Bilder von zweidimensionalen Galoisdarstellungen zu Motiven mit Koeffizienten in einem Zahlkörper E

DISSERTATION ZUR ERLANGUNG DES DOKTORGRADES
DER NATURWISSENSCHAFTEN (DR. RER. NAT.) DER
MATHEMATISCHEN FAKULTÄT DER UNIVERSITÄT REGENSBURG

vorgelegt von

Kirsten Schneider
aus Wuppertal

2002

Promotionsgesuch eingereicht am: 25. Januar 2002
Die Arbeit wurde angeleitet von: Prof. Dr. Uwe Jannsen
Prüfungsausschuß: Prof. Dr. G. Tamme, Prof. Dr. U. Jannsen,
Prof. Dr. K. Künnemannn, Prof. Dr. W. Hackenbroch

Einleitung

Die Galoisdarstellungen, die wir in dieser Arbeit betrachten, sind genauer ℓ-adische (Galois-)Darstellungen zu einem Körper K. Das sind stetige Homomorphismen

$$\varphi_\ell \colon G_K \longrightarrow \mathrm{Aut}(V_\ell)$$

von der absoluten Galoisgruppe $G_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ von K, versehen mit der Krulltopologie, in die Automorphismengruppe eines endlichdimensionalen $\mathbb{Q}_\ell$-Vektorraums V_ℓ. Hier bezeichne $\overline{K}$ einen algebraischen Abschluß von K. Zu jeder projektiven Varietät über einem Körper K treten solche Darstellungen als interessante Invarianten auf: für jede Primzahl $\ell \neq \mathrm{char} K$ existiert die ℓ-adische Kohomologie $H_\ell(X) = H^*_{ét}(X \times_K \overline{K}, \mathbb{Q}_\ell)$, die eine stetige G_K-Operation trägt. Zur Wichtigkeit dieser Darstellungen denke man nur etwa an Wiles Beweis der Fermatschen Vermutung, wo ja gerade die Eigenschaften der zweidimensionalen ℓ-adischen Darstellungen zu elliptischen Kurven (und zu Modulformen) ganz entscheidend sind.
Sind die Varietäten insbesondere über einem Zahlkörper definiert, so erhält man für jede Primzahl ℓ eine ℓ-adische Darstellung, also ein ganzes System

$$(\varphi_\ell \colon G_K \longrightarrow \mathrm{Aut}(V_\ell))_{\ell \in P}$$

von Darstellungen über die Menge der Primzahlen P.

Die vorliegende Arbeit schließt direkt an meine Diplomarbeit „Zweidimensionale Motivische Galoisdarstellungen“ an. Motivation damals war ein Resultat von Serre gerade über solche Systeme ℓ-adischer Darstellungen, nämlich solcher zu elliptischen Kurven: Sei $\mathcal{E}$ eine elliptische Kurve über einem Zahlkörper K, und für jede Primzahl ℓ bezeichne $T_\ell(\mathcal{E})$ den Tate-Modul von $\mathcal{E}$, also den projektiven Limes $\varprojlim \mathcal{E}[\ell^n]$ der Gruppen der ℓ^n-Torsionspunkte von $\mathcal{E}$ über K. Die Operation der absoluten Galoisgruppe G_K auf den ℓ^n-Torsionspunkten definiert einen stetigen Homomorphismus $\varphi_\ell \colon G_K \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}_\ell} T_\ell(\mathcal{E}) \simeq \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_\ell)$. Dann zeigt Serre:

Theorem (Serre, [Se72], Th. 3). *Wenn $\mathcal{E}$ keine komplexe Multiplikation hat, ist $\varphi_\ell \colon G_K \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}_\ell} T_\ell(\mathcal{E})$ für fast alle Primzahlen ℓ surjektiv.*

Der Fall, daß die elliptische Kurve komplexe Multiplikation hat (d.h. daß der Ring der $\overline{K}$-Endomorphismen vom Rang 2 über $\mathbb{Z}$ ist), war bereits bekannt. Dieser Fall tritt nämlich genau dann auf, wenn die Darstellungen φ_ℓ alle abelsch sind. Und das ist wiederum äquivalent dazu, daß die φ_ℓ zu einem algebraischen Heckecharakter χ über K assoziiert sind. Dabei ist ein algebraischer Heckecharakter ein spezieller Homomorphismus von der Gruppe der zum zugehörigen Führer teilerfremden Ideale von K in die multiplikative Gruppe eines weiteren Zahlkörpers. Es sei hier noch erwähnt, daß $T_\ell(\mathcal{E}) \otimes \mathbb{Q}_\ell$ dual zur ersten ℓ-adischen Kohomologie der elliptischen Kurve ist, also auch dieses System „kohomologisch“ ist.

Zentral wichtig für solche „kohomologischen“ ℓ-adischen Systeme ist der Begriff des Frobenius. Darstellungen zu glatten, projektiven Varietäten sind nämlich immer außerhalb der Stellenmenge S schlechter Reduktion unverzweigt, d.h. für jede endliche Stelle v von K, die nicht in S und nicht über ℓ liegt, hat jede zugehörige Trägheitsgruppe I_v unter φ_ℓ triviales Bild. Ist $Z_v \supset I_v$ Zerlegungsgruppe zu v, so faktorisiert also $\varphi_\ell|_{Z_v}$ über $Z_v/I_v \simeq G_{\kappa(v)}$, wenn $\kappa(v)$ der Restklassenkörper von K bei v ist. Deshalb ist der Frobenius $F_{\varphi_\ell,v}$ der Darstellung zur Stelle v als Konjugationsklasse wohldefiniert.

Im allgemeinen ist man auch an gewissen „Teilen“, also Unterdarstellungen, solcher kohomologischer Darstellungen von Varietäten interessiert, was zum Begriff der Motive führt. Auf diese Weise kann man zum Beispiel Modulformen zweidimensionale ℓ-adische Darstellungen zuordnen. Um nun eine möglichst allgemeine Situation zu erfassen, wurden in meiner Diplomarbeit die Resultate von Serre auf „motivische“ Systeme zweidimensionaler Galoisdarstellungen über $\mathbb{Q}$ verallgemeinert: Dabei wollen wir Systeme $(\phi_\ell\colon G_K \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_\ell))_{\ell\in P}$ zweidimensionaler ℓ-adischer Darstellungen als motivisch bezeichnen, wenn sie die folgenden Eigenschaften erfüllen:

(i) Das System ist $\mathbb{Q}$-rational und strikt kompatibel, d.h. es gibt eine endliche Teilmenge $S \subset \Sigma_K$ der endlichen Stellen von K und eine Familie $(P_v(T))_{v\in\Sigma_k\setminus S}$ von Polynomen mit Koeffizienten in $\mathbb{Q}$, so daß für jedes ϕ_ℓ gilt: ist $v \notin S$ eine Stelle von K, die nicht über ℓ liegt, so ist ϕ_ℓ bei v unverzweigt und für einen zugehörigen Frobenius $F_{\phi_\ell,v}$ ist $\det(1 - TF_{\phi_\ell,v}) = P_v(T)$.

(ii) Es existiert eine endliche Körpererweiterung $K'|K$, so daß für jede Stelle v von K', die nicht über ℓ liegt, die Einschränkung $\phi_\ell|_{G_{K'}}$ bei v semistabil ist, d.h., daß das Bild jeder Trägheitsgruppe zu v unipotent ist.

(iii) Für fast alle ℓ sind die Darstellungen ϕ_ℓ kristallin mit Hodge-Tate Gewichten d_1, d_2, die unabhängig von ℓ sind.

(iv) Für alle ℓ sind die Darstellungen ϕ_ℓ vom Hodge-Tate Typ.

Statt *(iii)* wird auch eine schwächere Version benutzt:

(iii') Sei für jede Primzahl ℓ ein $v \in \Sigma_K$ fixiert mit $v|\ell$ und sei T_ℓ ein I_v-invariantes Gitter für ϕ_ℓ und $W_\ell = \oplus_{i=1}^r W_\ell^i$ die Verhalbeinfachung der I_v-Darstellung $T_\ell/\ell T_\ell$. Dann wird die Operation der Trägheitsgruppe auf den W_ℓ^i durch

Produkte von Potenzen von fundamentalen Charakteren gegeben, deren Exponenten unabhängig von ℓ betraglich beschränkt sind. (Zur genauen Formulierung dieser Eigenschaft vergleiche Abschnitt 3.1.)

In meiner Diplomarbeit konnte nun das folgende Theorem gezeigt werden:

Theorem ([Mu98] Cor. A). *Sei $(\phi_\ell\colon G_K \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_\ell))_{\ell \in P}$ ein motivisches System von zweidimensionalen Galoisdarstellungen über $\mathbb{Q}$.*
Dann gilt **entweder***:*

(i) für fast alle Primzahlen $\ell \in P$ ist

$$\phi_\ell(G_K) \supset B_{\ell,d_1+d_2} := \{A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_\ell) |\det(A) \in ({\mathbb{Z}_\ell}^*)^{d_1+d_2}\}$$

und es gibt eine quadratische Körpererweiterung $K'|K$, so daß dann für fast alle Primzahlen

$$\phi_\ell(G_{K'}) = B_{\ell,d_1+d_2}$$

ist, **oder**

(ii) das System ist potentiell abelsch, was gerade bedeutet, daß es über einer endlichen Erweiterung $K''|K$ zu algebraischen Heckecharakteren assoziiert ist.

Die Motive, die wir bei unseren Darstellungen im Sinn haben, sind Grothendieck-Motive über einem Zahlkörper K, d.h. Motive, die zu glatten, projektiven Varietäten über K assoziiert sind und deren Morphismen durch Korrespondenzen modulo homologischer Äquivalenz gegeben sind. Daß die ℓ-adischen Realisierungen von Grothendieck-Motiven „motivische Systeme“ über $\mathbb{Q}$ bilden ist wohlbekannt, wurde aber auch in der Diplomarbeit skizziert.

Als Verallgemeinerung kann man jetzt glatte, projektive Varietäten X betrachten, auf deren Kohomologie ein Zahlkörper E operiert. Diese Struktur erhält man durch gewisse Automorphismen oder Korrespondenzen, d.h. algebraische Zykel. Dann ist die Kohomologie $H_\ell(X)$ ein freier $E \otimes \mathbb{Q}_\ell$-Modul. Wegen $E \otimes \mathbb{Q}_\ell \simeq \prod_{\lambda|\ell} E_\lambda$ mit den Vervollständigungen E_λ von E bei den Stellen λ von E, die über ℓ liegen, gilt

$$H_\ell(X) \simeq \prod_{\lambda|\ell} H_\lambda(X)$$

mit $H_\lambda(X) := H_\ell(X) \otimes_{E\otimes\mathbb{Q}_\ell} E_\lambda$. Da die Operationen von E und G_K vertauschen, erhält man ein System λ-adischer Darstellungen

$$(\varphi_\lambda\colon G_K \longrightarrow \mathrm{Aut}(V_\lambda))_{\lambda \in \Sigma_E}$$

mit endlichdimensionalen E_λ-Vektorräumen V_λ.

Diese Situation tritt beispielsweise bei abelsche Varietäten mit Multiplikation durch einen total reellen Zahlkörper E auf und wird von Ribet in [Ri76] betrachtet. Ist X eine abelsche Varietät über dem Zahlkörper K der Dimension d und ist E ein total reeller Zahlkörper von Grad d, so bedeutet reelle Multiplikation mit E gerade, daß es eine Einbettung

$$E \subset \mathbb{Q} \otimes \mathrm{End}_K(X)$$

gibt. Für jede Primzahl ℓ hat man durch die Operation von G_K auf den Tate-Moduln $T_\ell(X)$ eine Darstellung $\varphi_\ell \colon G_K \to \mathrm{Aut}(T_\ell(X))$. Sei nun $\mathcal{O}$ der Ring der ganzen Zahlen von E. Über die Reduktion $\bar{\varphi}_\ell \colon G_K \to \mathrm{Aut}(T_\ell(X) \otimes \mathbb{Z}_\ell/\ell\mathbb{Z}_\ell)$ erhält man für fast alle Primzahlen Darstellungen

$$\bar{\varphi}_\ell \colon G_K \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}/\ell\mathcal{O}).$$

Sei jetzt vorausgesetzt, daß $E = \mathbb{Q} \otimes \mathrm{End}_{\mathbb{C}} X$ ist. Dies ist eine Verallgemeinerung des Falls, daß wir eine elliptische Kurve ohne komplexe Multiplikation haben. Dann zeigt Ribet für den Fall, daß die abelsche Varietät X und ihre Endomorphismen schon über $\mathbb{Q}$ definiert sind, oder daß X nicht überall potentiell gute Reduktion hat: für fast alle $\ell \in P$ gilt:

$$\bar{\varphi}_\ell(G_K) = \{A \in \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}/\ell\mathcal{O}) \mid \det(A) \in {\mathbb{F}_\ell}^*\}.$$

Auch Systeme λ-adischer Darstellungen zu Modulformen mit Koeffizienten in einem Zahlkörper E sind hier Beispiele. Diese sind ebenfalls ausführlich von Ribet behandelt worden. Sei k eine positive gerade Zahl und sei f eine Spitzenform vom Gewicht k, die eine normalisierte Eigenform für alle Heckeoperatoren ist. Dann gibt es einen total reellen Zahlkörper E und durch Deligne ein zur Modulform f assoziiertes System $(\varphi_\lambda \colon G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(E_\lambda))_{\lambda \in \Sigma_E}$ ganzer λ-adischer Darstellungen.

Theorem (Ribet [Ri75], Th. (5.1)). *Für fast alle $\ell \in P$ gilt*

$$\varphi_\ell(G_{\mathbb{Q}}) := (\textstyle\prod_{\lambda|\ell} \varphi_\lambda)(G_{\mathbb{Q}}) = \{A \in \prod_{\lambda|\ell} \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_\lambda^E) \mid \det(A) \in ({\mathbb{Z}_\ell}^*)^{k-1}\}.$$

Um die Aussagen wieder so allgemein wie möglich zu machen, gehen wir in unserer Arbeit von motivischen Systemen zweidimensionaler Galoisdarstellungen mit Koeffizienten in irgendeinem Zahlkörper E aus: Dabei wollen wir jetzt Systeme $(\phi_\lambda \colon G_K \to \mathrm{GL}_2(E_\lambda))_{\lambda \in \Sigma_E}$ zweidimensionaler λ-adischer Darstellungen motivisch nennen, wenn sie die folgenden Eigenschaften erfüllen:

$(i)^E$ Das System ist E-rational und strikt kompatibel.

$(ii)^E$ Es existiert eine endliche Körpererweiterung $K'|K$, so daß für jede Stelle v von K', die nicht über ℓ liegt, gilt, daß $\phi_\ell|_{G_{K'}}$ bei v semistabil ist.

$(iii)^E$ Sei für jede Primzahl ℓ ein $v \in \Sigma_K$ fixiert mit $v|\ell$ und für $\lambda \in \Sigma_E$, $\lambda|\ell$, sei T_λ ein I_v-invariantes Gitter für ϕ_λ und $W_\lambda = \oplus_{i=1}^r W_\lambda^i$ die Verhalbeinfachung der I_v-Darstellung $T_\lambda/\lambda T_\lambda$. Dann wird die Operation der Trägheitsgruppe auf den W_λ^i durch Produkte von Potenzen von fundamentalen Charakteren gegeben, deren Exponenten unabhängig von ℓ betraglich beschränkt sind. (Zur genauen Formulierung vergleiche Abschnitt 3.2.)

(iv) Für alle $\lambda|\ell$ sind die Darstellungen ϕ_λ als $\mathbb{Q}_\ell$-Darstellungen vom Hodge-Tate Typ.

Bei unseren motivischen Galoisdarstellungen über E denken wir insbesondere an Grothendieck-Motive mit Koeffizienten in E. Die ℓ-adischen Realisierungen V_ℓ solcher Motive definieren durch einen Isomorphismus von G_K-Moduln $V_\ell \simeq \oplus_{\lambda|\ell} V_\lambda$ ein System von λ-adischen Darstellungen. Wir zeigen:

Proposition (2). *$(V_\lambda)_{\lambda\in\Sigma_E}$ bildet ein motivisches System von Galoisdarstellungen über E.*

Eine wichtige Rolle für die Formulierung und den Beweis unserer Resultate spielt der Frobeniuskörper F_K eines strikt-kompatiblen Systems: dies ist der durch die Spuren der Polynome $(P_v)_{v\in\Sigma_K\setminus S}$ über $\mathbb{Q}$ erzeugt Zahlkörper. Für jede endliche Körpererweiterung $K'|K$ werde der Frobeniuskörper vom auf die Galoisgruppe $G_{K'}$ eingeschränkten System mit $F_{K'}$ bezeichnet. Den kleinsten vorkommenden Zahlkörper $F_{K'}$ nennen wir den stabilen Frobeniuskörper von $(\phi_\lambda)_\lambda$. Wir beweisen damit als Hauptresultat der Arbeit:

Satz (42). *Sei $(\phi_\lambda\colon G_K \to \mathrm{GL}_2(E_\lambda))_{\lambda\in\Sigma_E}$ ein motivisches System von zweidimensionalen Galoisdarstellungen mit stabilem Frobeniuskörper F. Es gebe ein $d \in \mathbb{Z}$, so daß für das System der Determinanten gilt*

$$(\det\circ\phi_\lambda\colon G_K \to E_\lambda^*)_{\lambda\in\Sigma_E} = (\chi_{cyc,\lambda}^d\colon G_K \to E_\lambda^*)_{\lambda\in\Sigma_E}.$$

Das System sei nicht potentiell abelsch, also nicht potentiell durch algebraische Heckecharaktere gegeben. Dann gibt es eine endliche Körpererweiterung $K'|K$ vom Exponenten 2, so daß für fast alle $\ell \in P$ gilt: $\phi_\ell(G_{K'}) := (\prod_{\lambda|\ell}\phi_\lambda)(G_{K'})$ ist konjugiert zu

$$\mathcal{B}_{\ell,d}^F := \{A \in \prod_{\lambda|\ell} \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_\lambda^F)|\ \det(A) \in (\mathbb{Z}_\ell{}^*)^d\}.$$

Dabei sei $\chi_{cyc,\lambda}$ der zyklotomische Charakter zu λ. Setzt man etwa E als total reell voraus, so braucht man die Bedingung an die Determinanten nicht zu stellen.

Für den Beweis stellen wir zunächst zwei unterschiedliche Kriterien dafür auf, daß ein motivisches System durch algebraische Heckecharaktere gegeben wird. Das erste ist ein „horizontales“ Kriterium und wird aus einem Satz von Serre über ℓ-adische Systeme hergeleitet, der von Ribet auf λ-adische Systeme verallgemeinert wurde: wenn man an unendlich vielen Stellen eine abelsche Reduktion mod λ der Darstellung hat, wird das System durch Heckecharaktere gegeben. Das „vertikale" Kriterium sagt, daß das System durch Heckecharaktere gegeben wird, wenn für eine Stelle λ von E die λ-adische Darstellung abelsch ist.

Wir können analog zu Ribet ([Ri97], Th. 7.5) auch eine schärfere, adelische Version beweisen: Sei zu einem System λ-adischer Darstellungen $(\varphi_\lambda)_\lambda$ das Produkt über alle φ_λ mit $\varphi\colon G_K \to \prod_\lambda \mathrm{GL}_2(E_\lambda)$ bezeichnet.

Satz (44). *Sei $(\varphi_\lambda\colon G_K \to \mathrm{GL}_2(E_\lambda))_{\lambda\in\Sigma_E}$ ein motivisches System ganzer zweidimensionaler Galoisdarstellungen mit stabilem Frobeniuskörper E. Mit einem $d \in \mathbb{Z}$ gelte $(\det\circ\varphi_\lambda)_{\lambda\in\Sigma_E} = (\chi^d_{cyc,\lambda})_{\lambda\in\Sigma_E}$. Das System sei nicht potentiell abelsch, also nicht potentiell durch Heckecharaktere gegeben. Dann ist*

$$\varphi(G_K) \subset \prod_{\ell\in P} \mathcal{B}^E_{\ell,d}$$

eine offene Untergruppe.

Für den Beweis können wir nicht Ribets Methode in [Ri97] nutzen, da bei uns d gerade sein darf.
Wir beweisen auch eine allgemeinere Version des Theorems, in der wir nicht voraussetzen, daß der stabile Frobeniuskörper bereits E ist. Dann können wir aber nur eine Aussage über das Produkt über fast allen Darstellungen φ_λ machen. Eine Aussage, die wirklich alle Darstellungen des motivischen Systems betrifft, können wir über die Liealgebren $\mathfrak{g}_\lambda$ machen, die zu den Bildern $\varphi_\lambda(G_K)$ gehören.

Satz (53). *Es sei ein motivisches System $(\phi_\lambda\colon G_K \to \mathrm{GL}_2(E_\lambda))_{\lambda\in\Sigma_E}$ von zweidimensionalen Galoisdarstellungen gegeben. Der stabile Frobeniuskörper sei F und mit einem $d \in \mathbb{Z}$ gelte $(\det\circ\phi_\lambda)_{\lambda\in\Sigma_E} = (\chi^d_{cyc,\lambda})_{\lambda\in\Sigma_E}$. Das System sei nicht potentiell abelsch, also nicht potentiell durch algebraische Heckecharaktere gegeben. Dann gibt es für jedes $\lambda \in \Sigma_E$ eine Quaternionenalgebra H_λ über F_λ, so daß gilt*

$$\mathfrak{g}_\lambda \simeq (H_\lambda)_0 \qquad \text{falls } d = 0$$

und

$$\mathfrak{g}_\lambda \simeq (H_\lambda)_0 \oplus \mathbb{Q}_\ell \qquad \text{falls } d \neq 0.$$

Dabei sei $(H_\lambda)_0$ der Spur-Null-Anteil der Quaternionenalgebra.

Beispiele für die Anwendung unserer Resultate, die über die Ergebnisse von Ribet hinausgehen, sind zum einen abelsche Varietäten mit total reeller Multiplikation, die nicht die von Ribet geforderten Voraussetzungen erfüllen, also deren Endomorphismen nicht schon über $\mathbb{Q}$ definiert sind, oder die überall potentiell gute Reduktion haben.

Eine andere Anwendung sind zweidimensionale Galoisdarstellungen zu Hilbert-Modulformen. In [BR] erhalten Blasius und Rogawski zu einer holomorphen Hilbert-Modulform π über einem total reellen Zahlkörper F ein strikt kompatibles System zweidimensionaler λ-adischer Darstellungen über einem Zahlkörper E

$$(\varphi_\lambda \colon G_F \longrightarrow \mathrm{GL}_2(E_\lambda))_{\lambda\in\Sigma_E}.$$

Unter der Voraussetzung, daß die Gewichte $k(\sigma)$ von π zu den archimedischen Stellen σ von F alle ≥ 2 sind, für mindestens eine Stelle > 2 und sie alle kongruent modulo 2 sind, zeigen Blasius und Rogawski, daß es zu jeder imaginärquadratischen Körpererweiterung $F'|F$ ein Grothendieck-Motiv über F' gibt, so daß das System der Einschränkungen

$$(\varphi_\lambda|_{G_{F'}})_\lambda$$

die zu diesem Motiv gehörigen λ-adischen Realisierungen sind. Dies bedeutet, daß (eventuell nach einer endlichen Körpererweiterung $K'|F$) die Darstellungen $(\varphi_\lambda \colon G_F \longrightarrow \mathrm{GL}_2(E_\lambda))_\lambda$ zu den von uns untersuchten Systemen gehören: da die Determinante ein strikt kompatibles, abelsches System bildet, wird sie nach einem Theorem von Henniart (vergleiche etwa [Sch], Prop. I 1.4) durch einen Heckecharakter gegeben und ist also, da F total reell ist (vergleiche unser Lemma 9), nach einer endlichen Körpererweiterung eine Potenz des zyklotomischen Charakters.

Über die ℓ-adischen Darstellungen zu Motiven gibt es einige Vermutungen; eine Übersicht wird von Serre in [Se94] gegeben. Sei M ein Grothendieck-Motiv über K mit Koeffizienten in einem Zahlkörper E, dessen ℓ-adische Realisierungen V_ℓ gerade $2[E:\mathbb{Q}]$-dimensional sind.

1) Es wird vermutet, daß die V_ℓ immer halbeinfache G_K-Moduln sind. Dies wurde von Faltings für die zu abelschen Varietäten gehörigen G_K-Moduln V_ℓ gezeigt. Davon abgesehen ist über diese Vermutung sehr wenig bekannt. Wir erhalten:

Corollar (aus Satz 33). *Wird das System der G_K-Moduln V_ℓ nicht schon potentiell durch Heckecharaktere gegeben, so sind alle V_ℓ einfache G_K-Moduln.*

2) Ist d das Gewicht des Motivs, so sagt eine andere Vermutung, daß für fast alle $\ell \in P$ die Homothetien $(\mathbb{Z}_\ell^*)^d$ im Bild von G_K in den Automorphismen enthalten sind. Auch über diese Vermutung ist noch nicht viel bekannt. Falls das Motiv eine abelsche Varietät ist, ist diese äquivalent zu der Vermutung von Lang, daß das Bild $\varphi(G_K) = (\prod \varphi_\ell)(G_K)$ eine offene Untergruppe von $\prod_\ell \mathbb{Z}_\ell^*$ enthält. Serre konnte die schwächere Aussage zeigen, daß ein ganze Zahl c existiert, so daß $\varphi(G_K)$ die c-ten Potenzen $\prod_\ell (\mathbb{Z}_\ell^*)^c$ enthält. Wintenberger zeigt die

Vermutung von Lang für abelsche Varietäten, die eine Dimension ≤ 4 haben, oder die Mumford-Tate Vermutung erfüllen. Aus Ribets bereits erwähntem Resultat über gewisse abelsche Varietäten mit total reeller Multiplikation folgt für fast alle Primzahlen ℓ, daß die Homothetien ${\mathbb{Z}_\ell}^*$ im Bild $\varphi_\ell(G_K)$ enthalten sind. Wir können für unsere zweidimensionalen motivischen Systeme bestätigen:

Corollar (aus Satz 42). *Wird das motivische System $(\varphi_\ell \colon G_K \to \mathrm{Aut}(V_\ell))_{\ell \in P}$ der ℓ-adischen Darstellungen nicht schon potentiell durch Heckecharaktere gegeben, so sind für fast alle Primzahlen ℓ die Homothetien*

$$({\mathbb{Z}_\ell}^*)^d \subset \varphi_\ell(G_K)$$

im Bild enthalten. Genauer erhält man mit Satz 44 für Systeme, die stabilen Frobeniuskörper E haben, daß $\varphi(G_K)$ eine offene Untergruppe von $\prod_\ell ({\mathbb{Z}_\ell}^*)^d$ enthält.

3) Sei $\mathfrak{g}$ die Liealgebra über $\mathbb{Q}$ zur Mumford-Tate-Gruppe des Motivs. Vermutungsweise gilt dann für jede Primzahl ℓ gerade

$$\mathfrak{g}_\ell \simeq \mathfrak{g} \otimes_\mathbb{Q} \mathbb{Q}_\ell.$$

Wir können beweisen:

Corollar (aus Satz 53). *Wird das motivische System $(\varphi_\ell \colon G_K \to \mathrm{Aut}(V_\ell))_{\ell \in P}$ der ℓ-adischen Darstellungen mit stabilem Frobeniuskörper F nicht schon potentiell durch algebraische Heckecharaktere gegeben, so haben die Liealgebren $\mathfrak{g}_\ell$ alle dieselbe $\mathbb{Q}_\ell$-Dimension. Im Fall $d \neq 0$ gilt für fast alle ℓ*

$$\mathfrak{g}_\ell \simeq (\mathfrak{sl}_2(F) \oplus \mathbb{Q}) \otimes_\mathbb{Q} \mathbb{Q}_\ell,$$

und für alle Primzahlen ℓ sind die $\mathfrak{g}_\ell$ Formen von $(\mathfrak{sl}_2(F) \oplus \mathbb{Q}) \otimes_\mathbb{Q} \mathbb{Q}_\ell$. Im Fall $d = 0$ gilt für fast alle ℓ

$$\mathfrak{g}_\ell \simeq \mathfrak{sl}_2(F) \otimes_\mathbb{Q} \mathbb{Q}_\ell,$$

und für alle Primzahlen ℓ sind die $\mathfrak{g}_\ell$ Formen von $\mathfrak{sl}_2(F) \otimes_\mathbb{Q} \mathbb{Q}_\ell$.

Wir kommen nun zur Inhaltsübersicht: In Paragraph 1 finden sich Notationen und Vorbemerkungen zu einigen Theorien, die später verwendet werden.
In Paragraph 2 wird der allgemeine Begriff der „Kategorie mit Koeffizienten in einem Zahlkörper E“ erläutert. Dabei gibt es zwei Beschreibungen dieser Kategorien, in Delignes Sprechweise „Sprache A“ und „Sprache B“.
In Paragraph 3 geht es um den zentralen Begriff der motivischen Systeme. Hier wird vor allem auch der Beweis gegeben, daß das System der λ-adischen Darstellungen, das zu einem Grothendieck-Motiv mit Koeffizienten in einem Zahlkörper E gehört, tatsächlich ein motivisches System über E ist.

Der 4. Paragraph ist ganz den algebraischen Heckecharakteren gewidmet. Nach der Definition eines Heckecharakters werden grundlegende Eigenschaften bewiesen, die in Schappachers Buch [Sch] vorkommen, aber dort nicht bewiesen werden. Es folgt die Konstruktion des λ-adischen Systems $(\chi_\lambda)_{\lambda\in\Sigma_E}$ zu einem algebraischen Heckecharakter χ und der Beweis, daß dies ein abelsches motivisches System ist. Dann werden die beiden entscheidenden Kriterien dafür hergeleitet, wann ein motivisches System durch Heckecharaktere gegeben wird. Der letzte Abschnitt macht einige Aussagen zu den Systemen der Determinanten von motivischen Systemen, die nach unseren Kriterien immer durch einen algebraischen Heckecharakter gegeben werden.
Im 5. Paragraph wird der Begriff des Frobeniuskörpers eines strikt kompatiblen Systems eingeführt. Der Frobeniuskörper ist ganz entscheidend für die Größe der Bilder.
Der 6. Paragraph beschäftigt sich nun mit den zweidimensionalen motivischen Galoisdarstellungen. Der erste Abschnitt behandelt Systeme, die potentiell durch algebraische Heckecharaktere gegeben sind, und macht unter anderem die Aussage, daß ein solches zweidimensionales motivisches System schon nach einer Körpererweiterung vom Grad 2 abelsch wird, wenn es nicht gerade eines von gewissen Ausnahmedarstellungen ist. Im zweiten Abschnitt zeigen wir, daß ein motivisches System immer schon „fast“ von einem System über seinem Frobeniuskörper kommt. In den nächsten Abschnitten folgen die Hauptresultate: die Sätze über die Größe der Bilder von motivischen zweidimensionalen Systemen, wenn sie nicht durch Heckecharaktere gegeben sind, die Sätze zur adelischen Sichtweise und die Sätze über das Aussehen der Liealgebren.

An dieser Stelle geht mein herzlicher Dank an Prof. Dr. Uwe Jannsen, der stets für mich ansprechbar war, und der zahlreiche ergiebige Gespräche mit mir führte. Vielen Dank auch an Lars Brünjes für endlose mathematische Diskussionen in den letzten Jahren.

Inhaltsverzeichnis

1 Notationen und Vorbemerkungen

1.1 Allgemeine Notationen

Wir wollen in dieser Arbeit die Menge der (rationalen) Primzahlen stets mit P bezeichnen, und zu einem beliebigen Zahlkörper E sei Σ_E die Menge seiner endlichen Stellen. Für eine solche Stelle $\lambda \in \Sigma_E$ sei dann E_λ die Vervollständigung von E bezüglich λ; mit $\mathcal{O}_\lambda$ wollen wir dann den zugehörigen Ring der ganzen Zahlen bezeichenen, $\wp_\lambda$ sei sein maximales Ideal und $\mathbb{F}_\lambda$ der zugehörige Restklassenkörper. Wir wollen außerdem vereinbaren, daß zu einer Stelle, die mit λ bezeichnet wird, die Restklassencharakteristik immer ℓ genannt wird, ohne das wir dies jedes Mal erwähnen müssen. Zu einem beliebigen Körper K sei mit $\overline{K}$ stets ein fixierter algebraischer Abschluß von K bezeichnet. Wie üblich schreiben wir G_K für die absolute Galoisgruppe des Körpers K.

1.2 ℓ-adische und λ-adische Darstellungen

Es seinen K und E Zahlkörper und zu einer Primzahl $\ell \in P$ (bzw. einer Stelle $\lambda \in \Sigma_E$) sei V_ℓ ein endlich-dimensionaler $\mathbb{Q}_\ell$-Vektorraum (bzw. sei V_λ ein endlich-dimensionaler E_λ-Vektorraum). Eine *ℓ-adische Darstellung* von G_K (bzw. eine *λ-adische Darstellung* von G_K) ist ein stetiger Homomorphismus

$$\phi_\ell \colon G_K \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}_\ell}(V_\ell) \;\; (\text{bzw. } \phi_\lambda \colon G_K \to \mathrm{Aut}_{E_\lambda}(V_\lambda)),$$

wobei G_K mit der Krulltopologie und $\mathrm{Aut}(V_\ell)$ (bzw. $\mathrm{Aut}(E_\lambda)$) mit der durch den normierten Vektorraum $\mathrm{End}(V_\ell)$ (bzw. $\mathrm{End}(V_\lambda)$) induzierten Topologie versehen wird. Insbesondere sind ℓ-adische Darstellungen also auch λ-adische Darstellungen mit $E = \mathbb{Q}$; deshalb werden wir folgende Definitionen nur für λ-adische Darstellungen formulieren.
Bezeichne für eine Stelle $v \in \Sigma_K$ und eine Fortsetzung $\overline{v} \in \Sigma_{\overline{K}}$ mit $I_{\overline{v}}$ die zugehörige Trägheitsgruppe in der Zerlegungsgruppe $Z_{\overline{v}}$. Eine λ-adische Darstellung ϕ heißt *unverzweigt bei v*, wenn für $\overline{v}$ (und damit für jede Fortsetzung von v)

$$\phi(I_{\overline{v}}) = \{id\}$$

ist, sonst heißt ϕ bei v *verzweigt*. Wenn die Darstellung bei v unverzweigt ist, faktorisiert die Einschränkung auf die Zerlegungsgruppe $Z_{\overline{v}}$ über $Z_{\overline{v}}/I_{\overline{v}}$; deshalb ist für das Frobeniuselement $F_{\overline{v}} \in Z_{\overline{v}}/I_{\overline{v}}$ das Bild $\phi(F_{\overline{v}})$ definiert; wir bezeichnen es mit $F_{\overline{v},\phi}$ und nennen es den *Frobenius* von $\overline{v}$ in der Darstellung ϕ. Die Konjugationsklasse von $F_{\overline{v},\phi}$ in $\mathrm{Aut}(V_\lambda)$ hängt nur von v ab, und wird mit $F_{v,\phi}$ bezeichnet. Wir nennen

$$P_{v,\phi}(T) := \det(1 - F_{v,\phi}T) \in E_\lambda[T]$$

das *Frobeniuspolynom bei v*. Eine λ-adische Darstellung ϕ heißt E-rational, falls ϕ außerhalb einer endlichen Stellenmenge $S \subset \Sigma_K$ unverzweigt ist, und für alle

$v \in \Sigma_K \setminus S$ das Frobeniuspolynom $P_{v,\phi}$ Koeffizienten in E hat.
Betrachte Familien von Darstellungen: Ein *n-dimensionales System λ-adischer Darstellungen über E* ist eine Familie

$$(\phi_\lambda \colon G_K \to \mathrm{Aut}(V_\lambda))_{\lambda \in \Sigma_E}$$

von λ-adischen Darstellungen, wobei für jede endliche Stelle λ von E das V_λ ein n-dimensionaler E_λ-Vektorraum ist. Sei nun $S_\ell := \{v \in \Sigma_K \mid v|\ell\}$. Ein n-dimensionales System λ-adischer Darstellungen heißt *strikt kompatibel*, wenn alle Darstellungen ϕ_λ E-rational sind, und es eine endliche Stellenmenge $S \subset \Sigma_K$ und eine Familie von Polynomen $(P_v)_{v \in \Sigma_K \setminus S}$ mit Koeffizienten in E gibt, so daß für jede Stelle $\lambda \in \Sigma_E$ und jedes $v \in \Sigma_K \setminus \{S \cup S_\ell\}$ gilt:

$$P_{v,\phi_\lambda} = P_v \in E[T].$$

Das minimale S mit dieser Eigenschaft heißt die *Ausnahmemenge* von $(\phi_\lambda)_\lambda$.
Ein *Gitter* eines endlich-dimensionalen E_λ-Vektorraums V ist ein Unter-$\mathcal{O}_\lambda$-Modul T, der frei von endlichem Rang ist und V über E_λ erzeugt, d.h. man hat $V \simeq T \otimes_{\mathcal{O}_\lambda} E_\lambda$. Aus der Kompaktheit von G_K folgt, daß zu jeder λ-adischen Darstellung $\phi_\lambda \colon G_K \to \mathrm{Aut}(V_\lambda)$ ein unter G_K stabiles Gitter T_λ von V_λ existiert (vgl. beispielsweise [Se68], I-1). Für jedes solche invariante Gitter T_λ erhält man dann eine *ganze* Darstellung von G_K, d.h. eine $\mathcal{O}_\lambda$-Darstellung von G_K, also einen stetigen Homomorphismus

$$\varphi_\lambda \colon G_K \to \mathrm{Aut}_{\mathcal{O}_\lambda}(T_\lambda).$$

Zu diesem invarianten Gitter wird dann in natürlicher Weise $T_\lambda/\lambda T_\lambda$ zu einem $\mathcal{O}_\lambda/\lambda\mathcal{O}_\lambda \simeq \mathbb{F}_\lambda$-Vektorraum und wir erhalten eine $\mathbb{F}_\lambda$-Darstellung

$$(\varphi_\lambda \mod \lambda) \colon G_K \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{F}_\lambda}(T_\lambda/\lambda T_\lambda).$$

Im Allgemeinen ist diese „Reduktion" zu einer λ-adischen Darstellung nicht unabhängig von der Wahl des Gitters T_λ. Wohl aber ist die Verhalbeinfachung wieder unabhängig vom Gitter (das folgt wie im Theorem von Brauer und Nesbitt, beispielsweise in [CR], §82). Deshalb nennen wir zu einer λ-adischen Darstellung ϕ_λ die Verhalbeinfachung $(\varphi_\lambda \mod \lambda)^{ss}$ die *Reduktion* von ϕ_λ und bezeichnen sie mit $\overline{\phi_\lambda}$.

1.3 Motive

Unter algebraischen Motiven wollen wir Motive im Sinne von Grothendieck verstehen, d.h. Motive, die zu glatten, projektiven Varietäten über einem Zahlkörper K (oder auch allgemein einem Körper K) assoziiert sind, und deren Morphismen durch $\mathbb{Q}$-lineare algebraische Zykel modulo homologischer Äquivalenz, etwa zur ℓ-adischen Kohomologie (was bei einem Zahlkörper wegen $\mathrm{char}(K) = 0$ unabhängig von ℓ ist), gegeben sind. Wie in [J] beschrieben, können diese durch Tripel (X, p, n) repräsentiert werden, wobei X eine glatte, projektive Varietät ist, p ein algebraischer Zykel von $X \times X$ modulo homologischer Äquivalenz, der ein Projektor ist (d.h. $p^2 = p$ für die Komposition von Korrespondenzen), und m eine ganze Zahl. Die i-te ℓ-adische Realisierung von (X, p, m) ist dann $pH^{i+2m}_{ét}(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell)(m)$, der m-fache Tate-Twist des Bildes von p, aufgefaßt als Morphismus auf der Kohomologie; dabei ist $\overline{X} := X \times_K \overline{K}$ der Basiswechsel. Die ℓ-adische Realisierung ist die Summe der i-ten ℓ-adischen Realisierungen. Die Galoisoperation von G_K auf der Realisierung ist an fast allen Stellen von K unverzweigt. Wir nennen ein Motiv *rein vom Gewicht d*, wenn alle i-ten ℓ-adischen Realisierungen außer der d-ten verschwinden. Wenn wir uns für die Bilder der zu den ℓ-adischen Realisierungen gehörigen ℓ-adischen Darstellungen interessieren, ist es keine Einschränkung, wenn wir das Motiv als rein vom Gewicht d annehmen.

Lemma 1. *Sei M ein algebraisches Motiv über dem Zahlkörper K mit ℓ-adischen Realisierungen $V_\ell(M)$. Sei v eine Stelle von K, wo die Galoisoperation auf $V_\ell(M)$ unverzweigt ist, und F_v ein zugehöriger Frobenius auf $V_\ell(M)$. Dann gilt für jeden Homomorphismus $F \in \mathrm{End}(M)[F_v]$ auf $V_\ell(M)$:*

$$P_\ell(T) := \det(1 - FT) \in \mathbb{Q}[T]$$

und P_ℓ ist unabhängig von ℓ.

Beweisskizze. Sei nun zunächst $M = (X, id, 0)$ und die glatte, projektive Varietät X sei zur Vereinfachung irreduzibel von der Dimension n. Die Varietät X hat dann außerhalb einer endlichen Stellenmenge S von K gute Reduktion, und es existiert für jede Stelle $v \notin S$ ein glattes, projektives Modell $\mathcal{X}_v$ über den v-ganzen Zahlen $\mathcal{O}_v$. Gilt für die Stelle $v \nmid \ell$, so erhalten wir durch glatten, eigentlichen Basiswechsel für die Schemata $\overline{X}$ und $\overline{\mathcal{X}}_v := \mathcal{X}_v \times_{\mathcal{O}_v} \overline{\kappa_v}$, mit einem algebraischen Abschluß $\overline{\kappa_v}$ des Restklassenkörpers κ_v bei v, einen Isomorphismus von $G_{\kappa(v)}$-Moduln

$$\varphi_X \colon H^i_{ét}(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell) \xrightarrow{\sim} H^i_{ét}(\overline{\mathcal{X}}_v, \mathbb{Q}_\ell).$$

Es ist $M_v := (\mathcal{X}_{\kappa_v}, id, 0)$ (mit $\mathcal{X}_{\kappa_v} := \mathcal{X}_v \times_{\mathcal{O}_v} \kappa_v$) ein Objekt aus der Kategorie der algebraischen Motive über κ_v. Die zugehörige i-te ℓ-adische Realisierung ist gerade $H^i_{ét}(\overline{\mathcal{X}}_v, \mathbb{Q}_\ell)$. Nun hat man einen Spezialisierungsmorphismus

$$\sigma \colon \mathrm{End}(M) \to \mathrm{End}(M_v)$$

([SGA6], XA) und damit gilt $\sigma(\mathrm{End}(M))[F_v] \subset \mathrm{End}(M_v)$. Deshalb weiß man nach [KM], daß für einen Homomorphismus $F \in \sigma(\mathrm{End}(M))[F_v]$ auf $V_\ell(M) \simeq V_\ell(M_v)$ gilt, daß P_ℓ Koeffizienten in $\mathbb{Q}$ hat und unabhängig von ℓ ist. Nun muß man also nur noch einsehen, daß die Operation eines $a \in \mathrm{End}(M)$ auf $V_\ell(M)$ „dieselbe“ ist wie die von $\sigma(a)$ auf $V_\ell(M_v)$. Man hat auch für $X \times X$ durch glatten, eigentlichen Basiswechsel einen Isomorphismus $\varphi_{X\times X}\colon H^i_{ét}(\overline{X \times X}, \mathbb{Q}_\ell) \xrightarrow{\sim} H^i_{ét}(\overline{\mathcal{X}_v \times \mathcal{X}_v}, \mathbb{Q}_\ell)$, der mit der Zykelabbildung cl verträglich ist. Man erhält (nach Wahl eines Isomorphismus $\mathbb{Z}_\ell(1) \simeq \mathbb{Z}_\ell$) das kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{End}(M) & \stackrel{cl}{\to} & H^{2n}_{ét}(\overline{X \times X}, \mathbb{Q}_\ell) & \subset & \mathrm{End}(H^*_{ét}(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell)) \\
\downarrow \sigma & & \varphi_{X\times X} \downarrow \wr & & \\
\mathrm{End}(M_v) & \stackrel{cl}{\to} & H^{2n}_{ét}(\overline{\mathcal{X}_v \times \mathcal{X}_v}, \mathbb{Q}_\ell) & \subset & \mathrm{End}(H^*_{ét}(\overline{\mathcal{X}}_v, \mathbb{Q}_\ell))
\end{array}$$

Daß ein $a \in H^{2n}_{ét}(\overline{X \times X}, \mathbb{Q}_\ell)$ auf $H^*_{ét}(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell)$ unter dem Isomorphismus φ_X genauso operiert, wie $\varphi_{X\times X}(a)$ auf $H^*_{ét}(\overline{\mathcal{X}}_v, \mathbb{Q}_\ell)$ folgt aus der Tatsache, daß der glatte, eigentliche Basiswechsel mit * und $_*$ verträglich ist.
Für den allgemeinen Fall $M = (X, p, m)$ mit $p \neq id$ beachte man, daß man hier mit denselben Argumenten die Operation von $\sigma(p)$ auf $H^*_{ét}(\overline{\mathcal{X}}_v, \mathbb{Q}_\ell)$ betrachten kann. □

1.4 p-adische Darstellungen

Sei K_0 über $\mathbb{Q}_p$ eine lokaler Körper. Eine p-adische Darstellung von G_{K_0} ist ein stetiger Gruppenhomomorphismus

$$G_{K_0} \to \mathrm{Aut}(V),$$

wobei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{Q}_p$-Vektorraum ist. Insbesondere gehören also zu jeder ℓ-adischen Darstellung $\phi_\ell\colon G_K \to \mathrm{Aut}(V_\ell)$ eines Zahlkörpers K gewisse $p(=\ell)$-adische Darstellungen, nämlich für jedes $v \in \Sigma_K$ mit $v|\ell$ eine: sei $\overline{v} \in \Sigma_{\overline{K}}$ eine Fortsetzung von v und $Z_{\overline{v}} \simeq G_{K_v}$ die zugehörige Zerlegungsgruppe. Dann erhält man durch Einschränken von ϕ_ℓ auf G_{K_v} eine p-adische Darstellung (die unabhängig von der Wahl der Fortsetzung $\overline{v}$ von v ist).
Sei jetzt zur Vereinfachung $K_0|\mathbb{Q}_p$ unverzweigt. Die p-adische Darstellung V von G_{K_0} heißt *kristallin*, wenn

$$\dim_{\mathbb{Q}_p} V = \dim_{K_0} D_{cris}(V)$$

ist, wobei D_{cris} Fontains Funktor [Fo] von der Kategorie der p-adischen Darstellungen von G_{K_0} in die Kategorie der K_0-filtrierten Dieudonné-Moduln über K_0 ist mit $D_{cris}(V) = (V \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{cris})^{G_{K_0}}$. Eine kristalline Darstellung ist auch vom Hodge-Tate Typ. Dabei heißt eine p-adische Darstellung V *vom Hodge-Tate Typ*, wenn es einen G_{K_0}-Isomorphismus

$$V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{C}_p \simeq \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathbb{C}_p(i)^{n_i}$$

gibt, wobei $\mathbb{C}_p(i)$ der i-te Tatetwist von $\mathbb{C}_p$, der p-adischen Vervollständigung eines algebraischen Abschlusses $\overline{K}_0$ ist, und die Exponenten n_i für fast alle i

gleich null sind. Die *Hodge-Tate Gewichte* von V sind gerade die $i \in \mathbb{Z}$, für die $n_i \neq 0$ ist.

1.5 Operation durch fundamentale Charaktere

Sei hier K ein bezüglich einer diskreten Bewertung v vollständiger Körper und k sein Restklassenkörper mit $\mathrm{char}(k) = p > 0$. Betrachte die Körperkette $K \subset K^{nr} \subset K^{tr} \subset \overline{K}$ in einem algebraischen Abschluß $\overline{K}$, wobei K^{nr} den maximalen unverzweigten Zwischenkörper und K^{tr} den maximalen zahmverzweigten Zwischenkörper bezeichne. Sei dann $I := \mathrm{Gal}(\overline{K}/K^{nr})$ die Trägheitsgruppe von $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$, und $I^t := \mathrm{Gal}(K^{tr}/K^{nr})$ die zahme Trägheitsgruppe. Bekanntlich (vergleiche beispielsweise [Se72] 1.3) hat man einen Isomorphismus

$$I^t \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{F}_{p^n}^*,$$

wobei die Übergangsabbildungen des projektiven Limes die Normabbildungen

$$N \colon \mathbb{F}_{p^{mn}}^* \to \mathbb{F}_{p^n}^*, \; \alpha \mapsto \alpha^{1+p^n+p^{2n}+\ldots+p^{(m-1)n}}$$

sind. Die Komposition des Isomorphismus mit der Projektion auf $\mathbb{F}_{p^n}^*$ ergibt

$$\theta_n \colon I^t \longrightarrow \mathbb{F}_{p^n}^*,$$

einen *fundamentalen Charakter vom Niveau n* (die n verschiedenen fundamentalen Charaktere von Niveau n erhält man durch Komposition von θ_n mit den verschiedenen Einbettungen von $\mathbb{F}_{p^n}$ in einen algebraischen Abschluß von k). Ist x ein lokaler Parameter von K^{nr}, so liegt $x^{1/(p^n-1)}$, eine (p^n-1)-te Wurzel, in K^{tr}, und für ein $s \in I^t$ gilt gerade $s(x^{1/(p^n-1)}) = \theta_n(s)x^{1/(p^n-1)}$, wenn man $\mathbb{F}_{p^n}^*$ mit den (p^n-1)-ten Einheitswurzeln von $\overline{K}$ (die in K^{nr} liegen!) identifiziert.
Mit der Normabbildung $N \colon \mathbb{F}_{p^{mn}}^* \to \mathbb{F}_{p^n}^*$ gilt:

$$\theta_n = N \circ \theta_{nm}.$$

Sprechen wir davon, daß eine Darstellung $\varphi \colon I \to \mathrm{GL}(W)$ (wobei W ein endlicher $\mathbb{F}_q$-Vektorraum, $q = p^n$, ist) durch einen Charakter $\vartheta \colon I^t \to \mathbb{F}_{q^r}^*$ gegeben wird, so meinen wir, daß φ über I^t faktorisiert (also keinen p-Anteil hat) und es ein $A \in \mathrm{GL}(W)$ von Ordnung (q^r-1) gibt mit $\mathbb{F}_q[A] \simeq \mathbb{F}_{q^r}$, so daß die Darstellung φ ihr Bild in der von A erzeugten Gruppe $< A >$ hat, und durch den Charakter

$$\vartheta \colon I^t \to < A > \simeq \mathbb{F}_{q^r}^*$$

gegeben wird.
Durch die Vorgabe eines solchen $A \in \mathrm{GL}(W)$ erhält W die Struktur eines $\mathbb{F}_{q^r}$-Vektorraums. Die Bedingung $\mathbb{F}_q[A] \simeq \mathbb{F}_{q^r}$ ist auch gerade äquivalent dazu, daß das charakteristische Polynom χ_A von A die s-fache Potenz des Minimalpolynoms μ eines primitiven Elementes der Körpererweiterung $\mathbb{F}_{q^r}|F_q$ (also einfach die s-fache Potenz eines irreduziblen Polynoms vom Grad r über $\mathbb{F}_q$) ist: $\chi_A = \mu^s \in \mathbb{F}_q[X]$. Dabei ist s gerade die Dimension von W als $\mathbb{F}_{q^r}$-Vektorraum.

2 Kategorien mit Koeffizienten in E

Sei E ein Zahlkörper. Oft interessiert man sich für solche Objekte einer $\mathbb{Q}$-linearen Kategorie, die eine E-Multiplikation haben. Um die Unterkategorie dieser Objekte zu beschreiben, kann man sich in Delignes Sprechweise (vgl. [D]) der „Sprache A“ oder der „Sprache B“ bedienen.
Sei $\mathcal{C}$ eine $\mathbb{Q}$-lineare, additive, pseudoabelsche Kategorie. Dabei heißt eine additive Kategorie $\mathbb{Q}$-linear, wenn für alle Objekte X, Y die abelschen Gruppen $\mathrm{Hom}(X, Y)$ Vektorräume über $\mathbb{Q}$ und die Verknüpfungsabbildungen $\mathbb{Q}$-bilinear sind. Eine additive Kategorie nennt man pseudoabelsch, wenn für jeden Projektor p eines Objektes X (d.h. für jeden idempotenten Endomorphismus $p = p^2$ von X) das Bild $\mathrm{im}(p)$ in der Kategorie existiert. Es existiert dann auch der Kern mit $\ker p = \mathrm{im}(1-p)$ und es gilt: $\ker p \oplus \ker(1-p) \simeq X$.

Sprache A: Definiere die Kategorie $\mathcal{C}_1^E$ wie folgt:
Die Objekte von $\mathcal{C}_1^E$ sind Paare (X, θ), wobei X ein Objekt aus $\mathcal{C}$ und $\theta\colon E \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$ eine Einbettung von $\mathbb{Q}$-Algebren ist. Die Morphismen in $\mathcal{C}_1^E$ sind gerade die aus $\mathcal{C}$, die diese so definierte E-Struktur respektieren (d.h. für alle $a \in E$ und $f\colon X \to Y$ muß gelten: $\theta_Y(a) \circ f = f \circ \theta_X(a)$).

Sprache B: Definiere die Kategorie $\tilde{\mathcal{C}}_2^E$ wie folgt:
Die Objekte von $\tilde{\mathcal{C}}_2^E$ sind dieselben wie die von $\mathcal{C}$. Die Morphismen in $\tilde{\mathcal{C}}_2^E$ zwischen zwei Objekten X, Y sind definiert durch $\mathrm{Hom}_{\tilde{\mathcal{C}}_2^E}(X, Y) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \otimes_{\mathbb{Q}} E$.
Die Kategorie $\tilde{\mathcal{C}}_2^E$ ist im allgemeinen nicht pseudoabelsch; definiere $\mathcal{C}_2^E$ als die pseudoabelsche Hülle von $\tilde{\mathcal{C}}_2^E$.

Die beiden Kategorien $\mathcal{C}_1^E$ und $\mathcal{C}_2^E$ sind äquivalent! Um quasiinverse Funktoren F_1 und F_2 angeben zu können, definieren wir zunächst für jedes Objekt X in $\mathcal{C}$ ein Tripel $(X \otimes E, i_X, \theta_{X\otimes E})$. Dabei ist $X \otimes E$ ein Objekt von $\mathcal{C}$, $i_X\colon X \to X \otimes E$ ein Morphismus in $\mathcal{C}$ und $\theta_{X\otimes E}\colon E \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X \otimes E, X \otimes E)$ eine Einbettung von $\mathbb{Q}$-Algebren, und das Tripel wird durch folgende universelle Eigenschaft definiert: Für jedes Objekt Y und jedes $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(E, \mathrm{Hom}(X, Y))$ gibt es genau ein $(\varphi) \in \mathrm{Hom}(X \otimes E, Y)$, so daß für jedes $a \in E$ folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "i_X"'] \arrow[drr, "\varphi(a)"] & & \\
X \otimes E \arrow[r, "\theta_{X\otimes E}(a)"'] & X \otimes E \arrow[r, dotted, "(\varphi)"'] & Y
\end{tikzcd}$$

Die Existenz eines solchen Tripels ist gesichert: Man wähle von $E|\mathbb{Q}$ eine Basis $\{e_1 = 1, e_2, ..., e_m\}$. Dann erfüllt $(\prod_{i=1}^m X, (id, 0, ...0), a \mapsto (a_{ij} id)_{i,j=1,..,m})$ die universelle Eigenschaft (wobei wir für $a \in E$ mit (a_{ij}) die Matrix der Multiplikation mit a in E bezüglich der Basis $\{e_1, ..., e_m\}$ bezeichnen). Denn zu einem gegebenen

$\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(E, \mathrm{Hom}(X,Y))$ macht offenbar genau $(\varphi) := \varphi(e_1) + ... + \varphi(e_m)$ die Diagramme kommutativ.
Für ein $f\colon X \to Y$, sei $[f]\colon X \otimes E \to Y \otimes E$ der durch die lineare Abbildung $a \mapsto \theta_{Y\otimes E}(a) \circ i_Y \circ f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(E, \mathrm{Hom}(X, Y \otimes E))$ definierte Morphismus. Es ist offenbar $[f] \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_1^E}(X \otimes E, Y \otimes E)$ und $\sum f_i \otimes a_i \rightsquigarrow [\sum f_i \otimes a_i] := \sum [f_i] \circ \theta_{X\otimes E}(a_i)$ funktoriell. Jetzt können wir den Funktor F_1 von $\mathcal{C}_2^E$ nach $\mathcal{C}_1^E$ durch den Funktor $\tilde{F}_1$ definieren, und in die andere Richtung den Funktor F_2:

$$\begin{array}{llcc} \tilde{F}_1: & \tilde{\mathcal{C}}_2^E & \rightsquigarrow & \mathcal{C}_1^E \\ & X & \mapsto & (X \otimes E, \theta_{X\otimes E}) \\ & (\sum f_i \otimes a_i\colon X \to Y) & \mapsto & ([\sum f_i \otimes a_i]\colon X \otimes E \to Y \otimes E) \end{array}$$

$$\begin{array}{llcc} F_2: & \mathcal{C}_1^E & \rightsquigarrow & \mathcal{C}_2^E \\ & (X, \theta_X) & \mapsto & p^X X \\ & (f\colon X \to Y) & \mapsto & (p^Y \circ f \circ p^X : p^X X \to p^Y Y) \end{array}$$

Dabei ist p^X definiert als $(\theta_X \otimes id)(p)$ mit $p \in E \otimes E$ das Idempotente, welches alle Elementen der Form $(1 \otimes x - x \otimes 1)$ für $x \in E$ annuliert und unter der Multiplikation $E \otimes E \xrightarrow{\mu} E$ auf 1 geht. „Man schneidet den Faktor aus X aus, auf dem die beiden E-Modulstrukturen übereinstimmen.“ Ist $\{e_1, ..., e_m\}$ eine Basis von E und e_i^v die dazu duale Basis bezüglich der Spurform, so weiß man, daß $p = \sum e_i \otimes e_i^v$ ist (das berechnet beispielsweise Lars Brünjes in seiner Diplomarbeit [Br] im Beispiel 6.3).
Man rechnet nach, daß F_1 und F_2 quasiinvers zueinander sind.

<u>Beispiel</u>
Sei $\mathcal{C} = \mathcal{M}od^{fin}_{G_K,\mathbb{Q}_\ell}$ zu einem Zahlkörper K die Kategorie der endlich-dimensionalen $(G_K, \mathbb{Q}_\ell)$-Moduln. Offenbar ist dann $\mathcal{C}_1^E$ gerade die Kategorie der endlich-erzeugten $(G_K, \mathbb{Q}_\ell \otimes_{\mathbb{Q}} E)$-Moduln. Das universelle Objekt $V \otimes E$ zu einem $(G_K, \mathbb{Q}_\ell)$-Modul V ist als $\mathbb{Q}_\ell$-Vektorraum das Tensorprodukt über dem Körper $\mathbb{Q}$, also $V \otimes_{\mathbb{Q}} E$; die G_K-Operation wird gegeben durch $g(v \otimes a) := g(v) \otimes a$ für $g \in G_K, v \in V, a \in E$.
Die Volltreuheit des Funktors $\tilde{F}_1$ entspricht gerade für alle $(G_K, \mathbb{Q}_\ell)$-Moduln V und W der Gleichheit

$$\mathrm{Hom}_{G_K,\mathbb{Q}_\ell\otimes E}(V \otimes E, W \otimes E) \simeq \mathrm{Hom}_{G_K,\mathbb{Q}_\ell}(V, W) \otimes_{\mathbb{Q}} E.$$

Durch die Quasiinversität von F_1 und F_2 ergibt sich insbesondere für einen $(G_K, \mathbb{Q}_\ell \otimes_{\mathbb{Q}} E)$-Modul (V, θ) die Isomorphie:

$$(V, \theta) \simeq (p^V (V \otimes E), p^V \theta' p^V),$$

wobei

$$\theta'\colon E \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{G_K,\mathbb{Q}_\ell\otimes E}(V \otimes E, W \otimes E), \quad a \mapsto id \otimes a$$

und

$$p^V = \sum \theta(e_i) \otimes e_i^v \in \mathrm{Hom}_{G_K, \mathbb{Q}_\ell \otimes E}(V \otimes E, W \otimes E)$$

sei. Man kann die Isomorphie auch leicht nachrechnen; entscheidend ist, daß für jedes $a \in E$ die Gleichheit $p^V \circ (\theta(a) \otimes 1) = p^V \circ \theta'(a)$ gilt, was durch die Eigenschaft von p^V gewährleistet ist.

3 ℓ-adische und λ-adische Darstellungen zu Motiven mit Koeffizienten in E

3.1 Die Eigenschaften $(i), (ii), (iii), (iii'), (iv)$ der ℓ-adischen motivischen Systeme

Es sei M ein Objekt aus $\mathcal{M}_K$, der Kategorie der Grothendieck-Motive über einem Zahlkörper K. Wir setzen voraus, daß M rein vom Gewicht d ist. Dann haben wir das zugehörige System der ℓ-adischen Realisierungen $(V_\ell)_{\ell \in P}$ von M, etwa von Dimension N. Das ist ein System ℓ-adischer Darstellungen über $\mathbb{Q}$, d.h. für jede endliche Stelle ℓ von $\mathbb{Q}$ haben wir einen N-dimensionalen $\mathbb{Q}_\ell$-Vektorraum V_ℓ und einen stetigen Homomorphismus $\phi_\ell \colon G_K \to \mathrm{Aut}(V_\ell)$. Von diesem System der ℓ-adischen Realisierungen

$$(\phi_\ell \colon G_K \to \mathrm{Aut}(V_\ell))_{\ell \in P}$$

sind die folgenden Eigenschaften bekannt (vgl. z.B. [Mu98]/[Mu00] und dortige Referenzen):

(i) Das System ist $\mathbb{Q}$-rational und strikt kompatibel. Außerdem haben die komplexen Eigenwerte eines Frobenii (bezüglich jeder komplexen Einbettung) denselben Betrag.

(ii) Es existiert eine endliche Körpererweiterung $K'|K$, so daß für jedes $\ell \in P$ die auf $G_{K'}$ eingeschränkte Darstellung $\phi_\ell|_{G_{K'}}$ bei allen $v \not| \ell$ semistabil ist (d.h. für alle Stellen $v \not| \ell$ sind die Bilder der Trägheitsgruppen unipotent).

(iii) Für fast alle $\ell \in P$ sind die Darstellungen ϕ_ℓ kristallin mit Hodge-Tate-Gewichten, die unabhängig von ℓ sind.

Aus (iii) folgt eine etwas schwächere Eigenschaft:
(iii') Sei für jede Primzahl ℓ ein $v \in \Sigma_K$ fixiert mit $v|\ell$. Für jedes $\ell \in P$ sei T_ℓ ein I_v-invariantes Gitter für ϕ_ℓ und $W_\ell = \oplus_{i=1}^r W_\ell^i$ die Verhalbeinfachung der I_v-Darstellung $T_\ell/\ell T_\ell$ (die W_ℓ^i seien also irreduzibel bezüglich I_v).
Es existiert ein $N_0 \in \mathbb{N}$, so daß für fast alle ℓ gilt:
Jedes W_ℓ^i hat die Struktur eines 1-dimensionalen $\mathbb{F}_{\ell^{h_i}}$ -Vektorraums (wenn $h_i := \dim_{\mathbb{F}_\ell} W_\ell^i$ ist) und es gibt $s_0^{\ell,i}, s_1^{\ell,i}, ..., s_{(h_i-1)}^{\ell,i} \in \mathbb{Z}$ mit $|s_k^{\ell,i}| \le N_0$, so daß die Aktion von I_v auf W_ℓ^i durch einen Charakter

$$\theta_{h_i}^{s_0^{\ell,i}+s_1^{\ell,i}\ell+\ldots+s_{(h_i-1)}^{\ell,i}\ell^{(h_i-1)}} : I_v^t \to \mathbb{F}_{\ell^{h_i}}^*$$

gegeben wird. Das θ_h sei dabei ein fundamentaler Charakter vom Niveau h von der zahmen Trägheitsgruppe I_v^t.

(iv) Für alle $\ell \in P$ sind die Darstellungen ϕ_ℓ vom Hodge-Tate Typ.

Es sei noch bemerkt, daß man mit (iii) bei (iii') sogar noch genauer weiß, daß es feste $\{d_1, ..., d_s\} \subset \mathbb{Z}$ und Vielfachheiten $(n_i)_{i=1,..,s} \subset \mathbb{N}^s$ mit $\sum n_i = N$ gibt, so daß jedes d_i genau n_i-mal in der Familie $(s_j^{\ell,i})_{i=1,...,r(\ell);j=0,...,h_i(\ell)-1}$ vorkommt.

3.2 Die Eigenschaften $(i)^E, (ii)^E, (iii)^E$ der λ-adischen motivischen Systeme

Es sei E ein Zahlkörper und unser M habe zusätzlich eine E-Multiplikation; wir betrachten also das Objekt (M, θ) von $(\mathcal{M}_K)_1^E$. Die E-Struktur θ auf M induziert nun eine E-Struktur auf allen Realisierungen von M. Das V_ℓ wird dadurch ein freier $E \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell$-Modul vom Rang $n = N/m$, wenn $m = [E : \mathbb{Q}]$ ist. Denn offenbar wird zu einer Einbettung $\sigma\colon K \hookrightarrow \mathbb{C}$ die Bettirealisierung V_σ von M durch θ ein n-dimensionaler E-Vektorraum. Nun hat man für jede Fortsetzung $\bar{\sigma}\colon \overline{K} \hookrightarrow \mathbb{C}$ und jedes ℓ einen Vergleichsisomorphismus $V_\sigma \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell \xrightarrow{\sim} V_\ell$, der, da er funktoriell ist, die E-Struktur respektiert.
Die Operation der Galoisgruppe G_K auf V_ℓ ist offenbar E-linear. Also hat man

$$V_\ell \otimes_{E\otimes\mathbb{Q}_\ell} E \otimes \mathbb{Q}_\ell = V_\ell \otimes_{E\otimes\mathbb{Q}_\ell} \Pi_{\lambda|\ell} E_\lambda = \oplus_{\lambda|\ell} V_\lambda,$$

eine Zerlegung von G_K-Moduln, wobei $V_\lambda := V_\ell \otimes_{E\otimes\mathbb{Q}_\ell} E_\lambda$ eine n-dimensionale E_λ-Darstellung ist.

Das heißt aber, zum Motiv (M, θ) gehört ein n-dimensionales System von λ-adischen Darstellungen über E, etwa

$$(\phi_\lambda\colon G_K \to \mathrm{Aut}(V_\lambda))_{\lambda\in\Sigma_E}.$$

Analog zum System der ℓ-adischen Realisierungen $(V_\ell)_\ell$, hat dieses System λ-adischer Darstellungen die folgenden Eigenschaften:

Proposition 2. *Sei $(\phi_\lambda\colon G_K \to \mathrm{Aut}(V_\lambda))_{\lambda\in\Sigma_E}$ ein n-dimensionales System λ-adischer Darstellungen über E, das zu einem reinen Motiv mit Koeffizienten in E auftritt. Dann hat dieses System die folgenden Eigenschaften:*
$(i)^E$ Das System ist E-rational und strikt kompatibel. Außerdem gilt, daß die komplexen Eigenwerte eines Frobenii (bezüglich jeder komplexen Einbettung) denselben Betrag haben.

$(ii)^E$ Es existiert eine endliche Körpererweiterung $K'|K$, so daß jedes $\phi_\lambda|_{G_{K'}}$, $\lambda|\ell$, bei allen $v \nmid \ell$ semistabil ist.

$(iii)^E$ Sei für jede Primzahl ℓ ein $v \in \Sigma_K$ fixiert mit $v|\ell$. Für $\lambda \in \Sigma_E$, $\lambda|\ell$, sei T_λ ein I_v-invariantes Gitter für ϕ_λ und $W_\lambda = \oplus_{i=1}^r W_\lambda^i$ die Verhalbeinfachung der I_v-Darstellung $T_\lambda/\wp_\lambda T_\lambda$. Dann existiert ein $N_0 \in \mathbb{N}$, so daß für fast alle ℓ gilt: Jedes W_λ^i hat die Struktur eines 1-dimensionalen $\mathbb{F}_{\ell^{m_\lambda h_i}}$-Vektorraums (wenn $\mathbb{F}_\lambda = \mathbb{F}_{\ell^{m_\lambda}}$ der Restklassenkörper von E_λ und $h_i := \dim_{\mathbb{F}_\lambda} W_\lambda^i$ ist) und es gibt $s_0^{\lambda,i}, s_1^{\lambda,i}, ..., s_{(h_i m_\lambda - 1)}^{\lambda,i} \in \mathbb{Z}$ mit $|s_k^{\lambda,i}| \leq N_0$, so daß die Aktion von I_v auf W_λ^i durch einen Charakter

$$\theta_{h_i m_\lambda}^{s_0^{\lambda,i} + s_1^{\lambda,i}\ell + ... + s_{(h_i m_\lambda - 1)}^{\lambda,i} \ell^{(h_i m_\lambda - 1)}} : I_v^t \to \mathbb{F}_{\ell^{m_\lambda h_i}}^*$$

gegeben wird.

In $(iii)^E$ weiß man genauer, daß feste $\{d_1, ..., d_s\} \subset \mathbb{Z}$ und Vielfachheiten $(n_i)_{i=1,..,s} \subset \mathbb{N}^s$ mit $\sum n_i = nm$ existieren, so daß für fast alle ℓ gilt: jedes d_i kommt genau n_i-mal in der Familie $(s_j^{\lambda,i} \mid \lambda \in \Sigma_E, \lambda|\ell; i = 1, ..., r(\lambda); j = 0, ..., h_i(\lambda)m_\lambda - 1)$ vor.
Ein System λ-adischer Darstellungen mit den Eigenschaften $(i)^E$, $(ii)^E$, $(iii)^E$, (iv) wollen wir vereinfacht auch ein „motivisches System“ nennen. Der Beweis von Proposition 2 wird unten gegeben; wir beginnen hier mit einigen Vorbemerkungen.

3.3 Bemerkungen zu den Eigenschaften $(i)^E$, $(ii)^E$, $(iii)^E$

Bemerkung 3. *Es sei $(\phi_\lambda \colon G_K \to \mathrm{GL}(V_\lambda))_{\lambda \in \Sigma_E}$ ein System von n-dimensionalen λ-adischen Darstellungen mit den Eigenschaften $(i)^E$, $(ii)^E$, $(iii)^E$.*

(a) Im Spezialfall $E = \mathbb{Q}$ sind die Eigenschaften $(i)^\mathbb{Q}, (ii)^\mathbb{Q}, (iii)^\mathbb{Q}$ gerade die Eigenschaften $(i), (ii), (iii')$.

(b) Sei $K'|K$ eine endliche Körpererweiterung. Dann besitzt auch das System, das man durch Einschränken auf $G_{K'}$ erhält, die Eigenschaften $(i)^E, (ii)^E$, $(iii)^E$.

(c) Auch das System $(\det \circ \phi_\lambda \colon G_K \to E_\lambda^*)_{\lambda \in \Sigma_E}$ besitzt die Eigenschaften $(i)^E$, $(ii)^E, (iii)^E$.

(d) Es sei $(\rho_\lambda \colon G_K \to \mathrm{GL}(W_\lambda))_{\lambda \in \Sigma_E}$ ein weiteres, m-dimensionales System, das die Eigenschaften $(i)^E$, $(ii)^E$, $(iii)^E$ besitzt. Dann hat auch das System $(\rho_\lambda \otimes \phi_\lambda \colon G_K \to \mathrm{GL}(W_\lambda \otimes V_\lambda))_{\lambda \in \Sigma_E}$ die Eigenschaften $(i)^E$, $(ii)^E$, $(iii)^E$.

Beweis. **(a)** ist klar.

zu **(b)**: $(i)^E$ Wenn alle ϕ_λ außerhalb $S \subset \Sigma_K$ unverzweigt sind, sind die $\phi_\lambda|_{G_{K'}}$ außerhalb von $S' := \{v \in \Sigma_{K'} | \ v|_K \in S\}$ unverzweigt. Ein Frobeniuselement relativ zu K' ist Potenz eines Frobeniuselementes relativ zu K, also ist etwa

$F_{v,\phi_\lambda|_{G_{K'}}} = F^f_{v|_K,\phi_\lambda}$. Deshalb sind die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms von $F_{v,\phi_\lambda|_{G_{K'}}}$ universelle Polynome in den Koeffizienten des charakteristischen Polynoms von $F_{v|_K,\phi_\lambda}$. Daraus folgt sowohl die E-Rationalität als auch die strikte Kompatibilität.
$(iii)^E$ gilt, da $K'|K$ an fast allen Stellen unverzweigt ist, und deshalb G_K und $G_{K'}$ an diesen Stellen dieselben Trägheitsgruppen haben.

zu **(c)**: Hier sind $(i)^E$ und $(ii)^E$ klar. Für $(iii)^E$ sei mit den dortigen Bezeichnungen die Aktion von I_v bzgl. ϕ_λ auf W^i_λ gegeben durch

$$\theta_{h_i m_\lambda}^{s_0^{\lambda,i}+s_1^{\lambda,i}\ell+\ldots+s_{(h_i m_\lambda-1)}^{\lambda,i}\ell^{(h_i m_\lambda-1)}}.$$

Dann wird die Aktion der Determinante durch

$$\prod_{i=1}^{r}\theta_{h_i m_\lambda}^{(s_0^{\lambda,i}+s_1^{\lambda,i}\ell+\ldots+s_{(h_i m_\lambda-1)}^{\lambda,i}\ell^{(h_i m_\lambda-1)})(1+\ell^{m_\lambda}+\ldots+\ell^{(h_i-1)m_\lambda})}$$
$$= \theta_{m_\lambda}^{t_0^\lambda+t_1^\lambda\ell+\ldots+t_{(m_\lambda-1)}^\lambda\ell^{(m_\lambda-1)}}$$

mit $t_k^\lambda = \sum_{i=1}^r \sum_{j=0}^{h_i-1} s_{k+jm_\lambda}^{\lambda,i}$ gegeben. Also gilt $|t_k^\lambda| \leq nN_0$.

zu **(d)**: $(i)^E$ Ist $(\phi_\lambda)_\lambda$ außerhalb S und $(\rho_\lambda)_\lambda$ außerhalb S' unverzweigt, so ist die Darstellung $(\rho_\lambda\otimes\phi_\lambda)_\lambda$ außerhalb $S'' := S\cup S'$ unverzweigt. Ist in $\overline{\mathbb{Q}}$ für ein $v \notin S''$ das Polynom

$$P_{v,\phi_\lambda}(T) = (T-\lambda_1)\ldots(T-\lambda_n) = T^n + a_{n-1}T^{n-1} + \ldots + a_0 \in E[T]$$

und

$$P_{v,\rho_\lambda}(T) = (T-\mu_1)\ldots(T-\mu_m) = T^m + b_{m-1}T^{m-1} + \ldots + b_0 \in E[T],$$

so ist

$$P_{v,\rho_\lambda\otimes\phi_\lambda}(T) = (T-\mu_1\lambda_1)\ldots(T-\mu_1\lambda_n)(T-\mu_2\lambda_1)\ldots(T-\mu_m\lambda_n)$$
$$= (T^n + \mu_1 a_{n-1}T^{n-1} + \ldots + \mu_1^n a_0)\ldots(T^n + \mu_m a_{n-1}T^{n-1} + \ldots + \mu_m^n a_0).$$

Es ist also der $(mn-k)$-te Koeffizient dieses Polynoms in $\mathbb{Q}[a_0,\ldots,a_{n-1}][\mu_1,\ldots,\mu_m]$ und er ist in den μ_i symmetrisch vom Grad k. Also folgt mit dem Hauptsatz über symmetrische Polynome, daß es ein Polynom $g_k \in \mathbb{Q}[a_0,\ldots,a_{n-1}][t_1,\ldots,t_m]$ gibt, so daß der $(mn-k)$-te Koeffizient gleich $g_k(b_0,\ldots,b_{m-1}) \in E$ ist. Damit gilt $(i)^E$.
Für $(iii)^E$ beachte man, daß „Tensorieren mit Reduktion vertauscht“: hat man ein ρ-invariantes $\mathcal{O}_\lambda$-Gitter $T_\rho \subset V := V_\lambda$ und ein ϕ-invariantes Gitter $T_\phi \subset W := W_\lambda$, so ist $T_\rho\otimes T_\phi \subset V\otimes W$ ein $\rho\otimes\phi$ invariantes $\mathcal{O}_\lambda$-Gitter und für die Reduktionen bezüglich dieser Gitter gilt

$$(\rho \mod \lambda)\otimes(\phi \mod \lambda) \simeq (\rho\otimes\phi) \mod (\lambda).$$

Andererseits erhält man für eine Kette von ($\rho \mod \lambda$)-invarianten $\mathbb{F}_\lambda$-Vektorräumen $V = V_0 \supset V_1 \supset ... \supset V_q = 0$ und eine Kette von ($\phi \mod \lambda$)-invarianten Vektorräume $W = W_0 \supset W_1 \supset ... \supset W_r = 0$ eine Kette $(V \otimes W)_i$ von $(\rho \mod \lambda) \otimes (\phi \mod \lambda)$-invarianten $\mathbb{F}_\lambda$-Vektorräumen:

$$V \otimes W = (V \otimes W)_0 \supset V \otimes W_1 + V_1 \otimes W = (V \otimes W)_1 \supset V \otimes W_2 + V_1 \otimes W \supset ...$$

$$\supset V \otimes W_{r-1} + V_1 \otimes W \supset V_1 \otimes W \supset V_1 \otimes W_1 + V_2 \otimes W \supset ... \supset 0 = (V \otimes W)_{qr}.$$

Dabei gilt:

$$\bigoplus_{i=0}^{qr-1} (V \otimes W)_i/(V \otimes W)_{i+1} \simeq (\bigoplus_{i=0}^{q-1} V_i/V_{i+1}) \otimes (\bigoplus_{i=0}^{r-1} W_i/W_{i+1}).$$

Insgesamt folgt also, daß die Verhalbeinfachung $(\overline{\rho} \otimes \overline{\phi})^{ss}$ isomorph zu $\overline{\rho \otimes \phi}$ ist. Sei nun $v|\ell$ eine Stelle von K und W ein irreduzibler $\overline{\phi}|_{I_v}$-invarianter $\mathbb{F}_\lambda = \mathbb{F}_{\ell^m}$-Vektorraum und V ein irreduzibler $\overline{\rho}|_{I_v}$-invarianter $\mathbb{F}_\lambda$-Vektorraum. Sei $\dim W = h$ und $\dim V = k$. Die Operation der Trägheitsgruppe auf W bzw. V wird dann also durch Charaktere

$$\theta_{hm}^{s_0^\lambda + s_1^\lambda \ell + ... + s_{(hm-1)}^\lambda \ell^{(hm-1)}}$$

bzw.

$$\theta_{km}^{t_0^\lambda + t_1^\lambda \ell + ... + t_{(km-1)}^\lambda \ell^{(km-1)}}$$

gegeben. Dabei trägt W nach Voraussetzung die Struktur eines eindimensionalen $\mathbb{F}_{\ell^{mh}}$-Vektorraums etwa durch ein $A \in \mathrm{GL}_h(\mathbb{F}_\lambda)$, also $\mathbb{F}_\lambda[A] \simeq \mathbb{F}_{\lambda^h}$; V trägt die Struktur eines eindimensionalen $\mathbb{F}_{\ell^{mk}}$-Vektorraums etwa durch ein $B \in \mathrm{GL}_k(\mathbb{F}_\lambda)$, also $\mathbb{F}_\lambda[B] \simeq \mathbb{F}_{\lambda^k}$. Dann trägt $W \otimes V$ durch $A \otimes B \in \mathrm{GL}_{hk}(\mathbb{F}_\lambda)$ die Struktur eines $\mathrm{ggT}(h,k)$-dimensionalen $\mathbb{F}_{\lambda'}$-Vektorraums wenn $\lambda' = \ell^{m\,\mathrm{kgV}(h,k)}$ ist, denn

$$\mathbb{F}_\lambda[A \otimes B] \simeq \mathbb{F}_{\lambda^{\mathrm{kgV}(h,k)}}.$$

Dann gibt es ein $r \in \{0, ..., hm-1\}$, so daß bezüglich dieser Struktur die Operation auf $W \otimes V$ durch einen Charakter:

$$\begin{aligned} & \theta_{hh'm}^{\ell^r (s_0^\lambda + s_1^\lambda \ell + ... + s_{(hm-1)}^\lambda \ell^{(hm-1)})(1 + \ell^{hm} + ... + \ell^{(h'-1)hm})} \\ \cdot \quad & \theta_{kk'm}^{(t_0^\lambda + t_1^\lambda \ell + ... + t_{(km-1)}^\lambda \ell^{(km-1)})(1 + \ell^{km} + ... + \ell^{(k'-1)hm})} \\ = \quad & \theta_{\mathrm{kgV}(h,k)m}^{(t_0^\lambda + s_{-r}^\lambda) + ... + (t_{(km-1)}^\lambda + s_{(hm-1-r)}^\lambda) \ell^{(\mathrm{kgV}(h,k)m-1)}} \end{aligned}$$

gegeben wird, wobei $\mathrm{kgV}(h,k) = h'h = k'k$ sei und für negatives j gesetzt sei: $s_j := s_{hm+j}$. Die Beträge der $s_i^\lambda + t_j^\lambda$ sind natürlich wieder unabhängig von λ beschränkt. $\square$

Die nun folgende Bemerkung wird uns später sehr hilfreich sein.

Bemerkung 4. *Sei $\lambda \in \Sigma_E$ und $v|\ell$ eine Stelle von K mit $f_v := [K_v : \mathbb{Q}_\ell]$. Sei wie in $(iii)^E$ der $\mathbb{F}_\lambda$-Raum W_λ ein (bezüglich $\bar{\varphi}_\lambda$) I_v-invarianter Raum, auf dem I_v via I_v^t durch einen Charakter ϑ operiert.*

(1) Ist $v \in \Sigma_K$ unverzweigt und operiert die Zerlegungsgruppe Z_v abelsch, so gilt $\vartheta^{\ell^{f_v}} = \vartheta$.

(2) Sei $\vartheta_\lambda = \theta_{n_\lambda}^{(s_0^\lambda + s_1^\lambda \ell + \ldots + s_{n_\lambda - 1}^\lambda \ell^{(n_\lambda - 1)})}$ für unendlich viele Stellen λ von E mit $|s_i^\lambda|, |n_\lambda| \leq N_0 \in \mathbb{N}$.

(i) Gilt $\vartheta_\lambda^{\ell^{k_\lambda}} = \vartheta_\lambda$ mit $|k_\lambda| \leq N_1 \in \mathbb{N}$, so ist, für $\ell >> 0$

$$\vartheta_\lambda = \theta_{k_\lambda}^{t_0^\lambda + t_1^\lambda \ell + \ldots t_{k_\lambda - 1}^\lambda \ell^{(k_\lambda - 1)}}$$

mit $t_s^\lambda \in \{s_0^\lambda, s_1^\lambda, \ldots, s_{n_\lambda - 1}^\lambda\}$.

(ii) Sei $N_2 \in \mathbb{N}$. Dann gilt für $\ell >> 0$, falls ϑ_λ nicht der triviale Charakter ist:

$$\operatorname{ord}(\vartheta_\lambda(I_v^t)) > N_2.$$

Beweis. zu(1): Sei F ein Element aus der Zerlegungsgruppe $Z_v \simeq \operatorname{Gal}(\overline{K}_v/K_v)$, dessen Bild in $Z_v/I_v \simeq \operatorname{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_\ell/\mathbb{F}_{\ell^{f_v}})$ der Frobenius $x \mapsto x^{\ell^{f_v}}$ ist. Dann operiert die Konjugation mit F auf I_v^t durch

$$u \mapsto u^{\ell^{f_v}}.$$

Denn sei $x \in K_v$ ein lokaler Parameter, dann ist ein Element aus $\operatorname{Gal}(K_v^{tr}/K_v^{nr}) \simeq I_v^t$ eindeutig dadurch festgelegt, wie es auf den d-ten (mit $(d, \ell) = 1$) Wurzeln $x^{1/d}$ operiert. Es ist

$$\theta_d \colon \operatorname{Gal}(K_v^{nr}(x^{1/d})/K_v^{nr}) \xrightarrow{\sim} \mu_d,$$

wobei $\theta_d(s)$ die eindeutig bestimmte d-te Einheitswurzel ist, so daß $s(x^{1/d}) = \theta_d(s) x^{1/d}$. Sei nun ζ die d-te Einheitswurzel (in K_v^{nr}!), so daß $F^{-1}(x^{1/d}) = \zeta x^{1/d}$ ist. Es gilt also für ein $s \in \operatorname{Gal}(\overline{K}_v/K_v^{nr})$:

$$FsF^{-1}(x^{1/d}) = Fs(\zeta x^{1/d}) = F(\zeta \theta_d(s) x^{1/d}) = (\theta_d(s))^{\ell^{f_v}} x^{1/d} = s^{\ell^{f_v}}(x^{1/d}),$$

also $FsF^{-1} \equiv s^{\ell^{f_v}} \mod \operatorname{Gal}(\overline{K}_v/K_v^{tr})$.
Da die Darstellung $\bar{\varphi}_\lambda$ auf Z_v abelsch ist, ist der Charakter auf I_v^t also unter Potenzieren mit ℓ^{f_v} stabil, d.h. $\vartheta^{\ell^{f_v}} = \vartheta$.

zu(2)(i): Ist

$$\begin{aligned} \vartheta = \theta_{n_\lambda}^{(s_0^\lambda + s_1^\lambda \ell + \ldots + s_{n_\lambda - 1}^\lambda \ell^{(n_\lambda - 1)})} \\ = \theta_{n_\lambda k_\lambda}^{(s_0^\lambda + s_1^\lambda \ell + \ldots + s_{n_\lambda - 1}^\lambda \ell^{(n_\lambda - 1)})(1 + \ell^{n_\lambda} + \ldots + \ell^{(k_\lambda - 1) n_\lambda})} \\ = \theta_{n_\lambda k_\lambda}^{(t_0^\lambda + t_1^\lambda \ell + \ldots + t_{n_\lambda k_\lambda - 1}^\lambda \ell^{(n_\lambda k_\lambda - 1)})} \end{aligned}$$

mit $t^\lambda_{jn_\lambda+k} = s^\lambda_k$ für $j = 0, ..., k_\lambda - 1;\ k = 0, ..., n_\lambda - 1$, so wissen wir jetzt, daß die Ordnung des Bildes $\ell^{k_\lambda} - 1$ teilt, also:

$$\frac{\ell^{n_\lambda k_\lambda} - 1}{\mathrm{ggT}(\ell^{n_\lambda k_\lambda} - 1, (t^\lambda_0 + t^\lambda_1 \ell + ... + t^\lambda_{n_\lambda k_\lambda - 1} \ell^{(n_\lambda k_\lambda - 1)}))} \ \Big|\ \ell^{k_\lambda} - 1,$$

was äquivalent ist zu:

$$(1 + \ell^{k_\lambda} + ... + \ell^{(n_\lambda - 1)k_\lambda}) \ \Big|\ (t^\lambda_0 + t^\lambda_1 \ell + ... + t^\lambda_{n_\lambda k_\lambda - 1} \ell^{n_\lambda k_\lambda - 1}).$$

Da $(t^\lambda_0 + t^\lambda_1 \ell + ... + t^\lambda_{n_\lambda k_\lambda - 1} \ell^{n_\lambda k_\lambda - 1})$

$$= (1 + \ell^{k_\lambda} + ... + \ell^{(n_\lambda - 1)k_\lambda})(t^\lambda_{(n_\lambda - 1)k_\lambda} + t_{(n_\lambda - 1)k_\lambda + 1} \ell + ... + t^\lambda_{n_\lambda k_\lambda - 1} \ell^{(k_\lambda - 1)})$$

$$+ (t^\lambda_0 - t^\lambda_{(n_\lambda - 1)k_\lambda}) + (t^\lambda_1 - t^\lambda_{(n_\lambda - 1)k_\lambda + 1})\ell + ... + (t^\lambda_{(n_\lambda - 1)k_\lambda - 1} - t^\lambda_{n_\lambda k_\lambda - 1})\ell^{(n_\lambda - 1)k_\lambda - 1}$$

ist, folgt

$$(1 + \ell^{k_\lambda} + ... + \ell^{(n_\lambda - 1)k_\lambda}) \ \Big|$$
$$(t^\lambda_0 - t^\lambda_{(n_\lambda - 1)k_\lambda}) + (t^\lambda_1 - t^\lambda_{(n_\lambda - 1)k_\lambda + 1})\ell + ... + (t^\lambda_{(n_\lambda - 1)k_\lambda - 1} - t^\lambda_{n_\lambda k_\lambda - 1})\ell^{(n_\lambda - 1)k_\lambda - 1}.$$

Da die Koeffizienten vor den ℓ^i nur endlich viele Werte annehmen können, ist aber der linke Ausdruck für sehr großes ℓ immer betraglich größer als der rechte (betrachte die Ausdrücke als Polynome in ℓ(!)). Deshalb muß der rechte Ausdruck dann schon null sein. Es folgt:

$$\theta_{n_\lambda}^{(s^\lambda_0 + s^\lambda_1 \ell + ... + s^\lambda_{n_\lambda - 1} \ell^{(n_\lambda - 1)})} = \theta_{k_\lambda}^{(t^\lambda_{(n_\lambda - 1)k_\lambda} + t_{(n_\lambda - 1)k_\lambda + 1} \ell + ... + t^\lambda_{n_\lambda k_\lambda - 1} \ell^{(k_\lambda - 1)})}.$$

zu(2)(ii): Es gilt:

$$\mathrm{ord}(\vartheta_\lambda(I_v)) := N = \frac{\ell^{n_\lambda} - 1}{\mathrm{ggT}(\ell^{n_\lambda} - 1, s^\lambda_0 + s^\lambda_1 \ell + ... + s^\lambda_{n_\lambda - 1} \ell^{(n_\lambda - 1)})},$$

also

$$\ell^{n_\lambda} - 1 \ \Big|\ N s^\lambda_0 + N s^\lambda_1 \ell + ... + N s^\lambda_{n_\lambda - 1} \ell^{(n_\lambda - 1)}$$

Wenn wir nun annehmen, daß jedes $N < N_2$ ist, können die Koeffizienten vor den ℓ^i nur endlich viele Werte annehmen und deshalb muß der rechte Ausdruck für sehr große ℓ schon null sein. Dann ist ϑ_λ aber schon der triviale Charakter. □

3.4 Beweis von Proposition 2

Die Eigenschaften $(i)^E, (ii)^E, (iii)^E$ können wir mit Hilfe von (i),(ii), (iii) beweisen:

Zu $(i)^E$: Der zweite Teil der Aussage ist sofort mit folgenden Überlegungen klar: Nach Auszeichnen einer Basis von $E_\lambda|\mathbb{Q}_\ell$ hat man eine Inklusion $\mathrm{GL}_n(E_\lambda) \subset \mathrm{GL}_{nm}(\mathbb{Q}_\ell)$, wenn $[E_\lambda : \mathbb{Q}_\ell] = m$ ist. Dann sind aber die Eigenwerte eines Elementes A aufgefaßt als E_λ-lineare Abbildung auch Eigenwerte von A aufgefaßt als $\mathbb{Q}_\ell$-lineare Abbildung; denn das charakteristische Polynom (als $\mathbb{Q}_\ell$ lineare Abbildung) $\chi_A^\ell \in \mathbb{Q}_\ell[T] \subset E_\lambda[T]$ annuliert A, also $\chi_A^\ell(A) = 0$, und deshalb wird es vom Minimalpolynom (als E_λ-lineare Abbildung) μ_A^λ geteilt.
Für den ersten Teil werden wir tiefgreifendes über Motive benötigen. Es ist $V_\ell = \bigoplus_{\lambda|\ell} V_\lambda$ ein Objekt in $(\mathcal{M}od^{fin}_{G_K,\mathbb{Q}_\ell})^E_1$. Wir benutzen den Isomorphismus aus dem Beispiel in Kapitel 2:

$$(V_\ell, \theta_\ell) \simeq (p_\ell(V_\ell \otimes_\mathbb{Q} E), p_\ell \theta'_\ell p_\ell),$$

wobei $p_\ell = \sum \theta_\ell(e_i) \otimes e_i^v$ war. Wir wollen zeigen, daß das charakteristische Polynom eines Frobenii F_{v,ϕ_ℓ} mit $v \notin S \cup S_\ell$ Koeffizienten in $E \subset \mathbb{Q}_\ell \otimes_\mathbb{Q} E$ hat, die unabhängig von ℓ sind. Wegen unseres Isomorphismus ist dies aber äquivalent dazu, daß das charakteristische Polynom von $F_{v,\phi_\ell} \circ p_\ell$, das ja auf $V_\ell \otimes_\mathbb{Q} E$ operiert, Koeffizienten in $E \subset \mathbb{Q}_\ell \otimes_\mathbb{Q} E$ hat, die unabhängig von ℓ sind. Es ist

$$F_{v,\phi_\ell} \circ p_\ell = F_{v,\phi_\ell} \circ \sum_{i=1}^m (\theta_\ell(e_i) \otimes e_i^v) = \sum_{i=1}^m ((F_{v,\phi_\ell} \circ \theta_\ell(e_i)) \otimes e_i^v).$$

Nun weiß man aber nach Lemma 1, daß beliebige Produkte $F^k_{v,\phi_\ell} \prod_i \theta_\ell(e_i)^{k_i}$, $k, k_i \in \mathbb{N}_0$ charakteristische Polynome mit Koeffizienten in $\mathbb{Q}$ haben, die unabhängig von ℓ sind; insbesondere sind also die Spuren unabhängig von ℓ und in $\mathbb{Q}$. Nun benutzt für $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{Q}_\ell \otimes_\mathbb{Q} E)$ die Formel

$$\det(1 - AT) = \exp(-\sum_{n>0} \frac{\mathrm{Tr}(A^n)}{n} T^n) \in (\mathbb{Q}_\ell \otimes E)[T].$$

Sie gilt, da sie komponentenweise, also in den $\mathrm{Mat}_{n\times n}(E_\lambda)$ gilt (z.B. [M] Lem.2.7, S.186). Wir müssen also nur noch sehen, daß für jede natürliche Zahl n die Spur

$$\mathrm{Tr}\big((\sum_{i=1}^m ((F_{v,\phi_\ell} \circ \theta_\ell(e_i)) \otimes e_i^v))^n\big)$$

unabhängig von ℓ ist und in E liegt. Wegen der Additivität der Spur (und da die F_{v,ϕ_ℓ} und $\theta_\ell(e_i)$ alle miteinander kommutieren) reicht es aber, dies für Spuren von Produkten

$$\operatorname{Tr}\big(F_{v,\phi_\ell}^{\sum k_i}\prod_i \theta_\ell(e_i)^{k_i}\otimes\prod_i (e_i^v)^{k_i}\big) = \big(\underbrace{\operatorname{Tr}(F_{v,\phi_\ell}^{\sum k_i}\prod_i \theta_\ell(e_i)^{k_i})}_{\in\mathbb{Q}}\big)\otimes\prod_i (e_i^v)^{k_i}$$

zu sehen, was wir aber eben wegen Lemma 1 wissen.

Zu $(ii)^E$: Diese Eigenschaft folgt sofort aus der Eigenschaft (iii) für die $(V_\ell)_{\ell\in P}$, da man hier dieselbe Körpererweiterung nehmen kann.

Zu $(iii)^E$: Sei $W := W_{v,\lambda}^i$ ein I_v-irreduzibler $\mathbb{F}_\lambda$-Untervektorraum mit $\mathbb{F}_\lambda = \mathbb{F}_{\ell^m}$ und $\dim_{\mathbb{F}_\lambda} W = h$, also $\dim_{\mathbb{F}_\ell} W = hm$. Sei dann W_0 ein I_v-invarianter, irreduzibler $\mathbb{F}_\ell$-Untervektorraum von W, etwa von Dimension k. Dann ist auch die $\mathbb{F}_\lambda$-lineare Hülle $< W_0 >_{\mathbb{F}_\lambda}$ invariant unter der I_v-Operation, also ist wegen der Irreduzibilität von W schon $< W_0 >_{\mathbb{F}_\lambda} = W$. Dann gilt aber mit einem primitiven Element x von $\mathbb{F}_\lambda|\mathbb{F}_\ell$ die Gleichheit $W = \sum x^i W_0$. Da I_v ja $\mathbb{F}_\lambda$-linear operiert, sind alle $x^i W_0$ unter I_v invariante und irreduzible $\mathbb{F}_\ell$-Vektorräume, und deshalb gibt es ein i_0, so daß (als $(G_K, \mathbb{Q}_\ell)$-Moduln)

$$W = W_0 \oplus xW_0 \oplus ... \oplus x^{i_0-1}W_0$$

ist. Nach (iii) hat nun W_0 die Struktur eines 1-dimensionalen $\mathbb{F}_{\ell^k}$-Vektorraums, auf dem I_v durch einen Charakter operiert. D.h. W hat die Struktur eines i_0-dimensionalen $\mathbb{F}_{\ell^k}$-Vektorraums, auf dem I_v durch einen Charakter operiert. Sei die $\mathbb{F}_{\ell^k}$-Vektorraum-Struktur etwa durch das Element $A \in \mathrm{GL}_h(\mathbb{F}_\lambda) \subset \mathrm{GL}_{hm}(\mathbb{F}_\ell)$ gegeben, also

$$\mathbb{F}_{\ell^k} \simeq \mathbb{F}_\ell[A].$$

Da I_v auf dem $\mathbb{F}_\lambda$-Vektorraum W irreduzibel operiert, muß A irreduzibel operieren, was aber äquivalent dazu ist, daß das charakteristische Polynom über $\mathbb{F}_\lambda$ irreduzibel ist. Dann ist aber

$$\mathbb{F}_\lambda[A] \simeq \mathbb{F}_{\lambda^h}.$$

Wenn also I_v auf den $x^i W_0$ durch einen Charakter

$$\theta_k^{s_0+s_1\ell+...+s_{(k-1)}\ell^{(k-1)}} : I_v^t \to \mathbb{F}_{\ell^k}^*$$

operiert, operiert I_v auf W durch einen Charakter

$$\theta_{ki_0}^{(s_0+s_1\ell+...+s_{(k-1)}\ell^{(k-1)})(1+\ell^k+...+\ell^{(k(i_0-1))})}$$
$$= \theta_{mh}^{s_0+s_1\ell+...+s_{(k-1)}\ell^{(k-1)}+s_0\ell^k+...+s_{(k-1)}\ell^{(ki_0-1)}} : I_v^t \to \mathbb{F}_{\lambda^h}^*.$$

Damit folgt die Behauptung.

4 Über Systeme, die von algebraischen Heckecharakteren kommen

Die Definitionen und Aussagen in 4.1 und 4.2 findet man zum Beispiel in dem Buch „Periods of Hecke Characters“ von N. Schappacher.

4.1 Algebraische Heckecharaktere

Seien K und E Zahlkörper, $\mathfrak{f}$ ein ganzes Ideal von K (ungleich null) und $T = \sum n_\sigma \sigma \in \mathbb{Z}[\mathrm{Hom}(K, \overline{\mathbb{Q}})]$ eine $\mathbb{Z}$-Linearkombination von Einbettungen von K in einen fixen algebraischen Abschluß $\overline{\mathbb{Q}}$ von $\mathbb{Q}$.

Definition 5. *Ein* algebraischer Heckecharakter χ von K mit Werten in E, mit Unendlich-Typ T und einem Führer, der $\mathfrak{f}$ teilt*, ist ein Gruppenhomomorphismus*

$$\chi\colon I_{\mathfrak{f}}^K \longrightarrow E^*$$

von der Gruppe $I_{\mathfrak{f}}^K$ der Ideale von K prim zu $\mathfrak{f}$ in die multiplikative Gruppe von E, so daß zusätzlich gilt: für jedes Hauptideal $(\alpha) \in I_{\mathfrak{f}}^K$ mit $\alpha \equiv 1 \mod \mathfrak{f}$ und α total positiv (d.h. $\sigma(\alpha) > 0$ für alle reellen Einbettungen $\sigma\colon K \hookrightarrow \mathbb{R}$; Bezeichnung: $\alpha >> 0$) hat man:

$$\chi((\alpha)) = T(\alpha) := \prod_{\sigma \in \mathrm{Hom}(K, \overline{\mathbb{Q}})} \sigma(\alpha)^{n_\sigma}.$$

Dabei kann für eine Zahl $\alpha \in K^*$ die Bedingung $\alpha \equiv 1 \mod \mathfrak{f}$ so definiert werden, daß sich α als Quotient von zwei ganzen Zahlen α_1, α_2 schreiben läßt, für die $\alpha_i \equiv 1 \mod \mathfrak{f}$ gilt. Hat man $\mathfrak{f}|\mathfrak{f}'$, so wird ein Charakter mit Führer, der $\mathfrak{f}$ teilt, mit dem Charakter mit Führer, der $\mathfrak{f}'$ teilt, identifiziert, den man durch Einschränken auf $I_{\mathfrak{f}'}^K \subset I_{\mathfrak{f}}^K$ erhält. Das kleinste ganze Ideal $\mathfrak{f}$ (bzgl. Teilbarkeit), für das sich χ zu einem Charakter auf $I_{\mathfrak{f}}^K$ fortsetzen läßt, heißt der *Führer* von χ (Bezeichnung: $\mathfrak{f}_\chi$).
Nun tritt aber im allgemeinen nicht jedes $T = \sum n_\sigma \sigma \in \mathbb{Z}[\mathrm{Hom}(K, \overline{\mathbb{Q}})]$ als Unendlich-Typ eines algebraischen Heckecharakters von K mit Werten in E auf. Damit der Heckecharakter Werte in E hat, ist es offenbar notwendig, daß T über E definiert ist, d.h. für jedes $\tau \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/E)$ gilt $n_{\tau\sigma} = n_\sigma$. Außerdem muß nach Definition der Unendlich-Typ eines algebraischen Heckecharakters alle Einheiten aus $E_{\mathfrak{f}} := \{a \in \mathcal{O}_K^* | a \equiv 1 \mod \mathfrak{f} \text{ und } a >> 0\}$ auf 1 abbilden. Deshalb gilt:

Bemerkung 6. *Für den Unendlich-Typ $T = \sum n_\sigma \sigma$ eines algebraischen Heckecharakters $\chi\colon I_{\mathfrak{f}}^K \longrightarrow E^*$ ist die* Homogenitätsbedingung *erfüllt, d.h. es existiert ein $w \in \mathbb{Z}$, so daß für jede Einbettung $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}$ und die dadurch induzierte komplexe Konjugation $\sigma \mapsto \overline{\sigma}$ auf* $\mathrm{Hom}(K, \overline{\mathbb{Q}})$ *gilt:*

$$n_\sigma + n_{\overline{\sigma}} = w.$$

Man nennt dann w das Gewicht *von T (oder χ). Besitzt insbesondere K eine reelle Einbettung, so gilt $w \in 2\mathbb{Z}$.*

Beweis. Diese Tatsache folgt mit dem Beweis des Dirichletschen Einheitensatzes. Man halte sich z.B. an das Buch von Neukirch ([N], ab Seite 30) und wähle $t := r + s - 1$ Grundeinheiten $\epsilon_1, ..., \epsilon_t$ von K aus, wobei r die Anzahl der reellen Einbettungen und s die Anzahl der Paare von komplexen Einbettungen $K \hookrightarrow \mathbb{C}$ sei. Die Abbildung $j\colon K \to K_{\mathbb{C}} := \prod_{\tau\colon K\hookrightarrow\mathbb{C}} \mathbb{C}$, $a \mapsto (\tau(a))_\tau$, läßt sich auf den Minkowskiraum $K_{\mathbb{R}}$ (der unter der Involution $F\colon K_{\mathbb{C}} \to K_{\mathbb{C}}$, $(z_\tau)_\tau \mapsto (\overline{z_{\overline{\tau}}})_\tau$ invariante Unterraum von $K_{\mathbb{C}}$) einschränken (man hat also $j\colon K \to K_{\mathbb{R}}$), und aus der Logarithmusabbildung $l\colon K_{\mathbb{C}}^* \to \prod_\tau \mathbb{R}$, $(z_\tau)_\tau \mapsto (\log|z_\tau|)_\tau$ erhält man $l\colon K_{\mathbb{R}}^* \to \mathbb{R}^{r+s}$. Im Beweis sehen wir, daß die $\{(a_i^k)_{k=1,...,r+s} := l(j(\epsilon_i))\}_{i=1,...,t}$ gerade den t-dimensionalen Spur-Null-Unterraum von $\mathbb{R}^{r+s}$ aufspannen. Nun liegt aber für jede Grundeinheit eine Potenz schon in $E_{\mathfrak{f}}$ und für Potenzen der ϵ_i gelten dieselben Überlegungen. Deshalb können wir annehmen, daß die $\epsilon_i \in E_{\mathfrak{f}}$ sind. Nehmen wir also jetzt unseren Unendlich-Typ $T = \sum n_\sigma \sigma$ her, so ist $(\tau(\epsilon_i)^{n_\tau + n_{\overline{\tau}}})_\tau \in K_{\mathbb{R}}$ und es gilt

$$T(\epsilon_i)\overline{T}(\epsilon_i) = \prod_\tau (\tau(\epsilon_i))^{n_\tau + n_{\overline{\tau}}} = 1$$

für jedes $i \in \{1, ..., t\}$. Wenden wir darauf l an, so erhalten wir:

$$2n_{\sigma_1}a_1^i + ... + 2n_{\sigma_r}a_r^i + (n_{\sigma_{r+1}} + n_{\overline{\sigma_{r+1}}})a_{r+1}^i + ... + (n_{\sigma_{r+s}} + n_{\overline{\sigma_{r+s}}})a_{r+s}^i = 0,$$

wenn $\sigma_1, ..., \sigma_r$ die reellen und $\sigma_{r+1}, \overline{\sigma_{r+1}}, ..., \sigma_{r+s}, \overline{\sigma_{r+s}}$ die Paare komplexer Einbettungen sind. Da aber die $\{(a_i^k)_{k=1,...,r+s}\}_{i=1,...,t}$ die gesamte Spur-Null-Hyperebene aufspannen, ist der Lösungsraum von

$$(a_i^k)_{ik} x = 0$$

eindimensional, also müssen die Koeffizienten der Summen alle gleich sein: das heißt es gibt ein $w(\in \mathbb{Z})$, so daß $w = n_\sigma + n_{\overline{\sigma}}$ ist für alle σ. $\square$

Daraus folgt genauer:

Corollar 7. *Sei $\chi\colon I_{\mathfrak{f}}^K \longrightarrow E^*$ ein algebraischer Heckecharakter mit Gewicht w. Dann gilt für jede komplexe Konjugation von $\overline{E}$ die Gleichheit:*

$$\chi \cdot \overline{\chi} = N_{K|\mathbb{Q}}^w,$$

wobei $N_{K|\mathbb{Q}}(\mathfrak{a}) := \#(\mathcal{O}_K/\mathfrak{a})$ ist für ein ganzes Ideal $\mathfrak{a}$ von K.

Beweis. Man beachte zunächst, daß die Untergruppe $P_{\mathfrak{f}}$ der Ideale (α) mit α total positiv und $\alpha \equiv 1 \mod \mathfrak{f}$ von endlichem Index in $I_{\mathfrak{f}}^K$ ist: der Quotient ist $C_{\mathfrak{f}}$, die zum Körper K gehörige Strahlklassengruppe $\mod \mathfrak{f}$. Das heißt aber, daß es eine natürliche Zahl $c_\mathfrak{f}$ gibt, so daß für jedes $\mathfrak{a} \in I_\mathfrak{f}^K$ gilt: $\mathfrak{a}^{c_\mathfrak{f}} \in P_\mathfrak{f}$. Nun ist $\chi \cdot \overline{\chi} \cdot N_{K|\mathbb{Q}}^{-w} \colon I_\mathfrak{f}^K \to \mathbb{R}_+^*$ auf $P_\mathfrak{f}$ trivial, und da $\mathbb{R}_+^*$ keine Torsion hat, ist es auf ganz $I_\mathfrak{f}^K$ trivial.

□

Nun interessiert uns die Frage, zu welchen $T = \sum n_\sigma \sigma \in \mathbb{Z}[\mathrm{Hom}(K, \overline{\mathbb{Q}})]$, die über E definiert sind, es algebraische Heckecharaktere von K gibt. Dazu überlegen wir zunächst, daß zu jedem solchen T, das die Homogenitätsbedingung (mit Gewicht $w \in \mathbb{Z}$) erfüllt, ein ganzes Ideal $\mathfrak{m}$ von K existiert, so daß für $\alpha \in E_\mathfrak{m} = \{a \in \mathcal{O}_K^* | a \equiv 1 \mod \mathfrak{m} \text{ und } a >> 0\}$ schon $T(\alpha) = 1$ folgt. Für jede komplexe Konjugation und jedes $\alpha \in \mathcal{O}_K^*$ gilt:

$$|T(\alpha)|^2 = N_{K|\mathbb{Q}}((\alpha))^w = 1.$$

Also hat für jede Einheit α das Bild $T(\alpha)$ für jede Einbettung $\sigma \colon E \to \mathbb{C}$ den Betrag 1. Das erfüllen aber bekanntlich nur die Einheitswurzeln $\mu(E)$, also gilt $T(\mathcal{O}_K^*) \subset \mu(E)$. Da $\mu(E)$ endlich ist, ist der Kern H von T in $\mathcal{O}_K^*$ von endlichem Index. Mit einem Satz von Chevalley ([Ch],Theorem1) folgt, daß es ein Ideal $\mathfrak{m}$ von K gibt, so daß $T(E_\mathfrak{m}) = 1$ ist. Zur Existenz von algebraischen Heckecharakteren zu einem Unendlich-Typ hat man nun:

Bemerkung 8. *Es sei ein $T = \sum n_\sigma \sigma \in \mathbb{Z}[\mathrm{Hom}(K, \overline{\mathbb{Q}})]$ über E definiert und erfülle die Homogenitätsbedingung. Dann gibt ein Ideal $\mathfrak{m}$ von K und einen algebraischen Heckecharakter $\chi \colon I_\mathfrak{m}^K \longrightarrow E_1^*$ mit Unendlich-Typ T und Werten in einer endlichen Erweiterung E_1 von E.*

Beweis. Wir wählen $\mathfrak{m}$ wie gerade gesehen, so daß $T(E_\mathfrak{m}) = 1$ ist. Dann ist $\chi \colon P_\mathfrak{m} \to E^*$, definiert durch $(\alpha) \mapsto T(\alpha)$, ein wohldefinierter Gruppenhomomorphismus. Da $\overline{\mathbb{Q}}^*$ eine divisible abelsche Gruppe ist, kann man den Homomorphismus auf $I_\mathfrak{m}^K$ fortsetzen. Da der Index von $P_\mathfrak{m}$ in $I_\mathfrak{m}^K$ endlich ist, erhalten wir so schon einen Gruppenhomomorphismus $\chi \colon I_\mathfrak{m}^K \longrightarrow E_1^*$ in die multiplikative Gruppe einer endlichen Körpererweiterung E_1 von E. □

Wir haben gesehen, daß eine besondere Art von algebraischem Heckecharakter die Norm

$$N_{K|\mathbb{Q}} \colon I_\mathfrak{f}^K \longrightarrow \mathbb{Q}^*$$

und ihre ganzzahligen Potenzen $N_{K|\mathbb{Q}}^d$ sind. Der Führer dieses Heckecharakters ist offenbar das triviale Ideal (1). Die Unendlich-Typen sind hier von der Form $T = \sum d\sigma$. Im Beweis von Corollar 7 haben wir implizit gesehen, daß es andersrum zu jedem algebraischen Heckecharakter χ mit Unendlich-Typ $T = \sum d\sigma$ einen Charakter μ von endlicher Ordnung gibt, so daß $\chi = \mu N_{K|\mathbb{Q}}^d$ ist. Für gewisse Zahlkörper K treten nur solche algebraischen Heckecharaktere auf, wie wir im nächsten Lemma sehen werden. Dazu definieren wir: Eine algebraische Zahl α heißt *vom CM-Typ*, wenn es ein (notwendig eindeutiges) Konjugiertes $\alpha' \in \overline{\mathbb{Q}}$ von α gibt, so daß für alle Einbettungen $\mathbb{Q}(\alpha, \alpha') \overset{\tau}{\hookrightarrow} \mathbb{C}$ gilt: $\overline{\tau}(\alpha) = \tau(\alpha')$.

Lemma 9. *Sei $\chi\colon I_{\mathfrak{f}}^K \longrightarrow E^*$ ein algebraischer Heckecharakter vom Gewicht w. Sind alle Zahlen von K, die vom CM-Typ sind, total reell, so ist w gerade und es gibt einen Charakter μ von endlicher Ordnung, so daß*

$$\chi = \mu N_{K|\mathbb{Q}}^{w/2}$$

ist.

Beweis. Sei K' der Teilkörper von K, der aus allen Zahlen, die vom CM-Typ sind, besteht. Nach Voraussetzung ist hier also K' total reell. Wir wollen nun aber für den allgemeinen Fall zeigen:

$$(*) \quad \sigma_1|_{K'} = \sigma_2|_{K'} \Rightarrow n_{\sigma_1} = n_{\sigma_2}.$$

Denn dann haben wir für unseren speziellen Fall mit K' total reell für jedes $\sigma \in \mathrm{Hom}(K, \overline{\mathbb{Q}})$ und irgendeine Konjugation: $w = n_\sigma + n_{\overline{\sigma}} = 2n_\sigma$, da $\sigma|_{K'} = \overline{\sigma|_{K'}} = \overline{\sigma}|_{K'}$ ist.
Nun also zum Beweis von $(*)$: Auf $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(K, \overline{\mathbb{Q}})$ hat man bekanntlich die Äquivalenzrelation $\sigma_1 \sim_1 \sigma_2 :\Leftrightarrow \sigma_1|_{K'} = \sigma_2|_{K'}$, deren Äquivalenzklassen alle die Kardinalität $[K : K']$ haben. Wir betrachten jetzt außerdem die folgende Äquivalenzrelation $\sim_2$ auf $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(K, \overline{\mathbb{Q}})$: zwei Einbettungen σ_1 und σ_2 seien genau dann äquivalent, wenn es eine gerade Anzahl $2r$ von komplexen Konjugationen $C_1, ..., C_{2r} \in G_{\mathbb{Q}}$ gibt, so daß

$$\sigma_1 = C_1 \circ ... \circ C_{2r} \circ \sigma_2$$

ist. Da offenbar wegen der Homogenitätsbedingung $n_\sigma = n_{C_1 \circ ... \circ C_{2r} \circ \sigma}$ ist, reicht es jetzt für den Beweis von $(*)$, folgende Behauptung zu zeigen:

$$\textit{Beh.} : [\sigma]_{\sim_1} = [\sigma]_{\sim_2}.$$

„$\supseteq$“Auf K' gibt es nur eine Konjugation, also ist $C_1 \circ ... \circ C_{2r} \circ \sigma|_{K'} = \sigma|_{K'}$.
„$\subseteq$“Sei $x_0 \in K$ ein primitives Element von $K|K'$ und sei $s \in \mathbb{N}$ die Kardinalität von $[\sigma]_{\sim_2} = \{\sigma_1, ..., \sigma_s\}$. Bezeichne mit K^n die normale Hülle von K und mit $K^{n\prime}$ den Teilkörper der CM-Elemente von K^n. Dann liegt für alle elementarsymmetrischen Polynome $P_n(x_1, ..., x_s)$ vom beliebigem Grad $n \in \mathbb{N}$ die Zahl $P_n(\sigma_1(x_0), ..., \sigma_s(x_0))$ in K^n und für zwei komplexe Konjugationen C_i, C_j gilt

$$C_i \circ C_j(P_n(\sigma_1(x_0), ..., \sigma_s(x_0))) = P_n(\sigma_1(x_0), ..., \sigma_s(x_0)).$$

Also sind die $P_n(\sigma_1(x_0), ..., \sigma_s(x_0))$ insbesondere in $K^{n\prime}$ enthalten, und es gibt also ein Polynom mit Koeffizienten in $K^{n\prime}$, vom Grad s, das x_0 annuliert. Die Körpererweiterung $K^{n\prime}(x_0)|K^{n\prime}$ ist also höchstens vom Grad s. Nun ist aber

$K^{n\prime}|\mathbb{Q}$ galoissch und es ist $K^{n\prime} \cap K = K'$.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & K^{n\prime}(x_0) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
K^{n\prime} \arrow[dr, dash] & & K = K'(x_0) \arrow[dl, dash] \\
 & K' &
\end{tikzcd}$$

Deshalb ist $s \geq [K^{n\prime}(x_0) : K^{n\prime}] = [K'(x_0) : K'] = [K : K']$. Da wir die andere Inklusion bereits gezeigt haben, folgt damit die Behauptung. $\square$

4.2 Darstellungen zu algebraischen Heckecharakteren

Zunächst müssen wir einige Notationen einführen:
Mit Γ_K bezeichnen wir die Menge der Einbettungen von K in einen festen algebraischen Abschluß $\overline{\mathbb{Q}}$ von $\mathbb{Q}$. Sei ein Zahlkörper E vorgegeben. Für jede endliche Stelle λ von E fixiere eine Bewertung $v_\lambda|\lambda$ von $\overline{\mathbb{Q}}$ und bezeichne mit $\overline{\mathbb{Q}}_\lambda$ die Vervollständigung von $\overline{\mathbb{Q}}$ bezüglich v_λ und mit $\mathfrak{p}_\lambda$ das maximale Ideal von $\overline{\mathbb{Q}}_\lambda$. Zu jedem $\sigma \in \Gamma_K$ gehört ein eindeutiger Homomorphismus von $\mathbb{Q}_\ell$-Algebren $\sigma_\lambda \colon K_\ell \to \overline{\mathbb{Q}}_\lambda$, wobei $K_\ell := K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell = \prod_{v|\ell} K_v$ sei. Dabei ist der $\mathbb{Q}_\ell$-Algebrenhomomorphismus σ_λ trivial auf allen Komponenten K_v außer auf einer, nämlich gerade der, deren Bewertung v äquivalent zu $v_\lambda \circ \sigma$ ist. Wir bezeichnen zu einer festen Bewertung $v \in \Sigma_K$ die Menge derjenigen $\sigma \in \Gamma_K$, für die $v_\lambda \circ \sigma$ äquivalent zu v ist, mit $\Gamma_K(v)$.
Mit I_K bezeichnen wir die Idelegruppe von K; für $a \in I_K$ sei $a_\ell \in K_\ell$ die Komponente bei ℓ; für eine endliche Teilmenge $S \subset \Sigma_K$, fixiere einen Modulus von K, d.h. ein Tupel $\mathfrak{m} = (m_v)_{v \in S}$ mit m_v ganze Zahlen ≥ 1. Für einen Modulus $\mathfrak{m}$ definieren wir:

$$U_{v,\mathfrak{m}} := \begin{cases} \mathbb{R}^+ & \text{falls } v \text{ reell} \\ \mathbb{C}^* & \text{falls } v \text{ komplex} \\ U_v := \{x \in K_v |\ v(x) = 0\} & \text{falls } v \ \in \Sigma_K \setminus S \\ U_v^{m_v} := \{x \in U_v |\ v(1-x) \geq m_v\} & \text{falls } \ v \in S \end{cases}$$

Ein $U_{\mathfrak{m}} := \prod\limits_v U_{v,\mathfrak{m}}$ ist eine offene Untergruppe von I_K.
Es sei nun ein algebraischer Heckecharakter

$$\chi \colon I_{\mathfrak{f}}^K \longrightarrow E^*$$

mit Unendlich-Typ $T = \sum n_\sigma \sigma \in \mathbb{Z}[\mathrm{Hom}(K, \overline{\mathbb{Q}})]$ und $\mathfrak{f} = \prod_{i=1}^s \wp_i^{m_i}$ gegeben. Wir definieren zunächst den Gruppenhomomorphismus

$$\varphi_\chi \colon I_K \longrightarrow E^*$$

von der Gruppe der Idele von K in die multiplikative Gruppe von E wie folgt: Für ein $a := (a_v)_v \in I_K$ gibt es nach Approximationssatz ein $x \in K^*$, so daß für jede reelle Stelle v von K gilt, daß $xa_v \in \mathbb{R}^+$ ist und für die zu den Teilern $\wp_i$ von $\mathfrak{f}$ gehörigen Stellen $v_{\wp_i}$, daß $xa_{v_{\wp_i}} \equiv 1 \mod \wp_i^{m_i}$ ist. Das heißt aber, daß das Produkt $\mathfrak{a}(xa) := \prod_\wp \wp^{v_\wp(xa_v)}$ über alle Primideale von K in $I_\mathfrak{f}^K$ liegt. Wir definieren:

$$\varphi_\chi(a) := \chi(\mathfrak{a}(xa)) \cdot \prod_{\sigma \in \Gamma_K} \sigma(x)^{-n_\sigma}.$$

Dies ist ein wohldefinierter Gruppenhomomorphismus. Denn wenn für $x, y \in K^*, a \in I_K$ sowohl xa als auch ya die geforderten Äquivalenzen erfüllen, gilt $xy^{-1} >> 0$ und $xy^{-1} \equiv 1 \mod \mathfrak{f}$. Also ist dann

$$\chi(\mathfrak{a}(xa)) \cdot \prod_\sigma \sigma(x)^{-n_\sigma} = \chi(\mathfrak{a}(ya)) \cdot \chi((xy^{-1})) \cdot \prod_\sigma \sigma(x)^{-n_\sigma} =$$

$$\chi(\mathfrak{a}(ya)) \cdot \prod_\sigma \sigma(xy^{-1})^{n_\sigma} \prod_\sigma \sigma(x)^{-n_\sigma} = \chi(\mathfrak{a}(ya)) \cdot \prod_\sigma \sigma(y)^{-n_\sigma}.$$

Das so definierte φ_χ hat folgende Eigenschaften:

(i) $\varphi_\chi^{-1}(1)$ ist offen in I_K.

(ii) $\varphi_\chi|_{K^*} = T \colon K^* \to E^*$.

(iii) $\varphi_\chi(\pi_\wp) = \chi(\wp)$ für alle Primideale von K mit $\wp \not| \mathfrak{f}$.

Dabei steht $\pi_\wp$ für irgendein Idel, das an der zu $\wp$ gehörigen Stelle $v_\wp$ einen lokalen Parameter von $K_{v_\wp}$ als Komponente hat, und an allen anderen Stellen die 1 hat. Zu (i): Dies gilt, da $U_\mathfrak{f} \subset \varphi_\chi^{-1}(1)$ ist. Zu (ii): Es ist zu $x \in K^*$ offensichtlich $xx^{-1} >> 0$ und $xx^{-1} \equiv 1 \mod \mathfrak{f}$, und deshalb gilt: $\varphi_\chi(x) = \prod_\sigma \sigma(x^{-1})^{-n_\sigma} = \prod_\sigma \sigma(x)^{n_\sigma} = T(x)$. Zu (iii): klar.
Nun liefert uns außerdem T für jede endliche Bewertung λ von E einen stetigen Gruppenhomomorphismus

$$T_\lambda \colon I_K \longrightarrow E_\lambda^*$$

durch

$$T_\lambda(a) := \prod_{\sigma \in \Gamma_K} \sigma_\lambda(a_\ell)^{n_\sigma},$$

für den $T_\lambda|_{K^*} = T$ gilt. Da K dicht in I_K liegt, hat T_λ tatsächlich Werte in E_λ. Jetzt können wir für jede endliche Stelle λ von E den Homomorphismus

$$\chi_\lambda \colon I_K \to E_\lambda^*$$

durch $\chi_\lambda := \varphi_\lambda \cdot T_\lambda^{-1}$ definieren. Offenbar faktorisiert er über die Idelklassengruppe und ist stetig. Da E_λ total unzusammenhängend ist, enthält $\ker \chi_\lambda$ die Zusammenhangskomponente der 1 in I_K. Deshalb erhalten wir nach Klassenkörpertheorie eine λ-adische abelsche Galoisdarstellung

$$\chi_\lambda \colon \mathrm{Gal}(K^{ab}/K) \longrightarrow E_\lambda^*,$$

wobei K^{ab} die maximale abelsche Erweiterung von K in einem algebraischen Abschluß $\overline{K}$ sei. Diese Darstellung hat gerade die charakterisierende Eigenschaft, daß sie außerhalb des Trägers von $\mathfrak{f}$ unverzweigt ist, und das Bild eines Frobeniuselements zum Ideal $\wp$ gerade $\chi(\wp)$ ist. Für jeden Teilkörper M von E mit $[E:M]=m$ erhält man ein System von m-dimensionalen abelschen μ-adischen Darstellungen: jedes E_λ mit $\lambda|\mu$ ist ein $[E_\lambda : M_\mu]$-dimensionaler M_μ-Vektorraum, also ist $\chi_\mu := \oplus_{\lambda|\mu}\chi_\lambda$ eine m-dimensionale μ-adische abelsche Darstellung.

Bemerkung 10. *Sei χ ein algebraischer Heckecharakter und es sei*

$$(\chi_\lambda \colon G_K \to \mathrm{GL}(V_\lambda))_{\lambda\in\Sigma_E}$$

ein zugehöriges System von λ-adischen Darstellungen. Dann gilt: $(\chi_\lambda)_\lambda$ ist ein System von halbeinfachen Darstellungen und hat die Eigenschaften $(i)^E$, $(ii)^E$, $(iii)^E$, (iv).

Beweis. zu $(i)^E$: Sei $E'|E$ ein Zahlkörper und $\chi\colon I_{\mathfrak{f}}^K \longrightarrow E'^*$. Offenbar ist χ_λ an einer Stelle $v\nmid\ell$ außerhalb des Trägers von $\mathfrak{f}$ unverzweigt. Sei also $v\in\Sigma_K$ teilerfremd zu $\mathfrak{f}$ und ℓ, dann ist also $\chi(\wp_v)\in E'$. Dann ist aber das Frobeniuspolynom $P_v(T) = \det_E(1 - T\chi(\wp_v)) \in E[T]$, wenn man $\chi(\wp_v)$ als die Multiplikation im E-Vektorraum E' betrachtet.
zu $(ii)^E$: Sei $K_{\mathfrak{f}}$ der Strahlklassenkörper zum Modul $\mathfrak{f}$. Dann ist jede Darstellung $\chi_\lambda|_{G_{K_{\mathfrak{f}}}}$ an allen Stellen, die nicht über ℓ liegen, unverzweigt.
zu $(iii)^E$: Wir müssen nur (iii') zeigen, da wir nach 3.4 wissen, daß daraus $(iii)^E$ folgt. Sei v eine Stelle von K über ℓ, die teilerfremd zum Ideal $\mathfrak{f}$ ist und wo $K|\mathbb{Q}$ unverzweigt ist. Uns interessiert $\chi_\lambda|_{I_v}$. Wir interessieren uns damit für die Einschränkung auf die Einheitengruppe U_v, wenn wir den Homomorphismus wieder mittels des Normrestsymbols als Homomorphismus der Idelegruppe auffassen, also $\chi_\lambda|_{U_v} = \varphi_\lambda T_\lambda^{-1}|_{U_v}$. Da v teilerfremd zu $\mathfrak{f}$ ist, ist $\varphi_\lambda|_{U_v}\equiv 1$, also $\chi_\lambda|_{U_v} = T_\lambda^{-1}|_{U_v}$. Das Bild ist schon im Ring der ganzen Zahlen von E_λ enthalten (da G_K kompakt ist). Sei $\wp_\lambda$ das maximale Ideal, dann können wir also die Reduktion betrachten:

$$\overline{T_\lambda^{-1}}|_{U_v}\colon U_v \longrightarrow \mathbb{F}_\lambda{}^* \qquad x\mapsto \prod_{\sigma\in\Gamma_K(v)} \sigma_\lambda(x^{-1})^{n_\sigma} \mod \wp_\lambda.$$

Nun entsprechen diese Homomorphismen

$$x\mapsto \sigma_\lambda(x^{-1}) \mod \wp_\lambda$$

für die $f_v = [K_v : \mathbb{Q}_\ell] = |\Gamma_K(v)|$ verschiedenen $\sigma\in\Gamma_K(v)$ gerade den fundamentalen Charakteren vom Niveau f_v (siehe [Se72], 4.2 im Beweis von Lemma 4. Da $\overline{\mathbb{F}_\ell}^*$ keine Elemente der Ordnung ℓ enthält, faktorisiert die Darstellung über die zahmen Trägheitsgruppe I_v^t.) Das heißt, daß die $s_j^{\ell,i}$ aus Eigenschaft (iii') aus der Menge der n_σ gewählt werden können.
zu (iv): Für jede Stelle $v|\ell$ ist die Darstellung $\chi_\lambda|_{\mathrm{Gal}(\overline{K}_v/K_v)}$ lokal algebraisch: es

ist $\chi_\lambda|_{U_{v,\mathfrak{f}}} = \prod_{\sigma\in\Gamma_K(v)} \sigma^{-n_\sigma}$, was zum Beispiel nach Proposition 2 in [Se68], III-3 gerade beweist, daß $\chi_\lambda|_{\mathrm{Gal}(\overline{K}_v/K_v)}$ lokal algebraisch ist. Dann ist die Darstellung aber auch vom Hodge-Tate Typ ([Se68], III-7: Theorem (Tate)). □

Bemerkung 11. *Betrachte den Heckecharakter $\chi = N_{K|\mathbb{Q}}\colon I_{\mathfrak{f}}^K \longrightarrow \mathbb{Q}^*$. Dann ist das zugehörige System ℓ-adischer Darstellungen*

$$(\chi_\ell)_{\ell\in P} = (\chi_{cyc,\ell})_{\ell\in P}$$

das System der zyklotomischen Charaktere.

Beweis. Folgt sofort, da fast überall unverzweigte halbeinfache Darstellungen in Charakteristik null durch die Spuren der Frobenii eindeutig festgelegt sind. □

Wir wollen folgende Bezeichnungen einführen:

Definition 12. *Sei $(\phi_\lambda\colon G_K \to \mathrm{GL}(V_\lambda))_{\lambda\in\Sigma_E}$ ein System von n-dimensionalen λ-adischen Darstellungen über E. Wenn es algebraische Heckecharaktere χ_i mit Werten in Zahlkörpern $E_i|E$ gibt, so daß die Verhalbeinfachungen ${\phi_\lambda}^{ss}$ isomorph zu den Summen der λ-adischen Darstellungen $\chi_{i\lambda}$ sind, dann sagen wir* das System $(\phi_\lambda)_\lambda$ wird durch algebraische Heckecharaktere gegeben. *Gibt es eine endliche Körpererweiterung $K'|K$, so daß das System $(\phi_\lambda|_{G_{K'}})_\lambda$ durch algebraische Heckecharaktere gegeben wird, so ist $(\phi_\lambda)_\lambda$* potentiell durch algebraische Heckecharaktere gegeben.

4.3 Serres/Ribets Kriterium dafür, daß ein System durch algebraische Heckecharaktere gegeben wird

Wenn man für einen Körper F eine abelsche Darstellung $\rho\colon G_K \to \mathrm{Aut}_F(V)$ hat, so kann man sie via dem globalen Normrestsymbol als Darstellung von I_K auffassen. Eine n-dimensionale, abelsche, halbeinfache Darstellung wird dann durch n Charaktere $\vartheta^i\colon I_K \to \overline{F}^*$ gegeben. Das folgende Theorem von Ribet ist die Verallgemeinerung des entsprechenden Satzes von Serre für ℓ-adische Darstellungen.

Theorem 13 (Ribet). *Es sei $(\phi_\lambda\colon G_K \to \mathrm{GL}_n(E_\lambda))_{\lambda\in\Sigma}$ ein E-rationales, striktkompatibles System halbeinfacher λ-adischer Darstellungen. Außerdem existiere eine unendliche Teilmenge $\Lambda \subset \Sigma_E$, so daß für ein $\lambda\in\Lambda$ die Darstellung ϕ_λ eine abelsche Reduktion $\bar\varphi_\lambda$ hat und die Menge $\{\bar\varphi_\lambda \mid \lambda\in\Lambda\}$ folgendes erfüllt:*

Bezeichne mit ${\bar\varphi_\lambda}^i\colon I_K \to \overline{\mathbb{F}}_\ell^*$, $i = 1,...,n$, die Charaktere, die man zu $\bar\varphi_\lambda \in \{\bar\varphi_\lambda \mid \lambda\in\Lambda\}$ erhält, wenn man sie als Darstellung über $\mathbb{F}_\ell$ auffaßt.
Es existiert ein Modulus $\mathfrak{m}$ von K, eine Zahl $N\in\mathbb{N}_0$ und zu jedem ${\bar\varphi_\lambda}^i$ für jede Einbettung $\sigma\in\Gamma_K$ eine Zahl $n(\lambda,i,\sigma)\in\mathbb{Z}$ mit $|n(\lambda,i,\sigma)|\leq N$, so daß für jedes $x\in U_{\mathfrak{m}}$ gilt:

$${\bar\varphi_\lambda}^i(x) \equiv \prod_{\sigma\in\Gamma} \sigma_\ell(x_\ell^{-1})^{n(\lambda,i,\sigma)} \mod \mathfrak{p}_\lambda.$$

Dann ist $(\phi_\lambda)_\lambda$ durch algebraische Heckecharaktere von K gegeben.

Beweis. Das Theorem mit Beweis findet sich in [Ri76] als „The Second Main Theorem". Man beachte aber, daß Ribet in seinem Theorem als Behauptung nur formuliert, daß das System abelsch ist. In seinem Beweis zeigt er aber genauer, daß es durch algebraische Heckecharaktere gegeben wird. □

4.4 Kriterien dafür, daß ein motivisches Systeme durch algebraische Heckecharaktere gegeben wird

Aus dieser Erkenntnis Serres bzw. Ribets können wir ein schönes Kriterium dafür herleiten, daß ein motivisches System λ-adischer Darstellungen von algebraischen Heckecharakteren kommt: es reicht, wenn unendlich viele Reduktionen abelsch sind.

Satz 14. *Sei E ein Zahlkörper und $(\phi_\lambda : G_K \to \mathrm{Aut}(V_\lambda))_{\lambda\in\Sigma_E}$ ein n-dimensionales λ-adisches System über E mit den Eigenschaften $(i)^E, (ii)^E, (iii)^E$. Das System $(\phi_\lambda)_\lambda$ ist genau dann durch algebraische Heckecharaktere gegeben, wenn es eine unendliche Teilmenge $\Lambda \subset \Sigma_E$ gibt, so daß für jedes $\lambda \in \Lambda$ gilt, daß die Reduktion $\bar{\varphi}_\lambda$ abelsch ist.*

Beweis:. Sei $\Lambda' \subset \Lambda$ die Menge der $\lambda \in \Lambda$, wo $K|\mathbb{Q}$ unverzweigt ist und Eigenschaft $(iii)^E$ gilt. Wir wollen auf die Verhalbeinfachung $({\phi_\lambda}^{ss})_\lambda$ unseres Systems, auf eine unendliche Teilmenge von Λ' und die natürliche Zahl N_0 aus Eigenschaft $(iii)^E$ Satz 13 anwenden. Sei $\lambda \in \Lambda'$ und $\mathbb{F}_\lambda = \mathbb{F}_{\ell^m}$. Dann ist $\bar{\varphi}_\lambda$ eine nm-dimensionale abelsche $\mathbb{F}_\ell$-Darstellung. Die zugehörigen nm Charaktere, via globalem Normrestsymbol aufgefaßt als Charaktere der Idelegruppe I_K von K, seien mit

$$\bar{\varphi}^k_\lambda \colon I_K \longrightarrow \overline{\mathbb{F}}_\ell^* \qquad k = 1, ..., nm$$

bezeichnet. Mit Hilfe von Eigenschaft $(ii)^E$ finden wir einen geeigneten Modul $\mathfrak{m}$ von K mit endlichem Träger, so daß für alle $v \nmid \ell$ und $x \in U_{v,\mathfrak{m}}$ gilt:

$$\bar{\varphi}^k_\lambda(x) = 1 \qquad k = 1, ..., nm.$$

Das heißt, wir müssen jetzt nur noch die Stellen $v \in \Sigma_K$ mit $v|\ell$ betrachten. Sei also ein festes $v|\ell$ vorgegeben. Nach Eigenschaft $(iii)^E$ wissen wir, daß die Operation von I_v auf der Verhalbeinfachung $W_\lambda = \bigoplus_{i=1}^r W^i_\lambda$ (mit $\dim_{\mathbb{F}_\lambda} W^i_\lambda = h_i$) durch Charaktere

$$\theta_{h_i m}^{s_0^{\lambda,i} + s_1^{\lambda,i}\ell + ... + s_{(h_i m-1)}^{\lambda,i} \ell^{(h_i m-1)}} : I_v^t \to \mathbb{F}^*_{\lambda^{h_i}}$$

gegeben ist. Die nm Charaktere der $\mathbb{F}_\ell$-Darstellung $\bar{\varphi}_\lambda$ sind also

$$\theta_{h_i m}^{(s_0^{\lambda,i} + s_1^{\lambda,i}\ell + ... + s_{(h_i m-1)}^{\lambda,i} \ell^{(h_i m-1)})\ell^j} : I_v^t \to \overline{\mathbb{F}}_\ell^*$$

$$i = 1, ..., r; j = 0, ..., mh_i - 1.$$

Nun entsprechen andererseits die

$$\sigma_\ell \circ i \colon U_{v,m} \to \overline{\mathbb{F}}_\ell^*, \qquad x \mapsto \sigma_\ell(x_\ell^{-1}) \mod \mathfrak{p}_\lambda$$

mit $\sigma \in \Gamma(v)$ gerade den f_v fundamentalen Charakteren von Niveau $f_v = [K_v : \mathbb{Q}_\ell] = \Gamma(v)$ (siehe [Se72], 4.2 und vergleiche Beweis von Bemerkung 10). Mit Bemerkung 4 wissen wir für alle i und j, falls $\ell >> 0$, daß

$$\begin{aligned} & \theta_{h_i m}^{(s_0^{\lambda,i} + s_1^{\lambda,i}\ell + \ldots + s_{(h_i m-1)}^{\lambda,i}\ell^{(h_i m-1)})\ell^j} \\ = \quad & \theta_{f_v}^{t_0^{\lambda,i} + t_1^{\lambda,i}\ell + \ldots + t_{(f_v-1)}^{\lambda,i}\ell^{(f_v-1)}} \end{aligned}$$

mit $t_s^{\lambda,i} \in \{s_0^{\lambda,i}, s_1^{\lambda,i} \ldots, s_{(h_i m-1)}^{\lambda,i}\}$ ist, also $|t_s^{\lambda,i}| \leq N_0$. Damit gilt für alle $x \in U_{v,\mathfrak{m}}$:

$$\bar{\varphi}_\lambda^k(x) = \prod_{\sigma \in \Gamma(v)} \sigma_\ell(x_\ell^{-1})^{n_\sigma} \mod \mathfrak{p}_\lambda$$

mit $(n_\sigma)_\sigma$ eine geeignete Auswahl der $t_s^{\lambda,i}$. □

Im Kriterium von Satz 14 benötigen wir Aussagen über unendlich viele der Darstellungen ϕ_λ. Es ist aber auch richtig, daß ein motivisches System genau dann durch algebraische Heckecharaktere gegeben ist, wenn eine der Darstellungen ϕ_λ von algebraischen Heckecharakteren kommt.

Bemerkung 15. *Sei E ein Zahlkörper und $(\phi_\lambda \colon G_K \to \mathrm{Aut}(V_\lambda))_{\lambda \in \Sigma_E}$ ein strikt kompatibles System λ-adischer Darstellungen über E. Gibt es ein $\lambda_0 \in \Sigma_E$, so daß ϕ_{λ_0} durch algebraische Heckecharaktere gegeben wird, so wird das ganze System durch algebraische Heckecharaktere gegeben.*

Beweis. Seien χ_i algebraische Heckecharaktere, so daß $\phi_{\lambda_0}^{ss}$ isomorph zu $\oplus\chi_{i\lambda_0}$ ist. Da Kompatibilität transitiv ist, sind für jedes $\lambda \in \Sigma_E$ die Darstellungen ${\phi_\lambda}^{ss}$ und $\oplus\chi_{i\lambda}$ kompatibel. Fast überall unverzweigte, halbeinfache Galois-Darstellungen in Charakteristik 0 sind aber durch die Spuren der Frobenii bis auf Isomorphie festgelegt, deshalb gilt ${\phi_\lambda}^{ss} \simeq \oplus\chi_{i\lambda}$. Also wird $(\phi_\lambda)_\lambda$ durch algebraische Heckecharaktere gegeben. □

Eine triviale Folgerung aus Satz 14 ist, daß ein abelsches motivisches System immer durch algebraische Heckecharaktere gegeben ist. Wir können aber ein viel stärkeres Resultat beweisen: wenn es ein einziges $\lambda \in \Sigma_E$ gibt, dessen Darstellung ϕ_λ vom Hodge-Tate Typ ist (sei es, weil λ eine der Stellen ist, wo ϕ_λ kristallin ist, oder weil wir auch Eigenschaft (*iv*) an unser System fordern) und abelsches Bild $\phi_\lambda(G_K)$ hat, so ist schon das ganze System durch algebraische Heckecharaktere gegeben.

Satz 16. *Hat man ein strikt kompatibles System* $(\phi_\lambda\colon G_K \to \mathrm{GL}(V_\lambda))_{\lambda\in\Sigma_E}$ *von* λ*-adischen Darstellungen über* E*, und gibt es eine Stelle* $\lambda_0 \in \Sigma_E$*, deren Darstellung* $\phi^{ss}_{\lambda_0}$ *abelsch und vom Hodge-Tate Typ ist, so ist das System* $(\phi_\lambda)_\lambda$ *durch algebraische Heckecharaktere gegeben.*

Beweis. Wir zeigen, daß $\phi^{ss}_{\lambda_0}$ durch algebraische Heckecharaktere gegeben ist, denn dann folgt mit Bemerkung 15 die Behauptung. Sei ohne Einschränkung die abelsche Darstellung $\phi^{ss}_{\lambda_0}$ einfach. Dann ist aber auch die Einschränkung auf jede Trägheitsgruppe I_v (mit $v|\ell$) halbeinfach: Es operiere $\phi^{ss}_{\lambda_0}(I_v)$ auf $0 \neq W_{\lambda_0} \subset V_{\lambda_0}$ irreduzibel. Dann operiert $\phi^{ss}_{\lambda_0}(I_v)$ für jedes $g \in \phi^{ss}_{\lambda_0}(G_K)$ auf gW_{λ_0} einfach, und es gibt Repräsentanten $g_1, ..., g_s$ von $\phi^{ss}_{\lambda_0}(G_K)/\phi^{ss}_{\lambda_0}(I_v)$, so daß $V_{\lambda_0} = \bigoplus_{i=1,...,s} g_i W_{\lambda_0}$ ist.
Außerdem ist die ℓ-adische Darstellung $\phi^{ss}_{\lambda_0}$ vom Hodge-Tate Typ, da die Eigenschaft, vom Hodge-Tate Typ zu sein, stabil unter Bildung von Unterdarstellungen, Quotienten und Summen ist (siehe [Fo] 1.5). Ein Theorem von Tate ([Se68] III.7) sagt, daß eine ℓ-adische Darstellung mit diesen beiden Eigenschaften lokal algebraisch ist. Ribet zeigt, daß dies dafür ausreicht, daß $\phi^{ss}_{\lambda_0}$ auch als λ-adische Darstellung lokal algebraisch ist ([Ri76] Prop. 1.5.3.). Im selben Text liefert sein erstes Haupttheorem (Theorem MT 1), daß eine abelsche, E-rationale, halbeinfache, lokal algebraische λ-adische Darstellung durch algebraische Heckecharaktere gegeben wird. □

Wir haben also zwei recht verschiedene Kriterien dafür erhalten, daß ein motivisches System von Darstellungen von algebraischen Heckecharakteren kommt. Bei Satz 14 braucht man nur die Reduktion, aber an unendlich vielen Stellen von E, und bei Satz 16 braucht man nur eine Stelle λ von E, aber dafür die volle λ-adische Darstellung!

4.5 Beispiele motivischer Systeme, die durch algebraischen Heckecharakteren gegeben sind

Eine triviale Folgerung aus dem letzten Abschnitt ist:

Corollar 17. *Sei* E *ein Zahlkörper und* $(\phi_\lambda\colon G_K \to \mathrm{Aut}(V_\lambda))_{\lambda\in\Sigma_E}$ *ein* n*-dimensionales System* λ*-adischer Darstellungen über* E *mit den Eigenschaften* $(i)^E, (ii)^E, (iii)^E$*. Ist das System abelsch, so ist es durch algebraische Heckecharaktere gegeben.*

Beweis. klar mit Satz 14. □

Deshalb wissen wir schon über das System der Determinanten:

Corollar 18. *Sei* E *ein Zahlkörper und* $(\phi_\lambda\colon G_K \to \mathrm{Aut}(V_\lambda))_{\lambda\in\Sigma_E}$ *ein* n*-dimensionales* λ*-adisches System über* E *mit den Eigenschaften* $(i)^E, (ii)^E, (iii)^E$*. Dann wird das System der Determinanten* $(\det\circ\phi_\lambda\colon G_K \to E^*_\lambda)_{\lambda\in\Sigma_E}$ *durch einen algebraischen Heckecharakter von* K *mit Werten in* E *gegeben.*

Beweis. klar mit Corollar 17 und Bemerkung 3 (c). □

Hat der Körper K nur total reelle Elemente vom CM-Typ, so kann die Determinante nur potentiell die Potenz eines zyklotomischen Charakters sein:

Bemerkung 19. *Sei E ein Zahlkörper und $(\phi_\lambda\colon G_K \to \mathrm{Aut}(V_\lambda))_{\lambda\in\Sigma_E}$ ein n-dimensionales System λ-adischer Darstellungen über E mit den Eigenschaften $(i)^E, (ii)^E, (iii)^E$. Seien im Zahlkörper K alle Elemente, die vom CM-Typ sind, total reell. Dann gibt es ein $d \in \mathbb{Z}$ und einen endlichen Charakter μ von G_K mit Werten in E^*, so daß gilt:*

$$(\det\circ\phi_\lambda\colon G_K \to E_\lambda^*)_{\lambda\in\Sigma_E} = (\mu\chi_{cyc,\lambda}^d\colon G_K \to E_\lambda^*)_{\lambda\in\Sigma_E}.$$

Beweis. Nach Corollar 18 wissen wir, daß $(\det\circ\phi_\lambda)_\lambda$ durch einen Heckecharakter von K gegeben ist. Mit Lemma 9 wissen wir, daß es einen endlichen Charakter μ und ein $d \in \mathbb{Z}$ gibt, so daß dieser Heckecharakter gleich $\mu N_{K|\mathbb{Q}}^d$ ist. Das liefert aber gerade die Behauptung. □

Wenn E ein total reellen Zahlkörper ist, können wir auch schließen, daß die Determinante potentiell die Potenz eines zyklotomischen Charakters ist:

Proposition 20. *Sei E ein Zahlkörper und $(\phi_\lambda\colon G_K \to \mathrm{Aut}(V_\lambda))_{\lambda\in\Sigma_E}$ ein n-dimensionales System λ-adischer Darstellungen über E mit den Eigenschaften $(i)^E, (ii)^E, (iii)^E$. Die Determinanten der Frobenii außerhalb der Ausnahmemenge liegen genau dann alle in einem total reellen Zahlkörper, wenn es ein $d \in \mathbb{Z}$ und eine (höchstens) quadratische Körpererweiterung $K'|K$ gibt, so daß gilt:*

$$(\det\circ\phi_\lambda\colon G_{K'} \to E_\lambda^*)_{\lambda\in\Sigma_E} = (\chi_{cyc,\lambda}^d\colon G_{K'} \to \mathbb{Q}_\ell{}^* \subset E_\lambda^*)_{\lambda\in\Sigma_E}.$$

Beweis. Die Rückrichtung ist klar, da der zyklotomische Charakter $\chi_{cyc,\lambda}$ an den Stellen $v \nmid \ell$ unverzweigt ist und die Frobenii Werte in $\mathbb{Q}$ haben. Nach Corollar 18 wissen wir, daß $\det\circ\phi_\lambda$ durch einen algebraischen Heckecharakter χ mit Werten in E gegeben wird. Wie wir bereits bemerkt haben, ist der zugehörige Unendlich-Typ dann über E definiert. Da jede komplexe Konjugation E punktweise festhält, gilt also für jede komplexe Konjugation: $n_\sigma = n_{\overline{\sigma}}$. Dann ist aber das Gewicht $w = n_\sigma + n_{\overline{\sigma}} = 2n_\sigma$ gerade und es gibt einen Charakter μ von endlicher Ordnung nach E^*, so daß $\chi = \mu N_{K|\mathbb{Q}}^{w/2}$ ist. Da χ reelle Werte annimmt, kann der Charakter μ höchstens Ordnung 2 haben. Die dazu assoziierten Darstellungen sind aber (nach einer quadratischen Körpererweiterung) die zyklotomischen Charaktere $\chi_{cyc,\lambda}^{w/2}$. □

Bemerkung 21. *Sei E ein Zahlkörper und $(\phi_\lambda\colon G_K \to \mathrm{Aut}(V_\lambda))_{\lambda\in\Sigma_E}$ ein n-dimensionales System λ-adischer Darstellungen über E mit den Eigenschaften $(i)^E, (ii)^E, (iii)^E$. Mit einem $d \in \mathbb{Z}$ und einer endlichen Körpererweiterung $K'|K$ gelte: $(\det\circ\phi_\lambda\colon G_{K'} \to E_\lambda^*)_{\lambda\in\Sigma_E} = (\chi_{cyc,\lambda}^d\colon G_{K'} \to \mathbb{Q}_\ell{}^*)_{\lambda\in\Sigma_E}$. Setzen wir nun die* *etwas stärkere Bedingung als* $(iii)^E$ *voraus, nämlich daß es feste* $\{d_1, ..., d_s\} \subset \mathbb{Z}$ *und Vielfachheiten* $(n_i)_{i=1,..,s} \subset \mathbb{N}^s$ *mit* $\sum n_i = nm$ *gibt, so daß für fast alle* ℓ *gilt: jedes* d_i *kommt genau* n_i*-mal vor in der Familie* $(s_j^{\lambda,i} | \lambda \in \Sigma_E\ \lambda|\ell; i = 1, ..., r(\lambda); j = 0, ..., h_i(\lambda)m_\lambda - 1)$*, so kann man jetzt schließen, daß* $\sum_{i=1}^s n_i d_i$ *durch* $m := [E : \mathbb{Q}]$ *teilbar ist und* $d = (\sum_{i=1}^s n_i d_i)/m$ *ist.*

Beweis. Betrachtet man die Primzahlen ℓ von E, wo $E|\mathbb{Q}$ vollzerlegt ist, so wird für alle $\lambda|\ell$ die Aktion der Trägheitsgruppe I_v bezüglich der Reduktion von $\det \circ \phi_\ell$ durch Charaktere θ_1^d (die Reduktion des zyklotomischen Charakters $\chi_{cyc,\ell}^d$) gegeben. Andererseits wissen wir, daß sie durch Charaktere $\theta_1^{\alpha_i}$ mit $i = 1, ..., m$ gegeben werden, wo die Summe der α_i gerade $\sum_{i=1}^s n_i d_i$ ist (vergleiche Beweis von Bemerkung 3 (c)). □

5 Frobeniuskörper

In seiner Arbeit „Galois action on division points of abelian varieties with real multiplications“ ([Ri76]) betrachtet Ribet zu einer abelschen Varietät X über einem Körper K mit E-Multiplikation das System der λ-adischen Darstellungen, das man durch die Operation der Galoisgruppe G_K auf den ℓ^n-Torsionspunkten erhält. Dies ist ein E-rationales, strikt kompatibles System, und Ribet nennt den Zahlkörper, der durch die Spuren der Frobenii außerhalb der Stellen schlechter Reduktion von X/K erzeugt wird, den Frobeniuskörper F_K zu X und K. Wir definieren entsprechend Frobeniuskörper zu allgemeinen strikt kompatiblen Systemen λ-adischer Darstellungen:

Definition 22. *Ist $(\phi_\lambda\colon G_K \to \mathrm{GL}_n(E_\lambda))_{\lambda\in\Sigma_E}$ ein E-rationales und strikt kompatibles System von λ-adischen Darstellungen, so nenne den Zahlkörper $F_K \subset E$, der über $\mathbb{Q}$ durch die Spuren a_v der Frobenii an den Stellen v außerhalb der Ausnahmemenge S des Systems erzeugt wird, den* Frobeniuskörper von $(\phi_\lambda)_\lambda$ *über K.*

Tatsächlich gilt für jede endliche Teilmenge $S' \supset S$ die Gleichheit $F_K = \mathbb{Q}(\{a_v | v \notin S'\})$. Denn sei $v_0 \in S \setminus S'$. Dann ist nach Čebotarevs Dichtigkeitssatz für alle Stellen $\lambda \in \Sigma_E$ die Spur a_{v_0} in der Vervollständigung von $\mathbb{Q}(\{a_v | v \notin S'\})$ bezüglich λ enthalten. Dann ist $\mathbb{Q}(\{a_v | v \notin S'\})(a_{v_0}) = \mathbb{Q}(\{a_v | v \notin S'\})$, da eine überall vollzerlegte Körpererweiterung trivial ist.
Geht man zu einer endlichen Körpererweiterung $K'|K$ über, betrachtet also die Einschränkung $(\phi_\lambda|_{G_{K'}})_\lambda$, so wird der Frobeniuskörper höchstens kleiner:

Lemma 23. *Sei $(\phi_\lambda\colon G_K \to \mathrm{GL}_n(E_\lambda))_{\lambda\in\Sigma_E}$ ein E-rationales und strikt kompatibles System von λ-adischen Darstellungen mit Frobeniuskörper F_K. Ist $K'|K$ eine endliche Körpererweiterung, so ist $F_{K'}$ ein Teilkörper von F_K.*

Beweis. Ein Frobenius F_{v,ϕ_λ} mit $v \in \Sigma_{K'}$ ist ein Element aus dem Bild $\phi_\lambda(G_K)$ (sogar die Potenz eines Frobenius von G_K). Wegen Čebotarevs Dichtigkeitssatz wissen wir, daß für jedes $\lambda \in \Sigma_E$ alle Spuren der Elemente von $\phi_\lambda(G_K)$ in der Vervollständigung von F_K bezüglich $\lambda|_F$ liegen, also $(F_K)_{\lambda|_F}(a_v) = (F_K)_{\lambda|_F}$. Dann ist $F_K(a_v) = F_K$, da eine überall vollzerlegte Körpererweiterung trivial ist. $\square$

Deshalb macht nun auch folgende Definition Sinn:

Definition 24. *Sei $(\phi_\lambda\colon G_K \to \mathrm{GL}_n(E_\lambda))_{\lambda\in\Sigma_E}$ ein E-rationales, strikt kompatibles System λ-adischer Darstellungen. Betrachte für jede endliche Körpererweiterung $K'|K$ den Frobeniuskörper $F_{K'}$. Der kleinste auftretende Frobeniuskörper F heißt der* stabilen Frobeniuskörper des Systems $(\phi_\lambda)_\lambda$. *Ist für ein System von Darstellungen der stabile Frobeniuskörper gleich dem Frobeniuskörper F_K, so sagen wir, das System ist* spurenstabil.

Die Koeffizienten der Frobeniuspolynome liegen schon im Frobeniuskörper:

Lemma 25. *Es sei* $(\phi_\lambda\colon G_K \to \mathrm{GL}_n(E_\lambda))_{\lambda\in\Sigma_E}$ *ein* E*-rationales und strikt kompatibles System von* λ*-adischen Darstellungen mit Frobeniuskörper* F_K*. Sei* $v \in \Sigma_K$ *außerhalb der Ausnahmemenge. Dann hat das Frobeniuspolynom* $P_v(T)$ *Koeffizienten in* F_K*.*

Beweis. Es ist $P_v(T) = \det(1 - F_{v,\phi_\lambda}T) = \exp(-\sum_{n>0} \frac{\mathrm{Tr}(F^n_{v,\phi_\lambda})}{n} T^n)$. Wie oben gesehen ist aber $\mathrm{Tr}(F^n_{v,\phi_\lambda}) \in F_K$ und damit folgt die Behauptung. □

Corollar 26. *Sei* E *ein Zahlkörper und* $(\phi_\lambda\colon G_K \to \mathrm{Aut}(V_\lambda))_{\lambda\in\Sigma_E}$ *ein* n*-dimensionales System* λ*-adischer Darstellungen über* E *mit den Eigenschaften* $(i)^E$, $(ii)^E$, $(iii)^E$*. Ist der stabile Frobeniuskörper des Systems total reell, so gibt es ein* $d \in \mathbb{Z}$ *und einen endlichen Charakter* ϵ *von* G_K *mit Werten in* E*, so daß gilt:*

$$(\det \circ \phi_\lambda)_{\lambda\in\Sigma_E} = (\epsilon\chi^d_{cyc,\lambda})_{\lambda\in\Sigma_E}.$$

Ist schon der Frobeniuskörper F_K *des Systems total reell, so ist* ϵ *ein (höchstens) quadratischer Charakter.*

Beweis. Ist der stabile Frobeniuskörper total reell, so gibt es nach Proposition 20 eine endliche Körpererweiterung $K'|K$, so daß $(\det \circ \phi_\lambda|_{G_{K'}})_\lambda = (\chi^d_{cyc,\lambda}|_{G_{K'}})_\lambda$ ist. Dann ist aber $(\det \circ \phi_\lambda \otimes \chi^{-d}_{cyc,\lambda})_\lambda$ durch einen endlichen algebraischen Heckecharakter gegeben. □

6 Zweidimensionale motivische Darstellungen

6.1 Über Systeme, die potentiell durch algebraische Heckecharaktere gegeben sind

Betrachten wir ab nun also nur noch zweidimensionale λ-adische Darstellungen. Wir nennen der Einfachheit halber eine Untergruppe H von $GL_n(k)$ irreduzibel (bzw. reduzibel), wenn die Darstellung $H \hookrightarrow GL_n(k)$ irreduzibel (bzw. reduzibel) ist, d.h. wenn es einen (bzw. keinen) nicht trivialen Unterraum von k^n gibt, auf dem H invariant operiert.

Satz 27. *Sei E ein Zahlkörper und $(\phi_\lambda\colon G_K \to \mathrm{GL}_2(E_\lambda))_{\lambda\in\Sigma_E}$ ein zweidimensionales System λ-adischer Darstellungen mit den Eigenschaften $(i)^E$, $(ii)^E$, $(iii)^E$. Falls es unendlich viele $\lambda \in \Sigma_E$ gibt, für die keine zu $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_\ell)$ konjugierte Untergruppe im Bilde der Reduktion $\bar\varphi_\lambda(G_K)$ liegt, dann ist $(\phi_\lambda)_\lambda$ potentiell durch einen algebraischen Heckecharakter gegeben.*

Beweis. Dieser Satz folgt sofort mit dem folgenden Lemma und der Tatsache, daß eine Untergruppe von $GL_2(F_{p^n})$, die irreduzibel ist und deren Ordnung durch p geteilt wird, eine zu $\mathrm{SL}_2(F_p)$ konjugierte Untergruppe enthält, wenn $p \neq 2$ ist (vgl. z.B. [Ri97] Cor. 2.3). □

Lemma 28. *Sei E ein Zahlkörper und $(\phi_\lambda\colon G_K \to \mathrm{GL}_2(E_\lambda))_{\lambda\in\Sigma_E}$ ein zweidimensionales System λ-adischer Darstellungen mit den Eigenschaften $(i)^E$, $(ii)^E$, $(iii)^E$. Falls es unendlich viele $\lambda \in \Sigma_E$ gibt, so daß für die Reduktionen gilt: $\ell \nmid \mathrm{ord}(\bar\varphi_\lambda(G_K))$ oder $\bar\varphi_\lambda(G_K)$ ist reduzibel, dann ist $(\phi_\lambda)_\lambda$ potentiell durch einen algebraischen Heckecharakter gegeben.*

Beweis. Sei $L \subset \Sigma_E$ eine unendliche Stellenmenge, so daß für $\lambda \in L$ gilt:
$\ell \nmid \mathrm{ord}(\bar\varphi_\lambda(G_K))$ oder $\bar\varphi_\lambda(G_K)$ ist reduzibel. Wir zeigen dafür:
Behauptung 1: Es gibt eine endliche Körpererweiterung $M|K$, so daß für fast alle $\lambda \in L$ gilt:

(i) $\bar\varphi_\lambda(G_M)$ ist in einer Borelschen Untergruppe enthalten **oder**

(ii) $\bar\varphi_\lambda(G_M)$ ist im Normalisator einer Cartanschen Untergruppe enthalten.

Dazu: Sei $\lambda \in L$. Falls $\ell | \mathrm{ord}(\bar\varphi_\lambda(G_K))$, ist nach Voraussetzung $\bar\varphi_\lambda(G_K)$ reduzibel, also in einer Borelschen Untergruppe enthalten. Für den Fall, daß $\ell \nmid \mathrm{ord}(\bar\varphi_\lambda(G_K))$, wollen wir analog zum ℓ-adischen Beweis (siehe Diplomarbeit [Mu98]) das Bild unter

$$pr\colon \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_\lambda) \twoheadrightarrow \mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_\lambda)$$

betrachten und zeigen, daß für großes ℓ die Gruppe $pr(\bar\varphi_\lambda(I_v)) \subset pr(\bar\varphi_\lambda(G_K))$ (mit $v|\ell$) Elemente von Ordnung größer als 5 hat. Dann folgt nämlich wieder, daß $\bar\varphi_\lambda(G_K)$ nur im Normalisator einer Cartanschen Untergruppe liegen kann. (Eine

Untergruppe von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_\lambda)$, deren Ordnung prim zu ℓ ist, ist entweder im Normalisator einer Cartanschen Untergruppe enthalten, oder ihr Bild in $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_\lambda)$ ist isomorph zu $\mathfrak{A}_4, \mathfrak{S}_4$ oder $\mathfrak{A}_5$.[Mu98] Corollar 1, Seite 18) Sei $\mathbb{F}_\lambda = \mathbb{F}_{\ell^m}$.
1.Fall: I_v operiert irreduzibel
Die Operation wird dann durch einen Charakter

$$\theta_{2m}^{s_0+s_1\ell+\ldots+s_{(2m-1)}\ell^{(2m-1)}} : I_v^t \longrightarrow \mathbb{F}_{\ell^{2m}}^*$$

gegeben. Dann gilt:

$$\mathrm{ord}(pr(\bar{\varphi}_\lambda(I_v))) = \mathrm{ord}(\theta_{2m}^{(s_0+s_1\ell+\ldots+s_{(2m-1)}\ell^{(2m-1)})(\ell^m-1)}(I_v^t))$$

Diese Ordnung ist aber nach Bemerkung 4 (2) (ii) für $\ell >> 0$ immer größer als 5.
2.Fall: I_v operiert reduzibel, aber $\bar{\varphi}_\lambda(I_v) \not\subset \mathbb{F}_\lambda^*$
Dann wird die Operation durch Charaktere

$$\theta_m^{s_0^i+s_1^i\ell+\ldots+s_{(m-1)}^i\ell^{(m-1)}} : I_v^t \longrightarrow \mathbb{F}_{\ell^m}^*,\ i = 1, 2$$

gegeben. Dann ist:

$$\mathrm{ord}(pr(\bar{\varphi}_\lambda(I_v))) = \mathrm{ord}(\theta_m^{(s_0^1-s_0^2)+(s_1^1-s_1^2)\ell+\ldots+(s_{m-1}^1-s_{m-1}^2)\ell^{m-1}}(I_v^t))$$

Wieder ist diese nach Bemerkung 4 (2) (ii) für $\ell >> 0$ immer größer als 5.
3.Fall: I_v operiert reduzibel und $\bar{\varphi}_\lambda(I_v) \subset \mathbb{F}_\lambda^*$
Definiere dazu

$$\tilde{\varphi_\lambda} : G_K \xrightarrow{\bar{\varphi}_\lambda} \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_\lambda) \xrightarrow{pr} \mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_\lambda).$$

Der Kern dieser Abbildung ist eine endliche galoissche Körpererweiterung L_λ, die außerhalb der Ausnahmemenge des Systems unverzweigt ist: bei den Stellen v, die über ℓ liegen, ist sie unverzweigt, da wir gerade im 3.Fall sind. Außerdem ist die Darstellung natürlich unverzweigt, wo $\bar{\varphi}_\lambda$ es schon war. Wenn für unser λ nicht (i) oder (ii) der Behauptung gilt, muß $pr(\bar{\varphi}_\lambda(G_K))$ isomorph zu $\mathfrak{A}_4, \mathfrak{S}_4$ oder $\mathfrak{A}_5$ sein. In diesem Fall ist also $[L_\lambda : K]$ beschränkt. Nun gibt es aber nur endlich viele außerhalb einer endlichen Stellenmenge unverzweigte Körpererweiterungen eines beschränkten Grades von K. Also gibt es eine endliche Körpererweiterung $M|K$, so daß für alle λ aus dem 3. Fall die Bilder $\bar{\varphi}_\lambda(G_M)$ in einer Cartanschen Untergruppe enthalten sind.
Dies beweist also Behauptung 1. Jetzt behaupten wir noch:
Behauptung 2: Es existiert eine endliche Körpererweiterung $N|K$, so daß es für die Darstellungen $(\phi_\lambda|_{G_N})_\lambda$ eine unendliche Stellenmenge gibt, wo die Reduktionen abelsch sind.
Dazu: Für eine Stelle λ, wo $\bar{\varphi}_\lambda(G_K)$ in einer Cartanschen oder Borelschen Untergruppe enthalten ist, ist klar, das die Reduktion $\bar{\varphi}_\lambda$ abelsch ist. Betrachten wir

also jetzt die λ, wo $\bar{\varphi}_\lambda(G_K)$ im Normalisator N_λ zu einer Cartanschen Untergruppe C_λ, aber nicht schon ganz in C_λ enthalten ist. Dies wurde schon im ℓ-adischen Fall analog behandelt: man betrachtet die Charaktere der Ordnung zwei

$$G_K \to N_\lambda/C_\lambda$$

und erkennt, das sie außerhalb der Ausnahmemenge des Systems unverzweigt sind. So kann man als Körper N die endliche Komposition der zugehörigen quadratischen Körpererweiterungen von K nehmen.
Die Behauptung des Lemmas folgt nun mit Satz 14. $\square$

Wir möchten uns jetzt noch mit der Frage beschäftigen, wie weit ein potentiell durch algebraische Heckecharaktere gegebenes System davon entfernt sein kann, von algebraischen Heckecharakteren zu kommen, d.h. wie groß kann die benötigte Körpererweiterung $K''|K$ sein, damit $(\phi_\lambda|G_{K''})_\lambda$ durch algebraische Heckecharaktere gegeben wird. Im Fall, wo das System potentiell durch einen algebraischen Heckecharakter oder durch die Summe von zwei verschiedenen algebraischen Heckecharakteren gegeben wird, ist die Antwort einfach: eine quadratische Körpererweiterung reicht aus. Im Fall, wo das System potentiell durch die Summe zweimal desselben algebraischen Heckecharakters gegeben wird, können spezielle „Ausnahmedarstellungen“ auftreten.

Satz 29. *Sei E ein Zahlkörper und $(\phi_\lambda\colon G_K \to \mathrm{GL}_2(E_\lambda))_{\lambda\in\Sigma_E}$ ein zweidimensionales System λ-adischer Darstellungen mit den Eigenschaften $(i)^E$, $(ii)^E$, (iv). Wird $(\phi_\lambda)_\lambda$ potentiell durch algebraische Heckecharaktere gegeben, so gibt es zwei Möglichkeiten: Entweder gibt es eine quadratische Körpererweiterung $K'|K$, so daß $(\phi_\lambda|_{G_{K'}})_\lambda$ durch algebraische Heckecharaktere gegeben wird, oder es gibt einen algebraischen Heckecharakter χ mit Werten in E, so daß nach einer endlichen Körpererweiterung $K'|K$ die Darstellungen $\phi_\lambda|_{G_{K'}}$ isomorph zu $\chi_\lambda \times \chi_\lambda$ sind. Im letzteren Fall gibt es eine Körpererweiterung $K''|K$ vom Grad 2,4,8 oder 12, so daß die Darstellungen $\phi_\lambda|_{G_{K''}}$ durch algebraische Heckecharaktere gegeben werden.*

Eine genauere Beschreibung dieser Ausnahmedarstellungen im zweiteren Fall werden wir unten im Beweis sehen. Für unseren Beweis wollen wir die folgende Variante eines Theorems von Ribet ([Ri75] Theorem 2.3.) zeigen:

Satz 30. *Sei G eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_2(E_\lambda)$, die einen abelschen Normalteiler N besitzt, der ein Element mit zwei verschiedenen Eigenwerten enthält. Dann hat G eine offene, abelsche Untergruppe vom Index 1 oder 2.*

Beweis von Satz 30. Sei $n \in N$ das Element mit den zwei verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Wir behaupten, daß der Zentralisator $\mathrm{Cen}(n)$ von n in G abelsch ist und vom Index 1 oder 2 in G, womit die Behauptung bewiesen wäre. Um dies einzusehen, betrachte man G in $\mathrm{GL}_2(\overline{E}_\lambda)$ bezüglich der aus den Eigenvektoren von n bestehenden Basis. Der Zentralisator von n in $\mathrm{GL}_2(\overline{E}_\lambda)$ besteht dann genau aus den Diagonalelementen: diese Gruppe ist abelsch. Sei

$$n = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \text{ und sei } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

ein beliebiges Element aus G. Da N normal in G ist, liegt

$$AnA^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} \lambda_1 ad - \lambda_2 bc & (\lambda_2 - \lambda_1)ab \\ (\lambda_1 - \lambda_2)cd & \lambda_2 ad - \lambda_1 bc \end{pmatrix}$$

in N. Da N abelsch ist, kommutiert also n mit diesem Element: Dann gilt aber entweder $b = c = 0$, d.h. $A \in \mathrm{Cen}(n)$, oder $a = d = 0$. Im zweiten Fall gilt aber für jedes weitere Element B, das in $G \setminus \mathrm{Cen}(n)$ liegt: $AB^{-1} \in Cen(n)$. Dies beweist, daß der Index von $\mathrm{Cen}(n)$ in G höchstens 2 ist. □

Beweis des Satzes. Fixiere ein $\lambda_0 \in \Sigma_E$. Es gibt nach Voraussetzung eine endliche (OE galoissche) Körpererweiterung $K''|K$, so daß $\phi_{\lambda_0}(G_{K''})$ abelsch ist.

1.Fall: $(\phi_{\lambda_0}(G_K) : \phi_{\lambda_0}(G_K) \cap E^*_{\lambda_0}) = \infty$

Dann gilt für den Normalteiler $\phi_{\lambda_0}(G_{K''})$, der ja von endlichem Index in $\phi_{\lambda_0}(G_K)$ ist, daß er nicht ganz in den Homothetien enthalten ist, also ein Element mit zwei verschiedenen Eigenwerten besitzt. Also können wir den vorangegangenen Satz anwenden und mit Satz 16 folgt dann die Behauptung.

2.Fall: $(\phi_{\lambda_0}(G_K) : \phi_{\lambda_0}(G_K) \cap E^*_{\lambda_0}) < \infty$.

Dann gibt es also eine endliche Körpererweiterung $M|K$, so daß $\phi^{ss}_{\lambda_0}(G_M) \subset E^*_{\lambda_0}$. Das bedeutet aber schon, daß es einen algebraischen Heckecharakter χ mit Werten in E gibt, so daß die Darstellung $\phi^{ss}_{\lambda_0}|_{G_M}$ isomorph zur Darstellung $\chi_{\lambda_0} \times \chi_{\lambda_0}$ ist, und damit für das ganze System:

$$(\phi^{ss}_\lambda|_{G_M})_\lambda \simeq (\chi_\lambda \times \chi_\lambda)_\lambda.$$

Wir wollen noch genauer betrachten, was für Darstellungen in diesem Fall vorliegen können. Definiere zu diesem Zweck das strikt kompatible System $(\hat{\phi}_\lambda)_{\lambda \in \Sigma_E}$ durch $\hat{\phi}_\lambda := {\phi_\lambda}^{ss} \otimes {\chi_\lambda}^{-1}$. Betrachte das nach Voraussetzung endliche Bild von G_K unter

$$G_K \xrightarrow{\hat{\phi}_\lambda} \mathrm{GL}_2(E_\lambda) \xrightarrow{pr} PGL_2(E_\lambda).$$

Bekanntlich ist dieses endliche Bild $pr(\hat{\phi}_\lambda)(G_K)$ entweder zyklisch, eine Diedergruppe oder isomorph zu einer der alternierenden bzw. symmetrischen Gruppen $\mathfrak{A}_4, \mathfrak{S}_4$ oder $\mathfrak{A}_5$ (z.B. [Se72], Proposition 16). Ist $pr(\hat{\phi}_\lambda)(G_K)$ zyklisch, so ist $\hat{\phi}_\lambda(G_K)$ und damit auch ${\phi_\lambda}^{ss}(G_K)$ abelsch. Ist $pr(\hat{\phi}_\lambda)(G_K)$ eine Diedergruppe, so gibt es eine quadratische Körpererweiterung $K'|K$, so daß $\hat{\phi}_\lambda(G_{K'})$ und damit auch ${\phi_\lambda}^{ss}(G_{K'})$ abelsch sind. Die „Ausnahmedarstellungen“ sind nun die, wo $pr(\hat{\phi}_\lambda)(G_K)$ isomorph zu $\mathfrak{A}_4, \mathfrak{S}_4$ oder $\mathfrak{A}_5$ ist. Offenbar ist dann für jedes $\lambda \in \Sigma_E$ die Gruppe $pr(\hat{\phi}_\lambda)(G_K)$ isomorph zu dieser speziellen Gruppe. Diese Fälle können tatsächlich auftreten. Sei $L|K$ eine galoissche Zahlkörpererweiterung mit $\mathrm{Gal}(L|K)$ isomorph zu einer Erweiterung von $\mathfrak{A}_4, \mathfrak{S}_4$ oder $\mathfrak{A}_5$ durch eine endliche Gruppe der Homothetien, realisiert in $\mathrm{GL}_2(E)$. Im Falle von $\mathfrak{A}_4$ wäre das etwa in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}(\zeta_3)) \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}(\zeta_3))$ (wobei $\zeta_3 = e^{(2\pi/3)i}$ eine dritte Einheitswurzel sei) die durch

$$X := \begin{pmatrix} \frac{1+\zeta_3}{1-\zeta_3} & 1 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1+\zeta_3}{1-\zeta_3} \end{pmatrix} \text{und } Y := \begin{pmatrix} \zeta_3 & 0 \\ 0 & \zeta_3^2 \end{pmatrix}$$

erzeugte Gruppe; (ihre Spuren liegen in $\mathbb{Q}$) und sie ist modulo $\{1, -1\}$ isomorph zu $\mathfrak{A}_4$: es ist $X^2 = -1, Y^3 = 1$ und es gilt $XYXY = -Y^2X$. (Hier sei auch an folgendes erinnert: [Se72] 2.5. Remarque: a) $\mathrm{PGL}_2(k)$ enthält genau dann $\mathfrak{A}_4$, wenn (im Fall $\mathrm{char} k = 2$) ein $x \in k$ existiert mit $x^2 + x = 1$ oder (im Fall $\mathrm{char} k \neq 2$) $y, z \in k$ existieren mit $y^2 + z^2 = -1$. b) $\mathrm{PGL}_2(k)$ enthält genau dann $\mathfrak{S}_4$, wenn $\mathrm{char} k \neq 2$ ist und $y, z \in k$ existieren mit $y^2 + z^2 = -1$. c) $\mathrm{PGL}_2(k)$ enthält genau dann $\mathfrak{A}_5$, wenn $x, y, z \in k$ existieren mit $x^2 + x = 1$ und $y^2 + z^2 = -1$.) Sei dann $\epsilon\colon G_K \longrightarrow \mathrm{Gal}(L|K) \hookrightarrow \mathrm{GL}_2(E)$. Dann sind $(\epsilon(\chi^d_{cyc,\lambda} \times \chi^d_{cyc,\lambda})\colon G_K \to \mathrm{GL}_2(E_\lambda))_{\lambda \in \Sigma_E}$ solche Ausnahmedarstellungen. Im ersten Fall gibt es eine Körpererweiterung vom Grad 4, im zweiten vom Grad 8 und im dritten vom Grad 12, so daß ϵ nach dieser Erweiterung zyklisch, und die Darstellung damit abelsch wird. □

Corollar 31. *Sei E ein Zahlkörper und $(\phi_\lambda\colon G_K \to \mathrm{GL}_2(E_\lambda))_{\lambda \in \Sigma_E}$ ein zweidimensionales System λ-adischer Darstellungen mit den Eigenschaften $(i)^E$, $(ii)^E$, (iv), dessen Determinante $(\det \circ \phi_\lambda)_\lambda$ potentiell durch die Potenz eines zyklotomischen Charakters $(\chi^d_{cyc,\lambda})_\lambda$ gegeben wird. Wird $(\phi_\lambda)_\lambda$ potentiell durch algebraische Heckecharaktere gegeben, so gibt es zwei Möglichkeiten: Entweder gibt es eine quadratische Körpererweiterung $K'|K$, so daß $(\phi_\lambda|_{G_{K'}})_\lambda$ durch algebraische Heckecharaktere gegeben wird, oder d ist eine gerade Zahl und es gibt eine endliche Körpererweiterung $K'|K$, so daß die Darstellungen $\phi_\lambda|_{G_{K'}}$ isomorph zu $\chi^{d/2}_{cyc,\lambda} \times \chi^{d/2}_{cyc,\lambda}$ sind.*

Beweis. klar □

6.2 Große Bilder

Nun betrachten wir System von λ-adischen Darstellungen, die nicht durch algebraische Heckecharaktere gegeben sind. Als erstes wollen wir eine interessante Aussage über die Determinante eines solchen zweidimensionalen Systems machen, wenn der Frobeniuskörper F_K total reell ist.

Lemma 32. *Sei E ein Zahlkörper und $(\phi_\lambda\colon G_K \to \mathrm{Aut}(V_\lambda))_{\lambda\in\Sigma_E}$ ein zweidimensionales System λ-adischer Darstellungen über E mit den Eigenschaften $(i)^E, (ii)^E, (iii)^E$. Ist der Frobeniuskörper F_K total reell und das System nicht potentiell durch algebraische Heckecharaktere gegeben, so ist*

$$(\det\circ\phi_\lambda)_\lambda = (\chi^d_{cyc,\lambda})_\lambda.$$

Beweis. Nach Corollar 26 gibt es einen Charakter $\epsilon\colon G_K \to \{1,-1\}$, so daß $\det\circ\phi_\lambda = \epsilon\chi^d_{cyc,\lambda}$. Wir nehmen also an, daß $\epsilon \neq 1$. Sei $v|p$ eine Stelle von K außerhalb der Ausnahmemenge und sei

$$P_v(T) = T^2 + a_vT - q^d \in F_K[T]$$

(mit q einer Potenz von p). Seien $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ die Nullstellen des Frobeniuspolynoms bezüglich einer fest gewählten Einbettung $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}$. Es gilt nach Voraussetzung $(i)^E$, daß λ_1 und λ_2 betraglich gleich sind, andererseits gilt, da F_K als total reell vorausgesetzt wurde, daß $\lambda_1+\lambda_2$ reell ist. Das bedeutet, λ_1 ist das negative von λ_2 oder das komplex Konjugierte von λ_2. Ist die Determinante negativ, so kann nur ersteres der Fall sein. Dann ist aber an all solchen Stellen v, wo der Frobenius negative Determinante hat, die Spur a_v gleich null. Das zeigt aber, daß für alle $\lambda \in \Sigma_E$ die Darstellungen $(\phi_\lambda\otimes\epsilon)^{ss}$ und ${\phi_\lambda}^{ss}$ isomorph sind, da ihre Frobenii dieselben Spuren haben. Das heißt, es existiert für jedes $\lambda \in \Sigma_E$ ein $M_\lambda \in \mathrm{GL}_2(E_\lambda)$, so daß

$$M_\lambda({\phi_\lambda}^{ss}\otimes\epsilon)M_\lambda^{-1} = {\phi_\lambda}^{ss}$$

ist. Wir wissen, daß der Charakter ϵ nach einer quadratischen Körpererweiterung $K'|K$ trivial wird, also ist ${\phi_\lambda}^{ss}(G_{K'})$ im Kommutanten von M_λ enthalten. Andererseits gibt es nach Annahme ein $g \in G_K$ mit $A_\lambda := ({\phi_\lambda}^{ss}\otimes\epsilon)(g) = -{\phi_\lambda}^{ss}(g)$, also

$$M_\lambda A_\lambda M_\lambda^{-1} = -A_\lambda.$$

Dann ist aber M_λ halbeinfach: ist v ein Eigenvektor zum Eigenwert μ, so ist $A_\lambda v$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $-\mu$. Der Kommutant einer halbeinfachen Matrix ist abelsch, insbesondere ist also ${\phi_\lambda}^{ss}(G_{K'})$ abelsch. Dies ist aber ein Widerspruch dazu, daß das System nicht potentiell durch algebraische Heckecharaktere gegeben wird. □

Jetzt zeigen wir folgenden Satz über nicht potentiell abelsche Systeme, der eine Aussage für jede Stelle λ machen kann. Er folgt aus Satz 16.

Satz 33. *Hat man ein zweidimensionales System von λ-adischen Darstellungen $(\phi_\lambda \colon G_K \to \mathrm{GL}_2(E_\lambda))_{\lambda \in \Sigma_E}$ mit den Eigenschaften (i)^E, (ii)^E und (iv), das nicht potentiell durch algebraische Heckecharaktere gegeben wird, so ist für jedes λ die Darstellung ϕ_λ irreduzibel und nicht potentiell abelsch.*

Beweis. Sei λ eine Stelle von E, wo ϕ_λ reduzibel ist. Dann ist offenbar die Verhalbeinfachung ${\phi_\lambda}^{ss}$ abelsch! Wir wissen aber schon von Satz 16, daß dies nicht sein kann, wenn $(\phi_\lambda)_\lambda$ nicht durch algebraische Heckecharaktere gegeben wird. Mit Satz 16 ist auch klar, daß kein ϕ_λ potentiell abelsch sein kann, denn sonst wäre $(\phi_\lambda)_\lambda$ potentiell durch algebraische Heckecharaktere gegeben. □

Wir werden nun als nächstes zeigen, daß nicht potentiell abelschen Systeme $(\phi_\lambda \colon G_K \to \mathrm{GL}_2(E_\lambda))_\lambda$ fast von einem System von Darstellungen über dem Frobeniuskörper kommen: es gibt eine endlichen Ausnahmemenge $S \subset \Sigma_K$, so daß das System $(\phi_\lambda)_{\lambda \notin S}$ von einem System über dem Frobeniuskörper kommt. Die folgenden Lemmata werden zeigen, daß solche Stellen „gut“ sind, wo im Bild der entsprechenden Abbildung ein Element zu finden ist, das in der Vervollständigung des Frobeniuskörpers (mindestens) einen Eigenwert hat, aber keine Homothetie ist.

Lemma 34. *Es seien $k' \subset k$ Körper und $G \subset \mathrm{GL}_2(k)$ eine Untergruppe. Für jedes Element $A \in G$ gelte $\mathrm{Tr}(A) \in k'$. Die Gruppe G halte keine Richtung im Vektorraum k^2 fest und besitze ein nicht halbeinfaches Element. Dann gibt es ein Element $M \in \mathrm{GL}_2(k)$, so daß $MGM^{-1} \in \mathrm{GL}_2(k')$ ist.*

Beweis. Sei $A \in G$ ein nicht halbeinfaches Element etwa mit Eigenvektor v zum Eigenwert $\lambda \in k'$. Sei C ein Element aus G, das die Richtung von v nicht festhält; dann hat $B := CAC^{-1}$ den Eigenvektor Cv zum Eigenwert λ. Bezüglich der Basis $\{v, Cv\}$ gilt dann:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \text{und } B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ b & \lambda \end{pmatrix}$$

mit $a, b \in k^*$ und $\lambda \in k'^*$. Wegen

$$AB = \begin{pmatrix} \lambda^2 + ab & a\lambda \\ b\lambda & \lambda^2 \end{pmatrix} \text{und } \mathrm{Tr}(AB) \in k'$$

gilt also $ab \in k'^*$. Bezüglich der neuen Basis $\{b^{-1}v, Cv\}$ haben wir

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & ab \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(k').$$

Bezüglich dieser Basis liegt nun ganz G in $\mathrm{GL}_2(k')$: Sei

$$D = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in G.$$

Dann ist

$$AD = \begin{pmatrix} \alpha\lambda + \gamma ab & \beta\lambda + \delta ab \\ \gamma\lambda & \delta\lambda \end{pmatrix}$$

$$BD = \begin{pmatrix} \alpha\lambda & \beta\lambda \\ \alpha + \gamma\lambda & \beta + \delta\lambda \end{pmatrix}$$

$$BAD = \begin{pmatrix} \alpha\lambda^2 + \gamma\lambda ab & \beta\lambda^2 + \delta\lambda ab \\ \alpha\lambda + \gamma(ab + \lambda^2) & \beta\lambda + \delta(ab + \lambda^2) \end{pmatrix}$$

Aus $\mathrm{Tr}(AD) = \lambda\mathrm{Tr}(D) + \gamma ab \in k'$ und $ab \in k'^*$ folgt $\gamma \in k'$. Aus $\mathrm{Tr}(BD) = \lambda\mathrm{Tr}(D) + \beta \in k'$ folgt $\beta \in k'$. Aus $\mathrm{Tr}(BAD) = \lambda^2\mathrm{Tr}(D) + \lambda\gamma ab + \lambda\beta + \delta ab \in k'$ folgt $\delta \in k'$. Und da $\mathrm{Tr}(D) = \alpha + \delta \in k'$ ist, folgt $\alpha \in k'$. $\square$

Lemma 35. *Es seien $k' \subset k$ Körper und $G \subset \mathrm{GL}_2(k)$ eine Untergruppe. Für jedes Element $A \in G$ gelte $\mathrm{Tr}(A) \in k'$. Die Gruppe G halte keine Richtung im Vektorraum k^2 fest und besitze ein Element mit zwei verschiedenen Eigenwerten aus k'. Dann gibt es ein Element $M \in \mathrm{GL}_2(k)$, so daß $MGM^{-1} \in \mathrm{GL}_2(k')$ ist.*

Beweis. (vergleiche [W], S.483) Wähle zunächst eine Basis aus Eigenvektoren zum diagonalisierbaren Element. Da G keine Richtung festhält, haben wir ein Element im Bild, das bezüglich dieser Basis von der Form

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta' \\ \gamma' & \delta \end{pmatrix} \qquad \text{mit } \beta', \gamma' \neq 0 \text{ ist.}$$

Skaliere diese Basis noch so, daß wir dann bezüglich dieser Basis

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

mit $\gamma \neq 0$ und $a \neq b$ im Bild haben. Wir behaupten, daß bezüglich dieser Basis das ganze Bild in $\mathrm{GL}_2(k')$ liegt. Offenbar ist $A \in \mathrm{GL}_2(k')$. Für ein beliebiges Element des Bildes

$$C = \begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix}$$

ist wegen $\mathrm{Tr}(AC) = \underbrace{aTr(C)}_{\in k'} + \underbrace{(b-a)}_{\in k'^*} f \in k'$ auch $f \in k'$, dann aber auch $c = \underbrace{\mathrm{Tr}(C)}_{\in k'} - \underbrace{f}_{\in k'} \in k'$. Für unser B bedeutet das also $\alpha, \delta \in k'$ und dann auch $\gamma = \underbrace{\det(B)}_{\in k'} - \underbrace{\alpha\delta}_{\in k'} \in k'$, also $B \in \mathrm{GL}_2(k')$. Für das allgemeine C ist nun

$$CB = \begin{pmatrix} c\alpha + d\gamma & c + d\delta \\ e\alpha + f\gamma & e + f\delta \end{pmatrix}.$$

Da dies wieder im Bild liegt, folgt nach dem oben gezeigten, daß $\underbrace{c\alpha}_{\in k'} + d \underbrace{\gamma}_{\in k'^*} \in k'$ und $e + \underbrace{f\delta}_{\in k'} \in k'$, also auch $d, e \in k'$. $\square$

Lemma 36. *Seien $E_\ell|E'_\ell|\mathbb{Q}_\ell$ endliche Körpererweiterungen, $\mathcal{O}|\mathcal{O}'|\mathbb{Z}_\ell$ die zugehörigen Ganzheitsringe, $\mathbb{F}|\mathbb{F}'|\mathbb{F}_\ell$ die zugehörigen Restklassenkörper und λ ein lokaler Parameter von $\mathcal{O}$. Es sei $A \in \mathrm{GL}_2(\mathcal{O})$ ein Element, dessen Spur und Determinante in $\mathcal{O}'$ enthalten sind, und das in der Reduktion modulo λ in $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F})$ zwei verschiedenen Eigenwerten aus $\mathbb{F}'$ hat. Dann hat A zwei verschiedenen Eigenwerten aus $\mathcal{O}'$.*

Beweis. Dies folgt sofort aus dem Henselschen Lemma, angewandt auf das charakteristische Polynom von A. □

Corollar 37. *Sei der Körperturm wie im Lemma und $G \subset \mathrm{GL}_2(\mathcal{O})$, Spuren und Determinanten der Elemente von G seien in $\mathcal{O}'$ enthalten. Enthält die Reduktion modulo λ in $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F})$ eine zu $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_\ell)$ konjugierte Untergruppe, so enthält G ein über $\mathcal{O}'$ diagonalisierbares Element mit verschiedenen Eigenwerten, wenn $\ell \neq 2$ ist.*

Beweis. Sei $z \in \mathbb{Z}$ ein Erzeuger von $(\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^*$. Dann ist

$$Z = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^{\ell-2} \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_\ell) \text{ mit } \mathrm{z} \neq \mathrm{z}^{\ell-2},$$

also folgt mit dem Lemma die Behauptung. □

Lemma 38. *Sei $(\phi_\lambda\colon G_K \to \mathrm{GL}_2(E_\lambda))_{\lambda\in\Sigma_E}$ ein zweidimensionales System λ-adischer Darstellungen, das die Eigenschaften $(i)^E$,$(ii)^E$,$(iii)^E$, (iv) erfüllt und Frobeniuskörper F hat. Wenn $(\phi_\lambda)_\lambda$ nicht potentiell durch algebraische Heckecharaktere gegeben wird, gibt es eine endliche Stellenmenge $S_F \subset \Sigma_F$ (sei dann $S_E := \{\lambda \in \Sigma_E \mid \lambda|_F \in S_F\}$) und ein System von λ_F-adischen Darstellungen $(\hat{\phi}_{\lambda_F}\colon G_K \to \mathrm{GL}_2(F_{\lambda_F}))_{\lambda_F\in\Sigma_F\setminus S_F}$ für das gilt:*

$$(\hat{\phi}_{\lambda|_F} \otimes_{F_{\lambda|_F}} E_\lambda)_{\lambda\in\Sigma_E\setminus S_E} \simeq (\phi_\lambda)_{\lambda\in\Sigma_E\setminus S_E}$$

Beweis. Sei also $(\phi_\lambda)_\lambda$ nicht potentiell durch algebraische Heckecharaktere gegeben. Nach Satz 27 gibt es eine endliche Menge $S \subset \Sigma_E$, so daß für alle $\lambda \in \Sigma_E \setminus S$ das Bild $\bar{\varphi}_\lambda(G_K)$ eine zu $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_\ell)$ konjugierte Untergruppe enthält. Ergänzen wir S noch um die Stellen, die über 2 liegen, so können wir für das Komplement von S Corollar 37 und damit dann Lemma 35 anwenden. Sei nun $\lambda \in \Sigma_E \setminus S$. Es gibt also eine Darstellung $\hat{\phi}^\lambda_{\lambda|_F}\colon G_K \to \mathrm{GL}_2(F_{\lambda|_F})$ mit $\hat{\phi}^\lambda_{\lambda|_F} \otimes_{F_{\lambda|_F}} E_\lambda \simeq \phi_\lambda$. Ist nun λ' eine weitere Stelle von E, die über $\lambda|_F$ liegt, also $\lambda|_F = \lambda'|_F$, so sind $\hat{\phi}^\lambda_{\lambda|_F}$ und $\hat{\phi}^{\lambda'}_{\lambda|_F}$ isomorph, da sie irreduzibel, also halbeinfach, und kompatibel sind. Also gilt auch $\hat{\phi}^{\lambda'}_{\lambda|_F} \otimes_{F_{\lambda|_F}} E_\lambda \simeq \phi_\lambda$. Wählt man demnach zu jedem $\lambda_F \in \Sigma_F$ eine Fortsetzung λ auf E und bildet $\hat{\phi}_{\lambda_F} := \hat{\phi}^\lambda_{\lambda_F}$, so ist offenbar $(\hat{\phi}_{\lambda_F})_{\lambda_F\in\Sigma_F\setminus S_F}$ ein System λ_F-adischer Darstellungen, das die gewünschten Eigenschaften hat (mit $S_F := \{\lambda|_F \mid \lambda \in S\}$). □

Wir können noch einige Bemerkungen zu der Größe der Ausnahmemenge S_E machen:

Bemerkung 39. *Unter den Voraussetzungen von Lemma 38 gilt:*

(i) Besitzt der Zahlkörper K eine reelle Einbettung nach $\mathbb{C}$ und hat die zugehörige komplexe Konjugation in jedem Bild Determinante -1, dann kann in Lemma 38 die Ausnahmemenge $S_E = \emptyset$ gewählt werden. Dies ist also insbesondere der Fall, wenn sowohl K als auch der Frobeniuskörper F total reell sind und das d aus Lemma 32 ungerade ist.

(ii) Zerfällt eines der Frobeniuspolynome P_v im Frobeniuskörper in zwei verschiedene Linearfaktoren, so kann $S_E = \{\lambda \in \Sigma_E \,|\, (\lambda, v) \neq 1\}$ gewählt werden.

(iii) Es gibt immer eine quadratische Körpererweiterung $F'|F$ und ein System $\lambda_{F'}$-adischer Darstellungen $(\hat{\phi}_{\lambda_{F'}} : G_K \to \mathrm{GL}_2({F'}_{\lambda_{F'}}))_{\lambda_{F'} \in \Sigma_{F'}}$ für das gilt:

$$(\hat{\phi}_{\lambda|_{F'}} \otimes_{{F'}_{\lambda|_{F'}}} (EF')_\lambda)_{\lambda \in \Sigma_{EF'}} \simeq (\phi_{\lambda|_E} \otimes (EF')_\lambda)_{\lambda \in \Sigma_{EF'}}$$

(iv) Jede Stelle $\lambda \in \Sigma_E$, $\lambda|\ell$, wo ϕ_λ an einer Stelle $v \not| \ell$ nicht potentiell unverzweigt ist, muß nicht zu S_E hinzugenommen werden.

Beweis. zu (i): Die komplexe Konjugation $c \in G_K$ hat Ordnung zwei. Ist nun ihre Determinante -1, hat sie also die Eigenwerte 1 und -1. Deshalb folgt mit Satz 33 und Lemma 35 die Behauptung.
zu(ii): Dies folgt mit Satz 33 und Lemma 35.
zu(iii): Wähle ein $v \in \Sigma_K$ außerhalb der Ausnahmemenge des Systems und teilerfremd zu den Elementen der Menge S_E aus Lemma 38. Definiere F' als den Zerfällungskörper zum Polynom $P_v \in F[T]$.
zu (iv): Ist ϕ_λ bei $v \not| \ell$ nicht potentiell unverzweigt, so liegt im Bild ein nicht halbeinfaches Element und mit Lemma 34 folgt die Behauptung. $\square$

6.3 Aussagen über fast alle $\varphi_\ell(G_K)$

Wir wollen ab jetzt die ganzen Zahlen in E_λ mit $\mathcal{O}_\lambda^E$ bezeichnen. Sei

$$(\phi_\lambda\colon G_K \to \mathrm{GL}_2(E_\lambda))_{\lambda\in\Sigma_E}$$

ein System λ-adischer Darstellungen. Betrachte zu einem festen $\ell \in P$ alle Stellen $\lambda \in \Sigma_E$, die über ℓ liegen. Dann definieren wir ϕ_ℓ als das Produkt über die ϕ_λ, also

$$\phi_\ell\colon G_K \longrightarrow \prod_{\lambda|\ell} \mathrm{GL}_2(E_\lambda) \simeq \mathrm{GL}_2(E \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell).$$

Sei $(T_\lambda)_\lambda$ ein System ϕ_λ-invarianter $\mathcal{O}_\lambda^E$-Gitter und seien $(\varphi_\lambda)_\lambda$ die zugehörigen $\mathcal{O}_\lambda^E$-Darstellungen. Dann ist

$$\varphi_\ell\colon G_K \longrightarrow \prod_{\lambda|\ell} \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_\lambda^E) \simeq \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_\ell^E),$$

wobei $\mathcal{O}_\ell^E := \prod_{\lambda|\ell} \mathcal{O}_\lambda^E$ sei. Sind $\bar{\varphi}_\lambda$ die Reduktionen, so ist

$$\bar{\varphi}_\ell\colon G_K \longrightarrow \prod_{\lambda|\ell} \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_\lambda) \simeq \mathrm{GL}_2(\mathcal{F}_\ell^E),$$

wobei $\mathcal{F}_\ell^E := \prod_{\lambda|\ell} \mathbb{F}_\lambda$ sei. Die diagonale Einbettung $\mathbb{Z}_\ell \hookrightarrow \mathcal{O}_\ell^E$ (bzw. $\mathbb{F}_\ell \hookrightarrow \mathcal{F}_\ell^E$) induziert eine Inklusion

$$\mathbb{Z}_\ell{}^* \hookrightarrow \mathcal{O}_\ell^{E*} \;\; (\text{bzw. } \mathbb{F}_\ell{}^* \hookrightarrow \mathcal{F}_\ell^{E*}).$$

Satz 40. *Sei $(\phi_\lambda\colon G_K \to \mathrm{GL}_2(E_\lambda))_{\lambda\in\Sigma_E}$ ein zweidimensionales System λ-adischer Darstellungen, das die Eigenschaften $(i)^E$,$(ii)^E$,$(iii)^E$ und (iv) erfüllt und spurenstabil mit Frobeniuskörper F ist. Mit einem $d \in \mathbb{Z}$ gelte*

$$(\det \circ \phi_\lambda)_{\lambda\in\Sigma_E} = (\chi_{cyc,\lambda}^d)_{\lambda\in\Sigma_E}.$$

Das System $(\phi_\lambda)_\lambda$ sei nicht potentiell durch algebraische Heckecharaktere gegeben. Es sei $S_E \subset \Sigma_E$ eine endliche Stellenmenge und

$$(\varphi_\lambda\colon G_K \to \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_\lambda^F) \subset \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_\lambda^E))_{\lambda\in\Sigma_E\setminus S_E}$$

ein solches System von Darstellungen, daß

$$(\varphi_{\lambda|_F} \otimes_{F_{\lambda|_F}} E_\lambda)_{\lambda\in\Sigma_E\setminus S_E} \simeq (\phi_\lambda)_{\lambda\in\Sigma_E\setminus S_E}$$

ist, (was es nach Lemma 38 gibt). Sei $S := \{\ell \in P \mid \exists \lambda \in S_E : \lambda|\ell\}$.

1. Dann gilt für alle $\ell \in P \setminus S$:

$$\varphi_\ell(G_K) \overset{offen}{\subset} \mathcal{B}_{\ell,d}^F := \{A \in \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_\ell^F) \mid \det(A) \in (\mathbb{Z}_\ell{}^*)^d\}.$$

Das heißt also für $d \neq 0$:

$$\varphi_\ell(G_K) \overset{offen}{\subset} \{A \in \mathrm{GL}_2(F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell) \mid \det(A) \in \mathbb{Q}_\ell{}^*\}$$

und für $d = 0$:

$$\varphi_\ell(G_K) \overset{offen}{\subset} \mathrm{SL}_2(F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell).$$

2. Für fast alle $\ell \in P$ gilt

$$\varphi_\ell(G_K) = \mathcal{B}^F_{\ell,d}.$$

Beweis. Wir können hier Beweise von Ribet benutzen.
Zu 1 : Wir übernehmen den Beweis von Theorem (1.2) von Ribet in [Ri75]: daß die ϕ_λ nicht potentiell abelsch sind wissen wir nach Satz 33. Ribet formuliert die Aussage nur für $d > 0$, aber die Fälle $d \leq 0$ können analog mitbehandelt werden.
Zu 2 : Ribet zeigt in [Ri76] folgendes Theorem (er formuliert es aber etwas spezieller):

Theorem ([Ri76], (5.3.5.)). *Es sei $(\phi_\lambda\colon G_K \to \mathrm{GL}_2(E_\lambda))_{\lambda\in\Sigma_E}$ ein E-rationales, strikt kompatibles System λ-adischer Darstellungen, für das mit einem $d \in \mathbb{Z}$ gilt $(\det \circ \phi_\lambda)_{\lambda\in\Sigma_E} = (\chi^d_{cyc,\lambda})_{\lambda\in\Sigma_E}$. Das System sei spurenstabil mit Frobeniuskörper E. Die Verhalbeinfachungen der ϕ_λ seien alle nicht potentiell abelsch. Dann gilt für fast alle Primzahlen ℓ, die in $E|\mathbb{Q}$ vollzerlegt sind:*

$$\bar{\varphi}_\ell(G_K) = \{A \in \mathrm{GL}_2(\mathcal{F}^F_\ell) | \det(A) \in (\mathbb{F}_\ell{}^*)^d\}.$$

Daraus folgert er:

Corollar ([Ri76], (5.3.6.)). *Seien die Voraussetzungen wie im Theorem. Dann gibt es ein $v \in \Sigma_K$ außerhalb der Ausnahmemenge des Systems, so daß für das Quadrat der Spur vom Frobenius a_v^2 gilt*

$$\mathbb{Q}(a_v^2) = F.$$

Das bedeutet aber, daß es in fast jedem $\bar{\varphi}_\ell(G_K)$ ein Element x gibt, dessen Spur zum Quadrat $(\mathrm{Tr}(x))^2$ die $\mathbb{F}_\ell$-Algebra $\mathcal{F}^F_\ell$ erzeugt. Damit sind die Voraussetzungen zum Theorem (3.1) von Ribet ([Ri75]) erfüllt, und wir erhalten für fast alle $\ell \in P$:

$$\bar{\varphi}_\ell(G_K) = \{A \in \mathrm{GL}_2(\mathcal{F}^F_\ell) | \det(A) \in (\mathbb{F}_\ell{}^*)^d\}.$$

Dann folgt aber aus Corollar (2.2) von Ribet ([Ri75]) für die unverzweigten Stellen von $E|\mathbb{Q}$ außerhalb S die Behauptung.

$\square$

Corollar 41. *Sei* $(\phi_\lambda\colon G_K \to \mathrm{GL}_2(E_\lambda))_{\lambda\in\Sigma_E}$ *ein zweidimensionales System* λ-*adischer Darstellungen, das die Eigenschaften* $(i)^E$,$(ii)^E$,$(iii)^E$ *und* (iv) *erfüllt und spurenstabil mit Frobeniuskörper* E *ist. Mit einem* $d \in \mathbb{Z}$ *gelte* $(\det\circ\phi_\lambda)_{\lambda\in\Sigma_E} = (\chi^d_{cyc,\lambda})_{\lambda\in\Sigma_E}$. *Das System* $(\phi_\lambda)_\lambda$ *sei nicht potentiell durch algebraische Heckecharaktere gegeben.*
1. Dann gilt für alle $\ell \in P$*:*

$$\varphi_\ell(G_K) \overset{offen}{\subset} \mathcal{B}^E_{\ell,d} := \{A \in \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}^E_\ell) \mid \det(A) \in (\mathbb{Z}_\ell{}^*)^d\}.$$

2. Für fast alle $\ell \in P$ *gilt*

$$\varphi_\ell(G_K) = \mathcal{B}^E_{\ell,d}.$$

Beweis. klar □

Dieses Corollar entspricht der Situation in [Ri76], wo nur der spurenstabile Fall mit Frobeniuskörper E betrachtet wird.
Es folgt nun eine Aussage über den allgemeinen, nicht notwendig spurenstabilen Fall:

Satz 42. *Seien* K *und* E *Zahlkörper und sei* $(\phi_\lambda\colon G_K \to \mathrm{GL}_2(E_\lambda))_{\lambda\in\Sigma_E}$ *ein zweidimensionales System* λ-*adischer Darstellungen mit den Eigenschaften* $(i)^E$, $(ii)^E$, $(iii)^E$, (iv). *Der stabile Frobeniuskörper sei* $F \subset E$ *und mit einem* $d \in \mathbb{Z}$ *gelte* $(\det\circ\phi_\lambda)_{\lambda\in\Sigma_E} = (\chi^d_{cyc,\lambda})_{\lambda\in\Sigma_E}$. *Das System sei nicht potentiell durch algebraische Heckecharaktere gegeben.*
Dann gibt es eine endliche Stellenmenge $S \subset P$*, so daß gilt:*

1. *Für alle* $\lambda \in \Sigma_E \setminus S_E$ *(wobei* $S_E := \{\lambda \in \Sigma_E | \ \lambda|\ell \in S\}$*) enthält* $\phi_\lambda(G_K)$ *ein Konjugiertes von*

   $$\mathcal{B}^F_{\lambda,d} := \{A \in \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}^F_\lambda) \mid \det(A) \in (\mathbb{Z}_\ell{}^*)^d\}$$

   als Untergruppe vom Index 1 oder 2.

2. *Es existiert eine abelsche, außerhalb der Ausnahmemenge* $\mathcal{S}$ *des Systems unverzweigte, galoissche Körpererweiterung* $K'|K$ *vom Exponenten 2, so daß* $\phi_\lambda|_{G_{K'}}$ *spurenstabil ist mit Frobeniuskörper* $F_{K'} = F$. *Es gilt für alle* $\ell \in P \setminus S$ *:*

   $$\phi_\ell(G_{K'}) \text{ ist ein Konjugiertes von } \mathcal{B}^F_{\ell,d}.$$

3. *Der stabile Frobeniuskörper* F *des Systems ist*

   $$F = \mathbb{Q}(a_v^2 | v \in \Sigma_K \setminus \mathcal{S}),$$

   wird also über $\mathbb{Q}$ *von den Quadraten der Spuren* a_v *der Frobenii außerhalb der Ausnahmemenge* $\mathcal{S}$ *des Systems* $(\phi_\lambda)_\lambda$ *erzeugt. Es gibt bereits ein einziges* $v_0 \in \Sigma_K \setminus \mathcal{S}$*, so daß*

   $$F = \mathbb{Q}(a^2_{v_0})$$

   ist.

Beweis. Sei $K'|K$ eine endliche Körpererweiterung, so daß $F_{K'} = F$ ist. Wegen Lemma 38 können wir annehmen, daß für jedes λ außerhalb einer endlichen Stellenmenge $S \subset \Sigma_E$ die Darstellung $\phi_\ell|_{G_{K'}}$ schon nach $\mathrm{GL}_2(F_\lambda)$ geht.

zu 1.
Nach Satz 40 gilt für fast alle $\ell \in P$: $\phi_\ell(G_{K'}) = \mathcal{B}^F_{\ell,d}$. Sei jetzt OE $\ell \neq 2$. Da wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $K'|K$ als galoissch annehmen können, sehen wir, daß für fast alle Stellen $\lambda \in \Sigma_E$ die Gruppe $\phi_\lambda(G_K)$ als Normalteiler ein Konjugiertes von $\mathcal{B}^F_{\lambda,d}$ enthält. Wähle eine Basis, so daß $\phi_\lambda(G_K) \supset \mathcal{B}^F_{\lambda,d}$. Für jedes

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \phi_\lambda(G_K)$$

und jedes $B \in \mathcal{B}^F_{\lambda,d}$ gilt dann also

$$\frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \in \mathcal{B}^F_{\lambda,d} \subset \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}^F_\lambda),$$

und da $\det(A) \in \mathbb{Z}_\ell{}^*$ liegt, auch schon

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}^F_\lambda).$$

Nutze dies für verschiedene Elemente aus $\mathcal{B}^F_{\lambda,d}$ aus und erhalte:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \det(A) - ac & a^2 \\ -c^2 & \det(A) + ac \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}^F_\lambda),$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \det(A) + bd & -b^2 \\ d^2 & \det(A) - bd \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}^F_\lambda),$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad - ac - bd & a^2 - b^2 - ab \\ -c^2 - d^2 + cd & ac - bc + bd \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}^F_\lambda).$$

Hieraus lesen wir ab: $a^2, b^2, c^2, d^2, ab, ac, ad, bc, bd, cd \in \mathcal{O}^F_\lambda$. Daraus erkennt man, daß wenn eines der a, b, c, d schon in $\mathcal{O}^F_\lambda \backslash \{0\}$ ist, alle anderen auch ganze Elemente von F_λ sind (und damit A schon in $\mathcal{B}^F_{\lambda,d}$ liegt). Sei v Fortsetzung der diskreten Bewertung auf F. Hat eines der a, b, c, d eine gebrochene (positive!) Bewertung, so müssen offenbar alle gebrochene Bewertungen haben (oder Null sein); das ist aber ein Widerspruch, da die Determinante von A dann positive Bewertung hat, also keine Einheit sein kann. Also haben a, b, c, d ganzzahlige Bewertungen. Im Fall $A \notin \mathcal{B}^F_{\lambda,d}$ folgt dann offenbar

$$A = \sqrt{\epsilon} \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$$

mit $\epsilon \in (\mathcal{O}_\lambda^F)^*$, $\sqrt{\epsilon} \notin (\mathcal{O}_\lambda^F)^*$ und $a', b', c', d' \in \mathcal{O}_\lambda^F$. Insgesamt folgt, daß entweder

$$\phi_\lambda(G_K) = \mathcal{B}_{\lambda,d}^F$$

ist, oder mit einem A der obigen Form

$$\phi_\lambda(G_K) = \mathcal{B}_{\lambda,d}^F \dot{\cup} A\mathcal{B}_{\lambda,d}^F.$$

Denn ist ein $A' \in \phi_\lambda(G_K) \setminus \mathcal{B}_{\lambda,d}^F$, so ist offenbar $A^{-1}A' \in \mathcal{B}_{\lambda,d}^F$.

zu 2.

In 1. haben wir gesehen, daß für fast alle $\lambda \in \Sigma_E$ entweder schon $\phi_\lambda(G_K) = \mathcal{B}_{\lambda,d}^F$ ist, oder es gibt eine quadratische Körpererweiterung $K_\lambda|K$, so daß $\phi_\lambda(G_{K_\lambda}) = \mathcal{B}_{\lambda,d}^F$ ist. Wir wollen sehen, daß diese Körpererweiterungen $K_\lambda|K$ für fast alle λ außerhalb $\mathcal{S}$ unverzweigt sind! Da dies jeweils für alle Stellen von K, die nicht über ℓ liegen, klar ist, müssen wir also für eine Stelle $v \in \Sigma_K$ mit $v|\ell$ zeigen, daß $\phi_\lambda(I_v) \subset \mathcal{B}_{\lambda,d}^F$ ist. Nehmen wir also an, es gibt Elemente in $\phi_\lambda(I_v) \setminus \mathcal{B}_{\lambda,d}^F$. Diese sind dann von der Form $\sqrt{\epsilon}A$ mit $\epsilon \in \mathcal{O}_\lambda^{F*}$, $\sqrt{\epsilon} \notin \mathcal{O}_\lambda^{F*}$ und $A \in \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_\lambda^F)$. Dann sind aber auch nach Reduktion Elemente in $\overline{\phi_\lambda}(I_v) \setminus \mathcal{A}_{\lambda,d}^F$ (wobei $\mathcal{A}_{\lambda,d}^F := \{A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_\lambda) |\det(A) \in ({\mathbb{F}_\ell}^*)^d\}$), und zwar jedenfalls von der Form tB mit $t \in \mathbb{F}_{\ell^{2m}} \setminus \mathbb{F}_{\ell^m}$, $t^2 \in \mathbb{F}_{\ell^m}$ und $B \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_{\ell^m})$, wenn der Restklassenkörper von $\mathcal{O}_\lambda^F$ gleich $\mathbb{F}_{\ell^m}$ ist. Sei jetzt die Operation von I_v auf der Reduktion durch die fundamentalen Charaktere

$$\theta_r^{s_0^1+s_1^1\ell+\ldots+s_{r-1}^1\ell^{r-1}} : I_v^t \to \mathbb{F}_{\ell^r}^*$$

und

$$\theta_r^{s_0^2+s_1^2\ell+\ldots+s_{r-1}^2\ell^{r-1}} : I_v^t \to \mathbb{F}_{\ell^r}^*$$

mit $|s_i^j| \leq N_0$ gegeben, und sei ϑ ein Erzeugendes von $\mathbb{F}_{\ell^r}^*$. Dann sind also $\lambda_i := \vartheta^{s_0^i+s_1^i\ell+\ldots+s_{r-1}^i\ell^{r-1}}$ die Eigenwerte eines Erzeugenden A_0 von $\overline{\phi_\lambda}(I_v)$, das nach Annahme nicht in $\mathcal{A}_{\lambda,d}^F$ liegt. Dann ist für sehr großes ℓ immer $\lambda_1 \neq -\lambda_2$: dies folgt mit Bemerkung 4 (2)(ii), denn aus $\lambda_1 = -\lambda_2$ folgt

$$\vartheta^{(s_0^1-s_0^2)+(s_1^1-s_1^2)\ell+\ldots+(s_{r-1}^1-s_{r-1}^2)\ell^{r-1}} = -1,$$

also

$$\mathrm{ord}\left(\vartheta^{(s_0^1-s_0^2)+(s_1^1-s_1^2)\ell+\ldots+(s_{r-1}^1-s_{r-1}^2)\ell^{r-1}}\right) = 2.$$

Das Erzeugende A_0 hat also ohne Beschränkung der Allgemeinheit eine nicht verschwindende Spur, und deshalb gilt nach Annahme

$$\mathrm{Tr}(A_0) \in \mathbb{F}_{\ell^{2m}} \setminus \mathbb{F}_{\ell^m} \quad \mathrm{Tr}(A_0^2) \in \mathbb{F}_{\ell^m}.$$

1.Fall: Die Eigenwerte λ_i^2 von A_0^2 liegen in $\mathbb{F}_{\ell^m}$
Das heißt, wir haben $(\lambda_i^2)^{\ell^m-1} = 1$ und damit

$$\lambda_i^{\ell^m-1} = \vartheta^{(s_0^i+s_1^i\ell+\ldots+s_{r-1}^i\ell^{r-1})(\ell^m-1)} \in \{-1, 1\}.$$

Mit Bemerkung 4 (2) (ii) folgt dann aber für $\ell >> 0$ schon $(\lambda_i)^{\ell^m-1} = 1$ und damit $\mathrm{Tr}(A_0) \in \mathbb{F}_{\ell^m}$, was ein Widerspruch ist.
2.Fall: Die Eigenwerte von A_0^2 liegen in $\mathbb{F}_{\ell^{2m}}$ und sind zueinander konjugiert
Das heißt, wir haben $(\lambda_1^2)^{\ell^m} = \lambda_2^2 \in \mathbb{F}_{\ell^{2m}}$ und damit

$$\lambda_1^{\ell^m}\lambda_2^{-1} = \vartheta^{\ell^m(s_0^1+s_1^1\ell+\ldots+s_{r-1}^1\ell^{r-1})-(s_0^2+s_1^2\ell+\ldots+s_{r-1}^2\ell^{r-1})} \in \{-1,1\}.$$

Mit Bemerkung 4 (2) (ii) folgt dann aber für $\ell >> 0$ schon $(\lambda_1)^{\ell^m} = \lambda_2 \in \mathbb{F}_{\ell^{2m}}$ und damit $\mathrm{Tr}(A_0) \in \mathbb{F}_{\ell^m}$, was ein Widerspruch ist. Wir haben gesehen: die $K_\lambda|K$ sind tatsächlich für fast alle λ außerhalb $\mathcal{S}$ unverzweigt.
Da es nur endlich viele außerhalb $\mathcal{S}$ unverzweigte quadratische Körpererweiterungen von K gibt, können wir das Kompositum K' in $\overline{K}$ bilden und es gilt dann für fast alle $\lambda \in \Sigma_E$: $\phi_\lambda(G_{K'}) = \mathcal{B}_{\lambda,d}^F$. Nun ist also offenbar der Frobeniuskörper des Systems $(\phi_\lambda|_{G_{K'}})_\lambda$ in F enthalten, und da andererseits F der stabile Frobeniuskörper von $(\phi_\lambda)_\lambda$ ist, muß der Frobeniuskörper von $(\phi_\lambda|_{G_{K'}})_\lambda$ schon gleich F sein. Mit Satz 40 folgt der Rest der Behauptung.

zu 3.
Sei $K'|K$ eine galoissche Erweiterung vom Exponenten 2, so daß $F_{K'} = F$ ist. Beachte nun, daß für ein $x \in \mathrm{GL}_2(E_\lambda)$ gilt $(\mathrm{Tr}(x))^2 = \mathrm{Tr}(x^2) + 2\det(x)$, und daß die Determinanten der Frobenii in $\mathbb{Q}$ liegen! Da $K'|K$ vom Exponenten 2 ist, ist klar, daß

$$\mathbb{Q}(a_v^2|v \in \Sigma_K \setminus \mathcal{S}) \subset F_{K'} = F$$

ist. Andererseits haben wir im Beweis des zweiten Teils von Satz 40 gesehen, daß es eine Stelle v_0 von K' gibt, so daß $\mathbb{Q}(a_{v_0}^2) = F$ ist. Da

$$\mathbb{Q}(a_{v_0}^2) \subset \mathbb{Q}(a_w^2|w \in \Sigma_{K'} \setminus \mathcal{S}) \subset \mathbb{Q}(a_v^2|v \in \Sigma_K \setminus \mathcal{S}),$$

folgt die Behauptung. □

Folgendes Corollar entspricht der Situation in [Ri97].

Corollar 43. *Sei E ein Zahlkörper und sei $(\phi_\lambda\colon G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(E_\lambda))_{\lambda\in\Sigma_E}$ ein zweidimensionales System λ-adischer Darstellungen mit den Eigenschaften $(i)^E$, $(iii)^E$, (iv). Jedes ϕ_λ sei an den Stellen, die nicht über ℓ liegen, semistabil. Der Frobeniuskörper sei $F_{\mathbb{Q}}$ und mit einem ungeraden $d \in \mathbb{Z}$ gelte $(\det\circ\phi_\lambda)_{\lambda\in\Sigma_E} = (\chi_{cyc,\lambda}^d)_{\lambda\in\Sigma_E}$. Das System sei nicht potentiell durch algebraische Heckecharaktere gegeben.*
1. Dann gilt für jedes $\ell \in P$: ein Konjugiertes von $\phi_\lambda(G_{\mathbb{Q}})$ ist offen in $\mathcal{B}_{\ell,d}^{F_{\mathbb{Q}}}$ enthalten.
2. Für fast alle $\ell \in P$ gilt: $\phi_\lambda(G_{\mathbb{Q}})$ ist ein Konjugiertes von $\mathcal{B}_{\ell,d}^{F_{\mathbb{Q}}}$.

Beweis. Zunächst liegt das Bild jeder Darstellung ϕ_λ bezüglich einer geeigneten Basis in $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_\lambda^{F_{\mathbb{Q}}})$, da d ungerade und $\mathbb{Q}$ total reell ist (Bemerkung 39 (i)).

Wir müssen jetzt nur noch zeigen, daß die quadratischen Körpererweiterungen $K_\lambda|\mathbb{Q}$ aus dem Beweis von Satz 42, Teil (ii) überall unverzweigt sind. Da es keine unverzweigte Körpererweiterung von $\mathbb{Q}$ gibt, folgt daraus dann, daß $F_{\mathbb{Q}}$ schon stabiler Frobeniuskörper ist, und daraus die Behauptung. Nun haben wir aber im Beweis von 42, Teil (i) gesehen, daß jedes Element $A \in \phi_\lambda(G_K) \setminus \mathcal{B}^F_{\ell,d}$ entweder $\mathrm{Tr}(A) = 0$ oder $\mathrm{Tr}(A) \notin F_\lambda$ hat. Da aber die Darstellung nach Voraussetzung an allen Stellen, die nicht über ℓ liegen, semistabil ist, hat jedes Element aus der Trägheitsgruppe Spur gleich zwei! Daß fast alle K_λ an den Stellen $v|\ell$ unverzweigt sind, haben wir im Beweis von Satz 42, Teil (iii) gesehen. $\square$

6.4 Adelische Version

Wir wollen nun zu einem System ganzer λ-adischer Darstellungen

$$(\varphi_\lambda\colon G_K \to \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_\lambda^E))_\lambda$$

das Produkt der φ_ℓ, das wir mit φ bezeichnen wollen,

$$\varphi\colon G_K \longrightarrow \prod_{\ell\in P} \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_\ell^E)$$

betrachten. Uns interessiert die Größe des Bildes für den Fall, daß das System $(\varphi_\lambda)_\lambda$ nicht potentiell durch algebraische Heckecharaktere gegeben wird.

Satz 44. *Seien K und E Zahlkörper und sei $(\varphi_\lambda\colon G_K \to \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_\lambda^E))_{\lambda\in\Sigma_E}$ ein zweidimensionales System ganzer λ-adischer Darstellungen mit Eigenschaften $(i)^E$, $(ii)^E$, $(iii)^E$, (iv), das nicht potentiell durch algebraische Heckecharaktere gegeben wird. Das System sei spurenstabil mit Frobeniuskörper E und mit einem $d \in \mathbb{Z}$ gelte $(\det\circ\varphi_\lambda)_{\lambda\in\Sigma_E} = (\chi_{cyc,\lambda}^d)_{\lambda\in\Sigma_E}$. Dann gilt*

$$\varphi(G_K) \overset{offen}{\subset} \prod_{\ell\in P} \mathcal{B}_{\ell,d}^E,$$

wobei hier wieder $\mathcal{B}_{\ell,d}^E = \{A \in \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_\ell^E) \mid \det(A) \in (\mathbb{Z}_\ell{}^*)^d\}$ bezeichnen soll. Das heißt insbesondere für $d = 0$:

$$\varphi(G_K) \overset{offen}{\subset} \prod_{\ell\in P} \mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_\ell^E).$$

Für den Beweis formulieren wir zuerst folgendes Lemma:

Lemma 45. *Sei S eine endliche Menge von Primzahlen und $G \subset \prod_{\ell\in S} \mathcal{B}_{\ell,d}^E$ eine abgeschlossene Untergruppe, deren Projektionen $pr_\ell(G) \subset \mathcal{B}_{\ell,d}^E$ alle offen sind. Dann ist $G \overset{offen}{\subset} \prod_{\ell\in S} \mathcal{B}_{\ell,d}^E$.*

Beweis Lemma. (vergleiche [Ri97], Corollary 7.2) Fixiere zunächst ein $\ell \in S$. Sei $G_\ell := \mathrm{pr}_\ell(G)$ und G'_ℓ der Kern der Komposition

$$G_\ell \hookrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_\ell^E) \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathcal{F}_\ell^E).$$

Natürlich hat G'_ℓ endlichen Index in G_ℓ, also ist auch G'_ℓ offen in $\mathcal{B}_{\ell,d}^E$. Außerdem ist G'_ℓ eine pro-ℓ-Gruppe; tatsächlich ist es der projektive Limes von nilpotenten Gruppen von ℓ-Potenz Ordnung.
Sei $G'_S = (\prod_{\ell\in S} G'_\ell) \cap G$. Als Untergruppe von $\prod_{\ell\in S} G'_\ell$ ist G'_S pronilpotent. Deshalb ist G'_S Produkt seiner Sylow-Gruppen, also $G'_S = \prod_{\ell\in S} G'_\ell$. Also hat G'_S endlichen Index in $\prod_{\ell\in S} G_\ell$, was wiederum offen in $\prod_{\ell\in S} \mathcal{B}_{\ell,d}^E$ ist. Daraus folgt die Behauptung. □

Für die weiteren Überlegungen führen wir zunächst eine Terminologie von Serre ([Se68] IV-25) ein: Sei Y eine proendliche Gruppe und A eine endliche, einfache Gruppe. Wir sagen *A kommt vor in Y* (A occurs in Y), wenn es abgeschlossene Untergruppen Y_1, Y_2 von Y gibt, so daß Y_1 eine normale Untergruppe von Y_2 ist und A isomorph zu Y_2/Y_1 ist. Mit $Occ(Y)$ bezeichnen wir die Menge der Klassen von endlichen, einfachen, nicht-abelschen Gruppen, die in Y vorkommen.

Bemerkung 46. *Seien alle auftretenden Gruppen proendlich.*

(i) Ist $Y = \varprojlim_\alpha Y_\alpha$ und sind alle Projektionen $Y \overset{pr_\alpha}{\to} Y_\alpha$ surjektiv, so gilt

$$Occ(Y) = \bigcup_\alpha Occ(Y_\alpha).$$

(ii) Ist Y eine Erweiterung von Y' und Y'', so gilt

$$Occ(Y) = Occ(Y') \cup Occ(Y'').$$

(iii) Mit $S_\lambda := \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_\lambda)$ gilt:

$$Occ(\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_\lambda)) = Occ(\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_\lambda)) = Occ(\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_\lambda)) = Occ(S_\lambda).$$

(iv) Für $\ell \geq 5$ gilt:

$$Occ(S_\lambda) \subset \{\mathrm{PSL}_2(K) \mid K \subset \mathbb{F}_\lambda \text{ Teilkörper}\} \dot{\cup} \{\mathfrak{A}_5\}.$$

Beweis Bemerkung.
zu (ii): „$\supset$“ Erstens ist $Occ(Y') \subset Occ(Y)$, da Y' als Kern eines stetigen Homomorphismus in eine hausdorffsche topologische Gruppe eine abgeschlossene Untergruppe von Y ist. Zweitens gilt $Occ(Y'') \subset Occ(Y)$, wenn $Y \overset{p}{\twoheadrightarrow} Y''$ ist: Seien $Y_1 \lhd Y_2$ abgeschlossene Untergruppen von Y''. Dann sind $p^{-1}(Y_1) \lhd p^{-1}(Y_2)$ abgeschlossene Untergruppen von Y und es gilt $p^{-1}(Y_2)/p^{-1}(Y_1) \simeq Y_2/Y_1$.
„$\subset$“ Seien $Y_1 \lhd Y_2$ abgeschlossene Untergruppen von Y und sei Y_2/Y_1 endlich, einfach und nicht abelsch. Da die Y_1, Y_2 als abgeschlossene Untergruppen der kompakten Gruppe Y auch kompakt sind, sind auch die Gruppen $p(Y_2), p(Y_1)$ abgeschlossen, und wegen der Surjektivität ist $p(Y_1) \lhd p(Y_2)$. Wir haben dann die exakte Sequenz:

$$1 \longrightarrow (Y_2 \cap Y')/(Y_1 \cap Y') \longrightarrow Y_2/Y_1 \longrightarrow p(Y_2)/p(Y_1) \longrightarrow 1.$$

Wegen der Einfachheit von Y_2/Y_1 gilt entweder $Y_2/Y_1 \simeq (Y_2 \cap Y')/(Y_1 \cap Y')$, also $Y_2/Y_1 \in Occ(Y')$, oder $Y_2/Y_1 \simeq p(Y_2)/p(Y_1)$, also $Y_2/Y_1 \in Occ(Y'')$.

zu (i): „$\supset$“ Dies folgt aus (ii) „$\supset$“.
„$\subset$“ Seien $Y_1 \lhd Y_2$ abgeschlossene Untergruppen von Y und sei Y_2/Y_1 einfach und nicht die triviale Gruppe. Dann gibt es ein α, so daß $pr_\alpha(Y_2) \neq pr_\alpha(Y_1)$ ist.

Dann ist der Kern des kanonischen Epimorphismus $Y_2/Y_1 \to pr_\alpha(Y_2)/pr_\alpha(Y_1)$ ein Normalteiler der einfachen Gruppe Y_2/Y_1, der aber nach Wahl des α nicht gleich Y_2/Y_1 ist. Also ist $Y_2/Y_1 \simeq pr_\alpha(Y_2)/pr_\alpha(Y_1)$.

zu (iii): Erstes „=“ gilt mit (ii), da $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_\lambda)$ Erweiterung von einer pro-ℓ-Gruppe und $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_\lambda)$ ist; in ersterer kommt keine (nicht abelsche, einfache) Gruppe vor, da sie auflösbar ist. Das nächste „=“ gilt, da $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_\lambda)$ Erweiterung von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_\lambda)$ und ${\mathbb{F}_\lambda}^*$ ist, und in letzterer keine (nicht abelsche) Gruppe vorkommt, da sie ja selbst abelsch ist. Das letzte „=“ folgt dann, da $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_\lambda)$ Erweiterung von $\{1, -1\}$ und S_λ ist.

zu(iv): Seien $Y_1 \lhd Y_2$ abgeschlossene Untergruppen von S_λ und sei Y_2/Y_1 endlich, einfach und nicht abelsch. Zunächst ist klar, daß Y_2, wenn man die Elemente als gebrochen lineare Funktionen auf $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_\lambda)$ operieren läßt, keinen Fixpunkt hat: sonst wäre Y_2/Y_1 als Subquotient einer Borelschen Untergruppe von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_\lambda)$ auflösbar. Nehmen wir zunächst an, daß ℓ die Ordnung von Y_2 nicht teilt. Es ist bekannt (z.B. Proposition 16 [Se72]), daß in diesem Fall Y_2 entweder zyklisch, eine Diedergruppe oder isomorph zu einer der Gruppen $\mathfrak{A}_4, \mathfrak{S}_4$ oder $\mathfrak{A}_5$ ist. Die ersten vier Fälle können offenbar nicht vorliegen, da sonst Y_2 und also auch Y_2/Y_1 auflösbar wäre. Im letzten Fall kann nur $Y_1 = \{1\}$ sein, und also ist in diesem Fall $Y_2/Y_1 \simeq \mathfrak{A}_5$. Teilt aber ℓ die Ordnung von Y_2, so wissen wir (z.B. Proposition (3.6) [Ri75]: hier benötigen wir $\ell \geq 5$(!)): Es gibt einen Teilkörper $K \subset \mathbb{F}_\lambda$ so daß Y_2 isomorph zu $\mathrm{PSL}_2(K)$ oder $\mathrm{PGL}_2(K)$ ist. Da erstere Gruppe einfach ist, ist in diesem Fall $Y_1 = \{1\}$ und $Y_2/Y_1 \simeq \mathrm{PSL}_2(K)$. Es ist aber $Occ(\mathrm{PGL}_2(K)) = Occ(\mathrm{PSL}_2(K))$, also ist auch im zweiten Fall $Y_2/Y_1 \simeq \mathrm{PSL}_2(K)$. □

Man weiß für $\ell > 5$ genauer: Falls ($\ell = \pm 1 \mod 5$) oder 2 den Grad $[\mathbb{F}_\lambda : \mathbb{F}_\ell]$ teilt, gilt $Occ(S_\lambda) = \{\mathrm{PSL}_2(K) \mid K \subset \mathbb{F}_\lambda \text{ Teilkörper}\} \dot\cup \{\mathfrak{A}_5\}$, anderenfalls ist $Occ(S_\lambda) = \{\mathrm{PSL}_2(K) \mid K \subset \mathbb{F}_\lambda \text{ Teilkörper}\}$. Dies folgt aus [Se72] 2.5. Remarque und [Se68] IV-25.
Mit diesem Hilfsmittel können wir jetzt folgendes entscheidende Lemma beweisen:

Lemma 47. *Sei S eine endliche Menge von Primzahlen, die 2,3,5 und alle in $E|\mathbb{Q}$ verzweigten Primzahlen enthält, und $G \subset \prod_{\ell \in P} \mathcal{B}^E_{\ell,d}$ eine abgeschlossene Untergruppe. Für alle $\ell \in P \setminus S$ gelte $pr_\ell(G) = \mathcal{B}^E_{\ell,d}$. Dann ist*

$$\prod_{\ell \in P \setminus S} \mathrm{SL}_2(\mathcal{O}^E_\ell) \subset G.$$

Beweis Lemma. Offenbar genügt es zu zeigen, daß für jedes $\ell \in P \setminus S$ die Gruppe $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O}^E_\ell)$ Untergruppe von G ist. Sei also ein $\ell_0 \in P \setminus S$ fixiert. Wir betrachten jetzt für jede Stelle $\lambda_0 | \ell_0$ von E die Projektion unserer Gruppe G auf $\prod_{\ell \in P \setminus \{\ell_0\}} \mathcal{B}^E_{\ell,d} \times \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}^E_{\lambda_0})$ und bezeichnen diese mit G_{λ_0}. Sei nun $H_{\lambda_0} := G_{\lambda_0} \cap \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}^E_{\lambda_0})$. Da $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O}^E_{\lambda_0}) \overset{abg.}{\subset} pr_{\lambda_0}(G) = pr_{\lambda_0}(G_{\lambda_0})$ mit $pr_\lambda \colon \prod_{\ell \in P} \mathcal{B}^E_{\ell,d} \to \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}^E_\lambda)$

ist, gilt $S_{\lambda_0} \in Occ(pr_{\lambda_0}(G_{\lambda_0}))$ und somit nach Bemerkung 46 (ii)

$$S_{\lambda_0} \in Occ(G_{\lambda_0}).$$

Andererseits ist aber $G_{\lambda_0}/H_{\lambda_0}$ isomorph zu einer abgeschlossenen Untergruppe von $\prod_{\lambda|\ell\in P\setminus\{\ell_0\}} \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_\lambda^E)$ und (siehe Bemerkung!) deshalb

$$\begin{aligned} Occ(G_{\lambda_0}/H_{\lambda_0}) &\subset Occ(\prod_{\lambda|\ell\in P\setminus\{\ell_0\}} \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_\lambda^E)) \\ &\overset{(i)}{=} \bigcup_{\lambda|\ell\in P\setminus\{\ell_0\}} Occ(\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_\lambda^E)) \\ &\overset{(iii)}{=} \bigcup_{\lambda|\ell\in P\setminus\{\ell_0\}} Occ(S_\lambda) \end{aligned}$$

und also $S_{\lambda_0} \notin Occ(G_{\lambda_0}/H_{\lambda_0})$; letzteres folgt aus Bemerkung (iv) und der Tatsache, daß für endliche Körper K und K' mit unterschiedlicher Charakteristik immer $\mathrm{PSL}_2(K) \not\simeq \mathrm{PSL}_2(K')$ ist. Da nun

$$Occ(G_{\lambda_0}) = Occ(G_{\lambda_0}/H_{\lambda_0}) \cup Occ(H_{\lambda_0})$$

ist, haben wir also

$$S_{\lambda_0} \in Occ(H_{\lambda_0}).$$

Sei $\tilde{H}_{\lambda_0}$ das Bild von $H_{\lambda_0} \cap \mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_{\lambda_0}^E)$ in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_{\lambda_0})$; da der Kern eine pro-$\ell$-Gruppe ist, also in ihm keine (nicht abelsche) Gruppen vorkommen, haben wir

$$Occ(H_{\lambda_0}) = Occ(H_{\lambda_0} \cap \mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_{\lambda_0}^E)) = Occ(\tilde{H}_{\lambda_0}),$$

also $S_{\lambda_0} \in Occ(\tilde{H}_{\lambda_0})$. Das heißt aber nun, daß $\tilde{H}_{\lambda_0}/\{1,-1\} \simeq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{\lambda_0})$ ist, was aber schon $\tilde{H}_{\lambda_0} = \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_{\lambda_0})$ bedeutet, da $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_{\lambda_0})$ keinen nichttrivialen abelschen Quotienten besitzt. Nach [Ri75] Theorem (2.1) enthält H_{λ_0} dann aber $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_{\lambda_0}^E)$. Nun betrachten wir den Normalteiler $H_{\ell_0} := G \cap \mathcal{B}_{\ell_0,d}^E$ von G und das Bild $\tilde{H}_{\ell_0}$ von $H_{\ell_0} \cap \mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_{\ell_0}^E)$ in $\mathrm{SL}_2(\mathcal{F}_{\ell_0}^E)$. Wir haben gerade gezeigt, daß für jedes $\lambda_0|\ell_0$

$$\mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_{\lambda_0}^E) \subset pr_{\lambda_0}(H_{\ell_0})$$

gilt, also auch $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_{\lambda_0}) \subset pr_{\lambda_0}(\tilde{H}_{\ell_0})$. Wir wollen für jedes $\lambda_0|\ell_0$ zeigen, daß $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_{\lambda_0}) \subset \tilde{H}_{\ell_0}$ ist. Seien jetzt etwa $\lambda_0, ..., \lambda_t$ die Stellen von E über ℓ_0, und wir zeigen $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_{\lambda_0}) \subset \tilde{H}_{\ell_0}$. Da $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_{\lambda_0})$ seine eigene Kommutatoruntergruppe ist, müssen wir nur zeigen, daß für zwei beliebige Elemente $A, B \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_{\lambda_0})$ das Element $(ABA^{-1}B^{-1}, 1, ..., 1)$ in $\tilde{H}_{\ell_0}$ enthalten ist. Es gibt nach dem eben gezeigten ein Element

$$(B, B_1, ..., B_t) \in \tilde{H}_{\ell_0}.$$

Nun ist aber H_{ℓ_0} Normalteiler in G, also auch $\tilde{H}_{\ell_0}$ Normalteiler in $\tilde{G}$, wenn $\tilde{G}$ das Bild von $G \cap \prod_{\ell \in P} \mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_\ell^E)$ in $\prod_{\ell \in P} \mathrm{SL}_2(\mathcal{F}_\ell^E)$ ist. Dann ist aber auch $pr_{\ell_0}(\tilde{H}_{\ell_0}) = \tilde{H}_{\ell_0}$ Normalteiler in $pr_{\ell_0}(\tilde{G}) = \mathrm{SL}_2(\mathcal{F}_{\ell_0}^E)$. Also ist mit dem Element $(A, 1, ..., 1) \in \mathrm{SL}_2(\mathcal{F}_{\ell_0}^E)$ auch

$$(A, 1, ..., 1)(B, B_1, ..., B_t)(A^{-1}, 1, ..., 1) = (ABA^{-1}, B_2, ..., B_t) \in \tilde{H}_{\ell_0}$$

und dann auch

$$(ABA^{-1}, B_1, ..., B_t)(B, B_1, ..., B_t)^{-1} = (ABA^{-1}B^{-1}, 1, ..., 1) \in \tilde{H}_{\ell_0}.$$

Nach Theorem (2.1) [Ri75] enthält H_{ℓ_0} dann aber $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_{\ell_0}^E)$. □

Lemma 48. *Sei $G \subset \prod_{\ell \in P} \mathcal{B}_{\ell,d}^E$ eine abgeschlossene Untergruppe und S eine endliche Menge von Primzahlen. Es sei $\prod_{\ell \in P \setminus S} \mathcal{B}_{\ell,d}^E \subset G$ und es sei $pr_S(G) \overset{offen}{\subset} \prod_{\ell \in S} \mathcal{B}_{\ell,d}^E$. Dann ist*

$$G \overset{offen}{\subset} \prod_{\ell \in P} \mathcal{B}_{\ell,d}^E.$$

Beweis Lemma. Wir zeigen: $G = pr_S^{-1}(pr_S(G))$, was die Behauptung beweist. Sei also $a \in pr_S^{-1}(pr_S(G))$. Dann gibt es ein $b \in G$ mit $pr_S(b) = pr_S(a)$, also $ab^{-1} \in \ker(pr_S) = \prod_{\ell \in P \setminus S} \mathcal{B}_{\ell,d}^E \subset G$. Also:

$$a = \underbrace{ab^{-1}}_{\in G} \underbrace{b}_{\in G} \in G.$$

□

Nach dieser Vorarbeit kommen wir nun zum Beweis des Satzes:

Beweis Satz 44. Wegen Corollar 41 und Lemma 45 müssen wir, um durch Lemma 48 den Satz bewiesen zu haben, noch eine endliche Menge S von Primzahlen finden, so daß $\prod_{\ell \in P \setminus S} \mathcal{B}_{\ell,d}^E \subset \varphi(G_K)$ ist. Sei S eine endliche Menge von Primzahlen, die alle in $K|\mathbb{Q}$ verzweigten Stellen enthält und außerdem die Primzahlen, die von Stellen aus der Ausnahmemenge des Systems geteilt werden. Dann gilt offenbar für jede Stelle $v \in \Sigma_K$, die über einer Primzahl $\ell_0 \notin S$ liegt, jede Fortsetzung $\overline{v}$ auf $\overline{K}$ und die zugehörige Trägheitsgruppe $I_{\overline{v}}$:

$$\varphi(I_{\overline{v}}) \subset \mathcal{B}_{\ell_0,d}^E \subset \prod_{\ell \in P \setminus S} \mathcal{B}_{\ell,d}^E \qquad \text{und} \qquad \det(\varphi(I_{\overline{v}})) = (\mathbb{Z}_{\ell_0}^*)^d \subset \prod_{\ell \in P \setminus S} (\mathbb{Z}_\ell^*)^d.$$

Vereinen wir jetzt unser S mit der endlichen Stellenmenge aus Corollar 41 Teil 2. und nehmen die Primzahlen 2,3,5 und die, die in $E|\mathbb{Q}$ verzweigen, hinzu, so gilt für unser neues S wegen Lemma 47: $\prod_{\ell \in P \setminus S} \mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_\ell^E) \subset \varphi(G_K)$. Insgesamt folgt

$$\prod_{\ell \in P \setminus S} \mathcal{B}_{\ell,d}^E \subset \varphi(G_K),$$

denn wenn $A \in \prod_{\ell \in P \setminus S} \mathcal{B}^E_{\ell,d}$ ist, gibt es ein $B \in \varphi(G_K) \cap \prod_{\ell \in P \setminus S} \mathcal{B}^E_{\ell,d}$ mit $\det(B) = \det(A)$, also $AB^{-1} \in \prod_{\ell \in P \setminus S} \mathrm{SL}_2(\mathcal{O}^E_\ell) \subset \varphi(G_K)$. □

Es sei hier noch vermerkt, daß sich der Beweis erheblich vereinfacht, wenn man die Aussage nur für d ungerade zeigen möchte. Wir können in diesem Fall nämlich Ribets Idee aus [Ri97] anwenden, um zu zeigen, daß für fast alle Primzahlen $\mathcal{B}^E_{\ell,d} \subset \varphi(G_K)$ ist: sei $v \in \Sigma_K$ und X_v der Abschluß des kleinsten Normalteilers von G_K, der die Trägheitsgruppe I_v enthält. Dann ist für eine „gute" Stelle $\varphi(X_v) = \mathcal{B}^E_{\ell,d}$. Entscheidend für die Argumentation ist aber, daß $\varphi_\ell(I_v)$ nicht in den Homothetien enthalten ist, was man nur für ungerades d ausschließen kann.

Corollar 49. *Seien K und E Zahlkörper und sei $(\varphi_\lambda \colon G_K \to \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}^E_\lambda))_{\lambda \in \Sigma_E}$ ein zweidimensionales System ganzer λ-adischer Darstellungen mit den Eigenschaften $(i)^E$, $(ii)^E$, $(iii)^E$ und (iv), das nicht potentiell durch algebraische Heckecharaktere gegeben wird. Das System habe stabilen Frobeniuskörper F und mit einem $d \in \mathbb{Z}$ gelte $(\det \circ \varphi_\lambda)_{\lambda \in \Sigma_E} = (\chi^d_{cyc,\lambda})_{\lambda \in \Sigma_E}$. Sei $K'|K$, so daß das System beschränkt auf $G_{K'}$ Frobeniuskörper F hat. Dann gilt für die Stellenmenge $S_F \subset \Sigma_F$ und das System λ_F-adischer Darstellungen $(\hat{\varphi}_{\lambda_F} \colon G_{K'} \to \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}^F_{\lambda_F}))_{\lambda_F \in \Sigma_F \setminus S_F}$ aus Lemma 38 (das ohne Beschränkung der Allgemeinheit als ganz gewählt werden kann) und das Produkt $\hat{\varphi}_{S_F} := \prod_{\ell \in P \setminus S} \hat{\varphi}_{\lambda_F}$ (wobei $S := \{\ell \in P \mid \exists v \in S_F : v|\ell\}$)*

$$\hat{\varphi}_{S_F}(G_{K'}) \overset{offen}{\subset} \prod_{\ell \in P \setminus S} \mathcal{B}^F_{\ell,d}.$$

Das heißt insbesondere für $d = 0$:

$$\hat{\varphi}_{S_F}(G_{K'}) \overset{offen}{\subset} \prod_{\ell \in P \setminus S} \mathrm{SL}_2(\mathcal{O}^F_\ell).$$

Beweis. klar □

6.5 Die Lie-Algebren zu den Bildern $\phi_\lambda(G_K)$

In den letzten beiden Abschnitten konnten wir in der allgemeinen Situation immer nur Aussagen für fast alle Darstellungen unseres Systems von Darstellungen machen. Es ist auch tatsächlich richtig, daß diese Aussagen nicht für alle Darstellungen zutreffen müssen. Ein Beispiel dafür sind Systeme von Darstellungen, die zu gewissen Modulformen mit Twist gehören (vergleiche dazu beispielsweise §5 in [Ri77]). Und zwar tritt dies auf, wenn man die λ-adischen Darstellungen zu Neuformen auf $\Gamma_1(N) := \{(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \,|\, a \equiv d \equiv 1 \mod N,\ c \equiv 0 \mod N\}$ von ungeradem Gewicht und mit Nebentypus betrachtet. (Eine vollständige Beschreibung solcher Darstellungen wurde von Momose in [Mo] gegeben!)

In diesem Abschnitt können wir Aussagen für alle Stellen λ von E machen: wir werden immerhin erhalten, wie die Liealgebren an diesen „schlechten" Stellen aussehen.

Für die im folgenden benutzten Tatsachen über p-adische Liegruppen und ihre Liealgebren vergleiche man [H]. Haben wir eine λ-adische Darstellung

$$\phi_\lambda \colon G_K \to \mathrm{GL}_2(E_\lambda),$$

so ist $\phi_\lambda(G_K)$ eine abgeschlossene Untergruppe von $\mathrm{GL}_{2m}(\mathbb{Q}_\ell)$, wenn $m = [E_\lambda : \mathbb{Q}_\ell]$ ist, und also eine ℓ-adische Liegruppe über dem Körper $\mathbb{Q}_\ell$ ([H], Theorem 8). Wir werden die zugehörige Liealgebra mit $\mathfrak{g}_\lambda$ bezeichnen. Da $\phi_\lambda(G_K) \subset \mathrm{GL}_2(E_\lambda)$, ist offenbar

$$\mathfrak{g}_\lambda \subset \mathfrak{g}l_2(E_\lambda) := M_{2\times 2}(E_\lambda),$$

wobei dies die Liealgebra aller 2×2 Matrizen mit Einträgen in E_λ ist. Wir fassen folgenden Fakt aus [H] als Bemerkung zusammen:

Bemerkung 50. *Sei $G \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_\ell)$ eine ℓ-adische Liegruppe über $\mathbb{Q}_\ell$ und $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}l_n(\mathbb{Q}_\ell)$ die zugehörige Liealgebra. Es gibt eine Umgebung der 1 in G, so daß für jedes Element X aus dieser Umgebung $\log(X) := \sum_{i\geq 1}(-1)^i(X-1)^i/i$ konvergiert und in $\mathfrak{g}$ liegt. Andersrum gibt es zu jedem $A \in \mathfrak{g}$ ein $t \in \mathbb{Q}_\ell{}^*$, so daß $\exp(tA) := \sum_{i\geq 0} t^i A^i/i!$ konvergiert und in G liegt.*

Zur Beschreibung der Liealgebren benutzen wir den Begriff der Quaternionenalgebra über einem Körper k. Eine Quaternionenalgebra über einem Körper der Charakteristik ungleich zwei kann folgendermaßen definiert werden:

Definition 51. *Sei k ein Körper mit $\mathrm{char} k \neq 2$. Eine Quaternionenalgebra H über dem Körper k ist eine vierdimensionale k-Algebra mit Basis 1,i,j,ij, wobei $i, j \in H$ Elemente sind, die für zwei Einheiten $a, b \in k^*$ die Relationen*

$$i^2 = a\ ,\ j^2 = b\ ,\ ij = -ji$$

erfüllen.

Man hat den Begriff der *reduzierten Spur* t auf einer Quaternionenalgebra (vergleiche [V]), die bei dieser Beschreibung durch

$$t(x + yi + zj + wij) = 2x \in k$$

gegeben ist. Der Spur-Null Anteil H_0 ist offenbar ein k-Untervektorraum und wird von i, j, ij erzeugt. Hat man eine Quaternionenalgebra H, so kann man sie offenbar durch die Verknüpfung $[A, B] := AB - BA$ zu einer Liealgebra machen, und auch H_0 wird auf diese Weise zu einer Liealgebra. Wir wollen die Liealgebra dann wieder eine Quaternionenalgebra nennen. Folgende Klassifikation von Quaternionenalgebren über lokalen Körpern ist bekannt (und beispielsweise in [V], Cor. I.2.4 und Theo. II.1.1. zu finden).

Theorem 52. *Sei $E_\lambda|\mathbb{Q}_\ell$ eine endliche Körpererweiterung. Dann gibt es bis auf Isomorphie zwei Quaternionenalgebren über E_λ: Die Algebra $M_{2\times 2}(E_\lambda)$ und einen Schiefkörper.*

Wir kommen nun zur Formulierung unseres Satzes:

Satz 53. *Seien K und E Zahlkörper. Gegeben sei ein zweidimensionales System $(\phi_\lambda\colon G_K \to \mathrm{GL}_2(E_\lambda))_{\lambda\in\Sigma_E}$ λ-adischer Darstellungen, das die Eigenschaften $(i)^E, (ii)^E, (iii)^E, (iv)$ hat. Der stabile Frobeniuskörper sei F und mit einem $d \in \mathbb{Z}$ gelte $(\det\circ\phi_\lambda)_{\lambda\in\Sigma_E} = (\chi^d_{cyc,\lambda})_{\lambda\in\Sigma_E}$. Das System sei nicht potentiell durch algebraische Heckecharaktere gegeben. Die Liealgebren zu den ℓ-adischen(!) Liegruppen $\phi_\lambda(G_K)$ seien mit $\mathfrak{g}_\lambda$ bezeichnet. Dann gibt es für jedes $\lambda \in \Sigma_E$ eine Quaternionenalgebra H_λ über F_λ, so daß gilt*

$$\mathfrak{g}_\lambda \simeq (H_\lambda)_0 \qquad \text{falls } d = 0$$

und

$$\mathfrak{g}_\lambda \simeq (H_\lambda)_0 \oplus \mathbb{Q}_\ell \qquad \text{falls } d \neq 0.$$

Für fast alle $\lambda \in \Sigma_E$ ist die Quaternionenalgebra $H_\lambda \simeq M_{2\times 2}(F_\lambda)$, also die Liealgebra $(H_\lambda)_0 \simeq \mathfrak{sl}_2(F_\lambda) := \{A \in M_{2\times 2}(F_\lambda) | \mathrm{Tr}(A) = 0\}$.

Der Zusatz über die Liealgebren für fast alle $\lambda \in \Sigma_E$ ist klar, denn für fast alle λ kennen wir die Liealgebra: für fast alle λ ist ein Konjugiertes von $\mathcal{B}^F_{\lambda,d} = \{A \in \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}^F_\lambda) | \det(A) \in (\mathbb{Z}_\ell{}^*)^d\}$ als offene Untergruppe im Bild $\phi_\lambda(G_K)$ enthalten (nach Satz 42). Deshalb hat $\phi_\lambda(G_K)$ (nach Definition) dieselbe Liealgebra wie $\mathcal{B}^F_{\lambda,d}$, und diese ist im Fall $d = 0$ gerade $\mathfrak{sl}_2(F_\lambda)$, und im Fall $d \neq 0$ gerade $\mathfrak{sl}_2(F_\lambda) \oplus \mathbb{Q}_\ell$. Unsere Untersuchungen müssen sich also jetzt auf die endlich vielen anderen λ richten.

Zunächst machen wir folgende Beobachtungen für unsere Liealgebren $\mathfrak{g}_\lambda$:

(i) $A \in \mathfrak{g}_\lambda \Rightarrow \mathrm{Tr}(A) \in \mathbb{Q}_\ell$.

(ii) $A \in \mathfrak{g}_\lambda \Rightarrow \det(A) \in F_\lambda$.

(iii) $\mathfrak{g}_\lambda$ operiert irreduzibel auf E_λ^2.

(iv) Die Liealgebra $\mathfrak{g}_\lambda$ ist nicht abelsch.

(v) Gibt es in $\mathfrak{g}_\lambda$ ein nilpotentes Element, so gilt bezüglich einer geeigneten Basis: $\mathfrak{g}_\lambda \subset M_{2\times 2}(F_\lambda)$.

(vi) Gibt es in $\mathfrak{g}_\lambda$ ein über F_λ diagonalisierbares Element mit zwei verschiedenen Eigenwerten, so gilt bezüglich einer geeigneten Basis: $\mathfrak{g}_\lambda \subset M_{2\times 2}(F_\lambda)$.

Beweis. Diese Beobachtungen folgen aus Bemerkung 50:
zu(i): Sei $A \in \mathfrak{g}_\lambda$ mit Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2 \in \overline{E}_\lambda$. Dann gibt es ein $t \in \mathbb{Q}_\ell{}^*$, so daß $\exp(tA) \in \phi_\lambda(G_K)$ ist, also $\det(\exp(tA)) = \exp(t(\lambda_1+\lambda_2)) \in \mathbb{Q}_\ell{}^*$. Also war schon $(\lambda_1 + \lambda_2) \in \mathbb{Q}_\ell$.

zu (ii): Sei $A \in \mathfrak{g}_\lambda$. Dann gibt es ein $t \in \mathbb{Q}_\ell{}^*$, so daß $\exp(tA) \in \phi_\lambda(G_K)$ ist, also $\det(\exp(tA)), \mathrm{Tr}(\exp(tA)) \in F_\lambda$. Es ist aber äquivalent, daß Spur und Determinante von $\exp(tA)$ in F_λ liegen, und daß Spur und Determinante von A in F_λ sind. Denn es ist für eine Matrix $B \in \mathrm{GL}_2(\overline{E}_\lambda)$ genau dann $BtAB^{-1} \in M_{2\times 2}(F_\lambda)$, wenn $\exp(B(tA)B^{-1}) = B\exp(tA)B^{-1} \in \mathrm{GL}_2(F_\lambda)$ ist.

zu (iii): Annahme: $\mathfrak{g}_\lambda$ hält eine Richtung R fest. Da aber nach Satz 33 jede offene Untergruppe von $\phi_\lambda(G_K)$ irreduzibel auf E_λ^2 operiert, gibt es also auch in der kleinen Umgebung der 1 aus Bemerkung 50 ein Element X, das die Richtung R nicht festhält. Das ist eine Widerspruch, da nach Voraussetzung $\log X$ das R festhält, dann aber auch $X = \exp(\log X)$ die Richtung R festhält.

zu (iv): Annahme: $\mathfrak{g}_\lambda$ ist abelsch. Dann gilt aber für alle Matrizen X, Y aus der kleinen Umgebung von 1 aus Bemerkung 50, daß sie miteinander kommutieren. Denn $\log X$ und $\log Y$ liegen ja in $\mathfrak{g}_\lambda$, kommutieren also miteinander; dann ist aber auch $XY = \exp(\log X)\exp(\log Y) = \exp(\log Y)\exp(\log X) = YX$. Das heißt aber, die Darstellung ϕ_λ wäre potentiell abelsch, was ein Widerspruch zu Satz 33 ist.

zu (v): Sei $A \in \mathfrak{g}_\lambda$ nilpotent. Dann gibt es ein $t \in \mathbb{Q}_\ell{}^*$, so daß $\exp(tA) \in \phi_\lambda(G_K)$ ist, und da auch tA nilpotent war, ist jetzt $\exp(tA)$ unipotent. Dann gibt es aber nach Lemma 34 eine Basis, bezüglich der $\phi_\lambda(G_K) \subset \mathrm{GL}_2(F_\lambda)$ ist, und dann ist bezüglich dieser Basis auch $\mathfrak{g}_\lambda \subset M_{2\times 2}(F_\lambda)$.

zu (vi): Sei $A \in \mathfrak{g}_\lambda$ über F_λ diagonalisierbar und habe zwei verschiedene Eigenwerte. Dann gibt es ein $t \in \mathbb{Q}_\ell{}^*$, so daß $\exp(tA) \in \phi_\lambda(G_K)$ ist, und da auch tA zwei verschiedene Eigenwerte in F_λ hat, gilt dies auch für $\exp(tA)$. Die Behauptung folgt mit Lemma 35. □

Beweis Satz 53. Sei X ein Element aus der kleinen Umgebung um 1 aus Bemerkung 50, so daß $\mathbb{Q}_\ell((\mathrm{Tr}X)^2) = F_\lambda$ ist, was es ja nach Satz 42 gibt. Nenne das Element $A := \log(X) \in \mathfrak{g}_\lambda$, und seine Eigenwerte α_1, α_2. Sind die Eigenwerte von X gleich, so ist $(\mathrm{Tr}X)^2 = 4\det(X) \in \mathbb{Q}_\ell$, also $F_\lambda = \mathbb{Q}_\ell$. Wegen der Irreduzibilität können aber nicht alle Elemente aus $\phi_\lambda(G_K)$ Homothetien sein. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit hat also X zwei verschiedene Eigenwerte, und damit sind dann auch die Eigenwerte von A verschieden: $\alpha_1 \neq \alpha_2$. Wegen $\mathbb{Q}_\ell(\mathrm{Tr}X) = F_\lambda$ gilt nach obiger Bemerkung zur Äquivalenz in (ii) auch $\mathbb{Q}_\ell(\det A) = F_\lambda$, und dann auch $\mathbb{Q}_\ell((\alpha_1 - \alpha_2)^2) = \mathbb{Q}_\ell(\underbrace{(\mathrm{Tr}A)^2}_{\in \mathbb{Q}_\ell} - 4\det A) = F_\lambda$.

Nenne

$$\Delta := \alpha_1 - \alpha_2.$$

Dabei sind die Zahlen α_1 und α_2 genau dann aus F_λ, wenn $\alpha_1 - \alpha_2 = \mathrm{Tr}(A) - 2\alpha_2$ in F_λ liegt.

Schreibe jetzt bezüglich einer Basis von Eigenvektoren von A:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix}.$$

Als erstes betrachten wir nun den Fall, wo $\alpha_1, \alpha_2 \in F_\lambda$ sind. In diesem Fall (vergleiche Beweis von Lemma 35) folgt schon bei unserer Wahl der Basis (und eventueller Skalierung), daß $\mathfrak{g}_\lambda \subset M_{2\times 2}(F_\lambda)$ ist. Wegen der Irreduzibilität der Operation von $\mathfrak{g}_\lambda$ auf E_λ^2 gibt es dann aber

$$B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}_\lambda$$

mit $b_2, c_3 \neq 0$. Definiere

$$B_1 := [A, B] = \begin{pmatrix} 0 & \Delta b_2 \\ -\Delta b_3 & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$B_i := [A, B_{i-1}] = \begin{pmatrix} 0 & \Delta^i b_2 \\ (-1)^i \Delta^i b_3 & 0 \end{pmatrix}$$

für $i > 1$ und entsprechend C_i. Sind nun $b_3 = c_2 = 0$, so sieht man sofort (da Δ primitives Element von $F_\lambda|\mathbb{Q}_\ell$ ist):

$$F_\lambda \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + F_\lambda \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \subset \mathfrak{g}_\lambda,$$

und damit offenbar $\mathfrak{s}l_2(F_\lambda) \subset \mathfrak{g}_\lambda$. Dann folgt offensichtlich in diesem Fall die Behauptung mit der Quaternionenalgebra $H_\lambda = \mathfrak{g}l_2(F_\lambda)$. Da aber sowohl Δ als auch Δ^2 primitive Elemente von $F_\lambda|\mathbb{Q}_\ell$ sind, muß im Minimalpolynom $a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_0 \in \mathbb{Q}_\ell[X]$ von Δ mindestens einer der Koeffizienten a_n mit ungeradem n ungleich Null sein. Dann sind

$$B' := \sum_{i=0}^{n} a_i (-1)^{i+1} B_{i+1} = \begin{pmatrix} 0 & b_2' \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ C' := \sum_{i=0}^{n} a_i C_{i+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c_3' & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}_\lambda$$

mit $b_2', c_3' \neq 0$. Wendet man obige Argumentation jetzt auf B' und C' an, folgt also die Behauptung.
Nun müssen wir den Fall betrachten, wo $\alpha_1, \alpha_2 \notin F_\lambda$ sind. Da $\mathfrak{g}_\lambda$ nach (iv) der Beobachtungen nicht abelsch ist, muß es ein

$$B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}_\lambda$$

geben, mit sagen wir $b_2 \neq 0$. Wir definieren die B_i wie oben. Da Δ^2 primitives Element von $F_\lambda|\mathbb{Q}_\ell$ ist, sind dann

$$F_\lambda \begin{pmatrix} 0 & b_2 \\ b_3 & 0 \end{pmatrix} + F_\lambda \begin{pmatrix} 0 & \Delta b_2 \\ -\Delta b_3 & 0 \end{pmatrix} \subset \mathfrak{g}_\lambda.$$

Damit ist dann auch wegen der Abgeschlossenheit bezüglich der Lieklammer

$$F_\lambda \begin{pmatrix} \Delta b_2 b_3 & 0 \\ 0 & -\Delta b_2 b_3 \end{pmatrix} \subset \mathfrak{g}_\lambda.$$

Es ist aber notwendig auch $b_3 \neq 0$, denn sonst würde nach der Beobachtung (v) bezüglich einer geeigneten Basis $\mathfrak{g}_\lambda \subset M_{2\times 2}(F_\lambda)$ sein, was aber offenbar ein Widerspruch dazu ist, daß nun

$$F_\lambda(\Delta) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \subset \mathfrak{g}_\lambda$$

wäre. Nenne nun

$$i := \begin{pmatrix} 0 & b_2 \\ b_3 & 0 \end{pmatrix} \text{und } j := \begin{pmatrix} 0 & \Delta b_2 \\ -\Delta b_3 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}_\lambda.$$

Es gilt offenbar $i^2 = b_2 b_3 \in F_\lambda^*$, $j^2 = -\Delta^2 b_2 b_3 \in F_\lambda^*$ und $ij = -ji$. Also ist tatsächlich mit der Quaternionenalgebra $H :=< 1, i, j, ij >_{F_\lambda}$ über F_λ

$$H_0 \subset \mathfrak{g}_\lambda.$$

Im Fall, wo wir eine Basis wählen können, so daß $\mathfrak{g}_\lambda \subset M_{2\times 2}(F_\lambda)$ ist, folgt die Behauptung nun aus Dimensionsgründen: wir haben oben gerade $3 \dim_{\mathbb{Q}_\ell} F_\lambda$ linear unabhängige Vektoren in $\mathfrak{g}_\lambda \cap \mathfrak{sl}_2$ gefunden, und da die $\mathbb{Q}_\ell$-Dimension von $\mathfrak{g}_\lambda \cap \mathfrak{sl}_2(F_\lambda)$ höchstens $3 \dim_{\mathbb{Q}_\ell} F_\lambda$ ist, folgt also $\mathfrak{g}_\lambda \cap \mathfrak{sl}_2 \simeq \mathfrak{sl}_2(F_\lambda)$ und damit die Behauptung mit $H_\lambda = \mathfrak{gl}_2(F_\lambda)$.
Nun kommen wir zu dem interessantesten Fall, nämlich dem, wo wir durch keine Wahl der Basis $\mathfrak{g}_\lambda \subset M_{2\times 2}(F_\lambda)$ erreichen können. Bezüglich einer geeigneten Basis haben wir aber $\mathfrak{g}_\lambda \subset M_{2\times 2}(F_\lambda(\Delta))$. Nehmen wir also in diesem Fall an, daß es ein $X \in \mathfrak{g}_\lambda \cap \mathfrak{sl}_2 \setminus H_0$ gibt. Da $\{\Delta^k i, \Delta^k j, \Delta^k ij\}_{k=0,\ldots,2\dim_{\mathbb{Q}_\ell} F_\lambda - 1}$ eine Basis von

$\mathfrak{sl}_2(F_\lambda(\Delta))$ ist, können wir also ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß X in $F_\lambda \cdot \Delta i + F_\lambda \cdot \Delta j + F_\lambda \cdot \Delta ij$ liegt; sei also

$$X = a\Delta i + b\Delta j + c\Delta ij$$

mit $a, b, c \in F_\lambda$. Es ist dann also $[X, ij] = \underbrace{b(2b_2b_3\Delta^2)}_{\in F_\lambda} \Delta i + \underbrace{a(2b_2b_3)}_{\in F_\lambda} \Delta j \in \mathfrak{g}_\lambda$.

Andererseits wissen wir schon, daß $Y := a(2b_2b_3\Delta^2)i + b(2b_2b_3\Delta^2)j \in \mathfrak{g}_\lambda$ ist, also ist auch

$$[X, ij] + Y = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}_\lambda,$$

wobei $\beta = \underbrace{a(4{b_2}^2b_3\Delta^2)}_{\in F_\lambda} + \underbrace{b(4{b_2}^2b_3\Delta^2)}_{\in F_\lambda} \Delta$ ist. Nach Beobachtung (v) kann es aber in $\mathfrak{g}_\lambda$ kein nilpotentes Element geben. Es muß demnach $\beta = 0$ sein, was aber $a = b = 0$ erzwingt. Dann ist also

$$X = c\Delta ij.$$

Das ist aber für $c \neq 0$ ein Element mit zwei verschiedenen Eigenwerten in F_λ, was nach Beobachtung (vi) ein Widerspruch ist. Wir haben also auch in diesem Fall bewiesen, daß $\mathfrak{g}_\lambda \cap \mathfrak{sl} = (H_\lambda)_0$ ist, wobei hier die Quaternionenalgebra H_λ ein Schiefkörper sein muß. Da auch

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix} - 1/2 \begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & -\Delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha_1+\alpha_2}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\alpha_1+\alpha_2}{2} \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}_\lambda$$

ist, folgt

$$\mathbb{Q}_\ell \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}_\lambda.$$

Andererseits ist für jedes

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}_\lambda$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{a+d}{2} & 0 \\ 0 & \frac{a+d}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{a-d}{2} & b \\ c & -\frac{a-d}{2} \end{pmatrix},$$

also folgt die Behauptung. $\square$

Literatur

[BR] D. Blasius und J. D. Rogawski *Motives for Hilbert modular forms*, Invent. Math. **114** (1993), *no.* 1. 55-87.

[Bor] A. Borel, *Linear Algebraic Groups*, Springer-Verlag, 1997

[Bou] N. Bourbaki, *Lie Groups and Lie Algebras*, Springer-Verlag, 1989

[Br] L. Brünjes, *Fast étale Überlagerungen und Faltings' Reinheitssatz in den Dimensionen eins und zwei*, Diplomarbeit (Köln) 1998

[Ch] C. Chevalley, *Deux théoremes d'arithmetique*, J. Math. Soc. Japan 3, (1951). 36-44.

[CR] C.W. Curtis und I. Reiner, *Representation theory of finite groups and associative algebras*; Intersience, New York, 1962

[D] P. Deligne, *Valeurs de fonctions L et périodes d'intégrales*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Vol. **33** (1979), part2, 313-346.

[Di] L.E. Dickson, *Linear Groups (with an exposition of the Galois field theory)*, Dover Publications, Inc., New York 1958

[Fo] J.-M. Fontaine, *Représentations p-adiques semi-stables*, Astérisque 223, 1994

[SGA6] A. Grothendieck et al., *Théorie des Intersections et Théorème de Riemann-Roch (SGA 6.)*, Lecture Notes in Math. 288, Springer Verlag, Heidelberg (1971).

[H] R. Hooke, *Linear p-adic groups and their lie algebras*, Annales of Math., **43** (1942), 641-655.

[J] U. Jannsen, *Motives, numerical equivalence, and semi-simplicity*, Invent. Math. **107** (1992), 447-452.

[KM] N.M. Katz und W. Messing, *Some Consequences of the Riemann Hypothesis for Varieties over Finite Fields*, Invent. Math. **23** (1974), 73-77.

[M] J.S. Milne, *Étale Cohomology*, Princeton University Press, 1980

[Mo] F. Momose, *On the ℓ-adic representations attached to modular forms*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. 28 (1981), no. 1, 89-109.

[Mu98] K. Muny, *Zweidimensionale motivische Galoisdarstellungen*, Diplomarbeit (Köln) 1998

[Mu00] K. Muny, *Images of two-dimesnional motivic Galois representations*, Preprint 2000

[N] J. Neukirch, *Algebraische Zahlentheorie*, Springer-Verlag, 1992

[Ri75] K.A. Ribet, *On ℓ-adic representations attached to modular forms*, Inventiones Math., 28 (1975), 245-275.

[Ri76] K.A. Ribet, *Galois action on division points of abelian varieties with real multiplications*, American Journal of Mathematics, Vol.98, No.3, 751-804

[Ri77] K.A. Ribet, *Galois representations attached to eigenforms with Nebentypus*, Modular functions of one variable, V (Proc. Second Internat. Conf., Univ. Bonn, Bonn, 1976), 17-51, Lecture Notes in Math. 601, Springer-Verlag, 1977

[Ri97] K.A. Ribet, *Images of semistable Galois representations*, Olga Taussky-Todd: in memoriam. Pacific Journal of Mathematics **1997**, Special Issue, 277-297.

[Sch] N. Schappacher, *Periods of Hecke Characters*, Lecture Notes in Mathematics 1302, Springer-Verlag

[Se68] J.-P. Serre, *Abelian ℓ-adic representations and elliptic curves*, Benjamin, New York, 1968

[Se72] J.-P. Serre, *Propriétés galoisiennes des points d'ordre fini des courbes elliptiques* , Invent. Math. **15** (1972), 259-331.

[Se94] J.-P. Serre, *Propriétés conjecturales des groupes de Galois motiviques et des représentations ℓ-adiques*, Motives (Seattle, WA, 1991), 377–400, Proc. Sympos. Pure Math., 55, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.

[V] M.-F. Vigéras, *Arithmétique des Algèbres de Quaternions*, Lecture Notes in Mathematics 800, Springer-Verlag

[We] H. Weber, *Lehrbuch der Algebra*, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig 1899

[W] A. Wiles, *Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem*, Annales of Math., **141** (1995), 443-551.