Das Granger-Repräsentationstheorem

Jürgen Jerger, Freiburg

Dieser Beitrag versucht, eine intuitive Darstellung der Anwendung von Kointegrations- und Fehlerkorrekturmodellen zu geben. Das zuerst in *Granger* (1983) bewiesene *Granger*-Repräsentationstheorem fungiert als Verbindung zwischen diesen beiden Modellklassen. Im Interesse einer größtmöglichen Einfachheit der Exposition wird an keiner Stelle auf die schätztechnischen Details eingegangen; diese können inzwischen auch in anderen, ebenfalls didaktisch ausgerichteten Veröffentlichungen nachvollzogen werden. Für an der Materie stärker interessierte Leser sollen einige Kommentare zur Literaturliste am Ende diesen Schritt erleichtern.

Ökonomische Zeitreihen weisen häufig einen dauerhaft nach oben oder unten gerichteten (deterministischen oder stochastischen) Trend auf. In vielen Fällen liegen nun Theorien vor, die implizieren, daß trotz dieser Trends in den individuellen Zeitreihen sich diese nicht beliebig weit voneinander entfernen sollten. Naheliegende Beispiele dafür sind privater Konsum und verfügbares Einkommen (*Keynes*sche Konsumhypothese) oder Wechselkursänderungen und Inflationsdifferentiale (Kaufkraftparitätentheorie). Erweisen sich die von der Theorie vorgeschlagenen Beziehungen als empirisch valide, so werden die jeweils erklärenden Variablen die zu erklärende Variable „gut" prognostizieren können. In diesem — noch zu konkretisierenden — Sinne kann der prognostizierte Wert als empirischer Gleichgewichtswert der entsprechenden Reihe bezeichnet werden. „Zu große" Abweichungen von tatsächlichem und Prognosewert wären dann eine Evidenz gegen die Validität der zugrundeliegenden Theorie (bzw. der Spezifikation). Wichtiger noch als die absolute Größe dieser Abweichungen ist die empirisch zu entscheidende Frage, ob es nach einer Gleichgewichtsabweichung wieder eine Tendenz zurück gibt. Diese „Fehlerkorrektureigenschaft" ist ein zentrales Merkmal von (zwei oder mehreren) Zeitreihen, die die oben beschriebenen gemeinsamen Trends aufweisen, oder — so der terminus technicus — kointegriert sind. Die Modellklasse, in der die langfristigen Beziehungen zwischen den Niveaus von Zeitreihen untersucht werden, sind die Kointegrationsmodelle, die kurzfristige Dynamik, d.h. die Bewegung des Systems um das Gleichgewicht, wird mit sog. Fehlerkorrekturmodellen erfaßt.

Das von *C.W.J. Granger* — einem der Pioniere der Zeitreihenanalyse — in die Literatur eingeführte Repräsentationstheorem zeigt nun, daß diese beiden Modelltypen ineinander überführbar sind. Bevor das Fehlerkorrekturmodell eingeführt wird, ist es notwendig, die Konzepte der Integration und Kointegration von Zeitreihen kurz vorzustellen. (Für interessierte Leser findet sich eine hervorragende Einführung bei *Engle/Granger*, 1991; eine einfache Darstellung bietet *Jerger*, 1991.)

Integration von Zeitreihen: Die meisten ökonomischen Zeitreihen sind nichtstationär in dem Sinne, daß ihr Mittelwert und/oder ihre Varianz sich im Zeitablauf ändern. Z.B. weisen die Zeitreihen des Sozialprodukts, der Geldmenge etc. diese Eigenschaft auf. Da in der klassischen Regressionsanalyse die Stationarität von Regressand und Regressoren eine wichtige Voraussetzung ist, können diese Zeitreihen im allgemeinen nicht in ihrer ursprünglichen Form verwendet werden. Schätztechnisch relativ unproblematisch ist nun das Vorliegen eines deterministischen Trends. In diesem Fall kann die Zeitreihe dargestellt werden als Summe eines stochastischen, stationären Teils und einer deterministischen Funktion der Zeit, zumeist eine einfache Trendgerade. Bei vielen Zeitreihen läßt sich aber auch bei Berücksichtigung eines deterministischen Trends keine Stationarität erzeugen, d.h. es liegen sog. stochastische Trends vor. Eine auch für mit einem stochastischen Trend behaftete Zeitreihe hinreichende Transformation besteht nun in der Verwendung erster Differenzen. Die erste Differenz einer Zeitreihe x_t ist definiert durch:

$$\Delta x_t \equiv x_t - x_{t-1}, \qquad (1)$$

d.h., es werden die absoluten Veränderungen zwischen zwei Beobachtungspunkten betrachtet. Das Konzept der Integration stellt auf Zeitreihen, die einen stochastischen Trend aufweisen, ab, d.h., im Zusammenhang mit dem oben beschriebenen deterministischen Trend ist es bedeutungslos. Eine Zeitreihe heißt integriert von der Ordnung Null: I(0), wenn bereits die Niveaus stationär sind, ist hingegen einmalige Differenzenbildung für die Stationarisierung notwendig, so nennt man diese Variable integriert von der Ordnung Eins: I(1). (Selbstverständlich ist es auch möglich, daß erst höhere Differenzen der Zeitreihe x_t Stationarität aufweisen; diese Fälle sind jedoch praktisch nicht sehr bedeutsam und werden im folgenden ausgeklammert.)

Kointegration von Zeitreihen: Sind zwei (oder mehrere; auch hier beschränkt sich der Rest dieses Beitrags auf zwei Variablen) Zeitreihen x_t und y_t nichtstationär in dem oben beschriebenen Sinne, so werden sich deren Niveaus im allgemeinen beliebig weit auseinander entwickeln. Besteht jedoch eine (z.B. durch die Theorie nahegelegte) lineare Verbindung zwischen den Niveaus:

$$x_t = a + b \cdot y_t + z_t \qquad (2)$$

dergestalt, daß der Vorhersagefehler z_t nicht beliebig groß wird, so kann diese vage formulierte Anforderung dahingehend konkretisiert werden, daß von der Zeitreihe z_t, die als Residuum einer Kleinst-Quadrate-Regression von (2) berechnet werden kann, Stationarität verlangt wird. Liegt diese Stationarität von z_t vor, so heißen x_t und y_t kointegriert; es existiert insofern eine intuitiv interpretierbare „Gleichgewichtsbeziehung" als zwar die einzelnen Variablen im Zeitablauf sich beliebig weit von ihrem Startwert entfernen können, jedoch Mittelwert und Varianz des Gleichgewichtsfehlers z_t zeitinvariant sind. (Es findet dabei keine Unterscheidung in endogene und exogene Variablen statt, so daß (2) auch so umgeschrieben werden kann, daß y_t die Linkhandvariable ist. Welche Reihe als abhängige Variable behandelt wird, kann anhand der speziellen Fragestellung entschieden werden.)

Die Kleinst-Quadrate-Schätzung von (2) ist nun dem Vorwurf ausgesetzt, daß die involvierten Variablen nichtstationär sind, womit eine Verletzung des Klassischen Modells der Linearen Regression (KMLR) vorliegt. *Stock* (1987) hat gezeigt, daß bei Vorliegen von Kointegration die Schätzung der Parameter a und b trotz der Nichtstationarität der Variablen konsistent ist (vgl. auch *Jerger*, 1991, S. 473–474). Gleichung (2) wird als Kointegrationsmodell der Beziehung zwischen x_t und y_t bezeichnet.

In der ökonometrischen Praxis wurde — um den Anforderungen des KMLR gerecht zu werden — oft statt einer Spezifikation in Niveaus eine analoge Differenzenspezifikation

$$\Delta x_t = b \cdot \Delta y_t + u_t \quad (u_t = \Delta z_t) \tag{3}$$

gewählt, obwohl die von der Theorie modellierten Zusammenhänge in aller Regel die Niveaus betreffen. (Gleichung (3) läßt sich berechnen, indem von (2) eine um eine Periode verzögerte Schreibweise von (2) subtrahiert wird.) Der Vorteil, eine stationäre Schätzgleichung zu bekommen, wird bei dem Übergang von (2) auf (3) erkauft durch den Verlust an Information über den Niveauzusammenhang.

Der primär interessierende Parameter in Gleichung (2) ist der langfristige Multiplikator b, der die Änderung von x_t in Reaktion auf eine Änderung von y_t angibt:

$$\frac{dx_t}{dy_t} = b. \tag{4}$$

Als „langfristig" kann b bezeichnet werden, weil hierin auch über mehrere Perioden verteilte, d.h. verzögerte Wirkungen ihren Niederschlag finden. Das oben erwähnte Ergebnis von *Stock* impliziert die Möglichkeit der konsistenten Schätzung des langfristigen Multiplikators ohne die Spezifikation der dynamischen Struktur, d.h. mit Hilfe der statischen Regression (2). Um auch die dynamische Struktur zu evaluieren, müssen wir jedoch eine allgemeine dynamische Gleichung mit verzögerten x_t's und y_t's annehmen. Im einfachsten Fall, mit bis zu je einem Lag von x_t und y_t ist dies:

$$x_t = \alpha + \beta x_{t-1} + \gamma_0 y_t + \gamma_1 y_{t-1} + \varepsilon_t, \tag{5}$$

wobei das Störglied ε_t weißes Rauschen ist. In dieser Spezifikation ist der langfristige Multiplikator (wie sich für $x_t = x_{t-1}$ und $y_t = y_{t-1}$ leicht überprüfen läßt) gegeben durch:

$$\frac{dx_t}{dy_t} = \frac{\gamma_0 + \gamma_1}{1-\beta}. \tag{4'}$$

Subtrahieren wir x_{t-1} von beiden Seiten der Gleichung (5) und erweitern auf der rechten Seite um den Summanden $\gamma_0 \cdot y_{t-1}$, so ergibt sich:

$$\Delta x_t = \alpha + (\beta - 1)x_{t-1} + (\gamma_0 + \gamma_1)y_{t-1} + \gamma_0 \Delta y_t + \varepsilon_t. \tag{5'}$$

Berücksichtigen wir nun, daß im Falle der Kointegration $b = \frac{\gamma_0 + \gamma_1}{1-\beta}$ gilt, so kann man (5') weiter umzuformen

$$\Delta x_t = (\beta - 1) \cdot [x_{t-1} - a - b \cdot y_{t-1}] + \gamma_0 \Delta y_t + \varepsilon_t, \tag{5''}$$

wobei $a = -\frac{\alpha}{\beta - 1}$.

Ein Blick zurück auf Gleichung (2) zeigt, daß der Ausdruck in der eckigen Klammer gerade dem um eine Periode verzögerten Gleichgewichtsfehler entspricht, d.h.

$$\Delta x_t = (\beta - 1) \cdot z_{t-1} + \gamma_0 \Delta y_t + \varepsilon_t. \tag{6}$$

Gleichung (6) ist nun das mit der Niveaubeziehung (5) korrespondierende Fehlerkorrekturmodell, dessen Merkmale kurz beschrieben werden sollen:

- Zusätzlich zur einfachen Differenzenspezifikation (3) wird in (6) der um eine Periode verzögerte Gleichgewichtsfehler als Regressor aufgenommen. Da z_{t-1} aus der statischen Niveauregression (2) hervorgeht, ist in (6) die Information bezüglich der Niveaubeziehung wieder enthalten.
- Das Fehlerkorrekturmodell (6) wurde — durch die Verwendung von z_{t-1} — abgeleitet unter der Annahme, daß (2) die „wahre" langfristige Beziehung und (5) die adäquate dynamische Spezifikation ist. Das empirisch testbare Analogon zu „wahr" besteht in der Eigenschaft der Kointegration zwischen x_t und y_t. Daraus folgt auch, daß das Fehlerkorrekturmodell ohne Gültigkeit von (2) keine Relevanz besitzt.
- Sind die Variablen x_t und y_t kointegriert, so folgt daraus, daß in (6) nur noch stationäre Terme vorkommen: Da x_t und y_t annahmegemäß I(1) sind, ist für die ersten Differenzen Δx_t (und auch Δy_t) diese Eigenschaft per Definition gegeben, wie wir oben gesehen haben, bedingt die Eigenschaft der Kointegration auch Stationarität für z_t (und damit auch für z_{t-1}). Damit liegt in (6) eine Spezifikation vor, die den Anforderungen des KMLR (hinsichtlich der Stationaritätsannahmen) entspricht; somit sind alle traditionellen Signifikanz- und Gütetests für diese Regression anwendbar.
- Die Signifikanz (mit negativem Vorzeichen) von z_{t-1} in einer Regression mit Δx_t und Δy_t bedeutet, daß die Veränderung der abhängigen Variable auf eine Abweichung von tatsächlichem und dem durch (2) definierten Gleichgewichtswert reagiert. Damit liegt ein

der Intuition zugänglicher „Korrekturmechanismus" vor, der ein kointegriertes System dazu veranlaßt, auf vergangene „Gleichgewichtsabweichungen" quasi mit der richtigen Reaktion zu antworten.

Damit sind wir nun in der Lage, die Aussage des *Granger*-Repräsentationstheorems allgemein zu formulieren: Sind zwei oder mehrere Zeitreihen kointegriert, so folgt daraus, daß sich dieses System als Fehlerkorrekturmodell (6) schreiben läßt. Umgekehrt gilt auch, daß, wenn zwei oder mehrere Zeitreihen sich durch ein Fehlerkorrekturmodell darstellen lassen, diese kointegriert sind.

Je nach der unterstellten — bzw. zu untersuchenden — genauen dynamischen Spezifikation tauchen auf der rechten Seite des Fehlerkorrekturmodells neben z_{t-1} und Δy_t auch beliebig hohe lags von Δx_t und Δy_t auf. (Als Übung empfiehlt sich die Herleitung des Fehlerkorrekturmodells, wenn in (5) zusätzlich noch x_{t-2} und y_{t-2} enthalten ist.) Der Fehlerkorrekturterm z_{t-1} wird in einer zuvor zu berechnenden Kointegrationsregression der Form (2) ermittelt und dann direkt eingesetzt. Dieses zweistufige Verfahren zur Schätzung eines Fehlerkorrekturmodells wurde in dem Pionierartikel von *Engle/Granger* (1987) vorgeschlagen.

Um die Zusammenhänge anhand konkreter Zeitreihen nachzuvollziehen, wird im folgenden kurz je ein Beispiel für zwei kointegrierte bzw. nicht kointegrierte Variablen besprochen.

In der linken Spalte von *Abb. 1* zeigt das obere Diagramm die Entwicklung von privatem Konsum und verfügbarem Einkommen (jeweils preis- und saisonbereinigt) von 1960–1989. Die Analyse der Integrationsordnung ergibt, daß beide Reihen integriert von der Ordnung Eins sind, die von der *Keynes*schen Konsumhypothese postulierte enge Beziehung zwischen den Niveaus ist erkennbar. Die Residuen einer Kleinst-Quadrate-Schätzung gemäß (2) sind darunter zu sehen. Offensichtlich sind die Abweichungen relativ zum Niveau der beiden Reihen gering; darüber hinaus wird die Null-Linie häufig überschritten, d.h. im Zeitablauf wechseln sich positive und negative Gleichgewichtsabweichungen des öfteren ab. Die Kointegrationsdiagnose, die wie gesehen auf der Stationaritätseigenschaft der Residuen aufbaut, erbringt somit Evidenz für die Gültigkeit der *Keynes*schen Konsumfunktion; dieser „Sichtbefund" wird auch durch formale Tests unterstützt. Als Kontrast hierzu dient das — willkürlich gewählte — Beispiel der Beziehung von privatem Konsum und Exporten (rechte Spalte der *Abb. 1*). Auch die Exportzeitreihe ist I(1), eine entsprechen-

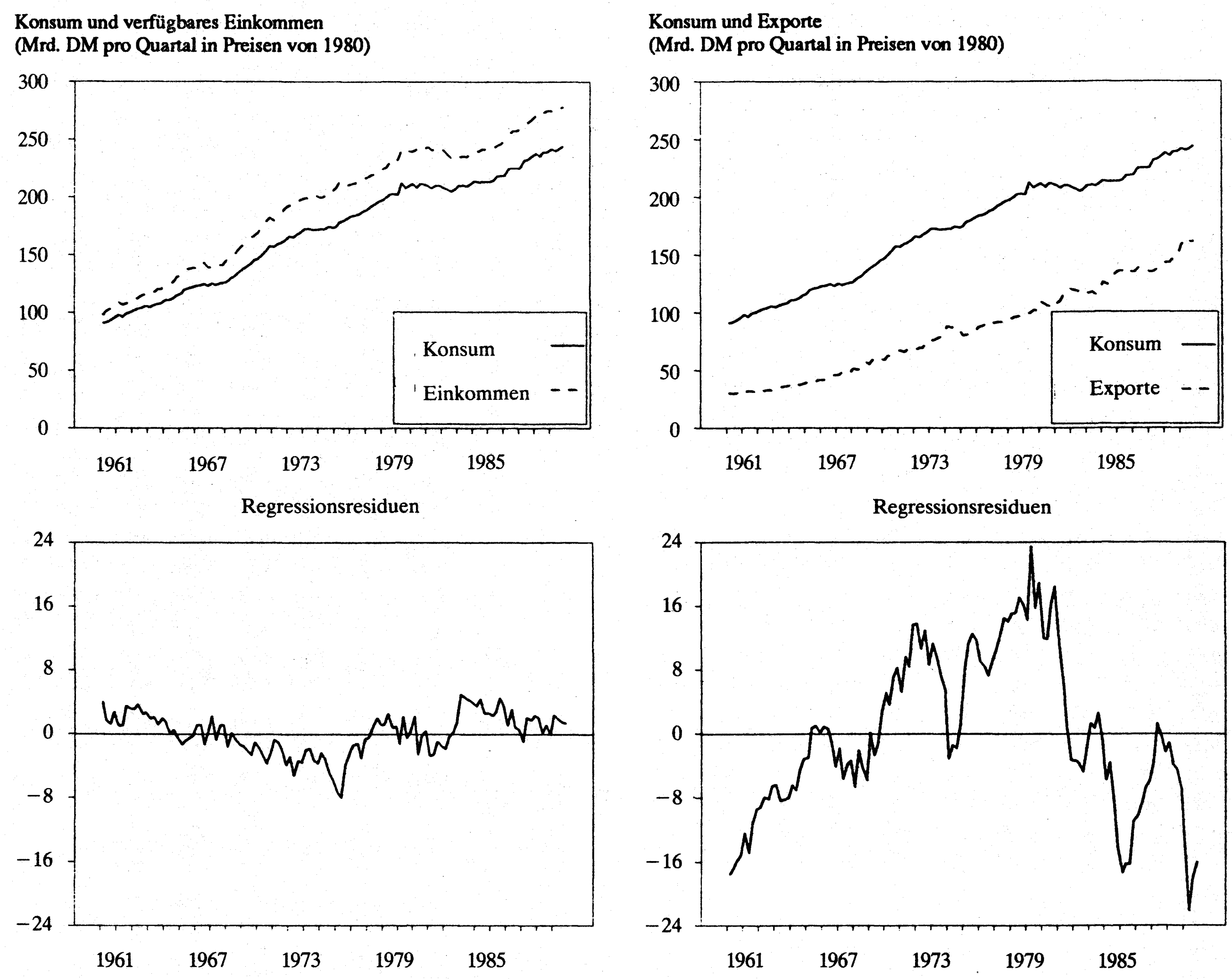

Abb. 1

de Regression passiert jedoch nicht die Tests auf Kointegration, was mit bloßem Auge anhand der beiden Niveaureihen nicht erkennbar ist. Ein Blick auf die Residuen offenbart jedoch, daß offensichtlich noch bedeutende Beträge der Konsumzeitreihe nicht erklärt sind, und die Residuen keine starke Tendenz nach einer Bewegung nach oben oder unten wieder zur Null-Linie zurückzukehren, aufweisen. Mit Hilfe der durch die Schätzung der Konsumfunktion ermittelten Residuen kann nun ein Fehlerkorrekturmodell für den privaten Konsum geschätzt werden. Für das vorliegende Beispiel ergibt sich hier

(C_t: Konsum, Y_t: verfügbares Einkommen):

$$\Delta C_t = \underset{(1{,}76)}{0{,}33} - \underset{(-2{,}46)}{0{,}12} \cdot z_{t-1} - \underset{(-3{,}41)}{0{,}30} \cdot \Delta C_{t-1} + \underset{(1{,}84)}{0{,}12} \cdot \Delta C_{t-3}$$
$$+ \underset{(10{,}26)}{0{,}62} \cdot \Delta Y_t + \underset{(1{,}82)}{0{,}15} \cdot \Delta Y_{t-1}$$

t-Statistiken in Klammern
$R^2 = 56{,}5\%$
Durbin-Watson-Statistik = 2,03

Alle Rechthandvariablen sind signifikant von Null verschieden, der Fehlerkorrekturterm hat das erwartete negative Vorzeichen: Der Koeffizient besagt, daß eine Abweichung des Konsums von seinem „Gleichgewichtswert“ um 1 Mio. DM in einem Quartal im nächsten Quartal eine Korrektur um 120 000 DM nach sich zieht. Veränderungen des verfügbaren Einkommens wirken offensichtlich primär kurzfristig mit dem erwarteten Vorzeichen. Das negative Vorzeichen der Koeffizientensumme der gelagten ΔC_t's impliziert ebenfalls einen Korrekturmechanismus, d.h. die aktuelle Konsumänderung reagiert invers auf zurückliegende Konsumänderungen.

Für eine hilfreiche Diskussion möchte ich mich bei meinen Kollegen *M. Kaltenbacher*, *M. Piazolo* und *M. Würth* herzlich bedanken.

Literatur

Engle, R.F., C.W.J. Granger, Co-Integration and Error Correction: Representation, Estimation and Testing, in: Econometrica, 35 (1987), S. 251–276.
Dieser Artikel ist der für Konzept und Anwendung von Kointegrations- und Fehlerkorrekturmodellen grundlegende Beitrag. Hier finden sich auch konkrete Tests für die Überprüfung von Kointegration.

Engle, R.F., C.W.J. Granger (Hrsg.), Long-Run Economic Relationships. Readings in Cointegration, Oxford 1991.
Hierbei handelt es sich um eine Sammlung wichtiger Originalarbeiten auf zumeist hohem technischen Niveau. Sehr gut zugänglich und empfehlenswert ist jedoch die Introduction von *Engle* und *Granger*.

Granger, C.W.J., Co-Integrated Variables and Error-Correcting Models, University of California, San Diego Discussion Paper 1983-13.

Jerger, J., Kointegrationsmodelle. Eine neue Technik zur Lösung von Regressionsproblemen, in: WiSt - Wirtschaftswissenschaftliches Studium, 9 (1991), S. 471–475.

Stock, J.H., Asymptotic Properties of Least Squares Estimators of Co-integrating Vectors, in: Econometrica, 55 (1987), S. 1035–1056.

Expositionen im Rahmen von Lehrbüchern finden sich inzwischen in:

Cuthbertson, K., S.G. Hall, M.P. Taylor, Applied Econometric Techniques, New York 1992.

Stewart, J., Econometrics, New York 1991.

Neben anderen (fortgeschritteneren) Problemen wird im folgenden Buch ebenfalls ein Kapitel der Kointegrationstechnik gewidmet, wobei hier auch konkrete Anwendungen vorgestellt werden:

Hall, S.G., S.G.B. Henry, Macroeconomic Modelling, Amsterdam 1988.

Als Einführung auf einem mittleren formalen Niveau eignet sich:

Dickey, D.A., D.W. Jansen, D.L. Thornton, A Primer On Cointegration with an Application to Money and Income, in: Federal Reserve Bank of St. Louis Review, Vol. 73, No. 2 (1991), S. 58–78.