Teilkalkül von \bar{K}_∞ ist. Für die Umkehrung beweist man nach dem üblichen Verfahren die Eliminierbarkeit der Regel TR in \bar{K}_∞ für alle Schnittformeln vom S-Grad $> n$. Diese kommen in den gemeinsamen speziellen Axiomen von \bar{K}_n und \bar{K}_∞ nicht vor. Die übrigen Regeln von \bar{K}_∞ haben aber bzgl. der S-Formeln rein aufbauenden Charakter, so daß in keinem schnittfreien Beweis einer S-Formel vom S-Grad $\leq n + 1$ in \bar{K}_∞ S-Formeln vom S-Grad $n + 1$ vorkommen.

Wir waren zunächst von Kalkülen K ausgegangen, deren Axiome Formeln sind und deren Grundregeln durch Sequenzen dargestellt werden. Daraus ergab sich eine entsprechende Beschränkung der speziellen Axiome der Kalküle \bar{K}_∞ auf Sequenzen, die nach der angegebenen Erweiterung des Ableitungsbegriffes über-

flüssig erscheint. Im folgenden können also auch solche Kalküle \bar{K}_∞ betrachtet werden, die als spezielle Axiome beliebige positive S-Formeln vom Grad ≤ 1 enthalten.

Die Kalküle \bar{K}_∞ sind nun *deduktiv abgeschlossen* in folgendem Sinn: Erweitert man den Beweisbegriff von \bar{K}_∞ wie oben den von K , so wird \bar{K}_∞ dadurch nicht echt erweitert, da für jede im erweiterten Kalkül beweisbare Regel in \bar{K} selbst eine S-Formel beweisbar ist, die diese Regel ausdrückt. Das ergibt sich aus dem Satz 2; Gilt in $\bar{K}_\infty \Delta \vdash S$, so gilt auch $\vdash \Delta \rightarrow S$ in \bar{K}_∞ .

Wir führen den Beweis durch Induktion nach der Länge l der Ableitung von S aus Δ . Ist $l = 1$, so ist S Axiom und man erhält mit PB $\rightarrow S$, und VV also $\Delta \rightarrow S$, oder S ist in Δ und man erhält $\Delta \rightarrow S$ aus $S \rightarrow S$ mit VV. Es sei die Behauptung bewiesen für alle $l \leq n$ und es sei nun $l = n + 1$. Ist S Axiom oder ist S in Δ , so argumentiert man wie oben. Entsteht $S = \Gamma, U \rightarrow T$ in der Ableitung aus Δ durch eine Anwendung von VV, so ist nach Induktionsvoraussetzung $\Delta \rightarrow (\Gamma \rightarrow T)$ beweisbar und wir erhalten damit

$$\begin{array}{ll} \Delta, \Gamma \rightarrow T & \text{PE}' \\ \Delta, \Gamma, U \rightarrow T & \text{VV} \\ \Delta \rightarrow (\Gamma, U \rightarrow T) & \text{PB} \end{array}$$

Entsteht $S = \Gamma \rightarrow T$ in der Ableitung durch Anwendung von TR, so ist nach Induktionsvoraussetzung $\Delta \rightarrow (\Gamma \rightarrow U)$ und $\Delta \rightarrow (\Gamma, U \rightarrow T)$ beweisbar und wir erhalten damit

$$\begin{array}{ll} \Delta \rightarrow (\Gamma \rightarrow U) & \Delta \rightarrow (\Gamma, U \rightarrow T) \\ \hline \Delta, \Gamma \rightarrow U & \Delta, \Gamma, U \rightarrow T \\ \Delta, \Gamma \rightarrow T & \text{TR} \\ \Delta \rightarrow (\Gamma \rightarrow T) & \text{PB.} \end{array}$$

Entsteht $S = \Gamma \rightarrow (\Pi \rightarrow T)$ in der Ableitung durch Anwendung von PB, so ist nach Induktionsvoraussetzung beweisbar $\Delta \rightarrow (\Gamma, \Pi \rightarrow T)$ und wir erhalten damit

$$\begin{array}{ll} \Delta, \Gamma, \Pi \rightarrow T & \text{PE}' \\ \Delta, \Gamma \rightarrow (\Pi \rightarrow T) & \text{PB} \\ \Delta \rightarrow (\Gamma \rightarrow (\Pi \rightarrow T)) & \text{PB.} \end{array}$$

Entsteht $S = \Gamma, (\Pi \rightarrow T) \rightarrow U$ in der Ableitung durch Anwendung von PE, so ist nach Induktionsvoraussetzung beweisbar $\Delta \rightarrow (\Gamma \rightarrow \Pi)$ und $\Delta \rightarrow (\Gamma, T \rightarrow U)$ und wir erhalten damit

$$\begin{array}{ll} \Delta, \Gamma \rightarrow \Pi & \Delta, \Gamma, T \rightarrow U \\ \hline \Delta, \Gamma, (\Pi \rightarrow T) \rightarrow U & \text{PE} \\ \Delta \rightarrow (\Gamma, (\Pi \rightarrow T) \rightarrow U) & \text{PB.} \end{array}$$

Entsteht S in der Ableitung durch Anwendung von SV, bzw. ST, so erhalten wir auf die gleiche Weise mit PE, SV, bzw. ST und PB die Beweisbarkeit von $\Delta \rightarrow S$. Allgemein gilt nach Satz 2 und wegen PB auch $\Delta \vdash \Gamma \rightarrow S$, wenn $\Delta, \Gamma \vdash S$ gilt. Die Umkehrung dieser Behauptung ergibt sich aus der Beweisbarkeit von Γ ,

$(\Gamma \rightarrow S) \rightarrow S$ mit PE. Die den Regeln PB und PE für \bar{K}_∞ entsprechenden Regeln sind also in \bar{K}_∞ beweisbar.

Für \bar{K}_∞ gilt ferner das *Ersetzungstheorem*;

Satz 3: Es gilt $S \leftrightarrow T \vdash U_S \leftrightarrow U_T$.

Dabei sei U_S eine S-Formel, die an einer bestimmten Stelle ein Vorkommnis von S als S-Teilformel enthält, und U_T sei die S-Formel, die aus U_S durch Ersetzung dieses Vorkommnisses von S durch ein solches von T entsteht. $V \leftrightarrow W$ sei eine Abkürzung für $V \rightarrow W$ und $W \rightarrow V$.

Wir beweisen das Ersetzungstheorem durch Induktion nach der Zahl g , dem S-Grad von U_S minus dem S-Grad von S. Ist $g = 0$, so ist $U_S = S$ und die Behauptung ist trivial. Es sei nun die Behauptung bewiesen für alle $g \leq n$ und es sei $g = n + 1$. Dann läßt sich U_S darstellen in der Form $V_S, \Delta \rightarrow W$ oder $\Delta \rightarrow V_S$, wo V_S das fragliche Vorkommnis von S enthält und vom Grad $\leq n$ ist. Nach Induktionsvoraussetzung gilt dann $S \leftrightarrow T \vdash V_S \leftrightarrow V_T$. Wir erhalten also mit TR

$$\begin{aligned} S \leftrightarrow T; V_S, \Delta \rightarrow W &\vdash V_T, \Delta \rightarrow W \\ S \leftrightarrow T; V_T, \Delta \rightarrow W &\vdash V_S, \Delta \rightarrow W \\ S \leftrightarrow T; \Delta \rightarrow V_S &\vdash \Delta \rightarrow V_T \\ S \leftrightarrow T; \Delta \rightarrow V_T &\vdash \Delta \rightarrow V_S. \end{aligned}$$

Es gilt also $S \leftrightarrow T, U_S \vdash U_T$ und $S \leftrightarrow T, U_T \vdash U_S$ und daraus erhalten wir mit Satz 2 die Behauptung.

Es gilt nun $(\rightarrow T) \rightarrow (\rightarrow T)$, nach PE' also $(\rightarrow T) \rightarrow T$ und es gilt $T \rightarrow T$, nach PB also $T \rightarrow (\rightarrow T)$. Danach lassen sich S-Formeln der Gestalt $\rightarrow T$ in allen S-Formelkontexten durch T ersetzen, wobei die Kontexte in äquivalente S-Formeln übergehen. Eine solche wechselseitige Ersetzbarkeit besteht auch für die S-Formeln $S_1, \dots, S_n \rightarrow T$ und $S_1 \rightarrow (S_2 \rightarrow \dots (S_n \rightarrow T) \dots)$, da mit PB die letztere Formel aus der ersteren herleitbar ist und mit PE', die erstere aus der letzteren.

Es sei nun \bar{M}_∞ derjenige Kalkül, der keine speziellen Axiome enthält. Dann sind in \bar{M}_∞ genau die S-Formeln beweisbar, die in allen Kalkülen \bar{K}_∞ beweisbar sind, d. h. die allgemeingültigen S-Formeln. Denn ist S in \bar{M}_∞ beweisbar, so auch in jedem \bar{K}_∞ , da die Axiome und Regeln von \bar{M}_∞ auch solche von \bar{K}_∞ sind. Und ist S in allen \bar{K}_∞ beweisbar, so insbesondere auch in \bar{M}_∞ .

Im Hinblick auf die oben erwähnten Ersetzbarkeiten von Teilformeln der Gestalt $\rightarrow T$ und $S_1, \dots, S_n \rightarrow T$ für $n > 1$ ist nun die Menge der Theoreme von \bar{M}_∞ bestimmt durch die Menge der Theoreme, die keine S-Teilformeln dieser Gestalt enthalten. Unter diesem Aspekt erweist sich dann \bar{M}_∞ als gleichwertig mit einem Kalkül der positiven Implikationslogik. Damit ist die Struktur der Kalküle \bar{K}_∞ und also auch der Beweisbegriff für positive S-Formeln hinreichend charakterisiert.

1.3 Der Beweisbegriff für beliebige S-Formeln

Um einen Beweisbegriff für beliebige S-Formeln festzulegen, genügt es, die S-Formel \rightarrow als spezielle S-Formel einzuführen. Denn im Hinblick auf die Regeln PB und PE' sind dann die S-Formeln $\Delta \rightarrow$ zu verstehen im Sinn der äquivalenten S-Formeln $\Delta \rightarrow (\rightarrow)$. Es soll nun die S-Formel \rightarrow deduktiv so charakterisiert wer-

den, daß aus ihr jede beliebige S-Formel ableitbar ist. Man kann also das Axiom ansetzen $(\rightarrow) \rightarrow S$, oder, gleichwertig, die Regel HV: $\Delta \rightarrow \vdash \Delta \rightarrow S$ (Prinzip der hinteren Verdünnung).

Denn es gilt:

$$\frac{\Delta \rightarrow}{\Delta \rightarrow (\rightarrow); (\rightarrow) \rightarrow S} \quad \text{und} \quad \frac{(\rightarrow) \rightarrow (\rightarrow)}{(\rightarrow) \rightarrow S}$$

Nimmt man diese Regel zu den Kalkülen \bar{K}_∞ hinzu und läßt in den Axiomen und Regeln von \bar{K}_∞ nun beliebige S-Formeln zu, so erhält man Kalküle, die wir als *Gentzenkalküle* bezeichnen wollen. Sie fixieren einen Beweisbegriff für beliebige S-Formeln, den wir auf Grund der angegebenen Erläuterungen auffassen können als Erweiterung des Beweisbegriffes für Formeln in Kalkülen K . Man macht sich leicht klar, daß die Sätze 1, 2 und 3 auch für solche Gentzenkalküle gelten.

Man kann sagen, daß durch die Einführung der S-Formel \rightarrow ein formaler Widerlegungsbegriff für die Kalküle definiert ist: Eine S-Formel S soll in K widerlegbar heißen, wenn in K beweisbar ist $S \rightarrow (\rightarrow)$, d. h. wenn in K aus S die S-Formel \rightarrow ableitbar ist. Die so definierte Widerlegung einer Formel geschieht dann im Kalkül selbst, nicht mit metatheoretischen Mitteln, wie etwa bei einer Definition der Widerlegbarkeit durch die Unbeweisbarkeit im Kalkül.

2 Gentzensemantik

2.1 Grundgedanken

Die Aufgabe der aussagenlogischen Semantik besteht darin, die aussagenlogisch gültigen Schlüsse zu charakterisieren. In der mengentheoretischen Semantik geht man dazu aus von Belegungen aller Atomformeln mit genau einem der beiden Wahrheitswerte „wahr“ oder „falsch“. Es werden dann n -stellige aussagenlogische Operatoren F als Wahrheitsfunktionen definiert durch Angabe von hinreichenden und notwendigen Wahrheitsbedingungen für die Sätze $F(A_1, \dots, A_n)$, wonach der Wahrheitswert dieser Sätze nur von den Wahrheitswerten der Komponenten A_1, \dots, A_n abhängt. Danach legt man fest, daß ein Schluß von den Sätzen B_1, \dots, B_m auf den Satz C gültig heißen soll bzgl. der Belegung \mathfrak{B} , wenn \mathfrak{B} dem Satz C den Wert „wahr“ zuordnet, sofern \mathfrak{B} allen Sätzen B_1, \dots, B_m den Wert „wahr“ zuordnet. Die aussagenlogisch gültigen Schlüsse werden dann als diejenigen Schlüsse bestimmt, die gültig sind bzgl. aller Belegungen.

Von einem konstruktiven Standpunkt aus ist diese mengentheoretische Semantik unbefriedigend, da beliebige Belegungen der Atomformeln mit Wahrheitswerten betrachtet werden, und nicht nur solche, die sich mit Hilfe effektiver Verfahren erzeugen lassen. Will man sich auf solche Belegungen beschränken, so wird man sich zunächst einmal auf bestimmte effektive Verfahren festlegen, z. B. auf formale Kalküle. Ist für einen Kalkül K ein Beweisbegriff und ein formaler, d. h. in K induktiv definierter Widerlegungsbegriff festgelegt, so kann man bestimmen, daß die in K beweisbaren Sätze als wahr, die in K widerlegbaren Sätze als falsch ausgezeichnet sein sollen und kann so mit K Belegungen definieren. Von diesem Ansatz

her ist es natürlich, sich nicht nur auf solche Kalküle zu beschränken, in denen jede Atomformel beweisbar oder widerlegbar ist, sondern auch Kalküle zu betrachten, die den Wahrheitswert gewisser Sätze undeterminiert lassen und so das Prinzip der Wahrheitsdefinitheit der Sätze aufzugeben, das der mengentheoretischen Semantik zugrunde liegt.

Man wird sich nun auf einen bestimmten Kalkültyp festlegen müssen. Bezüglich der Wahl dieses Typs besteht eine gewisse Freiheit. Da sich bei verschiedenen Wahlen verschiedene Logiksysteme ergeben können, wird man daher bestrebt sein, einen möglichst allgemeinen Kalkültyp zugrunde zu legen, um keine speziellen Annahmen in die semantische Begründung der Logik hineinzutragen, die sich vom Grundgedanken einer kalkülmäßigen Definition der Belegungen nicht rechtfertigen lassen. Außerdem kann man in einem allgemeinen semantischen Rahmen auch verschiedene spezielle Logiksysteme durch Zusatzbedingungen auszeichnen und so vergleichen. Für die folgenden Überlegungen sollen Gentzenkalküle zugrundegelegt werden und die in diesem Rahmen aufzubauende Semantik soll entsprechend als *Gentzensemantik* bezeichnet werden. Diesen Kalkülen eignet eine gewisse Allgemeinheit, die sich in ihrer deduktiven Abgeschlossenheit ausdrückt. Andererseits ist der Widerlegungsbegriff in diesen Kalkülen so speziell, daß diesbezüglich noch eine weitere Verallgemeinerung anzustreben wäre. Auf diese Verallgemeinerung soll hier jedoch nicht näher eingegangen werden, da sie über den Rahmen der intuitionistischen Logik hinausführt, die uns hier beschäftigt.

Wenn man anstelle der Belegungen als Wahrheitswertzuordnungen Kalküle verwendet, so hat man auch die Möglichkeit, anstelle der Belegung gleich den Begriff des bzgl. einer Belegung gültigen Schlusses einzuführen. Ein Kalkül legt ja nicht nur fest, welche Formeln beweisbar und welche widerlegbar sind, sondern er legt allgemein gewisse deduktive Zusammenhänge, d. h. Ableitungsbeziehungen zwischen Formeln fest. Diese Ableitungsbeziehungen sollen dann semantische Schlüsse repräsentieren³.

Es sei nun L eine Sprache, für die auch $F(A_1, \dots, A_n)$ eine Formel ist, wenn A_1, \dots, A_n Formeln sind. F sei also ein n -stelliger aussagenlogischer Operator in L . K sei im folgenden ein Gentzenkalkül über L , dessen spezielle Axiome nur Atomformeln enthalten, d. h. Formeln ohne Vorkommnisse von logischen Operatoren. K legt dann die Gültigkeit gewisser Ableitungsbeziehungen zwischen Atomformeln fest, die Schlüsse für diese Formeln darstellen. Die semantische Charakterisierung eines aussagenlogischen Operators wird in diesem Rahmen nun so erfolgen, daß induktive Bedingungen für die Gültigkeit von Ableitungsbeziehungen angegeben werden, die Sätze der Gestalt $F(A_1, \dots, A_n)$ als Prämissen oder Konklusionen enthalten. Denn wenn man sofort auf die Auszeichnung der gültigen Schlüsse abzielt und nicht, wie in der mengentheoretischen Semantik, dazu den Umweg über eine Definition der Formeln als Wahrheitswertfunktionen wählt, so sind die Sätze

³ Legt man Gentzenkalküle zugrunde, so ist dabei der Schlußbegriff im Sinne des Ableitungsbegriffs zu verallgemeinern. Es wird aber unten gezeigt, daß nach Einführung der Operatoren $\neg, \wedge, \vee, \supset$ jedem Schluß in diesem verallgemeinerten Sinn ein äquivalenter Schluß im üblichen Sinn entspricht, dessen Prämissen und Konklusion Formeln sind.

$F(A_1, \dots, A_n)$ nur im Kontext von Schlüssen zu charakterisieren und nicht für sich allein.

Wenn man in der Semantik nur eine induktive Definition der gültigen Schlüsse geben wollte, so könnte man prinzipiell die Axiome und Regeln jedes beliebigen Logikkalküls als semantische Festsetzungen auffassen. An Festsetzungen, die die Bezeichnung „semantisch“ verdienen, wird man aber zwei Forderungen stellen: 1. Jeder aussagenlogische Operator F soll durch eigene semantische Regelschemata charakterisiert werden, in denen außer F kein anderer Operator vorkommt, und nach denen die Funktion der Formeln $F(A_1, \dots, A_n)$ in deduktiven Kontexten nur abhängt von den deduktiven Beziehungen zwischen den Formeln A_1, \dots, A_n . Daher wird man als Regeln zur Einführung von $F(A_1, \dots, A_n)$ als Hinterformel Regeln nach folgendem Schema wählen:

$$\begin{aligned} \Delta, \Delta_{11} \rightarrow \Omega_{11}; \dots; \Delta, \Delta_{1s_t} \rightarrow \Omega_{1s_t} \vdash \Delta \rightarrow F(A_1, \dots, A_n) \\ \Delta, \Delta_{t1} \rightarrow \Omega_{t1}; \dots; \Delta, \Delta_{ts_t} \rightarrow \Omega_{ts_t} \vdash \Delta \rightarrow F(A_1, \dots, A_n). \end{aligned}$$

Dabei seien die Formeln Δ unspezifizierte Parameter und die Formeln Δ_{ik_i} , Ω_{ik_i} ($i = 1, \dots, t$; $k_i = 1, \dots, s_i$) mögen nur Formelkomponenten aus A_1, \dots, A_n enthalten. Wegen PB und PE sind damit die folgenden Regeln äquivalent:

$$\begin{aligned} \text{I)} \quad \Delta \rightarrow \Delta_1 \vdash \Delta \rightarrow F(A_1, \dots, A_n) \\ \Delta \rightarrow \Delta_t \vdash \Delta \rightarrow F(A_1, \dots, A_n), \text{ wo } \Delta_i \text{ die S-Formelreihe} \\ (\Delta_{i1} \rightarrow \Omega_{i1}), \dots, (\Delta_{is_i} \rightarrow \Omega_{is_i}) \text{ ist.} \end{aligned}$$

2. Die Regeln zur Einführung der Formeln $F(A_1, \dots, A_n)$ müssen *nichtkreativ* sein, d. h. jeder Beweis in dem um diese Regeln erweiterten Kalkül K für eine S-Formel U , die F nicht enthält, muß sich umformen lassen in einen Beweis für U ohne Anwendung der Regeln zur Einführung von F , d. h. in einen Beweis ohne Formeln $F(A_1, \dots, A_n)$. Da nur die Regel TR Formeln der Prämissen eliminiert, besagt das, daß Anwendungen der Regel TR mit einer Schnittformel $F(A_1, \dots, A_n)$ eliminierbar sein müssen. Daher muß das Regelschema zur Einführung von Formeln $F(A_1, \dots, A_n)$ als Vorderformeln die folgende Gestalt haben:

$$\text{II)} \quad \Delta, \Delta_1 \rightarrow \Omega; \dots; \Delta, \Delta_t \rightarrow \Omega \vdash \Delta, F(A_1 \dots A_n) \rightarrow \Omega.$$

Wäre die Forderung der Nichtkreativität verletzt, so würden sich aus den Regeln, die den Operator F semantisch charakterisieren sollen, neue Gültigkeitsbedingungen für S-Formeln ergeben, die F nicht enthalten, und über deren Gültigkeit also unabhängig von der Einführung von F verfügt werden muß.

Durch die Regeln (I) sind demnach schon die Regeln (II) bestimmt. Die Festsetzung (II) besagt zudem, daß (I) umkehrbar ist. Wegen (I) und TR ist auch die Regel (II) umkehrbar, d. h. für alle i gilt $\Delta, F(A_1, \dots, A_n) \rightarrow \Omega \vdash \Delta, \Delta_i \rightarrow \Omega$. Die Bedingungen (I) und (II) sind also nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig. Wie die Formeln $F(A_1, \dots, A_n)$ in beliebige S-Formelkontexte einzuführen sind, das ist auf Grund der Regeln (I) und (II) durch die übrigen Regeln der Gentzenkalküle, insbesondere durch die Regeln PB und PE festgelegt.

Eine über die beiden angegebenen Forderungen hinausgehende Forderung der *Eliminierbarkeit* an die semantischen Regeln für den Operator F zu stellen, ist im Rahmen der Gentzensemantik nicht gerechtfertigt. Diese Forderung besagt ja, daß es zu jeder S-Formel S , die F enthält, eine S-Formel T geben muß, die F nicht enthält, und für die gilt $S \leftrightarrow T$. Diese Bedingung ist wegen des folgenden Ersetzungstheorems offenbar genau dann erfüllt, wenn sich zu $F(A_1, \dots, A_n)$ eine S-Formel U angeben läßt, die F nicht enthält, und für die gilt $F(A_1, \dots, A_n) \leftrightarrow U$, d. h. wenn $F(A_1, \dots, A_n)$ explizit definierbar ist. Es sollten aber die Formeln $F(A_1, \dots, A_n)$ in der Gentzensemantik nicht explizit definiert werden, sondern nur im Kontext von S-Formeln. Daher verzichten wir hier auf diese Forderung⁴.

Sei nun K' der Kalkül, der aus K durch Hinzunahme der Regeln (I) und (II) entsteht. Ist dann M wieder der Gentzenkalkül ohne spezielle Axiome, so sind die in allen Kalkülen K' beweisbaren Schlüsse, d. h. die logisch gültigen Schlüsse die in M' beweisbaren Schlüsse, so daß M' der Logikkalkül ist, der sich auf Grund der Gentzensemantik ergibt.

Zum Abschluß soll noch das folgende Ersetzungstheorem bewiesen werden:

Satz 4: Es gilt $A \leftrightarrow B \vdash C_A \leftrightarrow C_B$, wobei C_A eine Formel sei, die an einer bestimmten Stelle ein Vorkommnis von A enthält, und C_B aus C_A durch Ersetzung dieses Vorkommnisses von A durch ein solches von B hervorgehe.

Wir beweisen die Behauptung durch Induktion nach der Zahl g , dem Grad von C_A minus dem Grad von A . Dabei bezeichnen wir wie üblich die Anzahl der Vorkommnisse von logischen Operatoren in einer Formel als deren Grad. Ist $g = 0$, so ist die Behauptung trivial. Es sei nun die Behauptung schon für alle $g \leq n$ bewiesen und es sei $g = n + 1$. Dann hat C_A die Gestalt $F(A_1, \dots, A_n)$, und ein A_{kA} ($k = 1, \dots, n$) enthält das fragliche Vorkommnis von A und es ist für A_{kA} $g \leq n$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt dann $A \leftrightarrow B \vdash A_{kA} \leftrightarrow A_{kB}$. Nach Satz 3 folgt also $\Delta_{iA} \leftrightarrow \Delta_{iB}$ aus $A \leftrightarrow B$, wobei sich die Ersetzung von A durch B immer nur auf die Formel A_k bezieht. Aus (I) erhalten wir demnach aber $\Delta_{iB} \rightarrow C_A$ und $\Delta_{iA} \rightarrow C_B$. Aus (II) erhalten wir ferner $(\Delta_{1A} \rightarrow C_B), \dots, (\Delta_{tA} \rightarrow C_B) \vdash C_A \rightarrow C_B$ und $(\Delta_{1B} \rightarrow C_A), \dots, (\Delta_{tB} \rightarrow C_A) \vdash C_B \rightarrow C_A$, also $C_A \rightarrow C_B$ und $C_A \rightarrow C_B$.

Zusammen mit Satz 3 ergibt sich dann die verallgemeinerte Form dieses Ersetzungstheorems:

Satz 5: $A \leftrightarrow B \vdash S_A \leftrightarrow S_B$, wo S_A nun eine S-Formel ist, die A als Teilformel einer S-Formelkomponente enthält.

2.2 Die Vollständigkeit des Operatorensystems $\{\neg, \wedge, \vee, \supset\}$

Die Operatoren $\neg, \wedge, \vee, \supset$ werden durch folgende Regeln nach den Schemata (I) und (II) definiert:

$$\begin{aligned} \Delta \rightarrow (A \rightarrow) \vdash \Delta \rightarrow \neg A, & \quad \text{oder äquivalent HN: } \Delta, A \rightarrow \vdash \Delta \rightarrow \neg A \\ \Delta, (A \rightarrow) \rightarrow \Omega \vdash \Delta, \neg A \rightarrow \Omega, & \quad \text{oder äquivalent VN: } \Delta \rightarrow A \vdash \Delta, \neg A \rightarrow \end{aligned}$$

⁴ Unter 3.2 wird angedeutet, wie sich eine solche Eliminierbarkeitsforderung erfüllen ließe.

HK: $\Delta \rightarrow A; \Delta \rightarrow B \vdash \Delta \rightarrow A \wedge B$

$\Delta, A, B \rightarrow \Omega \vdash \Delta, A \wedge B \rightarrow \Omega$, oder äquivalent **VK:** $\Delta, A \rightarrow \Omega \vdash \Delta, A \wedge B \rightarrow \Omega$

HD: $\Delta \rightarrow A \vdash \Delta \rightarrow A \vee B$

$\Delta \rightarrow B \vdash \Delta \rightarrow A \vee B$

$\Delta, B \rightarrow \Omega \vdash \Delta, A \wedge B \rightarrow \Omega$

VD: $\Delta, A \rightarrow \Omega; \Delta, B \rightarrow \Omega \vdash \Delta, A \vee B \rightarrow \Omega$.

$\Delta \rightarrow (A \rightarrow B) \vdash \Delta \rightarrow A \supset B$, oder äquivalent **HI:** $\Delta, A \rightarrow B \vdash \Delta \rightarrow A \supset B$

$\Delta, (A \rightarrow B) \rightarrow \Omega \vdash \Delta, A \supset B \rightarrow \Omega$, oder äquivalent **VI:** $\Delta \rightarrow A; \Delta, B \rightarrow \Omega \vdash$

$\vdash \Delta, A \supset B \rightarrow \Omega$.

Es wird nun jeder S-Formel S eine Formel \bar{S} zugeordnet durch die Festsetzung: Ist S eine Formel, so ist \bar{S} mit S identisch. Ist Δ die S-Formelreihe T_1, \dots, T_n , so ist $\bar{\Delta}$ die Formelreihe $\bar{T}_1, \dots, \bar{T}_n$ und $\bar{\Delta}$ ist die Formel $\bar{T}_1 \wedge \dots \wedge \bar{T}_n$. Ist S die S-Formel $\Delta \rightarrow U$, so ist \bar{S} die Formel $\bar{\Delta} \supset \bar{U}$, ist S die S-Formel $\Delta \rightarrow$, so ist \bar{S} die Formel $\neg \bar{\Delta}$, ist S die S-Formel $\rightarrow U$, so ist \bar{S} die Formel \bar{U} , ist S die S-Formel \rightarrow , so ist \bar{S} die Formel $\neg (A \supset A)$ für ein festes A .

Es gilt dann der

Satz 6: $\vdash S \leftrightarrow \bar{S}$.

Man führt den Beweis durch Induktion nach dem S-Grad g von S . Ist $g = 0$, so ist die Behauptung trivial. Ist $g = 1$ und hat S die Gestalt \rightarrow , so findet man:

$$\begin{array}{ll} (\rightarrow) \rightarrow (\rightarrow) & \text{und } A \rightarrow A \\ (\rightarrow) \rightarrow & \rightarrow A \supset A \\ (\rightarrow), A \supset A \rightarrow & \neg (A \supset A) \rightarrow \\ (\rightarrow) \rightarrow \neg (A \supset A) & \neg (A \supset A) \rightarrow (\rightarrow). \end{array}$$

Es sei die Behauptung bewiesen für alle $g \leq n$ und es sei nun $g = n + 1$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt dann

$(T_1, \dots, T_n \rightarrow U) \leftrightarrow (\bar{T}_1, \dots, \bar{T}_n \rightarrow \bar{U})$, bzw. $(T_1, \dots, T_n \rightarrow) \leftrightarrow (\bar{T}_1, \dots, \bar{T}_n \rightarrow)$ bzw. $(\rightarrow U) \leftrightarrow \bar{U}$. Nach HK und VK gilt aber $\bar{T}_1, \dots, \bar{T}_n \leftrightarrow \bar{T}_1 \wedge \dots \wedge \bar{T}_n$, nach HI und VI gilt $(\bar{T} \rightarrow \bar{U}) \leftrightarrow \bar{T} \supset \bar{U}$ und nach HN und VN gilt $(\bar{T} \rightarrow) \leftrightarrow \neg \bar{T}$. Damit erhält man aber sofort die Behauptung auch für den Fall $g = n + 1$.

Es sei nun der Operator F durch die Regeln nach (I) und (II) definiert. Aus (I) erhalten wir $\Delta_1 \rightarrow F(A_1, \dots, A_n); \dots; \Delta_t \rightarrow F(A_1, \dots, A_n)$, mit Satz 6 und VK also $\bar{\Delta}_1 \rightarrow F(A_1, \dots, A_n); \dots; \bar{\Delta}_t \rightarrow F(A_1, \dots, A_n)$, und mit VD also $\bar{\Delta}_1 \vee \dots \vee \bar{\Delta}_t \rightarrow F(A_1, \dots, A_n)$. Nach Satz 6 und HK gilt auch $\Delta_i \rightarrow \bar{\Delta}_i$, wegen HD also $\bar{\Delta}_1 \rightarrow \bar{\Delta}_1 \vee \dots \vee \bar{\Delta}_t; \dots; \Delta_t \rightarrow \bar{\Delta}_1 \vee \dots \vee \bar{\Delta}_t$ nach (II) also auch $F(A_1, \dots, A_n) \rightarrow \bar{\Delta}_1 \vee \dots \vee \bar{\Delta}_t$. Im Hinblick auf das Ersetzungstheorem kann man also $F(A_1, \dots, A_n)$ in allen S-Formelkontexten so durch die Formel $\bar{\Delta}_1 \vee \dots \vee \bar{\Delta}_t$ ersetzen, daß man dabei zu äquivalenten S-Formeln übergeht. Das heißt $F(A_1, \dots, A_n)$ kann durch die Formel $\bar{\Delta}_1 \vee \dots \vee \bar{\Delta}_t$ definiert werden, die sich aus den Formeln A_1, \dots, A_n nur mit Hilfe der Operatoren $\neg, \wedge, \vee, \supset$ zusammensetzt. Damit ist die Vollständigkeit des Operatorensystems im Rahmen der Gentzensemantik bewiesen.

Es bleibt nur noch zu zeigen, daß die Gentzensemantik eine adäquate Semantik für die intuitionistische Logik ist, damit die Vollständigkeit des Operatorensystems auch für die intuitionistische Logik behauptet werden kann.

2.3 Die Gentzensemantik als Semantik der intuitionistischen Logik

Es sei K^+ der Kalkül, der aus einem Gentzenkalkül K , dessen spezielle Axiome nur Atomformeln enthalten, durch Hinzunahme der semantischen Regeln HN bis VI entsteht. In M^+ sind dann genau diejenigen S-Formeln beweisbar, die durch die Gentzensemantik als allgemeingültig ausgezeichnet werden. Es soll nun der folgende Satz bewiesen werden:

Satz 7: In M^+ sind genau die Sequenzen beweisbar, die in dem intuitionistischen Sequenzenkalkül LJ von Gentzen in [2] bewiesen werden können.

Ist $M^{+'}$ der Kalkül, der aus M^+ entsteht durch Streichung der Regeln PB und PE und Einschränkung der Axiome und der Prämissen und Konklusionen aller Regeln auf Sequenzen, so ist in $M^{+'}$ eine Sequenz genau dann beweisbar, wenn sie in M^+ beweisbar ist. Denn einerseits ist $M^{+'}$ Teilkalkül von M^+ , so daß jeder Beweis in $M^{+'}$ auch ein Beweis in M^+ ist. Andererseits ist aber die Regel TR in M^+ eliminierbar und jeder schnittfreie Beweis einer Sequenz in M^+ ist auch ein Beweis in $M^{+'}$. Der Kalkül $M^{+'}$ ist nun aber mit dem aussagenlogischen Teil des Kalküls LJ äquivalent, wie der Vergleich der beiden Kalküle sofort zeigt.

Ist aber $M^{+'}$ ein Kalkül der intuitionistischen Aussagenlogik, so kann man auch M^+ als Kalkül der intuitionistischen Aussagenlogik ansprechen, denn M^+ ist nichts anderes als die deduktive Erweiterung von $M^{+'}$ durch Hinzunahme der Regeln PB und PE. Ferner läßt sich jeder S-Formel vom S-Grad > 1 nach den Sätzen 5 und 6 eine äquivalente Sequenz zuordnen, so daß die Menge der in M^+ beweisbaren Sequenzen schon die Menge der in M^+ beweisbaren S-Formeln festlegt.

3 Abschließende Bemerkungen

3.1 Ein Vergleich des oben skizzierten semantischen Begründungsansatzes mit dem operativen Ansatz von P. Lorenzen in [4] zeigt, daß gegenüber dem operativen Ansatz hier im wesentlichen nur anstelle der in einem Kalkül K zulässigen Regeln die in K beweisbaren Regeln betrachtet werden. Dadurch sollen die Nachteile vermieden werden, die sich mit dem Zulässigkeitsbegriff verbinden und die auch K. Lorenz in [3] hervorgehoben hat: Der Zulässigkeitsbegriff ist zunächst ein nichtkonstruktiver Begriff. Man kann der Behauptung, die Regel $A_1, \dots, A_n \rightarrow B$ sei zulässig in einem Kalkül K zwar einen konstruktiven Gehalt geben, wenn man fordert, daß eine solche Zulässigkeitsbehauptung bewiesen werden muß durch Angabe eines konstruktiven Verfahrens zur Umformung eines Beweises, der eine Anwendung der Regel $A_1, \dots, A_n \rightarrow B$ enthält, in einem Beweis ohne Anwendung dieser Regel, aber diese Möglichkeit entfällt bei höheren Zulässigkeitsbehauptungen. Eine Regel wie z. B. $(A \rightarrow \Omega) \rightarrow (\Gamma \rightarrow \Omega')$ gilt dann als zulässig in K , wenn sie zulässig ist in dem Metakalkül MK zu K , in dem genau die in K zulässigen Regeln

beweisbar sind. Da es sich hier aber um eine Zulässigkeitsbehauptung für den nichtformalisierten Metakalkül MK handelt, kann man dieser Behauptung nicht den oben angegebenen konstruktiven Sinn unterlegen.

Ein Vorteil bei der Betrachtung zulässiger, anstelle beweisbarer Regeln liegt andererseits aber z. B. darin, daß die Regeln (II) für die Einführung des Operators F in 2.1 nicht als eigene Regeln angesetzt werden müssen, sondern über das Inversionsprinzip als zulässig beweisbar sind.

3.2 Man kann sich fragen, ob man beim Aufbau der Semantik nicht mit einfacheren Mitteln auskommt, ob man insbesondere nicht nach dem Vorbild von H. B. Curry in [1] anstelle der Gentzenkanüle Sequenzenkalküle zugrundelegen und sich so auf die Betrachtung von Ableitungsbeziehungen zwischen Formeln beschränken kann. Diese Gedanke liegt um so näher, als man ja durch die Regeln HI und VI die Formel $A \supset B$ in gleicher Weise einführt wie die S-Formel $A \rightarrow B$. Daraus ergibt sich eine Äquivalenz $A \supset B \leftrightarrow (A \rightarrow B)$, die man aber nicht benötigt, da an die Einführung der Operatoren die Forderung der Eliminierbarkeit nicht gestellt werden sollte. Nach den unter 2.1 angegebenen Gedanken erhielte man dann anstelle der Regeln (I) und (II) folgende Regeln:

$$I') \Delta, \Delta_{11} \rightarrow \Omega_{11}; \dots; \Delta, \Delta_{1s_1} \rightarrow \Omega_{1s_1} \vdash \Delta \rightarrow F(A_1, \dots, A_n) \\ \Delta, \Delta_{t1} \rightarrow \Omega_{t1}; \dots; \Delta, \Delta_{ts_t} \rightarrow \Omega_{ts_t} \vdash \Delta \rightarrow F(A_1 \dots A_n)$$

$$II') \Delta \rightarrow \Delta_{1k_{11}}; \dots; \Delta \rightarrow \Delta_{tk_{t1}}; \Delta, \Omega_{1k_{11}} \rightarrow \Omega; \dots; \Delta, \Omega_{tk_{t1}} \rightarrow \Omega \vdash \\ \vdash \Delta, F(A_1, \dots, A_n) \rightarrow \Omega \\ \Delta \rightarrow \Delta_{1k_{1r}}; \dots; \Delta \rightarrow \Delta_{tk_{tr}}; \Delta, \Omega_{1k_{1r}} \rightarrow \Omega; \dots; \Delta, \Omega_{tk_{tr}} \rightarrow \Omega \vdash \\ \vdash \Delta, F(A_1, \dots, A_n) \rightarrow \Omega,$$

wo $i = 1, \dots, t, r = s_1 \times \dots \times s_t, j = 1, \dots, r$ und $k_{ij} = 1, \dots, s_i$ ist. Die Formelreihen $\Delta_{ik_{ij}}, \Omega_{ik_{ij}}$ sollen nur Formeln aus A_1, \dots, A_n enthalten.

Aus (I') erhält man $A \rightarrow F(A_1 \dots A_n)$, wo A die Formel $((\overline{\Delta_{11} \rightarrow \Omega_{11}}) \wedge \dots \wedge (\overline{\Delta_{1s_1} \rightarrow \Omega_{1s_1}})) \vee \dots \vee ((\overline{\Delta_{t1} \rightarrow \Omega_{t1}}) \wedge \dots \wedge (\overline{\Delta_{ts_t} \rightarrow \Omega_{ts_t}}))$ ist. Aus (II') aber läßt sich $F(A_1 \dots A_n) \rightarrow A$ nicht gewinnen. Daher kann man für diesen Ansatz die Vollständigkeit des Operatorensystems $\{\neg, \wedge, \vee, \supset\}$ nicht mehr auf dem bisherigen Weg beweisen. Definiert man z. B. den Operator F durch die Regeln:

$$I') \Delta, A \rightarrow B \vdash \Delta \rightarrow F(A, B, C) \\ \Delta, C \rightarrow B \vdash \Delta \rightarrow F(A, B, C)$$

$$II') \Delta \rightarrow A; \Delta \rightarrow C; \Delta, B \rightarrow \Omega \vdash \Delta, F(A, B, C) \rightarrow \Omega,$$

so gilt $(A \supset B) \vee (C \supset B) \rightarrow F(A, B, C)$, aber nicht $F(A, B, C) \rightarrow (A \supset B) \vee (C \supset B)$ sondern nur $F(A, B, C) \rightarrow A \wedge C \supset B$. Intuitionistisch gilt aber nicht $A \wedge C \supset B \rightarrow (A \supset B) \vee (C \supset B)$.

Es läßt sich auch (II') nun nicht mehr als Umkehrung von (I') ansprechen und da auch (II') nicht umkehrbar ist, so enthalten (I') und (II') nur mehr hinreichende, nicht aber notwendige Bedingungen für die Beweisbarkeit der Konklusion.

Der Effekt der deduktiven Erweiterung der Sequenzenkalküle durch die Regeln PB und PE liegt also darin, daß sie erlaubt, die Definitionsbedingungen für die aussagenlogischen Operatoren so scharf zu fassen, daß sie umkehrbar werden und daß die Vollständigkeit des Operatorensystems $\{\neg, \wedge, \vee, \supset\}$ beweisbar ist.

Um die Forderung der Eliminierbarkeit aller Operatoren, auch der Grundoperatoren $\neg, \wedge, \vee, \supset$ zu erreichen, kann man den Begriff der S-Formel so erweitern, daß auch $[S, T]$ und $\{S, T\}$ S-Formeln sind, wenn S und T S-Formeln sind. Es ist dabei „ $[S, T]$ “ wie „S und T“ zu lesen und „ $\{S, T\}$ “ wie „S oder T“. Definiert man den Beweisbegriff für die neuen S-Formeln durch Hinzunahme von Regeln zu den Gentzenkalkülen, die den Regeln HK, VK und HD, VD entsprechen, und setzt $[S_1, \dots, S_{n+1}]$ für $[[S_1, \dots, S_n], S_{n+1}]$ und $[S]$ für S, sowie $\{S_1, \dots, S_{n+1}\}$ für $\{\{S_1, \dots, S_n\}, S_{n+1}\}$ und $\{S\}$ für S, so kann man dann für die Regeln (I) und (II) in 2.1 die äquivalenten Regeln

I'') $\Delta \rightarrow \{[\Delta_1], \dots, [\Delta_t]\} \vdash \Delta \rightarrow F(A_1, \dots, A_n)$ und

II'') $\Delta, \{[\Delta_1] \dots [\Delta_t]\} \rightarrow \Omega \vdash \Delta, F(A_1, \dots, A_n) \rightarrow \Omega$

formulieren. Aus ihnen erhält man $F(A_1, \dots, A_n) \leftrightarrow \{[\Delta_1], \dots, [\Delta_t]\}$, so daß die Eliminierbarkeitsforderung erfüllt ist. Ein solches Vorgehen ist methodisch sauber, da klar zwischen den beim Aufbau der Gentzenkalküle verwendeten und intuitiv in Übereinstimmung mit den Regeln der Gentzenkalküle erklärten Grundbegriffen, und den mit ihnen definierten aussagenlogischen Operatoren unterschieden wird. Ähnlich werden ja auch in der mengentheoretischen Semantik die Operatoren $\neg, \wedge, \vee, \supset$ mit Hilfe von Festsetzungen eingeführt, die die umgangssprachlichen Worte „nicht“, „und“, „oder“, „wenn-dann“ enthalten, Worte, die sich ihrerseits in ihrem genauen Sinn nur mit Hilfe analoger Bestimmungen klären lassen.

Da aber beim Aufbau der Gentzensemantik die Forderung der Eliminierbarkeit als nicht gerechtfertigt erscheint, so ist die Verwendung von S-Formeln $[A, B]$ und $\{A, B\}$ neben den Formeln $A \wedge B$ und $A \vee B$ überflüssig.

LITERATUR

- [1] H. B. Curry, *Foundations of Mathematical Logic*, New York 1963.
- [2] G. Gentzen, Untersuchungen über das logische Schließen, *Math. Zeitschr.* **39** (1934), S. 176—210, 405—431.
- [3] K. Lorenz, *Arithmetik und Logik als Spiele*, Kieler Diss. 1961.
- [4] P. Lorenzen, *Einführung in die operative Logik und Mathematik*, Berlin 1955.
- [5] P. Lorenzen, *Metamathematik*, Mannheim 1962.