

**Klassische und semiklassische
Anisotropieeffekte
des Magnetotransports
durch laterale Halbleiter-Übergitter**



Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)

der naturwissenschaftlichen Fakultät II - Physik
der Universität Regensburg
vorgelegt von

Roland Onderka
aus Straubing

Regensburg 2001

Promotionsgesuch eingereicht am 13.6.2001
Promotionskolloquium am 27.7.2001

Prüfungsausschuß:

Vorsitzender: Prof. Dr. D. Weiss
1. Gutachter: PD Dr. M. Suhrke
2. Gutachter: Prof. Dr. M. Brack
Weiterer Prüfer: Prof. Dr. U. Krey

Die Arbeit wurde von PD Dr. M. Suhrke angeleitet.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	5
1 Elemente der klassischen nichtlinearen Dynamik	9
1.1 Variationsprinzip von Lagrange	9
1.2 Hamiltonsche Formulierung der klassischen Mechanik	10
1.3 Integrierte Systeme	11
1.4 Chaotische Systeme	13
1.5 Stabilität periodischer Orbits	14
1.6 Poincaré-Schnitte	15
2 Magnetotransport in 2D-Systemen	19
2.1 Modellhamiltonian	19
2.2 Widerstand und Leitfähigkeit	20
2.3 Klassische Leitfähigkeit	22
2.3.1 Homogene Systeme: Drude-Modell	23
2.3.2 Modulierte Systeme: Kubo-Formel	24
2.3.3 Boltzmann-Gleichung	26
2.4 Quantenmechanischer Kubo-Formalismus	27
2.5 Semiklassik	29
2.5.1 Semiklassische Greensche Funktion und Zustandsdichte	29
2.5.2 Temperaturmittelung und Streuung	32
2.5.3 Semiklassische Kubo-Formel	34
3 Laterale Halbleiter-Übergitter	41
3.1 Experimentelle Realisierung	41
3.1.1 Zweidimensionales Elektronengas (2DEG)	41
3.1.2 Laterale Strukturierung	43
3.2 Bestimmung des Magnetowiderstands	44
3.3 Kommensurabilität in Systemen mit schwacher 1D-Modulation	44

3.4	Quadratische Antidot-Übergitter	48
3.4.1	Kommensurabilität	48
3.4.2	Quantenoszillationen	51
4	Antidot-Übergitter mit rechteckiger Einheitszelle	55
4.1	Experiment	55
4.2	Klassischer Transport	57
4.3	Quantenoszillationen	62
4.3.1	Periodische Orbits	63
4.3.2	Gitterperiodische Orbits (Runaway Trajektorien)	67
4.3.3	Driftende Orbits	70
5	Quantenoszillationen im System mit schwacher 1D-Modulation	83
6	Antidot-Übergitter mit Löchern als Ladungsträger	89
6.1	Experiment	89
6.2	Fermikonturen von Löchern in GaAs(001)	91
6.3	Klassische Dynamik mit anisotroper Masse	93
6.3.1	Effektive Masse und Hamiltonfunktion	93
6.3.2	Bewegungsgleichungen	94
6.4	Kubo-Formel	96
6.5	Magnetotransport im 2D Lochgas (2DHG)	96
6.6	Magnetotransport von Löchern im Antidotgitter	100
	Zusammenfassung	113
	Dank	127

Einleitung

„Im Kleinen ganz groß“ schrieb die Wochenzeitung *Die Zeit* [1] und unterstrich damit die Bedeutung der Nanotechnologie für die Wirtschaft. „Das Fachgebiet gilt als wichtigste Innovationsquelle des 21. Jahrhunderts“ [1]. Tatsächlich ist das Innovationspotential der Nanostrukturen heutzutage wohl noch nicht abschätzbar und resultiert unter anderem daher, daß sich die typischen Längenskalen dieser Strukturen im mesoskopischen Bereich bewegen. In diesem Bereich zwischen den mikroskopischen atomaren Strukturen und der makroskopischen Welt, die durch Sinneserfahrungen zugänglich ist, treffen die klassische Physik und die Quantenmechanik aufeinander. Besonders bei tiefen Temperaturen spielen quantenmechanische Effekte eine wichtige Rolle, andererseits können die Vorgänge in vielen Fällen schon mit den Gesetzen der klassischen Physik beschrieben werden.

Durch die Wahl der Längenskalen von Halbleiterstrukturen lassen sich heutzutage deren Eigenschaften derart beeinflussen, daß die Elektronenbewegung in einer Richtung quantisiert wird und sich ein zweidimensionales hochbewegliches Elektronengas ausbildet. Solche Systeme führten zur Entdeckung des ganzzahligen [2] und gebrochenzahligen Quanten-Hall-Effekts [3], finden aber auch in sogenannten *High Electron Mobility Transistors* ihren praktischen Einsatz in den mittlerweile allgegenwärtigen Mobiltelefonen. Durch weitere Strukturierung lassen sich die Freiheitsgrade der Elektronen sogar auf die Dimensionen eins oder null reduzieren. Die sich daraus ergebenden Quantendrähte und -punkte bilden für sich ein weites Forschungsgebiet [4, 5].

Mithilfe bestimmter Strukturierungstechniken ist es möglich, einem zweidimensionalen Elektronengas durch elektrostatische oder magnetische Felder eine periodische Struktur im 100 nm-Bereich aufzuprägen, dies wird als laterales Halbleiter-Übergitter bezeichnet. Aufgrund der hohen Beweglichkeit der Elektronen bei tiefen Temperaturen wird der Transport in erster Linie durch die künstlich erzeugte Übergitterstruktur bestimmt. Das Elektronengas mit lateralem Übergitter stellt dann einen künstlichen Kristall dar, und die diskrete Translationssymmetrie führt zu energetischen Bändern, der sogenannten Minibandstruktur innerhalb der natürlich vorkommenden Bänder des Halbleiterkristalls. Diese lateralen Übergitter erlauben das Studium von Transporteigenschaften, die mit natürlichen Kristal-

len experimentell nicht zugänglich wären.

Zur Untersuchung der elektronischen Eigenschaften von lateralen Übergittern hat sich der lineare Magnetotransport als wichtiges Gebiet etabliert. Dabei werden Longitudinal- und Hallwiderstand in Abhängigkeit eines äußeren homogenen Magnetfelds gemessen. Je nach Stärke und Geometrie der lateralen Modulation kommt es zu einer Vielzahl an beobachtbaren Effekten. Viele der Effekte im Magnetotransport wie beispielsweise die Kommensurabilitätseffekte in Antidot-systemen [6] lassen sich im Rahmen der klassischen Physik erklären [7]. Dabei werden charakteristische Maxima oder Minima im Magnetowiderstand mit der Ausbildung bestimmter Klassen von Elektronenbahnen in Verbindung gebracht.

Bei sehr tiefen Temperaturen zeigt der Magnetowiderstand lateraler Übergitter häufig auch Oszillationen, die nicht mehr klassisch erklärt werden können [8] und deren Ursprung in den Interferenzen der quantenmechanischen Wellenfunktionen liegt. Eine rein quantenmechanische Beschreibung vermag die Oszillationen im Magnetowiderstand zwar zu erklären, aber die Anschaulichkeit der klassischen Beschreibung geht dabei verloren.

Oftmals ist eine vollständig quantenmechanische Beschreibung der Oszillationen jedoch nicht nötig, da durch die endliche Temperatur und durch Streuung der Elektronen viele der quantenmechanischen Interferenzen zerstört werden und so nur die „Grobstruktur“ der Oszillationen im Experiment beobachtbar ist. Zur Beschreibung der führenden Quantenoszillationen bietet sich dann die semiklassische Näherung an [9], die es gestattet, die Oszillationen im Magnetotransport aus den periodischen Orbits des äquivalenten klassischen Systems zu berechnen [10, 11]. Die semiklassische Näherung ermöglicht so zum einen die näherungsweise Berechnung der Quantenoszillationen und bietet zum anderen den Vorteil der Anschaulichkeit einer klassischen Beschreibung.

Die theoretische Untersuchung des linearen Magnetotransports lateraler Halbleiter-Übergitter steht im Mittelpunkt dieser Arbeit. Dabei werden die oben beschriebenen klassischen und semiklassischen Konzepte des Magnetotransports zur Berechnung und Interpretation von Anisotropieeffekten benutzt. Der Magnetotransport anisotroper Systeme zeigt dabei im Vergleich zu isotropen Systemen zusätzliche Effekte, die zu einem tieferen Verständnis der Mechanismen im Ladungsträgertransport durch laterale Übergitter beitragen. Die ersten drei Kapitel beinhalten Grundlagen zur Theorie und zu bekannten Transporteffekten. In den folgenden drei Kapiteln werden Ergebnisse zu unterschiedlichen Systemen vorgestellt. Die Arbeit gliedert sich folgendermaßen in die einzelnen Kapitel:

1. Ausgehend von integrierbaren Systemen werden die grundlegenden Eigenschaften der klassischen Dynamik chaotischer Systeme erläutert. Die Stabilität periodischer Orbits und das Konzept des Poincaré-Schnitts zur Analyse des klassischen Phasenraums wird besprochen.

2. Die in der Arbeit verwendeten Konzepte zur Berechnung des klassischen und semiklassischen Magnetotransports werden vorgestellt. Dazu zählen die Drude-Theorie, die klassische Kubo-Theorie, die linearisierte Boltzmann-Gleichung und die Quantisierung klassischer periodischer Orbits im Rahmen der semiklassischen Näherung der Kubo-Formel.
3. Die experimentelle Realisierung lateraler Übergitter wird kurz skizziert. Die klassische und die quantenmechanische Erklärung der Kommensurabilitätsoszillationen in Systemen mit schwacher eindimensionaler Modulation wird vorgestellt. Im quadratischen Antidot-Übergitter treten ebenfalls klassische Kommensurabilitätsoszillationen auf, denen sich bei tiefen Temperaturen Quantenoszillationen überlagern.
4. Ein Antidot-Übergitter mit rechteckiger Einheitszelle zeigt experimentell beobachtete Anisotropien in den longitudinalen Komponenten im klassischen und quantenmechanischen Anteil des Magnetowiderstands. Es wird die numerische Berechnung des Magnetowiderstands mithilfe der klassischen Kubo-Formel vorgestellt, daran anschließend folgt die Analyse der Leitfähigkeitsoszillationen im Rahmen der semiklassischen Kubo-Formel. Die semiklassische Analyse mit klassischen periodischen Orbits und gitterperiodischen Orbits führt nicht zum erforderlichen Resultat. Eine störungstheoretische Erweiterung der semiklassischen Näherung der Shubnikov-de Haas-Oszillationen zeigt den anisotropen Einfluß der driftenden Zyklotronorbits und reproduziert qualitativ die Anisotropie der Quantenoszillationen.
5. Die Quantenoszillationen in einem System mit schwacher eindimensionaler Modulation sind ebenfalls stark anisotrop. Die semiklassische Störungstheorie aus dem vorigen Kapitel zeigt eine quantitative Übereinstimmung mit der quantenmechanischen Rechnung und erklärt das Verhalten der Einhüllenden der Quantenoszillationen.
6. Im quadratischen Antidot-Übergitter mit Löchern als Ladungsträger liegt die Anisotropie in der Fermikontur der Löcher. Das Experiment zeigt eine Verschiebung des klassischen Kommensurabilitätsmaximums 2. Ordnung abhängig von der Orientierung der Fermikontur bezüglich des Antidotgitters. Die anisotrope Fermikontur wird mit einem einfachen kp -Modell beschrieben und über eine Erweiterung der Effektivmassennäherung in die (semi)klassischen Bewegungsgleichungen integriert. Der damit über die klassische Kubo-Formel berechnete Magnetowiderstand bestätigt die Ergebnisse des Experiments und zeigt als Ursache die Stabilisierung von gitterperiodischen Trajektorien aufgrund des Wechselspiels zwischen der Anisotropie der Fermikontur und dem lateralen Übergitter.

Kapitel 1

Elemente der klassischen nichtlinearen Dynamik

Sowohl der klassische als auch der semiklassische Anteil des linearen Transports basieren auf Eigenschaften der klassischen Dynamik. Deshalb werden in diesem Kapitel Grundlagen der nichtlinearen Dynamik anhand von klassischen Hamiltonschen Systemen vorgestellt, die zum weiteren Verständnis benötigt werden. Eine ausführlichere Behandlung der klassischen Dynamik findet sich in verschiedenen Lehrbüchern [9, 12, 13, 14].

1.1 Variationsprinzip von Lagrange

Das Variationsprinzip von Lagrange führt zu den Bewegungsgleichungen klassischer Systeme und ist damit eine der wichtigsten Grundlagen der Physik überhaupt [9]. Wir wollen hier ein mechanisches System mit N Freiheitsgraden betrachten, dessen Zustand zu jeder Zeit t durch die Angabe von N räumlichen Koordinaten $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_N)$ und N (verallgemeinerten) Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{q}} = (\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_N)$ festgelegt ist. Das Variationsprinzip wird mithilfe der *Lagrangefunktion* $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ formuliert, die als Differenz der kinetischen Energie T und der potentiellen Energie U definiert ist

$$L = T - U . \quad (1.1)$$

Die Bewegung des mechanischen Systems von den Koordinaten \mathbf{q}' zur Zeit t' zur Position \mathbf{q} zur Zeit t erfolgt entlang einer Trajektorie $\mathbf{q}(\tau)$ die ein Extremum des Wirkungsintegrals R (Hamiltons Prinzipalfunktion)

$$\delta R = \delta \int_{t'}^t d\tau L(\mathbf{q}(\tau), \dot{\mathbf{q}}(\tau), \tau) = 0 \quad (1.2)$$

ist. Das bedeutet, von allen (mathematisch) möglichen Pfaden $\mathbf{q}(\tau)$, die die Randbedingungen $\mathbf{q}(t') = \mathbf{q}'$ und $\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}$ erfüllen, bewegt sich das klassische System entlang einer Trajektorie $\mathbf{q}(\tau)$ die (1.2) erfüllt. Genau in (1.2) besteht einer der wichtigsten Unterschiede zur Dynamik eines quantenmechanischen Systems, bei dem der Transfer des Quantensystems von \mathbf{q}' nach \mathbf{q} im Zeitintervall von t' bis t durch *alle* Pfade bestimmt wird, die die gegebenen Randbedingungen erfüllen [15].

Die Trajektorien $\mathbf{q}(t)$ sind Lösungen der Lagrange-Gleichungen 2. Art

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad (i = 1, \dots, N), \quad (1.3)$$

die aus dem Variationsprinzip (1.2) abgeleitet werden.

1.2 Hamiltonsche Formulierung der klassischen Mechanik

Die Formulierung der klassischen Mechanik im Hamilton-Formalismus beginnt mit der Definition der kanonischen Impulse p_i

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad (i = 1, \dots, N). \quad (1.4)$$

Der Zustand des klassischen Systems wird jetzt durch die Koordinaten q_i und die kanonischen Impulse p_i aus (1.4) festgelegt. Aus der Lagrangefunktion wird die *Hamiltonfunktion* H mittels der Legendre-Transformation

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) = \sum_{i=1}^N p_i \dot{q}_i - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \quad (1.5)$$

erhalten. Die Bewegungsgleichungen liefern dann die Dynamik der Koordinaten q_i und Impulse p_i und lassen sich mithilfe der Hamiltonfunktion schreiben als

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \quad (1.6)$$

Für autonome Systeme, das heißt, falls die Lagrangefunktion keine explizite Zeitabhängigkeit besitzt ($\partial L / \partial t = 0$), ist (1.5) eine Erhaltungsgröße und die Hamiltonfunktion $H(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ gleich der Energie E . Im folgenden werden in dieser Arbeit ausschließlich Systeme mit Energieerhaltung untersucht.

Der $2N$ -dimensionale Raum, in dem sich die Dynamik der Koordinaten q_i und Impulse p_i gemäß (1.6) abspielt, heißt *Phasenraum*. Ein klassisches System

bewegt sich immer entlang einer Phasenraumtrajektorie $\gamma(t) = (\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))$, die über die Anfangsbedingungen $\gamma(0)$ und (1.6) eindeutig festgelegt ist. Gleichung (1.6) beschreibt somit den Fluß des Phasenraumvektors γ über eine Art Gradient der Hamiltonfunktion H

$$\dot{\gamma} = J \cdot \frac{\partial H}{\partial \gamma}. \quad (1.7)$$

Dabei ist

$$J = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

die symplektische Einheitsmatrix mit der Einheitsmatrix $\mathbf{1}$ und der Nullmatrix $\mathbf{0}$ in N -Dimensionen.

Eine fundamentale Eigenschaft des Phasenraums ist die Inkompressibilität des Phasenraumflusses, oder, mit anderen Worten, die Erhaltung des Phasenraumvolumens unter (1.7), die im Satz von Liouville formuliert wird. Ein Phasenraumvolumen ändert unter der Dynamik (1.7) zwar seine Form, nicht jedoch sein Volumen und es bleibt stets einfach zusammenhängend.

Falls sich das anfänglich gewählte Phasenraumvolumen nach einer gewissen Zeit nahezu gleichmäßig über den gesamten Phasenraum verteilt, dann ist das System *ergodisch*. Das bedeutet, daß der zeitliche Mittelwert einer dynamischen Variablen gleich dem Phasenraummittel wird.

1.3 Integrable Systeme

Diese Arbeit behandelt fast ausschließlich das Verhalten chaotischer Systeme, bzw. von Systemen mit einem gemischten Phasenraum aus regulären und chaotischen Anteilen. Um die besonderen Eigenschaften der chaotischen Systeme verstehen zu können, ist es jedoch notwendig zunächst einen Blick auf integrable Systeme zu werfen.

Integrable Systeme werden durch die Existenz von Erhaltungsgrößen zusätzlich zur Energie charakterisiert. Eine Erhaltungsgröße ist dabei gegeben durch eine Funktion $F(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ im Phasenraum, deren Wert entlang einer Trajektorie $\gamma(t)$ zeitlich konstant bleibt. Dies erfordert

$$\begin{aligned} 0 = \frac{d}{dt} F(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= \sum_{i=1}^N \left[\frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} + \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} \right] \\ &= \sum_{i=1}^N \left[\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial F}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial F}{\partial p_i} \right] = \{H, F\} \end{aligned} \quad (1.9)$$

Die zweite Zeile definiert die *Poissonklammer* $\{H, F\}$, zwischen den Größen H und F im Phasenraum. Eine dynamische Variable F deren Poissonklammer mit der Hamiltonfunktion H gemäß (1.9) verschwindet, ist eine *Erhaltungsgröße*. Die Trajektorien eines Systems bewegen sich dann auf einer Mannigfaltigkeit im Phasenraum, die durch die Fläche konstanter Energie $H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = E$ und durch die Fläche der Erhaltungsgröße $F(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \text{const.}$ definiert ist. Besitzt ein System mit N Freiheitsgraden neben der Energie noch $N - 1$ zusätzliche voneinander unabhängige Erhaltungssätze, deren Poisson-Klammern untereinander alle verschwinden, dann ist das System integrabel.

In einem integrablen System liegen die Trajektorien $\gamma(t)$ auf einer Mannigfaltigkeit, die einem N -dimensionalen Torus entspricht. Dies folgt aus der Tatsache, daß die Poisson-Klammern aller Erhaltungsgrößen untereinander verschwinden, und dem Poincaré-Hopf-Theorem aus der Topologie.

Diese Torusstruktur der integrablen Systeme legt die Verwendung eines speziellen Koordinatensystems nahe, den *Winkel- und Wirkungsvariablen*. Zunächst besteht im Hamiltonschen Formalismus eine große Freiheit, was die Wahl eines speziellen Koordinatensystems angeht. Es gibt eine Menge an Koordinatentransformationen, genannt *kanonische Transformationen*, die die Struktur (1.7) der Bewegungsgleichungen invariant lassen. Bei integrablen Systemen gibt es eine „optimale“ kanonische Transformation auf N -Winkelvariablen Φ_i , die 2π periodisch sind, und deren kanonisch konjugierte Impulse, den Wirkungsvariablen I_i ($i = 1, \dots, N$) und zwar so, daß die resultierende Hamiltonfunktion H nur noch von den Wirkungsvariablen \mathbf{I} abhängt. Die Bewegungsgleichungen werden dann zu

$$\dot{\Phi}_i = \frac{\partial H}{\partial I_i} = \omega_i(\mathbf{I}), \quad \dot{I}_i = -\frac{\partial H}{\partial \Phi_i} = 0 \quad (1.10)$$

und lassen sich leicht integrieren

$$\Phi_i(t) = \Phi_i(0) + \omega_i(\mathbf{I})t, \quad I_i(t) = I_i(0). \quad (1.11)$$

Eine Trajektorie liegt in integrablen Systemen immer auf einem Torus, dessen Radien durch die Wirkungsvariablen \mathbf{I} gegeben sind.

Eine Trajektorie ist periodisch, wenn es eine Umlaufzeit T gibt, für die $\gamma(t) = \gamma(t+T)$ gilt. Die Periodizität im Phasenraum bedingt dann natürlich auch, daß die Bahn im Ortsraum geschlossen und periodisch ist. Eine periodische Trajektorie wird auch als *periodischer Orbit* bezeichnet.

In integrablen Systemen ist eine Trajektorie periodisch, wenn die Frequenzen ω_i die Bedingungen

$$\omega_i T = n_i 2\pi, \quad n_i \in \mathbb{N}, \quad (i = 1, \dots, N) \quad (1.12)$$

erfüllen. Die Bedingung für die Periodizität lautet demnach, daß die Verhältnisse der Frequenzen ω_i/ω_j rational sein müssen, die Frequenzen sind zueinander *kommensurabel*.

Bei irrationalen Verhältnissen ist die Trajektorie nicht geschlossen und überdeckt schließlich den gesamten Torus. Das System ist dann auf dem Torus ergodisch. Damit das System insgesamt ergodisch wird, müssen alle Tori, die auf der Energieschale liegen, irrationale Frequenzverhältnisse aufweisen.

1.4 Chaotische Systeme

Wie im obigen Abschnitt zu sehen war, erfordern integrable Systeme eine entsprechend hohe Anzahl an Erhaltungssätzen bzw. Symmetrien. In der Natur sind solche Systeme aber eher die Ausnahme. Selbst autonome Systeme mit einem Teilchen in zwei Dimensionen, die in dieser Arbeit untersucht werden, weisen, wenn zur Energieerhaltung keine weiteren Erhaltungssätze hinzukommen, chaotisches Verhalten auf. So ist das zweidimensionale Elektronengas (2DEG) in der Einteilchennäherung, das in Abschnitt 3.1.1 besprochen wird, aufgrund der räumlichen Homogenität ein integrables System. Diese Integrabilität des 2DEGs wird durch eine zusätzliche Strukturierung des homogenen Systems im Allgemeinen jedoch sofort zerstört (siehe Abschnitt 3.1.2) und das System wird chaotisch.

Das chaotische Verhalten ist dadurch charakterisiert, daß sich eng benachbarte Phasenraumpunkte im Laufe ihrer zeitlichen Entwicklung exponentiell voneinander entfernen. Der Zustand des chaotischen Systems ist daher äußerst kritisch von der Anfangsbedingung abhängig. Da jedoch weder in der Natur, noch im numerischen Experiment am Computer, die Anfangsbedingung mit beliebiger Genauigkeit bekannt oder bestimmbar ist, sieht es so aus, als ob der Zustand des Systems auf langen Zeitskalen undefinierbar wäre.

Die Zeitentwicklung aller mechanischen Systeme, egal ob chaotisch oder integrabel, wird jedoch durch einen Satz an Bewegungsgleichungen beschrieben und ist somit in strengster Weise deterministisch, daraus ergibt sich der scheinbar widersprüchliche Begriff des *deterministischen Chaos*.

Die beschriebene Sensitivität gegenüber den Anfangsbedingungen ist in der Regel nicht für alle Trajektorien eines chaotischen Systems gleich. Im allgemeinen kommen auch in chaotischen Systemen neben den oben beschriebenen instabilen Trajektorien (chaotische oder hyperbolische Bahnen) auch stabile Trajektorien vor (reguläre oder elliptische Bahnen), bei denen eine kleine Abweichung der Anfangsbedingung immer im Bereich der ursprünglichen Trajektorie bleibt. Das System besitzt dann einen gemischten Phasenraum, der aus chaotischen und regulären Bereichen besteht. Diese Mischform aus elliptischem und hyperbolischem Verhalten wird auch als *weiches Chaos* bezeichnet. Das Verhalten eines

Systems in dem überwiegend hyperbolische Bahnen auftreten, fällt unter den Begriff *hartes Chaos*. Mechanische Systeme weisen somit ein weites Spektrum an Verhaltensweisen auf mit Integrabilität auf der einen und hartem Chaos auf der anderen Seite.

Der Übergang eines integrablen Systems hin zum vollständig chaotischen System (hartes Chaos) ist im allgemeinen sehr kompliziert, wie schon am Beispiel der Bifurkationen periodischer Orbits in Abschnitt 1.5 zu sehen ist. Hier sollen nun kurz zwei Theoreme skizziert werden, die das Szenario der Störung eines integrablen Systems beschreiben. Einzelheiten zu diesen Theoremen sind beispielsweise in [16] und [9] zu finden.

Es stellt sich die Frage, was mit den invarianten Tori passiert, wenn die Integrabilität eines Systems durch eine kleine Störung aufgehoben wird. Einen Teil dieser Frage beantworteten Kolmogorov, Arnold und Moser nach denen das KAM-Theorem benannt wurde. Die Aussage des KAM-Theorems lautet im wesentlichen, daß hinreichend irrationale Tori bei kleinen Störungen erhalten bleiben. Die Aussage hinreichend irrational bezieht sich dabei auf die Konvergenz der Kettenbruchentwicklung.

Das Theorem von Poincaré und Birkhoff gibt dagegen Auskunft darüber, was mit den rationalen Tori geschieht. Diese brechen in Ketten von stabilen und instabilen Fixpunkten auf. Ein Szenario, das den Bifurkationen in Abschnitt 1.5 sehr ähnlich ist, und letztlich eine selbstähnliche (fraktale) Struktur im Phasenraum erzeugt.

1.5 Stabilität periodischer Orbits

Im Rahmen der semiklassischen Näherung, die in Kapitel 2 besprochen wird, spielt die Stabilität periodischer Orbits eine wichtige Rolle. Ein quantitatives Maß für die lokale Stabilität der Phasenraumtrajektorien $\gamma(t)$ ist die $(2N \times 2N)$ -Matrix $M_\gamma(t)$, die angibt, wie sich eine Störung $\delta\gamma(0)$ im Anfangswert $\gamma(0)$ in linearer Näherung zeitlich entwickelt

$$\delta\gamma(t) = M_\gamma(t) \delta\gamma(0) . \quad (1.13)$$

Die Zeitentwicklung von M , die sich aus den Hamiltonschen Bewegungsgleichungen in linearer Näherung ergibt, lautet [17]

$$\dot{M} = \mathcal{L}_\gamma M \quad \text{mit} \quad \mathcal{L}_\gamma(t) = J \left. \frac{\partial^2 H}{\partial \gamma^2} \right|_{\gamma(t)} . \quad (1.14)$$

der Anfangsbedingung $M_\gamma(0) = \mathbf{1}$ und der Matrix der 2. Ableitungen der Hamiltonfunktion $\frac{\partial^2 H}{\partial \gamma^2}$.

Für periodische Orbits mit der Umlaufzeit T wird $M_\gamma(T)$ als Monodromiematrix bezeichnet. Die Monodromiematrix ist symplektisch, das bedeutet $M_\gamma^\dagger J M_\gamma = J$. Aus der Symplektizität ergibt sich, daß die Eigenwerte von M_γ paarweise auftreten, das soll heißen, falls λ ein Eigenwert zu M_γ ist, dann ist auch $1/\lambda$ ein Eigenwert, sowie die komplex konjugierten λ^* und $1/\lambda^*$. In konservativen Systemen sind aufgrund der Energieerhaltung zwei der Eigenwerte von M_γ gleich 1. Durch eine Koordinatentransformation lassen sich die beiden trivialen Eigenwerte eliminieren und es ergibt sich die $((2N - 2) \times (2N - 2))$ -Matrix \tilde{M}_γ , die als reduzierte Monodromiematrix oder Stabilitätsmatrix bezeichnet wird.

In Systemen mit 2 Freiheitsgraden, die in dieser Arbeit untersucht werden, gibt es für die Eigenwerte λ und $1/\lambda$ der Stabilitätsmatrix folgende Möglichkeiten [9]:

- $\lambda = \exp(\pm i\nu)$, der periodische Orbit ist stabil, Die reelle Zahl $\nu \neq 0$ wird als Stabilitätswinkel bezeichnet.
- $\lambda = \pm \exp(\pm \nu)$, der periodische Orbit ist instabil mit Lyapunov-Exponent $\sigma = \nu/T$.
- $\lambda = 1$ oder $\lambda = -1$, der periodische Orbit ist marginal stabil.

Häufig wird die Stabilität eines Orbits durch die Spur der Stabilitätsmatrix

$$\text{tr}(\tilde{M}_\gamma) = \lambda + 1/\lambda \quad (1.15)$$

charakterisiert. Bei stabilen oder elliptischen Orbits gilt dann $|\text{tr}(\tilde{M}_\gamma)| < 2$ und bei instabilen oder hyperbolischen Orbits entsprechend $|\text{tr}(\tilde{M}_\gamma)| > 2$.

Bei der Untersuchung der Eigenschaften klassischer Systeme wird häufig ein Parameter in der Hamiltonfunktion variiert. In dieser Arbeit ist dies beispielsweise ein externes homogenes Magnetfeld. Mit der Änderung des Parameters ändern sich dadurch natürlich auch die periodischen Orbits und deren Stabilitätseigenschaften. Eine Besonderheit tritt immer dann auf, wenn die Spur der Stabilitätsmatrix des periodischen Orbits den Wert 2 annimmt, das heißt, wenn der Orbit die Grenze zwischen dem stabilen und dem instabilen Bereich durchläuft. In diesem Fall treten *Bifurkationen* auf, das bedeutet, es werden neue periodische Orbits gebildet oder vernichtet. Das Auftreten von Bifurkationen periodischer Orbits ist typisch für Systeme mit gemischtem Phasenraum (weiches Chaos) und erschwert die theoretische Behandlung solcher gemischten Systeme enorm.

1.6 Poincaré-Schnitte

Wie sich im obigen Abschnitt über chaotische Systeme gezeigt hat, haben die Trajektorien im Phasenraum häufig ein kompliziertes Verhalten auf längeren Zeitska-

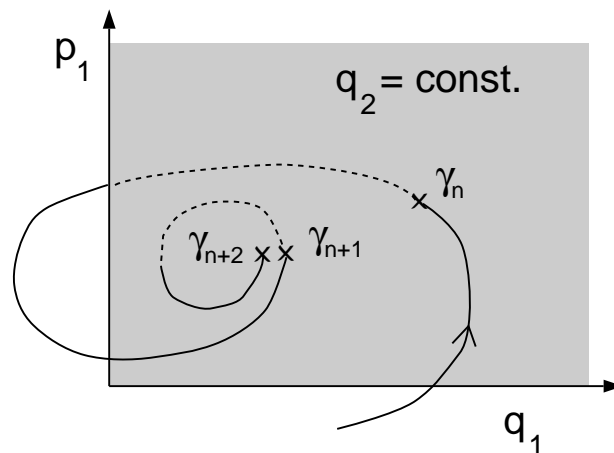


Abbildung 1.1: Schnittpunkte γ_n der Trajektorie $\gamma(t)$ mit der Poincaré-Ebene, die durch $q_2 = \text{const.}$ definiert ist.

len. Bereits bei Systemen mit zwei Freiheitsgraden ist der Phasenraum vierdimensional, was eine vollständige Visualisierung der Trajektorien praktisch unmöglich macht.

H. Poincaré schlug daher vor, den Fluß der Trajektorien im $2N$ -dimensionalen Phasenraum zu diskreten Zeiten t_n zu unterbrechen, anstatt den gesamten zeitlichen Verlauf kontinuierlich zu verfolgen. Dabei wird immer, wenn die Trajektorie eine vorgegebene $2N - 1$ -dimensionale Hyperebene in einer definierten Richtung durchstößt, der zugehörige $2N - 1$ -dimensionale Phasenraumpunkt notiert. Diese $2N - 1$ -dimensionalen Phasenraumpunkte ergeben dann den Poincaré-Schnitt.

In der Praxis eignet sich dieses Verfahren besonders gut für autonome Systeme mit zwei Freiheitsgraden. Die Trajektorien im vierdimensionalen Phasenraum des Systems liegen aufgrund der Energieerhaltung auf einer dreidimensionalen Mannigfaltigkeit (Energieschale). Nach der Definition einer Poincaré-Schnittebene, zum Beispiel durch Festlegung einer weiteren Phasenraumkoordinate, ergibt sich aus den Schnittpunkten der Trajektorie mit der Poincaré-Ebene ein zweidimensionaler Poincaré-Schnitt (siehe Abbildung 1.1). Falls eine Trajektorie in der Schnittebene liegt, dann sind weder die Schnittpunkte noch die Durchstoßrichtung definiert, und die Schnittfläche muß anders gewählt werden, um das Verhalten einer solchen Trajektorie zu erfassen.

In einem vollständig chaotischem System liegen die Schnittpunkte der Trajektorien über den gesamte Poincaré-Schnitt gleichmäßig verteilt. Eine periodische Bahn führt zu einer diskreten Menge an Durchstoßpunkten, die wiederholt durchlaufen werden. Periodische Bahnen können daher auch als Fixpunkte der Poincaré-Abbildung aufgefaßt werden. Die Struktur der Umgebung eines solchen

Fixpunkts läßt Rückschlüsse auf die Stabilität der periodischen Bahn zu. Bei stabilen (elliptischen) Bahnen ergibt sich eine charakteristische Inselstruktur aus Ellipsen, wohingegen bei instabilen (hyperbolischen) Bahnen die lokale Umgebung durch Hyperbeln charakterisiert ist.

Kapitel 2

Magnetotransport in 2D-Systemen

Im Folgenden werden klassische und semiklassische Konzepte vorgestellt, die zur Untersuchung des linearen Magnetotransports zweidimensionaler Elektronensysteme in dieser Arbeit verwendet werden. Rein klassische Beschreibungen des Magnetotransports im Rahmen des Drude-Modells, der Kubo-Theorie oder einer spezialisierten Form der Boltzmann Gleichung sind für die Erklärung einiger Effekte im ballistische Transport bereits ausreichend und bilden zugleich die Grundlage für die semiklassischen Erweiterungen. Die semiklassische Formulierung im Rahmen der *Periodic Orbit Theory* (POT) gestattet es, Quanteninterferenzeffekte im Magnetotransport in führender Ordnung zu berechnen, und in Form von klassischen periodischen Bahnen zu analysieren. Die Ableitung der semiklassischen Leitfähigkeit basiert auf der quantenmechanischen Kubo-Formel, die ebenfalls kurz skizziert wird.

2.1 Modellhamiltonian

Die Systeme, die in dieser Arbeit in Kapitel 4 und Kapitel 5 untersucht werden, werden durch den Einteilchen-Hamiltonian

$$H = \frac{1}{2m^*} (\mathbf{p} + e\mathbf{A}(\mathbf{r}))^2 + U(x, y) \quad (2.1)$$

charakterisiert. Hier ist $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ ein Vektorpotential für ein externes homogenes Magnetfeld \mathbf{B} . In dieser Arbeit wird für das Vektorpotential immer die symmetrische

Eichung

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{r} \times \mathbf{B}) \quad \text{mit} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

gewählt, so daß das Magnetfeld stets senkrecht zur Ebene des zweidimensionalen Elektronensystems angeordnet ist. Der Einfluß des Kristallgitters und der Elektron-Elektron-Wechselwirkung auf ein freies Elektron der Masse m_e wird über die Effektivmassennäherung in der konstanten Masse m^* berücksichtigt. Für die Systeme, bei denen das zweidimensionale Elektronengas in einem GaAs-Halbleiter realisiert wurde, wird für die effektive Masse der Wert $m^* = 0.0665 m_e$ verwendet [18]. Die Beschreibung eines zweidimensionalen Systems mit Löchern als Ladungsträger erfordert hingegen, aufgrund der Anisotropie der Fermikonturen, die Erweiterung von (2.1) mit einer orts- und impulsabhängigen Masse. Dies wird in Kapitel 6 näher erläutert.

Das skalare Potential $U(x, y)$ soll die laterale Strukturierung des zweidimensionalen Elektronengases (siehe Kapitel 3) berücksichtigen. Je nach Dimension der Strukturierung (1D oder 2D) und je nach Stärke des resultierenden Modulationspotentials bezogen auf die Fermienergie ergibt sich eine Vielzahl unterschiedlicher Systeme, die in Abbildung 2.1 schematisch dargestellt sind. In dieser Arbeit werden Systeme mit starker 2D-Modulation (Antidot-Übergitter) mit Elektronen oder Löchern als Ladungsträger und ein System mit schwacher 1D-Modulation untersucht.

Die Untersuchungen dieser Arbeit konzentrieren sich auf den Bereich des ballistischen Magnetotransports, das heißt auf den Einfluß des lateralen Potentials $U(x, y)$ auf die Transportgrößen. Die Streuung der Ladungsträger, die bei den untersuchten Systemen bei tiefen Temperaturen hauptsächlich an ionisierten Störstellen stattfindet, wird deshalb nur in einfachster Näherung über eine konstante Streuzeit τ berücksichtigt.

2.2 Widerstand und Leitfähigkeit

Grundlage der Bestimmung des spezifischen Widerstands einer Probe ist das Ohmsche Gesetz

$$\mathbf{E} = \rho \mathbf{j} . \quad (2.3)$$

In zweidimensionalen Elektronensystemen sind sowohl die Stromdichte \mathbf{j} , als auch das elektrische Feld \mathbf{E} zweikomponentige Vektoren und in kartesischen Ko-

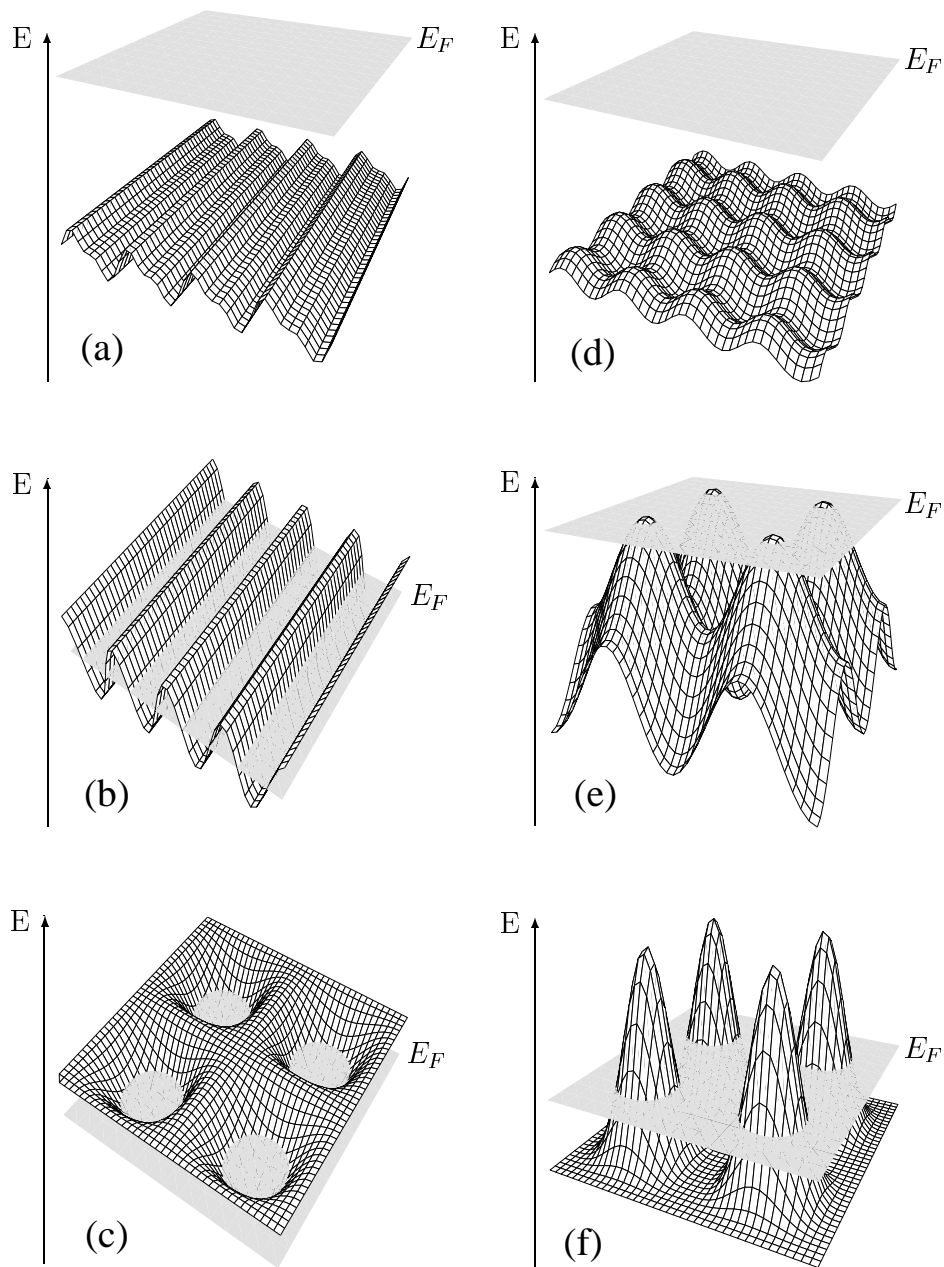


Abbildung 2.1: Schematische Darstellung von lateral elektrostatisch modulierten Systemen. Die Stärke der Modulation ist abhängig vom Verhältnis der Fermienergie E_F zur Amplitude des elektrostatischen Potentials. (a) schwache 1D-Modulation, (b) sehr starke 1D-Modulation (Quantendrähte), (c) Quantendots, (d) schwache 2D-Modulation, (e) starke 2D-Modulation, (f) sehr starke 2D-Modulation (Antidots) (aus [19]).

ordinaten ergibt sich der Widerstandstensor

$$\boldsymbol{\rho} = \begin{pmatrix} \rho_{xx} & \rho_{xy} \\ \rho_{yx} & \rho_{yy} \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Die Diagonalelemente ρ_{xx} und ρ_{yy} werden als *Longitudinalwiderstände* bezeichnet, die Nebendiagonalelemente ρ_{xy} und ρ_{yx} heißen *Hallwiderstände*.

Das Ohmsche Gesetz (2.3) beschreibt einen linearen Zusammenhang zwischen der Stromdichte \mathbf{j} und dem elektrischen Feld \mathbf{E} . Dabei wird angenommen, daß der Tensor des spezifischen Widerstands $\boldsymbol{\rho}$ einerseits unabhängig ist von der Stromdichte \mathbf{j} und andererseits nicht von den äußeren Abmessungen der Probe abhängt.

Die Gültigkeit des Ohmschen Gesetzes ist daher zum einen beschränkt auf makroskopische Proben, bei denen die Abmessungen der Probe groß sind gegenüber internen Längenskalen, wie zum Beispiel Fermiwellenlänge, mittlere freie Weglänge und Phasenkohärenzlänge. Zum anderen sollte die Stromdichte \mathbf{j} klein genug sein, damit die lineare Näherung (2.3) gültig ist.

Der Leitfähigkeitstensor $\boldsymbol{\sigma}$, der durch

$$\mathbf{j} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{E} \quad (2.5)$$

definiert ist, kann mittels Tensorinversion aus den Komponenten des Widerstandstensors berechnet werden.

Die theoretische Behandlung zweidimensionaler Elektronensysteme, die in den folgenden Abschnitten erläutert wird, liefert die Komponenten des Leitfähigkeitstensors, aus denen sich der Widerstand folgendermaßen ergibt

$$\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\sigma}^{-1} = \frac{1}{\sigma_{xx}\sigma_{yy} - \sigma_{xy}\sigma_{yx}} \begin{pmatrix} \sigma_{yy} & -\sigma_{xy} \\ -\sigma_{yx} & \sigma_{xx} \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Für die Hall-Leitfähigkeit gilt auch in anisotropen Systemen die Onsager-Casimir-Relation $\sigma_{xy}(B) = \sigma_{yx}(-B)$ [20, 21]. Bei Systemen mit zusätzlicher Spiegelsymmetrie in x - und y -Richtung wie beim Rechteckgitter in Kapitel 4 gilt zusätzlich $\sigma_{xy}(B) = -\sigma_{yx}(-B)$, woraus $\sigma_{xy}(B) = -\sigma_{yx}(B)$ und $\rho_{xy}(B) = -\rho_{yx}(B)$ folgt.

2.3 Klassische Leitfähigkeit

Die theoretische Beschreibung der Leitfähigkeit im Rahmen der klassischen Physik bietet in manchen Fällen Vorteile gegenüber einer vollen quantenmechanischen Formulierung. Zunächst sind, wie in dieser Arbeit noch oft zu sehen sein

wird, viele Effekte, die beim Magnetotransport beobachtet werden, rein klassischer Natur und benötigen somit keine volle quantenmechanische Beschreibung. Die Beschränkung auf eine klassische Beschreibung bringt in der Regel auch eine wesentliche Reduktion des numerischen Aufwands konkreter Rechnungen mit sich. Der wichtigste Aspekt, der jedoch für eine klassische Beschreibung spricht, ist wohl die höhere Anschaulichkeit gegenüber der Quantenmechanik. Der beobachtete Effekt ist dann eben auch in der „Sprache“ der klassischen Mechanik, also beispielsweise in Form von Bahnen klassischer Teilchen interpretierbar. Dieser Aspekt der Anschaulichkeit einer Beschreibung mittels klassischer Größen wird auch bei der semiklassischen Näherung in Abschnitt 2.5 eine wichtige Rolle spielen.

2.3.1 Homogene Systeme: Drude-Modell

Das Drude-Modell geht von den klassischen Bewegungsgleichungen eines Elektrons in homogenen äußeren elektrischen und magnetischen Feldern aus:

$$m^* \dot{\mathbf{v}} = -e(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) - e\mathbf{E} - \frac{m^*}{\tau} \mathbf{v}. \quad (2.7)$$

Um eine endliche Leitfähigkeit zu erhalten, muß die zufällige Streuung der Elektronen an Störstellen berücksichtigt werden. Dies geschieht über den phänomenologischen Reibungsterm $-\frac{m^*}{\tau} \mathbf{v}$ in (2.7), der als charakteristische Größe die mittlere Flugzeit τ enthält. Im stationären Fall ist die Stromdichte

$$\mathbf{j} = -en\mathbf{v} \quad (2.8)$$

des Systems mit der Ladungsträgerdichte n zeitlich konstant. Daraus folgt $\dot{\mathbf{v}} = 0$ und aus (2.7) ergibt sich eine konstante Driftgeschwindigkeit proportional zum elektrischen Feld. Zusammen mit dem Ohmschen Gesetz (2.3) folgt für den Magnetowiderstand im Drude-Modell

$$\rho_{xx} = \frac{1}{\sigma_0}, \quad \rho_{xy} = \frac{\omega_c \tau}{\sigma_0} \quad (2.9)$$

und für die Leitfähigkeit

$$\sigma_{xx} = \frac{\sigma_0}{1 + (\omega_c \tau)^2}, \quad \sigma_{xy} = \omega_c \tau \sigma_{xx} \quad (2.10)$$

mit

$$\sigma_0 = en\mu, \quad \omega_c = \frac{eB}{m^*}, \quad \text{und} \quad \mu = \frac{e\tau}{m^*}. \quad (2.11)$$

Im Drude-Modell ist somit der longitudinale Widerstand ρ_{xx} in Abhängigkeit vom Magnetfeld konstant, während der Hallwiderstand ρ_{xy} direkt proportional zum Magnetfeld ist. Die Leitfähigkeit geht bei hohen Magnetfeldern ($\omega_c\tau \gg 1$) für σ_{xx} wie $1/B^2$ und für σ_{xy} wie $1/B$ gegen Null.

Das Drude-Modell kann auch auf Systeme mit Löchern als Ladungsträger erweitert werden. Dabei ändert sich der Vorfaktor σ_0 , die Abhängigkeit der Leitfähigkeitskomponenten vom Magnetfeld bleibt jedoch von der Form (2.10). Dies wird in Zusammenhang mit der Untersuchung des Lochsystems in Abschnitt 6.5 erläutert.

2.3.2 Modulierte Systeme: Kubo-Formel

Die von R. Kubo entwickelte Theorie der linearen Antwort, gestattet es, die Reaktion eines Systems auf eine äußere Störung in linearer Näherung zu berechnen [22, 23]. Angewandt auf den Magnetotransport, übersetzt sich die Störung in ein äußeres elektrisches Feld \mathbf{E} und die Antwort des Systems besteht in der Stromdichte \mathbf{j} . Die Größe, die mithilfe der Kubo-Theorie berechnet wird, ist dann die Leitfähigkeit σ und es gilt das Ohmsche Gesetz (2.5).

Die Berechnung der Leitfähigkeit mithilfe der Kubo-Theorie kann im Rahmen der klassischen Physik, der Quantenmechanik oder in einer semiklassischen Näherung erfolgen. In diesem Abschnitt wird die klassische Kubo-Formel besprochen, die quantenmechanische Kubo-Formel wird in Abschnitt 2.4 vorgestellt. Die Herleitung der klassischen Kubo-Formel erfolgt in Abschnitt 2.5 im Rahmen der semiklassischen Näherung.

Die Kubo-Formel für die klassische Leitfähigkeit $\bar{\sigma}$ bei der Temperatur $T = 0$ lautet¹

$$\bar{\sigma}_{ij}(E_F) = e^2 \frac{\bar{d}(E_F)}{V} \int_0^\infty dt \langle v_i(t)v_j(0) \rangle_{E_F} \exp(-t/\tau). \quad (2.12)$$

Dabei bezeichnen i und j die kartesischen Komponenten x oder y und das „Volumen“ V steht bei 2D-Systemen für die Probenfläche. Die Streuung wird wie im Drude-Modell über die phänomenologische Streuzeit τ im exponentiellen Dämpfungsterm eingeführt. Das mikrokanonische Phasenraummittel bei der Fermienergie E_F über die Geschwindigkeitskorrelationsfunktion $v_i(t)v_j(0)$ ist für Systeme

¹Wie in Abschnitt 2.5 erläutert wird, kann die klassische Kubo-Formel als glatter Anteil oder Thomas-Fermi Anteil der Leitfähigkeit in semiklassischer Näherung aufgefaßt werden. Zur Unterscheidung von quantenmechanischen oder oszillierenden semiklassischen Anteilen werden die glatten Anteile der Leitfähigkeit (2.12) und Zustandsdichte (2.14) mit einem Querstrich über dem Symbol gekennzeichnet.

mit 2 Freiheitsgraden definiert durch

$$\langle \dots \rangle_{E_F} = \frac{g_s}{(2\pi\hbar)^2 \bar{d}(E_F)} \int d^2r d^2p \dots \delta(E_F - H(\mathbf{r}, \mathbf{p})) . \quad (2.13)$$

Der Vorfaktor in der Kubo-Formel (2.12) ist gegeben durch die Thomas-Fermi-Zustandsdichte

$$\bar{d}(E_F) = \frac{g_s}{(2\pi\hbar)^2} \int d^2r d^2p \delta(E_F - H(\mathbf{r}, \mathbf{p})) , \quad (2.14)$$

dabei ist $g_s = 2$ die Spinartung und $H(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ die Hamiltonfunktion.

Im Fall einer isotropen Fermikontur, bzw. eines Kristallelektrons mit konstanter effektiver Masse m^* ergibt (2.14)

$$\bar{d}(E_F) = V(E_F) \frac{m^*}{\pi\hbar^2} \quad (2.15)$$

mit dem Volumen

$$V(E_F) = \int d^2r \Theta(E_F - U(\mathbf{r})) . \quad (2.16)$$

$\Theta(x)$ bezeichnet hier die Heavysidesche Stufenfunktion. Anschaulich gesprochen ist $V(E_F)$ der Anteil des Probenvolumens V , der für ein klassisches Teilchen der Energie E_F erreichbar ist. Im Fall eines Antidotgitters, das durch ein elektrostatisches Potential $U(x, y)$ modelliert wird, ist deshalb für den Transport von Teilchen mit der Energie E_F die Fläche der Antidots bei E_F vom Volumen V abzuziehen, was letztlich zu einer um den Faktor $V(E_F)/V$ kleineren Amplitude in der Leitfähigkeit führt.

Zur Berechnung der Leitfähigkeit mit der Kubo-Formel (2.12), werden Trajektorien mit der Energie E_F für unterschiedliche Anfangsbedingungen numerisch mithilfe der Integration der klassischen Bewegungsgleichungen ermittelt [24]. Aus den Trajektorien ergibt sich die Geschwindigkeitskorrelation und das Phasenraummittel (2.13) wird mit Monte-Carlo-Verfahren [25] berechnet. Einzelheiten zur numerischen Auswertung der Kubo-Formel sind in [26] zu finden.

Wie in Abschnitt 2.5.2 gezeigt, kann die Leitfähigkeit bei Temperaturen $T > 0$ über die Temperaturmittelung mit der Ableitung der Fermifunktion $\partial f_0(E)/\partial E$ berechnet werden. Die Temperaturabhängigkeit des klassischen Anteils der Leitfähigkeit ist jedoch im Gegensatz zu den zusätzlich auftretenden Quanteneffekten im untersuchten Temperaturbereich $T \leq 4.2$ K praktisch vernachlässigbar, so daß auf temperaturabhängige Rechnungen der klassischen Leitfähigkeit verzichtet wurde.

2.3.3 Boltzmann-Gleichung

Anders als die Kubo-Formel beschreibt die Boltzmann-Gleichung die Dynamik einer Verteilungsfunktion im klassischen Phasenraum, aus der dann die gesuchte Größe, in unserem Fall die elektrische Leitfähigkeit, berechnet wird. Die Boltzmann-Gleichung ist dabei, im Gegensatz zur Kubo-Formel, nicht auf das Regime der linearen Antwort beschränkt. Details zur Herleitung der Boltzmann-Gleichung sind zum Beispiel in [27] zu finden.

Die zentrale Größe bei der Beschreibung des Transports mit Hilfe der Boltzmann-Gleichung ist die Phasenraumverteilung $f(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t)$, die die Wahrscheinlichkeit angibt, ein Teilchen zur Zeit t mit Wellenvektor \mathbf{k} am Ort \mathbf{r} vorzufinden.

Im thermischen Gleichgewicht, bei der Temperatur T , wird die Verteilungsfunktion f zur Fermiverteilung

$$f_0(E) = [1 + e^{\beta(E-\mu)}]^{-1} \quad (2.17)$$

mit dem chemischen Potential μ , $\beta = 1/(k_B T)$ und der Boltzmann Konstante k_B .

Aus der Verteilungsfunktion f ergibt sich unter Berücksichtigung der Spinartung g_s im System mit 2-Freiheitsgraden für die Ladungsträgerdichte

$$n(\mathbf{r}, t) = \frac{g_s}{(2\pi)^2} \int d^2k f(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) \quad (2.18)$$

und in Analogie dazu die Stromdichte

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \frac{eg_s}{(2\pi)^2} \int d^2k \mathbf{v}(\mathbf{k}) f(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) \quad (2.19)$$

mit der Geschwindigkeit \mathbf{v} .

Aus der Teilchenzahlerhaltung im Phasenraum folgt, daß das Differential der Verteilungsfunktion verschwindet

$$df(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) = 0 = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{k}} \cdot d\mathbf{k} . \quad (2.20)$$

Daraus ergibt sich nach Division durch dt

$$0 = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{k}} \cdot \dot{\mathbf{k}} \quad (2.21)$$

und zusammen mit den Bewegungsgleichungen für den Wellenvektor $\hbar \dot{\mathbf{k}} = \mathbf{F}$

$$0 = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{\hbar} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{k}} \cdot \mathbf{F} . \quad (2.22)$$

In der Kraft \mathbf{F} wird in der Boltzmann-Theorie keine Streuung berücksichtigt. Die Streuung wird üblicherweise im Rahmen der Quantenmechanik berechnet und führt dann zu einer zusätzlichen zeitlichen Änderung der Verteilungsfunktion, dem Stoßintegral, das anstelle der Null auf der linken Seite in (2.22) eingeführt wird, woraus sich schließlich die Boltzmann-Gleichung ergibt

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_c = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{\hbar} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{k}} \cdot \mathbf{F} . \quad (2.23)$$

Dabei lautet das Stoßintegral

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_c = \quad (2.24)$$

$$= \frac{V}{(2\pi)^2} \int d^2 k' \{ -W_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} f(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) [1 - f(\mathbf{r}, \mathbf{k}', t)] + \quad (2.25)$$

$$+ W_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} f(\mathbf{r}, \mathbf{k}', t) [1 - f(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t)] \} .$$

$W_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$ ist die (quantenmechanische) Übergangsrate vom Zustand \mathbf{k} in den Zustand \mathbf{k}' , die aus Fermis Goldener Regel berechnet wird.

Die Boltzmann-Gleichung bietet gegenüber der klassischen Kubo-Formel den Vorteil, daß über das Stoßintegral, die Streuung realistischer modelliert werden kann. So ist die Berücksichtigung anisotroper Streuung möglich, wobei die Lebensdauer eines Ein-Teilchen-Zustands verschieden wird von der (Impuls-)Relaxationszeit τ .

Eine Anwendung der Boltzmann-Gleichung ist in Abschnitt 6.5 gezeigt. Dort wird die Boltzmann-Gleichung in linearisierter Form benutzt, um das Drude-Modell für ein Lochgas mit anisotropen geschlossenen Fermi-Konturen abzuleiten.

2.4 Quantenmechanischer Kubo-Formalismus

Die Berechnung der Magnetleitfähigkeit im Rahmen der Quantenmechanik erfolgt über die Kubo-Greenwood Formel [22, 28, 29] Hier soll kurz skizziert werden, wie sich Leitfähigkeiten in einem lateralen Halbleiter-Übergitter quantenmechanisch berechnen lassen. Detailliertere Darstellungen finden sich in [30, 31, 32, 33].

Die Kubo-Formel liefert für die Komponenten der Leitfähigkeit die quanten-

mechanischen Ausdrücke [29] bei der Temperatur $T = 0$

$$\sigma_{xx} = \frac{g_s \pi e^2 \hbar}{V} \text{tr} \{ \hat{v}_x \hat{\delta}(E - \hat{H}) \hat{v}_x \hat{\delta}(E - \hat{H}) \}, \quad (2.26)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xy} &= \frac{g_s e}{V} \frac{\partial n(E, B)}{\partial B} + \\ & i \frac{g_s e^2 \hbar}{2V} \text{tr} \{ \hat{v}_x \hat{G}^+(E) \hat{v}_y \hat{\delta}(E - \hat{H}) - \hat{v}_x \hat{\delta}(E - \hat{H}) \hat{v}_y \hat{G}^-(E) \}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Hier ist $n(E)$ die Zahl der Zustände bis zur Energie E und der Spektralfunktionsoperator $\hat{\delta}$ ist definiert über die Greenschen Operatoren \hat{G}

$$\hat{\delta}(E - \hat{H}) = \frac{i}{2\pi} \left(\hat{G}^+(E) - \hat{G}^-(E) \right) = -\frac{1}{\pi} \text{Im} \hat{G}^+(E). \quad (2.28)$$

Um die Leitfähigkeit bei Temperaturen $T > 0$ zu berechnen, wird eine Temperaturmittelung mit der Ableitung der Fermifunktion $f'_0 = \partial f_0 / \partial E$ durchgeführt

$$\sigma(T, \mu) = - \int_0^\infty dE f'_0(E - \mu) \langle \sigma(E) \rangle. \quad (2.29)$$

Die spitzen Klammern stehen hier für die Konfigurationsmittelung, die im folgenden kurz erläutert wird. Wir betrachten formal gesehen, unendlich ausgedehnte Proben, bei denen die Leitfähigkeit nicht von der konkreten Konfiguration der Störstellen abhängig ist, dies wird durch die Störstellenmittelung in (2.29) mathematisch modelliert. Die Störstellenmittelung angewandt auf eine einzelne Einteilchen-Greenfunktion führt über die Dyson-Gleichung zu einer Selbstenergie, die im allgemeinen quantenzahlabhängig ist. Bei der Berechnung der Leitfähigkeit muß die Störstellenmittelung über das Produkt zweier Greenscher Funktionen durchgeführt werden. Der Mittelwert aus dem Produkt von Greenschen Funktionen unterscheidet sich vom Produkt der Mittelwerte durch die Vertexkorrekturen. In der quantenmechanischen Rechnung und der semiklassischen Näherung in Abschnitt 2.5 wird angenommen, daß die Selbstenergie unabhängig ist von den Quantenzahlen. In dieser Näherung für die Selbstenergie kann gezeigt werden, daß die Vertexkorrekturen verschwinden und es gilt

$$\langle GG \rangle = \langle G \rangle \langle G \rangle. \quad (2.30)$$

Die Behandlung der Streueignisse an den ionisierten Donator-Störstellen geschieht in der selbstkonsistenten Bornschen Näherung. Damit das Problem numerisch handhabbar bleibt, werden die Störstellen als kurzreichweitige δ -Streuer ohne räumliche Korrelation aufgefaßt.

Das laterale Übergitter wird wieder durch den Einteilchen-Hamiltonian (2.1) mit konstanter effektiver Masse beschrieben. Für eine rationale Zahl elementarer

Flußquanten pro Elementarzelle läßt sich der Hamiltonoperator numerisch diagonalisieren und es ergeben sich magnetische Minibänder.

Die Longitudinalleitfähigkeiten werden dann zu

$$\sigma_{ii}(E) \propto \sum_{n_1, n_2} \int_{\text{MBZ}} |\langle n_1 \Theta | \hat{v}_i | n_2 \Theta \rangle|^2 A_{n_1 \Theta}(E) A_{n_2 \Theta}(E) d^2 \Theta . \quad (2.31)$$

Die Summe geht über die magnetischen Minibänder mit den Indizes n_1 und n_2 . Die Integration erfolgt über die magnetische Brillouin-Zone (MBZ) mit dem zwei-dimensionalen magnetischen Wellenvektor Θ . Mit \hat{v}_i sei die Komponente des Geschwindigkeitsoperators bezeichnet.

Die Spektralfunktion $A_{n\Theta}(E)$ ergibt sich aus (2.28) zusammen mit der Störstellenmittelung. Die Berücksichtigung der Störstellenstreuung im Rahmen der selbstkonsistenten Bornschen Näherung führt zu einer endlichen Lebensdauer der Zustände, was in einer Verbreiterung der Energieniveaus in der Spektralfunktion (bzw. Zustandsdichte) zum Ausdruck kommt. Die Hall-Leitfähigkeit wird mit einem ähnlichen Ausdruck wie (2.31) berechnet.

Die Spektralfunktionen sind unabhängig von der Temperatur, das heißt die Temperaturabhängigkeiten der Streumechanismen in den Greenschen Funktionen werden nicht berücksichtigt. Diese Abhängigkeiten sind bei den in Frage kommenden Temperaturen $T \leq 4.2$ K aber auch vernachlässigbar.

Anhand von (2.31) läßt sich die longitudinale Leitfähigkeit in zwei Beiträge aufteilen. Einen Beitrag, genannt *Bandleitfähigkeit* mit $n_1 = n_2$ und der sogenannten *Streuleitfähigkeit* mit $n_1 \neq n_2$. Die Bandleitfähigkeit kommt durch die Dispersion der magnetischen Minibänder zustande, während die Streuleitfähigkeit Beiträge von der Streuung zwischen unterschiedlichen Minibändern berücksichtigt.

2.5 Semiklassik

Die Berechnung der Leitfähigkeit in semiklassischer Näherung im Rahmen der *Periodic Orbit Theory* (POT) soll in diesem Abschnitt kurz skizziert werden. Details zur Herleitung der semiklassischen Kubo-Formel sind in [10, 11, 34] zu finden.

2.5.1 Semiklassische Greensche Funktion und Zustandsdichte

Die Berechnung der Leitfähigkeit erfolgt im Formalismus der Greenschen Funktionen, daher soll hier zunächst die semiklassische Näherung zur Einteilchen-Greenfunktion diskutiert werden.

Die energieabhängige Greensche Funktion kann im Rahmen der Quantenmechanik mit Eigenfunktionen Ψ_α zur Energie E_α des Hamiltonians \hat{H} dargestellt werden als

$$\begin{aligned} G^\pm(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; E) &= \langle \mathbf{r} | \hat{G}^\pm(E) | \mathbf{r}' \rangle = \langle \mathbf{r} | \frac{1}{E - \hat{H} \pm i\epsilon} | \mathbf{r}' \rangle \\ &= \sum_\alpha \frac{\Psi_\alpha(\mathbf{r}) \Psi_\alpha^*(\mathbf{r}')}{E - E_\alpha \pm i\epsilon} \quad \text{mit } (\epsilon \rightarrow 0_+). \end{aligned} \quad (2.32)$$

Dabei bezeichnet $+$ die retardierte und $-$ die avancierte Greensche Funktion.

Die semiklassische Näherung zur Greenschen Funktion [9] lautet für ein Teilchen mit zwei Freiheitsgraden

$$\begin{aligned} G_{\text{sk}}^+(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; E) &= \sum_\gamma G_\gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; E) \\ &= \frac{1}{i\hbar(2\pi i\hbar)^{1/2}} \sum_{\gamma: \mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}} D_\gamma(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \exp \left[\frac{i}{\hbar} S_\gamma(\mathbf{r}', \mathbf{r}) - i\eta_\gamma \frac{\pi}{2} \right]. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Die Greensche Funktion (2.33) setzt sich aus Beiträgen G_γ zusammen, die aus klassischen Trajektorien γ berechnet werden, welche bei fester Energie E die Punkte \mathbf{r}' und \mathbf{r} verbinden.

Die Wirkung S_γ ist dabei definiert durch

$$S_\gamma(\mathbf{r}', \mathbf{r}) = \int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}'} \mathbf{p}_\gamma(\mathbf{q}) \cdot d\mathbf{q} \quad (2.34)$$

und (2.33) wird für $S \gg \hbar$ eine gute Näherung zur exakten Greenschen Funktion (2.32).

Die klassische Amplitude kann als

$$D_\gamma(\mathbf{r}', \mathbf{r}) = \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial^2 S_\gamma}{\partial \mathbf{r} \partial \mathbf{r}'} & \frac{\partial^2 S_\gamma}{\partial \mathbf{r} \partial E} \\ \frac{\partial^2 S_\gamma}{\partial E \partial \mathbf{r}'} & \frac{\partial^2 S_\gamma}{\partial E^2} \end{array} \right|^{1/2} = \frac{1}{|\dot{q} \dot{q}'|^{1/2}} \left| -\frac{\partial^2 S_\gamma}{\partial r_\perp \partial r'_\perp} \right|^{1/2} \quad (2.35)$$

geschrieben werden. Im letzten Ausdruck wurde ein lokales Koordinatensystem (q, r_\perp) benutzt, das durch die Trajektorie γ definiert wird [35]. Dabei ist q eine Koordinate entlang der Trajektorie γ und r_\perp eine Koordinate senkrecht dazu.

Der Maslovindex η_γ , der in der Phase in (2.33) auftritt, ist die Zahl der konjugierten Punkte entlang der Trajektorie [9, 36].

Aus der Spur der Greenschen Funktion läßt sich die Zustandsdichte über

$$d(E) = \frac{g_s}{V} \sum_\alpha \delta(E - E_\alpha) = -\frac{1}{\pi} \text{Im tr } G^+(E) \quad (2.36)$$

bestimmen. Bei Ersetzung der Greenschen Funktion in (2.36) durch die semiklassische Greenschen Funktion aus (2.33) ergibt sich die semiklassische Zustandsdichte, die als Summe aus einem oszillierenden Anteil d^{osc} und einem glatten Anteil \bar{d} dargestellt werden kann

$$d(E) = \bar{d}(E) + d^{\text{osc}}(E) . \quad (2.37)$$

Der glatte Anteil ergibt sich formal aus „Pfad der Länge Null“ und liefert den Thomas-Fermi- oder Weyl-Anteil zur Zustandsdichte [37]

$$\bar{d}(E) = \frac{g_s}{(2\pi\hbar)^2} \int d^2r d^2p \delta(E - H(\mathbf{r}, \mathbf{p})) . \quad (2.38)$$

Die Berechnung des oszillierenden Anteils d^{osc} unterscheidet sich für integrierbare Systeme und vollständig chaotische Systeme. In chaotischen Systemen, in denen alle periodischen Orbits isoliert sind, erfolgt die Berechnung von d^{osc} im lokalen Koordinatensystem des entsprechenden Orbits. Dabei wird die Integration über die longitudinale Koordinate q exakt berechnet und für die Integration über die transversale Koordinate r_{\perp} genügt es aufgrund der Isoliertheit der Bahnen eine Sattelpunktsnäherung zu benutzen. Bei der Sattelpunktsnäherung wird die Wirkung S bis zur zweiten Ordnung in den Koordinaten entwickelt und gefordert, daß die ersten Ableitungen der Wirkung verschwinden

$$\frac{\partial S}{\partial r_{\perp}} - \frac{\partial S}{\partial r'_{\perp}} = 0 = p_{\perp} - p'_{\perp} . \quad (2.39)$$

Die Spurbildung liefert zusätzlich noch die Bedingung

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' \quad (2.40)$$

und die Orbits, die (2.39) und (2.40) erfüllen, sind periodisch mit der Wirkung $S_{\text{po}}(E)$. Die verbleibenden Integrale über r_{\perp} sind Fresnel-Integrale von der Form

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(iax^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp(i\pi/4) . \quad (2.41)$$

Dabei ist die Konstante a proportional zu $1/\hbar$, was insgesamt zu einen zusätzlichen Faktor $\sqrt{\hbar}$ in der Amplitude von d^{osc} führt. Schließlich ergibt sich für den oszillierenden Anteil in chaotischen Systemen in führender Ordnung in \hbar die *Gutzwiller-Spurformel* [9, 38, 39]

$$d^{\text{osc}} \approx \frac{g_s}{V\pi\hbar} \sum_{\text{ppo}} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{T_{\text{ppo}}}{|\det(\tilde{M}_{\text{ppo}}^r - \mathbf{1})|^{1/2}} \cos\left(\frac{rS_{\text{ppo}}}{\hbar} - \eta_{\text{ppo},r} \frac{\pi}{2}\right) . \quad (2.42)$$

Die Doppelsumme geht über klassische periodische Orbits mit einem Umlauf (ppo) und deren Wiederholungen r . T_{ppo} bezeichnet die Umlaufzeit eines periodischen Orbits und \tilde{M} die reduzierte Monodromiematrix aus Abschnitt 1.5.

Falls das klassische System zusätzliche kontinuierliche Symmetrien aufweist, treten die periodischen Orbits nicht mehr isoliert, sondern in *Familien* auf. Auch in diesem Fall lassen sich Spurformeln für d^{osc} aufstellen [40, 41]. Bei der Berechnung der Spur über die semiklassische Greensche Funktion muß dann bei Vorhandensein einer kontinuierlichen Symmetrie auch über die transversalen Koordinaten exakt integriert werden und die Amplitude weist insgesamt eine niedrigere Ordnung in \hbar auf.

In integrablen Systemen sind alle periodischen Orbits in kontinuierlichen Familien entartet und eine Auswertung liefert für d^{osc} die Berry-Tabor- [42, 43] oder Balian-Bloch-Spurformel [44]. Die erste Ableitung der Berry-Tabor-Spurformel beginnt bei der EBK-Quantisierung, benannt nach Einstein, Brillouin und Keller, bei der die Wirkungen I_i der invarianten Tori (siehe Abschnitt 1.3) eines integrablen Systems in Einheiten von \hbar quantisiert werden.

Im Prinzip muß in der Spurformel (2.42) über alle primitiven periodischen Orbits des Systems und über alle Wiederholungen summiert werden. Die Konvergenz dieser Summe ist jedoch nicht garantiert, zumal in chaotischen Systemen die Zahl der periodischen Orbits mit zunehmender Länge exponentiell ansteigt [37]. Bei der Auswertung der Spurformel in realen Systemen treten jedoch immer Dämpfungsfaktoren auf, die es gestatten, die Summe auf wenige kurze periodische Orbits zu beschränken. In unserem Fall gibt es zwei Dämpfungsmechanismen, zum einen die Temperatur $T > 0$ und zum anderen die Streuung mit der Streuzeit $\tau < \infty$.

2.5.2 Temperaturmittelung und Streuung

Bei der Berechnung der Leitfähigkeit aus der Kubo-Formel (2.26) wurde in Abschnitt 2.4 gezeigt, daß eine Temperatur $T > 0$ über die Temperaturmittelung (2.29) berücksichtigt wird. Mathematisch entspricht die Temperaturmittelung einer Faltung mit der Ableitung der Fermifunktion f_0 .

$$f'_0(E - \mu) = \frac{\partial}{\partial E} (1 + \exp[\beta(E - \mu)])^{-1} \quad (2.43)$$

mit dem chemischen Potential μ und der Temperatur T aus $\beta = 1/(k_B T)$. Bei tiefen Temperaturen $T < 10$ K, die in dieser Arbeit ausschließlich betrachtet werden, liegt der Hauptbeitrag von $f'(E)$ im Bereich $E = \mu \approx E_F$ mit einer Breite von $1/\beta$. Dies entspricht der physikalischen Vorstellung, daß bei (kleinen) Temperaturen $T > 0$ nur Zustände in der Nähe der Fermienergie zum Transport beitragen.

In semiklassischer Näherung läßt sich die Leitfähigkeit, wie im nächsten Abschnitt gezeigt wird, wieder in einen glatten und einen oszillierenden Anteil aufspalten, gemäß $\sigma(E) = \bar{\sigma}(E) + \sigma^{\text{osc}}(E)$. Der oszillierende Anteil hat dann wie bei der Zustandsichte die Struktur

$$\sigma^{\text{osc}}(E) = \sum_{\text{po}} \sigma_{\text{po}}(E) = \sum_{\text{po}} A_{\text{po}}(E) \exp \left[\frac{i}{\hbar} S_{\text{po}}(E) \right]. \quad (2.44)$$

Daraus ergibt sich zusammen mit Gleichung (2.29)

$$\sigma_{\text{po}}(T) = - \int_0^\infty dE f'(E - \mu) A_{\text{po}}(E) \exp \left[\frac{i}{\hbar} S_{\text{po}}(E) \right], \quad (2.45)$$

und die Berechnung von (2.45) mittels Residuensatz in führender Ordnung von \hbar und $1/\beta$ ergibt [45]

$$\sigma_{\text{po}}(T, \mu) = -\sigma_{\text{po}}(\mu) R(T_{\text{po}}(\mu)/\tau_T). \quad (2.46)$$

Das bedeutet, daß für die semiklassische Rechnung auch bei $T > 0$ nur Orbits der Energie μ beitragen. Die Temperaturabhängigkeit wird durch die Dämpfungsfunktion R beschrieben

$$R(x) = \frac{x}{\sinh(x)}, \quad (2.47)$$

wobei der Orbit die Periode $T_{\text{po}}(\mu)$ besitzt und die Temperatur T über $\tau_T = \beta\hbar/\pi$ berücksichtigt wird. Das bedeutet, daß der Beitrag von Orbits mit der Periode $T_{\text{po}} \gg \tau_T$ exponentiell klein wird.

Zusätzlich zur Dämpfung der semiklassischen Oszillationen bei $T > 0$ muß im zweidimensionalen Elektronensystem bei tiefen Temperaturen die Störstellenstreuung berücksichtigt werden.

In der einfachsten Näherung, führt die Streuung zu einer (energieunabhängigen) Verbreiterung der Energieniveaus E_α in der Zustandsdichte $d(E)$. Formal bedeutet dies, daß die Selbstenergie in der Greenschen Funktion einen konstanten Imaginärteil bekommt, der mit Γ bezeichnet wird. Wie in Abschnitt 2.4 erläutert wurde, führt die Näherung einer quantenzahlunabhängigen Selbstenergie zum Verschwinden der Vertexkorrekturen und die Konfigurationsmittelung erfolgt über die Einteilchen-Greenfunktion.

Der Effekt des konstanten Imaginärteils Γ zur Energie E auf die semiklassische Greensche Funktion läßt sich im Rahmen einer Störungstheorie [46] berücksichtigen. In dieser semiklassischen Störungstheorie wird in erster Näherung nur die Änderung der Wirkung S betrachtet, die Trajektorien, die zur Greenschen Funktion beitragen, bleiben ungestört.

Die Entwicklung der Wirkung um $\Gamma = 0$ liefert dann

$$S(E + i\Gamma) \approx S(E) + \left. \frac{\partial S}{\partial E} \right|_{\Gamma=0} i\Gamma = S(E) + i \frac{T}{2\tau} \quad (2.48)$$

mit $\Gamma = \frac{\hbar}{2\tau}$ und der Flugzeit $T = \frac{\partial S(E)}{\partial E}$. Insgesamt ergibt sich für die Greensche Funktion (2.33) mit Gl. (2.48)

$$\langle G_\gamma^+(E) \rangle \approx G_\gamma^+(E + i\Gamma) \approx G_\gamma^+(E) \exp\left(-\frac{T_\gamma}{2\tau}\right). \quad (2.49)$$

Eine endliche Streuzeit τ führt somit zu einer Dämpfung von Trajektorien γ mit der Flugzeit $T_\gamma \gg 2\tau$.

2.5.3 Semiklassische Kubo-Formel

Im folgenden konzentrieren wir uns auf die longitudinale Leitfähigkeit Gl. (2.26), die Behandlung der transversalen Komponente σ_{xy} erfolgt analog, bis auf den zusätzlichen Term mit dem Ausdruck $n(E, B)$, der sich aus Integration der Zustandsdichte über die Energie ergibt und damit aus der semiklassischen Zustandsdichte berechnet werden kann. Der Ausdruck für σ_{yy} folgt aus (2.26) durch die Substitution von v_x mit v_y .

Nach Einsetzen der Greenschen Operatoren und der Spinentartung $g_s = 2$ ergibt sich aus (2.26)

$$\sigma_{xx} = -\frac{e^2 \hbar}{2\pi V} (F_{xx}^{++} + F_{xx}^{--} - 2F_{xx}^{+-}) \quad (2.50)$$

$$= -\frac{e^2 \hbar}{\pi V} \text{Re} (F_{xx}^{++} - F_{xx}^{+-}), \quad (2.51)$$

dabei sind die Größen F definiert durch

$$F_{xx}^{\pm\pm} = \text{tr}\{\hat{v}_x \hat{G}^\pm \hat{v}_x \hat{G}^\pm\} \quad \text{und} \quad F_{xx}^{+-} = \text{tr}\{\hat{v}_x \hat{G}^+ \hat{v}_x \hat{G}^-\}. \quad (2.52)$$

Die Berücksichtigung der Streuung in einfachster Näherung führt zu einem konstanten Imaginärteil Γ in der Selbstenergie (siehe Abschnitt 2.5.2) und es ergibt sich in Ortsdarstellung

$$F_{xx}^{++} = \int d^2 r' \int d^2 r [\hat{v}_x(\mathbf{r}) G^+(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; E + i\Gamma)] [\hat{v}_x(\mathbf{r}') G^+(\mathbf{r}', \mathbf{r}; E + i\Gamma)] \quad (2.53)$$

mit

$$G^+(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; E + i\Gamma) = \langle \mathbf{r} | \hat{G}^+(E + i\Gamma) | \mathbf{r}' \rangle \quad (2.54)$$

und dem Geschwindigkeitsoperator

$$\hat{v}_x(\mathbf{r}) = \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} + eA_x(\mathbf{r}) \right). \quad (2.55)$$

Ersetzen der avancierten Greenschen Funktion G^- in (2.51) mittels

$$G^-(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; E) = [G^+(\mathbf{r}', \mathbf{r}; E)]^* \quad (2.56)$$

liefert für F^{+-} nach Konfigurationsmittelung

$$F_{xx}^{+-} = \int d^2 r' \int d^2 r [\hat{v}_x(\mathbf{r}) G^+(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; E + i\Gamma)] [\hat{v}_x(\mathbf{r}') G^{+*}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; E + i\Gamma)]. \quad (2.57)$$

In semiklassischer Näherung werden die Greenschen Funktionen in (2.53) und (2.57) durch die semiklassische Greensche Funktion (2.33) ersetzt.

In führender Ordnung in \hbar wirkt der Geschwindigkeitsoperator (2.55) nur auf die Wirkung S in der semiklassischen Greenschen Funktion (2.33) und ergibt die klassische Geschwindigkeit der Trajektorie γ am Ort \mathbf{r}

$$\begin{aligned} \hat{v}_x(\mathbf{r}) G_\gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; E) &= \\ \frac{1}{m^*} \left(\frac{\partial}{\partial x} S_\gamma(\mathbf{r}', \mathbf{r}) + eA_x(\mathbf{r}) \right) G_\gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; E) &= \\ \frac{1}{m^*} (p_x^\gamma(\mathbf{r}) + eA_x(\mathbf{r})) G_\gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; E) &= \\ v_x^\gamma(\mathbf{r}) G_\gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; E). \end{aligned} \quad (2.58)$$

Aus Gleichung (2.51) folgt mit der semiklassischen Greenschen Funktion (2.33) und (2.58):

$$\sigma_{xx} \approx -\frac{e^2 \hbar}{\pi V} \text{Re} (I_{xx}^{++} - I_{xx}^{+-}) = \frac{e^2 \hbar}{\pi V} \text{Re} (I_{xx}^{+-}) \quad (2.59)$$

mit

$$\begin{aligned} I_{xx}^{++} &= \frac{i}{2\pi \hbar^3} \int d^2 r \int d^2 r' \sum_{\substack{\gamma_1: \mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r} \\ \gamma_2: \mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}'}} v_x^{\gamma_1}(\mathbf{r}) v_x^{\gamma_2}(\mathbf{r}') D_{\gamma_1}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) D_{\gamma_2}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (2.60) \\ &\times \exp \left[\frac{i}{\hbar} (S_{\gamma_1}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) + S_{\gamma_2}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) - i\frac{\pi}{2} (\eta_{\gamma_1} + \eta_{\gamma_2}) - \frac{T_{\gamma_1} + T_{\gamma_2}}{2\tau} \right] \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} I_{xx}^{+-} &= \frac{1}{2\pi \hbar^3} \int d^2 r \int d^2 r' \sum_{\substack{\gamma_1: \mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r} \\ \gamma_2: \mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}}} v_x^{\gamma_1}(\mathbf{r}) v_x^{\gamma_2}(\mathbf{r}') D_{\gamma_1}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) D_{\gamma_2}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \quad (2.61) \\ &\times \exp \left[\frac{i}{\hbar} (S_{\gamma_1}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) - S_{\gamma_2}(\mathbf{r}', \mathbf{r})) - i\frac{\pi}{2} (\eta_{\gamma_1} - \eta_{\gamma_2}) - \frac{T_{\gamma_1} + T_{\gamma_2}}{2\tau} \right] \end{aligned}$$

Die Beiträge zur semiklassischen Näherung der Leitfähigkeit (2.59) sind somit Doppelsummen über klassische Bahnen γ_1 und γ_2 .

Die weitere Untersuchung des Terms aus dem Produkt zweier retardierter Greenscher Funktionen (2.60) zeigt, das der Beitrag von I_{xx}^{++} für die statische Leitfähigkeit verschwindet [10, 11, 34]. Dies hängt damit zusammen, daß, wie wir noch sehen werden, auch die semiklassische Leitfähigkeit in führender Ordnung aus periodischen Orbits berechnet wird. Die beiden Trajektorien γ_1 und γ_2 in (2.60) sind dann in erster Näherung Teile eines gemeinsamen periodischen Orbits und $T_{\gamma_1} + T_{\gamma_2}$ ist ein ganzzahliges Vielfaches der Periode T_{ppo} . Letztlich führt dies dazu, daß die Geschwindigkeitskorrelationsfunktion, die sich aus (2.60) ergibt, ohne Streuterm berechnet wird (vergleiche (2.73) mit $\exp(-t/\tau) \mapsto \exp(-T_{po}/\tau)$) und die Korrelation über den periodischen Orbit verschwindet. Im folgenden muß deshalb nur noch der Beitrag von I_{xx}^{+-} berücksichtigt werden.

Glatter Anteil, klassische Kubo-Formel

Der Diagonaleil der Doppelsumme in (2.61) wird aus identischen Trajektorien $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$ gebildet. Die Phasenfaktoren in (2.61) verschwinden dann, bis auf den Term $\exp(-T_\gamma/\tau)$ und es ergibt sich

$$\bar{I}_{xx}^{+-} = \frac{1}{2\pi\hbar^2} \int d^2r \int d^2r' \sum_{\gamma:r' \mapsto r} v_x^\gamma(\mathbf{r}) v_x^\gamma(\mathbf{r}') D_\gamma^2(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \exp(-T_\gamma/\tau). \quad (2.62)$$

Die Amplitude D^2 ist eine Jacobideterminante

$$D_\gamma^2(\mathbf{r}', \mathbf{r}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \mathbf{p}'_\gamma}{\partial \mathbf{r}} & \frac{\partial T_\gamma}{\partial \mathbf{r}} \\ \frac{\partial \mathbf{p}'_\gamma}{\partial E} & \frac{\partial T_\gamma}{\partial E} \end{vmatrix} \quad (2.63)$$

für die Transformation $(\mathbf{r}, E) \mapsto (\mathbf{p}', T)$ und wird benutzt, um die Integration über den Endpunkt \mathbf{r} in ein Integral über den Anfangsimpuls \mathbf{p}' zu transformieren. Bei gegebenem Anfangspunkt \mathbf{r}' wird entweder über alle Endpunkte \mathbf{r} integriert, oder über alle Impulse \mathbf{p}' auf der Energieschale $\delta(E - H(\mathbf{r}', \mathbf{p}'))$ und für gegebenes \mathbf{p}' entlang der eindeutig festgelegten Trajektorie γ . Nach Multiplikation von (2.63) mit $1 = \int dE \delta(E - H)$ folgt daraus für den glatten Anteil der Leitfähigkeit

$$\bar{\sigma}_{xx}(E) = \frac{1}{V} \frac{2e^2}{(2\pi\hbar)^2} \int d^2r' d^2p' \int_0^\infty v_x(0) v_x(t) e^{-t/\tau} \delta(E - H(\mathbf{r}', \mathbf{p}')) . \quad (2.64)$$

Zusammen mit der Definition des Mittelwerts im mikrokanonischen Ensemble

$$\langle \dots \rangle_E = \frac{g_s}{(2\pi\hbar)^2 \bar{d}(E)} \int d^2r d^2p \dots \delta(E - H(\mathbf{r}, \mathbf{p})) \quad (2.65)$$

wird aus (2.64) die klassische Kubo-Formel

$$\bar{\sigma}_{ij} = e^2 \frac{\bar{d}(E)}{V} \int_0^\infty dt \langle v_i(t) v_j(0) \rangle_E \exp(-t/\tau) . \quad (2.66)$$

Hier ist \bar{d} wieder die Thomas-Fermi-Zustandsichte (2.38).

Die klassische Kubo-Formel ist somit als glatter Anteil oder Thomas-Fermi- beziehungsweise Weyl-Anteil in der semiklassischen Näherung der Leitfähigkeit enthalten.

Durch die Berücksichtigung weiterer nichtdiagonaler Terme der Doppelsumme in (2.61) ergeben sich semiklassische Korrekturen zur klassischen Kubo-Formel, und die Leitfähigkeit zerfällt in einen glatten und einen oszillierenden Anteil

$$\sigma = \bar{\sigma} + \sigma^{\text{osc}} . \quad (2.67)$$

Oszillierender Anteil im homogenen System: Shubnikov-de Haas Oszillationen

Bei der Berechnung des oszillierenden Anteils der Leitfähigkeit, muß wie bei der Zustandsdichte in Abschnitt 2.5.1 zwischen integralen Systemen mit Familien von Bahnen und chaotischen Systemen mit isolierten Bahnen unterschieden werden. Im integralen System müssen alle Integrale in (2.61) exakt berechnet werden, während in Systemen mit isolierten Bahnen die Integration über die transversalen Koordinaten r_\perp in Sattelpunktsnäherung ausgeführt werden kann.

Im homogenen System (Gleichung (2.1) mit $U = 0$) bewegt sich ein Elektron immer auf einem Zyklotronkreis. In semiklassischer Näherung ergibt der oszillierende Anteil Shubnikov-de Haas-Oszillationen [10, 11]

$$\sigma_{xx}^{\text{sdH}} = \frac{\sigma_0}{1 + (\omega_c \tau)^2} \times \left[1 + 2 \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r R \left(\frac{r 2\pi}{\omega_c \tau T} \right) \cos \left(\frac{r 2\pi E_F}{\hbar \omega_c} \right) \exp \left(-\frac{r \pi}{\omega_c \tau} \right) \right] . \quad (2.68)$$

Gleichung (2.68) ist die semiklassische Näherung der Shubnikov-de Haas-Oszillationen als Summe über die Wiederholungen des Zyklotronorbits. Der Ausdruck (2.68) entspricht dem Ergebnis einer quantenmechanischen Rechnung mit konstanter Streuzzeit τ [47]. Für Systeme mit hoher Mobilität ($\omega_c \tau \gg 1$) und ausgeprägten Landauniveaus müßte eigentlich die Energieabhängigkeit der Streuzzeit $\tau(E)$ berücksichtigt werden. Im Antidotgitter werden die Landauniveaus jedoch stark vermischt, was die Vernachlässigung der Energieabhängigkeit der Streuzzeit rechtfertigt.

In Abschnitt 4.3.3 wird Gleichung (2.68) im Rahmen der semiklassischen Störungstheorie erweitert. Dies ermöglicht die Untersuchung von Systemen, bei denen die für den Transport relevanten Trajektorien in (näherungsweise) integrablen Bereichen im Phasenraum liegen (Abschnitt 4.3.3), sowie von Systemen mit schwacher Modulation (Kapitel 5).

Oszillierender Anteil in Systemen mit hartem Chaos

Die Ableitung der Spurformel für σ^{osc} in Systemen mit isolierten Trajektorien erfolgt im wesentlichen analog zur Herleitung der Gutzwillerschen Spurformel für die Zustandsdichte mittels Sattelpunktsintegrationen im lokalen Koordinatensystem (q, r_{\perp}) der jeweiligen Trajektorie [10, 11]. Ein Unterschied besteht jedoch darin, daß die Leitfähigkeit aus dem Produkt zweier Greenscher Funktionen berechnet wird und somit in semiklassischer Näherung aus einer Doppelsumme aus Trajektorien γ_1 und γ_2 besteht (siehe (2.61)). Wie bereits erläutert wurde, ergibt der Diagonaleil der Doppelsumme die klassische Kubo-Formel. In der sogenannten *Diagonalnäherung* ergeben sich die führenden Korrekturen zur klassischen Leitfähigkeit aus Trajektorien $\gamma_1 \neq \gamma_2$, die Teile eines gemeinsamen periodischen Orbits sind. Die Tatsache, daß γ_1 und γ_2 auf einem periodischen Orbit liegen, folgt, wie bei der Zustandsdichte, aus den Bedingungen für die Stationarität der Bahnen in der Sattelpunktsnäherung

$$p_{\perp}^{\gamma_1}(\mathbf{r}') = p_{\perp}^{\gamma_2}(\mathbf{r}') \quad (2.69)$$

$$p_{\perp}^{\gamma_1}(\mathbf{r}) = p_{\perp}^{\gamma_2}(\mathbf{r}) . \quad (2.70)$$

Die Stabilitätsmatrizen der Trajektorien γ_1 und γ_2 können mithilfe der Relation $\tilde{M}_{\gamma_2} = \tilde{M}_{\text{ppo}} \tilde{M}_{\gamma_1}$ durch die Monodromiematrix \tilde{M}_{ppo} des gemeinsamen periodischen Orbits ausgedrückt werden², und es ergeben sich die die folgenden Korrekturen zur Leitfähigkeit als Summe über periodische Orbits

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^{\text{osc}} &\approx \frac{2g_s e^2}{V h} \sum_{\text{ppo}} C_{xx}^{\text{ppo}} \times \\ &\times \sum_{r=1}^{\infty} \frac{R(rT_{\text{ppo}}/\tau_T) \exp(-rT_{\text{ppo}}/2\tau)}{|\det(\tilde{M}_{\text{ppo}}^r - \mathbf{1})|^{1/2}} \cos\left(\frac{rS_{\text{ppo}}}{\hbar} - \eta_{\text{ppo},r} \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned} \quad (2.71)$$

²Hier wurde oBdA angenommen, daß die Trajektorie γ_1 kürzer ist als γ_2 .

und

$$\begin{aligned} \sigma_{xy}^{\text{osc}} &\approx \frac{2g_s e^2}{V h} \sum_{\text{ppo}} \left(\frac{1}{e} \frac{\partial S_{\text{ppo}}}{\partial B} + C_{xy}^{\text{ppo}} \right) \times \\ &\times \sum_{r=1}^{\infty} \frac{R(rT_{\text{ppo}}/\tau_T) \exp(-rT_{\text{ppo}}/2\tau)}{|\det(\tilde{M}_{\text{ppo}}^r - \mathbf{1})|^{1/2}} \cos \left(\frac{rS_{\text{ppo}}}{\hbar} - \eta_{\text{ppo},r} \frac{\pi}{2} \right). \end{aligned} \quad (2.72)$$

Bis auf die Vorfaktoren und den Term $\partial S/\partial B$ in σ_{xy}^{osc} unterscheiden sich die Korrekturen in (2.71) und (2.72) von der Gutzwillerschen Spurformel nur durch die Korrelationsfunktionen

$$C_{ij}^{\text{ppo}} = \int_0^{\infty} dt e^{-t/\tau} \int_0^{T_{\text{ppo}}} dt' v_i(t') v_j(t+t') \quad \text{mit } i, j \in \{x, y\} \quad (2.73)$$

aus den Geschwindigkeitskomponenten v_i und v_j der periodischen Orbits.

Die Beiträge zu σ^{osc} werden somit, wie bei der Gutzwillerschen Spurformel, aus klassischen periodischen Orbits gebildet und gestatten die Berechnung der führenden Quanteninterferenzeffekte in semiklassischer Näherung und deren Interpretation mithilfe klassischer periodischer Bahnen.

Die Spurformel (2.71) wurde von K. Richter in [10] benutzt, die experimentell beobachteten Quantenoszillationen in einem quadratischen Antidotgitter mithilfe der POT zu analysieren und numerisch zu berechnen. Dies wird in Abschnitt 3.4.2 näher erläutert. In dieser Arbeit wird mit der Spurformel (2.71) in Abschnitt 4.3.1 versucht, die Anisotropie in den Quantenoszillationen in einem rechteckigen Antidot-Übergitter zu erklären.

Kapitel 3

Laterale Halbleiter-Übergitter

Die in Kapitel 2 dargestellten theoretischen Modelle des Magnetotransports, werden in dieser Arbeit auf laterale Halbleiter-Übergitter angewandt. In diesem Kapitel wird daher kurz auf die experimentelle Realisierung von lateralen Übergittern auf GaAs/AlGaAs-Basis eingegangen. Im Anschluß daran werden klassische Kommensurabilitätseffekte von Systemen mit schwacher eindimensionaler Modulation vorgestellt. Der Einfluß der Kommensurabilität auf die Quantenoszillationen wird dann in Kapitel 5 mithilfe einer semiklassischen Störungstheorie aus Kapitel 4 näher untersucht werden. Systeme mit starker zweidimensionaler Modulation in Form von quadratischen Antidot-Übergittern zeigen ebenfalls klassische Kommensurabilitätseffekte und Quantenoszillationen. Sie bilden die Grundlage für Kapitel 4, in dem die Anisotropieeffekte in einem Antidotgitter mit rechteckiger Einheitszelle untersucht werden.

3.1 Experimentelle Realisierung

3.1.1 Zweidimensionales Elektronengas (2DEG)

Bei der Herstellung zweidimensionaler Elektronengase mit hoher Beweglichkeit der Ladungsträger haben sich Heterostrukturen aus GaAs und AlGaAs als erfolgreiche Materialgrundlage erwiesen. Aufgrund der Tatsache, daß sich die Gitterkonstanten von GaAs und AlGaAs um weniger als 0.1 % unterscheiden, ist mittels Molekularstrahlepitaxie ein nahezu defektfreies Aufwachsen mit atomar scharfen Grenzflächen und definiertem Dotierungsprofil möglich.

Der Schichtaufbau sowie der Verlauf von Leitungs- und Valenzbandkante

sind in Abbildung 3.1 skizziert [48, 49]. Auf das Substrat wird zunächst eine GaAs-Schicht und dann eine wenige Nanometer dicke AlGaAs-Spacerschicht aufgewachsen. Darauf folgt eine mit Si dotierte AlGaAs-Schicht und eine GaAs-Deckschicht als Oxidationsschutz. [50]

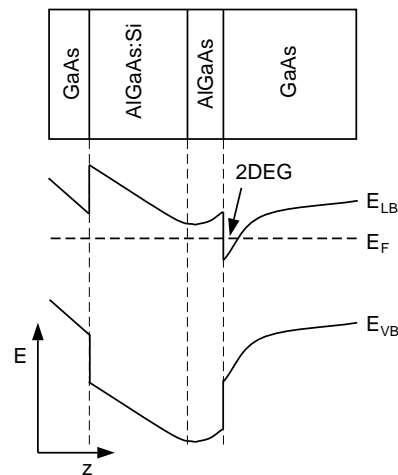


Abbildung 3.1: Aufbau einer typischen GaAs/AlGaAs-Heterostruktur und Verlauf der Leitungs- und Valenzbandkanten aus [26]. Das zweidimensionale Elektronengas bildet sich im (näherungsweise) dreieckigen Potentialtopf am Rand der GaAs-Schicht aus, wenn die Fermi-Energie im Leitungsband liegt.

Das Si in der AlGaAs-Schicht wirkt als Elektronendonator und die Donatoren, deren Energieniveau über der Fermienergie liegt, geben Elektronen an die GaAs-Schicht ab. Durch diese Ladungsumverteilung kommt es zur Ausbildung von Raumladungszonen und damit zur Verbiegung der Leitungs- und Valenzbänder. Im Gleichgewicht stellt sich eine über die Schichtstruktur konstante Fermienergie ein. Aufgrund der Bandverbiegungen bildet sich im GaAs an der GaAs/AlGaAs-Grenzfläche ein (näherungsweise) dreieckig geformter Potentialtopf aus. Zur theoretischen Bestimmung des Bandverlaufs sind Schrödinger- und Poisson-Gleichung gemeinsam selbstkonsistent zu lösen.

Der dreieckige Potentialtopf ist mit wenigen Nanometern so klein, dass die Elektronenbewegung in Wachstumsrichtung quantisiert ist, es kommt zur Ausbildung energetischer Subbänder. Liegt die Fermienergie nur über dem niedrigsten Subband, dann ist bei tiefen Temperaturen die Anregung von Elektronen in höhere Subbänder vernachlässigbar (elektrischer Quantenlimes). Das Elektronengas kann dann als zweidimensionales System betrachtet werden.

Die hohen Beweglichkeiten der Elektronen von bis zu $10^3 \text{ m}^2/\text{Vs}$ [49] bei tiefen Temperaturen resultieren zum einen aus der Reinheit der kristallinen Struktur des Heteroübergangs und zum anderen durch die räumliche Trennung des 2DEGs

von den ionisierten Donatoren der Si-dotierten AlGaAs-Schicht durch die undotierte AlGaAs-Spacerschicht. Bei tiefen Temperaturen ist die Elektron-Phonon-Streuung vernachlässigbar und die Beweglichkeit wird durch die Streuung an ionisierten Störstellen und Restverunreinigungen im Bereich des 2DEGs bestimmt.

3.1.2 Laterale Strukturierung

Das in Abschnitt 3.1.1 beschriebene 2DEG ist der Ausgangspunkt zur Herstellung einer Probe mit moduliertem Elektronengas. Dazu muß zum einen die Meßgeometrie mit den nötigen Kontakten definiert und zum anderen die Mikrostrukturierung vorgenommen werden. Ziel aller Verfahren zur Strukturierung ist immer die Übertragung der Struktur auf der Halbleiteroberfläche auf das 2DEG.

Die Kontakte für die Meßgeometrie werden, beispielsweise in Form einer Hallgeometrie wie sie in Abbildung 3.2 skizziert ist, mittels einer geeigneten Maske auf die mit Photolack beschichtete Halbleiteroberfläche übertragen. Nach Entwickeln und Ätzen, lassen sich die Kontakte durch Aufdampfen einer Metallschicht herstellen.

Der Einsatz von Masken für die Mikrostrukturierung ist bei typischen Strukturgrößen von 100 nm nicht mehr möglich. Zur Belichtung des Photolacks mit der gewünschten Struktur kommen verschiedene Methoden zur Anwendung. Beispielsweise kann ein optisches Interferenzmuster den Photolack belichten, die Größe und Komplexität, der auf diese Weise erzeugten Strukturen, ist jedoch begrenzt. Flexiblere Methoden benutzen zur Belichtung ein Elektronen- oder Rasterkraft-Mikroskop.

Die Übertragung des Musters in der belichteten Lackmaske erfolgt entweder durch Ätzverfahren oder durch Aufbringen einer metallischen Gateelektrode.

Bei den Ätzverfahren werden Teile der GaAs-Deckschicht und ein Teil der dotierten AlGaAs-Schicht entfernt. An der Oberfläche kommt es zu Bandverbiegungen und es bildet sich in den geätzten Bereichen ein für Elektronen repulsives Potential aus. Um die geätzten Bereiche bilden sich Verarmungszonen, so daß die Abmessungen des repulsiven Potentials größer sind als die Abmessungen der geätzten Bereiche [51].

Beim Aufbringen einer metallischen Gateelektrode wird ein für Elektronen repulsives Potential dadurch erzeugt, daß an der Elektrode eine negative Spannung angelegt wird.

Bei Systemen mit einer typischen Beweglichkeit von $50 \text{ m}^2/\text{Vs}$ liegt die mittlere freie Weglänge bei einigen Mikrometern und ist damit größer als die erreichbaren künstlichen lateralen Strukturierungen im Bereich von etwa 100 nm. Hochbewegliche 2DEGs sind somit für das Studium des *ballistischen Transports* von Elektronen durch künstliche laterale Übergitter prädestiniert.

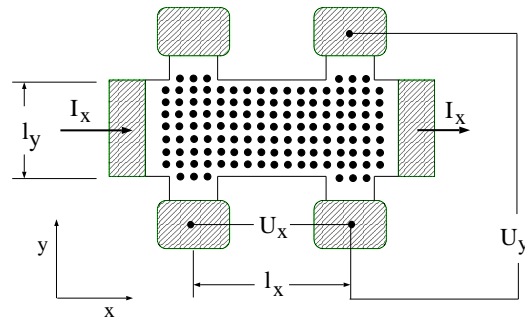


Abbildung 3.2: Prinzipielle Geometrie zur Bestimmung des Magnetowiderstands

3.2 Bestimmung des Magnetowiderstands

Die Komponenten des Magnetowiderstands werden üblicherweise durch eine Vierpunktmessung in Hall-Geometrie bestimmt (siehe Abbildung 3.2). Dazu wird ein Wechselstrom der Amplitude I_x im nA-Bereich mit einer Frequenz von einigen Hz durch die Probe geleitet. Mittels Lock-in-Verstärker werden die longitudinale Spannung U_x und die Hallspannung U_y als Funktion des äußeren Magnetfelds, das senkrecht zur Probenebene anliegt, aufgenommen. Zusammen mit den Probenabmessungen l_x und l_y ergeben sich die spezifischen Widerstände zu

$$\rho_{xx} = \frac{U_x l_y}{I_x l_x} \quad \text{und} \quad \rho_{xy} = \frac{U_y}{I_x}. \quad (3.1)$$

In analoger Weise lassen sich mit einer weiteren um 90 gedrehten Hallbar die spezifischen Widerstände ρ_{yy} und ρ_{yx} bestimmen. Die Komponente ρ_{yy} unterscheidet sich von ρ_{xx} beispielsweise bei rechteckigen Antidot-Übergittern, die in Kapitel 4 untersucht werden.

3.3 Kommensurabilität in Systemen mit schwacher 1D-Modulation

Wird einem 2DEG ein schwaches periodisches Potential $U(x) \ll E_F$ aufgeprägt, dann weist der Magnetowiderstand für kleine externe Magnetfelder eine Oszillationsstruktur auf [52, 53]. In Abbildung 3.3 sind diese $1/B$ -periodischen Weiss-Oszillationen in ρ_{xx} dargestellt. Erst ab etwa 0.4 T setzen die Shubnikov-de Haas-Oszillationen ein und überlagern die Weiss-Oszillationen.

Es stellt sich heraus, daß die Minima dieser Oszillationen der sogenannten

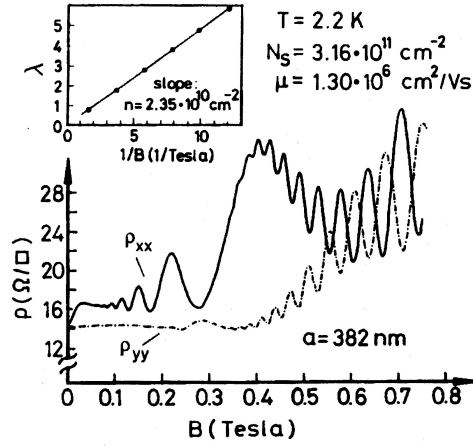


Abbildung 3.3: Magnetowiderstand entlang der eindimensionalen Modulation (ρ_{yy}) und senkrecht dazu (ρ_{xx}) für eine Übergitterperiode von 382 nm. Das Insetbild zeigt die $1/B$ -Periodizität der Minima von ρ_{xx} (Oszillationsindex $\lambda = (1/B)/\Delta(1/B)$). Nach [52]

Flachbandbedingung

$$2R_c(B) = \left(\lambda - \frac{1}{4} \right) a \quad \text{mit } \lambda = 1, 2, 3, \dots \quad (3.2)$$

genügen. Die Bedingung (3.2) ist ein Ausdruck für die Kommensurabilität zwischen dem Zyklotronradius R_c und der Gitterkonstanten a bei entsprechendem Magnetfeld B .

Eine einfache klassische Erklärung wurde von Beenacker in [54] vorgestellt, der neben der folgenden anschaulichen Argumentation auch eine rigorosere Herleitung der Ergebnisse aus der Boltzmann-Gleichung angegeben hat.

In diesem Modell beschreiben Elektronen klassische Zyklotronbahnen mit Radius R_c . Das elektrische Feld E in x -Richtung, welches durch das periodische Potential $U(x)$ verursacht wird, bewirkt eine Drift des Zentrums X der Zyklotronbahn in die y -Richtung (siehe Abbildung 3.4). Nach Mittelung der Driftgeschwindigkeit über die Zyklotronbahn und einer weiteren Mittelung der Zentrumskoordinate Y über eine Gitterkonstante a ergibt sich für das Quadrat der Driftgeschwindigkeit mit dem Potential $U(x) = U_0 \cos(2\pi x/a)$

$$\langle v_{\text{Drift}}^2 \rangle = \frac{1}{2} \left(\frac{v_F U_0}{E_F} \right)^2 \frac{R_c}{a} \cos^2 \left(\frac{2\pi R_c}{a} - \frac{\pi}{4} \right). \quad (3.3)$$

Mit konstanter Streuzeit τ ergibt diese Drift eine Diffusion $\delta D = \tau \langle v_{\text{Drift}}^2 \rangle$ in y -Richtung, aus der sich mithilfe der Einstein-Relation die Änderung der Leitfä-

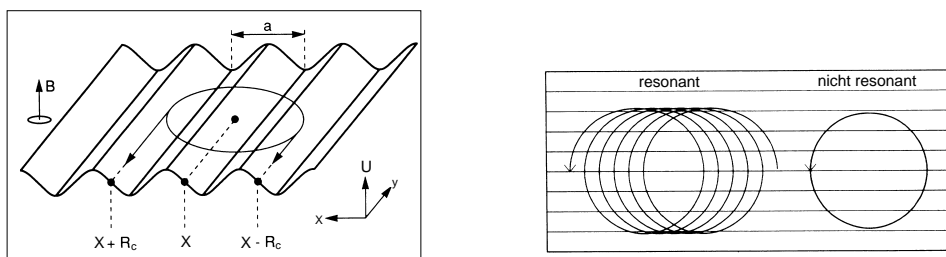


Abbildung 3.4: Zyklotronbahnen im eindimensionalen periodischen Potential. Linke Abbildung: Potentialmodulation mit Zyklotronorbit. An den Extrempunkten $X \pm R_c$ erhält die Zentrumsordinate eine Driftgeschwindigkeit in Pfeilrichtung. Wenn sich die Geschwindigkeiten in beiden Extrempunkten kompensieren, verschwindet die Drift. Rechte Abbildung: Trajektorie in Resonanzbedingung $2R_c/a = 6.25$ und zwischen zwei Resonanzen mit $2R_c/a = 5.75$. Nach [54]

higkeit berechnen läßt. Für $\omega_c \tau \gg 1$ übersetzt sich die Leitfähigkeitsänderung $\delta\sigma_{yy}$ in den Widerstand ρ_{xx}

$$\frac{\rho_{xx}}{\rho_0} = 1 + \frac{U_0^2 v_F^2 \tau^2}{E_F^2 R_c a} \cos^2 \left(\frac{2\pi R_c}{a} - \frac{\pi}{4} \right) \quad (3.4)$$

und dieser Ausdruck zeigt Minima bei der Flachbandbedingung (3.2).

Das Konzept der driftenden Zyklotronorbits wird in dieser Arbeit in Abschnitt 4.3.3 auf die semiklassische Berechnung anisotroper Quantenoszillationen erweitert. Deshalb soll hier neben dem oben beschriebenen rein klassischen Modell auch die quantenmechanische Erklärung der Weiss-Oszillationen erläutert werden, die sich an der Arbeit von Zhang und Gerhardtts [55] orientiert.

Das Energiespektrum wird quantenmechanisch in Störungstheorie erster Ordnung berechnet

$$E_n(x_0) = (n + 1/2)\hbar\omega_c + \langle n, x_0 | U(x) | n, x_0 \rangle, \quad (3.5)$$

dabei werden die Wellenfunktionen der ungestörten Landauniveaus durch die Landauquantenzahl n und x_0 charakterisiert. Das laterale Potential $U(x) = U_0 \cos(2\pi x/a)$ hebt die Entartung der Landauniveaus bezüglich $x_0 = -l_B^2 k_y$ auf¹ und es bilden sich Landaubänder der Breite U_n

$$\langle n, x_0 | U(x) | n, x_0 \rangle = U_n \cos \left(\frac{2\pi x}{a} \right) = U_0 \exp(-X/2) L_n(X) \cos \left(\frac{2\pi x}{a} \right).$$

¹Hier ist $l_B = \sqrt{\hbar/eB}$ die magnetische Länge.

Hier ist $X = 4\pi^2 l_B^2 / a^2$ und L_n ist das Laguerrepolynom n -ter Ordnung. Im Grenzwert hoher Landauquantenzahlen ergibt sich mit $R_c \approx l_B \sqrt{2n+1}$ die Näherung

$$U_n \approx U_0 \left(\frac{a}{\pi^2 R_c} \right)^{1/2} \cos \left(\frac{2\pi R_c}{a} - \frac{1}{4} \right) \quad (3.6)$$

Das Ergebnis (3.6) entspricht der Mittelung des Potentials über den ungestörten Zyklotronorbit. Die Bandbreite U_n verschwindet demnach bei der Flachbandbedingung (3.2).

Zur Berechnung der Leitfähigkeit wird die Kubo-Formel benutzt (siehe Abschnitt 2.4, dort wurde jedoch eine andere Basis gewählt)

$$\sigma_{ii} = \frac{\hbar e^2}{l_B^2} \int_0^a dx_0 \sum_{n,n'} |\langle x_0, n | \hat{v}_i | x_0, n' \rangle|^2 A_{n,x_0}(E) A_{n',x_0}(E) \quad (3.7)$$

mit den Spektralfunktionen $A(E)$.

Der Ausdruck (3.7) läßt sich aufspalten in einen Beitrag der Diagonalterme $n = n'$, der *Bandleitfähigkeit* genannt wird, und die *Streuleitfähigkeit*, die sich aus den Beiträgen mit $n \neq n'$ zusammensetzt.

In der Bandleitfähigkeit werden die Geschwindigkeitsmatrixelemente in (3.7) zu Erwartungswerten für die Gruppengeschwindigkeit

$$\langle x_0, n | \hat{v}_y | x_0, n \rangle = \frac{1}{\hbar} \frac{dE_n}{dk_y}. \quad (3.8)$$

Die Gruppengeschwindigkeit ist proportional zur Potentialamplitude und verschwindet bei der Flachbandbedingung. Das klassische Analogon zur Gruppengeschwindigkeit ist die Drift der Zyklotronorbits und der klassische Grenzfall (3.3) entsteht aus (3.8) für hohe Quantenzahlen und genügend großer Temperatur, wodurch die Quanteneffekte energetisch ausgemittelt werden.

Im Beitrag der Streuleitfähigkeit in (3.7) sind die Geschwindigkeitsmatrixelemente in erster Näherung für $U_0 \ll \hbar\omega_c$ unabhängig von der Modulationsamplitude und der Effekt des Übergitters wirkt sich nur auf die Spektralfunktionen aus. Die Streuleitfähigkeit lautet dann

$$\sigma^{sc} = \frac{e^2}{h} \sum_n (2n+1) (2\pi l_B^2 \Gamma D_n(E))^2 \quad (3.9)$$

mit der partiellen Zustandsdichte $D_n(E)$ des n -ten Landauniveaus und der Streuverbreiterung $\Gamma = \sqrt{\hbar^2 \omega_c / (2\pi\tau)}$. Formal ist das Ergebnis (3.9) identisch mit dem Ausdruck des unmodulierten Systems und führt ebenfalls zu Shubnikov-de

Haas-Oszillationen. Der Einfluß der Modulation steckt in der Zustandsdichte, diese ist bei den Flachbandbedingungen besonders hoch und führt zu einem großen Beitrag der Streuleitfähigkeit, während die Bandleitfähigkeit verschwindet. Zwischen den Flachbandbedingungen liefern die Landaubänder einen geringeren Beitrag zur Streuleitfähigkeit und es kommt ein zusätzlicher Beitrag von der Bandleitfähigkeit. Dieser Beitrag bleibt auch für Temperaturen $k_B T > \hbar \omega_c$ nach der Temperaturmittelung erhalten, das heißt auch wenn keine Shubnikov-de Haas Oszillationen mehr beobachtet werden. Der Beitrag der Streuleitfähigkeit führt so zu Oszillationen, die gegenphasig sind gegenüber dem Beitrag der Bandleitfähigkeit, das heißt gegenphasig gegenüber den Kommensurabilitätsoszillationen.

Zusammengefasst läßt sich sagen, daß die Modulation die Leitfähigkeit auf zweierlei Weise beeinflusst. Zum einen gibt es einen Einfluß auf die Streuleitfähigkeit der in beiden Komponenten σ_{xx} und σ_{yy} in gleicher Weise auftritt, zum anderen entsteht durch die Dispersion in den Landaubändern ein Beitrag der Bandleitfähigkeit zu σ_{yy} , der gegenphasig ist zum Beitrag der Streuleitfähigkeit.

In Kapitel 5 wird die Diskussion über Band- und Streuleitfähigkeit bei der Besprechung der Ergebnisse der semiklassischen Störungstheorie im schwach 1D-moduliertem System wieder aufgegriffen und auf die Modulation der Shubnikov-de Haas Oszillationen ausgedehnt.

3.4 Quadratische Antidot-Übergitter

3.4.1 Kommensurabilität

Kommensurabilitätseffekte im Magnetowiderstand treten auch in Antidotssystemen auf. In diesem Abschnitt werden Kommensurabilitätsmaxima quadratischer Antidotgitter beschrieben. Diese Effekte werden im Experiment üblicherweise bei Temperaturen im Bereich von 4 K gemessen. Bei wesentlich tieferen Temperaturen unterhalb 0.5 K treten zusätzlich zum klassischen Anteil Oszillationen auf, die mit Interferenzeffekten von Wellenfunktionen erklärt werden können und in Abschnitt 3.4.2 erläutert werden.

Der Magnetowiderstand von quadratischen Antidotgittern ist in Abbildung 3.5 gezeigt und zeigt Widerstandsmaxima [6, 56], die stark vom konstanten Magnetowiderstand eines unstrukturierten Systems abweichen.

Zur Erklärung im Rahmen der Lineare-Antwort-Theorie (siehe Abschnitt 2.3.2) werden die Trajektorien des klassischen Systems ohne äußeres elektrisches Feld betrachtet. Die klassische Dynamik im Antidotgitter wird durch das Wechselspiel zwischen der Übergitterperiode a und dem Zyklotronradius R_c bestimmt. Bei Magnetfeldern, bei denen der Durchmesser der Zyklotronbahn mit der Gitterkonstante kommensurabel ist, sind die Elektronen auf zyklotronartigen Kreis-

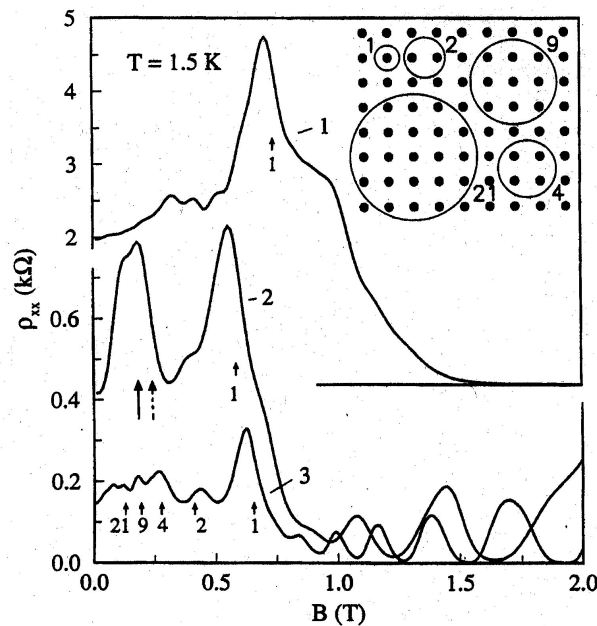


Abbildung 3.5: Magnetowiderstand durch drei quadratische Antidotgitter bei einer Temperatur $T = 1.5 \text{ K}$ und Gitterperiode $a = 200 \text{ nm}$ (oberste Kurve) und $a = 300 \text{ nm}$ (untere Kurven). Der relative Durchmesser $\hat{d} = (\text{Antidotdurchmesser } d / \text{Gitterperiode } a)$ nimmt von oben nach unten ab. Die unterste Kurve weist Maxima auf, deren Position mit dem Durchmesser von kommensurablen Zyklotronorbits erklärt werden kann, wie sie im Inset skizziert sind. Bei der mittleren Kurve weicht die Lage des Widerstandsmaximums (durchgezogener Pfeil) von dem Maximum, das eine Zyklotronbahn um vier Antidots erzeugen würde (gestrichelter Pfeil), etwas ab. Diese Verschiebung zu kleineren Feldern folgt aus der Deformation der Bahn in einem weichen Potential [7]. Aus [6]

bahnen um ein oder mehrere Antidots gepinnt (siehe Inset in Abbildung 3.5) und tragen nicht mehr zum Stromtransport bei. Die aufgrund solcher gepinnten Bahnen entstehenden Resonanzen manifestieren sich durch Maxima im Magnetowiderstand.

Eine realistische Modellierung des Antidotgitters, geht immer von einem „weichen“ Antidotpotential aus, wodurch die Zyklotronkreise der Elektronen verformt und die Kommensurabilitätsmaxima verschoben werden können (siehe Abbildung 3.5, mittlere Kurve). Neben den gepinnten Zyklotronorbits beeinflussen dann auch „quasigepinnte“ Orbits den Transport. Diese chaotischen Bahnen in der Nachbarschaft von regulären gepinnten Orbits folgen deren Dynamik eine gewisse Zeit, um dann wieder die gepinnte Bahn zu verlassen [7].

Die Anzahl der beobachtbaren Kommensurabilitätsmaxima hängt zum einen

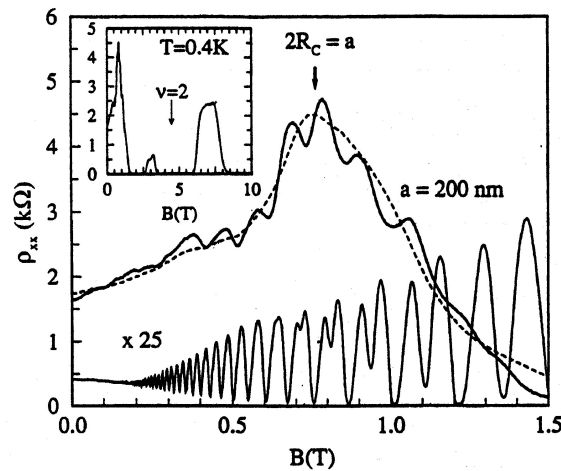


Abbildung 3.6: Magnetowiderstand $\rho_{xx}(B)$ für ein quadratisches Antidotgitter (obere Kurven) und eines unstrukturierten Bereichs derselben Probe (untere Kurve), bei Temperaturen von 0.4 K (durchgezogene Linien) und 4.7 K (gestrichelte Linie). Im Inset ist ρ_{xx} für das Antidotgitter bis 10 T dargestellt. Bei der tieferen Temperatur sind dem Komensurabilitätsmaximum im Antidotgitter zusätzliche Oszillationen überlagert. Im homogenen System bilden sich Shubnikov-de Haas Oszillationen (aus [8]).

ab von der mittleren freien Weglänge, die größer sein sollte als der Umfang der Zyklotronbahn, und zum anderen ist sie abhängig vom Verhältnis Antidotdurchmesser² zur Gitterperiode ($\hat{d} = d/a$). In Abbildung 3.5 ist in der oberen Kurve mit $\hat{d} = 0.5$ nur das primäre Komensurabilitätsmaximum mit $2R_c = a$ zu sehen. Bei der untersten Kurve mit $\hat{d} = 0.3$ ist dagegen das Antidotgitter offen genug, daß sich auch annähernd kreisförmige Bahnen um mehrere Antidots ausbilden können.

In offenen Systemen können sich bei den selben komensurablen Magnetfeldwerten auch offene gitterperiodische Elektronenbahnen ausbilden (*Runaway-Trajektorien*), bei denen ein Elektron durch Reflexion an den Antidots durch das Gitter geleitet wird [57]. Diese Runaway-Trajektorien spielen beim Magnetotransport durch Rechteckgitter eine wichtige Rolle und werden ausführlich in Kapitel 4 besprochen.

²Mit Antidotdurchmesser ist hier der Durchmesser des Antidots bei der Fermieenergie gemeint.

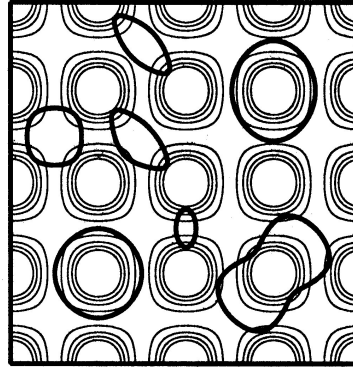


Abbildung 3.7: Periodische Orbits, die zur Berechnung der Quantenoszillationen in Abbildung 3.8c) benutzt wurden (aus [10])

3.4.2 Quantenoszillationen

In Abbildung 3.6 ist eine Messung des longitudinalen Magnetowiderstands ρ_{xx} an einem quadratischen Antidotgitter bei einer Temperatur von 0.4 K dargestellt [8]. Beim Vergleich mit der Messung an derselben Probe bei 4.7 K stellt sich heraus, daß zusätzlich zum (klassischen) Kommensurabilitätsmaximum Oszillationen auftreten, die durch höhere Temperaturen sehr schnell gedämpft werden. Im Gegensatz zu den Shubnikov-de Haas-Oszillationen des homogenen Systems, die $1/B$ -Periodizität aufweisen, sind die Quantenoszillationen im Antidotgitter näherungsweise B -periodisch.

Aus den Widerstandsdaten kann die Leitfähigkeit mithilfe der Tensorinversion (2.6) berechnet werden und nach Bildung der Temperaturdifferenz

$$\Delta\sigma_{xx} = \sigma_{xx}(0.4 \text{ K}) - \sigma_{xx}(4.7 \text{ K}) \quad (3.10)$$

lassen sich die Oszillationen in der Magnetoleitfähigkeit extrahieren (siehe Abbildung 3.8a).

Eine Erklärung der Quantenoszillationen im Antidotgitter wurde im Rahmen der semiklassischen Näherung zur Leitfähigkeit [10, 11] gegeben (siehe Abschnitt 2.5.3). Die Oszillationen der Magnetoleitfähigkeit werden in diesem Formalismus durch Interferenzeffekte von Elektronen auf klassischen periodischen Bahnen erzeugt. Die dazu notwendige Kohärenz der Phasen der Elektronenwellen muß sich deshalb nicht auf das Gesamtsystem erstrecken, sondern es reicht, wenn die Phasenkohärenzlänge im Bereich der Länge der kürzesten periodischen Orbits liegt.

Für die Berechnung von σ_{xx}^{osc} in der *Periodic Orbit Theory* ist es aufgrund der Dämpfungseffekte von Temperatur und Streuung bereits ausreichend, die kürzesten periodischen Orbits im klassischen Modellsystem zu finden. Für die gewählten Parameter aus [10] sind die kürzesten periodischen Orbits in Abbildung

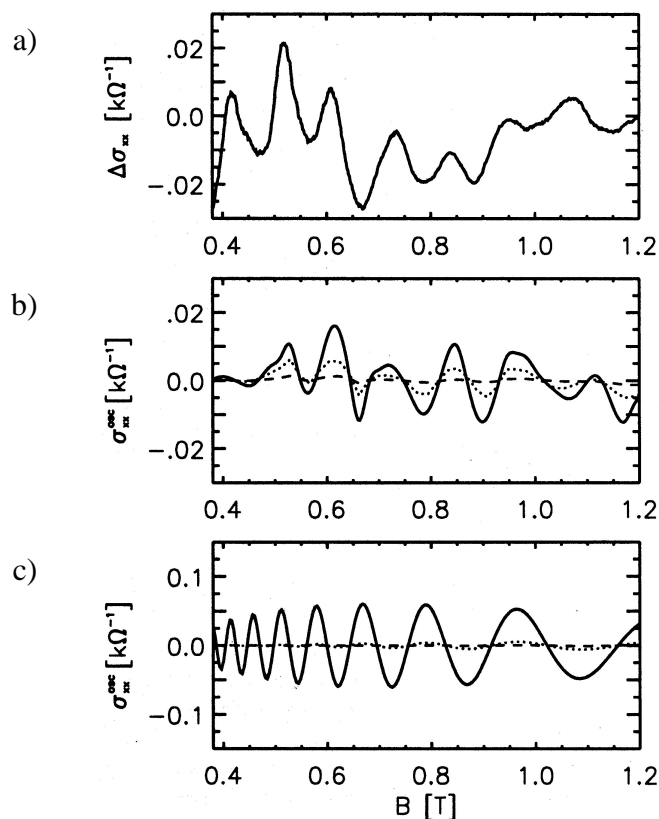


Abbildung 3.8: a) Oszillierender Anteil $\Delta\sigma_{xx} = \sigma_{xx}(0.4 \text{ K}) - \sigma_{xx}(4.7 \text{ K})$ der Magnetleitfähigkeit des Antidotgitters aus Abbildung 3.6. b) Mit der Spurformel (2.71) und den Orbits aus Abbildung 3.7 berechneter Anteil σ_{xx}^{osc} für die Temperaturen 0.4 K (durchgezogene Kurve), 2.5 K (gepunktete Kurve) und 4.7 K (gestrichelte Kurve). c) Shubnikov-de Haas Oszillationen nach (2.68) für ein unmoduliertes System (aus [10]).

3.7 dargestellt. In Abbildung 3.8b) ist das Ergebnis der semiklassischen Rechnung zu sehen. Deutlich erkennbar ist die Abweichung der Periodizität der Quantenoszillationen im Antidotgitter von der $1/B$ -Periodizität der semiklassisch berechneten Shubnikov-de Haas Oszillationen in Abbildung 3.8c).

Die Oszillationsperiode wird in semiklassischer Näherung von der Abhängigkeit der Wirkung vom Magnetfeld bestimmt

$$S_{\text{po}}(B) = \oint_{\text{po}} (m^* \mathbf{v} - e\mathbf{A}) \cdot d\mathbf{r} = m^* \int_0^{T_{\text{po}}} \mathbf{v}^2(t) dt - eBF_{\text{po}}(B). \quad (3.11)$$

Dabei ist der erste Summand in (3.11) proportional zur gemittelten kinetischen Energie des periodischen Orbits, die in erster Näherung bezüglich B als konstant

angenommen wird. Der zweite Summand in (3.11) ist proportional zur Fläche F_{po} des periodischen Orbits. In einem weichen Potential wie in Abbildung 3.7 bleibt die Fläche der periodischen Orbits in Abhängigkeit von B näherungsweise konstant, und die Oszillationen sind B -periodisch.

In homogenen Systemen ergibt sich aus (3.11) die Wirkung eines Zyklotronorbits

$$S_c(B) = 2\pi \frac{E}{\omega_c} \propto 1/B, \quad (3.12)$$

die streng $1/B$ -periodisch ist und die Periodizität der Shubnikov-de Haas-Oszillationen bestimmt. In offenen Systemen mit steilem Antidotpotential ergibt sich für Orbits, die nicht an den Antidots reflektiert werden, in erster Näherung ebenfalls die Wirkung (3.12), und es treten wiederum $1/B$ -periodische Oszillationen auf.

Kapitel 4

Antidot-Übergitter mit rechteckiger Einheitszelle

Der Magnetotransport in Antidot-Systemen mit rechteckiger Einheitszelle weist starke Anisotropieeffekte auf. Dies läßt im Vergleich zu quadratischen Gittern weitere Rückschlüsse auf die Mechanismen der klassischen und quantenmechanischen Aspekte des Magnetotransports zu. Das Antidot-System wird hier in klassischer und semiklassischer Näherung betrachtet. Vergleiche zum Experiment und zu quantenmechanischen Ergebnissen lassen die Stärken und Schwächen der verwendeten Methoden erkennbar werden.

4.1 Experiment

Experimente an Antidot-Systemen mit rechteckiger Einheitszelle und unterschiedlichen Verhältnissen der Gitterkonstanten a_x und a_y zeigen eine Anisotropie in den beiden Komponenten ρ_{xx} und ρ_{yy} des longitudinalen Magnetowiderstands [58, 59, 60, 61, 62, 63, 64]. Hier wird ein Experiment aus [64] untersucht, das in Abbildung 4.1 dargestellt ist. Der Unterschied zwischen ρ_{xx} und ρ_{yy} ist für Magnetfelder zwischen 0.5 und 2 T besonders ausgeprägt. Kommensurabilitätsmaxima werden hauptsächlich für Stromfluß in Richtung der größeren Gitterkonstanten beobachtet, während in der anderen Widerstandskomponente lediglich ein breites Randstreumaximum auftritt, das aus Quantendraht-Systemen bekannt ist [64, 65]. Bei hohen Magnetfeldern $B > 2$ T verschwindet die Anisotropie zwischen ρ_{xx} und ρ_{yy} .

Ein Vergleich der Messungen bei 4.2 K mit denen bei 35 mK zeigt das Auftreten zusätzlicher Quantenoszillationen mit abnehmender Temperatur. Diese Oszil-

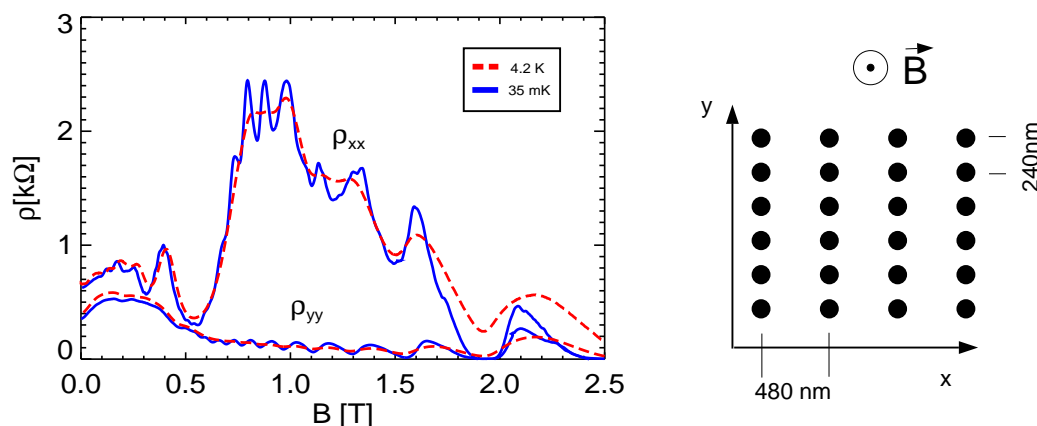


Abbildung 4.1: Magnetowiderstand eines Antidot-Gitters mit rechteckiger Einheitszelle aus [64]. Das Antidot-System mit den Gitterkonstanten $a_x = 480$ nm und $a_y = 240$ nm ist in der rechten Bildhälfte schematisch dargestellt. Aufgetragen sind die longitudinalen Widerstandskomponenten ρ_{xx} und ρ_{yy} für die Temperaturen 4.2 K (gestrichelt) und 35 mK (durchgezogen). Im Bereich von 0.5 bis 2 T ist die Anisotropie zwischen den longitudinalen Widerständen ρ_{xx} und ρ_{yy} am deutlichsten ausgeprägt. Bei tiefen Temperaturen sind den Widerstandskomponenten zusätzliche Quantenoszillationen überlagert (siehe hierzu auch Abbildung 4.2).

lationen sind ebenfalls in dem Bereich starker Anisotropie (0.5 bis 2 K) besonders ausgeprägt. Zur genaueren Analyse der Quantenoszillationen (und zum später folgenden Vergleich mit den theoretischen Ergebnissen) werden die experimentellen Widerstände aus [64] in Leitfähigkeitswerte gemäß den Gleichungen

$$\sigma_{xx} = \frac{\rho_{yy}}{\rho_{xx}\rho_{yy} + \rho_{xy}^2} \quad \sigma_{yy} = \frac{\rho_{xx}}{\rho_{xx}\rho_{yy} + \rho_{xy}^2} . \quad (4.1)$$

umgerechnet und die Quantenoszillationen durch Bildung der Differenz

$$\Delta\sigma = \sigma(35 \text{ mK}) - \sigma(4.2 \text{ K}) \quad (4.2)$$

aus der Leitfähigkeit isoliert. Das Ergebnis ist in Abbildung 4.2 zu sehen. Beim Übergang von ρ zu σ gemäß Gleichung (4.1) treten die Oszillationen, die vorher in ρ_{xx} zu beobachten waren, nun in σ_{yy} auf. Dies liegt daran, daß im Magnetfeldbereich $B > 0.5$ T der Hallwiderstand ρ_{xy} gegenüber den longitudinalen Widerständen ρ_{xx} und ρ_{yy} dominiert und sich 4.1 näherungsweise auf $\sigma_{xx} \approx \rho_{yy}/\rho_{xy}^2$ und $\sigma_{yy} \approx \rho_{xx}/\rho_{xy}^2$ reduziert. Da der Hallwiderstand ρ_{xy} aber im Vergleich zu den longitudinalen Widerständen im Wesentlichen dem Widerstand des homogenen Systems entspricht (siehe [64]), treten die Oszillationen der xx -Komponente in ρ

in der yy -Komponente von σ auf (und umgekehrt). Die ausgeprägte Anisotropie zwischen der xx - und yy -Komponente im Magnetfeldbereich $0.5 \text{ T} < B < 2 \text{ T}$ ist auch in den Quantenoszillationen beobachtbar. Die Anisotropie tritt demnach sowohl in den klassischen als auch in den quantenmechanischen Aspekten des Magnetotransports auf. Die Ursachen dieser Transportanisotropien sollen in den nun folgenden Abschnitten mithilfe klassischer und semiklassischer Methoden analysiert werden, um ein tiefergehendes Verständnis und ein (möglichst) intuitives Bild des Magnetotransports im Rechteckgitter zu erlangen.

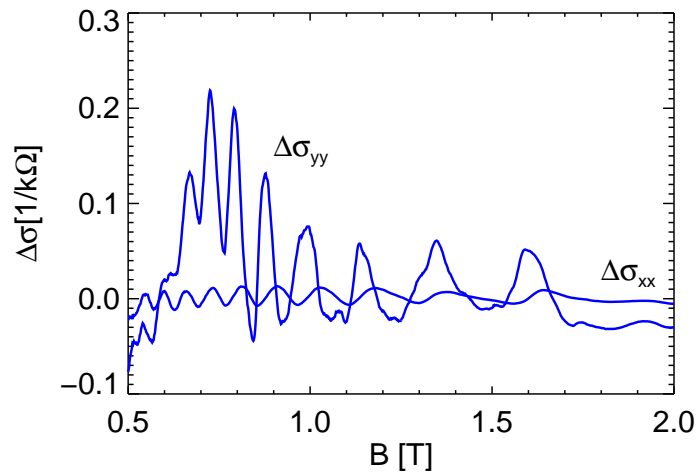


Abbildung 4.2: Magnetoleitfähigkeit $\Delta\sigma = \sigma(35 \text{ mK}) - \sigma(4.2 \text{ K})$ berechnet mit den Widerständen aus Abbildung 4.1. Die Quantenoszillationen des Magnetowiderstands ρ_{xx} treten gemäß Gleichung (4.1) in $\Delta\sigma_{yy}$ auf und umgekehrt. Auch in den Quantenoszillationen ist eine stark ausgeprägte Anisotropie zwischen der xx - und der yy -Komponente zu erkennen.

4.2 Klassischer Transport

Das klassische Pinball-Modell [6], welches zur Beschreibung der Kommensurabilitätsmaxima in quadratischen Gittern herangezogen wurde, verknüpft Widerstandsmaxima mit kommensurablen Zyklotronbahnen. Die um einen oder mehrere Antidots gepinnten Zyklotronbahnen führen in diesem Modell intuitiv zu einem Minimum in der Leitfähigkeit und damit zu einem Widerstandsmaximum. Im Allgemeinen kann jedoch auch ein Maximum im Widerstand mit einem Leitfähigkeitsmaximum verknüpft sein [66].

Das Konzept von (näherungsweise) kreisförmigen Elektronenbahnen um ein oder mehrere Antidots, kann jedoch keine Erklärung für die Anisotropie liefern,

da diese Bahnen (in Hinblick auf die klassische Kubo-Formel) durch isotrope Geschwindigkeits-Korrelationsfunktionen charakterisiert sind. Die Inversion der gemessenen Widerstandsdaten in [63] zeigt in der Tat Maxima nur in der Leitfähigkeitskomponente σ_{yy} , die damit offenen Trajektorien (Runaway-Trajektorien) zugeordnet werden können. Klassische Simulationen, bei denen das Rechteckgitter als Sinai-Billard behandelt wurde bestätigen diese Interpretation [67]. Eine ähnliche Untersuchung, bei der in einem weichen Antidot-Potential die longitudinalen Komponenten des Diffusionstensors numerisch berechnet wurden, reproduziert die wichtigsten Ergebnisse der Experimente an rechteckigen Antidotgittern [68].

Hier sollen anhand eines Potentialmodells Leitfähigkeiten und Widerstände des Rechteckgitters aus 4.1 berechnet und analysiert werden. Für die klassischen Transportrechnungen wird die Kubo-Formel [22, 23] benutzt

$$\bar{\sigma}_{ij}(B) = \frac{m^* e^2}{\pi \hbar^2} \int_0^\infty e^{-t/\tau} \langle v_i(t) v_j(0) \rangle_{E_F} dt , \quad (4.3)$$

die bereits in Abschnitt 2.3.2 beschrieben wurde. Als Relaxationszeit wurde $\tau = 18.9$ ps angenommen, was einer Mobilität von $\mu = 50$ m²/(Vs) entspricht, die für das untersuchte System typisch ist. Die Effektivmasse beträgt $m^* = 0.067 m_0$ in GaAs, wobei m_0 die Masse eines freien Elektrons ist.

Das Antidot-Potential wird durch

$$V(x, y) = V_0 \left(\cos \frac{\pi x}{a_x} \right)^{2\alpha} \left(\cos \frac{\pi y}{a_y} \right)^{2\beta} \quad (4.4)$$

mit der Potentialamplitude $V_0 = 25$ meV $\alpha = 8$, $\beta = 2$ und den Gitterkonstanten $a_x = 480$ nm sowie $a_y = 240$ nm beschrieben und ist in Abbildung 4.3 grafisch dargestellt. Die Exponenten α und β wurden so gewählt, daß der Antidot-Querschnitt bei der Fermienergie $E_F = V_0/2 = 12.5$ meV möglichst kreisförmig ist, was auch den Proben entsprechen sollte, die mittels Elektronenstrahlolithographie hergestellt wurden [64]. Die Fermienergie E_F entspricht der experimentellen Elektronendichte von 3×10^{15} m⁻², der Antidotdurchmesser bei E_F ist $0.4a_y$. Diese Wahl der Modellparameter stützt sich einerseits auf das in [64] beschriebene Experiment, zum anderen existierten hierzu auch schon quantenmechanischen Rechnungen [65] was in Hinblick auf den Vergleich Quantenmechanik und Semiklassik, der in Abschnitt 4.3 beschrieben wird, von Vorteil ist.

Nach der numerischen Auswertung der Kubo-Formel werden zum Vergleich mit den experimentellen Daten und den quantenmechanischen Ergebnissen [65] aus den kartesischen Komponenten des Leitfähigkeitstensors σ gemäß

$$\rho_{xx} = \frac{\sigma_{yy}}{\sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{xy}^2} \quad \rho_{yy} = \frac{\sigma_{xx}}{\sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{xy}^2} . \quad (4.5)$$

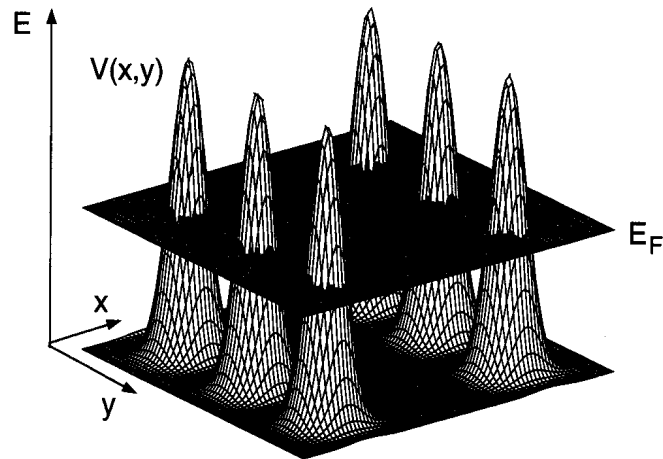


Abbildung 4.3: Potentialmodell nach Gleichung (4.4) mit $V_0 = 2E_F$ und $\frac{a_x}{a_y} = 2$

die Magnetowiderstände berechnet. Das Ergebnis ist in Abbildung 4.4 dargestellt und entspricht im wesentlichen den experimentellen Daten und den Resultaten der quantenmechanischen Rechnung. Das auffälligste Ergebnis ist die ausgeprägte Anisotropie zwischen ρ_{xx} und ρ_{yy} im Bereich von 0.5 bis 2 T. Neben dem Komensurabilitätspeak 1. Ordnung (in Abbildung 4.4 mit 1 gekennzeichnet) sind in ρ_{xx} auch Komensurabilitäten höherer Ordnung zu identifizieren. Diese entsprechen dann der Gleichung $2R_c/a_y = 2, 3$ oder 4, d.h. bei diesen Magnetfeldern entspricht der Durchmesser einer (freien) Zyklotronbahn dem 2-, 3- oder 4-fachen der kleineren Gitterkonstanten a_y .

Die Betrachtung der Magnetowiderstände ist recht nützlich zum Vergleich mit Experimenten, bei denen der Widerstand ja die eigentliche Meßgröße ist. Die Theorie liefert als primäre Werte jedoch keine Widerstände sondern Leitfähigkeiten. Zur Interpretation der Ergebnisse in Form von klassischen Elektronenbahnen ist demnach (zumindest für den theoretischen Physiker) die Leitfähigkeit besser geeignet, da sie direkt mit dem Diffusionstensor bzw. den Geschwindigkeitskorrelationen der klassischen Trajektorien in Verbindung gebracht werden kann (siehe Kubo-Formel (4.3)). Komensurabilitätsmaxima sind in der Leitfähigkeit jedoch nur schwer zu erkennen, was in erster Linie daran liegt, daß die Leitfähigkeit im allgemeinen von der Leitfähigkeit des homogenen Systems (Drude-Leitfähigkeit) dominiert wird, die im Gegensatz zu den Widerständen eine starke Feldabhängigkeit besitzt¹. Um die Leitfähigkeit dennoch zur Interpretation heranziehen zu können, wird hier die Leitfähigkeit auf die Drude-Werte normiert und damit die

¹Die Drude-Leitfähigkeiten verhalten sich asymptotisch für hohe Magnetfelder für $\sigma_{xx}^{\text{Drude}}$ wie $1/B^2$ bzw. für $\sigma_{xy}^{\text{Drude}}$ wie $1/B$, was sich aus Gleichung (2.10) im Limes $\omega_c\tau \gg 1$ ergibt.

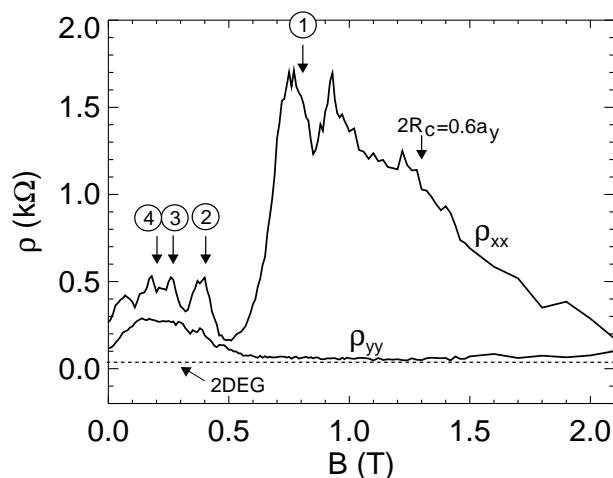


Abbildung 4.4: Magnetowiderstand im Rechteckgitter berechnet mit der Kubo-Formel (4.3) und dem Potentialmodell (4.4). Die Parameter sind im Text angegeben. Die eingekreisten Zahlen markieren die Magnetfelder, bei denen die Bedingung $2R_c/a_y = 1, 2, 3, 4$ erfüllt ist. Die gestrichelte Linie zeigt den longitudinalen Magnetowiderstand des entsprechenden 2DEG's.

charakteristische $1/B$ bzw. $1/B^2$ -Abhängigkeit eliminiert.

In Abbildung 4.5 ist die auf oben beschriebene Weise normierte Leitfähigkeit dargestellt. Im Vergleich mit Abbildung 4.4 fällt auf, daß die normierte Leitfähigkeit dem Verhalten des Widerstands entspricht, d.h. Maxima im Widerstand entsprechen Maxima der normierten Leitfähigkeit bei gleichem Magnetfeld. Diese Analogie wird verständlich durch Betrachten von Gleichung (4.5). Wie Abbildung 4.5 zeigt entspricht die Hall-Leitfähigkeit σ_{xy} im wesentlichen der Drude-Leitfähigkeit und für genügend hohe Magnetfelder² gilt schließlich $\sigma_{xy}^2 \gg \sigma_{xx}\sigma_{yy}$. Damit wird aus den Gleichungen (4.5) näherungsweise

$$\rho_{xx} \approx \frac{\sigma_{yy}}{\sigma_{xy}^2} \quad \text{und} \quad \rho_{yy} \approx \frac{\sigma_{xx}}{\sigma_{xy}^2}. \quad (4.6)$$

Das bedeutet wiederum, daß die Strukturen in ρ_{xx} , die durch das laterale Übergitter erzeugt werden, sich direkt auf entsprechende Strukturen in σ_{yy} übertragen und umgekehrt. Der Zusammenhang zwischen dem spezifischen Widerstand ρ_{xx} und der normierten Leitfähigkeit $\sigma_{yy}/\sigma_{yy}^{\text{Drude}}$ ergibt sich dann schließlich aus (4.6)

$$\rho_{xx} \approx \frac{\sigma_{yy}}{\sigma_{xy}^2} \approx \frac{\sigma_{yy}}{(\sigma_{xy}^{\text{Drude}})^2} = \frac{\sigma_{yy}}{\sigma_{yy}^{\text{Drude}}} \frac{1}{(\omega_c \tau)^2 \sigma_{yy}^{\text{Drude}}} \propto \frac{\sigma_{yy}}{\sigma_{yy}^{\text{Drude}}}. \quad (4.7)$$

²Die Bedingung $\sigma_{xy}^2 > \sigma_{xx}\sigma_{yy}$ ist nach numerischen Ergebnissen für das Rechteckgitter bereits für Magnetfelder $B > 0.2$ T erfüllt.

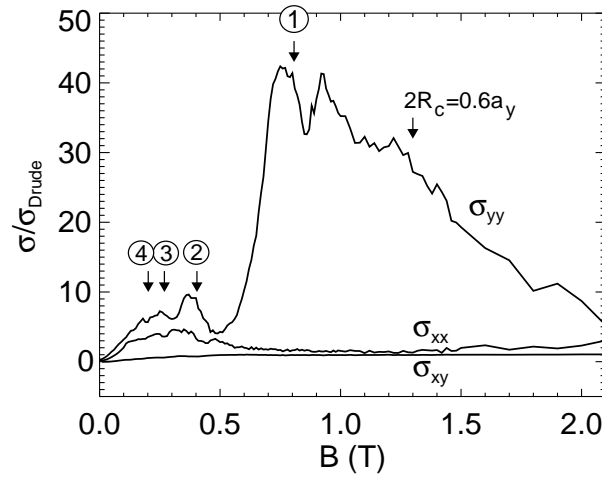


Abbildung 4.5: Magnetoleitfähigkeit im Rechteckgitter berechnet mit der Kubo-Formel (4.3) und dem Potentialmodell (4.4). Die Leitfähigkeit wurde mithilfe des Drude-Modells normiert. Die Parameter sind im Text angegeben. Die eingekreisten Zahlen markieren die Magnetfelder, bei denen die Bedingung $2R_c/a_y = 1, 2, 3, 4$ erfüllt ist.

Dabei wurde im ersten Schritt benutzt $\sigma_{xy} \approx \sigma_{xy}^{\text{Drude}}$ (wie oben), im zweiten Schritt $\sigma_{xy}^{\text{Drude}} = \omega_c \tau \sigma_{xx}^{\text{Drude}}$ und schließlich das asymptotische Verhalten³ $\sigma_{xx}^{\text{Drude}} \propto 1/(\omega_c \tau)^2$ für $\omega_c \tau \gg 1$. Dies zeigt die Proportionalität zwischen dem longitudinalen Magnetowiderstand ρ_{xx} und der normierten Leitfähigkeit $\sigma_{yy}/\sigma_{yy}^{\text{Drude}}$ für Magnetfelder $B > 0.2$ T, die in den Abbildungen 4.4 und 4.5 zu sehen ist. Analog gilt natürlich auch $\rho_{yy} \propto \sigma_{xx}/\sigma_{xx}^{\text{Drude}}$.

Der Zusammenhang (4.7) und Abbildung 4.5 zeigen, daß die Maxima in ρ_{xx} aus Abbildung 4.4 direkt mit den Maxima in der normierten Leitfähigkeit $\sigma_{yy}/\sigma_{yy}^{\text{Drude}}$ identifiziert werden können. Die Leitfähigkeit wiederum ergibt sich aus der Kubo-Formel über die Berechnung von Geschwindigkeitskorrelationsfunktionen und stellt so die Verbindung zu klassischen Trajektorien her, die für die Interpretation genutzt werden soll.

Die Maxima der Leitfähigkeit treten nur in der Komponente σ_{yy} auf und erfüllen die Kommensurabilitätsbedingung $2R_c/a_y = 1, 2, 3$ oder 4 . Die Maxima hängen demnach mit Zyklotronbahnen zusammen, wären diese allerdings geschlossene Zyklotron-Kreisbahnen, dann könnte damit die Anisotropie zwischen σ_{xx} und σ_{yy} nicht erklärt werden. Die Ursache der Kommensurabilitätsmaxima ist daher in den Runaway-Trajektorien zu suchen. Zwei Beispiele für Runaway-Trajektorien sind in Abbildung 4.6 gezeigt.

³ Hier gilt $\omega_c \tau = \mu B \geq 1$ für Magnetfelder $B \geq 20$ mT bei der angenommenen Beweglichkeit $\mu = 50 \text{ m}^2/(\text{Vs})$

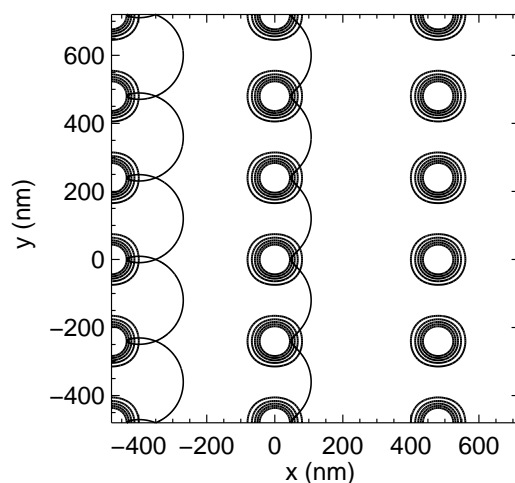


Abbildung 4.6: Zwei typische Vertreter von Runaway-Trajektorien im Rechteckgitter bei einem Magnetfeld $B = 0.75$ T.

Entlang dieser Runaway-Trajektorien hangeln sich die Elektronen von Antidot zu Antidot und die Geschwindigkeitskorrelation in y -Richtung ist größer als die in der x -Richtung, was die beobachtete Leitfähigkeitsanisotropie erklärt. Für Magnetfelder, bei denen die Ausbildung solcher Runaway-Trajektorien aus Gründen der Geometrie des Antidotsystems bevorzugt wird, ist die Anisotropie besonders ausgeprägt. Dies kann anhand eines einfachen Modells gezeigt werden, bei dem das Antidotgitter (gedanklich) durch ein Antidot-Billard ersetzt wird. In diesem Sinai-Billard, das denselben klassischen Antidotdurchmesser von $0.4 a_y$ wie das Potentialmodell (4.4) besitzt, können sich Runaway-Trajektorien in y -Richtung nur dann ausbilden, wenn der Zyklotrongdurchmesser $2R_c$ größer ist, als der kleinste Abstand zwischen den Antidots ($2R_c > a_y - 0.4a_y$). Analog gilt bei kleineren Magnetfeldern mit $2R_c > a_x - 0.4a_y$, daß sich Runaway-Trajektorien dann auch in x -Richtung bilden können. Der Feldbereich dazwischen mit $a_y - 0.4a_y < 2R_c < a_x - 0.4a_y$ oder $0.5 \text{ T} < B < 1.3 \text{ T}$ läßt damit ausschließlich die Bildung von Runaway-Trajektorien in y -Richtung zu und ist zugleich der Bereich mit der größten Transportanisotropie.

4.3 Quantenoszillationen

Während die Kommensurabilitätseffekte, die im vorigen Abschnitt besprochen wurden, typischerweise bei einer Temperatur von 4.2 K gemessen werden, treten bei Temperaturen im mK-Bereich zusätzliche Oszillationen im Magnetotransport auf (siehe Abschnitt 4.1). Diese Oszillationen können nicht mehr im Rahmen rein

klassischer Transporttheorien, die in Abschnitt 2.3 dargestellt sind, beschrieben werden. Diese Quantenoszillationen sind vielmehr Ausdruck der Wellennatur der Elektronen und treten bei tiefen Temperaturen als Quanteninterferenzeffekte auf, wenn die Phasenkohärenzlänge der elektronischen Wellenfunktionen vergleichbar wird mit dem Umfang der klassischen Zyklotronbahnen [10].

Die Berechnung dieser Quantenoszillationen erfolgt hier im Rahmen einer semiklassischen Näherung, der *Periodic Orbit Theory* (POT), die in Abschnitt 2.5 vorgestellt wurde. Zum Vergleich werden quantenmechanische Rechnungen aus [65] herangezogen, bei denen der oszillierende Anteil genau wie bei den experimentellen Daten durch Differenz der Leitfähigkeit bei zwei unterschiedlichen Temperaturen gebildet wird. In unserem konkreten Fall waren das die Temperaturen 10 K und 2 K:

$$\Delta\sigma = \sigma(2\text{ K}) - \sigma(10\text{ K}) \quad (4.8)$$

Die quantenmechanische Rechnung zeigt in den Leitfähigkeitsoszillationen ebenfalls eine Anisotropie wie bei den experimentellen Daten. Das Antidot-Potential, das für die quantenmechanischen Rechnungen verwendet wurde, ist im Gegensatz zum Experiment exakt bekannt und daher bietet es sich an, die quantenmechanischen Daten als Referenz für die semiklassischen Rechnungen heranzuziehen. Ein weiterer Vorteil in diesem Vergleich liegt natürlich auch darin, daß in beiden Fällen (Quantenmechanik und Semiklassik) die verwendeten Näherungen bekannt sind, womit wieder eine ganze Reihe von Effekten, die alle das Experiment beeinflussen, als Ursachen für eine Diskrepanz zwischen der quantenmechanischen Rechnung und der semiklassischen Näherung ausgeschlossen werden können, da sie in den entsprechenden Näherungen gar nicht enthalten sind. So wird beispielsweise die Störstellenstreuung in beiden Rechnungen isotrop behandelt, wobei im Experiment mit Sicherheit die Kleinwinkelstreuung dominieren wird.

4.3.1 Periodische Orbits

Die semiklassische Näherung zur Leitfähigkeit führt wie bei der Zustandsdichte zu einem Ausdruck, in dem klassische periodische Orbits die zentrale Rolle spielen [10, 11, 34]. Hier besteht eine gewisse Verwandtschaft zum Pinball-Modell bei dem auch periodische Orbits zur Erklärung der Kommensurabilitätsmaxima benutzt werden. Im folgenden soll nun untersucht werden, ob die semiklassische Näherung der Leitfähigkeit die (quantenmechanisch und experimentell) beobachtete Anisotropie in den Quantenoszillationen erklären kann.

Eine Anisotropie in der semiklassischen Kubo-Formel (2.71) tritt nur an einer

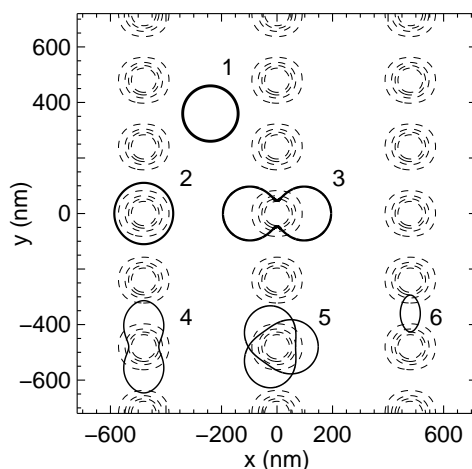


Abbildung 4.7: Periodische Orbits im Modellpotential (4.4) bei $B = 1\text{T}$, die in die semiklassische Rechnung eingehen. Dickere Linien kennzeichnen Orbits mit größerem Beitrag zu σ^{osc} . Der Beitrag zu σ^{osc} wird vernachlässigbar für lange und instabile Orbits.

Stelle auf, nämlich in der Geschwindigkeitskorrelationsfunktion

$$C_{ii}^{\text{ppo}} = \int_0^\infty dt e^{-t/T_{\text{ppo}}} \int_0^{T_{\text{ppo}}} dt' v_i(t') v_i(t+t'). \quad (4.9)$$

Eine Anisotropie zwischen σ_{xx}^{osc} und σ_{yy}^{osc} kann demnach nur durch entsprechend anisotrope Orbits zustandekommen.

Die Auswertung der Spurformel (2.71), die in Abschnitt 2.5.3 beschrieben ist, erfolgt numerisch. Dazu ist es nötig, die kürzesten periodischen Orbits im chaotischen System zu finden und ihre Eigenschaften, wie Maslovindex, Wirkung oder Stabilität mittels geeigneter numerischer Verfahren zu bestimmen. Dies soll hier nicht näher erläutert werden. Details zu den benutzten Methoden sind in [17, 69] zu finden. Die Programme, die zur numerischen Auswertung der Spurformel benutzt wurden, wurden an den in [10] veröffentlichten Ergebnissen zu einem quadratischen Antidotgitter getestet.

Das Modell für das Rechteckgitter ist inklusive aller Parameter bereits in Abschnitt 4.2 beschrieben worden. In Abbildung 4.7 sind die kürzesten periodischen Orbits im Rechteckgitter bei einem Magnetfeld $B = 1\text{T}$ dargestellt. Die Beiträge von kurzen und stabilen Orbits dominieren in der Spurformel. Je länger ein Orbit ist, desto stärker wird er durch Temperatur und Streuung gedämpft und je instabiler ein Orbit ist, desto größer ist der Betrag der Spur seiner Monodromiematrix, die in die Amplitude als Nenner eingeht.

Der Beitrag von Orbit 1 aus Abbildung 4.7, der einem freien Zyklotronorbit eines unmodulierten 2DEGs entspricht, muß bei der numerischen Auswer-

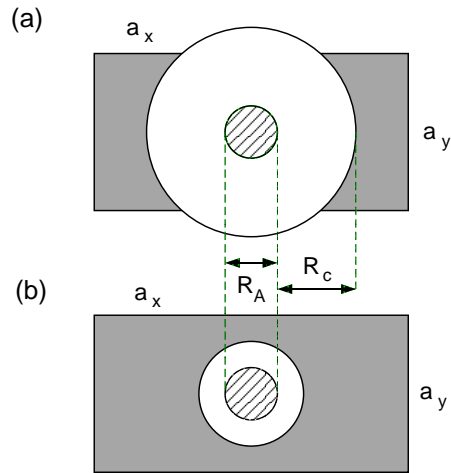


Abbildung 4.8: Skizze zur Berechnung der Amplitudenmodulation der SdH-Oszillationen im Rechteckgitter als Billardmodell. Der graue Bereich ist die für den Mittelpunkt eines Zyklotronorbits mit Radius $R_c(B)$ erreichbare Fläche $V(B)$. Der Antidotradius ist mit R_A gekennzeichnet. Die Amplitudenmodulation beträgt $V(B)/(a_x a_y)$. Die Teilabbildungen (a) und (b) stellen zwei unterschiedliche Magnetfelder dar. Für Magnetfelder mit effektivem Radius $R_{\text{eff}} = R_A + R_c(B) < a_y$ (in Teilabbildung (b)) ergibt sich $V(B) = a_x a_y - \pi R_{\text{eff}}^2$. Bei kleineren Magnetfeldern (Teilabbildung (a)) muß die Schnittmenge der Flächen $a_x a_y$ und πR_{eff}^2 berücksichtigt werden.

tung der semiklassischen Kubo-Formel extra behandelt werden. Dies liegt daran, daß das klassische 2DEG ein integrables System ist und die semiklassische Kubo-Formel (2.71), die in Abschnitt 2.5.3 für chaotische Systeme erläutert wurde, im Falle eines freien Zyklotronorbits divergiert. Die Ableitung der Leitfähigkeitsoszillationen für integrable Systeme führt hingegen auf die Shubnikov-de Haas-Oszillationen (2.68). Im Rechteckgitter ist der Beitrag des (quasi)freien Orbits 1 abhängig von der Fläche, die der Mittelpunkt des Zyklotronorbits einnehmen kann. Diese Fläche wiederum ist abhängig vom Magnetfeld. In einfachster Näherung wird hier diese Fläche im Billardmodell berechnet (siehe Abbildung 4.8). Der Durchmesser des Zyklotronorbits nimmt mit abnehmendem Magnetfeld zu und wird schließlich größer als der Abstand zwischen den Antidots. Bei Magnetfeldern $B < 0.65$ T verschwindet daher der Beitrag der Shubnikov-de Haas Oszillationen zu σ^{osc} . Für größere Magnetfelder wird das Phasenraumvolumen, das die Zyklotronorbits einnehmen können, schließlich gleich dem energetisch erreichbaren Phasenraum des Rechteckgitters. Dies resultiert in einer feldabhängigen Amplitudenmodulation der Shubnikov-de Haas Oszillationen, die in Abbildung 4.10(a) beobachtet werden kann. Die Berechnung der Amplitudenmodulati-

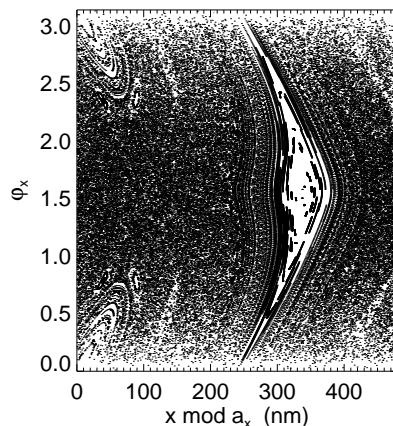


Abbildung 4.9: Poincaré-Schnitt für $y \bmod a_y = a_y/2$ und $B = 1$ T, ϕ_x bezeichnet den Winkel des Geschwindigkeitsvektors bezüglich der x -Achse. Die helle Insel entsteht aus Orbit 1 von Abbildung 4.7, die Inseln in den Ecken links oben und links unten beziehen sich auf Orbit 2.

on wird in Abbildung 4.8 illustriert.

Die Behandlung des Beitrags von Orbit 1 deutet bereits darauf hin, daß hier ein System mit gemischtem Phasenraum vorliegt. Dies ist auch im Poincaré-Schnitt in Abbildung 4.9 zu sehen. Der ausgeprägte helle Bereich entsteht aus den näherungsweise freien Zyklotronorbit 1. Die stabilen Inseln in den Ecken von Abbildung 4.9 resultieren von Orbit 2 aus Abbildung 4.7. Runaway-Trajektorien, die bei der Untersuchung des klassischen Beitrags zur Leitfähigkeit in Abschnitt 4.2 eine Erklärung der Transportanisotropie liefern, sind in diesem Poincaré Schnitt aufgrund ihrer Instabilität nicht zu erkennen.

Der oszillierende Anteil der Magnetoleitfähigkeit, der mit den Orbits aus Abbildung 4.7 berechnet wurde, wird in Abbildung 4.10 mit dem Ergebnis der quantenmechanischen Rechnung [65] verglichen. $\sigma_{xx}^{\text{osc}}(B)$ in Abbildung 4.10(a) wird durch den Beitrag des (quasi)freien Zyklotronorbits (Orbit 1) dominiert. Die Orbits 2 und 3 führen zu kleinen Modifikationen der SdH-Oszillationen, wohingegen die Beiträge der Orbits 4-6 aufgrund ihrer Länge und/oder Instabilität vernachlässigbar sind. Insgesamt besteht eine recht gute Übereinstimmung des quantenmechanischen Resultats mit der semiklassischen Rechnung.

Im Gegensatz dazu reproduziert das semiklassische Ergebnis für $\sigma_{yy}^{\text{osc}}(B)$ in Abbildung 4.10(b) weder die Periodizität noch die große Amplitude der Oszillationen aus der quantenmechanischen Rechnung (beachten Sie die unterschiedliche y -Skala). Eine Vergleich der Ergebnisse der semiklassischen Rechnung für σ_{xx}^{osc} und σ_{yy}^{osc} zeigt, daß die Oszillationen in beiden Richtungen praktisch gleich

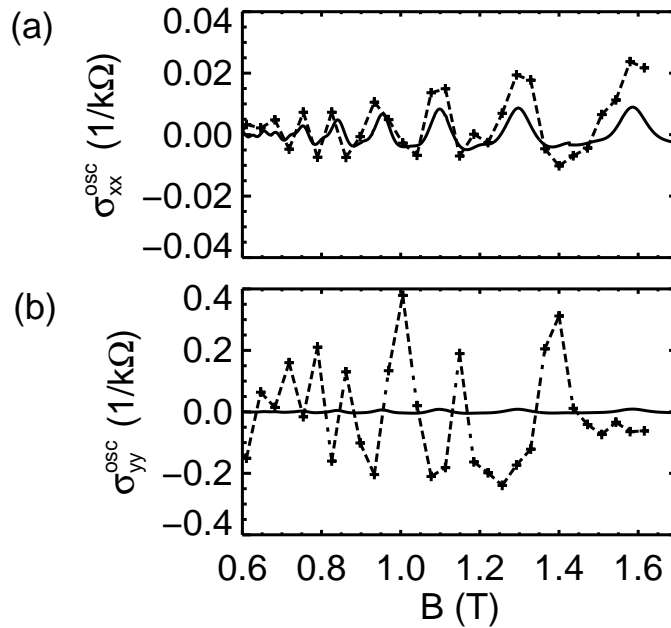


Abbildung 4.10: Semiklassisch berechnete Leitfähigkeitsoszillationen (durchgezogene Linie) aus den Orbits aus Abbildung 4.7 bei $T = 2$ K. Das Ergebnis der quantenmechanischen Rechnungen aus [65] ist mit Kreuzen gekennzeichnet (die gestrichelten Linien dienen nur der Orientierung). Man beachte die unterschiedlichen Skalen auf den beiden y -Achsen.

sind. Das heißt, die Semiklassik führt hier zu einem isotropen Ergebnis im Widerspruch zum Experiment und zu den quantenmechanischen Rechnungen. Offensichtlich reicht die Anisotropie der Orbits in Abbildung 4.7 bei weitem nicht aus, um einen signifikanten Unterschied in den Korrelationsfunktionen C_{xx} und C_{yy} zu erzeugen. Die verwendete semiklassische Näherung kann somit die Anisotropie der Quantenoszillationen im Rechteckgitter nicht beschreiben.

4.3.2 Gitterperiodische Orbits (Runaway Trajektorien)

Eine mögliche Lösung zur semiklassischen Beschreibung der Anisotropie in den Quantenoszillationen liegt in der Berücksichtigung der Runaway-Trajektorien (siehe Abbildung 4.6 und Abbildung 4.11), die schon in Abschnitt 4.2 zur Erklärung der Anisotropie des klassischen Magnetotransports herangezogen wurden. Intuitiv wäre zu erwarten, daß diese Runaway-Trajektorien dann auch für die Anisotropie in den Quantenoszillationen verantwortlich sein könnten.

In der Tat haben die Runaway-Trajektorien eine wesentlich größere Korrelation C_{ii} in y -Richtung als in x -Richtung. Ein weiteres Indiz liefert die quan-

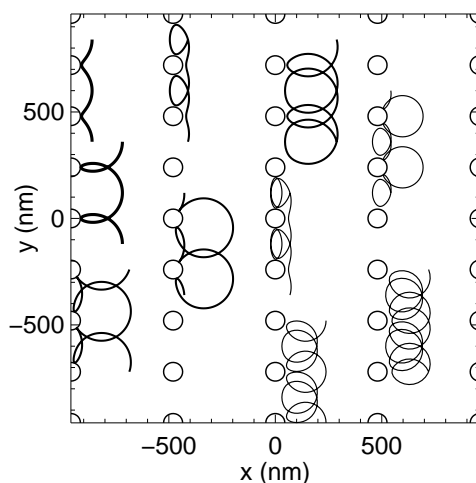


Abbildung 4.11: Einige Beispiele für Runaway-Trajektorien bei $B = 0.7 \text{ T}$. Wegen der Symmetrie des Rechteckgitters gibt es ebenso viele Trajektorien die in $+y$ -Richtung laufen, wie solche, die in $-y$ -Richtung laufen, diese sind hier nicht extra dargestellt.

tenmechanische Rechnung [65]. Hier zeigt sich ein dominierender Beitrag zu σ_{yy} aufgrund der Dispersion der magnetischen Minibänder. Also ein Beitrag zur Leitfähigkeit, der durch die Bandstruktur und damit letztlich durch die Berücksichtigung der diskreten Translationssymmetrie des Übergitters zustande kommt. Die Runaway-Trajektorien besitzen ebenfalls diese diskrete Translationssymmetrie und können auf einer Einheitszelle im symmetriereduzierten System als (gitter)periodische Orbits angesehen werden.

Ein Konzept zur Berücksichtigung diskreter Symmetrien in der POT wurde von Robbins [70] vorgestellt. In unserem Fall eines Gitters wird dabei das longitudinale Übergitter auf die Einheitszelle reduziert, auf der die gesamte klassische Dynamik abläuft. Entsprechend läßt sich der oszillatorische Anteil der semiklassischen Zustandsdichte im symmetriereduzierten System formulieren. Dabei treten zusätzlich zu den periodischen Orbits auch Trajektorien auf, die gitterperiodisch (Runaway-Trajektorien) und im ausgedehnten System, d.h. im ursprünglichen System ohne Symmetrieprojektion, *nicht* geschlossen sind. Die Runaway-Trajektorien werden mit einer Blochphase e^{ikR} moduliert, die die Zahl der Durchläufe der Runaway-Trajektorie durch die Einheitszelle zählt. Zur Berechnung der Zustandsdichte des Gesamtsystems muß letztlich über den \mathbf{k} -Vektor summiert werden

$$d(E) = \sum_{\mathbf{k}} d_{\mathbf{k}}(E) . \quad (4.10)$$

Die \mathbf{k} -Summation über die Blochphase führt jedoch auf ein δ -Symbol, daß nur

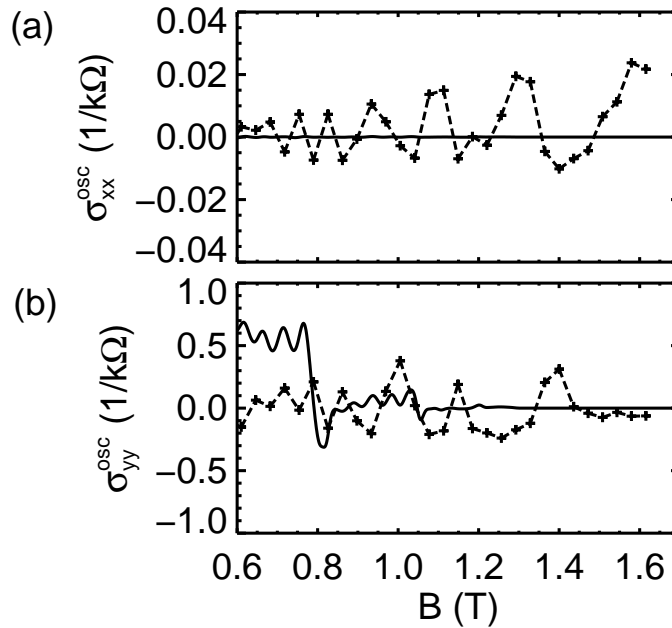


Abbildung 4.12: Beitrag der Runaway-Trajektorien aus Abbildung 4.11 zu σ^{osc} . Die Runaway-Trajektorien wurden wie periodische Orbits behandelt. Der Beitrag zur xx -Komponente ist vernachlässigbar. In der yy -Komponente klingt der anfänglich sehr große Beitrag rasch ab, da die Runaway-Trajektorien ständig Bifurkationen durchlaufen und so sehr schnell „aussterben“. Die einzigen relevanten Runaway-Trajektorien bei höherem Feld $B \geq 1.2 \text{ T}$ sind driftende Orbits, wie sie in Abschnitt 4.3.3 beschrieben werden.

Orbits mit $\mathbf{R} = 0$ übrigläßt, und dies sind wieder die ursprünglichen periodischen Orbits aus Abbildung 4.7, alle Beiträge der Runaway-Orbits fallen weg.

Bei der Berechnung der Leitfähigkeit wird im Gegensatz zur Zustandsdichte die Spur über das Produkt zweier Greenscher Funktionen gebildet (siehe Abschnitt 2.5.3). Die oben beschriebene Auslöschung der gitterperiodischen Orbits ist demnach hier nicht direkt offensichtlich. Alle Versuche des Autors, Runaway-Trajektorien in der semiklassischen Kubo-Formel über die oben beschriebene Symmetrieprojektion zu berücksichtigen, führten jedoch immer auf das gleiche Ergebnis wie bei der Zustandsdichte, nämlich die Auslöschung der Beiträge der gitterperiodischen Trajektorien bei der Berechnung der Gesamtleitfähigkeit aus der symmetrieprojezierten Leitfähigkeit.

Dennoch lohnt sich eine etwas nähere Betrachtung der Runaway-Trajektorien, denn in einer Formulierung der Leitfähigkeit mit dieser Art Trajektorien wäre auch wieder die Wirkung die primäre Größe für die Quantenoszillationen. Damit die Runaway-Trajektorien somit als Kandidat für die Anisotropie in den Quanten-

noszillationen in Frage kommen, müßte zumindest ihre Wirkung zu Oszillationen mit der richtigen Periodizität führen.

Die Runaway-Trajektorien werden hier behandelt wie echte periodische Orbits. Das heißt, ihre Größen wie Stabilität, Korrelation und Wirkung werden wie bei den periodischen Orbits numerisch berechnet und in die Spurformel für σ^{osc} eingesetzt. Das Ergebnis dieser Analyse ist in Abbildung 4.12 dargestellt.

Die Runaway-Trajektorien liefern die gewünschte Anisotropie, ihr Beitrag zu σ_{xx}^{osc} ist praktisch vernachlässigbar und aufgrund der sehr großen Korrelation C_{yy} produzieren sie einen signifikanten Anteil zu σ_{yy}^{osc} . Die Periodizität der Oszillationen in der yy -Komponente stimmt jedoch nicht mit der Periodizität des quantenmechanischen Ergebnisses überein, das auch für σ_{yy}^{osc} ein $1/B$ -Verhalten mit der Periodizität der SdH-Oszillationen fordert [65], das zudem zu σ_{xx}^{osc} gegenphasig ist. Zudem durchlaufen die Runaway-Trajektorien mit zunehmendem Magnetfeld immer häufiger Bifurkationen. Dies führt bei Feldern $B \geq 1.3$ T schließlich dazu, daß praktisch keine Trajektorien in der Art wie in Abbildung 4.11 mehr gefunden werden⁴. Die einzigen Trajektorien, die bei größeren Feldern noch existieren, sind driftende Zyklotronorbits, wie sie in Abbildung 4.13 veranschaulicht sind, deren Länge über eine Gitterkonstante ist jedoch so groß, daß sie in der obigen Auswertung praktisch keine Rolle mehr spielen.

Insgesamt stellen die Runaway-Trajektorien somit keine besonders aussichtsreichen Kandidaten zur Erklärung der Anisotropie der Quantenoszillationen dar. Die Suche nach Orbits, die im gesamten Feldbereich existieren und die $1/B$ -Periodizität der SdH-Oszillationen aufweisen, führt schließlich wieder zurück auf die (quasi)freien Zyklotronorbits wie Orbit 1 in Abbildung 4.7. Im folgenden Abschnitt wird nun ein Weg gezeigt, der sowohl die geforderte Periodizität der Oszillationen liefert, als auch eine mögliche Erklärung für die Anisotropie.

4.3.3 Driftende Orbits

Die Suche nach einer Erklärung für die anisotropen Quantenoszillationen im Rahmen der Semiklassik beginnt hier zunächst mit zwei allgemeineren Bemerkungen über die POT.

Bei der Herleitung der Spurformeln spielen die Eigenschaften des klassischen Systems eine wichtige Rolle. Bei (vollständig) chaotischen Systemen sind die klassischen Trajektorien im Phasenraum isoliert, und die Spurformeln können mittels Sattelpunktsintegration hergeleitet werden. Dies ist grundsätzlich anders bei Systemen mit kontinuierlichen Symmetrien, wo die klassischen Trajektorien

⁴Im Bild des Antidot-Billard ist dies auch wieder die Grenze, bei der der Durchmesser des Zyklotronkreises kleiner wird als der Abstand zwischen den Antidots und die Ausbildung von Runaway-Trajektorien nicht mehr möglich ist. Dies wurde schon in Abschnitt 4.2 ausführlich erläutert.

in Familien auftreten und die Integrale zur Berechnung der Spurformel exakt gelöst werden müssen [40]. Für die semiklassischen Oszillationen bedeutet dies, daß sich in der Amplitude die führende Ordnung in \hbar ändert und daher Systeme mit höherer Symmetrie gegenüber vollständig chaotischen Systemen im allgemeinen stärkere Oszillationen aufweisen.

Die Periodizität der Oszillationen wird durch die Wirkung der periodischen Orbits bestimmt. In unserem Fall mit endlicher Temperatur und Streuzzeit liefern jedoch nur wenige Orbits bei der Auswertung der Spurformel einen signifikanten Beitrag, wie bereits in Abschnitt 4.3.1 zu sehen war.

Die Untersuchung der Quantenoszillationen im Rechteckgitter ergibt nun zum einen, daß die Oszillationsperiode in beiden Komponenten der Leitfähigkeit den $1/B$ -periodischen SdH-Oszillationen entspricht, wobei die xx - und die yy -Komponente zueinander um π phasenverschoben [65] sind. Zum anderen stimmt die Amplitude der xx -Komponente, ziemlich genau mit der Amplitude der SdH-Oszillationen des integrablen Systems (2DEG) überein, wie in Abschnitt 4.3.1 gezeigt wurde. Die Stärke der Oszillationen in der yy -Komponente ist gegenüber den SdH-Oszillationen in der xx -Komponente sogar noch um eine Größenordnung höher, was ebenfalls eine Beschreibung über Orbits aus dem (näherungsweise) integrablen Bereich des Phasenraums nahelegt.

Da die Phase der Quantenoszillationen durch die SdH-Oszillationen bestimmt ist, muß somit im Rahmen der semiklassischen Näherung die Wirkung der beteiligten Trajektorien, der Wirkung des freien Zyklotronorbits 1 in Abbildung 4.7 entsprechen. Dies ist bei den Orbits 2-6 und bei den Runaway Trajektorien aus Abschnitt 4.3.2 nicht der Fall.

Wenn die Wirkung somit durch die Zyklotronorbits bestimmt ist, dann bleibt noch die Frage zu klären, wie die Oszillationsamplitude in der yy -Komponente stärker sein kann, als die Amplitude für das integrable 2DEG, die durch die xx -Komponente vorgegeben ist, und was in diesem Zusammenhang als Ursache für die Anisotropie in den Quantenoszillationen angesehen werden kann.

Die SdH-Oszillationen in der Leitfähigkeit, wie auch der Poincaré-Schnitt in Abbildung 4.9 zeigen, daß das Rechteckgitter einen gemischten Phasenraum besitzt. Das heißt, es ist weder ein vollständig chaotisches, noch ein integrables System. Die korrekte semiklassische Behandlung solcher gemischten Systeme ist bisher noch nicht geklärt. Dennoch soll hier der Versuch unternommen werden, für das Rechteckgitter die beobachtete Anisotropie der Quantenoszillationen weiter zu klären.

Der Ansatz, der hier verfolgt wird, basiert darauf, zunächst vom integrablen 2DEG auszugehen und dann das Antidot-Potential als Störung anzusehen. Im wesentlichen wird dieser Ansatz von der semiklassischen Störungstheorie inspiriert, die von Creagh in [46] zur Ableitung von Spurformeln für Systeme mit gebrochener Symmetrie benutzt wurde.

Die Idee, das Antidotpotential als Störung zu behandeln, mag zunächst etwas gewagt erscheinen, da die Amplitude des Antidotpotentials natürlich größer ist, als die kinetischen Energie der Elektronen. Die entscheidende Größe ist hier allerdings die Wirkung ΔS die ein Orbit $\mathbf{r}(t)$ des *ungestörten* Systems vom Potential U zusätzlich erhält.

$$\Delta S = - \int_0^T U(\mathbf{r}(t)) dt \quad (4.11)$$

Diese Größe ist im hier betrachteten Rechteckgitter allerdings klein, da das Potential sehr steil ist und sich die Trajektorien hauptsächlich im Bereichen mit $U(x, y) \ll E_F$ aufhalten.

Hier wird die Korrektur ΔS aus Zyklotronorbits mit Radius $R_c = v_F/\omega_c$ berechnet, deren Mittelpunkt durch den Vektor \mathbf{R} gegeben ist

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{R} + \mathbf{r}_0(t) \quad \text{mit} \quad \mathbf{r}_0(t) = R_c \begin{pmatrix} \cos(\omega_c t) \\ \sin(\omega_c t) \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

Die Korrektur zur Wirkung wird damit eine Funktion des Mittelpunkts \mathbf{R}

$$\Delta S_{\text{po}}(\mathbf{R}) = - \int_0^{2\pi/\omega_c} dt U(\mathbf{R} + \mathbf{r}_0(t)) \quad (4.13)$$

Neben der Wirkung ΔS verursacht das Antidotpotential auch eine Drift des Mittelpunkts der Zyklotronorbits (siehe Abbildung 4.13). Diese *Guiding-Center-Drift* wurde von Beenacker in [54] zur Berechnung der klassischen Kommensurabilitätsoszillationen (siehe Abschnitt 3.3) in schwach eindimensional modulierten Systemen [52] benutzt.

Das Guiding Center $\mathbf{R} = (X, Y)$ eines Teilchens am Ort (x, y) mit Geschwindigkeit (v_x, v_y) ist gegeben durch⁵

$$\begin{aligned} X &= x - v_y/\omega_c \\ Y &= y + v_x/\omega_c \end{aligned} \quad (4.14)$$

und ist mit (4.12) identisch mit dem Mittelpunkt \mathbf{R} des Zyklotronorbits.

Zusammen mit den Newtonschen Bewegungsgleichungen ergibt sich aus (4.14) für die Geschwindigkeit des Guiding Centers

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \dot{x} - \dot{v}_y/\omega_c = \frac{1}{m\omega_c} \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} \\ \dot{Y} &= \dot{y} + \dot{v}_x/\omega_c = -\frac{1}{m\omega_c} \frac{\partial U(x, y)}{\partial x} . \end{aligned} \quad (4.15)$$

⁵Die Drift des Guiding Centers wird hier wie die Korrektur ΔS in klassischer Störungstheorie aus den Trajektorien der ungestörten Zyklotronorbits berechnet.

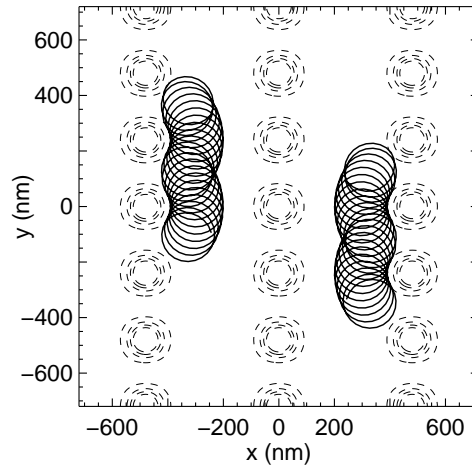


Abbildung 4.13: Driftende Orbits bei $B = 1$ T im Rechteckgitter (4.4)

Für ein konstantes Feld $\mathbf{E} = -\nabla U$ ist dies nichts anderes als die bekannte $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ -Drift und für homogene Systeme ($U = 0$) wird der Mittelpunkt \mathbf{R} wieder zu einer Erhaltungsgröße.

Wird (4.15) über einen Zyklotronorbit $\mathbf{r}(t)$ der Periode $T = 2\pi/\omega_c$ gemittelt, ergibt sich die Driftgeschwindigkeit des Orbits zu

$$\begin{aligned} v_x^D(\mathbf{R}) &= \langle \dot{X} \rangle_T = \frac{1}{2\pi m} \int_0^T dt \frac{\partial U(\mathbf{r}(t))}{\partial y} \\ v_y^D(\mathbf{R}) &= \langle \dot{Y} \rangle_T = -\frac{1}{2\pi m} \int_0^T dt \frac{\partial U(\mathbf{r}(t))}{\partial x} \end{aligned} \quad (4.16)$$

und ist wie die Wirkung ΔS aus (4.13) eine Funktion des Mittelpunkts \mathbf{R} .

Das „Einschalten“ des Potentials $U(x, y)$ im homogenen System hat demnach zwei Auswirkungen. Zum einen erzeugt es eine Korrektur ΔS zur Wirkung des freien Zyklotronorbits und zum anderen eine Driftgeschwindigkeit \mathbf{v}^D .

Die nun folgende Ableitung des oszillierenden Anteils der Leitfähigkeit im Kontext der (semi)klassischen Störungstheorie berücksichtigt die beiden oben beschriebenen Effekte und liefert schließlich eine Erweiterung der semiklassischen Näherung der Shubnikov-de Haas-Oszillationen (2.68). Die Herleitung ist eine Erweiterung zur Ableitung der SdH-Oszillationen in [11] und im folgenden soll insbesondere auf die Unterschiede zu [11] eingegangen werden.

Ausgangspunkt der semiklassischen Näherung sind wieder die Gleichungen

$$\sigma_{yy} \approx \frac{e^2 \hbar}{\pi V} \text{Re} (I_{yy}^{+-}) \quad (4.17)$$

und

$$I_{yy}^{+-} = \frac{1}{2\pi\hbar^3} \int d^2r \int d^2r' \sum_{\substack{\gamma_1: \mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r} \\ \gamma_2: \mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}}} v_y^{\gamma_1}(\mathbf{r}) v_y^{\gamma_2}(\mathbf{r}') D_{\gamma_1}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) D_{\gamma_2}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \quad (4.18)$$

$$\times \exp \left[\frac{i}{\hbar} (S_{\gamma_1}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) - S_{\gamma_2}(\mathbf{r}', \mathbf{r})) - i\frac{\pi}{2} (\eta_{\gamma_1} - \eta_{\gamma_2}) - \frac{T_{\gamma_1} + T_{\gamma_2}}{2\tau} \right]$$

zur Berechnung der Komponente σ_{yy} , die sich aus (2.59) und (2.61) aus Abschnitt 2.5.3 ergeben.

Die Wirkung S wird in einen Anteil des ungestörten Systems S^0 und den zusätzlichen Anteil ΔS aufgeteilt

$$S(\mathbf{r}', \mathbf{r}) = S^0(\mathbf{r}', \mathbf{r}) + \Delta S(\mathbf{r}', \mathbf{r}) . \quad (4.19)$$

Die Geschwindigkeit v_y , wird in die Geschwindigkeit des homogenen Systems v_y^0 und die Driftgeschwindigkeit v_y^D zerlegt

$$v_y^\gamma(\mathbf{r}) = v_y^0(\mathbf{r}) + v_y^D(\mathbf{r}) . \quad (4.20)$$

Außer den Wirkungen und Geschwindigkeiten werden alle restlichen Größen in (4.18) im ungestörten System berechnet und die Trajektorien γ_1 und γ_2 sind Teile von Zyklotronorbits.

Die Doppelsumme in (4.18) wird in der üblichen Diagonalmnäherung berechnet, das bedeutet, daß γ_1 und γ_2 Teile einer gemeinsamen Trajektorie γ sind. Der Fall $\gamma_1 = \gamma_2$ liefert den klassischen Beitrag zur Leitfähigkeit und wird hier nicht weiter behandelt. Für den Fall $\gamma_1 \neq \gamma_2$ bleibt dann nur noch die Möglichkeit, daß sich γ_1 und γ_2 gerade um einen periodischen Orbits (po) unterscheiden.

Die Differenz der Wirkungen in (4.18) wird durch die Wirkung des Zyklotronorbits bestimmt, um den sich γ_1 und γ_2 unterscheiden.

$$S_{\gamma_1}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) - S_{\gamma_2}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) = S_{\text{po}}^0(E) + \Delta S_{\text{po}}(\mathbf{R}) \quad (4.21)$$

Der Term mit $S_{\text{po}}^0(E)$ ist unabhängig von \mathbf{r} bzw. \mathbf{r}' und kann vor das Integral gezogen werden. Ebenso wird angenommen, daß die Differenz der Maslovindizes gleich dem Index des Zyklotronorbits und damit unabhängig von \mathbf{r} bzw. \mathbf{r}' ist.

Damit bleibt schließlich das Integral

$$\int d^2r \int d^2r' v_y^{\gamma_1}(\mathbf{r}) v_y^{\gamma_2}(\mathbf{r}') D_{\gamma_1}^0(\mathbf{r}', \mathbf{r}) D_{\gamma_2}^0(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \times$$

$$\times \exp \left[\frac{i}{\hbar} \Delta S_{\text{po}}(\mathbf{R}) - \frac{T_{\gamma_1}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) + T_{\gamma_2}(\mathbf{r}', \mathbf{r})}{2\tau} \right] \quad (4.22)$$

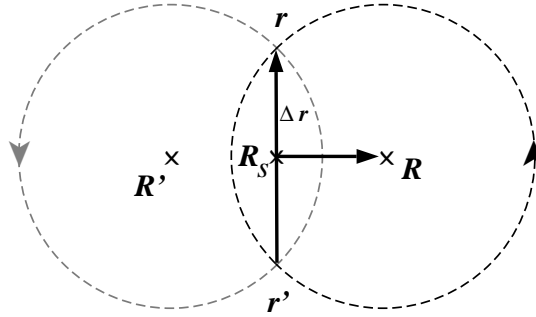


Abbildung 4.14: Koordinatensystem aus Schwerpunkts- und Relativkoordinaten (4.23), das zur Berechnung von (4.22) benutzt wird.

zu berechnen.

Wie in [11] erfolgt die weitere Auswertung in Schwerpunkts- und Relativkoordinaten.

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r} - \mathbf{r}' \quad (4.23)$$

$$\mathbf{R}_s = \frac{1}{2} (\mathbf{r} + \mathbf{r}') \quad (4.24)$$

Das Koordinatensystem ist in Abbildung 4.14 dargestellt. Insbesondere ist in Abbildung 4.14 zu sehen, daß es für gegebene Punkte \mathbf{r} und \mathbf{r}' zwei verschiedene Zyklotronorbits mit den Mittelpunkten \mathbf{R} und \mathbf{R}' gibt, die beide durch die Punkte \mathbf{r} und \mathbf{r}' laufen. Die weitere Auswertung erfolgt für \mathbf{R} und \mathbf{R}' völlig analog, deshalb wird im folgenden angenommen, daß der Mittelpunkt des gemeinsamen Zyklotronorbits bei \mathbf{R} liegt.

In Schwerpunkts- und Relativkoordinaten wird (4.22) zu

$$\begin{aligned} & \int d^2 \Delta r \int d^2 R_s v_y^{\gamma_1}(\mathbf{R}_s - \Delta \mathbf{r}/2) v_y^{\gamma_2}(\mathbf{R}_s + \Delta \mathbf{r}/2) \times \\ & \times D_{\gamma_1}^0(\Delta \mathbf{r}) D_{\gamma_2}^0(\Delta \mathbf{r}) \exp \left[\frac{i}{\hbar} \Delta S_{\text{po}}(\mathbf{R}) - \frac{T_{\gamma_1}(\Delta \mathbf{r}) + T_{\gamma_2}(\Delta \mathbf{r})}{2\tau} \right] \quad (4.25) \\ & = \int d^2 \Delta r D_{\gamma_1}^0(\Delta \mathbf{r}) D_{\gamma_2}^0(\Delta \mathbf{r}) \exp \left[-\frac{T_{\gamma_1}(\Delta \mathbf{r}) + T_{\gamma_2}(\Delta \mathbf{r})}{2\tau} \right] \times \\ & \times I_{\mathbf{R}_s}(\Delta \mathbf{r}) \end{aligned}$$

mit

$$I_{\mathbf{R}_s}(\Delta \mathbf{r}) = \int d^2 R_s v_y^{\gamma_1}(\mathbf{R}_s - \Delta \mathbf{r}/2) v_y^{\gamma_2}(\mathbf{R}_s + \Delta \mathbf{r}/2) \exp \left[\frac{i}{\hbar} \Delta S_{\text{po}}(\mathbf{R}) \right] \quad (4.26)$$

Dabei wurden folgende Annahmen gemacht Die Amplituden D_0 werden nur im ungestörten System berechnet, sind also unabhängig vom Mittelpunkt \mathbf{R} des Zyklotronorbits, für gegebenes $\Delta\mathbf{r}$ sind sie dann auch unabhängig von \mathbf{R}_s . Gleiches gilt für die Zeiten T . Damit zerfällt (4.25) in ein Integral über die Relativkoordinaten $\Delta\mathbf{r}$ und das Integral über die Schwerpunktskoordinaten (4.26), das natürlich noch von $\Delta\mathbf{r}$ abhängig sein kann.

Die Geschwindigkeit v_y läßt sich nach (4.20) und (4.16) schreiben als

$$v_y(\mathbf{R}_s - \Delta\mathbf{r}/2) = (v_y^0(\Delta\mathbf{r}))' + v_y^D(\mathbf{R}) \quad (4.27)$$

$$v_y(\mathbf{R}_s + \Delta\mathbf{r}/2) = (v_y^0(\Delta\mathbf{r})) + v_y^D(\mathbf{R}) . \quad (4.28)$$

Wiederum hängt $v_y^0 = v_F \cos(\omega_c t + \phi_0)$ nicht von der Position des Zyklotronorbits \mathbf{R} ab, aber von der Startzeit $t_0 = \phi_0/\omega_c$ in (4.27) beziehungsweise von der Endzeit $t + t_0$ in (4.28) und die Geschwindigkeiten v_y^0 können in (4.26) vor das Integral gezogen werden.

Damit haben die verbleibenden Integrale in (4.26) die Struktur

$$\int d^2 R_s f(\mathbf{R}) = \int d^2 R f(\mathbf{R}) \quad (4.29)$$

und, da eine Verschiebung um den bezüglich \mathbf{R} konstanten Vektor $\mathbf{R} - \mathbf{R}_s$ das Integral (4.29) nicht ändert, hängt es nicht von $\Delta\mathbf{r}$ ab.

Die in v^D linearen Terme in (4.25) verschwinden bei der Integration über die Richtung von $\Delta\mathbf{r}$, was einer Integration der Startzeit t_0 über eine Periode eines ungestörten Zyklotronorbits entspricht.

Damit wird (4.25) zu

$$\begin{aligned} & V \int d^2 \Delta\mathbf{r} D_{\gamma_1}^0(\Delta\mathbf{r}) D_{\gamma_2}^0(\Delta\mathbf{r}) \exp \left[-\frac{T_{\gamma_1}(\Delta\mathbf{r}) + T_{\gamma_2}(\Delta\mathbf{r})}{2\tau} \right] \times \\ & \times (v_y^0(t_0) v_y^0(t_0 + t) M + N_{yy}) \end{aligned} \quad (4.30)$$

mit den Korrekturen M (siehe [46])

$$M = \frac{1}{V} \int d^2 R \exp \left[\frac{i}{\hbar} r \Delta S(\mathbf{R}) \right] = \tilde{M} \exp [i \Phi_M] \quad (4.31)$$

und der Driftkorrektur N_{yy}

$$N_{yy} = \frac{1}{V} \int d^2 R (v_y^D(\mathbf{R}))^2 \exp \left[\frac{i}{\hbar} r \Delta S(\mathbf{R}) \right] = (v_y^D)^2 \exp [i \Phi_y] \quad (4.32)$$

Die Korrekturterme M und N_{yy} sind im allgemeinen komplexe Zahlen, mit den Amplituden \tilde{M} bzw. $(v_y^D)^2$ und den Phasen Φ_M bzw. Φ_y , die zudem von der Wiederholungszahl r abhängig sind.

Im ungestörten System gilt $U = 0$ und daraus ergibt sich $M = 1$ und $N_{yy} = 0$. Im homogenen System folgt dann aus der Integration über $\Delta\mathbf{r}$ (siehe [11]) in (4.30) schließlich die semiklassische Näherung der Shubnikov-de Haas-Oszillationen (2.68).

Durch die Störung U des homogenen Systems tritt in den SdH-Oszillationen eine zusätzliche Modulation \tilde{M} der Amplitude und eine Phasenverschiebung Φ_M auf. Außerdem kommt zu den modulierten SdH-Oszillationen aus (4.30) ein Term hinzu, der die Driftbewegung der Zyklotronorbits berücksichtigt und dessen Amplitude proportional zum Quadrat der Driftgeschwindigkeit ist.

Schließlich ergibt sich die Verallgemeinerung der semiklassischen Näherung der SdH-Oszillationen

$$\sigma_{yy}^{\text{osc}} \approx \delta\sigma_{yy}^{\text{SdH}} + \delta\sigma_{yy}^{\text{Drift}} \quad (4.33)$$

mit

$$\begin{aligned} \delta\sigma_{yy}^{\text{SdH}} &= \frac{2\sigma_0}{1 + (\omega_c\tau)^2} \times \\ &\times \left[\sum_{r=1}^{\infty} \tilde{M}(-1)^r R \left(\frac{r2\pi}{\omega_c\tau_T} \right) \cos \left(\frac{r2\pi E_F}{\hbar\omega_c} + \Phi_M \right) \exp \left(-\frac{r\pi}{\omega_c\tau} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.34)$$

und

$$\begin{aligned} \delta\sigma_{yy}^{\text{Drift}} &= \\ &4\sigma_0 \left[\sum_{r=1}^{\infty} \frac{(v_y^D)^2}{v_F^2} (-1)^r R \left(\frac{r2\pi}{\omega_c\tau_T} \right) \cos \left(\frac{r2\pi E_F}{\hbar\omega_c} + \Phi_y \right) \exp \left(-\frac{r\pi}{\omega_c\tau} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Die unterschiedliche Struktur der Vorfaktoren in (4.34) und (4.35) ergibt sich aus der Korrelationsfunktion C_{yy} , die in (4.34) für einen ungestörten Zyklotronorbit

$$C_{yy}^0 = \int_0^{\infty} dt e^{-t/\tau} \int_0^{T_{po}} dt' v_y^0(t') v_y^0(t+t') \quad (4.36)$$

$$= \pi R_c^2 \frac{\omega_c\tau}{1 + (\omega_c\tau)^2} \quad (4.37)$$

und in (4.35) mit einer konstanten Driftgeschwindigkeit v^D berechnet wird

$$C_{yy}^{\text{Drift}} = (v_y^D)^2 \frac{2\pi\tau}{\omega_c}. \quad (4.38)$$

Zur weiteren Untersuchung des Rechteckgitters wird Gleichung (4.33) verwendet. Durch den neu hinzugekommenen Driftterm $\delta\sigma_{yy}^{\text{Drift}}$ entsteht eine zusätzliche Richtungsabhängigkeit der Amplitude der Quantenoszillationen. Außerdem

bewirken die Phasen der Korrekturfaktoren eine entsprechende Phasenverschiebung der Quantenoszillationen, die auch eine Richtungsabhängigkeit besitzen kann.

Zur Auswertung von (4.33) und σ_{xx}^{osc} , das analog zu (4.33) definiert ist, ist es lediglich nötig M , N_{yy} und N_{xx} zu bestimmen. Zur Berechnung der Modulationsfaktoren muß zunächst die Korrektur zur Wirkung $\Delta S(\mathbf{R})$ aus (4.13) mit Zyklotronorbits berechnet werden. Wenn das Potential U , wie in unserem Fall, in eine Fourier-Reihe zerlegt werden kann

$$U(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}} \exp(\mathbf{i}\mathbf{k}\mathbf{r}), \quad (4.39)$$

ergibt sich für ΔS

$$\Delta S_{\text{po}}(\mathbf{R}) = - \sum_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}} \exp(\mathbf{i}\mathbf{k}\mathbf{R}) \int_0^{2\pi/\omega_c} dt \exp(\mathbf{i}\mathbf{k}\mathbf{r}_0(t)) \quad (4.40)$$

Das Integral über die Zeit t in (4.40) wird mit $\mathbf{k}\mathbf{r}_0(t) = |\mathbf{k}||\mathbf{r}_0(t)| \cos(\omega_c t + \phi_0) = kR_c \cos(\omega_c t + \phi_0)$ in ein Integral über den Winkel $\alpha = \omega_c t$ transformiert und ergibt

$$\int_0^{2\pi/\omega_c} dt \exp(\mathbf{i}\mathbf{k}\mathbf{r}_0(t)) = \frac{1}{\omega_c} \int_0^{2\pi} d\alpha \exp[\mathbf{i}kR_c \cos(\alpha)] = \frac{2\pi}{\omega_c} J_0(kR_c) \quad (4.41)$$

Hier ist J_0 die Besselfunktion der Ordnung 0, R_c der Radius des Zyklotronorbits und $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ der Betrag des Wellenvektors \mathbf{k} . Die Wirkung ΔS ergibt sich somit analytisch aus den Fourierkoeffizienten des Potentials

$$\Delta S_{\text{po}}(\mathbf{R}) = -\frac{2\pi}{\omega_c} \sum_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}} \exp(\mathbf{i}\mathbf{k}\mathbf{R}) J_0(kR_c). \quad (4.42)$$

Analog zu $\Delta S(\mathbf{R})$ können die Driftgeschwindigkeiten $v_x^D(\mathbf{R})$ und $v_y^D(\mathbf{R})$ bestimmt werden. Zum Beispiel ergibt sich v_x^D nach (4.16) aus

$$v_x^D(\mathbf{R}) = \frac{1}{2\pi m} \int_0^T dt \frac{\partial U(\mathbf{r}(t))}{\partial y}$$

und die Ableitung $\partial U/\partial y$ ergibt mit der Fourierdarstellung (4.39)

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \sum_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}} k_y \exp(\mathbf{i}\mathbf{k}\mathbf{r}). \quad (4.43)$$

Das weitere Vorgehen ist analog zur Berechnung von ΔS und liefert die Driftgeschwindigkeiten wieder als Summe über Besselfunktionen

$$v_x^D(\mathbf{R}) = \frac{\mathbf{i}}{m\omega_c} \sum_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}} k_y \exp(\mathbf{i}\mathbf{k}\mathbf{R}) J_0(kR_c) \quad (4.44)$$

$$v_y^D(\mathbf{R}) = -\frac{\mathbf{i}}{m\omega_c} \sum_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}} k_x \exp(\mathbf{i}\mathbf{k}\mathbf{R}) J_0(kR_c). \quad (4.45)$$

Zur Berechnung der Korrekturfaktoren M , N_{xx} und N_{yy} müssen die oben abgeleiteten Ausdrücke für v^D und ΔS noch über den Mittelpunktvektor \mathbf{R} integriert werden. Wie bereits in Abschnitt 4.3.1 erläutert wurde, ist das Integrationsgebiet aber auf die Fläche beschränkt, die für die Mittelpunkte der Zyklotronorbits erreichbar ist. Im Fall des Rechteckgitters führt das nichttriviale Integrationsgebiet dazu, daß die Integrale über \mathbf{R} nicht mehr analytisch ausgewertet werden können. Im Gegensatz dazu können in Kapitel 5, in dem (4.33) in einem schwach modulierten System berechnet wird, die Korrekturintegrale analytisch berechnet werden, da im Fall schwacher Modulation keine klassisch verbotenen Bereiche im Integrationsgebiet vorliegen.

Die Parameter für die Auswertung von (4.33) im Rechteckgitter sowie das Potentialmodell sind bereits in Abschnitt 4.2 besprochen worden. Wie beschrieben werden die Integrale über \mathbf{R} zur Berechnung der Korrekturfaktoren numerisch ausgewertet. Das Ergebnis der semiklassischen Störungsrechnung ist in Abbildung 4.15 zu sehen und zum Vergleich werden wieder die Ergebnisse der quantenmechanischen Rechnung aus [65] herangezogen.

Im obersten Teilbild von Abbildung 4.15 sind die Oszillationen in σ_{xx} dargestellt. Die semiklassische Rechnung für σ_{xx}^{osc} zeigt eine sehr gute Übereinstimmung mit den SdH-Oszillationen aus der quantenmechanischen Rechnung. Im Vergleich zum früheren Ergebnis in Abbildung 4.10 ist die Übereinstimmung mit der Amplitude der quantenmechanischen Rechnung sogar noch besser geworden.

Der Vergleich der semiklassischen Oszillationen in σ_{yy} mit der quantenmechanischen Rechnung im mittleren Teilbild von Abbildung 4.15 weist immer noch Abweichungen auf. Im Gegensatz zur quantenmechanischen Rechnung wurde das Potential allerdings auch nur störungstheoretisch erfaßt. Im Vergleich zum früheren Ergebnis (Abbildung 4.10) stellt sich eine wesentliche Verbesserung heraus, da die semiklassische Rechnung nun eine deutliche Anisotropie in den Leitfähigkeitsoszillationen aufweist.

Diese Anisotropie ist in der untersten Teilabbildung von Abbildung 4.15 am deutlichsten zu sehen, in der die semiklassischen Oszillationen σ_{xx}^{osc} und σ_{yy}^{osc} nochmal zusammen dargestellt sind. In Übereinstimmung mit den Ergebnissen der quantenmechanischen Rechnung sind die Oszillationen in σ_{yy}^{osc} stärker als in σ_{xx}^{osc} . Die Ursache hierfür liegt in der Anisotropie der Driftgeschwindigkeit, die als Amplitude in die Berechnung der Oszillationen eingeht und die in σ_{yy}^{osc} zu einem Beitrag $\delta\sigma_{yy}^{\text{Drift}}$ führt, der über den Beitrag der SdH-Oszillationen $\delta\sigma_{yy}^{\text{SdH}}$ dominiert.

Die Anisotropie der semiklassischen Oszillationen ist aber nicht nur auf die Amplitude beschränkt, auch die Phase der Oszillationen erhält nach (4.33) einen anisotropen Beitrag Φ_x bzw. Φ_y , der dazu führt, daß die Oszillationen näherungsweise gegenphasig verlaufen. Diese Gegenphasigkeit der Oszillationen ist auch in den quantenmechanischen Ergebnissen beobachtet worden. Da die Phasen Φ_x und

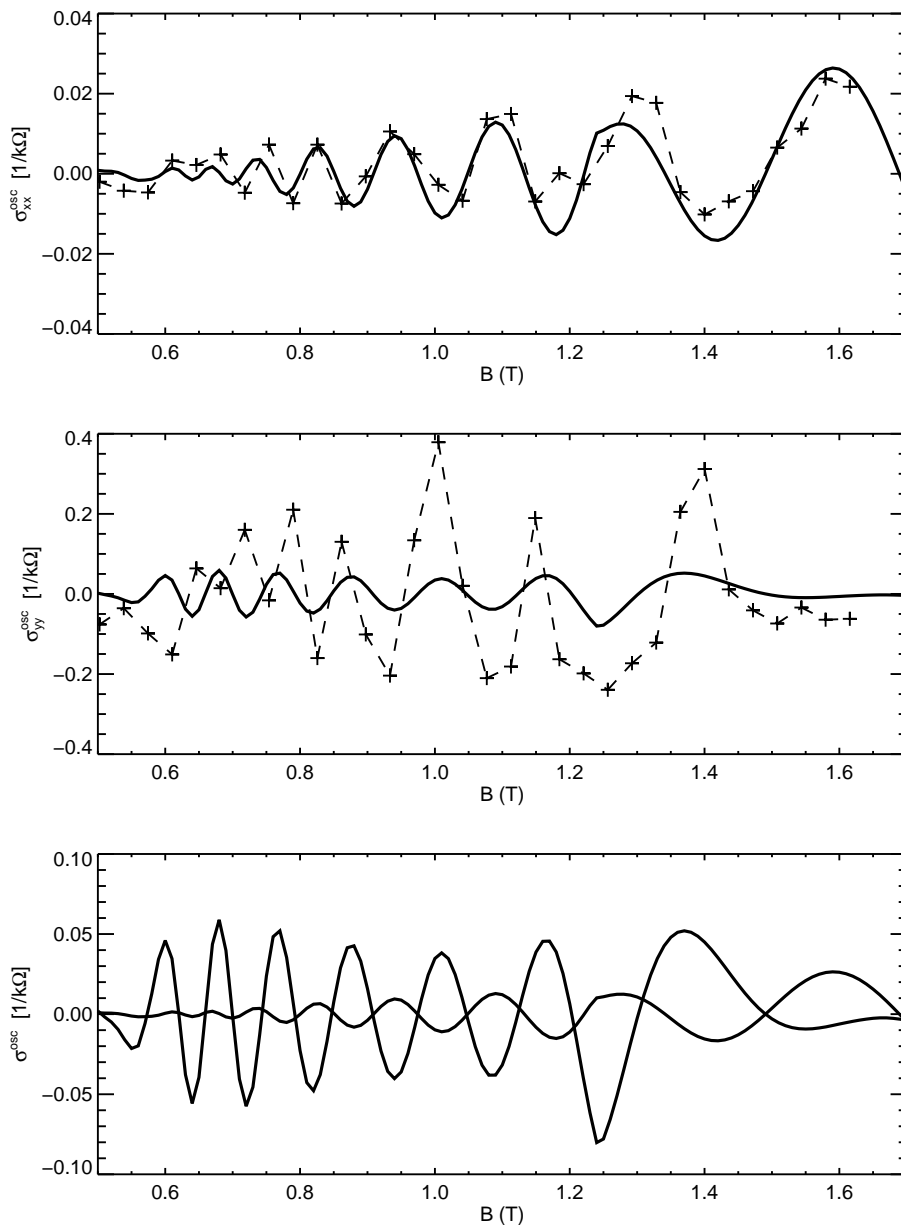


Abbildung 4.15: Ergebnis der semiklassischen Störungstheorie (4.33) (durchgezogene Linien) für das Rechteckgitter. Die Parameter sind dieselben wie bei der quantenmechanischen Rechnung aus [65], die mit Kreuzen gekennzeichnet ist. Die gestrichelten Linien dienen nur der Orientierung. Die beiden oberen Abbildungen zeigen den Vergleich der semiklassischen Störungsrechnung mit den quantenmechanischen Ergebnissen. Die unterste Abbildung zeigt die Anisotropie der semiklassischen Oszillationen.

Φ_y letztlich numerisch bestimmt werden, können keine analytischen Aussagen zur Gegenphasigkeit von σ_{xx}^{osc} und σ_{yy}^{osc} getroffen werden.

Das Ergebnis der semiklassischen Störungstheorie ist demnach zwar nicht deckungsgleich mit der quantenmechanischen Rechnung, aber es werden alle qualitativen Eigenschaften wie höhere Amplitude und gegenphasiges Verhalten von der semiklassischen Rechnung reproduziert.

Kapitel 5

Quantenoszillationen im System mit schwacher 1D-Modulation

Die im vorigen Kapitel entwickelte semiklassische Näherung der Shubnikov-de Haas-Oszillationen in Störungstheorie wird hier auf ein System mit schwacher 1D-Modulation angewandt. Der klassische Anteil der Leitfähigkeit dieser Systeme wurde in Abschnitt 3.3 bereits ausführlich erläutert, deshalb konzentriert sich dieses Kapitel auf den Einfluß der Modulation auf die Shubnikov-de Haas-Oszillationen nach (4.33)

Das System, welches hier untersucht wird, ist durch das Potential

$$U(x) = U_0 \cos^2(\pi x/a) = U_0 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} e^{-i2\pi x/a} + \frac{1}{4} e^{i2\pi x/a} \right) \quad (5.1)$$

mit $U_0 \ll E_F$ charakterisiert. Zur Anwendung der semiklassischen Näherung der Shubnikov-de Haas-Oszillationen in Störungstheorie nach (4.33) werden zunächst die Modulationsfaktoren M und N_{yy} berechnet, was in diesem System sogar zu analytischen Ausdrücken führt.

Aus der rechten Seite von (5.1) lassen sich die Fourierkoeffizienten ablesen, und es ergibt sich für die Korrektur zur Wirkung ΔS nach (4.42)

$$\Delta S(X) = -\frac{\pi U_0}{\omega_c} (1 + \cos(2\pi X/a) J_0(2\pi R_c/a)) \quad (5.2)$$

mit der Besselfunktion 0-ter Ordnung J_0 .

Der Modulationsfaktor M wird damit nach (4.31)

$$M = \frac{1}{a} \int_{-a/2}^{a/2} dX \exp \left[\frac{i}{\hbar} r \Delta S(X) \right] \quad (5.3)$$

$$= \exp \left[-ir \frac{\pi U_0}{\hbar \omega_c} \right] \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\phi \exp(-ird \cos \phi) \quad (5.4)$$

$$= \exp \left[-ir \frac{\pi U_0}{\hbar \omega_c} \right] J_0(rd) \quad (5.5)$$

mit

$$d = \frac{\pi U_0}{\hbar \omega_c} J_0(2\pi R_c/a) . \quad (5.6)$$

Als nächstes wird die Drift berechnet, wegen $\partial U/\partial y = 0$ verschwindet die Driftgeschwindigkeit in x -Richtung. Für die Drift in y -Richtung folgt nach (4.45)

$$v_y^D(X) = \frac{\pi U_0}{m\omega_c a} J_0(2\pi R_c/a) \sin(2\pi X/a) . \quad (5.7)$$

Daraus berechnet sich N_{yy} nach (4.32)

$$N_{yy} = \frac{1}{a} \int_{-a/2}^{a/2} dX (v_y^D)^2 \exp \left[\frac{i}{\hbar} r \Delta S \right] \quad (5.8)$$

$$= \left(\frac{\pi U_0}{m\omega_c a} J_0(2\pi R_c/a) \right)^2 \exp \left[-ir \frac{\pi U_0}{\hbar \omega_c} \right] I(rd) \quad (5.9)$$

mit d aus (5.6) und dem Hilfsintegral

$$I(d) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\phi \sin^2(\phi) \exp[-ird \cos \phi] . \quad (5.10)$$

Mithilfe des Additionstheorems $\sin^2 \phi = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\phi)$ läßt sich (5.10) ebenfalls wieder mit Besselfunktionen darstellen

$$I(rd) = \frac{1}{2}(J_0(rd) + J_2(rd)) \quad (5.11)$$

und es ergibt sich schließlich für den Modulationsfaktor N_{yy}

$$N_{yy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi U_0}{m\omega_c a} J_0(2\pi R_c/a) \right)^2 \exp \left[-ir \frac{\pi U_0}{\hbar \omega_c} \right] (J_0(rd) + J_2(rd)) \quad (5.12)$$

Mit den Faktoren N_{yy} aus (5.8) und M aus (5.5) wird nun die semiklassische Näherung (4.33) berechnet. Die Parameter für die Auswertung, die in Abbildung

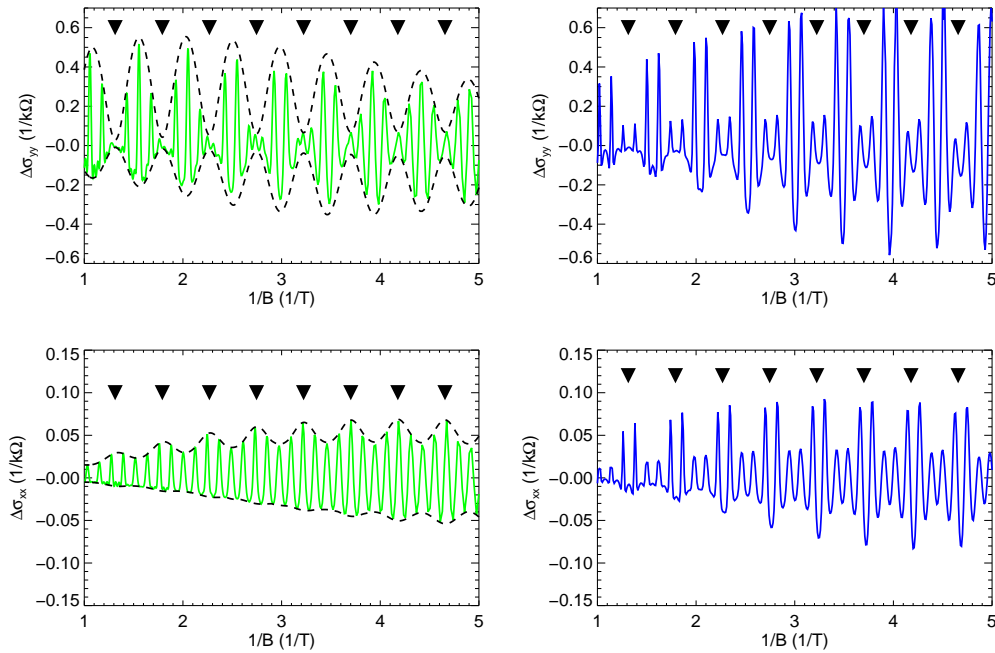


Abbildung 5.1: Vergleich der Ergebnisse der quantenmechanischen Rechnung (rechte Abbildungen) mit der semiklassischen Störungstheorie (linke Abbildungen) nach (4.33) für die Modulation (5.1). Die Parameter sind im Text angegeben. Dargestellt sind die Oszillationen der longitudinalen Leitfähigkeit in x -Richtung (untere Abbildungen) und in y -Richtung (obere Abbildungen). Die Dreiecke markieren die Flachbandbedingungen (5.18). Die gestrichelten Kurven sind die Einhüllenden der semiklassisch berechneten Ergebnisse.

5.1 zu sehen ist, richten sich nach einer quantenmechanischen Rechnung [71], die hier wieder zum Vergleich mit den semiklassischen Ergebnissen herangezogen wird. Die 1D-Modulation (5.1) wird durch die Gitterkonstante $a = 100$ nm und die Modulationsstärke $U_0 = 1$ meV festgelegt. Als Fermienergie E_F wurden 14.5 meV gewählt, die Streuzeit τ beträgt 57 ps und die Temperatur liegt bei 0.6 K. Die Leitfähigkeitsoszillationen aus der quantenmechanischen Rechnung wurden durch Bildung der Differenz

$$\Delta\sigma = \sigma(0.6 \text{ K}) - \sigma(2 \text{ K}) \quad (5.13)$$

aus dem glatten Anteil extrahiert.

Die semiklassische Näherung (4.33) zeigt eine sehr gute Übereinstimmung mit dem Ergebnis der quantenmechanischen Rechnung. Die leichte Differenz in der Phase der Oszillationen ist damit erklärbar, daß bei der quantenmechanischen

Rechnung für jedes Magnetfeld das chemische Potential aus der konstanten Ladungsträgerdichte neu bestimmt wird. In der semiklassischen Näherung wird dagegen das chemische Potential konstant gehalten, so daß eine leichte Phasendifferenz zu den quantenmechanischen Oszillationen entsteht.

Die Amplitude der Oszillationen in $\Delta\sigma_{yy}$ liegt ungefähr eine Größenordnung höher als die Amplitude in $\Delta\sigma_{xx}$, was mit dem zusätzlich auftretenden Beitrag der Bandleitfähigkeit in $\Delta\sigma_{yy}$ zu erklären ist. Bemerkenswert ist außerdem, daß die Bandleitfähigkeit nicht nur zu den klassischen Kommensurabilitätsoszillationen führt, sondern zudem auch die Shubnikov-de Haas-Oszillationen beeinflusst, indem die Einhüllende der Amplitude der Shubnikov-de Haas-Oszillationen in $\Delta\sigma_{yy}$ gerade bei den Flachbandbedingungen Minima aufweist. Der Einfluß der Driftbewegung auf die Shubnikov-de Haas-Oszillationen ist ein Ergebnis, daß nicht mehr in dem rein klassischen Bild von Beenacker [54], das in Abschnitt 3.3 erläutert wurde, zu erklären ist. Die semiklassische Näherung (4.33) kann somit als Erweiterung des klassischen Bildes der driftenden Zyklotronorbits angesehen werden und zeigt ähnliche Ergebnisse wie die quantenmechanische Störungstheorie von Zhang und Gerhardt [55], welche ebenfalls in Abschnitt 3.3 skizziert wurde.

Der Einfluß des Modulationspotentials ist aber nicht nur auf die Komponente $\Delta\sigma_{yy}$ beschränkt, auch in $\Delta\sigma_{xx}$ wird die Einhüllende der Shubnikov-de Haas-Oszillationen so moduliert, daß sie gerade bei den Flachbandbedingungen Maxima aufweist. Dieses bezüglich der Einhüllenden von $\Delta\sigma_{yy}$ gegenphasige Verhalten wurde auch schon im Rahmen der quantenmechanischen Störungstheorie in Abschnitt 3.3 erläutert und dort mit der oszillierenden Breite der Landaubänder erklärt.

Das gegenphasige Verhalten kann aber auch im semiklassischen Bild verstanden werden. Dazu ist es allerdings erforderlich, sich klarzumachen, wo genau in der semiklassischen Näherung die Flachbandbedingung enthalten ist. In dem Bild der driftenden Zyklotronorbits von Beenacker läßt sich die Flachbandbedingung aus der mittleren Driftgeschwindigkeit ableiten, dies soll für das hier besprochene System nun kurz nachvollzogen werden.

Nach Mittelung von $(v_y^D)^2$ über X ergibt sich mit (5.7)

$$\langle (v_y^D)^2 \rangle_X = \frac{1}{a} \int_{-a/2}^{a/2} dX (v_y^D(X))^2 \quad (5.14)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi U_0}{m\omega_c a} \right)^2 J_0^2(2\pi R_c/a) . \quad (5.15)$$

Zusammen mit der asymptotischen Entwicklung der Besselfunktion $J_0(x)$

$$J_0(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos(x - \pi/4) \quad \text{für } x \gg 1 \quad (5.16)$$

ergibt sich aus (5.15) für Magnetfelder, für die der Umfang des ungestörten Zyklotronorbits groß ist gegenüber der Gitterkonstanten ($2\pi R_c/a \gg 1$)

$$\langle (v_y^D)^2 \rangle_X = \frac{1}{2R_c} \left(\frac{U_0 a}{m\omega_c} \right)^2 \cos^2 \left(\pi \left(\frac{2R_c}{a} - \frac{1}{4} \right) \right). \quad (5.17)$$

Die mittlere Drift verschwindet für

$$\frac{2R_c}{a} = n - \frac{1}{4} \quad \text{mit } n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.18)$$

und dies ist gerade wieder die Flachbandbedingung. Das bedeutet, daß die Flachbandbedingung in der Besselfunktion $J_0(2\pi R_c/a)$ (asymptotisch) enthalten ist. Die eben skizzierte Berechnung der mittleren Drift, ist aber nur ein Spezialfall der Berechnung von N_{yy} in (5.8) und $J_0(2\pi R_c/a)$ ist als Faktor in N_{yy} enthalten. Das heißt N_{yy} und damit die semiklassische Bandleitfähigkeit $\delta\sigma_{yy}^{\text{Drift}}$ verschwinden bei der Flachbandbedingung. Gleichzeitig verschwindet das Argument d in der Besselfunktion $J_0(d)$ im Vorfaktor M aus (5.5) in der semiklassischen Streuleitfähigkeit $\delta\sigma_{xx}^{\text{sdH}}$. Die Besselfunktion $J_0(d)$ hat bei $d = 0$ aber gerade ihr Maximum und die Streuleitfähigkeit $\delta\sigma_{xx}^{\text{sdH}}$ wird maximal. Dies erklärt das gegenphasige Verhalten der Einhüllenden von $\delta\sigma_{xx}$ und $\delta\sigma_{yy}$, wenn die y -Komponente von der Bandleitfähigkeit dominiert wird.

Insgesamt reproduziert die semiklassische Näherung (4.33) somit alle Ergebnisse der quantenmechanischen Rechnung sowohl qualitativ als auch quantitativ für große Landauquantenzahlen. Der Driftterm $\delta\sigma_{xx}^{\text{Drift}}$ aus (4.35) kann mit dem Beitrag der Bandleitfähigkeit identifiziert werden und stellt somit eine semiklassische Näherung zur Bandleitfähigkeit dar. Der Einfluss des Potentials $U(x)$ wird über die Faktoren M in der Streuleitfähigkeit und N_{yy} in der Bandleitfähigkeit berücksichtigt.

Das oben beschriebene gegenphasige Verhalten zeigt sich auch in $\delta\sigma_{xx}$ allein, falls es einmal vom Beitrag der Streuleitfähigkeit und einmal vom Beitrag der Bandleitfähigkeit dominiert wird. Je nachdem welcher Beitrag dominiert, treten einmal Maxima und einmal Minima der Einhüllenden der Shubnikov-de Haas Oszillationen bei den Flachbandbedingungen auf. Dies wurde auch experimentell gefunden und zwar sowohl für Systeme mit 1D-Modulation [72], als auch für Systeme mit 2D-Modulation [73].

Kapitel 6

Antidot-Übergitter mit Löchern als Ladungsträger

In diesem Kapitel werden Theorie und Rechnungen zur klassischen Beschreibung des elektrischen Magnetotransports eines Quasiteilchens mit anisotroper Fermikontur vorgestellt. Die Motivation für die Entwicklung dieses Formalismus lieferten die Ergebnisse der Experimente von M. Zitzlsperger am ballistischen Transport von Löchern durch ein Antidotgitter.

6.1 Experiment

Der Unterschied zwischen Elektronen und Löchern im Halbleiter ist nicht allein auf das Vorzeichen der Ladung beschränkt. Was Löcher so interessant und natürlich auch etwas komplizierter macht, ist die Tatsache, daß sie (im Gegensatz zu Elektronen) auch anisotrope Fermikonturen aufweisen können (siehe Abschnitt 6.2). Dabei drängt sich natürlich unter anderem die Frage auf, ob und wie die Anisotropie der Fermikontur den Magnetotransport der Löcher beeinflusst.

Beim Experiment von M. Zitzlsperger [74] wurde der ballistische Magnetotransport von Löchern durch ein Antidotgitter untersucht. Es handelt sich hierbei um Löcher in GaAs/AlGaAs-Quantentrögen, die auf einer GaAs(311)A-Oberfläche mittels MBE hergestellt wurden. Diese Systeme sind dafür bekannt, daß sie eine laterale Transportanisotropie aufweisen [75]; die Mobilität entlang der $[\bar{2}33]$ -Richtung ist typischerweise bis zu fünfmal höher als entlang der $[01\bar{1}]$ -Richtung. Die Lochdichte im Experiment beträgt $3.1 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$ und die Mobilität bewegt sich im Bereich von $66 \text{ m}^2/(\text{Vs})$ bis $40 \text{ m}^2/(\text{Vs})$.

Die Geometrie des Experiments ist in Abbildung 6.1 skizziert. Mittels Elektronenstrahl-Lithographie wurden quadratische Antidotgitter mit einer Gitterkon-

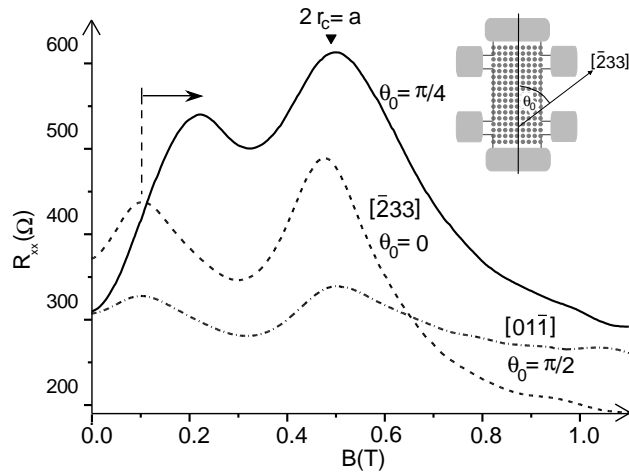


Abbildung 6.1: Magnetowiderstand von drei Antidot-Gittern mit Orientierungen entlang der $[\bar{2}33]$ (gestrichelt), der $[01\bar{1}]$ (Strich-Punkt) und der $\pi/4$ -Kristallrichtung (durchgezogen). Das Dreieck markiert den Wert des Magnetfeldes, bei dem der Durchmesser einer isotropen Zyklotronbahn der Gitterkonstanten $a = 350$ nm entspricht. Im Inset ist die Probengeometrie schematisch dargestellt. Der Pfeil markiert die Verschiebung des Kommensurabilitätsmaximums höherer Ordnung.

stanten $a = 350$ nm erzeugt. Die Hallbar-Strukturen wurden entlang der $[\bar{2}33]$ -, der $[01\bar{1}]$ - und der $\pi/4$ -Richtung ausgerichtet. Das Antidotgitter bleibt dabei immer parallel zur Hallbar. Die unterschiedlichen Orientierungen der Hallbar auf dem Halbleiter führen somit zu entsprechenden Drehungen der Fermikonturen bezüglich des Antidotgitters. Dabei nimmt der Drehwinkel, im Folgenden als Θ_0 bezeichnet, die Werte 0 , $\pi/4$ und $\pi/2$ an (siehe Abbildung 6.1). Der Magnetotransport wurde bei der Temperatur $T = 0.4$ K gemessen. Eine Vergleichsmessung bei $T = 1.4$ K in [74] zeigt die Unempfindlichkeit der Messkurven gegenüber Temperaturänderung, was eine klassische Beschreibung des Magnetotransports von experimenteller Seite aus rechtfertigt.

Abbildung 6.1 zeigt, daß in allen drei Orientierungen das Kommensurabilitätsmaximum erster Ordnung bei 0.5 T liegt. Dies entspricht auch der erwarteten Position für eine isotrope Fermikontur der gleichen Ladungsträgerdichte. Der Kommensurabilitätspeak höherer Ordnung für die $[\bar{2}33]$ - und die $[01\bar{1}]$ -Orientierung tritt in beiden Fällen bei einem Magnetfeld von ca. 0.1 T auf. Der Unterschied in den Amplituden ist hier auf die schon oben erwähnte Anisotropie in der Mobilität zurückzuführen. Die Messung mit der Hallbar in $\pi/4$ -Richtung zwischen den beiden anderen Orientierungen weist eine Verschiebung des Maximums höherer Ordnung zu einem größerem Magnetfeld von etwa 0.2 T auf.

Die Verschiebung des Maximums höherer Ordnung, soll im folgenden mit der Fermikontur des Lochsystems erklärt werden. Dazu wird in den nächsten Abschnitten eine klassische Theorie entwickelt, die einer anisotropen Fermikontur Rechnung tragen kann, um die daraus gewonnenen Ergebnisse zur Interpretation des Experiments heranziehen zu können.

6.2 Fermikonturen von Löchern im symmetrischen GaAs/AlGaAs(001) Quantentrog

Wie wir weiter unten sehen werden, benötigt die theoretische Beschreibung des klassischen Lochtransports als Eingangsgröße (quantenmechanisch) berechnete Fermikonturen. Deshalb soll in diesem Abschnitt zunächst die Fermikontur von Löchern in GaAs(001) besprochen werden, die aus einer $\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}$ -Theorie abgeleitet werden kann.

Hierbei ist zu bemerken, daß sich im Experiment die Löcher in einem Quantentrog mit GaAs(311)A-Grenzflächen befinden. Im Gegensatz dazu wird bei der Rechnung ein symmetrischer Quantentrog mit GaAs(001)-Grenzflächen behandelt und zwar aus folgenden zwei Gründen. Zum einen ist es offenbar nicht möglich, für den komplizierteren Fall von GaAs(311)-Grenzflächen einen analytischen Ausdruck der Fermikonturen zu gewinnen; es liegen hierzu lediglich numerische Ergebnisse vor [76]. Da, wie in Abschnitt 6.3 gezeigt wird, jedoch in die Bewegungsgleichungen der Löcher alle Fermikonturen im Energiebereich $E = 0$ bis hin zur Fermienergie $E = E_F$ und deren erste Ableitungen eingehen, ist es schon aus numerischen Gründen ratsam, dafür einen analytischen Ausdruck einzusetzen. Zum anderen erlaubt der analytische Ausdruck der Fermikonturen auf einfache Weise die Variation der Stärke des Warpings¹, so daß der Einfluß des Warpings auf die Transportgrößen systematisch untersucht werden kann.

Der analytische Ausdruck der Fermikonturen von Löchern in einem symmetrischen GaAs/GaAlAs(001)-Quantentrog wird hier aus einem effektiven 2×2 -Luttinger-Hamiltonian [77] abgeleitet:

$$H(k_x, k_y, k_z) = \begin{pmatrix} P + Q & R \\ R^* & P - Q \end{pmatrix} \quad (6.1)$$

mit

$$\begin{aligned} P &= \frac{\gamma_1}{2}(k_z^2 + k^2), & Q &= \frac{\gamma_2}{2}(-2k_z^2 + k^2), \\ R &= \frac{\sqrt{3}}{2}(\gamma_2(k_x^2 - k_y^2) - 2i\gamma_3 k_x k_y), & k^2 &= k_x^2 + k_y^2 \end{aligned} \quad (6.2)$$

¹Mit dem Ausdruck *Warping* wird in dieser Arbeit immer die Abweichung von der (für Elektronen typischen) isotropen Fermikontur bezeichnet.

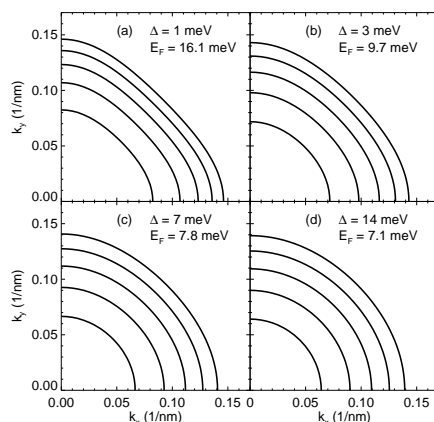


Abbildung 6.2: Energiekonturen im \mathbf{k} -Raum aus (6.5), die als Modelle für die weiteren Rechnungen benutzt wurden. Die äußerste Kontur entspricht jeweils der angegebenen Fermienergie. Die restlichen Konturen liegen bei $0.8E_F$, $0.6E_F$, $0.4E_F$ und $0.2E_F$.

und den Luttinger-Parametern $\gamma_1 = 6.85$, $\gamma_2 = 2.1$ und $\gamma_3 = 2.9$ aus [78]. Der Quantentrog sei in z -Richtung gewachsen, so daSS sich die z -Richtung abseparieren lässt und sich die Dispersion $E(\mathbf{k})$ zusammen mit (6.1) aus folgender Eigenwertgleichung ergibt:

$$\begin{vmatrix} E_{H0} - \frac{\hbar^2}{2m_0}(\gamma_1 + \gamma_2)k^2 - E & \frac{\sqrt{3}\hbar^2}{2m_0}(\gamma_2(k_x^2 - k_y^2) - 2i\gamma_3 k_x k_y) \\ \frac{\sqrt{3}\hbar^2}{2m_0}(\gamma_2(k_x^2 - k_y^2) + 2i\gamma_3 k_x k_y) & E_{L0} - \frac{\hbar^2}{2m_0}(\gamma_1 + \gamma_2)k^2 - E \end{vmatrix} = 0. \quad (6.3)$$

Die Grundzustandsenergien E_{H0} und E_{L0} werden aus den Hamiltonians

$$H_{H/L} = -\frac{\hbar^2}{2m_{H/L}} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + U(z) \quad (6.4)$$

bestimmt, wobei $U(z)$ das (selbstkonsistente) Potential des Quantentrogs ist und $m_H = m_0/(\gamma_1 - 2\gamma_2)$, $m_L = m_0/(\gamma_1 + 2\gamma_2)$ die Massen der schweren bzw. leichten Löcher sind.

Nach Einführung von Polarkoordinaten ergeben sich schließlich aus (6.3) die Konturen:

$$k^2(E, \Theta) = \frac{m_0}{\hbar^2} \frac{a_1}{a_2(\Theta)} \left(-1 + \sqrt{1 + 4 \frac{a_2(\Theta) E}{a_1^2}} \right) \quad (6.5)$$

mit $a_1 = \gamma_1 + \gamma_2$, sowie $a_2(\Theta) = \frac{3}{\Delta}(\gamma_2^2 + \gamma_3^2) \cos^2(2\Theta)$ und $\Delta = E_{H0} - E_{L0}$.

Es gilt noch, den Parameter Δ mithilfe von Gleichung (6.4) zu bestimmen. Hierbei gehen wir von einem rechteckigen Quantentrog aus mit einer Breite von 15 nm. Im einfachsten Modell mit unendlich hohen Barrieren außerhalb des Troges ergibt sich ein Energieabstand $\Delta = 14$ meV. Ein etwas genaueres Modell mit endlichen Barrierenhöhen liefert in unserem Fall für die Materialien GaAs/GaAlAs mit einem Al-Anteil von 0.331 eine Barrierenhöhe von 409 meV und daraus eine kleinere Aufspaltung von $\Delta = 8$ meV.

Damit ist die Dispersion (6.5) vollständig bestimmt. In den Rechnungen wird Δ von 14 meV bis 1 meV variiert. Dadurch kann die Stärke des Warpings verändert werden. Dies hat den Vorteil, daß zum einen der Einfluß zunehmenden Warpings untersucht werden kann und zum anderen eine weitere Absenkung von Δ eine Annäherung unseres Modells an die tatsächliche Fermikontur der (311)A-Löcher liefert. In Abbildung 6.2 sind die Fermikonturen dargestellt, die für die Rechnungen verwendet wurden, die in diesem Kapitel gezeigt werden. Die Fermikontur für $\Delta = 14$ meV ist nahezu isotrop und mit abnehmenden Δ nimmt die Stärke des Warpings zu.

Bei gegebenem Wert von Δ wird die Fermienergie so bestimmt, daß sie für die Fermikonturen (a)-(d) aus Abbildung 6.2 der experimentellen Lochdichte $n_h = 3 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-2}$ entspricht. Das heißt, die Fläche F_k innerhalb der Fermikontur im k -Raum ist für alle Dispersionen gleich und die Fermienergie ergibt sich implizit aus der Gleichung

$$F_k = 2\pi^2 n_h = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} k^2(\Theta, E_F) d\Theta. \quad (6.6)$$

6.3 Klassische Dynamik mit anisotroper Masse

Die theoretische Beschreibung der Ergebnisse des Experiments aus Abschnitt 6.1 muß die Anisotropie der Fermikonturen berücksichtigen. Hier wird deshalb zunächst eine allgemeingültige theoretische Beschreibung der klassischen Dynamik eines (Quasi)Teilchens mit anisotropen Fermikonturen vorgestellt. Die Fermikonturen werden in Form einer richtungsabhängigen Teilchenmasse in die klassischen Bewegungsgleichungen integriert. Der hier beschriebene Formalismus ist somit eine Verallgemeinerung der (für Elektronen üblichen) Effektivmassennäherung.

6.3.1 Effektive Masse und Hamiltonfunktion

Zur Modellierung der klassischen Dynamik ist es zunächst erforderlich, eine Hamiltonfunktion aufzustellen, die der anisotropen Dispersion $k^2(\Theta, T)$ Rechnung trägt, dabei ist T die kinetische Energie. Dies geschieht hier mittels Einführung

einer effektive Masse $m(\Theta, T)$, die folgendermaßen definiert wird:

$$E_F - U(\mathbf{r}) = T(\mathbf{r}) = \frac{\hbar^2 k^2(\Theta, T(\mathbf{r}))}{2m(\Theta, T(\mathbf{r}))}. \quad (6.7)$$

Die Dispersion $k^2(\Theta, T(\mathbf{r}))$ bei der kinetischen Energie $T(\mathbf{r}) = E_F - U(\mathbf{r})$ führt auf diese Weise zu einer Abhängigkeit der effektiven Masse $m(\Theta, T)$ sowohl vom Winkel Θ im \mathbf{k} -Raum als auch von der kinetischen Energie T . Die Dispersion $k^2(\Theta, T)$ muß dabei im Rahmen der Quantenmechanik für das entsprechende Materialsystem berechnet werden (z.B. aus einem Luttinger-Modell wie in Abschnitt 6.2). Als Spezialfall von Gleichung (6.7) ergibt sich für ein Teilchen mit isotroper Fermikontur $k^2 = \text{const.}$ im homogenen System $U(\mathbf{r}) = 0$ wieder die bekannte konstante effektive Masse m^* .

Die Ableitung der Bewegungsgleichungen erfolgt in Abschnitt 6.3.2 im Rahmen der Hamiltonschen Formulierung der klassischen Mechanik. Die Hamiltonfunktion läßt sich aus Gleichung (6.7) zusammen mit der Peierls-Onsager Ersetzung [79]

$$\hbar \mathbf{k} \mapsto \mathbf{p} - e\mathbf{A}(\mathbf{r}) \quad (6.8)$$

aufstellen und lautet

$$H(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \frac{\kappa^2(\mathbf{r}, \mathbf{p})}{2m(\Theta(\mathbf{r}, \mathbf{p}), T(\mathbf{r}))} + U(\mathbf{r}). \quad (6.9)$$

Dabei ist κ und der Winkel Θ im \mathbf{k} -Raum durch

$$\kappa(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \mathbf{p} - e\mathbf{A}(\mathbf{r}) \quad (6.10)$$

und

$$\Theta(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \arctan\left(\frac{\kappa_y(\mathbf{r}, \mathbf{p})}{\kappa_x(\mathbf{r}, \mathbf{p})}\right) \quad (6.11)$$

gegeben. Damit können dann die im folgenden Abschnitt beschriebenen Bewegungsgleichungen abgeleitet werden.

6.3.2 Bewegungsgleichungen

Aus dem kanonischen Gleichungen

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= \frac{\partial H(\mathbf{r}, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} \\ \dot{\mathbf{p}} &= - \frac{\partial H(\mathbf{r}, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{r}} \end{aligned} \quad (6.12)$$

mit homogenem Magnetfeld parallel zur z -Achse in symmetrischer Eichung

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{B}{2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \quad (6.13)$$

und der Hamiltonfunktion (6.9) ergeben sich die Bewegungsgleichungen:

$$\dot{x} = \frac{\kappa_x}{m} + \frac{\kappa_y}{2m^2} \frac{\partial m}{\partial \Theta}, \quad (6.14a)$$

$$\dot{y} = \frac{\kappa_y}{m} - \frac{\kappa_x}{2m^2} \frac{\partial m}{\partial \Theta}, \quad (6.14b)$$

$$\dot{p}_x = \frac{\kappa_y}{m} \left(\frac{eB}{2} \right) - \frac{\kappa_x}{2m^2} \frac{\partial m}{\partial \Theta} \left(\frac{eB}{2} \right) - \left(1 + \frac{\kappa^2}{2m^2} \frac{\partial m}{\partial T} \right) \frac{\partial U}{\partial x}, \quad (6.14c)$$

$$\dot{p}_y = -\frac{\kappa_x}{m} \left(\frac{eB}{2} \right) - \frac{\kappa_y}{2m^2} \frac{\partial m}{\partial \Theta} \left(\frac{eB}{2} \right) - \left(1 + \frac{\kappa^2}{2m^2} \frac{\partial m}{\partial T} \right) \frac{\partial U}{\partial y}. \quad (6.14d)$$

Zusammen mit der Dispersion $m(\Theta, T)$ ergeben sich aus der (numerischen) Integration des Gleichungssystems (6.14) die Trajektorien $\mathbf{r}(t)$ des Teilchens mit anisotroper Fermifläche in einem zusätzlichen lateralen Potential $U(\mathbf{r})$.

Im Spezialfall ohne laterales Potential ($U = 0$) reduziert sich (6.14) auf

$$\mathbf{v} = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\kappa}} \quad (6.15)$$

$$\dot{\boldsymbol{\kappa}} = e(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (6.16)$$

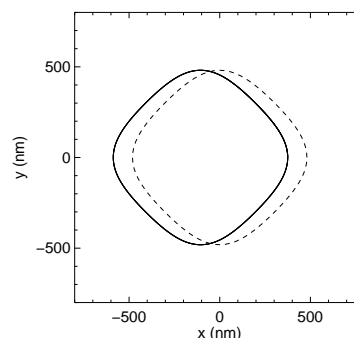
unter der Annahme eines homogenen Magnetfelds in z -Richtung. Zusammen mit (6.8) und (6.10) folgen daraus die (bekannten) Bewegungsgleichungen für den k -Vektor:

$$\mathbf{v} = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial E(\mathbf{k})}{\partial \mathbf{k}} \quad (6.17)$$

$$\hbar \dot{\mathbf{k}} = e(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (6.18)$$

Die Integration von (6.17) liefert eine Parameterdarstellung der Bahnkurve im Ortsraum $\mathbf{r}(\Theta)$ des Teilchens mit der Dispersion $k(\Theta)$ (siehe hierzu [80] und [26]). Abbildung 6.3 zeigt die Äquivalenz der Lösungen von (6.14) und (6.15) für $U = 0$. Der Verallgemeinerung in (6.14) besteht zum einen darin, daß die Bewegung in einem zusätzlichen lateralen Potential berechnet werden kann und andererseits erlaubt die Lösung $\mathbf{v}(t)$ aus (6.14) die Auswertung der Geschwindigkeits-Autokorrelation zur Berechnung der Leitfähigkeit über die Kubo-Formel.

Abbildung 6.3: Vergleich der Lösung der Bewegungsgleichungen (6.14) für $U = 0$ (durchgezogen) mit der Teilchenbahn aus Gleichung (6.15) (gestrichelt). Das Magnetfeld beträgt $B = 0.2$ T und $\Delta = 1$ meV. Die Lösungen sind bis auf eine (im 2DHG bedeutungslose) Translation äquivalent.



6.4 Kubo-Formel

Die Berechnung der Leitfähigkeit erfolgt auch hier mit der klassischen Kubo-Formel

$$\bar{\sigma}_{ij} = \bar{d}(E_F) \frac{e^2}{V} \int_0^\infty dt \langle v_i(t) v_j(0) \rangle_{E_F} \exp(-t/\tau), \quad (6.19)$$

deren Ableitung im Rahmen der semiklassischen Näherung in Kapitel 2 erläutert wurde. Die Trajektorien der Löcher werden durch numerische Integration aus (6.14) berechnet und zur Auswertung der Kubo-Formel (6.19) benutzt. Der Vorfaktor in (6.19) ist gegeben durch die Thomas-Fermi-Zustandsdichte $\bar{d}(E)$ aus (2.38).

Für eine anisotrope Fermikontur muß bei der Berechnung des Vorfaktors über die Zustandsdichte $\bar{d}(E)$ zusätzlich die Winkel- und Energieabhängigkeit der effektiven Masse berücksichtigt werden. Die Zustandsdichte wird damit zu

$$\bar{d}(E) = \frac{1}{\pi \hbar^2} \int d^2r \Theta(E - U(\mathbf{r})) \int d\phi m(\phi, E - U(\mathbf{r})) \quad (6.20)$$

mit $m(\phi, E - U(\mathbf{r}))$ aus Gleichung (6.7). Die Berechnung der Thomas-Fermi-Zustandsdichte (6.20) erfolgt für kompliziertere Effektivmassen $m(\phi, E - U(\mathbf{r}))$ in der Regel numerisch. In dieser Arbeit wurde (6.20) mittels Monte-Carlo-Verfahren berechnet [25].

6.5 Magnetotransport im 2D Lochgas (2DHG)

Bevor das Lochsystem mit Antidotgitter in Abschnitt 6.6 untersucht wird, soll hier zunächst der einfachere Fall eines 2DHG besprochen werden. In Abschnitt 6.6 wird das Drude-Modell (siehe Abschnitt 2.3.1) wieder zur Normierung der Leitfähigkeit eingesetzt. Es ist allerdings nicht unmittelbar einzusehen, dass das Drude-Modell auch für Systeme mit anisotropen Fermikonturen gültig ist.

Der Beweis der Gültigkeit der Drude-Leitfähigkeit für Systeme mit anisotropen Fermikonturen soll im folgenden nun skizziert werden. Dieser Beweis folgt in groben Zügen der Rechnung in [81, 82]. Dort wurde allerdings lediglich die Übereinstimmung des asymptotischen Verhaltens der Leitfähigkeit gezeigt.

Zunächst soll eine mittlere Zyklotronfrequenz ω_c definiert werden:

$$\frac{2\pi}{\omega_c} = \frac{\hbar}{eB} \oint \frac{dk_{\parallel}}{v_{\perp}}. \quad (6.21)$$

Das Integral wird über die geschlossene Fermikontur zur Energie E berechnet. Dabei ist k_{\parallel} die Koordinate parallel zur Fermikontur und v_{\perp} ist die Geschwindigkeit senkrecht zur Fermikontur. Mit

$$v_{\perp} = \frac{1}{\hbar} \frac{dE}{dk_{\perp}} \quad (6.22)$$

und $E = \frac{\hbar^2 k_{\perp}^2}{2m^*}$ folgt als Spezialfall aus (6.21) für ein Teilchen mit isotroper Fermikontur wieder die bekannte Zyklotronfrequenz $\omega_c = eB/m^*$.

Die Berechnung der Leitfähigkeit erfolgt hier über die Boltzmann-Gleichung (siehe Abschnitt 2.3.3). Die Verteilungsfunktion $f(\mathbf{k}, \mathbf{r})$, deren Dynamik durch die Boltzmann-Gleichung bestimmt wird, ist für homogene Systeme unabhängig von der Ortskoordinate \mathbf{r} . Im folgenden sollen der Winkel Φ und die Energie E als neue Koordinaten im \mathbf{k} -Raum für $f(\mathbf{k})$ benutzt werden. Der Winkel Φ ist definiert durch

$$\Phi = \frac{\omega_c \hbar}{eB} \int^k \frac{dk_{\parallel}}{v_{\perp}} \quad (6.23)$$

und seine Dynamik ergibt sich aus

$$\dot{\Phi} = \frac{\omega_c \hbar}{eB} \dot{k} \frac{d}{dk} \int^k \frac{dk_{\parallel}}{v_{\perp}} = \frac{\omega_c \hbar}{eB} \frac{ev_{\perp}(k)B}{\hbar v_{\perp}(k)} = \omega_c. \quad (6.24)$$

Damit wird die Boltzmann-Gleichung für $f(\Phi, E)$ zu

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{\text{Streu}} &= \frac{\partial f}{\partial \Phi} \dot{\Phi} + \frac{\partial f}{\partial E} \dot{E} \\ &= \frac{\partial f}{\partial \Phi} \dot{\Phi} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{F} \frac{\partial f}{\partial E} \\ &= \frac{\partial f}{\partial \Phi} \dot{\Phi} + e\mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B} + \mathbf{E}) \frac{\partial f}{\partial E} \\ &= \omega_c \frac{\partial f}{\partial \Phi} + e\mathbf{v} \cdot \mathbf{E} \frac{\partial f}{\partial E}. \end{aligned} \quad (6.25)$$

Dabei wurden die Bewegungsgleichungen des \mathbf{k} -Vektors, die Lorentzkraft $\mathbf{F} = e(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + e\mathbf{E}$ und Gleichung (6.24) benutzt.

Die Verteilungsfunktion f wird nun in einen Gleichgewichtsanteil f_0 (Fermi-Verteilung) und den Nichtgleichgewichtsanteil g zerlegt

$$f(\Phi, E) = f_0(E) + g(\Phi, E). \quad (6.26)$$

Der Streuterm lässt sich in einfachster Näherung als

$$\left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{\text{Streu}} = -\frac{g}{\tau} \quad (6.27)$$

schreiben und (6.25) wird zu:

$$-\frac{g}{\tau} = \omega_c \frac{\partial g}{\partial \Phi} + e\mathbf{v} \cdot \mathbf{E} \frac{\partial f_0}{\partial E}. \quad (6.28)$$

Dabei wurden Terme $\mathcal{O}(E^2)$ vernachlässigt (linearisierte Boltzmann-Gleichung). Dies ist analog zum isotropen Fall, falls die Geschwindigkeit $\mathbf{v}(\Phi, E)$ nicht vom Winkel Φ abhängig wäre. Die (formale) Lösung von (6.28) lautet

$$\begin{aligned} g(\Phi, E) &= -\frac{e}{\omega_c} \frac{\partial f_0}{\partial E} \mathbf{E} \cdot \int_{-\infty}^{\Phi} \mathbf{v}(\Phi', E) e^{(\Phi' - \Phi)/\omega_c \tau} d\Phi' \\ &= -\frac{e}{\omega_c} \frac{\partial f_0}{\partial E} \mathbf{E} \cdot \int_0^{\infty} \mathbf{v}(\Phi - \Phi', E) e^{-\Phi'/\omega_c \tau} d\Phi' \end{aligned} \quad (6.29)$$

und die Leitfähigkeit ergibt sich mit

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} = e \frac{2}{(2\pi)^2} \int \mathbf{v}(\mathbf{k}) g(\mathbf{k}, E) d^2k \quad (6.30)$$

zu

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \frac{-e^2}{2\pi^2 \omega_c} \int \left[\int_0^{\infty} \mathbf{v}_i(\Phi, E) e^{-\Phi'/\omega_c \tau} \mathbf{v}_j(\Phi - \Phi', E) d\Phi' \right] \frac{\partial f_0}{\partial E} d^2k \\ &= \frac{m^* e^2}{2\pi^2 \hbar^2 \omega_c} \int_0^{\infty} dE \left(-\frac{\partial f_0}{\partial E} \right) \times \\ &\quad \times \int_0^{\infty} d\Phi' \int_0^{2\pi} d\Phi \mathbf{v}_i(\Phi, E) e^{-\Phi'/\omega_c \tau} \mathbf{v}_j(\Phi - \Phi', E). \end{aligned} \quad (6.31)$$

Dabei wurde $m^* = eB/\omega_c$ und

$$d^2k = m^* v / \hbar d\Phi dE / (v\hbar) = m^* / \hbar^2 d\Phi dE$$

benutzt. Gleichung (6.31) ist die Röhrenintegral-Formel² von Shokley [83].

Die Geschwindigkeit $v(\Phi)$ ist 2π -periodisch und läßt sich als Fourier-Reihe darstellen. Wir nehmen im Folgenden periodische Orbits an, und wählen oBdA den Winkel Φ so, daß $v_x(0) = 0$ und $v_y(0) \neq 0$, dann gilt

$$v_x(\Phi) = \sum_{n>0} \tilde{v}_x(n) \sin(n\Phi) \quad (6.32a)$$

$$v_y(\Phi) = \sum_{m>0} \tilde{v}_y(m) \cos(m\Phi). \quad (6.32b)$$

Einsetzen von (6.32) in (6.31) führt zur Berechnung von σ_{xx} und σ_{xy} auf das Integrale

$$\int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \sin(n\Phi) \\ \cos(n\Phi) \end{pmatrix} \sin(m(\Phi - \Phi')) d\Phi. \quad (6.33)$$

Mit den Additionstheoremen

$$\sin(\alpha) \sin(\beta) = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)) \quad (6.34a)$$

$$\cos(\alpha) \sin(\beta) = \frac{1}{2} (\sin(\alpha - \beta) - \sin(\alpha + \beta)) \quad (6.34b)$$

wird (6.33) zu

$$\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos((n-m)\Phi + m\Phi') - \cos((n+m)\Phi - m\Phi') \\ \sin((n-m)\Phi + m\Phi') - \sin((n+m)\Phi - m\Phi') \end{pmatrix} d\Phi. \quad (6.35)$$

Wegen $n + m > 1$ verschwinden die Integrale über die zweiten Summanden in (6.35). Die ersten Summanden in (6.35) liefern nur Beiträge für $n - m = 0$ und aus (6.35) wird zusammen mit der noch verbliebenen Integration über Φ' aus (6.31)

$$\begin{aligned} \pi \delta_{nm} \int_0^\infty \begin{pmatrix} \cos(m\Phi') \\ \sin(m\Phi') \end{pmatrix} e^{-\Phi'/\omega_c\tau} d\Phi' = \\ \pi \delta_{nm} \frac{\omega_c\tau}{1 + (\omega_c\tau)^2} \begin{pmatrix} 1 \\ \omega_c\tau \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (6.36)$$

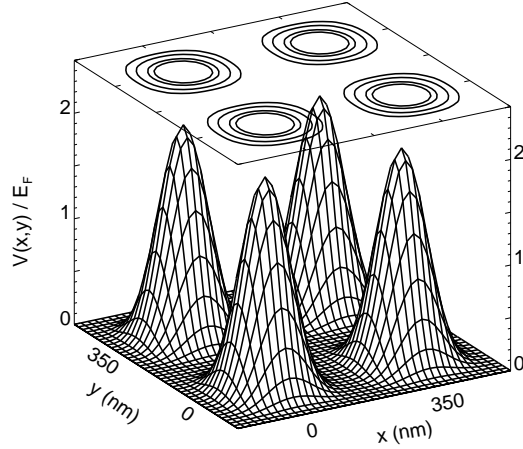
Hiermit ergibt sich schließlich aus (6.31)

$$\sigma_{xx} = \frac{\bar{\sigma}_{xx}}{1 + (\omega_c\tau)^2} \quad (6.37)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{\bar{\sigma}_{xy} \omega_c\tau}{1 + (\omega_c\tau)^2} \quad (6.38)$$

² Im Grunde ist dies wieder die Kubo-Formel, aber jetzt mit anisotroper Fermikontur. Wie man sich durch eine kurze Rechnung leicht überzeugen kann, liefert (6.31) für isotrope Fermikonturen wieder die Drude-Formeln.

Abbildung 6.4: Modellpotential für das laterale Antidotgitter nach Gleichung (6.41). Der innersten Kreise im Konturplot kennzeichnen den Durchmesser der Antidots bei der Fermienergie.



mit den (dispersionsabhängigen) Konstanten

$$\bar{\sigma}_{xx} = \frac{m^* e^2 \tau \pi}{2\pi^2 \hbar^2} \sum_{n>0} \tilde{v}_x^2(n) \quad (6.39)$$

$$\bar{\sigma}_{xy} = \frac{m^* e^2 \tau \pi}{2\pi^2 \hbar^2} \sum_{n>0} \tilde{v}_x(n) \tilde{v}_y(n). \quad (6.40)$$

Dies ist der Beweis dafür, daß auch im Fall anisotroper Fermikonturen im homogenen System die Abhängigkeit der Leitfähigkeit vom Magnetfeld von der Form der Drude-Leitfähigkeit ist. Im nächsten Abschnitt werden bei der Interpretation der numerischen Ergebnisse die Leitfähigkeiten auf die Drude-Leitfähigkeit normiert.

6.6 Magnetotransport von Löchern im Antidotgitter

Wie bereits in Abschnitt 6.1 erläutert wurde, soll hier die Frage untersucht werden, ob sich die Anisotropie der Fermikonturen der Löcher in einem anisotropen Magnetotransport widerspiegelt. Im Experiment wurde eine solche Anisotropie bereits festgestellt. Die Aufgabe der Theorie ist es nun, als ersten Schritt das experimentelle Ergebnis zu bestätigen, um sodann weitere Hinweise auf die Ursache und den Mechanismus dieser Anisotropie zu liefern.

Natürlich ist auch bei der Beschreibung der Antidotgitter für Löcher die experimentell realisierte Potentialform des Übergitters prinzipiell unbekannt. Daher muß für die Modellierung des Transports von Löchern, wie auch schon beim elektronischen Transport in Kapitel 4 wieder ein Modell für das Übergitterpotential

verwendet werden. Um zu zeigen, daß die vorgestellten Ergebnisse keine Artefakte des verwendeten Modellpotentials sind, werden am Ende dieses Abschnitts die Ergebnisse mit einer anderen Potentialform reproduziert.

Das Modellpotential, das für die folgenden Rechnungen verwendet wurde, lautet

$$V(x, y) = 2E_F \cos^4(\pi x/a) \cos^4(\pi y/a) \quad (6.41)$$

und ist in Abbildung 6.4 dargestellt. Die Fermienergie E_F variiert je nach Stärke des Warpings und entspricht immer der experimentellen Ladungsdichte von $n = 3.1 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$ (siehe Abschnitt 6.2). Die Gitterkonstante beträgt $a = 350 \text{ nm}$ (wie im Experiment).

Im Experiment wurden die Antidotgitter in unterschiedlichen Orientierungen auf dem GaAs-Kristall aufgebracht. Die Hallbar wurde jeweils parallel zum Antidotgitter ausgerichtet. Die verschiedenen Orientierungen entsprechen dann einer Drehung der Fermikontur um den Winkel Θ_0 (siehe Abbildung 6.1).

In Abbildung 6.5 wurde der Magnetowiderstand mit den Warpingmodellen aus Abbildung 6.2 mithilfe der Kubo-Formel (6.19) berechnet. Das Maximum im Widerstand bei $B = 0.5 \text{ T}$ ist unabhängig von der Stärke des Warpings und unabhängig von der Orientierung Θ_0 der Fermikontur.

Im Vergleich zum Experiment in Abbildung 6.6 zeigt die Theorie ebenfalls die Stabilität des Maximums bei 0.5 T . Die Verschiebung des Maximums bei kleinerem Magnetfeld wird auch in Übereinstimmung zum Experiment reproduziert. Diese Transport-Anisotropie im Widerstand soll nun mit Hilfe der theoretischen Rechnungen weiter untersucht werden.

Beim Magnetotransport von Elektronen [6, 7, 84] lassen sich die Widerstandsmaxima durch Kommensurabilitäten zwischen dem Durchmesser der Zyklotronbahnen und der Gitterkonstanten erklären. Diese Thematik wurde bereits in Kapitel 4 erläutert. Auch im Fall der Löcher kann das Maximum bei 0.5 T mit bestimmten Teilchenbahnen in Verbindung gebracht werden. Aufgrund des Warpings sind die Lochbahnen allerdings nicht mehr kreisförmig und können daher nicht allein durch ihren Durchmesser charakterisiert werden.

Die für das Maximum bei 0.5 T charakteristischen Bahnen werden auch im Lochsystem über Poincaré-Schnitte identifiziert. (siehe Abbildung 6.7). Für beide Orientierungen (0 und $\pi/4$) ist ein ausgeprägter Stabilitätsbereich zu erkennen. In den Zentren dieser beiden Bereiche liegen die Anfangsbedingungen für die Trajektorien aus Abbildung 6.8. Im Unterschied zu elektronischen Systemen sind hier die Trajektorien aber natürlich keine Zyklotron-Kreise mehr. Die Stabilität des Widerstandsmaximums bei 0.5 T hinsichtlich Stärke und Orientierung des Warpings ist darauf zurückzuführen, daß der Einfluß des Antidotgitters auf diese Bahnen vernachlässigbar ist.

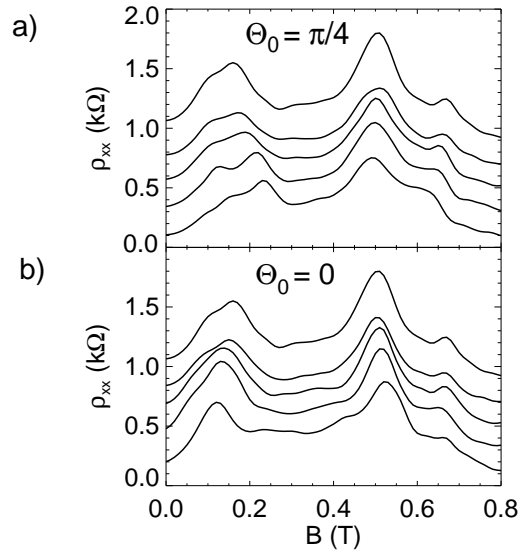


Abbildung 6.5: Magnetowiderstand des Antidotgitters (6.41) für die Warmingmodelle aus Abbildung 6.2. Die obersten Kurven in Teilabbildung a) und b) sind für eine isotrope Fermikontur gerechnet. Das Warming nimmt von oben nach unten hin zu, entsprechend nimmt Δ die Werte 14 meV, 7 meV, 3 meV und 1 meV an. Die Kurven wurden jeweils um 0.2 k Ω verschoben.

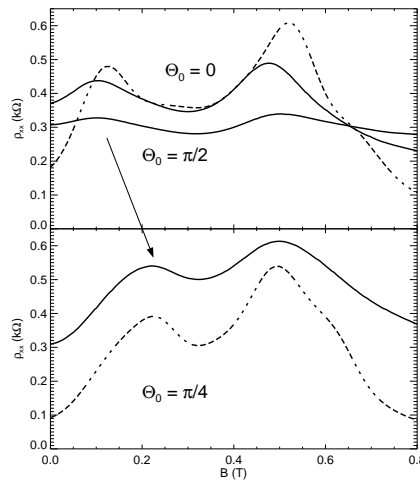
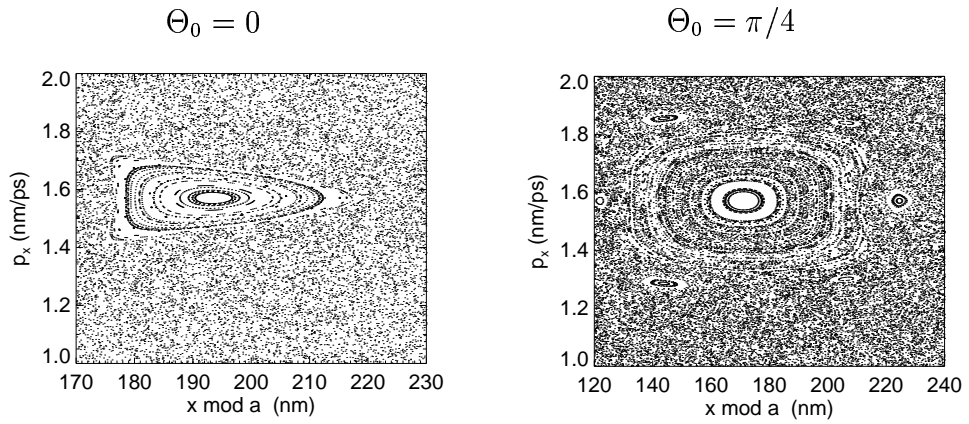
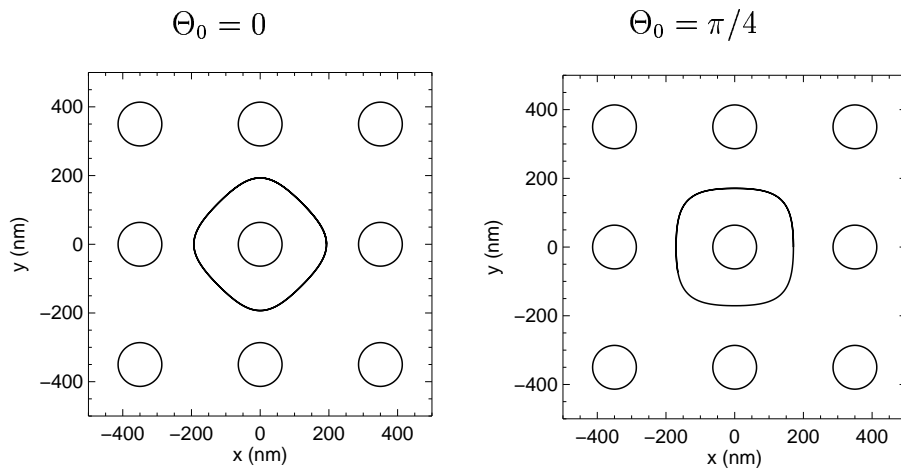


Abbildung 6.6: Vergleich der theoretischen Ergebnisse (gestrichelt) für das stärkste Warming ($\Delta = 1$ meV) aus Abbildung 6.5 mit den experimentellen Kurven aus Abbildung 6.1 (durchgezogen). Der Pfeil markiert die Verschiebung des Komensurabilitätsmaximums 2. Ordnung bei Änderung der Orientierung Θ_0 der Fermikontur bezüglich dem Antidotgitter.

Abbildung 6.7: Poincaré-Schnitte bei $B = 0.5$ T, $y \text{ mod } a = a/2$ und $\Delta = 1$ meV.Abbildung 6.8: Trajektorien bei $B = 0.5$ T für $\Delta = 1$ meV.

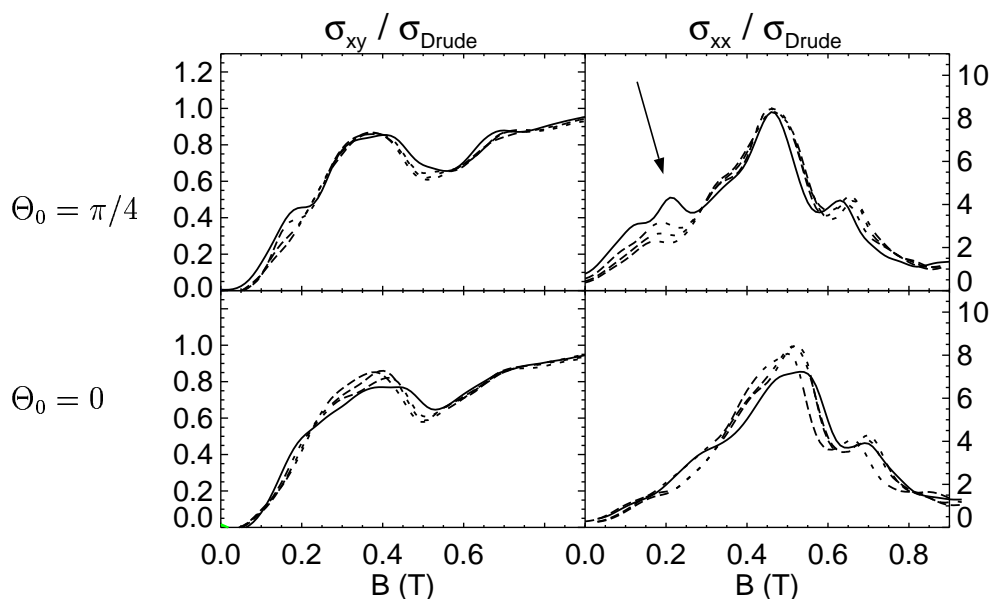


Abbildung 6.9: Auf das Drude-Modell normierte Leitfähigkeitskomponenten in Abhängigkeit von Stärke und Orientierung des Warpings. Die obere Zeile wurde für die $\pi/4$ -Orientierung gerechnet. Der Parameter Δ nimmt die Werte 14 meV, 7 meV, 3 meV und 1 meV an. Der Pfeil markiert die Änderung des Leitfähigkeitsmaximums mit der Stärke des Warpings Δ (siehe auch Abbildung 6.10).

Im Gegensatz zum Experiment liefert eine theoretische Beschreibung nicht direkt die Komponenten des Widerstandstensors, sondern dessen Inverses, die Leitfähigkeit. Die Ursache für die Verschiebung des Widerstandsmaximums in Abbildung 6.5a) bei 0.2 T kann daher im Prinzip sowohl in σ_{xx} , als auch in σ_{xy} zu suchen sein. Bei der Interpretation wird die Leitfähigkeit auf die Drude-Leitfähigkeit des 2DHG normiert, um die Einflüsse des Übergitters und der Fermikonturen zu studieren. Das Ergebnis ist in Abbildung 6.9 zu sehen. In der $\pi/4$ -Orientierung ändert sich die longitudinale Leitfähigkeitskomponente $\sigma_{xx}/\sigma_{\text{Drude}}$ mit zunehmendem Warping und es bildet sich in $\sigma_{xx}/\sigma_{\text{Drude}}$ bei 0.2 T ein Maximum aus. In den Hall-Leitfähigkeiten und in der longitudinalen Leitfähigkeit für die Orientierung $\Theta_0 = 0$ tritt bei $B = 0.2$ T keine signifikante Änderung auf. Diese Änderung ist in Abbildung 6.10 nochmal zur Verdeutlichung dargestellt und ist somit die Ursache für die Verschiebung des Widerstandsmaximums.

Zur Interpretation des Maximums in σ_{xx} wurden wieder Poincaré-Schnitte berechnet. Die Poincaré-Schnitte bei 0.2 T zeigen eine starke Abhängigkeit von Orientierung und Stärke des Warpings (siehe Abbildung 6.11). Während bei isotroper Fermikontur (Abbildung 6.11a) und für $\Theta_0 = 0$ (Abbildung 6.11b) keinerlei Struktur im Poincaré-Schnitt zu erkennen ist, tritt für die $\pi/4$ -Orientierung ein

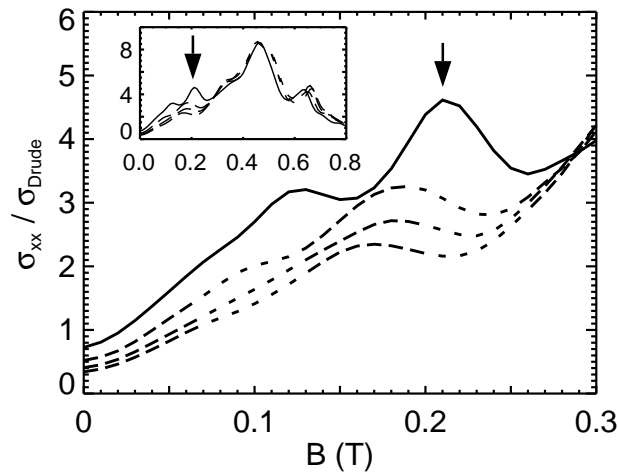


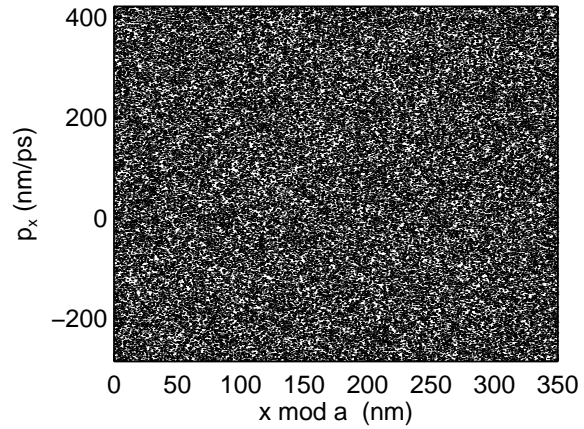
Abbildung 6.10: Auf das Drude-Modell normierte Leitfähigkeitskomponente σ_{xx} für die $\pi/4$ -Orientierung in Abhängigkeit von der Stärke des Warpings. Die Parameter sind in Abbildung 6.9 angegeben.

stabiler Bereich auf (Abbildung 6.11c). Betrachtet man die Trajektorien mit Anfangsbedingung aus dem Zentrum des Stabilitätsbereiches aus Abbildung 6.11c, dann zeigt sich, daß es nur bei der $\pi/4$ -Orientierung zur Ausbildung von gitterperiodischen Runaway-Trajektorien kommt (siehe Abbildung 6.12). Hier bewirkt das Warming in der $\pi/4$ -Orientierung also eine Stabilisierung der Runaway-Trajektorien und wie beim klassischen Transport im Rechteckgitter in Kapitel 4 bewirken die Runaway-Trajektorien einen Anstieg in der Leitfähigkeit.

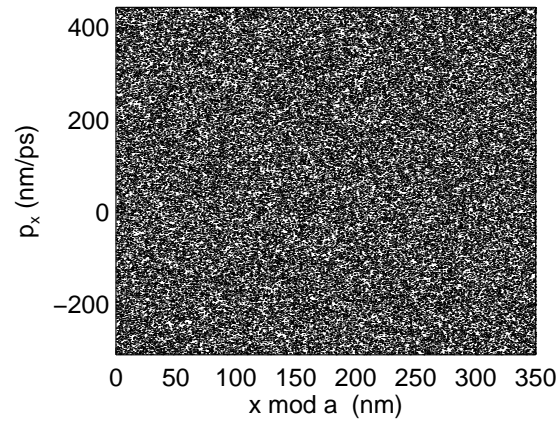
Eine etwas genauere Betrachtung der Runaway-Trajektorien fördert noch ein interessantes Detail zu Tage. In Abbildung 6.13 ist der Stabilitätsbereich aus dem Poincaré-Schnitt Abbildung 6.11c vergrößert dargestellt. Die Dreizähligkeit des Stabilitätsbereiches ist hier deutlich zu erkennen und die Erklärung hierfür liefert eine detailliertere Betrachtung der Periodizität der Runaway-Trajektorien. In Abbildung 6.14 ist in der linken Teilabbildung eine Trajektorie mit der Periodizität der Gitterkonstanten a dargestellt, sie stammt aus dem Zentrum des Stabilitätsbereiches aus Abbildung 6.13. Zum anderen treten aber auch Trajektorien mit der Periodizität $3a$ auf (Abbildung 6.14 rechts) und zwar zu Anfangsbedingungen aus dem Zentrum eines der drei Satelliten in Abbildung 6.13. Dies erklärt die Dreizähligkeit der Struktur in Abbildung 6.13. Bei einem kleineren Magnetfeld von 0.1 T ist diese Dreizähligkeit verschwunden (siehe Abbildung 6.15). Offenbar gehen die Trajektorien mit Periodizität $3a$ aus einer Bifurkation mit Periodenverdreifachung hervor, die im Bereich zwischen 0.1 und 0.2 T stattfindet. Dies ist ein bekanntes Phänomen von Systemen mit nichtlinearer Dynamik.

Die Ergebnisse der Modellrechnungen an dem Potential (6.41) sollen nun noch

a)
isotrop



b)
 $\Theta_0 = 0$



c)
 $\Theta_0 = \pi/4$

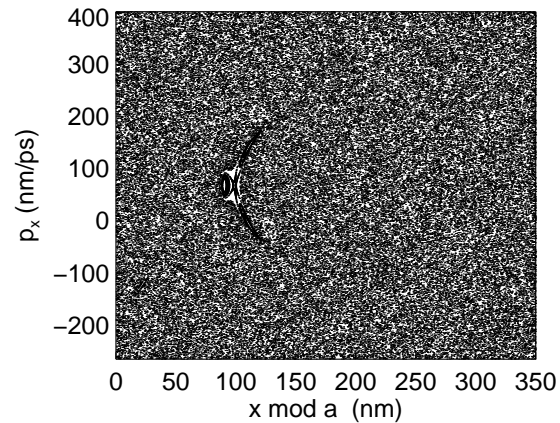


Abbildung 6.11: Poincaré-Schnitte für $B = 0.2$ T, $y \bmod a = a/2$ und $\Delta = 1$ meV.

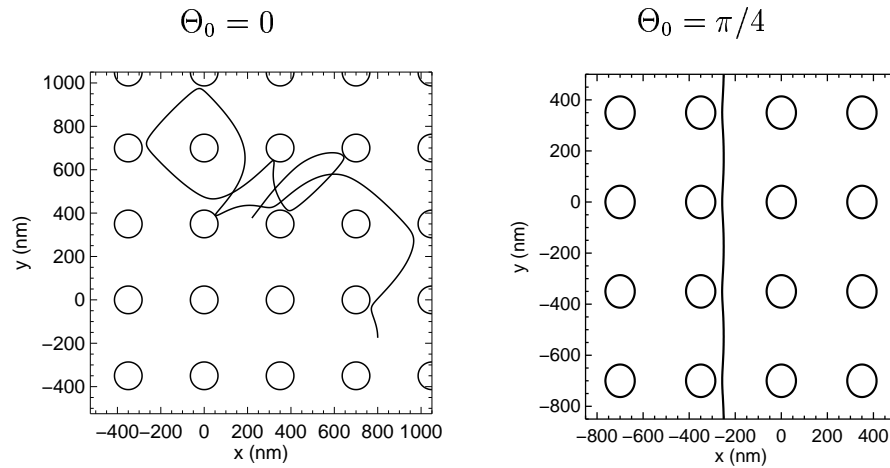


Abbildung 6.12: Trajektorien mit Anfangsbedingung aus dem Zentrum des Stabilitätsbereiches aus Abbildung 6.11c) für $B = 0.2$ T und $\Delta = 1$ meV.

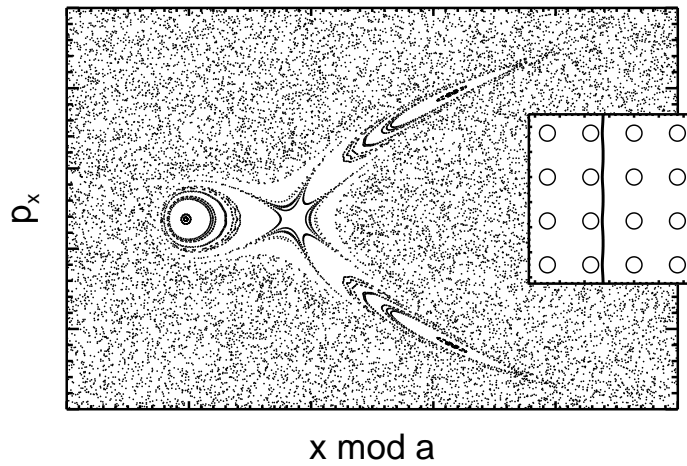


Abbildung 6.13: Ausschnitt aus Abbildung 6.11c) zusammen mit einer Trajektorie mit Anfangsbedingung aus dem Zentrum des Stabilitätsbereiches.

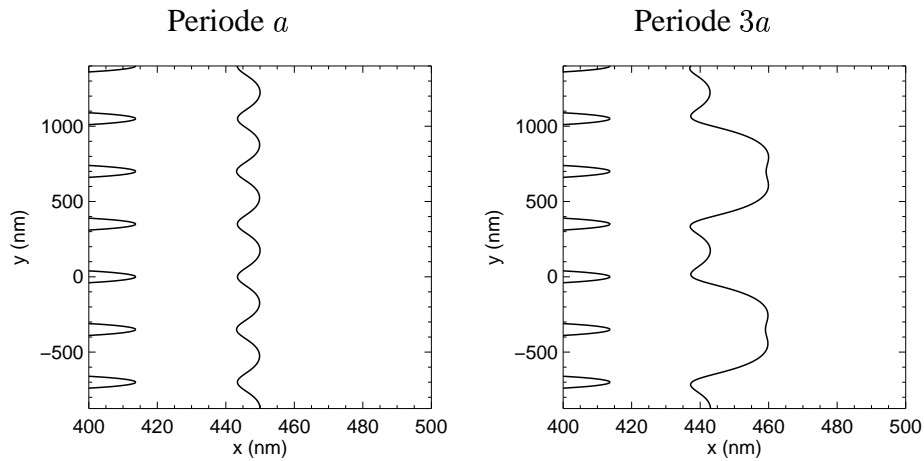


Abbildung 6.14: Trajektorien für $B = 0.2 \text{ T}$ und $\Theta_0 = \pi/4$ aus dem Stabilitätsbereich aus Abbildung 6.13. (Die x - und y -Achsen sind unterschiedlich skaliert, daher erscheinen die Antidots am linken Bildrand nicht mehr rund. Durch diese Skalierung wird die Periodizität der Trajektorien sichtbar.)

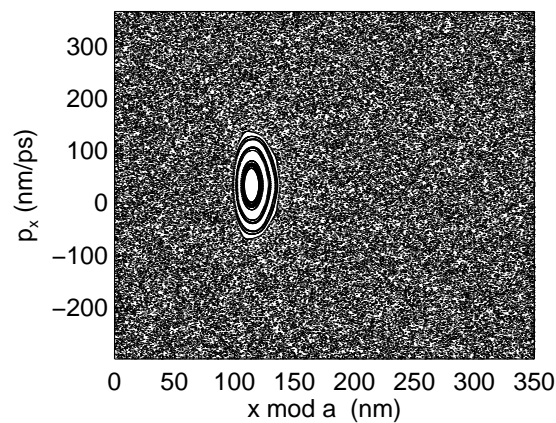
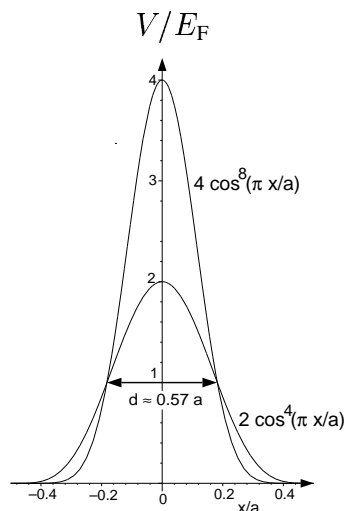


Abbildung 6.15: Poincaré-Schnitt für $B = 0.1 \text{ T}$, $y \bmod a = a/2$, $\Theta_0 = \pi/4$ und $\Delta = 1 \text{ meV}$

Abbildung 6.16: Vergleich der verwendeten Potentialprofile



einmal anhand eines steileren Potentials überprüft werden:

$$V(x, y) = 4E_F \cos^8(\pi x/a) \cos^8(\pi y/a) . \quad (6.42)$$

Dieses ist so konstruiert, daß es den gleichen Antidotdurchmesser an der Fermienergie besitzt, was in Abbildung 6.16 anhand eines Vergleichs der beiden Potentialprofile veranschaulicht ist.

Die numerischen Ergebnisse für den Magnetowiderstand sind in Abbildung 6.17 im Vergleich mit den bisherigen Rechnungen für $\Delta = 1$ meV dargestellt. Die Ergebnisse der obigen Rechnungen werden auch mit dem steileren Potential bestätigt. Auch damit bleibt sowohl die Unabhängigkeit des Hauptmaximums bei 0.5 T von Orientierung und Stärke des Warpings als auch die Verschiebung des Maximums bei kleinerem Feld erhalten.

Ein Blick auf die normierte Leitfähigkeit in Abbildung 6.18 weist jedoch auch einen wichtigen Unterschied in den beiden Modellen auf. Die Ausbildung des lokalen Maximums in der normierten longitudinalen Leitfähigkeit bei 0.2 T fällt beim steileren Potential wesentlich schwächer aus. Dieses Ergebnis ist auf den ersten Blick überraschend. Bei den Rechnungen mit dem steileren Potential haben die Löcher über einen größeren Bereich im Antidotgitter fast ausschließlich kinetische Energie. Das bedeutet aber auch, daß der Einfluß des Warpings zunimmt (siehe hierzu auch Abbildung 6.2). Es wäre daher zu vermuten, daß auch das lokale Maximum in $\sigma_{xx}/\sigma_{\text{Drude}}$ zunehmen sollte. Dies ist allerdings nur zum Teil richtig. Nach der Interpretation des Maximums für das weichere Potential ist nämlich das Wechselspiel von Warming und Antidotpotential für die Ausbildung der Runaway-Trajektorien verantwortlich. Bei dem steileren Potential ist der Einfluß des Warpings zwar stärker, die Stabilität der Runaway-Trajektorien wird durch das steilere Potential jedoch vermindert. Das hat die schwächere Ausbildung des

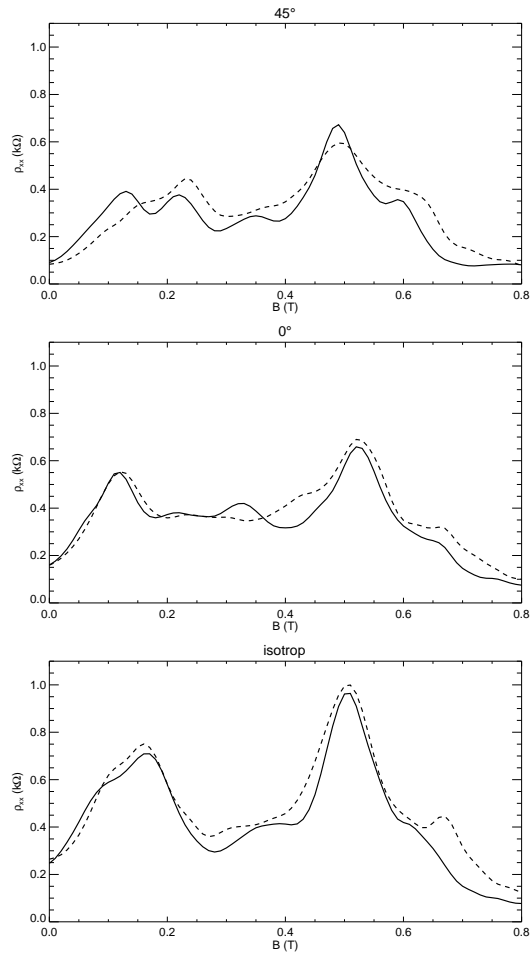


Abbildung 6.17: Vergleich der numerischen Ergebnisse für den Magnetowiderstand mit den Potentialmodell (Gleichung (6.41), gestrichelt) und dem steileren Potential (Gleichung (6.42), durchgezogen).

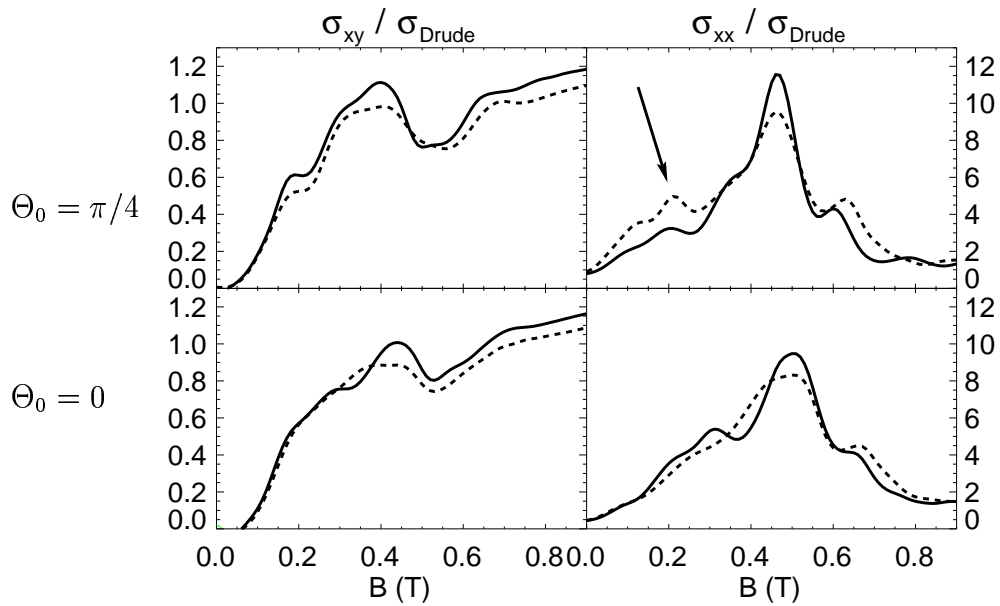


Abbildung 6.18: Normierte Leitfähigkeit für das Potential (Gleichung (6.41), gestrichelt) und das steilere Potential (Gleichung (6.42), durchgezogen). Der Pfeil markiert wieder das lokale Maximum in der normierten longitudinalen Leitfähigkeit, das für die Verschiebung des Widerstandsmaximums verantwortlich ist.

Maximums in Abbildung 6.18 zur Folge.

Auch die Ergebnisse für das steilere Potential bestätigen somit die Interpretation der obigen Rechnungen mit dem weicheren Potentialmodell und liegen im Einklang mit dem Experiment.

Zusammenfassung

Die Eigenschaften des Magnetotransports eines lateralen Halbleiter-Übergitters mit hoher Beweglichkeit der Ladungsträger lassen sich häufig durch eine klassische oder semiklassische Theorie beschreiben. Anomalien im Magnetowiderstand werden dabei als Auswirkungen bestimmter Trajektorien der Ladungsträger erklärt. Die semiklassische Näherung zur Leitfähigkeit gestattet es sogar, die führenden Quanteninterferenzeffekte im Magnetotransport mittels klassischer Teilchenbahnen zu berechnen.

In der vorliegenden Arbeit werden die Anomalien im Magnetowiderstand verschiedener anisotroper Systeme untersucht. Im Einzelnen ist dies ein Antidot-Übergitter mit rechteckiger Einheitszelle, ein System mit schwacher eindimensionaler Modulation und ein quadratisches Antidotgitter mit Löchern als Ladungsträger. Bei jedem dieser Systeme hat die Anisotropie charakteristische Auswirkungen auf den Magnetotransport, deren Analyse weitergehendere Rückschlüsse auf die zugrundeliegenden Transportmechanismen zuläßt, als bei den entsprechenden isotropen Systemen möglich wäre.

Die wichtigsten theoretischen Konzepte zur Beschreibung des linearen Magnetotransports, die in dieser Arbeit benutzt wurden, lassen sich in zwei Klassen einteilen. Zum einen sind dies die klassischen Theorien, wie die klassische Kubo-Formel, und zum anderen semiklassische Theorien auf der Basis der semiklassischen Näherung zur quantenmechanischen Greenschen Funktion, die die Interferenzeffekte quantenmechanischer Wellenfunktionen näherungsweise mit berücksichtigen und damit über die rein klassische Beschreibung hinausgehen. Charakteristisch für die semiklassischen Näherungen ist die Beschreibung der Quanteninterferenzeffekte mit Elementen der klassischen Mechanik, so daß sich die hohe Anschaulichkeit der klassischen Konzepte auch auf einen Teil der quantenmechanischen Eigenschaften überträgt. Die Anwendung klassischer und semiklassischer Konzepte auf anisotrope Systeme erfordert dabei oft eine Erweiterung der bestehenden theoretischen Modelle.

Das Antidot-Übergitter mit rechteckiger Einheitszelle zeigt im Gegensatz zu quadratischen Antidotgittern eine ausgeprägte Anisotropie zwischen den beiden longitudinalen Komponenten des Magnetowiderstands. Diese Anisotropie im Wi-

derstand überträgt sich auch auf die longitudinalen Leitfähigkeiten und zeigt sich sowohl im klassischen Anteil des Magnetotransports als auch in den quantenmechanischen Aspekten.

Die theoretische Untersuchung des Magnetowiderstands mithilfe der klassischen Kubo-Formel bestätigt die experimentell gefundene Anisotropie in den Widerstandskomponenten. Eine Analyse der Leitfähigkeit, die auf die Leitfähigkeit des Drude-Modells für ein entsprechendes homogenes System normiert wurde, bestätigt die Äquivalenz der normierten Leitfähigkeit mit dem Magnetowiderstand. Diese normierte Leitfähigkeit bietet den Vorteil, daß sie über die Proportionalität zum Diffusionstensor direkt mit Geschwindigkeitskorrelationsfunktionen klassischer Teilchenbahnen in Verbindung steht. Die Analyse der normierten Leitfähigkeit zeigt als Ursache der Anisotropie besonders hohe Werte der Korrelationsfunktion in Richtung der kürzeren Gitterkonstanten des Rechtecksystems. Das Magnetfeld, bei dem das Hauptmaximum der Korrelation auftritt, stimmt mit dem Feld für das Hauptmaximum der bekannten Kommensurabilitätsbedingung aus quadratischen Gittern überein, die mit geschlossenen und an die Antidots gepinnten Zyklotronbahnen erklärt wird. Die Anisotropie der Korrelation im Rechteckgitter führt jedoch zu einer anderen Interpretation der Kommensurabilitätsmaxima mittels offener gitterperiodischer Trajektorien, die sich entlang der Antidotreihen in Richtung der kürzeren Gitterkonstanten ausbreiten. Eine einfache geometrische Betrachtung der Ausbildung der Runaway-Trajektorien bestätigt diese Interpretation.

Die Anisotropie des quantenmechanischen Anteils des Magnetotransports im Rechteckgitter zeigt sich in Form von Leitfähigkeitsoszillationen, die bei tiefen Temperaturen den klassischen Anteil überlagern und in Richtung der kürzeren Gitterkonstante eine höhere Amplitude aufweisen und phasenverschoben sind gegenüber den Shubnikov-de Haas-Oszillationen in der anderen Komponente. Die Analyse der anisotropen Quantenoszillationen erfolgt mit einer semiklassischen Näherung zur Kubo-Formel, die den oszillierenden Anteil der Magnetoleitfähigkeit als Summe über klassische periodische Teilchenbahnen (periodische Orbits) darstellt, und eng verwandt ist mit der Gutzwiller-Spurformel zur Berechnung von Zustandsdichteoszillationen in einem chaotischen klassischen System mit isolierten Trajektorien. Die semiklassische Näherung der Quantenoszillationen wurde in einem quadratischen Gitter bereits erfolgreich angewandt und lieferte eine Analyse der Oszillationen in Form der Interferenz von Elektronenwellen auf den kürzesten klassischen periodischen Orbits. Als Referenz zur semiklassischen Analyse der anisotropen Quantenoszillationen im Rechteckgitter dient eine quantenmechanische Rechnung, die die experimentell gefundene Anisotropie aufweist und zugleich die Modellparameter für die semiklassische Rechnung festlegt.

Die Untersuchung der anisotropen Oszillationen im Rechteckgitter mithilfe der semiklassischen Kubo-Formel ergibt jedoch nur isotrope Quantenoszillatio-

nen, da die Anisotropie der kürzesten periodischen Orbits nicht ausreicht, um die stark ausgeprägte Anisotropie der Quantenoszillationen zu beschreiben. Bei der semiklassischen Analyse zeigt sich zudem die Bedeutung der integrablen Bereiche des gemischten Phasenraums des Rechteckgitters, die im allgemeinen zu signifikant stärkeren Oszillationen führen als die chaotischen Anteile und im Rahmen der semiklassischen Näherung aufgrund der Ausbildung von Familien periodischer Orbits gesondert behandelt werden müssen.

Die Berücksichtigung der diskreten Translationssymmetrie des Antidotgitters führt zur Beschreibung des klassischen Systems in einem reduzierten Phasenraum, so daß auf der reduzierten Einheitszelle auch die oben beschriebenen Runaway-Trajektorien geschlossen sind. Formal konnte jedoch kein Beitrag der Runaway-Trajektorien zur semiklassischen Kubo-Formel gefunden werden. Die Untersuchung der Eigenschaften der Runaway-Trajektorien aus dem chaotischen Bereich des Phasenraums zeigt zudem, daß einerseits die Oszillationsperiode stark vom erwarteten Verhalten abweicht und andererseits die Bifurkationen im chaotischen Bereich des Phasenraums zum „Aussterben“ der Runaway-Trajektorien noch vor dem geforderten Magnetfeldbereich führt.

Die semiklassische Beschreibung des homogenen Systems führt auf die (isotropen) Shubnikov-de Haas-Oszillationen. Ausgehend vom homogenen System werden die Quantenoszillationen des Rechteckgitters im Rahmen einer semiklassischen Störungstheorie behandelt. Das „Einschalten“ des Potentials bewirkt dabei zum einen eine zusätzliche Phase und zum anderen eine Drift des Schwerpunkts der ungestörten Zyklotronorbits. Die Berücksichtigung beider Effekte bei der semiklassischen Näherung zur Kubo-Formel führt zu einem neuen störungstheoretischen Ausdruck für die Modifikation der Shubnikov-de Haas-Oszillationen durch das laterale Übergitter. Dieser Ausdruck besteht aus der Summe von zwei Beiträgen. Zum einen ein isotroper Beitrag, der aus dem Vergleich mit einer quantenmechanischen Störungstheorie als semiklassische Näherung zur Streuleitfähigkeit interpretiert werden kann und zum anderen ein anisotroper Beitrag, der vom Betrag der Driftgeschwindigkeit der Zyklotronorbits abhängt und der Bandleitfähigkeit der quantenmechanischen Störungstheorie entspricht.

Die oben beschriebene störungstheoretische semiklassische Analyse der Quantenoszillationen im Rechteckgitter zeigt schließlich die zu erwartende Anisotropie und stimmt qualitativ mit den Ergebnissen der quantenmechanischen Rechnung überein. Die anisotrope Drift der Zyklotronorbits führt somit zu einem anisotropen Beitrag der Bandleitfähigkeit in Übereinstimmung mit dem quantenmechanischen Ergebnis.

Die oben beschriebene semiklassische Näherung zu Band- und Streuleitfähigkeit wird auch zur Berechnung der Quantenoszillationen in einem lateralen Übergitter mit schwacher eindimensionaler Modulation benutzt. In diesem System ergeben sich sogar analytische Ausdrücke für die semiklassische Näherung

der Band- und Streuleitfähigkeit. Es zeigt sich wiederum eine deutlich ausgeprägte Anisotropie der Quantenoszillationen, die quantitativ von einer quantenmechanischen Rechnung bestätigt wird. Die Einhüllende der Quantenoszillationen weist in der Leitfähigkeitskomponente entlang der Modulation Minima an den Flachbandbedingungen auf, während die andere Komponente bei den entsprechenden Magnetfeldern Maxima aufweist. Dieses gegenphasige Verhalten wird ebenfalls von der semiklassischen Rechnung reproduziert und kann anhand der analytischen Ausdrücke sogar erklärt werden. Die semiklassische Näherung stellt damit die Erweiterung des klassischen Bildes der driftenden Zyklotronorbits auf die Quantenoszillationen dar.

Die Anisotropie der oben beschriebenen Systeme aus Elektronen liegt im künstlich erzeugten lateralen Übergitter. Im System mit Löchern als Ladungsträger liegt die Anisotropie in der nicht mehr kreisförmigen Fermikontur. Ein Experiment, in dem der Magnetowiderstand an einem quadratischen Antidotgitter mit Löchern als Ladungsträger gemessen wurde, zeigt die von elektronischen Antidotgittern bekannten Kommensurabilitätsmaxima. Die Position des Kommensurabilitätsmaximums zweiter Ordnung wird jedoch abhängig von der Orientierung der anisotropen Fermikontur im Antidotgitter. Die Berechnung der Magnetleitfähigkeit erfolgt wieder mit der klassischen Kubo-Formel. Zur Berücksichtigung der Anisotropie der Fermikontur, wird zunächst aus der kp -Theorie ein einfaches Modell aufgestellt, das die anisotrope Fermikontur beschreibt. Die Fermikontur geht in die klassischen Bewegungsgleichungen über eine effektive Masse ein, die, in Verallgemeinerung der bekannten Effektivmassennäherung für Elektronen, nun eine zusätzliche Richtungsabhängigkeit besitzt. Mit dieser richtungsabhängigen Masse werden klassische Bewegungsgleichungen aufgestellt, die im Spezialfall eines homogenen Systems den bekannten semiklassischen Bewegungsgleichungen im k -Raum entsprechen. Die Lösung der Bewegungsgleichungen gestattet wieder die Berechnung der Geschwindigkeitskorrelationsfunktionen der Loch-Trajektorien und führt über die Kubo-Formel zur Leitfähigkeit. Der daraus berechnete Widerstand zeigt den experimentell beobachteten Effekt der Verschiebung des höheren Kommensurabilitätsmaximums. Die Analyse der normierten Leitfähigkeit in Abhängigkeit von Stärke und Orientierung der Anisotropie erlaubt es, die für den Effekt charakteristischen Trajektorien über Poincaré-Schnitte zu identifizieren. In Fall des quadratischen Antidotsystems mit Löchern sind es wieder Runaway-Trajektorien, die durch das Wechselspiel von Antidotgitter und der Orientierung der Fermikontur stabilisiert werden.

Die Methoden, die in dieser Arbeit zum Einsatz kamen und teilweise weiterentwickelt wurden, insbesondere die Berechnung der klassischen Magnetleitfähigkeit in Systemen mit anisotroper Fermikontur und die semiklassische Näherung zu Streu- und Bandleitfähigkeit, sind ihrer Anwendbarkeit natürlich nicht nur auf die beschriebenen Systeme beschränkt. Ein Beispiel für eine weitere An-

wendung wäre die Untersuchung schwach zweidimensional modulierter Systeme mit der semiklassischen Näherung oder die Analyse von weiteren Parameterabhängigkeiten, die mir aus zeitlichen Gründen nicht mehr möglich war. Die konsequente Weiterentwicklung der klassischen und semiklassischen Näherungen in den nächsten Jahren sollte jedenfalls von grundlegendem theoretischen Interesse sein, da sie aufgrund ihrer Anschaulichkeit für das Verständnis der Eigenschaften des Transports von Ladungsträgern einen wichtigen Beitrag leisten können.

Literaturverzeichnis

- [1] KLAUS JOPP, Im Kleinen ganz groß, *Die Zeit* (7/2000).
- [2] K. v. KLITZING, G. DORDA und M. PEPPER, New Method for High-Accuracy Determination of the Fine-Structure Constant Based on Quantized Hall Resistance, *Phys. Rev. Lett.* **45**, 494 (1980).
- [3] D. C. TSUI, H. L. STORMER und A. C. GOSSARD, Two-Dimensional Magnetotransport in the Extreme Quantum Limit, *Phys. Rev. Lett.* **48**, 1559 (1982).
- [4] G. W. BRYANT, *The Optics of Semiconductor Quantum Wires and Dots: Fabrication, Characterization, Theory and Application*, Gordon and Beach Science Publications, Amsterdam, 2000.
- [5] D. BIMBERG, M. GRUNDMANN und N. N. LEDENTSOV, *Quantum Dot Heterostructures*, Wiley, New York, 1998.
- [6] D. WEISS, M. L. ROUKES, A. MENSCHIG, P. GRAMBOW, K. VON KLITZING und G. WEIMANN, Electron Pinball and Commensurate Orbits in a Periodic Array of Scatterers, *Phys. Rev. Lett.* **66**, 2790–2793 (1991).
- [7] R. FLEISCHMANN, T. GEISEL und R. KETZMERICK, Magnetoresistance Due to Chaos and Nonlinear Resonances in Lateral Surface Superlattices, *Phys. Rev. Lett.* **68**, 1367–1370 (1992).
- [8] D. WEISS, K. RICHTER, A. MENSCHIG, R. BERGMANN, H. SCHWEIZER, K. v. KLITZING und G. WEIMANN, Quantized periodic orbits in large antidot arrays, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 4118 (1993).
- [9] M. C. GUTZWILLER, *Chaos in Classical and Quantum Mechanics*, Springer-Verlag, Berlin, 1990.
- [10] K. RICHTER, Phase-coherence Effects in Antidot Lattices: A Semiclassical approach to Bulk Conductivity, *Europhys. Lett.* **29**, 7 (1995).

- [11] G. HACKENBROICH und F. VON OPPEN, Semiklassical theory of transport in antidot lattices, *Z. f. Phys. B (Condensed Matter)* **97**, 157–170 (1995).
- [12] F. SCHECK, *Mechanik: Von den Newtonschen Gesetzen zum deterministischen Chaos*, Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 1988.
- [13] A. J. LICHTENBERG und M. A. LIEBERMANN, *Regular and Stochastic Motion*, Springer Verlag, New York, 1984.
- [14] H. G. SCHUSTER, *Deterministic Chaos: An Introduction*, Physik Verlag, Weinheim, 1984.
- [15] R. P. FEYNMAN, *Rev. Mod. Phys.* **20**, 267 (1948).
- [16] V. I. ARNOLD, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer-Verlag, 1989.
- [17] B. ECKHARDT und D. WINTGEN, Indices in classical mechanics, *J. Phys. A* **24**, 4335 (1991).
- [18] O. MADELUNG, Hrsg., *Landolt Börnstein: Zahlenwerte und Funktionen aus Naturwissenschaften und Technik*, Springer Verlag, Berlin, 1982, Halbleiter, Teilband a: Physik der Elemente der der IV. Gruppe und der III-V Verbindungen.
- [19] M. SUHRKE und P. ROTTER, *Theory of transport properties of semiconductor nanostructures*, Kapitel Transport in systems with chaotic dynamics: Lateral superlattices, S. 249, Chapman and Hall, London, 1998.
- [20] L. ONSAGER, Reciprocal relations in irreversible processes, *Phys. Rev.* **37**, 405 (1931).
- [21] H. B. G. CASIMIR, On Onsager's principle of mesoscopic reversibility, *Rev. Mod. Phys.* **17**, 343 (1945).
- [22] R. KUBO, Statistical-Mechanical Theory of Irreversible Processes. I, *J. Phys. Soc. Jpn.* **12**, 570 (1957).
- [23] R. KUBO, M. TODA und N. HASHITSUME, *Statistical Physics II*, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 2 Auflage, 1991.
- [24] W. H. PRESS, S. A. TEUKOLSKY, W. T. VETTERLING und B. P. FLANERY, *Numerical recipes in C: the art of scientific computing*, Kapitel 16, Cambridge University Press, 2 Auflage, 1992.

-
- [25] W. H. PRESS, S. A. TEUKOLSKY, W. T. VETTERLING und B. P. FLAN-
NERY, *Numerical recipes in C: the art of scientific computing*, Kapitel 7,
Cambridge University Press, 2 Auflage, 1992.
- [26] RALF HENNIG, *Elektronenbahnen im Magnetotransport durch laterale
zweidimensionale Halbleiter-Übergitter*, Dissertation, Universität Regens-
burg, Regensburg, 1999.
- [27] V. L. BONČ-BRUEVIČ und S. G. KALAŠNIKOV, *Halbleiterphysik*, VEB
Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1982.
- [28] D. A. GREENWOOD, Proc. Phys. Soc. (London) **71**, 585 (1958).
- [29] P. STŘEDA, Theory of quantised Hall conductivity in two dimensions, J.
Phys. C **15**, L717–L721 (1982).
- [30] P. ROTTER, *Theoretische Untersuchungen zum Magnetotransport in latera-
len Übergittern*, Dissertation, Universität Regensburg, 1997.
- [31] H. SILBERBAUER, *Quanten-Magnetotransport und Quantenchaos in
Antidot-Übergittern*, Dissertation, Universität Regensburg, 1994.
- [32] H. SILBERBAUER und U. RÖSSLER, Quantum study of magnetotransport
in antidot superlattices, Phys. Rev. B **50**, 11911 (1994).
- [33] H. SILBERBAUER, Magnetic minibands in lateral semiconductor superlatti-
ces, J. Phys. Condens. Matter **4**, 7355 (1992).
- [34] K. RICHTER, Semiclassical Theory of Mesoscopic Quantum Systems, in
Springer Tracts in Modern Physics, Bd. 161, Springer Verlag, Berlin Hei-
delberg New York, 2000.
- [35] M. C. GUTZWILLER, Phase-Integral Approximation in Momentum Space
and the Bound States of an Atom, J. Math. Phys. **8**, 1979 (1967).
- [36] S. C. CREAGH, J. M. ROBBINS und R. G. LITTLEJOHN, Geometrical pro-
perties of Maslov indices in the semiclassical trace formula for the density
of states, Phys. Rev. A **42**, 1907–1922 (1990).
- [37] M. BRACK und R. K. BHADURI, *Semiclassical Physics*, Addison-Wesley
Publishing Company, Reading, Massachusetts, 1997.
- [38] M. C. GUTZWILLER, Energy Spectrum According to Classical Mechanics,
J. Math. Phys. **11**, 1791 (1970).

- [39] M. C. GUTZWILLER, Periodic Orbits and Classical Quantization Conditions, *J. Math. Phys.* **12**, 343 (1971).
- [40] S. C. CREAGH und R. G. LITTLEJOHN, Semiclassical trace formulas in the presence of continuous symmetries, *Phys. Rev. A* **44**, 836 (1991).
- [41] S. C. CREAGH und R. G. LITTLEJOHN, Semiclassical trace formulae for systems with non-Abelian symmetry, *J. Phys. A* **25**, 1643 (1992).
- [42] M. BERRY und M. TABOR, Closed orbits and the regular bound spectrum, *Proc. R. Soc. Lond. A* **349**, 101 (1976).
- [43] M. BERRY und M. TABOR, Calculating the bound spectrum by path summation in action-angle variables, *J. Phys. A* **10**, 371 (1977).
- [44] R. BALIAN und C. BLOCH, Distribution of eigenfrequencies for the wave equation in a finite domain, *Ann. Phys.* **69**, 76 (1972).
- [45] K. RICHTER, D. ULLMO und R. A. JALABERT, Orbital magnetism in the ballistic regime: geometrical effects, *Phys. Rep.* **276**, 1 (1996).
- [46] S. C. CREAGH, Trace Formula for Broken Symmetry, *Ann. Phys.* **248**, 60 (1996).
- [47] T. ANDO, A. B. FOWLER und F. STERN, Electronic properties of 2D systems, *Rev. Mod. Phys.* **54**, 437 (1982).
- [48] K. PLOOG, Molecular beam epitaxy of artificially layered III-V semiconductors on an atomic scale, in *Physics and Applications of Quantum Wells and Superlattices. Proceedings of a NATO Advanced Study Institute.*, Hrsg. E. E. MENDEZ und K. VON KLITZING, Bd. 170, S. 43, New York, 1987, Plenum Press.
- [49] L. PFEIFFER, K. W. WEST, H. L. STORMER und K. W. BALDWIN, Electron mobilities exceeding 10^7 cm²/Vs in modulation-doped GaAs, *Appl. Phys. Lett.* **55**, 1888 (1989).
- [50] P. CVITANOVIĆ, R. ARTUSO, R. MAINIERI, G. TANNER und G. VATTAY, *Classical and Quantum Chaos*, 2001, www.nbi.dk/ChaosBook/.
- [51] G. MÜLLER, D. WEISS, K. VON KLITZING, K. PLOOG, H. NICKEL, W. SCHLAPP und R. LÖSCH, Confinement-potential tuning: From nonlocal to local transport, *Phys. Rev. B* **46**, 4336 (1992).

- [52] D. WEISS, K. VON KLITZING, K. PLOOG und G. WEIMANN, Magnetoresistance Oscillations in a Two-Dimensional Electron Gas Induced by a Submicrometer Periodic Potential, *Europhys. Lett.* **8**, 179 (1989).
- [53] R. W. WINKLER, J. P. KOTTHAUS und K. PLOOG, Landau-Band Conductivity in a Two-Dimensional Electron System Modulated by an Artificial One-Dimensional Superlattice Potential, *Phys. Rev. Lett.* **62**, 1177 (1989).
- [54] C. W. J. BEENAKER, Guiding-Center-Drift Resonance in a Periodically Modulated Two-Dimensional Electron Gas, *Phys. Rev. Lett.* **62**, 2020–2023 (1989).
- [55] C. ZHANG und R. R. GERHARDTS, Theory of magnetotransport in two-dimensional electron systems with unidirectional periodic modulation, *Phys. Rev. B* **41**, 12850 (1990).
- [56] A. LORKE, J. P. KOTTHAUS und K. PLOOG, Magnetotransport in two-dimensional lateral superlattices, *Phys. Rev. B* **44**, 3447 (1991).
- [57] E. M. BASKIN, G. M. GUSEV, Z. D. KVON, A. G. POGOSOV und M. V. ENTIN, Stochastic dynamics of 2D electrons in a periodic lattice of antidots, *Pis'ma Zh. Eksp. Theo. Fiz* **55**, 649–652 (1992), *JETP Lett.* **55** (1992) 678.
- [58] K. ENSSLIN, S. SASA, T. DERUELLE und P. M. PETROFF, Anisotropic electron transport through a rectangular antidot lattice, *Surf. Sci.* **263**, 319–323 (1992).
- [59] R. SCHUSTER, K. ENSSLIN und J. P. KOTTHAUS, Selective probing of ballistic electron orbits in rectangular antidot lattices, *Phys. Rev. B* **47**, 6843–6846 (1993).
- [60] J. TAKAHARA, A. NOMURA, K. GAMO, S. TAKAOKA, K. MURASE und H. AHMED, Magnetotransport in Hexagonal and Rectangular Antidot Lattices, *Jpn. J. Appl. Phys.* **34**, 4325–4328 (1995).
- [61] K. TSUKAGOSHI, M. HARAGUCHI, K. OTO, S. TAKAOKA, K. MURASE und K. GAMO, Current-Direction-Dependent Commensurate Oscillations in GaAs/AlGaAs Antidot Superlattice, *Jpn. J. Appl. Phys.* **34**, 4335–4337 (1995).
- [62] K. TSUKAGOSHI, M. HARAGUCHI, S. TAKAOKA und K. MURASE, On the Mechanism of Commensurability Oscillations in Anisotropic Antidot Lattices, *J. Phys. Soc. Jpn.* **65**, 811–817 (1996).

- [63] S. LÜTHI, T. VANCURA, K. ENSSLIN, R. SCHUSTER, G. BÖHM und W. KLEIN, Electron Trajectories in Rectangular Antidot Superlattices, *Phys. Rev. B* **55**, 13088 (1997).
- [64] R. SCHUSTER, K. ENSSLIN, J.P. KOTTHAUS, G. BÖHM und W. KLEIN, Classical and quantum transport in rectangular antidot superlattices, *Phys. Rev. B* **55**, 2237 (1997).
- [65] R. NEUDERT, P. ROTTER, U. RÖSSLER und M. SUHRKE, Magnetotransport in rectangular antidot superlattices, *Phys. Rev. B* **55**, 2242–2248 (1997).
- [66] R. SCHUSTER, G. ERNST, K. ENSSLIN und M. ENTIN, Experimental characterisation of electron trajectories in antidot lattices, *Phys. Rev. B* **50**, 8090–8093 (1994).
- [67] T. NAGAO, Effect of Anisotropy on Magnetotransport through Antidot Lattices, *J. Phys. Soc. Jpn.* **64**, 4097–4100 (1995).
- [68] J. RYCHEN, T. VANČURA, T. HEINZEL, R. SCHUSTER und K. ENSSLIN, Commensurability oscillations of rectangular antidot arrays: A classical diffusion model, *Phys. Rev. B* **58**, 3568–3571 (1998).
- [69] JOACHIM BLASCHKE, *Semiclassical approximations beyond the leading order in \hbar* , Dissertation, Universität Regensburg, Regensburg, 1999.
- [70] J. ROBBINS, Diskrete symmetries in periodic orbit theory, *Phys. Rev. A* **40**, 2128 (1989).
- [71] M. LANGENBUCH, Private Mitteilung, Institut für theoretische Physik, Universität Regensburg, 2001.
- [72] TILL SCHLÖSSER, *Quantentransport in lateralen Übergittern*, Dissertation, Ludwig-Maximilians-Universität München, 1995.
- [73] T. SCHLÖSSER, K. ENSSLIN, J. P. KOTTHAUS und M. HOLLAND, Interplay of Landau band width and band separation in a square lateral superlattice, *Surf. Sci.* **361/362**, 847 (1996).
- [74] M. ZITZLSPERGER, *Kommensurabilitätsexperimente mit GaAs(331)A-Lochgasen*, Dissertation, Universität Regensburg, 2000.
- [75] A. G. DAVIES, J. E. F. FROST, D. A. RITCHIE, D. C. PEACOCK, R. NEWBURY, E. H. LINFIELD, M. PEPPER und G. A. C. JONES, The growth and physics of high mobility two-dimensional hole gases, *J. Cryst. Growth* **111**, 318 (1991).

-
- [76] R. WINKLER, Private Mitteilung, Universität Erlangen, 2000.
- [77] D. A. BROIDO und L. J. SHAM, Effective masses of holes at GaAs-AlGaAs heterojunctions, *Phys. Rev. B* **31**, 888–892 (1985).
- [78] K. HESS, D. BIMBERG, N. O. LIPARI, J. U. FISCHBACH und M. ALTARELLI, in *Proceedings of the XIII International Conference on the Physics of Semiconductors, Rome, 1976*, Hrsg. F. G. FUMI, S. 142, (North-Holland, Amsterdam, 1976).
- [79] L. ONSAGER, Interpretation of the de Haas-van Alphen Effect, *Philos. Mag.* **43**, 1006–1008 (1952).
- [80] L. D. LANDAU und E. M. LIFSCHITZ, *Lehrbuch der theoretischen Physik, Band IX: Statistische Physik, Teil 2*, Akademie-Verlag, Berlin, 1980.
- [81] J. M. ZIMAN, *Electrons and Phonons: The Theory of Transport Phenomena in Solids*, The International Series of Monographs on Physics, Oxford Clarendon Press, Oxford, 1967.
- [82] J. M. ZIMAN, *Principles of the Theory of Solids*, Cambridge University Press, Cambridge, 1969.
- [83] W. SHOKLEY, *Phys. Rev.* **79**, 191 (1950).
- [84] K. ENSSLIN und P. M. PETROFF, Magnetotransport through an antidot lattice in GaAs-Al_xGa_{1-x}As heterostructures, *Phys. Rev. B* **41**, 12307–12310 (1990).

Zu guter Letzt...

...habe ich die schöne Gelegenheit, mich endlich mal bei all denen zu bedanken, die mich und meine Arbeit in den letzten Jahren begleitet und unterstützt haben:

- Prof. Dr. Ulrich Rößler, der mich in seine Arbeitsgruppe aufgenommen hat, obwohl ich als Experimentalphysiker keinerlei Vorbildung in der Theorie der Halbleiter besaß. Er hat mich auch in Durststrecken stets motiviert und dafür gesorgt, daß ich mich unbelastet von organisatorischen Aufgaben ganz der Forschung widmen konnte. Er hatte sowohl wissenschaftlich als auch privat immer ein offenes Ohr für mich.
- Meinem Doktorvater Priv. Doz. Dr. Michael Suhrke, der mir mit seinem fundierten und geradezu enzyklopädischem Wissen über Magnetotransport oft geholfen hat. Seine Bereitschaft zu ausführlichen Diskussionen und seine freundschaftliche Art war eine der Grundlagen für diese ebenso ergiebige wie angenehme Schaffensperiode.
- Prof. Dr. Klaus Richter für sein Interesse an meiner Arbeit und die stete Diskussionsbereitschaft.
- Michael Zitzlsperger für sein tolles Experiment mit Löchern.
- Ralf Hennig, dem Mann aus dem Norden, der an die Antikorrelation der Körpergröße mit dem Anspruch eines Promotionsthemas glaubte.
- Jochen Schöllmann, dem Mathematiker mit Herz und einem gut gefüllten Weinkeller.
- Christian Amann, mit dem es stets eine Freude war, über nichtlineare Dynamik, Dresdner Bier und ungelöste Rätsel zu diskutieren.
- Joachim Blaschke, der mir über so manche numerische Hürde der periodischen Bahnen half.
- Oliver Steffens für viele interessante Diskussionen und so manchen guten Wein.

- Bernhard Steininger, der mich immer wieder mal daran erinnerte, daß ich meine Diss' noch abgeben muß.
- Meinen Zimmerkollegen: Karin Schmalzl und Markus Zöfl
- Angela Reisser, der guten Seele des Lehrstuhls, um die uns zu Recht viele beneiden.
- Fritz Wunsch, Alexander Dvořák und Stefan Tausendpfund für ein zuverlässig laufendes Computernetz und die engagierte Pflege von System und Software.
- Den Korrekturlesern, die das Vergnügen hatten, mein Manuskript zu durchforsten: Michael Langenbuch, Josef Kainz und Jürgen Fritsch.

Am Ende bleibt mir dann nur noch dem Menschen zu danken, der stets an mich geglaubt und mich immer moralisch unterstützt hat: Simone.