Wahrscheinlichkeitsverteilungen psychologischer Merkmale als Meßergebnisse: Ein Beitrag zur probabilistischen Meßtheorie

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung der Doktorwürde
der Philosophischen Fakultät II
(Psychologie und Pädagogik)
der
Universität Regensburg

vorgelegt von
Thomas Augustin
aus Passau

Regensburg
2002

Erstgutachter:

Zweitgutachter:

Zusammenfassung

Der Meßprozeß in der Psychologie wird durch Störgrößen beeinflußt, die während eines Experiments auf die Versuchsperson einwirken. So ist es möglich, daß eine Versuchsperson, die zu einem Zeitpunkt des Experiments die Alternative a der Alternative b vorzieht, wenig später unter scheinbar identischen Versuchsbedingungen, b über a präferiert. In der Psychophysik treten derartige Inkonsistenzen oftmals bei geringen physikalischen Reizdifferenzen auf.

Werden Inkonsistenzen in den Antworten einer Versuchsperson als Bestandteil der Meßsituation erachtet, so erscheint eine Verallgemeinerung des klassischen Meßgedankens angebracht: Messen heißt gemeinhin abbilden der experimentellen Beobachtungen in die reellen Zahlen. Hier werden an die Stelle reeller Zahlen Wahrscheinlichkeitsverteilungen reellwertiger Zufallsvariablen gesetzt. Ihren Ausgang nahm diese Entwicklung mit den Arbeiten von Thurstone (1927 a, b). In ähnlicher Weise wird in der Psychophysik versucht, jedem Reiz x eine Funktion P_x zuzuordnen, die die Diskriminationsleistungen einer Versuchsperson beschreibt. In der Absicht, numerische Kennwerte wie den Punkt der subjektiven Gleichheit oder den ebenmerklichen Unterschied zu bestimmen, wird oftmals von einer festen Funktionsform dieser sogenannten psychometrischen Funktion ausgegangen. So wird häufig angenommen, die Wahrscheinlichkeit, Reiz a intensiver als Reiz x zu beurteilen, sei durch die logistische Verteilungsfunktion gegeben. Aus theoretischer Sicht ist diese Annahme jedoch unbegründet. In vorliegender Arbeit wird gezeigt, daß die Funktionsform der Abbildung P_x aus einfachen Annahmen deduziert werden kann. So werden funktionale Zusammenhänge zwischen Paarvergleichswahrscheinlichkeiten formuliert, die es ermöglichen, zwischen der exponentiellen und der logistischen Funktionsform der psychometrischen Funktion zu unterscheiden. Dabei werden Paarvergleichswahrscheinlichkeiten als Primitiva betrachtet, ohne auf die mit dem Schätzprozeß verbundenen Schwierigkeiten einzugehen.

Ein weiterer Schwerpunkt dieser Arbeit liegt auf der meßtheoretischen Fundierung des Wahrscheinlichkeitsbegriffes. Hierbei ist zu beachten, daß Wahrscheinlichkeiten theoretische Größen darstellen, die einer unmittelbaren Beobachtung nicht zugänglich sind. Während in der experimentellen Forschungspraxis üblicherweise versucht wird, diese Schwierigkeiten unter Zuhilfenahme des Gesetzes der großen

Zahlen zu umgehen, wird in vorliegender Arbeit ein meßtheoretischer Zugang gewählt, der lediglich auf komparativen Vergleichsurteilen basiert.

Dieser Zugang ist unter anderem bei der subjektiven Interpretation des Wahrscheinlichkeitsbegriffes anwendbar: Obgleich es beispielsweise einem Fußballexperten nicht möglich sein wird, dem zufälligen Ereignis "Bayern München gewinnt gegen Unterhaching" eine Wahrscheinlichkeit zuzuordnen, wird er ein komparatives Urteil darüber abgeben können, ob das Ereignis "Bayern München gewinnt gegen Unterhaching" wahrscheinlicher ist, als das Ereignis "Schalke gewinnt gegen Dortmund".

Eine ähnliche Situation stellt sich bei der frequentistischen Interpretation des Wahrscheinlichkeitsbegriffes ein: Kleine Datensätze wie sie häufig in der Psychologie betrachtet werden, sind zur Schätzung von Wahrscheinlichkeiten ungeeignet, sie lassen jedoch oftmals die Ableitung komparativer Aussagen der folgenden Art zu: Aufgrund der beobachteten relativen Häufigkeiten ist es wahrscheinlicher, daß eine Versuchsperson einen Reiz a schwerer als einen Reiz b einstuft, als daß sie c schwerer als d beurteilt: $(a, b) \succ (c, d)$.

Ein Hauptergebnis dieser Arbeit zeigt, daß es auf der Grundlage derartiger komparativer Urteile möglich ist, numerische Paarvergleichswahrscheinlichkeiten abzuleiten. Insbesondere ist es möglich, die Exponentialverteilungsform der repräsentierenden Zufallsvariablen aus rein qualitativen Axiomen zu deduzieren.

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung **iii**

1 Einleitung **1**

2 Frühere Arbeiten **11**
2.1 Die Entwicklung der klassischen Meßtheorie 11
2.1.1 Die Grundlagen der modernen Meßtheorie 13
2.1.2 Fundamentale versus extensive Messung 21
2.1.3 Der modelltheoretische Ansatz 26
2.2 Das Fehlerproblem in der Psychologie 27
2.3 Probabilistische Meßtheorie 29
2.3.1 Stochastische Modelle des Wahlverhaltens 30
2.3.2 Eine probabilistische Version der extensiven Messung 31
2.3.3 Eine probabilistische Version der additiv verbundenen Messung 32
2.3.4 Zufallsvariablenrepräsentationen 34

3 Der Wahrscheinlichkeitsbegriff in den empirischen Wissenschaften 37
3.1 Der axiomatische Zugang von Kolmogoroff 37
3.2 Die Laplacesche Interpretation 38
3.3 Die frequentistische Interpretation 39
3.4 Subjektive Interpretation 41

4 Die Behandlung von Invarianzproblemen **43**

5 Theorie: Eine probabilistische Verallgemeinerung des klassischen Meßgedankens **48**
5.1 Der Begriff der Zufallsvariablenrepräsentation 48
5.2 Die Diskussion des deterministischen Spezialfalls 57
5.3 Die Exponentialverteilung als Meßergebnis 58
5.4 Der Bezug zum Weberschen Gesetz 67
5.5 Die logistische Verteilung als Meßergebnis 69
5.6 Das Problem der empririschen Anbindung 78

5.7 Eine alternative Charakterisierung der logistischen Verteilung 79

6 Anwendung in der Psychophysik: Eine meßtheoretische Ableitung der logistischen Funktionsform der psychometrischen Funktion 84

7 Paarvergleichswahrscheinlichkeiten als Meßergebnisse 88

7.1 Die Bedeutung des Gesetzes der großen Zahlen für die Psychologie . . 88

7.2 Ein meßtheoretischer Ansatz zur Ableitung von Paarvergleichswahrscheinlichkeiten 91

7.3 Das Eindeutigkeitsproblem 94

7.4 Die Ableitung notwendiger Bedingungen 96

7.5 Der Bezug zu den additiv verbundenen Meßstrukturen 98

7.6 Der Repräsentationssatz für qualitative Paarvergleichsstrukturen . . . 100

8 Qualitative Beobachtungen, die hinreichend für die Exponentialverteilung sind 104

Anhang

A Spezielle extensive Strukturen 107

B Ein funktionaler Zusammenhang zur Charakterisierung der Exponentialverteilung 110

C Ein funktionaler Zusammenhang zur Charakterisierung der logistischen Verteilung 116

D Eine alternative Charakterisierung der logistischen Verteilung 121

E Eine meßtheoretische Ableitung der logistischen Funktionsform psychometrischer Funktionen 127

F Paarvergleichswahrscheinlichkeiten als Meßergebnisse 132

Kapitel 1

Einleitung

Vordergründig ist die Situation der Psychologie des beginnenden 21. Jahrhunderts mit der der Physik des ausgehenden 16. Jahrhunderts vergleichbar: Es ist keine übergreifende Theorie bekannt, die die unüberschaubare Menge von Phänomenen ordnet und vorhersagbar macht. Der Untersuchungsgegenstand der klassischen Physik unterscheidet sich jedoch wesentlich von dem der heutigen Psychologie: Während sich der Meßakt in der klassischen Physik problemlos auf den Zählprozeß zurückführen läßt, ist in der Psychologie kein "Meterstab" bekannt, wie er in der Physik Verwendung findet. Infolgedessen ist der Meßprozeß in der Psychologie selbst dann mit Schwierigkeiten verbunden, wenn es sich um die Quantifizierung vermeintlich einfacher Begriffe handelt: Was unter der wahrgenommenen Länge oder Schwere eines Reizes zu verstehen ist, scheint klar zu sein: Das wahrgenommene Gewicht ist eine Maßzahl, die angibt, wie schwer ein Beobachter einen Reiz wahrnimmt.

Hingegen hat sich bis heute kein Verfahren zur Konstruktion einer psychologischen Empfindungsskala durchsetzen können: Während in der Psychophysik versucht wird, einen funktionalen Zusammenhang zwischen der physikalischen Reizintensität und der dazugehörigen psychologischen Empfindungsstärke aufzustellen, dauert die Diskussion über die emprische Fundierung dieser sogenannten *psychophysischen Funktion* an. In diesem Zusammenhang ist auf die Kontroverse zwischen Anhängern des Fechnerschen Ansatzes, der darauf beruht, daß ebenmerkliche Unterschiede als gleich erlebt werden, und Vertretern der Stevensschen Methode der direkten Größenschätzung hinzuweisen.

In der Psychophysik ist der Meßprozeß oftmals auf die Bestimmung numerischer Werte beschränkt, die die Diskriminationsleistungen einer Versuchsperson kennzeichnen: Der Punkt der subjektiven Gleichheit $x_{1/2}$ und der ebenmerkliche Unterschied EU_x,

$$EU_x = \frac{x_{3/4} - x_{1/4}}{2}$$

sind derartige Kennwerte. Die mit der Bestimmung dieser Größen verbundenen

Schwierigkeiten führen zu der Annahme einer festen Funktionsform der *psychometrischen Funktion* P_x. So wird häufig angenommen, die Wahrscheinlichkeit, Reiz a intensiver als Reiz x zu beurteilen, sei durch die logistische Verteilungsfunktion gegeben:

$$P_x(a) = \frac{1}{1 + \exp(-\delta(x)(a - \mu(x)))}.$$

Während die Parameter dieser Abbildung Maßzahlen für den Punkt der subjektiven Gleichheit und den ebenmerklichen Unterschied darstellen, ist die Annahme der logistischen Funktionsform der psychometrischen Funktion weitgehend unbegründet. Die vorliegende Arbeit baut wesentlich auf dieser Problematik auf und versucht unter anderem zu zeigen, daß die logistische Funktionsform der psychometrischen Funktion aus einfachen Annahmen über die Paarvergleichswahrscheinlichkeiten deduziert werden kann. In diesem Zusammenhang ist bereits auf eine erkenntnistheoretische Schwierigkeit hinzuweisen, die in Kapitel 7 wiederaufgegriffen wird: Wahrscheinlichkeiten stellen theoretische Größen dar, die einer unmittelbaren Beobachtung nicht zugänglich sind.

Diese Probleme der Quantifizierung zeigen bereits, daß die Beantwortung der Frage, unter welchen Bedingungen ein wissenschaftlich fundierter Meßakt vollzogen werden kann, grundlegende Überlegungen erfordert. Dies führte im 20. Jahrhundert zu einer Präzisierung des Meßbegriffs: Heute wird Messung üblicherweise als *strukturerhaltende* Abbildung der experimentellen Beobachtungen in die reellen Zahlen verstanden. Dabei ist der *Paarvergleich* das vorherrschende experimentelle Paradigma: In den Experimenten hat eine Versuchsperson lediglich vergleichende Urteile wie "Rotwein mag ich lieber als Weißwein" oder "Gewicht a erscheint mir schwerer als Gewicht b" abzugeben. Genügen diese Urteile gewissen strukturellen Eigenschaften der reellen Zahlen (wie etwa *Konnexität* und *Transitivität* der Vergleichsrelation), so ist eine *homomorphe* Repräsentation in die reellen Zahlen möglich. Wie die Meßtheoretiker des 20. Jahrhunderts herausfanden, ist eine derartige Zahlzuweisung auch dann möglich, wenn die in der Physik vorherrschenden *extensiven* Verknüpfungsoperationen fehlen. Derartige Operationen lassen sich unter wohlbekannten Voraussetzungen beispielsweise durch die *intensive* Mittenbildungsoperation ersetzen. Werden Reizdifferenzen skaliert, so sind Verknüpfungsoperationen überhaupt entbehrlich. Im folgenden wird diese sogenannte *quantitative* Methode mit der *qualitativen* Vorgehensweise verglichen, die auf *klassifikatorischen* und *komparativen* Begriffen aufbaut.

Klassifikatorische Begriffe bilden die einfachste Begriffsform. Sie werden in der Absicht verwendet, einen Gegenstandsbereich in verschiedene, paarweise disjunkte Klassen zu zerlegen. Diese Klasseneinteilung soll erschöpfend in dem Sinne sein, daß jedes Objekt einer (und damit genau einer) Klasse zugeteilt werden kann. So läßt sich die Menschheit beispielsweise in kleine, mittlere und große Menschen unterteilen.

Während es in manchen Wissenschaften (wie etwa der Botanik) durchaus sinnvoll sein kann, eine Klasseneinteilung vorzunehmen, führt eine derartige Aufspaltung des Gegenstandsbereichs oftmals nur zu unbefriedigenden Ergebnissen: Werden etwa Personen der Klasse der Kleinwüchsigen zugeordnet, so lassen sich keine Aussagen über das Zueinander dieser Personen treffen. Derartige Aussagen sind erst dann möglich, wenn sich sprachliche Gebilde der Art *a ist größer (oder mindestens so groß) wie b* erzeugen lassen. In diesem Fall ist der Übergang zu komparativen Begriffen vollzogen.

Wie die Meßtheoretiker des 20. Jahrhunderts zeigen konnten, ist die Bedeutung dieses Übergangs von klassifikatorischen zu komparativen Begriffen nicht hoch genug einzuschätzen; stellen komparative Begriffe doch die Voraussetzung jeglicher empirisch fundierten Meßaktivität dar: Der Übergang von komparativen zu quantitativen Begriffen kann unter geeigneten strukturellen Voraussetzungen vollzogen werden. Dies soll am Beispiel der ordinalen Messung erläutert werden: Ist A eine nichtleere endliche Menge und $\succeq$ eine binäre Relation auf A, so kann jedem Element a der Grundmenge A genau dann eine reelle Zahl $\phi(a)$ derart zugeordnet werden, daß die Äquivalenz $a \succeq b \Leftrightarrow \phi(a) \geq \phi(b)$ erfüllt ist, wenn das Tupel $\langle A, \succeq \rangle$ eine schwache Ordnung definiert. Die Bedingungen einer schwachen Ordnung sind sowohl *hinreichend* als auch *notwendig* für die Existenz einer isotonen Repräsentation in die reellen Zahlen. Die Eindeutigkeit dieser Repräsentation wird durch das *Skalenniveau* festgelegt: Die Repräsentation ϕ ist eine *Ordinalskala*: Jede weitere isotone Abbildung der Grundmenge A läßt sich darstellen als $\phi' = h \circ \phi$, wobei $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine streng monoton wachsende Abbildung markiert.

An diesem einfachen Beispiel lassen sich bereits die Zielsetzungen der repräsentationalen Meßtheorie ablesen: Sie liegen weniger im konkreten Meßakt als in der Identifizierung derjenigen qualitativen Beobachtungen, die die Einführung quantitativer Begriffe rechtfertigen. Diese qualitativen Bedingungen werden zu sogenannten Repräsentationstheoremen zusammengefaßt, die in der Regel *konstruktiv* bewiesen werden. Diese konstruktiven Beweise beinhalten Meßverfahren, die zu konkreten Skalen führen können. Im Laufe der Entwicklung einer Theorie werden diese fundamentalen Meßverfahren oftmals durch sogenannte *theoriegeleitete* Messungen ersetzt, die wesentlich von der Gültigkeit einer bestimmten Theorie abhängen. So werden beispielsweise Zeitintervalle heute meist mit Atomuhren gemessen, wobei implizit die Theorie der Quantenmechanik als gültig vorausgesetzt wird. Hierbei muß natürlich auf die Übereinstimmung von fundamentalen und theoriegeleiteten Meßergebnissen geachtet werden. Theorien führen jedoch nicht nur zur Entwicklung neuer Meßverfahren, sie entscheiden oftmals auch darüber, was überhaupt gemessen werden kann. So sind beispielsweise nach der Heisenbergschen Unbestimmtheitsrelation Ort und Impuls eines Teilchens prinzipiell nicht *gleichzeitig* beobachtbar.

Eine weitere Zielsetzung der repräsentationalen Meßtheorie umfaßt die Klärung und Fundierung wissenschaftlicher Begriffe. Ein Beispiel aus der Motivationstheorie zeigt, daß dieser Aspekt der Meßtheorie keineswegs Eingang in die psychologische Theoriebildung gefunden hat. So wird beispielsweise beim *Weg-Ziel-Ansatz* der Motivationstheorie eine Grundgleichung der Form

$$M_k = f\left[\left(\sum V_{T_{ik_j}} + \sum V_{T_{ek_j}} P_{T_{ek_j}}\right) + \left(\sum V_{E_{ik_j}} + \sum V_{E_{ek_j}} P_{E_{ek_j}}\right) P_{T_{kj}E_{kj}}\right]$$

postuliert (Neuberger, 1985, S. 169). An die Stelle der Klärung des theoretischen Konzepts "Motivation" tritt ein funktionaler Zusammenhang, der dem Stand der Theoriebildung in keinster Weise entspricht. Hierduch wird dem Leser das Gefühl vermittelt, den bis dato diffusen Begriff der Motivation nun vollständig unter Kontrolle zu haben. Die implizit enthaltene Quantifizierbarkeit der Motivation erweist sich jedoch als Illusion, wenn deutlich wird, daß nicht einmal der Versuch unternommen worden ist, die Bestimmungsstücke der Grundgleichung zu präzisieren. Im Zusammenhang mit dem Weg-Ziel-Ansatz der Motivationsforschung ist auf die Bedeutung additiv verbundener Meßstrukturen hinzuweisen, die immer dann erfolgreich eingesetzt werden können, wenn sich eine mehrdimensionale Eigenschaft additiv (oder multiplikativ) dekomponieren läßt.

Stark vereinfacht werden in der fundamentalen Meßtheorie die strukturellen Aspekte des Messens thematisiert, die allen empirischen Wissenschaften gemeinsam sind. Die Frage nach dem Vorteil der quantitativen Methode wird häufig mit dem Hinweis abgetan, daß der enorme Fortschritt der Naturwissenschaften ohne Quantifizierung nicht möglich gewesen wäre. Obgleich dies natürlich nicht die Frage beantwortet, ob dieser Fortschritt nicht auch auf andere Weise hätte erfolgen können, soll hier kurz auf die Entwicklung der klassischen Mechanik im 17. Jahrhundert eingegangen werden.

Anders als den Physikern im 17. Jahrhundert - allen voran Isaac Newton - ist es den Psychologen des 20. Jahrhunderts nicht gelungen, aus einer Vielzahl von Beobachtungsdaten eine übergreifende Theorie zu erstellen, die die experimentellen Daten aus einfachen Grundannahmen - sogenannten Axiomen - abzuleiten vermag: "Die Erwartung eines Newtons der Psychologie war auch im ausgehenden 20. Jahrhundert nicht erfüllbar" (Drösler, 1999, S. 327).

Ausgangspunkt des im 17. Jahrhunderts entstehenden Weltbilds war das (in Grundzügen bereits durch Aristarch von Samos vertretene) *kopernikanische* System der Planetenbewegungen: Die mittelalterliche Astronomie maß der Trennung von Himmel und Erde entscheidende Bedeutung zu. Die Erde galt als unvollkommen und veränderlich, der Himmel als vollkommen, unveränderlich und absolut. Die damaligen Astronomen nahmen die Lehre des Aristoteles und Ptolemäus auf, wonach sich Sonne und Mond kreisförmig und mit konstanter Geschwindigkeit um die unbewegliche Erde bewegen. Nach Ptolemäus sind die Bewegungen der übrigen Planeten komplizierter, sie bewegen sich auf sogenannten Epizyklen um die Erde. Dieses System sich bewegender Kreise wurde in der Absicht erdacht, die ungleichförmigen Planetenbewegungen mit Hilfe der als vollkommen, natürlich und unvermeidlich geltenden Kreisbewegung zu erklären. Kopernikus übernahm dieses System der Epizyklen, ersetzte jedoch den Grundgedanken von der Unbeweglichkeit der Erde durch das heliozentrische Weltbild.

Das Ende der mittelalterlichen Weltsicht war gekommen, als Galileo Galilei Anfang des 17. Jahrhunderts sein Teleskop auf den Jupiter richtete und vier Trabanten um den Planeten kreisen sah. Diese Entdeckung stand im Gegensatz zur Ptolemäischen Auffassung, nach der alle Himmelskörper direkt um die Erde kreisen.

In etwa zur selben Zeit wertete Johannes Kepler die von Tycho Brahe gesammelten Bewegungsdaten über den Planeten Mars aus. Nach Verarbeitung einer großen Anzahl derartiger Beobachtungsdaten verwarf Kepler die traditionelle Auffassung von der Unvermeidlichkeit der Kreisbewegung: Die Planeten bewegen sich auf einer Ellipse in deren einem Brennpunkt die Sonne steht. Überdies konnte Kepler die Auffassung von der Gleichförmigkeit der Bewegung widerlegen. Kepler zeigte anhand der zur Verfügung stehenden Daten, daß sich die Geschwindigkeit der Planeten so ändert, daß der von der Sonne zu einem Planeten weisende Radiusvektor in gleichen Zeiten gleiche Flächen überstreicht. Nach Bestimmung von Form und Geschwindigkeit der Planetenbewegung faßte Kepler Geschwindigkeit und Entfernung von der Sonne in einer Formel zusammen: Das Quadrat der Umlaufzeit dividiert durch die dritte Potenz der großen Halbachse ergibt einen für alle Planeten konstanten Wert.

Mit der Bestimmung der Planetenbewegung stieß Kepler die Frage nach den Ursachen für diese der Natur "uneigentümlichen" Kurven auf. Diese Frage blieb bis zum Jahre 1687 ungeklärt. In der zu dieser Zeit erschienenen Arbeit *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* konnte Isaac Newton die drei Keplerschen Gesetze aus einer von der Sonne ausgehenden Zentralkraft, umgekehrt zum Quadrat der Entfernung ableiten. Die Ausarbeitung der zur Lösung dieses Problems notwendigen Voraussetzungen und eine Vielzahl von Folgerungen bilden den Inhalt der Principia. Grundlage sind die am Anfang stehenden *Newtonschen Gesetze:*

Trägheitsgesetz: Jeder Körper bleibt im Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen Bewegung in gerader Linie, wenn er nicht zur Änderung dieses Zustands durch eine auf ihn einwirkende Kraft gezwungen wird.

Grundgesetz der Dynamik: Die Änderung der Bewegung ist der einwirkenden Kraft proportional und findet in die Richtung statt, in der die Kraft einwirkt.

Reaktionsprinzip: Jeder Aktion wird eine gleichgroße Reaktion entgegengesetzt. Während Kepler eine mathematische Beschreibung der Planetenbewegungen gelungen ist, stellt Newtons Arbeit den großen theoretischen Wurf dar, der die beobachteten Phänomene erklärt. Newtons Gravitationstheorie wäre jedoch ohne die Vorarbeiten Keplers (und natürlich auch Galileis) undenkbar gewesen. So fand Newton nicht nur zahlreiche Ergebnisse der Mechanik vor, er konnte bereits auf Gesetzmäßigkeiten zurückgreifen, die in der Sprache der Mathematik abgefaßt waren. Folgt man dieser (natürlich stark vereinfachten und der Komplexität der Thematik keineswegs gerecht werdenden) Argumentation, so läßt sich in pointierter Weise behaupten, daß es Newton nur deshalb möglich war, seine Theorie der allgemeinen Gravitation zu formulieren, weil Kepler die zur Verfügung stehenden Beobachtungsdaten in die Gestalt mathematischer Formeln bringen konnte. *Quantifizierung stellte (zumindest bei der Entwicklung der Gravitationstheorie) eine notwendige Voraussetzung für die Theoriebildung dar.*

Wie spätestens seit Otto Hölder (1901) bekannt ist, liegt die Ursache für diese Quantifizierbarkeit in der Existenz extensiver Verknüpfungsoperationen. Da die Psychologie keine derartigen Operationen aufweist, mußten die Psychologen des 20. Jahrhunderts zunächst klären, unter welchen strukturellen Voraussetzungen eine numerische Repräsentation auch ohne extensive Verknüpfungsoperation möglich ist. Die Erforschung dieser erkenntnistheoretischen Grundlagen erreichte 1971 mit Erscheinen der "Foundations of Measurement" (Krantz, Luce, Suppes & Tversky, 1971) einen vorläufigen Höhepunkt.

An dieser Stelle ist auf die oftmals gestellte Frage einzugehen, ob "der Mensch überhaupt meßbar sei". Diese Frage ist ebenso mit "Nein" zu beantworten wie die Frage nach der Meßbarkeit der Erde, der Sonne oder des Weltalls. Meßbar sind nicht die Objekte an sich, sondern bestimmte Attribute von Objekten. So ist beispielsweise die Körpergröße einer Person quantifizierbar. Ebenso läßt sich die Frage nach der *Meßbarkeit psychologischer Eigenschaften* des Menschen positiv beantworten. Da die Psychologie jedoch keinen "Meterstab" kennt, wie er in der Physik Verwendung findet, sollen zunächst einige der in der Psychologie typischerweise angewendeten Verfahren zur quantitativen Erfassung von Phänomenen skizziert werden.

Der größte Teil der Meßaktivität in der Psychologie läßt sich unter dem Stichwort "Indexmessung" subsummieren, wie sie typischerweise in der klassischen Testtheorie verwendet wird: Aufgrund der Anzahl der durch eine Person gelösten Aufgaben wird auf das latente Merkmal (beispielsweise "Intelligenz") geschlossen. Der häufig vorgebrachte Einwand, daß die klassische Testtheorie nicht versucht, die Messungen auf qualitative Beobachtungen zu gründen, ist keineswegs gerechtfertigt: Der Zählprozeß läßt sich ohne weiteres qualitativ begründen. Vielmehr entsteht durch die Betrachtung der Anzahl richtiger Lösungen das Problem, den Einfluß des Testverfahrens zu isolieren. Dies geschieht jedoch in der klassischen Testtheorie nicht.

Aufgrund der außerordentlichen Bedeutung dieses Skalierungsverfahrens ist auf die Problematik dieser Vorgehensweise hinzuweisen. Während das Zusammenzählen richtig gelöster Fragebogenitems problemlos möglich ist, ist die Vergleichbarkeit dieser Zählergebnisse nicht gewährleistet: Eine Versuchsperson, die mehr Pluspunkte erreichen konnte, ist nicht notwendigerweise besser, intelligenter oder hübscher als eine weniger gut abschneidende Testperson. Die Ursache für diese fehlende Vergleichbarkeit der Ergebnisse liegt in der Auswahl der Testitems begründet. So wird in der Regel darauf verzichtet, die *Äquivalenz* (d.h. Gleichwertigkeit) der Fragebogenitems zu überprüfen. Damit entbehrt jedoch das Zusammenzählen von Pluspunkten einer wissenschaftlichen Grundlage; der Vergleich von Versuchspersonen läßt sich damit meist nicht begründen: "Obwohl die Redensart von der Unerlaubtheit des „Zusammenzählens von Äpfeln und Birnen“ bekannt sein dürfte, geschieht eben dieses" (Drösler, 2000, S. 637).

Diese der klassischen Testtheorie inhärenten Probleme werden im Rahmen der Latent-Trait-Theorie gelöst und auch meßtheoretisch begründet. Die Modelle der Latent-Trait-Theorie unterscheiden sich in mehreren Punkten von der klassischen Testtheorie: Zum einen wird nicht auf dem Testrohwert, sondern auf der Lösung der einzelnen Testaufgabe aufgebaut. Andererseits wird der Einfluß des Meßverfahrens isoliert. Diese Trennung des Beitrags der Person vom Beitrag der Aufgabe ist eine wichtige Voraussetzung zur Messung von Persönlichkeitsmerkmalen.

Ein in der Psychologie oftmals angewendetes Verfahren zur Quantifizierung geht auf S. S. Stevens zurück: Bei der von Stevens propagierten Methode der direkten Skalierung wird der Meßakt von der Versuchsperson selbst vollzogen: Anstelle komparativer Urteile werden von der Versuchsperson quantitative Aussagen erwartet. Implizit wird vorausgesetzt, daß eine Versuchsperson in der Lage ist, die Versuchsanweisung konsistent auszuführen. Überdies wird angenommen, daß das Verhältnisskalenniveau durch eine geeignete Instruktion der Versuchsperson sichergestellt werden kann. Beide Annahmen sind jedoch unbegründet und bedürfen einer meßtheoretischen Fundierung.

Der Meßakt in der Psychologie wird durch Störgrößen beeinflußt, die während eines Experiments auf die Versuchsperson einwirken. Während die Galileischen Fallversuche weitgehend unabhängig von äußeren Einflüßen (wie dem Wetter, dem Geschlecht des Versuchsleiters oder der Dauer des Experiments) durchgeführt werden konnten, ist es denkbar, daß diese Größen einen Einfluß auf die Versuchsperson haben: Zieht eine Versuchsperson zu einem Zeitpunkt des Experiments die Alternative a der Alternative b vor, so ist es möglich, daß sie wenig später, unter scheinbar identischen Versuchsbedingungen, die Alternative b der Alternative a vorzieht. Diese Inkonsistenzen zeigen deutlich, daß eine Beziehung der Form $a \succeq b$ nicht mehr deterministisch zu interpretieren ist, wie dies typischerweise bei physikalischen Anwendungen geschieht.

Werden Inkonsistenzen in den Antworten einer Versuchsperson als Bestandteil der Meßsituation erachtet, so erscheint eine Verallgemeinerung des Meßgedankens angebracht: An die Stelle reeller Zahlen werden allgemeinere mathematische Entitäten wie Zufallsvariablen oder Wahrscheinlichkeitsverteilungen gesetzt. Ihren Ausgang nahm diese Entwicklung mit den wegweisenden Arbeiten von Thurstone (1927 a, b). In ähnlicher Weise wird in der Psychophysik einem Reiz x die psychometrische Funktion P_x zugeordnet. Beiden Ansätzen ist gemein, daß sie von einer festen Funktionsform der repräsentierenden Zufallsgrößen ausgehen: Während Thurstone von der Normalverteilung ausgeht, wird in der Psychophysik meist die unproblematischere logistische Verteilung zugrundegelegt.

Die mit diesen Ansätzen verbundenen Schwierigkeiten bilden den Ausgangspunkt für die in der vorliegenden Arbeit entwickelten probabilistischen Verallgemeinerung des klassischen deterministischen Meßgedankens: Es werden verschiedene Charakterisierungen der linkssteilen Exponentialverteilung und der symmetrischen logistischen Verteilung deduziert. Hierbei ist zu beachten, daß beide Verteilungen auf die Cauchysche Funktionalgleichung $f(x+y) = f(x)f(y)$ zurückgeführt werden können (Kapitel 4). Paarvergleichswahrscheinlichkeiten werden zunächst als Primitiva betrachtet, ohne auf ihre empirische Fundierung einzugehen. Diese pragmatische (wenn auch nicht unbedenkliche) Haltung läßt sich auch in der experimentellen Forschungspraxis beobachten: Oftmals werden relative Häufigkeiten auch dann mit Wahrscheinlichkeiten identifiziert, wenn der Stichprobenumfang gering ist und es nicht möglich ist, sich auf das Gesetz der großen Zahlen zu berufen.

Allen Charakterisierungen ist gemein, daß sie direkt oder indirekt auf dem Begriff der Zufallsvariablenrepräsentation aufbauen (Kapitel 5.1). Ausgehend von diesem theoretischen Rahmen wird in Kapitel 5.3 eine Charakterisierung der Exponentialverteilung deduziert: Es werden Annahmen über die Paarvergleichswahrscheinlichkeiten $p(a, x)$ formuliert, die die Exponentialverteilungsform der repräsentierenden Zufallsvariablen sicherstellen. Neben einigen Randbedingungen (wie etwa der Isotonie der Abbildung $p(\cdot, x)$) wird sich die Cauchysche Funktionalgleichung

$$1 - p(a \circ b, x) = (1 - p(a, x))(1 - p(b, x)) \tag{1.1}$$

als charakteristisch für die Exponentialverteilung erweisen. Begründet wird diese Funktionalgleichung mit der “Gedächtnislosigkeit” exponentialverteilter Zufallsvariablen: Bezeichnet F die Verteilungsfunktion einer exponentialverteilten Zufallsvariablen, so gilt $1 - F(s + t) = (1 - F(s))(1 - F(t))$.

Ausgehend von der Tatsache, daß auch die Verteilungsfunktion einer logistisch verteilten Zufallsvariablen einer einfachen Funktionalgleichung genügt, wird in den Kapiteln 5.5 und 5.7 nachgewiesen, daß die Funktionalgleichung

$$\frac{p(x \circ a \circ b, x)}{1 - p(x \circ a \circ b, x)} = \frac{p(x \circ a, x)}{1 - p(x \circ a, x)} \frac{p(x \circ b, x)}{1 - p(x \circ b, x)} \tag{1.2}$$

die logistische Verteilung der repräsentierenden Zufallsvariablen sicherstellt. Anwendung finden diese Ergebnisse beispielsweise in der Psychophysik: So ist es aufgrund der beiden Funktionalgleichungen (1.1) und (1.2) möglich, zwischen der exponentiellen und logistischen Funktionsform der psychometrischen Funktion zu unterscheiden.

Im Zusammenhang mit diesen Charakterisierungen ist auf das Problem der Wahrscheinlichkeitsschätzung hinzuweisen: Meßstrukturen, die Paarvergleichswahrscheinlichkeiten als Primitiva voraussetzen, basieren auf theoretischen Größen, die einer unmittelbaren Beobachtung nicht zugänglich sind. Während in der experimentellen Forschungspraxis üblicherweise versucht wird, diese Schwierigkeiten unter Zuhilfenahme des Gesetzes der großen Zahlen zu umgehen, wird in vorliegender Arbeit ein meßtheoretischer Zugang gewählt, der lediglich auf komparativen Vergleichsurteilen basiert. In Kapitel 7 wird gezeigt, daß es auf der Grundlage rein komparativer Urteile möglich ist, numerische Paarvergleichswahrscheinlichkeiten abzuleiten. Insbesondere ist es möglich, die Exponentialverteilungsform der repräsentierenden Zufallsvariablen aus rein qualitativen Axiomen zu deduzieren (Kapitel 8).

Vorliegende Arbeit gliedert sich in zwei Teile: Ein inhaltlich motivierter Hauptteil, in dem anwendungsbezogene Überlegungen im Vordergrund stehen, wird einem mathematischen Anhang gegenübergestellt, der durch formale Beweise ausgezeichnet ist. Eine Besonderheit dieser Arbeit, die sie von der Mehrzahl der psychologischen Publikationen unterscheidet, ist der Gebrauch mathematischer Symbole und abkürzender Schreibweisen. Einerseits ist dieser Symbolismus mit dem Untersuchungsgegenstand zu erklären. Andererseits lassen sich bereits einfachste Zusammenhänge rein verbal nur noch unzureichend darstellen. Als Beleg hierfür diene das sogenannte *Bisymmetrieaxiom*. Während es problemlos und unmißverständlich durch die Formel $(a \circ b) \circ (c \circ d) \sim (a \circ c) \circ (b \circ d)$ ausgedrückt werden kann, bedarf es einiger sprachlicher Fertigkeiten, den gleichen Zusammenhang verbal zu beschreiben: Eine Versuchsperson kann die subjektive Mitte der subjektiven Mitten von a und b sowie c und d nicht von der subjektiven Mitte der Mitten von a und c sowie b und d unterscheiden. Ein weiteres Beispiel für die Begrenztheit der verbalen Ausdrucksmöglichkeiten ist dem Buch von Morris Kline "Mathematics in Western Culture" entnommen: "When a twelfth century youth fell in love he did not take three paces backward, gaze into her eyes, and tell her she was too beautiful to live. He said he would step outside and see about it. And if, when he got out, he met a man and broke his head - the other man's head, I mean - then that proved that his - the first fellow's - girl was a pretty girl. But if the other fellow broke his head - not his own, you know, but the other fellow's - the other fellow to the second fellow, that is, because of course the other fellow would only be the other fellow to him, not the first fellow who - well, if he broke his head, then his girl - not the other fellow's, but the fellow who was the - Look here, if A broke B's head, then A's girl was a pretty girl; but if B broke A's head, then A's girl wasn't a pretty girl, but B's girl was." (Kline, 1872, zitiert nach Heuser, 1991, S. 13).

Kapitel 2

Frühere Arbeiten

2.1 Die Entwicklung der klassischen Meßtheorie

Obgleich die Mathematik über viele Jahrhunderte hinweg äußerst erfolgreich in den Naturwissenschaften - allen voran der Physik - angewendet werden konnte, wurde das Problem der Quantifizierung erst im ausgehenden neunzehnten Jahrhundert zu einem eigenen Forschungsgebiet gemacht. Diese von Hermann von Helmholtz (1887) und Otto Hölder (1901) initiierte Entwicklung wurde von verstärkten Bemühungen zur Klärung von Grundlagenproblemen begleitet. So entwickelte beispielsweise Gottlob Frege ein System der Logik, in dem alle logischen und mathematischen Begriffe auf wenige elementare Grundbegriffe zurückgeführt werden, Georg Cantor begründete mit seiner Abhandlung "Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre" (Cantor, 1895) die moderne Mengentheorie, und David Hilbert schuf eine moderne Axiomatisierung der Geometrie, die bis heute nicht an Aktualität verloren hat (Hilbert, 1899).

Um zu verstehen, weshalb sich die Wissenschaftler des ausgehenden neunzehnten Jahrhunderts in verstärktem Maße Grundlagenproblemen zuwendeten, hat man sich die geistige Situation der damaligen Zeit vor Augen zu halten.

Bis Ende des neunzehnten Jahrhunderts war Euklids "Elemente" neben der Bibel das am weitesten auf der Welt verbreitete Buch. In ihm werden die Grundlagen der Geometrie und Arithmetik aus Definitionen, Postulaten und Axiomen hergeleitet. Dabei hat vor allem das berühmte *Parallelenaxiom* (1.Buch, Postulat 5) große Probleme bereitet. Darin wird gefordert, "daß wenn eine gerade Linie beim Schnitt mit zwei geraden Linien bewirkt, daß innen auf derselben Seite entstehende Winkel zusammen kleiner als zwei Rechte werden, dann die zwei geraden Linien bei Verlängerung ins unendliche sich treffen auf der Seite, auf der die Winkel liegen, die zusammen kleiner als zwei Rechte sind" (Euklid, S. 3). Viele Mathematiker sahen sich veranlaßt, Euklid einen Fehler nachzuweisen und das Parallelenaxiom aus den übrigen Axiomen und Postulaten abzuleiten. Das Scheitern dieser Bemühungen führte schließlich im ersten Drittel des neunzehnten Jahrhunderts zu der Einsicht, daß es auch nichteuklidische Geometrien gibt. Der erste, der zu dieser Erkenntnis gelangte, war wohl C. F. Gauß. Da er dieses Ergebnis jedoch nicht publizierte, geht der Siegeszug nichteuklidischer Geometrien auf eine Arbeit von J. Bolyai aus dem Jahre 1832 zurück. Unabhängig von Bolyai hatte nicht nur Gauß, sondern auch der Russe N. Lobatschewsky diese Idee gehabt. Obwohl er diese bereits im Jahre 1826 veröffentlichte, erfuhr man in Mitteleuropa erst nach Bolyai davon.

Weshalb unterließ jedoch C. F. Gauß die Publikation einer derart revolutionären Einsicht, wie die der Existenz nichteuklidischer Geometrien? Die Ursache dürfte in dem damals üblichen auf Kant basierenden philosophischen Weltbild liegen. In seiner "Kritik der reinen Vernunft" stellt er die euklidische Geometrie als denknotwendig hin:

> Geometrie ist eine Wissenschaft, welche die Eigenschaften des Raumes synthetisch und doch a priori bestimmt. Was muß die Vorstellung des Raumes denn sein, damit eine solche Erkenntnis von ihm möglich sei? Er muß ursprünglich Anschauung sein; denn aus einem bloßen Begriffe lassen sich keine Sätze, die über den Begriff hinausgehen, ziehen, welches doch in der Geometrie geschieht.... Aber diese Anschauung muß a priori, d. i. vor aller Wahrnehmung eines Gegenstandes, in uns angetroffen werden, mithin reine, nicht empirische Anschauung sein. Denn die geometrischen Sätze sind insgesant apodiktisch, d. i. mit dem Bewußtsein ihrer Notwendigkeit verbunden .... (Kant, 1787/1956, S. 69)

Gemäß Immanuel Kant sind die Aussagen der Geometrie synthetisch, können also nicht allein aus dem Satz des Widerspruchs bewiesen werden. Dies erläutert Kant an dem Satz "daß die gerade Linie zwischen zwei Punkten die kürzeste sei" (Kant, 1787/1956, S. 49). Hierbei handelt es sich um eine synthetische Aussage, "denn mein Begriff vom Geraden enthält nichts von Größe sondern nur eine Qualität. Der Begriff des Kürzesten kommt also gänzlich hinzu, und kann durch keine Zergliederung aus dem Begriffe der geraden Linie gezogen werden" (Kant, 1787/1956, S. 49).

Überdies erfordern die Sätze der Geometrie keine Begründung durch Erfahrung, sind also a priori. So wird beispielsweise der Satz, "daß in einem Triangel zwei Seiten zusammen größer sind, als die dritte" (Kant, 1787/1956, S. 68) durch die Anschauung gerechtfertigt "und zwar a priori mit apodiktischer Gewißheit" (Kant, 1787/1956, S. 68).

Diese Auffassung I. Kants ist jedoch nicht verträglich mit der Existenz nichteuklidischer Geometrien. So schreibt C. F. Gauß in dem Brief vom 6. 3. 1832 an

Wolfgang Bolyai[1]:

> Gerade in der Unmöglichkeit, zwischen Σ und S a priori zu entscheiden, liegt der klarste Beweis, dass Kant Unrecht hatte zu behaupten, der Raum sei nur Form unserer Anschauung. (zitiert nach Reichardt, 1976, S. 62)

Aus heutiger Sicht läßt sich Kants Fehler folgendermaßen begründen: Er erkannte nicht (und konnte auch nicht erkennen - nichteuklidische Geometrien waren zu seiner Zeit ja noch unbekannt), daß zwei verschiedene Arten von Geometrien existieren: Mathematische und physikalische Geometrien. Mathematische Geometrien sind "reine" Mathematik, also gemäß der Kantschen Terminologie sowohl analytisch als auch a priori. Physikalische Geometrie beschreibt hingegen die Struktur des physikalischen Raums und ist somit a posteriori und damit auch synthetisch. Es gibt jedoch keine Geometrie, die zugleich synthetisch und a priori ist. Somit ist aber klar "wie Kants Ansicht und auch die Ansichten der meisten Philosophen des neunzehnten Jahrhunderts auf einer grundlegenden Verwechslung von zwei völlig verschiedenen Gebieten beruhten" (Carnap, 1969, S. 182).

Daß die Öffentlichkeit solche Gedankengänge nicht nachvollziehen wird, äußerte Gauß bereits im Jahre 1818. In seinem Brief an den Mathematiker C. L. Gerling vom 25. 8. 1818 heißt es:

> Ich freue mich, daß Sie den Mut haben, sich so auszudrücken, als wenn Sie die Möglichkeit, daß unsere Parallelen-Theorie, mithin unsere ganze Geometrie, falsch wäre, anerkennen. Aber die Wespen, deren Nest Sie aufstören, werden Ihnen um den Kopf fliegen. (zitiert nach Reichardt, 1976, S. 32)

Wie die zweite Hälfte des neunzehnten Jahrhunderts zeigte, schätzte Gauß die Fähigkeiten seiner Zeitgenossen falsch ein. Der Aufbau nichteuklidischer Systeme führte zu intensivem Nachdenken über die Grundlagen der Mathematik und Physik. Im Jahre 1887 legte Hermann von Helmholtz mit seiner Abhandlung "Zählen und Messen erkenntnistheoretisch betrachtet" die Grundlagen der modernen Meßtheorie.

2.1.1 Die Grundlagen der modernen Meßtheorie

Im Hinblick auf nichteuklidische Geometrien lehnte Hermann von Helmholtz die Annahme apriorischer Grundsätze ab, und erklärte die Axiome der Geometrie für Erfahrungssätze oder Hypothesen:

[1] Σ bezeichnet das euklidische System und S nichteuklidische Geometrien.

> Ich habe mich bemüht, in früheren Aufsätzen nachzuweisen, dass die Axiome der Geometrie keine a priori gegebenen Sätze seien, dass sie vielmehr durch Erfahrung zu bestätigen und zu widerlegen wären. (Helmholtz, 1887/1959, S. 77)

Diese Einsicht führte H. von Helmholtz an den "Ursprung" der Arithmetik. Wie Frege in seiner 1884 publizierten Arbeit "Die Grundlagen der Arithmetik" wendet er sich gegen die Ansicht Kants, von der Unbeweisbarkeit der Sätze der reinen Arithmetik:

> Nun ist es klar, dass die auch von mir vertretene empiristische Theorie, wenn sie die Axiome der Geometrie nicht mehr als unbeweisbare und keines Beweises bedürftige Sätze anerkennt, sich auch über den Ursprung der arithmetischen Axiome rechtfertigen muss, die zur Anschauungsform der Zeit in der entsprechenden Beziehung stehen. (Helmholtz, 1887/1959, S. 77/78)

Anders als Gottlob Frege ist Helmholtz in besonderem Maße auf die Verbindung von Mathematik und Physik bedacht gewesen. So sieht Helmholtz "die Aufgabe der vorliegenden Arbeit nur ... [darin], die Bedeutung und Berechtigung der Rechnung mit reinen Zahlen und die Möglichkeit von deren Anwendung auf physische Grössen zu zeigen" (Helmholtz, 1887/1959, S. 112). Sinn und Zweck des "Zeichensystems der Zahlen" sieht er in der Beschreibung der "Verhältnisse reeller Objecte, die, wo sie anwendbar sind, jeden geforderten Grad der Genauigkeit erreichen können" (Helmholtz, 1887/1959, S. 80). Hieran knüpfte Helmholtz seine für die Naturwissenschaften wegweisende Frage, die ihn zu einem der Gründer der Meßtheorie machte:

> Was ist der objective Sinn davon, dass wir Verhältnisse reeller Objecte durch benannte Zahlen als Grössen ausdrücken, und unter welchen Bedingungen können wir dies thun? (Helmholtz, 1887/1959, S. 80)

Bei dieser Fundierung der Meßtheorie werden zwei unterschiedliche Probleme erörtert. Einerseits ist "zu untersuchen ..., unter welchen Umständen wir Grössen durch benannte Zahlen ausdrücken, d.h. ihren Werth finden können" (Helmholtz, 1887/1959, S. 96), andererseites ist "zu untersuchen ..., unter welchen Bedingungen wir eine physische Verknüpfung gleichartiger Grössen als Addition ausdrücken dürfen" (Helmholtz, 1887/1959, S. 102). Helmholtz nennt hierbei die Eigenschaften einer Äquivalenzrelation ("Wenn zwei Grössen einer dritten gleich sind, sind sie unter sich gleich"; Helmholtz, 1887/1959, S. 96) sowie Kommutativität und Assoziativität der "physischen Verknüpfung". Diese Bedingungen ergeben sich sofort aus den entsprechenden Eigenschaften der numerischen Addition. Desweiteren darf sich das Resultat einer Verknüpfung nicht verändern, "wenn ich eine oder mehrere der Grössen mit gleich grossen gleichartigen Grössen vertausche" (Helmholtz, 1887/1959, S. 102). Abschließend äußert sich Helmholtz über das konkrete Meßverfahren:

> Grössen, welche addirt werden können, sind im Allgemeinen auch zu theilen. Kann eine jede der vorkommenden Grössen als additiv nach dem für Grössen dieser Art gültigen Additionsverfahren aus einer Anzahl gleicher Theile zusammengesetzt angesehen werden, so kann jede von ihnen ... durch die Summe ihrer Theile vertreten werden. So wird sie dann durch eine benannte Zahl ersetzt. (Helmholtz, 1887/1959, S. 105/106)

Diese Forderung der "Theilbarkeit der Grössen" entspricht der oftmals postulierten *Archimedischen Eigenschaft*, die die Endlichkeit einer streng beschränkten Standardfolge und damit letztlich die Meßbarkeit sicherstellt. Helmholtz gibt auch Auskunft über die Grenzen dieses konstruktiven Verfahrens: Gemäß dem Meßverfahren können "irrationale Verhältnisse ... [zwar] an den reellen Objecten vorkommen; in Zahlen ... können sie [jedoch] nie vollständig genau dargestellt, sondern ihr Werth nur zwischen beliebig zu verengernde Grenzen eingeschlossen werden" (Helmholtz, 1887/1959, S. 106). Diese "Einengung zwischen Grenzen" reicht aber für alle praktischen Anwendungen aus.

Mit dieser Arbeit konnte Hermann von Helmholtz zeigen, daß nicht alle extensiven Größen derart in die reellen Zahlen abgebildet werden können, daß die "physische Verknüpfung" durch die numerische Addition repräsentiert wird. Dies erreichte Helmholtz durch Formulierung notwendiger Bedingungen, die aus der Existenz einer isotonen und additiven Repräsentation resultieren.

Die empirisch orientierten Grundlegungsbemühungen von Hermann von Helmholtz wurden 1901 in die Form eines mathematischen Theorems gebracht (Hölder, 1901). Otto Hölder war damit der erste, der einen Repräsentationssatz formulieren und auch beweisen konnte. Dabei griff Hölder auf die Vorarbeiten Helmholtzs zurück:

> Im Uebrigen fasst v. Helmholtz ... das Verhältnis von Arithmetik und Grössenlehre genau so auf, wie es in der vorliegenden Arbeit durchgeführt worden ist. (Hölder, 1901, S. 1)

Am Anfang seines am 7. Januar 1901 vor der königlich sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig gehaltenen Vortrags gibt Hölder "die Axiome der Quantität, d.h. die in der Lehre von den messbaren (absoluten) Grössen vorauszusetzenden Thatsachen" (Hölder, 1901, S. 4) an. Es sind dies

1. Wenn zwei Grössen a und b gegeben sind, so ist entweder a mit b identisch ($a = b$, $b = a$), oder es ist a grösser als b, und b kleiner als a ($a > b$, $b < a$),

oder umgekehrt b grösser als a, und a kleiner als b; diese drei Fälle schliessen sich aus.

2. Zu jeder Grösse giebt es eine kleinere.
3. Zwei Grössen a und b, die auch identisch sein können, ergeben in einer bestimmten Reihenfolge eine eindeutig bestimmte Summe $a + b$.
4. $a + b$ ist grösser als a und grösser als b.
5. Ist $a < b$, so giebt es ein x so, dass $a + x = b$, und ein y so, dass $y + a = b$.
6. Es ist stets $(a + b) + c = a + (b + c)$.
7. Wenn alle Grössen in zwei Classen so eingetheilt sind, dass jede Grösse einer und nur einer Classe zugewiesen ist, dass jede Classe Grössen enthält, und jede Grösse der ersten Classe kleiner ist als jede Grösse der zweiten, so existirt eine Grösse ξ derart, dass jedes $\xi' < \xi$ zur ersten, und jedes $\xi'' > \xi$ zur zweiten Classe gehört. ξ selbst kann, je nach dem gegebenen Fall, zur einen oder zur andren Classe gehören. (Hölder, 1901, S. 5-7)

Dabei läßt Hölder den Begriff der messbaren Größe undefiniert, er ist implizit über die Axiome definiert:

> Die Lehre von den messbaren Grössen gilt in derselben Weise für die Vergleichung und die Addition von Zeiten, Massen, Strecken, Inhalten u.s.w. (Hölder, 1901, S. 3)

Diese formalistische Konzeption geht auf das 1899 erschienene Standardwerk von David Hilbert "Grundlage der Geometrie" zurück. Bei Hilbert gibt es anders als bei Euklid keine Definition der Grundbegriffe "Punkt", "Gerade" und "Ebene", vielmehr werden diese Begriffe durch die Axiome eingeführt. Dieser Verzicht resultiert aus der Einsicht, daß die Grundbegriffe einer Theorie nicht erklärt werden können. Während die Objekte einer Theorie unterschiedliche Interpretationen erfahren können, ist ausschließlich die Widerspruchsfreiheit des Axiomensystems obligat. Insbesondere werden die Aussagen der Geometrie nicht mehr als Beschreibungen der Wirklichkeit gedeutet. Überspitzt und scharf pointiert wird dies durch die Aussage Bertrand Russells wiedergegeben, wonach die Mathematik als diejenige Wissenschaft definiert werden kann, in der wir niemals das kennen, worüber wir sprechen, und niemals wissen, ob das, was wir sagen, wahr ist.

Nachdem Hölder einige "einfachste Folgerungen" aus den Axiomen 1 bis 6 (wie z.B. die Transitivität der Relation $<$) hergeleitet hat, werden das Archimedische Axiom ("Es seien a und b zwei Grössen, und $a < b$. Wir wollen beweisen, dass es eine ganze Zahl n so giebt, dass $na > b$ ist"; Hölder, 1901, S. 10) und das "commutative Gesetz der Addition" (Hölder, 1901, S. 13) verifiziert. Diese Ergebnisse werden zur Konstruktion einer bijektiven, ordnungserhaltenden und additiven Abbildung zwischen den messbaren Grössen und den positiven reellen Zahlen herangezogen. Dazu greift Hölder auf die Untersuchungen Dedekinds über die "irrationalen Zahlgrössen" zurück:

> Im Folgenden ist die Theorie von DEDEKIND, als die für den Zweck bequemste, angenommen worden. Nach dieser Theorie wird eine Irrationalzahl durch einen „Schnitt" definirt, d.h. sie wird dadurch definirt, dass man alle rationalen Zahlen angibt, die grösser sind als die Irrationalzahl, und alle rationalen Zahlen, die kleiner sind als dieselbe. (Hölder, 1901, S. 20)

> Ein Schnitt, der keine kleinste obere Zahl besitzt, wird als eine irrationale Zahl repräsentirend angesehen und auch geradezu eine irrationale Zahl genannt. (Hölder, 1901, S. 22)

Anknüpfend an diese Theorie von Dedekind zeigt Hölder, daß "zu jedem Grössenverhältniss $a : b$, d.h. zu je zwei Grössen, die in einer bestimmten Ordnung gegeben sind, ... ein ganz bestimmter Schnitt [gehört], d.h. eine bestimmte Zahl im allgemeinen Sinne des Wortes. Diese Zahl soll mit $[a : b]$ bezeichnet werden" (Hölder, 1901, S. 23). Wie bei Helmholtz wird dadurch das Verhältnis zweier Objekte durch eine reelle Zahl ausgedrückt:

> Man kann die Zahl $[a : b]$ auch die Masszahl nennen, die man erhält, wenn man die Grösse a durch die Grösse b misst. b heisst dann die Einheit.... Zum Verhältnis $a : a$ gehört der die Zahl 1 repräsentirende Schnitt ..., d.h. es ist $[a : a] = 1$. (Hölder, 1901, S. 23/24)

Im Anschluß bestimmt Hölder die "Masszahl einer Summe von Grössen" (Hölder, 1901, S. 25). Diese ist gleich der Summe der einzelnen Masszahlen. Hieraus kann zusammen mit dem Lösbarkeitsaxiom 5 die Injektivität der Abbildung $f_b(a) := [a : b]$ gefolgert werden. Die noch zu zeigende Surjektivität der Abbildung f_b folgt aus der "Existenz einer Grösse von vorgeschriebener Masszahl" (Hölder, 1901, S. 30). Hölder untersuchte auch die Auswirkungen einer "Aenderung der Einheit" (Hölder, 1901, S. 27): Geht man von einer Einheit b zu einer anderen Einheit c über, so ergibt sich die Formel

$$[a : b][b : c] = [a : c].$$

Dies besagt, "dass man die Masszahl von a in Beziehung auf c als Einheit erhält, wenn man die auf die Einheit b bezogene Masszahl von a mit der auf die Einheit

c bezogenen Masszahl von b multiplicirt" (Hölder, 1901, S. 28). In der Sprache der repräsentationalen Meßtheorie läßt sich dieses Ergebnis wie folgt zusammenfassen: *Es sei A eine nichtleere Menge, $\succ$ eine binäre Relation auf A sowie $\circ$ eine binäre Operation auf A, so daß die Eigenschaften 1-7 erfüllt sind. Dann existiert eine isotone und additive Abbildung ϕ, die die Grundmenge A bijektiv auf das offene Intervall $(0, \infty)$ der positiven reellen Zahlen abbildet. Ist $\phi' : A \to (0, \infty)$ eine weitere Abbildung mit diesen Eigenschaften, so existiert eine Konstante $\lambda > 0$ mit $\phi' = \lambda\phi$.* Von entscheidender Bedeutung ist hierbei die Tatsache, daß Hölder lediglich von einer *Halbgruppe* ausgeht, und er damit die Gruppenstruktur der reellen Zahlen wesentlich abschwächen konnte.

Der zweite Teil seines Vortrages ist für die Entwicklung der Meßtheorie (insbesondere der Messung psychologischer Phänomene) ebenso bedeutend wie der erste. Darin zeigt Hölder die Anwendbarkeit seines eben bewiesenen Repräsentationstheorems auf die "Strecken in einer Geraden" (Hölder, 1901, S. 37). Entscheidend ist in diesem Zusammenhang der Sachverhalt, daß es unter geeigneten Randbedingungen möglich ist, eine extensive Struktur zu etablieren, selbst wenn der Untersuchungsgegenstand keine Verknüpfungsoperation aufweist. Damit legte Hölder den Grundstein für Differenzenmeßstrukturen, wie sie im 4. Kapitel der "Foundations of Measurement" dargestellt sind:

> We follow Hölder's method very closely; our axioms for positive differences (Section 4.2) and our proof are very similar to his. The main difference is that his version of extensive measurement used a closed operation, so his line had to be unbounded; we have the physically more realistic assumption of a bounded line, and we reduce difference measurement to the corresponding bounded extensive case .... (Krantz et al., 1971, S. 143)

Mit dieser äußerst modernen Vorgehensweise nahm Otto Hölder die Arbeitsweise heutiger Meßtheoretiker voraus. Diese Auffassung wird in pointierter Weise auch von Luce und Narens vertreten, die große Teile der repräsentationalen Meßtheorie nur als Anwendung des Hölderschen Satzes ansehen: " The theory of measurement is largely an application of Hölder's theorem, i.e., of standard sequences in the guise of Archimedean ordered groups" (Luce & Narens, 1994, S. 223).

Da Hölders Arbeit direkt zur Messung psychologischer Phänomene herangezogen werden kann, hätte ihre zeitgenössische Anerkennung möglicherweise zu einem anderen Verlauf der Psychologiegeschichte geführt. Zumindest wäre ihr das vernichtende Urteil der "Campbell-Kommission" erspart geblieben (Kapitel 2.1.2). Die Tatsache, daß die Hölderschen Ergebnisse erst in der modernen Meßtheorie Anerkennung fanden, ist umso verwunderlicher, als Wilhelm Wundt, der Begründer der experimentellen Psychologie, zusammen mit Hölder in Leipzig tätig war.

Aufgrund der enormen Bedeutung dieser Arbeit soll sie hier vor allem im Hinblick auf die Messung psychologischer Phänomene untersucht werden: Verweist Hölder zu Beginn seines Vortrages noch darauf, daß die “Lehre von den messbaren Grössen” in “derselben Weise für die Vergleichung und die Addition von Zeiten, Massen, Strecken, Inhalten, u. s. w.” (Hölder, 1901, S. 3) gilt, ist der zweite Teil seines Vortrages mit “Anwendung auf die Strecken in einer Geraden” (Hölder, 1901, S. 37) überschrieben. Die damit verbundene geometrische Deutung des Axiomensystems stand einer psychologischen Interpretation entgegen, wonach die Punkte $A, B, C, \ldots$ als (physikalische) Reize und die Strecken $AB, CD, \ldots$ als subjektive Reizdifferenzen gedeutet werden können. Ausgehend von den Begriffen “Punkt”, “Gerade” und “Strecke” postuliert Hölder die folgenden Bedingungen:

1. Es giebt auf einer Geraden mindestens zwei verschiedene Punkte.

2. Die Strecken einer Geraden zerfallen in zwei Arten, derart, dass jede Strecke einer und nur einer Art angehört. Strecken von derselben Art heissen „von gleicher Richtung“, Strecken von verschiedener Art heissen von „von entgegengesetzter Richtung“. Die Strecken AB und BA sind stets von entgegengesetzter Richtung. Die Strecken der einen Art seien als „Strecken erster Richtung“ausgezeichnet, und es soll der Umstand, dass AB eine Strecke von der ersten Richtung ist, durch $A \subset B$ oder durch $B \supset A$ ausgedrückt werden.

3. Aus $A \subset B$ und $B \subset C$ folgt stets, dass $A \subset C$ ist.

4. Wenn $A \subset C$ ist, so giebt es mindestens einen solchen Punkt B, dass $A \subset B$, und $B \subset C$. Wir sagen dann, dass der Punkt B „zwischen“A und C, oder, dass er zwischen C und A gelegen sei.

5. Wenn $A \subset B$, und $A' \subset B'$, so kann man die Strecken AB und $A'B'$ vergleichen, so dass sie entweder gleich oder ungleich gefunden werden, Sind die Strecken gleich, so wird dies durch $AB = A'B'$ (oder durch $A'B' = AB$) ausgedrückt.

6. Ist $A \subset B$, $A' \subset B'$, $A'' \subset B''$, so folgt aus $AB = A'B'$ und $A'B' = A''B''$ zusammen stets $AB = A''B''$.

7. Wenn $A \subset B$, $B \subset C$, $A' \subset B'$, $B' \subset C'$ ist, so folgt aus $AB = A'B'$ und $BC = B'C'$ zusammen stets $AC = A'C'$.

8. Ist $M \subset N$, und ist A ein beliebiger Punkt, so giebt es einen und nur einen Punkt B, so dass $A \subset B$, und $AB = MN$, und einen und nur einen Punkt C so, dass $C \subset A$, und $CA = MN$ ist.

9. Wenn $A \subset B \subset C \subset D$ ist, so ist niemals $AD = BC$.
10. Wenn alle Punkte der Geraden so in zwei Classen eingetheilt sind, dass Punkte beider Classen existiren, dass jeder Punkt einer und nur einer Classe angehört, und dass für jeden Punkt X der ersten und jeden Punkt Y der zweiten Classe $X \subset Y$ ist, so giebt es einen Punkt Z von der Art, dass jeder Punkt $A \subset Z$ zur ersten, und jeder Punkt $B \supset Z$ zur zweiten Classe gehört. (Hölder, 1901, S. 38-40)

Aufgrund der Reflexivität ($AB = AB$), Symmetrie ($AB = CD \Leftrightarrow CD = AB$) und Transitivität ($AB = A'B', A'B' = A''B'' \Rightarrow AB = A''B''$) der Relation "=", ist es Hölder möglich, den Begriff des "Abstands erster Richtung" als Äquivalenzklasse einzuführen. Unter Zuhilfenahme des Lösbarkeitsaxioms läßt sich auf der Menge dieser Äquivalenzklassen eine Vergleichsrelation "$<$" einführen: Sind MN und $M'N'$ zwei Repräsentanten der Abstände a und a', so lassen sich aufgrund von Axiom 8 Punkte $A \subset B$ und $A \subset B'$ wählen mit $AB = MN$ und $AB' = M'N'$. Je nachdem ob BB' eine Strecke erster oder zweiter Richtung ist, schreibt man $a < a'$ oder $a' < a$. Im Gegensatz zur Axiomatisierung der extensiven Messung stellt die Ordnungsrelation $<$ keine fundamentale Größe dar. Vielmehr wird $<$ aus dem angegebenen Axiomensystem deduziert. In der Absicht, zwei Abstände a und b zu addieren, geht Hölder von Repräsentanten AB und BC aus. Die Strecke AC repräsentiert dann die Summe $a + b$ der beiden Abstände a und b.

Ohne größere Probleme kann nun nachgewiesen werden, daß die Menge der Abstände erster Ordnung den "Axiomen der Quantität" genügt, falls die Relation $<$ und die Addition $+$ zugrundegelegt wird.

Obgleich dieses Ergebnis keine Beachtung unter Hölders Zeitgenossen fand, wurde die Idee, daß die Messung psychologischer Phänomene auf der Anordnung subjektiver Reizdifferenzen aufgebaut werden kann, unter anderem von N. R. Campbell (!) geäußert:

> Almost everyone will agree, not only that a buttercup is yellower than milk and milk than snow, but also that the difference between a buttercup and milk is greater than the difference between milk and snow. Now it can easily be shown that if we could order in this way all the differences between sensations, ... then a process of measurement would be possible by means of which we could assign numerals quite uniquely. (Campbell, 1933, S. 571)

Die Überzeugung, daß diese Idee keine empirische Anwendung finden würde, führte die Psychologie in eine tiefe Krise:

2.1.2 Fundamentale versus extensive Messung

Eine der einflußreichsten meßtheoretischen Arbeiten dieser Zeit war das 1920 erschienene wissenschaftsphilosophische Werk "Physics: The Elements" von N. R. Campbell (Campbell, 1920/1957). Darin vertrat Campbell eine scheinbar liberale Auffassung des Meßbegriffs:

> Measurement is the process of assigning numbers to represent qualities; the object of measurement is to enable the powerful weapon of mathematical analysis to be applied to the subject matter of science. (Campbell, 1920/1957, S. 267/268)

Die in der Folge diskutierte Meßbarkeit von Härte und Gewicht zeigt jedoch deutlich, daß Campbell nur diejenigen Zahlzuweisungen als Messungen begreift, die durch Festlegung eines einzigen Wertes bereits eindeutig bestimmt sind. Obgleich Campbell diese Auffassung niemals explizit äußert, stützen die folgenden Zitate diese Vermutung:

> Indeed it is obvious that they [Gewicht, Dichte] are not only measureable, but measureable in some higher and more important sense than is hardness (according to Mohs' scale); there is still an arbitrariness about the assignment of numerals on Mohs' scale which is absent from the assignment of numerals to represent weight or density.... Thus if A is harder than B, the numeral which represents the hardness of A must be greater than that which represents the hardness of B (according to Mohs' convention, which might equally well have been reversed); if A is 8, B cannot be 7. On the other hand there is nothing whatever to determine how much larger the numeral of B must be. (Campbell, 1920/1957, S. 274)

> When the scale of hardness was found, the choice of a numeral to represent the hardness of one body did not limit the choice of numerals to represent any other body to one and only one; but in our scale of weight, when we have fixed the numeral which is to represent one weight we are no longer left with any arbitrary choice of the remainder; we are forced to represent every other weight by one numeral and only one. (Campbell, 1920/1957, S. 275)

> For weight undoubtedly is a property which is definitely measureable; the fixing of the weight of one body fixes uniquely the weight of all others .... (Campbell, 1920/1957, S. 277)

Mit den heute gebräuchlichen Bezeichnungen ist der Campbellsche Meßbegriff untrennbar mit der Eindeutigkeitsfrage verbunden. Zahlzuweisungen werden nur dann als Messung verstanden, wenn ein genügend hohes Skalenniveau erreicht wird. Dabei unterscheidet Campbell fundamentale von abgeleiteter Messung:

> The process of measuring weight does not involve the measurement of any other magnitude. For this reason we shall term weight a "fundamental magnitude" .... (Campbell, 1920/1957, S. 277)

Abgeleitete Messung resultiert aus der Tatsache, "that the constant in a numerical law is always the measure of a magnitude.... Such magnitudes, measured by the constants of numerical laws, are termed Derived Magnitudes ...." (Campbell, 1920/1957, S. 346). Fundamentale Messung ist jedoch auch hier der erste Schritt zur Quantifizierung:

> The process of their measurement, requiring the establishment of a numerical law which requires again the previous establishment of some fundamental process of measurement, depends entirely on the measurement of the fundamental magnitudes involved in the law .... (Campbell, 1920/1957, S. 346)

Dieses Konzept der abgeleiteten Messung geht bereits auf die Arbeit von Hermann von Helmholtz zurück:

> Ausser den bisher besprochenen Grössen, welche direct als solche zu erkennen sind, weil sie additive Verbindung zulassen, giebt es aber noch eine Reihe von anderen, auch durch benannte oder unbenannte Zahlen ausdrückbaren Verhältnissen, für welche noch keine additive Verbindung mit gleichartigen bekannt ist. Sie werden gefunden, so oft sich ein naturgesetzlicher Zusammenhang zwischen additiven Grössen ... zeigt, die durch die Besonderheiten irgend einer bestimmten Substanz, oder eines bestimmten Körpers ... beeinflusst werden. (Helmholtz, 1887/1959, S. 106/107)

Dabei muß "die Bestimmung von additiven Grössen ... stets vorangehen, ehe man die Werthe nicht additiver finden kann" (Helmholtz, 1887/1959, S. 108). Campbell läßt nun keinen Zweifel daran, daß eine notwendige Voraussetzung für fundamentale Messung die Existenz einer empirischen Verknüpfungsoperation ist:

> In order that a property should be measured as a fundamental magnitude, involving the measurement of no other property, it is necessary that a physical process of addition should be found for it. By a physical process of addition is meant an operation which is similar in a

> certain manner to the mathematical operation of addition. (Campbell, 1920/1957, S. 267)

Für eine Disziplin wie die Psychologie, in der additive Verknüpfungsoperationen nahezu bedeutungslos sind, hat diese Auffassung Campbells weitreichende Konsequenzen. Dies erkannte E. G. Boring bereits im Jahre 1934: "Psychology lacks true measurement ... because there are no additive units" (zitiert nach Newman, 1974, S. 138). Im Jahre 1932 setzte die *British Association for the Advancement of Science* einen Ausschuß ein, der die Frage der Meßbarkeit psychologischer Phänomene klären sollte. Dieses Kommitee, welches sich aus Psychologen, Mathematikern und Physikern, darunter auch N. R. Campbell, zusammensetzte, kam 1940 zu einem negativen Ergebnis (zitiert nach Newman, 1974, S. 141):

1. The quantity argument: since no meaning can be given to the cutting up of a single sensation into parts, which can in turn be added together again to form the original whole, there is no measurement.

2. There exists no other definition for addition. Without the operation of addition no numerical scale can be constructed, and without this operation the concept of magnitude is meaningless.

Dieses Urteil der Kommission versetzte die Psychologie in eine schwierige Lage: Um als ernstzunehmende Naturwissenschaft zu gelten, war es notwendig psychologische Phänomene messen zu können -

> We hardly recognize a subject as scientific if measurement is not one of its tools. (Boring, 1950, S. 294)

-, die damals als notwendig angesehenen Voraussetzungen wurden ihr jedoch abgesprochen. Der Widerstand gegen dieses weitreichende Verdikt artikulierte sich vor allem in den einflußreichen Arbeiten des Psychologen Stevens. Stevens hatte ein besonderes Interesse an dem Abschlußbericht der Kommission, begründete sie ihr Urteil doch exemplarisch an seiner "Sone Scale of Loudness" (Stevens & Davis, 1938). In seiner 1946 erschienenen Arbeit "On the Theory of Scales of Measurement" (Stevens, 1946/1967) favorisierte Stevens einen liberalen Meßbegriff: "Measurement, in the broadest sense, is defined as the assignment of numerals to objects or events according to rules" (Stevens, 1946/1967, S. 142). Dieser Meßbegriff ist derart allgemein gefaßt - "numerals" sind nur Zahlzeichen und sind nicht mit "numbers" zu verwechseln, die die in der Mathematik gebräuchlichen Zahlen bezeichnen -, daß jede Zahlzuweisung, wie sie etwa bei der von Stevens bevorzugten Methode der direkten Skalierung vollzogen wird, als Messung gewertet wird. Hieran knüpft Stevens die Auffassung, daß es verschiedene Arten der Zahlzuweisung und damit auch verschiedene Skalenniveaus gibt:

> The fact that numerals can be assigned under different rules leads to different kinds of scales and different kinds of measurement. (Stevens, 1946/1967, S. 142)

Diese veschiedenen Skalentypen werden durch die zulässigen Transformationen charakterisiert, mit denen die unterschiedlichen Skalen ineinander übergeführt werden können. Dabei unterscheidet man gemäß Stevens *Nominal-, Ordinal-, Intervall-*, und *Verhältnisskalen.* Lassen sich je zwei Skalen durch Multiplikation mit einer positiven Konstanten ineinander überführen, so spricht man von einer Verhältnisskala; sind nur affine Transformationen $x \mapsto \alpha x + \beta$ zulässig, so wird von einer Intervallskala gesprochen; im Falle streng monotoner Transformationen nennt man die Abbildung eine Ordinalskala; sind alle eineindeutigen Transformationen zulässig, so handelt es sich um eine Nominalskala. Das hierzu verwandte *Bedeutsamkeitsproblem* wird bereits in den Arbeiten von Nagel (1930) sowie Cohen und Nagel (1934) angesprochen:

> As we shall see, not all qualities can be "measured" in the same sense. Thus when we say that one tank contains 100 quarts of water and another 50 quarts, it is legitimate to say, as we shall soon find, that the first tank contains *twice as much* water as the second. In this case, the ratio of the volumes is the same as the ratio of the numbers. But when we say that the temperature one day is 100° and on another 50°, is it permissible to say that the temperature on the first day was *twice as much* as on the second? Or when we find that one student has an I.Q. of 100 and another an I.Q of 50, is it correct to say that the first student is *twice as intelligent* as the second? An analysis of the conditions of measurement will show that the last two assertions are strictly without meaning. (Cohen & Nagel, 1934, S. 294)

Die erste systematische Untersuchung derartiger Invarianzprobleme geht aber wohl auf die bereits angesprochene Arbeit von Stevens (1946/1967) zurück. Am Ende dieser Arbeit wendet sich Stevens mit folgenden Worten an die Kommission:

> To the British commitee, then, we may venture to suggest by way of conclusion that the most liberal and useful definition of measurement is, as one of its members advised,"the assignment of numerals to things so as to represent facts and conventions about them." The problem as to what is and is not measurement then reduces to the simple question: What are the rules, if any, under which numerals are assigned? If we can point to a consistent set of rules, we are obviously concerned with measurement of some sort, and we can then proceed to the more interesting question as to the kind of measurement it is. In most cases a formulation of the

> rules of assignment discloses directly the kind of scale involved. If there remains any ambiguity, we may seek the final and definitive answer in the mathematical group-structure of the scale form: In what ways can we transform its values and still have it serve all the functions previously fulfilled? (Stevens, 1946/1967, S. 148)

Obgleich das Konzept der Skalentypen eine zentrale Rolle in Stevens' Argumentation einnimmt, ist von einer axiomatischen Untersuchung derartiger Invarianzprobleme noch nicht die Rede: So soll zum Beispiel bei der von Stevens bevorzugten Methode der *direkten Skalierung* das Verhältnisskalenniveau durch eine geeignete Instruktion der Versuchsperson sichergestellt werden.
Der entscheidende Unterschied zwischen derartigen Skalierungsverfahren und axiomatischen Meßmodellen besteht darin, daß erstere numerische Werte zuordnen, ohne die Frage der Meßbarkeit zu beantworten (oder auch nur zu stellen). Obgleich damit die Frage nach dem Skalenniveau ihren Sinn verliert, wird häufig von Intervallskalenniveau ausgegangen. Damit degeneriert das Skalenniveau zu einem bedeutungsleeren Begriff, der die Anwendung bestimmter mathematischer Operationen rechtfertigen soll.

Auch Johann Pfanzagl setzte sich mit den Grundlagen des Messens auseinander. In seiner 1959 veröffentlichten Arbeit "Die axiomatischen Grundlagen einer allgemeinen Theorie des Messens" zeigte er, "daß die vielfach vertretene Auffassung, es könne nur bei additiven Merkmalen von einer echten Messung gesprochen werden, zu eng ist" (Pfanzagl, 1959/1962, S. 59). Pfanzagl bewies, "daß es eine wesentlich allgemeinere Verknüpfung zwischen den Elementen von M gibt, die man isomorph auf die Menge der reellen Zahlen abbilden kann" (Pfanzagl, 1959/1962, S. 59/60) . Diese sogenannten metrischen Verknüpfungen sind monoton, stetig (bzgl. der Ordnungstopologie) und genügen dem sogenannten Bisymmetrieaxiom:

$$(a \circ b) \circ (c \circ d) \sim (a \circ c) \circ (b \circ d), \quad \forall a, b, c, d \in M.$$

Besitzt eine Verknüpfung diese Eigenschaften, so kann M derart auf die Menge der reellen Zahlen abgebildet werden, daß die metrische Verknüpfung durch eine lineare Verknüpfung im numerischen Bereich repräsentiert wird. In der Folge wurde die Stetigkeitsvoraussetzung durch eine Lösbarkeitsbedingung und ein Archimedisches Axiom ersetzt (Krantz et al., 1971, Kap. 6.9).

Pfanzagl wies auch auf die Bedeutung seiner Theorie für die Psychologie hin: "Das in der Psychophysik übliche Verfahren der Mitten-Bildung (d.h. die Bestimmung jenes Reizes, der genau in der Mitte zwischen zwei gegebenen Reizen liegt) führt ... zu einer metrischen Verknüpfung" (Pfanzagl, 1959/1962, S. 60).

2.1.3 Der modelltheoretische Ansatz

Zu einer endgültigen Klärung des Meßbegriffs kam es Ende der fünfziger, Anfang der sechziger Jahre durch Dana Scott, Patrick Suppes und Joseph L. Zinnes. Beeinflußt durch die modelltheoretischen Arbeiten von Alfred Tarski aus den fünfziger Jahren faßten sie den Begriff der Messung als *homomorphe* Abbildung auf, die jedem Element eines empirischen Relativs ein Element eines geeigneten numerischen Relativs zuordnet:

> The first fundamental problem of measurement may be cast as the problem of showing that any empirical relational system that purports to measure (by a simple number) a given property of the elements in the domain of the system is isomorphic (or possibly homomorphic) to an appropriately chosen numerical relational system. (Suppes & Zinnes, 1963, S. 7)

Dabei verwenden Suppes und Zinnes die auf A. Tarski zurückgehende Bezeichnung eines "relational systems": "A relational system is a finite sequence of the form $\mathscr{A} = \langle A, R_1, \ldots, R_n \rangle$, where A is a nonempty set of elements called the domain of the relational system $\mathscr{A}$, and $R_1, \ldots, R_n$ are relations on A" (Suppes & Zinnes, 1963, S. 5). Neben diesem sogenannten Repräsentationsproblem unterscheidet die heutige Meßtheorie fünf weitere Standardprobleme: (1) Das Eindeutigkeitsproblem, (2) das Bedeutsamkeitsproblem, (3) das Fehlerproblem, (4) das Skalierungsproblem, (5) das Determinationsproblem.

Das Eindeutigkeitsproblem wirft die Frage nach den zulässigen Transformationen auf: "Determine the scale type of the measurements resulting from the procedure" (Suppes & Zinnes, 1963, S. 10). Hierzu eng verwandt ist die Frage nach der Bedeutsamkeit einer numerischen Aussage: "A numerical statement is meaningful if and only if its truth (or falsity) is constant under admissible scale transformations of any of its numerical assignments, that is, any of its numerical functions expressing the results of measurement" (Suppes & Zinnes, 1963, S. 66). Das Fehlerproblem betrifft die empirische Axiomenprüfung. Wie in Kapitel 2.2 dargelegt wird, treten hierbei Schwierigkeiten auf, die zu probabilistischen Meßmodellen führen. Das Skalierungsproblem beinhaltet die Frage nach dem konkreten Meßverfahren: Wie können den Objekten als Träger der zu messenden Eigenschaften numerische Meßwerte zugeordnet werden? Dieses Problem kann durch konstruktive Beweisverfahren gelöst werden, die es erlauben, Algorithmen zur Generierung von numerischen Meßwerten abzuleiten. Das Determinationsproblem umfaßt schließlich die Frage, ob eine Meßstruktur ein zu messendes Merkmal angemessen beschreibt.

2.2 Das Fehlerproblem in der Psychologie

Die praktische Umsetzung der axiomatischen Meßtheorie wird durch das sogenannte *Fehlerproblem* erschwert: Da empirische Daten in der Regel fehlerbehaftet sind, können Axiome im besten Falle näherungsweise erfüllt sein. Für den Anwender stellt sich daher die Frage, ob die beobachteten Axiomenverletzungen zufälliger oder systematischer Natur sind. Dabei wird angenommen, daß sich zufällige Fehler bei wiederholter Datenerhebung ausgleichen, systematische Fehler sich hingegen "aufsummieren". Unter Fehlern werden also empirische Verletzungen von Axiomen verstanden. Sie sind nicht mit (*quantitativen*) Meßfehlern zu verwechseln, die zufällige Abweichungen von "wahren" Meßwerten bezeichnen.

Zur Beantwortung der Frage, wann ein Axiomensystem trotz einiger Verletzungen noch als empirisch erfüllt anzusehen ist, bedarf es einer Fehlertheorie. Diese soll die Unterscheidung von systematischen und zufälligen Fehlern ermöglichen.

Sind die Axiome einer Meßstruktur systematisch verletzt, so kann dies zu Modifikationen der Voraussetzungen und damit zu alternativen Meßstrukturen führen. Beispiele für derartige Modifikationen findet man bei Suppes, Krantz, Luce und Tversky (1989, Kap. 16): Ausgehend von Transitivitätsverletzungen, wie sie etwa bei sukzessiver Präsentation von zwar subjektiv indifferenten, jedoch physikalisch unterschiedlichen Reizpaaren (a_i, a_{i+1}), $i = 1, \ldots, N$, auftreten können, werden Meßstrukturen entwickelt, die nicht auf der meist implizit enthaltenen Forderung der Transitivität von Indifferenzurteilen basieren. Hierbei kann jedoch eingewendet werden, daß auch bei "schwächeren" Axiomen Verletzungen auftreten können, deren Beurteilung einen zusätzlichen Ansatz verlangt. Prinzipiell kann dem Fehlerproblem auf unterschiedliche Arten begegnet werden:

- Statistische Herangehensweise: Die Anpassungsgüte wird durch die Anzahl der Verletzungen relativ zur Anzahl der Prüfungen des Axioms bestimmt und zufallskritisch untersucht.

- Die Fehlervariabilität wird als inhärenter Teil der Meßstruktur betrachtet; die probabilistischen Eigenschaften der Meßsituation werden also in das Meßkonzept integriert.

- Spezifische Erklärung des jeweiligen Fehlers durch die Einbettung der Meßtheorie in einen umfassenderen theoretischen Kontext.

Generell ist es möglich, Axiome hinsichtlich ihrer Stellung im Repräsentationstheorem und ihrer statistischen Prüfbarkeit zu klassifizieren: Ist es möglich, ein Axiom aus den angegebenen Repräsentationsbedingungen abzuleiten, so spricht man von einem *notwendigen* Axiom; Axiome, die zwar nicht "notwendigerweise" aus der Repräsentation folgen, die aber für den Nachweis des Repräsentationssatzes benötigt werden, heißen *nicht-notwendig*. Axiome, die prinzipiell einer zufallskritischen Untersuchung unterzogen werden können, nennt man *testbar*; Axiome, die eine derartige Überprüfung nicht erlauben heißen *nicht-testbar*.

So sind beispielsweise Archimedische Axiome notwendig aber nicht-testbar: Bei Vorliegen einer endlichen Reizmenge (und nur derartige Mengen werden in Experimenten zugrundegelegt) sind sie trivialerweise erfüllt. Beispiele für nicht-notwendige und nicht-testbare Axiome sind Lösbarkeitsaxiome, die bei Vorliegen endlicher Reizmengen nicht falsifiziert werden können.

Die zufallskritische Untersuchung der notwendigen und testbaren Axiome einer Meßstruktur sieht häufig wie folgt aus: Da testbare Axiome meist als Implikationen formuliert sind (beispielsweise läßt sich die Transitivitätseigenschaft in der Form $a \succeq b, b \succeq c \Rightarrow a \succeq c$ schreiben), wird zunächst die Häufigkeit bestimmt, mit der die Prämisse erfüllt ist. In diesen Fällen wird überdies die Anzahl der Konklusionsverletzungen festgehalten. Die damit erhaltene relative Häufigkeit der Axiomenverletzungen liefert ein deskriptives Maß für die empirische Gültigkeit des betrachteten Axioms. Da dieses Maß im allgemeinen von den Werten 0 und 1 abweicht, ist die zufallskritische Untersuchung unerläßlich. Hierzu kann beispielsweise die *Zeta-Methode* von Kendall (Gigerenzer, 1981, S. 202-204) herangezogen werden. Diese Vorgehensweise entbehrt jedoch einer präzisen statistischen Rechtfertigung.

Bei der statistischen Vorgehensweise wird das empirische Relativ als eine idealisierte Struktur aufgefaßt. Die Axiome einer Meßstruktur werden also nicht wie im (logischen) Empirismus als eine Sammlung empirisch beobachtbarer, sondern als Ansammlung mathematisch logischer Aussagen verstanden. Diesem logischen "Strukturkern" stehen mögliche empirische Anwendungsbereiche gegenüber. Diese Trennung von logischer und empirischer Komponente ist typisch für strukturalistische Theorienkonzeptionen wie sie von Wolfgang Stegmüller, Joseph D. Sneed und anderen verfolgt werden. Die damit vermiedene streng empiristische Leseart der Meßtheorie ermöglicht die Untersuchung allgemeiner theoretischer Fragen, wie sie die Meßtheorie seit ihrer axiomatischen Begründung durch Helmholtz und Hölder letztlich verfolgt. Um das Problem der empirischen Anbindung in den Hintergrund zu stellen, empfiehlt Reinhard Niederée (1992) den Begriff "empirische Struktur" durch die Bezeichnung "Struktur" oder "qualitative Struktur" zu ersetzen. Zweifellos ist der fulminante Aufschwung der klassischen deterministischen Meßtheorie in der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts wesentlich auf diese Geisteshaltung zurückzuführen.

Bei der im zweiten Punkt angesprochenen Herangehensweise werden sowohl die strukturellen als auch probabilistischen Eigenschaften der Meßsituation axiomatisiert. Beispielsweise lassen sich durch die Definition $a \succeq b :\Leftrightarrow p(a,b) \geq 0.5$ Modifikationen der algebraischen Meßmodelle erreichen, die die stochastischen Eigenschaften der Meßsituation (zumindest teilweise) berücksichtigen. So läßt sich etwa die wohlbekannte *ordinale* Meßstruktur folgendermaßen probabilisieren: *Es sei $A \neq \emptyset$ eine endliche Menge und $p : A \times A \to [0,1]$ eine Abbildung mit $p(a,b) + p(b,a) = 1$ für alle $a, b \in A$. Für $a, b, c \in A$ gelte überdies die schwache stochastische Transitivität: Lassen sich die Abschätzungen $p(a,b) \geq 0.5$ und $p(b,c) \geq 0.5$ beobachten, so gilt auch die Ungleichung $p(a,c) \geq 0.5$. In dieser Situation existiert eine Ordinalskala $\phi : A \to \mathbb{R}$, so daß genau dann die Ungleichung $p(a,b) \geq 0.5$ erfüllt ist, wenn die Abschätzung $\phi(a) \geq \phi(b)$ gilt.* Dieses einfachste stochastische Wahlmodell garantiert nur die ordinale Skalierbarkeit der Reize. Aussagen über Differenzen oder Verhältnisse von Skalenwerten sind nicht bedeutsam. Eine Auflistung weiterer (zum Teil sehr viel komplexerer) probabilistischer Meßmodelle ist in Kapitel 2.3.1 angegeben. Allen diesen Modellen ist gemein, daß sie sich nicht mehr auf das Ergebnis eines Einzelversuchs stützen, sondern aggregierte Daten als Primitiva auffassen.

Diese Herangehensweise unterscheidet sich wesentlich von der statistischen Vorgehensweise, sieht sie die deterministischen Meßmodelle doch als prinzipiell ungeeignet an, menschliches Verhalten zu beschreiben: "In the behavioral sciences, the only regularities are statistical ones. This erratic nature of behavioral data makes it almost mandatory that the theories be probabilistic" (Falmagne, 1976, S. 66).

Die Entwicklung probabilistischer Meßmodelle steht den Bemühungen Dieter Heyers um eine spezifische Erklärung des jeweiligen Meßfehlers entgegen (Heyer, 1990). Folgt man Heyers Argumentation, so ist eine Probabilisierung bei Vorliegen einer reichhaltigen empirischen Theorie unnötig, ist eine derartige Theorie doch in der Lage, präzise Vorgaben für eine Behandlung von zufälligen Fehlern zu machen. Als Beispiel führt Heyer die Graßmansche Struktur der Farbwahrnehmung an, die sich wegen ihrer empirischen Spezifität von den übrigen Meßstrukturen unterscheidet. Eine Stochastisierung dieser Theorie ist nicht nötig, ergibt sich die Behandlung inkonsistenter Urteile doch "aus anderen empirischen Befunden zur Arbeitsweise des visuellen Systems" (Heyer, 1990, S. 19). Obgleich Heyers Forderung nach einer Einbettung der Meßtheorie in einen umfassenderen theoretischen Kontext keineswegs widersprochen wird, wird hier die Entwicklung einer allgemeinen probabilistischen Meßtheorie nicht als "Substitut einer Theoriebildung" (Heyer, 1990, S. 19), sondern als wichtige Grundlage für die Entwicklung empirischer Theorien angesehen.

2.3 Probabilistische Meßtheorie

Die folgende Darstellung der probabilistischen Meßtheorie soll keineswegs einen umfassenden Überblick über das in viele verschiedene Forschungsbereiche aufgespaltene Gebiet geben. Vielmehr sollen wichtige Entwicklungen der neueren Meßtheorie vorgestellt werden, aus denen vorliegende Arbeit hervorgegangen ist. Dies gilt in besonderem Maße für die Abschnitte 2.3.2 und 2.3.4. Beginnend mit den stochastischen Modellen des Wahlverhaltens wird in Kapitel 2.3.2 Falmagnes probabilistische Theorie der extensiven Messung vorgestellt: Falmagne gelangt zu einer Theorie der extensiven Messung, die auf wahrscheinlichkeitstheoretischen Konzepten aufgebaut ist: Inkonsistente Einzelbeobachtungen werden durch Paarvergleichswahrscheinlichkeiten integriert. Bei der in Abschnitt 2.3.3 vorgestellten probabilistischen Version der additiv verbundenen Messung gelingt es Falmagne, ein statistisch begründetes Testverfahren zu etablieren, das über die Auszählung von Axiomenverletzungen hinausgeht. Im letzen Abschnitt werden Zufallsvariablenrepräsentationen vorgestellt: Unter welchen beobachtbaren Bedingungen läßt sich eine qualitative Struktur durch eine Familie von Zufallsvariablen vorgegebenen Verteilungstyps repräsentieren? Die dort vorgestellten Lösungen werden der fundamentalen Meßtheorie zugerechnet, behandeln sie das Fehlerproblem doch auf qualitativer Ebene. Anders als bei den Modellen des Wahlverhaltens werden Wahrscheinlichkeiten nicht vorausgesetzt, sondern mit Hilfe von Repräsentationssätzen abgeleitet.

2.3.1 Stochastische Modelle des Wahlverhaltens

Die stochastischen Modelle des individuellen Wahlverhaltens stützen sich nicht mehr auf die Ergebnisse eines Einzelversuchs, sondern basieren auf aggregierten Daten. Als Primitiva werden Auswahl- oder Paarvergleichswahrscheinlichkeiten vorausgesetzt, die über die relativen Häufigkeiten der Versuchspersonenurteile geschätzt werden. Aufgabe einer Versuchsperson ist es, aus einer vorgegebenen Menge von Alternativen ein Element oder eine Teilmenge bezüglich eines bestimmten Kriteriums auszuwählen. Bei den stochastischen Theorien des Wahlverhaltens unterscheidet man *skalare* Modelle (*constant-utility-models*) von *Zufallsskalenmodellen* (*random-utility-models*). Die skalaren Modelle ordnen jeder Alternative einen reellen Skalenwert zu; die Auswahlwahrscheinlichkeit $p(a, B)$ läßt sich als Funktion der betreffenden Skalenwerte $u(a), u(b)$, $b \in B$, ausdrücken: Für einen Reiz a der Teilmenge $B \subset A$ gilt $p(a, B) = F[u(a); u(b) : b \in B]$.

Entscheidet man sich wie im BTL-Modell (mehr oder minder willkürlich) für eine bestimmte Form der Response-Funktion F (in diesem Fall $F(x, y) = x(x+y)^{-1}$), so läßt sich das Gesamtmodell - etwa durch einen Likelihood-Quotienten-Test - zufallskritisch untersuchen. Da jedoch diese vorweggenommene Festsetzung der Response-Funktion F keine inhaltliche Untermauerung erfährt, werden Modelle formuliert, die die Response-Funktion indeterminiert lassen. Typische Beispiele sind das *Modell der einfachen Skalierbarkeit*: $p(a, b) = F[u(a), u(b)]$, das *Fechner- oder Differenzen-Modell*: $p(a, b) = F[u(a) - u(b)]$, oder das von Falmagne, Iverson und Marcovici entwickelte PACOME (*probabilistic additive conjoint measurement*) Modell:

$p(ax, by) = F[l(a) + r(x), l(b) + r(y)]$.

Bei der Prüfung dieser Modelle stehen grundsätzlich zwei unterschiedliche Vorgehensweisen offen: Die eine setzt auf der quantitativen Ebene an: Es wird die "bestpassendste" numerische Repräsentation konstruiert. Im Gegensatz dazu wird bei der meßtheoretischen Vorgehensweise geprüft, ob die für das Modell hinreichenden Bedingungen empirisch erfüllt sind. Während die erste Methode eine Prüfung des BTL-Modells erlaubt, gestaltet sich ihre Anwendung schwierig, wenn auf eine a priori Festlegung der Response-Funktion verzichtet wird.

Im Gegensatz zu den skalaren Modellen des individuellen Wahlverhaltens ordnen die Zufallsskalenmodelle jedem Reiz a einer Grundmenge A eine Zufallsvariable U_a zu. Die Auswahlwahrscheinlichkeit $p(a, B)$ berechnet sich als die Wahrscheinlichkeit, daß die Zufallsvariable U_a die übrigen Zufallsgrößen U_b, $b \in B$, dominiert:

$$p(a, B) = P\{U_a = \max\{U_b : b \in B\}\}.$$

Ist die Reizmenge endlich, so ist diese Bedingung äquivalent dazu, daß die sogenannten *Block-Marschak Polynome* nichtnegativ werden. Während die Notwendigkeit dieser Bedingung bereits 1960 von Block und Marschak bewiesen werden konnte, wurde die Umkehrung erst 1978 durch J.-Cl. Falmagne verifiziert.

2.3.2 Eine probabilistische Version der extensiven Messung

Obgleich es möglich ist, algebraische Meßmodelle probabilistisch zu deuten, liefern diese retrospektiv vorgenommenen Probabilisierungen lediglich unbefriedigende Repräsentationen: Wird etwa die binäre Relation $\succeq$ einer extensiven Struktur $\langle A, \succeq, \circ \rangle$ probabilistisch im Sinne von "$a \succeq b \Leftrightarrow p(a, b) \geq 0.5$" interpretiert, so führt dies (bei Vorliegen geeigneter struktureller Eigenschaften) zu einer additiven Repräsentation ϕ, die der Isotoniebedingung $p(a, b) \geq 0.5 \Leftrightarrow \phi(a) \geq \phi(b)$ genügt. Während dies eine geglückte Probabilisierung der extensiven Messung darzustellen scheint (die zudem unmittelbar aus der algebraischen Meßstruktur deduziert werden kann), hält diese Einschätzung einer genaueren Untersuchung nicht stand: Obgleich die Paarvergleichswahrscheinlichkeit $p(a, b)$ ein Maß für die Diskriminierbarkeit der beiden Reize a und b darstellt, läßt sich diese Wahrscheinlichkeit nicht aus der Skalenwertdifferenz $\phi(a) - \phi(b)$ errechnen: Es besteht kein funktionaler Zusammenhang zwischen der Paarvergleichswahrscheinlichkeit $p(a, b) \in [0, 1]$ und den reellen Skalenwerten $\phi(a), \phi(b) \in \mathbb{R}$.

Falmagne ist es 1980 gelungen, eine Theorie der extensiven Messung zu formulieren, die auf wahrscheinlichkeitstheoretischen Konzepten aufgebaut ist: Es werden Axiome formuliert, die eine Repräsentation der Form $p(a, b) = F[\phi(a) - \phi(b)]$ gewährleisten. Diese Fechner-Repräsentation hat (trotz der Unbestimmtheit der Response-Funktion F) empirische Restriktionen zur Folge, die einer experimentellen Prüfung unterzogen werden können. So impliziert obige Repräsentation notwendigerweise die Identität der Paarvergleichswahrscheinlichkeiten $p(a, b)$ und $p(a \circ c, b \circ c)$. Man beachte hierzu: Aufgrund der geforderten Repräsentationsbedingung läßt sich die Wahrscheinlichkeit $p(a \circ c, b \circ c)$ auch als $F[\phi(a \circ c) - \phi(b \circ c)]$ darstellen. Hieraus resultiert zusammen mit der postulierten Additivität der Repräsentation ϕ bereits die Identität $p(a \circ c, b \circ c) = p(a, b)$. Die Paarvergleichswahrscheinlichkeiten hängen nur von der Differenz, nicht aber von den tatsächlichen Intensitäten der betrachteten Reize ab. Dies steht im Widerspruch zum *Weberschen Gesetz*: Ein Bretterpaar (a, b), bestehend aus einem Brett a der Länge 1 cm und einem Brett b der Länge 2 cm führt zu einer anderen Paarvergleichswahrscheinlichkeit $p(a, b)$ als ein Bretterpaar $(a \circ c, b \circ c)$ der Länge 101 cm und 102 cm.

Aufgrund dieser äußerst unrealistischen Forderung schlägt Falmagne die Voraussetzung des Weberschen Gesetzes $p(nx, ny) = p(x, y)$ vor. Diese Forderung führt ihn schließlich zu einer additiven Repräsentation m, die es erlaubt, die Paarvergleichswahrscheinlichkeit $p(a, b)$ als Funktion des Quotienten $m(a)/m(b)$ darzustellen: $p(a, b) = F[m(a)/m(b)]$.

Steht Falmagnes Vorgehensweise in der Tradition der *Constant-Utility*-Modelle, so orientiert sich vorliegende Arbeit eher an den *Random-Utility*-Modellen, die mit den wegweisenden Arbeiten von Thurstone (1927 a, b) ihren Ausgang nahmen: Gesucht sind Bedingungen, unter denen eine "probabilistische" extensive Struktur durch eine Familie von Zufallsvariablen fest vorgegebenen Verteilungstyps repräsentiert werden kann.

2.3.3 Eine probabilistische Version der additiv verbundenen Messung

Jean-Claude Falmagnes Motivation für die Entwicklung einer probabilistischen Version der additiv verbundenen Messung entspringt der Tatsache, daß die zufallskritische Untersuchung algebraischer (d.h. deterministischer) Meßstrukturen bislang nicht über das Auszählen von Axiomenverletzungen hinausgelangt ist: "In their current status, the fundamental measurement theories are algebraic, that is deterministic. Their predictions do not lend themselves easily to empirical verification: Any departure of the data from the theory amounts to a puzzle to which the standard decision rules of statistics do not apply.... What is required, at this stage, are the "random analogous" of the classical theories of fundamental measurement" (Falmagne, 1976, S. 66). Bei dieser probabilistischen Theorie der additiv verbundenen Messung werden Zufallsvariablen als Primitiva vorausgesetzt. Motiviert ist diese Vorgehensweise durch das folgende experimentelle Paradigma: Man gibt einer Versuchsperson ein Paar von Tönen (a, x) vor, wobei a über das linke und x über das rechte Ohr wahrgenommen wird. Nach Präsentation dieses Standardpaares wird ein Vergleichspaar (b, y) dargeboten, wobei die Lautstärke von y festgelegt ist, der Reiz b hingegen von der Versuchsperson variiert werden kann. Die Aufgabe der Versuchsperson lautet, die Lautstärke von b so einzustellen, daß die wahrgenommene Gesamtlautstärke des Vergleichsreizes mit der Lautstärke des Standardreizes übereinstimmt (Herstellungsmethode). Wird dieses Experiment (bei festgehaltenen a, x, y) mehrfach wiederholt, so ergibt sich die Verteilung einer Zufallsvariablen $U_{xy}(a)$. Gesucht ist nun eine Repräsentation der Form

$$l(U_{xy}(a)) = r(x) + l(a) - r(y) + \epsilon_{xy}(a), \tag{2.1}$$

wobei die Fehlervariable $\epsilon_{xy}(a)$ eine Zufallsgröße mit Median 0 ist. Gleichung (2.1) führt zu mehreren notwendigen Bedingungen, die einer statistischen Prüfung unterzogen werden können: Bezeichnet $m_{xy}(a)$ den (eindeutig bestimmten) Median der Zufallsvariablen $U_{xy}(a)$, so ergibt sich als notwendige Bedingung die *Aufhebungseigenschaft*: $m_{xz}(a) = m_{xy}[m_{yz}(a)]$. Die Prüfung dieses Axioms kann in vier Schritten erfolgen:

(1) Zu drei vorgegebenen Reizen a, y, z bestimmt die Versuchsperson einen Reiz b derart, daß die Paare (a, y) und (b, z) subjektiv indifferent erscheinen. Wird dieses Experiment mehrmals wiederholt, erhält man eine Schätzung $\hat{m}_{yz}(a)$ des Medians $m_{yz}(a)$.

(2) Zu vorgegebenem $\hat{m}_{yz}(a), x, y$ bestimmt die Versuchsperson einen Reiz c derart, daß die Paare $(\hat{m}_{yz}(a), x)$ und (c, y) subjektiv indifferent sind. Durch mehrmalige Wiederholung ergibt sich eine Schätzung $\hat{m}_{xy}(\hat{m}_{yz}(a))$ des Medians $m_{xy}(m_{yz}(a))$.

(3) Analog zu (1) erhält man eine Schätzung $\hat{m}_{xz}(a)$ des Medians $m_{xz}(a)$.

(4) Die Frage nach der empirischen Gültigkeit des Aufhebungsaxioms läßt sich nun unter Zuhilfenahme eines Median-Tests entscheiden.

Auf ähnliche Weise kann die zufallskritische Prüfung des (ebenfalls notwendigen) *Kommutativitätsaxioms* $m_{xy}[m_{zw}(a)] = m_{zw}[m_{xy}(a)]$ erfolgen. Falmagne konnte 1976 zeigen, daß diese beiden testbaren Bedingungen zusammen mit einigen strukturellen (nicht-testbaren) Axiomen eine Repräsentation der Form (2.1) gewährleisten.

Obgleich es Falmagne gelungen ist, ein Axiomensystem zu etablieren, das einer zufallskritischen Untersuchung zugänglich ist, baut Falmagne nicht auf qualitativen Beobachtungen, sondern quantitativen Entitäten auf. Während die Voraussetzung derartiger Objekte durch die experimentelle Situation motiviert ist, existieren meßtheoretische Ansätze, Wahrscheinlichkeitsverteilungen aus nicht-numerischen Bedingungen abzuleiten:

2.3.4 Zufallsvariablenrepräsentationen

Im Gegensatz zu den bislang vorgestellten Ansätzen zur Lösung des Fehlerproblems, die ausnahmslos von quantitativen Objekten wie Paarvergleichswahrscheinlichkeiten oder Zufallsvariablen ausgehen, werden die folgenden Ansätze der fundamentalen Meßtheorie zugerechnet. Es werden qualitative Bedingungen angegeben, so daß ein Reiz a durch eine Zufallsvariable X_a repräsentiert werden kann. Überdies wird die Verteilung der repräsentierenden Zufallsvariablen aus qualitativen Axiomen deduziert. Entscheidend ist, daß Wahrscheinlichkeiten oder Zufallsvariablen nicht länger als Primitiva betrachtet werden.

Der heute gebräuchliche axiomatische Aufbau der Wahrscheinlichkeitstheorie geht auf das epochemachende Werk von Kolmogoroff "Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung" (1933) zurück: Im Hinblick auf das Anliegen ein quantitatives Maß für die mit einem zufälligen Ereignis verbundene Ungewißheit zu haben, wird jeder Menge A einer Algebra $\mathscr{A}$ eine positive Zahl $P(A)$ derart zugeordnet, daß sowohl das Axiom der *Normiertheit* (Das sichere Ereignis X besitzt die Wahrscheinlichkeit 1: $P(X) = 1$.), als auch das Axiom der *Additivität* (Für disjunkte Mengen A und B der Algebra $\mathscr{A}$ ist $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.) erfüllt ist. Die in der modernen Wahrscheinlichkeitstheorie verbreitete Verwendung einer (gegen abzählbare Vereinigungen stabilen) σ-Algebra und einer darauf definierten normierten und σ-additiven Abbildung entspringt einer mathematischen Idealisierung.

Die Meßtheorie setzt sich anders als die Wahrscheinlichkeitsrechnung nicht mit den Konsequenzen dieser Definition auseinander. Vielmehr wird die Definition eines Wahrscheinlichkeitsmaßes als Repräsentationsbedingung aufgefaßt, die aus qualitativen Axiomen abzuleiten ist (Krantz et al., 1971, Kap. 5). In der 1973 erschienenen Arbeit "New Foundations of Objective Probability: Axioms for Propensities" stellt Patrick Suppes nicht nur die Existenz eines irgendwie gearteten Wahrscheinlichkeitsmaßes sicher. Vielmehr werden qualitative Bedingungen angegeben, die zu einer geometrischen Verteilung auf einer abzählbaren Grundmenge X führen. Hierzu werden die Axiome einer *qualitativen bedingten Wahrscheinlichkeitsstruktur* (Krantz et al., 1971, Definition 5.8) um das sogenannte "Waiting-time Axiom" $E_n|Q_{n-1} \sim E_1$ ergänzt (Suppes, 1973, S. 525). Hierbei ist lediglich zu beachten, daß eine $\mathbb{N}_0$-wertige Zufallsvariable X genau dann geometrisch verteilt ist, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$P(X = n | X > n - 1) = P\{X = 0\}.$$

Einen bedeutenden Beitrag zur probabilistischen Meßtheorie konnten Suppes und Zanotti 1992 beisteuern: Es gelang ihnen, eine qualitative Theorie der Momente zu etablieren: In der Wahrscheinlichkeitstheorie wird der Mittelwert der Zufallsvariablen X^k als das k-te *Moment* der Zufallsvariablen X bezeichnet:

$$m_k := EX^k = \int X^k dP, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Einerseits kann zwar zu jeder Zufallsvariablen eine eindeutig bestimmte Folge von Momenten angegeben werden, andererseits ist es jedoch nicht möglich, jede Zahlenfolge als Momentfolge einer geeigneten Zufallsvariablen darzustellen. Diesem Problem ist die Arbeit von Felix Hausdorff aus dem Jahre 1923 gewidmet: Hausdorff formuliert Bedingungen an eine Folge $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \ldots$ reeller Zahlen, die notwendig und hinreichend für die Existenz einer *eindeutig bestimmten* Wahrscheinlichkeitsverteilung F auf dem abgeschlossenen Einheitsintervall $[0, 1]$ sind, so daß für $n \in \mathbb{N}_0$ die Bedingung

$$\mu_n = \int_0^1 t^n F(dt)$$

gilt. Hausdorff zeigte, daß eine derartige Verteilung genau dann existiert, wenn die Anfangsbedingung $\mu_0 = 1$ erfüllt ist, und für $k, \nu \in \mathbb{N}_0$ die Abschätzung

$$\mu_\nu - \binom{k}{1}\mu_{\nu+1} + \binom{k}{2}\mu_{\nu+2} + \ldots (-1)^k \mu_{\nu+k} \geq 0 \tag{2.2}$$

gilt. Suppes und Zanotti sind an einer qualitativen Umsetzung dieses Ergebnisses interessiert. Der Grundgedanke ihrer Arbeit ist ebenso genial wie einfach:

> The idea then, is to provide a qualitative axiomatization of the moments for which a qualitative analog of Inequalities ... [(2.2)] obtains and then to show that the qualitative moments have a numerical representation that permits one to invoke Hausdorff's theorem. (Suppes & Zanotti, 1992, S. 42)

Obgleich es Suppes und Zanotti gelingt, verschiedene Wahrscheinlichkeitsverteilungen zu charakterisieren, ist die Anwendbarkeit ihrer Ergebnisse fraglich: Die Hausdorffsche Bedingung führt notwendigerweise zu einer *unendlichen* Menge testbarer Axiome.

Ausgehend von der Tatsache, daß die Eigenschaft der Gedächtnislosigkeit charakteristisch für die Exponentialverteilung ist, verfolgt Reinhard Suck einen alternativen Ansatz (Suck, 1998): Suck geht von einer schwachen Ordnung $\succeq$ auf einer nichtleeren Menge A, einer binären Relation W auf einer Teilmenge des kartesischen Produkts $A \times A$, sowie einer binären Operation $\circ$ auf A aus. Es werden Bedingungen an das Quadrupel $\langle A, \succeq, \circ, W \rangle$ formuliert, so daß ein Wahrscheinlichkeitsmaß $P : \mathscr{A} \to [0, 1]$ mit folgenden Eigenschaften existiert: Unter anderem sollte das Wahrscheinlichkeitsmaß P die probabilistische Ordnungsrelation W erhalten:

$abWcd \Leftrightarrow P(a,b) \geq P(c,d)$. Überdies sollte jede isotone und additive Repräsentation $\phi : A \to \mathbb{R}$ eine *exponentialverteilte* Zufallsvariable auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(A, \mathscr{A}, P)$ definieren.

Auf diesem Wahrscheinlichkeitsraum ist es möglich, jedem Reiz $a \in A$ eine exponentialverteilte Zufallsvariable X_a zuzuweisen: $X_a(x) := \phi(a)\phi(x)$. Diese Familie exponentialverteilter Zufallsvariablen repräsentiert die extensive Struktur $\langle A, \succeq, \circ \rangle$ in folgendem Sinne: (1) *Isotonie:* Für beliebige Reize a und b der Grundmenge A gilt genau dann $a \succeq b$, wenn die Erwartungswerte EX_a und EX_b der numerischen Ungleichung $EX_a \geq EX_b$ genügen. (2) *Additivität:* Die Zufallsvariable $X_{a\circ b}$ läßt sich additiv im Sinne von $X_{a\circ b} = X_a + X_b$ dekomponieren.

Problematisch ist in diesem Zusammenhang, daß der Verteilungstyp der repräsentierenden Zufallsvariablen nicht aus der Isotonie- und Additivitätsforderung resultiert. So kann beispielsweise gezeigt werden, daß es neben der exponentialverteilten Zufallsvariablenrepräsentation auch eine isotone und additive Familie *Weibull-verteilter* Zufallsvariablen gibt.

Für den Nachweis dieser Behauptung bezeichne $\phi_x : A \to (0, \infty)$ die (eindeutig bestimmte) isotone und additive Repräsentation von $\langle A, \succeq, \circ \rangle$, die der Anfangsbedingung $\phi_x(x) = 1$ genügt. Wird ϕ_x als Zufallsvariable auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(A, \mathscr{A}, P)$ aufgefaßt, so ist ϕ_x exponentialverteilt zu einem Parameter λ_x: $P\{\phi_x \leq t\} = 1 - \exp(-\lambda_x t)$. Insbesondere existiert eine positive Konstante $\lambda(a,x) > 0$, so daß die Beziehung $\phi_a = \lambda(a,x)\phi_x$ erfüllt ist. Zusammen mit der Anfangsbedingung $\phi_a(a) = 1$ läßt sich nun die Darstellung $\phi_x(a) = (\phi_a(x))^{-1}$ deduzieren. Damit ist aber mit $\phi_a : A \to (0, \infty)$ auch die Abbildung $Y_a : A \to (0, \infty)$, $Y_a(x) := \phi_x(a)$, meßbar bezüglich der σ-Algebra $\mathscr{A}$. Faßt man Y_a als Zufallsvariable auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(A, \mathscr{A}, P)$ auf, so ist Y_a Weibull-verteilt im Sinne von

$$P\{Y_a \leq t\} = \lambda_a \int_0^t \frac{1}{x^2} \exp\left(-\frac{\lambda_a}{x}\right) dx.$$

Auch die Familie $\{Y_a : a \in A\}$ der Weibull-verteilten Zufallsvariablen repräsentiert die extensive Struktur $\langle A, \succeq, \circ \rangle$ isoton und additiv:

$$\begin{aligned} a \succeq b \Leftrightarrow \phi_x(a) \geq \phi_x(b) \Leftrightarrow Y_a(x) \geq Y_b(x) \Leftrightarrow EY_a \geq EY_b, \\ Y_{a\circ b}(x) = \phi_x(a \circ b) = \phi_x(a) + \phi_x(b) = Y_a(x) + Y_b(x). \end{aligned}$$

Insbesondere ist es weder gerechtfertigt von einer *Charakterisierung der Exponentialverteilung*, noch von einer *Charakterisierung der Weibull-Verteilung* zu sprechen.

Kapitel 3

Der Wahrscheinlichkeitsbegriff in den empirischen Wissenschaften

3.1 Der axiomatische Zugang von Kolmogoroff

Gegenstand der modernen axiomatischen Wahrscheinlichkeitstheorie sind mathematisch-theoretische Konzepte wie σ-Algebren, Wahrscheinlichkeitsmaße oder Zufallsvariablen, die zunächst frei von inhaltlichen Interpretationen sind. Tatsächlich ist es für den Aufbau der Wahrscheinlichkeitstheorie unerheblich, wie diese Grundbegriffe gedeutet werden. Entscheidend sind einzig und allein die Eigenschaften dieser Objekte, die in den Axiomen der Wahrscheinlichkeitstheorie festgehalten sind. Aufgrund dieses axiomatischen Aufbaus setzt die empirische Anbindung der Wahrscheinlichkeitstheorie geeignete Interpretationsregeln voraus. Dabei konnte sich aber vor allem der Wahrscheinlichkeitsbegriff einer allgemein akzeptierten Interpretation entziehen.

Die mit dem Wahrscheinlichkeitsbegriff verbundenen Schwierigkeiten spiegeln sich besonders deutlich in der Entwicklungsgeschichte dieses Begriffes wider. Die Wahrscheinlichkeitstheoretiker mühten sich mehrere Jahrhunderte, die allgemein akzeptierte Vorstellung von Wahrscheinlichkeit als *quantitatives Maß für Ungewißheit* zu präzisieren. Anfang des 20. Jahrhunderts setzte sich der auf den russischen Mathematiker A. N. Kolmogoroff zurückgehende axiomatische Zugang durch. Dabei bleibt der Begriff des "zufälligen Ereignisses" oder der "Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses" undefiniert. Stattdessen werden Regeln (sogenannte Axiome) festgelegt, denen zufällige Ereignisse und Wahrscheinlichkeiten zu genügen haben. Die Grundbegriffe der modernen Wahrscheinlichkeitstheorie sind also nur implizit über die Axiome definiert, die konkrete Modellierung eines Wahrscheinlichkeitsraumes unterliegt größtenteils der Willkür des Anwenders. In der Wahrscheinlichkeitstheorie wird seit Kolmogoroff von den folgenden Axiomen ausgegangen:

1. Die zufälligen Ereignisse bilden eine σ-Algebra $\mathscr{A}$ von Teilmengen einer Grund-

menge X. Dies bedeutet: (a) Das sichere Ereignis X ist ein zufälliges Ereignis: $X \in \mathscr{A}$. (b) Die Menge $\mathscr{A}$ der zufälligen Ereignisse ist komplementiert, das heißt mit $A \in \mathscr{A}$ ist auch $X \setminus A \in \mathscr{A}$. (c) Die Menge der zufälligen Ereignisse ist σ-vereinigungsstabil, das heißt mit $A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{A}$ ist auch $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{A}$.

2. Zu jedem Ereignis $A \in \mathscr{A}$ existiert eine reelle Zahl $P(A) \in \mathbb{R}$ mit den folgenden Eigenschaften: (a) P ist auf das Intervall $[0, 1]$ normiert: Für $A \in \mathscr{A}$ ist stets $0 \leq P(A) \leq 1$. Dem sicheren Ereignis X wird die Wahrscheinlichkeit 1 zugeordnet. (b) Für Ereignisse $A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{A}$ ist die Wahrscheinlichkeit $P(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n)$ gleich der Summe $\sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n)$. Hierbei wird vorausgesetzt, daß sich die Ereignisse paarweise ausschließen: Für $n \neq m \in \mathbb{N}$ gilt $A_n \cap A_m = \emptyset$.

Der streng axiomatischen Vorgehensweise folgend, sind Wahrscheinlichkeitstheoretiker ausschließlich an den möglichen Implikationen dieser Axiome interessiert, ordnen jedoch tatsächlichen Ereignissen keine Wahrscheinlichkeiten zu. Dazu ist der axiomatische Zugang auch prinzipiell ungeeignet, überläßt er die konkrete Modellierung des Wahrscheinlichkeitsraumes doch dem Gutdünken des Anwenders. Anwendungen der Wahrscheinlichkeitstheorie greifen daher stets auf frühere Versuche zurück, den Wahrscheinlichkeitsbegriff zu definieren. Dabei sind drei Zugänge von besonderem Interesse: Die Laplacesche, frequentistische und subjektive Interpretation des Wahrscheinlichkeitsbegriffes.

3.2 Die Laplacesche Interpretation

Die ersten Ansätze einer Wahrscheinlichkeitstheorie, die man heute meist als "klassische" oder "Laplacesche" Theorie bezeichnet, wurden während des 17. und 18. Jahrhunderts entwickelt. Dabei wendete man die Wahrscheinlichkeitsrechnung hauptsächlich zur Berechnung der Gewinnchancen bei Glücksspielen an. In der klassischen Theorie wird die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses als das Verhältnis, der für das Ereignis günstigen Fälle, zu der Anzahl aller möglichen Fälle definiert. Dabei ist sicherzustellen, daß alle beteiligten Fälle *gleichmöglich* sind.

$$P(A) := \frac{\text{Anzahl der für } A \text{ günstigen Fälle}}{\text{Anzahl der gleichmöglichen Fälle}}.$$

Die Anwendbarkeit dieser Definition soll an einem kurzen Beispiel demonstriert werden: Beim Werfen eines homogenen und symmetrischen Würfels beläuft sich die Wahrscheinlichkeit für einen Sechserwurf auf 1/6. Hierbei ist einerseits zu beachten, daß aufgrund der Homogenität und Symmetrie des Würfels die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 als gleichmöglich gelten. Andererseits gibt es unter diesen sechs gleichmöglichen Fällen nur einen "günstigen" Fall, nämlich den Sechserwurf.

Im 20. Jahrhundert artikulierte sich die Kritik an dieser Definition vor allem in den einflußreichen Arbeiten von Richard von Mises und Hans Reichenbach. Nach Mises ist *gleichmöglich* höchstens im Sinne von *gleichwahrscheinlich* zu verstehen. Folgt man dieser Argumentation, so ist die klassische Definition von Wahrscheinlichkeit zirkulär: Der Begriff der *Wahrscheinlichkeit* wird unter Verwendung des Begriffs der *Gleichwahrscheinlichkeit* definiert.

Die klassischen Autoren vermieden natürlich einen derart offensichtlichen Circulus vitiosus. Die *Gleichmöglichkeit* von Ereignissen wurde durch das sogenannte *Indifferenzprinzip* zu begründen versucht: Ereignisse gelten als gleichmöglich, wenn kein Grund bekannt ist, warum einer der Fälle vor den anderen eintreten sollte. Dieses Indifferenzprinzip hat jedoch absurde Wahrscheinlichkeitszuweisungen zur Folge: So führt beispielsweise absolutes Nichtwissen zur Annahme der Gleichwahrscheinlichkeit aller möglichen Fälle.

In speziellen Situation läßt sich die Gleichwahrscheinlichkeit aus Symmetrieüberlegungen gewinnen: In obigem Würfelbeispiel wurde aufgrund gewisser Symmetrien in der Struktur des Zufallsexperiments auf die Gleichwahrscheinlichkeit geschlossen.

Derartige Überlegungen sind aber nur in speziellen Situationen möglich und lassen sich keinesfalls beliebig verallgemeinern: Ist der Würfel inhomogen, verliert die Annahme, daß alle möglichen Elementarereignisse gleichwahrscheinlich sind ihre Berechtigung. Eine Wahrscheinlichkeitszuweisung ist auf der Grundlage der Laplaceschen Definition nicht mehr möglich. Diese Einwände führten schließlich dazu, daß der Wahrscheinlichkeitsbegriff auf ein empirisches Fundament gestellt wurde:

3.3 Die frequentistische Interpretation

Bei der auf Mises und Reichenbach zurückgehenden frequentistischen Auffassung wird Wahrscheinlichkeit als *Grenzwert der relativen Häufigkeiten in einer unendlichen Folge von unabhängigen und identischen Versuchen* definiert. Aufgrund ihres empirischen Charakters wird die frequentistische Definition auch als *Wahrscheinlichkeit a posteriori* bezeichnet.

Ein Schwachpunkt dieses Zugangs liegt in den empirischen Restriktionen begründet: So kann ein Beobachter niemals eine unendliche Folge von Beobachtungen zur Verfügung haben, auf deren Grundlage er den Grenzwert der relativen Häufigkeiten (und damit die Wahrscheinlichkeit) eines Ereignisses berechnet. Da bei empirisch gegebenen Folgen nicht von einer Konvergenz im Sinne der Mathematik gesprochen werden kann, ist die Anwendbarkeit der frequentistischen Definition zunächst fraglich.

Ein weiterer Einwand bezieht sich sich auf die Forderung der Unabhängigkeit der Versuche. So werden zwei Ereignisse A, B genau dann als unabhängig (im Sinne der Wahrscheinlichkeitstheorie) bezeichnet, wenn die Wahrscheinlichkeit des Durchschnitts $A \cap B$ gleich dem Produkt der beiden Einzelwahrscheinlichkeiten ist: $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Dieser Vorwurf der Zirkularität kann durch die Unterscheidung von wahrscheinlichkeitstheoretischer und physikalischer Unabhängigkeit entkräftet werden. Wie man bei Kutschera (1972) nachlesen kann, ist "physikalische Unabhängigkeit von A und B ... ohne Rückgriff auf einen Wahrscheinlichkeitsbegriff so erklärt, daß Ereignisse beider Typen nicht miteinander in physikalischer Wechselwirkung stehen, so daß das Eintreten oder Nichteintreten des einen Ereignisses keinen Einfluß auf das Eintreten oder Nichteintreten des anderen hat. Man kann eine solche physikalische Unabhängigkeit auch dann sinnvoll behaupten, wenn für die Ereignisse objektive Wahrscheinlichkeiten gar nicht definiert sind" (Kutschera, 1972, S. 98).

Die folgende Version des *Gesetzes der großen Zahlen* stützt die weithin verbreitete frequentistische Deutung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs. Sie besagt, daß die theoretische Wahrscheinlichkeit $P(A)$ eines zufälligen Ereignisses A hinreichend gut durch eine endliche Anzahl empirischer Daten approximiert werden kann: Ist P ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf einem Meßraum $(\Omega, \mathscr{A})$, so gilt für jedes Ereignis $A \in \mathscr{A}$ und jede positive Konstante $\epsilon > 0$ die Abschätzung

$$P^n \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega^n : \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} 1_A(x_i) - P(A) \right| \geq \epsilon \right\} \leq \frac{1}{4n\epsilon^2}.$$

So kann man praktisch sicher sein, daß die relative Häufigkeit $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} 1_A(x_i)$ bei einer Serie von $n = 10^{10}$ Beobachtungen um höchstens $1/1000$ von der theoretischen Wahrscheinlichkeit $P(A)$ abweicht. Wie man anhand der folgenden Abschätzung erkennen kann, treten größere Abweichungen seltener als einmal unter 40000 Fällen ein:

$$P^{10^{10}} \left\{ (x_1, \ldots, x_{10^{10}}) : \left| \frac{1}{10^{10}} \sum_{i=1}^{10^{10}} 1_A(x_i) - P(A) \right| \geq \frac{1}{1000} \right\} \leq \frac{1}{4 \cdot 10^4}.$$

Obgleich dies für die frequentistische Deutung der Wahrscheinlichkeitstheorie spricht, ist ihre Anwendbarkeit weiterhin offen: Nur in den seltensten Fällen wird man eine Serie von $n = 10^{10}$ Beobachtungen durchführen können.

Ein Argument, das nicht nur von Gegnern der frequentistischen Deutung der Wahrscheinlichkeitstheorie vorgebracht wird, betrifft das Problem, singulären Einzelereignissen Wahrscheinlichkeiten zuzuordnen. So vertrat sogar Richard von Mises die Auffassung, daß keine Wahrscheinlichkeitsaussagen über unwiederholbare Einzelereignisse getroffen werden können. Dies steht jedoch im Widerspruch zu der Tatsache, daß sowohl im alltäglichen, wie auch im wissenschaftlichen Bereich derartige Wahrscheinlichkeitszuweisungen Anwendung finden. Einen möglichen Ausweg aus dieser Situation zeigte Hans Reichenbach auf. Reichenbach argumentierte, daß Behauptungen über Einzelfälle elliptisch zu verstehen sind, und sie nur verkürzte Behauptungen über statistische Phänomene darstellen. So ist beispielsweise die Aussage, daß die Regenwahrscheinlichkeit für den morgigen Tag 1/3 beträgt in dem Sinne zu verstehen, daß nach früheren Beobachtungen auf Wetterbedingungen, wie den heute beobachteten, mit einer relativen Häufigkeit von 1/3 Regen folgte (siehe auch auch Carnap, 1969, Kap. 2).

Trotz dieser anwendungsbezogenen Probleme werden relative Häufigkeiten oftmals als einzige Möglichkeit zur approximativen Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten angesehen. Dies ist unproblematisch (wenn auch aus meßtheoretischer Sicht unbefriedigend), solange die Datenmenge genügend groß ist. Bei der für die Psychologie realistischen Wiederholungszahl $n = 100$ sind die Wahrscheinlichkeitszuweisungen jedoch noch mit großen Fehlern versehen; die relative Häufigkeit nach 100 Durchgängen weicht bei bis zu 25% aller erhobenen Zufallsfolgen um mehr als 1/10 von der tatsächlichen Wahrscheinlichkeit ab.

Ungeachtet dieser Schwierigkeiten werden in einigen Abschnitten dieser Arbeit Paarvergleichswahrscheinlichkeiten als Primitiva vorausgesetzt. Diese keineswegs unbedenkliche Haltung entspricht der in vielen experimentellen Untersuchungen eingenommenen Sichtweise, relative Häufigkeiten auch dann als adäquate Schätzungen der theoretischen Wahrscheinlichkeiten anzusehen, wenn der Stichprobenumfang gering ist. Diese naive Haltung wird in Kapitel 7 aufgegeben und durch einen meßtheoretischen Ansatz ersetzt.

3.4 Subjektive Interpretation

Bei der subjektiven Interpretation wird die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses als ein quantitatives Maß für den subjektiven Überzeugtheitsgrad angesehen, daß das betreffende Ereignis eintreten wird. Eine häufig vertretene, wenn auch sehr naive Auffassung besagt, daß die subjektive Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses unmittelbar aus der sogenannten *Wettchance* abgeleitet werden kann: Ist eine Person bereit mit der Quote $a : b$ dafür zu wetten, daß das Ereignis E eintreten wird, so ordnet sie dem Ereignis E eine $\frac{a}{b}$-mal so große Wahrscheinlichkeit wie dem Komplementärereignis $\bar{E}$ zu:

$$\frac{P(E)}{P(\bar{E})} = \frac{a}{b}.$$

Aufgrund der (angenommenen) Additivität des Wahrscheinlichkeitsmaßes P (und der damit verbundenen Darstellung $P(\bar{E}) = 1 - P(E)$) resultiert die (subjektive) Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses E:

$$P(E) = \frac{a}{a+b}.$$

In der experimentellen Forschungspraxis geht man davon aus, daß durch diese direkte Skalierungsmethode Absolutskalenniveau erreicht wird. Diese Auffassung ist jedoch unbegründet und muß gegebenenfalls anhand eines Meßmodells überprüft werden. Apriori ist keineswegs klar, daß die so erhaltenen Zahlzeichen die Attribute der reellen Zahlen besitzen.

Die subjektive Interpretation des Wahrscheinlichkeitsbegriffs ist dem alltäglichen Gebrauch des Wortes “wahrscheinlich” entlehnt. Da sich subjektive Wahrscheinlichkeiten nicht direkt auf die äußere Wirklichkeit beziehen, sondern subjektive Einschätzungen der Außenwelt wiedergeben, sind sie von besonderem Interesse für die Psychologie. Dabei ist apriori unklar, ob eine Versuchsperson in der Lage ist, den Wahrscheinlichkeitsbegriff konsistent handzuhaben. Ordnet sie beispielsweise drei disjunkten Ereignissen A, B, C die Wahrscheinlichkeiten $P(A) = 0.7$, $P(B) = 0.3$ und $P(C) = 0.1$ zu, so ergibt sich wegen Normiertheit und Additivität der Widerspruch

$$1 \geq P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) = 1.1.$$

Derartige Inkonsistenzen lassen sich mit Hilfe der Strukturen qualitativer Wahrscheinlichkeit aufdecken, wie sie im fünften Kapitel der Foundations of Measurement (Krantz et al., 1971) dargestellt sind. Es werden Bedingungen an eine qualitative Wahrscheinlichkeitsordnung $\succeq$ formuliert, die die Existenz eines (eindeutig bestimmten) Wahrscheinlichkeitsmaßes garantieren.

Eine ähnliche Vorgehensweise wird in Kapitel 7 gewählt. Dort wird die Frage untersucht, welchen Bedingungen qualitative Wahrscheinlichkeitsordnungen genügen müssen, damit eine Repräsentation durch (eindeutig bestimmte) Paarvergleichswahrscheinlichkeiten $p(a, b) \in [0, 1]$ sichergestellt ist.

Kapitel 4

Die Behandlung von Invarianzproblemen

Die Aufdeckung und Beschreibung von Invarianzphänomenen stellt einen Schwerpunkt der empirischen Wissenschaften dar. Die Bedeutung dieser Phänomene läßt sich auf die Tatsache zurückführen, daß Invarianzen zu Funktional- oder Differenzengleichungen führen können, die einer mathematischen Analyse zugänglich sind. Der Physiologe Ernst Heinrich Weber veröffentlichte 1834 das wohl populärste psychologische Invarianzphänomen: Der Betrag δI des ebenmerklichen Unterschiedes steht zur Intensität I des Standardreizes in konstantem Verhältnis: $\delta I/I = k$. Zur weiteren Untersuchung des Weberschen Gesetzes bezeichne $S_0, S_1, S_2, \ldots$ eine Folge von Reizwerten, die in *gerade wahrnehmbaren Stufen* verlaufe:

(1) S_0 ist die absolute Schwelle, d.h. der Minimalbetrag physikalischer Energie, der benötigt wird, um eine Sinnesempfindung zu erzeugen.

(2) Geht man von der Reizstärke S_n aus, so bemerkt eine Versuchsperson erstmals einen Unterschied, wenn der Reizwert auf S_{n+1} erhöht wird.

Mit diesen Bezeichnungen läßt sich das Webersche Gesetz präzisieren: Für jede natürliche Zahl $k \in \mathbb{N}$ ist $(S_{k+1} - S_k)S_k^{-1} = a$. Da dies äquivalent zur Differenzengleichung $S_{k+1} = (a+1)S_k$ ist, liefert ein einfacher Induktionsbeweis die Darstellung

$$S_k = (1+a)^k S_0.$$

In der Meßtheorie wird die Theorie der Funktionalgleichungen zur Klärung von Invarianzproblemen herangezogen, wie sie typischerweise bei Eindeutigkeitsfragen auftreten. Dies soll am Beispiel des Hölderschen Satzes aus Kapitel 2.1.1 erläutert werden: Es seien ϕ und ϕ' zwei isotone und additive Repräsentationen einer extensiven Struktur $\langle A, \succeq, \circ \rangle$, die den Voraussetzungen des Hölderschen Satzes genügt. Insbesondere bilden beide Homomorphismen die Grundmenge A *bijektiv* auf das offene Intervall $(0, \infty)$ ab. Wird die Abbildung F gemäß der Vorschrift $F(x) := \phi'\left(\phi^{-1}(x)\right)$

definiert, so genügt F der Cauchyschen Funktionalgleichung $F(x+y) = F(x)+F(y)$, $x, y > 0$. Da F überdies streng monoton wachsend ist, existiert eine positive Konstante λ mit $F(x) = \lambda x$. Dies führt insbesondere zum Verhältnisskalenniveau der Repräsentation ϕ: Die beiden Abbildungen ϕ und ϕ' lassen sich durch Multiplikation mit einer geeigneten positiven Konstanten λ ineinander überführen: $\phi' = \lambda\phi$.

Gemäß Aczél (1961) sind Funktionalgleichungen Gleichungen, "deren beide Seiten Ausdrücke sind, die aus endlich vielen unbekannten Funktionen (von endlich vielen Veränderlichen) und aus einer endlichen Anzahl von unabhängigen Veränderlichen aufgebaut werden.... Die Funktionalgleichungen dienen zur Bestimmung der unbekannten Funktionen. Wir sprechen von Funktionalgleichungen bzw. Funktionalgleichungssystemen, je nachdem eine oder mehrere Gleichungen vorliegen" (Aczél, 1961, S. 19). Das wohl populärste Beispiel für eine Funkktionalgleichung geht auf den franzözischen Mathematiker A. L. Cauchy zurück: *Genügt die (stetige oder streng monotone) Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der sogenannten Cauchyschen Funktionalgleichung $f(x+y) = f(x)+f(y)$, $x, y \in \mathbb{R}$, so ist f notwendigerweise eine Gerade mit Steigung $f(1)$.*

Ein weiteres populäres Beispiel entstammt der Wahrscheinlichkeitstheorie: Ist die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(X > x + y|X > x)$ zeitlich invariant in dem Sinne, daß sie unabhängig von $x \in \mathbb{R}_+$ ist, so ist die zugrundeliegende Zufallsvariable X exponentialverteilt zu einem Parameter $\lambda > 0$: $P\{X \leq t\} = 1 - \exp(-\lambda t)$. Diese Eigenschaft der *Gedächtnislosigkeit* läßt sich oftmals in Warteschlangensituationen beobachten. So ist beispielsweise die Wartezeit X bis zum Eintreffen des ersten Kunden an einer Supermarktkasse oder die Lebenszeit eines Atoms einer radioaktiven Substanz annähernd exponentialverteilt.

Der Vorteil einer derartigen Charakterisierung ist ohne weiteres zu erkennen: Experimentell arbeitende Wissenschaftler sind häufig an Charakterisierungen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen interessiert, wird die zufallskritische Auswertung experimenteller Daten doch ungemein erleichtert, wenn der Verteilungstypus des zu untersuchenden Merkmals bekannt ist. Während derartige Verteilungsaussagen meist auf den *zentralen Grenzwertsatz* zurückgeführt werden, werden im folgenden ausschließlich Verteilungsfunktionen betrachtet, die einfachen Funktionalgleichungen genügen. So ist beispielsweise die Eigenschaft der Gedächtnislosigkeit äquivalent zur Funktionalgleichung

$$P\{X > x + y\} = P\{X > x\}P\{X > y\}.$$

Entscheidend ist in diesem Zusammenhang, daß es unter bestimmten Randbedingungen möglich ist, eine eindeutige Lösung der Cauchyschen Funktionalgleichung $f(x+y) = f(x)f(y)$ anzugeben: Zunächst halte man fest, daß diese Gleichung durch die Nullabbildung $f \equiv 0$ gelöst wird. Neben dieser trivialen Abbildung stellt lediglich die Exponentialfunktion eine (nicht-pathologische) Lösung dar: *Es sei* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *eine (in einem Punkte) stetige (beziehungsweise auf einem beliebig kleinen Intervall* (a, b) *beschränkte) Abbildung. Genügt* f *der Funktionalgleichung* $f(x + y) = f(x)f(y)$*, so ist* f *entweder identisch "Null", oder von der Form* $f(x) = \exp(cx)$, $x \in \mathbb{R}$ (Aczél, 1961, Kap. 2.1.2).

Im folgenden sei f nicht mehr auf ganz $\mathbb{R}$, sondern lediglich auf dem halboffenen Intervall $[0, \infty)$ der nicht-negativen reellen Zahlen definiert: *Die Abbildung* f *sei auf einem beliebig kleinen Intervall* $(a, b) \subset [0, \infty)$ *beschränkt und genüge der Cauchyschen Funktionalgleichung* $f(x + y) = f(x)f(y)$, $x, y \geq 0$*. Überdies existiere eine positive Konstante* $y_0 > 0$*, die der Anfangsbedingung* $f(y_0) \neq 0$ *genügt. Dann existiert eine Konstante* $c \in \mathbb{R}$ *mit* $f(x) = \exp(cx)$, $x \geq 0$.

Für den Nachweis dieser Behauptung halte man zunächst fest, daß keine Zahl $t \geq 0$ existiert, für die die vorgegebene Abbildung f den Funktionswert 0 annimmt:

(1) Wäre $f(0) = 0$, so würde die Gleichung $f(y_0) = f(y_0 + 0) = f(y_0)f(0)$ den Widerspruch $0 \neq 0$ implizieren.

(2) Würde eine reelle Zahl $0 < t < y_0$ mit $f(t) = 0$ existieren, so würde der Widerspruch $0 \neq 0$ folgendermaßen aus der Cauchyschen Funktionalgleichung resultieren: $f(y_0) = f(t + (y_0 - t)) = f(t)f(y_0 - t)$.

(3) Abschließend führe man die Annahme der Existenz einer reellen Zahl $t > y_0$ mit $f(t) = 0$ ad absurdum. Hierzu wähle man gemäß der Archimedischen Eigenschaft der reellen Zahlen eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $ny_0 > t$. Hierfür gilt $0 = f(t) = nf(t/n)$, also insbesondere $f(t/n) = 0$. Dies hat jedoch zusammen mit dem eben betrachteten Spezialfall (2) den Widerspruch $0 \neq 0$ zur Folge.

Hieraus läßt sich unmittelbar die Positivität der Abbildung f ableiten: Wegen $f(t/2) \neq 0$ ist $f(t) = f(t/2)^2 > 0$. Insbesondere kann f zu einer Abbildung auf ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzt werden: Für $x > 0$ definiere man $f(-x) := f(x)^{-1}$. Da diese Abbildung der Cauchyschen Funktionalgleichung $f(x + y) = f(x)f(y)$, $x, y \in \mathbb{R}$, genügt, ist f notwendigerweise von der Gestalt $f(x) = \exp(cx)$.

Damit ist insbesondere die oben angedeutete Charakterisierung der Exponentialverteilung bewiesen: *Die Verteilungsfunktion* F *einer positiven Zufallsvariablen* X *genüge der Funktionalgleichung* $1 - F(s + t) = (1 - F(s))(1 - F(t))$, $s, t > 0$*. Dann ist* X *exponentialverteilt zu einem Parameter* $\lambda > 0$*:* $P\{X \leq t\} = 1 - \exp(-\lambda t)$.

Die *Weibull-Verteilung* stellt eine Verallgemeinerung der Exponentialverteilung dar. Sie besitzt die Dichtefunktion $f(x) := \lambda p x^{p-1} \exp(-\lambda x^p)$, $x > 0$, mit fixiertem $\lambda > 0$ und $p > 0$. Eine zu den Parametern $\lambda > 0$ und $p = 1$ Weibull-verteilte Zufallsvariable ist exponentialverteilt zum Erwartungswert $1/\lambda$. Die naheliegende Frage, ob diese verallgemeinerte Exponentialverteilung durch eine Verallgemeinerung der Gedächtnislosigkeit charakterisiert werden kann, kann positiv beantwortet werden (Wang, 1976): *Es sei* $\alpha > 0$ *und* $X : (\Omega; \mathscr{A}, P) \to \mathbb{R}_+$ *eine nicht-degenerierte*

Zufallsvariable mit

$$P\left\{X > \sqrt[\alpha]{s^\alpha + t^\alpha}\right\} = P\{X > s\}P\{X > t\}$$

für alle $s, t \geq 0$. Dann ist X Weibull-verteilt zu den Parametern λ und α.

Eine Wahrscheinlichkeitsverteilung, die trotz (oder gerade wegen) ihrer Nähe zur Normalverteilung eine nur unbedeutende Rolle in den empirischen Wissenschaften einnimmt, ist die *logistische Verteilung.* So ist es beispielsweise nahezu unmöglich zwischen der Standardnormalverteilung und der logistischen Verteilung zum Erwartungswert 0 und Varianz 1 zu unterscheiden: Die beiden Verteilungen weichen maximal um den Wert 0.03 voneinander ab (Johnson & Kotz, 1970):

$$\max_{-\infty<t<\infty} \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) dx - \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{-\pi t}{\sqrt{3}}\right)} \right| < 0.03.$$

Trotz dieser frappierenden Ähnlichkeit läßt sich die logistische Verteilung anders als die Normalverteilung durch eine relativ einfache Funktionalgleichung charakterisieren: *Für die Verteilungsfunktion F einer Zufallsvariablen X gelte der funktionale Zusammenhang*[1]

$$\frac{F(x+y)}{1 - F(x+y)} = \frac{F(x)}{1 - F(x)} \frac{F(y)}{1 - F(y)}, \quad x, y \in \mathbb{R}. \tag{4.1}$$

Dann ist X logistisch verteilt mit Erwartungswert 0: Es existiert eine positive Konstante $c > 0$ mit $F(t) = [1 + \exp(-ct)]^{-1}$, $t \in \mathbb{R}$.

Für den Nachweis dieser Charakterisierung halte man zunächst fest, daß sich die Monotonie der Verteilungsfunktion F auf die Abbildung w, $w(t) := F(t)[1-F(t)]^{-1}$, überträgt: Die Abbildung $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist monoton wachsend, also insbesondere beschränkt auf einem beliebigen Intervall $(a, b) \subset \mathbb{R}$. Da w überdies der Cauchyschen Funktionalgleichung $w(s + t) = w(s)w(t)$, $s, t \in \mathbb{R}$, genügt, existiert eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ mit $w(t) = \exp(ct)$. Hierbei ist nur zu beachten, daß mit der Verteilungsfunktion F auch die Abbildung w nicht identisch der Nullabbildung ist. Hieraus läßt sich jedoch unmittelbar die behauptete logistische Verteilungsform der Zufallsvariablen X deduzieren: Nach Definition der Abbildung w ist $\exp(-ct) = F(t)^{-1} - 1$, also $F(t) = [1 + \exp(-ct)]^{-1}$. Die Positivität der Konstanten c resultiert nun aus der Monotonie der Abbildung F: Wäre $c < 0$, so wäre die Verteilungsfunktion F streng monoton fallend; wäre $c = 0$, so wäre F konstant gleich 1/2: $P\{X \leq t\} = 1/2$.

Ist die Verteilungsfunktion F der Zufallsvariablen X symmetrisch - gilt also $F(-x) = 1 - F(x)$ -, so genügt es, die Cauchysche Funktionalgleichung (4.1) für

[1]Implizit ist hierdurch natürlich die Wohldefiniertheit der beteiligten Ausdrücke sichergestellt: Für $x \in \mathbb{R}$ gelte $P\{X > x\} \neq 0$.

nicht-negative reelle Zahlen $x, y \geq 0$ nachzuweisen: *Es sei* $X : (\Omega, \mathscr{A}, P) \to \mathbb{R}$ *eine Zufallsvariable mit symmetrischer Verteilungsfunktion* F*: Für* $x \in \mathbb{R}$ *gelte* $F(-x) = 1 - F(x)$*. Für alle nicht-negativen reellen Zahlen* $x, y \geq 0$ *gelte überdies die Funktionalgleichung (4.1). Dann ist* X *logistisch verteilt mit Erwartungswert 0: Es existiert eine Konstante* $c > 0$ *mit* $F(t) = [1 + \exp(-ct)]^{-1}$*,* $t \in \mathbb{R}$*.*

Für den Nachweis dieser Behauptung gehe man zur (wohldefinierten) Abbildung $f(x) := F(x)[1 - F(x)]^{-1}$ über. Dann ist f monoton wachsend und genügt der Cauchyschen Funktionalgleichung $f(x + y) = f(x)f(y)$, $x, y \geq 0$. Da überdies eine positive Konstante $y_0 > 0$ mit $f(y_0) \neq 0$ existiert, gilt: Es existiert eine reelle Konstante c, so daß für alle nicht-negativen reellen Zahlen $x \geq 0$ gilt: $f(x) = \exp(cx)$. Für nicht-negative Zahlen $x \geq 0$ hat dies bereits die behauptete Darstellung der Abbildung F zur Folge: Es existiert eine positive Konstante $c > 0$, so daß für nicht-negative Zahlen $x \geq 0$ die Darstellung $F(x) = [1 + \exp(-cx)]^{-1}$ erfüllt ist. Die Behauptung resultiert nun aus der vorausgesetzten Symmetrie der Verteilungsfunktion F.

Kapitel 5

Theorie: Eine probabilistische Verallgemeinerung des klassischen Meßgedankens

5.1 Der Begriff der Zufallsvariablenrepräsentation

Die axiomatische Methode, die unter anderem auch der modernen Meßtheorie zugrundeliegt, basiert auf einem formalen Axiomensystem, dessen Objekte lediglich implizit über die postulierten Axiome definiert sind. Dabei soll die Bezeichnung "formal" nicht auf die Verwendung einer formalen Sprache im engeren Sinne hinweisen, sondern vielmehr darauf hindeuten, daß der Präzisionsstandard der modernen Mathematik (wie er beispielsweise in der Wahrscheinlichkeitstheorie umgesetzt ist) angestrebt wird. Insbesondere sind logische und mengentheoretische Ausdrücke in ihrer umgangssprachlichen Bedeutung zu verstehen. Während Interpretationen die Voraussetzung für die empirische Anbindung darstellen, sind sie für den Aufbau einer axiomatischen Theorie entbehrlich, oftmals sogar hinderlich. Dies manifestiert sich exemplarisch in der Geometrie, die mehr als zwei Jahrtausende der Anschauung verpflichtet war und erst durch David Hilbert ihren heute gebräuchlichen formalistischen Aufbau bekam.

Der axiomatische Zugang findet sich auch in der modernen Meßtheorie wieder: Während in den formalen Meßmodellen nur von Mengen, Relationen und Operationen die Rede ist, hängen die Anwendungen der Meßtheorie entscheidend von den Interpretationen dieser Grundbegriffe ab. Wird beispielsweise eine binäre Relation $\succeq$ auf einer Menge A vorausgesetzt, so ist das Tupel $\langle A, \succeq \rangle$ zunächst bezüglich der zu messenden Eigenschaft zu interpretieren. Wird etwa ein Experiment zur subjektiven Gewichtswahrnehmung durchgeführt, so enthält die Grundmenge A verschiedene Gewichtsreize, die Träger der zu messenden Eigenschaft sind. Die Relation $\succeq$ gibt die Urteile der Versuchsperson wieder. In diesem Zusammenhang sind unterschiedliche Interpretationen denkbar: Beurteilt eine Versuchsperson zwei Reize a und b stets gleich (stuft sie also bei Präsentation des Reizpaares (a, b) stets den gleichen Reiz als den schwereren ein), so ist die deterministische Interpretation naheliegend: Die beiden Reize a und b stehen genau dann in Relation $\succeq$ (formal: $(a, b) \in \succeq$ oder $a \succeq b$), wenn b niemals schwerer als a eingestuft wird. In dieser Situation lassen sich die Versuchspersonenurteile beschreiben, ohne probabilistische Konzepte der Wahrscheinlichkeitstheorie heranziehen zu müssen.

Diese Interpretation setzt natürlich eine geeignete Wahl der Grundmenge A voraus: Enthält A beispielsweise die Reize a (100 Gramm) und b (101 Gramm), so wird die Versuchsperson keine klare Präferenz für einen der beiden Reize aufweisen; eine deterministische Interpretation ist nicht möglich.

In dieser Situation bietet sich eine naheliegende probabilistische Verallgemeinerung an: Ein Reiz a steht genau dann in Relation $\succeq$ zu einem Reiz b, wenn die Paarvergleichswahrscheinlichkeit $p(a, b)$ größer oder gleich $1/2$ ist: $a \succeq b \Leftrightarrow p(a, b) \geq 1/2$. Dabei gibt $p(a, b) \in [0, 1]$ die Wahrscheinlichkeit dafür an, daß eine Versuchsperson die Frage, ob b schwerer als a ist, mit “Nein” beantwortet, wenn das Reizpaar (a, b) in einer vorher festgelegten Reihenfolge präsentiert wird. Hierbei ist zu betonen, daß die Relation $\succeq$ nicht mehr auf singulären Einzelbeobachtungen basiert (wie dies etwa noch bei der deterministischen Interpretation des Tupels $\langle A, \succeq \rangle$ der Fall war), sondern daß aggregierte Daten betrachtet werden, die aus einer Folge unabhängiger und identischer Wiederholungen eines Experiments resultieren. Definiert bei einer endlichen Grundmenge A die Relation $\succeq$ eine schwache Ordnung, so existiert eine reellwertige Ordinalskala ϕ: Für Reize $a, b \in A$ gilt $p(a, b) \geq 0.5 \Leftrightarrow \phi(a) \geq \phi(b)$. Eine Versuchsperson entscheidet sich bei der Mehrzahl der Präsentationen des Reizpaares (a, b) für a, wenn die zugehörigen Skalenwerte $\phi(a)$ und $\phi(b)$ der Abschätzung $\phi(a) \geq \phi(b)$ genügen.

Die mit dieser Repräsentation verbundenen Schwierigkeiten wurden bereits in Kapitel 2.3.2 angesprochen: Während sich die Diskriminierbarkeit der Reize a und b in der Paarvergleichswahrscheinlichkeit $p(a, b)$ niederschlägt, geht diese Information bei Übergang zu den Skalenwerten $\phi(a)$ und $\phi(b)$ verloren: Die Paarvergleichswahrscheinlichkeit $p(a, b)$ läßt sich nicht aus den zugehörigen Skalenwerten $\phi(a)$ und $\phi(b)$ errechnen; es ist lediglich möglich, zwischen den Alternativen $p(a, b) \geq 1/2$ und $p(b, a) \geq 1/2$ zu entscheiden.

Eine ähnliche Situation bietet bei den extensiven Meßstrukturen dar: Während es möglich ist, die Axiome einer extensiven Meßstruktur probabilistisch zu interpretieren, repräsentiert die isotone ($p(a, b) \geq 1/2 \Leftrightarrow \phi(a) \geq \phi(b)$) und additive ($\phi(a \circ b) =$

$\phi(a) + \phi(b))$ Abbildung ϕ keineswegs die probabilistischen Eigenschaften der Meßsituation: Die reellen Skalenwerte $\phi(a)$ und $\phi(b)$ spiegeln nur die mehr oder minder willkürlich gewählte probabilistische Ordnungsrelation $a \succeq b \Leftrightarrow p(a,b) \geq 1/2$ wider, erlauben jedoch nicht die Berechnung der Paarvergleichswahrscheinlichkeit $p(a,b)$.

Zusammenfassend läßt sich folgende Situation festhalten: Obgleich die deterministischen Meßstrukturen der fundamentalen Meßtheorie in der Lage sind, probabilistische Eigenschaften der Meßsituation zu erfassen und mittels der Ordnungsrelation $a \succeq b \Leftrightarrow p(a,b) \geq 1/2$ in das Meßkonzept zu integrieren, führen diese, a posteriori vorgenommenen Probabilisierungen nur zu unbefriedigenden Meßmodellen, die lediglich gewisse Aspekte der probabilistischen Struktur berücksichtigen.

Werden Inkonsistenzen in den Antworten einer Versuchsperson als Bestandteil der Meßsituation erachtet, so erscheint eine Verallgemeinerung des Meßgedankens angebracht: Anders als J.-Cl. Falmagnes probabilistische Theorie der extensiven Messung (Kapitel 2.3.2), die in der Tradition der Constant-Utility-Modelle steht, wird hier eine Erweiterung des Meßkonzeptes vorgeschlagen, die sich mehr an den auf Thurstone zurückgehenden Random-Utility-Modellen orientiert. Hierzu nehme man an, zu jedem Reiz x einer Grundmenge A existiere eine sogenannte *qualitative Verteilungsfunktion* V_x, die jedem Reiz a der Grundmenge A eine Zahl $V_x(a)$ des abgeschlossenen Einheitsintervalls $[0,1]$ zuordnet. In diesem Zusammenhang ist auf die Bedeutung des Adjektivs "qualitativ" hinzuweisen: Während qualitative Axiome gemeinhin nicht-numerische Bedingungen bezeichnen, soll dieser Begriff hier etwas weiter gefaßt werden: So soll der Zusatz "qualitativ" lediglich zum Ausdruck bringen, daß es in bestimmten Situationen prinzipiell möglich ist, $V_x(a)$ aus experimentellen Daten zu bestimmen.

In einem psychophysischen Kontext gebe $V_x(a)$ die Wahrscheinlichkeit $p(a,x)$ an, daß sich eine Versuchsperson bei Präsentation des Reizpaares (a,x) für a entscheidet, wenn ihr (beispielsweise) zunächst der Standardreiz x und dann der Vergleichsreiz a präsentiert wird. Hieran wird bereits deutlich, daß sich der Ausdruck $V_x(a)$ ausschließlich auf Reizpräsentationen mit einer fixierten Reihenfolge der Reizdarbietung bezieht.

Die Annahme, daß die Reihenfolge der Präsentation keinen Einfluß auf die Versuchspersonenurteile hat, wird üblicherweise durch die Gleichung $V_x(a) + V_a(x) = 1$ zum Ausdruck gebracht. Für viele (auch nicht-psychophysische) Anwendungen ist diese Annahme jedoch unplausibel und viel zu restriktiv:

Bezeichnet $V_x(a)$ beispielsweise die Wahrscheinlichkeit, daß die Fußballmannschaft a ein Heimspiel gegen Mannschaft x gewinnt, so läßt sich dieser Wert nicht aus der Wahrscheinlichkeit für einen Heimsieg der Mannschaft x berechnen. Man denke nur an die sehr heimstarke, jedoch auch äußerst auswärtsschwache Mannschaft der SpVgg Unterhaching, die in der Saison 2000/2001 zwar 7 Heimsiege jedoch nur einen Auswärtserfolg verbuchen konnte. Derartige "Reihenfolgeeffekte" lassen sich oftmals auch in der Psychophysik beobachten: Bei der Beurteilung aufeinanderfolgender akustischer Reize ist es denkbar und auch plausibel, daß die Reihenfolge der Präsentation die Urteile der Versuchsperson beeinflußt. Dieser sogennte *Hysterese-Effekt* ist unvereinbar mit der Symmetrieforderung $V_x(a) + V_a(x) = 1$.

Obgleich der Übergang von den Paarvergleichswahrscheinlichkeiten $p(a, x)$ zu den qualitativen Verteilungsfunktionen V_x nicht mit einem direkten Erkenntnisgewinn verbunden ist, führt diese Notationsänderung zu einer interessanten Umstrukturierung der "Daten": Durch Einführung der qualitativen Verteilungsfunktion V_x werden diejenigen Paarvergleichswahrscheinlichkeiten zu einer Abbildung zusammengefaßt, die sich auf den gemeinsamen Standardreiz x beziehen.

Offensichtlich hat diese Vorgehensweise ihren Ursprung in der Psychophysik: Ausgehend von der Paarvergleichswahrscheinlichkeit $p(a, b)$ wird die *psychometrische Funktion* p_b gemäß der Vorschrift $p_b(a) := p(a, b)$ definiert. Im Unterschied zu den qualitativen Verteilungsfunktionen weisen psychometrische Funktionen stets einen numerischen Wertebereich auf. Dies wird im folgenden durch Voraussetzung einer qualitativen Struktur kompensiert, die sich homomorph in die Menge der reellen Zahlen abbilden läßt.

Die Gesamtheit $\{V_x : x \in A\}$ der qualitativen Verteilungsfunktionen spezifiziert die probabilistischen Merkmale der Meßsituation. Hierzu ist eine Familie $\{X_x : x \in A\}$ von Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ gesucht, so daß die theoretische Verteilungsfunktion $F_x(t) = P\{X_x \leq t\}$, $t \in \mathbb{R}$, die qualitative Verteilungsfunktion V_x "geeignet" repräsentiert. Auch in diesem Zusammenhang ist der Bezug zur Psychophysik unübersehbar: Psychometrische Funktionen lassen sich oftmals als Verteilungsfunktionen zufälliger Veränderlicher auffassen. Diese noch sehr vage und unbestimmte Idee zur Modifikation des klassischen deterministischen Meßgedankens soll nun anhand des extensiven Spezialfalls präzisiert werden.

Im folgenden sei eine extensive Struktur $\langle A, \succeq, \circ \rangle$ vorausgesetzt, die sich isoton und additiv auf die Menge der reellen Zahlen abbilden läßt: Es existiere eine reellwertige Abbildung ϕ, die jedem Reiz $x \in A$ eine reelle Zahl $\phi(x)$ derart zuordnet, daß für zwei Reize a und b der Grundmenge A gilt: (1) Der Reiz a steht genau dann in Relation $\succeq$ zum Reiz b, wenn die numerische Abschätzung $\phi(a) \geq \phi(b)$ erfüllt ist. (2) Dem verknüpften Reiz $a \circ b$ wird der numerische Wert $\phi(a \circ b) = \phi(a) + \phi(b)$ zugeordnet.

In diesem Zusammenhang sind zwei grundsätzlich verschiedene Positionen denkbar, die sich in den folgenden Interpretationen des Relativs $\langle A, \succeq, \circ \rangle$ widerspiegeln:

Einerseits läßt sich das Relativ $\langle A, \succeq, \circ \rangle$ als physikalische Reizstruktur auffassen, die einem psychophysischen Experiment zugrundegelegt wird. In diesem Fall wird die Reizmenge A durch ein objektives, von der Versuchsperson unabhängiges Kriterium geordnet. Beispielsweise könnte A eine Menge von Gegenständen bezeichnen, die mittels einer Balkenwaage verglichen werden. Bei dieser Deutung finden die Versuchspersonenurteile ausschließlich in Gestalt der qualitativen Verteilungsfunktionen Eingang in das Meßmodell. Von besonderem Interesse ist hier (wie in allen anderen psychophysischen Anwendungen) die Abhängigkeit der psychologischen Struktur $\{V_x : x \in A\}$ von der physikalischen Reizstruktur $\langle A, \succeq, \circ \rangle$.

Andererseits kann das Tripel $\langle A, \succeq, \circ \rangle$ auch als "psychologische" Struktur verstanden werden: Zwei Reize a und b stehen genau dann in Relation $\succeq$, wenn sich die Versuchsperson "mehrheitlich" für a entscheidet: $a \succeq b \Leftrightarrow p(a, b) \geq 1/2$. Während diese Ordnungsrelation auf den Urteilen einer Versuchsperson aufgebaut ist, lassen sich hiermit nur sehr schwache Aussagen über das Entscheidungsverhalten von Versuchspersonen treffen. Überdies wird $\succeq$ häufig mit der zugrundeliegenden physikalischen Ordnungsrelation übereinstimmen: Dominiert die physikalische Reizintensität von a die Reizintensität von b, so wird eine Versuchsperson die Frage, ob ihr a schwerer als b erscheint, mehrheitlich mit "Ja" beantworten. Dieser Mangel an Information wird durch Einführung der qualitativen Verteilungsfunktion V_x kompensiert.

Im folgenden werden die *Eigenschaften* der qualitativen Verteilungsfunktionen geklärt. Dazu nehme man an, ein und dieselbe Versuchsperson durchlaufe mehrere Durchgänge eines Diskriminationsexperiments. In jedem Durchgang habe die Versuchsperson zu entscheiden, ob ein Vergleichsreiz a einen Standardreiz x dominiert. Durch wiederholte unabhängige Präsentation des Reiztupels $(a, x) \in A \times A$ werde die Paarvergleichswahrscheinlichkeit $p(a, x) \equiv V_x(a) \in [0, 1]$ bestimmt. Obgleich bereits die approximative Bestimmung dieses Wertes problematisch und bei Vorliegen kleiner Datensätze hochgradig fehlerbehaftet ist, gehe man hier nicht weiter auf den Schätzprozeß und die damit verbundenen Schwierigkeiten ein. Anders als in Kapitel 7 werden Paarvergleichswahrscheinlichkeiten als Primitiva betrachtet, die keiner weiteren Begründung bedürfen.

Wenn auch das Verhalten von Versuchspersonen oftmals nur unter Zuhilfenahme probabilistischer Konzepte beschrieben werden kann, verhalten sich Versuchspersonen dennoch nicht völlig unsystematisch, sondern weisen gewisse - in der Sprache der Wahrscheinlichkeitstheorie formulierte - Gesetzmäßigkeiten auf. Das wohl bekannteste derartige Beispiel geht auf den Physiologen Ernst Weber zurück: Für $a, b \in A$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt $p(na, nb) = p(a, b)$. Dieses sogenannte Webersche Gesetz wird oftmals weit weniger präzise in folgender Form angegeben: Je größer der Standardreiz ist, umso größer muß die Zunahme der Reizstärke ausfallen, damit eine Versuchsperson einen ebenmerklichen Unterschied wahrnimmt.

Während das Webersche Gesetz einen hochgradig nichttrivialen Zusammenhang zwischen verschiedenen Paarvergleichswahrscheinlichkeiten postuliert, der möglicherweise nur in speziellen Reizsituationen beobachtet werden kann (und hier auch nicht vorausgesetzt werden soll), werden im folgenden sehr viel schwächere Annahmen über das Verhältnis der binären Relation $\succeq$ und der qualitativen Verteilungsfunktion V_x formuliert:

Die erste Annahme bezieht sich auf das Monotonieverhalten der Abbildung V_x: So wird in den folgenden Kapiteln stets angenommen, daß für Reize $a \succeq b$ Paarvergleichswahrscheinlichkeiten $V_x(a)$ und $V_x(b)$ resultieren, die der Abschätzung $V_x(a) \geq V_x(b)$ genügen: Die empirische Ungleichung $a \succeq b$ impliziert die numerische Abschätzung $V_x(a) \geq V_x(b)$. Insbesondere implizieren äquivalente Reize a und b identische Paarvergleichswahrscheinlichkeiten: Ist $a \sim b$, so gilt $V_x(a) = V_x(b)$.

Diese Bedingung entspricht der wohlbekannten Monotonie von Verteilungsfunktionen: Bezeichnet F die Verteilungsfunktion einer Zufallsvariablen X, so ist F eine monoton wachsende Abbildung: Für reelle Zahlen $s \geq t$ gilt $F(s) \geq F(t)$. Die Monotonieforderung "$a \succeq b \Rightarrow V_x(a) \geq V_x(b)$" ist jedoch nicht mit der *Isotonie*[1] der qualitativen Verteilungsfunktion V_x zu verwechseln, die der (nicht notwendigerweise erfüllten) *strengen Monotonie*[2] der numerischen Verteilungsfunktion F entspricht.

Wird das Tripel $\langle A, \succeq, \circ \rangle$ als physikalische Reizstruktur gedeutet, so wird eine äußerst plausible Beziehung zwischen der physikalischen Relation $\succeq$ und der psychologischen Verteilungsfunktion V_x postuliert: Ist die physikalische Reizintensität von a größer oder gleich der physikalischen Reizintensität von b, so stuft die Versuchsperson den Vergleichsreiz a mit einer Wahrscheinlichkeit $p(a, x)$ als mindestens so intensiv wie den Standardreiz x ein, die größer oder gleich der Paarvergleichswahrscheinlichkeit $p(b, x)$ ist, daß die Versuchsperson den Vergleichsreiz b als mindestens so intensiv wie den Standardreiz x einschätzt. Obgleich diese Bedingung natürlich im einzelnen überprüft werden muß und lediglich von den Diskriminationsurteilen der Versuchsperson abhängt, spiegelt sie eine Tatsache wider, die sich im alltäglichen Leben beobachten läßt: Je größer die physikalische Differenz zweier Reize ausfällt, umso leichter lassen sie sich voneinander unterscheiden.

Überdies wird angenommen, daß ein Reiz $x_0 \in A \cup \{o\}$ existiert, so daß x ein *Median der qualitativen Verteilungsfunktion* $V_{x \circ x_0}$ ist: Es existiert ein $x_0 \in A \cup \{o\}$, so daß für alle $x \in A$ gilt:

(1) $V_{x \circ x_0}(x) \geq \frac{1}{2}$;

(2) Für $y \in A$ mit $x \succ y$ ist $V_{x \circ x_0}(y) \leq \frac{1}{2}$.

[1] $a \succeq b \Leftrightarrow V_x(a) \geq V_x(b)$.

[2] $s > t \Rightarrow F(s) > F(t)$.

Hier wie im folgenden wird von der Konvention $x \circ o := x$ Gebrauch gemacht: Für $x_0 = o$ ist x ein Median der qualitativen Verteilungsfunktion V_x: Es gilt $V_x(x) \geq 0.5$ und $V_x(y) \leq 0.5$, falls $y \prec x$.

Für den Spezialfall $V_{x \circ x_0}(x) = 0.5$ resultiert Bedingung (2) unmittelbar aus der postulierten Monotonie der qualitativen Verteilungsfunktion $V_{x \circ x_0}$: Die Ungleichung $x \succ y$ hat zusammen mit dem Monotonieverhalten der Verteilungsfunktion $V_{x \circ x_0}$ die Abschätzung $V_{x \circ x_0}(x) \geq V_{x \circ x_0}(y)$ zur Folge. Die Ungleichung $V_{x \circ x_0}(y) \leq 0.5$ resultiert nun aus der Annahme $V_{x \circ x_0}(x) = 0.5$.

Die Bedeutung dieses Spezialfalls läßt sich an einem Experiment zur subjektiven Gewichtswahrnehmung verdeutlichen: Der Wert $V_x(a)$ bezeichne die Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine Versuchsperson den Reiz a als mindestens so schwer wie den Reiz x wahrnimmt, wenn sie den Standardreiz x mit der rechten und den Vergleichsreiz a mit der linken Hand anhebt. Wird eine rechtshändige Versuchsperson aufgefordert, einen 50 Gramm schweren Standardreiz x mit einem dazu nicht zu unterscheidenden 50 Gramm schweren Vergleichsreiz a zu vergleichen, so wird sie aufgrund eines Effekts der Händigkeit mehrheitlich "a schwerer x" urteilen: $V_x(x) = V_x(a) > 0.5$. Wird jedoch zu einem geeigneten schwereren Standardreiz $x \circ x_0$ übergegangen, so wird die Versuchsperson den beiden Reizen völlig indifferent gegenüberstehen und sich willkürlich für eine der beiden Alternativen entscheiden: $V_{x \circ x_0}(x) = 0.5$. Entscheidend ist in diesem Zusammenhang die Annahme, daß der Korrekturterm x_0 unabhängig vom Vergleichsreiz x ist: $V_{x \circ x_0}(x) = 0.5 = V_{a \circ x_0}(a)$.

Sind derartige Hystereseeffekte nicht nachweisbar, so läßt sich die Paarvergleichswahrscheinlichkeit $V_x(x) = 0.5$ beobachten. Diese in der Psychophysik weitverbreitete Forderung wird hier jedoch aus mehreren Gründen nicht generell vorausgesetzt: Zum einen ist man bestrebt, die Annahmen des Meßmodells so allgemein wie möglich zu halten. Insbesondere wird versucht, den deterministischen Spezialfall $V_x(a) \in \{0, 1\}$ zu integrieren. Andererseits kann gezeigt werden, daß es bei der Charakterisierung der Exponentialverteilung unvermeidlich ist, Reihenfolgeeffekte zuzulassen (Kapitel 5.3).

Offensichtlich resultiert die Bezeichnung *Median der qualitativen Verteilungsfunktion* aus der geläufigen Definition des Medians einer Wahrscheinlichkeitsverteilung: Eine Zahl $t \in \mathbb{R}$ heißt Median der Verteilung einer Zufallsvariablen X, falls die beiden Bedingungen "$P\{X \leq t\} \geq 1/2$" und "$P\{X \leq s\} \leq 1/2$ für alle reellen Zahlen $s < t$" erfüllt sind.

Während der Median einer Zufallsvariablen X nicht notwendigerweise eindeutig bestimmt ist (so kann beispielsweise gezeigt werden, daß die Mediane einer Zufallsvariablen im allgemeinen lediglich ein abgeschlossenes Intervall definieren), wird im folgenden die Äquivalenz der verschiedenen qualitativen Mediane gefordert: Ist der Reiz z ein weiterer Median der qualitativen Verteilungsfunktion $V_{x \circ x_0}$, so ist z

äquivalent zum Median x: Gelten für einen Reiz z der Grundmenge A die beiden Bedingungen "$V_{x\circ x_0}(z) \geq 1/2$" und "$V_{x\circ x_0}(y) \leq 1/2$ für $z \succ y$", so ist z äquivalent zum Median x: $x \sim z$.

Insbesondere definiert die Gesamtheit der Mediane der qualitativen Verteilungsfunktion $V_{x\circ x_0}$ eine Äquivalenzklasse bezüglich der Äquivalenzrelation $\sim$. Bezeichnet man diese Menge mit $m(V_{x\circ x_0})$, so gilt $m(V_{x\circ x_0}) = [x]$. Diese Eindeutigkeitsforderung hat weitreichende Auswirkungen: So sollte mit der qualitativen Verteilungsfunktion $V_{x\circ x_0}$ auch die Verteilungsfunktion $F_{x\circ x_0}$ der Zufallsvariablen $X_{x\circ x_0}$ einen eindeutig bestimmten Median $M(F_{x\circ x_0}) \in \mathbb{R}$ besitzen.

Diese Bemerkung führt zurück zum Ausgangsproblem: Die bereits vage angedeutete Idee zur Modifikation des klassischen deterministischen Meßgedankens sollte präzisiert werden. Dazu gehe man von den eben postulierten Annahmen über die Verteilungsfunktion V_x aus. Hieraus lasen sich weitere Eigenschaften deduzieren, die sich (analog zur Eindeutigkeit des Medians der Zufallsvariablen $X_{x\circ x_0}$) auf die Verteilungsfunktion F_x der Zufallsvariablen X_x übertragen lassen.

Eine erste Folgerung läßt sich aus der Monotonie der Verteilungsfunktion V_x, sowie der Eindeutigkeitsforderung $m(V_{y\circ x_0}) = [y]$ ableiten: Für zwei Mediane a und b der qualitativen Verteilungsfunktion $V_{y\circ x_0}$ gilt $V_x(a) = V_x(y) = V_x(b)$. Dieser Sachverhalt kann durch die Gleichung $V_x(m(V_{y\circ x_0})) = V_x(y)$ dargestellt werden. Hieraus resuliert zusammen mit der Forderung der Eindeutigkeit des Medians der Verteilungsfunktion $F_{y\circ x_0}$ eine weitere Repräsentationsbedingung: Für beliebige Reize x und y der Grundmenge A gelte $F_x(M(F_{y\circ x_0})) = V_x(y)$.

Werden qualitative Mediane $a \in m(V_{x\circ x_0})$ und $b \in m(V_{y\circ x_0})$ vorausgesetzt, so resultiert die Beziehung $a \succeq b \Leftrightarrow x \succeq y$. In diesem Sinne ist die Äquivalenzaussage $x \succeq y \Leftrightarrow m(V_{x\circ x_0}) \succeq m(V_{y\circ x_0})$ zu verstehen. Die Mediane der qualitativen Verteilungsfunktionen bewahren die empirische Ordnungsrelation $\succeq$. Dementsprechend wird im folgenden die Isotonie der theoretischen Mediane gefordert: Die Mediane $M(F_{x\circ x_0})$ und $M(F_{y\circ x_0})$ genügen genau dann der numerischen Abschätzung $M(F_{x\circ x_0}) \geq M(F_{y\circ x_0})$, wenn die Reize x und y die Bedingung $x \succeq y$ erfüllen: $x \succeq y \Leftrightarrow M(F_{x\circ x_0}) \geq M(F_{y\circ x_0})$.

Desweiteren ist mit a und b auch $a \circ b$ ein Median einer qualitativen Verteilungsfunktion: Mit $a \in m(V_{x\circ x_0})$ und $b \in m(V_{y\circ x_0})$ ist der Reiz $a \circ b$ ein Median der Verteilungsfunktion $V_{x\circ y\circ x_0}$: $a \circ b \in m(V_{x\circ y\circ x_0})$. Dies läßt sich auf sehr prägnante Art und Weise durch die Gleichung $m(V_{x\circ y\circ x_0}) = m(V_{x\circ x_0}) \circ m(V_{y\circ x_0})$ ausdrücken. Auf theoretischer Ebene findet dieser Sachverhalt in der Forderung der Additivität der Mediane ihren Niederschlag: Der Median der Verteilungsfunktion $F_{x\circ y\circ x_0}$ läßt sich als die Summe der beiden Mediane $M(F_{x\circ x_0})$ und $M(F_{y\circ x_0})$ darstellen: $M(F_{x\circ y\circ x_0}) = M(F_{x\circ x_0}) + M(F_{y\circ x_0})$.

Diese Eigenschaften der qualitativen Verteilungsfunktionen legen es nahe, von folgender Definition auszugehen: Eine Familie $\{X_x : x \in A\}$ von Zufallsvariablen auf einem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ ist genau dann eine *Zufallsvariablenrepräsentation* des Quintupels $\langle A, \succeq, \circ, V, x_0 \rangle$, wenn gilt:

1. Die Verteilungsfunktion F_x der Zufallsvariablen X_x nimmt (mit möglicher Ausnahme der "Null") die gleichen Werte wie die qualitative Verteilungsfunktion V_x an. Genauer gilt: Ist $0 \in V_x(A)$, so ist $V_x(A) = F_x(\mathbb{R})$; ist $0 \notin V_x(A)$, so gilt $V_x(A) = F_x(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$.

2. Für $x \in A$ ist der Median der Zufallsvariablen $X_{x \circ x_0}$ eindeutig bestimmt.

3. Bezeichnet $M(F_{x \circ x_0})$ den (eindeutig bestimmten) Median der Verteilung von $X_{x \circ x_0}$, so gilt:

   (a) Für $a, b \in A$ ist $F_a(M(F_{b \circ x_0})) = V_a(b)$.

   (b) Für $a, b \in A$ gilt $a \succeq b \Leftrightarrow M(F_{a \circ x_0}) \geq M(F_{b \circ x_0})$.

   (c) Für $a, b \in A$ gilt $M(F_{a \circ b \circ x_0}) = M(F_{a \circ x_0}) + M(F_{b \circ x_0})$.

Die bislang unerwähnt gebliebene Bedingung (1) enthält die zentrale Forderung, wonach die theoretische Verteilungsfunktion F_x (mit möglicher Ausnahme der Null) keine anderen Funktionswerte als die qualitative Verteilungsfunktion V_x annehmen kann. Die Bedingungen (2) und (3) determinieren den genauen Zusammenhang dieser Abbildungen. Insbesondere stellt die reellwertige Abbildung $x \mapsto M(F_{x \circ x_0})$ eine isotone und additive Repräsentation der extensiven Struktur $\langle A, \succeq, \circ \rangle$ dar. In ähnlicher Weise äußerte sich Luce bereits 1997 zu einer probabilistischen Verallgemeinerung des klassischen Meßgedankens: "One would expect the behavioral theory ... to have the property that some statistic of central tendency, such as the mean or median, behaves algebraically like the corresponding noise-free classical theory" (Luce, 1997, S. 82).

Während mit dem Begriff der Zufallsvariablenrepräsentation kein normativer Anspruch verbunden sein kann, und es vielmehr so ist, daß es eine Vielzahl alternativer Ansätze gibt, läßt sich die Bedeutung obiger Begriffsbildung an einem naheliegenden Anwendungsbeispiel abschätzen: In der heutigen Psychophysik wird oftmals von einer vorgegebenen Funktionsform der psychometrischen Funktion ausgegangen, ohne diese Annahme einer weiteren Prüfung zu unterziehen. So wird oftmals die logistische Gestalt der psychometrischen Funktion postuliert: Für positive reelle Zahlen $a, x > 0$ ist $V_x(a) = [1 + \exp(\lambda(x)(m(x) - a))]^{-1}$. In hierzu konträrer Weise geben die eben formulierten Repräsentationsbedingungen einen theoretischen Rahmen vor, innerhalb dessen eine kritische Reflexion über diese Forderung ermöglicht wird: Werden Bedingungen an das Quintupel $\langle A, \succeq, \circ, V, x_0 \rangle$ formuliert, so daß jede

Zufallsgröße X_x einer (in obigem Sinne verstandenen) Zufallsvariablenrepräsentation einen fest vorgegebenen (etwa logistischen) Verteilungstyp aufweist, so ist es möglich, die Annahme einer festen Funktionsform der psychometrischen Funktion kritisch zu beleuchten.

Obgleich diese Anwendung naheliegt, ist die psychophysische Deutung keineswegs intendiert. So wurde in erster Linie versucht, eine Verallgemeinerung des deterministischen Meßgedankens zu entwickeln, die auf Paarvergleichswahrscheinlichkeiten aufgebaut ist. Diese probabilistische Verallgemeinerung läßt sich auch auf den deterministischen Spezialfall anwenden: Weisen die Paarvergleichswahrscheinlichkeiten lediglich die Werte 0 und 1 auf, so resultieren die Homomorphismen der klassischen extensiven Messung:

5.2 Die Diskussion des deterministischen Spezialfalls

Im deterministischen Spezialfall wird davon ausgegangen, daß die $\{0, 1\}$-wertige qualitative Verteilungsfunktion V_x genau dann den Wert $V_x(a) = 0$ annimmt, wenn die physikalische Reizintensität von x größer als die physikalische Reizintensität von a ist. Insbesondere wird die Bedingung $V_a(a) = 1$ postuliert. Eine Versuchsperson ist somit in der Lage, zwei beliebige Reize a und x perfekt zu diskriminieren: Ist die physikalische Reizintensität von a größer oder gleich der physikalischen Reizintensität von x, so beantwortet die Versuchsperson die Frage "Ist Reiz x intensiver als Reiz a?" stets mit "Nein". Insbesondere erfüllt die qualitative Verteilungsfunktion V_x sowohl die Monotonieforderung "$a \succeq b \Rightarrow V_x(a) \geq V_x(b)$", als auch die Eindeutigkeitsbedingung "$m(V_x) = [x]$".

Daher gehe man im folgenden von einer (in obigem Sinne verstandenen) Zufallsvariablenrepräsentation $\{X_x : x \in A\}$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ aus. Da die Verteilungsfunktion F_x der Zufallsvariablen X_x insbesondere der Repräsentationsbedingung (1) genügt, ist $F_x(\mathbb{R}) = \{0, 1\}$. Dies legt bereits die Gestalt der Verteilungsfunktion F_x fest: Zu jedem Reiz $x \in A$ existiert eine reelle Zahl $\phi(x)$ mit $F_x(t) = 1_{[\phi(x),\infty)}(t)$. Nach Voraussetzung genügen die hierzu eindeutig bestimmten Mediane $M(F_x) = \phi(x)$ den Repräsentationsbedingungen (3a) - (3c): Einerseits bildet die Abbildung ϕ die Reizmenge A isoton und additiv auf die Menge der reellen Zahlen ab, andererseits läßt sich die Paarvergleichswahrscheinlichkeit $V_a(b)$ darstellen als $V_a(b) = F_a(M(F_b)) = F_a(\phi(b))$. Insbesondere wird jeder Reiz a der Grundmenge A durch eine konstante Zufallsvariable X_a repräsentiert: Es ist $X_a = \phi(a)$ P-fast sicher.

Für den Nachweis dieser Behauptung halte man zunächst fest, daß sich die Wahrscheinlichkeit $P\{X_a = \phi(a)\}$ als Differenz der Wahrscheinlichkeiten $P\{X_a \leq \phi(a)\}$ und $P\{X_a < \phi(a)\}$ darstellen läßt. Aufgrund der Dichotomie der Verteilungsfunktion F_a ist $P\{X_a \leq \phi(a)\} = 1$. Der verbleibende Nachweis von $P\{X_a < \phi(a)\} = 0$ ergibt sich aus einer geeigneten Dekomponierung der Menge $\{X_a < \phi(a)\}$: Die triviale Darstellung $\{X_a < \phi(a)\} = \cup_{n\in\mathbb{N}}\{X_a \leq \phi(a) - 1/n\}$ impliziert zusammen mit der σ-Subadditivität des Wahrscheinlichkeitsmaßes P die Abschätzung $P\{X_a < \phi(a)\} \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} F_a(\phi(a) - 1/n)$. Da die einzelnen Summanden identisch gleich "Null" sind, liefert die Positivität des Wahrscheinlichkeitsmaßes P die Behauptung: Es ist $P\{X_x < \phi(a)\} = 0$.

Im deterministischen Spezialfall stellt obige Zufallsvariablenrepräsentation nur eine Paraphrasierung der klassischen extensiven Repräsentation dar. Die klassische extensive Messung ordnet sich unmittelbar in das verallgemeinerte probabilistische Meßkonzept ein. Für Vertreter des anwendungsorientierten Standpunktes ist dieses Ergebnis natürlich uninteressant: Ist eine Versuchsperson in der Lage, zwei beliebige Reize einer Grundmenge A perfekt zu diskriminieren, so können die Versuchspersonenurteile durch eine zweistellige Relation erfaßt und beschrieben werden. Der Rückgriff auf probabilistische Meßstrukturen ist vermeidbar.

5.3 Die Exponentialverteilung als Meßergebnis

Der größte Teil der Meßaktivität in der Psychologie läßt sich unter dem Stichwort "Indexmessung" subsummieren, wie sie typischerweise bei der Intelligenzmessung auftritt und spätestens seit Günther Jauchs Primetime IQ-Test landesweite Verbreitung gefunden hat: Aufgrund der Anzahl der durch eine Person gelösten Aufgaben wird auf das latente Merkmal "Intelligenz" geschlossen. Hierbei wird leicht übersehen, daß das Testergebnis eines Individuums ein zufälliges, nicht notwendigerweise reproduzierbares Ereignis darstellt.

Wenn nun von RTL bekanntgegeben wird, daß die sprichwörtlich "dummen Blondinen" (mit einem Durchschnittswert von 105) tatsächlich sehr viel schlechter als die "schlauen Studenten" abgeschnitten haben (Mittelwert: 117), so gerät dabei leicht in Vergessenheit, daß es sich bei diesen Kennwerten um Erwartungswerte von Zufallsvariablen handelt, und daß die Angabe derartiger Durchschnittswerte nur dann sinnvoll ist, wenn der zugrundeliegende Verteilungstypus samt Varianz bekannt ist. Die Intelligenz RTL-schauender Blondinen läßt sich nur bedingt durch eine Größe wie den Erwartungswert beschreiben; sie manifestiert sich vielmehr in der Angabe der zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeitsverteilung. Werden diese Informationen unterschlagen, läßt sich nicht ausschließen, daß das schlechtere Gruppenergebnis auf das Versagen einiger Weniger zurückzuführen ist. Dieses Problem tritt in besonders ausgeprägter Form bei kleinen Stichproben auf, wie sie von RTL betrachtet wurden: Als Studiogäste traten lediglich 300 Kandidaten aus 10 Sparten auf. Nebenbei bemerkt stellt eine Gruppe von 30 Blondinen noch keine repräsentative Stichprobe dar, die eine Verallgemeinerung auf die Grundgesamtheit zulassen würde.

Meist wird die angesprochene Frage nach dem Verteilungstypus einer Zufallsvariablen unter Zuhilfenahme eines Goodness-of-fit-Tests beantwortet. Diese Tests klären die Frage, ob die empirisch beobachtete Verteilung hinreichend genau an einen vorgegebenen Verteilungstyp angepaßt ist. Unterbleiben derartige Tests, degeneriert die Untersuchung zu einer reinen Zahlenspielerei, die im schlimmsten Falle lediglich die Vorurteile der Auftraggeber bestätigt.

In dieser Arbeit wird eine hierzu konträre meßtheoretische Vorgehensweise gewählt, die nicht auf der Ebene der Zufallsvariablen, sondern auf der Ebene der qualitativen Beobachtungen ansetzt. Stark vereinfacht ist man an komparativen Versuchspersonenurteilen interessiert, die eine Zufallsvariablenrepräsentation fest vorgegebenen Verteilungstyps sicherstellen. Hierbei bedient man sich einer "Top-Down"-Methode, wie sie typischerweise in der Meßtheorie Anwendung findet: Ausgehend von den angegebenen Repräsentationsbedingungen werden in einem ersten Schritt *notwendige* Bedingungen abgeleitet, die einer empirischen Prüfung unterzogen werden können. Diese Vorgehensweise steht in der Tradition des kritischen Rationalismus: Ausgehend von einer Hypothese oder Theorie werden mittels deduktiver Logik falsifizierbare Aussagen oder Vorhersagen abgeleitet.

In einem zweiten Schritt werden diese notwendigen Bedingungen durch technische Axiome angereichert, die zusammen mit den notwendigen Bedingungen *hinreichend* für die angestrebte Repräsentation sind. In diesem Zusammenhang ist auf die enorme Bedeutung von Kapitel 5.1 hinzuweisen: Durch die Formulierung von Repräsentationsbedingungen wurde ein theoretischer Rahmen geschaffen, der eine meßtheoretische Betrachtung erst ermöglicht.

Zur Durchführung dieses Programms setze man eine nichtleere Menge A, eine binäre Relation $\succeq$ auf A, sowie eine binäre Operation $\circ : A \times A \to A$ voraus. Das Reiztripel $\langle A, \succeq, \circ \rangle$ wird im folgenden als physikalische Reizstruktur verstanden, die einem psychophysischen Experiment zugrundegelegt wird. So enthält A beispielsweise Gewichte, die mit Hilfe einer Balkenwaage verglichen werden.

Die in einem Paarvergleichsexperiment beobachteten Diskriminationsleistungen einer Versuchsperson werden in den Abbildungen V_x, $x \in A$, kodiert: Der numerische Wert $V_x(a) \equiv p(a, x)$ gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an, daß sich eine Versuchsperson für a entscheidet, wenn ihr das Reiztupel (a, x) in einer vom Versuchsleiter vorgeschriebenen Art und Weise präsentiert wird. Diese Voraussetzung spiegelt eine Besonderheit psychologischer Experimente wider, die sie von einer Vielzahl physikalischer Untersuchungen unterscheidet: Auch unter kontrollierten Bedingungen, das heißt bei maximaler Ausschaltung von Störvariablen, führt ein psychologisches Experiment meist zu mehreren, sich gegenseitig ausschließenden Ergebnissen, wobei es vor der Durchführung oftmals völlig ungewiß ist, welches Ereignis eintreten wird. Im Hinblick auf das praktische Anliegen, eine quantitative Kenngröße für die mit einem zufälligen Ereignis verbundene Ungewißheit zur Verfügung zu haben, wird versucht, jedem zufälligen Ereignis eine Wahrscheinlichkeit zuzuordnen.

Wird eine Versuchsperson in einem Experiment zur subjektiven Gewichtswahrnehmung aufgefordert, Gewichte hinsichtlich ihrer Schwere zu vergleichen, so ist folgender Versuchsaufbau denkbar: In jedem Durchgang wird die Versuchsperson aufgefordert, den Standardreiz x mit der rechten und den Vergleichsreiz a mit der linken Hand anzuheben. Ein ähnlicher Aufbau ist auch in der Psychoakustik möglich: Das Reizpaar (a, x) wird binaural, das heißt Ton x über den linken und Ton a über den rechten Lautsprecher eines Kopfhörers präsentiert.

In diesem Zusammenhang ist darauf hinzuweisen, daß die Paarvergleichswahrscheinlichkeiten $V_x(a)$ und $V_a(x)$ nicht notwendigerweise komplementär in dem Sinne sind, daß sie sich zu Eins aufaddieren: Hysterese-Effekte werden *nicht* generell ausgeschlossen. Vielmehr werden die folgenden Überlegungen sogar zeigen, daß die Symmetrieforderung $V_x(a) + V_a(x) = 1$ unvereinbar mit der Existenz einer exponentialverteilten Zufallsvariablenrepräsentation ist.

Unter Rückgriff auf den in Kapitel 5.1 geschaffenen theoretischen Rahmen wird im folgenden von einer Struktur $\langle A, \succeq, \circ, V, x_0 \rangle$ ausgegangen, die eine (im Sinne von Kapitel 5.1 verstandene) Zufallsvariablenrepräsentation fest vorgegebenen Verteilungstyps besitzt. Als Verteilungstyp wähle man - weniger empirischen als mathematisch-theoretischen Überlegungen folgend - die Exponentialverteilung: Bekanntlich läßt sich die Exponentialverteilung durch eine Cauchysche Funktionalgleichung charakterisieren: Genügt die Verteilungsfunktion F der positiven Zufallsvariablen X der Cauchyschen Funktionalgleichung $1 - F(s + t) = (1 - F(s))(1 - F(t))$, $s, t > 0$, so ist X exponentialverteilt zu einem positiven Parameter $\lambda > 0$. Entscheidend ist, daß diese Funktionalgleichung in einen funktionalen Zusammenhang zwischen verschiedenen Paarvergleichswahrscheinlichkeiten mündet, der sich als charakteristisch für die Exponentialverteilung erweisen wird.

Die Annahme einer exponentialverteilten Zufallsvariablenrepräsentation läßt sich wie folgt präzisieren: Es sei eine Familie $\{X_x : x \in A\}$ von Zufallsvariablen auf einem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ vorausgesetzt, so daß für beliebige Reize $a, b, x \in A$ gilt:

1. Die Verteilungsfunktion F_x der Zufallsvariablen X_x nimmt (mit möglicher Ausnahme der "Null") die gleichen Werte wie die qualitative Verteilungsfunktion V_x an. Genauer gilt: Ist $0 \in V_x(A)$, so ist $V_x(A) = F_x(\mathbb{R})$; ist $0 \notin V_x(A)$, so gilt $V_x(A) = F_x(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$.

2. Für $x \in A$ ist der Median der Zufallsvariablen $X_{x \circ x_0}$ eindeutig bestimmt. Hierbei ist $x_0 \in A \cup \{o\}$, wobei der Ausdruck $x \circ o$ definiert ist als $x \circ o := x$.

3. Bezeichnet $M(F_{x \circ x_0})$ den (eindeutig bestimmten) Median der Zufallsvariablen $X_{x \circ x_0}$, so gelten für beliebige Reize a und b die folgenden Bedingungen:

   (a) $F_a(M(F_{b \circ x_0})) = V_a(b)$.

   (b) $a \succeq b \Leftrightarrow M(F_{a \circ x_0}) \geq M(F_{b \circ x_0})$.

   (c) $M(F_{a \circ b \circ x_0}) = M(F_{a \circ x_0}) + M(F_{b \circ x_0})$.

4. Zu jedem Reiz a der Grundmenge A existiert eine positive Konstante $\lambda(a) > 0$, so daß die Zufallsvariable X_a exponentialverteilt zum Parameter $\lambda(a)$ ist: Für jede positive reelle Zahl $t > 0$ gilt $F_a(t) = 1 - \exp(-\lambda(a)t)$.

Ausgehend von einer derartigen Repräsentation kann ein System notwendiger (und wie sich zeigen wird auch hinreichender) Bedingungen abgeleitet werden: Da die Exponentialfunktion $t \mapsto \exp(-\lambda(a)t)$ die Menge der positiven reellen Zahlen surjektiv auf das offene Intervall $(0, 1)$ abbildet, entspricht das Bild $F_a(\mathbb{R})$ der Verteilungsfunktion F_a dem halboffenen Intervall $[0, 1)$. Überdies ist die Verteilungsfunktion F_a streng monoton wachsend und genügt für positive reelle Zahlen s und t der Cauchyschen Funktionalgleichung $1 - F_a(s + t) = (1 - F_a(s))(1 - F_a(t))$ (Kapitel 4).

Zunächst läßt sich aus der strengen Monotonie der Abbildung F_x die Isotonie der qualitativen Verteilungsfunktion V_x deduzieren: $a \succeq b \Leftrightarrow V_x(a) \geq V_x(b)$. Obgleich dies eine unbedenkliche, die Alltagsbeobachtungen widerspiegelnde Forderung zu sein scheint, hält diese Einschätzung einer genaueren Reflexion nicht stand. Dazu schwäche man die Isotoniebedingung zunächst wie folgt ab: Für Reize $a, b \in A$ mit $a \succ b$ gilt $V_x(a) > V_x(b)$. Dies stellt vor allem bei der physikalischen Interpretation des Reiztripels $\langle A, \succeq, \circ \rangle$ eine bedenkliche Forderung dar: Reize a und b, die sich hinsichtlich der betrachteten Reizintensität derart gering voneinder unterscheiden, daß sie von einer Versuchsperson als identisch wahrgenommen werden, führen oftmals zu identischen Paarvergleichswahrscheinlichkeiten $V_x(a) = V_x(b)$. So stehen die beiden Reize a (100 Gramm) und b (99 Gramm) zwar in Relation $\succ$, werden sie jedoch in einem Paarvergleichsexperiment mit einem Reiz x (50 Gramm) verglichen, so werden sich identische Wahrscheinlichkeiten $V_x(a) = V_x(b)$ beobachten lassen. Die Isotonie der Abbildung V_x wird somit nur bei Vorliegen einer geeignet gewählten Reizmenge A empirisch bestätigt werden können. Die Notwendigkeit der Isotoniebedingung läßt diesen empirischen Einwand noch gravierender erscheinen: Da die Bedingung $a \succeq b$ äquivalent zur Abschätzung $M(F_{a \circ x_0}) \geq M(F_{b \circ x_0})$ ist, impliziert die strenge Monotonie der Verteilungsfunktion F_x die Äquivalenz $a \succeq b \Leftrightarrow F_x(M(F_{a \circ x_0})) \geq F_x(M(F_{b \circ x_0}))$. Dies zeigt aber wegen Repräsentationsbedingung (3a) bereits die behauptete Isotonie der qualitativen Verteilungsfunktion V_x: $a \succeq b \Leftrightarrow V_x(a) \geq V_x(b)$.

Wie bereits angekündigt führt die Gedächtnislosigkeit der Exponentialverteilung zu einem funktionalen Zusammenhang zwischen verschiedenen Paarvergleichswahrscheinlichkeiten: Die Repräsentationsbedingung $V_x(a \circ b) = F_x(M(F_{a \circ b \circ x_0}))$ impliziert zusammen mit der Exponentialverteilungsform der Abbildung F_x die Darstellung $1 - V_x(a \circ b) = \exp(-\lambda(x) M(F_{a \circ b \circ x_0}))$. Dies läßt sich unter Berücksichtigung von Repräsentationsbedingung (3c) in das Produkt aus $\exp(-\lambda(x) M(F_{a \circ x_0}))$ und $\exp(-\lambda(x) M(F_{b \circ x_0}))$ dekomponieren. Somit ist es aufgrund von Repräsentationsbedingung (3a) gelungen, den funktionalen Zusammenhang

$$1 - V_x(a \circ b) = (1 - V_x(a))(1 - V_x(b)), \quad a, b \in A, \tag{5.1}$$

abzuleiten. Diese sogenannte *qualitative*[3] *Cauchysche Funktionalgleichung* entscheidet wesentlich über die Verteilungsform der repräsentierenden Zufallsvariablen. Probleme bereitet in diesem Zusammenhang die Tatsache, daß empirische Abweichungen von Gleichung (5.1) nicht notwendigerweise auf Verletzungen der qualitativen Cauchyschen Funktionalgleichung hindeuten. Vielmehr lassen sich derartige Unstimmigkeiten oftmals auf Fehler bei der Wahrscheinlichkeitsschätzung zurückführen. Während dies einen großen Interpretationsspielraum eröffnet, ist kein statistisch begründetes Verfahren zur zufallskritischen Auswertung von Gleichung (5.1) bekannt.

Die Bestimmung des Bildbereichs der qualitativen Verteilungsfunktion V_a: Wegen $F_a(\mathbb{R}) = [0, 1)$ liefert Repräsentationsbedingung 1 entweder $V_a(A) = [0, 1)$ oder $V_a(A) = (0, 1)$. Das Bild der Verteilungsfunktion F_a entspricht (mit möglicher Ausnahme der "Null") dem Bild der qualitativen Verteilungsfunktion V_a. Zur Klärung dieses Sachverhalts nehme man an, es sei $0 \in V_a(A)$, es existiere also ein Reiz $x \in A$ mit $V_a(x) = 0$. Hieraus resultiert zusammen mit der qualitativen Cauchyschen Funktionalgleichung (5.1) die Beziehung $V_a(x \circ x) = 0 = V_a(x)$. Da dies aufgrund von (3a) und (3c) äquivalent zu $F_a(M(F_{x \circ x_0}) + M(F_{x \circ x_0})) = F_a(M(F_{x \circ x_0}))$ ist, liefert die strenge Monotonie der Verteilungsfunktion F_a die Gleichung $M(F_{x \circ x_0}) = 0$. Dies steht jedoch im Widerspruch zur Exponentialverteilungsform der Zufallsvariablen $X_{x \circ x_0}$: Der Median einer exponentialverteilten Zufallsvariablen ist positiv!

Als Bild der qualitativen Verteilungsfunktion V_a ergibt sich das offene Einheitsintervall $(0, 1)$: $V_a(A) = (0, 1)$. Zu jeder reellen Zahl λ des offenen Intervalls $(0, 1)$ existiert ein Reiz $b \in A$, so daß b mit Wahrscheinlichkeit λ intensiver als a wahrgenommen wird: $V_a(b) = \lambda$.

Offensichtlich erschwert die Voraussetzung einer derartig reichhaltigen Struktur die Prüfung des Isotonieaxioms, wonach Reize $x, y \in A$ genau dann ungleiche

[3] Das Adjektiv "qualitativ" soll wieder nur zum Ausdruck bringen, daß Gleichung (5.1) prinzipiell einer empirischen Prüfung zugänglich ist.

Wahrscheinlichkeiten $V_a(x) \neq V_a(y)$ hervorrufen, wenn sie sich hinsichtlich der betrachteten Reizintensität voneinander unterscheiden: $x \not\sim y$.

Die Forderung $V_x(A) = (0, 1)$ enthält die weitere (äußerst kritisch zu beurteilende) Bedingung $V_x(a) \notin \{0, 1\}$. Während zu jeder Wahrscheinlichkeit $0 < \lambda < 1$ ein Reiz $a \in A$ existieren muß, der der Bedingung $V_x(a) = \lambda$ genügt, darf die Versuchsperson nicht in der Lage sein, zwei Reize $a, x \in A$ perfekt zu diskriminieren: Für Reize a und x der Grundmenge A ist die Paarvergleichswahrscheinlichkeit $p(a, x)$ stets im *offenen* Einheitsintervall $(0, 1)$ enthalten!

Obgleich das Verbot perfekter Diskrimination eine häufig postulierte Forderung darstellt (beispielsweise wird bei der BTL-Skalierung die Bedingung $p(a, b) \in (0, 1)$ gefordert), ist diese Annahme bei Vorliegen einer *abgeschlossenen* extensiven Struktur $\langle A, \succeq, \circ \rangle$ unplausibel: Während es bei der BTL-Skalierung möglich ist, die Reizmenge A geeignet einzuschränken, ist eine derartige Vorgehensweise in vorliegendem extensiven Fall nicht möglich: Da zu einem beliebigen Ausgangsreiz x stets der größere oder intensivere Reiz $2x := x \circ x$ gebildet werden kann, ist es möglich einen beliebig intensiven Reiz $nx \in A$ zu generieren. Die Reize nx und x werden jedoch ab einer genügend großen Zahl $n \in \mathbb{N}$ perfekt zu diskriminieren sein. So wird jede Versuchsperson in der Lage sein, den 50 Gramm schweren Standardreiz a vom 5000 Gramm schweren Vergleichsreiz $100 \cdot a$ zu unterscheiden: $p(a, 100 \cdot a) = 0$.

Einen möglichen Ausweg bieten die *nicht-abgeschlossenen* extensiven Strukturen an: Während es bei den abgeschlossenen extensiven Strukturen stets möglich ist, zwei Reize $a, b \in A$ zu verknüpfen, ist dies bei den nicht-abgeschlossenen Strukturen nur dann möglich, wenn a und b bestimmten Restriktionen unterliegen. Dies wird durch Einführung einer Teilmenge B des kartesischen Produkts $A \times A$ und einer darauf definierten Abbildung $\circ : B \to A$ gewährleistet.

Während die Bedingung $V_x(a) \notin \{0, 1\}$ falsifizierbar ist, ist die Forderung der Surjektivität der Abbildung V_x ein technisches Axiom, das sich einer direkten empirischen Überprüfung entzieht. Es werden daher im folgenden Bedingungen an das Reiztripel $\langle A, \succeq, \circ \rangle$ formuliert, die die Surjektivität der qualitativen Verteilungsfunktion gewährleisten. Dabei wird sowohl von der qualitativen Cauchyschen Funktionalgleichung (5.1) als auch der Isotonie der Abbildung V_x ausgegangen.

Angenommen das physikalische Reiztripel $\langle A, \succeq, \circ \rangle$ definiert eine extensive Struktur, die den Axiomen *schwache Ordnung* (die Relation $\succeq$ ist konnex und transitiv), *schwache Assoziativität* (für Reize a, b und c ist $(a \circ b) \circ c \sim a \circ (b \circ c)$), *Positivität* (für Reize a und b gilt sowohl $a \circ b \succ a$, als auch $a \circ b \succ b$), *schwache Lösbarkeit* (ist $b \succ a$, so existiert ein Reiz $x \in A$ mit $a \circ x \sim b$ und ein $y \in A$ mit $y \circ a \sim b$), *Unbeschränktheit* (zu jedem Reiz $a \in A$ existiert ein Reiz $b \in A$ mit $a \succ b$) und *Dedekindsche Vollständigkeit* (wird die Grundmenge A in zwei nichtleere, disjunkte Teilmengen $A_1 \prec A_2$ unterteilt, so existiert ein Reiz $a \in A$, so daß jedes Element

$a_1 \prec a$ zur ersten und jedes Element $a_2 \succ a$ zur zweiten Klasse gehört) genügt.

Unter diesen Voraussetzungen existiert gemäß einer trivialen Modifikation des Satzes von Hölder (Anhang A) eine isotone und additive Abbildung ϕ, die die Grundmenge A *surjektiv* auf die Menge $(0, \infty)$ der positiven reellen Zahlen abbildet. Da diese Repräsentation bekanntlich eine Verhältnisskala darstellt, bildet mit ϕ auch jede weitere strukturerhaltende Abbildung ϕ' die Reizmenge A surjektiv auf $(0, \infty)$ ab.

Aufgrund der (durch die Isotonie und qualitative Cauchysche Funktionalgleichung gewährleistete) Antitonie und Multiplikativität der Abbildung $1 - V_x$ stellt die Funktion $\phi_x := -\ln(1 - V_x)$ eine isotone und additive Repräsentation des Tripels $\langle A, \succeq, \circ \rangle$ dar. Da hierdurch die Grundmenge A surjektiv auf das offene Intervall $(0, \infty)$ abgebildet wird, ist auch die qualitative Verteilungsfunktion $V_x : A \rightarrow (0, 1)$ surjektiv: Ist eine genügend reichhaltige physikalische Reizstruktur $\langle A, \succeq, \circ \rangle$ vorausgesetzt, so läßt sich die technische und nicht-beobachtbare Bedingung der Surjektivität der Abbildung $V_x : A \rightarrow (0, 1)$ aus beobachtbaren Eigenschaften der qualitativen Verteilungsfunktion V_x ableiten.

In der abschließend nachzuweisenden Normierungsbedingung $V_{x \circ x_0}(x) = 0.5$ ist der Spezialfall enthalten, daß eine Versuchsperson nicht in der Lage ist, zwei identische Reize zu diskriminieren: $V_x(x) = 0.5$. Für $x_0 \neq o$ kann das Meßmodell dazu verwendet werden, Reihenfolgeeffekte der Reizdarbietung zu modellieren, wie sie beispielsweise in Experimenten zur subjektiven Gewichtswahrnehmung auftreten können: Aufgrund eines Effekts der Händigkeit werden identische Gewichte a und b als ungleich empfunden, wenn a mit der linken und b mit der rechten Hand angehoben wird.

Der Nachweis von $V_{x \circ x_0}(x) = 0.5$ läßt sich problemlos auf die Exponentialverteilungsform der repräsentierenden Zufallsvariablen zurückführen: Aufgrund der trivialen Beobachtung $F_{x \circ x_0}(M(F_{x \circ x_0})) = 0.5$ impliziert Repräsentationsbedingung (3a) die postulierte Normierungsbedingung $V_{x \circ x_0}(x) = 0.5$.

Während viele probabilistische Meßmodelle sehr viel restriktiver von der "Ausbalanziertheit" der Paarvergleichswahrscheinlichkeiten ausgehen (für Reize a und b addieren sich die "komplementären" Paarvergleichswahrscheinlichkeiten $p(a, b) = V_b(a)$ und $p(b, a) = V_a(b)$ zu "Eins"), wird diese Bedingung im folgenden nicht gefordert. Vordergründig läßt sich dieser Verzicht mit dem Bemühen erklären, das Axiomensystem so einfach und allgemein wie möglich zu halten. Die weitere Diskussion wird jedoch zeigen, daß dieses Argument vorliegender Situation nicht gerecht wird, daß der Verzicht auf die Ausbalanziertheit vielmehr mit den strukturellen Gegebenheiten der Meßsituation erklärt werden kann: So läßt sich zeigen, daß die Forderung der Ausbalanziertheit im Widerspruch zu den bereits abgeleiteten notwendigen Bedingungen ist.

Zum Nachweis dieser Behauptung gehe man von einer Familie $\{V_x : x \in A\}$ qualitativer Verteilungsfunktionen auf der Menge A aus, die den folgenden Bedingungen genügt: (1) Für jeden Reiz x der Grundmenge A ist die qualitative Verteilungsfunktion V_x isoton; (2) Für beliebige Reize a, b und x der Grundmenge A gilt der als qualitative Cauchysche Funktionalgleichung bezeichnete funktionale Zusammenhang $1-V_x(a \circ b) = (1-V_x(a))(1-V_x(b))$; (3) Für jeden Reiz x der Grundmenge A bildet die qualitative Verteilungsfunktion V_x die Menge A surjektiv auf das offene Einheisintervall $(0,1)$ ab; (4) Die Paarvergleichswahrscheinlichkeiten sind ausbalanziert; für beliebige Reize a und b der Reizmenge A addieren sich die Wahrscheinlichkeiten $V_a(b)$ und $V_b(a)$ zu “Eins”: $V_a(b) + V_b(a) = 1$.

Unter diesen Voraussetzungen definiere man eine Abbildung $\psi_x : A \to (0,\infty)$ gemäß der Vorschrift $\psi_x(a) := -\ln V_a(x) = -\ln(1-V_x(a))$. Die Wohldefiniert dieser Abbildung resultiert unmittelbar aus der vorausgesetzten Positivität der qualitativen Verteilungsfunktion V_a. Überdies bildet ψ_x die Grundmenge A isoton und additiv auf das offene Intervall $(0,\infty)$ der positiven reellen Zahlen ab. Insbesondere existiert zu beliebigen Reizen x und y eine eindeutig bestimmte positive Konstante $\lambda(x,y)$ mit $\psi_x = \lambda(x,y)\psi_y$. Wegen der aus Bedingung (4) folgenden Normierungsbedingung $V_x(x) = 1/2 = V_y(y)$ gilt $\psi_x(x) = \ln 2 = \psi_y(y)$. Insbesondere kann die Konstante $\lambda(x,y)$ als $\lambda(x,y) = \psi_x(x)/\psi_y(x) = \ln(2)/\psi_y(x)$ dargestellt werden. Dies hat die Darstellung $\psi_x(y) = (\ln 2)^2/\psi_y(x)$ zur Folge: Der reziproke Wert von $\psi_y(x)$ hängt in linearer Weise von $\psi_x(y)$ ab. Zusammen mit der Definition der Abbildung ψ_x folgt

$$1 - V_x(y) = \exp\left(\frac{(\ln 2)^2}{\ln V_x(y)}\right), \quad x, y \in A.$$

Hieraus resultiert zusammen mit der Surjektivität der Abbildung $V_x : A \to (0,1)$ die Gleichung $1 - x = \exp((\ln 2)^2/\ln x)$, $x \in (0,1)$. Die Widersprüchlichkeit dieser Behauptung läßt sich unmittelbar am Beispiel $x = 1/4$ ablesen: $1 - 1/4 \neq \sqrt{2}^{-1}$.

Dies zeigt bereits, daß die Forderung der Ausbalanziertheit der Paarvergleichswahrscheinlichkeiten aufgegeben werden muß. Hysterese-Effekte werden also nicht nur zugelassen, sie werden sogar explizit postuliert: Eine (im Sinne von Kapitel 5.1 verstandene) exponentialverteilte Zufallsvariablenrepräsentation kann nur dann existieren, wenn die Reihenfolge der Reizdarbietung einen Einfluß auf die Versuchspersonenurteile hat. Dieses (zunächst vielleicht etwas überraschende) Ergebnis läßt sich mit einem Hinweis auf die *Schiefe* der Exponentialverteilung begründen: Die Exponentialverteilung stellt keine symmetrische, sondern eine *linkssteile* Verteilung dar. Im Gegensatz dazu läßt sich die Forderung der Ausbalanziertheit *nicht* ad absurdum führen, wenn von der symmetrischen *logistischen Verteilungsform* der repräsentierenden Zufallsvariablen ausgegangen wird (Kapitel 5.5).

Abschließend ist anzumerken, daß mit den angegebenen notwendigen Bedingungen auch die in Kapitel 5.1 geforderten Eigenschaften der qualitativen Verteilungsfunktionen erfüllt sind: (1) Die Abbildung V_x ist monoton: $a \succeq b \Rightarrow V_x(a) \geq V_x(b)$; (2) Der Reiz x stellt einen Median der qualitativen Verteilungsfunktion $V_{x \circ x_0}$ dar: $V_{x \circ x_0}(x) = 1/2$; (3) Die verschiedenen Mediane der Verteilungsfunktion $V_{x \circ x_0}$ sind äquivalent: $V_{x \circ x_0}(a) = 1/2 \Rightarrow a \sim x$. Diese Anmerkungen führen in naheliegender Weise zu der Frage, ob die abgeleiteten notwendigen Bedingungen bereits hinreichend für eine exponentialverteilte Zufallsvariablenrepräsentation sind.

Zur Beantwortung dieser Frage werden die im Zusammenhang mit der Exponentialverteilung abgeleiteten notwendigen Bedingungen zu einer Definition zusammengefaßt: Es sei $A \neq \emptyset$ eine Menge, $\succeq$ eine binäre Relation auf A, $\circ : A \times A \to A$ eine Abbildung, und $x_0 \in A \cup \{o\}$. Zudem existiere zu jedem $x \in A$ eine Abbildung V_x, die jedem Reiz $a \in A$ eine reelle Zahl $V_x(a)$ des *offenen* Einheitsintervalls $(0, 1)$ zuordnet. Das Quintupel $\langle A, \succeq, \circ, V, x_0 \rangle$ wird genau dann als *exponentielle Paarvergleichsstruktur* bezeichnet, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind: (1) Das Tripel $\langle A, \succeq, \circ \rangle$ genügt den Voraussetzungen von Lemma A.1; (2) Für $x \in A$ bildet die Abbildung V_x das Relativ $\langle A, \succeq \rangle$ isoton auf $\mathbb{R}$ ab; (3) Für Reize a, b und x gilt die qualitative Cauchysche Funktionalgleichung $1 - V_x(a \circ b) = (1 - V_x(a))(1 - V_x(b))$; (4) Für $x \in A$ ist die Normierungsbedingung $V_{x \circ x_0}(x) = 1/2$ erfüllt.

Die Frage, ob dieses Axiomensystem bereits hinreichend für die Existenz einer exponentialverteilten Zufallsvariablenrepräsentation ist, kann positiv beantwortet werden: *Ist $\langle A, \succeq, \circ, V, x_0 \rangle$ eine exponentielle Paarvergleichsstruktur, so existiert eine Familie $\{X_x : x \in A\}$ von Zufallsvariablen auf einem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, so daß die oben angegebenen Repräsentationsbedingungen 1 - 4 erfüllt sind.*

Auf den Nachweis dieses Repräsentationstheorems wird hier aus mehreren Gründen verzichtet: Zum einen ist der Nachweis technischer Natur und trägt nur wenig zum Verständnis des Folgenden bei. Andererseits wird in Anhang B ein ausgearbeiteter Beweis präsentiert, bei dem die formalen Aspekte der Meßtheorie in den Vordergrund gerückt werden.

Neben der Konstruktion dieser speziellen (nämlich exponentialverteilten) Zufallsvariablenrepräsentation ist vor allem die Verteilungseindeutigkeit der repräsentierenden Zufallsvariablen von Interesse: *Ist der Verteilungstyp der repräsentierenden Zufallsvariablen durch die Repräsentationsbedingungen 1 - 3 aus Kapitel 5.1 eindeutig bestimmt?*

In diesem Zusammenhang muß an die qualitative "Charakterisierung" der Exponentialverteilung durch R. Suck (1998) erinnert werden. Suck gab zwar qualitative Bedingungen an, unter denen eine exponentialverteilte Zufallsvariablenrepräsentation existiert, er stellte jedoch nicht die Verteilungseindeutigkeit der repräsentierenden Zufallsvariablen sicher: Neben der exponentialverteilten Zufallsvariablenrepräsentation existiert auch eine Weibull-verteilte Repräsentation.

In vorliegender Situation besitzt das Problem der Verteilungseindeutigkeit eine einfache Lösung: *Jede Zufallsvariablenrepräsentation, die den geforderten Repräsentationsbedingungen 1 - 3 genügt, setzt sich notwendigerweise aus exponentialverteilten Zufallsvariablen zusammen.*

Zum Nachweis dieser Behauptung sei eine beliebige Zufallsvariablenrepräsentation $\{X_x : x \in A\}$ der exponentiellen Paarvergleichsstruktur $\langle A, \succeq, \circ, V, x_0 \rangle$ vorausgesetzt. Da sich hieraus sowohl die Positivität der Zufallsvariablen X_x als auch die Cauchysche Funktionalgleichung

$$P\{X_x > s + t\} = P\{X_x > s\}P\{X_x > t\}, \quad s, t > 0,$$

ableiten läßt, resultiert die Exponentialverteilungsform der Zufallsvariablen X_x aus den Invarianzüberlegungen in Kapitel 4.

5.4 Der Bezug zum Weberschen Gesetz

Während die Frage nach der Gültigkeit der qualitativen Cauchyschen Funktionalgleichung eine empirische Frage darstellt, die im jeweiligen Anwendungsfall detailliert geprüft werden muß und keinesfalls pauschal beantwortet werden kann, kann der empirische Gehalt des zugrundegelegten Axiomensystems teilweise dadurch geklärt werden, daß weitere falsifizierbare Bedingungen deduziert werden, die einer experimentellen Prüfung unterzogen werden können, bzw. bereits unterzogen worden sind.

Ausgehend von einer *exponentiellen Paarvergleichsstruktur* $\langle A, \succeq, \circ, V, x_0 \rangle$ läßt sich beispielsweise eine Verallgemeinerung des wohlbekannten *Weberschen Gesetzes* $p(na, nb) = p(a, b)$ deduzieren: Für $n \in \mathbb{N}$ und $a, b \in A$ gilt $p(na, nb \circ x_0) = p(a, b \circ x_0)$. Dabei resultiert der Korrekturterm x_0 aus der Tatsache, daß Effekte der Reihenfolge der Reizdarbietung nicht apriori ausgeschlossen werden. In diesem Zusammenhang sind zwei Punkte von besonderem Interesse: (1) Die im Spezialfall $a = b$ postulierte Behauptung $p(na, na \circ x_0) = p(a, a \circ x_0)$ resultiert unmittelbar aus der Annahme, daß der Korrekturterm x_0 unabhängig vom Vergleichsreiz ist. (2) Im Spezialfall $x_0 = o$ ergibt sich das Webersche Gesetz $p(na, nb) = p(a, b)$: Ist eine Versuchsperson beispielsweise nicht in der Lage, einen 100 Gramm schweren Reiz a von einem 101 Gramm schweren Reiz b zu unterscheiden (nimmt also die Paarvergleichswahrscheinlichkeit $p(a, b)$ den Wert 0.5 an), so kann sie auch nicht zwischen einem 200 Gramm und einem 202 Gramm schweren Reiz differenzieren: Es ist $p(2a, 2b) = 0.5$. Je schwerer (allgemeiner: intensiver) der Standardreiz ist, umso größer muß die Zunahme der Reizstärke ausfallen, damit die Versuchsperson einen ebenmerklichen Unterschied wahrnehmen kann.

Für den Nachweis des verallgemeinerten Weberschen Gesetzes halte man zunächst fest, daß jede *exponentielle Paarvergleichsstruktur* $\langle A, \succeq, \circ, V, x_0 \rangle$ eine Zufallsvariablenrepräsentation besitzt, die aus exponentialverteilten Zufallsgrößen X_x zusammengesetzt ist. Wegen $p(na, nx \circ x_0) = V_{nx \circ x_0}(na)$ führt die qualitative Cauchysche Funktionalgleichung (5.1) zu $1 - p(na, nx \circ x_0) = [1 - V_{nx \circ x_0}(a)]^n$. Also liefert Repräsentationsbedingung (3a) zusammen mit der Exponentialverteilungsform der Zufallsvariablen $X_{nx \circ x_0}$ die Darstellung $p(na, nx \circ x_0) = 1 - \exp(-n\lambda(nx \circ x_0) M(F_{a \circ x_0}))$.

Da der Median der exponentialverteilten Zufallsvariablen $X_{a \circ x_0}$ durch den Ausdruck $M(F_{a \circ x_0}) = \ln(2)/\lambda(a \circ x_0)$ gegeben ist, erhält man zusammen mit der Additivitätsforderung $M(F_{a \circ b \circ x_0}) = M(F_{a \circ x_0}) + M(F_{b \circ x_0})$ die Gleichung $\lambda(nx \circ x_0) = (1/n)\lambda(x \circ x_0)$. Damit vereinfacht sich die Darstellung der Paarvergleichswahrscheinlichkeit $p(na, nx \circ x_0)$ zu $p(na, nx \circ x_0) = 1 - \exp(-\lambda(x \circ x_0) M(F_{a \circ x_0}))$. Dieser Ausdruck stimmt jedoch mit der Paarvergleichswahrscheinlichkeit $p(a, x \circ x_0)$ überein: $p(na, nx \circ x_0) = p(a, x \circ x_0)$.

Nur diejenigen experimentellen Daten müßen einer weiteren Prüfung unterzogen werden, die der Verallgemeinerung des Weberschen Gesetzes genügen. Dies ist insofern problematisch, als das Webersche Gesetz nur eine idealisierte Gesetzmäßigkeit darstellt, die beispielsweise bei sehr niedrigen oder sehr hohen Reizintensitäten empirisch verletzt ist.

Hieraus folgt jedoch im Umkehrschluß nicht, daß die qualitative Cauchysche Funktionalgleichung durch das Webersche Gesetz ersetzt werden kann. Dies wird duch das folgende numerische Beispiel deutlich: A bezeichne die Menge der positiven reellen Zahlen, $\circ$ symbolisiere die numerische Addition und V_x sei definiert als $V_x(a) := \exp(x/a \ln 2) = p(a, x)$. In diesem Fall genügt die $(0,1)$-wertige Abbildung p dem Weberschen Gesetz $p(na, nx) = p(a, x)$, erfüllt jedoch keineswegs den funktionalen Zusammenhang (5.1): $1 - p(1, 1 + 1) \neq (1 - p(1, 1))(1 - p(1, 1))$.

Im Zusammenhang mit der Plausibilität der qualitativen Cauchyschen Funktionalgleichung kann eine weitere Eigenschaft deduziert werden, die sich in vielen Bereichen des alltäglichen Lebens beobachten läßt: Für Reize a und x mit Diskriminationswahrscheinlichkeit $p(a, x \circ x_0) > 0.5$ ist

$$p(a, x \circ x_0) \geq p(a \circ c, x \circ x_0 \circ c) \geq \frac{1}{2}, \quad \forall c \in A.$$

Die Diskriminierbarkeit hängt nicht nur von der Reizdifferenz ab, sie wird auch von den Intensitäten der betrachteten Reize beeinflußt: Während die Reizpaare $(a, x \circ x_0)$ und $(a \circ c, x \circ x_0 \circ c)$ gleiche physikalische Differenzen aufweisen, ist die Diskrimination des intensiveren Reizpaares $(a \circ c, x \circ x_0 \circ c)$ mit größeren Schwierigkeiten verbunden.

Dieses Phänomen läßt sich in vielen Bereichen der Psychologie beobachten: So kann eine Versuchsperson zwar einen 50 Gramm schweren Reiz a sehr gut von einem 10 Gramm schweren Vergleichsreiz x unterscheiden, die Diskrimination eines

1050 Gramm schweren Reizes $a \circ c$ und eines 1010 Gramm schweren Reizes $x \circ c$ ist hingegen nahezu unmöglich. Versuchspersonenurteile sind in diesem Sinne nicht translationsinvariant.

Für den Nachweis dieser Behauptung gehe man wieder von einer expontialverteilten Zufallsvariablenrepräsentation $\{X_x : x \in A\}$ aus. Gemäß der Definition der Abbildung $V_{x \circ x_0 \circ c}$ liefert Repräsentationsbedingung (3a) die Gleichung $p(a \circ c, x \circ x_0 \circ c) = F_{x \circ x_0 \circ c}(M(F_{a \circ c \circ x_0}))$. Daher impliziert die Funktionsform der Abbildung $F_{x \circ x_0 \circ c}$ den Ausdruck $p(a \circ c, x \circ x_0 \circ c) = 1 - \exp(-\lambda(x \circ x_0 \circ c) M(F_{a \circ x_0 \circ c}))$. Da sich der Median $M(F_{x \circ x_0 \circ c})$ gemäß der Formel $M(F_{x \circ x_0 \circ c}) = \ln 2 / \lambda(x \circ x_0 \circ c)$ berechnen läßt, führt die Additivitätsforderung zu

$$p(a \circ c, x \circ x_0 \circ c) = 1 - \exp\left(-\ln 2 \frac{M(F_{a \circ x_0}) + M(F_{c \circ x_0})}{M(F_{x \circ x_0}) + M(F_{c \circ x_0})}\right). \tag{5.2}$$

Die vorausgesetzte Abschätzung $p(a, x \circ x_0) > 1/2$ liefert zusammen mit der Normierungsforderung $p(x, x \circ x_0) = 1/2$ die Ungleichung $V_{x \circ x_0}(a) > V_{x \circ x_0}(x)$, also auch die Abschätzung $F_{x \circ x_0}(M(F_{a \circ x_0})) > F_{x \circ x_0}(M(F_{x \circ x_0}))$. Insbesondere führt die strenge Monotonie der Verteilungsfunktion $F_{x \circ x_0}$ zu $M(F_{a \circ x_0}) > M(F_{x \circ x_0})$. Die Positivität der Mediane liefert zusammen mit Heuser (1991, S. 47, Aufgabe 3) die Abschätzung $M(F_{x \circ x_0})/M(F_{a \circ x_0}) < (M(F_{x \circ x_0}) + M(F_{c \circ x_0}))/(M(F_{a \circ x_0}) + M(F_{c \circ x_0}))$, also auch die Ungleichung $p(a \circ c, x \circ x_0 \circ c) \leq p(a, x \circ x_0)$. Die noch zu zeigende Abschätzung $p(a \circ c, x \circ x_0 \circ c) \geq 1/2$ ergibt sich unmittelbar aus Darstellung (5.2) sowie der Ungleichung $M(F_{a \circ x_0}) > M(F_{x \circ x_0})$.

5.5 Die logistische Verteilung als Meßergebnis

Während die Exponentialverteilung vielfältige Anwendungen in den Ingenieurswissenschaften findet und dort unter anderem zur Beschreibung der Lebensdauer technischer Produkte (Zuverlässigkeitstheorie) oder radioaktiver Atome herangezogen wird, spielt sie nur eine untergeordnete Rolle in der Psychologie. Läßt sich die Eigenschaft der Gedächtnislosigkeit noch oftmals in physiologischen Modellen der Reizverarbeitung verwenden, findet die Exponentialverteilung nahezu keine Anwendung in der Psychophysik.

Im Zusammenhang mit dem Anliegen, qualitative Charakterisierungen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen zu formulieren, ist vor allem die Tatsache von Interesse, daß symmetrische Wahrscheinlichkeitsverteilungen häufig sehr gut an empirische Verteilungen angepaßt werden können. Auch psychometrische Funktionen lassen sich oftmals sehr gut durch die Normalverteilung oder logistische Verteilung approximieren:

$$V_a(b) \equiv p(b, a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{b} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx, \quad b \in \mathbb{R}, \tag{5.3}$$

oder

$$V_a(b) \equiv p(b, a) = \frac{1}{1 + \exp(\lambda(\rho - b))}, \quad b \in \mathbb{R}. \tag{5.4}$$

Im Gegensatz dazu ist die *linkssteile* Exponentialverteilung $t \mapsto 1 - \exp(-\lambda t)$ prinzipiell ungeeignet symmetrische Daten zu beschreiben. Diese fehlende Symmetrie spiegelt sich auch im Wertebereich einer exponentialverteilten Zufallsvariablen wider: So nimmt eine derartige Zufallsvariable X lediglich *positive* Funktionswerte an. Negative Werte treten allenfalls mit Wahrscheinlichkeit 0 ein: $P\{X \leq 0\} = 0$. Hingegen führt die Tatsache, daß symmetrische Wahrscheinlichkeitsverteilungen auch negative Werte mit positiver Wahrscheinlichkeit annehmen, oftmals zu anwendungsbezogenen Problemen: So läßt sich beispielsweise die psychometrische Funktion V_a nur dann durch die logistische Verteilungsfunktion (5.4) beschreiben, wenn auch negative Reizintensitäten zugelassen sind. Dies ist jedoch meist nicht der Fall.

Analoge Probleme treten bei der meßtheoretischen Begründung der logistischen Verteilung auf: Da die eben bewiesene qualitative Charakterisierung der Exponentialverteilung nur dann auf die logistische Verteilung übertragen werden kann, wenn jeder reellen (also insbesondere jeder *negativen* reellen) Zahl t ein empirischer Reiz a_t der Grundmenge A gegenübergestellt wird, stellt sich das Problem der empirischen Anbindung: Wie kann das empirische Relativ $\langle A, \succeq, \circ \rangle$ interpretiert werden, wenn die Positivität der Verknüpfungsoperation $\circ$ aufgegeben wird?

Ein naheliegendes, wenn auch nicht-physikalisches Beispiel entstammt der *Risikomessung*. Hierbei setzt sich die Grundmenge A aus diskreten Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen zusammen. Jede Wahrscheinlichkeitsverteilung wird als Glücksspiel interpretiert, welches einem Geldbetrag $x \in \mathbb{R}$ eine Wahrscheinlichkeit $p(x)$ zuordnet. Die Verknüpfungsoperation $\circ$ wird als Faltung der Wahrscheinlichkeitsverteilungen definiert: Für $p, q \in A$ ist $p \circ q := p * q$. Die resultierende Wahrscheinlichkeitsverteilung $p * q$ gibt die "Auszahlungswahrscheinlichkeiten" an, die sich bei unabhängiger Hintereinanderausführung der Glücksspiele p und q ergeben.

Bei der Interpretation der Relation $\succeq$ sind zwei grundsätzlich verschiedene Positionen denkbar: Im Falle einer objektiven Interpretation stehen die beiden Spiele p und q genau dann in Relation $\succeq$, wenn der bei Glücksspiel p erwartete Geldbetrag mindestens so groß ist, wie der durchschnittliche Gewinn bei Glücksspiel q.

Andererseits kann das Tripel $\langle A, \succeq, \circ \rangle$ auch als psychologische Struktur verstanden werden: Die beiden Spiele p und q stehen genau dann in Relation $\succeq$, wenn die Versuchsperson Glücksspiel q als mindestens so riskant wie Glücksspiel p einschätzt.

Das folgende Beispiel zeigt, daß diese beiden Interpretationen zu unterschiedlichen Ordnungsrelationen führen können: Man betrachte die beiden Zweipunktverteilungen p und q: Die Wahrscheinlichkeitsverteilung p ordnet dem Wert -1 die

Wahrscheinlichkeit 9/10 und dem Wert 10 die Wahrscheinlichkeit 1/10 zu. Andererseits ordnet q dem Wert -100 die Wahrscheinlichkeit 9/10 und dem Wert 1000 die Wahrscheinlichkeit 1/10 zu. Werden die erwarteten (das heißt durchschnittlichen) Gewinne der beiden Spiele verglichen, so steht dem Erwartungswert 1/10 bei Glücksspiel p der Erwartungswert 10 bei Glücksspiel q gegenüber: $q \succ p$. Wird jedoch eine Versuchsperson aufgefordert, das mit den beiden Spielen verbundene Risiko abzuschätzen, so wird sie meist $p \succ q$ urteilen: Obgleich der Gewinn bei Glücksspiel q sehr hoch ist, wird eine Versuchsperson nur selten bereit sein, 100 DM zu riskieren. Der Verlust von 1 DM bei Glücksspiel p stellt hingegen nur ein geringes Risiko dar.

Trotz dieser Interpretation des Reiztripels $\langle A, \succeq, \circ \rangle$ bleibt das Problem der physikalischen Deutung weiterhin offen. Daher wird die folgende meßtheoretische Charakterisierung der logistischen Verteilung nur in Ausnahmefällen Anwendung in der Psychophysik finden. Insbesondere wird die charakteristische "S-Form" psychometrischer Funktionen nur in Ausnahmefällen eine meßtheoretische Begründung erfahren.

Diese unbefriedigende Situation wird in Kapitel 5.7 wiederaufgegriffen: Während dort von einer (physikalisch interpretierbaren) *positiven* extensiven Struktur ausgegangen wird, erfährt der Ausdruck $[1 + \exp(\lambda(\rho - b))]^{-1}$ lediglich für positive reelle Zahlen ρ und b eine inhaltliche Interpretation.

Obgleich die logistische Verteilung nur gering von der Normalverteilung abweicht, ist sie sehr viel einfacher handzuhaben als die, für die mathematische Statistik sehr viel bedeutendere Normalverteilung. Dies läßt sich bereits daran erkennen, daß die Verteilungsfunktion F einer logistisch verteilten Zufallsvariablen X in geschlossener Form darstellbar ist: $F(x) = [1 + \exp(-1/\lambda(x - \mu))]^{-1}$.

Anwendung findet die logistische Verteilung unter anderem in der psychologischen Diagnostik: So wird beispielsweise beim *Rasch-Modell* der Latent-Trait Theorie angenommen, die Differenz von Aufgabenschwierigkeit $\epsilon(x)$ und Personenfähigkeit $\theta(a)$ hänge über die logistische Funktion mit der Lösungswahrscheinlichkeit $P(a, x)$ zusammen:

$$P(a, x) = \frac{1}{1 + \exp(\epsilon(x) - \theta(a))}.$$

Dieses Modell ist vor allem dadurch ausgezeichnet, daß der Vergleich von Personen *unabhängig* von den Testaufgaben erfolgen kann.

Im Zusammenhang mit der meßtheoretischen Begründung der logistischen Verteilung ist vor allem ihre Verwandtschaft zur Exponentialverteilung von Interesse: Während die Exponentialverteilung durch die Cauchysche Funktionalgleichung $1 - F(s + t) = (1 - F(s))(1 - F(t))$ charakterisiert werden kann, ist die logistische

Verteilung durch die Gleichung

$$\frac{F(s+t)}{1-F(s+t)} = \frac{F(s)}{1-F(s)}\frac{F(t)}{1-F(t)}, \quad s,t \in \mathbb{R}, \tag{5.5}$$

determiniert: Es bezeichne X eine Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ mit Verteilungsfunktion F. Genügt F der Funktionalgleichung (5.5), so ist X logistisch verteilt mit Erwartungswert 0 (Kapitel 4).

Die Ableitung des Repräsentationstheorems für die logistische Verteilung geschieht analog zur meßtheoretischen Begründung der Exponentialverteilung: Ausgehend von einer (im Sinne von Kapitel 5.1 verstandenen) *logistisch* verteilten Zufallsvariablenrepräsentation werden mittels deduktiver Logik notwendige Axiome abgeleitet.

Es sei daher eine nichtleere Menge A, eine binäre Relation $\succeq$ auf A, sowie eine binäre Operation $\circ$ auf A vorausgesetzt. Wie in den vorangegangenen Kapiteln werden die in einem Paarvergleichsexperiment beobachteten Diskriminationsleistungen zu mehreren Abbildungen zusammengefaßt. Der numerische Wert $V_x(a) \equiv p(a,x)$ gibt weiterhin die Wahrscheinlichkeit dafür an, daß sich eine Versuchsperson bei Präsentation des Reiztupels (a,x) für a entscheidet.

Zum Quadrupel $\langle A, \succeq, \circ, V\rangle$ existiere eine Familie $\{X_x : x \in A\}$ von Zufallsvariablen, so daß die folgenden Repräsentationsbedingungen erfüllt sind:

1. Die Verteilungsfunktion F_x der Zufallsvariablen X_x nimmt (mit möglicher Ausnahme der "Null") die gleichen Werte wie die qualitative Verteilungsfunktion V_x an. Genauer gilt: Ist $0 \in V_x(A)$, so ist $V_x(A) = F_x(\mathbb{R})$; ist $0 \notin V_x(A)$, so gilt $V_x(A) = F_x(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$.

2. Der Median der Verteilung der Zufallsvariablen X_x ist eindeutig bestimmt.

3. Bezeichnet $M(F_x)$ den (eindeutig bestimmten) Median der Verteilung von X_x, so gelten für beliebige Reize a und b die folgenden Bedingungen:

   (a) $F_a(M(F_b)) = V_a(b)$.

   (b) $a \succeq b \Leftrightarrow M(F_a) \geq M(F_b)$.

   (c) $M(F_{a\circ b}) = M(F_a) + M(F_b)$.

4. Für jeden Reiz a der Grundmenge A ist die Zufallsvariable X_a logistisch verteilt: Es existiert eine positive Konstante $\lambda(a) > 0$ mit

$$F_a(t) = P\{X_a \leq t\} = \frac{1}{1+\exp(\lambda(a)(M(F_a)-t))}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Im Zusammenhang mit der Deduktion des Repräsentationstheorems für die logistische Verteilung ist vor allem die Tatsache von Interesse, daß die Verteilungsfunktion F_a der Funktionalgleichung

$$\frac{F_a(M(F_a)+s+t)}{1-F_a(M(F_a)+s+t)} = \frac{F_a(M(F_a)+s)}{1-F_a(M(F_a)+s)} \frac{F_a(M(F_a)+t)}{1-F_a(M(F_a)+t)}.$$

genügt. Dies stellt eine Verallgemeinerung der Funktionalgleichung (5.5) für den Fall dar, daß der Erwartungswert $M(F_a)$ ungleich Null ist. In Analogie zur Charakterisierung der Exponentialverteilung führt diese Gleichung zu einem funktionalen Zusammenhang zwischen verschiedenen Paarvergleichswahrscheinlichkeiten, der sich als charakteristisch für die logistische Verteilung erweisen wird.

Zunächst kann jedoch aus der strengen Monotonie der Verteilungsfunktion F_x die Isotonie der qualitativen Verteilungsfunktion V_x deduziert werden: Da die qualitative Bedingung $a \succeq b$ äquivalent zur numerischen Abschätzung $M(F_a) \geq M(F_b)$ ist, erhält man zusammen mit der Positivität der Konstanten $\lambda(x)$ die Äquivalenz $a \succeq b \Leftrightarrow \exp(\lambda(x)(M(F_x) - M(F_b))) \geq \exp(\lambda(x)(M(F_x) - M(F_a)))$. Da der Übergang zu den reziproken Werten die Abschätzung umkehrt, folgt zusammen mit Repräsentationsbedingung (4) die Ungleichung $F_x(M(F_a)) \geq F_x(M(F_b))$. Dies zeigt aufgrund von Repräsentationsbedingung (3a) bereits die Isotonie der qualitativen Verteilungsfunktion V_x: $a \succeq b \Leftrightarrow V_x(a) \geq V_x(b)$.

Wie bereits im Zusammenhang mit der Exponentialverteilung festgehalten worden ist, hängt die Gültigkeit des Isotonieaxioms wesentlich von der vorausgesetzten Grundmenge A ab: Wird beispielsweise eine reichhaltige Reizmenge A vorausgesetzt, die zudem ähnliche Reize $a, b \in A$ mit $V_a(b) \approx 0.5$ enthält, so stellt die Isotonieforderung eine kritische Bedingung dar, die leicht zu falsifizieren ist.

Der eben angesprochene Bildbereich der qualitativen Verteilungsfunktion V_x ist durch die Repräsentationsbedingungen eindeutig festgelegt: Die geforderte Repräsentationsbedingung (1) impliziert zusammen mit der Surjektivität der Verteilungsfunktion $F_x : \mathbb{R} \to (0,1)$ die Reichhaltigkeitsbedingung $V_x(A) = (0,1)$: Zu jeder reellen Zahl λ des Einheitsintervalls $(0,1)$ existiert ein Reiz $a \in A$, so daß a mit Wahrscheinlichkeit λ intensiver als der Standardreiz x wahrgenommen wird: $V_x(a) = \lambda$.

Die inhärente Bedingung $V_x(a) \notin \{0,1\}$ wurde bereits ausführlich in Kapitel 5.3 diskutiert. Die dort vorgetragene Kritik überträgt sich unmittelbar auf die Charakterisierung der logistischen Verteilung.

Überdies existiert aufgrund der Reichhaltigkeitsforderung $V_x(A) = (0,1)$ ein Reiz $y \in A$, den die Versuchsperson nicht vom Standardreiz x unterscheiden kann: $V_x(y) = 1/2$. Wegen Repräsentationsbedingung (3a) ist dies unter anderem für $y = x$ der Fall: $V_x(x) = 1/2$. Hieran wird deutlich, daß in vorliegendem Kapitel nur der spezielle Fall betrachtet wird, daß eine Versuchsperson nicht in der Lage ist, zwei identische Reize voneinander zu unterscheiden. Effekte der Reihenfolge der Reizdarbietung werden im folgenden nicht berücksichtigt. Gleichwohl lassen sich Hystereseeffekte durch eine naheliegende Modifikation des Axiomensystems integrieren.

Während die bislang abgeleiteten notwendigen Bedingungen bereits im Zusammenhang mit der qualitativen Charakterisierung der Exponentialverteilung deduziert werden konnten, ist das nachfolgende Axiom charakteristisch für die logistische Wahrscheinlichkeitsverteilung: Ähnlich der qualitativen Cauchyschen Funktionalgleichung enthält es einen funktionalen Zusammenhang zwischen verschiedenen Paarvergleichswahrscheinlichkeiten.

Zur Ableitung dieser Funktionalgleichung seien beliebige Reize a, b und x der Grundmenge A vorausgesetzt. Die geforderte Repräsentationsbedingung (3a) impliziert zusammen mit der logistischen Verteilungsform der Abbildung F_x den Ausdruck $V_x(x \circ a \circ b) = [1 + \exp(\lambda(x)(M(F_x) - M(F_{x \circ a \circ b})))]^{-1}$. Dies läßt sich unter Berücksichtigung von Bedingung (3c) zu $V_x(x \circ a \circ b) = [1 + \exp(-\lambda(x)(M(F_a) + M(F_b)))]^{-1}$ umformen. Der Quotient $V_x(x \circ a \circ b)[1 - V_x(x \circ a \circ b)]^{-1}$ stimmt also insbesondere mit dem Wert der Exponentialfunktion $t \mapsto \exp(t)$ an der Stelle $t = \lambda(x)(M(F_a) + M(F_b))$ überein. Da dies jedoch dem Produkt der beiden Wettchancen $V_x(x \circ a)[1 - V_x(x \circ a)]^{-1}$ und $V_x(x \circ b)[1 - V_x(x \circ b)]^{-1}$ entspricht, resultiert der funktionale Zusammenhang

$$\frac{V_x(x \circ a \circ b)}{1 - V_x(x \circ a \circ b)} = \frac{V_x(x \circ a)}{1 - V_x(x \circ a)} \frac{V_x(x \circ b)}{1 - V_x(x \circ b)}, \quad a, b, x \in A. \tag{5.6}$$

Während die (in Kapitel 5.3 postulierte) qualitative Cauchysche Funktionalgleichung $1 - V_x(a \circ b) = (1 - V_x(a))(1 - V_x(b))$ zum Weberschen Gesetz $V_{nx}(na) = V_x(a)$ führte, ist ein derartiger Schluß hier nicht möglich. Daher setze man im folgenden (versuchsweise) das Webersche Gesetz als gegeben voraus: Für $a, x \in A$ und $n \in \mathbb{N}$ gelte $V_{nx}(na) = V_x(a)$. In dieser Situation ergibt sich aufgrund der logistischen Verteilungsform der repräsentierenden Zufallsvariablen die Gleichung

$$\frac{1}{1 + \exp(\lambda(nx)(M(F_{nx}) - M(F_{na})))} = \frac{1}{1 + \exp(\lambda(x)(M(F_x) - M(F_a)))}.$$

Hieraus resultiert zusammen mit der Additivitätsforderung (3c) die Beziehung

$$n\lambda(nx) = \lambda(x).$$

Insbesondere nimmt die Streuung der repräsentierenden Zufallsvariablen mit wachsendem Erwartungswert zu:

$$Var(X_{nx}) = \frac{\pi^2}{3\lambda(nx)^2} = \frac{\pi^2 n^2}{3\lambda(x)} = n^2 Var(X_x).$$

Wohlgemerkt gilt dies nur bei Gültigkeit des Weberschen Gesetzes $V_{nx}(na) = V_x(a)$.

Mit der Reichhaltigkeitsforderung $V_x(A) = (0,1)$ ist eine weitere Schwierigkeit verbunden, die bereits in Kapitel 5.3 aufgetreten ist: Obgleich sie notwendigerweise aus den Repräsentationsbedingungen folgt, handelt es sich um eine technische Forderung, die sich einer direkten empirischen Überprüfung entzieht. Dies führt in Analogie zur qualitativen Charakterisierung der Exponentialverteilung zu Bedingungen, die die Gültigkeit der Reichhaltigkeitsforderung $V_x(A) = (0,1)$ sicherstellen.

In diesem Zusammenhang wird die extensive Struktur $\langle A, \succeq, \circ \rangle$ aus Kapitel 5.3 im wesentlichen durch zwei Axiome ergänzt: Zum einen wird die Existenz eines *neutralen Elements* $a_0 \in A$ gefordert: Es existiert ein $a_0 \in A$, so daß für alle $a \in A$ gilt: $a \circ a_0 \sim a \sim a_0 \circ a$. Andererseits wird zu jedem Reiz $a \in A$ ein *inverses Element* $a' \in A$ vorausgesetzt, so daß die Äquivalenz $a \circ a' \sim a_0$ erfüllt ist. Grob gesprochen wird also die Halbgruppenstruktur aus Kapitel 5.3 durch die Aufnahme neutraler und inverser Elemente zu einer *Gruppenstruktur* modifiziert.

Diese scheinbar geringfügigen Änderungen lassen eine psychophysische Anwendung unmöglich erscheinen: Während die (schwache) Assoziativität eine unproblematische Bedingung darstellt, läßt sich die Gruppenstruktur nur in wenigen (künstlichen) Anwendungsbeispielen aufdecken. Mit der Gruppenstruktur wird eine Forderung aufgestellt, die in der klassischen Meßtheorie spätestens seit Hölder (1901) als unnötig restriktiv angesehen wird: Extensive Messung ist auch bei Vorliegen einer Halbgruppenstruktur möglich.

Der Nachweis des Repräsentationssatzes für die logistische Wahrscheinlichkeitsverteilung basiert nicht nur auf den Gruppenaxiomen, es wird sogar von der Existenz einer isotonen und additiven Abbildung Gebrauch gemacht, die die Reizmenge A *surjektiv* auf die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen abbildet. Die Forderung einer derartigen Abbildung hat weitreichende Konsequenzen:

Es ist unmittelbar einleuchtend und hinlänglich bekannt, daß aus der Existenz einer homomorphen Abbildung ϕ die *schwache Ordnung*, *schwache Assoziativität* sowie *Monotonie* des Tripels $\langle A, \succeq, \circ \rangle$ abgeleitet werden kann. Unter Berücksichtigung der Surjektivität der Abbildung ϕ lassen sich weitere Bedingungen wie etwa die bereits angesprochenen Gruppenaxiome ableiten: Aufgrund der Surjektivität der Abbildung ϕ existiert ein $a_0 \in A$ mit $\phi(a_0) = 0$. Wegen $\phi(a \circ a_0) = \phi(a) + \phi(a_0) = \phi(a)$ stellt a_0 ein *neutrales Element* der Reizstruktur $\langle A, \succeq, \circ \rangle$ dar: Für $a \in A$ gilt $a \circ a_0 \sim a_0 \circ a \sim a$. Andererseits existiert zu jedem Reiz $a \in A$ ein Reiz $a' \in A$ mit $\phi(a') = -\phi(a)$. Daher ist $\phi(a \circ a') = \phi(a) + \phi(a') = 0 = \phi(a_0)$: Zu jedem Element a der Grundmenge A existiert ein *inverser Reiz* a', der der Bedingung $a \circ a' \sim a' \circ a \sim a_0$ genügt. Eine ähnliche Argumentation zeigt die Notwendigkeit des *Lösbarkeitsaxioms*: Sind Reize a und b mit $b \succ a$ vorausgesetzt, so gilt $\phi(b) > \phi(a)$. Daher existiert unter Berücksichtigung der Surjektivität der Abbildung ϕ ein Reiz x in A mit $\phi(b) = \phi(a) + \phi(x)$. Insbesondere existiert zu einem Reizpaar $b \succ a$ ein Reiz

$x \in A$ mit $a \circ x \sim b$. Die Tatsache, daß zu jeder positiven reellen Zahl $\lambda > 0$ eine kleinere positive Zahl ρ konstruiert werden kann, läßt sich wie folgt auf die extensive Struktur $\langle A, \succeq, \circ \rangle$ übertragen: Ist $a \succ a_0$, so existiert ein Reiz $b \in A$ mit $a \succ b \succ a_0$. Eine ähnliche Überlegung zeigt, daß auch die *Dedekindsche Vollständigkeit* der reellen Zahlen auf das Tupel $\langle A, \succeq \rangle$ übertragen werden kann: Wird die Grundmenge A in zwei nichtleere, disjunkte Teilmengen $A_1 \prec A_2$ unterteilt, so existiert ein Reiz $a \in A$, so daß jedes Element $a_1 \prec a$ zur ersten und jedes Element $a_2 \succ a$ zur zweiten Klasse gehört.

Diese Bedingungen sind nicht nur notwendig, sondern sogar hinreichend für die Existenz einer strukturerhaltenden Abbildung ϕ, die die Grundmenge A surjektiv auf $\mathbb{R}$ abbildet: Aufgrund des Repräsentationssatzes von Hölder kann zunächst die Menge P der positiven Reize $a \succ a_0$ strukturerhaltend und surjektiv auf das offene Intervall $(0, \infty)$ der positiven reellen Zahlen abgebildet werden. Wegen der vorausgesetzten Gruppenstruktur ist es möglich, diese Abbildung zu einer isotonen, additiven und surjektiven Abbildung $\phi : A \to \mathbb{R}$ fortzusetzen (Anhang A).

Wird überdies von der qualitativen Funktionalgleichung (5.6) sowie der Isotonie der Abbildung V_x ausgegangen, so impliziert die geforderte Reichhaltigkeit der extensiven Struktur $\langle A, \succeq, \circ \rangle$ die Surjektivität der qualitativen Verteilungsfunktion V_x: Für jeden Reiz $x \in A$ bildet V_x die Grundmenge A *surjektiv* auf das offene Einheitsintervall ab. Beweis: Aufgrund der Isotonie und Multiplikativität der Abbildung $\varphi_x : a \mapsto V_x(x \circ a)[1 - V_x(x \circ a)]^{-1}$ stellt die Abbildung $\phi_x := \ln \circ \varphi_x$ eine isotone und additive Repräsentation des Tripels $\langle A, \succeq, \circ \rangle$ dar. Da hierdurch die Grundmenge A surjektiv auf die Menge der reellen Zahlen abgebildet wird, bildet φ_x die Menge A surjektiv auf das offene Intervall der positiven reellen Zahlen ab. Dies impliziert bereits die Reichhaltigkeitsbedingung $V_x(A) = (0, 1)$.

Somit ist es also möglich, die technische und nicht-beobachtbare Bedingung der Surjektivität der Abbildung V_x aus einfacheren, zum Teil beobachtbaren Bedingungen abzuleiten. Dies ändert jedoch nichts an der Tatsache, daß die Reizstruktur $\langle A, \succeq, \circ \rangle$ allzu restriktive Bedingungen enthält, die zumindest psychophysische Anwendungen unmöglich erscheinen lassen. Dieser Sachverhalt führt in Kapitel 5.7 zu einer Abschwächung des Axiomensystems: So wird beispielsweise die Gruppe zu einer Halbgruppe modifiziert. Im Gegenzug werden die Repräsentationsbedingungen abgeschwächt: Der logistischen Verteilungsfunktion $t \mapsto F_x(t)$ wird nur noch für positive reelle Zahlen $t > 0$ eine inhaltliche Bedeutung beigemessen.

Wird hingegen die Dedekind vollständige, angeordnete Gruppe $\langle A, \succeq, \circ \rangle$ zugrundegelegt, so determinieren die Eigenschaften der qualitativen Verteilungsfunktion V_x die Funktionsform der Verteilungsfunktion F_x auf ganz $\mathbb{R}$: Es sei $A \neq \emptyset$ eine Menge, $\succeq$ eine binäre Relation auf A, sowie $\circ : A \times A \to A$ eine binäre Operation auf A. Zu jedem $x \in A$ sei V_x eine Abbildung, die jedem Reiz $a \in A$ eine reelle Zahl $V_x(a)$ des offenen Einheitsintervalls $(0,1)$ zuordnet. Das Quadrupel $\langle A, \succeq, \circ, V\rangle$ wird genau dann als *logistische Paarvergleichsstruktur* bezeichnet, wenn sie den folgenden Axiomen genügt: (1) Das Tripel $\langle A, \succeq, \circ\rangle$ ist eine schwach geordnete, monotone, schwach lösbare, Dedekind-vollständige Gruppe mit neutralem Element a_0, so daß für $a \succ a_0$ ein Reiz $b \in A$ existiert mit $a \succ b \succ a_0$. (2) Die Abbildung V_x bildet das Relativ $\langle A, \succeq\rangle$ isoton auf $\mathbb{R}$ ab. (3) Für Reize a, b und x gilt der funktionale Zusammenhang (5.6). (4) Für jeden Reiz $x \in A$ gilt die Normierungsbedingung $V_x(x) = 1/2$.

Das Repräsentationstheorem läßt sich nun in folgender Form angeben: *Jede logistische Paarvergleichsstruktur $\langle A, \succeq, \circ, V\rangle$ weist eine logistische Zufallsvariablenrepräsentation $\{X_x : x \in A\}$ auf.* Für den Nachweis dieser Behauptung sei der an mathematischen Details interessierte Leser auf Anhang C verwiesen.

Neben der Konstruktion dieser logistischen Zufallsvariablenrepräsentation ist vor allem die Verteilungseindeutigkeit der repräsentierenden Zufallsvariablen von Interesse: Determinieren die Axiome der logistischen Paarvergleichsstruktur den Verteilungstypus der repräsentierenden Zufallsvariablen?

Zur Beantwortung dieser Frage gehe man von einer Zufallsvariablenrepräsentation $\{X_x : x \in A\}$ aus, die den Repräsentationsbedingungen 1 - 3 aus Kapitel 5.1 genügt. Da die Abbildung $x \mapsto M(F_x)$ isoton und additiv ist, bildet sie die Menge A surjektiv auf $\mathbb{R}$ ab. Insbesondere existieren zu beliebigen reellen Zahlen s und t Reize a und b der Grundmenge A mit $M(F_a) = s$ und $M(F_b) = t$. Der Quotient $F_x(M(F_x)+s+t)[1-F_x(M(F_x)+s+t)]^{-1}$ läßt sich also aufgrund von Bedingung (3a) darstellen als $V_x(x \circ a \circ b)[1 - V_x(x \circ a \circ b)]^{-1}$. Da dies jedoch dem Produkt der qualitativen Wettchancen $V_x(x \circ a)[1-V_x(x \circ a)]^{-1}$ und $V_x(x \circ b)[1-V_x(x \circ b)]^{-1}$ entspricht, erfüllt die Verteilungsfunktion F_x der Zufallsvariablen X_x die Funktionalgleichung

$$\frac{F_x(M(F_x)+s+t)}{1-F_x(M(F_x)+s+t)} = \frac{F_x(M(F_x)+s)}{1-F_x(M(F_x)+s)} \frac{F_x(M(F_x)+t)}{1-F_x(M(F_x)+t)}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Hierdurch ist bereits der Quotient $F_x(M(F_x)+t)[1 - F_x(M(F_x)+t)]^{-1}$ eindeutig festgelegt: Es existiert eine, vom Reiz x abhängende reelle Konstante $\lambda(x)$, so daß für $t \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\frac{F_x(M(F_x)+t)}{1-F_x(M(F_x)+t)} = \exp(\lambda(x)t).$$

Eine elementare Umformung liefert nun die Darstellung der Verteilungsfunktion F_x: Die Zufallsvariable X_x ist logistisch verteilt mit Erwartungswert $M(F_x)$.

Abschließend kehre man zu der (bereits in Kapitel 5.3 angesprochenen) Forderung der *Ausbalanziertheit* zurück. Während die Ausbalanziertheit der Paarvergleichswahrscheinlichkeiten unvereinbar mit der Existenz einer exponentialverteilten Zufallsvariablenrepräsentation ist, hat die Gleichung $V_a(b) + V_b(a) = 1$ interessante Auswirkungen auf die logistische Zufallsvariablenrepräsentation. Angenommen für

Reize $a \not\sim b$ der Grundmenge A läßt sich die "Komplementiertheit" der Paarvergleichswahrscheinlichkeiten $V_a(b)$ und $V_b(a)$ beobachten: Es gelte $V_a(b) = 1 - V_b(a)$. Dann zeigt eine elementare Umformung bereits die Identität der beiden Ausdrücke $\exp(-\lambda(a)(M(F_b) - M(F_a)))$ und $\exp(-\lambda(b)(M(F_b) - M(F_a)))$. Hieraus resultiert unmittelbar die Gleichung $\lambda(a)(M(F_b)-M(F_a)) = \lambda(b)(M(F_b)-M(F_a))$, also auch die Identität der beiden Parameter $\lambda(a)$ und $\lambda(b)$: $\lambda(a) = \lambda(b)$. In diesem Zusammenhang ist auf die Bedeutung der Voraussetzung $a \not\sim b$ hinzuweisen: Wegen $a \not\sim b$ ist $M(F_a) \neq M(F_b)$, und somit auch $M(F_b) - M(F_a) \neq 0$!

Umgekehrt läßt sich aus der Identiät $\lambda(a) = \lambda(b)$ die Komplementiertheit der Paarvergleichswahrscheinlichkeiten $V_a(b)$ und $V_b(a)$ deduzieren: $V_a(b) + V_b(a) = 1$: Die Komplementiertheitsforderung $V_a(b)+V_b(a) = 1$ ist äquivalent zur Identität der beiden Parameter $\lambda(a)$ und $\lambda(b)$ und damit auch zur Identität der beiden Varianzen $Var(X_a)$ und $Var(X_b)$: Für Reize $a \not\sim b$ der Grundmenge A gilt

$$V_a(b) + V_b(a) = 1 \Leftrightarrow \lambda(a) = \lambda(b) \Leftrightarrow Var(X_a) = Var(X_b).$$

Insbesondere geht die Verteilungsfunktion F_a mittels einer Translation aus der Verteilungsfunktion F_b hervor: $F_a(t) = F_b(t+M(F_b)-M(F_a))$. Dies führt zur Identität der beiden Paarvergleichswahrscheinlichkeiten $V_a(a \circ c)$ und $V_b(b \circ c)$:

$$V_a(a \circ c) = F_a(M(F_{a\circ c})) = F_b(M(F_{b\circ c})) = V_b(b \circ c).$$

Die Diskriminationswahrscheinlichkeiten hängen somit lediglich von den *Reizdifferenzen*, nicht aber von den tatsächlichen *Intensitäten* ab. Dies zeigt deutlich, daß die Ausbalanziertheit der Paarvergleichswahrscheinlichkeiten unvereinbar mit dem Weberschen Gesetz ist.

Zusammenfassung: In diesem Kapitel wurde ein funktionaler Zusammenhang zwischen verschiedenen Paarvergleichswahrscheinlichkeiten angegeben, der zusammen mit einigen Randbedingungen charakteristisch für die logistische Verteilung ist. Die Anwendbarkeit dieses Ergebnisses ist jedoch aus mehreren Gründen fraglich. (Psychophysische) Anwendungen scheitern vor allem an der vorausgesetzten Gruppenstruktur und der damit verbundenen Existenz *inverser* und *neutraler* Elemente. Diesem Sachverhalt wird in der Folge durch eine Abschwächung der Gruppenstruktur Rechnung getragen.

5.6 Das Problem der empririschen Anbindung

Während in Kapitel 5.5 Annahmen über die Paarvergleichswahrscheinlichkeiten formuliert wurden, die die logistische Verteilungsform der repräsentierenden Zufallsvariablen sicherstellen, ist dieses Ergebnis aus mehreren Gründen unbefriedigend: So ist beispielsweise die Forderung inverser und neutraler Elemente meist nur in künstlichen Situationen zu befriedigen. Diesem Sachverhalt steht die Tatsache gegenüber, daß psychometrische Funktionen häufig sehr gut durch logistische Verteilungsfunktionen approximiert werden können.

Diese Vorbemerkungen führen zu einer Modifikation der logistischen Paarvergleichsstruktur, die unterschiedlichen Kriterien genügt: Einerseites sollte die logistische Verteilungsgestalt erhalten bleiben, andererseits jedoch die empirische Anbindung erleichtert werden. Daher wird in Kapitel 5.7 die Gruppenstruktur aufgegeben und im Gegenzug das Axiom der Positivität wiederaufgenommen. Genauer gesagt wird die schwach geordnete, schwach lösbare und Dedekind-vollständige Gruppe durch eine extensive Struktur $\langle A, \succeq, \circ \rangle$ ersetzt, die epimorph[4] zum offenen Intervall $(0, \infty)$ der positiven reellen Zahlen ist. Das Tripel $\langle A, \succeq, \circ \rangle$ soll den bereits aus Kapitel 5.3 bekannten Axiomen genügen: Die extensive Struktur $\langle A, \succeq, \circ \rangle$ sei schwach geordnet, schwach assoziativ, positiv, schwach lösbar, unbeschränkt und Dedekind-vollständig (Anhang A).

Diese Modifikation hat mehrere Auswirkungen: Zum einen wird die Reichhaltigkeit der Struktur $\langle A, \succeq, \circ \rangle$ derart eingeschränkt, daß eine psychophysische Interpretation ermöglicht wird. Daher wird im folgenden angenommen, das Tripel $\langle A, \succeq, \circ \rangle$ bezeichne eine physikalische Reizstruktur, die einem psychophysischen Experiment zugrundegelegt wird. Andererseits führt die Einschränkung der Grundmenge A zu einer Modifikation der Repräsentation: Zwar läßt sich die extensive Struktur $\langle A, \succeq, \circ \rangle$ weiterhin isoton und additiv in die Menge der reellen Zahlen abbilden. Jedoch bilden diese Homomorphismen die Grundmenge A *nicht* mehr surjektiv auf die Menge $\mathbb{R}$, sondern lediglich surjektiv auf das offene Intervall $(0, \infty)$ der positiven reellen Zahlen ab. Im wesentlichen bedeutet dies, daß jeder positiven Reizintensität λ ein physikalischer Reiz $a_\lambda \in A$ gegenübergestellt wird. Dies zeigt deutlich, daß die empirische Anbindung zwar erleichtert wird, daß es aber auch niemals zu einer vollständigen Prüfung des Axiomensystems kommen wird.

5.7 Eine alternative Charakterisierung der logistischen Verteilung

Während das Tripel $\langle A, \succeq, \circ \rangle$ lediglich die physikalische Reizstruktur beschreibt, die einem psychophysischen Experiment zugrundegelegt wird, finden die aggregierten Versuchspersonenurteile über die $[0, 1]$-wertigen Abbildungen V_x, $x \in A$, Eingang in das Meßmodell. In Analogie zu Kapitel 5.5 wird die Normierungsbedingung

[4] Eine Abbildung $\phi : A \to (0, \infty)$ wird als Epimorphismus bezeichnet, wenn sie die Grundmenge A isoton, additiv und *surjektiv* auf das offene Intervall $(0, \infty)$ abbildet.

$V_x(x) = 0.5$, die Isotonieforderung $a \succeq b \Leftrightarrow V_x(a) \geq V_x(b)$ und die Funktionalgleichung (5.6) vorausgesetzt. Im Zusammenhang mit dieser Funktionalgleichung ist auf eine subtile Besonderheit hinzuweisen, die aus der Positivität der extensiven Struktur $\langle A, \succeq, \circ \rangle$ resultiert: Aufgrund der Positivitätsforderung stehen die Vergleichsreize $x \circ a \circ b$, $x \circ a$ und $x \circ b$ in Relation $\succ$ zum Standardreiz x. Die Funktionalgleichung (5.6) enthält somit lediglich Paarvergleichswahrscheinlichkeiten $V_x(y)$ für die die relationale Beziehung $y \succ x$ erfüllt ist. Dies ist bei Vorliegen der speziellen extensiven Struktur $\langle A, \succeq, \circ \rangle$ aus Kapitel 5.5 anders: Bekanntlich wurde in Kapitel 5.5 eine *nicht-positive* Verknüpfungsoperation $\circ$ vorausgesetzt: Für $a \succ a_0$ existiert ein Element $a' \in A$ mit $a \circ a' \sim a_0$.

Der damit verbundene Informationsverlust wird durch Einführung einer *Symmetriebedingung* kompensiert: Ist $a \prec x$ und $a \circ a' \sim x$, so gelte $1 - V_x(a) = V_x(x \circ a')$.

Diese Forderung läßt sich mit einem Hinweis auf die Symmetrie der logistischen Wahrscheinlichkeitsverteilung begründen: Die Verteilungsfunktion F einer logistisch verteilten Zufallsvariablen ist symmetrisch zum Erwartungswert μ: Für eine beliebige reelle Zahl $s < \mu$ gilt

$$1 - F(s) = 1 - \frac{1}{1 + \exp(-\lambda(s - \mu))} = \frac{1}{1 + \exp(-\lambda(\mu - s))} = F(\mu + (\mu - s)).$$

In Analogie zu Kapitel 5.5 bezeichnet man ein Quadrupel $\langle A, \succeq, \circ, V \rangle$ genau dann als *schwache logistische Paarvergleichsstruktur*, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind: (1) Das Tripel $\langle A, \succeq, \circ \rangle$ ist schwach geordnet, schwach assoziativ, positiv, schwach lösbar, unbeschränkt und Dedekind-vollständig. (2) Die Abbildung V_x bildet das Relativ $\langle A, \succeq \rangle$ isoton auf das offene Einheitsintervall ab. (3) Für Reize a, b und x gilt der funktionale Zusammenhang (5.6). (4) Für jeden Reiz $x \in A$ gilt die Normierungsbedingung $V_x(x) = 0.5$. (5) Die qualitative Verteilungsfunktion V_x ist symmetrisch zu x: Ist $a \prec x$ und $a \circ a' \sim x$, so gilt $1 - V_x(a) = V_x(x \circ a')$.

Wird dieses Axiomensystem mit der Definition einer logistischen Paarvergleichsstruktur verglichen, so fällt zweierlei auf: Während die strukturellen Eigenschaften der Abbildung V_x erhalten bleiben, werden die Anforderungen an das Tripel $\langle A, \succeq, \circ \rangle$ entscheidend abgeschwächt: Die Forderung inverser und neutraler Elemente wird aufgegeben und durch das Positivitätsaxiom ersetzt.

Diese Abschwächung des Axiomensystems hat natürlich Auswirkungen auf die Zufallsvariablenrepräsentation. So sind die repräsentierenden Verteilungsfunktionen nicht mehr auf ganz $\mathbb{R}$, sondern lediglich auf dem offenen Intervall $(0, \infty)$ der positiven reellen Zahlen festgelegt. Dort stimmen sie mit den Verteilungsfunktionen logistisch verteilter Zufallsvariablen überein:

Das Quadrupel $\langle A, \succeq, \circ, V \rangle$ sei eine *schwache logistische Paarvergleichsstruktur*. Dann existiert eine Familie $\{X_x : x \in A\}$ von Zufallsvariablen auf einem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, so daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. Bezeichnet F_x die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen X_x, so stimmt der Wertebereich $F_x((0, \infty))$ mit dem Wertebereich der qualitativen Verteilungsfunktion V_x überein: Es ist $F_x((0, \infty)) = V_x(A)$.

2. Der Median der Zufallsvariablen X_x ist eindeutig bestimmt.

3. Bezeichnet $M(F_x)$ den (eindeutig bestimmten) Median der Verteilung von X_x, so gilt:

   (a) Für $x \in A$ ist der Median $M(F_x)$ positiv: $M(F_x) > 0$.

   (b) $a \succeq b \Leftrightarrow M(F_a) \geq M(F_b)$.

   (c) $M(F_{a \circ b}) = M(F_a) + M(F_b)$.

   (d) $F_a(M(F_b)) = V_a(b)$.

Die Verteilungsfunktionen der repräsentierenden Zufallsvariablen sind auf der Menge der *positiven* reellen Zahlen eindeutig festgelegt: Bezeichnet $\{Y_x : x \in A\}$ eine weitere Familie von Zufallsvariablen die den Repräsentationsbedingungen 1 - 3 genügt, so existiert zu jedem Reiz x der Grundmenge A eine positive Konstante $\lambda(x) > 0$, so daß für $t > 0$ gilt:

$$P\{Y_x \leq t\} = \frac{1}{1 + \exp(\lambda(x)(M(F_x) - t))}.$$

Man beachte: Während es bei den logistischen Paarvergleichsstrukturen möglich ist, die Verteilungsfunktion der repräsentierenden Zufallsvariablen auf ganz $\mathbb{R}$ anzugeben, ist F_x nurmehr auf der Menge der positiven reellen Zahlen festgelegt, wenn von einer *schwachen* logistischen Paarvergleichsstruktur ausgegangen wird. Außerhalb dieses Intervalls ist die Verteilungsfunktion indeterminiert; ihr kommt in diesem Bereich *keine* inhaltliche Bedeutung zu.

Für den Nachweis[5] des Repräsentations- und Eindeutigkeitssatzes wird zunächst eine Abbildung F_x auf $(0, \infty)$ konstruiert, die zu einer geeigneten Verteilungsfunktion auf ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzt werden kann. Dazu gehe man von der Reizmenge A zur Gesamtheit B aller Äquivalenzklassen bezüglich der induzierten Äquivalenzrelation $\sim$ über. Bezeichnet $\phi : A \to (0, \infty)$ eine isotone und additive Repräsentation des Reiztripels $\langle A, \succeq, \circ \rangle$, so wird vermöge der Abbildungsvorschrift $\psi([a]) := \phi(a)$ eine *bijektive* Abbildung $\psi : B \to (0, \infty)$ definiert. Insbesondere ordnet die Umkehrabbildung ψ^{-1} jeder positiven reellen Zahl $t > 0$ genau eine Äquivalenzklasse $[a_t] \in B$ zu. Da auch die qualitative Verteilungsfunktion V_x die Menge A isoton auf das offene

[5] Ein detaillierter Nachweis ist in Anhang D nachzulesen.

Intervall $(0,1)$ abbildet, ist die Abbildung U_x, die einer Äquivalenzklasse $[a] \in B$ den Wert $U_x([a]) := V_x(a)$ zuordnet, wohldefiniert.

Definiert man zu $x \in A$ die Abbildung $F_x := U_x \circ \psi^{-1}$, so bildet F_x das offene Intervall $(0, \infty)$ streng monoton wachsend auf das offene Einheitsintervall $(0,1)$ ab. Nach Definition ordnet F_x der positiven reellen Zahl $\phi(a)$ den Wert $V_x(a) \in (0,1)$ zu. Insbesondere genügt F_x der Normierungsbedingung $F_x(\phi(x)) = V_x(x) = 1/2$.

Zur genaueren Bestimmung der Abbildung F_x betrachte man den funktionalen Zusammenhang (5.6): Dazu gehe man von positiven reellen Zahlen s und t, sowie Reizen a_s und a_t mit $\phi(a_s) = s$ und $\phi(a_t) = t$ aus. Aufgrund der definierenden Eigenschaft der Abbildung F_x stimmt die reelle Zahl $F_x(\phi(x) + s + t)$ mit der Paarvergleichswahrscheinlichkeit $V_x(x \circ a_s \circ a_t)$ überein. Hieraus läßt sich zusammen mit der qualitativen Funktionalgleichung (5.6) die Cauchysche Funktionalgleichung

$$\frac{F_x(\phi(x)+s+t)}{1-F_x(\phi(x)+s+t)} = \frac{F_x(\phi(x)+s)}{1-F_x(\phi(x)+s)} \frac{F_x(\phi(x)+t)}{1-F_x(\phi(x)+t)}, \quad s,t \geq 0, \tag{5.7}$$

ableiten. Man beachte: Zunächst läßt sich Funktionalgleichung (5.7) lediglich für positive reelle Zahlen $s,t > 0$ ableiten. Aufgrund der bereits deduzierten Anfangsbedingung $F_x(\phi(x)) = 1/2$ gilt diese Gleichung dann sogar für alle nicht-negativen reellen Zahlen $s, t \geq 0$. Daher existiert eine (vom Reiz x abhängende) reelle Zahl $\lambda(x) \in \mathbb{R}$, so daß für $s \geq 0$ gilt: $F_x(\phi(x)+s)[1 - F_x(\phi(x)+s)]^{-1} = \exp(\lambda(x)s)$. Eine elementare Umformung liefert nun die Funktionsform der Verteilungsfunktion F_x: Für jede nicht-negative reelle Zahl $s \geq 0$ ist $F_x(\phi(x) + s) = [1 + \exp(-\lambda(x)s)]^{-1}$. Die Substitution des Ausdrucks $t := \phi(x) + s$ führt zur Darstellung

$$F_x(t) = \frac{1}{1 + \exp(\lambda(x)(\phi(x) - t))}, \quad t \geq \phi(x). \tag{5.8}$$

Man beachte: In Analogie zur qualitativen Funktionalgleichung (5.6) enthält Gleichung (5.7) lediglich Funktionswerte $F_x(t)$ für die die Abschätzung $t \geq \phi(x)$ erfüllt ist. Dementsprechend ist die Abbildung F_x nur auf dem Intervall $[\phi(x), \infty)$ determiniert.

Die noch unbekannten Funktionswerte lassen sich nun unter Zuhilfenahme der Symmetrieforderung ableiten. Dazu sei eine positive Zahl $t < \phi(x)$, sowie eine positive reelle Zahl $s > 0$ mit $t + s = \phi(x)$ vorausgesetzt. Unter Ausnutzung der Surjektivität der Repräsentation ϕ wähle man Reize a_s und a_t in A mit $\phi(a_s) = s$ und $\phi(a_t) = t$. Dann impliziert die Additivität der Abbildung ϕ die Äquivalenz $a_t \circ a_s \sim x$. Insbesondere ergibt sich aufgrund der Symmetrieforderung der Ausdruck $V_x(a_t) = 1 - V_x(x \circ a_s)$. Folglich gilt Gleichung (5.8) für *alle* positiven reellen Zahlen $t > 0$.

Ausgehend von der Abbildung F_x wähle man zu einem Reiz x der Grundmenge A eine logistisch verteilte Zufallsvariable X_x auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{A}, P)$: Für eine reelle Zahl $t \in \mathbb{R}$ gelte $P\{X_x \leq t\} = [1 + \exp(\lambda(x)(\phi(x) - t))]^{-1}$.

Diese Zufallsvariablen genügen den geforderten Repräsentationsbedingungen: Zunächst halte man fest, daß der Median der Zufallsvariablen X_x eindeutig bestimmt ist (Repräsentationsbedingung 2): $M(F_x) = \phi(x)$. Hieraus lassen sich unter Berücksichtigung der Isotonie, Additivität und Positivität der Abbildung ϕ sofort die Repräsentationsbedingungen (3a) - (3d) ableiten. Insbesondere folgt unter Zuhilfenahme der Surjektivität der Abbildung ϕ die noch ausstehende Repräsentationsbedingung (1).

Kapitel 6

Anwendung in der Psychophysik: Eine meßtheoretische Ableitung der logistischen Funktionsform der psychometrischen Funktion

Während es in der heutigen Psychophysik meist üblich ist, die logistische Funktionsform der psychometrischen Funktion zu postulieren, zeigt der eben bewiesene Repräsentations- und Eindeutigkeitssatz, daß die logistische Funktion aus einfachen Annahmen über die Paarvergleichswahrscheinlichkeiten deduziert werden kann.

Die folgenden Überlegungen zeigen, daß die in diesem Zusammenhang postulierten Axiome abgeschwächt werden können, wenn bereits ein numerischer Definitionsbereich zugrundegelegt wird. Man beachte: Bei einer psychophysischen Anwendung stellt die Voraussetzung eines numerischen Definitionsbereiches eine unproblematische Annahme dar, ist es dabei doch möglich, einen Reiz mit seiner zugehörigen Reizintensität $x > 0$ zu identifizieren.

Im folgenden sei daher $0 \leq c_1 < c_2 < C$, $I_0 := (c_1, c_2)$ und $I_1 := (0, C)$. Für jedes $x \in I_0$ sei $V_x : I_1 \to (0, 1)$ eine Abbildung, die den folgenden Bedingungen genügt: (1) Für $s, t \in I_1$ gilt $s < t \Rightarrow V_x(s) < V_x(t)$. (2) Es existiere ein $0 < m(x) < C/2$ mit $V_x(m(x)) = 0.5$. (3) Für $s, t \in I_1$ mit $m(x) + s + t \in I_1$ gelte die Funktionalgleichung

$$\frac{V_x(m(x)+s+t)}{1 - V_x(m(x)+s+t)} = \frac{V_x(m(x)+s)}{1 - V_x(m(x)+s)} \frac{V_x(m(x)+t)}{1 - V_x(m(x)+t)}.$$

(4) Für $0 < s < m(x)$ gilt $1 - V_x(s) = V_x(m(x) + (m(x) - s))$. Werden diese Axiome vorausgesetzt, so kann zu jedem Standardreiz $x \in I_0$ eine positive Konstante $\delta(x) > 0$ derart konstruiert werden, daß für alle $s \in I_1$ gilt

$$V_x(s) = \frac{1}{1 + \exp(-\delta(x)(s - m(x)))} \tag{6.1}$$

(Anhang E). In diesem Zusammenhang ist der Bezug zum Birnbaum-Modell der psychologischen Diagnostik unübersehbar: Hierbei wird der Einfluß den die Testaufgabe $x \in X$ auf die Lösungswahrscheinlichkeit $V_x(a)$ hat durch zwei Parameter $\delta(x)$ und $\epsilon(x)$ beschrieben: Es gilt

$$V_x(a) = \frac{1}{1 + \exp(-\delta(x)(\theta(a) - \epsilon(x)))}, \tag{6.2}$$

wobei $\delta(x)$ die Trennschärfe der Aufgabe x, $\epsilon(x)$ die Schwierigkeit der Aufgabe x und $\theta(a)$ die Fähigkeit der Person a bezeichnet. Hamerle und Tutz gaben 1980 eine meßtheoretische Charakterisierung des Birnbaum-Modells an, wobei sie zeigten, daß sich das Birnbaum-Modell aus einer einfachen Funktionalgleichung ableiten läßt: Für $L(x) := \ln[x(1-x)^{-1}]$ gelte

$$\frac{L(V_x(a)) - L(V_x(c))}{L(V_x(b)) - L(V_x(c))} = \frac{L(V_y(a)) - L(V_y(c))}{L(V_y(b)) - L(V_y(c))}. \tag{6.3}$$

In dieser Situation ist die Abbildung V Birnbaum-skalierbar im Sinne von Gleichung (6.2). Ebenso läßt sich die psychometrische Funktion V_x durch Gleichung (6.2) beschreiben, falls es in einem psychophysischen Experiment möglich ist, Funktionalgleichung (6.3) nachzuweisen. Dies hat jedoch nicht notwendigerweise die logistische Funktionsform (6.1) zur Folge: Aufgrund der Unbestimmtheit des "Fähigkeitsparameters" $\theta(a)$ ist auch die Gestalt der psychometrischen Funktion V_x unbekannt. So resultiert beispielsweise für $\theta(a) = \ln(a)$ die Funktion

$$V_x(a) = \frac{a^{\delta(x)}}{\lambda(x) + a^{\delta(x)}}$$

mit $\lambda(x) = \exp(\delta(x)\epsilon(x))$: Trotz offensichtlicher Parallelen läßt sich die von Hamerle und Tutz angegebene meßtheoretische Charakterisierung des Birnbaum-Modells nicht zur Begründung der logistischen Funktionsform der psychometrischen Funktion heranziehen: Die zu Beginn von Kapitel 6 angegebenen Axiome stellen nicht nur die Darstellung (6.2) sicher, sie determinieren auch die Funktionsform der Abbildung θ: Wegen $\theta(a) = a$ resultiert die logistische Funktionsform der psychometrischen Funktion V_x: $V_x(s) = [1 + \exp(-\delta(x)(s - m(x)))]^{-1}$.

Zur Aufklärung des Diskriminationsverhaltens, das sich in der Abbildung δ widerspiegelt, wird eine Zusatzannahme über den Punkt der subjektiven Gleichheit eingeführt: So wird im folgenden angenommen, daß eine Konstante $x_0 \in \mathbb{R}$ existiert, so daß für alle $x \in I_0$ gilt: (1) $0 < x + x_0 < C/2$. (2) $V_x(x + x_0) = 0.5$. Wie in den vorangegangenen Kapiteln stellt x_0 einen Korrekturterm dar, der die Modellierung von Effekten der Reihenfolge der Reizdarbietung ermöglicht. Insbesondere resultiert wegen $m(x) = x + x_0$ die Funktionform

$$V_x(s) = \frac{1}{1 + \exp(-\delta(x)(s - (x + x_0)))}, \quad s \in I_1. \tag{6.4}$$

In dieser Situation läßt sich das Diskriminationsverhalten einer Versuchsperson an der Summe $V_x(a+x_0)+V_a(x+x_0)$ festmachen (Anhang E): Für $a, x \in I_0$ mit $a > x$ gilt:

$$V_x(a+x_0)+V_a(x+x_0)\left\{\begin{array}{c}>\\=\\<\end{array}\right\}1 \Rightarrow \delta(x)\left\{\begin{array}{c}>\\=\\<\end{array}\right\}\delta(a).$$

Insbesondere wird deutlich, daß es für den Spezialfall (6.4) unplausibel ist, von der Ausbalanziertheitsforderung $V_x(a+x_0)+V_a(x+x_0)=1$ auszugehen. Man beachte: Für $\delta(x)=\delta(a)$ hängen die Diskriminationswahrscheinlichkeiten lediglich von den Reizdifferenzen, nicht aber von den tatsächlichen Intensitäten ab:

$$\begin{aligned} V_x(x+y) &= \frac{1}{1+\exp(-\delta(x)(x+y-(x+x_0)))} = \frac{1}{1+\exp(-\delta(x)(y-x_0))} \\ &= \frac{1}{1+\exp(-\delta(a)(y-x_0))} = V_a(a+y). \end{aligned}$$

Resumee: Einerseits ist es möglich, Annahmen über die Paarvergleichswahrscheinlichkeiten anzugeben, die die logistische Funktionsform der psychometrischen Funktion sicherstellen. Wird andererseits von der logistischen Funktionsform (6.4) ausgegangen, so kann gezeigt werden, daß die (oftmals postulierte) Ausbalanziertheitsforderung $V_x(a+x_0)+V_a(x+x_0)=1$ aufgegeben werden muß.

Auf ähnliche Art und Weise läßt sich die in Kapitel 5.3 bewiesene Charakterisierung der Exponentialverteilung dazu verwenden, die exponentielle Funktionsform der psychometrischen Funktion aus Annahmen über die Paarvergleichswahrscheinlichkeiten zu deduzieren:

$$V_x(s) = 1-\exp(-\lambda(x)s), \quad 0 < s < C.$$

Die beiden Charakterisierungen unterscheiden sich vor allem in der zugrundegelegten Funktionalgleichung: So ist es aufgrund der beiden Funktionalgleichungen

$$1-V_x(s+t) = (1-V_x(s))(1-V_x(t))$$

und

$$\frac{V_x(m(x)+s+t)}{1-V_x(m(x)+s+t)} = \frac{V_x(m(x)+s)}{1-V_x(m(x)+s)}\frac{V_x(m(x)+t)}{1-V_x(m(x)+t)}.$$

möglich, zwischen der exponentiellen und logistischen Funktionsform der psychometrischen Funktion zu unterscheiden.

Während in allen bisherigen Überlegungen die Frage nach dem Verteilungstypus der repräsentierenden Zufallsvariablen im Mittelpunkt stand, wurde das eigentliche Problem des probabilistischen Ansatzes noch nicht angesprochen: Ist es möglich, Wahrscheinlichkeiten aus Beobachtungsdaten zu deduzieren? Stillschweigend wurde bislang die pragmatische Haltung eingenommen, die beobachteten relativen Häufigkeiten können als adäquate Schätzungen der Paarvergleichswahrscheinlichkeiten angesehen werden. Diese Geisteshaltung wird im folgenden aufgegeben und durch einen meßtheoretischen Ansatz ersetzt.

Kapitel 7

Paarvergleichswahrscheinlichkeiten als Meßergebnisse

7.1 Die Bedeutung des Gesetzes der großen Zahlen für die Psychologie

Menschliches Verhalten ist oftmals durch mangelnde zeitliche Konstanz ausgezeichnet: Zieht eine Versuchsperson zu einem Zeitpunkt eines Experiments die Alternative a der Alternative b vor, so ist es möglich (und bei geringer subjektiver "Differenz" der Reize a und b sogar wahrscheinlich), daß sie wenig später, unter scheinbar identischen Versuchsbedingungen, die Alternative b der Alternative a vorzieht. In psychophysischen Experimenten lassen sich derartige Inkonsistenzen häufig bei geringer physikalischer Reizdifferenz beobachten. So ist eine Versuchsperson beispielsweise nicht in der Lage, die empfundene Schwere eines 100 Gramm schweren Reizes von der empfundenen Schwere eines 99 Gramm schweren Reizes zu unterscheiden; in einem Paarvergleichsexperiment zur subjektiven Gewichtswahrnehmung wird sich die Versuchsperson willkürlich für einen der beiden Reize entscheiden.

Diese Inkonsistenzen im Verhalten von Versuchspersonen führten in der Vergangenheit zu probabilistischen Meßmodellen. Diese Meßstrukturen bauen nicht mehr auf dem Ergebnis eines Einzelversuchs auf, sondern fassen aggregierte Daten als Primitiva auf. Das wohl bekannteste derartige Meßmodell ist das auf Bradley, Terry und Luce zurüchgehende BTL-Modell: Ist $A \neq \emptyset$ eine Menge und p eine Abbildung des kartesischen Produkts in das Einheitsintervall $[0, 1]$, so sind Bedingungen an das Relativ $\langle A, p \rangle$ gesucht, die die Darstellung

$$p(a, b) = \frac{v(a)}{v(a) + v(b)}, \quad a, b \in A,$$

sicherstellen. Gilt bei endlicher Reizmenge A die Bedingung $p(a, b) + p(b, a) = 1$, so ist die sogenannte Multiplikationsbedingung

$$\frac{p(a,b)}{p(b,a)}\frac{p(b,c)}{p(c,b)}\frac{p(c,a)}{p(a,c)} = 1, \quad a,b,c \in A,$$

sowohl hinreichend, als auch notwendig für die Existenz einer BTL-Skala v. Während dies eine einfache meßtheoretische Charakterisierung des BTL-Modells darstellt, bereitet die praktische Umsetzung dieses Ergebnisses Probleme: Allen voran ist hierbei das Problem der Wahrscheinlichkeitsbestimmung zu nennen: Wie kann einem Reizpaar $(a,b) \in A \times A$ eine Wahrscheinlichkeit $p(a,b) \in [0,1]$ zugeordnet werden, respektive wie kann ein Ausdruck der Form $p(a,b) = \rho$ interpretiert werden? In dieser Frage stehen sich heute vor allem die Vertreter der frequentistischen und subjektiven Interpretation des Wahrscheinlichkeitsbegriffes gegenüber (Kapitel 3).

Während sich die Vertreter der frequentistischen Interpretation des Wahrscheinlichkeitsbegriffes häufig auf das (bereits in Kapitel 3.3 vorgestellte) *Gesetz der großen Zahlen* berufen und dieses als Rechtfertigung für die Verwendung relativer Häufigkeiten ansehen, sei vor einem unreflektierten Gebrauch dieses Ergebnisses gewarnt: Liefert das Gesetz der großen Zahlen brauchbare Abschätzungen für große Durchgangszahlen, kann es bei kleineren Wiederholungszahlen, wie sie häufig in der Psychologie beobachtet werden, zu trivialen Abschätzungen kommen:

$$P^{100}\left\{(x_1,\dots,x_{100}) \in X^{100} : \left|\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} 1_A(x_i) - P(A)\right| \geq \frac{1}{100}\right\} \leq 25.$$

Selbst bei einer Verringerung der Approximationsgüte liefert das Gesetz der großen Zahlen lediglich die Abschätzung

$$P^{100}\left\{(x_1,\dots,x_{100}) \in X^{100} : \left|\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} 1_A(x_i) - P(A)\right| \geq \frac{1}{10}\right\} \leq \frac{1}{4}.$$

Die relative Häufigkeit $\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} 1_A(x_i)$ weicht bei bis zu 25% aller erhobenen Zufallsfolgen $(x_1,\dots,x_{100})$ um mindestens den Wert $1/10$ von der Wahrscheinlichkeit $P(A)$ ab. Problematisch ist in diesem Zusammenhang, daß das Gesetz der großen Zahlen lediglich eine obere Abschätzung für die "Abweichungswahrscheinlichkeit" enthält.

Dieses Problem kann gelöst werden, wenn der Verteilungstyp der zugrundeliegenden Zufallsgrößen bekannt ist. In diesem Fall läßt sich unter Umgehung des Gesetzes der großen Zahlen meist ein sehr viel besseres Ergebnis erreichen: Angenommen die Zufallsvariablen $X_1,\dots,X_{100}$ sind paarweise unabhängig und binomialverteilt zu den Parametern $n = 1$ und $p = 0.6$: Die Zufallsvariable X_i nimmt mit Wahrscheinlichkeit 0.6 den Wert 1 und mit Wahrscheinlichkeit 0.4 den Wert 0 an. Beispielsweise könnte X_i das Ergebnis des i-ten Durchgangs eines mehrstufigen Experiments bezeichnen, wobei mit Wahrscheinlichkeit 0.6 eine richtige Antwort erfolgt. Die Unabhängigkeitsforderung resultiert aus dem Versuchsaufbau: Es wird angenommen, daß die Durchgänge eines mehrstufigen Experiments unabhängig voneinander durchgeführt werden können. Aufgrund dieser Unabhängigkeitsannahme ist die Zufallsvariable $X := X_1 + \ldots + X_{100}$ binomialverteilt zu den Parametern $n = 100$ und $p = 0.6$. Insbesondere läßt sich die "Abweichungswahrscheinlichkeit" $P\{|1/100X - 0.6| \geq 1/10\}$ wie folgt bestimmen:

$$P\left\{\left|\frac{1}{100}X - 0.6\right| \geq \frac{1}{10}\right\} = 1 - \sum_{i=51}^{69} P\{X = i\} = 0.05.$$

Hingegen läßt sich bei unbekanntem Verteilungstyp die Frage nach der Approximationsgüte nur dann zufriedenstellend beantworten, wenn die Durchgangszahl genügend groß gewählt wird. Da dies oftmals unmöglich ist, liefert das Gesetz der großen Zahlen häufig nur grobe Abschätzungen, die keinen Aufschluß über die Genauigkeit der gewonnenen Approximation geben können. Dieses Problem der Beschränktheit der Datenmenge tritt in besonders ausgeprägter Gestalt in der Psychologie auf: Während es in der Physik prinzipiell möglich ist, beliebig viele unabhängige Wiederholungen eines Experiments durchzuführen, ist die Datenerhebung in der Psychologie von der Belastbarkeit und Zeit der Versuchspersonen abhängig. Zudem ist die unabhängige Wiederholung eines Experiments aufgrund von Lern- und Gedächtniseffekten nicht immer möglich. Unter diesen Bedingungen ist aber die Schätzung von Wahrscheinlichkeiten problematisch und möglicherweise mit großen Fehlern versehen.

Ist man anstelle von numerischen Wahrscheinlichkeitszuweisungen lediglich an komparativen Urteilen darüber interessiert, welches von zwei zufälligen Ereignissen wahrscheinlicher ist, so lassen sich die eben beschriebenen Probleme vermeiden. So läßt sich etwa eine Ungleichung der Form $p(a, b) > p(c, d)$ häufig auch dann mit sehr geringer Fehlerwahrscheinlichkeit ableiten, wenn der Stichprobenumfang gering ist.

Ein kleines Gedankenexperiment soll diesen Ansatz verdeutlichen: Angenommen, es werden 200 Zufallszahlen erzeugt, wobei 100 Zufallszahlen binomialverteilt zu den Parametern $p_1 = 0.6$ und $N = 1$, die restlichen Zufallszahlen hingegen binomialverteilt zu den Parametern $p_2 = 0.8$ und $N = 1$ seien. Angenommen, es werden die Werte $\hat{p}_1 = 0.62$ und $\hat{p}_2 = 0.78$ beobachtet: Die theoretische Wahrscheinlichkeit p_1 wird über-, die theoretische Wahrscheinlichkeit p_2 unterschätzt. Anders als bisher ist man nun nicht mehr an der Approximationsgüte dieser Schätzwerte interessiert. Vielmehr ist bei unbekanntem zugrundeliegenden Verteilungstypus die Frage zu klären, ob die beobachtete Ungleichung *statistisch signifikant* ist, ob also die, den Zufallszahlen zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeiten verschieden sind. Dazu wird beispielsweise mit Hilfe des χ^2-Homogenitätstests die Hypothese $H_0 : p_1 = p_2$ gegen die Alternative $H_1 : p_1 \neq p_2$ getestet. Da die Teststatistik

$$\chi^2 = \frac{(38-60/2)^2}{30} + \frac{(62-140/2)^2}{70} + \frac{(22-60/2)^2}{30} + \frac{(78-140/2)^2}{70} \approx 6.1$$

einen Wert im Ablehnungsbereich $\chi^2 > \chi^2_{0.95}(1) = 3.84$ annimmt, ist bei einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0.05$ von einer signifikanten Abweichung von der Nullhypothese $p_1 = p_2$ auszugehen. Dies deutet auf die Gültigkeit der Abschätzung $p_2 > p_1$ hin.

Zusammenfassend läßt sich bislang festhalten: Kleine Datensätze wie sie häufig in der Psychologie betrachtet werden sind zur Schätzung von theoretischen Wahrscheinlichkeiten ungeeignet, sie lassen jedoch oftmals die Ableitung komparativer Aussagen zu.

Eine ähnliche Situation läßt sich bei der subjektiven Interpretation des Wahrscheinlichkeitsbegriffes beobachten: Während Versuchspersonen meist *nicht* in der Lage sind, konsistente subjektive Wahrscheinlichkeitszuordnungen durchzuführen, können sie oftmals verschiedene Ereignisse hinsichtlich ihrer Eintretenswahrscheinlichkeiten vergleichen. Obgleich es einem Fußballexperten nicht möglich sein wird, dem zufälligen Ereignis "Bayern München gewinnt gegen Unterhaching" eine Wahrscheinlichkeit zuzuordnen, wird er in der Lage sein, zu beurteilen, ob das Ereignis "Bayern München gewinnt gegen Unterhaching" wahrscheinlicher ist, als das Ereignis "Schalke gewinnt gegen Dortmund".

7.2 Ein meßtheoretischer Ansatz zur Ableitung von Paarvergleichswahrscheinlichkeiten

Diese keineswegs neuartigen (jedoch oftmals ignorierten) Tatsachen sind für den anwendungsorientierten Naturwissenschaftler entmutigend: Obgleich man vielfach an Wahrscheinlichkeiten zufälliger Ereignisse interessiert ist, bietet weder die frequentistische noch die subjektive Interpretation des Wahrscheinlichkeitsbegriffes eine fundierte Basis für die Zuordnung von Wahrscheinlichkeiten. Beide Zugänge erlauben meist nur den Vergleich verschiedener Ereignisse hinsichtlich ihrer Eintretenswahrscheinlichkeiten, beide Zugänge führen also zunächst nur zu komparativen Begriffen.

Wie bereits in Kapitel 1 herausgearbeitet worden ist, sind damit aber die Voraussetzungen für einen meßtheoretischen Ansatz erfüllt: Da Versuchspersonen oftmals komparative Urteile darüber abgeben können, welches von zwei zufälligen Ereignissen wahrscheinlicher ist, stellt sich die Frage, welchen strukturellen Bedingungen die qualitative Relation "ist wahrscheinlicher als" zu genügen hat, damit eine eindeutig bestimmte strukturerhaltende Abbildung in das Einheitsintervall existiert. Überträgt man dies in die formale Sprache der modernen Meßtheorie, so führt dies zu folgendem Repräsentationsproblem: *Gesucht ist eine qualitative Struktur* $\langle A, R_1, \ldots, R_n \rangle$*, die die Existenz einer eindeutig bestimmten strukturerhaltenden Abbildung* $p : A \times A \rightarrow [0, 1]$ *sicherstellt.* Hierbei wird einerseits von einer nichtleeren Menge A ausgegangen, deren Elemente die Träger der zu messenden Eigenschaft sind. Andererseits werden Relationen $R_1, \ldots, R_n$ vorausgesetzt, die auf empirischen Beobachtungsdaten basieren.

Da dem Vergleich zweier Skalenwerte $p(a, b)$ und $p(c, d)$ nur dann eine inhaltlich-psychologische Bedeutung beigemessen werden kann, wenn eine binäre Relation auf dem kartesischen Produkt $A \times A$ existiert, gehe man im folgenden von einer Teilmenge $\succ_{2,2}$ des kartesischen Produkts A^4 aus. Die Interpretation dieser Relation hängt in entscheidender Weise von der jeweiligen Anwendung ab. Werden beispielsweise Fußballmannschaften $a, b, c, d \in A$ hinsichtlich ihrer Spielstärke verglichen, so bietet sich folgende Deutung an: Das Tupel (a, b) steht genau dann in Relation $\succ_{2,2}$ zum Tupel (c, d), wenn es nach Meinung eines Fußballexperten wahrscheinlicher ist, daß Mannschaft a gegen Mannschaft b gewinnt, als daß c gegen d siegt.

Werden hingegen in einem Paarvergleichsexperiment Gewichte $a, b, c, d \in A$ hinsichtlich ihrer empfundenen Schwere verglichen, so sind mehrere Interpretationen denkbar: Einerseits könnte $\succ_{2,2}$ die subjektive Meinung der Versuchsperson wiedergeben: Es gilt genau dann $(a, b) \succ_{2,2} (c, d)$, wenn es *nach Meinung der Versuchsperson* wahrscheinlicher ist, daß a schwerer als b ist, als daß Reiz c Gewicht d dominiert. Andererseits ist es möglich, die Relation $\succ_{2,2}$ auf das Konzept der relativen Häufigkeit zurückzuführen: Das Reizpaar (a, b) steht genau dann in Relation $\succ_{2,2}$ zum Reizpaar (c, d), wenn es aufgrund der beobachteten relativen Häufigkeiten wahrscheinlicher ist, daß die Versuchsperson a schwerer als b einstuft, als daß sie c schwerer als d beurteilt.

Insbesondere wird im folgenden das Konzept der relativen Häufigkeit nicht aufgegeben. Während es jedoch bislang üblich war, relative Häufigkeiten mit Wahrscheinlichkeiten zu identifizieren, haben relative Häufigkeiten hier nur die Funktion, komparative Urteile zu etablieren.

Das postulierte Absolutskalenniveau der Repräsentation p führt zur Einführung einer weiteren qualitativen Relation auf A. Hierbei ist lediglich auf das im Zusammenhang mit der ordinalen Messung aufgetretene Eindeutigkeitsproblem hinzuweisen (Kapitel 1): Würde keine weitere Relation auf der Menge A existieren, so würde die isotone Repräsentation $p : A \times A \rightarrow [0, 1]$ einen alternativen Homomorphismus $q \neq p$ zur Folge haben: Ist $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ eine streng monoton wachsende Abbildung, so ist mit $p : A \times A \rightarrow [0, 1]$ auch die Komposition $q := h \circ p$ eine isotone Abbildung, die jedem Reiztupel $(a, b) \in A \times A$ eine Zahl $q(a, b)$ des Einheitsintervalls zuordnet.

Die neben $\succ_{2,2}$ vorauszusetzende Relation $\succ_{4,4}$ spiegelt die Tatsache wider, daß die einzelnen Durchgänge eines Experiments unabhängig voneinander durchgeführt werden. So gibt das Produkt $p(a,b)p(c,d)$ die Wahrscheinlichkeit dafür an, daß die Versuchsperson in zwei unabhängig voneinander durchgeführten Durchgängen a intensiver als b und c intensiver als d beurteilt. Diese Interpretation führt zusammen mit der Eindeutigkeitsforderung zur Einführung einer binären Relation $\succ_{4,4}$ auf der Menge A^4. Ein Quadrupel $(a,b,c,d) \in A^4$ steht genau dann in Relation $\succ_{4,4}$ zu einem Quadrupel $(e,f,g,h) \in A^4$, wenn es aufgrund der beobachteten relativen Häufigkeiten wahrscheinlicher ist, daß die Versuchsperson in zwei unabhängig voneinander durchgeführten Durchgängen a intensiver als b und c intensiver als d einstuft, als daß sie e intensiver als f und g intensiver als h einschätzt.

Eine ähnliche Deutung bietet sich bei der subjektiven Interpretation des Wahrscheinlichkeitsbegriffes an: Die Fußballmannschaften (a,b,c,d) und (e,f,g,h) stehen genau dann in Relation $\succ_{4,4}$, wenn es nach Meinung eines Experten wahrscheinlicher ist, daß a gegen b und c gegen d gewinnt, als daß e gegen f und g gegen h siegt. Dabei werden die Behauptungen des Fußballexperten als elliptisch verkürzt angesehen. So ist beispielsweise die Behauptung "a gewinnt gegen b" im Sinne von "Ein Fußballteam von der Spielstärke der Mannschaft a gewinnt gegen ein Fußballteam von der Spielstärke der Mannschaft b" zu verstehen. Durch diesen Kunstgriff wird die Unabhängigkeit der einzelnen Spiele sichergestellt. Urteilt ein Experte beispielsweise $(a,b,a,b) \succ_{4,4} (c,d,e,f)$, so bedeutet dies nicht, daß es seiner Meinung nach wahrscheinlicher ist, daß a zweimal gegen b gewinnt, als daß c gegen d und e gegen f siegt. Vielmehr geht der Experte von zwei identischen Kopien a' und a'' (beziehungsweise b' und b'') der Mannschaft a (beziehungsweise b) aus. Eine Abschätzung der Form $(a,b,a,b) \succ_{4,4} (c,d,e,f)$ ist dann im Sinne von $(a',b',a'',b'') \succ_{4,4} (c,d,e,f)$ zu verstehen.

Neben den Relationen $\succ_{2,2}$ und $\succ_{4,4}$ seien Teilmengen $\succ_{2,4}$ und $\succ_{4,2}$ des sechsfachen kartesischen Produkts A^6 vorausgesetzt. Anstelle von $(a,b,c,d,e,f) \in \succ_{2,4}$ schreibe man etwas suggestiver $(a,b) \succ_{2,4} (e,f,g,h)$. Ebenso wird der Ausdruck $(a,b,c,d,e,f) \in \succ_{4,2}$ durch die Darstellung $(a,b,c,d) \succ_{4,2} (e,f)$ ersetzt. Interpretationen dieser Ausdrücke lassen sich unmittelbar aus den Interpretationen der Relationen $\succ_{2,2}$ und $\succ_{4,4}$ ableiten. So stehen beispielsweise die Fußballmannschaften $(a,b) \in A \times A$ in Relation $\succ_{2,4}$ zu den Mannschaften $(c,d,e,f) \in A^4$, wenn es nach Meinung eines Fußballexperten wahrscheinlicher ist, daß sich a gegen b durchsetzt, als daß c gegen d und e gegen f siegt.

Ausgehend von diesen qualitativen Relationen auf der Reizmenge A werden im folgenden Bedingungen formuliert, so daß eine *strukturerhaltende* Abbildung p des Relativs $\langle A, \succ_{2,2}, \succ_{2,4}, \succ_{4,2}, \succ_{4,4} \rangle$ in das Einheitsintervall $[0,1]$ existiert. In diesem Zusammenhang heißt eine Abbildung p genau dann *strukturerhaltend*, wenn jedem Reiztupel $(x,y) \in A \times A$ eine Zahl $p(x,y) \in [0,1]$ derart zugeordnet wird, daß die

Bedingungen

1. $(a,b) \succ_{2,2} (c,d) \Leftrightarrow p(a,b) > p(c,d)$;

2. $(a,b) \succ_{2,4} (c,d,e,f) \Leftrightarrow p(a,b) > p(c,d)p(e,f)$;

3. $(a,b,c,d) \succ_{4,2} (e,f) \Leftrightarrow p(a,b)p(c,d) > p(e,f)$;

4. $(a,b,c,d) \succ_{4,4} (e,f,g,h) \Leftrightarrow p(a,b)p(c,d) > p(e,f)p(g,h)$

erfüllt sind. Von besonderem Interesse ist hierbei das Skalenniveau der Repräsentation p:

7.3 Das Eindeutigkeitsproblem

Zur Klärung der Eindeutigkeitsfrage nehme man an, ein Reiztupel (a,b) stehe genau dann in Relation $\succ_{2,2}$ zu einem Reiztupel (c,d), wenn auch $(a,b,e,f) \succ_{4,4} (c,d,e,f)$ gilt: Für $a,b,c,d,e,f \in A$ gelte die Äquivalenz

$$(a,b) \succ_{2,2} (c,d) \Leftrightarrow (a,b,e,f) \succ_{4,4} (c,d,e,f). \tag{7.1}$$

Diese unscheinbare und vermeintlich unbedenkliche Konsistenzforderung schränkt nicht nur die zulässigen Transformationen der Repräsentation p ein, sie reduziert auch die möglichen Anwendungen in erheblichem Maße. Dies soll am Beispiel eines Diskriminationsexperiments zur subjektiven Gewichtswahrnehmung expliziert werden. Angenommen, eine Versuchsperson werde in jedem Durchgang eines Forced-Choice-Experiments aufgefordert, zwei Gewichte hinsichtlich der empfundenen Schwere zu vergleichen. Man nehme an, der Versuchsperson werden die Reize a (1000 Gramm), b (100 Gramm), c (20 Gramm) und d (10 Gramm) präsentiert. Dabei wird der Versuchsleiter zweifellos feststellen, daß die Versuchsperson die beiden Reize a und d perfekt zu unterscheiden vermag: Selbst bei 100-maliger unabhängiger Präsentation des Reizpaares (a,d) wird die Versuchsperson den Reiz a stets schwerer als d einstufen. Insbesondere wird der Versuchsleiter zu folgendem Ergebnis gelangen: Es ist ebenso wahrscheinlich, daß in zwei unabhängig voneinander durchgeführten Durchgängen b schwerer als d und d schwerer als a eingestuft wird, wie daß c schwerer als d und d schwerer als a beurteilt wird: $(b,d,d,a) \sim_{2,2} (c,d,d,a)$. Dies hat zusammen mit der Konsistenzforderung (7.1) die Äquivalenz $(b,d) \sim_{2,2} (c,d)$ zur Folge. Ein derartiger Zusammenhang wird sich aber aufgrund der großen physikalischen Differenz der Reize b und c nicht beobachten lassen. Die beobachtete Paarvergleichswahrscheinlichkeit $\hat{p}(b,d)$ wird sich signifikant von der empirischen Paarvergleichswahrscheinlichkeit $\hat{p}(c,d)$ unterscheiden: $(b,d) \succ_{2,2} (c,d)$.

Das *Verbot perfekter Diskrimination* (genauer gesagt die postulierte Konsistenzforderung (7.1)) schlägt sich auch in der Repräsentation p nieder: Genügt die Abbildung $p : A \times A \to [0,1]$ den Repräsentationsbedingungen 1 - 4, so ist $p(a,b) \neq 0$ für beliebige Reize $a, b \in A$. Man beachte: Würde ein Reiztupel $(a,b) \in A \times A$ mit $p(a,b) = 0$ existieren, so würde für Reizpaare $(c,d) \succ_{2,2} (e,f)$ die Gleichung $p(c,d)p(a,b) = p(e,f)p(a,b)$ resultieren. Dies würde aber wegen Repräsentationsbedingung 4 zur Äquivalenz $(c,d,a,b) \sim_{4,4} (e,f,a,b)$ und somit auch zum Widerspruch $(c,d) \sim_{2,2} (e,f)$ führen.

Nebenbei bemerkt läßt sich die Konsistenzforderung (7.1) aus den angegebenen Repräsentationsbedingungen deduzieren, falls eine *positive* Abbildung p vorausgesetzt wird: Zum Nachweis dieser Behauptung gehe man von Elementen a, b, c, d, e, f der Grundmenge A aus. Zunächst halte man fest, daß die qualitative Abschätzung $(a,b) \succ_{2,2} (c,d)$ aufgrund von Repräsentationsbedingung 1 äquivalent zur numerischen Abschätzung $p(a,b) > p(c,d)$ ist. Wegen der Positivität der Abbildung p ist dies äquivalent zur Ungleichung $p(a,b)p(e,f) > p(c,d)p(e,f)$, also auch zur qualitativen Abschätzung $(a,b,e,f) \succ_{4,4} (c,d,e,f)$.

Zur Klärung der Eindeutigkeitsfrage gehe man von zwei normierten Repräsentationen p_1 und p_2 des Relativs $\langle A, \succ_{2,2}, \succ_{2,4}, \succ_{4,2}, \succ_{4,4} \rangle$ aus. Problemlos zeigt man, daß diese Abbildungen durch eine Potenzfunktion ineinander übergeführt werden können: Es existieren positive Konstanten α und β, so daß für beliebige Reize $a, b \in A$ die Gleichung $p_2(a,b) = \beta p_1(a,b)^\alpha$ erfüllt ist. Man nehme nun an, es existieren Reize $a, b, c, d, e, f \in A$, die der Äquivalenz $(a,b) \sim_{2,4} (c,d,e,f)$ genügen: Es gelte $\neg((a,b) \succ_{2,4} (c,d,e,f))$ und $\neg((c,d,e,f) \succ_{4,2} (a,b))$. Insbesondere folgt zusammen mit $p_2 = \beta p_1^\alpha$ die Beziehung

$$\begin{aligned} p_2(c,d)p_2(e,f) &= p_2(a,b) = \beta p_1(a,b)^\alpha = \beta(p_1(c,d)p_1(e,f))^\alpha \\ &= \frac{1}{\beta}(\beta p_1(c,d)^\alpha \beta p_1(e,f)^\alpha) = \frac{1}{\beta} p_2(c,d)p_2(e,f). \end{aligned}$$

Da dies wegen $p_2(c,d) \neq 0 \neq p_2(e,f)$ nur für $\beta = 1$ eintreten kann, lassen sich zwei beliebige Repräsentationen p_1, p_2 des Quintupels $\langle A, \succ_{2,2}, \succ_{2,4}, \succ_{4,2}, \succ_{4,4} \rangle$ durch eine Potenzfunktion der Form $\phi(x) = x^\alpha$ ineinander überführen: Es existiert eine Konstante $\alpha > 0$, so daß für alle $a, b \in A$ die Beziehung $p_2(a,b) = p_1(a,b)^\alpha$ erfüllt ist.

Die geforderte Eindeutigkeit der Repräsentation p läßt sich nun beispielsweise durch Wahl eines geeigneten Anfangswertes sicherstellen. Wird etwa die Anfangsbedingung $p(a,a) = 1/2$ gefordert, so impliziert die soeben abgeleitete Eindeutigkeitsaussage $p_2(a,a) = p_1(a,a)^\alpha$ die Gleichung $1/2 = 1/2^\alpha$. Insbesondere ist die Eindeutigkeit der Repräsentation $p : A \times A \to [0,1]$ sichergestellt.

Im Gegensatz zu der in der Wahrscheinlichkeitstheorie postulierten Normierungsforderung $P(\Omega) = 1$ ist die eben aufgestellte Repräsentationsbedingung mit weitreichenden inhaltlichen Konsequenzen verbunden: Während die Konvention, daß dem sicheren Ereignis der Wert 1 zugeordnet wird, seinen Ausdruck in der Formel $P(\Omega) = 1$ findet, ist die Repräsentationsbedingung $p(a, a) = 0.5$ mit der Annahme verbunden, daß eine Versuchsperson nicht in der Lage ist, zwei identische Reize zu unterscheiden. Insbesondere werden Hystereseeffekte ausgeschlossen, wie sie oftmals in Paarvergleichsexperimenten beobachtet werden können.

Dies führt im folgenden dazu, daß die Repräsentationsbedingung $p(a, a) = 0.5$ durch die allgemeinere Forderung $a \approx b \Leftrightarrow p(a, b) = 0.5$ ersetzt wird. Dabei bezeichnet $\approx$ eine binäre Relation auf A mit folgender Interpretation: Für zwei Reize $a, b \in A$ gilt genau dann $a \approx b$, wenn eine Versuchsperson nicht in der Lage ist, den Standardreiz a vom Vergleichsreiz b zu unterscheiden. In diesem Zusammenhang ist auf die Unterscheidung der beiden Ausdrücke $a \approx b$ und $b \approx a$ hinzuweisen: Wird beispielsweise eine Versuchsperson in einem Paarvergleichsexperiment zur subjektiven Gewichtswahrnehmung aufgefordert, den Standardreiz mit der rechten und den Vergleichsreiz mit der linken Hand anzuheben, so wird der Ausdruck $a \approx b$ wie folgt interpretiert: Wird Gewicht a mit der rechten und Gewicht b mit der linken Hand angehoben, so werden die beiden Reize als identisch wahrgenommen. Dies hat jedoch keineswegs die relationale Beziehung $b \approx a$ zur Folge.

Zusammenfassend läßt sich folgende Eindeutigkeitsaussage festhalten: Unter der Konsistenzbedingung $(a, b) \succ_{2,2} (c, d) \Leftrightarrow (a, b, e, f) \succ_{4,4} (c, d, e, f)$ ist jede Repräsentation des Quintupels $\langle A, \succ_{2,2}, \succ_{2,4}, \succ_{4,2}, \succ_{4,4} \rangle$ eine Log-Intervallskala: Zulässig sind Transformationen der Form $\phi(x) = \beta x^\alpha$ mit fixierten $\alpha, \beta > 0$. Existieren überdies Reize $a, b, c, d, e, f \in A$, die der Äquivalenz $(a, b) \sim_{2,4} (c, d, e, f)$ genügen, so sind nur noch Transformationen der Form $\phi(x) = x^\alpha$ zulässig. Insbesondere existiert dann genau eine Repräsentation p, die der Anfangsbedingung $p(a, a) = 0.5$ genügt. In Anhang F wird nachgewiesen, daß auch die Einführung der Repräsentationsbedingung $a \approx b \Leftrightarrow p(a, b) = 0.5$ das Absolutskalenniveau sicherstellt.

7.4 Die Ableitung notwendiger Bedingungen

Da bei derartigen Eindeutigkeitsaussagen implizit von der Existenz mindestens einer Repräsentation ausgegangen wird, wird im folgenden die *Existenzfrage* angesprochen: Welche strukturellen Bedingungen müssen die Antworten einer Versuchsperson aufweisen, damit eine strukturerhaltende Abbildung in das offene Einheitsintervall existiert? Unter den strukturellen Bedingungen nehmen die beobachtbaren Axiome eine besondere Stellung ein. Im Gegensatz zu den nicht-beobachtbaren technischen Bedingungen, die sich zwar einer experimentellen Überprüfung entziehen, die jedoch bei Vorliegen einer geeigneten Reizmenge meist als empirisch erfüllt angesehen werden, entscheiden die beobachtbaren Axiome über die Existenz einer numerischen

Repräsentation. So läßt sich die Existenz einer $(0, 1)$-wertigen strukturerhaltenden Abbildung p anhand mehrerer beobachtbarer Axiome prüfen:

- *Konnexität der Wahrscheinlichkeitsurteile:* Für Elemente a, b, c, d, e, f, g, h der Grundmenge A gilt entweder $(a, b, c, d) \succ_{4,4} (e, f, g, h)$, $(e, f, g, h) \succ_{4,4} (a, b, c, d)$ oder $(a, b, c, d) \sim_{4,4} (e, f, g, h)$.

Je zwei Quadrupel (a, b, c, d) und (e, f, g, h) sind vergleichbar. So muß beispielsweise ein Fußballexperte in der Lage sein, die Frage zu beantworten, ob das Ereignis "a gewinnt gegen b und c gewinnt gegen d" wahrscheinlicher als das Ereignis "e gewinnt gegen f und g gewinnt gegen h" ist. Während apriori keineswegs klar ist, ob derartige Fragen beantwortet werden können, ist die Konnexitätsforderung trivialerweise erfüllt, wenn die Relation $\succ_{4,4}$ auf dem Konzept der relativen Häufigkeit basiert: Werden die Reiztupel (a, b), (c, d), (e, f) und (g, h) wiederholt einer Versuchsperson präsentiert, so lassen sich die beiden Quadrupel (a, b, c, d) und (e, f, g, h) unter Zuhilfenahme der beobachteten relativen Häufigkeiten $\hat{p}(a, b)$, $\hat{p}(c, d)$, $\hat{p}(e, f)$ und $\hat{p}(g, h)$ vergleichen.

- *Transitivität der Wahrscheinlichkeitsurteile:* Für $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l$ aus A gilt: Ist $(i, j, k, l) \succ_{4,4} (a, b, c, d)$, so gilt $(e, f, g, h) \succ_{4,4} (a, b, c, d)$ oder $(i, j, k, l) \succ_{4,4} (e, f, g, h)$.

Der *modus tollens* der klassischen Logik zeigt, daß dieses Axiom äquivalent zur Transitivität der qualitativen Relation $\succeq_{4,4}$ ist: Ist $(a, b, c, d) \succeq_{4,4} (e, f, g, h)$ und $(e, f, g, h) \succeq_{4,4} (i, j, k, l)$, so gilt auch $(a, b, c, d) \succeq_{4,4} (i, j, k, l)$. Qualitative Wahrscheinlichkeitsurteile lassen somit nur dann eine numerische Repräsentation zu, wenn grundlegende Ordnungseigenschaften der reellen Zahlen erfüllt sind. Während das Transitivitätsaxiom trivialerweise erfüllt ist, wenn die frequentistische Interpretation des Quintupels $\langle A, \succ_{2,2}, \succ_{2,4}, \succ_{4,2}, \succ_{4,4} \rangle$ gewählt wird, gilt es diesen Zusammenhang im einzelnen zu prüfen, wenn die subjektive Interpretation der Relation $\succ_{4,4}$ zugrundegelegt wird.

- *Thomsen-Bedingung:* Für $a, b, c, d, o, p, q, r \in A$ gelte $(a, b, q, r) \succ_{4,4} (c, d, o, p)$. Dann gilt für $e, f, x, y \in A$ mindestens eine der folgenden vier Bedingungen: $(a, b, x, y) \succ_{4,4} (e, f, o, p)$, $(e, f, o, p,) \succ_{4,4} (a, b, x, y)$, $(e, f, q, r) \succ_{4,4} (c, d, x, y)$ oder $(c, d, x, y) \succ_{4,4} (e, f, q, r)$.

In Analogie zur Transitivitätsbedingung läßt sich die Bedeutung der Thomsen-Bedingung unter Zuhilfenahme des *modus tollens* der klassischen Logik verdeutlichen: Für $(a, b, x, y) \sim_{4,4} (e, f, o, p)$ und $(e, f, q, r) \sim_{4,4} (c, d, x, y)$ gilt auch die Äquivalenz $(a, b, q, r) \sim_{4,4} (c, d, o, p)$. Die postulierte Thomsen-Bedingung ist äquivalent zur Thomsen-Bedingung additiv verbundener Meßstrukturen (Krantz et al., 1971, Definition 6.3)

- *Verträglichkeit der Relationen $\succ_{2,2}$ und $\succ_{4,4}$:* Für $a, b, c, d, e, f \in A$ gilt genau dann $(a, b) \succ_{2,2} (c, d)$, wenn die Beziehung $(a, b, e, f) \succ_{4,4} (c, d, e, f)$ erfüllt ist.

Da diese Bedingung bereits ausführlich im Zusammenhang mit dem Eindeutigkeitsproblem diskutiert worden ist, sei hier nur noch eine triviale Implikation erwähnt: Ist $(a, b, e, f) \succ_{4,4} (c, d, e, f)$, so gilt für beliebige Reize $e', f' \in A$ die Beziehung $(a, b, e', f') \succ_{4,4} (c, d, e', f')$. Dies stellt eine wesentliche Forderung additiv verbundener Meßstrukturen dar: Es wird sichergestellt, daß die auf dem kartesischen Produkt definierte Ausgangsrelation auf die einzelnen Komponenten eingeschränkt werden kann.

Jedes dieser vier beobachtbaren Axiome ist notwendig in dem Sinne, daß es aus den angegebenen Repräsentationsbedingungen deduziert werden kann. Da die Notwendigkeit der eben angesprochenen Verträglichkeitsforderung bereits im Zusammenhang mit der Eindeutigkeitsfrage verifiziert worden ist, genügt es, die übrigen Axiome abzuleiten:

1. Die Notwendigkeit der Konnexitätsforderung: Für Elemente a, b, c, d, e, f, g, h der Grundmenge A gilt $p(a, b)p(c, d) \in \mathbb{R}$ und $p(e, f)p(g, h) \in \mathbb{R}$. Folglich ist entweder $p(a, b)p(c, d) > p(e, f)p(g, h)$, $p(a, b)p(c, d) < p(e, f)p(g, h)$ oder $p(a, b)p(c, d) = p(e, f)p(g, h)$. Dies impliziert zusammen mit Repräsentationsbedingung 4 die Konnexität der Wahrscheinlichkeitsurteile.

2. Die Notwendigkeit der Transitivitätsforderung: Es seien beliebige Elemente $a, b, c, d, i, j, k, l \in A$ vorausgesetzt, die der Bedingung $(i, j, k, l) \succ_{4,4} (a, b, c, d)$, also auch der Abschäzung $p(i, j)p(k, l) > p(a, b)p(c, d)$ genügen. Dann gilt für Elemente e, f, g, h der Grundmenge A entweder $p(e, f)p(g, h) > p(a, b)p(c, d)$ oder $p(i, j)p(k, l) > p(e, f)p(g, h)$. Das Transitivitätsaxiom resultiert nun aus Repräsentationsbedingung 4.

3. Die Notwendigkeit der Thomsen-Bedingung: Es seien Reize a, b, c, d, q, r, s, t der Grundmenge A vorausgesetzt, die die Abschätzung $(a, b, q, r) \succ_{4,4} (c, d, s, t)$, also auch die Ungleichung $p(a, b)p(q, r) > p(c, d)p(s, t)$ erfüllen. Nimmt man an, daß die Thomsen-Bedingung verletzt ist, geht man also von den beiden Gleichungen $p(a, b)p(x, y) = p(e, f)p(s, t)$ und $p(e, f)p(q, r) = p(c, d)p(x, y)$ aus, so läßt sich der Widerspruch $p(a, b)p(q, r) > p(c, d)p(s, t) = p(a, b)p(q, r)$ ableiten. □

7.5 Der Bezug zu den additiv verbundenen Meßstrukturen

Anhand dieser wenigen notwendigen Bedingungen läßt sich bereits die enge Affinität zwischen den (in diesem Kapitel vorgestellten) *qualitativen Paarvergleichsstrukturen* und den *additiv verbundenen Strukturen* (Krantz et al., 1971, Kapitel 6) ablesen. Dies überrascht nicht, ruft man sich Repräsentationsbedingung 4 in Erinnerung:

$$(a, b, c, d) \succ_{4,4} (e, f, g, h) \Leftrightarrow p(a, b)p(c, d) > p(e, f)p(g, h).$$

Der Vergleich mit dem Repräsentationstheorem für additiv verbundene Strukturen fördert mehrere interessante Unterschiede zutage, die sich auch in den Axiomen der Meßstruktur niederschlagen:

(1) Der auffallendste Unterschied - der Übergang von einer additiven zu einer multiplikativen Repräsentation - ist zugleich auch der unbedeutendste: Eine triviale Rechnung zeigt, daß jede additive Repräsentation durch "Vorschalten" der Exponentialfunktion in eine multiplikative Repräsentation übergeführt werden kann. Der hieraus resultierende Homomorphismus stellt eine Log-Intervallskala dar; zulässig sind die bereits aus der Eindeutigkeitsdiskussion bekannten Transformationen der Form $\phi' = \alpha\phi^\beta$ mit fixierten positiven Konstanten α und β.

(2) Während es bei additiv verbundenen Strukturen zulässig (und auch üblich) ist, verschiedene Reizmengen A_1 und A_2 zugrundezulegen, wird hier nur eine Menge - das zweifache kartesische Produkt der Grundmenge A - betrachtet: Es gilt $A_1 = A_2 = A \times A$. Eine derartige Situation führt bei verbundenen Meßstrukturen nicht notwendigerweise zu der Identität der beiden Abbildungen $\phi_1 : A_1 \to \mathbb{R}$ und $\phi_2 : A_2 \to \mathbb{R}$: Ein Reizpaar $(a, b) \in A \times A$ steuert möglicherweise unterschiedliche Beiträge zum Gesamteindruck bei, je nachdem ob es als Element der Menge A_1 oder als Element der Menge A_2 aufgefaßt wird.

Dies stellt einen wesentlichen Unterschied zu den qualitativen Paarvergleichsstrukturen dar: Anders als bei additiv verbundenen Meßstrukturen ist man hier an Bedingungen interessiert, die die Existenz einer multiplikativen Repräsentation $\phi(a, b, c, d) = p(a, b)p(c, d)$ sicherstellen. Dabei wird die Identität $\phi_1 = p = \phi_2$ im wesentlichen durch die (notwendige) *Symmetrieforderung* $(a, b, c, d) \sim_{4,4} (c, d, a, b)$ garantiert. Man beachte hierzu: Aufgrund der Kommutativität der reellen Zahlen sind die Ausdrücke $p(a, b)p(c, d)$ und $p(c, d)p(a, b)$ identisch. Dies hat wegen Repräsentationsbedingung 4 die Äquivalenz $(a, b, c, d) \sim_{4,4} (c, d, a, b)$ zur Folge.

(3) Der entscheidende Unterschied betrifft den Wertebereich der Abbildung p: Anders als bei additiv verbundenen Strukturen ist man ausschließlich an beschränkten Abbildungen $p : A \times A \to \mathbb{R}$ interessiert: Für $a, b \in A$ sei $0 < p(a, b) < 1$. Neben dem üblichen Archimedischen Axiom ist daher auch die Endlichkeit beliebiger streng monoton wachsender Standardfolgen zu fordern: *Jede streng monoton wachsende Standardfolge ist endlich.* Dabei wird eine Folge $\{(a_i, b_i) : a_i, b_i \in A, i \in N\}$ genau dann als Standardfolge in A^2 bezeichnet, wenn Elemente $p, q, r, s \in A$ existieren mit $\neg((p, q) \sim_{2,2} (r, s))$ und $(a_i, b_i, p, q) \sim_{4,4} (a_{i+1}, b_{i+1}, r, s)$ für alle $i, i + 1 \in N$.

Zum Nachweis der Notwendigkeit dieser sogenannten *strengen Archimedischen Eigenschaft* gehe man von einer wachsenden Standardfolge $\{(a_i, b_i) : i \in N\}$ aus.

Insbesondere existieren Reize $o, q, r, s \in A$ mit $(a_i, b_i, o, q) \sim_{4,4} (a_{i+1}, b_{i+1}, r, s)$, also auch $p(a_i, b_i)p(o, q) = p(a_{i+1}, b_{i+1})p(r, s)$. Hieraus resultiert $p(o, q) > p(r, s)$, also auch die Ungleichung $\alpha := p(o, q)[p(r, s)]^{-1} > 1$. Insbesondere ergibt sich für eine natürliche Zahl $i \in N$ mit $i + 1 \in N$ die Darstellung $p(a_{i+1}, b_{i+1}) = \alpha^i p(a_1, b_1)$. Die Beschränktheit der Abbildung p impliziert somit zusammen mit der Abschätzung $\alpha > 1$ die Endlichkeit der Standardfolge $\{(a_i, b_i) : i \in N\}$.

(4) Während man bei additiv verbundenen Meßstrukturen lediglich von *einer* Ordnungsrelation auf dem kartesischen Produkt $A_1 \times A_2$ ausgeht, werden hier mehrere Relationen postuliert, die überdies auf unterschiedlichen Grundmengen definiert sind. Es ist daher erforderlich, Konsistenzaxiome aufzustellen, die das Zueinander dieser verschiedenen Relationen regeln:

(a) *Verträglichkeit der Relationen $\succ_{2,4}$ und $\succ_{4,4}$:* Für $a, b, c, d, e, f \in A$ ist genau dann $(a, b) \succ_{2,4} (c, d, e, f)$, wenn Elemente $g_0, h_0 \in A$ derart existieren, daß für alle $g, h \in A$ mit $(g, h) \succ_{2,2} (g_0, h_0)$ gilt: $(a, b, g, h) \succ_{4,4} (c, d, e, f)$.

(b) *Verträglichkeit der Relationen $\succ_{2,2}$ und $\succ_{2,4}$:* Zu $(a, b) \succ_{2,4} (c, d, e, f)$ existieren $a_0, b_0 \in A$ mit $(a, b) \succ_{2,2} (a_0, b_0)$ und $(a_0, b_0) \succ_{2,4} (c, d, e, f)$.

(c) *Verträglichkeit der Relationen $\succ_{4,2}$ und $\succ_{4,4}$:* Für $a, b, c, d, e, f \in A$ ist genau dann $(a, b, c, d) \succ_{4,2} (e, f)$, wenn Reize a_0, b_0, c_0, d_0 der Grundmenge A existieren mit $(a, b, c, d) \succ_{4,4} (a_0, b_0, c_0, d_0)$ und $(a_0, b_0, c_0, d_0) \succeq_{4,2} (e, f)$.

Diese strukturellen, technischen Bedingungen stellen zusammen mit den beobachtbaren Axiomen aus Kapitel 7.4 sicher, daß eine strukturerhaltende Abbildung in das offene Einheitsintervall existiert (Lemma 7.3):

7.6 Der Repräsentationssatz für qualitative Paarvergleichsstrukturen

Im folgenden sei $A \neq \emptyset$ eine Menge, sowie $\succ_{4,4}$ eine binäre Relation auf dem vierfachen kartesischen Produkt A^4. Anstelle von $(a, b, c, d, e, f, g, h) \in \succ_{4,4}$ schreibe man stets $(a, b, c, d) \succ_{4,4} (e, f, g, h)$. In naheliegender Weise lassen sich binäre Relationen $\succeq_{4,4}$ und $\sim_{4,4}$ auf A^4 definieren. Für $a, b, c, d, e, f, g, h \in A$ sei

$$
\begin{aligned}
(a, b, c, d) \succeq_{4,4} (e, f, g, h) \quad &:\Leftrightarrow \quad \neg((e, f, g, h) \succ_{4,4} (a, b, c, d)); \\
(a, b, c, d) \sim_{4,4} (e, f, g, h) \quad &:\Leftrightarrow \quad \neg((a, b, c, d) \succ_{4,4} (e, f, g, h)) \wedge \\
&\qquad\quad \neg((e, f, g, h) \succ_{4,4} (a, b, c, d)).
\end{aligned}
$$

Neben der Relation $\succ_{4,4}$ sei eine binäre Relation auf dem kartesischen Produkt $A \times A$ vorausgesetzt. Anstelle von $(a, b, c, d) \in \succ_{2,2}$ schreibe man stets $(a, b) \succ_{2,2} (c, d)$. Hierzu definiere man binäre Relationen $\succeq_{2,2}$ und $\sim_{2,2}$ auf $A \times A$ gemäß

$$
(a, b) \succeq_{2,2} (c, d) \quad :\Leftrightarrow \quad \neg((c, d) \succ_{2,2} (a, b));
$$

$$(a,b) \sim_{2,2} (c,d) \quad :\Leftrightarrow \quad \neg((a,b) \succ_{2,2} (c,d)) \wedge \neg((c,d) \succ_{2,2} (a,b)).$$

Das Tripel $\langle A, \succ_{2,2}, \succ_{4,4} \rangle$ genüge den Bedingungen einer *schwachen qualitativen Paarvergleichsstruktur*:

Definition 7.1 *Es sei $A \neq \emptyset$ eine nichtleere Menge, $\succ_{2,2}$ eine binäre Relation auf A^2 und $\succ_{4,4}$ eine binäre Relation auf A^4. Das Tripel $\langle A, \succ_{2,2}, \succ_{4,4} \rangle$ wird genau dann als schwache qualitative Paarvergleichsstruktur bezeichnet, wenn gilt:*

1. *Konnexität: Für $a,b,c,d,e,f,g,h \in A$ ist entweder $(a,b,c,d) \succ_{4,4} (e,f,g,h)$, $(e,f,g,h) \succ_{4,4} (a,b,c,d)$ oder $(a,b,c,d) \sim_{4,4} (e,f,g,h)$. Diese drei Fälle schließen sich aus.*

2. *Transitivität von $\succ_{4,4}$: Für $a,b,c,d,i,j,k,l \in A$ gelte $(i,j,k,l) \succ_{4,4} (a,b,c,d)$. Dann gilt für beliebige Reize $e,f,g,h \in A$: Es ist $(e,f,g,h) \succ_{4,4} (a,b,c,d)$ oder $(i,j,k,l) \succ_{4,4} (e,f,g,h)$.*

3. *Thomsen-Bedingung: Für $a,b,c,d,o,p,q,r \in A$ gelte $(a,b,q,r) \succ_{4,4} (c,d,o,p)$. Dann gilt für $e,f,x,y \in A$ mindestens eine der folgenden vier Bedingungen: $(a,b,x,y) \succ_{4,4} (e,f,o,p)$, $(e,f,o,p) \succ_{4,4} (a,b,x,y)$, $(e,f,q,r) \succ_{4,4} (c,d,x,y)$ oder $(c,d,x,y) \succ_{4,4} (e,f,q,r)$.*

4. *Beschränkte Lösbarkeit: Für Reize $a,b,\underline{c},\underline{d},\bar{c},\bar{d},p,q,r,s$ der Grundmenge A gelte $(\bar{c},\bar{d},r,s) \succeq_{4,4} (a,b,p,q) \succeq_{4,4} (\underline{c},\underline{d},r,s)$. Dann existieren Reize $c,d \in A$ mit $(c,d,r,s) \sim_{4,4} (a,b,p,q)$.*

5. *Wesentlichkeit: Es existieren $a,b,c,d,e,f \in A$ mit $(a,b,e,f) \succ_{4,4} (c,d,e,f)$.*

6. *Verträglichkeit der Relationen $\succ_{2,2}$ und $\succ_{4,4}$: Für $a,b,c,d,e,f \in A$ gilt genau dann $(a,b) \succ_{2,2} (c,d)$ wenn $(a,b,e,f) \succ_{4,4} (c,d,e,f)$ ist.*

7. *Symmetrie: Für $a,b,c,d \in A$ ist $(a,b,c,d) \sim_{4,4} (c,d,a,b)$.*

8. *Archimedische Eigenschaft: Jede beschränkte Standardfolge in A^2 ist endlich. Dabei heißt eine Folge $\{(a_i,b_i) : a_i, b_i \in A, i \in N\}$ genau dann Standardfolge in A^2, wenn Elemente $p,q,r,s \in A$ existieren, so daß $\neg((p,q) \sim_{2,2} (r,s))$ und $(a_i,b_i,p,q) \sim_{4,4} (a_{i+1},b_{i+1},r,s)$ für alle $i, i+1 \in N$ gilt.*

9. *Strenge Archimedische Eigenschaft: Jede streng monoton wachsende Standardfolge in A^2 ist endlich.*

Neben den Relationen $\succ_{2,2}$ und $\succ_{4,4}$ seien Teilmengen $\succ_{2,4}$ und $\succ_{4,2}$ des sechsfachen kartesischen Produkts A^6 vorausgesetzt. Anstelle von $(a,b,c,d,e,f) \in \succ_{2,4}$ schreibe man $(a,b) \succ_{2,4} (c,d,e,f)$. Ebenso wird der Ausdruck $(a,b,c,d,e,f) \in \succ_{4,2}$ meist durch die Darstellung $(a, b, c, d) \succ_{4,2} (e, f)$ ersetzt. Hierzu definiere man Relationen $\succeq_{4,2}$ und $\sim_{4,2}$ in gewohnter Weise:

$$\begin{aligned}
(a, b, c, d) \succeq_{4,2} (e, f) \quad &:\Leftrightarrow \quad \neg((e, f) \succ_{2,4} (a, b, c, d)) \\
(a, b, c, d) \sim_{4,2} (e, f) \quad &:\Leftrightarrow \quad \neg((a, b, c, d) \succ_{4,2} (e, f))) \wedge \neg((e, f) \succ_{2,4} (a, b, c, d)).
\end{aligned}$$

Das Quintupel $\langle A, \succ_{2,2}, \succ_{2,4}, \succ_{4,2}, \succ_{4,4}\rangle$ genüge den Bedingungen einer qualitativen Paarvergleichsstruktur:

Definition 7.2 *Es seien nichtleere Mengen A, $\succ_{2,2} \subset A^4$, $\succ_{2,4} \subset A^6$, $\succ_{4,2} \subset A^6$ und $\succ_{4,4} \subset A^8$ vorausgesetzt. Das Quintupel $\langle A, \succ_{2,2}, \succ_{2,4}, \succ_{4,2}, \succ_{4,4}\rangle$ wird genau dann als qualitative Paarvergleichsstruktur bezeichnet, wenn gilt:*

1. *$\langle A, \succ_{2,2}, \succ_{4,4}\rangle$ ist eine schwache qualitative Paarvergleichsstruktur.*

2. *Unbeschränktheit: Zu $a, b \in A$ existieren $x, y \in A$ mit $(x, y) \succ_{2,2} (a, b)$.*

3. *Verträglichkeit der Relationen $\succ_{2,4}$ und $\succ_{4,4}$: Für $a, b, c, d, e, f \in A$ gilt genau dann $(a, b) \succ_{2,4} (c, d, e, f)$, wenn Elemente $g_0, h_0 \in A$ derart existieren, daß für alle $g, h \in A$ mit $(g, h) \succ_{2,2} (g_0, h_0)$ gilt: $(a, b, g, h) \succ_{4,4} (c, d, e, f)$.*

4. *Verträglichkeit der Relationen $\succ_{2,2}$ und $\succ_{2,4}$: Zu $(a, b) \succ_{2,4} (c, d, e, f)$ existieren $a_0, b_0 \in A$ mit $(a, b) \succ_{2,2} (a_0, b_0)$ und $(a_0, b_0) \succ_{2,4} (c, d, e, f)$.*

5. *Verträglichkeit der Relationen $\succ_{4,2}$ und $\succ_{4,4}$: Für Reize $a, b, c, d, e, f \in A$ gilt genau dann $(a, b, c, d) \succ_{4,2} (e, f)$, wenn Elemente $a_0, b_0, c_0, d_0 \in A$ existieren mit $(a, b, c, d) \succ_{4,4} (a_0, b_0, c_0, d_0)$ und $(a_0, b_0, c_0, d_0) \succeq_{4,2} (e, f)$.*

Jede derartige Paarvergleichsstruktur läßt sich strukturerhaltend in das offene Einheitsintervall $(0, 1)$ abbilden:

Lemma 7.3 *Definiert $\langle A, \succ_{2,2}, \succ_{2,4}, \succ_{4,2}, \succ_{4,4}\rangle$ eine qualitative Paarvergleichsstruktur, so existiert eine Abbildung $p : A \times A \to [0, 1]$, so daß für $a, b, c, d, e, f, g, h \in A$ gilt:*

1. *$(a, b) \succ_{2,2} (c, d) \Leftrightarrow p(a, b) > p(c, d)$;*

2. *$(a, b) \succ_{2,4} (c, d, e, f) \Leftrightarrow p(a, b) > p(c, d)p(e, f)$;*

3. *$(a, b, c, d) \succ_{4,2} (e, f) \Leftrightarrow p(a, b)p(c, d) > p(e, f)$;*

4. *$(a, b, c, d) \succ_{4,4} (e, f, g, h) \Leftrightarrow p(a, b)p(c, d) > p(e, f)p(g, h)$.*

Ist $q : A \times A \to [0, 1]$ eine derartige Abbildung, so ist $0 < q(a, b) < 1$ für $a, b \in A$ beliebig. Weiter existieren Konstanten $\alpha, \beta > 0$ mit $q = \alpha p^\beta$. Existieren Elemente $a, b, c, d, e, f \in A$ mit $(a, b, c, d) \sim_{4,2} (e, f)$, so ist sogar $q = p^\beta$. Insbesondere existiert genau eine Repräsentation p, die der Anfangsbedingung $p(a, a) = 1/2$ genügt.

Die Eindeutigkeit der Repräsentation läßt sich auch durch Einführung einer weiteren Relation $\approx$ auf A gewährleisten: Für zwei beliebige Reize $a, b \in A$ gilt genau dann $a \approx b$, wenn eine Versuchsperson nicht in der Lage ist, den Standardreiz a vom Vergleichsreiz b zu unterscheiden. Wird als weitere Repräsentationsbedingung die Äquivalenz $a \approx b \Leftrightarrow p(a,b) = 0.5$ gefordert, so hat dies die Eindeutigkeit der Repräsentation p zur Folge:

Satz 7.4 *Es sei $\langle A, \succ_{2,2}, \succ_{2,4}, \succ_{4,2}, \succ_{4,4} \rangle$ eine qualitative Paarvergleichsstruktur. Weiter sei $\approx$ eine binäre Relation auf A, so daß gilt:*

1. *Es existieren $a, b, c, d, e, f \in A$ mit $(a, b, c, d) \sim_{4,2} (e, f)$;*
2. *Für $x \in A$ existiert ein $m(x) \in A$ mit $m(x) \approx x$;*
3. *Für $x, y \in A$ gilt $(m(x), x) \sim_{2,2} (m(y), y)$;*
4. *Für $a, x \in A$ gilt $a \approx x \Leftrightarrow (a, x) \sim_{2,2} (m(x), x)$.*

Dann existiert genau eine Abbildung $p : A \times A \to [0, 1]$, so daß für beliebige Elemente a, b, c, d, e, f, g, h der Grundmenge A gilt:

1. *$(a, b) \succ_{2,2} (c, d) \Leftrightarrow p(a, b) > p(c, d)$;*
2. *$(a, b) \succ_{2,4} (c, d, e, f) \Leftrightarrow p(a, b) > p(c, d)p(e, f)$;*
3. *$(a, b, c, d) \succ_{4,2} (e, f) \Leftrightarrow p(a, b)p(c, d) > p(e, f)$;*
4. *$(a, b, c, d) \succ_{4,4} (e, f, g, h) \Leftrightarrow p(a, b)p(c, d) > p(e, f)p(g, h)$;*
5. *$a \approx b \Leftrightarrow p(a, b) = 0.5$.*

Insbesondere nimmt die Abbildung p nur Werte im offenen Einheitsintervall $(0, 1)$ an: Für $a, b \in A$ ist $0 < p(a, b) < 1$.

Beide Repräsentations- und Eindeutigkeitstheoreme werden in Anhang F bewiesen.

Kapitel 8

Qualitative Beobachtungen, die hinreichend für die Exponentialverteilung sind

Wird neben der qualitativen Paarvergleichsstruktur $\langle A, \succ_{2,2}, \succ_{2,4}, \succ_{4,2}, \succ_{4,4}\rangle$ eine geeignete extensive Struktur $\langle A, \succeq, \circ\rangle$ vorausgesetzt, so können qualitative Bedingungen angegeben werden, die die Existenz einer *exponentiellen Paarvergleichsstruktur* $\langle A, \succeq, \circ, V, x_0\rangle$ sicherstellen.

Hierzu nehme man an, das Reiztripel $\langle A, \succeq, \circ\rangle$ genüge den Voraussetzungen von Lemma A.1: $\langle A, \succeq, \circ\rangle$ bezeichne eine extensive Struktur, die den Axiomen *schwache Ordnung* (die Relation $\succeq$ ist konnex und transitiv), *schwache Assoziativität* (für Reize a, b und c ist $(a \circ b) \circ c \sim a \circ (b \circ c)$), *Positivität* (für Reize a und b ist $a \circ b \succ a$ und $a \circ b \succ b$), *schwache Lösbarkeit* (ist $b \succ a$, so existiert ein Reiz $x \in A$ mit $a \circ x \sim b$ und ein $y \in A$ mit $y \circ a \sim b$), *Unbeschränktheit* (zu jedem Reiz $a \in A$ existiert ein Reiz $b \in A$ mit $a \succ b$) und *Dedekindsche Vollständigkeit* (wird die Grundmenge A in zwei nichtleere, disjunkte Teilmengen $A_1 \prec A_2$ unterteilt, so existiert ein Reiz $a \in A$, so daß jedes Element $a_1 \prec a$ zur ersten und jedes Element $a_2 \succ a$ zur zweiten Klasse gehört) genügt.

Weiter sei neben der qualitativen Paarvergleichsstruktur $\langle A, \succ_{2,2}, \succ_{2,4}, \succ_{4,2}, \succ_{4,4}\rangle$ eine binäre Relation $\approx$ auf A gegeben, so daß die Voraussetzungen von Satz 7.4 erfüllt sind. Überdies werden die folgenden Konsistenzbedingungen postuliert:

1. Für $a, b, x \in A$ gilt $a \succeq b \Leftrightarrow (x, b) \succeq_{2,2} (x, a)$.

2. Für $a, b, x \in A$ gilt $a \succeq b \Leftrightarrow (a, x) \succeq_{2,2} (b, x)$.

3. Es existiert ein $x_0 \in A$, so daß für alle Elemente x der Grundmenge A gilt: $x \circ x_0 \sim m(x)$. Insbesondere resultiert wegen $a \sim b \Leftrightarrow (a, x) \sim_{2,2} (b, x)$ die

Beziehung $(x \circ x_0, x) \sim_{2,2} (m(x), x)$. Dies führt zu $x \circ x_0 \approx x$: Eine Versuchsperson ist nicht in der Lage, den Standardreiz $x \circ x_0$ vom Vergleichsreiz x zu unterscheiden.

4. Für $a, b, x \in A$ gilt $(x, a \circ b) \sim_{2,4} (x, a, x, b)$.

Ist eine derartige Struktur $\langle A, \succ_{2,2}, \succ_{2,4}, \succ_{4,2}, \succ_{4,4}, \approx, \succeq, \circ \rangle$ vorausgesetzt, so existiert gemäß Satz 7.4 eine eindeutig bestimmte Repräsentation des qualitativen Relativs $\langle A, \succ_{2,2}, \succ_{2,4}, \succ_{4,2}, \succ_{4,4}, \approx \rangle$ in das offene Einheitsintervall $(0, 1)$. Der Übergang zu den "komplementären" Abbildungen

$$V_x(a) := 1 - p(x, a).$$

führt nun zu der *exponentiellen Paarvergleichsstruktur* $\langle A, \succeq, \circ, V, x_0 \rangle$. Für den Nachweis dieser Behauptung werden die Eigenschaften des Quintupels $\langle A, \succeq, \circ, V, x_0 \rangle$ geklärt:

1. Die extensive Struktur $\langle A, \succeq, \circ \rangle$ wurde gerade so gewählt, daß die Voraussetzungen von Lemma A.1 erfüllt sind.

2. Aufgrund der in Satz 7.4 abgeleiteten Abschätzung $0 < p(x, a) < 1$ bildet V_x die Grundmenge A auf das offene Einheitsintervall $(0, 1)$ ab.

3. Wegen der vorausgesetzten Konsistenzforderung $a \succeq b \Leftrightarrow (x, b) \succeq_{2,2} (x, a)$ impliziert Satz 7.4 die geforderte Isotonie der Abbildung V_x:

$$\begin{aligned} a \succeq b \quad &\Leftrightarrow \quad (x, b) \succeq_{2,2} (x, a) \Leftrightarrow p(x, b) \geq p(x, a) \\ &\Leftrightarrow \quad 1 - p(x, a) \geq 1 - p(x, b) \Leftrightarrow V_x(a) \geq V_x(b). \end{aligned}$$

4. Die Cauchysche Funktionalgleichung $1 - V_x(a \circ b) = (1 - V_x(a))(1 - V_x(b))$ resultiert aus der Äquivalenzforderung $(x, a \circ b) \sim_{2,4} (x, a, x, b)$ und dem Repräsentationssatz 7.4.

5. Die noch fehlende Normierungsbedingung $V_{x \circ x_0}(x) = 0.5$ kann wie folgt deduziert werden: Wegen $x \circ x_0 \approx x$ gilt

$$\begin{aligned} x \circ x_0 \approx x \quad &\Leftrightarrow \quad p(x \circ x_0, x) = 0.5 \Leftrightarrow 1 - p(x \circ x_0, x) = 0.5 \\ &\Leftrightarrow \quad V_{x \circ x_0}(x) = 0.5. \end{aligned}$$

Ergo definiert das Quintupel $\langle A, \succeq, \circ, V, x_0 \rangle$ eine exponentielle Paarvergleichsstruktur, kann also gemäß Satz B.2 durch eine Familie exponentialverteilter Zufallsvariablen repräsentiert werden.

Die Vorteile dieser Vorgehensweise treten deutlich zutage, wenn die eben bewiesene Charakterisierung der Exponentialverteilung mit dem Repräsentationssatz aus Kapitel 5.3 verglichen wird. Während in Kapitel 5.3 Paarvergleichswahrscheinlichkeiten als Primitiva vorausgesetzt werden, werden in Kapitel 7 Wahrscheinlichkeiten aus nicht-numerischen Bedingungen deduziert. Ebenso konnte die Cauchysche Funktionalgleichung $1 - V_x(a \circ b) = (1 - V_x(a))(1 - V_x(b))$ aus der nicht-numerischen Äquivalenzforderung $(x, a \circ b) \sim_{2,4} (x, a, x, b)$ abgeleitet werden.

Trotz dieses unbestreitbaren Fortschrittes, sei vor einem allzugroßen Optimismus gewarnt: Zum einen werden sich psychometrische Funktionen nur selten durch die (linkssteile) Verteilungsfunktion einer exponentialverteilten Zufallsvariablen beschreiben lassen. Andererseits bereitet die empirische Prüfung einiger Axiome Probleme. Wird beispielsweise die frequentistische Interpretation zugrundegelegt, so kann die zentrale Äquivalenzforderung $(x, a \circ b) \sim_{2,4} (x, a, x, b)$ letztlich nur durch Erhebung einer Vielzahl empirischer Daten geprüft werden. Im wesentlichen resultiert dies aus der Ungleichbehandlung des α- und β-Fehlers.

Während dieses zweite Problem eine prinzipielle Schwierigkeit darstellt, die aus der frequentistischen Deutung des Wahrscheinlichkeitsbegriffes resultiert, kann das erste Problem durch eine nicht-numerische Charakterisierung der logistischen Verteilung gelöst werden. Obgleich es prinzipiell möglich ist, die qualitative Charakterisierung der Exponentialverteilung auf die logistische Wahrscheinlichkeitsverteilung zu übertragen, würde eine derartige Modifikation den Rahmen dieser Arbeit sprengen: Stellt man die für die Exponentialverteilung charakteristische Cauchysche Funktionalgleichung

$$1 - V_x(a \circ b) = (1 - V_x(a))(1 - V_x(b)), \quad a, b, x \in A, \tag{8.1}$$

der Funktionalgleichung

$$\frac{V_x(x \circ a \circ b)}{1 - V_x(x \circ a \circ b)} = \frac{V_x(x \circ a)}{1 - V_x(x \circ a)} \frac{V_x(x \circ b)}{1 - V_x(x \circ b)}, \quad a, b, x \in A, \tag{8.2}$$

aus Kapitel 5.7 gegenüber, so läßt sich die weitere Vorgehensweise entnehmen: Während der meßtheoretische Ansatz zur Ableitung der Paarvergleichswahrscheinlichkeiten $p(a, b) \in (0, 1)$ durch die Cauchysche Funktionalgleichung (8.1) motiviert ist, führt der funktionale Zusammenhang (8.2) zu einer meßtheoretischen Fundierung des Konzepts der *Wettchance*: $V_x(a)[1 - V_x(a)]^{-1}$.

Anhang A

Spezielle extensive Strukturen

Im klassischen Satz von Hölder werden nicht nur Bedingungen an eine extensive Struktur $\langle A, \succeq, \circ \rangle$ formuliert, die eine isotone und additive Repräsentation ϕ der Grundmenge A zur Folge haben, die von Hölder (1901) postulierten Bedingungen stellen sogar sicher, daß die Abbildung ϕ die Grundmenge A *bijektiv* auf das offene Intervall $(0, \infty)$ der positiven reellen Zahlen abbildet (Kapitel 2.1.1). Dabei wird die Injektivität der Abbildung ϕ einzig und allein durch die *Antisymmetrie* der Relation $\succeq$ sichergestellt: Zwei Reize $a, b \in A$ sind identisch, wenn a als mindestens so intensiv wie b und b als mindestens so intensiv wie a wahrgenommen wird: Ist $a \succeq b$ und $b \succeq a$, so gilt $a = b$. Der Verzicht auf diese für die Psychologie meist zu restriktive Forderung hat den Verlust der Injektivität der Repräsentation zur Folge:

Lemma A.1 *Es sei $A \neq \emptyset$ eine nichtleere Menge, $\succeq$ eine binäre Relation auf A und $\circ : A \times A \to A$ eine binäre Operation auf A, so daß gilt:*

1. *$\langle A, \succeq \rangle$ ist eine schwache Ordnung;*
2. *Schwache Assoziativität: $(a \circ b) \circ c \sim a \circ (b \circ c)$;*
3. *Positivität: $a \circ b \succ a$, $a \circ b \succ b$;*
4. *Schwache Lösbarkeit: Ist $b \succ a$, so existiert ein $x \in A$ mit $a \circ x \sim b$ und ein $y \in A$ mit $y \circ a \sim b$;*
5. *Unbeschränktheit: Zu jedem $a \in A$ existiert ein $b \in A$ mit $a \succ b$;*
6. *$\langle A, \succeq \rangle$ ist Dedekind-vollständig.*

Dann existiert eine surjektive Abbildung $\phi : A \to (0, \infty)$, so daß für alle Reize a und b der Grundmenge A gilt:

1. *Isotonie: $a \succeq b \Leftrightarrow \phi(a) \geq \phi(b)$;*

2. *Additivität:* $\phi(a \circ b) = \phi(a) + \phi(b)$.

Beweis: Von der Grundmenge A gehe man über zur Menge X der Äquivalenzklassen bezüglich der Äquivalenzrelation $\sim$. Hierauf definiere man eine binäre Relation $\sqsupseteq$:

$$[a] \sqsupseteq [b] :\Leftrightarrow a \succeq b.$$

Wird überdies die Operation $\diamond : X \times X \to X$ gemäß der Vorschrift

$$[a] \diamond [b] := [a \circ b]$$

definiert, so genügt das Tripel $\langle X, \sqsupseteq, \diamond \rangle$ den Bedingungen des Satzes von Hölder (Kapitel 2.1.1). Es existiert daher eine *bijektive* Abbildung $\psi : X \to (0, \infty)$, so daß für alle $x, y \in X$ gilt

1. Isotonie: $x \sqsupseteq y \Leftrightarrow \psi(x) \geq \psi(y)$;

2. Additivität: $\psi(x \diamond y) = \psi(x) + \psi(y)$.

Somit ist aber durch die Abbildungsvorschrift $\phi(a) := \psi\big([a]\big)$, $a \in A$, eine Repräsentation der extensiven Struktur $\langle A, \succeq, \circ \rangle$ gegeben, die die Grundmenge A *surjektiv* auf das offene Intervall $(0, \infty)$ der positiven reellen Zahlen abbildet. $\square$

Obgleich Gruppenstrukturen nur in wenigen (meist künstlichen) Situationen Anwendungen finden, werden im folgenden die Axiome einer *abgeschlossenen extensiven Struktur* (Krantz et al., 1971, Kap. 3) um die Gruppenaxiome ergänzt. Diese Modifikation ergibt sich notwendigerweise aus der Existenz einer isotonen und additiven Abbildung ϕ, die die Grundmenge A *surjektiv* auf die Menge der reellen Zahlen abbildet:

Lemma A.2 *Es sei $A \neq \emptyset$ eine Menge, $\succeq$ eine binäre Relation auf A und $\circ$ eine binäre Operation auf A, so daß gilt:*

1. *$\langle A, \succeq \rangle$ ist eine schwache Ordnung;*

2. *Schwache Assoziativität: $(a \circ b) \circ c \sim a \circ (b \circ c)$;*

3. *Monotonie: $a \succeq b \Leftrightarrow a \circ c \succeq b \circ c \Leftrightarrow c \circ a \succeq c \circ b$;*

4. *Schwache Lösbarkeit: Ist $b \succ a$, so existiert ein $x \in A$ mit $a \circ x \sim b$ und ein $y \in A$ mit $y \circ a \sim b$;*

5. *Neutrales Element: Es existiert ein $a_0 \in A$ mit $a \circ a_0 \sim a_0 \circ a \sim a$;*

6. *Zu jedem $a \in P := \{x \in A : x \succ a_0\}$ existiert ein $b \in P$ mit $a \succ b$;*

7. $\langle P, \succeq \rangle$ ist Dedekind-vollständig;

8. Inverse Elemente: Zu jedem $a \in A$ existiert ein $a' \in A$ mit $a \circ a' \sim a' \circ a \sim a_0$.

Dann existiert eine surjektive Abbildung $\phi : A \to \mathbb{R}$, so daß für alle Reize a und b der Grundmenge A gilt:

1. Isotonie: $a \succeq b \Leftrightarrow \phi(a) \geq \phi(b)$;

2. Additivität: $\phi(a \circ b) = \phi(a) + \phi(b)$.

Beweis: Die Definition der Menge P liefert zusammen mit der Monotonieforderung die Positivität des Tripels $\langle P, \succeq, \circ \rangle$:

$$\text{Für Reize } a, b \in P \text{ gilt } a \circ b \succ a, a \circ b \succ b.$$

Insbesondere genügt das Tripel $\langle P, \succeq, \circ \rangle$ den Voraussetzungen von Lemma A.1. Somit existiert eine isotone, additive und *surjektive* Repräsentation $\psi : P \to (0, \infty)$. Man gehe nun über zur Abbildung $\phi : A \to \mathbb{R}$:

$$\phi(a) := \begin{cases} \psi(a), & a \succ a_0, \\ 0, & a \sim a_0, \\ -\psi(a'), & a \prec a_0, \text{ wobei } a' \in A \text{ mit } a \circ a' \sim a_0. \end{cases}$$

Man beachte: Wegen der postulierten Lösbarkeitsbedingung existiert zu einem Reiz $a \prec a_0$ ein Element $a' \in A$ mit $a \circ a' \sim a_0$. Das Monotonieaxiom stellt die "Positivität" von a' sicher:

$$a_0 \succ a \Leftrightarrow a_0 \circ a' \succ a \circ a' \Leftrightarrow a' \succ a_0.$$

Die Wohldefiniertheit der Abbildung ϕ resultiert ebenfalls aus der Monotonieforderung: Ist auch $a'' \in P$ mit $a \circ a'' \sim a_0$, so gilt $a \circ a'' \sim a \circ a'$, also insbesondere $a'' \sim a'$.

Aufgrund der Existenz inverser Elemente resultiert die Surjektivität der Abbildung $\phi : A \to \mathbb{R}$ aus der Surjektivität der Repräsentation $\psi : P \to (0, \infty)$. Zu zeigen bleiben Isotonie und Additivität der Abbildung ϕ. Diese Eigenschaften folgen mittels einer einfachen Fallunterscheidung aus den entsprechenden Eigenschaften der Repräsentation ψ. $\square$

Anhang B

Ein funktionaler Zusammenhang zur Charakterisierung der Exponentialverteilung

Definition B.1 *Es sei $A \neq \emptyset$ eine Menge, $\succeq$ eine binäre Relation auf A, $\circ$ eine Abbildung des kartesischen Produkts $A \times A$ in die Grundmenge A und $x_0 \in A \cup \{o\}$. Weiter existiere zu jedem Reiz x der Grundmenge A eine Abbildung V_x, die jedem Reiz $a \in A$ eine reelle Zahl $V_x(a)$ des offenen Einheitsintervalls $(0,1)$ zuordnet. Das Quintupel $\langle A, \succeq, \circ, V, x_0 \rangle$ ist genau dann eine exponentielle Paarvergleichsstruktur, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

1. *Das Tripel $\langle A, \succeq, \circ \rangle$ genügt den Voraussetzungen von Lemma A.1;*
2. *Jede Abbildung V_x bildet das Relativ $\langle A, \succeq \rangle$ isoton auf $\mathbb{R}$ ab;*
3. *Für Reize a, b und x gilt der als qualitative Cauchysche Funktionalgleichung bezeichnete funktionale Zusammenhang $1 - V_x(a \circ b) = (1 - V_x(a))(1 - V_x(b))$;*
4. *Für $x \in A$ gilt: $V_{x \circ x_0}(x) = 1/2$. Dabei wird der Ausdruck $x \circ o$ als $x \circ o := x$ definiert.*

Satz B.2 *Es sei $A \neq \emptyset$ eine Menge, $\succeq$ eine binäre Relation auf A, $\circ$ eine Abbildung des kartesischen Produkts $A \times A$ in die Grundmenge A, und $x_0 \in A \cup \{o\}$. Weiter existiere zu jedem Reiz x der Grundmenge A eine Abbildung V_x, die jedem Reiz $a \in A$ eine reelle Zahl $V_x(a)$ des offenen Einheitsintervalls $(0,1)$ zuordnet. Definiert das Quintupel $\langle A, \succeq, \circ, V, x_0 \rangle$ eine exponentielle Paarvergleichsstruktur, so existiert eine Familie $\{X_x : x \in A\}$ von Zufallsvariablen auf einem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, so daß für beliebige Reize $a, b, x \in A$ die folgenden Repräsentationsbedingungen erfüllt sind:*

1. *Die Verteilungsfunktion* F_x *der Zufallsvariablen* X_x *nimmt (mit Ausnahme der "Null") die gleichen Werte wie die qualitative Verteilungsfunktion* V_x *an:* $V_x(A) = F_x(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$*.*

2. *Der Median der Verteilung der Zufallsvariablen* X_x *ist eindeutig bestimmt.*

3. *Bezeichnet* $M(F_x)$ *den (eindeutig bestimmten) Median der Verteilung von* X_x*, so gelten für beliebige Reize* a *und* b *die folgenden Bedingungen:*

   (a) $F_a(M(F_{b\circ x_0})) = V_a(b)$.

   (b) $a \succeq b \Leftrightarrow M(F_{a\circ x_0}) \geq M(F_{b\circ x_0})$.

   (c) $M(F_{a\circ b\circ x_0}) = M(F_{a\circ x_0}) + M(F_{b\circ x_0})$.

   Insbesondere bildet die Abbildung $a \mapsto M(F_{a\circ x_0})$ *die Grundmenge* A *isoton und additiv auf* $\mathbb{R}$ *ab.*

Zur Verteilungseindeutigkeit: Jede derartige Familie $\{X_x : x \in A\}$ *von Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum* $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ *setzt sich notwendigerweise aus exponentialverteilten Zufallsgrößen zusammen: Zu jedem Reiz* x *der Grundmenge* A *existiert eine positive Konstante* $\lambda(x) > 0$*, so daß für alle* $t > 0$ *gilt:*

$$P\{X_x \leq t\} = 1 - \exp(-\lambda(x)t) = \lambda(x) \int_0^t \exp(-\lambda(x)s)ds.$$

Beweis: Da das Tripel $\langle A, \succeq, \circ\rangle$ den Voraussetzungen von Lemma A.1 genügt, existiert eine isotone und additive Repräsentation $\phi : A \to \mathbb{R}$. Aufgrund der Positivität der Verknüpfungsoperation $\circ$ ist ϕ notwendigerweise positiv: Für jeden Reiz $a \in A$ ist $\phi(a) > 0$. Jede isotone und additive Repräsentation bildet die Grundmenge A sogar *surjektiv* auf das offene Intervall $(0, \infty)$ der positiven reellen Zahlen ab. Weiter bezeichne B die Gesamtheit aller Äquivalenzklassen bezüglich der induzierten Äquivalenzrelation $\sim$:

$$B := \{[a] : a \in A\}.$$

Aufgrund der Isotonie der Repräsentation ϕ ist die Abbildung

$$\psi : B \to (0, \infty), \quad \psi([a]) := \phi(a), \quad a \in A,$$

wohldefiniert, hängt also nicht von der Wahl des Repräsentanten ab: Für jeden anderen Repräsentanten $b \in [a]$ gilt $a \sim b$, also auch $\phi(a) = \phi(b)$. Zusammen mit der Relation

$$[a] \sqsupseteq [b] :\Leftrightarrow a \succeq b$$

bildet ψ die Menge B *bijektiv* und isoton auf das offene Intervall $(0, \infty)$ ab:

$$[a] \sqsupseteq [b] \Leftrightarrow a \succeq b \Leftrightarrow \phi(a) \geq \phi(b) \Leftrightarrow \psi([a]) \geq \psi([b]).$$

Da die qualitative Verteilungsfunktion V_x die Menge A isoton auf das offene Intervall $(0,1)$ abbildet, ist die Abbildung

$$U_x : B \to (0,1), \quad U_x([a]) := V_x(a), \quad a \in A,$$

wohldefiniert und isoton. Für $x \in A$ definiere man die Abbildung $f_x : [0,\infty) \to [0,1)$ gemäß der Vorschrift

$$f_x(t) := \begin{cases} U_x(\psi^{-1}(t)), & t > 0, \\ 0, & t = 0. \end{cases}$$

Die Eigenschaften der Abbildungen V_x (bzw. U_x) und ψ (bzw. ϕ) übertragen sich unmittelbar auf die Funktion f_x:

1. Nach Konstruktion der Abbildung f_x gilt für einen beliebigen Reiz a der Grundmenge A

$$f_x(\phi(a)) = U_x(\psi^{-1}(\phi(a))) = U_x(\psi^{-1}(\psi([a]))) = U_x([a]) = V_x(a).$$

2. Insbesondere gilt unter Berücksichtigung der Voraussetzung $V_{x \circ x_0}(x) = 1/2$ die Beziehung $f_{x \circ x_0}(\phi(x)) = 1/2$.

3. Die Abbildung f_x ist streng monoton wachsend auf $\mathbb{R}_+$; für positive reelle Zahlen $0 < s < t$ gilt $f_x(s) < f_x(t)$. Zum Nachweis dieser Behauptung wähle man Reize a_s und a_t in A mit $\phi(a_s) = s$ und $\phi(a_t) = t$. (Man beachte die Surjektivität der Abbildung ϕ!) Dann impliziert die Isotonie der Abbildung V_x bereits die postulierte strenge Monotonie der Funktion f_x:

$$\begin{aligned} s < t \quad &\Rightarrow \quad \phi(a_s) < \phi(a_t) \Rightarrow a_s \prec a_t \Rightarrow V_x(a_s) < V_x(a_t) \\ &\Rightarrow \quad f_x(\phi(a_s)) < f_x(\phi(a_t)) \Rightarrow f_x(s) < f_x(t). \end{aligned}$$

4. Die Abbildung f_x genügt der Cauchyschen Funktionalgleichung

$$1 - f_x(s+t) = (1 - f_x(s))(1 - f_x(t)), \quad s, t \geq 0.$$

   Für den Nachweis dieses funktionalen Zusammenhangs gehe man wieder von Reizen a_s und a_t in A aus, die den Bedingungen $\phi(a_s) = s$ und $\phi(a_t) = t$ genügen. Dann gilt

$$\begin{aligned} 1 - f_x(s+t) &= 1 - f_x(\phi(a_s) + \phi(a_t)) = 1 - f_x(\phi(a_s \circ a_t)) = 1 - V_x(a_s \circ a_t) \\ &= (1 - V_x(a_s))(1 - V_x(a_t)) = (1 - f_x(\phi(a_s)))(1 - f_x(\phi(a_t))) \\ &= (1 - f_x(s))(1 - f_x(t)). \end{aligned}$$

Die Eigenschaften (3) und (4) stellen bereits die Funktionsform der Abbildung $1-f_x$ sicher (Kapitel 4): Es existiert eine von x abhängende Konstante $\lambda(x) \in \mathbb{R}$, so daß für jede nicht-negative reelle Zahl $t \geq 0$ gilt

$$1 - f_x(t) = \exp(-\lambda(x)t).$$

Aufgrund der Beschränktheit der Abbildung f_x ist die Konstante $\lambda(x)$ notwendigerweise *positiv*: $\lambda(x) > 0$. Insbesondere entspricht die Abbildung f_x der Verteilungsfunktion einer exponentialverteilten Zufallsvariablen:

$$f_x(t) = 1 - \exp(-\lambda(x)t) = \lambda(x) \int_0^t \exp(-\lambda(x)s)ds.$$

Zu jedem Reiz x der Grundmenge A sei nun eine exponentialverteilte Zufallsvariable X_x auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ vorausgesetzt, so daß für jede nicht-negative reelle Zahl $t \geq 0$ gilt

$$F_x(t) \equiv P\{X_x \leq t\} = f_x(t) = 1 - \exp(-\lambda(x)t).$$

Diese Zufallsgrößen stellen eine (im Sinne von Satz B.2 verstandene) Zufallsvariablenrepräsentation dar:

1. Da die Zufallsvariable X_x exponentialverteilt ist, gilt $F_x(\mathbb{R}) \setminus \{0\} = (0,1)$. Dies entspricht dem Bild der Verteilungsfunktion V_x: Es ist $V_x(A) = (0,1)$. Man beachte hierzu: Aufgrund der Abschätzung $0 < V_x(a) < 1$ ist die Abbildung

   $$\psi_x : A \to \mathbb{R}_+, \quad \psi_x(a) := -\ln(1 - V_x(a)), \quad a \in A,$$

   wohldefiniert. Hierdurch wird die Menge A isoton und additiv, also insbesondere *surjektiv* auf die Menge $(0, \infty)$ der positiven reellen Zahlen abgebildet. Dieser Sachverhalt impliziert unmittelbar die Surjektivität der Abbildung $V_x : A \to (0,1)$.

2. Aufgrund der Exponentialverteilungsform der Zufallsvariablen X_x ist der Median der Verteilung von X_x eindeutig bestimmt. Es ist

   $$M(F_x) = \frac{\ln 2}{\lambda(x)}, \quad x \in A.$$

3. Die Abbildung $a \mapsto M(F_{a \circ x_0})$ ist isoton und additiv: Wegen $f_{x \circ x_0}(\phi(x)) = 1/2$ gilt

   $$1 - \exp(-\lambda(x \circ x_0)\phi(x)) = f_{x \circ x_0}(\phi(x)) = \frac{1}{2},$$

   also auch

   $$\exp(-\lambda(x \circ x_0)\phi(x)) = \frac{1}{2}.$$

Die hierzu äquivalente Darstellung

$$\lambda(x \circ x_0) = \frac{\ln 2}{\phi(x)}$$

impliziert die Isotonie und Additivität der Abbildung $a \mapsto M(F_{a \circ x_0})$:

$$M(F_{x \circ x_0}) = \frac{\ln 2}{\lambda(x \circ x_0)} = \frac{\ln 2}{\frac{\ln 2}{\phi(x)}} = \phi(x).$$

Insbesondere gilt für Reize a und b der Grundmenge A der postulierte Zusammenhang

$$F_a(M(F_{b \circ x_0})) = F_a(\phi(b)) = f_a(\phi(b)) = V_a(b).$$

Zum Nachweis der Verteilungseindeutigkeit: Es sei $\{Y_x : x \in A\}$ eine weitere Familie von Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, so daß die geforderten Repräsentationsbedingungen erfüllt sind. Dann ist die Zufallsvariable Y_x P-fast-sicher positiv:

$$Y_x > 0, \quad P\text{-fast-sicher}.$$

Denn: Aufgrund der Repräsentationsbedingungen ist die Abbildung[1]

$$\psi : A \to (0, \infty), \quad \psi(a) := M(F_{a \circ x_0}),$$

isoton und additiv, bildet also die Grundmenge A surjektiv auf das offene Intervall $(0, \infty)$ der positiven reellen Zahlen ab. Daher wähle man eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in A mit $\psi(a_n) \searrow 0$ für $n \to \infty$. In diesem Fall liefert die rechtsseitige Stetigkeit der Verteilungsfunktion F_x den Grenzwert

$$\lim_{n \to \infty} F_x(\psi(a_n)) = F_x(0) = 0.$$

Man beachte hierbei: Aufgrund der Repräsentationsbedingung $V_x(a) = F_x(M(F_{a \circ x_0}))$ existiert zu jedem Reiz a der Grundmenge A eine *positive* reelle Zahl $t_a > 0$ mit $V_x(a) = F_x(t_a)$. Dies impliziert zusammen mit der Reichhaltigkeitsbedingung $V_x(A) = (0, 1)$ bereits die Beziehung $F_x(0) = 0$.

Dieses asymptotische Verhalten der Verteilungsfunktion F_x hat die Positivität der vorausgesetzten Zufallsgröße Y_x zur Folge:

$$P\{Y_x \leq 0\} = P\left(\cap_{n \in \mathbb{N}} \{Y_x \leq \psi(a_n)\}\right) \leq F_x(\psi(a_n)) \to 0.$$

Die Exponentialverteilungsform der Zufallsvariablen Y_x folgt nun gemäß Kapitel 4 aus der Cauchyschen Funktionalgleichung

$$P\{Y_x > s + t\} = P\{Y_x > s\} P\{Y_x > t\}, \quad s, t > 0.$$

[1] Hier ist natürlich von der Verteilungsfunktion F_x der Zufallsvariablen Y_x die Rede.

Man beachte: Zu vorgegebenen positiven reellen Zahlen s und t existieren Reize a_s und a_t in A mit $\psi(a_s) = s$ und $\psi(a_t) = t$. Daher gilt

$$\begin{aligned} P\{Y_x > s+t\} &= 1 - P\{Y_x \le s+t\} = 1 - P\{Y_x \le \psi(a_s) + \psi(a_t)\} \\ &= 1 - P\{Y_x \le \psi(a_s \circ a_t)\} = 1 - P\{Y_x \le M(F_{a_s \circ a_t \circ x_0})\} \\ &= 1 - V_x(a_s \circ a_t) = (1 - V_x(a_s))(1 - V_x(a_t)) \\ &= P\{Y_x > s\}P\{Y_x > t\}. \end{aligned}$$

$\square$

Anhang C

Ein funktionaler Zusammenhang zur Charakterisierung der logistischen Verteilung

Definition C.1 *Es sei $A \neq \emptyset$ eine Menge, $\succeq$ eine binäre Relation auf A, sowie $\circ$ eine binäre Operation auf A. Weiter existiere zu jedem Reiz x der Grundmenge A eine Abbildung V_x, die jedem Reiz $a \in A$ eine reelle Zahl $V_x(a)$ des offenen Einheitsintervalls $(0, 1)$ zuordnet. Das Quadrupel $\langle A, \succeq, \circ, V\rangle$ ist genau dann eine logistische Paarvergleichsstruktur, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

1. *Das Tripel $\langle A, \succeq, \circ\rangle$ genügt den Voraussetzungen von Lemma A.2;*

2. *Die Abbildung $V_x : A \to (0, 1)$ bildet das Relativ $\langle A, \succeq\rangle$ isoton auf $\mathbb{R}$ ab.*

3. *Für Reize a, b und x gilt der funktionale Zusammenhang*

$$\frac{V_x(x \circ a \circ b)}{1 - V_x(x \circ a \circ b)} = \frac{V_x(x \circ a)}{1 - V_x(x \circ a)} \frac{V_x(x \circ b)}{1 - V_x(x \circ b)}; \tag{C.1}$$

4. *Für jeden Reiz $x \in A$ gilt die Normierungsbedingung $V_x(x) = 1/2$.*

Satz C.2 *Es sei $A \neq \emptyset$ eine Menge, $\succeq$ eine binäre Relation auf A, sowie $\circ$ eine Abbildung des kartesischen Produkts $A \times A$ in die Grundmenge A. Weiter existiere zu jedem Reiz x der Grundmenge A eine Abbildung V_x, die jedem Reiz $a \in A$ eine reelle Zahl $V_x(a)$ des offenen Einheitsintervalls $(0, 1)$ zuordnet. Definiert das Quadrupel $\langle A, \succeq, \circ, V\rangle$ eine logistische Paarvergleichsstruktur, so existiert eine Familie $\{X_x : x \in A\}$ von Zufallsvariablen auf einem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, so daß für beliebige Reize $a, b, x \in A$ die folgenden Repräsentationsbedingungen erfüllt sind:*

1. *Die Verteilungsfunktion F_x der Zufallsvariablen X_x nimmt die gleichen Werte wie die qualitative Verteilungsfunktion V_x an: $V_x(A) = F_x(\mathbb{R})$.*

2. *Der Median der Verteilung der Zufallsvariablen X_x ist eindeutig bestimmt.*

3. *Bezeichnet $M(F_x)$ den (eindeutig bestimmten) Median der Verteilung von X_x, so gelten für beliebige Reize a und b die folgenden Bedingungen:*

   (a) $F_a(M(F_b)) = V_a(b)$.

   (b) $a \succeq b \Leftrightarrow M(F_a) \geq M(F_b)$.

   (c) $M(F_{a \circ b}) = M(F_a) + M(F_b)$.

Zur Verteilungseindeutigkeit: Jede derartige Familie $\{X_x : x \in A\}$ von Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ setzt sich notwendigerweise aus logistisch verteilten Zufallsgrößen zusammen: Zu jedem Reiz x der Grundmenge A existiert eine positive Konstante $\lambda(x) > 0$, so daß für jede reelle Zahlen $t \in \mathbb{R}$ gilt:

$$P\{X_x \leq t\} = \frac{1}{1 + \exp(\lambda(x)(M(F_x) - t))}.$$

Beweis: Da das Tripel $\langle A, \succeq, \circ \rangle$ den Voraussetzungen von Lemma A.2 genügt, existiert eine isotone und additive Repräsentation $\phi : A \to \mathbb{R}$. Jede derartige Repräsentation bildet die Grundmenge A *surjektiv* auf die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen ab. Weiter bezeichne B die Gesamtheit aller Äquivalenzklassen bezüglich der induzierten Äquivalenzrelation $\sim$:

$$B := \{[a] : a \in A\}.$$

Aufgrund der Isotonie der Repräsentation ϕ ist die Abbildung

$$\psi : B \to \mathbb{R}, \quad \psi([a]) := \phi(a), \quad a \in A,$$

wohldefiniert, hängt also nicht von der Wahl des Repräsentanten ab: Für jeden anderen Repräsentanten $b \in [a]$ gilt $a \sim b$, also auch $\phi(a) = \phi(b)$. Zusammen mit der Relation

$$[a] \sqsupseteq [b] :\Leftrightarrow a \succeq b$$

bildet ψ die Menge B *bijektiv* und isoton auf die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen ab:

$$[a] \sqsupseteq [b] \Leftrightarrow a \succeq b \Leftrightarrow \phi(a) \geq \phi(b) \Leftrightarrow \psi([a]) \geq \psi([b]).$$

Da die qualitative Verteilungsfunktion V_x die Menge A isoton auf das offene Intervall $(0, 1)$ abbildet, ist die Abbildung

$$U_x : B \to (0, 1), \quad U_x([a]) := V_x(a), \quad a \in A,$$

wohldefiniert und isoton. Für $x \in A$ definiere man die Abbildung $f_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gemäß der Vorschrift

$$f_x(t) = \frac{U_x(\psi^{-1}(t))}{1 - U_x(\psi^{-1}(t))} = \left(\frac{1}{U_x(\psi^{-1}(t))} - 1\right)^{-1}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Dann ist f_x eine auf ganz $\mathbb{R}$ monoton wachsende Abbildung, die der Cauchyschen Funktionalgleichung genügt:

1. Für zwei beliebige Reize a und x der Grundmenge A gilt
$$\begin{aligned} f_x(\phi(a)) &= \frac{U_x(\psi^{-1}(\phi(a)))}{1 - U_x(\psi^{-1}(\phi(a)))} = \frac{U_x(\psi^{-1}(\psi([a])))}{1 - U_x(\psi^{-1}(\psi([a])))} \\ &= \frac{U_x([a])}{1 - U_x([a])} = \frac{V_x(a)}{1 - V_x(a)}. \end{aligned}$$

2. Insbesondere gilt unter Berücksichtigung der vorausgesetzten Normierungsbedingung $V_x(x) = 1/2$ die Beziehung
$$f_x(\phi(x)) = \frac{V_x(x)}{1 - V_x(x)} = 1.$$

3. Die Abbildung f_x ist streng monoton wachsend auf $\mathbb{R}$; für reelle Zahlen $s < t$ ist $f_x(s) < f_x(t)$. Zum Nachweis dieser Behauptung wähle man Reize a_s und a_t in A, so daß $\phi(a_s) = s$ und $\phi(a_t) = t$ gilt. (Man beachte die Surjektivität der Repräsentation ϕ!) Dann impliziert die Isotonie der Abbildung V_x bereits die geforderte strenge Monotonie der Funktion f_x:
$$\begin{aligned} s < t &\Rightarrow \phi(a_s) < \phi(a_t) \Rightarrow a_s \prec a_t \Rightarrow V_x(a_s) < V_x(a_t) \\ &\Rightarrow \frac{1}{V_x(a_t)} - 1 < \frac{1}{V_x(a_s)} - 1 \Rightarrow f_x(\phi(a_s)) < f_x(\phi(a_t)) \\ &\Rightarrow f_x(s) < f_x(t). \end{aligned}$$

4. Die Abbildung f_x genügt der Cauchyschen Funktionalgleichung
$$f_x(\phi(x) + s + t) = f_x(\phi(x) + s) f_x(\phi(x) + t), \quad s, t \in \mathbb{R}.$$
Hierzu gehe man wieder von Reizen a_s und a_t in A aus, die den Bedingungen $\phi(a_s) = s$ und $\phi(a_t) = t$ genügen. Die Funktionalgleichung (C.1) impliziert dann die Cauchysche Funktionalgleichung
$$\begin{aligned} f_x(\phi(x) + s + t) &= f_x(\phi(x \circ a_s \circ a_t)) \\ &= \frac{V_x(x \circ a_s \circ a_t)}{1 - V_x(x \circ a_s \circ a_t)} \\ &= \frac{V_x(x \circ a_s)}{1 - V_x(x \circ a_s)} \frac{V_x(x \circ a_t)}{1 - V_x(x \circ a_t)} \\ &= f_x(\phi(x \circ a_s)) f_x(\phi(x \circ a_t)) \\ &= f_x(\phi(x) + s) f_x(\phi(x) + t). \end{aligned}$$

Daher existiert (gemäß Kapitel 4) eine von x abhängende Konstante $\lambda(x) \in \mathbb{R}$, so daß für jede reelle Zahl $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$f_x(\phi(x) + t) = \exp(\lambda(x)t).$$

Unter Berücksichtigung der eben nachgewiesenen Monotonie der Abbildung f_x läßt sich die Positivität der Konstanten $\lambda(x)$ deduzieren: Es ist $\lambda(x) > 0$. Überdies ergibt sich für einen beliebigen Reiz a der Grundmenge A die Gleichung

$$\frac{V_x(x \circ a)}{1 - V_x(x \circ a)} = f_x(\phi(x \circ a)) = \exp(\lambda(x)\phi(a)),$$

also auch die Darstellung

$$\frac{1}{V_x(x \circ a)} = 1 + \exp(-\lambda(x)\phi(a)).$$

Hieraus resultiert die Beziehung

$$V_x(x \circ a) = \frac{1}{1 + \exp(-\lambda(x)\phi(a))}.$$

Die Darstellung von $V_x(b)$ läßt sich nun wie folgt gewinnen: Zu einem Element $b \in A$ wähle man ein $a \in A$ mit $b \sim x \circ a$. Dann gilt

$$V_x(b) = \frac{1}{1 + \exp(-\lambda(x)\phi(a))} = \frac{1}{1 + \exp(-\lambda(x)(\phi(b) - \phi(x)))}.$$

Zu jedem Reiz x der Grundmenge A sei nun eine logistisch verteilte Zufallsvariable X_x auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ mit Erwartungswert $\phi(x)$ vorausgesetzt. Für eine beliebige reelle Zahl $t \in \mathbb{R}$ gelte

$$P\{X_x \leq t\} = \frac{1}{1 + \exp(-\lambda(x)(t - \phi(x)))}.$$

Diese Zufallsgrößen stellen eine (im Sinne von Satz C.2 verstandene) Zufallsvariablenrepräsentation dar:

1. Da die Zufallsvariable X_x logistisch verteilt ist, gilt $F_x(\mathbb{R}) = (0, 1)$. Dies entspricht dem Bild der Verteilungsfunktion V_x: $V_x(A) = (0, 1)$. Man beachte: Aufgrund der Abschätzung $0 < V_x(a) < 1$ ist die Abbildung

$$\psi_x : A \to \mathbb{R}, \quad \psi_x(a) := \ln\left(\frac{V_x(x \circ a)}{1 - V_x(x \circ a)}\right), \quad a \in A,$$

wohldefiniert. Hierdurch wird die Menge A isoton und additiv, also insbesondere *surjektiv* auf die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen abgebildet. Dieser Sachverhalt führt unmittelbar zur Surjektivität der Abbildung $V_x : A \to (0, 1)$.

2. Aufgrund der strengen Monotonie und Symmetrie der Verteilungsfunktion F_x ist der Median der Verteilung von X_x eindeutig bestimmt:

$$M(F_x) = \phi(x), \quad x \in A.$$

3. Hierdurch wird die Grundmenge A sowohl isoton als auch additiv auf $\mathbb{R}$ abgebildet:

$$\begin{aligned} a \succeq b \quad &\Leftrightarrow \quad M(F_a) \geq M(F_b), \\ M(F_{a \circ b}) \quad &= \quad M(F_a) + M(F_b). \end{aligned}$$

   Zudem gilt für beliebige Reize a und b der Grundmenge A der postulierte Zusammenhang

$$F_a(M(F_b)) = F_a(\phi(b)) = \frac{1}{1 + \exp(-\lambda(a)(\phi(b) - \phi(a)))} = V_a(b).$$

Zum Nachweis der Verteilungseindeutigkeit: Es sei $\{Y_x : x \in A\}$ eine weitere Familie von Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, die den geforderten Repräsentationsbedingungen genügt. Aufgrund der postulierten Isotonie und Additivität der Abbildung[1]

$$\psi : A \to \mathbb{R}, \quad \psi(a) := M(F_a), \quad a \in A,$$

bildet ψ die Grundmenge A surjektiv auf $\mathbb{R}$ ab. Insbesondere existieren zu beliebigen reellen Zahlen $s, t \in \mathbb{R}$ Reize $a_s, a_t \in A$ mit $\psi(a_s) = s$ und $\psi(a_t) = t$. Hiermit gilt

$$\begin{aligned} \frac{F_x(\psi(x) + s + t)}{1 - F_x(\psi(x) + s + t)} &= \frac{F_x(\psi(x \circ a_s \circ a_t))}{1 - F_x(\psi(x \circ a_s \circ a_t))} = \frac{V_x(x \circ a_s \circ a_t)}{1 - V_x(x \circ a_s \circ a_t)} \\ &= \frac{V_x(x \circ a_s)}{1 - V_x(x \circ a_s)} \frac{V_x(x \circ a_t)}{1 - V_x(x \circ a_t)} \\ &= \frac{F_x(\psi(x) + s)}{1 - F_x(\psi(x) + s)} \frac{F_x(\psi(x) + t)}{1 - F_x(\psi(x) + t)}. \end{aligned}$$

Daher existiert eine reelle Konstante $\mu(x) \in \mathbb{R}$ mit

$$\frac{F_x(\psi(x) + t)}{1 - F_x(\psi(x) + t)} = \exp(\mu(x)t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Da die Abbildung F_x monoton wachsend ist, folgt die Positivität der Konstanten $\mu(x)$: Für einen beliebigen Reiz $x \in A$ ist $\mu(x) > 0$. Insbesondere ergibt sich die logistische Verteilungsform der Zufallsvariablen Y_x: Für eine beliebige reelle Zahl $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$P\{Y_x \leq t\} = \frac{1}{1 + \exp(-\mu(x)(t - \psi(x)))}.$$

$\square$

[1] F_a bezeichne im folgenden die Verteilungsfunktion der Zufallvariablen Y_a.

Anhang D

Eine alternative Charakterisierung der logistischen Verteilung

Definition D.1 *Es sei $A \neq \emptyset$ eine Menge, $\succeq$ eine binäre Relation auf A, sowie $\circ$ eine Abbildung des kartesischen Produkts $A \times A$ in die Grundmenge A. Weiter existiere zu jedem Reiz x der Grundmenge A eine Abbildung V_x, die jedem Reiz $a \in A$ eine reelle Zahl $V_x(a)$ des offenen Einheitsintervalls $(0, 1)$ zuordnet. Das Quadrupel $\langle A, \succeq, \circ, V\rangle$ ist genau dann eine schwache logistische Paarvergleichsstruktur, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

1. *Das Tripel $\langle A, \succeq, \circ\rangle$ genügt den Voraussetzungen von Lemma A.1;*

2. *Die Abbildung $V_x : A \to (0, 1)$ bildet das Relativ $\langle A, \succeq\rangle$ isoton auf $\mathbb{R}$ ab.*

3. *Für Reize a, b und x gilt der funktionale Zusammenhang*
$$\frac{V_x(x \circ a \circ b)}{1 - V_x(x \circ a \circ b)} = \frac{V_x(x \circ a)}{1 - V_x(x \circ a)} \frac{V_x(x \circ b)}{1 - V_x(x \circ b)}; \tag{D.1}$$

4. *Die Verteilungsfunktion V_x ist symmetrisch in dem Sinne, daß für $a \prec x$ mit $a \circ a' \sim x$ die Beziehung $1 - V_x(a) = V_x(x \circ a')$ erfüllt ist.*

5. *Für $x \in A$ gilt $V_x(x) = 1/2$.*

Satz D.2 *Es sei $A \neq \emptyset$ eine Menge, $\succeq$ eine binäre Relation auf A, sowie $\circ$ eine Abbildung des kartesischen Produkts $A \times A$ in die Grundmenge A. Weiter existiere zu jedem Reiz x der Grundmenge A eine Abbildung V_x, die jedem Reiz $a \in A$ eine reelle Zahl $V_x(a)$ des offenen Einheitsintervalls $(0, 1)$ zuordnet. Definiert das Quadrupel $\langle A, \succeq, \circ, V\rangle$ eine schwache logistische Paarvergleichsstruktur, so existiert eine Familie $\{X_x : x \in A\}$ von Zufallsvariablen auf einem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, so daß für beliebige Reize $a, b, x \in A$ die folgenden Repräsentationsbedingungen erfüllt sind:*

1. *Bezeichnet F_x die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen X_x, so stimmt der Wertebereich $F_x((0,\infty))$ mit dem Wertebereich der qualitativen Verteilungsfunktion V_x überein: $V_x(A) = F_x((0,\infty))$.*

2. *Der Median der Verteilung der Zufallsvariablen X_x ist eindeutig bestimmt.*

3. *Bezeichnet $M(F_x)$ den (eindeutig bestimmten) Median der Verteilung von X_x, so gelten für beliebige Reize a und b die folgenden Bedingungen:*

   (a) *Der Median $M(F_a)$ ist positiv: $M(F_a) > 0$.*

   (b) $F_a(M(F_b)) = V_a(b)$.

   (c) $a \succeq b \Leftrightarrow M(F_a) \geq M(F_b)$.

   (d) $M(F_{a \circ b}) = M(F_a) + M(F_b)$.

Diese Bedingungen determinieren bereits die Verteilungsfunktion auf $\mathbb{R}_+$: Bezeichnet $\{Y_x : x \in A\}$ eine weitere Familie von Zufallsvariablen, die den geforderten Repräsentationsbedingungen genügt, so existiert zu jedem Reiz x der Grundmenge A eine positive Konstante $\lambda(x) > 0$, so daß für positive reelle Zahlen $t > 0$ gilt:

$$P\{Y_x \leq t\} = \frac{1}{1 + \exp(\lambda(x)(M(F_x) - t))}.$$

Beweis: Da das Tripel $\langle A, \succeq, \circ \rangle$ den Voraussetzungen von Lemma A.1 genügt, existiert eine isotone und additive Repräsentation $\phi : A \to \mathbb{R}$. Jede derartige Repräsentation bildet die Grundmenge A *surjektiv* auf das offene Intervall $(0, \infty)$ der positiven reellen Zahlen ab. Weiter bezeichne B die Gesamtheit aller Äquivalenzklassen bezüglich der induzierten Äquivalenzrelation $\sim$:

$$B := \{[a] : a \in A\}.$$

Aufgrund der Isotonie der Repräsentation ϕ ist die Abbildung

$$\psi : B \to (0, \infty), \quad \psi([a]) := \phi(a), \quad a \in A,$$

wohldefiniert, hängt also nicht von der Wahl des Repräsentanten ab: Für jeden anderen Repräsentanten $b \in [a]$ gilt $a \sim b$, also auch $\phi(a) = \phi(b)$. Zusammen mit der Relation

$$[a] \sqsupseteq [b] :\Leftrightarrow a \succeq b$$

bildet ψ die Menge B *bijektiv* und isoton auf das offene Intervall $(0, \infty)$ ab:

$$[a] \sqsupseteq [b] \Leftrightarrow a \succeq b \Leftrightarrow \phi(a) \geq \phi(b) \Leftrightarrow \psi([a]) \geq \psi([b]).$$

Da die qualitative Verteilungsfunktion V_x die Menge A isoton auf das offene Intervall $(0, 1)$ abbildet, ist die Abbildung

$$U_x : B \to (0, 1), \quad U_x([a]) := V_x(a), \quad a \in A,$$

wohldefiniert und isoton. Für $x \in A$ definiere man eine reellwertige Abbildung f_x auf dem offenen Intervall $(0, \infty)$:

$$f_x := U_x \circ \psi^{-1}.$$

Die Eigenschaften der Abbildungen V_x (bzw. U_x) und ψ (bzw. ϕ) übertragen sich unmittelbar auf die Funktion f_x:

1. Nach Konstruktion der Abbildung f_x gilt für einen beliebigen Reiz a der Grundmenge A

$$f_x(\phi(a)) = U_x(\psi^{-1}(\phi(a))) = U_x(\psi^{-1}(\psi([a]))) = U_x([a]) = V_x(a).$$

2. Insbesondere gilt unter Berücksichtigung der vorausgesetzten Normierungsbedingung $V_x(x) = 1/2$ die Beziehung $f_x(\phi(x)) = 1/2$.

Zur genaueren Bestimmung der Abbildung f_x nutze man den funktionalen Zusammenhang (D.1): Dazu gehe man von positiven reellen Zahlen $s, t > 0$, sowie Reizen $a_s, a_t \in A$ aus, die den Bedingungen $\phi(a_s) = s$ und $\phi(a_t) = t$ genügen. (Man beachte die Surjektivität der Abbildung ϕ!) Aufgrund der definierenden Eigenschaft der Abbildung f_x läßt sich zusammen mit der qualitativen Funktionalgleichung (D.1) die Cauchysche Funktionalgleichung

$$\frac{f_x(\phi(x) + s + t)}{1 - f_x(\phi(x) + s + t)} = \frac{f_x(\phi(x) + s)}{1 - f_x(\phi(x) + s)} \frac{f_x(\phi(x) + t)}{1 - f_x(\phi(x) + t)}, \quad s, t \geq 0,$$

deduzieren. Man beachte: Zunächst läßt sich diese Funktionalgleichung lediglich für positive reelle Zahlen $s, t > 0$ ableiten. Aufgrund der bereits deduzierten Anfangsbedingung $f_x(\phi(x)) = 1/2$ ist es möglich, diese Gleichung auf den Bereich der nichtnegativen reellen Zahlen fortzusetzen. Damit genügt die Abbildung

$$h_x : [0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad h_x(t) := \frac{f_x(\phi(x) + t)}{1 - f_x(\phi(x) + t)},$$

der Cauchyschen Funktionalgleichung

$$h_x(s + t) = h_x(s)h_x(t), \quad s, t \geq 0.$$

Überdies ist h_x streng monoton wachsend: Für positive reelle Zahlen $0 < s < t$ gilt

$$h_x(s) < h_x(t).$$

Für den Nachweis dieser Behauptung setze man Reize $a_s, a_t \in A$ voraus, die den Bedingungen $\phi(a_s) = s$ und $\phi(a_t) = t$ genügen. Dann gilt

$$\begin{aligned} h_x(s) &= h_x(\phi(a_s)) = \frac{f_x(\phi(x) + \phi(a_s))}{1 - f_x(\phi(x) + \phi(a_s))} = \frac{f_x(\phi(x \circ a_s))}{1 - f_x(\phi(x \circ a_s))} \\ &= \frac{V_x(x \circ a_s)}{1 - V_x(x \circ a_s)} = \frac{1}{\frac{1}{V_x(x \circ a_s)} - 1} < \frac{1}{\frac{1}{V_x(x \circ a_t)} - 1} = h_x(t). \end{aligned}$$

Insbesondere existiert gemäß Kapitel 4 eine reelle Zahl $\lambda(x) \in \mathbb{R}$, so daß für jedes $t \geq 0$ gilt

$$\exp(\lambda(x)t) = h_x(t) = \frac{f_x(\phi(x) + t)}{1 - f_x(\phi(x) + t)}.$$

Eine elementare Umformung liefert nun die Darstellung der Abbildung f_x: Es ist

$$\frac{1}{f_x(\phi(x) + t)} = 1 + \exp(-\lambda(x)t),$$

also insbesondere

$$f_x(\phi(x) + t) = \frac{1}{1 + \exp(-\lambda(x)t)}.$$

Die Substitution $s := \phi(x) + t$ hat den Ausdruck

$$f_x(s) = \frac{1}{1 + \exp(-\lambda(x)(s - \phi(x)))}, \quad s \geq \phi(x),$$

zur Folge. Berücksichtigt man das Monotonieverhalten der Abbildung f_x, so kann die Positivität der Konstanten $\lambda(x)$ abgeleitet werden: Es ist $\lambda(x) > 0$.

Die noch unbekannten Funktionswerte lassen sich nun unter Berücksichtigung des Symmetrieaxioms deduzieren. Dazu sei eine positive Zahl $t < \phi(x)$, sowie eine positive reelle Zahl $s > 0$ mit $t + s = \phi(x)$ vorausgesetzt. Unter Ausnutzung der Surjektivität der Repräsentation ϕ wähle man Reize $a_s, a_t \in A$ mit $\phi(a_s) = s$ und $\phi(a_t) = t$. Wegen der Additivität der Abbildung ϕ gilt $a_t \circ a_s \sim x$. Insbesondere ergibt sich wegen $V_x(a_t) = 1 - V_x(x \circ a_s)$ die Darstellung

$$\begin{aligned} f_x(t) &= f_x(\phi(a_t)) = V_x(a_t) = 1 - V_x(x \circ a_s) = 1 - f_x(\phi(x \circ a_s)) \\ &= 1 - f_x(\phi(x) + s) = 1 - \frac{1}{1 + \exp(-\lambda(x)s)} \\ &= \frac{1}{1 + \exp(\lambda(x)(\phi(x) - t))} = \frac{1}{1 + \exp(-\lambda(x)(t - \phi(x)))}. \end{aligned}$$

Jedem Reiz x der Grundmenge A ordne man nun eine logistisch verteilte Zufallsvariable X_x auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ zu: Für eine reelle Zahl $t \in \mathbb{R}$ gelte

$$F_x(t) = P\{X_x \leq t\} = \frac{1}{1 + \exp(\lambda(x)(\phi(x) - t))}.$$

Diese Zufallsvariablen genügen den geforderten Repräsentationsbedingungen: Zunächst halte man fest, daß der Median der Verteilung der Zufallsvariablen X_x eindeutig bestimmt ist. Es ist

$$M(F_x) = \phi(x), \quad x \in A.$$

Hieraus lassen sich unter Berücksichtigung der Isotonie, Additivität und Positivität der Abbildung ϕ sofort die übrigen Repräsentationsbedingungen ableiten:

$$\begin{aligned} a \succeq b &\Leftrightarrow& \phi(a) \geq \phi(b) \Leftrightarrow M(F_a) \geq M(F_b); \\ M(F_{a \circ b}) &=& \phi(a \circ b) = \phi(a) + \phi(b) = M(F_a) + M(F_b); \\ F_a(M(F_b)) &=& P\{X_a \leq M(F_b)\} = f_a(\phi(b)) = V_a(b). \end{aligned}$$

Insbesondere stimmt der Wertebereich $F_a((0,\infty))$ mit dem Wertebereich der qualitativen Verteilungsfunktion V_a überein: Wegen $M(F_b) > 0$ resultiert die Inklusion $F_a((0,\infty)) \supset V_a(A)$ aus der Darstellung $F_a(M(F_b)) = V_a(b)$. Zum Nachweis der Umkehrung setze man eine positive reelle Zahl $t > 0$ voraus. Dann existiert ein Element $a_t \in A$ mit $\phi(a_t) = t$. Hierfür gilt

$$F_a(t) = F_a(\phi(a_t)) = F_a(M(F_{a_t})) = V_a(a_t).$$

Insbesondere ist $F_a((0,\infty)) \subset V_a(A)$.

Für den Nachweis der Verteilungseindeutigkeit gehe man von Zufallsvariablen Y_x auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ aus, die den geforderten Repräsentationsbedingungen genügen. Zunächst halte man fest, daß die Abbildung[1]

$$\varphi : A \to (0,\infty), \quad \varphi(a) := M(F_a), \quad a \in A,$$

eine isotone, additive und surjektive Repräsentation der Grundmenge A darstellt. Insbesondere genügt die Verteilungsfunktion F_x der Zufallsvariablen Y_x der Funktionalgleichung

$$\frac{F_x(\varphi(x)+s+t)}{1-F_x(\varphi(x)+s+t)} = \frac{F_x(\varphi(x)+s)}{1-F_x(\varphi(x)+s)} \frac{F_x(\varphi(x)+t)}{1-F_x(\varphi(x)+t)}, \quad s,t > 0.$$

Aufgrund der postulierten Anfangsbedingung

$$F_x(\varphi(x)) = V_x(x) = \frac{1}{2}$$

läßt sich diese Funktionalgleichung auf die Menge der nicht-negativen reellen Zahlen fortsetzen. Hieraus resultiert die Darstellung

$$\frac{F_x(\varphi(x)+t)}{1-F_x(\varphi(x)+t)} = \exp(\mu(x)t), \quad t \geq 0,$$

[1] F_a bezeichne im folgenden die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen Y_a.

also auch der Ausdruck

$$\frac{F_x(t)}{1 - F_x(t)} = \exp(\mu(x)(t - \varphi(x))), \quad t > 0.$$

Dies stellt die logistische Verteilungsform der Zufallsvariablen Y_x sicher:

$$F_x(t) = \frac{1}{1 + \exp(\mu(x)(\varphi(x) - t))}, \quad t > 0.$$

$\square$

Anhang E

Eine meßtheoretische Ableitung der logistischen Funktionsform psychometrischer Funktionen

Satz E.1 *Es sei* $0 \leq c_1 < c_2 < C$, $I_0 := (c_1, c_2)$ *und* $I_1 := (0, C)$. *Für jedes* $x \in I_0$ *sei* $V_x : I_1 \to (0, 1)$ *eine Abbildung. Für alle* $x \in I_0$ *gelte:*

1. *Für* $s, t \in I_1$ *mit* $s < t$ *ist* $V_x(s) < V_x(t)$.

2. *Es existiert ein* $0 < m(x) < C/2$ *mit* $V_x(m(x)) = 0.5$.

3. *Für* $s, t \in I_1$ *mit* $m(x) + s + t \in I_1$ *gilt*

$$\frac{V_x(m(x) + s + t)}{1 - V_x(m(x) + s + t)} = \frac{V_x(m(x) + s)}{1 - V_x(m(x) + s)} \frac{V_x(m(x) + t)}{1 - V_x(m(x) + t)}.$$

4. *Für* $0 < s < m(x)$ *gilt* $1 - V_x(s) = V_x(m(x) + (m(x) - s))$.

Dann existiert zu jedem $x \in I_0$ *eine positive Konstante* $\delta(x) > 0$, *so daß für alle* $0 < s < C$ *gilt:*

$$V_x(s) = \frac{1}{1 + \exp(-\delta(x)(s - m(x)))}. \tag{E.1}$$

Spezialfall: *Angenommen es existiert überdies eine Konstante* $x_0 \in \mathbb{R}$, *so daß für alle* $x \in I_0$ *gilt:*

1. $0 < x + x_0 < C/2$.

2. $V_x(x + x_0) = 0.5$.

Dann läßt sich Gleichung (E.1) präzisieren zu

$$V_x(s) = \frac{1}{1 + \exp(-\delta(x)(s - (x + x_0)))}, \quad s \in I_1.$$

In dieser Situation gilt für $a, x \in I_0$ mit $a > x$:

$$V_x(a + x_0) + V_a(x + x_0) \left\{ \begin{array}{c} > \\ = \\ < \end{array} \right\} 1 \Rightarrow \delta(x) \left\{ \begin{array}{c} > \\ = \\ < \end{array} \right\} \delta(a).$$

Beweis: Zu einem fixierten $x \in I_0$ definiere man

$$I_x := \{t > 0 : m(x) + t \in I_1\}.$$

Dann gilt:

1. Es ist $I_x \neq \emptyset$: Wegen $0 < m(x)$ wähle man eine reelle Zahl $0 < t < m(x)$. Hierfür gilt

   $$0 < m(x) + t < m(x) + m(x) < C,$$

   also auch $m(x) + t \in I_1$. Insbesondere ist $t \in I_x$: $(0, m(x)) \subset I_x$.

2. I_x ist ein Intervall mit linkem Endpunkt 0: Dazu ist für $t \in I_x$ und $0 < s < t$ zu zeigen: $s \in I_x$. Wegen

   $$0 < m(x) + s < m(x) + t < C$$

   ist $s \in I_x$. Daher ist I_x ein Intervall der Form

   $$(0, \epsilon) \text{ oder } (0, \epsilon].$$

3. Es ist $I_x = (0, \epsilon)$: Angenommen es gilt

   $$I_x = (0, \epsilon].$$

   Dann ist $m(x) + \epsilon \in I_1$, also $m(x) + \epsilon < C$. Insbesondere existiert eine Konstante $\delta > \epsilon$ mit

   $$m(x) + \delta < C.$$

   Hieraus resultiert jedoch der Widerspruch $\delta > \epsilon$ und $\delta \in I_x = (0, \epsilon]$.

Insbesondere existiert zu jedem $x \in I_0$ eine positive Konstante $\epsilon(x) > 0$ mit

$$I_x = (0, \epsilon(x)).$$

Man betrachte nun die Abbildung $h_x : I_x \to (0, \infty)$:

$$h_x(t) := \frac{V_x(m(x)+t)}{1 - V_x(m(x)+t)}, \quad t \in I_x.$$

Man beachte: Wegen $t \in I_x$ ist $m(x) + t \in I_1$. Damit ist aber der Ausdruck $V_x(m(x)+t)$ wohldefiniert. Die Wohldefiniertheit der Abbildung h_x resultiert nun aus der Abschätzung

$$0 < V_x(m(x)+t) < 1.$$

Weiter ist h_x streng monoton wachsend auf I_x, denn: Für $s < t$ in I_x gilt die Abschätzung $m(x) + s < m(x) + t$. Die strenge Monotonie der Abbildung V_x führt zu

$$V_x(m(x)+s) < V_x(m(x)+t),$$

also auch

$$\frac{1}{V_x(m(x)+t)} < \frac{1}{V_x(m(x)+s)}.$$

Die hierzu äquivalente Abschätzung

$$\frac{1}{V_x(m(x)+t)} - 1 < \frac{1}{V_x(m(x)+s)} - 1$$

führt unmittelbar zu

$$\frac{V_x(m(x)+s)}{1 - V_x(m(x)+s)} < \frac{V_x(m(x)+t)}{1 - V_x(m(x)+t)},$$

und somit auch zur strengen Monotonie der Abbildung h_x:

$$h_x(s) < h_x(t).$$

Überdies genügt h_x der Cauchyschen Funktionalgleichung $h_x(s+t) = h_x(s)h_x(t)$, denn: Für $s, t \in \mathbb{R}$ mit $s, t, s+t \in I_x$ gilt

$$\begin{aligned} h_x(s+t) &= \frac{V_x(m(x)+s+t)}{1 - V_x(m(x)+s+t)} = \frac{V_x(m(x)+s)}{1 - V_x(m(x)+s)} \frac{V_x(m(x)+t)}{1 - V_x(m(x)+t)} \\ &= h_x(s)h_x(t). \end{aligned}$$

Der Übergang zur Abbildung $k_x : I_x \to \mathbb{R}$,

$$k_x(t) := \ln(h_x(t)), \quad t \in I_x,$$

liefert eine streng monoton wachsende Abbildung, die der Cauchyschen Grundgleichung $k_x(s+t) = k_x(s) + k_x(t)$ genügt. Da I_x ein offenes Intervall ist, welches 0 als einen Häufungspunkt besitzt, existiert nach Falmagne (1985, Theorem 3.2) eine positive Konstante $\delta(x) > 0$, so daß für alle $t \in I_x$ gilt

$$k_x(t) = \delta(x)t.$$

Insbesondere ist

$$h_x(t) = \exp(k_x(t)) = \exp(\delta(x)t), \quad t \in I_x,$$

also auch

$$\frac{V_x(m(x)+t)}{1-V_x(m(x)+t)} = \exp(\delta(x)t).$$

Dies führt unmittelbar zu

$$V_x(m(x)+t) = \frac{1}{1+\exp(-\delta(x)t)}, \quad t \in I_x.$$

Insbesondere gilt für $m(x) < s < C$:

$$V_x(s) = V_x(m(x) + (s - m(x))) = \frac{1}{1+\exp(-\delta(x)(s-m(x)))}.$$

Für $0 < t < m(x)$ resultiert der Wert $V_x(t)$ aus Symmetriebedingung 4: Es ist

$$\begin{aligned} V_x(t) &= 1 - V_x(m(x) + (m(x) - t)) = 1 - \frac{1}{1+\exp(-\delta(x)(m(x)-t))} \\ &= \frac{\exp(-\delta(x)(m(x)-t))}{1+\exp(-\delta(x)(m(x)-t))} = \frac{1}{\exp(\delta(x)(m(x)-t))+1} \\ &= \frac{1}{1+\exp(-\delta(x)(t-m(x)))}. \end{aligned}$$

Der Nachweis des Spezialfalls: Ist $0 < x + x_0 < C/2$ mit $V_x(x + x_0) = 0.5$ vorausgesetzt, so ist

$$m(x) = x + x_0.$$

Insbesondere gilt

$$V_x(s) = \frac{1}{1+\exp(-\delta(x)(s-(x+x_0)))}, \quad s \in I_1.$$

Es sei nun $a > x$ in I_0 mit

$$V_x(a + x_0) + V_a(x + x_0) \left\{ \begin{array}{c} > \\ = \\ < \end{array} \right\} 1$$

gegeben. Dann gilt

$$\frac{1}{1+\exp(-\delta(x)(a+x_0-x-x_0))} + \frac{1}{1+\exp(-\delta(a)(x+x_0-a-x_0))} \left\{ \begin{array}{c} > \\ = \\ < \end{array} \right\} 1$$

$$\Rightarrow \frac{1+\exp(\delta(a)(a-x)) + 1 + \exp(-\delta(x)(a-x))}{[1+\exp(-\delta(x)(a-x))][1+\exp(\delta(a)(a-x))]} \left\{ \begin{array}{c} > \\ = \\ < \end{array} \right\} 1$$

$$\Rightarrow 1 \left\{ \begin{array}{c} > \\ = \\ < \end{array} \right\} \exp(-\delta(x)(a-x)) \exp(\delta(a)(a-x))$$

$$\Rightarrow \exp(\delta(x)(a-x)) \left\{ \begin{array}{c} > \\ = \\ < \end{array} \right\} \exp(\delta(a)(a-x))$$

$$\Rightarrow \delta(x) \left\{ \begin{array}{c} > \\ = \\ < \end{array} \right\} \delta(a)$$

$\square$

Bemerkung: Ein ähnliches Resultat kann für den alternativen Spezialfall bewiesen werden, daß eine positive Konstante $\lambda > 0$ existiert mit

1. Für alle $x \in I_0$ ist $\lambda x < C/2$.
2. Für alle $x \in I_0$ ist $V_x(\lambda x) = \frac{1}{2}$.

In dieser Situation gilt für $a, x \in I_0$ mit $a > x$:

$$V_x(\lambda a) + V_a(\lambda x) \left\{ \begin{array}{c} > \\ = \\ < \end{array} \right\} 1 \Rightarrow \delta(x) \left\{ \begin{array}{c} > \\ = \\ < \end{array} \right\} \delta(a).$$

Anhang F

Paarvergleichswahrscheinlichkeiten als Meßergebnisse

Im folgenden sei $A \neq \emptyset$ eine Menge, sowie $\succ_{4,4}$ eine binäre Relation auf dem vierfachen kartesischen Produkt A^4. Anstelle von $(a, b, c, d, e, f, g, h) \in \succ_{4,4}$ schreibe man stets $(a, b, c, d) \succ_{4,4} (e, f, g, h)$. In naheliegender Weise lassen sich binäre Relationen $\succeq_{4,4}$ und $\sim_{4,4}$ auf A^4 definieren. Für $a, b, c, d, e, f, g, h \in A$ sei

$$\begin{aligned}
(a, b, c, d) \succeq_{4,4} (e, f, g, h) \quad &:\Leftrightarrow \quad \neg((e, f, g, h) \succ_{4,4} (a, b, c, d)); \\
(a, b, c, d) \sim_{4,4} (e, f, g, h) \quad &:\Leftrightarrow \quad \neg((a, b, c, d) \succ_{4,4} (e, f, g, h)) \wedge \\
&\qquad \neg((e, f, g, h) \succ_{4,4} (a, b, c, d)).
\end{aligned}$$

Neben der Relation $\succ_{4,4}$ sei eine binäre Relation auf dem kartesischen Produkt $A \times A$ vorausgesetzt. Anstelle von $(a, b, c, d) \in \succ_{2,2}$ schreibe man stets $(a, b) \succ_{2,2} (c, d)$. Hierzu definiere man binäre Relationen $\succeq_{2,2}$ und $\sim_{2,2}$ auf $A \times A$ gemäß

$$\begin{aligned}
(a, b) \succeq_{2,2} (c, d) \quad &:\Leftrightarrow \quad \neg((c, d) \succ_{2,2} (a, b)); \\
(a, b) \sim_{2,2} (c, d) \quad &:\Leftrightarrow \quad \neg((a, b) \succ_{2,2} (c, d)) \wedge \neg((c, d) \succ_{2,2} (a, b)).
\end{aligned}$$

Das Tripel $\langle A, \succ_{2,2}, \succ_{4,4} \rangle$ genüge den Bedingungen einer *schwachen qualitativen Paarvergleichsstruktur*:

Definition F.1 *Es sei $A \neq \emptyset$ eine nichtleere Menge, $\succ_{2,2}$ eine binäre Relation auf A^2 und $\succ_{4,4}$ eine binäre Relation auf A^4. Das Tripel $\langle A, \succ_{2,2}, \succ_{4,4} \rangle$ ist genau dann eine schwache qualitative Paarvergleichsstruktur, wenn gilt:*

1. *Konnexität: Für $a, b, c, d, e, f, g, h \in A$ ist entweder $(a, b, c, d) \succ_{4,4} (e, f, g, h)$, $(e, f, g, h) \succ_{4,4} (a, b, c, d)$ oder $(a, b, c, d) \sim_{4,4} (e, f, g, h)$. Diese drei Fälle schließen sich aus.*

2. *Transitivität von* $\succ_{4,4}$*: Für* $a, b, c, d, i, j, k, l \in A$ *gelte* $(i, j, k, l) \succ_{4,4} (a, b, c, d)$*. Dann gilt für beliebige Reize* $e, f, g, h \in A$*: Es ist* $(e, f, g, h) \succ_{4,4} (a, b, c, d)$ *oder* $(i, j, k, l) \succ_{4,4} (e, f, g, h)$*.*

3. *Thomsen-Bedingung: Für* $a, b, c, d, o, p, q, r \in A$ *gelte* $(a, b, q, r) \succ_{4,4} (c, d, o, p)$*. Dann gilt für* $e, f, x, y \in A$ *mindestens eine der folgenden vier Bedingungen:* $(a, b, x, y) \succ_{4,4} (e, f, o, p)$*,* $(e, f, o, p) \succ_{4,4} (a, b, x, y)$*,* $(e, f, q, r) \succ_{4,4} (c, d, x, y)$ *oder* $(c, d, x, y) \succ_{4,4} (e, f, q, r)$*.*

4. *Beschränkte Lösbarkeit: Für Reize* $a, b, \underline{c}, \underline{d}, \bar{c}, \bar{d}, p, q, r, s$ *der Grundmenge* A *gelte* $(\bar{c}, \bar{d}, r, s) \succeq_{4,4} (a, b, p, q) \succeq_{4,4} (\underline{c}, \underline{d}, r, s)$*. Dann existieren Reize* $c, d \in A$ *mit* $(c, d, r, s) \sim_{4,4} (a, b, p, q)$*.*

5. *Wesentlichkeit: Es existieren* $a, b, c, d, e, f \in A$ *mit* $(a, b, e, f) \succ_{4,4} (c, d, e, f)$*.*

6. *Verträglichkeit der Relationen* $\succ_{2,2}$ *und* $\succ_{4,4}$*: Für* $a, b, c, d, e, f \in A$ *gilt genau dann* $(a, b) \succ_{2,2} (c, d)$*, wenn* $(a, b, e, f) \succ_{4,4} (c, d, e, f)$ *ist.*

7. *Symmetrie: Für* $a, b, c, d \in A$ *ist* $(a, b, c, d) \sim_{4,4} (c, d, a, b)$*.*

8. *Archimedische Eigenschaft: Jede beschränkte Standardfolge in* A^2 *ist endlich. Dabei heißt eine Folge* $\{(a_i, b_i) : a_i, b_i \in A, i \in N\}$ *genau dann Standardfolge in* A^2*, wenn Elemente* $p, q, r, s \in A$ *existieren, so daß* $\neg((p, q) \sim_{2,2} (r, s))$ *und* $(a_i, b_i, p, q) \sim_{4,4} (a_{i+1}, b_{i+1}, r, s)$ *für alle* $i, i + 1 \in N$ *gilt.*

9. *Strenge Archimedische Eigenschaft: Jede streng monoton wachsende Standardfolge in* A^2 *ist endlich.*

Lemma F.2 *Ist* $\langle A, \succ_{2,2}, \succ_{4,4} \rangle$ *eine schwache qualitative Paarvergleichsstruktur, so existiert eine Abbildung* $p : A \times A \to [0, 1]$*, so daß für alle* $a, b, c, d, e, f, g, h \in A$ *gilt:*

$$\begin{aligned} (a, b) \succ_{2,2} (c, d) \quad &\Leftrightarrow \quad p(a, b) > p(c, d), \\ (a, b, c, d) \succ_{4,4} (e, f, g, h) \quad &\Leftrightarrow \quad p(a, b)p(c, d) > p(e, f)p(g, h). \end{aligned}$$

Ist $p : A \times A \to [0, 1]$ *eine derartige Abbildung, so ist* $p(a, b) \neq 0$ *für* $(a, b) \in A^2$*. Ist* $q : A \times A \to [0, 1]$ *eine weitere Repräsentation des Tripels* $\langle A, \succ_{2,2}, \succ_{4,4} \rangle$*, so existieren Konstanten* $\alpha, \beta > 0$ *mit* $q = \alpha p^\beta$*.*

Beweis: Zunächst halte man fest, daß das Tripel $\langle A^2, A^2, \succeq_{4,4} \rangle$ eine additiv verbundene Meßstruktur definiert (Krantz et al., 1971, Definition 6.7):

1. Konnexität von $\succeq_{4,4}$: Aufgrund der vorausgesetzten Konnexität der Relation $\succ_{4,4}$ ist die Relation $\succeq_{4,4}$ natürlich ebenfalls konnex: Für $a, b, c, d, e, f, g, h \in A$ ist $(a, b, c, d) \succeq_{4,4} (e, f, g, h)$ oder $(e, f, g, h) \succeq_{4,4} (a, b, c, d)$.

2. Transitivität von $\succeq_{4,4}$: Für Reize a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l der Grundmenge A gelte $(a,b,c,d) \succeq_{4,4} (e,f,g,h)$ und $(e,f,g,h) \succeq_{4,4} (i,j,k,l)$. Dann ist insbesondere

$$\neg((e,f,g,h) \succ_{4,4} (a,b,c,d)) \wedge \neg((i,j,k,l) \succ_{4,4} (e,f,g,h)).$$

Daher gilt aufgrund der geforderten Transitivität der Relation $\succ_{4,4}$ die Beziehung $\neg((i,j,k,l) \succ_{4,4} (a,b,c,d))$. Dies impliziert die Transitivität von $\succeq_{4,4}$: $(a,b,c,d) \succeq_{4,4} (i,j,k,l)$.

3. Unabhängigkeit: Für $a,b,c,d,e,f \in A$ gelte $(a,b,e,f) \succeq_{4,4} (c,d,e,f)$, also auch $\neg((c,d,e,f) \succ_{4,4} (a,b,e,f))$. Aufgrund der geforderten Verträglichkeit der Relationen $\succ_{2,2}$ und $\succ_{4,4}$ ist dies äquivalent zu $\neg((c,d) \succ_{2,2} (a,b))$. Mit der gleichen Argumentation folgt hieraus $\neg((c,d,e',f') \succ_{4,4} (a,b,e',f'))$, also auch $(a,b,e',f') \succeq_{4,4} (c,d,e',f')$. Überdies gilt aufgrund der vorausgesetzten Symmetrie: Ist $(e,f,a,b) \succeq_{4,4} (e,f,c,d)$, so auch $(e',f',a,b) \succeq_{4,4} (e',f',c,d)$.

4. Thomsen-Bedingung: Für Reize a,b,c,d,e,f,o,p,q,r,x,y der Grundmenge A gelte $(a,b,x,y) \sim_{4,4} (e,f,o,p)$ und $(e,f,q,r) \sim_{4,4} (c,d,x,y)$. Dann impliziert die Definition der Relation $\sim_{4,4}$ zusammen mit der vorausgesetzten Thomsen-Bedingung die Beziehung $\neg((a,b,q,r) \succ_{4,4} (c,d,o,p))$, also auch die Ungleichung $(c,d,o,p) \succeq_{4,4} (a,b,q,r)$. Analog zeigt man die umgekehrte Abschätzung $(a,b,q,r) \succeq_{4,4} (c,d,o,p)$.

5. Beschränkte Lösbarkeit: Für Reize $a,b,\underline{c},\underline{d},\bar{c},\bar{d},p,q,r,s$ der Grundmenge A gelte $(\bar{c},\bar{d},r,s) \succeq_{4,4} (a,b,p,q) \succeq_{4,4} (\underline{c},\underline{d},r,s)$. Dann existieren Reize $c,d \in A$ mit $(c,d,r,s) \sim_{4,4} (a,b,p,q)$. Insbesondere liefert das vorausgesetzte Symmetrieaxiom eine analoge Lösbarkeitsbedingung für die dritte und vierte Komponente: Ist $(r,s,\bar{c},\bar{d}) \succeq_{4,4} (p,q,a,b) \succeq_{4,4} (r,s,\underline{c},\underline{d})$, so existieren Reize $c,d \in A$, die der Äquivalenz $(r,s,c,d) \sim_{4,4} (p,q,a,b)$ genügen.

6. Wesentlichkeit: Es existieren Elemente $a,b,c,d,e,f \in A$, die der Abschätzung $(a,b,e,f) \succ_{4,4} (c,d,e,f)$, also auch der Bedingung $\neg((a,b,e,f) \sim_{4,4} (c,d,e,f))$ genügen.

7. Archimedische Eigenschaft: Jede beschränkte Standardfolge in A^2 ist endlich.

Daher existieren gemäß dem Repräsentationssatz für additiv verbundene Strukturen Abbildungen $\phi_1, \phi_2 : A \times A \to \mathbb{R}$, die das Tripel $\langle A^2, A^2, \succeq_{4,4} \rangle$ additiv im Sinne von

$$(a,b,c,d) \succeq_{4,4} (e,f,g,h) \Leftrightarrow \phi_1(a,b) + \phi_2(c,d) \geq \phi_1(e,f) + \phi_2(g,h)$$

repräsentieren. Jede derartige Abbildung $\phi_1 : A \times A \to \mathbb{R}$ ist nach oben beschränkt.

[Man beachte: Angenommen ϕ_1 ist *nicht* nach oben beschränkt, zu jedem $c > 0$ existiere also ein Element $(a,b) \in A \times A$ mit $\phi_1(a,b) > c$. Insbesondere existieren Elemente $p,q,r,s \in A$ mit $\phi_1(p,q) > \phi_1(r,s)$. Für $a,b \in A$ gilt also

$$\phi_1(p,q) + \phi_2(a,b) > \phi_1(r,s) + \phi_2(a,b),$$

und damit auch $(p,q,a,b) \succ_{4,4} (r,s,a,b)$. Dies impliziert zusammen mit der Verträglichkeit der Relationen $\succ_{2,2}$ und $\succ_{4,4}$ die Abschätzung $(p,q) \succ_{2,2} (r,s)$. Hierzu läßt sich eine unendliche Standardfolge $\{(a_n,b_n) : n \in \mathbb{N}\}$ wie folgt konstruieren: Es sei $(a_1,b_1) \in A \times A$ beliebig vorgegeben. Wegen $(p,q) \succ_{2,2} (r,s)$ ist also die Abschätzung $(p,q,a_1,b_1) \succ_{4,4} (r,s,a_1,b_1)$, und somit auch die Ungleichung $(a_1,b_1,p,q) \succ_{4,4} (a_1,b_1,r,s)$ erfüllt. Aufgrund der Unbeschränktheitsannahme existieren Elemente $\bar{c},\bar{d} \in A$ mit

$$\phi_1(\bar{c},\bar{d}) \geq \phi_1(a_1,b_1) + \phi_2(p,q) - \phi_2(r,s).$$

Die hierzu äquivalente Abschätzung $(\bar{c},\bar{d},r,s) \succeq_{4,4} (a_1,b_1,p,q)$ zeigt die Beziehung

$$(\bar{c},\bar{d},r,s) \succeq_{4,4} (a_1,b_1,p,q) \succ_{4,4} (a_1,b_1,r,s).$$

Zusammen mit der beschränkten Lösbarkeitsbedingung ergibt sich nun ein Reizpaar $(a_2,b_2) \in A \times A$, welches der Äquivalenz $(a_1,b_1,p,q) \sim_{4,4} (a_2,b_2,r,s)$ genügt. Insbesondere ist

$$(a_2,b_2,r,s) \sim_{4,4} (a_1,b_1,p,q) \succ_{4,4} (a_1,b_1,r,s),$$

also auch

$$(a_2,b_2) \succ_{2,2} (a_1,b_1).$$

Wendet man diese Argumentation auf das Paar (a_2,b_2) an, so läßt sich ein weiteres Element einer Standardfolge konstruieren. Dieses Verfahren führt zu einer streng monoton wachsenden Standardfolge $\{(a_n,b_n) : n \in \mathbb{N}\}$. Da dies im Widerspruch zur strengen Archimedischen Eigenschaft ist, muß die Annahme der Unbeschränktheit verworfen werden.]

Es existiert somit eine Konstante $C > 0$, so daß die Abschätzung

$$\sup_{(a,b)\in A\times A} \phi_1(a,b) \leq C.$$

erfüllt ist. Zu einem fixierten Tupel $(a_0,b_0) \in A \times A$ definiere man nun die Abbildungen

$$\varphi_1 := \phi_1, \quad \varphi_2 := \phi_2 + (\phi_1(a_0,b_0) - \phi_2(a_0,b_0)).$$

Für Elemente a,b,c,d,e,f,g,h der Grundmenge A sind dann die folgenden Eigenschaften erfüllt:

1. $(a,b,c,d) \succeq_{4,4} (e,f,g,h) \Leftrightarrow \varphi_1(a,b) + \varphi_2(c,d) \geq \varphi_1(e,f) + \varphi_2(g,h)$;
2. $\varphi_2(a_0,b_0) = \varphi_1(a_0,b_0)$.

Da die Symmetrieforderung die Äquivalenz $(a,b,a_0,b_0) \sim_{4,4} (a_0,b_0,a,b)$ impliziert, ergibt sich insbesondere die Gleichung

$$\varphi_1(a,b) + \varphi_2(a_0,b_0) = \varphi_1(a_0,b_0) + \varphi_2(a,b) = \varphi_2(a,b) + \varphi_2(a_0,b_0).$$

Dies impliziert jedoch die Identität der Abbildungen φ_1 und φ_2:

$$\varphi_1(a,b) = \varphi_2(a,b), \quad \forall a,b \in A.$$

Damit existiert eine nach oben beschränkte Abbildung $\varphi : A \times A \to \mathbb{R}$, die das Tripel $\langle A^2, A^2, \succeq_{4,4} \rangle$ additiv im Sinne von

$$(a,b,c,d) \succeq_{4,4} (e,f,g,h) \Leftrightarrow \varphi(a,b) + \varphi(c,d) \geq \varphi(e,f) + \varphi(g,h)$$

repräsentiert. Mit der Definition $\psi(a,b) := \exp(\varphi(a,b))$, ergibt sich eine (nach oben) beschränkte multiplikative Repräsentation der Relation $\succ_{4,4}$:

$$\begin{aligned}
(a,b,c,d) \succ_{4,4} (e,f,g,h) &\Leftrightarrow \neg((e,f,g,h) \succeq_{4,4} (a,b,c,d)) \\
&\Leftrightarrow \neg(\varphi(e,f) + \varphi(g,h) \geq \varphi(a,b) + \varphi(c,d)) \\
&\Leftrightarrow \exp(\varphi(a,b) + \varphi(c,d)) > \exp(\varphi(e,f) + \varphi(g,h)) \\
&\Leftrightarrow \psi(a,b)\psi(c,d) > \psi(e,f)\psi(g,h).
\end{aligned}$$

Wegen $0 < \sup_{(a,b)\in A\times A} \psi(a,b) < \infty$ ist die Abbildung $p : A \times A \to [0,1]$,

$$p(x,y) := \frac{\psi(x,y)}{\sup_{(a,b)\in A\times A} \psi(a,b)}, \quad x,y \in A,$$

wohldefiniert. Offensichtlich repräsentiert auch p die Relation $\succ_{4,4}$ im Sinne von

$$(a,b,c,d) \succ_{4,4} (e,f,g,h) \Leftrightarrow p(a,b)p(c,d) > p(e,f)p(g,h).$$

Daher gilt zusammen mit der Verträglichkeit der beiden Relationen $\succ_{2,2}$ und $\succ_{4,4}$ die Äquivalenz

$$\begin{aligned}
(a,b) \succ_{2,2} (c,d) &\Leftrightarrow (a,b,e,f) \succ_{4,4} (c,d,e,f) \Leftrightarrow p(a,b)p(e,f) > p(c,d)p(e,f) \\
&\Leftrightarrow p(a,b) > p(c,d).
\end{aligned}$$

Es sei nun $q : A \times A \to [0,1]$ eine weitere Repräsentation, die den geforderten Repräsentationsbedingungen genügt. Für $(a,b) \in A \times A$ ist dann $q(a,b) \neq 0$: Für den Nachweis dieser Behauptung nehme man an, es existieren Reize $a_0, b_0 \in A$

mit $q(a_0,b_0)=0$. Aufgrund der Forderung der Wesentlichkeit wähle man Elemente $a,b,c,d,e,f\in A$ mit $(a,b,e,f)\succ_{4,4}(c,d,e,f)$, also insbesondere $(a,b)\succ_{2,2}(c,d)$. Hierfür gilt

$$q(a,b)q(a_0,b_0)=0=q(c,d)q(a_0,b_0),$$

also auch $(a,b,a_0,b_0)\sim_{4,4}(c,d,a_0,b_0)$. Andererseits läßt sich aus $(a,b)\succ_{2,2}(c,d)$ die Abschätzung $(a,b,a_0,b_0)\succ_{4,4}(c,d,a_0,b_0)$ deduzieren. Dieser Widerspruch zeigt die Ungleichung

$$q(a,b)>0,\quad \forall a,b\in A.$$

Zur Eindeutigkeit der Repräsentation: Es seien q_1 und q_2 zwei normierte Repräsentationen der schwachen qualitativen Paarvergleichsstruktur $\langle A,\succ_{2,2},\succ_{4,4}\rangle$. Wegen $q_1(a,b),q_2(a,b)>0$ definiere man

$$\phi_i(a,b):=\ln q_i(a,b),\quad a,b\in A, i=1,2.$$

Dann definiert das Tupel (ϕ_i,ϕ_i) eine additive Repräsentation der additiv verbundenen Meßstruktur $\langle A^2,A^2,\succeq_{4,4}\rangle$:

$$\begin{aligned}(a,b,c,d)\succeq_{4,4}(e,f,g,h) &\Leftrightarrow \neg((e,f,g,h)\succ_{4,4}(a,b,c,d))\\ &\Leftrightarrow \neg(q_i(e,f)q_i(g,h)>q_i(a,b)q_i(c,d))\\ &\Leftrightarrow q_i(a,b)q_i(c,d)\geq q_i(e,f)q_i(g,h)\\ &\Leftrightarrow \ln(q_i(a,b)q_i(c,d)\geq \ln(q_i(e,f)q_i(g,h))\\ &\Leftrightarrow \phi_i(a,b)+\phi_i(c,d)\geq\phi_i(e,f)+\phi_i(g,h).\end{aligned}$$

Daher existieren gemäß dem Repräsentations- und Eindeutigkeitssatz für additiv verbundene Strukturen Konstanten $\alpha>0$ und $\beta\in\mathbb{R}$ mit

$$\phi_2(a,b)=\alpha\phi_1(a,b)+\beta,\quad a,b\in A.$$

Dies impliziert jedoch bereits die zu zeigende Eindeutigkeitsaussage:

$$q_2=\exp\circ\phi_2=\exp(\alpha\phi_1+\beta)=\exp(\beta)\exp(\alpha\phi_1)=\exp(\beta)q_1^\alpha.$$

□

Neben den Relationen $\succ_{2,2}$ und $\succ_{4,4}$ sei eine Teilmenge $\succ_{2,4}$ des sechsfachen kartesischen Produkts A^6 vorausgesetzt. Anstelle von $(a,b,c,d,e,f)\in\succ_{2,4}$ schreibe man $(a,b)\succ_{2,4}(c,d,e,f)$.

Lemma F.3 *Es seien nichtleere Mengen A, $\succ_{2,2}\subset A^4$, $\succ_{2,4}\subset A^6$ und $\succ_{4,4}\subset A^8$ vorausgesetzt. Es gelte:*

1. *Das Tripel $\langle A,\succ_{2,2},\succ_{4,4}\rangle$ definiert eine schwache qualitative Paarvergleichsstruktur.*

2. Unbeschränktheit: Zu $a, b \in A$ existieren $x, y \in A$ mit $(x, y) \succ_{2,2} (a, b)$.

3. Verträglichkeit der Relationen $\succ_{2,4}$ und $\succ_{4,4}$: Für $a, b, c, d, e, f \in A$ gilt genau dann $(a, b) \succ_{2,4} (c, d, e, f)$, wenn Elemente $g_0, h_0 \in A$ derart existieren, daß für alle $g, h \in A$ mit $(g, h) \succ_{2,2} (g_0, h_0)$ gilt: $(a, b, g, h) \succ_{4,4} (c, d, e, f)$.

4. Verträglichkeit der Relationen $\succ_{2,2}$ und $\succ_{2,4}$: Zu $(a, b) \succ_{2,4} (c, d, e, f)$ existieren $a_0, b_0 \in A$ mit $(a, b) \succ_{2,2} (a_0, b_0)$ und $(a_0, b_0) \succ_{2,4} (c, d, e, f)$.

Dann existiert eine Abbildung $p : A \times A \to [0, 1]$, so daß für alle $a, b, c, d, e, f, g, h \in A$ die folgenden Repräsentationsbedingungen erfüllt sind:

1. $(a, b) \succ_{2,2} (c, d) \Leftrightarrow p(a, b) > p(c, d)$;

2. $(a, b) \succ_{2,4} (c, d, e, f) \Leftrightarrow p(a, b) > p(c, d)p(e, f)$;

3. $(a, b, c, d) \succ_{4,4} (e, f, g, h) \Leftrightarrow p(a, b)p(c, d) > p(e, f)p(g, h)$;

4. Ist $p(a, b)p(c, d) > p(e, f)$, so existieren Elemente $a_0, b_0, c_0, d_0 \in A$ mit

$$p(a, b)p(c, d) > p(a_0, b_0)p(c_0, d_0) \geq p(e, f).$$

Beweis: Gemäß Lemma F.2 existiert eine Log-Intervallskala $q : A \times A \to (0, 1]$, die die Relationen $\succ_{2,2}$ und $\succ_{4,4}$ repräsentiert. Wegen der Unbeschränktheit des Tupels $\langle A, \succ_{2,2} \rangle$ gilt

$$q(a, b) < \sup_{(x,y) \in A \times A} q(x, y), \quad \forall a, b \in A.$$

Wegen $0 < \sup_{(x,y) \in A \times A} q(x, y) \leq 1$ definiere man

$$p(a, b) := \frac{q(a, b)}{\sup_{(x,y) \in A \times A} q(x, y)}, \quad a, b \in A.$$

Dann ist $\sup_{(a,b) \in A \times A} p(a, b) = 1$, zu jeder Konstanten $0 < c < 1$ existiert also ein Paar $(a, b) \in A \times A$ mit $p(a, b) > c$. Neben den Relationen $\succ_{2,2}$ und $\succ_{4,4}$ repräsentiert diese Abbildung auch die Relation $\succ_{2,4}$: Für $a, b, c, d, e, f \in A$ gilt

$$\begin{aligned}
(a, b) \succ_{2,4} (c, d, e, f) \quad & \Leftrightarrow \quad \exists g_0, h_0 \in A, \text{ so daß für alle } g, h \in A \text{ mit} \\
& \qquad (g, h) \succ_{2,2} (g_0, h_0) \text{ gilt: } (a, b, g, h) \succ_{4,4} (c, d, e, f) \\
& \Leftrightarrow \quad \exists g_0, h_0 \in A, \text{ so daß für alle } g, h \in A \text{ mit} \\
& \qquad p(g, h) > p(g_0, h_0) \text{ gilt: } p(a, b)p(g, h) > p(c, d)p(e, f) \\
& \Leftrightarrow \quad \exists 0 < c < 1, \text{ so daß für alle } g, h \in A \text{ mit} \\
& \qquad p(g, h) > c \text{ gilt: } p(a, b)p(g, h) > p(c, d)p(e, f) \\
& \Leftrightarrow \quad \exists 0 < c < 1, \text{ so daß für alle } c < C < 1 \text{ gilt:} \\
& \qquad Cp(a, b) > p(c, d)p(e, f) \\
& \Leftrightarrow \quad p(a, b) > p(c, d)p(e, f).
\end{aligned}$$

Die Abbildung p genügt auch der Repräsentationsbedingung 4. Seien dazu Elemente $a, b, c, d, e, f \in A$ mit $p(a, b)p(c, d) > p(e, f)$ vorausgesetzt. Nach Definition der Abbildung p existiert eine Folge $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A \times A$ mit

$$p(x_n, y_n) \nearrow 1, \quad n \to \infty.$$

Für $n \in \mathbb{N}$ definiere man $z_n := a$ und $w_n := b$. Dann gilt

$$p(x_n, y_n)p(z_n, w_n) = p(x_n, y_n)p(a, b) \nearrow p(a, b), \quad n \to \infty. \tag{F.1}$$

Damit existiert nun aber auch eine Folge $(a_n, b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $A \times A$ mit

$$p(a_n, b_n) \nearrow p(a, b), \quad n \to \infty. \tag{F.2}$$

[Man beachte: Aufgrund der vorausgesetzten Ungleichung

$$p(a, b) > p(x_1, y_1)p(z_1, w_1)$$

gilt

$$(a, b) \succ_{2,4} (x_1, y_1, z_1, w_1).$$

Daher existiert zusammen mit der Verträglichkeit der Relationen $\succ_{2,2}$ und $\succ_{2,4}$ ein Tupel $(a_1, b_1) \in A \times A$ mit

$$(a, b) \succ_{2,2} (a_1, b_1) \text{ und } (a_1, b_1) \succ_{2,4} (x_1, y_1, z_1, w_1).$$

Aufgrund des Konvergenzverhaltens (F.1) kann nun zu einer natürlichen Zahl $N \in \mathbb{N}$ mit

$$p(a, b) > p(x_N, y_N)p(z_N, w_N) > p(a_1, b_1)$$

übergegangen werden. Hierzu existiert (wieder wegen der Verträglichkeit der Relationen $\succ_{2,2}$ und $\succ_{4,4}$) ein Tupel $(a_2, b_2) \in A \times A$ mit

$$p(a, b) > p(a_2, b_2) > p(x_N, y_N)p(z_N, w_N).$$

Insbesondere läßt sich eine Folge $(a_n, b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $p(a_n, b_n) \nearrow p(a, b)$ konstruieren.]

Aufgrund des eben verifizierten Konvergenzverhaltens (F.2) wähle man zu den vorgegebenen Elementen $a, b, c, d \in A$ eine Folge $(a_n, b_n, c_n, d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A^4 mit

$$p(a_n, b_n)p(c_n, d_n) \nearrow p(a, b)p(c, d), \quad n \to \infty.$$

Insbesondere existiert wegen $p(a, b)p(c, d) > p(e, f)$ eine natürliche Zahl $N \in \mathbb{N}$ mit

$$p(a, b)p(c, d) > p(a_N, b_N)p(c_N, d_N) \geq p(e, f).$$

$\square$

In der Absicht, auch numerischen Aussagen der Form $p(a,b)p(c,d) > p(e,f)$ inhaltliche Bedeutung zu verleihen, führe man eine weitere Relation $\succ_{4,2} \subset A^6$ ein. Zudem definiere man Relationen $\succeq_{4,2}$ und $\sim_{4,2}$ in gewohnter Weise:

$$\begin{aligned}(a,b,c,d) \succeq_{4,2} (e,f) \quad &:\Leftrightarrow \quad \neg((e,f) \succ_{2,4} (a,b,c,d))\\ (a,b,c,d) \sim_{4,2} (e,f) \quad &:\Leftrightarrow \quad \neg((a,b,c,d) \succ_{4,2} (e,f))) \wedge \neg((e,f) \succ_{2,4} (a,b,c,d)).\end{aligned}$$

Das Quintupel $\langle A, \succ_{2,2}, \succ_{2,4}, \succ_{4,2}, \succ_{4,4}\rangle$ genüge den Bedingungen einer qualitativen Paarvergleichsstruktur:

Definition F.4 *Es seien nichtleere Mengen A, $\succ_{2,2} \subset A^4$, $\succ_{2,4} \subset A^6$, $\succ_{4,2} \subset A^6$ und $\succ_{4,4} \subset A^8$ vorausgesetzt. Das Quintupel $\langle A, \succ_{2,2}, \succ_{2,4}, \succ_{4,2}, \succ_{4,4}\rangle$ ist genau dann eine qualitative Paarvergleichsstruktur, wenn gilt:*

1. *$\langle A, \succ_{2,2}, \succ_{4,4}\rangle$ ist eine schwache qualitative Paarvergleichsstruktur.*

2. *Unbeschränktheit: Zu $a, b \in A$ existieren $x, y \in A$ mit $(x,y) \succ_{2,2} (a,b)$.*

3. *Verträglichkeit der Relationen $\succ_{2,4}$ und $\succ_{4,4}$: Für $a,b,c,d,e,f \in A$ gilt genau dann $(a,b) \succ_{2,4} (c,d,e,f)$, wenn Elemente $g_0, h_0 \in A$ derart existieren, daß für alle $g, h \in A$ mit $(g,h) \succ_{2,2} (g_0,h_0)$ gilt: $(a,b,g,h) \succ_{4,4} (c,d,e,f)$.*

4. *Verträglichkeit der Relationen $\succ_{2,2}$ und $\succ_{2,4}$: Zu $(a,b) \succ_{2,4} (c,d,e,f)$ existieren $a_0, b_0 \in A$ mit $(a,b) \succ_{2,2} (a_0,b_0)$ und $(a_0,b_0) \succ_{2,4} (c,d,e,f)$.*

5. *Verträglichkeit der Relationen $\succ_{4,2}$ und $\succ_{4,4}$: Für Reize $a,b,c,d,e,f \in A$ gilt genau dann $(a,b,c,d) \succ_{4,2} (e,f)$, wenn Elemente $a_0,b_0,c_0,d_0 \in A$ existieren mit $(a,b,c,d) \succ_{4,4} (a_0,b_0,c_0,d_0)$ und $(a_0,b_0,c_0,d_0) \succeq_{4,2} (e,f)$.*

Bemerkung: Die innere Widerspruchsfreiheit dieses Axiomensystems läßt sich anhand des folgenden numerischen Modells sicherstellen:

$$\begin{aligned} A \quad &:= \quad (0,\infty),\\ V_x(a) \quad &:= \quad 1 - \exp\left(-\frac{\ln 2}{x}a\right), \quad a, x \in A,\\ (a,b) \succ_{2,2} (c,d) \quad &:\Leftrightarrow \quad V_b(a) > V_d(c),\\ (a,b) \succ_{2,4} (c,d,e,f) \quad &:\Leftrightarrow \quad V_b(a) > V_d(c)V_f(e),\\ (a,b,c,d) \succ_{4,2} (e,f) \quad &:\Leftrightarrow \quad V_b(a)V_d(c) > V_f(e),\\ (a,b,c,d) \succ_{4,4} (e,f,g,h) \quad &:\Leftrightarrow \quad V_b(a)V_d(c) > V_f(e)V_h(g).\end{aligned}$$

Mit diesen Definitionen etabliert das Quintupel $\langle A, \succ_{2,2}, \succ_{2,4}, \succ_{4,2}, \succ_{4,4}\rangle$ eine qualitative Paarvergleichsstruktur. Der einfache, aber längliche Beweis sei dem Leser überlassen.

Lemma F.5 *Definiert $\langle A, \succ_{2,2}, \succ_{2,4}, \succ_{4,2}, \succ_{4,4}\rangle$ eine qualitative Paarvergleichsstruktur, so existiert eine Abbildung $p : A \times A \to [0,1]$, so daß für $a, b, c, d, e, f, g, h \in A$ gilt:*

1. *$(a, b) \succ_{2,2} (c, d) \Leftrightarrow p(a, b) > p(c, d)$;*

2. *$(a, b) \succ_{2,4} (c, d, e, f) \Leftrightarrow p(a, b) > p(c, d)p(e, f)$;*

3. *$(a, b, c, d) \succ_{4,2} (e, f) \Leftrightarrow p(a, b)p(c, d) > p(e, f)$;*

4. *$(a, b, c, d) \succ_{4,4} (e, f, g, h) \Leftrightarrow p(a, b)p(c, d) > p(e, f)p(g, h)$.*

Ist $q : A \times A \to [0, 1]$ eine derartige Abbildung, so ist $0 < q(a, b) < 1$ für $a, b \in A$ beliebig. Weiter existieren Konstanten $\alpha, \beta > 0$ mit $q = \alpha p^\beta$. Existieren Elemente $a, b, c, d, e, f \in A$ mit $(a, b, c, d) \sim_{4,2} (e, f)$, so ist sogar $q = p^\beta$. Insbesondere existiert genau eine Repräsentation p, die der Anfangsbedingung $p(a, a) = 1/2$ genügt.

Beweis: Gemäß Lemma F.3 existiert eine Repräsentation p, die den Bedingungen 1 - 4 von Lemma F.3 genügt. Insbesondere existieren zu $p(a, b)p(c, d) > p(e, f)$ Elemente $a_0, b_0, c_0, d_0 \in A$ mit

$$p(a, b)p(c, d) > p(a_0, b_0)p(c_0, d_0) \geq p(e, f).$$

Damit kann die noch ausstehende Repräsentationsbedingung

$$(a, b, c, d) \succ_{4,2} (e, f) \Leftrightarrow p(a, b)p(c, d) > p(e, f)$$

verifiziert werden. Sei zunächst $(a, b, c, d) \succ_{4,2} (e, f)$. Dann existieren aufgrund der Verträglichkeitsforderung (5) Elemente $a_0, b_0, c_0, d_0 \in A$ mit

$$(a, b, c, d) \succ_{4,4} (a_0, b_0, c_0, d_0) \text{ und } (a_0, b_0, c_0, d_0) \succeq_{4,2} (e, f).$$

Daher ist

$$p(a, b)p(c, d) > p(a_0, b_0)p(c_0, d_0) \geq p(e, f).$$

Ist umgekehrt $p(a, b)p(c, d) > p(e, f)$, so existieren Elemente $a_0, b_0, c_0, d_0 \in A$ mit

$$p(a, b)p(c, d) > p(a_0, b_0)p(c_0, d_0) \geq p(e, f).$$

Insbesondere gilt $(a, b, c, d) \succ_{4,4} (a_0, b_0, c_0, d_0)$ und $\neg((e, f) \succ_{2,4} (a_0, b_0, c_0, d_0))$. Dies führt zusammen mit der Verträglichkeit der beiden Relationen $\succ_{4,2}$ und $\succ_{4,4}$ zu $(a, b, c, d) \succ_{4,2} (e, f)$.

Es sei nun $q : A \times A \to [0, 1]$ eine weitere multiplikative Repräsentation des Quintupels $\langle A, \succ_{2,2}, \succ_{2,4}, \succ_{4,2}, \succ_{4,4}\rangle$. Dann folgt zusammen mit Lemma F.2 die Positivität der Abbildung q: $q(a,b) > 0$. Zudem existieren Konstanten $\alpha, \beta > 0$ mit $q = \alpha p^\beta$. Die Abschätzung $q(a,b) < 1$ folgt unmittelbar aus der Unbeschränktheit des Tupels $\langle A, \succ_{2,2} \rangle$.

Für den Nachweis der Eindeutigkeitsaussage seien Elemente $a, b, c, d, e, f \in A$ mit $(a,b,c,d) \sim_{4,2} (e,f)$ vorausgesetzt. Dann ergibt sich mit den Repräsentationsbedingungen 2 und 3 die Beziehung

$$\begin{aligned} q(a,b)q(c,d) &= q(e,f) = \alpha p(e,f)^\beta = \alpha(p(a,b)p(c,d))^\beta \\ &= \frac{1}{\alpha}(\alpha p(a,b)^\beta \alpha p(c,d)^\beta) = \frac{1}{\alpha} q(a,b)q(c,d), \end{aligned}$$

also $\alpha = 1$. Insbesondere existiert eine Konstante $\beta > 0$ mit $q = p^\beta$. □

Die Eindeutigkeit der Repräsentation läßt auch durch Einführung einer weiteren Relation $\approx$ auf A sicherstellen: Für zwei Reize $a, b \in A$ gilt genau dann $a \approx b$, wenn eine Versuchsperson nicht in der Lage ist, den Standardreiz a vom Vergleichsreiz b zu unterscheiden. Wird als weitere Repräsentationsbedingung $a \approx b \Leftrightarrow p(a,b) = 0.5$ gefordert, so hat dies die Eindeutigkeit der Repräsentation p zur Folge:

Satz F.6 *Es sei $\langle A, \succ_{2,2}, \succ_{2,4}, \succ_{4,2}, \succ_{4,4} \rangle$ eine qualitative Paarvergleichsstruktur. Weiter sei $\approx$ eine binäre Relation auf A, so daß gilt:*

1. *Es existieren $a, b, c, d, e, f \in A$ mit $(a,b,c,d) \sim_{4,2} (e,f)$;*
2. *Für $x \in A$ existiert ein $m(x) \in A$ mit $m(x) \approx x$;*
3. *Für $x, y \in A$ gilt $(m(x), x) \sim_{2,2} (m(y), y)$;*
4. *Für $a, x \in A$ gilt $a \approx x \Leftrightarrow (a,x) \sim_{2,2} (m(x), x)$.*

Dann existiert genau eine Abbildung $p : A \times A \to [0,1]$, so daß für beliebige Elemente a, b, c, d, e, f, g, h der Grundmenge A gilt:

1. *$(a,b) \succ_{2,2} (c,d) \Leftrightarrow p(a,b) > p(c,d)$;*
2. *$(a,b) \succ_{2,4} (c,d,e,f) \Leftrightarrow p(a,b) > p(c,d)p(e,f)$;*
3. *$(a,b,c,d) \succ_{4,2} (e,f) \Leftrightarrow p(a,b)p(c,d) > p(e,f)$;*
4. *$(a,b,c,d) \succ_{4,4} (e,f,g,h) \Leftrightarrow p(a,b)p(c,d) > p(e,f)p(g,h)$;*
5. *$a \approx b \Leftrightarrow p(a,b) = 0.5$.*

Insbesondere nimmt die Abbildung p nur Werte im offenen Einheitsintervall $(0,1)$ an: Für $a, b \in A$ ist $0 < p(a,b) < 1$.

Beweis: Nach Lemma F.5 existiert eine Repräsentation $q : A \times A \rightarrow (0,1)$, die den Repräsentationsbedingungen 1 - 4 genügt. Mit q ist auch q^α, $\alpha > 0$ fixiert, eine Repräsentation des Quintupels $\langle A, \succ_{2,2}, \succ_{2,4}, \succ_{4,2}, \succ_{4,4} \rangle$. Aufgrund der Voraussetzung $(m(x), x) \sim_{2,2} (m(y), y)$ ist

$$q(m(x), x) = q(m(y), y).$$

Man wähle nun eine Konstante $\alpha > 0$, so daß gilt:

$$q(m(x), x)^\alpha = 0.5.$$

Dann erfüllt die Abbildung $p := q^\alpha$ auch Repräsentationsbedingung (5):

$$\begin{aligned} a \approx b \quad &\Leftrightarrow \quad (a,b) \sim_{2,2} (m(b), b) \Leftrightarrow p(a,b) = p(m(b), b) \\ &\Leftrightarrow \quad p(a,b) = 0.5. \end{aligned}$$

□

Literaturverzeichnis

Aczél, J. (1961). *Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen.* Basel: Birkhäuser Verlag.

Block, H. D., & Marschak, J. (1960). Random Orderings and Stochastic Theories of Responses. In Olkin, I., Ghurye, S., Hoeffding, W., Madow, W., & Mann, H. (Hrsg.) *Contributions to Probability and Statistics : Essays in Honor of Harold Hotelling*. Stanford: Stanford University Press.

Boring, E. G. (1950). *A History of Experimental Psychology*. New-York: Appleton-Century-Crofts.

Campbell, N. R. (1920). *Physics: The Elements*. Wiederveröffentlicht unter dem Titel *Foundations of Science. The Philosophy of Theory and Experiment*. New York: Dover Publications, Inc., 1957.

Campbell, N. R. (1933). The Measurement of Visual Sensations. *Proceedings of the Physical Society*, **45**, 565-571.

Cantor, G. (1895). Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre. *Mathematische Annalen*, **46**, 481-512.

Carnap, R. (1969). *Einführung in die Philosophie der Naturwissenschaften.* München: Nymphenburger Verlagshandlung. Titel der Originalausgabe: *Philosophical Foundations of Physics*. New York: Basic Books Inc., 1966.

Cohen, M. R., & Nagel, E. (1934). *An Introduction to Logic and Scientific Method.* New York: Harcourt, Brace.

Drösler, J. (1999). Der Wandel des Begriffs vom psychologischen Experiment während des 20. Jahrhunderts. *Zeitschrift für Psychologie*, **207**, 325-338.

Drösler, J. (2000). Evaluation: Darf gelacht werden? *Forschung und Lehre*, **7**, Heft 12, 637.

Euklid *Die Elemente. Buch I-XIII*. Nach Heibergs Text aus dem Griechischen übersetzt und herausgegeben von Cl. Thaer. Nachdruck: Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgemeinschaft, 1971.

Falmagne, J.-Cl. (1976). Random Conjoint Measurement and Loudness Summation. *Psychological Review*, **83**, 65-79.

Falmagne, J.-Cl. (1978). A Representation Theorem for Finite Random Scale Systems. *Journal of Mathematical Psychology*, **18**, 52-72.

Falmagne, J.-Cl. (1980). A Probabilistic Theory of Extensive Measurement. *Philosophy of Science*, **47**, 277-296.

Falmagne, J.-Cl. (1985). *Elements of Psychophysical Theory*. New York: University Press.

Falmagne, J.-Cl., Iverson, G., & Marcovici, S. (1979). Binaural "Loudness" Summation: Probabilistic Theory and Data. *Psychological Review*, **86**, 25-43.

Frege, G. (1884). *Die Grundlagen der Arithmetik*. Nachdruck: Hildesheim: Georg Olms, Verlagsbuchhandlung.

Gigerenzer, G. (1981). *Messung und Modellbildung in der Psychologie*. München: Ernst Reinhardt Verlag.

Hamerle, A., & Tutz, G. (1980). Zur experimentellen Validierung von probabilistischen verbundenen Meßstrukturen. *Zeitschrift für experimentelle und angewandte Psychologie*, **27**, 213-230.

Hausdorff, F. (1923). Momentprobleme für ein endliches Intervall. *Mathematische Zeitschrift*, **16**, 220-248.

Helmholtz, H. (1887). *Zählen und Messen erkenntnistheoretisch betrachtet*. Nachdruck: Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 1959.

Heuser, H. (1991). *Lehrbuch der Analysis, Teil 1*. Stuttgart: B. G. Teubner.

Heyer, D. (1990). Boolschwertige und probabilistische Meßtheorie. Methoden der Fehlerbehandlung in psychophysikalischen Theorien. Frankfurt am Main: Verlag Peter Lang.

Hilbert, D. (1899). *Grundlagen der Geometrie*. Nachdruck: Berlin: Springer Verlag, 1970.

Hölder, O. (1901). Die Axiome der Quantität und die Lehre vom Mass. *Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Mathematisch-Physische Klasse*, **53**, 1-46.

Johnson, N. L., & Kotz, S. (1970). *Distributions in Statistics. Continuous Univariate Distributions*. New York: Wiley.

Kant, I. (1787): Kritik der Reinen Vernunft. Nachdruck: Hamburg: Felix Meiner Verlag, 1956.

Kolmogoroff, A. N. (1933). *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Nachdruck: Berlin: Springer, 1973.

Krantz, D. H., Luce, R. D., Suppes, P., & Tversky, A. (1971). *Foundations of Measurement, Volume I*. New York: Academic Press.

Kutschera, F. v. (1972). *Wissenschaftstheorie I. Grundzüge der allgemeinen Methodologie der empirischen Wissenschaften*. München: Wilhelm Fink Verlag.

Luce, R. D. (1997). Several Unresolved Conceptual Problems of Mathematical Psychology. *Journal of Mathematical Psychology*, **41**, 79-87.

Luce, D., & Narens, L. (1994). Fifteen Problems Concerning the Representational Theory of Measurement. In Humphreys, P. (Hrsg.) *Patrick Suppes: Scientific Philosopher, Volume 2*. Dordrecht: Kluwer.

Nagel, E. (1930). *On the Logic of Measurement*. Nachdruck: Ann Arbor: UMI, 1999.

Neuberger, O. (1985). *Führung. Ideologie-Struktur-Verhalten. 2., durchgesehene Auflage*. Stuttgart: Ferdinand Enke Verlag.

Newman, E. B. (1974). On The Origin of “Scales of Measurement”. In Moskowitz, H. R., Scharf, B., & Stevens, J. C. (Hrsg.) *Sensation and Measurement*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Newton, I. (1687). *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. Nachdruck der dritten Ausgabe (1726): Harvard: University Press, 1972.

Niederée, R. (1992). *Maß und Zahl: Logisch-modelltheoretische Untersuchungen zur Theorie der fundamentalen Messung*. Frankfurt am Main: Verlag Peter Lang.

Pfanzagl, J. (1962). *Die axiomatischen Grundlagen einer allgemeinen Theorie des Messens*. Würzburg: Physica-Verlag. (1. Auflage: 1959.)

Reichardt, H. (1976). *Gauß und die nicht-euklidische Geometrie*. Leipzig: B.G. Teubner.

Scott, D., & Suppes, P. (1958). Foundational Aspects of Theories of Measurement. *Journal of Symbolic Logic*, **23**, 113-128.

Stevens, S. S. (1946). On the Theory of Scales of Measurement. Wiederabdruck in Danto, A., & Morgenbesser, S. (Hrsg.) *Philosophy of Science*. Cleveland: The World Publishing Company, 1967.

Stevens, S. S., & Davis, H. (1938). *Hearing: Its Psychology and Physiology*. New York: Wiley.

Suck, R. (1998). A Qualitative Characterization of the Exponential Distribution. *Journal of Mathematical Psychology*, **40**, 418-431.

Suppes, P. (1973). New Foundations of Objective Probability: Axioms for Propensities. In Suppes et al. (Hrsg.) *Logic, Methodology and Philosophy of Science IV: Proceedings of the Fourth International Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Science, Bucharest, 1971*. Amsterdam: North-Holland Publishing Company.

Suppes, P., Krantz, D. H., Luce, R. D, & Tversky, A. (1989). *Foundations of Measurement. Volume II*. San Diego: Academic Press.

Suppes, P., & Zanotti, M. (1992). Qualitative Axioms for Random-Variable Representation of Extensive Quantities. In Savage, C. W., & Ehrlich, P. (Hrsg.) *Philosophical and Foundational Issues in Measurement Theory*. Hillsdale: Erlbaum.

Suppes, P., & Zinnes, J. L. (1963). Basic Measurement Theory. In Luce, R. D., & Bush, R. R. (Hrsg.) *Handbook of Mathematical Psychology, Volume I.* New York: John Wiley and Sons.

Tarski, A. (1954). Contributions to the Theory of Models I, II. *Indagationes Mathematicae*, **16**, 572-588.

Thurstone, L. L. (1927). A Law of Comparative Judgement. *Psychophysical Review*, **34**, 273-286. (a)

Thurstone, L. L. (1927). Psychological Analysis. *American Journal of Psychology*, **38**, 368-389. (b)

Wang, Y. H. (1976). A Functional Equation and its Application to the Characterization of the Weibull and Stable Distribution. *Journal of Applied Probability*, **13**, 385-391.

Lebenslauf

Name:	Thomas Augustin
Geburtsdatum:	12. Januar 1972
Geburtsort:	Passau

09/1982-07/1991	Besuch des Tassilo Gymnasiums Simbach (Abitur)
08/1991-10/1992	Zivildienst
11/1992-03/1999	Studium der Mathematik (Diplom) an der Universität Regensburg
06/1997-07/1998	Anfertigung meiner Diplomarbeit "Windungsverhalten komplexer Brownscher Bewegungen und kleiner Satz von Picard" am Institut für Mathematik der Universität Regensburg unter Anleitung von Prof. Dr. W. Hackenbroch
ab 04/1999	Übernahme einer Stelle als wissenschaftliche Hilfskraft am Insitut für Psychologie der Universität Regensburg bei Prof. Dr. J. Drösler. Anfertigung meiner Dissertation "Wahrscheinlichkeitsverteilungen psychologischer Merkmale als Meßergebnisse: Ein Beitrag zur probabilistischen Meßtheorie" unter seiner Anleitung