Ein offenes Problem der subjektiven Wahrscheinlichkeitstheorie

Von Franz von Kutschera

I

Die subjektive Wahrscheinlichkeitstheorie ist in den 20er und 30er Jahren von F. P. Ramsey und insbesondere von B. de Finetti begründet worden. Nachdem sie lange Zeit aufgrund verschiedener Mißverständnisse wenig beachtet wurde, hat sie in den letzten Jahren, vor allem dank der Arbeiten von L. Savage, stark an Boden gewonnen. Trotzdem gibt es immer noch ein wichtiges Problem für diese Theorie, das bisher, soweit ich sehe, nicht befriedigend beantwortet worden ist, und das, vor allem aus wissenschaftstheoretischem Aspekt, ein Stein des Anstoßes geblieben ist. Dies Problem ist, ob und ggf. wie sich im Rahmen der subjektiven Wahrscheinlichkeitstheorie objektive Wahrscheinlichkeitsaussagen wiedergeben lassen.

Ich möchte im folgenden hierzu drei Thesen zur Diskussion stellen.

1. Aussagen über objektive Wahrscheinlichkeiten können nicht in solche über subjektive Wahrscheinlichkeiten übersetzt werden.
2. Man benötigt neben dem Begriff der subjektiven Wahrscheinlichkeit auch den einer objektiven Wahrscheinlichkeit.
3. Trotzdem ist es ohne Erweiterung der subjektiven Wahrscheinlichkeitstheorie möglich, Aussagen über objektive Wahrscheinlichkeiten in sie zu integrieren.

II

Eine Aussage $p_X(a) = r$ über die Größe der *subjektiven Wahrscheinlichkeit* eines Ereignisses a für eine Person X beinhaltet, daß X im Grade r davon überzeugt ist, daß a eintreten wird. Ist z. B. a_i das Ereignis, daß der i-te Wurf mit einer Münze unter vorgegebenen Bedingungen „Kopf“ ergeben wird, so drückt der Satz $p_X(a_i) = 1/2$ den Sachverhalt aus, daß X ebenso stark damit rechnet, daß a_i eintreten wird, wie damit, daß a_i nicht eintreten wird. Diese Überzeugung äußert sich u. a. darin, daß X bereit sein wird, Wetten auf a_i mit einem Wettquotienten $\leqq 1/2$ einzugehen, falls der subjektive Nutzen eines Geldbetrages für X diesem Betrag proportional ist.

Eine Aussage $P(A) = r$ über die Größe der *objektiven Wahrscheinlichkeit* eines Ereignistyps A soll hingegen eine Aussage über objektive, z. B. physikalische Eigenschaften von A sein, die nicht auf irgendein Subjekt X und dessen Überzeugungen, Erwartungen und Wettbereitschaften Bezug nimmt. Ist z. B. A der Ereignistyp „Auftreten von ‚Kopf‘ beim Wurf mit dieser Münze unter festen Bedingungen“, so soll der Satz $P(A) = 1/2$ einen physikalischen Sachverhalt ausdrücken, der in Beziehung steht zu den physikalischen Daten der geometrischen Form der Münze, ihrer Dichteverteilung, dem Schwerefeld, in dem die Münze geworfen wird, etc. Deutlicher wird das noch an einem Satz wie „Die Halbwertszeit von Radium beträgt 1622 Jahre", der soviel bedeutet wie „Die objektive Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Radiumatom in einem Zeitraum von 1622 Jahren zerfällt, ist $^1/_2$". Sei A der Ereignistyp „Zerfall eines Radiumatoms in einem Zeitraum von 1622 Jahren", so können wir diesen Satz symbolisch so formulieren:

1) $P(A) = {}^1/_2$.

Dieser Satz besagt etwas über die Natur von Radium und bezieht sich ebensowenig auf Personen und deren Erwartungen wie ein Satz über das spezifische Gewicht von Radium.

Die erste der oben formulierten Thesen beinhaltet, daß man Aussagen über objektive Wahrscheinlichkeiten nicht in solche über subjektive Wahrscheinlichkeiten übersetzen kann. Ihre Begründung ergibt sich einfach daraus, daß subjektive und objektive Wahrscheinlichkeitsaussagen ganz verschiedene Funktionen im Urteil haben. Da sind einmal die Sachverhalte, die wir beurteilen und deren Eintreten wir erwarten (die Ergebnisse von Würfen mit der Münze, das Zerfallen von Radiumatomen), und da sind zum anderen die Sachverhalte des Beurteilens oder Erwartens dieser ersteren Sachverhalte. Während nun das Vorliegen einer objektiven Wahrscheinlichkeit einen Sachverhalt der ersten Art darstellt, einen zu beurteilenden, z. B. physikalischen Sachverhalt, charakterisieren die Wörter „wahrscheinlich", „praktisch sicher" etc. im Sinne der subjektiven Wahrscheinlichkeit die Sicherheit des Urteilens, der Erwartung; sie sind also Adverbien für den Modus der Beurteilung, den Grad seiner Sicherheit, nicht für Eigenschaften des Beurteilten, und sind daher nur für Sachverhalte der zweiten Art einschlägig.

Weniger abstrakt kann man die Unübersetzbarkeitsthese anhand der Diskussion einiger naheliegender Übersetzungsvorschläge begründen.

Ist a das Ereignis, daß ein bestimmtes Radiumatom in einem Zeitraum von 1622 Jahren zerfällt, so kann der Satz (1) nicht übersetzt werden in

2) $p_X(a) = {}^1/_2$.

Denn zunächst ist die Bedeutung von (1) und (2) verschieden: (1) nimmt nicht auf die Person X und ihre Erwartungen Bezug. Darüber hinaus können aber die beiden Sätze auch verschiedene Wahrheitswerte haben. Die Wahrscheinlichkeitsbewertungen p_X können von Subjekt zu Subjekt ganz verschieden aussehen, und diese Bewertungen hängen erst dann von Tatsachen ab, wenn diese Tatsachen bekannt sind, wenn also die Bewertungen durch entsprechende Erfahrungen bedingt sind.

Ist nun e das Ereignis, daß bei einer großen Zahl von Radiumatomen ein Zerfallsverhalten aufgetreten ist, nach dem, extrapoliert auf 1622 Jahre, durchschnittlich jedes zweite Atom in diesem Zeitraum zerfallen ist, dann kann man (1) auch nicht übersetzen in

3) $p_X(a/e) = {}^1/_2$.

Denn auch (1) und (3) haben verschiedene Bedeutungen, was schon daraus erhellt, daß in (3) zwei Parameter X und e auftreten, die in (1) nicht vorkommen. Daher können (1) und (3) auch wieder verschiedene Wahrheitswerte haben. Und wenn man die Übersetzbarkeit von (1) durch (3) nur unter der Bedingung e behauptet und schreibt:

4) $e \supset (p_X(a/e) = P(A))$,

so fällt zwar e als freier Parameter heraus, nicht jedoch X. Diesen Parameter kann man nicht durch Generalisierung beseitigen, da verschiedene Personen verschiedene subjektive Wahrscheinlichkeitsannahmen machen. Und selbst wenn man annimmt, daß für Beobachtungsdaten e_n über n Radiumatome die Werte $p_X(a/e_n)$ mit n gegen einen für alle X gemeinsamen Grenzwert konvergieren, genügt das nicht; denn wir können immer nur endlich viele Atome beobachten und für jedes n sind die Werte $p_X(a/e_n)$ verschieden. Darüber hinaus würde auch die Prämisse von (4) eine generelle Übersetzung von objektiven Wahrscheinlichkeitsaussagen nicht erlauben.

Auf einen weiteren Übersetzungsvorschlag gehen wir unten im Abschnitt V ein.

III

Wir kommen nun zur zweiten der eingangs formulierten drei Thesen, zur *Unentbehrlichkeit des objektiven Wahrscheinlichkeitsbegriffs.* Zunächst können wir davon ausgehen, daß dieser Begriff in den Naturwissenschaften eine so wichtige und zentrale Rolle spielt, daß man nicht einfach alle Aussagen über objektive Wahrscheinlichkeiten streichen kann, ohne damit den Gehalt dieser Wissenschaften in gänzlich unakzeptierbarer Weise einzuengen.

De Finettis Argument, daß objektive Wahrscheinlichkeiten nur benützt würden, um aus der Beobachtung der relativen Häufigkeit eines Ereignistyps A in der Vergangenheit auf die (subjektive) Wahrscheinlichkeit eines künftigen Falles von A zu schließen, daß man das aber auch tun könne, ganz ohne von objektiven Wahrscheinlichkeiten zu reden,[1] ist nicht stichhaltig. Es ist in der ersten Blütezeit des logischen Empirismus und Operationalismus formuliert worden, in der man viele wissenschaftstheoretische Probleme wesentlich einfacher sah, als sie sich in der Zwischenzeit erwiesen haben. Ebenso könnte man ja argumentieren: In den Naturwissenschaften gehen wir von Aussagen über direkt Beobachtbares aus, um Voraussagen über direkt Beobachtbares zu machen; also benötigt man in den Naturwissenschaften nur Sätze über direkt Beobachtbares und kann auf Gesetzeshypothesen, Theorien und theoretische Begriffe ganz verzichten. So einfach ist die Sache aber leider nicht: Die Aussagen der Naturwissenschaften dienen uns nicht nur als Grundlage von Prognosen und Entscheidungen, und selbst wo sie das tun, ist derWeg, auf dem sie es tun, außerordentlich komplex und führt über Theorien, theoretische Begriffe und objektive Wahrscheinlichkeitshypothesen, und es ist bisher niemand gelungen, einen praktisch oder theoretisch befriedigenden Umbau dieses komplizierten Gebäudes anzugeben, bei dem theoretische Begriffe oder objektive Wahrscheinlichkeiten überflüssig würden.

[1] Vgl. de Finetti [37], Kap. VI.

Wenn also der objektive Wahrscheinlichkeitsbegriff unentbehrlich ist und wenn, wie wir oben sahen, sich objektive Wahrscheinlichkeitsaussagen nicht generell in subjektive übersetzen oder umdeuten lassen, so bleibt doch die Frage: Kann man nicht jedenfalls für jede naturwissenschaftlich relevante Verwendung einer objektiven Wahrscheinlichkeitsaussage ein subjektives Äquivalent angeben, das zwar nicht bedeutungsgleich ist, aber doch die Rolle der objektiven Aussage in diesem Verwendungskontext übernehmen kann?

Eine Ersetzung einzelner objektiver durch subjektive Wahrscheinlichkeitsaussagen ist wegen der grundsätzlichen Bedeutungsverschiedenheit beider Aussagetypen ausgeschlossen: In den Naturwissenschaften kommen ebensowenig Aussagen über die Erwartungen von Subjekten bzgl. der in diesen Wissenschaften behandelten Sachverhalte vor wie z. B. in der Mathematik, und ihr Rahmen würde ebenso wie der der Mathematik gesprengt, wenn man solche Aussagen in sie aufnehmen würde. Wie sollte z. B. eine Arithmetik aussehen, in der einzelne Zahlengleichungen wie „$2 + 3 = 5$" oder „$a + b = b + a$" ersetzt werden durch Aussagen wie „Hans nimmt sicher an, $2 + 3$ sei 5" oder „Alle Mathematiker meinen, $a + b$ sei $b + a$"?

Es könnte sich also nur um einen globalen Umbau der Naturwissenschaften handeln. Dazu fehlt aber einmal jeglicher präzise und detaillierte, und damit diskutierenswerte Vorschlag, zum anderen besteht dazu aber, wie wir sehen werden, auch keine Notwendigkeit.[2]

IV

Wenn man anerkennt, daß neben dem subjektiven Wahrscheinlichkeitsbegriff auch ein objektiver benötigt wird, so bleibt das Problem, wie dieser objektive Begriff eingeführt werden soll und wie sich subjektive Bewertungen objektiver Wahrscheinlichkeitsaussagen definieren lassen, mit denen man induktive Prinzipien für statistische Hypothesen formulieren kann. Während die Frage der Interpretation für den subjektiven Begriff von de Finetti und anderen auf befriedigende Weise beantwortet worden ist,[3] gibt es keine Interpretation des objektiven Begriffs, die nicht heftig umstritten wäre. Als gänzlich erledigt gilt weiterhin die Häufigkeitsdefinition der objektiven Wahrscheinlichkeit, wie sie insbesondere von R. v. Mises und H. Reichenbach vertreten worden ist. Ich möchte jedoch hier die dritte der eingangs formulierten Thesen mit der Durchführbarkeit eben dieser Häufigkeitsdefinition begründen.

Wir können zunächst sagen: *Wenn* die Definition der objektiven Wahrscheinlichkeit als Grenzwert relativer Häufigkeiten akzeptierbar ist, so ist der Begriff der objektiven Wahrscheinlichkeit kein eigenständiger Grundbegriff, der gleich-

[2] Ich habe in [69] eine andere Position vertreten, da ich davon ausging, daß sich der objektive Wahrscheinlichkeitsbegriff nur im Kontext subjektiver Wahrscheinlichkeitsaussagen in befriedigender Weise einführen ließe. Dann ist freilich eine Neuinterpretation naturwissenschaftlicher Aussagen notwendig, sofern man an der Unentbehrlichkeit objektiver Wahrscheinlichkeitsaussagen festhält.

[3] Vgl. dazu z. B. de Finetti [37], Kap. I. Eine ausführliche Darstellung findet sich auch in Kutschera [72], Kap. 2.1.

berechtigt neben dem undefinierbaren Begriff der subjektiven Wahrscheinlichkeit stünde; jener Begriff kommt — wenn auch nicht unter der Bezeichnung „objektive Wahrscheinlichkeit" — in der subjektiven Theorie ohnehin vor und spielt in dem Hauptsatz von de Finetti eine entscheidende Rolle. Dieser Satz besagt u. a., daß im Fall der Vertauschbarkeit der Ereignisse $a_1, a_2, \ldots$ vom Typ A bzgl. der Bewertung p_X[4] der Grenzwert der relativen Häufigkeiten von A mit praktischer Sicherheit (gemessen mit p_X) existiert. Bei Interpretation der objektiven Wahrscheinlichkeit im Sinn der Häufigkeitsdefinition enthält die subjektive Theorie auch bereits die Bestimmungen subjektiver Bewertungen objektiver Wahrscheinlichkeitshypothesen, und die Prinzipien für die Auszeichnung von Grenzwerthypothesen aufgrund der Beobachtung relativer Häufigkeiten bilden einen zentralen Teil der subjektiven Theorie des induktiven Schließens. *Wenn* also die Häufigkeitsdefinition akzeptiert wird, dann bedarf es keiner Erweiterung der subjektiven Theorie und keiner Zusätze, um in ihr objektive Wahrscheinlichkeitshypothesen behandeln zu können; und man kann im Blick darauf, daß der objektive Wahrscheinlichkeitsbegriff kein eigenständiger Grundbegriff ist, nach wie vor einen rein subjektiven Standpunkt vertreten, d. h. einen Standpunkt, nach dem der Begriff der subjektiven Wahrscheinlichkeit der einzige Wahrscheinlichkeitsbegriff ist, den man als irreduziblen Grundbegriff akzeptieren muß.

Bleibt also noch der Wenn-Satz zu begründen.

V

Wir beschränken uns im folgenden auf die Diskussion der wichtigsten Einwände gegen die Häufigkeitsdefinition der objektiven Wahrscheinlichkeit.

Es sei H ein Versuch, der (prinzipiell beliebig oft) in physikalisch unabhängiger Weise wiederholt werden kann. Es sei K ein Körper von Ereignistypen über der Menge der möglichen Ergebnistypen von H. Ist $A \varepsilon K$, so sollen die Ereignisse $a_1, a_2, \ldots$ des Typs A zu einer Folge $\mathfrak{H}$ von Durchführungen $H_1, H_2, \ldots$ von H gehören. So eine Folge $\mathfrak{H}$ wird bestimmt durch eine Vorschrift, die besagt, wie die Folge $\omega = e_1, e_2, \ldots$ der Ergebnisse der Versuche $H_1, H_2, \ldots$ zu gewinnen ist. Wir sagen, $\mathfrak{H}$ sei eine *Grundfolge von Durchführungen* von H, wenn die Vorschrift einfach sagt „Führe H immer wieder (in physikalisch unabhängiger Weise) durch und notiere alle Ergebnisse (in der Reihenfolge ihres Vorkommens)!" Entsprechend nennen wir die Folge ω der Ergebnisse einer Grundfolge $\mathfrak{H}$ eine *Grundfolge von Ereignissen* von H. Verschiedene Personen können zu verschiedenen Zeiten und an verschiedenen Orten Grundfolgen $\mathfrak{H}$ von H beginnen. Sie können keine Grundfolge ω vollständig realisieren, sondern immer nur endliche Anfangsabschnitte; aber die Folge, die sie realisieren würden, wenn sie nie aufhörten, H immer weiter durchzuführen, ist eine Grund-

[4] Die Ereignisse $a_1, a_2, \ldots$ heißen bzgl. p_X vertauschbar, wenn gilt $p_X(a_{i_1} \cdot \ldots \cdot a_{i_n}) = p_X(a_{j_1} \cdot \ldots \cdot a_{j_n})$ für alle $n \geq 1$ und alle n tupel $a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}$ und $a_{j_1}, \ldots, a_{j_n}$ von (verschiedenen) Ereignissen aus der Folge $a_1, a_2, \ldots$.

folge ω. Die Menge der Grundfolgen von Ergebnissen von H ist daher eine Teilmenge der Menge aller möglichen (denkbaren) Ergebnisfolgen: die Teilmenge, die die Natur realisiert, bzw. realisieren würde, wenn wir die Versuchsreihen $\mathfrak{H}$ nicht abbrächen. Selbst wenn niemand je eine Versuchsreihe $\mathfrak{H}$ beginnt, wenn z. B. eine bestimmte Münze nie von jemandem geworfen wird, kann man so von den Grundfolgen von H sprechen: den Ergebnisfolgen, die sich einstellen würden, wenn man unendliche Versuchsreihen zu H durchführung würde. $h_n(A, \omega)$ sei schließlich die relative Häufigkeit von A in den ersten n Ergebnissen der Folge ω.

Wir wollen die folgende Version der Häufigkeitsdefinition diskutieren:

D) Wenn unter den angegebenen Bedingungen und Konventionen $\lim h_n(A, \omega)$ $n \to \infty$ für alle Grundfolgen ω existiert und den gleichen Wert r hat, so setzen wir $P(A) := r$.[5]

Man überlegt sich leicht, daß P nach dieser Definition die üblichen Axiome der Wahrscheinlichkeitstheorie erfüllt, d. h. ein normiertes Maß auf K ist.

Die, soweit ich sehe, wichtigsten Einwände gegen eine Häufigkeitsdefinition der objektiven Wahrscheinlichkeit sind folgende:

1. Die Definition ist zirkulär, da sie den Begriff „physikalisch unabhängig" voraussetzt, der seinerseits so zu definieren ist: Zwei Ereignisse A, B sind physikalisch unabhängig, wenn gilt $p(A/B) = p(A)$.

Dem kann man entgegenhalten: Man muß einen Unterschied machen zwischen der *wahrscheinlichkeitstheoretischen* Unabhängigkeit von Ereignistypen A und B, die durch $p(A/B) = p(A)$ erklärt ist, und der *physikalischen* Unabhängigkeit zweier Ereignisse oder Ereignistypen. Zwar kann man gelegentlich die wahrscheinlichkeitstheoretische Unabhängigkeit als Kriterium für physikalische Unabhängigkeit verwenden, und physikalische Unabhängigkeit von Ereignistypen ist umgekehrt auch ein Kriterium für wahrscheinlichkeitstheoretische Unabhängigkeit; daraus folgt aber nicht, daß beide Begriffe zusammenfallen. Die physikalische Unabhängigkeit zweier Ereignisse ist vielmehr so erklärt, daß beide Ereignisse nicht miteinander in physikalischer Wechselwirkung stehen, so daß das Eintreten oder Nichteintreten des einen Ereignisses keinen Einfluß auf das Eintreten oder Nichteintreten des anderen hat. Man kann eine solche physikalische Unabhängigkeit auch dann sinnvoll behaupten, wenn für die Ereignisse objektive Wahrscheinlichkeiten gar nicht definiert sind.

2. Mit einer Folge $H_1, H_2, \ldots$ von Durchführungen von H ist auch jede daraus durch Stellenauswahl oder Umordnung entstehende Folge eine Folge von Durchführungen von H. Der Grenzwert $\lim h_n(A, \omega)$ ist aber nicht invariant gegenüber solchen Stellenauswahlen und Umordnungen in ω.

Diesem Einwand haben wir schon dadurch Rechnung getragen, daß wir in (D) nicht auf alle Folgen von Durchführungen von H Bezug genommen haben,

[5] Nach der bedingten Definition (D) gilt die Aussage $P(A) = r$ immer nur relativ zu einem Versuch H.

sondern nur auf Grundfolgen.[6] Denn nicht jede durch Stellenauswahl oder Umordnung aus einer Grundfolge entstehende Folge ist wiederum eine Grundfolge zu demselben Versuch. Das gilt für Stellenauswahlen und Umordnungen vermittels der Ergebnisse der Durchführungen der H_i; ist z. B. H'_1 das erste H_i mit dem Ergebnis A, H'_{n+1} das erste auf H'_n folgende H_i mit dem Ergebnis A, so erhält man die H'_i nicht mit der Vorschrift „Führe H immer wieder durch und notiere alle dabei auftretenden Ergebnisse!" — die H'_i bilden vielmehr eine Grundfolge nur zu dem von H verschiedenen Versuch H', der darin besteht, daß man H so durchführt, daß ein Ergebnis vom Typ A auftritt.

Das gleiche gilt aber auch bei zufälligen Stellenauswahlen, z. B. wenn man das Ergebnis des Wurfs mit einer Münze nur dann zählt, wenn ein vorher geworfener Würfel die Augenzahl 6 ergibt. Auch dadurch entsteht nicht wieder eine Grundfolge zum Versuch „Wurf mit der Münze", sondern eine Grundfolge in einem Relaisexperiment, in dem freilich die Wahrscheinlichkeiten unverändert sein können.

3. Über den Grenzwert einer Folge kann man nur reden, wenn eine Bildungsvorschrift für die Folge vorliegt; das soll aber nach v. Mises für Zufallsfolgen gerade nicht gelten. Vom Grenzwert einer regellosen Folge könnte man erst dann sprechen, wenn sie fertig vorläge. Solche unendlichen Ereignisfolgen gibt es aber in unserer endlichen Erfahrung nicht.

Abgesehen davon, daß die Regellosigkeitsforderung in (D) nicht explizit auftritt, ist dazu zu sagen: Die klassische Analysis ist völlig unkonstruktiv, und kein Wahrscheinlichkeitstheoretiker, welcher Couleur auch immer, hat es bisher unternommen, eine leistungsfähige Wahrscheinlichkeitstheorie auf der Basis einer konstruktiven Maß- und Integrationstheorie zu entwickeln. Man sollte also der Häufigkeitsdefinition nicht vorwerfen, daß sie nicht strengeren konstruktiven Maßstäben genügt, als man sie selbst anwendet. Klassisch gesehen ist der Einwand aber nicht haltbar: In die Definition des Grenzwerts der klassischen Analysis geht nirgends ein, daß die Folgen berechenbar sein sollen, oder gesetzmäßig in irgendeinem weiteren Sinn. Ferner setzt eine Aussage über alle Ereignisse einer Folge nicht voraus, daß diese Ereignisse schon alle eingetreten sind, ebensowenig wie eine Aussage über alle Bücher voraussetzt, daß alle Bücher bereits geschrieben sind, obwohl die Wahrheitswerte solcher Aussagen evtl. erst dann bestimmt werden können, wenn alle Ereignisse der Folge eingetreten, bzw. alle Bücher geschrieben sind. Die Häufigkeitsdefinition ist insbesondere nicht in irgendeinem Sinn metaphysischer oder suspekter als die Begriffsbildungen der

[6] Das ist unser Ersatz für das Misesche Postulat der Unempfindlichkeit der Grenzwerte gegenüber (berechenbaren) Stellenauswahlen, an dem die Kritik an der Häufigkeitsdefinition vor allem aufgehängt worden ist. Dieses Postulat hat bei Mises noch eine andere Funktion: Es soll ausschließen, daß gesetzmäßig gebildeten Ergebnisfolgen, wie z. B. einer alternierenden Folge von Ergebnissen A und nicht $-A$, eine objektive Wahrscheinlichkeit zugeordnet wird. Das gleiche leistet aber auch (D), denn (D) ist ja eine bedingte Definition, in der die definitorische Festlegung nur unter gewissen Bedingungen getroffen wird. Dazu gehört insbesondere die physikalische Unabhängigkeit der Durchführung H_i bzw. ihrer Ergebnisse e_i. Wenn man nun annimmt, daß die alternierenden Ergebnisse der oben genannten Folge wirklich unter genau den gleichen Bedingungen zustandekommen, d. h. zu Durchführungen desselben Versuchs gehören, wird man wohl kaum ihre physikalische Unabhängigkeit annehmen.

subjektiven Theorie, in der auch von unendlichen Ereignisfolgen und den Grenzwerten relativer Häufigkeiten in solchen Fällen die Rede ist.

4. Wenn man sagt, die objektive Wahrscheinlichkeit $P(A)$ des Ereignistyps A sei r, so will man nicht sagen, daß es *logisch* ausgeschlossen sei, daß eine (Grund-)Folge ω von Ergebnissen vor H auftritt, für die der $lim\, h_n(A, \omega)$ von r verschieden ist oder auch gar nicht existiert; man will nur sagen, daß das *praktisch* ausgeschlossen ist.[7]

Zunächst wäre zu fragen, woher man denn so genau weiß, was ein Satz „$P(A) = r$“ besagt, da es doch — wie ich glaube: außerhalb der Häufigkeitsdefinition — bislang keine befriedigende Interpretation des objektiven Wahrscheinlichkeitsbegriffes gibt. Dann ist zu betonen, daß „praktisch ausgeschlossen“ hier nur heißen kann: „Die subjektive Wahrscheinlichkeit ist Null, daß eine Ergebnisfolge ω auftritt, für die nicht gilt $lim\, h_n(A, \omega) = r$.“ Eine Implikation zwischen den Aussagen „$P(A) = r$“ und $p_X\, lim\, h_n(A, \omega) \neq r) = 0$“ (oder schwächer „$\Lambda\varepsilon(\varepsilon > 0 \supset lim\, p_X(|h_n(A) - r| > \varepsilon) = 0)$“) besteht aber nicht, da in der zweiten Aussage beliebige subjektive Bewertungen p_X eingesetzt werden können.[8]

Wenn endlich zwei Personen X und Y die gleichen subjektiven Wahrscheinlichkeitsannahmen $p_X = p_Y$ machen und wenn X die Definition (D) akzeptiert, während Y die im obigen Einwand sich andeutende liberalere Konzeption des objektiven Wahrscheinlichkeitsbegriffes vertritt, dann werden sich X und Y in ihrem Verhalten gegenüber objektiven Wahrscheinlichkeitshypothesen doch nicht unterscheiden: Aufgrund derselben Beobachtungen werden sie dieselben Hypothesen akzeptieren, bzw. verwerfen, und aufgrund derselben Hypothesen werden sie die gleichen relativen Häufigkeiten bei künftigen Beobachtungen voraussagen. Sie meinen mit „$P(A) = r$“ Verschiedenes, aber dieser Unterschied bleibt ohne praktische Konsequenzen. Theoretisch jedoch ist X besser daran, da er weiß, was er mit „$P(A) = r$“ meint, und das in Form einer einfachen Definition sagen kann.

Abschließend sei, als positives Argument für (D), noch auf den Zusammenhang von physikalischer Unabhängigkeit und Vertauschbarkeit hingewiesen: Wenn man H beliebig oft wiederholen kann, werden wir die Ereignisse $a_1, a_2, \ldots$ vom Typ A als vertauschbar (relativ zu unserer Bewertung p_X) ansehen, wenn wir glauben, daß die Durchführungen $H_1, H_2, \ldots$ physikalisch unabhängig sind. Andererseits besagt das Theorem von de Finetti für vertauschbare $a_1, a_2, \ldots$, daß es praktisch sicher ist (relativ zu p_X), daß eine Ergebnisfolge ω eintreten wird (oder eintreten würde, wenn wir nicht aufhören würden, H zu wiederholen), für die $lim\, h_n(A, \omega)$ existiert. Eine kleine Änderung im Beweis des Theorems ergibt auch, daß es praktisch sicher ist, daß alle Ergebnisfolgen,

[7] Dieses Argument habe ich mir in [69] zu eigen gemacht.
[8] Aus diesem Grund ist auch die sog. Häufigkeitsinterpretation der objektiven Wahrscheinlichkeit nicht akzeptabel. Vgl. dazu Kutschera [72], Abschnitt 2.2.1.

die realisiert werden, den gleichen Grenzwert haben.[9] Die subjektive Theorie erklärt so, warum wir für physikalisch unabhängige Ereignisse mit der Existenz einer objektiven Wahrscheinlichkeit nach (D) rechnen.

Wenn man ferner im Sinn einer induktiven Theorie objektiver Wahrscheinlichkeiten über der Menge aller möglichen objektiven Wahrscheinlichkeiten auf dem Körper K der Ereignistypen A eine Glaubwürdigkeitsbewertung φ einführt, so kann man zu φ eine subjektive Wahrscheinlichkeit p_X angeben, so daß der Erwartungswert der objektiven Wahrscheinlichkeit von A, berechnet mit φ, übereinstimmt mit dem Erwartungswert für den Grenzwert der relativen Häufigkeiten von A, gemessen mit p_X. Darauf hat schon de Finetti in [37] hingewiesen. Daher kann man eine induktive Theorie für objektive Wahrscheinlichkeiten — gleich wie diese im einzelnen interpretiert werden — immer in der subjektiven Theorie rekonstruieren mit objektiven Wahrscheinlichkeiten als Grenzwerten relativer Häufigkeiten. Darin liegt ebenfalls ein starkes Argument für die Häufigkeitsdefinition.[10]

VI

Wenn man die Unentbehrlichkeit objektiver Wahrscheinlichkeitsaussagen und ihre Unübersetzbarkeit in subjektive Aussagen anerkennt, so wird man auch von subjektivistischer Seite mit den Objektivisten zunächst einmal nach einer brauchbaren Interpretation der objektiven Wahrscheinlichkeit suchen müssen. Angesichts der Einfachheit und begrifflicher Klarheit der Häufigkeitsdefinition und des Vorteils, daß die subjektive Theorie ohne weitere Zusätze oder Modifikationen die Theorie der induktiven Bestätigung so interpretierter statistischer Hypothesen enthält, ist mein Vorschlag, diese Definition objektiver Wahrscheinlichkeiten noch einmal gründlich zu diskutieren und sich erst dann, wenn wirklich entscheidende Einwände dagegen auftreten, anderen Interpretationsversuchen des objektiven Wahrscheinlichkeitsbegriffs zuzuwenden, da diese bisher auch allesamt erheblichen Schwierigkeiten begegnen.

[9] Gehören die Ereignisse a_{ij} und die Ergebnisse e_{ij} $(i, j = 1, 2 \ldots)$ zu den Grundfolgen ω_i, so sei ω eine durch diagonale Abzählung gewonnene Ergebnisfolge $(\omega = e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{31}, e_{22}, e_{13}, \ldots)$; $(\omega)_i$ sei die Teilfolge $e_{i1}, e_{i2}, \ldots$ aus ω und $h^i_n(A, \omega)$ sei die relative Häufigkeit $h_n(A, (\omega)_i)$ bei den ersten n Ergebnissen von $(\omega)_i$. Wenn alle a_{ij} vertauschbar sind, gilt dann $p(\{\omega: \lim h^i_n(A, \omega) = \lim h^u_k(A, \omega)\}) = 1$, d. h. es ist praktisch sicher, daß zwei Grundfolgen $(\omega)_i$ und $(\omega)_k$ denselben Grenzwert der relativen Häufigkeiten von A aufweisen, d. h. daß alle Grundfolgen die gleichen Grenzwerte aufweisen, und damit, daß eine objektive Wahrscheinlichkeit $p(A)$ existiert. Das folgt sofort aus der Argumentation in de Finetti [37], Kap. III, wo für $h=k=n$ und $r=0$ gilt $p(\{\omega: | h^i_n(A, \omega) - h^k_n(A, \omega) | \geqq \varepsilon\}) \leqq \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \frac{2}{n}(p(a_{ij}) - p(a_{ij} \cdot a_{lm}))$ (es sei $(ij) \neq (lm)$), also $\lim p(\{\omega: | h^i_n(A, \omega) = h^k_n(A, \omega) | < \varepsilon\} = 1$ für alle $\varepsilon > 0$; da nach dem Satz von de Finetti gilt $p(\{\omega: Vr(\lim h^i_n(A, \omega) = r)\}) = 1$ für alle i, folgt daraus die Behauptung.

[10] Vgl. die ausführlichere Darstellung in Kutschera [72], Abschnitt 2.2.2.

Literatur

Finetti, B. de [37]: „La prévision: ses lois logiques, ses sources subjectives“ *Annales de l'Institut Henri Poincaré* 7 (1937), engl. Übers. in Kyburg und Smokler [64].

Kutschera, F. v. [69]: „Zur Problematik der naturwissenschaftlichen Verwendung des subjektiven Wahrscheinlichkeitsbegriffs“, *Synthese* 20 (1969), S. 84—103.

Kutschera, F. v. [72]: *Wissenschaftstheorie — Grundzüge der allgemeinen Methodologie der empirischen Wissenschaften,* München 1972.

Kyburg, H. E. und Smokler, H. E. Hrsg. [64]: *Studies in Subjective Probability,* New York 1964.