Über Biextensionen und Höhenpaarungen algebraischer Zykel

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)
der Fakultät für Mathematik
der Universität Regensburg

vorgelegt von
Oliver Meyer
aus Hehlen

Fakultät für Mathematik der Universität Regensburg
Regensburg im Mai 2003

Promotionsgesuch eingereicht am :

Die Arbeit wurde angeleitet von :

Prüfungsaussschuß :

Einleitung

Es sei A_K eine abelsche Varietät über einem globalen Körper K, d.h. einem Zahlkörper oder einer endlich erzeugten Körpererweiterung vom Transzendenzgrad 1 eines Körpers k, der in K algebraisch abgeschlossen ist. Man fixiere einen algebraischen Abschluß $\bar{K}$ von K und ein Geradenbündel $\mathscr{L}$ auf A_K. Ein klassisches Resultat von A. Néron und J. Tate besagt die Existenz einer kanonischen Höhenfunktion

$$\hat{h}_{\mathscr{L}} : A_K(\bar{K}) \longrightarrow \mathbb{R},$$

die im geometrischen Fall schon rationale Werte annimmt, nur von der Isomorphieklasse von $\mathscr{L}$ abhängt und verträglich mit Basiswechsel ist. Ist $\mathscr{L} \in \mathrm{Pic}^0(A_K)$, d.h. ist $\mathscr{L}_{\bar{K}} = \mathscr{L} \otimes_K \bar{K}$ algebraisch äquivalent zum trivialen Geradenbündel auf $A_{\bar{K}}$, so induzieren die Höhenfunktionen $h_{\mathscr{L}}$ die Höhenpaarung

$$< \cdot, \cdot >: A_K(\bar{K}) \times A_K^\vee(K) \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Betrachtet man etwas allgemeiner Geradenbündel auf $A_K \times_K L$ für eine endliche Erweiterung $L|K$, so läßt sich die Höhenpaarung kanonisch auf $A_K(\bar{K}) \times A_K^\vee(\bar{K})$ ausdehnen. Bezeichnet $\mathbb{P}_K$ das Poincarébündel auf $A_K \times_K A_K^\vee$, so nährt die Formel

$$< x, \mathscr{L} >= \hat{h}_{\mathbb{P}_K}(x, \mathscr{L}), \qquad (x, \mathscr{L}) \in (A_K \times_K A_K^\vee)(\bar{K}),$$

die Vermutung, daß eine geometrische Beschreibung der Höhenpaarung existiert. Dies ist in der Tat richtig, wie folgende Betrachtung im Funktionkörperfalle zeigt: Es sei S das reguläre Modell von K, d.h. das zusammenhängende, glatte und eigentliche k-Schema mit Funktionenkörper K, und A_S (resp. $A_S^\vee$) das Néron-Modell von A_K (resp. $A_K^\vee$) über S. Wir nehmen der Einfachheit halber an, daß A_K gute Reduktion besitze, A_S also ein abelsches Schema ist. Je zwei Punkte $x \in A_K(\bar{K})$ und $\mathscr{L} \in A_K^\vee(\bar{K})$ sind über einem endlichen Zwischenkörper L von $\bar{K}|K$ definiert und geben in kanonischer Weise Schnitte $x \in A_{S'}(S')$ bzw. $\mathscr{L} \in A_{S'}^\vee(S')$, wobei S' die Normalisierung von S in L und $A_{S'}$ der Basiswechsel von A_S bezüglich des endlichen Morphismus $\pi : S' \to S$ ist. Dann ist $(x, \mathscr{L})^*\mathbb{P}_{S'}$ ein Geradenbündel auf S' und man setzt $(x, \mathscr{L})^*\mathbb{P}_S = \frac{1}{\deg(S':S)}\pi_*((x, \mathscr{L})^*\mathbb{P}_{S'}) \in \mathrm{Pic(S)}_{\mathbb{Q}}$. Dies ist unabhängig vom gewählten Zwischenkörper L und mit der Gradabbildung $\deg_{S/k} : \mathrm{Pic}(S)_{\mathbb{Q}} \to \mathbb{Q}$ gilt

$$< x, \mathscr{L} >= \deg_{S/k}(x, \mathscr{L})^*\mathbb{P}_S.$$

Im arithmetischen Fall gilt eine analoge Formel (vgl. [MB], S. 70ff), wenn man das Poincarébündel auf dem Modell an den archimedischen Stellen mit der kubischen Metrik versieht und den Grad im Arakelovtheoretischen Sinne bildet. Ein Vorteil dieser Beschreibung der Höhenpaarung ist ihre offensichtliche Zerlegung in lokale Höhenpaarungen, die durch Schnitttheorie auf Modellen berechnet werden können.

Es sei X_K nun eine glattes projektives Schema der Dimension d über K. Dann ist die Picardvarietät $(\mathrm{Pic}^0_{X_K/K})_{\mathrm{red}}$ eine abelsche Varietät, deren duale abelsche Varietät die Albanesevarietät $\mathrm{Alb}_{X_K/K}$ ist, und man hat kanonische Abbildungen

$$\mathrm{CH}^1(X_K)_{\mathrm{alg}} \longrightarrow \mathrm{Pic}^0_{X_K/K}(K), \qquad \mathrm{CH}^d(X_K)_{\mathrm{hom}} \longrightarrow \mathrm{Alb}_{X_K/K}(K).$$

Da der Kokern der Inklusion $\mathrm{CH}^1(X_K)_{\mathrm{alg}} \subseteq \mathrm{CH}^1(X_K)_{\mathrm{hom}}$ nach einem Ergebnis von Matsusaka ([K], S. 312, Cor. 1) eine Torsionsgruppe ist, erhält man durch Komposition mit der Néron-Tate-Höhenpaarung für die Picard- und Albanesevarietät eine Höhenpaarung

$$< \cdot, \cdot >: \mathrm{CH}^1(X_K)_{\mathrm{hom}} \times \mathrm{CH}^d(X_K)_{\mathrm{hom}} \to \mathbb{R}$$

für homologisch triviale Divisoren und Nullzykel vom Grad 0. Diese Paarung wurde von Beilinson und Bloch ([Be2],[Bl2]) unter gewissen Voraussetzungen an X_K, die im Falle guter Reduktion immer erfüllt sind, zu einer Paarung

$$< \cdot, \cdot >: \mathrm{CH}^n(X_K)_{\mathrm{hom}} \times \mathrm{CH}^{d+1-n}(X_K)_{\mathrm{hom}} \to \mathbb{R}$$

von Chowgruppen homologisch trivialer Zykel komplementärer Kodimension erweitert. Der Ausgangspunkt für die weiteren Überlegungen ist folgende Beobachtung von Bloch: Es sei S eine quasiprojektive Kurve über einem Körper und X_S/S ein glattes und eigentliches Modell von X_K und bezeichnet $\underline{\mathrm{CH}}^n(X_S/S)_{\mathrm{hom}}$ die zur Prägarbe $(U \to S) \mapsto \mathrm{CH}^n(X_S \times_S U)_{\mathrm{hom}}$ assoziierte étale Garbe, so existiert eine kanonische étale $\mathbb{G}_m$-Biextension $\mathbb{E}$ von $\underline{\mathrm{CH}}^n(X_S/S)_{\mathrm{hom}} \times \underline{\mathrm{CH}}^{d+1-n}(X_S/S)_{\mathrm{hom}}$, die die Poincaré-Biextension verallgemeinert. Ist W ein homologisch trivialer, $(d+1-n)$-kodimensionaler Zykel auf X_S, so hat man eine exakte Sequenz von Garben

$$0 \longrightarrow \mathbb{G}_{m,S} \longrightarrow \underline{E}^{\mathrm{CH}}_W \longrightarrow \underline{\mathrm{CH}}^n(X_S/S) \longrightarrow 0,$$

die durch Betrachten einer langen exakten Sequenz von höheren Chowgruppen und Bilden eines geeigneten Pushout entsteht. Die Einschränkung dieser Sequenz auf $\underline{\mathrm{CH}}^n(X_S/S)_{\mathrm{hom}}$ ist die Faser der Biextension $\mathbb{E}$ über dem Schnitt $W \in \underline{\mathrm{CH}}^{d+1-n}(X_S/S)$. Zwei homologisch triviale Zykel $Z \in Z^n(X_K)_{\mathrm{hom}}$ und $W \in Z^{d+1-n}(X_K)_{\mathrm{hom}}$, die sich nicht schneiden, definieren einen Schnitt im Produkt dieser Garben. Durch Zurückziehen der Biextension $\mathbb{E}$ mit diesem Schnitt erhält man ein étales (und damit Zariski-) Geradenbündel $(Z,W)^*\mathbb{E}$ auf S. Das Hauptergebnis des ersten Kapitels ist, daß dieses Geradenbündel die Höhenpaarung von Bloch und Beilinson berechnet, genauer, daß die Gleichung

$$< Z, W >= \deg_{S/k}((Z,W)^*\mathbb{E})$$

besteht. Die Beweisidee ist dabei die folgende: Analog zum klassischen Fall läßt sich sowohl die Höhenpaarung von Bloch und Beilinson, wie auch die Konstruktion der Biextension $\mathbb{E}$ étale-lokal auf S beschreiben. Zu fixierten homologisch trivialen Zykeln Z und W, die sich generisch nicht schneiden, betrachte man die (mit denselben Symbolen bezeichneten) flachen Ausdehnungen auf das Modell X_S. Der 0-dimensionale Schnittzykel von Z und W liegt in den abgeschlossenen Fasern des Morphismus $X_S \to S$ und beschreibt deren Höhenpaarung. Andererseits definieren die Zykel Z und W ein Pullback $(Z,W)^*\mathbb{E}$ der Biextension $\mathbb{E}$ auf die Basis S. Auf einer geeigneten étalen Umgebung eines abgeschlossenen Punktes s von S ist $(Z,W)^*\mathbb{E}$ mit einer durch W induzierten Trivialisierung wie auch mit einem durch Z definierten rationalen Schnitt versehen. Es stellt sich heraus, daß sich der lokale Grad von $(Z,W)^*\mathbb{E}$ durch die lokale Schnittzahl des zykeltheoretischen Schnitts in der Faser über s berechnen läßt und daher mit der lokalen Höhenpaarung übereinstimmt. Da mit dem Moving-Lemma zwei homologisch triviale Zykel $Z \in Z^n(X_K)_{\text{hom}}$ und $W \in Z^{d+1-n}(X_K)_{\text{hom}}$ durch rationale Äquivalenz zu Zykeln $\tilde{Z}$ und $\tilde{W}$, die sich nicht schneiden, verschoben werden können, ist die Bloch-Beilinson-Höhenpaarung durch die angegebene Konstruktion festgelegt.

Im Gegensatz zum ersten Teil der vorliegenden Arbeit, in der lokale und globale nichtarchimedische Höhenpaarungen studiert werden, befaßt sich der zweite Teil mit einer lokalen archimedischen Höhenpaarung und deren Beschreibung durch eine geeignete Metrisierung der Blochschen Biextension $\mathbb{E}$. Es sei dazu X ein d-dimensionales glattes projektives Schema über $\mathbb{C}$. Die Blochsche Biextension $\mathbb{E}$ liefert in diesem Fall eine $\mathbb{C}^\times$-Biextension von $\mathrm{CH}^n(X)_{\text{hom}} \times \mathrm{CH}^{d+1-n}(X)_{\text{hom}}$. Die Chowgruppen von homologisch trivialen Zykeln $\mathrm{CH}^n(X)_{\text{hom}}$ bilden sich über die höheren Abel-Jacobi-Abbildungen j^n in die intermediären Griffith-Jacobischen $J^n(X)$ ab. Für komplementäre Kodimensionen n und $d+1-n$ sind die komplexen Tori $J^n(X)$ und $J^{d+1-n}(X)$ zueinander dual und damit trägt das Produkt $J^n(X) \times J^{d+1-n}(X)$ die kanonische Poincaré-Biextension $\mathbb{P}$. Nach Resultaten von Müller-Stach ist das Pullback $(j^n \times j^{d+1-n})^*\mathbb{P}$ kanonisch isomorph zur Blochschen Biextension $\mathbb{E}$. Versieht man $\mathbb{P}$ mit der eindeutig bestimmten Metrik mit translationsinvarianter Krümmung, welche die Rigidifizierung respektiert, so wird $\mathbb{E}$ in offensichtlicher Weise eine metrisierte $\mathbb{C}^\times$-Biextension. Zu zwei homologisch trivialen Zykeln $Z \in Z^n(X)_{\text{hom}}$ und $W \in Z^{d+1-n}(X)_{\text{hom}}$, die sich nicht schneiden, kann man die Faser $\mathbb{E}_{W,Z}$ definieren. Dies ist ein eindimensionaler metrisierter $\mathbb{C}$-Vektorraum, versehen mit einem durch Z definierten Element $\{Z\}_W$. Das Hauptresultat dieses Abschnittes ist, daß die Norm des so gebildeten Elements die archimedische Schnittzahl von Z und W berechnet, genauer die Formel

$$< Z, W >_{\text{arch}} = \log(||\{Z\}_W||^2_{\text{kan},W,Z})$$

gilt. Der Beweis dieses Theorems ergibt sich dabei in zwei Schritten: Die Norm $||\{Z\}_W||_{\text{kan},W,Z}$ kann nach Konstruktion im Poincarébündel auf den intermediären Griffith-Jacobischen berechnet werden. Die invariante Norm definiert maximalkompakte Untergruppen der Restriktion von $\mathbb{P}$ auf die Fasern. Diese Untergruppen charakterisieren gleichzeitig aber auch die Restriktion der archimedischen Höhenpaarung, was die Vergleichsaussage liefert.

Der dritte Teil dieser Arbeit beschäftigt sich mit einer möglichen K-theoretischen Interpretation der Blochschen Biextension für die Chowgruppen. Es sei S eine glatte Kurve über einem Körper und X ein glattes projektives Schema über S. Ist W eine irreduzible abgeschlossene Teilmenge von X, so wird in [Bl3] eine relative K-Gruppe $K(X, W)$ konstruiert. In Verallgemeinerung hierzu modellieren nach dem Vorbild der höheren relativen Chowgruppen höhere relative K-Gruppen für beliebige Zykel W auf X. Dabei werden Multiplizitäten geometrisch realisiert als Homotopiefasern der n-Multiplikation auf simplizialen Garben, welche die K-Theorie berechnen. Die relativen Gruppen ergeben sich durch eine Kegelbildung. Vermöge simplizialer Methoden wird ein relativer höherer Cherncharakter konstruiert, der verträglich mit den langen exakten relativen Sequenzen ist. Ist W ein regulärer Zykel (d.h. alle Primkomponenten von W sind regulär), so zeigen wir ein Riemann-Roch-Theorem für die relativen K-Gruppen. Dies verallgemeinert das entsprechende Theorem in [Bl3] für Primzykel auf beliebige Zykel. Wir nehmen nun an, daß W homologisch trivial entlang den geometrischen Fasern von $X \to S$ ist. Es bezeichne $\mathscr{K}_0(X/S)$ die zu $(U \subseteq S) \mapsto K_0(X_U)$ assoziierte Zariskigarbe auf S. Diese Garben tragen eine γ-Filtration und durch Bildung eines geeigneten Pushouts erhält man in Analogie zur Blochschen Konstruktion von $\underline{E}_W^{\mathrm{CH}}$ eine Extension $\underline{E}_W^K$ von $\mathrm{gr}_\gamma^n \mathscr{K}_0(X/S)_{\mathbb{Q}}$ durch $\mathbb{G}_{m,S,\mathbb{Q}}$. Das Hauptergebnis dieses Kapitels ist die Existenz eines kommutatives Diagramms

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbb{G}_{m,S,\mathbb{Q}} \arrow[r] \arrow[d, "="'] & \underline{E}_W^K \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & \mathrm{gr}_\gamma^n \mathscr{K}_0(X/S)_{\mathbb{Q}} \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{G}_{m,S,\mathbb{Q}} \arrow[r] & \underline{E}_{W,\mathbb{Q}}^{\mathrm{CH}} \arrow[r] & \underline{\mathrm{CH}}^n(X/S)_{\mathbb{Q}} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

von Zariski-Garben auf S, dessen mittlerer vertikaler Morphismus ein Isomorphismus ist. Dabei ist Anzumerken, daß die Gesamtheit aller unteren Zeilen für homologisch triviale Zykel W die Blochsche Biextension beschreiben, wir also mittels des oberen Diagramms eine K-theoretische Interpretion derselben haben. Die obere Zeile dieses Diagramm kann aber in einer weitaus allgemeineren Situation gebildet werden: Ist S ein reguläres, noethersches, affines Schema und X über S quasiprojektiv, so existiert eine γ-Filtration auf der höheren (relativen) K-Theorie von X und man kann obige Konstruktion durchführen. Dies ist interessant für Anwendungen in der Theorie der arithmetischen Schemata.

Zuletzt untersuchen wir eine weitere Möglichkeit K-Garben und Höhentheorie zu verbinden. Dieser Teil ist unabhängig von den vorgehenden Kapiteln. Höhenpaarungen von Zykeln wurden zuerst von Bloch und Beilinson mittels K-theoretischer Methoden eingeführt, wobei sich globale aus lokalen Höhenpaarungen berechnen. Dabei definiert Bloch lokale Paarungen in der folgenden Situation: Es sei S ein diskreter Bewertungsring mit generischer Charakteristik 0, X ein glattes projektives Schema über S und $\mathscr{F}^\bullet$ ein Komplex von kohärenten Garben, dessen Cherncharakter entlang den geometrischen Fasern von $\pi : X \to S$ verschwindet. Es sei $\mathscr{F}^+$ (bzw. $\mathscr{F}^-$) die Summe der geraden (bzw. ungeraden) Komponenten von $\mathscr{F}^\bullet$. Die Schnittabbildung, die einem Vektorbündel $\mathscr{V}$ auf X das direkte Bild $\pi_*(\mathscr{F}^+ \otimes \mathscr{V}) - \pi_*(\mathscr{F}^- \otimes \mathscr{V})$ auf S zuordnet, wird als stetige Abbildung von topologischen Räumen, die die K-Theorie von X bzw. S berechnen, realisiert. Die Fundamentalgruppe der Homotopiefaser ergeben nach Tensorieren mit $\mathbb{Q}$ eine Extension

$$0 \longrightarrow K_1(S)_{\mathbb{Q}} \longrightarrow E(\mathscr{F}^\bullet, X/S) \longrightarrow K_0(X)_{\mathbb{Q}} \longrightarrow 0.$$

von $K_0(X)_{\mathbb{Q}}$ durch $K_1(S)_{\mathbb{Q}} = \mathbb{G}_{m,S,\mathbb{Q}}(S)$. Es sei nun S ein eindimensionales, reguläres, integres Schema mit generischer Charakteristik 0. Zu einem glatten und projektiven Schema X über S und einem homologisch trivialen Komplex $\mathscr{F}^\bullet$ auf X studieren wir das Verhalten der obigen Konstruktion unter flachem Basiswechsel und nach Garbifizieren erhalten wir so eine $\mathbb{G}_{m,S,\mathbb{Q}}$-Extension der relativen K-Garbe $\mathscr{K}_0(X/S)_{\mathbb{Q}}$. Wir weisen nach, daß diese K-Garbe die Eigenschaften der lokalen Extension von Bloch verallgemeinert, also additiv ist, nur von der Homologie von $\mathscr{F}^\bullet$ abhängt und fasernweise aus der Konstruktion von Bloch über diskreten Bewertungringen besteht. Als Ergebnis erhalten wir eine Extension von Zariski-Garben

$$0 \longrightarrow \mathbb{G}_{m,S,\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathscr{E}_0^K(\mathscr{F}^\bullet, X/S)_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathscr{K}_0(X/S)_{\mathbb{Q}} \longrightarrow 0$$

auf S. Für den Fall, daß $\mathscr{F}$ eine Auflösung eines homologisch trivialen Zykels W auf X ist, vermuten wir, daß dieses Objekt eine γ-Filtration trägt und der Übergang zum assoziierten graduierten Objekt die zuvorgehend betrachtete K-theoretische Extension liefert. Dies sei einer weiteren Arbeit vorbehalten.

An dieser Stelle möchte die Gelegenheit nutzen, mich recht herzlich bei Herrn Prof. Dr. K. Künnemann für die zahlreichen Anregungen und die freundliche Betreuung dieser Arbeit zu bedanken. Des weiteren möchte ich den Herren Professoren Dr. U. Jannsen, Dr. S. Bloch und Dr. C. Soulé dafür danken, daß sie sich die Zeit genommen haben, mit mir einige Problemstellungen dieser Arbeit zu diskutieren. Meinem Kollegen Dr. N. Heinz danke ich für rege Diskussionen und die unermüdliche Arbeit, die er sich bei der Durchsicht dieser Dissertation gemacht hat.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel I. Schnittzahlen und $\mathbb{G}_m$-Biextensionen

Es sei S eine glatte Kurve über einem Körper und X ein glattes, projektives Schema über S. In [Bl1] konstruiert S. Bloch eine $\mathbb{G}_{m,S}$-Biextension $\mathbb{E}^{\mathrm{CH}}$ gewisser Chowgarben. Diese Biextension enthält schnitttheoretische Informationen für homologisch triviale Zykel komplementärer Kodimension auf X. Sind genauer Z und W zwei solche Zykel, so kann man zu $\mathbb{E}^{\mathrm{CH}}$ ein Geradenbündel $\mathbb{L}_{W,Z}$ auf S assoziieren, dessen Grad die Schnittzahl von Z und W ist. Dies ist das Hauptergebnis des vorliegenden Kapitels (Satz 3.4.1). Um den Beweis vorzubereiten, wird zunächst die Blochsche Konstruktion von $\mathbb{E}^{\mathrm{CH}}$ rekapituliert. Dabei wird der Begriff von relativen Chowgruppen für Zykel, der in [Bl1] implizit autaucht, genau definiert (Definition 1.2.2) und Grundeigenschaften bewiesen (Lemma 1.2.3, 1.2.4). Es schließt sich ein Abschnitt, in dem der Begriff der Biextensionen erläutert wird, an. Desweiteren werden fehlende Details bei der Konstruktion von $\mathbb{E}^{\mathrm{CH}}$ ausgeführt (Prop. 2.2.1ff).

§ 1. Grundlegende Notationen

Es sei X ein Schema von endlichem Typ über einem Körper und W ein abgeschlossenes Unterschema von X. In dieser Situation wurden relative höhere Chowgruppen $\mathrm{CH}^p(X, W, q)$ erstmals von S. Bloch in [Bl3] eingeführt. Der allgemeinere Begriff der relativen höheren Chowgruppen für einen Zykel W taucht zwar implizit in [Bl1] auf, allerdings ist dem Autor keine Referenz zur Definition dieses Begriffs bekannt. Für die vorliegende Arbeit erweist es sich daher als notwendig, die Definition für den allgemeineren Fall eines Zykels W zu geben, also Multiplizitäten zu berücksichtigen. Unter Benutzung eines geeigneten Abbildungskegels ergibt sich dieser Begriff in natürlicher Weise; insbesondere folgt die Existenz einer langen exakten Sequenz für relative höhere Chowgruppen. Die folgenden Abschnitte beschreiben diese verallgemeinerte Konstruktion.

1.1. Simpliziale Objekte. Es sei Δ die Kategorie, deren Objekte die geordneten Mengen $\Delta_n = \{0, \ldots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$, und deren Morphismen $f : \Delta_n \to \Delta_m$ monoton wachsende Abbildungen sind, d.h. es gilt $f(i) \leq f(j)$ für $i \leq j$. Für $n \geq 1$ und $0 \leq i \leq n$ definiert man Morphismen $\delta_i^n : \Delta_{n-1} \to \Delta_n$ vermöge

$$\delta_i^n(j) = \begin{cases} j & \text{für} j < i, \\ j+1 & \text{für} j \geq i, \end{cases}$$

und für $n \geq 0$, $0 \leq i \leq n$, Morphismen $\sigma_i^n : \Delta_{n+1} \to \Delta_n$ via

$$\sigma_i^n(j) = \begin{cases} j & \text{für} j \leq i, \\ j-1 & \text{für} j > i. \end{cases}$$

Diese Morphismen bilden ein Diagramm der Form

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r, bend right, "\sigma_i^2"'] & \Delta_2 \arrow[l, "\delta_i^2"'] \arrow[r, bend right, "\sigma_i^1"'] & \Delta_1 \arrow[l, "\delta_i^1"'] \arrow[r, shift right, "\sigma_i^0"'] & \Delta_0 \arrow[l, shift right, "\delta_i^0"'] \end{tikzcd}$$

in Δ und genügen den Relationen

$$\begin{aligned}
\delta_i^{n+1}\delta_j^n &= \delta_{j-1}^{n+1}\delta_i^n && \text{für } i \leq j, \\
\sigma_i^n\sigma_j^{n+1} &= \sigma_j^{n+1}\sigma_i^n && \text{für } i \leq j, \\
\delta_i^n\sigma_j^{n+1} &= \sigma_j^{n+1}\delta_i^n && \text{für } i < j, \\
\delta_i^n\sigma_j^{n+1} &= \sigma_j^{n+1}\delta_i^n && \text{für } i > j, \\
\delta_j^n\sigma_j^{n+1} &= \sigma_j^{n+1}\delta_j^n = \mathrm{id}_{\Delta_j}\,.
\end{aligned}$$

Zu jedem Morphismus $f \in \mathrm{Hom}_\Delta(\Delta_n, \Delta_m)$ gibt es eindeutig bestimmte natürliche Zahlen $s, t, i_1, \ldots, i_t, j_1, \ldots, j_s$ mit $0 \leq i_s < \ldots < i_1 \leq m$,$0 \leq j_1 < \ldots < j_t \leq n$, $n + s = m + t$ derart, daß f eine Faktorisierung der Form

$$\delta_{i_1} \circ \cdots \circ \delta_{i_s} \circ \sigma_{j_1} \circ \cdots \circ \sigma_{j_t}$$

besitzt. Ein kontravarianter Funktor $S : \Delta \to \mathscr{C}$ in eine Kategorie $\mathscr{C}$ entspricht daher der Vorgabe einer Familie von Objekten $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathscr{C}$, Morphismen $\delta_i^n : X_n \to X_{n-1}$ mit $n \geq 1$, $0 \leq i \leq n$, und Morphismen $\sigma_i^n : \Delta_n \to \Delta_{n+1}$ mit $n \geq 0$, $0 \leq i \leq n$, sodaß die zu den obigen Relationen dualen Relationen erfüllt sind.

Ein simpliziales Objekt in einer Kategorie $\mathscr{C}$ ist ein kontravarianter Funktor $S : \Delta \to \mathscr{C}$ und ein Morphismus von simplizialen Objekten S_1 und S_2 in $\mathscr{C}$ ist eine natürliche Transformation $f : S_1 \to S_2$ von Funktoren. Die simplizialen Objekte in $\mathscr{C}$ und deren Morphismen bilden eine Kategorie $\Delta(\mathscr{C})$.

Eine simpliziale abelsche Gruppe ist ein simpliziales Objekt in der Kategorie der abelschen Gruppen. Ist

$$\begin{tikzcd} G_\bullet = \cdots \arrow[r, "\delta_i^2"] & G_2 \arrow[l, bend left, "\sigma_i^2"] \arrow[r, "\delta_i^1"] & G_1 \arrow[l, bend left, "\sigma_i^1"] \arrow[r, shift left, "\delta_i^0"] & G_0 \arrow[l, shift left, "\sigma_i^0"] \end{tikzcd}$$

eine simpliziale abelsche Gruppe, so definiert man Homomorphismen $d_{n+1} : G_{n+1} \to G_n$, $n \geq 0$, $d_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i \delta_i^n$. Setzt man $G_n = 0$, $n < 0$, und $d_n = 0$, $n \leq 0$, so gilt für diese Morphismen $d_n d_{n+1} = 0$, $n \in \mathbb{Z}$, und somit ist $(G_\bullet, d_\bullet)$ ein Komplex abelscher Gruppen. Die Homologie der simplizialen abelschen Gruppe $G_\bullet$ ist definiert als Homologie des Komplexes $(G_\bullet, d_\bullet)$, also $H_p(G) = H_p(G_\bullet, d_\bullet)$. Diese Bildung ist offensichtlich funktoriell in $G_\bullet$.

1.2. Höhere Chowgruppen. Wie geben in diesem Abschnitt eine Definition für höhere relative Chowgruppen $\mathrm{CH}^p(X, W)$ für algebraische Schemata X und Zykel W auf X. Als Referenz sei auch auf [Bl3], [Bl4] und [MS1] verwiesen.

Es sei k ein Körper. Das Standard n-Simplex Δ_n, $n \geq 0$, in der Kategorie der lokal-algebraischen (d.h. lokal von endlichem Typ) k-Schemata ist definiert durch

$$\Delta_n = \operatorname{spec} k[T_0 \ldots, T_n]/(\sum_{i=0}^{n} T_i - 1) \cong \mathbb{A}_k^n.$$

Ist $\rho : \{0, \ldots, m\} \to \{0 \ldots, n\}$ eine monoton wachsende Abbildung, so sei $\tilde{\rho} : \Delta_m \to \Delta_n$ der durch den k-Algebren-Homomorphismus

$$k[T_0 \ldots, T_n]/(\sum_{i=0}^{n} T_i - 1) \longrightarrow k[T_0 \ldots, T_m]/(\sum_{j=0}^{m} T_j - 1), \qquad T_i \longmapsto \sum_{\rho(j)=i} T_j$$

definierte Morphismus von k-Schemata. Ist ρ surjektiv, so ist $\tilde{\rho}$ flach und für injektives ρ ist $\tilde{\rho}$ eine reguläre abgeschlossene Immersion der Kodimension $n - m$. Das Bildschema in Δ_n heißt eine Seite von Δ_n. Zu einem lokal-algebraischen k-Schema X und $p \geq 0$ sei $z^p(X, n)$ die freie abelsche Gruppe erzeugt von der Menge der integren, abgeschlossenen Unterschemata $Y \subseteq X \times_k \Delta_n$ der Kodimension p, die jede Seite $X \times_k \Delta_m \subseteq X \times_k \Delta_n$ von $X \times_k \Delta_n$ eigentlich schneiden, d.h. $Y \cap X \times_k \Delta_m$ ist von reiner Kodimension $p + n - m$ in $X \times_k \Delta_n$. Folglich sind für jeden Morphismus der Form $\tilde{\rho}$ die irreduziblen Komponenten von $(\mathrm{id}_X \times_k \tilde{\rho})^{-1}(Y) = Y \times_{X \times_k \Delta_n} X \times_k \Delta_m$ von Kodimension p in $X \times_k \Delta_m$. Sind Y_i, $i \in I$, die irreduziblen Komponenten von $(\mathrm{id}_X \times_k \tilde{\rho})^{-1}(Y)$ und n_i die Multiplizitäten von Y_i in $(\mathrm{id}_k \times_k \tilde{\rho})^{-1}(Y_i)$, so induziert die Vorschrift $\tilde{\rho}^* : z^p(X, n) \to z^p(X, m)$, $[Y] \mapsto \sum_{i \in I} n_i [Y_i]$, einen kontravarianten Funktor

$$z^p(X, \cdot) : \Delta \longrightarrow (\mathrm{Ab}), \qquad n \longmapsto z^p(X, n)$$

in die Kategorie der abelschen Gruppen (Ab), also eine simpliziale abelsche Gruppe $z^p(X, \cdot)$.

Definition 1.2.1 ([Bl3], S.267ff). *Für ein algebraisches (d.h. von endlichem Typ) k-Schema X sind die höheren Chowgruppen $\mathrm{CH}^p(X, q)$ definiert als Homologie der simplizialen abelschen Gruppe $z^p(X, \cdot)$, also*

$$\mathrm{CH}^p(X, q) = H_q(z^p(X, \cdot)).$$

Es sei $\mathscr{V}_k$ die Kategorie der äquidimensionalen quasiprojektiven Schemata über k und k-algebraischen Morphismen. Die höheren Blochschen Chowgruppen $\mathrm{CH}^p(X, q)$ haben folgendes Eigenschaften:

i) Ist X eine Varietät in $\mathscr{V}_k$, so gilt für die gewöhnlichen Chowgruppen in der Kodimensionindizierung nach [F] die kanonische Isomorphie $\mathrm{CH}^p(X, 0) = \mathrm{CH}^p(X)$.

ii) Ist $f : X \to Y$ ein eigentlicher Morphismus in $\mathscr{V}_k$ von relativer Dimension $d = \dim X - \dim Y$, so hat man einen kanonischen Gruppenhomomorphismus $f_* : \mathrm{CH}^p(X,q) \to \mathrm{CH}^{p-d}(Y,q)$. Diese Bildung ist kovariant funktoriell.

iii) Es sei $f : X \to Y$ ein Morphismus in $\mathscr{V}_k$. Ist f von vollständigem Durchschnitt oder ist f flach, so hat man einen Gruppenhomomorphismus $f^* : \mathrm{CH}^p(Y,q) \to \mathrm{CH}^p(X,q)$. Dabei nennt man f^* im ersten Fall Gysinmorphismus und im zweiten Fall flaches Pullback. Ist f flach und von vollständigem Durchschnitt, so stimmen flaches Pullback und Gysinmorphismus überein. Insbesondere ist f^* für glattes Y definiert. Diese Bildung ist kontravariant funktoriell, und Gysinmorphismen vertauschen mit flachem Pullback und eigentlichem Pushforward.

iv) Sind $X, Y \in \mathscr{V}_k$, so hat man eine $\mathbb{Z}$-bilineare Abbildung $\mathrm{CH}^p(X,q) \times \mathrm{CH}^r(Y,s) \to \mathrm{CH}^{p+r}(X \times_k Y, q+s)$. Ist X glatt, so induziert der Diagonalmorphismus $\Delta_{X/k} : X \to X \times_k X$ mit iii) eine Struktur als bigraduierter Ring auf $\mathrm{CH}^*(X,*) = \bigoplus_{p,q \in \mathbb{N}} \mathrm{CH}^p(X,q)$. Dieser ist antikommutativ bezüglich q.

v) Für glatte $X, Y \in \mathscr{V}_k$ und $f : X \to Y$ ist $f^* : \mathrm{CH}^*(Y,*) \to \mathrm{CH}^*(X,*)$ aus iii) ein Ringhomomorphismus.

vi) Ist X glatt, so gilt kanonisch $\mathrm{CH}^1(X,1) = \mathscr{O}_X(X)^\times$. Insbesondere gilt

$$\mathrm{CH}^1(\operatorname{spec} \mathbb{C}, 1) = \mathbb{C}^\times = \mathbb{C}/\mathbb{Z}(1).$$

vii) Bezeichnet $\underline{z}^p_X(\cdot)$ den zur Prägarbe $(U \subseteq X) \mapsto z^p(U,\cdot)$ assoziierten Komplex abelscher Garben, so gilt $\mathbb{H}^q(X, \underline{z}^p_X(\cdot)) \cong \mathrm{CH}^p(X,q)$. Diese Isomorphie erweist sich bei der Beschreibung von Regulatorabbildungen im simplizialen Kontext als nützlich (cf. Kap. III).

viii) Für ein glattes Schema $X \in \mathscr{V}_k$ und eine zur Charakteristik von k verschiedene Primzahl l hat man eine Zykelabbildung $\mathrm{cl}_l^{p,q} : \mathrm{CH}^p(X,q) \longrightarrow H^{2p-q}_{\text{ét}}(\bar{X}, \mathbb{Z}_l(p))$ in die l-adischen Kohomologiegruppen. Dabei ist $\bar{X} = X \times_k \bar{k}$ für einen separabelen Abschluß $\bar{k}$ von k. Diese Zykelabbildung ist verträglich mit eigentlichem Pushforward für glatte Morphismen, Gysinmorphismen und Pullback in der l-adischen Kohomologie.

ix) Für ein glattes, $\mathbb{C}$-algebraisches Schema X hat man eine Zykelabbildung $\mathrm{cl}_B^{p,q} : \mathrm{CH}^p(X,q) \to H_B^{2p-q}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(p))$ in die singuläre Kohomologie der zugehörigen komplexen Mannigfaltigkeit $X(\mathbb{C})$; diese ist verträglich mit Gysin-, eigentlichen Pushforward- und flachen Pullbackmorphismen.

x) Für glattes $X \in \mathscr{V}_\mathbb{C}$ hat man eine Zykelabbildung in die Delignekohomologie (cf. II.1.1 v)) $\mathrm{cl}_\mathscr{D}^{p,q} : \mathrm{CH}^p(X,q) \to H_\mathscr{D}^{2p-q}(X, \mathbb{Z}(p))$.

Wir kommen nun zur Definition für relative höhere Chowgruppen. Es sei dazu X ein glattes k-Schema. Zu einem Zykel $W = \sum_{r \in R} n_r W_r$ mit irreduziblen Komponenten W_r, $r \in R$, sei $z^p_W(X,n)$ die Untergruppe von $z^p(X,n)$, die von integren Unterschemata Z von $X \times_k \Delta^n$ der Kodimension p, welche alle Seiten $W_r \times_k \Delta_m \subseteq X \times_k \Delta_n$ eigentlich schneiden, erzeugt ist. Nach [Bl3] Lemma 4.2 ist $z^p_W(X,\cdot)$ eine simpliziale Untergruppe von $z^p(X,\cdot)$ und die Inklusion $j : z^p_W(X,\cdot) \to z^p(X,\cdot)$ ist ein Quasiisomorphismus. Versieht man die irreduziblen Komponenten W_r mit der reduzierten, induzierten Unterschemastruktur, so ergibt der Schnitt von Zykeln eine wohldefinierte Abbildung $i^*_{W_r} : z^p_W(X,n) \to z^p(W_r,n)$ von simplizialen Gruppen, und man erhält eine Abbildung

$$i^*_W : z^p_W(X,n) \longrightarrow \bigoplus_{r \in R} z^p(W_r,n), \qquad Z \longmapsto (n_r i^*_{W_r}(Z))_{r \in R}.$$

Bezeichnet $C^p(i^*_W,\cdot)$ den Abbildungskegel dieser Abbildung von Komplexen und setzt man $z^p(W,\cdot) = \bigoplus_{r \in R} z^p(W_r,\cdot)$, so erhält man mit $z^p(X,W,\cdot) = C^p(i^*_W,\cdot)[1]$ eine kurze exakte Sequenz von Komplexen

$$0 \longrightarrow z^p(W,\cdot) \longrightarrow z^p(X,W,\cdot)[-1] \longrightarrow z^p_W(X,\cdot)[-1] \longrightarrow 0,$$

und damit eine lange exakte Homologiesequenz

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow \bigoplus_{r \in R} \mathrm{CH}^p(W_r,q) \longrightarrow H_q(z^p(X,W,\cdot)[-1]) \longrightarrow H_q(z^p_W(X,\cdot)[-1]) \\ \longrightarrow \bigoplus_{r \in R} \mathrm{CH}^p(W_r,q-1) \longrightarrow \cdots . \end{aligned}$$

Definition 1.2.2. *Für ein glattes k-Schema X und einen Zykel $W = \sum_{r \in R} n_r W_r$ auf X mit paarweise verschiedenen Primzykeln W_r sind die relativen höheren Chowgruppen durch*

$$\mathrm{CH}^p(X,W,q) = H_q(z^p(X,W,\cdot))$$

gegeben. Die Chowgruppen des Zykels W sind definiert als

$$\mathrm{CH}^p(W,q) = H_q(z^p(W,\cdot)) = \bigoplus_{r \in R} \mathrm{CH}^p(W_r,q).$$

Benutzt man den Isomorphismus $H_q(z^p_W(X,\cdot)) \cong \mathrm{CH}^p(X,q)$, so erhält man eine lange exakte Sequenz

$$\begin{gathered} \cdots \longrightarrow \mathrm{CH}^p(X,W,q) \longrightarrow \mathrm{CH}^p(X,q) \longrightarrow \mathrm{CH}^p(W,q) \\ \longrightarrow \mathrm{CH}^p(X,W,q-1) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathrm{CH}^p(X,0) \longrightarrow \mathrm{CH}^p(W,0) \longrightarrow 0 \end{gathered}$$

für die höheren Chowgruppen. Dabei ist $\mathrm{CH}^p(W,q)$ offenbar nur von den Primkomponenten W_r bestimmt, die Abbildung $\mathrm{CH}^p(X,q) \to \mathrm{CH}^p(W,q)$ ist jedoch auch von den Multiplizitäten n_r abhängig. Weiter gilt für den Nullzykel 0 die triviale Identität

$\mathrm{CH}^p(X,0,q) = \mathrm{CH}^p(X,q)$. Ist $f : X' \to X$ flach und $W' = f^*(W)$ der zurückgezogene Zykel mit einer Darstellung $W' = \sum_{r\in R'} n'_r W'_r$ durch Primzykel W'_r, so induziert der Pullback von Zykeln ein kommutatives Diagramm der Form

$$\begin{tikzcd} z^p_W(X,\cdot) \arrow[r] \arrow[d] & \bigoplus_{r\in R} z^p(W_r,\cdot) \arrow[d] \\ z^p_{W'}(X',\cdot) \arrow[r] & \bigoplus_{r\in R'} z^p(W'_r,\cdot) \end{tikzcd}$$

und damit einen Morphismus zwischen den jeweiligen Abbildungskegeln. Es folgt also

Lemma 1.2.3. *Die langen exakten Sequenzen für relative höhere Chowgruppen sind funktoriell unter flachen Morphismen, d.h. man hat ein kommutatives Diagramm der Form*

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & \mathrm{CH}^p(X,W,q) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{CH}^p(X,q) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{CH}^p(W,q) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & \mathrm{CH}^p(X',W',q) \arrow[r] & \mathrm{CH}^p(X',q) \arrow[r] & \mathrm{CH}^p(W',q) \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

Es sei nun $Z = \sum_{s\in S} m_s Z_s$ ein Zykel der Kodimension n auf X mit Primkomponenten Z_s. Schneidet Z den Zykel W nicht, so verschwindet die Zykelklasse $\{Z\} \in \mathrm{CH}^n(X)$ von Z offensichtlich unter der Abbildung $\mathrm{CH}^n(X) \to \mathrm{CH}^n(W)$ und es gilt

Lemma 1.2.4. *Man hat eine kanonische Liftung $\{Z\}_W \in \mathrm{CH}^n(X,W)$ von $\{Z\}$ unter $\mathrm{CH}^n(X,W) \to \mathrm{CH}^n(X)$.*

Beweis. Es bezeichne $j_s : Z_s \to X$ die kanonische Inklusion der Primkomponente Z_s in X. Eigentliches Push-Forward ergibt für jedes s einen Komplexhomomorphismus $j_{W_s*} : z^p(Z_s,\cdot) \to z^{p+n}(X,\cdot)$ und somit einen Komplexhomomorphismus $j_{Z*} : z^p(Z,\cdot) \to z^{p+n}(X,\cdot)$. Da Z den Zykel W nicht trifft, so ist das Bild von j_{Z*} offenbar im Unterkomplex $z^p_W(X,\cdot)$ enthalten und es gilt offenbar $i^*_W j_{Z*} = 0$. Also kommutiert

$$\begin{tikzcd} z^p(Z,\cdot) \arrow[r] \arrow[d, "j_{Z*}"'] & 0 \arrow[d] \\ z^{p+n}_W(X,\cdot) \arrow[r, "i^*_W"] & z^{p+n}(W,\cdot), \end{tikzcd}$$

und man erhält einen induzierten Morphismus

$$z^p(Z,\cdot) = C(z^p(Z,\cdot) \to 0)[1] \longrightarrow z^{p+n}(X,W,\cdot)$$

der Abbildungskegel. Betrachtet man die zugehörigen langen exakten Sequenzen, so erhält man für $p = 0$ das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathrm{CH}^0(Z) \arrow[r, "="] \arrow[d] & \mathrm{CH}^0(Z) \arrow[d] \\ \mathrm{CH}^n(X,W) \arrow[r] & \mathrm{CH}^n(X) \end{tikzcd}$$

und somit die Behauptung. □

1.3. Torseure und $\mathbb{G}_m$-Biextensionen. Um im weiteren Verlauf des Textes eine allgemeine Sprache zur Behandlung von Biextensionen zu Verfügung zu haben, werden wir diesen Begriff in einer kategorientheoretischen Weise einzuführen. Als wichtige Spezialfälle, die später auch noch einmal getrennt als Beispiele betrachtet werden, erhalten wir den Begriff der Biextension von Gruppen und den Begriff der étalen Biextension. Weitere wichtige geometrische Beispiele von Zariski-algebraischen (bzw. komplex analytischen) Biextensionen werden durch Poincarébündel auf dem Produkt $A \times A^\vee$ einer abelschen Varietät (bzw. eines komplexen Torus) A mit ihrem Dual $A^\vee$ gegeben, cf. II.2.3. Wir treffen zunächst einige Vorbereitungen.

Es sei E eine Kategorie und $G : E \to (\mathrm{Ab})$ ein kontravarianter, darstellbarer Funktor in die Kategorie der abelschen Gruppen. Einen solchen Funktor nennen wir im folgenden auch eine Gruppe in E und bezeichnen das darstellende Element dieses Funktors wieder mit G (es sei also ein darstellendes Element fest gewählt). Existiert ein terminales Objekt und existieren die Produkte $G \times G$ sowie $G \times G \times G$ in E, so ist G ein Gruppenobjekt im üblichen Sinne. Ein (links-)homogener Raum über der Gruppe G in E ist ein kontravarianter, durch ein Objekt P dargestellter Funktor $P : E \to (\mathrm{Mengen})$ derart, daß für jedes Objekt S in E die Menge $P(S)$ ein (links-)homogener Raum unter der Gruppe $G(S)$ ist und für jeden Morphismus $f : S' \to S$ die Identität $P(f)(gp) = G(f)(g)P(f)(p)$ für alle $g \in G(S)$, $p \in P(S)$ erfüllt ist. Ist S ein Objekt von E, so nennt man eine Gruppe G in der Kategorie $E_{/S}$ der Objekte über S eine S-Gruppe. Zwischen den mengenwertigen Funktoren $G \times P \to P \times P$ gibt es offenbar eine natürliche Transformation u, die auf den S-wertigen Punkten durch

$$u_S : G(S) \times P(S) \to P(S) \times P(S), \qquad (g, x) \mapsto (gx, x)$$

gegeben ist. Ist u ein natürlicher Isomorphismus, sind also alle u_S bijektiv, so nennt man P einen G-Pseudotorseur.

Definition 1.3.1 (cf. [G], S. 106ff.). *Es sei T ein Topos und P/S ein Pseudotorseur unter einer S-Gruppe G über einem Objekt S in T. Dann heißt P ein G-Torseur über S, falls der Strukturmorphismus $P \to S$ ein Epimorphismus ist. Ein Torseur in dem Situs E ist ein Torseur auf dem Topos $\tilde{E}$ der mengenwertigen Garben auf E.*

Bemerkung 1.3.2. *i) Diese Definition ist lokal für die kanonische Topologie auf dem Topos E, i.e. $P \to S$ ist genau dann epimorph, wenn es eine epimorphe Familie $(S_i \to S)_{i \in I}$ gibt mit $P(S_i) = Hom_S(S_i, P) \neq \emptyset$. Dies ist gerade eine Bedingung von lokaler Trivialität.*

ii) Eine kommutative Gruppe in dem Topos $\tilde{E}$ eines Situs E ist gerade eine darstellbare Garbe von abelschen Gruppen auf E.

iii) *Ist T ein Topos und E die zugrundeliegende Kategorie von T, versehen mit der kanonischen Topologie, so identifizieren sich die Begriffe von Torseuren in E und T, da man eine kanonische Isomorphie von Topoi $\tilde{E} \cong T$ hat.*

iv) *Es sei E ein Situs. Nach [SGA IV] Thm 4.4 ist eine Familie $(S_i \to S)$ von Morphismen in E genau dann eine Überdeckung von S, wenn die assoziierte Familie $(\tilde{S}_i \to \tilde{S})$ eine epimorphe Familie im Topos $\tilde{E}$, also eine Überdeckung für die kanonische Topologie, ist. Insbesondere ist die Bedingung ii) für Pseudotorseure in einem Situs E lokal in der Topologie von E.*

Es seien nun G, G' und H drei kommutative Gruppen in einem Topos T. Dann existiert $G \times G'$ in T und ist darstellbar, und man kann also $H_{(G\times G')}$-Torseure E über $G \times G'$ studieren. Es bezeichne $\mu : G \times G \to G$ die Multiplikation auf G und $\mathrm{pr}_i : G \times G \to G$ die Projektion auf den i-ten Faktor, $i = 1, 2$. Durch Pullback mit $\mu \times \mathrm{id}_{G'}$ (resp. $\mathrm{pr}_i \times \mathrm{id}_{G'}$) erhält man $H_{(\mu)}$ (resp. $H_{(\mathrm{pr}_i)}$)-Torseure $E_{(\mu)}$ (resp. $E_{(\mathrm{pr}_i)}$) über $G \times G \times G'$. Da H über dem terminalen Objekt von T definiert ist, so hat man kanonische Isomorphismen $H_{(G\times G\times G')} \cong H_{(\mathrm{pr}_1)} \cong H_{(\mathrm{pr}_2)} \cong H_{(\mu)}$. Insbesondere ist das kontrahierte Produkt (cf. [G] Def. 1.3.1) $(E_{(\mathrm{pr}_1)} \times_{G\times G\times G'} E_{(\mathrm{pr}_2)})/H_{(G\times G\times G')}$ ein $H_{(G\times G\times G')}$-Pseudotorseur, der im folgenden mit $E\,{}_H\!\otimes E$ bezeichnet sei. Analog erhält man einen $H_{(G\times G'\times G')}$-Pseudotorseur $E \otimes_H E$ auf $G \times G' \times G'$.

Definition 1.3.3. *Eine H-Biextension von (G, G') ist ein $H_{(G\times G')}$-Torseur über $G \times G'$ zusammen mit zwei Isomorphismen*

$$+_1 : E\,{}_H\!\otimes E \longrightarrow E_{(\mu)}, \qquad +_2 : E \otimes_H E \longrightarrow E_{(\mu')}$$

von $H_{(G\times G\times G')}$-Pseudotorseuren (bzw. $H_{(G\times' G\times G')}$-Pseudotorseuren) und damit Torseuren. Dabei soll folgende Kompatibilitätsbedingung zwischen $+_1$ und $+_2$ gelten: Durch Pullback auf $G \times G \times G' \times G'$ kommutiert das Diagramm von $H_{G\times G\times G'\times G'}$-Torseuren

$$\begin{tikzcd}
(E \otimes_H E)\,{}_H\!\otimes (E \otimes_H E) \cong (E\,{}_H\!\otimes E) \otimes_H (E\,{}_H\!\otimes E) \arrow[r, "+_1 \otimes_H +_1"] \arrow[d, "+_2\,{}_H\!\otimes +_2"'] & E_{(\mu)} \otimes_H E_{(\mu)} \arrow[d, "+_{2(\mu)}"] \\
E_{(\mu')}\,{}_H\!\otimes E_{(\mu')} \arrow[r, "+_{1(\mu')}"] & E_{(\mu\times\mu')}.
\end{tikzcd}$$

Ein Morphismus von H-Biextensionen $(E, +_1, +_2)$ und $(\tilde{E}, \tilde{+}_1, \tilde{+}_2)$ über (G, G') ist ein Morphismus von $H_{G\times G'}$-Torseuren $f : E \to \tilde{E}$ über (G, G'), sodaß die Diagramme

$$\begin{tikzcd}
E\,{}_H\!\otimes E \arrow[r, "+_1"] \arrow[d, "f\,{}_H\!\otimes f"'] & E_{(\mu)} \arrow[d, "f_{(\mu)}"] \\
\tilde{E}\,{}_H\!\otimes \tilde{E} \arrow[r, "\tilde{+}_1"] & \tilde{E}_{(\mu)}
\end{tikzcd}, \qquad
\begin{tikzcd}
E \otimes_H E \arrow[r, "+_2"] \arrow[d, "f \otimes_H f"'] & E_{(\mu')} \arrow[d, "f_{(\mu')}"] \\
\tilde{E} \otimes_H \tilde{E} \arrow[r, "\tilde{+}_2"] & \tilde{E}_{(\mu')}
\end{tikzcd}$$

kommutieren.

Wir wollen nun noch zwei Spezialisierungen des Begriffs der Biextension angeben: Für ein Schema X ist nach Descent-Theorie $\mathbb{G}_{m,X} = \operatorname{spec} \mathscr{O}_X[T, T^{-1}]$ eine étale Garbe abelscher Gruppen und damit eine kommutative Gruppe im Topos $\tilde{X}_{\text{Ét}}$ der mengenwertigen étalen Garben auf dem großen étalen Situs $X_{\text{Ét}}$ von X. Durch Hinzufügen des Nullschnittes erhält man eine Äquivalenz zwischen der Kategorie der $\mathbb{G}_{m,X}$-Torseure in $\tilde{X}_{\text{Ét}}$ und der étalen Geradenbündel auf X. Es seien G und G' zwei kommutative Gruppenschemata über X. Eine $\mathbb{G}_{m,X}$-Biextension E von (G, G') entspricht daher der Vorgabe eines étalen Geradenbündels E auf $G \times_X G'$ zusammen mit Isomorphismen étaler Geradenbündel

$$+_1 : E_{(\mathrm{pr}_1)} \otimes E_{(\mathrm{pr}_2)} \longrightarrow E_{(\mu)}, \qquad +_2 : E_{(\mathrm{pr}'_1)} \otimes E_{(\mathrm{pr}'_2)} \longrightarrow E_{(\mu')}$$

auf $G \times_X G \times_X G'$ (bzw. $G \times_X G' \times_X G'$), so daß $+_1, +_2$ für jeden geometrischen Punkt $(s, t, s', t')/X : \operatorname{spec} \Omega \to G \times_X G \times_X G' \times_X G'$ ein kommutatives Diagramm von Isomorphismen

$$\begin{tikzcd}
E_{(s,s')} \otimes_\Omega E_{(s,t')} \otimes_\Omega E_{(t,s')} \otimes_\Omega E_{(t,t')} \arrow[r] \arrow[d] & E_{(s+t,s')} \otimes_\Omega E_{(s+t,t')} \arrow[d] \\
E_{(s,s'+'t')} \otimes_\Omega E_{(t,s'+'t')} \arrow[r] & E_{(s+t,s'+'t')}
\end{tikzcd}$$

eindimensionaler Ω-Vektorräumen induziert. Dabei seien $+$ (bzw. $+'$) Gruppengesetze auf $G(\Omega)/X$ (bzw. $G'(\Omega)/X$). Wir erhalten somit den Begriff der étalen $\mathbb{G}_{m,X}$-Biextensionen. Analog erhält man eine Definition von Zariski $\mathbb{G}_{m,X}$-Biextensionen und der Satz Hilbert 90 ([T] Thm. 4.3.1) ergibt eine Kategorienäquivalenz zwischen der Kategorie der étalen $\mathbb{G}_{m,X}$-Biextensionen und der Kategorie der Zariski $\mathbb{G}_{m,X}$-Biextensionen.

Als zweites Beispiel betrachten wir Biextensionen von abelschen Gruppen. Es sei dazu T der Topos von Garben auf einem einpunktigen topologischen Raum. Dann ist T die Kategorie der Mengen und ein darstellbarer Gruppenfunktor ist eine Gruppe im gewöhnlichen Sinne. Es seien daher also H, G und G' abelsche Gruppen. Eine H-Biextension von (G, G') ist eine Menge E, zusammen mit einer surjektiven Abbildung $\pi : E \to G \times G'$, einer Operation von H auf E, die einfach-transitiv auf den Fasern $E_{x,y} = \pi^{-1}(x, y)$ von π operiert und zwei partiell definierten Verknüpfungen $+_1, +_2 : E \times E \to E$ mit:

i) $a +_1 b$ (resp. $a +_2 b$) für $a \in E_{x,y}$, $b \in E_{z,w}$ ist genau dann definiert, wenn $y = w$ (resp. $x = z$) gilt. In diesem Fall gilt $a +_1 b \in E_{x+z,y}$ (resp. $a +_2 b \in E_{x,y+w}$).

ii) Es gilt
$$h + (a +_i b) = (h + a) +_i b = a +_i (h + b),$$
falls $a +_i b$, $i = 1, 2$, definiert ist.

iii) Für $a, c \in E_{x,y}$, $b, d \in E_{z,y}$ mit $a +_1 b = c +_1 d$ gibt es ein eindeutig bestimmtes $h \in H$ mit $c = h + a$, $d = (-h) + b$. Für $+_2$ ist die analoge Bedingung erfüllt.

iv) Für $a \in E_{x,y}$, $b \in E_{z,y}$, $c \in E_{x,w}$, $d \in E_{z,w}$ gilt

$$(a +_1 b) +_2 (c +_1 d) = (a +_2 c) +_1 (b +_2 d) \in E_{x+z,y+w}.$$

§ 2. $\mathbb{G}_m$-Biextensionen zu homologisch trivialen Zykeln

2.1. Homologisch triviale Zykel. Es sei im folgenden S ein zusammenhängendes Schema, glatt und quasiprojektiv über einem Körper k. Weiter sei $\pi : X \to S$ ein glattes, projektives Schema von relativer Dimension d über dem Basisschema S. Es sei n eine natürliche Zahl und $Z \in Z^n(X)$ ein Zykel von Kodimension n auf X. Dann bestimmt Z eine Klasse $z = [Z] \in \mathrm{CH}^n(X)$ im Chowring $\mathrm{CH}^*(X)$ von X.

Definition 2.1.1. *i) Ist $S = \operatorname{spec} k$ und $s : \operatorname{spec} \Omega \to S$ ein geometrischer Punkt eines separabel abgeschlossenen Körpers Ω in S, so induziert z ein Element $z_s \in \mathrm{CH}^n(X_s)$ und damit ein Element*

$$\mathrm{cl}_l^{n,0}(z_s) \in H^{2n}_{\acute{e}t}(X_s, \mathbb{Z}_l(n))$$

in der l-adischen Kohomologie von X_s. Ist $\mathrm{cl}_l^{n,0}(z_s) = 0$ für jedes solche s und jede von $\operatorname{char} k$ verschiedene Primzahl l, so heiße z homologisch trivial.

ii) Ist S allgemein, so heißt Z (resp. dessen Klasse z) homologisch trivial bezüglich π, falls z_s homologisch trivial auf jeder geometrischen Fasern X_s von π ist.

iii) Die homologisch trivialen Zykel (resp. deren Klassen) bilden eine Untergruppe von $Z^n(X)$ (resp. $\mathrm{CH}^n(X)$). Wir bezeichnen diese im folgenden mit $Z^n_{hom}(X/S)$ (resp. $\mathrm{CH}^n_{hom}(X/S)$).

Bemerkung 2.1.2. *i) Die Definition 2.1.1 ii) ist unabhängig von der Wahl der geometrischen Faser: Sind nämlich $s_0 : \operatorname{spec} \Omega_0 \to S$ und $s_1 : \operatorname{spec} \Omega_1 \to S$ zwei geometrische Punkte von S und ist $\mathcal{O}_{X,s_1} \to \mathcal{O}_{X,s_0}$ eine Spezialisierung von s_0 zu s_1, so induziert diese für $l \neq \operatorname{char} k$ nach dem Basiswechselsatz für glatte, eigentliche Morphismen in der étalen Kohomologie einen Gruppenisomorphismus (cf. [Mi1] VI, cor.4.2))*

$$H^{2n}_{\acute{e}t}(X_{s_1}, \mathbb{Z}_l(n)) \longrightarrow H^{2n}_{\acute{e}t}(X_{s_0}, \mathbb{Z}_l(n))$$

mit $\mathrm{cl}_l^{n,0}(z_{s_1}) \mapsto \mathrm{cl}_l^{n,0}(z_{s_0})$. Da S zusammenhängend ist, so können je zwei geometrische Fasern über solche Spezialisierungsabbildungen mit einer geometrischen generischen Faser verglichen werden.

ii) Es sei k in $\mathbb{C}$ einbettbar, also insbesondere $\operatorname{char} k = 0$. Ist $s_1 : \Omega \to S$ ein geometrischer Punkt von S derart, daß sich s_1 zu einem geometrischen Punkt $s_0 : \operatorname{spec}(\mathbb{C}) \to \operatorname{spec}(\Omega) \to S$ fortsetzen läßt, so induziert s_0 eine Abbildung

$$H^{2n}_{\acute{e}t}(X_{s_1}, \mathbb{Z}_l(n)) \longrightarrow H^{2n}_{B}(X_{s_0}(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_l(n))$$

mit $\mathrm{cl}_l^{n,0}(z_{s_1}) \mapsto \mathrm{cl}_B^{n,0}(z_{s_0}) \otimes 1$. *Da der Kern der kanonischen Abbildung*

$$H_B^{2n}(X_{s_0}(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(n)) \to H_B^{2n}(X_{s_0}(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_l(n)) \cong H_B^{2n}(X_{s_0}(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(n)) \otimes \mathbb{Z}_l$$

aus denjenigen Elementen besteht, deren Ordnung prim zu l *ist, ist die Verschwindungsbedingung für alle* l *äquivalent zu* $\mathrm{cl}_B^{n,0}(z_{s_1}) = 0$. *Da* π *vom endlichem Typ ist, so ist die homologischen Trivialität von* Z *nach i) lediglich eine Bedingung an eine(!)* $\mathbb{C}$*-wertige Faser von* π.

2.2. Die Abbildung θ_w. Wir übernehmen die Bezeichnungen von 2.1. Es sei $W \in Z^{d+1-n}(X)$ ein Zykel von Kodimension $d+1-n$ auf X mit Klasse $w \in \mathrm{CH}^{d+1-n}(X)$. Das Bilden des Cupproduktes mit w und Pushforward $\pi_* : \mathrm{CH}^{d+1}(X,1) \to \mathrm{CH}(S,1)$ auf den höheren Chowgruppen induziert einen Gruppenhomomorphismus

$$\theta_w : \mathrm{CH}^n(X,1) \longrightarrow \mathrm{CH}^{d+1}(X,1) \longrightarrow \mathrm{CH}^1(S,1), \qquad z \longmapsto \pi_*(z \cdot w).$$

Das Schlüsselergebnis für die Konstruktion der besagten Biextension ist die folgende

Proposition 2.2.1 ([Bl1], Lemma 1). *Ist* W *homologisch trivial bezüglich* π, *so ist* $\theta_w = 0$.

In [Bl1] wird ein Beweis nur im Fall positiver Charakteristik gegeben. Wir arbeiten die noch fehlenden Details für $\mathrm{char}(k) = 0$ aus: Der Beweis besteht in einer Folge von Reduktionschritten, die die Aussage auf den Fall eines endlichen Körpers oder des Körpers der komplexen Zahlen zurückführt. Der Übersichtlichkeit halber zeigen wir zunächst zwei Lemmata, die die Natürlichkeit von θ_w formalisieren und eine Methode der sukzessiven Faserung über Kurven bereitstellt:

Lemma 2.2.2. *i) Es sei* $\tilde{k}|k$ *eine Körpererweiterung und* $\tilde{S} = S \otimes_k \tilde{k}$, $\tilde{X} = X \otimes_k \tilde{k}$ *und* $\tilde{W} = W \otimes_k \tilde{k}$ *die jeweiligen Basiserweiterungen nach* $\tilde{k}$. *Bezeichnen* $f : \tilde{S} \to S$ *und* $f' : \tilde{X} \to X$ *die kanonischen Abbildungen, so kommutiert das Diagramm*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{CH}^n(X,1) \arrow[r, "\cdot w"] \arrow[d, "f'^*"'] & \mathrm{CH}^{d+1}(X,1) \arrow[r, "\pi_*"] \arrow[d, "f'^*"'] & \mathrm{CH}^1(S,1) \arrow[d, "f^*"'] \\ \mathrm{CH}^n(\tilde{X},1) \arrow[r, "\cdot \tilde{w}"] & \mathrm{CH}^{d+1}(\tilde{X},1) \arrow[r, "\tilde{\pi}_*"] & \mathrm{CH}^1(\tilde{S},1). \end{tikzcd} \tag{2.2.2.1}$$

ii) Ist $i : \tilde{S} \to S$ *eine reguläre abgeschlossene Immersion von konstanter Kodimension,* $\tilde{X} = X \times_S \tilde{S}$ *und* $\tilde{w} = i^*(w)$, *so kommutiert*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{CH}^n(X,1) \arrow[r, "\cdot w"] \arrow[d, "i^*"'] & \mathrm{CH}^{d+1}(X,1) \arrow[r, "\pi_*"] \arrow[d, "i^*"'] & \mathrm{CH}^1(S,1) \arrow[d, "i^*"'] \\ \mathrm{CH}^n(\tilde{X},1) \arrow[r, "\cdot \tilde{w}"] & \mathrm{CH}^{d+1}(\tilde{X},1) \arrow[r, "\tilde{\pi}_*"] & \mathrm{CH}^1(\tilde{S},1). \end{tikzcd} \tag{2.2.2.2}$$

Insbesondere kommutiert θ_w mit flachem Pullback und Gysinmorphismen, d.h. es gilt

$$f^*\theta_w = \theta_{f'^*(w)} f'^* \qquad \textit{und} \qquad i^*\theta_w = \theta_{i^*(w)} i^*.$$

Beweis. Zu *i*): Das linke Quadrat von (2.2.2.1) kommutiert, denn nach [Bl3], Thm 4.1, [F] Ex. 8.3.1, ist der flache Pullback $f'^* : \mathrm{CH}^*(X,*) \to \mathrm{CH}^*(\tilde{X},*)$ im Falle glatter Schemata ein Ringhomomorphismus und es gilt $f'^*(w) = [W \times_X \tilde{X}] = [W \otimes_k \tilde{k}] = [\tilde{W}] = \tilde{w}$. Das rechte Diagramm kommutiert, denn flacher Pullback ist mit eigentlichem Pushforward verträglich ([Bl3] Cor. 5.6, [F] Prop. 1.7).

Zu *ii*): Das rechte Quadrat von (2.2.2.2) kommutiert, denn der Gysinmorphismus i^* ist verträglich mit eigentlichen Pushforward ([Bl3] Cor. 5.6, [F] Thm. 6.2 (a)). Da glatte Morphismen flach sind und da reguläre abgeschlossene Immersionen stabil unter flachem Basiswechsel sind, ist $\tilde{i} : \tilde{X} \to X$ eine reguläre abgeschlossene Immersion. Weiter besitzt $\tilde{i}$ dieselbe konstante Kodimension wie i und die Exzessschnittformel ([F] Kor. 6.3) besagt in diesem Falle $\tilde{i}^* = i^*$. Damit kommutiert das linke Quadrat von 2.2.2.2, denn im Falle regulärer abschlossener Immersionen $\tilde{X} \to X$ glatter Schemata $X, \tilde{X}$ ist der Gysinmorphismus $\tilde{i}^* : \mathrm{CH}^*(X,*) \to \mathrm{CH}^*(\tilde{X},*)$ ein Ringhomomorphismus ([Bl3] Thm. 4.1, [F] Ex. 8.3.1). □

Lemma 2.2.3. *Es sei $L|K$ eine endlich erzeugte Körpererweiterung vom Transzendenzgrad 1 eines Körpers K und S ein quasiprojektives Schema über L. Dann gibt es einen diskreten Bewertungsring A mit Quot$(A) = L$, $[A/\mathfrak{m}_A : K] < \infty$ und ein glattes, quasiprojektives A-Schema $\tilde{S}$ mit $S = \tilde{S} \otimes_A L$. Ist weiter X ein glattes projektives S-Schema und $W \subseteq X$ ein integres Unterschema der Kodimension $d+1-n$, so kann man $\tilde{S}$ so wählen, daß ein glattes projektives $\tilde{S}$-Schema $\tilde{X}$ und ein integres Unterschema $\tilde{W} \subseteq \tilde{X}$ der Kodimension $d+1-n$ existieren mit $X = \tilde{X} \times_S \tilde{S}$ und $W = \tilde{W} \times_S \tilde{S}$.*

Beweis. Es sei B die Normalisierung von $K[T] \subseteq L$ in L für ein über K transzendentes Element $T \in L$. Dann ist B ein Dedekindring mit Quotientenkörper L (Satz von Krull-Akizuki, [N] Satz 12.8) und nach [H] Exc. 3.8 ist B eine endliche $K[T]$-Algebra.

Man nehme S als lokalabgeschlossenes Unterschema des $\mathbb{P}^n_L$ an. Es sei S' der Abschluß von S in $\mathbb{P}^n_L$, versehen mit der reduzierten induzierten Unterschemastruktur und $Y = \bar{S} - S$. Dann gibt es nach [EGA IV] Prop. 2.8.5, ein eindeutig bestimmtes B-flaches abgeschlossenes Unterschema $S' \subseteq \mathbb{P}^n_B$ mit $S' \times_B L = \bar{S}$, nämlich den Abschluß von $\bar{S}$ in $\mathbb{P}^n_B$, versehen mit der reduzierten induzierten Unterschemastruktur. Es sei $\bar{Y}$ der Abschluß von Y in $\mathbb{P}^n_B$. Da Y abgeschlossen in $\mathbb{P}^n_L$ ist, so gilt $\bar{Y} \cap \mathbb{P}^n_L = Y$ und damit ist $S' - \bar{Y}$ ein offenes Unterschema von S' und daher ein reduziertes quasiprojektives flaches B-Schema mit $S = \tilde{S} \otimes_A L$. Da die generische Faser von $S' - \bar{Y}$ glatt ist, so ist die Menge $\tilde{S}$ derjenigen Punkte, an denen $S' - \bar{Y} \to \operatorname{spec} B$ glatt ist, ein offenes Unterschema von S' und damit glatt und quasiprojektiv über B mit $\tilde{S} \times_B L = S$.

Es sei nun X ein S-glattes, abgeschlossenes Unterschema von $\mathbb{P}^m_S$ und $\tilde{X}$ der Abschluß von X in $\mathbb{P}^m_{\tilde{S}}$. Da $X \to S$ glatt und $\tilde{X} \to \tilde{S}$ eigentlich ist, kann man nach

Übergang zu einem offenen Unterschema von $\tilde{S}$ annehmen, daß $\tilde{X} \to \tilde{S}$ glatt ist. Nach Konstruktion gilt $X = \tilde{X} \times_S \tilde{S}$.

Da der Morphismus $\tilde{S} \to \operatorname{spec} B$ flach und lokal von endlicher Präsentation ist, so ist er offen und da B ein Jacobsenschema ist, so gibt es ein maximales Ideal $\mathfrak{m}$ von B, daß im Bild dieses Morphismus liegt. Es sei A die Lokalisierung $B_{\mathfrak{m}}$ von B in $\mathfrak{m}$. Dann ist A ein diskreter Bewertungsring mit den geforderten Eigenschaften. □

Mit diesen Vorbereitungen kommen wir nun zum

Beweis (von Proposition 2.2.1). Es sei Z ein Zykel von Kodimension n auf $X \times_k \Delta^1_k$ der ein fest vorgegebenes Element $z \in \mathrm{CH}^1(X, 1)$ repäsentiert. Da X von endlichem Typ über k ist, so gibt es einen Teilkörper $\tilde{k}$ von k, der über seinem Primkörper endlich erzeugt ist, so daß die Schemata X, S und die Zykel W, Z nach $\tilde{k}$ absteigen, d.h. es gibt ein glattes quasiprojektives Schema $\tilde{S}$ über $\tilde{k}$, einen glatten projektiven Morphismus $\pi : \tilde{X} \to \tilde{S}$ und Zykel $\tilde{W} \subseteq \tilde{X}$, $\tilde{Z} \subseteq \tilde{X} \times_{\tilde{k}} \Delta^1_{\tilde{k}}$ mit $X = \tilde{X} \times_{\tilde{k}} k$, $S = \tilde{S} \times_{\tilde{k}} k$, $\tilde{W} = W \times_{\tilde{k}} k$ und $W = \tilde{W} \times_{\tilde{k}} k$. Es seien $f' : X \to \tilde{X}$ und $f : S \to \tilde{S}$ die zugehörigen Basiswechselmorphismen. Nach Definition des flachen Pullbacks gilt $z = f'^*(\tilde{z})$ und $w = f'^*(\tilde{w})$ mit $\tilde{z} = [\tilde{Z}] \in \mathrm{CH}^n(\tilde{X}, 1)$ und $\tilde{w} = [\tilde{W}] \in \mathrm{CH}^{d+1-n}(X)$. Das Diagramm 2.2.2.1 ist kommutativ und daher gilt

$$\theta_w(z) = \theta_{f'^*(\tilde{w})}(f'^*(\tilde{z})) = f^*(\theta_{\tilde{w}}(\tilde{z})).$$

Also ist die Behauptung nur für $\tilde{k}$ zu zeigen, man kann also ohne Einschränkung k als endlich erzeugten Körper über seinem Primkörper K annehmen.

Ist $k|K$ keine algebraische Erweiterung, so verfahre man wie folgt: Es sei L ein Zwischenkörper dieser Erweiterung mit $\operatorname{trdeg}(k : L) = 1$. Dann wähle man nach Lemma 2.2.3 ein Modell $\tilde{X}$ über $\tilde{S}$. Ist $s \in \tilde{S}$ ein abgeschlossener Punkt von $\tilde{S}$ und $i_s : \operatorname{spec} \kappa(s) \to \tilde{S}$ die zugehörige reguläre abgeschlossene Immersion, so kommutiert nach (2.2.2.2) das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{CH}^n(X,1) & \xrightarrow{\cdot w} & \mathrm{CH}^{d+1}(X,1) & \xrightarrow{\pi_*} & \mathrm{CH}^1(S,1) = \mathscr{O}_S^\times(S) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle i_s^*} & & \Big\downarrow{\scriptstyle i_s^*} & & \Big\downarrow{\scriptstyle i_s^*} \\
\mathrm{CH}^n(\tilde{X}_s,1) & \xrightarrow{\cdot \tilde{w}_s} & \mathrm{CH}^{d+1}(\tilde{X}_s,1) & \xrightarrow{\tilde{\pi}_*} & \mathrm{CH}^1(\kappa(s),1) = \kappa(s)^\times
\end{array}$$

Der Gysinmorphismus $i_s^* : \mathscr{O}_S^\times(S) \to \kappa(s)^\times$ ist in diesem Fall die Evaluation $f \mapsto f(s)$ einer Funktion $f \in \mathscr{O}_S(S)$ in einem Punkt s. Da $\tilde{S}$ ein reduziertes Schema ist, so ist eine reguläre Funktion $f \in \mathscr{O}_S(S)$ bereits dann identisch 1, falls $f(s) = 1$ für jeden Punkt $s \in S$ gilt. Da aber andererseits $\tilde{S}$ von endlichem Typ über einem Körper K ist, so ist $\tilde{S}$ ein Jacobsenschema. Damit liegen die abgeschlossenen Punkte von $\tilde{S}$ dicht in $\tilde{S}$ und die Bedingung $f(s) = 1$ muß nur in den abgeschlossenen Punkten bestehen, damit sie überhaupt gilt. Jeder abgeschlossene Punkt von $\tilde{S}$ ist aber eine endliche Erweiterung von L. Durch Induktion kann man also K als endliche Erweiterung seines Primkörpers annehmen.

Es sei also $S = \operatorname{spec} k$ für einen endlichen Körper oder Zahlkörper k. Im Falle eines endlichen Körper folgt die Aussage mit Methoden der l-adischen étalen Kohomologie (cf. [Bl2] Lemma 1). Ist K ein Zahlkörper, so kann man nach Einbettung von K in $\mathbb{C}$ und flachem Basiswechsel annehmen, daß $K = \mathbb{C}$ ist. Wir betrachten die durch die Zykelabbildung induzierte Abbildung der höheren Chowgruppen in die Deligne-Beilinson Kohomologie:

$$\mathrm{cl}_{\mathscr{D}}^{n,m} : \mathrm{CH}^n(X,m) \longrightarrow H_{\mathscr{D}}^{2n-m}(X,\mathbb{Z}(n))$$

Diese Abbildung ist mit der Ringstruktur, dem Gysinmorphismus und dem eigentlichen Pushforward verträglich und induziert also ein kommutatives Diagramm (vgl. [MS1] §3)

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{CH}^n(X,1) & \xrightarrow{\cdot w} & \mathrm{CH}^{d+1}(X,1) & \xrightarrow{\pi_*} & \mathrm{CH}^1(\operatorname{spec}\mathbb{C},1) = \mathbb{C}^\times \\
\big\downarrow & & \big\downarrow & & \big\downarrow {\scriptstyle =} \\
H_{\mathscr{D}}^{2n-1}(X,\mathbb{Z}(n)) & \xrightarrow{\cdot \mathrm{cl}_{\mathscr{D}}^{m,0}(w)} & H_{\mathscr{D}}^{2d+1}(X,\mathbb{Z}(d+1)) & \xrightarrow{\pi_*} & H_{\mathscr{D}}^1(\operatorname{spec}\mathbb{C},\mathbb{Z}(1)) = \mathbb{C}^\times
\end{array}$$

Für jedes Paar von ganzen Zahlen n, m hat man ein kurze exakte Sequenz der Form

$$0 \longrightarrow J^{n,m}(X) \longrightarrow H_{\mathscr{D}}^n(X,\mathbb{Z}(m)) \longrightarrow \mathrm{Hdg}^{n,m}(X) \longrightarrow 0,$$

wobei

$$\mathrm{Hdg}^{n,m}(X) = H_B^n(X(\mathbb{C}),\mathbb{Z}(m)) \cap F^m H_{dR}^n(X(\mathbb{C}),\mathbb{C})$$

die Gruppe der ganzen Hodgezykel und

$$J^{n,m}(X) = H_B^{n-1}(X(\mathbb{C}),\mathbb{C})/(F^m H_{dR}^{n-1}(X(\mathbb{C}),\mathbb{C}) + H_B^{n-1}(X(\mathbb{C}),\mathbb{Z}(m)))$$

die verallgemeinere intermediäre Griffith-Jacobische von X ist. Offensichtlich ist $J^{n,m}(X)$ divisibel und es ist eine Tatsache, daß für glatte, projektive, komplexe Varietäten X die Gruppe $\mathrm{Hdg}^{n,m}(X)$ eine Torsionsgruppe für $2m \neq n$ ist. Folglich gibt es zu $z \in \mathrm{CH}^n(X,1)$ eine ganze Zahl $t > 0$ mit

$$t\mathrm{cl}_{\mathscr{D}}^{n,1}(z) \in J^{2n-1,n}(X).$$

Da $w \in \mathrm{CH}^{d+1-n}(X)$ homologisch trivial ist, so gibt es ein Element $\frac{\mathrm{cl}_{\mathscr{D}}^{n,0}(w)}{t} \in J^{2(d+1-n),d+1-n}(X)$ mit $t \cdot \frac{\mathrm{cl}_{\mathscr{D}}^{n,0}(w)}{t} = \mathrm{cl}_{\mathscr{D}}^{n,0}(w)$. Also ist

$$\mathrm{cl}_{\mathscr{D}}^{n,1}(z) \cdot \mathrm{cl}_{\mathscr{D}}^{n,0}(w) = (t\mathrm{cl}_{\mathscr{D}}^{n,1}(z)) \cdot \frac{\mathrm{cl}_{\mathscr{D}}^{n,0}(w)}{t} \in J^{2n-1,n}(X) \cdot J^{2(d+1-n),d+1-n}(X).$$

Die höhere Griffith-Jacobische ist aber ein Ideal in der Deligne-Beilinson-Kohomologie, dessen Quadrat verschwindet und folglich $\mathrm{cl}_{\mathscr{D}}^{n,1}(z) \cdot \mathrm{cl}_{\mathscr{D}}^{n,0}(w) = 0$. Die Kommutativität des vorherstehenden Diagramms ergibt also die Behauptung. $\square$

Dieses Lemma hat eine wichtige Folgerung: Ist $W = \sum_{r\in R} n_r W_r$ die Zerlegung von W in Primzykel W_r und ist $i_{W_r} : W_r \hookrightarrow X$ die abgeschlossene Immersion des integren Unterschemas W_r in das glatte Schema X, so induziert i eine Abbildung $i_W^* : \mathrm{CH}^n(X,1) \to \bigoplus_{r\in R} \mathrm{CH}^n(W_r,1)$, $x \mapsto (n_r i_{W_r}^*(x))_{r\in R}$, sodaß das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} & \bigoplus_{r\in R} \mathrm{CH}^n(W_r,1) \arrow[r, "\sum_{r\in R}(\pi|_{W_r})_*"] \arrow[d, "\sum_{r\in R} i_{W_r *}"] & \mathrm{CH}^1(S,1) \arrow[d, "="] \\ \mathrm{CH}^n(X,1) \arrow[ur, "i_W^*"] \arrow[r, "\cdot[W]"] & \mathrm{CH}^{d+1}(X,1) \arrow[r, "\pi_*"] & \mathrm{CH}^1(S,1) \end{tikzcd}$$

Dabei ist die Komposition der Morphismen in der unteren Zeile θ_w und es folgt:

Korollar 2.2.4. *Ist W ein homologisch trivialer Zykel, so gilt*

$$\Big(\sum_{r\in R} (\pi|_{W_r})_*\Big) \circ i_W^* = 0.$$

2.3. $\mathbb{G}_m$-Extensionen zu homologisch trivialen Zykeln. Es sei S ein glattes, quasiprojektives, eindimensionales Schema über einem Körper k und $\pi : X \to S$ ein glatter, projektiver Morphismus der relativen Dimension d. Weiter sei $W = \sum_{r\in R} n_r W_r \in Z^{d+1-n}(X)$ ein fester Zykel der Kodimension $d+1-n$ auf X, die irreduziblen Komponenten W_r von W sind also von Dimension n. Das Ende der langen exakten Sequenz zu (X, W) für die Dimension n ist der gewöhnliche Schnitthomomorphismus

$$a_X : \mathrm{CH}^n(X) \longrightarrow \mathrm{CH}^n(W), \qquad a_X(x) = x \cap [W] = (n_r x \cap [W_r])_{r\in R}.$$

Ist U eine offene Teilmenge von S und bezeichnet X_U (bzw. W_U) das offene Unterschema $\pi^{-1}(U)$ von X (bzw. $\pi^{-1}(U) \cap W$ den zurückgezogenen Zykel auf X_U), so erhält man ein kommutatives Diagramm der Form

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{CH}^n(X) & \xrightarrow{a_X} & \mathrm{CH}^n(W) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{CH}^n(X_U) & \xrightarrow{a_U} & \mathrm{CH}^n(W_U). \end{array}$$

Dabei sind die vertikalen Morphismen durch die jeweiligen offenen Immersionen induziert und die Kommutativität ergibt sich aus Lemma 1.2.3. Mit diesen Bezeichnungen gilt:

Lemma 2.3.1. *Dominiert jede irreduzible Komponente W_r von W die Basis S, so gibt es zu jedem Element $z \in \mathrm{CH}^n(X)$ und jedem abgeschlossenen Punkt $s \in S$ eine offene Umgebung $U \subseteq S$, mit $z \mapsto 0$ unter der Abbildung*

$$\mathrm{CH}^n(X) \xrightarrow{a_X} \mathrm{CH}^n(W) \longrightarrow \mathrm{CH}^n(W_U).$$

Beweis. Man kann ohne Einschränkung annehmen, daß W ein Primzykel ist. Da W die Basis S dominiert, so hat W eigentlichen Schnitt mit jeder abgeschlossenen Faser der Abbildung $\pi : X \to S$. Ist $s \in S$ ein abgeschlossener Punkt, so ist $X_s \cap W$ von Kodimension $d+2-n$ auf X, denn s hat Kodimension 1 in S und π ist flach. Es sei $z \in \mathrm{CH}^n(X)$ ein Element, repräsentiert durch einen Zykel Z der Kodimension n. Dann gibt es aber einen weiteren Zykel $\tilde{Z}$, der rational äquivalent zu Z ist und der $W \cap X_s$ eigentlich schneidet. Also ist der Schnitt $\tilde{Z} \cap X_s \cap W$ von Kodimension $d+2$ in X. Daher trifft der Schnitt $\tilde{Z} \cap W$ die abgeschlossene Faser X_s nicht, und da π eigentlich ist, gibt es eine offene Umgebung U von s, sodaß $\tilde{Z} \cap W \cap \pi^{-1}(U) = \emptyset$. Damit ergibt sich die Behauptung. □

Definition 2.3.2. *Zu einem Zykel W auf X bezeichne $\underline{\mathrm{CH}}^n(W/S)$ die zur Prägarbe*

$$U \longmapsto \mathrm{CH}^n(W_U), \qquad U \subseteq S \text{ offen},$$

assoziierte Garbe abelscher Gruppen.

Führt man diese Konstruktion für den Fundamentalzykel bzw. für W durch, so induzieren die Abbildungen $(a_U)_{U \subseteq S \text{ offen}}$ von Prägarben einen Morphismus

$$\underline{a} : \underline{\mathrm{CH}}^n(X/S) \to \underline{\mathrm{CH}}^n(W/S)$$

der assoziierten Garben. Nach Lemma 2.3.1 folgt $\underline{a} = 0$. Mit diesen Vorbereitungen kann man für homologisch triviale Zykel W die angekündigte Extension wie folgt konstruieren: Zum Paar (X, W) betrachte man die lange exakte Sequenz für die höheren Chowgruppen

(2.3.2.1)
$$\mathrm{CH}^n(X,1) \longrightarrow \mathrm{CH}^n(W,1) \longrightarrow \mathrm{CH}^n(X,W,0) \longrightarrow \mathrm{CH}^n(X,0) \longrightarrow \mathrm{CH}^n(W,0).$$

Nach Korollar 2.2.4 gilt $(\sum_{r \in R} (\pi|_{W_r})_*) \circ i_W^* = 0$ und Pushout der Sequenz (2.3.2.1) über die Abbildung

$$\sum_{r \in R} (\pi|_{W_r})_* : \mathrm{CH}^n(W,1) \to \mathrm{CH}^1(S,1) \cong \mathscr{O}_S^\times(S) \cong \mathbb{G}_m(S)$$

definiert eine Gruppe $E_W^{\mathrm{CH}}(S)$ und eine exakte Sequenz

$$(2.3.2.2) \qquad 0 \longrightarrow \mathbb{G}_m(S) \longrightarrow E_W^{\mathrm{CH}}(S) \longrightarrow \mathrm{CH}^n(X) \xrightarrow{a_X} \mathrm{CH}^n(W).$$

Die Bildung dieser Sequenzen und damit der Gruppen $E_W^{\mathrm{CH}}(S)$ ist funktoriell für offene Immersionen $U \subseteq S$. Man erhält unter Berücksichtigung von Lemma 2.3.1 eine kurze exakte Sequenz von Garben abelscher Gruppen auf S

$$(2.3.2.3) \qquad 0 \longrightarrow \mathbb{G}_m \longrightarrow \underline{E}_W^{\mathrm{CH}} \longrightarrow \underline{\mathrm{CH}}^n(X/S) \longrightarrow 0,$$

wobei $\underline{E}_W^{\mathrm{CH}}$ die zu $U \mapsto E_W^{\mathrm{CH}}(U)$, $U \subseteq S$ offen, assoziierte Garbe ist. Bezeichnet man schließlich mit $\underline{\mathrm{CH}}^n_{\mathrm{hom}}(X/S)$ die Untergarbe von $\underline{\mathrm{CH}}^n(X/S)$, die von bezüglich

π homologisch trivialen Zyklen erzeugt wird, so definiert das Pullback bezüglich der Inklusion $\underline{\mathrm{CH}}^n_{\mathrm{hom}}(X/S) \subseteq \underline{\mathrm{CH}}^n(X/S)$ Garben $\mathbb{E}^{\mathrm{CH}}_W$ und eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathbb{G}_m \longrightarrow \mathbb{E}^{\mathrm{CH}}_W \longrightarrow \underline{\mathrm{CH}}^n_{\mathrm{hom}}(X/S) \longrightarrow 0. \tag{2.3.2.4}$$

Die so konstruierte Extension der abelschen Garbe $\underline{\mathrm{CH}}^n_{\mathrm{hom}}(X/S)$ durch das Gruppenschema $\mathbb{G}_m$ heißt die zu W assoziierte $\mathbb{G}_m$-Extension. Zusammenfassend ergibt sich:

Satz 2.3.3 ([Bl2]). *Zu einem homologisch trivialen Zykel $W \subseteq Z^{d+1-n}(X)$ bezüglich π, dessen irreduzible Komponenten S dominieren, kann man auf kanonische Weise eine kurze exakte Sequenz 2.3.2.4 von Zariskigarben auf S.*

In [Bl1] wird bewiesen, daß die zu homologisch trivialen Zykeln W assoziierten $\mathbb{G}_m$-Extensionen (2.3.2.4) bis auf kanonische Isomorphie nur von der rationalen Äquivalenzklasse von W abhängen. Insbesondere kann man daher auf die Bedingung, daß die irreduziblen Komponenten von W die Basis S dominieren, verzichten. Diese bei dieser Extension auftretenden Garben sind sogar étale Garben und die Restriktion der Extension von $\underline{\mathrm{CH}}^n(X/S)$ auf $\underline{\mathrm{CH}}^n_{\mathrm{hom}}(X/S)$ erklärt:

Satz 2.3.4 ([Bl2]). *Ist S ein quasiprojektives, eindimensionales Schema über einem Körper und ist $\pi : X \to S$ glatt und projektiv von relativer Dimension d und sind n, m zwei natürliche Zahlen mit $n+m = d+1$, so gibt es eine étale $\mathbb{G}_{m,S}$-Biextension $\mathbb{E}^{\mathrm{CH}}$ von $(\underline{\mathrm{CH}}^n_{hom}(X/S), \underline{\mathrm{CH}}^m_{hom}(X/S))$ mit folgender Eigenschaft: Ist W ein Zykel der Kodimension m auf X, der homologisch trivial bezüglich π ist, so induziert die Klasse von W einen globalen Schnitt $\underline{\mathrm{CH}}^m_{hom}(X/S)(S)$ und das Pullback $W^*\mathbb{E}^{\mathrm{CH}}$ der Biextension bezüglich dieses Schnittes ist eine $\mathbb{G}_{m,S}$-Extension von $\underline{\mathrm{CH}}^n_{hom}(X/S)$, die kanonisch isomorph zur Extension 2.3.2.4 ist.*

Bemerkung 2.3.5. *Das Pullback der Biextension $\mathbb{E}^{\mathrm{CH}}$ entlang W ist auf naheliegende Weise erklärt: Bezeichnet $\rho : \mathbb{E}^{\mathrm{CH}} \to \underline{\mathrm{CH}}^n_{hom}(X/S) \times \underline{\mathrm{CH}}^m_{hom}(X/S)$ den Strukturmorphismus der Bierweiterung $\mathbb{E}^{\mathrm{CH}}$, so definiert für offenes $U \subseteq S$ der Zykel W ein Element $W_U = W \cap U \in \underline{\mathrm{CH}}^m_{hom}(X/S)(U)$. Damit definiert*

$$W^*\mathbb{E}^{\mathrm{CH}}(U) = (\rho_U)^{-1}(\underline{\mathrm{CH}}^n_{hom}(X/S)(U) \times \{W_U\})$$

einen $\mathbb{G}_{m,S}$-Torseur $W^*\mathbb{E}^{\mathrm{CH}}$ über $\underline{\mathrm{CH}}^n_{hom}(X/S)$. Die Aussage des vorgehenden Satzes ist dann offenbar die Existenz eines kanonischen Isomorphismus $W^*\mathbb{E}^{\mathrm{CH}} \cong \mathbb{E}^{\mathrm{CH}}_W$ von Torseuren.

2.4. Die lokale Struktur dieser Extensionen. Um die zu einem homologisch trivialen Zykel zugeordnete $\mathbb{G}_m$-Extension $\mathbb{E}_W$ studieren zu können, untersuchen wir zunächst die Einschränkung diese Extension auf Spektra von diskreten Bewertungsringen.

Es sei S ein diskreter Bewertungsring über einem Körper k, der sich isomorph auf den Restklassenkörper abbildet. Zu einem Schema X von endlichem Typ über

$\operatorname{spec} S$ sind die höheren Chowgruppen $\mathrm{CH}^p(X,q)$ wie im klassischen Fall als q-te Homologiegruppe des Komplexes

$$\longrightarrow z^p(X,n) \longrightarrow z^p(X,n-1) \longrightarrow \cdots \longrightarrow z^p(X,0)$$

definiert. Dabei ist $z^p(X,n)$ die von den integren Unterschemata $Z \subseteq X \times_S \mathbb{A}^n_S$ der Kodimension p, die alle Seiten $X \times_S \mathbb{A}^m_S \subseteq X \times_S \mathbb{A}^n_S$, $m \leq n$ eigentlich schneiden, frei erzeugte abelsche Gruppe. Ist $(Y_i)_{i\in I}$ eine endliche Familie von integren abgeschlossenen Unterschemata von X, so ist die Inklusion $z^p_Y(X,\cdot) \subseteq z^p(X,\cdot)$ des Unterkomplexes $z^p_Y(X,\cdot)$, der von Klassen $z^p(X,n)$ aller integren Unterschemata $Z \subseteq X \times_S \mathbb{A}^n_S$, die zusätzlich auch die Seiten $Y_i \times_S \mathbb{A}^m$ eigentlich schneiden, erzeugt ist, ein Quasiisomorphismus. Es sei s der abgeschlossene Punkt und X/S projektiv und glatt von relativer Dimension d. Es bezeichne weiter $(Y_i)_{i\in I}$ die Familie der Primkomponenten eines homologisch trivialen $W \in Z^{d+1-n}(X)$ und der speziellen Faser X_s von π. Wir setzen weiter voraus, daß die sich die Primkomponenten von W dominant auf S abbilden. Somit erhält man eine Abbildung von Komplexen

$$z^n_Y(X,\cdot) \xrightarrow{\cdot W} z^{d+1}_{X_s}(X,\cdot) \longrightarrow z^1_s(S,\cdot),$$

die auf der Homologie den Schnitt mit der Zykelklasse von W bzw. den eigentlichen Pushforward π_* für den Strukturmorphismus $\pi : X \to S$ beschreibt. Insbesondere induziert die Komposition dieser Komplexabbildungen auf Homologieniveau die Abbildung θ_W und diese ist nach Proposition 2.2.1 trivial. Da S das Spektrum eines diskreten Bewertungringes ist, gibt es keinen 1-kodimensionalen Zykel, der den abgeschlossenen Punkt s eigentlich schneidet und folglich gilt $\partial(z^1_s(S,1)) = z^1_s(S,0) = 0$. Man erhält also ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{CH}^n(X,1) \arrow[r] \arrow[d, "\theta_W=0"] & z^n_Y(X,1)/\partial(z^n_Y(X,2)) \arrow[r] \arrow[d] & \partial(z^n_Y(X,1)) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{CH}^1(S,1) \arrow[r] & z^1_s(S,1)/\partial(z^1_s(S,2)) \arrow[r] & \partial(z^1_s(S,1)) = 0 \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Dies induziert offenbar einen Gruppenhomomorphismus

$$\sigma_W : \partial(z^n_Y(X,1)) \longrightarrow \mathrm{CH}^1(S,1) \cong \mathbb{G}_m(S).$$

Dabei ist $\partial(z^n_Y(X,1))$ die Untergruppe von $z^n_Y(X,0)$, bestehend aus denjenigen Zykeln, die rational äquivalent zu 0 sind. Bezeichnet $\underline{Z}^n_{W,\mathrm{hom}}(X/S)$ (bzw. $\underline{Z}^n_{W,\mathrm{rat}}(X/S)$) die zu $U \mapsto z^n_Y(X_U,0)$ (bzw. $U \mapsto \partial(z^n_Y(X_U,1))$ assoziierte Zariskigarbe, so bestehen die lokalen Schnitte von $\underline{Z}^n_{W,\mathrm{hom}}(X/S)$ aus den Zykeln, die W lokal über S nicht treffen. Man erhält einen Homomorphismus

$$\underline{\sigma}_W : \underline{Z}^n_W(X/S)_{\mathrm{rat}} \longrightarrow \mathbb{G}_{m,S}$$

abelscher Garben auf S. Weiter ist nach obigen Überlegungen der Kokern der Inklusion $\underline{Z}^n_W(X/S)_{\mathrm{rat}} \subseteq \underline{Z}^n_W(X/S)_{\mathrm{hom}}$ die Garbe $\underline{\mathrm{CH}}^n_{\mathrm{hom}}(X/S)$.

Ist $Z \in Z^n(X)$ ein Zykel der Kodimension n, der W nicht trifft, so hat Z nach Lemma 1.2.4 eine relative Klasse $\{Z\}_W \in \mathrm{CH}^n(X,W)$, und nach Garbifizierung erhält man eine Zykelklassenabbildung $\underline{Z}^n_W(X/S) \to E^{\mathrm{CH}}_W$. Schränkt man diese Abbildung auf die Untergarbe $\underline{Z}^n_W(X/S)_{\mathrm{hom}}$ ein, so liegt das Bild in $\mathbb{E}^{\mathrm{CH}}_W$, und somit induziert dies einen Garbenhomomorphismus

$$\{\cdot\}_W : \underline{Z}^n_W(X/S)_{\mathrm{hom}} \longrightarrow \mathbb{E}^{\mathrm{CH}}_W.$$

Die Abbildung $\{\cdot\}_W$ setzt die Abbildung $\underline{\sigma}_W$ in dem Sinne fort, daß man ein kommutatives Diagramm der Form

(2.4.0.1)
$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \underline{Z}^n_W(X/S)_{\mathrm{rat}} \arrow[r] \arrow[d, "\underline{\sigma}_W"] & \underline{Z}^n_W(X/S)_{\mathrm{hom}} \arrow[r] \arrow[d, "\{\cdot\}_W"] & \underline{\mathrm{CH}}^n_{\mathrm{hom}}(X/S) \arrow[r] \arrow[d, "="] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{G}_m \arrow[r] & \mathbb{E}^{\mathrm{CH}}_W \arrow[r] & \underline{\mathrm{CH}}^n_{\mathrm{hom}}(X/S) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

erhält. Die Zykelgarben $\underline{Z}^n_W(X/S)_{\mathrm{rat}}$, $\underline{Z}^n_W(X/S)_{\mathrm{hom}}$ sind nach [Bl2] étale Garben, die Morphismen $\underline{\sigma}_W$, $\{\cdot\}_W$ sind Morphismen von étalen Garben. Für das Folgende sei die technische Bedingung erfüllt: Der Zykel W besitze eine Komponente W_r, deren Schnitt mit der speziellen Faser eine irreduzible Komponente mit glattem generischen Punkt hat, und n_r ist prim zur Restklassencharakteristik von S. Dann gilt:

Lemma 2.4.1 ([Bl1], S.24). *Étale-lokal auf S ist die Abbildung $\underline{\sigma}_W$ surjektiv.*

Aus dem Fünfer-Lemma folgt:

Korollar 2.4.2. *Étale-lokal auf S ist die Zykelabbildung $\{\cdot\}_W$ surjektiv.*

Die Abbildung $\underline{\sigma}_W$ ist funktoriell für étale Basiswechsel $S' \to S$ und hat nach Konstruktion étale-lokal folgende Beschreibung (c.f. [Bl1], S. 24): Ist $T \in Z^{n-1}(X)$ ein integres Unterschema der Kodimension $n-1$, welches W und die spezielle Faser eigentlich schneidet und f eine rationale Funktion auf T, die invertierbar auf dem Schnitt $T \cap W$ ist, so trifft der Divisor von f den Zykel W nicht und somit definiert der Divisor $\mathrm{div}(f) \in Z^n_W(X)_{\mathrm{rat}}$ ein Element $[\mathrm{div}(f)] \in \underline{Z}^n_W(X/S)_{\mathrm{rat}}(S)$. Es sei W' eine Primkomponente von W, die der zuvorgenannten technischen Bedingung genügt. Da der Schnitt von T mit W' und mit der speziellen Faser eigentlich ist, so ist $S' = T \cap W'$ eindimensional und dominant über S, also flach über S. Entfernt aus S' die irreduziblen Komponenten des Schnitts mit der speziellen Faser, deren generischer Punkt nicht glatt oder deren Multiplizität nicht prim zu Restklassencharakteristik von S ist, so ist S' unverzweigt über S und damit étale über S. Die Restriktion von f auf S' ist invertierbar, denn f ist invertierbar auf $T \cap W$. Also definiert f ein Element in $\mathscr{O}^\times_{S'}(S') = \mathbb{G}_{m_S}(S')$ und bezüglich der étalen Basiserweiterung $S' \to S$ ist dies gerade das Bild von $\underline{\sigma}_W([\mathrm{div}(f)])$ unter der injektiven Abbildung $\mathbb{G}_m(S) \to \mathbb{G}_m(S')$.

§ 3. Zusammenhang zu Schnittzahlen

3.1. Geradenbündel und Grade. Es sei X ein eigentliches Schema über einem Körper k. Wie für jeden geringten Raum X, sei $\mathrm{Pic}(X)$ die Menge der Isomorphieklassen von invertierbaren $\mathscr{O}_X$-Moduln (= Geradenbündeln). Es sei $\mathscr{L}$ ein Geradenbündel auf X. Die erste Chernklasse $c_1(\mathscr{L}) \in \mathrm{CH}^1(X)$ liefert einen Gradhomomorphismus

$$\deg_{\mathscr{L},r} : \mathrm{CH}_r(X) \to \mathbb{Z}, \qquad x \longmapsto \pi_*(c_1(\mathscr{L})^r \cap x),$$

wobei $\pi : X \to \operatorname{spec} k$ der Strukturmorphismus und $\mathrm{CH}_0(\operatorname{spec} k)$ auf kanonische Weise mit $\mathbb{Z}$ identifiziert sei. Ist X integer, so ist $\mathrm{Pic}(X)$ kanonisch isomorph zur Gruppe der Cartierdivisorenklassen $\mathrm{Cl}(X)$ auf X und da X in diesem Fall reindimensional ist, hat man eine kanonische Abbildung $\mathrm{Cl}(X) \to \mathrm{CH}_{\dim X-1}(X)$. Daher kann man vom Grad $\deg_{\mathscr{L}}(\mathscr{M})$ eines Geradenbündel $\mathscr{M}$ bezüglich eines Geradenbündel $\mathscr{L}$ sprechen. Diese hängt nur von der Isomorphieklasse von $\mathscr{M}$ und $\mathscr{L}$ ab. Ist X eindimensional, so ist der Grad $\deg(\mathscr{M}) = \deg_{\mathscr{L}}(\mathscr{M}) = \pi_*(c_1(\mathscr{M}) \cap [X])$ offenbar unabhängig von $\mathscr{L}$.

Es sei im folgenden X regulär und zusammenhängend, also insbesondere integer und reindimensional. Ist D ein Cartierdivisor auf X und $\mathscr{O}_X(D)$ die assoziierte invertierbare $\mathscr{O}_X$-Untergarbe der konstanten Garbe $\mathscr{R}_X$ der rationalen Funktionen auf X, so ist die kanonische Abbildung $\mathscr{O}_X(D) \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{R}_X \to \mathscr{R}_X$ ein Isomorphismus von $\mathscr{O}_X$-Moduln. Dabei ist $\mathscr{O}_X(D) \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{R}_X$ die Garbe der rationalen Schnitte des Geradenbündels $\mathscr{O}_X(D)$. Ist f ein solcher rationaler Schnitt, so kann f in kanonischer Weise also auch als rationale Funktion auf X aufgefaßt werden. Ist f von Null verschieden, so definiert f sowohl als rationaler Schnitt, wie auch als rationale Funktion einen Cartierdivisor (f) bzw. $(f)_{\mathrm{rat}}$. Es besteht offensichtlich eine Gleichung $(f) = D + (f)_{\mathrm{rat}}$ von Cartierdivisoren auf X. Insbesondere folgt aus [F] Thm. 3.2 (f) die Formel $c_1(\mathscr{O}_X(D)) \cap [X] = [D] = [(f) - (f)_{\mathrm{rat}}] = [f]$, wobei hier $[f]$ die Klasse des rationalen Schnitts f in der Chowgruppe $\mathrm{CH}_{\dim X-1}(X)$ bezeichnet. Also folgt für jedes Geradenbündel $\mathscr{M}$ und jeden vom Nullschnitt verschiedenen rationalen Schnitt f von $\mathscr{M}$ die bekannte Gleichung

$$c_1(\mathscr{M}) \cap [X] = [f].$$

Ist X eindimensional, so ergibt sich also $\deg(\mathscr{M}) = \deg([f])$ für jeden vom Nullschnitt verschiedenen rationalen Schnitt f von $\mathscr{M}$.

3.2. Lokalisierung von Graden von Geradenbündeln. Es sei S eine glattes, eigentliches, eindimensionales, zusammenhängendes Schema über einem Körper k, $\mathscr{L}$ ein Geradenbündel über S und f ein rationaler, von Null verschiedener Schnitt von $\mathscr{L}$. Dann induziert f einen Divisor $\sum_{i\in I} n_i(s_i)$ mit paarweise verschiedenen abgeschlossenen Punkten $s_i \in S$ und ganzen Zahlen n_i. Da S von endlichem Typ über k ist, so sind die Restklassenkörper $\kappa(s_i)$ endliche Erweiterungen des Grundkörpers

k und die Zahlen n_i sind die Ordnungen des Schnittes f in s_i. Nach obiger Beschreibung gilt offenbar

$$\deg(\mathscr{L}) = \deg(\sum_{i \in I} n_i(s_i)) = \sum_{i \in I} n_i[\kappa(s_i) : k].$$

Die lokalen Ringe $\mathscr{O}_{S,s_i}$ sind eindimensionale, reguläre, lokale Ringe, also diskrete Bewertungsringe. Bezeichnet S_i das Spektrum des Ringes $\mathscr{O}_{S,s_i}$ und $\iota_i : S_i \to S$ den kanonischen Morphismus, so gilt offenbar $\mathscr{O}_{S_i,s_i} \cong \mathscr{O}_{S,s_i}$ und diese Abbildung induziert auch einen k-Isomorphismus der jeweiligen Restklassenkörper. Bezeichnet $\mathscr{L}_i = \iota_i^* \mathscr{L}$ das Pullback des Geradenbündels $\mathscr{L}$ auf S_i so induziert f rationale Schnitte f_i in den zurückgezogenen Bündeln $\mathscr{L}_i$. Da Vektorbündel auf diskreten Bewertungsringen trivial sind, induziert f_i nach Wahl einer Trivialisierung von $\mathscr{L}_i$ eine rationale Funktion auf S_i, also ein Element a_i des Quotientenkörpers $K_i = \mathrm{Quot}(\mathscr{O}_{S_i,s_i})$, und die Ordnung n_i von f bzw. f_i in s_i ist nach Definition $v_i(a_i)$, wobei $v_i : K_i \to \mathbb{Z}$ die Bewertungsfunktion auf K_i ist. Diese Zahl ist unabhängig von der lokalen Trivialisierung und damit induziert f_i den Divisor $(f_i) = n_i(s_i) \in Z^1(S_i) = Z_0(S_i) \cong \mathbb{Z}$ und es gilt $\deg(f_i) = n_i[\kappa(s_i) : k]$, da der Pushforward $\deg : Z_0(S_i) \to Z_0(k)$ auf Zykelniveau nach den kanonischen Identifizierungen mit $\mathbb{Z}$ durch Multiplikation mit dem Restklassengrad gegeben wird. Insgesamt ergibt sich also:

Lemma 3.2.1. *In obiger Situation gilt für den Grad von $\mathscr{L}$ die Lokalisierungsformel*

$$\deg(\mathscr{L}) = \sum_{i \in I} \deg(f_i).$$

Bemerkung 3.2.2. *Die auf der rechten Seite der Lokalisierungsformel benutzte Gradabbildung* $\deg : Z_0(S_i) \to Z_0(k)$ *auf Zykelniveau faktorisiert nicht über rationale Äquivalenz, denn auf einem diskreten Bewertungsring ist jeder Divisor ein Hauptdivisor und damit ist* $\mathrm{CH}_0(S_i) = 0$. *Insofern kann man auch nicht erwarten, daß sich die rechte Seite nur durch die lokalen Grade der zurückgezogenen Geradenbündel $\mathscr{L}_i$ ausdrücken läßt, die ja alle trivial sind. Dafür braucht man vielmehr das Zusatzdatum eines rationalen Schnittes.*

3.3. Lokalisierung von Schnittzahlen. Es sei S ein eindimensionales, glattes, zusammenhängendes, eigentliches Schema über einem Körper k und $\pi : X \to S$ eigentlich und glatt von relativer Dimension d. Es seien weiter $W \in Z^{d+1-n}(X)$ und $Z \in Z^n(X)$ zwei Zykel mit komplementärer Kodimension auf X und eigentlichem Schnitt. Da π ein eigentlicher Morphismus von Schemata ist, gibt es endlich viele abgeschlossene Fasern, in denen der Träger $|Z \cap W|$ des zykeltheoretischen Schnitts $Z \cap W \in Z^{d+1}(X) = Z_0(X)$ liegt. Es gibt also eine endliche Familie $(s_i)_{i \in I}$ von paarweise verschiedenen abgeschlossenen Punkten $s_i \in S$ und 0-Zykel $(Z \cap W)_i$ mit $|(Z \cap W)_i| \subseteq X_{s_i} = \pi^{-1}(s_i)$ und $Z \cap W = \sum_{i \in I} (Z \cap W)_i$. Bezeichnet $[\cdot]$ die Klasse eines Zykels im Chowring, so gilt offenbar

$$\begin{aligned}\deg([Z]\cup[W]) &= \deg([Z\cap W]) \\ &= \sum_{i\in I}\deg(\pi_*([(Z\cap W)_i]))\in \mathrm{CH}_0(\operatorname{spec} k)\cong\mathbb{Z}\end{aligned}$$

Es sei S_i die Lokalisierung von S in s_i, d.h. $S_i = \operatorname{spec}(\mathscr{O}_{S,s_i})$, und $\pi_i : X_{S_i} \to S_i$ der Basiswechsel von $\pi : X \to S$ bezüglich des flachen Morphismus $\iota_i : S_i \to S$. Die Schemata S und S_i haben denselben Restklassenkörper bei s_i und die Morphismen ι_i induzieren einen kanonischen Isomorphismus $f_i : (X_{S_i})_{s_i} \to X_{s_i}$ der speziellen Faser $(X_{S_i})_{s_i}$ von π_i und X_{s_i}. Bezeichnet Z_i bzw. W_i den zykeltheoretischen Pullback auf X_{S_i}, so schneiden sich diese Zykel in der generischen Faser nicht und ihr zykeltheoretischer Schnitt ist $(Z\cap W)_i$, aufgefaßt als Zykel der speziellen Faser von π_i. Bezeichnet weiter $\pi_{i*} : Z_0(X_i) \to Z_0(S_i)$ den zykeltheoretischen Pushforward und $\deg : Z_0(S_i) \to \mathbb{Z}$ den zykeltheoretischen Grad, so gilt $\deg(\pi_{i*}(Z_i\cap W_i)) = \deg(\pi_{i*}(Z\cap W)_i)) = \deg(\pi_*([(Z\cap W)_i]))$ und es folgt

Lemma 3.3.1. *In obiger Situation gilt für den Grad von $Z\cap W$ die Lokalisierungsformel*

$$\deg([Z\cap W]) = \sum_{i\in I}\deg(\pi_{i*}(Z_i\cap W_i)).$$

Wie oben bleibt zu bemerken, daß die linke Seite der Formel chowtheoretisch, die rechte Seite aber zykeltheoretisch ist.

3.4. Zusammenhang zu Schnittzahlen. Es sei S eine glatte, zusammenhängende, projektive Kurve und $\pi : X \to S$ projektiv und glatt von relativer Dimension d. Dann ist nach Satz 2.3.3 jedem Zykel $W \in Z^{d+1-n}(X)$, der homologisch trivial bezüglich π ist, eine $\mathbb{G}_m$-Extension

$$0 \longrightarrow \mathbb{G}_m \longrightarrow \mathbb{E}_W^{\mathrm{CH}} \longrightarrow \underline{\mathrm{CH}}^n_{\mathrm{hom}}(X/S) \longrightarrow 0$$

zugeordnet. Ist $Z \in Z^n(X)$ ein weiterer bezüglich π homologisch trivialer Zykel, so definiert Z einen globalen Schnitt in der Garbe $\underline{\mathrm{CH}}^n(X/S)_{\mathrm{hom}}$. Es bezeichne ρ die Abbildung $\mathbb{E}_W^{\mathrm{CH}} \to \underline{\mathrm{CH}}^n_{\mathrm{hom}}(X/S)$. Das Pullback $Z^*\underline{\mathrm{CH}}^n(X/S)$ ist definiert durch $(\rho_U)^{-1}(Z_U) \subseteq \mathbb{E}_W^{\mathrm{CH}}(U)$. Dies ist ein $\mathbb{G}_m$-Torseur auf S und durch Hinzufügen des Nullschnitts erhalten wir ein Geradenbündel $\mathbb{L}_{W,Z}$ auf S. Mit diesen Notationen gilt:

Proposition 3.4.1. *Der Grad des Geradenbündels $\mathbb{L}_{W,Z}$ auf S und die Schnittzahl von W und Z stimmen überein, d.h. es gilt*

$$\deg(\mathbb{L}_{W,Z}) = \deg([W]\cup[Z]).$$

Beweis. Der Zykel Z bestimmt eine Liftung $\{Z_U\}_{W_U}$ der Klasse von Z in $\underline{\mathrm{CH}}^n(X/S)_{\mathrm{hom}}$ über der offenen Menge $U = S - \pi(Z\cap W)$ bezüglich $\mathbb{E}_W \to \underline{\mathrm{CH}}^n(X/S)_{\mathrm{hom}}$, induziert also einen Schnitt f im zurückgezogenen Geradenbündel $\mathbb{L}_{W,Z}$. Kann f nun als rationaler Schnitt von $\mathbb{L}_{W,Z}$ aufgefaßt werden, so ist f regulär und nullstellenfrei außerhalb des Bildes des Schnittmenge von Z und W. Also gilt nach der Lokalisierungsformel für Grade von Geradenbündeln

$$\deg(\mathbb{L}_{W,Z}) = \sum_{s \in S - \pi(Z \cap W)} f_s,$$

wobei f_s die Lokalisierung von f in s ist. Daß der Schnitt f rational ist, kann aber lokal eingesehen werden, und die zu beweisende Aussage folgt mit der Lokalisierungsformel für Schnittzahlen, falls die Identität

$$v_s(f_s) = \deg(\pi_{i*}(Z_i \cap W_i))$$

gilt, wobei hier v_s die Verschwindungsordnung von f_s in s ist und Z_i bzw. W_i die Lokalisierung der Zykel Z bzw. W bei s und π_i die Lokalisierung von π in s bezeichnet. Da Lokalisierung und Pullback verträglich sind, so ist die Lokalisierung von $\mathbb{L}_{Z,W}$ gegeben durch das Pullback der zu W_s gegebenen lokalen Extension $\mathbb{E}_{W_s}$. Damit folgt die Aussage aus dem folgenden Lemma. □

Lemma 3.4.2. *Es sei S das Spektrum eines diskreten Bewertungsringes, der über seinem Restklassenkörper k definiert sei. Ist $\pi : X \to S$ eigentlich und glatt von relativer Dimension d und sind $W \in Z^{d+1-n}(X)$ und $Z \in Z^n(X)$ zwei bezüglich π homologisch triviale Zykel komplementärer Kodimension auf X, die sich und die spezielle Faser eigentlich schneiden. Bezeichnet f den zu Z assoziierten Schnitt im Geradenbündel $\mathbb{L}_{W,Z}$ auf S, so ist f rational und für die Ordung $v_s(f)$ im abgeschlossenen Punkt s von S gilt $v_s(f) = \deg(\pi_{s*}(Z \cap W))$.*

Beweis. Um die Ordung von f in s explizit zu berechnen, brauchen wir eine Trivialisierung von $\mathbb{L}_{W,Z}$ über S. Da S das Spektrum eines diskreten Bewertungsringes ist, so ist $\mathbb{L}_{W,Z}$ trivial über S und es gibt also einen globalen Schnitt t von $\mathbb{E}_W$ über S, dessen Pullback $\mathbb{L}_{W,Z}$ trivialisiert. Es reicht, die zu beweisende Identität nach einem étalen Basiswechsel auf S nachzuprüfen. Da étale-lokal die Zykelklassenabbildung $\{\cdot\} : \underline{Z}^n_W(X/S)_{\mathrm{hom}} \to \mathbb{E}_W$ surjektiv ist, gibt es nach Übergang zu einer endlichen étalen Erweiterung $S' \to S$ einen homologisch trivialen Zykel $\tilde{Z} \in \underline{Z}^n_W(X/S)_{\mathrm{hom}}(S)$ mit $\{\tilde{Z}\}_W = t$. Nach Definition der Garben $\underline{Z}^n_W(X/S)_{\mathrm{hom}}$ schneidet $\tilde{Z}$ den Zykel W nicht, und daher gilt zykeltheoretisch $(Z + \tilde{Z}) \cap W = Z \cap W$. Es sei K der Körper der rationalen Funktionen auf S und $U = \operatorname{spec} K$ das assoziierte offene Unterschema von S. Da Z den Zykel generisch nicht scheidet, so gibt es ein $a \in K^\times = \mathbb{G}_m(\operatorname{spec} K)$ mit $f|U = a + \{\tilde{Z}\}_W$ und es gilt offensichtlich $v_s(f) = v(a)$, wobei $v : K^\times \to \mathbb{Z}$ die Bewertungsfunktion von K ist. Insbesondere ist f ein rationaler Schnitt. Weiter gilt $Z|_U - \tilde{Z}|_U \in Z^n_W(X_U)_{\mathrm{rat}}$ und $a = \sigma_W(Z_U - \tilde{Z}_U)$. Es bleibt also zu zeigen: Ist $Z \in Z^n(X_U)$ rational äquivalent zu 0 und ist Z disjunkt zu $W|_U$, so ist die Schnittzahl $\deg(\pi_{s*}(\bar{Z} \cap W))$ gleich $v(\sigma_W(Z))$. Durch Linearität kann man sich auf den Fall von Hauptdivisoren beschränken. Es sei also $T \in Z^{n-1}(X)$ ein integres Unterschema, das die generische Faser und W eigentlich schneidet und f eine rationale, von Null verschiedene Funktion auf T. Dann ist $T \cap W$ eine Kurve über S und für den zykeltheoretischen Schnitt $\operatorname{div}(f) \cap W$ gilt

$$\operatorname{div}(f) \cap W = i_*(\operatorname{div}(f)|_{Z \cap T}),$$

mit der Inklusion des Schnittschemas $i : Z \cap T \to X$. Es gilt

$$\begin{aligned} v(\sigma_W([\operatorname{div}(f)]) &= [T_t : S_s]\operatorname{ord}_t(f) \\ &= \deg(\pi_{s*}(\operatorname{div}(f))), \end{aligned}$$

wobei t der spezielle Punkt von T ist und $[T_t : S_s]$ die endliche Erweiterung der Restklassenkörper an den speziellen Punkten ist.

$\square$

Kapitel II. Archimedische Schnittzahlen und Poincarébündel

Im vorhergehenden Kapitel wurden geometrische Höhenpaarungen von homologisch trivialen Zykeln in Termen der Bloch-Biextension beschrieben. Das Hauptergebnis dieses Kapitels ist eine analoge Beschreibung (Satz 4.3.2) für lokale archimedische Höhenpaarungen in Termen einer geeigneten Metrisierung der Blochschen Bierweiterung. Für zwei homologisch triviale Zykel auf einem glatten, projektiven, komplexen Schema liefert die im zuvorgehenden Kapitel erörterte Konstruktion eine $\mathbb{C}^\times$-Biextension geeigneter Chowgruppen. Nach S. Müller-Stach ist diese Biextension Pullback der Poincaré-Biextension auf dem Produkt geeigneter intermediärer Jacobischen über Abel-Jacobi-Abbildungen (Satz 3.2.1). Durch die Theorie von Moret-Bailly (Satz 4.1.2) kann die Poincaré-Biextension und somit auch Bloch-Biextension mit einer kanonischen Metrik versehen werden. Diese kanonische Metrik beschreibt gewisse maximale, kompakte Untergruppen in den Fasern der Poincaré-Biextension. Andererseits gibt S. Bloch eine topologische Charakterisierung dieser Untergruppen durch archimedische Höhenpaarungen. Ein Vergleich dieser beiden Beschreibungen ergibt das Hauptergebnis.

§ 1. Delignekohomologie und höhere Zykelabbildungen

Im folgenden Abschnitt wird die Definition der Delignekohomologie $H^k_{\mathscr{D}}(X, A(n))$ für separierte algebraische Schemata von endlichem Typ über $\mathbb{C}$ wiederholt. In Analogie zu den in I.1.2.2 eingeführten relativen höheren Chowgruppen wird der etwas allgemeinere Begriff der relativen Delignekohomologie $H^k_{\mathscr{D}}(X, W, A(n))$ für eine glattes Schema X und einen Zykel W auf X gegeben. Für diese Definition ist dem Autor keine Literaturreferenz bekannt. Mit dieser Verallgemeinerung kann die unnötige Einschränkung auf Primzykel beim Vergleichsbeweis der Poincaré- und Bloch-Biextension in [MS1] aufgehoben werden. Die Techniken dieses Beweises übertragen sich aber mutatis mutandis.

1.1. Delignekohomologie. Es sei A ein noetherscher Teilring von $\mathbb{R}$, derart daß $A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ ein Körper ist. Der n-te Twist $A(n)$ von A ist dann die abelsche Gruppe $(2\pi i)^n A$, aufgefaßt als Untergruppe von $\mathbb{C}$.

Es sei X ein separiertes Schema von endlichem Typ über $\mathbb{C}$. Nach [De] (8.2.1) gibt es ein Diagramm

$$\begin{array}{ccc} Y_\bullet & \xrightarrow{\ j\ } & \bar{Y}_\bullet \\ {\scriptstyle p}\big\downarrow & & \\ X & & \end{array},$$

wobei j eine offene Immersion in ein eigentliches und glattes, simpliziales Schema $\bar{Y}_\bullet$ über $\mathbb{C}$, $Y'_\bullet = \bar{Y}_\bullet - j(Y_\bullet)$ ein Divisor mit normalen Überkreuzungen und p eine eigentliche Hyperüberdeckung von X ist (cf. [SGA IV]). Es bezeichne $A(n)^\bullet$ den Komplex von abelschen Garben

$$A(n)^\bullet : \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow A(n) \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

auf der simplizialen, komplexen Mannigfaltigkeit $Y_\bullet^{\mathrm{an}}$, wobei $A(n)|_{Y_m^{\mathrm{an}}}$ die zur konstanten Prägarbe $U \mapsto A(n)$ assoziierte Garbe auf Y_m^{an} ist, die Übergangsabbildungen $A(n)|_{Y_m^{\mathrm{an}}} \to A(n)|_{Y_l^{\mathrm{an}}}$ für die simpliziale Struktur durch die Identität induziert sind und $A(n)$ in $A(n)^\bullet$ in Dimension 0 steht. Es sei weiter $F^n\Omega^\bullet_{\bar{Y}_\bullet^{\mathrm{an}}}(\log Y_\bullet'^{\mathrm{an}})$ die Hodgefiltration

$$F^n\Omega^\bullet_{\bar{Y}_\bullet^{\mathrm{an}}}(\log Y_\bullet'^{\mathrm{an}}) : \ldots \longrightarrow 0 \longrightarrow \Omega^n_{\bar{Y}_\bullet^{\mathrm{an}}}(\log Y_\bullet'^{\mathrm{an}}) \longrightarrow \Omega^{n+1}_{\bar{Y}_\bullet^{\mathrm{an}}}(\log Y_\bullet'^{\mathrm{an}}) \longrightarrow \cdots$$

auf dem holomorphen deRham-Komplex $\Omega^\bullet_{\bar{Y}_\bullet^{\mathrm{an}}}(\log Y_\bullet'^{\mathrm{an}})$ von $\bar{Y}_\bullet^{\mathrm{an}}$ mit logarithmischen Polen entlang des Divisors $Y_\bullet'^{\mathrm{an}}$. Es sei $Rj_*^{\mathrm{an}} : D^+(Y_\bullet^{\mathrm{an}}) \to D^+(\bar{Y}_\bullet^{\mathrm{an}})$ der derivierte Funktor von der derivierten Kategorie $D^+(Y_\bullet^{\mathrm{an}})$ der nach unten beschränkten Komplexe von abelschen Garben auf $Y_\bullet^{\mathrm{an}}$ in die derivierte Kategorie $D^+(\bar{Y}_\bullet^{\mathrm{an}})$ der nach unten beschränkten Komplexe von abelschen Garben auf $\bar{Y}_\bullet^{\mathrm{an}}$. Weiter seien $\epsilon(n)$ (bzw. $\sigma(n)$) die kanonische Abbildung von $Rj_*^{\mathrm{an}}A(n)^\bullet$ (bzw. $F^n\Omega^\bullet_{\bar{Y}_\bullet^{\mathrm{an}}}(\log Y_\bullet'^{\mathrm{an}})$) in $Rj_*^{\mathrm{an}}\Omega^\bullet_{Y_\bullet^{\mathrm{an}}}$. Der Delignekomplex $A(n)^\bullet_{\mathscr{D}} \in \mathrm{Ob}(D^+(\bar{Y}_\bullet^{\mathrm{an}}))$ von $\bar{Y}^\bullet$ ist definiert als $C(f(n))^\bullet[-1]$, wobei $C(f(n))^\bullet$ der Abbildungskegel von

$$f(n) = (\epsilon(n), -\sigma(n)) : Rj_*^{\mathrm{an}}A(n)^\bullet \oplus F^n\Omega^\bullet_{\bar{Y}_\bullet^{\mathrm{an}}}(\log Y_\bullet'^{\mathrm{an}}) \longrightarrow Rj_*^{\mathrm{an}}\Omega^\bullet_{Y_\bullet^{\mathrm{an}}}$$

ist.

Definition 1.1.1. *Die Delignekohomologie $H^k_{\mathscr{D}}(X, A(n))$ von X mit Werten in $A(n)$ ist definiert durch*

$$H^k_{\mathscr{D}}(X, A(n)) = \mathbb{H}^k(\bar{Y}_\bullet^{an}, A(n)^\bullet_{\mathscr{D}}).$$

Diese Definition ist unabhängig von der eigentlichen Hyperüberdeckung p und der Kompaktifizierung j. Weiter ist die Bildung des Delignekomplexes funktoriell: Ist nämlich $g : W \to X$ ein Morphismus von separierten Schemata von endlichem Typ über $\mathbb{C}$, so gibt es eigentliche Hyperüberdeckungen $p : Y_\bullet \to X$, $p' : Z_\bullet \to W$, Kompaktifizierungen $j : Y_\bullet \to \bar{Y}_\bullet$, $j' : Z_\bullet \to \bar{Z}_\bullet$ und Morphismen von simplizialen $\mathbb{C}$-Schemata $g_\bullet : Z_\bullet \to Y_\bullet$, $\bar{g}_\bullet : \bar{Z}_\bullet \to \bar{Y}_\bullet$ mit $jg_\bullet = \bar{g}_\bullet j'$, $pg_\bullet = gp'$. Der Pullback von

Differentialformen respektiert logarithmische Pole und die Hodgefiltration und man erhält ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
Rj_*^{\mathrm{an}} A(n)^\bullet \oplus F^n\Omega^\bullet_{\bar{Y}_\bullet^{\mathrm{an}}}(\log Y_\bullet'^{\mathrm{an}}) & \longrightarrow & Rj_*^{\mathrm{an}}\Omega^\bullet_{Y_\bullet^{\mathrm{an}}} \\
\downarrow & & \downarrow \\
(\bar{g}_\bullet)_*(Rj_*'^{\mathrm{an}} A(n)^\bullet \oplus F^n\Omega^\bullet_{\bar{Z}_\bullet^{\mathrm{an}}}(\log Z_\bullet'^{\mathrm{an}})) & \longrightarrow & (\bar{g}_\bullet)_*(Rj_*'^{\mathrm{an}}\Omega^\bullet_{Z_\bullet^{\mathrm{an}}})
\end{array}$$

und damit einen Morphismus der Delignekomplexe $A(n)^\bullet_{\mathscr{D}} \to (\bar{g}_\bullet)_*(A(n)_{\mathscr{D}})$. Es sei nun $W = \sum_{r\in R} n_r W_r$ ein Zykel auf X mit paarweise verschiedenen Primzykeln W_r. Versieht man die W_r mit der reduzierten, induzierten Unterschemastruktur, so erhalt man vermöge obiger Konstruktion für jedes $r \in R$ einen Morphismus $i_r : A(n)^\bullet_{\mathscr{D}} \to (\bar{g}_{r\bullet})_*(A(n)_{\mathscr{D}})$. Insbesondere erhalten wir einen Morphismus

$$i_W : A(n)^\bullet_{\mathscr{D}} \to \bigoplus_{r\in R} (\bar{g}_{r\bullet})_*(A(n)_{\mathscr{D}}), \qquad i_W = \sum_{r\in R} n_r i_r,$$

dessen Abbildungskegel $C(i_W)$ ein Komplex von Garben auf $\bar{Y}_\bullet^{\mathrm{an}}$ ist.

Definition 1.1.2. *Die relative Deligne-Kohomologie $H^k_{\mathscr{D}}(X, W, A(n))$ für X und den Zykel W auf X ist definiert als*

$$H^k_{\mathscr{D}}(X, W, A(n)) = \mathbb{H}^k(\bar{Y}_\bullet^{an}, C(i_W)[-1]).$$

Die Delignekohomologie hat folgende Eigenschaften:

i) Es sei X separiert und von endlichem Typ über $\mathbb{C}$. Das äußere Produkt von Differentialformen induziert ein bis auf Homotopie eindeutiges Produkt $A(n)_{\mathscr{D}} \otimes A(m)_{\mathscr{D}} \to A(m+n)_{\mathscr{D}}$. Dieses induziert auf $H^*_{\mathscr{D}}(X, A(\bullet)) = \bigoplus_{k,n} H^k_{\mathscr{D}}(X, A(n))$ die Struktur eines bigraduierten Ringes, der antikommutativ bezüglich k ist. Ist allgemeiner W ein Zykel auf X, so ist $H^*_{\mathscr{D}}(X, W, A(\bullet))$ ein bigraduierter Modul über $H^*_{\mathscr{D}}(X, A(\bullet))$.

ii) Es sei X ein separiertes Schema von endlichem Typ über $\mathbb{C}$ und $W = \sum_{r\in R} n_r W_r$ ein Zykel auf X. Dann hat man eine lange exakte Sequenz

$$\cdots \longrightarrow H^k_{\mathscr{D}}(X, W, A(n)) \longrightarrow H^k_{\mathscr{D}}(X, A(n)) \longrightarrow \bigoplus_{r\in R} H^k_{\mathscr{D}}(W_r, A(n)) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow H^{k+1}_{\mathscr{D}}(X, W, A(n)) \longrightarrow \cdots .$$

iii) Ein Morphismus $f : X \to Y$ von lokal-algebraischen $\mathbb{C}$-Schemata induziert einen Ringhomomorphismus $f^* : H^k_{\mathscr{D}}(Y, A(p)) \longrightarrow H^k_{\mathscr{D}}(X, A(p))$. Dieser ist kontravariant funktoriell.

iv) Es sei Y separiert und von endlichem Typ über $\mathbb{C}$ und $f : X \to Y$ glatt von relativer Dimension d und eigentlich. Dann hat man einen Gruppenhomomorphismus (Gysinmorphismus)

$$f_* : H^k_{\mathscr{D}}(X, A(n)) \longrightarrow H^{k-2d}_{\mathscr{D}}(Y, A(n-d)).$$

Ist $g : Z \longrightarrow X$ ein glatter Morphismus von relativer Dimension e, so gilt $(gf)_* = g_* f_*$.

v) Es sei X von endlichem Typ über $\mathbb{C}$ und W ein Zykel auf X. Man hat eine Zykelabbildung (cf. [GMV], S. 124)

$$\mathrm{cl}^{n,m}_{\mathscr{D}} : \mathrm{CH}^n(X, W, m) \longrightarrow H^{2n-m}_{\mathscr{D}}(X, W, \mathbb{Z}(n)).$$

Diese Abbildung ist mit relativen Sequenzen verträglich, d.h. es kommutiert

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{CH}^n(X,m) & \longrightarrow & \bigoplus_{r\in R} \mathrm{CH}^n(W_r, m) & \longrightarrow & \mathrm{CH}^n(X, W, m-1) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{cl}^{n,m}_{\mathscr{D}}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \bigoplus_{r\in R} \mathrm{cl}^{n,m}_{\mathscr{D}}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{cl}^{n,m-1}_{\mathscr{D}}} \\
H^{2n-m}_{\mathscr{D}}(X, \mathbb{Z}(n)) & \longrightarrow & \bigoplus_{r\in R} H^{2n-m}_{\mathscr{D}}(W_r, \mathbb{Z}(n)) & \longrightarrow & H^{2n-m+1}_{\mathscr{D}}(X, W, \mathbb{Z}(n)).
\end{array}$$

Ist $f : X \to Y$ eigentlich und glatt von relativer Dimension d, so gilt $f_* \mathrm{cl}^{n,m}_{\mathscr{D}} = \mathrm{cl}^{n-d,m-d}_{\mathscr{D}} f_*$. Ist f flach oder von vollständigem Durchschnitt, so gilt $f^* \mathrm{cl}^{n,m}_{\mathscr{D}} = \mathrm{cl}^{n,m}_{\mathscr{D}} f^*$.

vi) Es gilt kanonisch

$$H^1_{\mathscr{D}}(\mathrm{spec}\,\mathbb{C}, \mathbb{Z}(1)) = \mathbb{C}^\times.$$

vii) Es sei X glatt über $\mathbb{C}$. Dann hat man eine lange exakte Sequenz

$$\cdots \longrightarrow H^k_{\mathscr{D}}(X, \mathbb{Z}(n)) \longrightarrow H^k(X, \mathbb{Z}(n)) \oplus \mathbb{H}^k(X, F^n \Omega^\bullet_X) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow H^k_{dR}(X, \mathbb{C}) \longrightarrow \cdots .$$

Ist X zusätzlich projektiv, so ist

$$\mathrm{im}(\mathbb{H}^k(X, F^n\Omega^\bullet_X) \longrightarrow H^k_{dR}(X, \mathbb{C})) = F^n H^k_{dR}(X, \mathbb{C})$$

die Hodgefiltration auf $H^k_{dR}(X, \mathbb{C})$.

§ 2. Komplexe Tori und intermediäre Jacobische

2.1. Dualität komplexer Tori. Es sei X ein reduzierter komplexer Raum. Die exakte Exponentialsequenz

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}(1) \longrightarrow \mathscr{O}_X \xrightarrow{\exp} \mathscr{O}^*_X \longrightarrow 0$$

liefert die exakte Kohomologiesequenz

$$H^1_B(X,\mathbb{Z}(1)) \longrightarrow H^1(X,\mathscr{O}_X) \longrightarrow H^1(X,\mathscr{O}_X^*) = \mathrm{Pic}(X) \xrightarrow{c_1} H^2_B(X,\mathbb{Z}(1)).$$

Für die Gruppe $\mathrm{Pic}^0(X)$ der Isomorphieklassen von invertierbaren $\mathscr{O}_X$-Moduln mit trivialer erster Chernklasse c_1 erhält man somit einen kanonischen Isomorphismus

$$\mathrm{Pic}^0(X) \cong H^1(X,\mathscr{O}_X)/H^1_B(X,\mathbb{Z}(1)) = H^1(X,\mathscr{O}_X)/(2\pi i)H^1_B(X,\mathbb{Z}).$$

Es sei T ein komplexer Torus, d.h. eine zusammenhängende, kompakte, komplexe Liegruppe. Die Exponentialabbildung

$$\mathrm{Lie}_{\mathbb{C}}T \xrightarrow{\exp} T$$

ist die universelle Überlagerung von T, deren Decktransformationsgruppe sich über den Hurewicz-Isomorphismus $\pi_1(T,0) \to H_1(T,\mathbb{Z})$ auf kanonische Weise mit dem Kern der Exponentialabbildung identifiziert. Insbesondere hat man eine kanonische Darstellung $T \cong V/\Lambda$ mit $V = \mathrm{Lie}_{\mathbb{C}}T$ und $\Lambda = H_1(T,\mathbb{Z})$. Da T offenbar eine Kählermetrik besitzt, degeneriert die Frölicher Spektralsequenz auf dem E_1-Term und man hat die (von der Wahl der Kählermetrik unabhängige) Hodgezerlegung

$$H^n_{dR}(T,\mathbb{C}) = \Lambda^n_{\mathbb{R}}\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V,\mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \bigoplus_{p+q=n} H^{p,q}(T)$$

mit den Hodgekohomologiegruppen $H^{p,q}(T) = H^q(T,\Omega^p_{T/\mathbb{C}}) = \Lambda^p_{\mathbb{C}}V^\vee \otimes_{\mathbb{C}} \Lambda^q_{\mathbb{C}}\bar{V}^\vee$ und $V^\vee = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V,\mathbb{C})$. Aus dem universellem Koeffiziententheorem folgt $\Lambda^\vee \cong H^1_B(X,\mathbb{Z})$, wobei $\Lambda^\vee = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Lambda,\mathbb{Z}) \cong \{\varphi \in \bar{V}^\vee | \varphi(\Lambda) \subseteq \mathbb{Z}\} \subsetneq \bar{V}^\vee$ das zu Λ duale Gitter in $\bar{V}^\vee$ sei. Dieses Gitter ist ein volles Untergitter in $\bar{V}^\vee$ und man kommt daher zu

Definition 2.1.1. *Ist T ein komplexer Torus, so ist $T^\vee = Pic^0(T) = \bar{V}^\vee/(2\pi i)\Lambda^\vee$, versehen mit seiner kanonischen komplexen Struktur, ein komplexer Torus. Dieser heißt auch der zu T duale Torus.*

Für den komplexen Torus T ergibt die somit die kanonische Bidualität

$$(T^\vee)^\vee = \mathrm{Pic}^0(\mathrm{Pic}^0(T)) = \mathrm{Pic}^0(\bar{V}^\vee/(2\pi i)\Lambda^\vee) = \overline{\bar{V}^\vee}^\vee/(2\pi i)((2\pi i)\Lambda^\vee)^\vee \cong V/\Lambda = T.$$

2.2. Poincarébündel. Es sei $f : X \to S$ ein Morphismus von Schemata. Nach Descenttheorie ist $\mathbb{G}_m$ eine abelsche fppf-Garbe auf X und der relative Picardfunktor $\mathrm{Pic}_{X/S} : (Sch/S)^0 \to (\mathrm{Ab})$ ist definiert als die fppf-Garbe $\mathrm{Pic}_{X/S} = R^1_{\mathrm{fppf}}f_*(\mathbb{G}_m)$ auf S. Es sei f quasikompakt und separiert. Weiter gelte $f_*(\mathscr{O}_X) = \mathscr{O}_S$ universell, und f lasse einen Schnitt zu. Dann gilt $\mathrm{Pic}_{X/S}(T) = \mathrm{Pic}(X \times_S T)/\mathrm{pr}_T^*\mathrm{Pic}(T)$. Nach einem Theorem von Grothendieck ist $\mathrm{Pic}_{X/S}$ ein separiertes S-Schema von lokal endlicher Präsentation, falls f flach, projektiv und von endlicher Präsentation ist und geometrisch integre Fasern hat. Ist also $X = A$ ein (projektives) abelsches

Schema über S, d.h. ein glattes projektives Gruppenschema mit (geometrisch) zusammenhängenden Fasern, so ist $\mathrm{Pic}_{A/S}$ ein glattes Gruppenschema über S und es gilt $\mathrm{Pic}_{A/S}(S) = \mathrm{Pic}(A)/\mathrm{pr}_S^*\mathrm{Pic}(S)$. Das minimale offene Unterschema von $\mathrm{Pic}_{A/S}$, welches den 0-Schnitt enthält, ist eigentlich über S mit zusammenhängenden Fasern; dieses Gruppenschema heißt das zu A duale abelsche Schema, ist selbst wieder projektiv und wird mit $A^\vee$ bezeichnet. $A^\vee$ stellt den offenen Unterfunktor

$$\begin{aligned} (Sch/S)^0 &\longrightarrow (Ab) \\ T \longmapsto \mathrm{Pic}^0_{A/S}(T) &= \{l \in \mathrm{Pic}_{A/S}(T) = \mathrm{Pic}(A \times_S T)/\mathrm{pr}_T^*\mathrm{Pic}(T) \\ &\qquad \text{mit } l_t \in \mathrm{Pic}(X_t) \text{ ist algebraisch äquivalent} \\ &\qquad \text{zu 0 für jeden geometrischen Punkt } t \text{ von } T\}. \end{aligned}$$

dar.

Definition 2.2.1. *i) Es sei A eine abelsche Varietät über einem Körper k. Ein Geradenbündel $\mathscr{P}$ über $A \times_k A^\vee$ heißt ein Poincarébündel, falls es zu jeder endlichen Körpererweiterung $l|k$ und jedem l-rationalen Punkt $[\mathscr{L}] \in A^\vee(l)_k = Pic^0(A \times_k l)$ einen Isomorphismus $\mathscr{P}|_{A_{[\mathscr{L}]}} \cong \mathscr{L}$ gibt. Dabei ist $A_{[\mathscr{L}]}$ mit A_l durch $pr_{A_l} : A_{[\mathscr{L}]} \to A_l$ identifiziert.*

ii) Es sei T ein komplexer Torus. Ein holomorphes Geradenbündel $\mathscr{P}$ auf $T \times_{\mathbb{C}} T^\vee$ heißt Poincarébündel, falls es zu jedem Punkt $[\mathscr{L}] \in T^\vee = Pic^0(T)$ einen Isomorphismus $\mathscr{P}|_{T\times[\mathscr{L}]} \cong \mathscr{L}$ gibt, wobei $T \times [\mathscr{L}]$ mit T über die Projektion auf den ersten Faktor identifiziert sei.

Die Existenz von Poincarébündeln für abelsche Varietäten ergibt sich offenbar aus der Existenz der dualen abelschen Varietät, d.h aus der Darstellbarkeit des Picardfunktors $\mathrm{Pic}^0_{A/k}$ für abelsche Varietäten A. In der komplexen Geometrie findet sich die Existenz des Poincarébündels z.B. in [LB] Thm. 2.5.1. In der Tat, man kann im analytischen Fall ein analoges Deformationsproblem von Geradenbündeln mit trivialer erster Chernklasse über normale komplexe Räume betrachten, und das in Definition 2.1.1 gegebene $\mathrm{Pic}^0(T)$ ist die universelle Lösung dieses Problems für komplexe Tori T.

Es ist zu bemerken, daß ein Poincarébündel bis auf Isomorphie eindeutig festgelegt ist. Diese ist jedoch nicht kanonisch, da die Automorphismen von Geradenbündeln auf $A \times_k A^\vee$ durch Homothetien mit nichttrivialen Skalaren des Grundkörpers gegeben sind. Um das Poincarébündel bis auf einen kanonischen Isomorphismus zu fixieren, muß zusätzlich noch eine Rigidifizierung, d.h. ein Isomorphismus $\mathscr{P}|_{\{0\}\times_k A^\vee} \cong \mathscr{O}_{A^\vee}$, zum Datum des Poincarébündels einer abelschen Varietät oder eines komplexen Torus aufgenommen werden: Zu je zwei rigidifizierten Poincarébündeln gibt es einen eindeutig bestimmten Isomorphismus, der die Rigidifizierung respektiert. Im folgenden seien daher Poincarébündel immer mit einer Rigidifizierung versehen.

Es sei A eine komplexe abelsche Varietät, A^{an} der assoziierte komplexe Torus und $\mathrm{an} : A^{\mathrm{an}} \to A$ der Analytifizierungsmorphismus der zugrundeliegenden geringten Räume. Nach GAGA induziert $\mathrm{an}^* : \mathrm{Coh}(A) \to \mathrm{Coh}(A^{\mathrm{an}})$, $\mathscr{L} \mapsto \mathrm{an}^*\mathscr{L} = \mathscr{L}^{\mathrm{an}}$, eine Äquivalenz der Kategorie der kohärenten algebraischen Garben auf A und der kohärenten analytischen Garben auf A^{an}. Dies induziert offensichtlichen einen Isomorphismus von Gruppen $\mathrm{Pic}(A) \to \mathrm{Pic}(A^{\mathrm{an}})$. Da die erste l-adische Chernklasse $c_1^l(\mathscr{L}) \in H^2_{\text{ét}}(A, \mathbb{Z}_l(1))$ eines algebraisch trivialen Geradenbündels verschwindet und da der Isomorphismus $H^2_{\text{ét}}(A, \mathbb{Z}_l(1)) \to H^2(A^{\mathrm{an}}, \mathbb{Z}(1)) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_l$ mit c_1 kompatibel ist, folgt $c_1^B(\mathscr{L}^{\mathrm{an}}) = 0$. Somit erhält man eine Injektion $\mathrm{Pic}^0(A) \to \mathrm{Pic}^0(A^{\mathrm{an}})$. Diese ist aus Dimensionsgründen surjektiv und es folgt der Isomorphismus $(A^\vee)^{\mathrm{an}} \cong (A^{\mathrm{an}})^\vee$, und die Abbildung $A \times_{\mathbb{C}} A^\vee \to A^{\mathrm{an}} \times_{\mathbb{C}} (A^{\mathrm{an}})^\vee$ ist mit dem Poincarébündel (und bei vorhandener Rigidifizierung auch mit dieser) verträglich.

2.3. Die Biextensionseigenschaft des Poincarébündels. Es sei A eine abelsche Varietät über einem Körper k oder ein komplexer Torus ($k = \mathbb{C}$). Das Poincarébündel $\mathscr{P}$ auf dem Produkt $A \times_k A^\vee$ von A mit ihrer dualen abelschen Varietät (seinem dualen komplexen Torus) ist das grundlegende Beispiel eine Biextension. Da sich die Blochsche Biextension im Falle $k = \mathbb{C}$ als Pullback dieser Erweiterung über die höheren Abel-Jacobi-Abbildungen erweist, wollen wir dieses Beispiel etwas genauer studieren.

Es bezeichne $t : A^\vee \times_k A \to A \times_k A^\vee, (x, y) \mapsto (y, x)$, die Vertauschung der Koordinaten. Die kanonische Bidualität $\lambda_A : A \to (A^\vee)^\vee$ wird gegeben durch das Pullback $t^*\mathscr{P}$ des Poincarébündels

$$\mathscr{P} \in (A^\vee)^\vee(A)_k = \mathrm{Pic}^0_{A^\vee/k}(A) = \mathrm{Pic}^0(A \times_k A^\vee)$$

von A. Für das Poincarébündel $\mathscr{P}_{A^\vee}$ von $A^\vee$ gilt die Isomorphie

$$(\mathrm{id}_{A^\vee} \times_k \lambda_A)^* \mathscr{P}_{A^\vee} \cong t^*\mathscr{P},$$

und daher ist $\mathscr{P}|_{A \times \{0\}}$ trivial. Insbesondere kann man annehmen, daß $\mathscr{P}$ eine mit der Rigidifizierung $\mathscr{P}|_{\{0\} \times_k A^\vee} = \mathscr{O}_{\{0\} \times_k A^\vee}$ verträgliche weitere Rigidifizierung $\mathscr{P}|_{A \times_k \{0\}} = \mathscr{O}_{A \times_k \{0\}}$ besitzt, also ein birigidifiziertes Geradenbündel ist.

Es bezeichne nun $\mathrm{pr}_i : A \times_k A \to A$, $i = 1, 2$, (bzw. $\mu : A \times_k A \to A$) die Projektion auf den i-ten Faktor (bzw. die Multiplikation). Wir erhalten damit Morphismen $\mathrm{pr}_i \times_k \mathrm{id}_{A^\vee}, \mu \times_k \mathrm{id}_{A^\vee} : A \times_k A \times_k A^\vee \to A \times_k A^\vee$ und ein Geradenbündel

$$\mathscr{L} = (\mathrm{pr}_1 \times_k \mathrm{id}_{A^\vee})^* \mathscr{P} \otimes_{\mathscr{O}} (\mathrm{pr}_2 \times_k \mathrm{id}_{A^\vee})^* \mathscr{P} \otimes_{\mathscr{O}} (\mu \times_k \mathrm{id}_{A^\vee})^* \mathscr{P}^\vee$$

auf $A \times_k A \times_k A^\vee$, wobei zur Abkürzung $\mathscr{O} = \mathscr{O}_{A \times_k A \times_k A^\vee}$ gesetzt sei. Es ergibt sich $\mathscr{L}|_{\{0\} \times_k A \times_k A^\vee} = \mathscr{O}|_{\{0\} \times_k A \times_k A^\vee}$, denn wegen der Rigidizifierung von $\mathscr{P}$ entlang $\{0\} \times_k A^\vee$ gilt $(\mathrm{pr}_1 \times_k \mathrm{id}_{A^\vee}|_{\{0\} \times_k A \times_k A^\vee})^* \mathscr{P} = \mathscr{O}|_{\{0\} \times_k A \times_k A^\vee}$ und offensichtlich ist $\mathrm{pr}_2 \times_k \mathrm{id}_{A^\vee}|_{\{0\} \times_k A \times_k A^\vee} = \mu \times_k \mathrm{id}_{A^\vee}|_{\{0\} \times_k A \times_k A^\vee}$. Analog erhält man $\mathscr{L}|_{A \times_k \{0\} \times_k A^\vee} = \mathscr{O}|_{A \times_k \{0\} \times_k A^\vee}$ und $\mathscr{L}|_{A \times_k A \times_k \{0\}} = \mathscr{O}|_{A \times_k A \times_k \{0\}}$. Mit dem Satz vom Kubus ([Mi2] Thm. 6.1) erhält man $\mathscr{L} = \mathscr{O}$ und daher einen kanonischen Isomorphismus

$$+_1 : (\mathrm{pr}_1 \times_k \mathrm{id}_{A^\vee})^* \mathscr{P} \otimes_{\mathscr{O}} (\mathrm{pr}_2 \times_k \mathrm{id}_{A^\vee})^* \mathscr{P} \longrightarrow (\mu \times_k \mathrm{id}_{A^\vee})^* \mathscr{P}.$$

Setzt man $G' = A^\vee$ in den Notation von Definition I.1.3.3, so erhält man auf analoge Weise den kanonischen Isomorphismus

$$+_2 : (\mathrm{id}_A \times_k \mathrm{pr}_1')^* \mathscr{P} \otimes_{\mathscr{O}} (\mathrm{id}_A \times_k \mathrm{pr}_1')^* \mathscr{P} \longrightarrow (\mathrm{id}_A \times_k \mu')^* \mathscr{P}$$

mit $\mathscr{O} = \mathscr{O}_{A \times_k A^\vee \times_k A^\vee}$. Man setze $p_{ij} = \mathrm{pr}_i \times_k \mathrm{pr}_j'$. Wegen der trivialen Identitäten

$$(\mathrm{pr}_i \times_k \mathrm{id}_{A^\vee}) \circ (\mathrm{id}_A \times_k \mathrm{id}_A \times_k \mathrm{pr}_j') = \mathrm{pr} \times_k \mathrm{pr}_j' = p_{ij}, \qquad i, j = 1, 2,$$

und

$$(\mu \times_k \mathrm{id}_{A^\vee}) \circ (\mathrm{id}_A \times_k \mathrm{id}_A \times_k \mathrm{pr}_j') = \mu \times_k \mathrm{pr}_j', \qquad j = 1, 2$$

erhält man durch Pullback von $+_1$ durch $\mathrm{id}_A \times_k \mathrm{id}_A \times_k \mathrm{pr}_j'$, $j = 1, 2$, und Tensorieren einen Isomorphismus

$$+_1 \otimes +_1 : p_{11}^* \mathscr{P} \otimes p_{21}^* \mathscr{P} \otimes p_{12}^* \mathscr{P} \otimes p_{22}^* \mathscr{P} \longrightarrow (\mu \times_k \mathrm{pr}_1')^* \mathscr{P} \otimes (\mu \times_k \mathrm{pr}_2')^* \mathscr{P}$$

von Geradenbündeln auf $A \times_k A \times_k A^\vee \times_k A^\vee$. Analog erhält man

$$+_2 \otimes +_2 : p_{11}^* \mathscr{P} \otimes p_{12}^* \mathscr{P} \otimes p_{21}^* \mathscr{P} \otimes p_{22}^* \mathscr{P} \longrightarrow (\mathrm{pr}_1 \times_k \mu')^* \mathscr{P} \otimes (\mathrm{pr}_2 \times_k \mu')^* \mathscr{P}.$$

Durch Basiswechsel von $+_2$ durch $\mu \times_k \mathrm{id}_{A^\vee} \times_k \mathrm{id}_{A^\vee}$ erhält man

$$+_{2(\mu)} : (\mu \times_k \mathrm{pr}_1')^* \mathscr{P} \otimes (\mu \times_k \mathrm{pr}_2')^* \mathscr{P} \longrightarrow (\mu \times_k \mu')^* \mathscr{P}$$

und analog

$$+_{1(\mu')} : (\mathrm{pr}_1 \times_k \mu')^* \mathscr{P} \otimes (\mathrm{pr}_2 \times_k \mu')^* \mathscr{P} \longrightarrow (\mu \times_k \mu')^* \mathscr{P}.$$

Es bezeichne t den kanonischen Isomorphismus

$$p_{11}^* \mathscr{P} \otimes p_{21}^* \mathscr{P} \otimes p_{12}^* \mathscr{P} \otimes p_{22}^* \mathscr{P} \longrightarrow p_{11}^* \mathscr{P} \otimes p_{12}^* \mathscr{P} \otimes p_{21}^* \mathscr{P} \otimes p_{22}^* \mathscr{P}.$$

Damit $\mathbb{P} = \mathscr{P} - \{0\}$ die Axiome einer Biextensionsstruktur erfüllt, muß noch $(+_2)_{(\mu)} \circ (+_1 \otimes +_1) = (+_1)_{(\mu')} \circ (+_2 \otimes +_2) \circ t$ eingesehen werden. Da beide Seiten Isomorphismen von Geradenbündel sind, unterscheiden sie sich durch Multiplikation mit einem Skalar aus $k^\times$, denn die Automorphismengruppe eines Geradenbündels auf einem geometrisch integren, eigentlichen k-Schema sind die Homothetien durch Elemente aus $k^\times$. Dieses Skalar kann aber an der Faser über dem Nullpunkt von $A \times_k A \times_k A^\vee \times_k A^\vee$ berechnet werden. Unter Benutzung der Birigidifizierung von $\mathscr{P}$ ist dies aber die Gleichheit der Abbildungen

$$k \otimes_k k \otimes_k k \otimes_k k \longrightarrow k \otimes_k k \longrightarrow k, \qquad \begin{cases} a \otimes b \otimes c \otimes d \longmapsto ab \otimes cd \longmapsto abcd, \\ a \otimes b \otimes c \otimes d \longmapsto ac \otimes bd \longmapsto acbd. \end{cases}$$

Bezeichnet $\mathbb{P} = \mathscr{P} - \{0\}$, so gilt also

Proposition 2.3.1. *Die Morphismen $+_1, +_2$ definieren eine $\mathbb{G}_{m,k}$-Biextension $\mathbb{P}$ auf $A \times_k A^\vee$.*

2.4. Intermediäre Jacobische. Es sei X eine kompakte, komplexe Mannigfaltigkeit der Dimension d. Durch das äußere Produkt und Integration von Differentialformen erhält man eine (von der Wahl von i und damit der Orientierung von X unabhängige) perfekte Paarung

$$H^k_{dR}(X,\mathbb{C}) \times H^{2d-k}_{dR}(X,\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad ([\omega],[\eta]) \longmapsto \frac{1}{(2\pi i)^d}\int_X \omega\wedge\eta.$$

Diese Paarung ist verträglich mit der Poincarédualität

$$H^k_B(X,\mathbb{Z}) \times H^{2d-k}_B(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z}(-d)$$

für die singuläre Kohomologie bezüglich des durch den Koeffizientenwechsel $\mathbb{Z}\hookrightarrow\mathbb{C}$ induzierten Morphismus $H^n_B(X,\mathbb{Z}) \to H^n_B(X,\mathbb{C}) \cong H^n_{dR}(X,\mathbb{C})$. Läßt X eine Kählermetrik zu, so folgt aus der Verträglichkeit der Poincarédualität mit der Serredualität für die Hodgefiltration $F^\bullet$ auf der deRham-Kohomologie

$$(\bar{F}^n H^k_{dR}(X,\mathbb{C}))^\vee = F^{d+n-k} H^{2d-k}_{dR}(X,\mathbb{C}).$$

Definition 2.4.1. *Es sei X eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit, die eine Kählermetrik zuläßt. Dann ist die n-te intermediäre Griffith-Jacobische $J^n(X)$ von X gegeben durch*

$$J^n(X) = H^{2n-1}_{dR}(X,\mathbb{C})/(F^n H^{2n-1}_{dR}(X,\mathbb{C}) + H^{2n-1}_B(X,\mathbb{Z}(n))).$$

Die intermediäre Jacobische $J^n(X)$ ist ein komplexer Torus der Dimension $\frac{b_{2n-1}}{2} = \frac{1}{2} rk\, H^{2n-1}(X,\mathbb{Z})$. Mit der in Kapitel I benutzten Notation gilt also $J^n(X) = J^{2n,n}(X)$.

Wichtig für das Folgende ist die Berechnung des zu $J^n(X)$ dualen komplexen Torus. Es sei dazu X eine d-dimensionale, kompakte, komplexe Mannigfaltigkeit vom Kählertyp und n,m zwei ganze Zahlen mit $n+m=d+1$. Da die deRham-Kohomologie eine kanonische reelle Struktur hat, gilt:

$$\begin{aligned}\mathrm{Pic}^0(J^n(X)) &= \overline{H^{2n-1}_{dR}(X,\mathbb{C})/F^n H^{2n-1}_{dR}(X,\mathbb{C})}^\vee / H^{2n-1}_B(X,\mathbb{Z}(n))^\vee(1)\\ &= H^{2m-1}_{dR}(X,\mathbb{C})/(\bar{F}^n H^{2n-1}_{dR}(X,\mathbb{C})^\vee + H^{2m-1}_B(X,\mathbb{Z}(m-1))(1))\\ &= H^{2m-1}_{dR}(X,\mathbb{C})/(F^m H^{2m-1}_{dR}(X,\mathbb{C}) + H^{2m-1}_B(X,\mathbb{Z}(m))) = J^m(X)\end{aligned}$$

Insbesondere haben wir ein Poincarébündel $\mathscr{P}^{mn}$ auf $J^m(X)\times_{\mathbb{C}} J^n(X)$.

Bemerkung 2.4.2. *Die intermediären Griffith-Jacobischen besitzen auch folgende hodgetheoretische Beschreibung: Die singuläre Kohomologie $H^n_B(X,\mathbb{Z})$ einer kompakten Kählermannigfaltigkeit X trägt in kanonischer Weise eine reine $\mathbb{Z}$-Hodgestruktur vom Gewicht n. Twisten mit der Hodge-Tate-Struktur $\mathbb{Z}(n)$ gibt auf $H^{2n-1}_B(X,\mathbb{Z})(n)$ eine reine Struktur vom Gewicht -1. Nun gilt nach [Ja2] für eine gemischte Hodgestruktur H in der abelschen Kategorie $\mathbb{Z}$-MHS der gemischten $\mathbb{Z}$-Hodgestrukturen*

$$Ext^1_{\mathbb{Z}\text{-}MHS}(\mathbb{Z},H) = W_0H\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{C}/(W_0H + F^0W_0H\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{C}).$$

Folglich gilt

$$J^n(X) = Ext^1_{\mathbb{Z}\text{-}MHS}(\mathbb{Z}, H^{2n-1}_B(X,\mathbb{Z}(n))).$$

2.5. Abel-Jacobi-Abbildungen. Es sei X glatt über $\mathbb{C}$. Dann hat man eine lange exakte Sequenz

$$\cdots \longrightarrow H^k_{\mathscr{D}}(X,\mathbb{Z}(n)) \longrightarrow H^k(X,\mathbb{Z}(n)) \oplus \mathbb{H}^k(X, F^n\Omega^\bullet_X) \longrightarrow H^k_{dR}(X,\mathbb{C}) \longrightarrow \cdots .$$

Ist X kompakt und vom Kählertyp, so ist $\mathrm{im}(\sigma(n)_*) = F^n H^k_{dR}(X,\mathbb{C})$ die Hodgefiltration auf der deRham-Kohomologie und für $k = 2n-1$ erhält man kurze exakte Sequenzen

$$0 \longrightarrow J^n(X) \longrightarrow H^{2n}_{\mathscr{D}}(X,\mathbb{Z}(p)) \longrightarrow \mathrm{Hdg}^n(X) \longrightarrow 0,$$

wobei $\mathrm{Hdg}^n(X) = \ker(H^{2n}(X,\mathbb{Z}(n)) \longrightarrow H^{n,n}(X))$ die Gruppe der ganzen Hodgezykel auf X ist. Man hat nach [GMV], S. 124ff, eine Zykelabbildung $\mathrm{cl}^{n,0}_{\mathscr{D}} : Z^p(X) \to H^{2n}_{\mathscr{D}}(X,\mathbb{Z}(n))$. Ist nun $Z \in Z^n(X)$ ein homologisch trivialer Zykel, so ist dessen Klasse in der singulären Kohomologie trivial, i.e. $\mathrm{cl}^{n,0}_{\mathscr{D}}(Z) \in \ker(H^{2n}_{\mathscr{D}}(X,\mathbb{Z}(n)) \to \mathrm{Hdg}^n(X))$. Folglich erhält man einen Homomorphismus $Z^n(X)_{\mathrm{hom}} \to J^n(X)$. Da die Zykelabbildung in die Delignekohomologie über rationale Äquivalenz faktorisiert ergibt sich ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{CH}^n(X)_{\mathrm{hom}} \arrow[r] \arrow[d, "j^n"] & \mathrm{CH}^n(X) \arrow[d, "\mathrm{cl}^{n,0}_{\mathscr{D}}"] & & \\
0 \arrow[r] & J^n(X) \arrow[r] & H^{2n}_{\mathscr{D}}(X,\mathbb{Z}(n)) \arrow[r] & \mathrm{Hdg}^n(X) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Definition 2.5.1. *Die Abbildung $j^n : \mathrm{CH}^n(X)_{hom} \to J^n(X)$ heißt die n-te Abel-Jacobi-Abbildung.*

§ 3. Vergleich von Poincaré- und Blochbiextension.

Im folgenden sei X ein d-dimensionales projektives glattes zusammenhängendes Schema von endlichem Typ über $\mathbb{C}$ und m, n ganze Zahlen mit $m + n = d + 1$.

3.1. Die Blochsche Konstruktion für $S = \mathrm{spec}\,\mathbb{C}$. Es sei $W \subsetneq Z^m(X)$ ein m-kodimensionaler homologisch trivialer Zykel auf X und w dessen Klasse in $\mathrm{CH}^m_{\mathrm{hom}}(X)$. Dann ist die lange exakte Sequenz der höheren Chowgruppen für das Paar (X, W) von der Form

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{CH}^n(X,1) \longrightarrow \mathrm{CH}^n(W,1) \longrightarrow \mathrm{CH}^n(X,W,0) \longrightarrow \mathrm{CH}^n(X) \longrightarrow 0.$$

Nach I.2.2.1 ist die Komposition

$$\theta_W : \mathrm{CH}^n(X,1) \longrightarrow \mathrm{CH}^n(W,1) \longrightarrow \mathrm{CH}^1(\mathrm{spec}\,\mathbb{C},1) = \mathbb{C}^\times$$

die triviale Abbildung und Kobasiswechsel mit der kanonischen Abbildung $\mathrm{CH}^n(W,1) \to \mathrm{CH}^1(\mathrm{spec}\,\mathbb{C},1) \cong \mathbb{C}^\times$ ergibt eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathbb{C}^\times \longrightarrow E^{\mathrm{CH}}_W \longrightarrow \mathrm{CH}^n(X) \longrightarrow 0.$$

Basiswechsel mit der Inklusion $\mathrm{CH}^n_{\mathrm{hom}}(X) \hookrightarrow \mathrm{CH}^n(X)$ liefert die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathbb{C}^\times \longrightarrow \mathbb{E}^{\mathrm{CH}}_W \longrightarrow \mathrm{CH}^n_{\mathrm{hom}}(X) \longrightarrow 0,$$

die bis auf kanonische Isomorphie nur von der Klasse w von W abhängt. Nach Definition beschreibt diese Sequenz gerade die Einschränkung $\mathbb{E}_w$ der $\mathbb{G}_m(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^\times$-Biextension $\mathbb{E}$ über $\mathrm{CH}^m_{\mathrm{hom}}(X) \times \mathrm{CH}^n_{\mathrm{hom}}(X)$ auf $\{w\} \times \mathrm{CH}^n_{\mathrm{hom}}(X)$.

3.2. Vergleich mit der Poincaré-Biextension. Es sei $\mathbb{P} = \mathscr{P}^{m,n} - \{0\}$ die Poincaré-Biextension auf $J^m(X) \times_{\mathbb{C}} J^n(X)$ und $\mathbb{P}_{j^m(w)}$ die Einschränkung von $\mathbb{P}$ auf $\{j^m(w)\} \times J^n(X) \cong J^n(X)$ für den Punkt $j^m(w) \in J^m(X)$. Wir erhalten also eine kurze exakte Sequenz von komplexen Liegruppen

$$0 \longrightarrow \mathbb{C}^\times \longrightarrow \mathbb{P}_{j^m(w)} \longrightarrow J^n(X) \longrightarrow 0.$$

Die Zykelabblidung in die Delignekohomologie vertauscht mit dem Gysinmorphismus (cf. 1.1 v)), d.h. das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{CH}^n(W,1) & \longrightarrow & \mathrm{CH}^1(\operatorname{spec}\mathbb{C},1) \cong \mathbb{C}^\times \\
{\scriptstyle \mathrm{cl}^{n,1}_{\mathscr{D}}}\downarrow & & {\scriptstyle \mathrm{cl}^{1,1}_{\mathscr{D}}}\downarrow \\
H^{2n-1}_{\mathscr{D}}(W,\mathbb{Z}(n)) & \longrightarrow & H^1_{\mathscr{D}}(\operatorname{spec}\mathbb{C},\mathbb{Z}(1)) \cong \mathbb{C}^\times
\end{array}$$

kommutiert. Betrachtet man die lange Kohomologiesequenzen des Paares (X, W) für die höheren Chowgruppen bzw. für die Delignekohomologie, so ergibt die Zykelabbildung ein kommutatives Diagramm (cf. 1.1 v))

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathrm{CH}^n(X,1) & \longrightarrow & \mathrm{CH}^n(W,1) & \longrightarrow & \mathrm{CH}^n(X,W,0) & \longrightarrow & \mathrm{CH}^n(X) \\
{\scriptstyle \mathrm{cl}^{n,1}_{\mathscr{D}}}\downarrow & & {\scriptstyle \mathrm{cl}^{n,1}_{\mathscr{D}}}\downarrow & & {\scriptstyle \mathrm{cl}^{n,0}_{\mathscr{D}}}\downarrow & & {\scriptstyle \mathrm{cl}^{n,0}_{\mathscr{D}}}\downarrow \\
H^{2n-1}_{\mathscr{D}}(X,\mathbb{Z}(n)) & \longrightarrow & H^{2n-1}_{\mathscr{D}}(W,\mathbb{Z}(n)) & \longrightarrow & H^{2n}_{\mathscr{D}}(X,W,\mathbb{Z}(n)) & \longrightarrow & H^{2n}_{\mathscr{D}}(X,\mathbb{Z}(n)).
\end{array}$$

Kobasiswechsel mit obigem Diagramm liefert ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathbb{C}^\times & \longrightarrow & E^{\mathrm{CH}}_W & \longrightarrow & \mathrm{CH}^n(X) \\
 & & {\scriptstyle \mathrm{id}_{\mathbb{C}^\times}}\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & \mathbb{C}^\times & \longrightarrow & P_W & \longrightarrow & H^{2n}_{\mathscr{D}}(X,\mathbb{Z}(n)).
\end{array}$$

Da die Zykelabbildung in die Delignekohomologie und die Abel-Jacobi-Abbildung kommutieren, also das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{CH}^n_{\mathrm{hom}}(X) & \longrightarrow & \mathrm{CH}^n(X) \\
{\scriptstyle j^n}\downarrow & & {\scriptstyle \mathrm{cl}^{n,0}_{\mathscr{D}}}\downarrow \\
J^n(X) & \longrightarrow & H^{2n}_{\mathscr{D}}(X,\mathbb{Z}(n))
\end{array}$$

kommutiert, erhält man durch Basiswechsel einen Morphismus von Extensionen

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathbb{C}^\times \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}_{\mathbb{C}^\times}"'] & \mathbb{E}_W^{\mathrm{CH}} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{CH}^n_{\mathrm{hom}}(X) \arrow[r] \arrow[d, "j^n"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathbb{C}^\times \arrow[r] & \mathbb{P}_W \arrow[r] & J^n(X) \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Geht man zu den nur von der Klasse $w = \{W\} \in \mathrm{CH}^m(X)$ abhängigen Isomorphieklassen von Extensionen über, so beschreibt die obere Zeile die Bloch- und die untere Zeile die Poincaré-Extension über w bzw. $j^m(w)$. Insgesamt erhält man einen Morphismus von $\mathbb{C}^\times$-Biextensionen

$$\begin{tikzcd} \mathbb{E}^{\mathrm{CH}} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{CH}^m_{\mathrm{hom}}(X) \times \mathrm{CH}^n_{\mathrm{hom}}(X) \arrow[d, "j^m \times j^n"] \\ \mathbb{P} \arrow[r] & J^m(X) \times_{\mathbb{C}} J^n(X). \end{tikzcd}$$

Mit unserer Definition von relativer Deligne-Kohomologie ergibt der entsprechend modifizierte Beweis in [MS1]:

Satz 3.2.1 (Müller-Stach,[MS1] Thm. 1). *Das zuvorstehende Diagramm ist kartesisch, d.h.* $\mathbb{E}$ *ist der Basiswechsel der Poincaré-Biextension* $\mathbb{P}$ *via* $j^m \times j^n$.

Beweis. Die zu beweisende Aussage muß lediglich auf den Fasern nachgeprüft werden, d.h. es ist zu prüfen, daß

$$\begin{tikzcd} \mathbb{E}_w^{\mathrm{CH}} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{CH}^n_{\mathrm{hom}}(X) \arrow[d, "j^n(X)"] \\ \mathbb{P}_{j^m(w)} \arrow[r] & J^n(X) \end{tikzcd}$$

kartesisch für alle $w \in \mathrm{CH}^m_{\mathrm{hom}}(X)$ ist. Die Behauptung ergibt sich mit nachstehendem Lemma. $\square$

Lemma 3.2.2. *Es sei*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & B \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

ein kommutatives Diagramm von abelschen Gruppen mit exakten Zeilen. Ist die Abbildung $A \to A'$ *ein Isomorphismus, so ist auch die kanonische Abbildung* $B \to B' \times_{C'} C$ *ein Isomorphismus, das rechte Quadrat des Diagramms ist also kartesisch.*

Beweis. Dies ergibt sich aus einer einfachen Diagrammjagd. $\square$

§ 4. Archimedische Schnittzahlen.

4.1. Metrisierung des Poincarébündels. Es sei T ein komplexer Torus und $\bar{\mathscr{L}}$ ein holomorphes Geradenbündel auf T, versehen mit einer C^∞-hermiteschen Metrik. Wir bezeichnen mit ∇ den eindeutig bestimmten holomorphen metrischen Zusammenhang auf $\mathscr{L}$ und

$$c_1(\bar{\mathscr{L}}) = \nabla^2 \in \Gamma(T, \Omega_T^{1,1})$$

die 1-te Chernform von ∇.

Definition 4.1.1. *Das metrisierte Geradenbündel $\bar{\mathscr{L}}$ (oder die Metrik auf $\mathscr{L}$) heißt zulässig, wenn die Krümmungsform $c_1(\bar{\mathscr{L}})$ invariant unter Translation ist, d.h. $t_a^* c_1(\bar{\mathscr{L}}) = c_1(\bar{\mathscr{L}})$ für jede Translation $t_a : T \to T, b \mapsto a + b$, $a \in T$.*

Die Menge der zulässigen Metriken auf $\mathscr{L}$ sei mit $\pi(T, \mathscr{L})$ bezeichnet. Offenbar ist eine zulässige Metrik bis auf Multiplikation mit einer positiven reellen Konstante eindeutig bestimmt. Die Existenz einer zulässigen Metrik folgt aus [GH], Prop. S. 148. Das System von Mengen $\pi(T, \mathscr{L})$ besitzt offensichtlich folgende Eigenschaften:

i) Ist $u : \mathscr{L} \to \mathscr{M}$ ein Isomorphismus holomorpher Geradenbündel auf T und ρ eine zulässige Metrik auf $\mathscr{M}$, so ist $u^*\rho$ eine zulässige Metrik auf $\mathscr{L}$.

ii) Für das triviale Geradenbündel $\mathscr{O}_T$ auf T ist $\pi(T, \mathscr{O}_T)$ die Menge der konstanten Metriken.

iii) Sind $\mathscr{L}_1$ und $\mathscr{L}_2$ holomorphe Geradenbündel, und ρ_1 bzw. ρ_2 zulässige Metriken auf $\mathscr{L}_1$ bzw. $\mathscr{L}_2$, so ist $\rho_1 \otimes \rho_2$ eine zulässige Metrik auf $\mathscr{L}_1 \otimes \mathscr{L}_2$.

iv) Ist $f : S \to T$ ein Morphismus komplexer Tori und $\rho \in \pi(T, \mathscr{L})$ eine zulässige Metrik auf einem holomorphen Geradenbündel $\mathscr{L}$, so ist $f^*\rho$ eine zulässige Metrik auf $f^*\mathscr{L}$.

Die Eigenschaften i)-iv) liefern eine Axiomatisierung der zulässigen Metriken, genauer gilt:

Satz 4.1.2 ([MB], Thm. 3.1). *Für jeden komplexen Torus T und jedes holomorphe Geradenbündel $\mathscr{L}$ auf T gibt es ein eindeutig bestimmtes System von Metriken $\pi(T, \mathscr{L}) \neq \emptyset$, sodaß die Eigenschaften i)-iv) erfüllt sind.*

Eine alternative Beschreibung der zulässigen Metriken ergibt sich wie folgt: Ist T ein komplexer Torus und bezeichnet I eine Teilmenge von $\{1, 2, 3\}$ und $\mathrm{pr}_I : T^3 \to T$, $(a_1, a_2, a_3) \mapsto \sum_{i \in I} a_i$ und $\mathscr{L}$ ein Geradenbündel auf T, so ist nach dem Satz vom Kubus das Geradenbündel

$$\mathscr{D}_3(\mathscr{L}) = \bigotimes_{I \subseteq \{1,2,3\}} \mathrm{pr}_I^* \mathscr{L}^{\otimes(-1)^{|I|}}$$

auf T^3 (kanonisch) trivial. Ist $\mathscr{L}$ versehen mit einer zulässigen Metrik, so ist die induzierte Metrik auf $\mathscr{D}_3(\mathscr{L})$ zulässig. In Umkehrung dazu gilt: Ist ρ eine Metrik auf T und $\mathscr{D}_3(\rho)$ konstant, so ist ρ zulässig.

Es sei nun $\mathscr{P}$ das (rigidifizierte) Poincarébündel auf $T \times_{\mathbb{C}} T^\vee$. Nach obigem Theorem gibt es eine zulässige Metrik $\rho \in \pi(T \times_{\mathbb{C}} T^\vee, \mathscr{P})$ auf $\mathscr{P}$. Da das Poincarébündel rigidifiziert entlang von $\{0\} \times_{\mathbb{C}} T^\vee$ ist, so wird ρ durch die Normierung $\rho(1,1)_{(0,0)} = 1$ eindeutig, wobei $1 \in \mathbb{C} \cong_{\text{kan.}} \mathscr{P}_{(0,0)}$. Da die Restriktion eines zulässigen Geradenbündels wieder zulässig ist, so ist die Rigidifizierung $\mathscr{P}|_{\{0\}\times_{\mathbb{C}} T^\vee} \cong \mathscr{O}_{T^\vee}$ eine Isometrie ($\mathscr{O}_{T^\vee}$ ist dabei mit der trivialen Metrik versehen). Ist $\mathbb{P} = \mathscr{P} - \{0\}$ mit der induzierten Metrik versehen, so ist diese kompatibel mit der $\mathbb{C}^\times$-Biextensionstruktur. Genauer gilt:

Lemma 4.1.3. *Die Kompositionsabbildungen $+_1, +_2$ für die Biextensionsstrukur*

$$+_1 : \mathbb{P}_{(x_1,y)} \times \mathbb{P}_{(x_2,y)} \longrightarrow \mathbb{P}_{(x_1+x_2,y)}, \qquad +_2 : \mathbb{P}_{(x,y_1)} \times \mathbb{P}_{(x,y_2)} \longrightarrow \mathbb{P}_{(x,y_1+y_2)}$$

mit $x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 \in T$ induzieren Isometrien

$$\mathbb{P}_{(x_1,y)} \otimes_{\mathbb{C}^\times} \mathbb{P}_{(x_2,y)} \cong \mathbb{P}_{(x_1+x_2,y)}, \qquad \mathbb{P}_{(x,y_1)} \otimes_{\mathbb{C}^\times} \mathbb{P}_{(x,y_2)} \cong \mathbb{P}_{(x,y_1+y_2)}.$$

Beweis. Mit den Notationen aus 2.3. ist

$$+_1 : (\mathrm{pr}_1 \times_{\mathbb{C}} \mathrm{id}_{T^\vee})^* \mathscr{P} \otimes (\mathrm{pr}_2 \times_{\mathbb{C}} \mathrm{id}_{T^\vee})^* \mathscr{P} \longrightarrow (\mu \times_{\mathbb{C}} \mathrm{id}_{T^\vee})^* \mathscr{P}$$

eine Isomorphismus von Geradenbündeln auf $T \times_{\mathbb{C}} T \times_{\mathbb{C}} T^\vee$. Nach den Axiomen iii) und iv) für zulässige Metriken sind beide Seiten mit einer zulässigen Metrik versehen. Mit Axiom i) und ii) ist $+_1$ bis auf Multiplikation mit einer positiven reellen Konstanten ein Isometrie. Diese kann am Punkt $(0,0,0)$ berechnet werden und bestimmt sich wegen der Rigidifizierung zu 1. □

Es sei $||\cdot||$ die zur kanonischen Metrik auf $\mathbb{P}$ assoziierte Norm. Wir betrachten nun die Abbildung

$$\log ||\cdot||^2 : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{R}$$

und deren Nullstellenmenge $\mathbb{S} = \{v \in \mathbb{P} |\, \log ||v||^2 = 0\}$.

Korollar 4.1.4. *Für jeden Punkt $y \in T^\vee$ ist*

$$\log ||\cdot||^2 : \mathbb{P}|_{T\times_{\mathbb{C}}\{y\}} \longrightarrow \mathbb{R}$$

ein Homomorphismus abelscher Gruppen bzgl. $+_1$ mit Kern $\mathbb{S}|_{T\times_{\mathbb{C}}\{y\}}$. Eine analoge Aussage gilt für $+_2$. Überdies hat $\mathbb{S}$ die folgenden Eigenschaften:

i) $\mathbb{S}$ ist eine kompakte C^∞-S^1-Biextension, insbesondere also ein S^1-Prinzipalbündel.

ii) Für jeden Punkt $x \in T$ (resp. $y \in T^\vee$) ist

$$\mathbb{S}|_{\{x\}\times_{\mathbb{C}} T^\vee} \subseteq \mathbb{P}|_{\{x\}\times_{\mathbb{C}} T^\vee} \qquad (\textit{resp. } \mathbb{S}|_{T\times_{\mathbb{C}}\{y\}} \subseteq \mathbb{P}|_{T\times_{\mathbb{C}}\{y\}})$$

die maximale, kompakte, zusammenhängende Unterliegruppe. Die Menge $\mathbb{S}$ ist durch diese Eigenschaft eindeutig bestimmt.

Beweis. Sind $x_i \in T$ und $w_i \in \mathbb{P}_{(x_i,y)}$, $i = 1,2$, so gilt nach Lemma 4.1.3 $||w_1 +_1 w_2|| = ||w_1|| \cdot ||w_2||$ und daher $\log ||w_1 +_1 w_2||^2 = \log ||w_1||^2 + \log ||w_2||^2$. Insbesondere lassen sich die Verknüpfungen $+_1, +_2$ auf $\mathbb{S}$ einschränken und $S^1 = \{z \in \mathbb{C} | ||z|| = 1\}$ operiert auf $\mathbb{S}$. Ist $U \subseteq T \times_{\mathbb{C}} T^\vee$ eine offene Teilmenge, auf der $\mathscr{P}$ trivial ist, so gilt $\mathbb{S}|_U \cong U \times S^1$ als differenzierbare Mannigfaltigkeit. Also folgt *i*). Da $\mathbb{R}$ keine nichttrivialen kompakten Untergruppen besitzt, so ist $\mathbb{S}|_{\{x\}\times_{\mathbb{C}} T^\vee} \subseteq \mathbb{P}|_{\{x\}\times_{\mathbb{C}} T^\vee}$ eine maximale, zusammenhängende, kompakte Untergruppe. Da Untergruppen mit dieser Eigenschaft in abelschen Liegruppen eindeutig sind, ergibt sich *ii*). □

Offensichtlich ist der Homomorphismus

$$\log || \cdot ||^2 : \mathbb{P}|_{T\times_{\mathbb{C}}\{y\}} \longrightarrow \mathbb{R}$$

nicht durch die Angabe der maximalen kompakten Untergruppe festgelegt. Der Quotient ist zwar isomorph zu $\mathbb{R}$, aber nicht kanonisch und daher unterscheiden sich je zwei solche Homomorphismen um einen Automorphismus der topologischen Gruppe $\mathbb{R}$, also um die Multiplikation mit einer nichttrivialen reellen Konstanten. Man erhält die Eindeutigkeit in ersichtlicher Weise durch Hinzunahme einer weiteren Bedingung:

Korollar 4.1.5. *Es gibt einen eindeutig bestimmten stetigen Homomorphismus*

$$\mathbb{P}|_{T\times_{\mathbb{C}}\{y\}} \longrightarrow \mathbb{R},$$

der den Homomorphismus $\mathbb{C}^\times \to \mathbb{R}$, $z \mapsto \log |z|^2$, *bezüglich der kanonischen Inklusion* $\mathbb{C}^\times \hookrightarrow \mathbb{P}|_{T\times_{\mathbb{C}}\{y\}}$ *fortsetzt.*

4.2. Definition von Archimedischen Schnittzahlen. Es sei X eine komplexe Mannigfaltigkeit der Dimension d und $W \subseteq X$ eine irreduzible analytische Teilmenge der Kodimension m mit singulärem Ort W_{sing}. Dann hat $W_{\text{sing}} \subseteq W$ Kodimension ≥ 1 und ist damit nirgends dicht in W. Es sei $p + q = 2m$ und $\eta \in \Gamma_c(X, \Omega_X^{d-p,d-q})$ eine differenzierbare $(d-p, d-q)$-Form mit kompakten Träger auf X. Dann existiert das Integral

$$\delta_W(\eta) = \frac{1}{(2\pi i)^{d-m}} \int_{W - W_{\text{sing}}} \eta$$

und man erhält einen globalen (p,q)-Strom (Distribution) $\delta_W \in \Gamma(X, \mathscr{D}_X^{p,q})$. Dabei ist $\mathscr{D}_X^{p,q}$ die Garbe der (p,q)-Ströme und es gilt offenbar $\mathscr{D}_X^{p,q} = \Omega_X^{p,q} \otimes_{\mathscr{C}^\infty} \mathscr{D}_X$, wobei $\mathscr{D}_X$ die $\mathscr{C}^\infty$-Algebra der Distributionen auf X ist. Durch lineare Fortsetzung erhält man einen Gruppenhomomorphismus

$$\delta : Z^m(X) \longrightarrow \Gamma(X, \mathscr{D}_X^{p,q}), \qquad \delta \longmapsto \delta_W,$$

dessen Bild in $\Gamma(X, \mathscr{D}_X^{m,m})$ enthalten ist. Man hat Operatoren $\partial : \mathscr{D}_X^{p,q} \to \mathscr{D}_X^{p,q+1}$ und $\bar{\partial} : \mathscr{D}_X^{p,q} \to \mathscr{D}_X^{p+1,q}$ die $\mathscr{D}^{\bullet,\bullet}$ zu einem Bikomplex von abelschen Garben machen, und die kanonische Inklusion $\iota_X^{\bullet,\bullet} : \Omega_X^{\bullet,\bullet} \to \mathscr{D}_X^{\bullet,\bullet}$ ist ein Morphismus von Bikomplexen. Ein klassisches Resultat der Analysis besagt, daß $\iota^{\bullet,q} : \Omega_X^{\bullet,q} \to \mathscr{D}_X^{\bullet,q}$ ein Quasiisomorphismus ist. Für einen Zykel $W \in Z^m(X)$ ist $\delta_W \in \Gamma(X, \mathscr{D}_X^{m,m})$ bezüglich $\bar\partial$ geschlossen und definiert damit eine Klasse $[\delta_W] \in H^{m,m}(X)$. Ist W glatt, so ist δ_W das Poincaré-Dual der homologischen Fundamentalklasse $\mathrm{cl}(W) \in H_{2(d-m)}(X, \mathbb{Z}(d-m))$.

Es sei X nun eine kompakte Kählermannigfaltigkeit. Nach dem dd^c-Lemma gibt es eine eindeutig bestimmte harmonische Differentialform $h_W \in \Gamma(X, \Omega_X^{m,m})$ mit $[\delta_W] = [h_W] \in H^{m,m}(X)$ und einen Strom $\eta_W \in \Gamma(X, \mathscr{D}_X^{m-1,m-1})$ mit

$$\delta_W = dd^c \eta_W + h_W.$$

Dabei ist der Strom η_W glatt außerhalb von W.

Definition 4.2.1 ([MS2], S. 253ff). *Es sei $n+m = d+1$ und $Z \in Z^n(X)$ ein Zykel, dessen Träger disjunkt zu W ist. Da η_W glatt außerhalb von W ist, existiert das Integral*

$$< Z, W >_{arch} = \frac{1}{(2\pi i)^{d-n}} \int_Z \eta_W \in \mathbb{R}.$$

Die Zahl $< Z, W >_{arch}$ heißt die archimedische Höhenpaarung von Z und W.

Für eine kompakte Kählermannigfaltigkeit X hat die archimedische Höhenpaarung folgende Eigenschaften:

i) Die Paarung $< Z, W >_{\mathrm{arch}}$ ist symmetrisch und $\mathbb{Z}$-bilinear.

ii) Ist Z rational äquivalent zu 0, so ist $< Z, W >_{\mathrm{arch}} = 0$.

iii) Sind Z, W homologisch äquivalent zu 0, so ist $< Z, W >_{\mathrm{arch}}$ unabhängig von der Kählermetrik.

Bemerkung 4.2.2. *Es sei X eine projektive komlexe Mannigfaltigkeit der Dimension d und n, m ganze Zahlen mit $n + m = d + 1$. Vermöge des Moving-Lemmas induziert die Höhenpaarung eine symmetrische bilineare Abbildung*

$$< \cdot, \cdot >: \mathrm{CH}^m_{hom}(X) \times \mathrm{CH}^n_{hom}(X) \longrightarrow \mathbb{R}.$$

4.3. Archimedische Höhenpaarungen und invariante Metriken. Es sei X ein zusammenhängendes, glattes, algebraisches $\mathbb{C}$-Schema der Dimension d und m, n zwei natürliche Zahlen mit $m+n = d+1$. Nach 3.2. ist die Blochsche $\mathbb{C}^\times$-Biextension $\mathbb{E}^{\mathrm{CH}}$ von $\mathrm{CH}^m_{\mathrm{hom}}(X) \times \mathrm{CH}^n_{\mathrm{hom}}(X)$ Basiswechsel der Poincaréschen $\mathbb{C}^\times$-Biextension $\mathbb{P}$ von $J^m(X) \times_{\mathbb{C}} J^n(X)$ via $j^m \times j^n$, d.h. es gilt kanonisch $(j^m \times j^n)^* \mathbb{P} \cong \mathbb{E}^{\mathrm{CH}}$. Es sei $\mathbb{P}^{\mathrm{an}}$ mit der nach 4.1. eindeutigen, mit der Rigidifizierung verträglichen, zulässigen Metrik $||\cdot||$ versehen. Durch Zurückziehen mit $j^n \times j^m$ erhält $\mathbb{E}^{\mathrm{CH}}$ die Struktur einer metrisierten $\mathbb{C}^\times$-Biextension.

Definition 4.3.1. *Die Metrik*

$$||\cdot||_{kan} = ((j^m)^* \times (j^n)^*)||\cdot||$$

heißt die kanonische Metrik auf $\mathbb{E}^{\mathrm{CH}}$.

Es ist klar, daß die Operation von $S^1 \subseteq \mathbb{C}^\times$ auf $\mathbb{C}$ isometrisch ist. Es sei Z (resp. W) ein homologisch trivialer Zykel der Kodimension n (resp. m). Die Einschränkung von $\mathbb{E}^{\mathrm{CH}}$ auf $\mathrm{CH}^n_{\mathrm{hom}}(X) \times \{W\} \subseteq \mathrm{CH}^n_{\mathrm{hom}}(X) \times \mathrm{CH}^m_{\mathrm{hom}}(X)$ ist durch die Extension

$$0 \longrightarrow \mathbb{C}^\times \longrightarrow \mathbb{E}^{\mathrm{CH}}_W \longrightarrow \mathrm{CH}^n(X)_{\mathrm{hom}} \longrightarrow 0$$

beschrieben. Schneiden sich Z und W nicht, so liftet sich die Zykelklasse $\{Z\} \in \mathrm{CH}^n(X)_{\mathrm{hom}}$ kanonisch in ein Element $\{Z\}_W \in \mathbb{E}^{\mathrm{CH}}_W$ und folglich gilt $\{Z\}_W \in \mathbb{E}^{\mathrm{CH}}_{W,Z}$. Auf der Faser $\mathbb{E}^{\mathrm{CH}}_{W,Z}$ hat man die kanonische Metrik

$$||\cdot||_{\mathrm{kan},W,Z} : \mathbb{E}^{\mathrm{CH}}_{W,Z} \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}.$$

Mit diesen Bezeichnungen gilt das Hauptresultat dieses Kapitels:

Satz 4.3.2. *Die archimedische Höhenpaarung von Z und W kann man durch die kanonische Metrik auf* $\mathbb{E}^{\mathrm{CH}}$ *ausdrücken. Genauer gilt die Formel*

$$< Z, W >_{arch} = \log ||\{Z\}_W||^2_{kan,W,Z}.$$

Beweis. Wegen der Verträglichkeit der Zykelklassen mit relativen Sequenzen und Pushforward-Abbildungen, bildet sich die Klasse $\{Z\}_W$ unter der Abbildung $\mathbb{E}^{\mathrm{CH}}_W \to \mathbb{P}_W$ auf das Bild von $\mathrm{cl}^{n,0}_{\mathscr{D}}(\mathrm{Z})$ unter $H^{2n}_{\mathscr{D}}(X, W, \mathbb{Z}(n)) \to \mathbb{P}_W$ ab. Nach Definition der kanonischen Metrik reicht es, die entsprechende Formel für die Poincaré-Biextension zu zeigen. Nach [Bl2], S.140 (3.3), ist

$$< \cdot, W >_{\mathrm{arch}} : \mathbb{P}_W \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \{Z\}_W \longmapsto < Z, W >_{\mathrm{arch}},$$

eine stetige Abbildung, welche die Abbildung $\mathbb{C}^\times \to \mathbb{R}$, $z \mapsto \log |z|^2$, auf $\mathbb{P}_W$ fortsetzt. Durch den Formalismus von zulässig metrisierten Geradenbündeln ist dies mit Korollar 4.1.5 aber die Abbildung $\log ||\cdot||^2 : \mathbb{P}_W \to \mathbb{R}$. □

Kapitel III. K-Theorie und Extensionen von Chowgruppen

Im ersten Kapitel der vorliegenden Arbeit wurde die Blochsche Biextension als eine Erweiterung gewisser Chowgarben beschrieben. Diese Biextension berechnet die Höhenpaarung von homologisch trivialen Zykeln komplementärer Kodimension. Lokale und globale Höhenpaarungen von algebraischen Zykeln wurden unter Benutzung K-theoretischer Methoden unabhängig von S. Bloch und A. Beilinson ([Bl2], [Be2]) eingeführt und näher studiert. Es ist daher naheliegend, nach einer K-theoretischen Beschreibung der Blochschen Biextension zu suchen. Genauer wird für die Bestandteile dieser Biextension, d.h. Extensionen, die homologisch trivialen Zykeln zugeordnet sind, eine K-theoretische Interpretation gegeben.

Der erste Paragraph imitiert die Konstruktion der Blochschen Extension auf K-theoretischem Niveau. Genauer konstruieren wir zu einem Zykel W auf einem über einer Kurve glatten, projektiven Schema eine Sequenz von relativen K-Gruppen. Dazu benutzen wir eine Beschreibung der K-Theorie eines Schemas in der Modellkategorie der simplizialen Garben. Multiplizitäten lassen sich dann durch Homotopiefasern einer simplizialen n-Multiplikation beschreiben. Die relativen K-Gruppen ergeben sich durch eine Kegelkonstruktion. Mittels simplizialer Techniken konstruieren wir einen relativen Cherncharakter mit Werten in relativen Chowgruppen. Ist W ein glatter Zykel, so beweisen wir ein relatives Riemann-Roch-Theorem (Satz 1.3.1). Garbifizierung dieser Konstruktion liefert dann den gewünschten Vergleichssatz (Satz 1.3.3) für glatte Zykel.

Im zweiten Paragraphen untersuchen wir, inwiefern sich Blochs K-theoretische Definition von Höhenpaarungen zur Konstruktion einer Extension benutzen läßt. Dazu rekapitulieren wir zunächst diese Definition. Das Verhalten unter flachem Basiswechsel und Garbifizierung ergibt eine garbentheoretische Verallgemeinerung von Blochs Extensionen über diskreten Bewertungsringen (Lemma 2.5.2). Als Hauptresultat (Satz 2.5.5) erhalten wir für homologisch triviale Komplexe kohärenter Garben einen $\mathbb{G}_{m,\mathbb{Q}}$-Torseur über einer relativen K-Garbe, deren Halme lokale Höhenpaarungen berechnen.

§ 1. K-theoretische Interpretation der Blochschen Erweiterung von Chowgruppen.

Es sei X ein glattes, projektives Schema über einer Kurve S. Zu einem Zykel W auf X wurde in Kapitel I die Blochsche Erweiterung als Pushout einer zum Paar (X, W) assoziierten relativen Sequenz von Garben von Chowgruppen definiert. Um diese Konstruktion K-theoretisch nachvollziehen zu können, definieren wir zunächst relative höhere K-Gruppen und eine relative lange exakte Sequenz zum Paar (X, W). Mittels simplizialer Methoden erhält man einen relativen Cherncharakter $\mathrm{ch}_{\cdot,j} : K_j(X, W) \to \mathrm{CH}^*(X, W, j)_{\mathbb{Q}}$, der mit den jeweiligen relativen Sequenzen verträglich ist. Vermöge des Riemann-Roch-Theorems und nachträglicher Garbifizierung erhalten wir eine K-theoretische Interpretation der Blochschen Erweiterung.

1.1. Die simpliziale klassifizierende Garbe eines Gruppenschemas. Es sei G eine Gruppe, aufgefaßt als Morphismen einer Kategorie mit genau einem Objekt $*$. Der Nerv dieser Kategorie ist eine simpliziale Menge und heißt der simpliziale klassifizierende Raum $B_\bullet G$ von G. Ausgeschrieben bedeutet dies $B_n G = G^n$ mit Seitenabbildungen

$$\partial_i^n : B_n G \longrightarrow B_{n-1} G,$$
$$(g_0, \dots, g_{n-1}) \longmapsto \begin{cases} (g_1, \dots, g_{n-1}) & i = 0 \\ (g_0, \dots, g_{n-2}) & i = n \\ (g_0, \dots, g_{i-2}, g_{i-1}g_i, g_{i+1}, \dots, g_{n-1}) & i \neq 0, n \end{cases}$$

für $n \geq 1$ und Entartungsabbildungen

$$\sigma_i^n : B_n G \longrightarrow B_{n+1} G, \qquad (g_0, \dots, g_{n-1}) \longmapsto (g_0, \dots, g_{i-1}, 1, g_i, \dots, g_{n-1})$$

für $n \geq 0$. Andererseits definiert G eine Kategorie $\bar{G}$, deren Objekte die Elemente von G sind und die zu je zwei Objekten genau einen Morphismus besitzt. Der Nerv von $\bar{G}$ ist die zusammenziehbare simpliziale Menge $E_\bullet G$ und es gilt $E_n G = G^{n+1}$. Die Seiten- bzw. Entartungsabbildungen von $E_\bullet G$ haben die Beschreibung

$$\partial_i^n : E_n G \longrightarrow E_{n-1} G, \qquad (g_0, \dots, g_n) \longmapsto (g_0, \dots, g_{i-1}, g_{i+1}, \dots, g_n),$$

$0 \leq i \leq n, n \geq 1$, bzw.

$$\sigma_i^n : E_n G \longrightarrow E_{n+1} G, \qquad (g_0, \dots, g_n) \longmapsto (g_0, \dots, g_{i-1}, g_i, g_i, g_{i+1}, \dots, g_n),$$

$0 \leq i \leq n, n \geq 0$. Die Gruppe G operiert (simplizial) auf der simplizialen Menge $E_\bullet G$ von rechts via

$$E_n G \times G \longrightarrow E_n G, \qquad ((g_0, \dots, g_n), g) \longmapsto (g_0 g, \dots g_n g).$$

Weiter induziert der kanonische Funktor $\bar{G} \to G$ eine G-äquivariante Abbildung $E_\bullet G \to B_\bullet G$

$$E_n G \longrightarrow B_n G, \qquad (g_0, \dots, g_n) \longmapsto (g_0 g_1^{-1}, \dots, g_{n-1} g_n^{-1})$$

und einen G-Isomorphismus $E_\bullet G \times_{B_\bullet G} E_\bullet G \cong E_\bullet G \times G$.

Es sei nun S ein Schema und G ein S-Gruppenschema. Der kontravariante Funktor

$$B_n G : (\mathrm{Sch}/S) \longrightarrow (\mathrm{Ens}), \qquad X/S \longmapsto B_n(G(X)),$$

ist als Produkt darstellbarer Funktoren darstellbar, und der darstellende Raum wird mit demselben Symbol $B_n G$ bezeichnet. Die Entartungs- und Seitenabbildungen definieren natürliche Transformationen zwischen diesen Funktoren und somit ein simpliziales S-Schema $B_\bullet G$. Analog ist $E_\bullet G$ ein simpliziales S-Schema, $E_\bullet G \to B_\bullet G$ ein Morphismus simplizialer S-Schemata und $E_n G$ ist ein G-Torseur über $B_n G$. Es sei $\rho : G \to \mathbb{Gl}_{m,S}$ ein Morphismus von S-Gruppenschemata, d.h. eine Darstellung von G. Das assoziierte Faserbündel $E_n G \times_\rho \mathbb{A}^m_S$ ist der Totalraum eines Vektorbündels vom Rang m über $B_n G$, dessen X/S-wertigen Punkte $E_n G \times_\rho \mathbb{A}^n_S(X)$ durch

$$\begin{aligned}\{((g_0, \dots, g_n), v) \in E_n G(X) \times \mathbb{A}^m_S(X)\}/\{((g_0 g, \dots, g_n g), v)& \\ \sim((g_0, \dots, g_n), \rho(g)v) | g \in G(X)\}&\end{aligned}$$

gegeben sind. Es sei S das Spektrum eines Körpers k und G das affine k-Gruppenschema $\mathbb{Gl}_{m,k}$. Das zur Standarddarstellung von $\mathbb{Gl}_{m,k}$ auf $\mathbb{A}^m_k$ assoziierte m-dimensionale Vektorbündel auf $B_n \mathbb{Gl}_{m,k}$ sei mit F_n bezeichnet. Da die Seiten- und Entartungsabbildungen von $E_\bullet G$ Morphismen von G-Torseuren sind, erhält man Abbildungen

$$\partial^n_i : F_n \longrightarrow F_{n-1}, \qquad [(g_0, \dots, g_n), v] \longmapsto [\partial^n_i(g_0, \dots, g_n), v], \qquad n \geq 1, 0 \leq i \leq n,$$

bzw.

$$\sigma^n_i : F_n \longrightarrow F_{n+1}, \qquad [(g_0, \dots, g_n), v] \longmapsto [\sigma^n_i(g_0, \dots, g_n), v], \qquad n \geq 0, 0 \leq i \leq n,$$

die mit den entsprechenden Abbildungen auf der Basis $B_n G$ und den kanonischen Projektionen $F_n \to B_n G$ vertauschen und Isomorphismen $\partial^n_i : F_n \to B_n G \times_{\partial^n_i} F_{n-1}$ bzw. $\sigma^n_i : F_n \to B_n G \times_{\sigma^n_i} F_{n+1}$ induzieren. Insbesondere ist das System $E_m = ((F_n)_{n\geq 0}, (\partial^n_i)_{n\geq 1, 0\leq i\leq n}, (\sigma^n_i)_{n\geq 0, 0\leq i\leq n})$ ein Vektorbündel vom Rang m auf $B_\bullet \mathbb{Gl}_{m,k}$. Man nennt E_m auch das universelle Vektorbündel vom Rang m auf $B_\bullet \mathbb{Gl}_{m,k}$. Betrachtet man für jedes n die assoziierten projektiven Faserbündel $\mathbb{P}(F_n)$ über $B_n \mathbb{Gl}_{m,k}$, so erhält man ein simpliziales k-Schema $\mathbb{P}_\bullet(E_m)$, einen Morphismus $\pi_\bullet : \mathbb{P}_\bullet(E_m) \to B_\bullet \mathbb{Gl}_{m,k}$ simplizialer k-Schemata und den universellen invertierbaren Quotienten $\pi^*_\bullet(E_m) \to \mathscr{O}_{E_m}(1)$.

1.2. Chowgruppen simplizialer Schemata. Es sei $X_\bullet$ ein simpliziales Schema über einem Körper k. Wir nehmen an, daß die Komponenten X_n von endlichem Typ über k und die Seitenmorphismen flach sind. Für jedes $n \geq 0$ ist $z^i(X_n, \cdot)$ der in I.1.2 definierte Zykelkomplex (mit Differential d), dessen Homologie die höheren Chowgruppen von X_n berechnet. Nach der Flachheitsvoraussetzung für die Seitenabbildungen $\partial_k^n : X_n \to X_{n-1}$ ist die induzierte Pullback-Abbildung $(\partial_k^n)^* : z^i(X_{n-1}, q) \to z^i(X_n, q)$ ein Homomorphismus von Komplexen, und damit gilt für die alternierende Summe

$$\partial^n = (-1)^q \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (\partial_k^n)^* : z^i(X_{n-1}, q) \longrightarrow z^i(X_n, q)$$

offenbar $d\partial + \partial d = \partial\partial = 0$. Folglich ist

$$z^i(X_\bullet, *) = \bigoplus_{r-s=*} z^i(X_s, r)$$

ein Komplex mit Differential $d + \partial$, der zu $X_\bullet$ assoziierte Zykelkomplex.

Definition 1.2.1 (Bl3, §7). *Die höheren Chowgruppen von $X_\bullet$ sind definiert durch*

$$\mathrm{CH}^i(X_\bullet, j) = H_j(z^i(X_\bullet, \cdot)).$$

Die höheren Chowgruppen sind kontravariant funktoriell für flache Morphismen von simplizialen Schemata und kovariant funktoriell mit der zu erwartenden Indexverschiebung für eigentliche Morphismen. Ist jede Komponente X_n glatt über k, so besitzen die höheren Chowgruppen eine Ringstruktur. Nach Definition ist der Zykelkomplex $z^i(X_\bullet, \cdot)$ der Totalkomplex eines Doppelkomplexes und die zugehörige Spektralsequenz lautet

$$\begin{aligned} E_1^{pq} = H_{-q}(z^i(X_p, \cdot)) &= \mathrm{CH}^i(X_p, -q) \\ &\Longrightarrow E^{p+q} = H_{-p-q}(z^i(X_\bullet, \cdot)) = \mathrm{CH}^i(X_\bullet, -p-q). \end{aligned}$$

Es sei nun $X_\bullet = B_\bullet \mathbb{G}\mathbb{l}_{n,k}$ der klassifizierende Raum der allgemeinen linearen Gruppe $\mathbb{G}\mathbb{l}_{n,k}$ über einem Körper k und $\mathbb{P}_\bullet(E_n)$ der simpliziale projektive Raum für das universelle Bündel E_n vom Rang n auf $B_\bullet \mathbb{G}\mathbb{L}_{n,k}$. Vermöge obiger Spektralsequenz induziert der kanonische invertierbare Quotient $\mathcal{O}_{E_n}(1)$ von $\pi_\bullet^*(E_n)$ eine Klasse $\xi \in \mathrm{Pic}(\mathbb{P}_\bullet(E_n)) \cong \mathrm{CH}^1(\mathbb{P}_\bullet(E_n), 0)$ und es gilt:

Satz 1.2.2 ([Bl3], §7). *Der (bigraduierte) Ring $\mathrm{CH}^*(\mathbb{P}_\bullet(E_n), \cdot)$ ist ein freier $\mathrm{CH}^*(B_\bullet \mathbb{G}\mathbb{l}_{n,k}, \cdot)$-Modul vom Rang n, erzeugt von $\xi^i \in \mathrm{CH}^i(\mathbb{P}_\bullet(E_n), 0)$, $0 \leq i \leq n-1$. Insbesondere ist für $m \geq 0$ die kanonische Abbildung*

$$\bigoplus_{i=0}^{n-1} \mathrm{CH}^{*-i}(B_\bullet \mathbb{G}\mathbb{l}_{n,k}, m) \longrightarrow \mathrm{CH}^*(\mathbb{P}_\bullet(E_n), m), \qquad (x_0, \ldots, x_{n-1}) \longmapsto \sum_{i=0}^{n-1} \pi_\bullet^*(x_i)\xi^i$$

ein Isomorphismus von abelschen Gruppen.

Mit diesem Satz kommt man daher zur

Definition 1.2.3 ([Bl3] §7, [Gi] S. 217). *Die universellen Chernklassen*

$$C_i \in \mathrm{CH}^i(B_\bullet \mathbb{Gl}_{n,k}, 0) = H_i(z^i(B_\bullet \mathbb{Gl}_{n,k}, \cdot)[-i]), \qquad (1 \leq i \leq n),$$

sind definiert durch die Gleichung $\xi^n + \sum_{i=0}^{n-1} \pi_\bullet^*(C_{n-i})\xi^i = 0$. *Weiter setzen wir* $C_0 = 1$ *und* $C_l = 0$ *für* $l > n$.

Bemerkung 1.2.4. *i) Für die von dem kanonischen Morphismus* $B_\bullet \mathbb{Gl}_{n,k} \to B_\bullet \mathbb{Gl}_{n+1,k}$ *induzierte Abbildung* $\mathrm{CH}^*(B_\bullet \mathbb{Gl}_{n+1,k}, \bullet) \to \mathrm{CH}^*(B_\bullet \mathbb{Gl}_{n,k}, \bullet)$ *gilt offenbar* $C_{n+1} \mapsto 0$ *und* $C_l \mapsto C_l$ *für* $l \leq n$. *Wegen dieser Stabilitätsaussage wird der Index n in der Notation der universellen Chernklassen unterdrückt.*

ii) Nach Definition des Zykelkomplexes $z^i(B_\bullet \mathbb{Gl}_{n,k}, \bullet)$ *als Totalkomplex eines Doppelkomplexes, können die Chernklassen* C_i *durch Familien* $C_i^{l,l} \in z^i(B_l \mathbb{Gl}_{n,k}, l)$ *repräsentiert werden. Durch Übergang zu einer rein transzendenten Erweiterung L von k, kann man diese Repräsentanten* $C_i^{l,l} \in z^i(B_\bullet \mathbb{Gl}_{n,L}, l)$ *so wählen, daß für jeden k-Morphismus simplizialer Schemata* $f_\bullet : X_\bullet \to B_\bullet \mathbb{Gl}_{n,k}$ *der Pullback* $(f_L)_l^* C_i^{l,l} \in z^i((X_L)_l, l)$ *definiert ist (cf. [Bl3] S. 291).*

Es sei nun X ein algebraisches k-Schema. Offenbar induziert das simpliziale k-Schema $B_\bullet \mathbb{Gl}_{n,k}$ eine Zariski-Garbe $\underline{B_\bullet \mathbb{Gl}_{n,X}}$ von simplizialen Mengen auf X via

$$(U \subseteq X\text{offen}) \longmapsto \underline{B_\bullet \mathbb{Gl}_{n,X}}(U) = \mathrm{Hom}_{\text{simpl.-Sch}/k}(U, B_\bullet \mathbb{Gl}_{n,k}) = B_\bullet Gl_n(\Gamma(U, \mathscr{O}_X)),$$

und zykeltheoretischer Pullback ergibt eine natürliche Transformation von Zariskigarben simplizialer Mengen

$$C_i : \underline{B_\bullet \mathbb{Gl}_{n,X}} \longrightarrow \underline{z}^i_{X_L}(\cdot), \qquad C_i(U)_l(f_l : U \to B_l \mathbb{Gl}_{n,k}) \longmapsto (f_L)_l^* C_i^{l,l}.$$

Diese Abbildung steigt ab zu einem Morphismus von Zariskigarben

$$C_i : \underline{B_\bullet \mathbb{Gl}_{n,X}} \longrightarrow \underline{z}^i_X(\cdot)$$

und hängt bis auf eine kanonische Homotopie nur von den Klassen $C_i \in \mathrm{CH}^i(B_\bullet \mathbb{Gl}_{n,k}, 0)$ ab. Ist X glatt und $f : Y \to X$ eine abgeschlossene Immersion, so kann man vermöge des Moving-Lemmas die Zykel $C_i^{l,l}$ so wählen, daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
\underline{B_\bullet \mathbb{Gl}_{n,X}} & \longrightarrow & f_* \underline{B_\bullet \mathbb{Gl}_{n,Y}} \\
{\scriptstyle C_i}\big\downarrow & & {\scriptstyle C_i}\big\downarrow \\
\underline{z}^i_{X,Y}(\cdot) & \longrightarrow & f_* \underline{z}^i_Y(\cdot)
\end{array}$$

bis auf kanonische Homotopie kommutiert. Dabei ist $\underline{z}^i_{X,Y}(\cdot)$ der quasiisomorphe Unterkomplex derjenigen Zykel von $\underline{z}^i_X(\cdot)$, die Y eigentlich schneiden (cf. [Bl3], S. 292).

Es sei nun $B_\bullet Gl_n(\mathbb{Z})^+$ eine fest gewählte simpliziale Menge, deren geometrische Realisierung eine $+$-Konstruktion der geometrischen Realisierung von $B_\bullet Gl_n(\mathbb{Z})$ zu dem von den Elementarmatrizen erzeugten perfekten Normalteiler von $\pi_1(B_\bullet Gl_n(\mathbb{Z}),*) = Gl_n(\mathbb{Z})$ ist. Für einen kommutativen Ring A definiert die simpliziale Menge

$$B_\bullet Gl_n(A)^+ = B_\bullet Gl_n(A) \cup_{B_\bullet Gl_n(\mathbb{Z})} Gl_n(\mathbb{Z})^+$$

ein in A funktorielles simpliziales Modell für die $+$-Konstruktion der geometrischen Realisierung von $B_\bullet Gl_n(A)$. Zu einem Schema X sei $\underline{B_\bullet \mathbb{Gl}^+_{n,X}}$ die zur Prägarbe von simplizialen Mengen

$$(U \subseteq X) \longmapsto B_\bullet Gl_n(\Gamma(U, \mathscr{O}_X(U)))^+$$

assoziierte Garbe von simplizialen Mengen. Die Abbildungen C_i sind kompatibel (Bem. 1.2.4 i)) mit den kanonischen Abbildungen $\underline{B_\bullet \mathbb{Gl}_{n,X}} \to \underline{B_\bullet \mathbb{Gl}_{n+1,X}}$ und faktorisieren im direkten Limes $\underline{B_\bullet \mathbb{Gl}_X} = \varinjlim_n \underline{B_\bullet \mathbb{Gl}_{n,X}}$ über die $+$-Konstruktion $\underline{B_\bullet \mathbb{Gl}_X} \to \underline{B_\bullet \mathbb{Gl}^+_X} = \varinjlim_n \underline{B_\bullet \mathbb{Gl}^+_{n,X}}$. Man erhält ein bis auf Homotopie kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
\underline{B_\bullet \mathbb{Gl}^+_X} & \longrightarrow & f_* \underline{B_\bullet \mathbb{Gl}^+_Y} \\
{\scriptstyle C_i}\big\downarrow & & {\scriptstyle C_i}\big\downarrow \\
\underline{z}^i_{X,Y}(\cdot) & \longrightarrow & f_* \underline{z}^i_Y(\cdot)
\end{array}$$

von simplizialen Garben auf X.

Es sei n eine ganze Zahl. Für einen Ring A ist der Raum $B_\bullet \mathrm{Gl}(A)^+$ eine H-Gruppe, und damit ist die n-Multiplikation auf den Fundamentalgruppen induziert durch die n-Multiplikation für die H-Raumstruktur. Da diese Konstruktionen funktoriell sind, erhalten wir einen natürlichen Morphismus $\underline{n} : \underline{B_\bullet \mathbb{Gl}^+_X} \to \underline{B_\bullet \mathbb{Gl}^+_X}$ von simplizialen Zariskigarben. Die höhere K-Theorie von X berechnet sich als Hyperkohomologie $K_i(X) = \mathbb{H}^{-i}(X, \underline{B_\bullet \mathbb{Gl}^+_X})$ (cf. [So], S. 508 ff.) und $\underline{n}$ induziert die gewöhnliche n-Multiplikation auf $K_i(X)$.

Es sei nun $W = \sum_{r \in R} n_r W_r$ ein Zykel mit paarweise verschiedenen Primzykeln W_r auf X und $i_{W_r} : W_r \hookrightarrow X$ die Inklusion von W_r in X. Bezeichnet $\prod$ das Produkt von simplizialen Zariskigarben, so erhält man also eine kanonische Abbildung

$$i_W : \underline{B_\bullet \mathbb{Gl}^+_X} \longrightarrow \prod_{r \in R} i_{W_r *} \underline{B_\bullet \mathbb{Gl}^+_{W_r}}, \qquad x \longmapsto (\underline{n_r}(i_{W_r}(x)))_{r \in R},$$

deren Homotopiefaser mit $\mathbb{F}_{X,W}$ bezeichnet sei. In Verallgemeinerung zu [Bl3], S. 293, geben wir die

Definition 1.2.5. *Die relativen höheren K-Gruppen für ein algebraisches Schema X und einen Zykel W auf X sind definiert durch*

$$K_i(X, W) = \mathbb{H}^{-i}(X, \mathbb{F}_{X,W}).$$

Insbesondere erhält man für das Paar (X, W) eine lange exakte Sequenz der Form

$$\cdots \longrightarrow K_i(X, W) \longrightarrow K_i(X) \longrightarrow K_i(W) \longrightarrow K_{i-1}(X, W) \longrightarrow \cdots ,$$

wobei wir zur Abkürzung $K_i(W) = \bigoplus_{r \in R} K_i(W_r)$ gesetzt haben. Diese Sequenz ist offenbar verträglich mit der Sequenz zu (U, W_U) für eine offene Teilmenge $U \subseteq X$ und $W_U = U \cap W$.

Im Folgenden wird untersucht, wie sich diese Sequenz zu der analogen Sequenz für die höheren Chowgruppen (cf. I.1.2) verhält: Nach der vorhergehenden Betrachtung kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \underline{B_\bullet \mathbb{Gl}^+_X} & \longrightarrow & \prod_{r \in R} i_{W_r *} \underline{B_\bullet \mathbb{Gl}^+_{W_r}} \\ {\scriptstyle C_i}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \sum_{r \in R} C_i} \\ \underline{z}^i_{X,W}(\cdot) & \longrightarrow & \bigoplus_{r \in R} i_{W_r *} \underline{z}^i_{W_r}(\cdot) \end{array}$$

bis auf kanonische Homotopie, weil dies komponentenweise gilt. Weiter ist die Komposition

$$\mathbb{F}_{X,W} \longrightarrow \underline{B_\bullet \mathbb{Gl}^+_X} \longrightarrow \prod_{r \in R} i_{W_r *} \underline{B_\bullet \mathbb{Gl}^+_{W_r}} \longrightarrow \bigoplus_{r \in R} i_{W_r *} \underline{z}^i_{W_r}(\cdot)$$

kanonisch homotop zur Nullabbildung, denn dies ist nach [Bl3], S. 293, für jede Komponente der Fall. Wir erinnern an die universelle Eigenschaft des verschobenen Abbildungskegels:

Bemerkung 1.2.6. *Es sei $f : K^\bullet \to L^\bullet$ ein Morphismus von Komplexen abelscher Gruppen und $C^\bullet(f)$ der Abbildungskegel von f. Dann hat das Paar (ι, h), bestehend aus dem kanonischen Morphismus $\iota : C^\bullet(f)[-1] \to K^\bullet$ und der kanonischen Nullhomotopie $h : f \circ \iota \simeq 0$ die folgende universelle Eigenschaft: Zu jedem Morphismus $g : M^\bullet \to K^\bullet$ und jeder Nullhomotopie $\tilde{h} : f \circ g \simeq 0$ gibt es einen eindeutig bestimmten Morphismus $\tilde{g} : M^\bullet \to C^\bullet(f)[-1]$ mit $g = \iota \circ \tilde{g}$ und $\tilde{g}^*(h) = \tilde{h}$.*

Damit erhält man ein bis auf Homotopie kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{F}_{X,W} & \longrightarrow & \underline{B_\bullet \mathbb{Gl}^+_X} & \longrightarrow & \prod_{r \in R} i_{W_r *} \underline{B_\bullet \mathbb{Gl}^+_{W_r}} \\ {\scriptstyle C_i}\big\downarrow & & {\scriptstyle C_i}\big\downarrow & & {\scriptstyle C_i}\big\downarrow \\ C(\underline{z}^i_X(\cdot) \to i_{W*}\underline{z}^i_W(\cdot))[-1] & \longrightarrow & \underline{z}^i_X(\cdot) & \longrightarrow & i_{W*}\underline{z}^i_W(\cdot). \end{array}$$

Übergang zur langen exakten Hyperkohomologiesequenz liefert eine Verallgemeinerung von [Bl3], §7:

Satz 1.2.7. *Ist X ein algebraisches k-Schema, so induzieren die universellen Chernmorphismen C_i Chernklassenabbildungen $c_{i,j} : K_j(X) \to \mathrm{CH}^i(X, j)$, die funktoriell für flache Morphismen sind. Ist W ein Zykel auf X, so induziert der universelle Chernmorphismus C_i relative Chernklassenabbildungen $c_{i,j} : K_j(X, W) \to$*

$\mathrm{CH}^i(X,W,j)$, sodaß das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots \longrightarrow & K_j(X,W) & \longrightarrow & K_j(X) & \longrightarrow & K_j(W) & \longrightarrow \\
& \downarrow{\scriptstyle c_{i,j}} & & \downarrow{\scriptstyle c_{i,j}} & & \downarrow{\scriptstyle c_{i,j}} & \\
\cdots \longrightarrow & \mathrm{CH}^i(X,W,j) & \longrightarrow & \mathrm{CH}^i(X,j) & \longrightarrow & \mathrm{CH}^i(W,j) & \longrightarrow
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
\longrightarrow & K_{j-1}(X,W) & \longrightarrow \cdots \\
& \downarrow{\scriptstyle c_{i,j-1}} & \\
\longrightarrow & \mathrm{CH}^i(X,W,j-1) & \longrightarrow \cdots .
\end{array}$$

Ist U eine offene Teilmenge von X und ist W_U die Einschränkung von W auf U, so kommutiert obiges Diagramm mit dem entsprechenden Diagramm zum Paar (U,W_U). Der Chernklassenabbildung $c_{i,j} : K_j(W) \to \mathrm{CH}^i(W,j)$ zerfällt unter den Isomorphismen $K_j(W) = \bigoplus_{r\in R} K_j(W_r)$ und $\mathrm{CH}^i(W,j) = \bigoplus_{r\in R} \mathrm{CH}^i(W_r,j)$ in die direkte Summe der Abbildungen $c_{i,j} : K_j(W_r) \to \mathrm{CH}^i(W_r,j)$.

Es sei nun $N_i(X_1,\dots,X_i)$ das i-te Newtonpolynom. Man kann einen Repräsentanten $\mathrm{Ch}_i^{l,l} \in z^i(B_l\mathbb{Gl}_{n,L},l)_{\mathbb{Q}}$ mit $[\mathrm{Ch}_i^{l,l}] = \frac{1}{i!}N_i([C_1^{l,l}],\dots,[C_i^{l,l}]) \in \mathrm{CH}^i(\mathbb{Gl}_{n,L},0)_{\mathbb{Q}}$ in einer rein-transzendenten Erweiterung L von k wählen, sodaß für jeden k-Morphismus $f : X \to B_\bullet\mathbb{Gl}_{n,k}$ das Pullback $f_L^*\mathrm{Ch}_i^{l,l}$ definiert ist. Diese Zykel definieren bis auf Homotopie eindeutige Morphismen von simplizialen Garben

$$\mathrm{Ch}_i : \underline{B_\bullet\mathbb{Gl}_X^+} \longrightarrow \underline{z}_X^i(\cdot)_{\mathbb{Q}}$$

und durch Übergang zur Hyperkohomologie den Cherncharakter

$$\mathrm{ch}_{i,j} : K_j(X) \longrightarrow \mathrm{CH}^i(X,j)_{\mathbb{Q}}, \qquad \mathrm{ch}_{\cdot,j} = \sum_{i\geq 0} \mathrm{ch}_{i,j} : K_j(X) \longrightarrow \bigoplus_{i\geq 0} \mathrm{CH}^i(X,j)_{\mathbb{Q}}.$$

Analog zu obiger Aussage erhält man:

Korollar 1.2.8. *Es sei X glatt über k und W ein Zykel auf X. Dann induziert der Cherncharakter einen Morphismus von langen exakten Sequenzen*

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots \longrightarrow & K_j(X,W) & \longrightarrow & K_j(X) & \longrightarrow & K_j(W) \\
& \downarrow{\scriptstyle \mathrm{ch}_{\cdot,j}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{ch}_{\cdot,j}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{ch}_{\cdot,j}} \\
\cdots \longrightarrow & \bigoplus_{i\geq 0}\mathrm{CH}^i(X,W,j)_{\mathbb{Q}} & \longrightarrow & \bigoplus_{i\geq 0}\mathrm{CH}^i(X,j)_{\mathbb{Q}} & \longrightarrow & \bigoplus_{i\geq 0}\mathrm{CH}^i(W,j)_{\mathbb{Q}}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
\longrightarrow & K_{j-1}(X,W) & \longrightarrow \cdots \\
& \downarrow{\scriptstyle \mathrm{ch}_{\cdot,j-1}} & \\
\longrightarrow & \bigoplus_{i\geq 0}\mathrm{CH}^i(X,W,j-1)_{\mathbb{Q}} & \longrightarrow \cdots .
\end{array}$$

Ist U eine offene Teilmenge von X, so ist diese Sequenz kompatibel mit der entsprechenden Sequenz für das Paar (U,W_U).

1.3. Eine K-theoretische Beschreibung der Blochschen Extension. Es sei S eine glatte Kurve über einem Körper, $f : X \to S$ ein glatter, projektiver Morphismus von relativer Dimension $d = n + m - 1$ und $W = \sum_{r\in R} n_r W_r$ ein Zykel der Kodimension m auf X. Es sei W im folgenden ein regulärer Zykel, d.h. die Primkomponenten von W sind reguläre Schemata. Ein wichtiges Resultat für die zuvor definierten relativen K-Gruppen $K(X, W)$ ist:

Satz 1.3.1 (Riemann-Roch für relative K-Theorie). *Der relative Cherncharakter für Zykel induziert einen Isomorphismus*

$$\mathrm{gr}^i_\gamma \, \mathrm{ch}_{\cdot,j} : \mathrm{gr}^i_\gamma K_j(X, W)_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{CH}^i(X, W, j)_{\mathbb{Q}}.$$

Dieser ist kompatibel mit dem zu einer offenen Teilmenge U von X gehörenden Isomorphismus.

Beweis. Die Gruppen $K_j(X)$, $K_j(W)$ und $K_j(X, W)$ tragen λ-Operationen und die Sequenz

$$\cdots \longrightarrow K_j(X, W) \longrightarrow K_j(X) \longrightarrow K_j(W) \longrightarrow \cdots$$

ist verträglich mit diesen Operationen (cf. [Bl3], §8). Daher ist die Sequenz auch kompatibel mit den induzierten γ-Filtrationen und nach Tensorieren mit $\mathbb{Q}$ ist der Funktor gr^i_γ exakt. Der Cherncharakter ist verträglich mit γ-Filtration auf den K-Gruppen und der Gradfiltrierung auf den Chowgruppen. Man erhält ein kommutatives Diagramm von langen exakten Sequenzen, dessen mittlerer, vertikaler Morphismus nach Riemann-Roch ([Bl3], Thm. 9.1) ein Isomorphismus ist:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \mathrm{gr}^i_\gamma K_j(X, W)_{\mathbb{Q}} \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{gr}^i_\gamma \mathrm{ch}_{\cdot,j}"'] & \mathrm{gr}^i_\gamma K_j(X)_{\mathbb{Q}} \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{gr}^i_\gamma \mathrm{ch}_{\cdot,j}"', "\cong"] & \mathrm{gr}^i_\gamma K_j(W)_{\mathbb{Q}} \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{gr}^i_\gamma \mathrm{ch}_{\cdot,j}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \mathrm{CH}^i(X, W, j)_{\mathbb{Q}} \arrow[r] & \mathrm{CH}^i(X, j)_{\mathbb{Q}} \arrow[r] & \mathrm{CH}^i(W, j)_{\mathbb{Q}} \arrow[r] & \cdots .
\end{tikzcd}$$

Unter den Isomorphismen

$$K_j(W) = \bigoplus_{r\in R} K_j(W_r) \qquad \text{und} \qquad \mathrm{CH}^i(W, j) = \bigoplus_{r\in R} \mathrm{CH}^i(W_r, j)$$

zerfällt $\mathrm{gr}^i_\gamma : \mathrm{gr}^i K_j(W)_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{CH}^i(W, j)_{\mathbb{Q}}$ in eine direkte Summe der Morphismen $\mathrm{gr}^i_\gamma : K_j(W_r) \to \mathrm{CH}^i(W_r, j)_{\mathbb{Q}}$ für die das Riemann-Roch-Theorem nach der Regularität der W_r gilt. Das Fünfer-Lemma ergibt nun die Behauptung. □

Um ein geeignetes Pushout-Diagramm konstruieren zu können, brauchen wir

Proposition 1.3.2. *Bezeichnet PM die natürliche Abbildung von der K- in die K'-Theorie (Poincaré-Morphismus), so kommutiert (bei nicht notwendig regulärem W) das Diagramm*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{gr}^n_\gamma K_1(W)_{\mathbb{Q}} \arrow[r, "\mathrm{PM}"] \arrow[d, "\mathrm{gr}^n_\gamma \mathrm{ch}_{\cdot,1}"'] & \mathrm{gr}^n_\gamma K'_1(W)_{\mathbb{Q}} \arrow[r, "\pi_*"] \arrow[d, "\mathrm{gr}^n_\gamma \tau_W"'] & \mathrm{gr}^1_\gamma K'_1(S)_{\mathbb{Q}} \arrow[d, "\mathrm{gr}^1_\gamma \mathrm{ch}_{\cdot,1}"'] \\
\mathrm{CH}^n(W, 1)_{\mathbb{Q}} \arrow[r, "\mathrm{id}"] & \mathrm{CH}^n(W, 1)_{\mathbb{Q}} \arrow[r, "\pi_*"] & \mathrm{CH}^1(S, 1)_{\mathbb{Q}}
\end{tikzcd}$$

Beweis. Es sei $\tau_W : K_j(W) \to \bigoplus_{i\geq 0} \mathrm{CH}^i(W,j)_{\mathbb{Q}}$ die (komponentenweise definierte) Riemann-Roch-Abbildung. Nach Definition kommutiert

$$\begin{array}{ccc} K_j(W) & \xrightarrow{\mathrm{PM}} & K'_j(W) \\ {\scriptstyle \mathrm{ch}_{\cdot,j}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \tau_W} \\ \bigoplus_{i\geq 0} \mathrm{CH}^i(W,j)_{\mathbb{Q}} & \xrightarrow{\cdot \mathrm{Td}_X} & \bigoplus_{i\geq 0} \mathrm{CH}^i(W,j)_{\mathbb{Q}}, \end{array}$$

wobei die untere Zeile die Multiplikation mit der Todd-Klasse $\mathrm{Td}_X \in \bigoplus_{i\geq 0} \mathrm{CH}^i(X,0)_{\mathbb{Q}}$ von X ist. Da alle Morphismen mit den jeweiligen Filtrationen verträglich sind und die Todd-Klasse die 1 als Anteil in $\mathrm{CH}^0(X,0)_{\mathbb{Q}}$ besitzt, kommutiert auch

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{gr}^n_\gamma K_j(W)_{\mathbb{Q}} & \longrightarrow & \mathrm{gr}^n_\gamma K'_j(W)_{\mathbb{Q}} \\ {\scriptstyle \mathrm{gr}^n_\gamma \mathrm{ch}_{\cdot,j}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \cong}\ {\scriptstyle \mathrm{gr}^n_\gamma \tau_W} \\ \mathrm{CH}^n(W,j)_{\mathbb{Q}} & \xrightarrow{\mathrm{id}} & \mathrm{CH}^n(W,j)_{\mathbb{Q}}. \end{array}$$

Der Zykel W ist von relativer Kodimension $-(n-1)$ über das Basis S. Nach dem Satz von Riemann-Roch kommutiert daher

$$\begin{array}{ccc} K'_j(W) & \longrightarrow & K'_j(S) \\ {\scriptstyle \tau_W}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \tau_S} \\ \bigoplus_{i\geq 0} \mathrm{CH}^i(W,j)_{\mathbb{Q}} & \longrightarrow & \bigoplus_{i\geq 0} \mathrm{CH}^{i-(n-1)}(S,j)_{\mathbb{Q}}, \end{array}$$

und der Übergang zum graduierten Objekt liefert:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{gr}^n_\gamma K'_j(W)_{\mathbb{Q}} & \longrightarrow & \mathrm{gr}^1_\gamma K'_j(S)_{\mathbb{Q}} \\ {\scriptstyle \mathrm{gr}^n_\gamma \tau_W}\downarrow{\scriptstyle \cong} & & \downarrow{\scriptstyle \cong}\ {\scriptstyle \mathrm{gr}^n_\gamma \tau_S} \\ \mathrm{CH}^n(W,j)_{\mathbb{Q}} & \longrightarrow & \mathrm{CH}^1(S,j)_{\mathbb{Q}}. \end{array}$$

Die Aussage ergibt sich für $j = 1$ aus der Komposition der beiden Diagrammteile. □

Wir betrachten nun die Gruppe $E^K_W(S)$, die durch Pushout-Sequenz von

$$\mathrm{gr}^n_\gamma K_1(X)_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{gr}^n_\gamma K_1(W)_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{gr}^n_\gamma K_0(X,W)_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{gr}^n_\gamma K_0(X)_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{gr}^n_\gamma K_0(W)_{\mathbb{Q}}$$

bezüglich $\mathrm{gr}^n_\gamma K_1(W)_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{gr}^1_\gamma K_1(S)_{\mathbb{Q}}$ definiert ist. Insbesondere hat man eine exakte Sequenz

$$\mathrm{gr}^n_\gamma K_1(S)_{\mathbb{Q}} \longrightarrow E^K_W(S) \longrightarrow \mathrm{gr}^n_\gamma K_0(X)_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{gr}^n_\gamma K_0(W)_{\mathbb{Q}}.$$

Die Pushoutsequenz der analogen Chowsequenz

$$\mathrm{CH}^n(W,1)_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{CH}^n(X,W,0)_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{CH}^n(X)_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{CH}^n(W)_{\mathbb{Q}}$$

bezüglich $\mathrm{CH}^n(W)_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{CH}^1(S,1)_{\mathbb{Q}} = \Gamma(S,\mathscr{O}_S)^{\times}_{\mathbb{Q}}$ ist die Blochsche „Extension“

$$\Gamma(S,\mathscr{O}_S)^{\times}_{\mathbb{Q}} \longrightarrow E^{\mathrm{CH}}_W(S)_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{CH}^n(X)_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{CH}^n(W)_{\mathbb{Q}},$$

und nach der vorhergehend bewiesenen Proposition 1.3.2 erhält man daher ein kommutatives Diagramm der Pushoutsequenzen:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{gr}^1_\gamma K_1(S)_{\mathbb{Q}} \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{gr}^1_\gamma\det"', "\cong"] & E^K_W(S) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{gr}^n_\gamma K_0(X)_{\mathbb{Q}} \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{gr}^n_\gamma K_0(W)_{\mathbb{Q}} \arrow[d, "\cong"'] \\
\Gamma(S,\mathscr{O}_S)^{\times}_{\mathbb{Q}} \arrow[r] & E^{\mathrm{CH}}_W(S)_{\mathbb{Q}} \arrow[r] & \mathrm{CH}^n(X)_{\mathbb{Q}} \arrow[r] & \mathrm{CH}^n(W)_{\mathbb{Q}}.
\end{tikzcd}$$

Dieses Diagramm ist offenbar verträglich mit dem entsprechenden Diagramm für eine offene Teilmenge U von S. Es sei $\mathscr{K}_{1,S}$ (bzw. $\mathscr{K}_0(X/S)$, $\underline{E}^K_W$) die zu $(U \subseteq S) \mapsto K_1(U)$ (bzw. $K_n(X_U)$, $E^K_W(U)$) assoziierte Zariski-Garbe auf S. Damit erhalten wir die K-theoretische Interpretation der Blochschen Extension:

Satz 1.3.3. *Es sei S eine Kurve über einem Körper und $\pi : X \to S$ ein glattes, projektives Schema über S der relativen Dimension d. Ist W ein regulärer, $m = (d+1-n)$-kodimensionaler Zykel auf X, dessen Fasern homologisch trivial bezüglich π sind, so hat man ein Diagramm von Zariski-Garben auf S:*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathscr{K}_{1,S,\mathbb{Q}} \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & \underline{E}^K_W \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & \mathrm{gr}^n_\gamma \mathscr{K}_0(X/S)_{\mathbb{Q}} \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{G}_{m,S,\mathbb{Q}} \arrow[r] & \underline{E}^{\mathrm{CH}}_{W,\mathbb{Q}} \arrow[r] & \underline{\mathrm{CH}}^n(X/S)_{\mathbb{Q}} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Beweis. Die Exaktheit der der unteren Zeile ergibt sich aus Kapitel I. Da Garbifizierung exakt ist, erhalten sich die vertikalen Isomorphismen. Dabei ist es möglich, die Garbe $\mathrm{gr}^1_\gamma\mathscr{K}_{1,S,\mathbb{Q}}$ durch $\mathscr{K}_{1,S,\mathbb{Q}}$ zu ersetzen, denn es gilt $SK_1(U)_{\mathbb{Q}} = F^2_\gamma K_1(U)_{\mathbb{Q}}$ (für $U \subseteq S$ offen) und diese Gruppe ist im direkten Limes trivial. □

§ 2. Höhenpaarungen und K-Garben

2.1. Der H-Raum $R\mathscr{C}$ einer kleinen Kategorie $\mathscr{C}$. Es sei $\mathscr{C}$ eine exakte Kategorie, d.h. eine additive Kategorie, versehen mit einer Klasse von zulässigen Mono- und Epimorphismen, die den Quillenschen Axiomen [Q], S. 91, genügen. Wir betrachten im folgenden nur solche exakte Kategorien, die klein bezüglich eines fixierten, aber nicht näher spezifizierten Universums sind. Es sei $0 \in \mathscr{C}$ ein festes Nullobjekt. Damit erhält man nach Wahl einer direkten Summe für je zwei Objekte einen exakten Bifunktor $\bigoplus : \mathscr{C} \times \mathscr{C} \to \mathscr{C}$, für den man ohne Einschränkung $X \oplus 0 = 0 \oplus X = X$ für alle $X \in \mathscr{C}$ annehmen kann. Damit induziert $\oplus$ eine stetige Verknüpfung

$$+ : BQ\mathscr{C} \times BQ\mathscr{C} \approx BQ(\mathscr{C} \times \mathscr{C}) \xrightarrow{BQ(\bigoplus)} BQ\mathscr{C}$$

auf dem klassifizierenden Raum $BQ\mathscr{C}$ der zu $\mathscr{C}$ assoziierten Quillenkategorie $Q\mathscr{C}$, wobei das Produkt $BQ\mathscr{C} \times BQ\mathscr{C}$ mit der kompakt-erzeugten Topologie versehen und bezüglich der kanonischen Homöomorphie mit $BQ(\mathscr{C} \times \mathscr{C})$ identifiziert ist. Für diese Verknüpfung ist $0 \in BQ\mathscr{C}$ ein strikt neutrales Element und $+$ respektiert die Punktierungen bezüglich $(0,0) \in BQ\mathscr{C} \times BQ\mathscr{C}$ und $0 \in BQ\mathscr{C}$. Offensichtlich ist $+$ assoziativ und kommutativ bis auf eine kanonische, basispunkterhaltende Homotopie und induziert somit eine H-Raum-Struktur auf $(BQ\mathscr{C}, 0)$, die sogar eine H-Gruppe ist. Damit kommen wir zu

Definition 2.1.1 ([Bl2], S. 122). *Die Homotopiefaser*

$$(BQ\mathscr{C} \times BQ\mathscr{C}) \times_{BQ\mathscr{C}} BQ\mathscr{C}^{[0,1]} = \{(x, y, \gamma : I \to BQ\mathscr{C}) | \gamma(0) = 0, \gamma(1) = x + y\}$$

von $+$ über dem Punkt 0 sei mit $R\mathscr{C}$ bezeichnet. $R\mathscr{C}$ ist punktiert durch $(0, 0, 0 : [0,1] \to BQ\mathscr{C})$.

Die natürliche Isomorphie $(X \oplus Y) \oplus (Z \oplus W) \cong (X \oplus Z) \oplus (Y \oplus W)$ ermöglicht eine Addition $\gamma + \eta$ von Wegen $\gamma : [0,1] \to BQ\mathscr{C}$, $\eta : [0,1] \to BQ\mathscr{C}$, $\gamma(0) = \eta(0) = 0$, $\gamma(1) = x + y$, $\eta(1) = z + w$ mit $(\gamma + \eta)(1) = (x + z) + (y + w)$ und induziert daher eine Verknüpfung $+$ auf $R\mathscr{C}$, von der man leicht nachprüft, daß sie eine H-Raum-Struktur auf $R\mathscr{C}$ induziert. Die Komposition

$$R\mathscr{C} \longrightarrow BQ\mathscr{C} \times BQ\mathscr{C} \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} BQ\mathscr{C}$$

ist eine stetige und basispunkterhaltende Abbildung von H-Räumen, die nach [Bl2], Lemma 1.1, eine Homotopieäquivalenz ist. Der wesentliche Vorzug des Raumes $R\mathscr{C}$ im Gegensatz zu $BQ\mathscr{C}$ besteht darin, daß man eine Homotopieinverse $i : R\mathscr{C} \to R\mathscr{C}$ für die H-Raum-Struktur auf $R\mathscr{C}$ angeben kann: Die natürliche Isomorphie $X \oplus Y \cong Y \oplus X$ induziert eine basispunkterhaltende Homotopie

$$F : BQ\mathscr{C} \times BQ\mathscr{C} \times [0,1] \longrightarrow BQ\mathscr{C}$$

mit $F_0(x, y) = x + y$ und $F_1(x, y) = y + x$. Für feste $x, y \in BQ\mathscr{C}$ ist also $F_{x,y} : [0,1] \to BQ\mathscr{C}$, $t \mapsto F(x, y, t)$, ein stetiger Weg, der $x + y$ mit $y + x$ verbindet. Ist nun $\gamma : [0,1] \to BQ\mathscr{C}$ ein Weg mit $\gamma(0) = 0$, $\gamma(1) = x + y$, so ist die Komposition $F_{x,y} \cdot \gamma : [0,1] \to BQ\mathscr{C}$ ein Weg mit $(F_{x,y} \cdot \gamma)(0) = 0$ und $(F_{x,y} \cdot \gamma)(1) = y + x$. Nach Definition der Topologie auf dem Wegeraum $BQ\mathscr{C}^{[0,1]}$ erhält man eine stetige Homotopieinvolution

$$i : R\mathscr{C} \longrightarrow R\mathscr{C}, \qquad (x, y, \gamma) \longmapsto (y, x, F_{x,y} \cdot \gamma),$$

die nach [Bl2] eine Homotopieinverse zu $+$ darstellt, d.h. die Abbildung $R\mathscr{C} \to R\mathscr{C}$, $x \mapsto x + i(x)$ ist homotop zur konstanten Abbildung $x \mapsto (0, 0, 0 : [0,1] \to BQ\mathscr{C})$ relativ zur Punktierung von $R\mathscr{C}$.

2.2. K-theoretische Vorbereitungen. Es sei $w : X \to S$ ein projektiver Morphismus von noetherschen Schemata und T eine endliche Menge von kohärenten $\mathscr{O}_X$-Moduln. Wir betrachten die volle Unterkategorie $\mathscr{P}_T X$ der Kategorie $\mathscr{P}X$ der projektiven $\mathscr{O}_X$-Moduln von endlichem Typ, definiert durch

$$\mathscr{P}_T X = \{\mathscr{V} \in \mathscr{P}X | R^i w_*(\mathscr{V} \otimes_{\mathscr{O}_X} t) = 0 \text{ für alle } i > 0 \text{ und } t \in T\}.$$

Ist

$$0 \longrightarrow \mathscr{V}' \longrightarrow \mathscr{V} \longrightarrow \mathscr{V}'' \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz in $\mathscr{P}X$ mit $\mathscr{V}', \mathscr{V}'' \in \mathscr{P}_T X$, so ist, da $\mathscr{V}''$ lokalfrei ist, auch

$$0 \longrightarrow \mathscr{V}' \otimes_{\mathscr{O}_X} t \longrightarrow \mathscr{V} \otimes_{\mathscr{O}_X} t \longrightarrow \mathscr{V}'' \otimes_{\mathscr{O}_X} t \longrightarrow 0$$

exakt für jedes $t \in T$, und die lange exakte Sequenz für die höheren direkten Bilder ergibt $R^i w_*(\mathscr{V} \otimes_{\mathscr{O}_X} t) = 0$ für alle $i > 0$, $t \in T$. Folglich ist $\mathscr{P}_T X$ abgeschlossen unter Extensionen in $\mathscr{P}X$. Insbesondere ist $\mathscr{P}_T X$ eine exakte Kategorie. Es gilt sogar

Proposition 2.2.1. *Die Inklusion der exakten Unterkategorie $\mathscr{P}_T X \subseteq \mathscr{P}X$ induziert eine Homotopieäquivalenz der assoziierten Quillenkategorien $Q\mathscr{P}_T X \to Q\mathscr{P}X$.*

Da diese Aussage in [Bl2] nicht bewiesen wird, wollen wir einen kurzen Beweis angeben. Wir benutzen im Folgenden die duale Version von [Q], Theorem 3:

Satz 2.2.2. *Es sei $\mathscr{P}'$ eine volle Unterkategorie einer exakten Kategorie $\mathscr{P}$, die abgeschlossen unter Extensionen ist und folgenden zwei Bedingungen genügt:*

i) Ist $\mathscr{V} \to \mathscr{V}''$ ein zulässiger Epimorphismus in $\mathscr{P}$ und $\mathscr{V} \in \mathscr{P}'$, so ist auch $\mathscr{V}'' \in \mathscr{P}'$.

ii) Zu jedem $\mathscr{V}' \in \mathscr{P}$ existiert ein zulässiger Monomorphismus $\mathscr{V}' \to \mathscr{V}$ in $\mathscr{P}$ mit $\mathscr{V} \in \mathscr{P}'$.

Dann ist die durch die Inklusion induzierte kanonische Abbildung $Q\mathscr{P}' \to Q\mathscr{P}$ eine Homotopieäquivalenz.

Der Beweis dieses Theorems ergibt sich, wenn man [Q], Theorem 3, auf die oppositionelle Kategorie $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ anwendet. Damit kommen wir zum
Beweis (von Proposition 2.2.1). Für $n \geq 0$ sei die Kategorie $\mathscr{P}_T^n X$ als volle Unterkategorie von $\mathscr{P}X$ definiert durch

$$\mathscr{P}_T^n X = \{\mathscr{V} \in \mathscr{P}X | R^i w_*(\mathscr{V} \otimes_{\mathscr{O}_X} t) = 0 \text{ für alle } i > n \text{ und } t \in T\}.$$

Es gilt offenbar

$$\mathscr{P}_T X = \mathscr{P}_T^0 X \subseteq \mathscr{P}_T^1 X \subseteq \cdots \subseteq \mathscr{P}_T^d X = \mathscr{P}X,$$

wobei $d < \infty$ das Supremum der Faserdimensionen von w ist. Aus der langen exakten Sequenz für die höheren direkten Bilder ergibt sich, daß $\mathscr{P}_T^n X$ abgeschlossen unter Extensionen aus $\mathscr{P}X$ und folglich eine exakte Kategorie ist. Der Satz ist bewiesen, falls $\mathscr{P}_T^n X \subseteq \mathscr{P}_T^{n+1} X$, $n \geq 0$, eine Homotopieäquivalenz $Q\mathscr{P}_T^n X \to Q\mathscr{P}_T^{n+1} X$ induziert. Um dies nachzuweisen, verifizieren wir die Bedingungen von Satz 2.2.2 mit $\mathscr{P}' = \mathscr{P}_T^n X$ und $\mathscr{P} = \mathscr{P}_T^{n+1} X$.

Es sei $\mathscr{V} \to \mathscr{V}''$ ein zulässiger Epimorphismus in $\mathscr{P}_T^{n+1} X$, also ein surjektiver Morphismus von lokalfreien Moduln von endlichem Typ mit $\mathscr{V} \in \mathscr{P}_T^n X$ und $\mathscr{V}' = \ker(\mathscr{V} \to \mathscr{V}'') \in \mathscr{P}_T^{n+1} X$. Ist $t \in T$, so ergibt der Ausschnitt

$$R^i w_*(\mathscr{V} \otimes_{\mathscr{O}_X} t) \longrightarrow R^i w_*(\mathscr{V}'' \otimes_{\mathscr{O}_X} t) \longrightarrow R^{i+1} w_*(\mathscr{V}' \otimes_{\mathscr{O}_X} t)$$

der langen exakten Sequenz für die höheren direkten Bilder, daß $R^i w_*(\mathscr{V}'' \otimes_{\mathscr{O}_X} t) = 0$ ist für $i > n$, denn in diesem Fall verschwinden die rechte wie auch die linke Seite dieser Sequenz.

Um die zweite Bedingung nachzuprüfen, sei $\mathscr{O}_X(1)$ relativ sehr ampel bezüglich w. Da $\mathscr{O}_X(1)$ auch relativ ampel bezüglich w ist, gibt es zu jedem $t \in T$ ein $k(t)$ mit $R^i w_*(t \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_X(k)) = 0$ für $i > 0$ und $k \geq k(t)$. Da T endlich ist, kann man ein gemeinsames k_0 mit $k(t) = k_0$ finden. Nach eventueller Vergrößerung von k_0 existiert zu einem lokalfreien $\mathscr{O}_X$-Modul von endlichem Typ $\mathscr{V}' \in \mathscr{P}_T^{n+1} X$ ein Epimorphismus

$$\mathscr{O}_X^{\oplus r} \longrightarrow \mathscr{V}'^{\vee}(k_0)$$

und somit ein zulässiger Monomorphismus

$$\mathscr{V}' = \mathscr{V}'^{\vee\vee} \longrightarrow \mathscr{O}_X(k_0)^{\oplus r}.$$

Nach Voraussetzung gilt aber $R^i w_*(t \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_X(k_0)^{\oplus r}) = R^i w_*(t \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_X(k_0))^{\oplus r} = 0$ für alle $i > 0$, $t \in T$, und somit gilt $\mathscr{O}_X(k_0)^{\oplus r} \in \mathscr{P}_T^0 X \subseteq \mathscr{P}_T^n X$. $\square$

2.3. Die K-theoretische Extension. Teil I. Es sei $w : X \to S$ ein projektiver, glatter Morphismus von noetherschen Schemata, $\mathscr{P}X$ (resp. $\mathscr{M}S$) die exakte Kategorie der lokalfreien $\mathscr{O}_X$- (resp. kohärenten $\mathscr{O}_S$-) Moduln. Es sei weiter $\mathscr{F}^\bullet$ ein beschränkter, kohomologischer Komplex von kohärenten Garben auf X, $\mathscr{F}^+ = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathscr{F}^{2i}$, $\mathscr{F}^- = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathscr{F}^{2i+1}$ und $T = \{\mathscr{F}^i | i \in \mathbb{Z}\}$. Die kanonische Inklusion $\mathscr{P}_T X \subseteq \mathscr{P}X$ induziert nach Proposition 2.2.1 eine Homotopieäquivalenz $Q\mathscr{P}_T X \to Q\mathscr{P}X$, und nach Wahl von T hat man exakte Funktoren

$$F^{\pm} : \mathscr{P}_T(X) \longrightarrow \mathscr{M}(S), \qquad \mathscr{V} \longmapsto w_*(\mathscr{V} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{F}^{\pm}).$$

Diese sind additiv und induzieren damit per Funktorialität stetige Abbildungen $RF^{\pm} : R\mathscr{P}_T X \longrightarrow R\mathscr{M}S$ derart, daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} R\mathscr{P}_T X & \xrightarrow{RF^{\pm}} & R\mathscr{M}S \\ {\scriptstyle\simeq}\downarrow & & {\scriptstyle\simeq}\downarrow \\ BQ\mathscr{P}_T X & \xrightarrow{BQF^{\pm}} & BQ\mathscr{M}S \end{array}$$

mit homotopieäquivalenten vertikalen Morphismen kommutiert. Insbesondere erhält man ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \pi_{i+1}(R\mathscr{P}_T X, *) & \xrightarrow{\pi_{i+1}(RF^{\pm})} & \pi_{i+1}(R\mathscr{M}S, *) \\ \cong\downarrow & & \cong\downarrow \\ K_i(\mathscr{P}_T X) & \xrightarrow{K_i(F^{\pm})} & K_i(\mathscr{M}S) \end{array}$$

für die zugehörigen K-Gruppen und daher mit der kanonischen Isomorphie $K_i(\mathscr{P}_T X) \cong K_i(\mathscr{P}X) = K_i(X)$ eine Beschreibung der Gruppenhomomorphismen

$$K_i(F^{\pm}) : K_i(X) \xrightarrow{\cdot[\mathscr{F}^{\pm}]} K_i'(X) \xrightarrow{w_*} K_i'(S)$$

auf topologischem Niveau. Die Differenz $K_i(F^+) - K_i(F^-)$ dieser K-theoretischen Abbildungen kann nun wie folgt beschrieben werden: Da für H-Räume X die induzierte Verknüpfung auf den Fundamentalgruppen mit der gewöhnlichen Gruppenstruktur übereinstimmt und die kanonische Abbildung $R\mathscr{M}S \to BQ\mathscr{M}S$ ein Morphismus von H-Räumen ist, so induziert die stetige Abbildung $RF^+ + i(RF^-)$, wobei i die kanonische Homotopieinverse für die H-Gruppenstruktur auf $R\mathscr{M}S$ ist, die betrachtete Differenz. Weiter hat man sogar die Möglichkeit, eine lange exakte Sequenz zu konstruieren:

Definition 2.3.1 (Bloch, [Bl2]). *In der gegeben Situation bezeichne Fib($\mathscr{F}^\bullet, w$) die Homotopiefaser der stetigen Abbildung*

$$RF^+ + i(RF^-) : R\mathscr{P}_T X \longrightarrow R\mathscr{M}S.$$

Für $i \geq 0$ sei

$$E_i^K(\mathscr{F}^\bullet, w) = \pi_{i+1}(Fib(\mathscr{F}^\bullet, w), *),$$

wobei $(Fib(F^\bullet), w)$ mit seiner kanonischen Punktierung versehen sei.

Die lange exakte Sequenz der höheren Homotopiegruppen für die Faserung

$$((\mathrm{Fib}(\mathscr{F}^\bullet), w), *) \longrightarrow (R\mathscr{P}_T X, *) \longrightarrow (R\mathscr{M}S, *)$$

ist dann

$$\begin{array}{l} E_i^K(\mathscr{F}^\bullet, w) \longrightarrow K_i(X) \longrightarrow K_i'(S) \longrightarrow E_{i-1}^K(\mathscr{F}^\bullet, w) \longrightarrow \cdots \\ \qquad\qquad \longrightarrow K_0(X) \longrightarrow K_0'(S). \end{array}$$

Es sei nun $f : S' \to S$ ein flacher Morphismus von noetherschen Schemata (nicht notwendig von endlichem Typ), $X' = X \times_S S'$ und $w' : X' \to S'$, $f' : X' \to X$ die durch Basiswechsel entstehenden Morphismen. Es sei weiter $\mathscr{F}'^\bullet = f'^*\mathscr{F}^\bullet$ der zurückgezogene Komplex $\mathscr{F}$ auf X' und $T' = \{\mathscr{F}'^i | i \in \mathbb{Z}\}$. Nach dem Satz über flachen Basiswechsel [H], Proposition III.9.3, für separierte Morphismen von endlichem Typ zwischen noetherschen Schemata ist die kanonische Basiswechselabbildung

$$R^i w'_*(f'^*(\mathscr{G})) \cong f^* R^i w_*(\mathscr{G})$$

für jeden quasikohärenten $\mathscr{O}_X$-Modul $\mathscr{G}$ ein Isomorphismus, und folglich gilt

$$R^i w'_*(\mathscr{F}'^i \otimes_{\mathscr{O}_{X'}} f'^*(\mathscr{V})) = R^i w'_*(f'^*(\mathscr{F}^i \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{V})) = f^*(R^i w_*(\mathscr{F}^i \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{V})) = 0$$

für $\mathscr{V} \in \mathscr{P}_T X$. Daher bildet der exakte Funktor $f'^* : \mathscr{P}X \to \mathscr{P}X'$ die Unterkategorie $\mathscr{P}_T X$ in $\mathscr{P}_{T'} X'$ ab, denn f ist als projektiver Morphismus separiert. Insbesondere erhält man mit

$$w'_*(\mathscr{F}'^{\pm} \otimes_{\mathscr{O}_{X'}} f'^*(\mathscr{V})) \cong f^*(w_*(\mathscr{F}^{\pm} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{V}))$$

ein homotopiekommutatives Diagramm von punktierten stetigen Abbildungen

$$\begin{tikzcd}
(\mathrm{Fib}(\mathscr{F}^\bullet, w), *) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Fib}(\mathscr{F}^\bullet, w, f)"] & (R\mathscr{P}_T X, *) \arrow[r] \arrow[d, "Rf'^*"] & (R\mathscr{M}S, *) \arrow[d, "Rf^*"] \\
(\mathrm{Fib}(\mathscr{F}'^\bullet, w'), *) \arrow[r] & (R\mathscr{P}_{T'} X', *) \arrow[r] & (R\mathscr{M}S', *)
\end{tikzcd}$$

mit dem induzierten Morphismus $\mathrm{Fib}(\mathscr{F}^\bullet, w, f) : \mathrm{Fib}(\mathscr{F}^\bullet, w) \to \mathrm{Fib}(\mathscr{F}'^\bullet, w')$ auf den Homotopiefasern. Damit ergibt sich die Kommutativität des Diagramms der zugehörigen langen exakten Sequenzen:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & E_i^K(\mathscr{F}^\bullet, w) & \longrightarrow & K_i(X) & \longrightarrow & K'_i(S) & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\cdots & \longrightarrow & E_i^K(\mathscr{F}'^\bullet, w') & \longrightarrow & K_i(X') & \longrightarrow & K'_i(S') & \longrightarrow & \cdots .
\end{array}$$

Ist $g : S'' \to S'$ ein weiterer flacher Morphismus von noetherschen Schemata, $X'' = X' \times_{S'} S''$, $w'' : X'' \to S''$, $g' : X'' \to X'$ und $\mathscr{F}''^\bullet = g'^*(\mathscr{F}'^\bullet)$, so gibt es wegen $\mathscr{F}''^\bullet \cong (gf)^*(\mathscr{F}^\bullet)$ eine kanonische Homotopie $\mathrm{Fib}(\mathscr{F}'^\bullet, w', g)\mathrm{Fib}(\mathscr{F}^\bullet, w, f) \simeq \mathrm{Fib}(\mathscr{F}^\bullet, w, fg)$, und damit folgt die Funktorialiät von E_i^K für flache Abbildungen.

2.4. Die $\mathscr{K}_1$-Garbe. Es sei R ein noetherscher Ring. Nach Definition der K-Gruppen für R gilt $K_n(R) = \pi_n(BGl(R)^+, *)$, $n \geq 0$. Benutzt man den kanonischen Isomorphismus für die Gruppenhomologie $H_1(G, \mathbb{Z}) = G^{\mathrm{ab}}$ für eine Gruppe G mit Werten in dem trivialen G-Modul $\mathbb{Z}$, so erhält man vermöge des Hurewicz-Isomorphismus und der definierenden Eigenschaft der +-Konstruktion eine Kette von Isomorphismen

$$\begin{aligned} K_1(R) = \pi_1(BGl(R)^+, *) \to H_1(BGl(R)^+, \mathbb{Z}) \cong H_1(BGl(R), \mathbb{Z}) \cong \\ \cong H_1(Gl(R), 1) \cong Gl(R)^{\mathrm{ab}}. \end{aligned}$$

Durch Komposition mit der Determinantenabbildung

$$\det : Gl(R)^{\mathrm{ab}} = Gl(R)/[Gl(R), Gl(R)] \longrightarrow R^\times$$

erhält man einen Gruppenhomomorphismus

$$K_1(R) \longrightarrow R^\times,$$

der kovariant funktoriell in R ist und dessen Kern $SK_1(R)$ im Allgemeinen nichttrivial ist. Ist R jedoch lokal, so ist die Determinantenabbildung ein Isomorphismus ([Sr], Ex. 1.6) und folglich ist auch $K_1(R) \to R^\times$ ein Isomorphismus.

Es sei nun X ein separiertes, noethersches Schema und U_i, $i \in I$, eine Überdeckung durch offene, affine Unterschemata. Die Funktorialität der K-Theorie und des Gruppenhomomorphismus $K_1(R) \to R^\times$ ergibt ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & K_1(X) \arrow[r] & \prod_{i\in I} K_1(U_i) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d] & \prod_{i,j\in I} K_1(U_i \cap U_j) \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & \mathscr{O}_X(X)^\times \arrow[r] & \prod_{i\in I} \mathscr{O}_X(U_i)^\times \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \prod_{i,j\in I} \mathscr{O}_X(U_i \cap U_j)^\times
\end{tikzcd}$$

mit exakter unterer Zeile. Der rechte, vertikale Morphismus ist definiert, da der Schnitt zweier offener affiner Unterschemata eines separierten Schemas wieder affin ist. Damit erhält man einen induzierten Gruppenhomomorphismus $K_1(X) \to \mathbb{G}_{m,X}(X)$, der offensichtlich kontravariant funktoriell in X ist.

Definition 2.4.1. *Für ein noethersches Schema X bezeichne $\mathscr{K}_{i,X}$ (bzw. $\mathscr{K}'_{i,X}$) die zur Prägarbe von abelschen Gruppen $U \mapsto K_i(U)$ (bzw. $U \mapsto K'_i(U)$) assoziierte Garbe.*

Nach der universellen Eigenschaft der Garbifizierung einer Prägarbe erhält man daher einen kanonischen Homomorphismus von Garben $\mathscr{K}_{1,X} \to \mathbb{G}_{m,X}$. Mit diesen Notationen gilt das folgende wohlbekannte

Lemma 2.4.2. *Es sei X ein noethersches, separiertes Schema. Dann ist der kanonische Homomorphismus $\mathscr{K}_{1,X} \to \mathbb{G}_{m,X}$ ein Isomorphismus von Garben abelscher Gruppen.*

Beweis. Die Behauptung ist halmweise nachzuprüfen. Ist $U_i = \operatorname{spec} A_i$, $i \in I$, das System der offenen, affinen Umgebungen eines Punktes $x \in X$, gerichtet durch Inklusion, so ist $\operatorname{spec} \mathscr{O}_{X,x}$ der projektive Limes der U_i in der Kategorie der noetherschen Schemata und es gilt $\mathscr{O}_{X,x} \cong \varinjlim_{i\in I} A_i$. Da die K-(bzw.K'-)Theorie mit filtrierten direkten Limites vertauscht ([Q], (12)), ergibt sich $\mathscr{K}_{n,X,x} = K_n(\mathscr{O}_{X,x})$ (bzw. $\mathscr{K}'_{n,X,x} = K'_n(\mathscr{O}_{X,x})$. Für $n = 1$ folgt für die oben definierte Abbildung die Faktorisierung

$$\mathscr{K}_{1,X,x} = K_1(\mathscr{O}_{X,x}) \cong \mathscr{O}^\times_{X,x} = \mathbb{G}_{m,X,x}$$

und damit die Behauptung. □

2.5. Die K-theoretische Extension. Teil II. Es sei $w : X \to S$ ein glatter, projektiver Morphismus von noetherschen, regulären Schemata. Betrachtet man nach 2.3. den Basiswechsel für offene Immersionen $U \to X$, so erhält man kontravariante Funktoren

$$U \longmapsto E_i^K(\mathscr{F}_U^\bullet, w_U), \qquad (\text{bzw. } U \longmapsto K_i(X_U))$$

mit $X_U = X \times_S U$ und $w_U : X_U \to U$.

Definition 2.5.1. *Die zu diesen Funktoren assoziierten Garben abelscher Gruppen seien mit $\mathscr{E}_i^K(\mathscr{F}^\bullet, X/S)$ (bzw. $\mathscr{K}_i(X/S)$) bezeichnet.*

Lemma 2.5.2. *Es sei $w : X \to S$ ein glatter, projektiver Morphismus von noetherschen, regulären Schemata, wobei S als separiert angenommen sei. Dann ergibt die zuvorstehende Konstruktion eine lange exakte Sequenz von abelschen Garben*

$$\cdots \longrightarrow \mathscr{E}_i^K(\mathscr{F}^\bullet, X/S) \longrightarrow \mathscr{K}_i(X/S) \longrightarrow \mathscr{K}_{i,S} \longrightarrow \cdots$$

auf S.

Beweis. Die Behauptung ergibt sich unmittelbar aus der Tatsache, daß Garbifizierung ein exakter Funktor ist. $\square$

Wir wollen nun den Halm dieser Garbensequenz in einem Punkt $s \in S$ berechnen: Es sei $f : S' = \operatorname{spec} \mathscr{O}_{S,s} \to S$ die Lokalisierung von S in s, $X' = X \times_S S'$ und $\mathscr{F}'^\bullet = \mathscr{F}^\bullet \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{O}_{S,s}$. Dann ist f flach und faktorisiert offenbar über jede Immersion $U \hookrightarrow X$ eines offenen Unterschemas U von X, welches den Punkt s enthält. Mit der Funktorialität von E_i^K aus 2.3. erhält man ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & \mathscr{E}_i^K(\mathscr{F}^\bullet, X/S)_s \arrow[r] \arrow[d, "="'] & \mathscr{K}_i(X/S)_s \arrow[r] \arrow[d, "="'] & (\mathscr{K}_{i,S})_s \arrow[r] \arrow[d, "="'] & {} \\
{} \arrow[r] & \varinjlim_{U \ni s} E_i^K(\mathscr{F}_U^\bullet, w_U) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_i"'] & \varinjlim_{U \ni s} K_i(X_U) \arrow[r] \arrow[d, "\beta_i"'] & \varinjlim_{U \ni s} K_i(U) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & {} \\
{} \arrow[r] & E_i^K(\mathscr{F}'^\bullet, w') \arrow[r] & K_i(X') \arrow[r] & K_i(S') \arrow[r] & {} .
\end{tikzcd}$$

Lemma 2.5.3. *Die Morphismen α_i, β_i sind Isomorphismen abelscher Gruppen.*

Beweis. Wir seien U, V zwei offene, affine Umgebungen von s in S mit $V \subseteq U$. Dann ist $X_V \hookrightarrow X_U$ ein affiner Morphismus und der projektive Limes $\varprojlim_{U \ni s} X_U$ existiert für offene, affine Umgebungen U von s (und damit aus Kofinalitätsgründen für alle offenen Umgebungen U von s). Da die U und damit auch die X_U regulär sind, so gilt wegen $K = K'$ und der Stetigkeit der K'-Theorie offenbar $\varinjlim_{U \ni s} K_i(X_U) \cong K_i'(\varprojlim_{U \ni s} X_U)$. Es ist daher $X' \cong \varprojlim_{U \ni s} X_U$ zu zeigen. Da die Übergangsabbildungen affin sind, kann man sich auf den Fall von Ringen zurückziehen. Damit ist die Aussage aber klar, denn das Tensorprodukt vertauscht als linksadjungierter Funktor mit direkten Limites. Folglich sind die β_i und damit auch die α_i Isomorphismen. $\square$

Um nun Extensionen konstruieren zu können, brauchen wir noch das folgende

Lemma 2.5.4 (Bloch,[Bl2]). *Es sei S das Spektrum eines diskreten Bewertungsringes R der Charakteristik 0, X ein glattes, projektives S-Schema mit Strukturmorphismus $w : X \to S$, $\mathscr{F}^\bullet$ ein endlicher, homologisch trivialer Komplex von kohärenten Garben (d.h. $\mathrm{ch}(\mathscr{F}^+) - \mathrm{ch}(\mathscr{F}^-) = 0 \in H^{2\bullet}_{ét}(\bar{X}, \mathbb{Q}_l(\bullet))$ für alle Primzahlen l) und $T = \{\mathscr{F}^i | i \in \mathbb{Z}\}$. Dann gilt für die durch*

$$R\mathscr{P}_T X \to R\mathscr{M} S, \qquad \mathscr{V} \longmapsto w_*(\mathscr{V} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{F}^+) + i(w_*(\mathscr{V} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{F}^-)$$

induzierten K-theoretischen Abbildungen:

i) *$K_0(X) \to K_0(S)$ ist die Nullabbildung.*

ii) *Das Bild von $K_1(X) \longrightarrow K_1(S) \cong R$ besteht aus Torsionselementen.*

Beweis. Die Aussage *i)* ist [Bl2], Bemerkung 1.7. Der Beweis von *ii)* ([Bl2], Proposition 1.5) reduziert die zu zeigende Aussage auf den Fall $R = \mathbb{C}$ und benutzt ein Riemann-Roch Theorem für die Deligne-Kohomologie. Dies erklärt die Einschränkung auf den Charakteristik 0 Fall. □

Das folgende Ergebnis ist eine garbentheoretische Verallgemeinerung der von Bloch in [Bl2], Prop. 1.3, Cor. 1.4, gegebenen Konstruktion von Extensionen mit diskreten Bewertungsringen als Basis:

Satz 2.5.5. *Es sei S eine glatte Kurve über einem Körper k der Charakteristik 0, $w : X \to S$ ein glattes, projektives Schema über S und $\mathscr{F}^\bullet$ ein beschränkter, homologisch trivialer Komplex von kohärenten Garben auf X. Bezeichnet für eine Garbe $\mathscr{G}$ abelscher Gruppen $\mathscr{G}_\mathbb{Q}$ die mit $\mathbb{Q}$ tensorierte Garbe, so erhält man eine zu $\mathscr{F}^\bullet$ assoziierte $\mathbb{G}_{m,S,\mathbb{Q}}$-Extension der Garbe $\mathscr{K}_0(X/S)$:*

$$\mathscr{E}^K(\mathscr{F}^\bullet, X/S) : \qquad 0 \longrightarrow \mathbb{G}_{m,S,\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathscr{E}^K_0(\mathscr{F}^\bullet, X/S)_\mathbb{Q} \longrightarrow \mathscr{K}_0(X/S)_\mathbb{Q} \longrightarrow 0.$$

Weiter gilt:

i) *Die Extension $\mathscr{E}^K(\mathscr{F}^\bullet, X/S)$ hängt nur von der Homologie des Komplexes $\mathscr{F}^\bullet$ ab, d.h. man hat einen kanonischen Isomorphismus $\mathscr{E}^K(\mathscr{F}^\bullet, X/S) \cong \mathscr{E}^K(H^\bullet(\mathscr{F}^\bullet), X/S)$.*

ii) *Zu einer kurzen exakten Sequenz*

$$0 \longrightarrow \mathscr{F}'^\bullet \longrightarrow \mathscr{F}^\bullet \longrightarrow \mathscr{F}''^\bullet \longrightarrow 0$$

von beschränkten Komplexen von homologisch trivialen Komplexen kohärenter Garben hat man einen kanonischen Isomorphismus von Extensionen

$$\mathscr{E}^K(\mathscr{F}'^\bullet \oplus \mathscr{F}''^\bullet, X/S) \cong \mathscr{E}^K(\mathscr{F}^\bullet, X/S).$$

Dieser hängt nur von $\mathscr{F}^\bullet, \mathscr{F}'^\bullet, \mathscr{F}''^\bullet$, nicht aber von der Extension $0 \to \mathscr{F}'^\bullet \to \mathscr{F}^\bullet \to \mathscr{F}''^\bullet \to 0$, ab.

Beweis. Es S' die Lokalisierung von S in einem abgeschlossenen Punkt, $w' : X' \to S'$ der Basiswechsel von $w : X \to S$ und $\mathscr{F}'^{\bullet} = \mathscr{F}^{\bullet} \otimes_{S'} \mathscr{O}_{X'}$. Betrachtet man die lange exakte Sequenz zu $\mathscr{F}$, so berechnet sich der Halm dieser Sequenz an $s \in S$ mit 2.5.3 zu

$$K_1(X) \longrightarrow K_1(S') \longrightarrow E^K(\mathscr{F}'^{\bullet}, w') \longrightarrow K_0(X') \longrightarrow K_0(S').$$

Tensorieren mit $\mathbb{Q}$ ergibt (zusammen mit der Tatsache, daß Lokalisierung flach ist und Tensorieren mit direkten Limites vertauscht) mit Lemma 2.5.4 den Halm von $\mathscr{E}^K(\mathscr{F}^{\bullet}, X/S)$ in s. Daher ist die Halmsequenz von $\mathscr{E}^K(\mathscr{F}^{\bullet}, X/S)$ exakt in allen abgeschlossenen Punkten von S und damit ist $\mathscr{E}^K(\mathscr{F}^{\bullet}, X/S)$ überhaupt exakt.

Es sei

$$0 \longrightarrow \mathscr{F}'^{\bullet} \longrightarrow \mathscr{F}^{\bullet} \longrightarrow \mathscr{F}''^{\bullet} \longrightarrow 0$$

eine lange exakte Sequenz von homologisch trivialen Komplexen auf X und S zunächst ein beliebige reguläre, noethersche Basis. Nach [Bl2], Prop. 1.3, gibt es eine kanonische Homotopieäquivalenz zwischen den Homotopiefasern $\mathrm{Fib}(\mathscr{F}'^{\bullet} \oplus \mathscr{F}'', w) \simeq \mathrm{Fib}(\mathscr{F}^{\bullet}, w)$, die funktoriell für flache Basiswechsel ist. Nach Garbifizieren folgt *ii*). Bezeichnet $Z^{\bullet}(\mathscr{F})$ (bzw. $B^{\bullet}(\mathscr{F})$, $H^{\bullet}(\mathscr{F})$) die Zykel (bzw. Ränder, Homologie) von $\mathscr{F}^{\bullet}$, so gilt nach *ii*)

$$\begin{aligned} &\mathscr{E}^K(\mathscr{F}^{\bullet}, X/S) = \mathscr{E}^K(Z^{\bullet}(\mathscr{F}^{\bullet}) \oplus B^{\bullet}(\mathscr{F}^{\bullet})[1], X/S) \\ =&\mathscr{E}^K(H^{\bullet}(\mathscr{F}^{\bullet}) \oplus B^{\bullet}(\mathscr{F}^{\bullet}) \oplus B^{\bullet}(\mathscr{F}^{\bullet})[1], X/S) = \mathscr{E}^K(H^{\bullet}(\mathscr{F}^{\bullet}), X/S) \end{aligned}$$

Dabei gilt letzte Gleichung, denn es ist offenbar $RF^+ + i(RF^-) = 0$ für jeden Komplex $\mathscr{F}^{\bullet}$ der Form $\mathscr{F}^{\bullet} = \mathscr{B}^{\bullet} \oplus \mathscr{B}^{\bullet}[1]$. □

Literatur

[Be1] Beilinson, A. *Higher regulators and values of L-functions.* Journ. Soviet Math. 30 (1985), 2036–2070.

[Be2] Beilinson, A. *Height pairing between algebraic cycles.* Current trends in Arithmetical Algebraic Geometry Vol. 67 (1985), 1–24.

[Bl1] Bloch, S. *Cycles and biextensions.* Algebraic K-Theory and Algebraic Number Theory Vol. 83 (1987), 19–30.

[Bl2] Bloch, S. *Height pairings for algebraic cycles.* Journal of Pure and Applied Algebra 34 (1984), 119–145.

[Bl3] Bloch, S. *Algebraic Cycles and Higher K-Theory.* Advances in Mathematics 61 (1986), 267–304.

[Bl4] Bloch, S. *Algebraic Cycles and the Beilinson Conjectures.* Contemporary Mathematics 58 (1986), 65–79.

[Br] Brown, K.S. *Abstract Homotopy Theory and Generalized Sheaf Cohomology.* Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 186 (1973).

[Do] Dold, A. *Lectures on Algebraic Topology.* Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 200 (1972), Springer Verlag.

[De] Deligne, P. *Théorie de Hodge II, III.* Publ. Math. IHES 40 (1971), 44 (1974).

[EGA] Grothendieck, A. und J. Dieudonné. *Éléments de Géométrie Algébrique.* Publ. Math. IHES 4 (1960), 8 (1961), 11 (1961), 17 (1963), 20 (1964), 24 (1965), 28 (1966), 32 (1967).

[EV] Esnault, E. und E. Viehweg. *Deligne-Beilinson cohomology.* Beilinson's conjectures on special values of L-functions, Perspect. in Math. Vol. 4 (1988), 43–91.

[F] Fulton, W. *Intersection Theory.* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 3 (1984), Springer Verlag.

[G] Giraud, J. *Cohomologie non abélienne.* Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 179 (1971), Springer Verlag.

[Gi] Gillet, H. *Riemann-Roch Theorems for Higher Algebraic K-Theory* Advances in Mathematics 40 (1981), S. 203–289.

[GH] Griffith, P. und J. Harris. *Principles of Algebraic Geometry.* (1978), Wiley-Interscience.

[GMV] Green, M., J. Murre und C. Voisin. *Algebraic Cycles and Hodge Theory.* Lecture Notes in Mathematics 1594 (1993), Springer Verlag.

[H] Hartshorne, R. *Algebraic Geometry.* Graduate Texts in Mathematics 52 (1977), Springer Verlag.

[Ja1] Jannsen, U. *Continuous Étale Cohomology.* Math. Ann. 280 (1988), S. 207–245.

[Ja2] Jannsen, U. *Mixed Motives and Algebraic K-Theory.* Lecture Notes in Mathematics 1400 (1990), Springer Verlag.

[K] Kleiman, S.L. *Toward a numerical theory of ampleness.* Ann. of Math. 84(2) (1966) 293–344.

[LB] Lange, H. und C. Birkenhake. *Complex Abelian Varieties.* Grundlagen der mathematischen Wissenschaften 301 (1992), Springer Verlag.

[Ma] May, P. *A Course in Algebraic Topology.* Chicago Lectures in Mathematics (1999).

[Mi1] Milne, J. *Étale cohomology.* Princeton Mathematical Series Vol. 33 (1980), Princeton University Text.

[Mi2] Milne, J. *Abelian Varieties.* Arithmetic Geometry (1986), ed. G. Cornell, J.H. Silverman, S. 103–150, Springer Verlag.

[MB] Moret-Bailly, L. *Métriques permises.* Astérisque 127 (1985), S. 29–87.

[MS1] Müller-Stach, S. $\mathbb{C}^*$*-Extensions of Tori, Higher Chow Groups and Applications to Incidence Equivalence Relations for Algebraic Cycles.* K-Theory 9 (1995), 395–406.

[MS2] Müller-Stach, S. *A Remark on Height Pairings.* In [GMV], 253–259.

[N] Neukirch, J. *Algebraische Zahlentheorie.* (1991), Springer Verlag.

[Q] Quillen, D. *Higher Algebraic K-Theory I.* Lecture Notes in Mathematics 341 (1973), S. 77–139, Springer Verlag.

[SGA IV] Artin, M., A. Grothendieck und J.L. Verdier. *Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie. Théorie des Topos et Cohomologie Étale des Schémas.* Lecture Notes in Mathematics 269 (1963/64), Springer Verlag.

[So] Soulé, C. *Opérations en K-Théorie Algébrique.* Can. J. Math., Vol. XXXVII, No.3 (1985), S. 488-550.

[Sr] Srinivas, V. *Algebraic K-Theory.* Progress in Mathematics 90 (1993), Birkhäuser Verlag.

[T] Tamme, G. *Introduction to Étale Cohomology.* Universitext (1994), Springer Verlag.

Erklärung

Hiermit erkläre ich, daß ich diese Dissertation selbstständig angefertigt und nur die angegebenen Hilfsmittel benutzt habe.

Regensburg, den