

Es werden Experimente am Ein-Atom-Maser (Mikromaser) zu den Grundlagen der Quantenmechanik vorgestellt. Insbesondere wird auf die Relevanz des Dekohärenzproblems hinsichtlich der Realisierung von Quantencomputern eingegangen. Die vorgestellten Experimente bilden ein einfaches Modellsystem, an dem sich dieser Vorgang studieren lässt.

Hauptaugenmerk liegt auf der Erzeugung eines Superpositionszustands, der nur aus den $|0\rangle$ - und $|1\rangle$ -Komponenten des Photonfeldes des Mikromasers besteht. An ihm lassen sich die Auswirkungen der Dekohärenz besonders deutlich studieren (nur zwei Komponenten bilden den überlagerten Zustand). Das gleiche Ziel lässt sich durch Kopplung zweier Mikromaser erreichen, von denen einer den Vakuumzustand $|0\rangle$, der andere den Ein-Photon-Zustand $|1\rangle$ enthält. Die erwünschte kohärente Überlagerung entsteht hier durch das Tunneln des Photons zwischen den gekoppelten Resonatoren.

Zusätzlich enthält die Arbeit Vorschläge, wie mit dem Ein-Atom-Maser die Bell'sche Ungleichung getestet und die Teleportation eines Quantenzustands verwirklicht werden kann.

Universitätsverlag Regensburg



ISBN 978-3-86845-065-1

gefördert von:



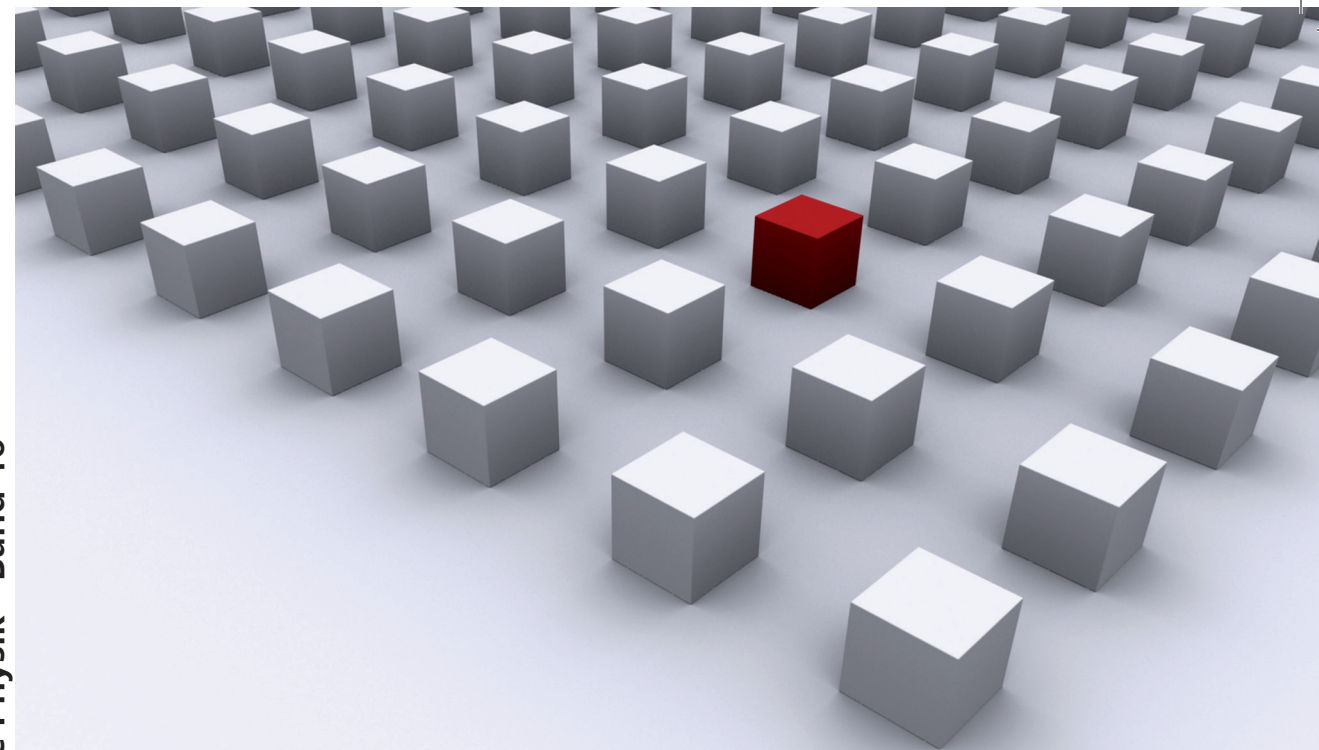
Universität Regensburg

Stefan Rinner

16
Dissertationsreihe
Physik

Universitätsverlag Regensburg

Dissertationsreihe Physik - Band 16



Stefan Rinner

Ein-Atom-Maser:
Erzeugung verschränkter Zustände
und Dekohärenzuntersuchungen

Stefan Rinner



Ein-Atom-Maser:
Erzeugung verschränkter Zustände
und Dekohärenzuntersuchungen

Ein-Atom-Maser:

Erzeugung verschränkter Zustände und Dekohärenzuntersuchungen

Dissertation zur Erlangung des Doktorgrades der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)
der naturwissenschaftlichen Fakultät II - Physik der Universität Regensburg
vorgelegt von

Stefan Rinner

aus Regensburg

Januar 2004

Die Arbeit wurde von Prof. Dr. Ernst Werner angeleitet.

Das Promotionsgesuch wurde am 19.01.2004 eingereicht.

Das Kolloquium fand am 09.03.2004 statt.

Prüfungsausschuss: Vorsitzender: Prof. Dr. Max Maier

1. Gutachter: Prof. Dr. Ernst Werner

2. Gutachter: Prof. Dr. Herbert Walther (MPQ Garching)

weiterer Prüfer: Prof. Dr. Ingo Morgenstern



Dissertationsreihe der Fakultät für Physik der Universität Regensburg, Band 16

Herausgegeben vom Präsidium des Alumnivereins der Physikalischen Fakultät:

Klaus Richter, Andreas Schäfer, Werner Wegscheider, Dieter Weiss

Stefan Rinner

Ein-Atom-Maser:

Erzeugung verschränkter Zustände

und Dekohärenzuntersuchungen

Universitätsverlag Regensburg

Bibliografische Informationen der Deutschen Bibliothek.
Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation
in der Deutschen Nationalbibliografie. Detaillierte bibliografische Daten
sind im Internet über <http://dnb.ddb.de> abrufbar.

1. Auflage 2010

© 2010 Universitätsverlag, Regensburg

Leibnitzstraße 13, 93055 Regensburg

Konzeption: Thomas Geiger

Umschlagentwurf: Franz Stadler, Designcooperative Nittenau eG

Layout: Stefan Rinner

Druck: Docupoint, Magdeburg

ISBN: 978-3-86845-065-1

Alle Rechte vorbehalten. Ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlags ist es
nicht gestattet, dieses Buch oder Teile daraus auf fototechnischem oder
elektronischem Weg zu vervielfältigen.

Weitere Informationen zum Verlagsprogramm erhalten Sie unter:
www.univerlag-regensburg.de

**Ein-Atom-Maser:
Erzeugung verschränkter Zustände und Dekohärenzuntersuchungen**



DISSERTATION ZUR ERLANGUNG DES DOKTORGRADES DER NATURWISSENSCHAFTEN (DR. RER. NAT.)
DER FAKULTÄT II - PHYSIK

DER UNIVERSITÄT REGENSBURG

vorgelegt von

Stefan Rinner

aus

Regensburg

im Jahr 2004

Promotionsgesuch eingereicht am: 19.01.2004

Die Arbeit wurde angeleitet von: Prof. Dr. Ernst Werner

Prüfungsausschuss: Vorsitzender: Prof. Dr. Max Maier

1. Gutachter: Prof. Dr. Ernst Werner

2. Gutachter: Prof. Dr. Herbert Walther (MPQ Garching)

weiterer Prüfer: Prof. Dr. Ingo Morgenstern

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Dekohärenz in der Quantentheorie	6
2.1	Allgemeines	10
2.2	Dichtematrix-Formalismus	14
2.2.1	Die Reduzierte Dichtematrix	15
2.2.2	Master-Gleichung	16
2.3	Dekohärenz in der Quantenoptik	17
2.3.1	Master-Gleichung	17
2.3.2	Kopplung einer Resonatormode an ein thermisches Reservoir	20
2.3.3	Strahlungslose Dephasierung	24
2.4	Lindblad-Operator	28
2.4.1	Kraus-Darstellung von Super-Operatoren	28
2.4.2	Lindblad-Gleichung	29
2.5	Die Bloch-Sphäre	31
2.6	Zusammenfassende Betrachtungen	32
3	Grundlagen der Experimente	35
3.1	Der Ein-Atom-Maser	35
3.1.1	Geschwindigkeitsselektive Anregung	36
3.1.2	Zustandsselektive Detektion mittels Feldionisation	37
3.2	Atom-Resonatorfeld-Wechselwirkung	39
3.2.1	Resonante Wechselwirkung	43
3.2.2	Nicht-resonante Wechselwirkung - Dispersives Regime	43
3.3	Atom-Laser-Wechselwirkung	45
3.3.1	Störungstheorie erster Ordnung - Ein-Photon-Prozesse	46
3.3.2	Die Säkular-Näherung	49
3.3.3	Störungstheorie zweiter Ordnung - Zwei-Photonen-Prozesse	52
3.3.4	Dynamischer Stark-Effekt	53

4	Experimente am Ein-Atom-Maser	56
4.1	Messung der Dekohärenz von überlagerten Photonenzuständen	56
4.1.1	Präparation des Resonatorfeldes	57
4.1.2	Sondierung der Kohärenz	64
4.1.3	Einfluß nicht-idealer experimenteller Bedingungen	68
4.2	Dekohärenzmessung an gekoppelten Mikrowellen-Resonatoren	72
4.3	Test der Bell'schen Ungleichung	76
4.4	Teleportation überlagelter Photonenzustände	80
5	Zusammenfassung	85
A	Termschema von Rubidium	87

Einleitung

Die Einführung des Wirkungsquantums im Jahre 1900 durch Max Planck ([1], [2]), die den Beginn der Quantentheorie markierte, liegt nun mehr als ein Jahrhundert zurück.

Die Quantentheorie sollte die bis dahin unverständenen Probleme der Atomphysik erklären. Der Formalismus wurde stetig weiterentwickelt und auch auf andere Bereiche als die Atomphysik mit Erfolg ausgeweitet und lieferte dabei hervorragende Übereinstimmung mit den experimentellen Beobachtungen. Dennoch blieb die Interpretation des Formalismus ebenso wie die Frage nach der Vollständigkeit der Quantentheorie heftig umstritten, besonders unter den “Vätern” der neuen Theorie. Berühmt geworden ist in diesem Zusammenhang die Auseinandersetzung zwischen Albert Einstein, der die Vollständigkeit der Theorie bestritt, und Niels Bohr auf dem Solvay Kongress in Brüssel im Jahre 1926 (s. dazu [3]).

Im Mittelpunkt der Bemühungen stand dabei vornehmlich der Versuch, die klassischen Eigenschaften von Makroobjekten vor dem Hintergrund der Quantentheorie zu verstehen. Diese Objekte sind die Gegenstände unserer täglichen Erfahrung und lassen bestimmte Eigenschaften vermissen, die eigentlich durch die Quantenmechanik erlaubt wären.

Der Zustand eines Quantenobjekts setzt sich nach der Quantentheorie zusammen aus allen möglichen oder erlaubten Zuständen des Systems, die - mit der entsprechenden Wahrscheinlichkeitsamplitude für jeden solchen erlaubten Zustand gewichtet - zu dem resultierenden Gesamtzustand aufzuaddieren sind. Diese als *Superpositionsprinzip* bekannte “Rechenvorschrift” ist eines der grundlegenden Prinzipien der Theorie und folgt unmittelbar aus der Linearität der Schrödingergleichung.

Obwohl dieses Prinzip im Bereich der Quantenobjekte universelle Gültigkeit besitzt, und obwohl sich Makroobjekte aus vielen solchen Quantenobjekten aufbauen, findet man i.d.R. keine derartigen Überlagerungen von Makrozuständen eines Systems. Das ist der Inhalt des berühmt gewordenen *Schrödinger’schen Katzenparadoxons* [4], auf das später noch genauer einzugehen sein wird. Eng damit einher geht die Frage nach dem Übergang von der reversiblen Dynamik, die durch die Schrödingergleichung beschrieben wird, zu den irre-

versiblen Vorgängen, die tatsächlich beobachtet werden, und die einen gerichteten Ablauf der Zeit induzieren.

Das Konzept der Dekohärenz versucht, diese Fragestellungen zu lösen, indem es berücksichtigt, daß die Idealisierung isolierter Systeme für Quantensysteme weiterreichende Konsequenzen hat als es bei klassischen Objekten der Fall ist. Die unitäre und damit reversible Dynamik der Schrödingergleichung kann nur für isolierte Systeme gelten. In der Tat stehen aber alle Systeme auf die eine oder andere Weise mit ihrer Umgebung in Kontakt.

Die Folge davon ist, daß das betrachtete System **nicht-lokale Korrelationen** mit der Umgebung entwickelt, seine individuellen Eigenschaften sozusagen verliert und zusammen mit der Umgebung einen sogenannten **verschränkten Zustand** bildet. Durch Spurbildung über die Freiheitsgrade des Reservoirs wird diese Verschränkung aufgehoben, und es verbleibt ein statistisches Gemisch der möglichen Zustände für das System.

Die für die nicht-klassischen Eigenschaften verantwortlichen Phaseninformationen werden dadurch aus dem System in ein größeres Ganzes, bestehend aus System und Umgebung, delokalisiert. Eine lokale Messung oder Beobachtung am System alleine zeigt dann nicht mehr die typischen quantenmechanischen Eigenschaften, sondern die für klassische Objekte charakteristischen Eigenschaften.

Als Modelle für die Umgebung dienen dabei häufig Reservoirs, deren verschiedene Freiheitsgrade am einfachsten durch harmonische Oszillatoren simuliert werden können.

Diese Arbeit beinhaltet zum einen Vorschläge für Experimente am Ein-Atom-Maser, mit deren Hilfe Dekohärenzeffekte an nicht-klassischen Zuständen des Photonenfeldes sichtbar gemacht werden können. Insbesondere wird auf die Präparation der dazu nötigen Zustände des Photonenfeldes eingegangen.

Zum anderen ergaben sich aus diesen Überlegungen Möglichkeiten, mit Hilfe des Ein-Atom-Maser auch andere Experimente zu den Grundlagen der Quantenmechanik zu realisieren, wie einen Test der *Bell'schen Ungleichung* und ein Protokoll zur Teleportation eines unbekannten Zustands des Mikromaserfelds.

Die Arbeit ist wie folgt gegliedert:

- Kapitel 2 stellt die wichtigsten Hilfsmittel zur theoretischen Behandlung der Dekohärenz im Dichtematrix-Formalismus zur Verfügung. Besonders berücksichtigt werden dabei für die Quantenoptik typische Situationen.

Es liegt in der Natur der Sache und der Vielzahl der zum Thema "Dekohärenz" erschienenen Literatur begründet, daß eine umfassende Behandlung aller Aspekte der Dekohärenz im Rahmen einer Einführung weder möglich ist noch angestrebt wird. Es sei an dieser Stelle auf einführende Veröffentlichungen zum Thema verwiesen ([5]-[14]).

- In Kapitel 3 wird der Aufbau und die Funktionsweise des Ein-Atom-Maser näher erläutert (s. dazu auch [15] - [23]). Anschließend werden die theoretischen Grundla-

gen für die geplanten Experimente am Ein-Atom-Maser bereitgestellt.

Der Ein-Atom-Maser oder Mikromaser ist ein experimentelles Hilfsmittel zur Untersuchung der Wechselwirkung zwischen Materie und Strahlung auf elementarster Ebene: jeweils nur ein Atom wechselwirkt mit einer einzigen Mode des Strahlungsfeldes im Innern des Resonators. Die Atome können dabei sowohl zur Erzeugung als auch zur Sondierung des Feldes verwendet werden. Der einmal erzeugte Photonenzustand im Ein-Atom-Maser unterliegt auch der Dekohärenz, und so lassen sich mit dem Ein-Atom-Maser auch Dekohärenzphänomene des Photonenfeldes studieren.

Während dies für Überlagerungen von quasi-klassischen Zuständen des Strahlungsfeldes, sog. *kohärenten Zuständen* oder *Glauber-Zuständen*, bereits erfolgreich an sog. offenen Resonatoren bestehend aus zwei Hohlspiegeln durchgeführt wurde [24], war es das Ziel dieser Arbeit, ein vergleichbares Experiment auch in einem *geschlossenen* Resonator zu konstruieren.

Im Fall eines offenen Resonators gibt es eine starke Kopplung der Resonatormode an die Umgebung, wohingegen bei den hier betrachteten geschlossenen Resonatoren auf Grund der geringeren Kopplung wesentlich längere Kohärenzzeiten erzielt werden können.

Dabei sollte ein Feldzustand erzeugt werden, der aus einer Überlagerung lediglich zweier Komponenten, nämlich des Vakuumzustands $|0\rangle$ und des Ein-Photon-Zustands $|1\rangle$ der ausgewählten Mode besteht. Derartig niedrigdimensionale Zustände erlauben es nämlich im Vergleich zu den aus vielen Komponenten $|0\rangle, |1\rangle, \dots, |n\rangle$ bestehenden *Glauber-Zuständen* die Auswirkungen der Dekohärenz auf der niedrigst möglichen Ebene zu studieren: gibt es doch hierbei nur die feste Phasenbeziehung zwischen den beiden beteiligten Zuständen $|0\rangle$ und $|1\rangle$, die als Folge der Dekohärenz verloren gehen wird.

Zum anderen sind derartige Überlagerungen zweier Photonenanzahlzustände seit längerem als ein mögliches Modell für die Speicherung und Verarbeitung von Quanteninformation in einem Quantencomputer im Gespräch ([25], [26]). Für die Realisierung solcher Quantenrechner ist die Dekohärenz das Haupthindernis, da die Wirkungsweise dieser Computer gerade auf der Phasenkohärenz der verwendeten “Qubits” basiert. Diese “Qubits” sind in der Realität quantenmechanische Zwei-Zustands-Systeme und können anders als die “Bits” konventioneller Rechner neben den Zuständen $|0\rangle$ und $|1\rangle$ auch beliebige Superpositionen der Basiszustände annehmen.

- Kapitel 4 schildert im ersten Paragraphen die Erzeugung und Sondierung des oben erwähnten Photonenzustands im Mikromaser. Zusätzlich werden mögliche Fehlerquellen diskutiert.

Es folgen in den restlichen Paragraphen Vorschläge für Experimente am Mikromaser, die sich einen wichtigen Teilaspekt des Dekohärenzmechanismus, nämlich die Exi-

stenz verschränkter Zustände, zunutze machen. Anders als beim Dekohärenzprozeß, bei dem die Verschränkung mit den vielen Freiheitsgraden der Umgebung unweigerlich und als meist unerwünschter Effekt auftritt, wird sie hier gezielt und kontrolliert zwischen Systemen mit wenigen Freiheitsgraden erzeugt.

Das erste dieser Experimente ist eine Abwandlung des geschilderten Verfahrens zur Messung der Dekohärenz einer einzelnen Resonatormode. Der Unterschied besteht darin, daß zwei identische Mikromaser hintereinander geschaltet werden, wobei die beiden Resonatormoden durch die Öffnungen aneinander koppeln können. Präpariert man einen Zustand, bei dem einer der Resonatoren ein Photon enthält, der andere aber nicht, so ist dieser Zustand aufgrund der Kopplung kein Eigenzustand des System-Hamiltonian und somit kein stationärer Zustand. Durch die Kopplung kommt es zu einer kohärenten Oszillation, deren abklingende Amplitude gemessen werden kann und eine Signatur für Dekohärenz darstellt.

Das folgende Experiment liefert die Möglichkeit, mit Hilfe zweier Mikromaser einen Test der *Bell'schen Ungleichung* durchzuführen. Diese Ungleichung stellt ein Kriterium dar, zwischen der Richtigkeit der Quantenmechanik einerseits und der von Theorien mit verborgenen Variablen andererseits zu entscheiden [27]. Sie geht zurück auf eine Veröffentlichung von Einstein, Podolsky und Rosen [28], die die Unvollständigkeit der Quantenmechanik darlegen sollte¹. Die außerordentliche Bedeutung der *Bell'schen Ungleichung* liegt darin, daß sie einen bis zu ihrer Formulierung philosophisch geführten Disput zweier widerstreitender "Schulen" auf die Ebene der experimentellen Überprüfbarkeit gehoben hat. Zeigten Experimente überzeugend die Verletzung dieser Ungleichung, so wäre der Streit zugunsten der Quantentheorie entschieden.

Das war nicht so zu der Zeit als Alain Aspect sein quantenoptisches Experiment zum Test der *Bell'schen Ungleichung* plante [30]. Zweifel an der Richtigkeit der Quantenmechanik zu äußern und sie in einem Experiment zu testen, scheint aber zu dieser Zeit unpopulär gewesen zu sein. J.S. Bell muß sich der Lage selbst bewußt gewesen sein, denn Aspect schildert sein erstes Treffen mit ihm so [31]:

...I got an appointment without delay, and I showed up in John's office at CERN, quite nervous. While I explained my planned experiment, he listened silently. Eventually, I stopped talking, and the first question came: "Have you a permanent position?"

Das letzte hier geschilderte Experiment betrifft die Teleportation eines Quantenzustands des Photonenfelds im Mikromaser. Die Idee der Teleportation beruht darauf, sämtliche Eigenschaften eines Objektes zu analysieren, diese Information über eine gewisse Distanz hinweg zu übermitteln und an dem entfernten Ort daraus das

¹siehe auch die Antwort von N. Bohr [29]

Objekt wieder zu rekonstruieren. Zunächst scheint die *Heisenberg'sche Unschärfere-lation* diesem Vorhaben entgegenzustehen: konjugierte Variable wie Ort und Impuls der atomaren Bausteine eines makroskopischen Objekts können nicht gleichzeitig mit voller Genauigkeit bestimmt werden. Somit kann keine vollständige Kenntnis des Zustands erlangt werden. Bennett et al. [32] zeigten jedoch, daß die Teleportation von Quantenzuständen dennoch möglich ist, wenn man sich die Verschränkung von Quantenobjekten zunutze machen kann. Denn auf Grund der Verschränkung ist eine genaue Kenntnis des Zustands nicht nötig. Diese Verschränkung stellt eine nicht-lokale Korrelation zwischen Quantensystemen dar und dient auf Grund dieser Nicht-Lokalität sozusagen als "Draht" oder Kommunikationskanal, über den der (unbekannte) Zustand vom Sender zum Empfänger teleportiert wird. Die ersten Experimente zur Quanten-Teleportation waren quantenoptische Experimente mit Hilfe verschränkter Photonenpaare ([34], [35], [36]). Das letzte der hier vorgestellten Experimente ist ein Vorschlag, einen unbekannten Quantenzustand² des Mikromaserfeldes zwischen zwei Mikromasern zu teleportieren. Die nötige Verschränkung erfolgt mit einem dritten Resonator. Da das Zeitintervall zwischen Präparation und Teleportation variabel ist, können die Auswirkungen von Dekohärenzeffekten auf die Teleportation im Experiment studiert werden.

²Genauer handelt es sich um einen Superpositionszustand $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ mit unbekannten Koeffizienten α und β .

KAPITEL 2

Dekohärenz in der Quantentheorie

Dieses Kapitel soll eine Einführung in den Begriff der *Dekohärenz* geben, wie er in der modernen Quantentheorie verwendet wird, um die Entstehung irreversibler Prozesse aus reversiblen Gleichungen oder den Übergang von Superpositionen quantenmechanischer Zustände in ein statistisches Gemisch dieser Zustände zu beschreiben. Überhaupt liegt dem Konzept, das man unter dem Begriff *Dekohärenz* zusammenfassen kann, die Frage zu Grunde: wo ist die Grenze zwischen der “klassischen” Welt und der Quantenwelt (vgl. [6], [9])?

Dabei spielt die Kopplung eines Systems an seine Umgebung die entscheidende Rolle.

Die theoretischen Grundlagen werden bereitgestellt und der Mechanismus ausführlich diskutiert, unter besonderer Berücksichtigung der Quantenoptik.

Dekohärenz ist der Verlust von Phasenkorrelationen zwischen überlagerten quantenmechanischen Zuständen und manifestiert sich im allmählichen Verschwinden der Nicht-Diagonalelemente der Dichtematrix für das betrachtete System.

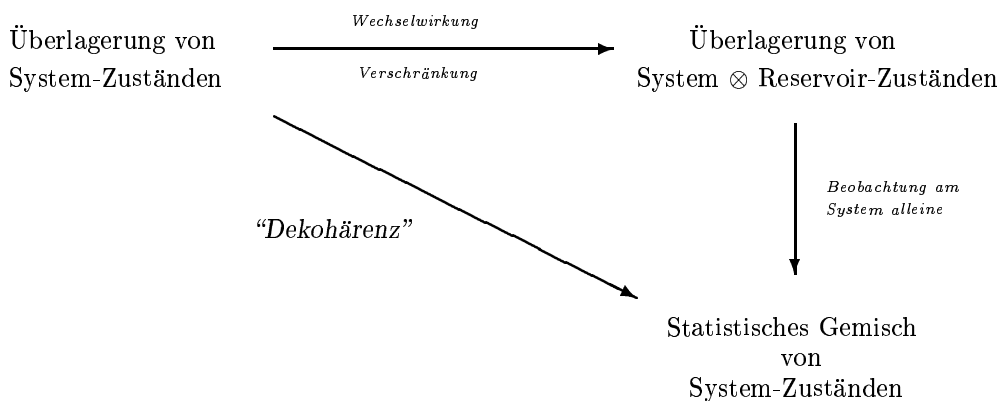
Dies resultiert aus der Verschränkung dieser Zustände durch ihre Wechselwirkung mit der Umgebung. Dieser Prozess überführt eine kohärente Superposition quantenmechanischer Zustände in ein statistisches Gemisch dieser Zustände. Erstaunlicherweise führen also gerade zwei grundlegende Eigenschaften des quantenmechanischen Formalismus, nämlich das Prinzip der Superposition von Zuständen und die nicht-lokale Eigenschaft der Quantenmechanik, die sich in der Verschränkung von Zuständen zeigt, zu Eigenschaften eines quantenmechanischen Systems, die als *klassisch* bezeichnet werden können: die Nicht-Beobachtbarkeit von Superpositionen makroskopischer (aber quantenmechanisch beschriebener) Systeme und die Lokalisierung von solchen Objekten ([5], [6]).

Auch zur Klärung der Frage, wie sich irreversible Prozesse aus einer formal reversiblen Gleichung wie der Schrödinger-Gleichung ergeben, hat die Theorie der Dekohärenz einen Beitrag geleistet: stellt die Umgebung sehr viele Freiheitsgrade zur Verfügung, an die ein Mikrosystem koppeln kann, so wird die Verschränkung des Systems mit der Umgebung irreversibel.

Dabei ist aber Dekohärenz zu unterscheiden von dem Vorgang der Dissipation, zwei Pro-

zesse, die nicht nur auf grundsätzlich verschiedenen Zeitskalen ablaufen, sondern für die auch die zugrunde liegenden Mechanismen verschieden sind. Daher ordnet man der für ein System typischen Dekohärenzzeit oft auch die Bezeichnung T_2 zu, um sie von der Dissipationszeit T_1 zu unterscheiden¹.

Im Zusammenhang mit der Irreversibilität der Vorgänge sollte außerdem noch erwähnt werden, daß zwar die Phasenkorrelationen für das betrachtete **Teilsystem** durch den Dekohärenzmechanismus zerstört werden. Diese ursprünglich nur im Teilsystem vorhandenen Korrelationen gehen aber nicht “verloren”, sondern werden durch die Verschränkung mit den Freiheitsgraden der Umgebung in Korrelationen zwischen Zuständen des **Gesamtsystems** überführt. Stehen sehr viele solcher Freiheitsgrade der Umgebung zur Verfügung, so ist dieser Vorgang irreversibel. Die ursprüngliche Information über die Phasenkorrelationen des Teilsystems ist also im Gesamtsystem noch vorhanden, kann aber durch eine Messung am Teilsystem allein nicht mehr rekonstruiert werden.



Obiges Diagramm verdeutlicht den Vorgang der Dekohärenz. Dabei repräsentiert die linke Seite die rein phänomenologische Seite: ein System, das sich in einer Superposition seiner Zustände befindet entwickelt sich unter dem Einfluss der Dekohärenz in ein statistisches Gemisch dieser Zustände.

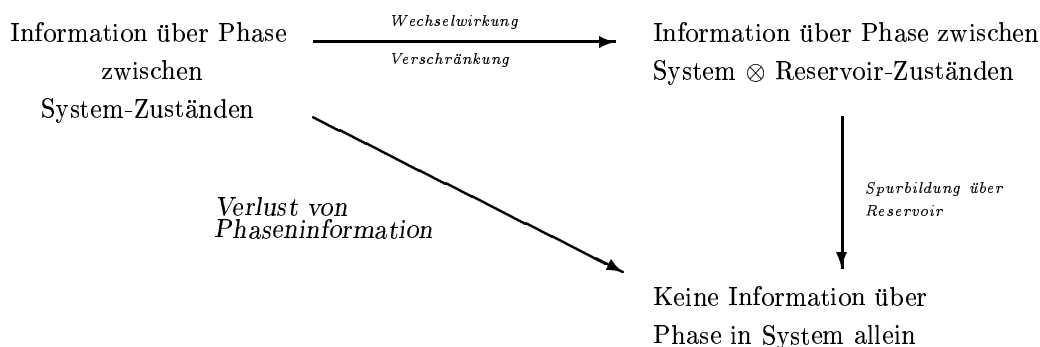
Die rechte Seite veranschaulicht die physikalischen Prozesse, die zu dieser Entwicklung führen: das System wechselwirkt mit seiner Umgebung, und die Systemzustände werden mit den zahlreichen Zuständen des Reservoirs verschränkt. Aus der Superposition von Systemzuständen entsteht dadurch eine Superposition von System-Reservoirzuständen, ein verschränkter Zustand.

Eine Beobachtung oder Messung an dem in Frage kommenden System alleine entspricht

¹ T_1 und T_2 sind hierbei die Relaxationszeiten im Sinne der Bloch'schen Gleichungen

einer Mittelung über die Freiheitsgrade des Reservoirs und führt auf eine statistische Mischung der Systemzustände.

Das zweite Diagramm zeigt die gleiche Situation, jedoch unter dem Gesichtspunkt der Phaseninformation.



Dekohärenz beleuchtet auch das Problem des Meßvorgangs im Rahmen der Quantentheorie neu. In einer Erweiterung des Ansatzes, den von Neuman eingebracht hatte, muss nicht nur das zu beobachtende System an eine Messapparatur, sondern diese auch an die Umgebung gekoppelt werden. Der Mechanismus der Dekohärenz führt dann dazu, daß man keine Überlagerungen von Zuständen des gemessenen Systems mehr beobachtet, sondern auf eine statistische Mischung von reinen Zuständen geführt wird. Der Mechanismus der Dekohärenz erklärt darüberhinaus jedoch nicht, wie aus diesem Gemisch jeweils nur ein bestimmter Zustand im Experiment gemessen werden kann. In diesem Sinne macht also auch die Dekohärenz ein zusätzliches Postulat wie etwa den Kollaps der Wellenfunktion nicht obsolet oder kann dieses formal begründen.

Während also einerseits unsere Erfahrung der Alltagswelt, in der es keine Überlagerungen makroskopisch unterscheidbarer Zustände gibt, die beruhigende Konsequenz einer unvermeidlichen Dekohärenz ist, führt diese auf einem relativ jungen Gebiet der physikalischen Forschung zu unerwünschten Effekten: die Überlegenheit von sog. Quantencomputern im Vergleich zu den "klassischen" Computern beruht gerade auf dem Superpositionsprinzip der Quantentheorie und der Stabilität von Phasenkorrelationen in ihren physikalischen Hardware-Komponenten. Für die physikalische Realisierung eines solchen Quantencomputers hat sich die Dekohärenz als größtes Hindernis herausgestellt.

Der Problemkomplex, aus dem heraus sich schließlich die Theorie der Dekohärenz entwickeln sollte, hat seinen Ursprung wohl in einer Arbeit Erwin Schrödingers, in der er auf eine paradoxe Situation des quantenmechanischen Formalismus hinweist ([4]). Dieses sog.

Schrödinger'sche Katzen-Paradoxon beinhaltet folgende Fragestellung: angenommen eine Katze werde zusammen mit einem radioaktiven Nuklid in eine Black Box gesperrt. Dieses radioaktive Präparat hat eine Wahrscheinlichkeit von 50 %, während der Dauer des Experiments zu zerfallen. Dabei löst der Zerfall des Atomkerns einen Mechanismus aus, der unweigerlich zum Tod der Katze führt. Dann folgt aus den Regeln der Quantenmechanik, insbesondere aus dem Superpositionsprinzip, daß vor einer "Messung" oder Beobachtung des Zustands der Katze (Öffnen der Black Box), der Zustand des Systems Katze + radioaktives Präparat in einer Überlagerung der beiden möglichen Alternativen besteht (Katze lebt ($\mathcal{L}$) und Präparat ist nicht zerfallen (n) oder Katze tot ($\mathcal{T}$) und Präparat ist zerfallen (z))²:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\mathcal{L}, n\rangle + |\mathcal{T}, z\rangle).$$

Erst durch das Öffnen der Box kommt es zur Reduktion dieser Wellenfunktion auf eine ihrer beiden Komponenten.

Oft wird in verkürzter Argumentation die Ansicht vertreten, die Katze selbst sei in einem überlagerten Zustand aus "tot" und "lebendig". Dabei wird nur das Superpositionsprinzip von quantenmechanischen Zuständen beachtet und vergessen, daß es sich in der Tat um einen verschränkten Zustand zweier Teilsysteme, nämlich der Katze einerseits und des radioaktiven Präparats andererseits handelt. Wie im folgenden Abschnitt ausgeführt werden wird, sind Aussagen über einen Teil eines zusammengesetzten Systems erst nach der Mittelung über die Freiheitsgrade des restlichen Systems zulässig, so daß in der Tat nur Überlagerungen der **verschränkten** Zustände vorliegen, die Katze allein jedoch in keiner Überlagerung der Zustände "tot"/"lebendig" ist.

Zwar weist der Dichteoperator für das Gesamtsystem Nichtdiagonalelemente auf, was auf einen überlagerten Zustand hinweist; in obiger Notation ist der Dichteoperator nämlich von der Form:

$$\hat{\rho}_{ges.} = |\Psi\rangle\langle\Psi| = \frac{1}{2} (|\mathcal{L}, n\rangle\langle\mathcal{L}, n| + |\mathcal{T}, z\rangle\langle\mathcal{T}, z| + |\mathcal{L}, n\rangle\langle\mathcal{T}, z| + |\mathcal{T}, z\rangle\langle\mathcal{L}, n|).$$

Der Dichteoperator für das Teilsystem "Katze" ergibt sich daraus durch Spurbildung über die Freiheitsgrade des anderen Teilsystems:

$$\hat{\rho}_{Katze} = \langle n|\hat{\rho}_{ges.}|n\rangle + \langle z|\hat{\rho}_{ges.}|z\rangle = \frac{1}{2}|\mathcal{L}\rangle\langle\mathcal{L}| + \frac{1}{2}|\mathcal{T}\rangle\langle\mathcal{T}|.$$

Die Katze ist also nicht in einem überlagerten Zustand, sondern der Zustand ist ein statistisches Gemisch aus den beiden Möglichkeiten "tot" oder "lebendig". Beim Öffnen der Box ist die Chance, die Katze noch lebendig vorzufinden, also 50%.

Das von Schrödinger angeführte Beispiel trifft den Kern des Problems demnach nicht ganz,

²Es sollte hier erwähnt werden, daß nicht nur die **Superposition** dieser Zustände wichtig ist, sondern auch die **Verschränkung** des Zustands der Katze mit dem Zustand des Präparats.

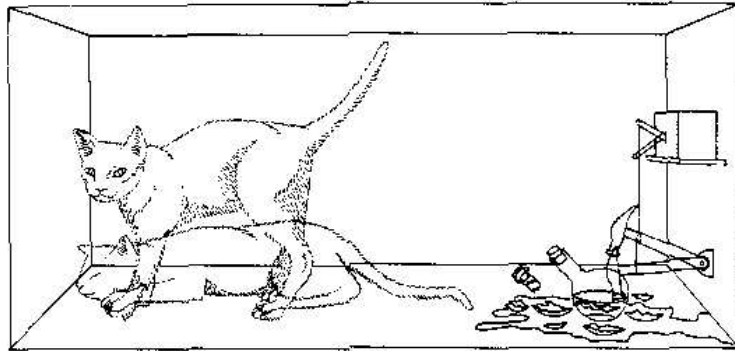


ABBILDUNG 2.1: Veranschaulichung des Katzen-Paradoxons. Der Zustand des Systems besteht aus einer Überlagerung der alternativen Möglichkeiten. Aus [37].

hat aber in der Folge zu einer Diskussion geführt, die sich für die Grundlagen der Quantenmechanik als sehr fruchtbar erwies.

Das Problem selbst, nämlich die Frage nach dem Grund für die Instabilität von Überlagerungen, bleibt davon ja auch unberührt.

Es dauerte dennoch einige Zeit, bis die ersten Schritte hin zu einer theoretischen Klärung der Dekohärenz unternommen wurden.

Die Aufmerksamkeit für Dekohärenzphänomene war zunächst theoretischer Natur und begann wohl mit der Arbeit von Zeh ([7]) im Jahre 1970, auf welche später weitere ([8], [11], [12], [13], [14] u.a.) folgten.

Die raschen Fortschritte der Experimentalphysik in den letzten Jahrzehnten in bezug auf die kontrollierte Herstellung von Systemen mit rein quantenmechanischen Eigenschaften, deren Kontrolle und die Möglichkeit ihrer Abschirmung gegenüber Umgebungseinflüssen haben dann auch das experimentelle Studium von Dekohärenzphänomenen in den Bereich des Möglichen gerückt [24], [38].

So ist es auch das Ziel dieser Arbeit aufzuzeigen, wie Dekohärenzvorgänge mit Hilfe des Mikromasers experimentell untersucht werden können.

2.1 Allgemeines

Die Dynamik eines abgeschlossenen Systems wird in der Quantenmechanik durch die Schrödingergleichung festgelegt:

$$i \cdot \hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle$$

Diese beschreibt die zeitliche Entwicklung eines Zustands $|\psi(t)\rangle$, der als vollständige Beschreibung des Systems betrachtet wird.

In realistischeren Situationen ist jedoch (außer dem Universum) kein physikalisches System vollkommen isoliert von seiner Umgebung, sondern kann auf vielfältige und oft genug unkontrollierbare Weise mit dieser in Wechselwirkung treten.

Den Einfluß einer dissipativen Umgebung auf die Quantenmechanik eines Teilchens wurde zuerst von Feynman ([39]) und später von Caldeira und Leggett ([40]) untersucht.

Aufgrund der Linearität der Schrödingergleichung ist mit zwei Lösungen $|\psi_1(t)\rangle$ und $|\psi_2(t)\rangle$ auch eine beliebige Linearkombination $|\psi(t)\rangle = \alpha|\psi_1(t)\rangle + \beta|\psi_2(t)\rangle$ zu allen Zeiten t eine Lösung der Gleichung, sofern $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ erfüllt ist.

Dies ist das *Superpositionsprinzip* der Quantenmechanik. Es besagt, daß man in der Wellenfunktion, welche Lösung der zugehörigen Einteilchen-Schrödingergleichung ist, die Wahrscheinlichkeits**amplituden** der verschiedenen Möglichkeiten und nicht deren Wahrscheinlichkeiten selbst aufzusummieren hat. Das ist der Grund dafür, daß die Quantenmechanik Interferenzen zwischen den Wahrscheinlichkeits**amplituden** der beteiligten überlagerten Zustände kennt.

Die wesentlichen Aspekte der Dekohärenz lassen sich wie folgt verdeutlichen (s. [6]):

bezeichnen die $|n\rangle$ die Basis-Zustände des beobachteten Systems im System-Hilbertraum $\mathcal{H}$, so ist ein geeigneter Wechselwirkungs-Hamiltonian von der Form

$$\hat{H}_{int} = \sum_n |n\rangle\langle n| \otimes \hat{A}_n. \quad (2.1)$$

Die Operatoren $\hat{A}_n$, die auf die Umgebung wirken, sind Operatoren auf einem Hilbert-Raum $\mathcal{H}'$ mit $\mathcal{H} \cap \mathcal{H}' = \emptyset$ und werden oft auch als Operatoren für eine Meßapparatur gedeutet. Ihre genaue Form ist mehr oder weniger beliebig, sie sollten aber natürlich von der "Quantenzahl" n des gemessenen Systems abhängen.

Befinden sich das gemessene System und die Meßapparatur anfänglich im Zustand $|n\rangle$ bzw. $|\Phi_0\rangle$, so erhält man mit dem Hamiltonian (2.1) folgende Zeitentwicklung:

$$\begin{aligned} |n\rangle|\Phi_0\rangle &\xrightarrow{t} \exp(-i\hat{H}_{int}t)|n\rangle|\Phi_0\rangle = |n\rangle\exp(-i\hat{A}_nt)|\Phi_0\rangle = \\ &=: |n\rangle|\Phi_n(t)\rangle. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Betrachtet man nun eine Überlagerung von Eigenzuständen der "gemessenen" System-Observablen, so führt die Linearität der zeitlichen Entwicklung gemäß der Schrödingergleichung zu folgendem Ergebnis:

$$\left(\sum_n c_n |n\rangle\right) |\Phi_0\rangle \xrightarrow{t} \sum_n c_n |n\rangle |\Phi_n(t)\rangle. \quad (2.3)$$

Hieran erkennt man deutlich, daß System und Umgebung (bzw. Meßapparatur) nun in einem verschränkten Zustand vorliegen, d.h. daß sich die Zustände des Systems und die

der Umgebung nicht mehr in der Form eines einfachen Produkts darstellen lassen.

Im Formalismus der Dichtematrix ist die Dichtematrix des Anfangszustands:

$$\hat{\rho}(0) = \left(\sum_{m,n} c_m^* c_n |m\rangle \langle n| \right) |\Phi_0\rangle \langle \Phi_0|$$

Gemäß (2.3) wird daraus:

$$\hat{\rho}(t) = \sum_{m,n} c_m^* c_n \langle \Phi_m | \Phi_n \rangle |m\rangle \langle n|.$$

Wie später noch genauer ausgeführt werden wird, ergibt sich die Dichtematrix für das zu messende System alleine, indem man die Spur über die Reservoir-Freiheitsgrade bildet. Dies bedeutet, nach der Wechselwirkung mit der Umgebung ist die Dichtematrix für das System diagonal:

$$\hat{\rho}_S(t) = \sum_n |c_n|^2 |n\rangle \langle n|. \quad (2.4)$$

Die Nicht-Diagonalelemente, die Kohärenzen zwischen den Zuständen darstellen, sind also verschwunden. Zumindest sind diese Interferenzterme nicht mehr in der Dichtematrix für das gemessene System wiederzufinden. Ein Vergleich der linken und rechten Seite von (2.3) zeigt schnell, daß die Kohärenzen nicht verlorengegangen, sondern aus dem gemessenen System in das Gesamtsystem (einschließlich der Umgebung) transferiert worden sind.

In nahezu allen realistischen Situationen mit makroskopischen Objekten ist der eben beschriebene Vorgang irreversibel, d.h. die Information über die ursprünglichen Kohärenzen des Systems verteilt sich auf so viele Freiheitsgrade der Umgebung, daß sie nicht vollständig daraus rekonstruiert werden kann.

Die Möglichkeit, daß Zustände eines Systems konstruktiv interferieren und daß somit nicht-verschwindende Nicht-Diagonalelemente in der Dichtematrix auftreten, hängt wesentlich davon ab, daß die Phasenbeziehungen zwischen den Zuständen konstant bleiben.

Dies sei an einem besonders einfachen Fall veranschaulicht, nämlich am Beispiel eines Zwei-Zustand-Systems mit den Basiszuständen $|\uparrow\rangle$ und $|\downarrow\rangle$.

Ein überlagerter Zustand ist also von der Form:

$$|\psi\rangle = \alpha |\uparrow\rangle + \beta |\downarrow\rangle$$

Die komplexen Wahrscheinlichkeitsamplituden $\alpha := |\alpha| e^{i\phi_\uparrow}$ und $\beta := |\beta| e^{i\phi_\downarrow}$ können nach Betrag und Phase zerlegt werden.

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_S = |\psi\rangle \langle \psi| &= |\alpha|^2 |\uparrow\rangle \langle \uparrow| + |\beta|^2 |\downarrow\rangle \langle \downarrow| + \alpha \beta^* |\uparrow\rangle \langle \downarrow| + \alpha^* \beta |\downarrow\rangle \langle \uparrow| \\ &= |\alpha|^2 |\uparrow\rangle \langle \uparrow| + |\beta|^2 |\downarrow\rangle \langle \downarrow| + \\ &+ |\alpha| |\beta| e^{i\Delta\phi} |\uparrow\rangle \langle \downarrow| + |\alpha| |\beta| e^{-i\Delta\phi} |\downarrow\rangle \langle \uparrow| \end{aligned} \quad (2.5)$$

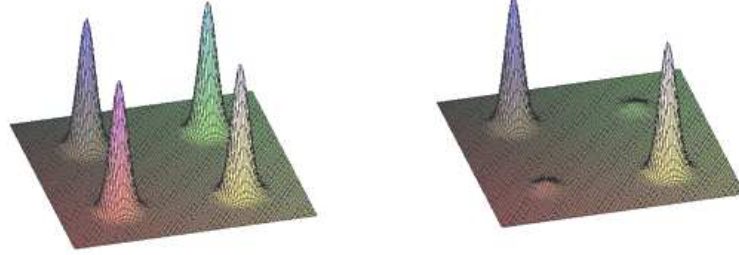


ABBILDUNG 2.2: Graphische Darstellung des Effekts der Dekohärenz auf die Nicht-Diagonalelemente einer Dichtematrix für ein Zwei-Niveau-System.

mit dem Phasenunterschied $\Delta\phi := \phi_{\uparrow} - \phi_{\downarrow}$. Die ersten beiden Summanden stellen die Wahrscheinlichkeiten für die beiden Basiszustände dar, die beiden letzten sind Interferenzterme. Um Interferenzeffekte beobachten zu können, ist es offensichtlich nötig, dass die Phasenbeziehung zwischen den beteiligten Zuständen konstant bleibt. Eine Wechselwirkung mit der Umgebung kann diese Phasenbeziehung - wie wir später sehen werden - auf einer sehr kurzen Zeitskala zerstören, was dazu führt, daß der Interferenzterm in (2.5) verschwindet:

$$\hat{\rho}_S = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & |\alpha||\beta|e^{i\Delta\phi} \\ |\alpha||\beta|e^{-i\Delta\phi} & |\beta|^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & 0 \\ 0 & |\beta|^2 \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

Dieses allmähliche Verschwinden der Interferenzen zwischen den Wahrscheinlichkeitsamplituden der beteiligten Zustände bezeichnet man als *Dekohärenz*.

Nun betrachte man dieses System zusammen mit einer Meßapparatur. Passiert ein Teilchen mit Spin $|\uparrow\rangle$ das Meßgerät, so soll der “Zeiger” des Geräts auf die Stellung $|1\rangle$ wechseln. Tritt ein Teilchen im Zustand $|\downarrow\rangle$ in das Gerät, so soll es seinen ursprünglichen Zeigerstand $|0\rangle$ beibehalten.

Die Meßapparatur selbst ist jedoch auch kein isoliertes System, sondern an die Umgebung gekoppelt. Die Umgebung soll sich zu Anfang im Zustand $|\chi_0(\eta)\rangle$ befinden. Dabei soll η sämtliche Freiheitsgrade der Umgebung bezeichnen. Findet an der Meßapparatur ein Übergang in den Zustand $|1\rangle$ statt, so verursacht die Wechselwirkung mit der Umgebung auch einen neuen Umgebungszustand $|\chi_1(\eta)\rangle$.

Insgesamt finden also folgende zeitliche Entwicklungen statt:

$$\begin{aligned} |\uparrow\rangle \otimes |0\rangle \otimes |\chi_0\rangle &\xrightarrow{t} |\uparrow\rangle \otimes |1\rangle \otimes |\chi_1\rangle \\ |\downarrow\rangle \otimes |0\rangle \otimes |\chi_0\rangle &\xrightarrow{t} |\downarrow\rangle \otimes |0\rangle \otimes |\chi_0\rangle \end{aligned}$$

Aufgrund der Linearität ergibt sich für einen überlagerten Spinzustand die zeitliche Entwicklung wie folgt:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle) \otimes |0\rangle \otimes |\chi_0\rangle \xrightarrow{t} \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle \otimes |1\rangle \otimes |\chi_1\rangle + |\downarrow\rangle \otimes |0\rangle \otimes |\chi_0\rangle).$$

Die Dichtematrix für das Gesamtsystem läßt sich als Summe von Diagonal- und Nichtdiagonalelementen schreiben $\rho = \rho_d + \rho_{nd}$. In obigem Fall:

$$\begin{aligned}\rho_d &= \frac{1}{2}(|\uparrow\rangle\langle\uparrow| \otimes |1\rangle\langle 1| \otimes |\chi_1\rangle\langle\chi_1| + |\downarrow\rangle\langle\downarrow| \otimes |0\rangle\langle 0| \otimes |\chi_0\rangle\langle\chi_0|), \\ \rho_{nd} &= \frac{1}{2}(|\uparrow\rangle\langle\downarrow| \otimes |1\rangle\langle 0| \otimes |\chi_1\rangle\langle\chi_0| + |\downarrow\rangle\langle\uparrow| \otimes |0\rangle\langle 1| \otimes |\chi_0\rangle\langle\chi_1|).\end{aligned}$$

Die bereits erwähnte lokale oder reduzierte Dichtematrix erhält man daraus durch Spurbildung über die Freiheitsgrade der Umgebung:

$$\begin{aligned}\rho_d^{red.} &= \frac{1}{2}(|\uparrow\rangle\langle\uparrow| \otimes |1\rangle\langle 1| + |\downarrow\rangle\langle\downarrow| \otimes |0\rangle\langle 0|) \\ \rho_{nd}^{red.} &= \frac{1}{2}(\langle\chi_0|\chi_1\rangle |\uparrow\rangle\langle\downarrow| \otimes |1\rangle\langle 0| + \langle\chi_1|\chi_0\rangle |\downarrow\rangle\langle\uparrow| \otimes |0\rangle\langle 1|).\end{aligned}$$

Hieran ersieht man, daß nur die Nichtdiagonalelemente der reduzierten Dichtematrix von der Kopplung an die Umgebung beeinflußt werden. Genauer gesagt hängt dieser Einfluß ab vom Überlapp der Umgebungszustände $\langle\chi_0|\chi_1\rangle$.

Je leichter die Wechselwirkung mit der Umgebung diese also von einem Zustand in einen dazu orthogonalen versetzt, umso stärker ist der Einfluß der Dekohärenz. In der Tat bedeutet die große Zahl der Umgebungsfreiheitsgrade ein sehr dichtes Energiespektrum der einzelnen Umgebungszustände. Daher ist die Umgebung sehr sensitiv gegenüber Störungen. Aus der Störungstheorie ist bekannt, daß bei Störungen die Änderung in der Wellenfunktion indirekt proportional zur Differenz der ungestörten Energien ist. Folglich bewirkt bei einem sehr dichten Energiespektrum bereits eine kleine Änderung eines Energieniveaus eine sehr starke Änderung der zugehörigen Wellenfunktion. Es ist also sehr leicht, durch eine kleine Störung die Umgebung vom Zustand $|\chi_0\rangle$ in einen dazu orthogonalen Zustand $|\chi_1\rangle$ zu versetzen. Deshalb ist der Überlapp dieser beiden Zustände Null, und die Nichtdiagonalelemente der reduzierten Dichtematrix verschwinden, da sie den Überlapp als Faktor enthalten.

2.2 Dichtematrix-Formalismus

Um den Einfluß der Umgebung angemessen beschreiben zu können (beispielsweise als Wärmebad), ist es nötig die oben dargestellte Beschreibung mit Hilfe von Zustandsvektoren durch den Formalismus der Dichtematrix zu ersetzen.

Zu Beginn der Wechselwirkung seien das System und die Umgebung noch nicht korreliert,

so daß sich die Dichtematrix als direktes Produkt der Dichtematrix $\rho_S(0)$ für das betrachtete System einerseits und $\rho_R(0)$ für die Umgebung (“Reservoir”) andererseits schreiben läßt:

$$\rho(0) = \rho_S(0) \otimes \rho_R(0) \quad (2.7)$$

In der Wechselwirkungsdarstellung besteht der Hamilton-Operator aus drei Summanden: je einen für die freie Entwicklung von System $\hat{H}_S$ und die freie Entwicklung der Umgebung $\hat{H}_R$, sowie einem Kopplungs- oder Wechselwirkungsterm $\hat{H}_{int}$:

$$\hat{H} = \hat{H}_S + \hat{H}_R + \hat{H}_{int}$$

Die zeitliche Entwicklung der Dichtematrix wird durch die Schrödinger-von Neumann Gleichung gegeben:

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}(t) = \frac{1}{i\hbar}[\hat{H}_{int}, \hat{\rho}] \quad (2.8)$$

2.2.1 Die Reduzierte Dichtematrix

Die Dichtematrix für das System alleine erhält man, indem man die Spur über alle Freiheitsgrade der Umgebung bildet:

$$\rho_S(t) = Tr_R[\rho(t)]$$

Man nennt diese auch die *reduzierte Dichtematrix* für das System alleine.

Die *reduzierte Dichtematrix* erlaubt es, Erwartungswerte von solchen Observablen zu bilden, die sich nur auf ein Teilsystem eines größeren Gesamtsystems beziehen. Zur Verdeutlichung sei $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ der Hilbertraum des aus den Teilsystemen A und B zusammengesetzten Gesamtsystems als Tensorprodukt der Teil-Hilberträume. Eine Observable $\hat{\mathcal{O}}_A$ für das Teilsystem A alleine ist dann auf dem vollständigen Hilbertraum $\mathcal{H}$ definiert als:

$$\hat{\mathcal{O}} = \hat{\mathcal{O}}_A \otimes \hat{\mathbf{1}}_B$$

Für den Erwartungswert dieser Observable erhält man:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{O} \rangle &= Tr_{A,B}(\rho \hat{\mathcal{O}}) = \sum_{a,b} \langle a, b | \rho \hat{\mathcal{O}} | b, a \rangle = \\ &= \sum_a \langle a | \underbrace{\sum_b \langle b | \rho \hat{\mathbf{1}}_B | b \rangle}_{=: \rho_A} \hat{\mathcal{O}}_A | a \rangle = Tr_A(\rho_A \hat{\mathcal{O}}_A) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Gleichung (2.9) liefert eine Definition der *reduzierten Dichtematrix* für Teilsystem A als Spurbildung über die Freiheitsgrade des anderen Teilsystems B.

2.2.2 Master-Gleichung

Um Gleichung (2.8) zu lösen geht man beim Master-Gleichung-Ansatz von einer Hauptannahme aus:

die Zahl der Freiheitsgrade des Reservoirs ist sehr groß. Dies bedeutet, daß die Entwicklung des Reservoirs nicht in allen Details nachvollzogen werden kann. Wenn dies nicht möglich ist, bleibt also nur übrig nach einer Gleichung zu suchen, die eben keine Operatoren für das Reservoir, sondern nur noch Operatoren für das System enthält (s. a. [55], [56], [57]). Wie oben gesehen erreicht man dies durch Spurbildung über die Reservoir-Koordinaten und erhält aus (2.8) für die System-Dichtematrix:

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}_S(t) = \frac{1}{i\hbar}Tr_{\mathcal{R}}[\hat{H}_{int}, \hat{\rho}(t)] \quad (2.10)$$

Integriert man nun (2.8) formal und setzt das Ergebnis wieder in (2.10) ein, so erhält man:

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}_S(t) = \left(\frac{1}{i\hbar}\right)^2 \int_0^t dt' Tr_{\mathcal{R}}([\hat{H}_{int}(t), [\hat{H}_{int}(t'), \hat{\rho}(t')]]). \quad (2.11)$$

Man beachte hierbei, daß bei der formalen Integration von (2.8) der Term erster Ordnung $Tr_{\mathcal{R}}[\hat{H}_{int}(t), \hat{\rho}(0)]$ verschwindet, da für alle relevanten Wechselwirkungs-Hamiltonians der Quantenoptik die Grösse $Tr_{\mathcal{R}}[\hat{\rho}_{\mathcal{R}}(0), \hat{H}_{int}(t)]$ verschwindet.

Bislang wurden keine Näherungen gemacht und Gleichung (2.11) ist daher exakt. Für viele Probleme ist sie in dieser Form allerdings nur schwer oder gar nicht analytisch zu lösen. Um zu einer einfacheren Form zu gelangen, führt man deshalb folgende Näherungen ein:

- Rotating-Wave-Näherung;
- Born-Näherung: $\hat{\rho}(t') = \hat{\rho}_S(t') \otimes \hat{\rho}_{\mathcal{R}}(t')$;
- das Reservoir wird durch die Wechselwirkung mit dem System nicht beeinflusst:
 $\hat{\rho}_{\mathcal{R}}(t) = \hat{\rho}_{\mathcal{R}}(0)$.
- Markow-Näherung: $\hat{\rho}_S(t') \approx \hat{\rho}_S(t)$

In der Literatur werden diese Annahmen oft unter der Bezeichnung **Born-Markow-Näherung** zusammengefasst.

In dieser Näherung wird also (2.11) zu:

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}_S(t) = \left(\frac{1}{i\hbar}\right)^2 \int_0^t dt' Tr_{\mathcal{R}}([\hat{H}_{int}(t), [\hat{H}_{int}(t'), \hat{\rho}_S(t) \otimes \hat{\rho}_{\mathcal{R}}(0)]]). \quad (2.12)$$

Im folgenden Abschnitt soll diese Gleichung für ein wichtiges Beispiel aus der Quantenoptik gelöst werden, nämlich für die Kopplung einer einzelnen Mode des elektromagnetischen Feldes in einem Resonator an die Strahlungsmoden der Umgebung. Dies ist auch die

Situation im später geschilderten Experiment, in dem die Dekohärenz zeitlich aufgelöst “sichtbar” gemacht werden soll.³

2.3 Dekohärenz in der Quantenoptik

Auch ein Resonator, in dem sich ein Strahlungsfeld befindet (z. B. der Mikrowellenresonator eines Mikromaser), ist kein vollständig isoliertes System, sondern tritt auf verschiedenste Arten mit seiner Umgebung in Wechselwirkung. So koppelt beim Mikromaser die Mode des elektromagnetischen Feldes im Innern über Öffnungen und Oberfläche an Strahlungsfelder in der Umgebung.

Ohne auf diese Mechanismen im einzelnen einzugehen, liefert der Master-Gleichungs-Ansatz eine theoretische Vorhersage dafür, auf welche Art die Dämpfung der Nichtdiagonalelemente von relevanten Parametern wie Temperatur oder Resonatorgüte abhängt.

In Kapitel 4 wird diesbezüglich ein Experiment vorgestellt, mit dessen Hilfe die aus dem Master-Gleichungs-Ansatz gewonnenen Vorhersagen überprüft werden können.

2.3.1 Master-Gleichung

Aus Gründen der Allgemeingültigkeit und Übersichtlichkeit betrachte man eine Wechselwirkung der Form

$$\hat{V}(t) := \sum_i \hat{S}_i(t) \otimes \hat{R}_i(t) \quad (2.13)$$

mit Operatoren $\hat{S}_i$ für das Subsystem und solchen $\hat{R}_i$ für das Reservoir.

Ohne Beweis seien hier einige wichtige Beziehungen für das Rechnen mit direkten Produkten angegeben, die im folgenden auch immer wieder herangezogen werden⁴ :

$$\begin{aligned} \hat{O}_{1 \otimes 2} &= \hat{O}_1 \otimes \hat{O}_2; \\ \hat{O}_1 \otimes \hat{O}_2 &= [\hat{O}_1 \otimes \mathbf{1}_2] [\mathbf{1}_1 \otimes \hat{O}_2] \\ \Rightarrow [\hat{O}_1 \otimes \hat{O}_2] [\hat{P}_1 \otimes \hat{P}_2] &= \hat{O}_1 \hat{P}_1 \otimes \hat{O}_2 \hat{P}_2 \\ \Rightarrow [\hat{O}_1 \otimes \hat{O}_2, \hat{P}_1 \otimes \hat{P}_2] &= \hat{O}_1 \hat{P}_1 \otimes \hat{O}_2 \hat{P}_2 - \hat{P}_1 \hat{O}_1 \otimes \hat{P}_2 \hat{O}_2 \end{aligned}$$

Dann ist:

$$Tr_{\mathcal{R}}[\hat{V}(t), \rho_S(0) \otimes \hat{\rho}_{\mathcal{R}}(0)] = \sum_i \left([\hat{S}_i(t), \hat{\rho}_S(0)] Tr_{\mathcal{R}}(\hat{R}_i(t) \hat{\rho}_{\mathcal{R}}(0)) \right)$$

³Es sei an dieser Stelle bereits bemerkt, daß dem Schema zur Aufzeichnung der Dekohärenz kein bestimmtes Modell für einen Mechanismus der Dekohärenz zugrundegelegt wird.

⁴Man beachte, daß im folgenden das Klammersymbol $[,]$ stets als Kommutator aufzufassen ist.

Die Spur verschwindet jedoch für all jene Operatoren $\hat{R}_i$, deren Diagonalelemente verschwinden (wie z.B. die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren $\hat{b}^\dagger, \hat{b}$).

Denn:

$$\begin{aligned} Tr_{\mathcal{R}}(\hat{R}_i(t)\hat{\rho}_{\mathcal{R}}(0)) &= \sum_{\mu} \langle \mu | \hat{R}_i(t) \hat{\rho}_{\mathcal{R}}(0) | \mu \rangle = \sum_{\mu} \langle \mu | \hat{R}_i(t) \mathbf{1} \hat{\rho}_{\mathcal{R}}(0) | \mu \rangle = \\ &= \sum_{\mu} \langle \mu | \hat{R}_i(t) | \mu \rangle \langle \mu | \hat{\rho}_{\mathcal{R}}(0) | \mu \rangle \end{aligned}$$

und die Matrixelemente $\langle \mu | \hat{R}_i(t) | \mu \rangle = 0$.

Somit verschwindet der Term erster Ordnung in (2.12), und es bleibt noch, den Term zweiter Ordnung unter dem Integral auszuwerten:

$$\begin{aligned} [\hat{V}(t), [\hat{V}(t'), \hat{\rho}(t')]] &= [\hat{V}(t), \hat{V}(t')\hat{\rho}(t')] - [\hat{V}(t), \hat{\rho}(t')\hat{V}(t')] = \\ &= \hat{V}(t)\hat{V}(t')\hat{\rho}(t') - \hat{V}(t')\hat{\rho}(t')\hat{V}(t) - \hat{V}(t)\hat{\rho}(t')\hat{V}(t') + \hat{\rho}(t')\hat{V}(t')\hat{V}(t) \end{aligned}$$

Einsetzen von (2.13) ergibt:

$$\begin{aligned} [\hat{V}(t), [\hat{V}(t'), \hat{\rho}(t')]] &= \sum_k (\hat{S}_k(t) \otimes \hat{R}_k(t)) \sum_i (\hat{S}_i(t') \otimes \hat{R}_i(t')) (\hat{\rho}_S(t') \otimes \hat{\rho}_{\mathcal{R}}(t')) - \\ &- \sum_i (\hat{S}_i(t') \otimes \hat{R}_i(t')) (\hat{\rho}_S(t') \otimes \hat{\rho}_{\mathcal{R}}(t')) \sum_k (\hat{S}_k(t) \otimes \hat{R}_k(t)) - \\ &- \sum_k (\hat{S}_k(t) \otimes \hat{R}_k(t)) (\hat{\rho}_S(t') \otimes \hat{\rho}_{\mathcal{R}}(t')) \sum_i (\hat{S}_i(t') \otimes \hat{R}_i(t')) + \\ &+ (\hat{\rho}_S(t') \otimes \hat{\rho}_{\mathcal{R}}(t')) \sum_i (\hat{S}_i(t') \otimes \hat{R}_i(t')) \sum_k (\hat{S}_k(t) \otimes \hat{R}_k(t)) = \\ &= \sum_{i,k} (\hat{S}_k(t) \hat{S}_i(t') \hat{\rho}_S(t') \otimes \hat{R}_k(t) \hat{R}_i(t') \hat{\rho}_{\mathcal{R}}(t')) - \\ &- \sum_{i,k} (\hat{S}_i(t') \hat{\rho}_S(t') \hat{S}_k(t) \otimes \hat{R}_i(t') \hat{\rho}_{\mathcal{R}}(t') \hat{R}_k(t)) - \\ &- \sum_{i,k} (\hat{S}_k(t) \hat{\rho}_S(t') \hat{S}_i(t') \otimes \hat{R}_k(t) \hat{\rho}_{\mathcal{R}}(t') \hat{R}_i(t')) + \\ &+ \sum_{i,k} (\hat{\rho}_S(t') \hat{S}_i(t') \hat{S}_k(t) \otimes \hat{\rho}_{\mathcal{R}}(t') \hat{R}_i(t') \hat{R}_k(t)) \end{aligned}$$

Wegen $Tr_2(A_1 \otimes B_2) = A_1 Tr_2(B_2)$ und unter der Voraussetzung $\hat{\rho}_{\mathcal{R}}(t') = \hat{\rho}_{\mathcal{R}}(0)$ gilt somit:

$$\begin{aligned} Tr_{\mathcal{R}}([\hat{V}(t), [\hat{V}(t'), \hat{\rho}(t')]]) &= \left(\sum_{i,k} \hat{S}_k(t) \hat{S}_i(t') \hat{\rho}_S(t') \right) Tr_{\mathcal{R}}(\hat{R}_k(t) \hat{R}_i(t') \hat{\rho}_{\mathcal{R}}(0)) - \\ &- \left(\sum_{i,k} \hat{S}_i(t') \hat{\rho}_S(t') \hat{S}_k(t) \right) Tr_{\mathcal{R}}(\hat{R}_i(t') \hat{\rho}_{\mathcal{R}}(0) \hat{R}_k(t)) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left(\sum_{i,k} \hat{S}_k(t) \hat{\rho}_S(t') \hat{S}_i(t') \right) Tr_{\mathcal{R}} \left(\hat{R}_k(t) \hat{\rho}_{\mathcal{R}}(0) \hat{R}_i(t') \right) + \\
& + \left(\sum_{i,k} \hat{\rho}_S(t') \hat{S}_i(t') \hat{S}_k(t) \right) Tr_{\mathcal{R}} \left(\hat{\rho}_{\mathcal{R}}(0) \hat{R}_i(t') \hat{R}_k(t) \right)
\end{aligned}$$

Auf Grund der zyklischen Eigenschaft der Spur $Tr(ABC) = Tr(CAB) = Tr(BCA)$ und mit der Abkürzung $\langle \hat{O} \rangle := Tr(\hat{O} \hat{\rho})$ gelangt man schließlich zu:

$$\begin{aligned}
Tr_{\mathcal{R}} \left([\hat{V}(t), [\hat{V}(t'), \hat{\rho}(t')]] \right) &= \left(\sum_{i,k} \hat{S}_k(t) \hat{S}_i(t') \hat{\rho}_S(t') \right) \langle \hat{R}_k(t) \hat{R}_i(t') \rangle - \\
& - \left(\sum_{i,k} \hat{S}_i(t') \hat{\rho}_S(t') \hat{S}_k(t) \right) \langle \hat{R}_k(t) \hat{R}_i(t') \rangle - \\
& - \left(\sum_{i,k} \hat{S}_k(t) \hat{\rho}_S(t') \hat{S}_i(t') \right) \langle \hat{R}_i(t') \hat{R}_k(t) \rangle + \\
& + \left(\sum_{i,k} \hat{\rho}_S(t') \hat{S}_i(t') \hat{S}_k(t) \right) \langle \hat{R}_i(t') \hat{R}_k(t) \rangle = \\
& = \sum_{i,k} \left([\hat{S}_k(t), \hat{S}_i(t') \hat{\rho}_S(t')] \langle \hat{R}_k(t) \hat{R}_i(t') \rangle \right. \\
& \quad \left. + [\hat{\rho}_S(t') \hat{S}_i(t'), \hat{S}_k(t)] \langle \hat{R}_i(t') \hat{R}_k(t) \rangle \right). \tag{2.14}
\end{aligned}$$

Dies ist ausgeschrieben der in Gleichung (2.12) unter dem Integral auftretende Ausdruck für die Spurbildung über die Freiheitsgrade des Reservoirs bezüglich des Doppelkommutators, wenn für den Wechselwirkungs-Hamiltonian $\hat{H}_{int} = \hat{V}$ gewählt wird.

2.3.2 Kopplung einer Resonatormode an ein thermisches Reservoir

Seien $\hat{a}^\dagger, \hat{a}$ die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren für ein Quant der Resonatormode, und $\hat{b}_k^\dagger, \hat{b}_k$ die entsprechenden für die k-te Mode des Reservoirs. Für $\hat{a}^\dagger, \hat{a}$ und $\hat{b}_k^\dagger, \hat{b}_k$ seien die Vertauschungsrelationen für Bosonen erfüllt.

Der Wechselwirkungsoperator in der Wechselwirkungsdarstellung lautet dann:

$$\hat{V}(t) = \hbar \left(\hat{a}^\dagger e^{i\nu t} \otimes \sum_{\lambda} \mathbf{g}_{\lambda} \hat{b}_{\lambda} e^{-i\omega_{\lambda} t} + \hat{a} e^{-i\nu t} \otimes \sum_{\lambda} \mathbf{g}_{\lambda} \hat{b}_{\lambda}^\dagger e^{i\omega_{\lambda} t} \right). \quad (2.15)$$

In der Notation aus dem vorherigen Abschnitt bedeutet dies $i, k \in \{1, 2\}$ und

$$\begin{aligned} \hat{S}_1(t) &= \hat{a}^\dagger e^{i\nu t}, \\ \hat{S}_2(t) &= \hat{a} e^{-i\nu t}, \\ \hat{R}_1(t) &= \sum_{\lambda} \mathbf{g}_{\lambda} \hat{b}_{\lambda} e^{-i\omega_{\lambda} t}, \\ \hat{R}_2(t) &= \sum_{\lambda} \mathbf{g}_{\lambda} \hat{b}_{\lambda}^\dagger e^{i\omega_{\lambda} t} \end{aligned}$$

Es treten also in (2.14) folgende Mittelwerte auf:

$$\begin{aligned} i = 1, k = 1 &\rightarrow \langle \hat{R}_1(t) \hat{R}_1(t') \rangle \\ &\rightarrow \langle \hat{R}_1(t') \hat{R}_1(t) \rangle \\ i = 1, k = 2 &\rightarrow \langle \hat{R}_2(t) \hat{R}_1(t') \rangle \\ &\rightarrow \langle \hat{R}_1(t') \hat{R}_2(t) \rangle \\ i = 2, k = 1 &\rightarrow \langle \hat{R}_2(t) \hat{R}_1(t') \rangle \\ &\rightarrow \langle \hat{R}_2(t') \hat{R}_1(t) \rangle \\ i = 2, k = 2 &\rightarrow \langle \hat{R}_2(t) \hat{R}_2(t') \rangle \\ &\rightarrow \langle \hat{R}_2(t') \hat{R}_2(t) \rangle \end{aligned}$$

Es handelt sich bei den Größen $\langle \hat{R}_i(t) \hat{R}_k(t') \rangle$ um zeitliche Korrelationsfunktionen für die einzelnen Moden des Reservoirs. Physikalisch “messen” sie, wie eine Anregung des Reservoirs zur Zeit t' mit einer Anregung zur Zeit t korreliert ist. Je länger die Zeitintervalle $t'-t$ werden, umso schwächer werden freilich die bestehenden Korrelationen. Die charakteristische Breite des Realteils dieser Funktion heißt auch **Korrelationszeit** t_c . Sie ist ein Maß für das “Gedächtnis” des Reservoirs.

Da $\hat{\rho}_{\mathcal{R}}(0)$ für ein thermisches Reservoir diagonal ist (s. (2.16)), ergibt sich z. B. für $\langle \hat{R}_1(t) \hat{R}_1(t') \rangle$:

$$\sum_{\mu_1, \dots, \mu_{\kappa}, \dots, \mu_{\lambda}, \dots} \left(\sum_{\kappa} \sum_{\lambda} \mathbf{g}_{\kappa} \mathbf{g}_{\lambda} \underbrace{\langle \mu_1, \dots, \mu_{\kappa}, \dots, \mu_{\lambda}, \dots | \hat{b}_{\kappa} \hat{b}_{\lambda} \hat{\rho}_{\mathcal{R}}(0) | \mu_1, \dots, \mu_{\kappa}, \dots, \mu_{\lambda}, \dots \rangle}_{=\sqrt{(\mu_{\kappa}+1)(\mu_{\lambda}+1)} \langle \mu_1, \dots, \mu_{\kappa}+1, \dots, \mu_{\lambda}+1, \dots | \hat{\rho}_{\mathcal{R}}(0) | \mu_1, \dots, \mu_{\kappa}, \dots, \mu_{\lambda}, \dots \rangle = 0} e^{-i(\omega_{\lambda} t' + \omega_{\kappa} t)} \right).$$

Daran erkennt man leicht, daß nur diejenigen Mittelwerte nicht verschwinden, für welche sowohl $\kappa = \lambda$ gilt und welche zudem nur “gemischte” Produkte $\hat{b}_\lambda \hat{b}_\lambda^\dagger$ oder $\hat{b}_\lambda^\dagger \hat{b}_\lambda$ enthalten.

Für ein Multimodenfeld im thermischen Gleichgewicht lautet der Dichteoperator:

$$\hat{\rho}_{\mathcal{R}}(0) = \prod_{\lambda} \sum_{\mu} \exp\left(-\frac{\hbar\omega_{\lambda}\mu_{\lambda}}{k_B T}\right) \left\{1 - \exp\left(-\frac{\hbar\omega_{\lambda}}{k_B T}\right)\right\} |\mu\rangle_{\lambda\lambda} \langle\mu| \quad (2.16)$$

und damit die relevanten Matrixelemente:

$$\langle \dots, \mu_{\lambda}, \dots | \hat{b}_{\lambda} \hat{b}_{\lambda}^{\dagger} \hat{\rho}_{\mathcal{R}}(0) | \dots, \mu_{\lambda}, \dots \rangle = (\mu_{\lambda} + 1) \langle \dots, \mu_{\lambda}, \dots | \hat{\rho}_{\mathcal{R}}(0) | \dots, \mu_{\lambda}, \dots \rangle \quad (2.17)$$

und

$$\langle \dots, \mu_{\lambda}, \dots | \hat{b}_{\lambda}^{\dagger} \hat{b}_{\lambda} \hat{\rho}_{\mathcal{R}}(0) | \dots, \mu_{\lambda}, \dots \rangle = \mu_{\lambda} \langle \dots, \mu_{\lambda}, \dots | \hat{\rho}_{\mathcal{R}}(0) | \dots, \mu_{\lambda}, \dots \rangle \quad (2.18)$$

Bezeichnet man mit

$$(n_{th})_{\lambda} = \langle n_{\lambda} \rangle = \sum_{\mu_{\lambda}} \mu_{\lambda} (\rho_{\mathcal{R}}(0))_{\mu_{\lambda}, \mu_{\lambda}} = \frac{1}{\exp\left(\frac{\hbar\omega_{\lambda}}{k_B T}\right) - 1}$$

so findet man schließlich:

$$\langle \hat{b}_{\lambda} \hat{b}_{\lambda}^{\dagger} \rangle = (\bar{n}_{\lambda} + 1) \quad (2.19)$$

$$\langle \hat{b}_{\lambda}^{\dagger} \hat{b}_{\lambda} \rangle = \bar{n}_{\lambda} \quad (2.20)$$

Die Master-Gleichung lautet mit $\hat{\rho}_S(t') = \hat{\rho}_S(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{\rho}_S &= -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' \sum_{i,k} \left([\hat{S}_k(t), \hat{S}_i(t') \hat{\rho}_S(t')] \langle \hat{R}_k(t) \hat{R}_i(t') \rangle + [\hat{\rho}_S(t') \hat{S}_i(t'), \hat{S}_k(t)] \langle \hat{R}_i(t') \hat{R}_k(t) \rangle \right) = \\ &= -\frac{1}{\hbar^2} \underbrace{\int_0^t dt' [\hat{S}_2(t), \hat{S}_1(t') \hat{\rho}_S(t)] \langle \hat{R}_2(t) \hat{R}_1(t') \rangle}_{:=I_1} - \frac{1}{\hbar^2} \underbrace{\int_0^t dt' [\hat{\rho}_S(t) \hat{S}_1(t'), \hat{S}_2(t)] \langle \hat{R}_1(t') \hat{R}_2(t) \rangle}_{:=I_2} - \\ &- \frac{1}{\hbar^2} \underbrace{\int_0^t dt' [\hat{S}_1(t), \hat{S}_2(t') \hat{\rho}_S(t)] \langle \hat{R}_1(t) \hat{R}_2(t') \rangle}_{:=I_3} - \frac{1}{\hbar^2} \underbrace{\int_0^t dt' [\hat{\rho}_S(t) \hat{S}_2(t'), \hat{S}_1(t)] \langle \hat{R}_2(t') \hat{R}_1(t) \rangle}_{:=I_4}. \end{aligned}$$

Die Berechnung der Integrale soll nun im Folgenden exemplarisch für I_1 vorgeführt werden, die Berechnung der übrigen erfolgt analog.

$$\begin{aligned} I_1 &:= -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' [\hat{S}_2(t), \hat{S}_1(t') \hat{\rho}_S(t)] \langle \hat{R}_2(t) \hat{R}_1(t') \rangle = \\ &= -\frac{1}{\hbar^2} \left(\int_0^t dt' \hat{S}_2(t) \hat{S}_1(t') \hat{\rho}_S(t) \langle \hat{R}_2(t) \hat{R}_1(t') \rangle - \int_0^t dt' \hat{S}_1(t') \hat{\rho}_S(t) \hat{S}_2(t) \langle \hat{R}_2(t) \hat{R}_1(t') \rangle \right) = \\ &= -\left(\int_0^t dt' \sum_{\lambda} \mathbf{g}_{\lambda}^2 \bar{n}_{\lambda} \hat{a} \hat{a}^{\dagger} \hat{\rho}_S(t) e^{i\nu(t'-t)} e^{-i\omega_{\lambda}(t'-t)} - \int_0^t dt' \sum_{\lambda} \mathbf{g}_{\lambda}^2 \bar{n}_{\lambda} \hat{a}^{\dagger} \hat{\rho}_S(t) \hat{a} e^{i\nu(t'-t)} e^{-i\omega_{\lambda}(t'-t)} \right). \end{aligned}$$

Für das weitere nimmt man nun an, das Reservoir bestehe aus überabzählbar unendlich vielen Moden, so daß sich die Summe über die Moden durch ein Integral über eine Modendichte $D(\omega_\lambda)$ ersetzen läßt.

$$I_1 \longrightarrow - \left(\int_0^t dt' \int_\lambda d\lambda D(\omega_\lambda) \mathbf{g}_\lambda^2 \bar{n}_\lambda \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{\rho}_S(t) e^{-i(\omega_\lambda - \nu)(t' - t)} - \int_0^t dt' \int_\lambda d\lambda D(\omega_\lambda) \mathbf{g}_\lambda^2 \bar{n}_\lambda \hat{a}^\dagger \hat{\rho}_S(t) \hat{a} e^{-i(\omega_\lambda - \nu)(t' - t)} \right).$$

Ersetzt man $t' - t \rightarrow \tau$, so erhält man für das Differential $dt' \rightarrow d\tau$; da die Korrelationen nur auf der Zeitskala t_c der Korrelationszeit wesentlich von Null verschieden sind, kann das Integral ins Unendliche ausgedehnt werden:

$$I_1 = - \left(\int_0^\infty d\tau \int_\lambda d\lambda D(\omega_\lambda) \mathbf{g}_\lambda^2 \bar{n}_\lambda \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{\rho}_S(t) e^{-i(\omega_\lambda - \nu)\tau} - \int_0^\infty d\tau \int_\lambda d\lambda D(\omega_\lambda) \mathbf{g}_\lambda^2 \bar{n}_\lambda \hat{a}^\dagger \hat{\rho}_S(t) \hat{a} e^{-i(\omega_\lambda - \nu)\tau} \right).$$

Zuletzt bleibt nun noch das Zeitintegral $\int_0^\infty d\tau e^{-i(\omega_\lambda - \nu)\tau}$ auszuwerten.

Dazu fügt man den Konvergenzterm $e^{-\epsilon\tau}$ hinzu und betrachtet dann den Limes $\epsilon \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty d\tau e^{-i(\omega_\lambda - \nu)\tau} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^\infty d\tau e^{-i(\omega_\lambda - \nu - i\epsilon)\tau} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{i(\omega_\lambda - \nu) + \epsilon} = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon}{(\omega_\lambda - \nu)^2 + \epsilon^2} - i \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\omega_\lambda - \nu}{(\omega_\lambda - \nu)^2 + \epsilon^2}. \end{aligned}$$

Der Realteil ist eine Lorentz-Funktion, die im Limes $\epsilon \rightarrow 0$ in eine Deltafunktion mit der eingeschlossenen Fläche π übergeht:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon}{(\omega_\lambda - \nu)^2 + \epsilon^2} = \pi \delta(\omega_\lambda - \nu).$$

Der Imaginärteil wird in diesem Grenzfall zum *Cauchy'schen Hauptwert* $\mathcal{P}$:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\omega_\lambda - \nu}{(\omega_\lambda - \nu)^2 + \epsilon^2} = \mathcal{P} \left(\frac{1}{\omega_\lambda - \nu} \right).$$

Ähnlich wie die δ -Funktion ist auch dieser über eine Integralbeziehung definiert:

$$\int dx \mathcal{P} \left(\frac{1}{x} \right) f(x) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-\infty}^{-\epsilon} dx \frac{f(x)}{x} + \int_{\epsilon}^{\infty} dx \frac{f(x)}{x} \right].$$

Mit Hilfe dieser Konstruktion lässt sich also um die Singularität x herumintegrieren.

Der Beitrag, der vom *Cauchy'schen Hauptwert* stammt, wird gewöhnlich vernachlässigt (im Falle eines einfachen harmonischen Oszillators ist er verantwortlich für die *Lamb-Verschiebung*). Schließlich erhält man für das Integral I_1 :

$$I_1 = -\pi D(\nu) \mathbf{g}^2(\nu) \bar{n}(\nu) \left(\hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{\rho}_S(t) - \hat{a}^\dagger \hat{\rho}_S(t) \hat{a} \right) \quad (2.21)$$

Hierbei ist $D(\nu) = V\nu^2/\pi^2c^3$ mit Quantisierungsvolumen V die Zustandsdichte des Reservoirs, $g(\nu)$ die Kopplungsstärke und $\bar{n}(\nu)$ die mittlere Photonenzahl bei der Frequenz ν .

Analog zu dem eben gezeigten Rechenweg erhält man auch die drei restlichen Integrale. Führt man als neue Größe die Zerfallsrate für das Resonatorfeld

$$\mathcal{C} := 2\pi[g(\nu)]^2 D(\nu)$$

ein, so lauten diese also:

$$I_1 = -\frac{1}{2}\mathcal{C}\bar{n}(\nu) \left(\hat{a}\hat{a}^\dagger \hat{\rho}_S - \hat{a}^\dagger \hat{\rho}_S \hat{a} \right) \quad (2.22)$$

$$I_2 = -\frac{1}{2}\mathcal{C}(\bar{n}(\nu) + 1) \left(\hat{\rho}_S \hat{a}^\dagger \hat{a} - \hat{a} \hat{\rho}_S \hat{a}^\dagger \right) \quad (2.23)$$

$$I_3 = -\frac{1}{2}\mathcal{C}(\bar{n}(\nu) + 1) \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{\rho}_S - \hat{a} \hat{\rho}_S \hat{a}^\dagger \right) \quad (2.24)$$

$$I_4 = -\frac{1}{2}\mathcal{C}\bar{n}(\nu) \left(\hat{\rho}_S \hat{a} \hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger \hat{\rho}_S \hat{a} \right) \quad (2.25)$$

All dies zusammengefaßt führt auf die Master-Gleichung für das Resonatorfeld:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\hat{\rho}_S(t) = & -\frac{\mathcal{C}}{2}\bar{n}_{th}(\hat{a}\hat{a}^\dagger \hat{\rho}_S(t) - 2\hat{a}^\dagger \hat{\rho}_S(t)\hat{a} + \hat{\rho}_S(t)\hat{a}\hat{a}^\dagger) - \\ & -\frac{\mathcal{C}}{2}(\bar{n}_{th} + 1)(\hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{\rho}_S(t) - 2\hat{a} \hat{\rho}_S(t)\hat{a}^\dagger + \hat{\rho}_S(t)\hat{a}^\dagger \hat{a}). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Dabei ist $\bar{n}_{th} = \bar{n}(\nu)$ die mittlere Zahl von Quanten (bei der Frequenz ν) im thermischen Reservoir.

Die Master-Gleichung für die Matrixelemente des Dichteoperators ergibt sich daraus durch Multiplikation mit $\langle n|$ von links und mit $|m\rangle$ von rechts:

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{n,m} = \frac{d}{dt}\langle n|\hat{\rho}_S|m\rangle = & -\frac{\mathcal{C}}{2}[2\bar{n}_{th}(n+m+1) + n+m]\rho_{n,m} + \mathcal{C}\bar{n}_{th}\sqrt{nm}\rho_{n-1,m-1} + \\ & + \mathcal{C}(\bar{n}_{th} + 1)\sqrt{(n+1)(m+1)}\rho_{n+1,m+1}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Dabei wurde der Index S für "System" der Leserlichkeit halber weggelassen.

Einige qualitative Anmerkungen hierzu.

- eine (Haupt- oder Neben-)Diagonale des Dichteoperators koppelt gemäß (2.27) nur an die jeweils darunter- und darüberliegende Diagonale.
- auf die Schnelligkeit des Zerfalls der Matrixelemente nehmen die folgenden drei Faktoren Einfluß: Zerfallsrate $\mathcal{C}$ für das Resonatorfeld, Quantenzahlen (n,m) und die mittlere Photonenzahl $\bar{n}_{th}$ des Reservoirs.
- daraus ergibt sich: bei festem $\mathcal{C}$ und $\bar{n}_{th}$ sind die Quantenzahlen (n,m) möglichst klein zu wählen, wenn man die Dekohärenz verlangsamen möchte.

Möchte man also die Dekohärenzeigenschaften der Resonatormode untersuchen, so ist es zweckmäßig, daß möglichst wenig mehr als zwei Anregungszustände auftreten, die zudem auch noch möglichst kleine Quantenzahlen haben sollten.

Für ein Mikromaser-Feld ist deshalb die Wahl der Zustände $|0\rangle, |1\rangle$ naheliegend.

Es gibt dann also nur die Nichtdiagonalelemente ρ_{10} und $\rho_{01} = \rho_{10}^*$ der Dichtematrix. Das heißt, Gleichung (2.27) reduziert sich folgendermaßen:

$$\dot{\rho}_{10} = -\frac{\mathcal{C}}{2} [4\bar{n}_{th} + 1] \rho_{10}$$

mit der Lösung

$$\rho_{10}(t) = e^{-\frac{\mathcal{C}}{2} [4\bar{n}_{th} + 1] t} \rho_{10}(0).$$

Im Idealfall $T=0$ ($\bar{n}_{th} = 0$) hängt die Zerfallsrate dann nur noch von den Eigenschaften des verwendeten Resonators (Resonanzfrequenz ν , Kopplungsstärke an die Umgebung $\mathbf{g}(\nu)$) ab.

Im Grenzfall großer Quantenzahlen, also an der Grenze zwischen quantenmechanischer und klassischer Welt, findet der Prozeß der Dekohärenz -wie zu sehen- sehr viel rascher statt als es bei kleinen Quantenzahlen geschieht. Unter dem Blickwinkel der Dekohärenz sind also nicht makroskopische Objekte besonders stabil hinsichtlich ihrer Kohärenzen, sondern gerade die Objekte, die am weitesten von der Grenze zur klassischen Welt entfernt sind.

Im Hinblick auf das später zu schildernde Experiment erscheint es daher naheliegend, die theoretischen Voraussagen auch durch eine Variation der Kopplung an die Umgebung zu überprüfen. Da der Großteil der Auskopplung des Resonatorfeldes wohl durch die beiden Öffnungen verursacht wird, kann man durch Variation derselben durch Extrapolation der Meßwerte Rückschlüsse auf den funktionalen Zusammenhang von Lochgröße und Stärke der Kopplung gewinnen.

2.3.3 Strahlungslose Dephasierung

Die zeitliche Entwicklung der Diagonalelemente in (2.27) gibt die Energiedissipation wieder, während das Verschwinden der Nicht-Diagonalelemente den zunehmenden Verlust von Phaseninformation zeigt. Um den Unterschied zwischen beiden Prozessen noch etwas deutlicher werden zu lassen, kann man die oben geschilderte Methode verwenden, um die Mastergleichung für eine Situation herzuleiten, in der es keine Energiedissipation gibt, obwohl Dephasierung genauso eintritt wie in obigem Beispiel.

Man denke hierbei beispielsweise an ein schweres Atom in einem Reservoir niedrigerenergetischer Photonen. Energiedissipation am Atom findet nicht statt, da kein nennenswerter Energie- oder Impulsübertrag von den Photonen auf das Atom stattfindet. Befindet sich das Atom hingegen in einer Überlagerung von Energie-Eigenzuständen, so führt die Wechselwirkung mit dem Photonenbad zu einem Verlust dieser Überlagerung und projiziert das

Atom auf einen bestimmten Energie-Eigenzustand. Selbst bei so niedrigen Photonenenergien, die den Energiezustand des Atoms nicht beeinflussen können, geht die Phaseninformation über eine evtl. Superposition der atomaren Energie-Eigenzustände verloren. Genauer wird sie - wie oben erläutert - durch die Verschränkung mit dem Photonenbad in eine Superposition verschränkter Zustände transformiert und ist damit für das Teilsystem Atom allein nicht mehr zugänglich.

Der Zustand des Atoms allein ist dann eine statistische Mischung aus den Eigenzuständen, die vor dem Kontakt mit dem Photonenbad an der Bildung der Superposition beteiligt waren. Daher findet man Atome unter "normalen" Bedingungen⁵ auch stets in einem ihrer Eigenzustände und beobachtet nie eine Überlagerung derselben.

Im Falle des Mikromasers etwa entspräche dieser Prozeß der Streuung eines cavity-Photons an einem Photon des Reservoirs.

Der zugehörige Hamilton-Operator lautet in der Wechselwirkungsdarstellung:

$$\hat{V}(t) = \hbar \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} \otimes \sum_{\lambda} \mathbf{g}_{\lambda} \hat{b}_{\lambda}^\dagger e^{i\omega_{\lambda} t} + \hat{a}^\dagger \hat{a} \otimes \sum_{\lambda} \mathbf{g}_{\lambda}^* \hat{b}_{\lambda} e^{-i\omega_{\lambda} t} \right). \quad (2.28)$$

Damit hat man:

$$\hat{S}_1(t) = \hat{S}_1 = \hat{a}^\dagger \hat{a} \quad (2.29)$$

$$\hat{S}_2(t) = \hat{S}_2 = \hat{a}^\dagger \hat{a} \quad (2.30)$$

$$\hat{R}_1(t) = \sum_{\lambda} b f g_{\lambda} \hat{b}_{\lambda}^\dagger e^{i\omega_{\lambda} t} \quad (2.31)$$

$$\hat{R}_2(t) = \sum_{\lambda} \mathbf{g}_{\lambda}^* \hat{b}_{\lambda} e^{-i\omega_{\lambda} t} \quad (2.32)$$

Die weiteren Schritte erfolgen nun analog zum Vorgehen im vorigen Abschnitt. Zu beachten ist hierbei insbesondere, daß die Operatoren für das System keine Zeitabhängigkeit mehr enthalten, da nur gemischte Produkte aus $\hat{a}^\dagger$ und $\hat{a}$ auftreten.

Es ergeben sich wiederum vier Integrale, von denen wieder exemplarisch das Integral I_1 (vgl. Abschnitt 2.3.2) ausgewertet werden soll:

$$\begin{aligned} I_1 &:= -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' [\hat{S}_2, \hat{S}_1 \hat{\rho}_S(t)] \langle \hat{R}_2(t) \hat{R}_1(t') \rangle = \\ &= -\frac{1}{\hbar^2} \left(\int_0^t dt' \hat{S}_2 \hat{S}_1 \hat{\rho}_S(t) \langle \hat{R}_2(t) \hat{R}_1(t') \rangle - \int_0^t dt' \hat{S}_1 \hat{\rho}_S(t) \hat{S}_2 \langle \hat{R}_2(t) \hat{R}_1(t') \rangle \right) = \\ &= - \left(\int_0^t dt' \sum_{\lambda} \mathbf{g}_{\lambda}^2 \bar{n}_{\lambda} \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{\rho}_S(t) e^{-i\omega_{\lambda}(t'-t)} - \int_0^t dt' \sum_{\lambda} \mathbf{g}_{\lambda}^2 \bar{n}_{\lambda} \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{\rho}_S(t) \hat{a}^\dagger \hat{a} e^{-i\omega_{\lambda}(t'-t)} \right). \end{aligned}$$

⁵Das soll heißen unter Bedingungen, die den Einfluß der Dekohärenz nicht künstlich unterdrücken.

Der Übergang zu einer kontinuierlichen Modendichte führt dann auf:

$$I_1 \longrightarrow - \left(\int_0^t dt' \int_\lambda d\lambda D(\omega_\lambda) \mathbf{g}_\lambda^2 \bar{n}_\lambda \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{\rho}_S(t) e^{-i\omega_\lambda(t'-t)} - \int_0^t dt' \int_\lambda d\lambda D(\omega_\lambda) \mathbf{g}_\lambda^2 \bar{n}_\lambda \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{\rho}_S(t) \hat{a}^\dagger \hat{a} e^{-i\omega_\lambda(t'-t)} \right).$$

Im Unterschied zum vorherigen Abschnitt soll nun zunächst die Integration über die Moden ausgeführt werden. Dazu sei angenommen, daß die Größen $D(\omega_\lambda)$, $\mathbf{g}_\lambda$ und $\bar{n}_{th}(\omega_\lambda)$ um die Resonatorfrequenz ν nur schwach variieren, daher an der Stelle ν ausgewertet werden können und somit vor das Integral gezogen werden können. Damit entspricht die Integration über die Moden der Zeitintegration des vorherigen Abschnitts mit der Ersetzung:

$$\int_0^\infty d\tau e^{i(\omega_\lambda - \nu)\tau} \longrightarrow \int_0^\infty d\lambda e^{-i(t-t')\omega_\lambda}$$

und liefert wieder den Wert

$$\int_0^\infty d\lambda e^{-i(t-t')\omega_\lambda} = 2\pi\delta(t-t').$$

Es sei hier angemerkt, daß in diesem Fall die Annahme über die schwache Variation der Kopplung und der Modendichte um die Resonatorfrequenz automatisch auf eine Differentialgleichung führt, die lokal in der Zeit ist. Für das Integral hat man also:

$$I_1 = -\pi D(\nu) \mathbf{g}^2(\nu) \bar{n}(\nu) \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{\rho}_S(t) - \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{\rho}_S(t) \hat{a}^\dagger \hat{a} \right).$$

Daraus ergibt sich als Master-Gleichung im Wechselwirkungsbild für den phasengedämpften Oszillator:

$$\frac{d}{dt} \hat{\rho}(t) = -\frac{\mathcal{C}}{2} (2\bar{n}_{th} + 1) \left[(\hat{a}^\dagger \hat{a})^2 \hat{\rho} - 2\hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{\rho} \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{\rho} (\hat{a}^\dagger \hat{a})^2 \right]. \quad (2.33)$$

Diese Gleichung ist leicht zu integrieren und liefert z.B. für die Matrixelemente in der Fock-Basis:

$$\rho_{nm} = e^{-\mathcal{C}(\bar{n}_{th} + 1/2)(n-m)^2 t} \rho_{nm}(0). \quad (2.34)$$

Einige Anmerkungen auch hierzu:

1. die Diagonalelemente erfahren keine Dämpfung, d.h. der phasengedämpfte Oszillator zeigt keinerlei Dissipation
2. die Nicht-Diagonalelemente werden gedämpft mit einem Dämpfungsfaktor $a(n, m) := \exp(-\mathcal{C}(\bar{n}_{th} + 1/2)(n - m)^2 t)$, der von vier verschiedenen Parametern abhäng. Diese sind:
 - die Zeit t (natürlicherweise).

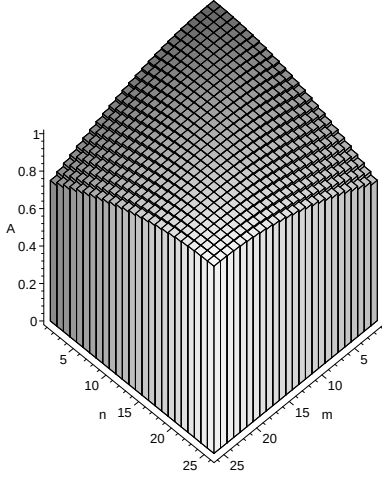


ABBILDUNG 2.3: Matrix A der Dämpfungskoeffizienten $a(n, m) =: A_{nm}$ zur "Systemzeit" $Ct = 0.01$

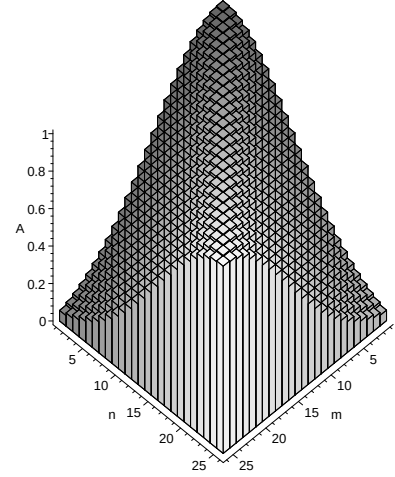


ABBILDUNG 2.4: Matrix A der Dämpfungskoeffizienten $a(n, m) =: A_{nm}$ zur "Systemzeit" $Ct = 0.1$

- die Zerfallskonstante $\mathcal{C}$ des Resonators, die im wesentlichen das Inverse der Resonatorgüte ist.
 - die thermische Anregung $\bar{n}_{th}$ des Reservoirs.
 - das Quadrat des "Abstands" $(n - m)^2$
3. da die Diagonalelemente der Dichtematrix in der Fock-Basis nicht beeinflußt werden, und die Dekohärenz nur an den Nicht-Diagonalelementen angreift, stellt diese Basis eine sog. "Zeiger-Basis" für den phasengedämpften Oszillator dar.

Die Abbildungen (2.3)-(2.6) veranschaulichen dies und zeigen die zeitliche Entwicklung der Dämpfungsfaktoren für verschiedene "Systemzeiten" Ct zusammengefaßt in einer Matrix bis $n_{max} = m_{max} = 25$.

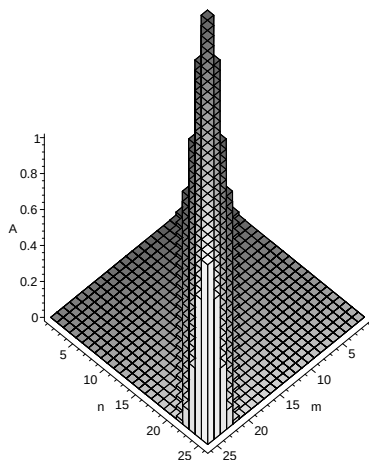


ABBILDUNG 2.5: Matrix A der Dämpfungskoeffizienten $a(n, m) =: A_{nm}$ zur “Systemzeit” $Ct = 0.5$

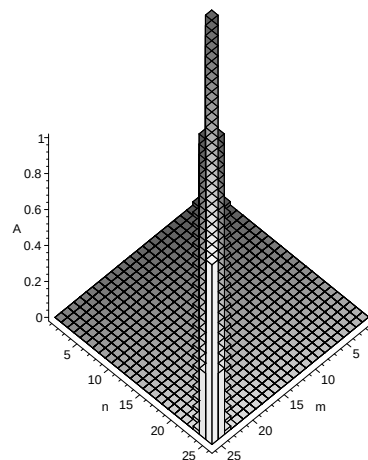


ABBILDUNG 2.6: Matrix A der Dämpfungskoeffizienten $a(n, m) =: A_{nm}$ zur “Systemzeit” $Ct = 1$

2.4 Lindblad-Operator

Eine alternative Möglichkeit zur Herleitung der Master-Gleichung für ein System bietet die Theorie der “Super-Operatoren”, die auf die Lindblad-Form der Master-Gleichung führt [52].

Diese Theorie soll hier nicht in ihrer vollen mathematischen Allgemeinheit und Strenge, sondern nur so weit ausgeführt werden, wie es zum Verständnis der wesentlichen Schritte nötig ist.

Den Ausgangspunkt bildet wieder ein System, das aus zwei Teilsystemen zusammengesetzt ist. Um in der Notation zu bleiben, mögen diese beiden Untersysteme wieder mit $\mathcal{S}$ und $\mathcal{R}$ bezeichnet werden, obgleich sich der Formalismus durchaus nicht nur auf System-Reservoir-Wechselwirkungen beschränkt.

2.4.1 Kraus-Darstellung von Super-Operatoren

Die Kraus-Darstellung gibt Super-Operatoren als eine Summe von Operatoren an und kann wie folgt entwickelt werden:

angenommen das aus zwei Teilen zusammengesetzte System werde beschrieben durch eine Dichtematrix der Form:

$$\hat{\rho} = \hat{\rho}_{\mathcal{S}} \otimes |\psi\rangle_{\mathcal{R}}\langle\psi|.$$

Hierbei ist ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen, dass sich das zweite Teilsystem in einem reinen Zustand $|\psi\rangle_{\mathcal{R}}\langle\psi|$ befindet, da auch gemischte Zustände sich als Summe reiner Zustände darstellen lassen.

Für das Gesamtsystem soll die zeitliche Entwicklung unitär sein, d.h. durch eine unitäre Transformation der Form

$$\hat{U}_{S\mathcal{R}}(\hat{\rho}_S \otimes |\psi\rangle_{\mathcal{R}\mathcal{R}}\langle\psi|)\hat{U}_{S\mathcal{R}}^\dagger$$

dargestellt werden.

Die zeitliche Entwicklung für das Teilsystem S alleine gewinnt man daraus durch Spurbildung über die Koordinaten des zweiten Systems:

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_S^t &= \text{Tr}_{\mathcal{R}}\left(\hat{U}_{S\mathcal{R}}(\hat{\rho}_S \otimes |\psi\rangle_{\mathcal{R}\mathcal{R}}\langle\psi|)\hat{U}_{S\mathcal{R}}^\dagger\right) \\ &= \sum_{\mu}\langle\mu|\hat{U}_{S\mathcal{R}}|\psi\rangle\hat{\rho}_S\langle\psi|\hat{U}_{S\mathcal{R}}^\dagger|\mu\rangle,\end{aligned}$$

wobei die $\{|\mu\rangle\}$ eine orthonormierte Basis für den Hilbertraum $\mathcal{H}_{\mathcal{R}}$ und $\hat{\rho}_S^t$ der transformierte Dichteoperator für das System S ist.

Zur Abkürzung seien die Operatoren

$$\hat{M}_\mu = \langle\mu|\hat{U}_{S\mathcal{R}}|\psi\rangle$$

eingeführt, womit sich dann der gesuchte Super-Operator $\hat{?}(\cdot)$ wie folgt schreiben lässt:

$$\hat{?}(\hat{\rho}_S) := \hat{\rho}_S^t = \sum_{\mu}\hat{M}_\mu\hat{\rho}_S\hat{M}_\mu^\dagger. \quad (2.35)$$

Diese Gleichung definiert eine lineare Abbildung, die lineare Operatoren auf lineare Operatoren abbildet.

Eine derartige Abbildung mit Hilfe der $\hat{M}_\mu$, welche

$$\sum_{\mu}\hat{M}_\mu\hat{M}_\mu^\dagger = \mathbf{1}_S$$

erfüllen heißt ein *Super-Operator*.⁶

2.4.2 Lindblad-Gleichung

Zur Herleitung der *Lindblad-Gleichung* lassen wir uns von der Analogie zur unitären zeitlichen Entwicklung des Dichteoperators leiten, die durch die Schrödinger-Gleichung beschrieben wird:

$$\dot{\rho} = -i[H, \rho],$$

die sich formal integrieren lässt und auf

$$\rho(t) = e^{-iHt}\rho(0)e^{iHt}$$

⁶Diese Eigenschaft ist im vorliegenden durch die Unitarität von $\hat{U}_{S\mathcal{R}}$ gewährleistet.

führt, wenn H zeitunabhängig ist.

Diese Gleichung soll nun so weit verallgemeinert werden, daß auch nicht-unitäre Transformationen (in der Markow-Näherung) eingeschlossen sind, also formal:

$$\dot{\rho} = \mathcal{L}[\rho] \quad (2.36)$$

Der lineare Operator $\mathcal{L}$ vermittelt also einen Super-Operator im gleichen Sinn wie der Hamilton-Operator H die unitäre Zeitentwicklung vermittelt.

Dieser Operator $\mathcal{L}$ wird *Lindblad-Operator* genannt.

Formal läßt sich (2.36) durch

$$\rho(t) = e^{\mathcal{L}t}[\rho(0)]$$

lösen, wenn $\mathcal{L}$ zeitunabhängig vorausgesetzt wird.

Ein allgemeiner Super-Operator hat eine Kraus-Darstellung der Form:

$$\rho(t) = \hat{\tau}_t(\rho(0)) = \sum_{\mu} \hat{M}_{\mu}(t) \rho(0) \hat{M}_{\mu}^{\dagger}(t). \quad (2.37)$$

Zur genaueren Bestimmung der $\hat{M}_{\mu}$ dienen folgende Überlegungen:

1. $\hat{\tau}_{t=0} = \mathbf{1}$
2. Wegen der Linearitätseigenschaft hat nach dem infinitesimalen Zeitintervall dt der Dichte-Operator die Form:

$$\rho(dt) = \rho(0) + \mathcal{O}(dt),$$

also der Dichte-Operator zur Zeit $t=0$ und Terme linear in dt . Einer der Kraus-Operatoren ist also von der Form $\hat{M}_0 = \mathbf{1} + \mathcal{O}(dt)$, alle andern sind von der Ordnung $\sqrt{dt}$, da in der Kraus-Darstellung ja die Produkte $\hat{M}_{\mu}(t) \dots \hat{M}_{\mu}^{\dagger}(t)$ auftreten.

3. Es läßt sich also schreiben:

$$\begin{aligned} \hat{M}_{\mu} &= \sqrt{dt} \hat{L}_{\mu}, \mu = 1, 2, 3 \dots \\ \hat{M}_0 &= \mathbf{1} + (-i\hat{H} + \hat{K})dt, \end{aligned}$$

mit hermiteschen Operatoren $\hat{H}$ und $\hat{K}$, sowie Operatoren $\hat{L}_{\mu}$, $\hat{H}$, $\hat{K}$, welche von nullter Ordnung in dt sind.

4. Zur Bestimmung von $\hat{K}$ dient die Normierungsbedingung der Kraus-Operatoren:

$$\mathbf{1} = \sum_{\mu} \hat{M}_{\mu}^{\dagger} \hat{M}_{\mu} = \mathbf{1} + dt(2\hat{K} + \sum_{\mu>0} \hat{L}_{\mu}^{\dagger} \hat{L}_{\mu}),$$

woraus sich

$$\hat{K} = -\frac{1}{2} \sum_{\mu>0} \hat{L}_{\mu}^{\dagger} \hat{L}_{\mu}$$

ergibt.

Mit der linearen Approximation $\rho(dt) = \rho(0) + dt\dot{\rho}(0)$ erhält man damit nach Einsetzen in (2.37) die *Lindblad-Gleichung*:

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}(t) = \mathcal{L}[\hat{\rho}(t)] = -i[\hat{H}, \hat{\rho}] + \sum_{\mu>0} \left(\hat{L}_{\mu}\hat{\rho}\hat{L}_{\mu}^{\dagger} - \frac{1}{2}\hat{L}_{\mu}^{\dagger}\hat{L}_{\mu}\hat{\rho} - \frac{1}{2}\hat{\rho}\hat{L}_{\mu}^{\dagger}\hat{L}_{\mu} \right). \quad (2.38)$$

Die Operatoren $\hat{L}_{\mu}$ heißen dabei die *Lindblad-Operatoren* oder *Quantum Jump Operatoren*, da jeder Term der Form $\hat{L}_{\mu}\hat{\rho}\hat{L}_{\mu}^{\dagger}$ einen solchen “Quantensprung” beschreibt, während der erste Term in (2.38) die übliche unitäre Zeitentwicklung vermittelt und die Terme $\frac{1}{2}\hat{L}_{\mu}^{\dagger}\hat{L}_{\mu}\hat{\rho}$ und $\frac{1}{2}\hat{\rho}\hat{L}_{\mu}^{\dagger}\hat{L}_{\mu}$ für die richtige Normierung sorgen, wenn keine quantum jumps auftreten.

2.5 Die Bloch-Sphäre

Zur Visualisierung des Dichteoperators eines Zwei-Niveau-Systems bedient man sich eines Konzepts, das aus der Theorie der Systeme mit Spin bekannt ist: des Bloch-Vektors und der Bloch-Sphäre. Mit ihrer Hilfe erhält man eine gute Veranschaulichung des Dekohärenzvorgangs in einem Zwei-Niveau-System.

Bekannt ist, daß die drei Pauli-Matrizen zusammen mit der Einheitsmatrix eine Basis für den Raum der hermiteschen 2×2 -Matrizen bilden. Da auch der Dichteoperator für das Zwei-Niveau-System als solche dargestellt werden kann, läßt sich dieser folglich als Linearkombination der Basismatrizen mit reellen Koeffizienten schreiben. Für eine beliebige Zwei-Niveau-Dichtematrix ρ gilt also:

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{2}(\mathbf{1} + r_x\sigma_x + r_y\sigma_y + r_z\sigma_z) = \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + r_z & r_x - ir_y \\ r_x + ir_y & 1 - r_z \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Der Faktor $\frac{1}{2}$ taucht aus folgendem Grund auf: jede der drei Pauli-Matrizen hat die Spur Null, daher trägt zur Spur des Dichteoperators nur die Einheitsmatrix bei, deren Spur 2 ist. Der Faktor stellt also sicher, daß $\text{Tr}(\rho) = 1$, wie gefordert. Die $r_i, i \in \{x, y, z\}$ faßt man als Komponenten eines Vektors, des sog. Bloch-Vektors auf: $\vec{r} = (r_x, r_y, r_z)$.

Weitere Einsicht in die nähere Beschaffenheit dieses Vektors gewinnt man aus den Eigenschaften, die eine Dichtematrix *p. def.* erfüllt: ein Dichteoperator ist ein positiv definiter Operator, muß also

1. hermitesch sein,
2. $\text{tr}(\rho) \geq 0$ haben,
3. $\det(\rho) \geq 0$ haben.

Eigenschaften a) und b) sind unmittelbar klar. Eigenschaft c) bedeutet:

$$1 - r_x^2 - r_y^2 - r_z^2 \geq 0$$

bzw.

$$r_x^2 + r_y^2 + r_z^2 \leq 1$$

so daß für den Betrag des Bloch-Vektors folgt: $0 \leq |r| \leq 1$. Jedem Blochvektor entspricht also ein Punkt auf oder im Inneren der Bloch-Sphäre, weshalb man wohl genauer von einer 3D-Sphäre oder Bloch-Kugel sprechen sollte. Den Punkten auf dem Rand der Kugel (auf der 2D-Sphäre) kommt jedoch eine besondere Bedeutung zu, denn sie repräsentieren die reinen Zustände, was man wie folgt leicht einsieht:

für Punkte auf dem Rand verschwindet die Determinante von ρ . Nun ist es stets möglich, ρ so zu diagonalisieren, daß $\det(\rho) = \rho_{00}\rho_{11}$ gilt. Dann muß mindestens einer der beiden Faktoren verschwinden. Um aber $\text{Tr}(\rho) = 1$ zu garantieren, kann nur genau einer der beiden verschwinden, und der andere muß 1 ergeben. D.h. also, die Punkte auf der Sphäre repräsentieren Dichtematrizen, die eine der beiden Formen haben:

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \rho = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

In Koordinatenschreibweise also $\rho = |0'\rangle\langle 0'|$ oder $\rho = |1'\rangle\langle 1'|$, wobei die gestrichenen Zustände daran erinnern sollen, daß die Diagonalisierung mit einer Drehung des Koordinatensystems einherging, und der Bloch-Vektor daher nicht notwendigerweise in einem der beiden Pole der Sphäre enden muß.

Was ist nun die angekündigte Veranschaulichung der Dekohärenz in diesem Bild?

Wie gesehen bewirkt die einsetzende Dekohärenz ein Abklingen der Nicht-Diagonalelemente der Dichtematrix, d.h. $r_x - ir_y$ und $r_x + ir_y$ verschwinden *gleichzeitig*. Das kann nur eintreten, wenn gleichzeitig r_x und r_y verschwinden. Der Bloch-Vektor wird also auf die z-Achse, die Achse, die durch den Nord- und Südpol der Sphäre verläuft, projiziert. War demnach der Ausgangszustand eine Überlagerung der beiden Basiszustände $|0\rangle$ und $|1\rangle$ zu gleichen Teilen, dessen Bloch-Vektor also in der Äquatorialebene der Kugel, so schrumpft dieser unter dem Einfluß der Dekohärenz schließlich bis auf einen Punkt, den Mittelpunkt der Sphäre. Dieser repräsentiert einen gemischten Zustand zu gleichen Teilen aus den beiden Basiszuständen: $\rho = |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|$.

Dieser Übergang von überlagerten Zuständen in ein Gemisch von Zuständen ist ja gerade das Charakteristikum der Dekohärenz.

2.6 Zusammenfassende Betrachtungen

Das Konzept der Dekohärenz entwickelte sich aus dem Bedürfnis, die klassischen Eigenschaften von Objekten, wie Lokalisierung etc., als einen Grenzfall der Quantenmechanik

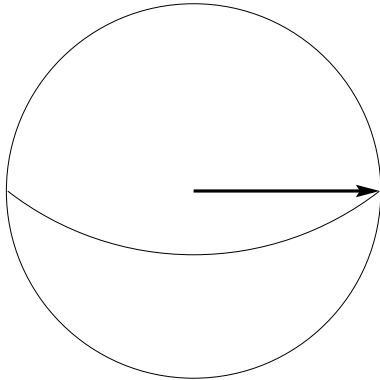


ABBILDUNG 2.7: Bloch-Vektor einer Superposition der Zustände $|0\rangle$ und $|1\rangle$.

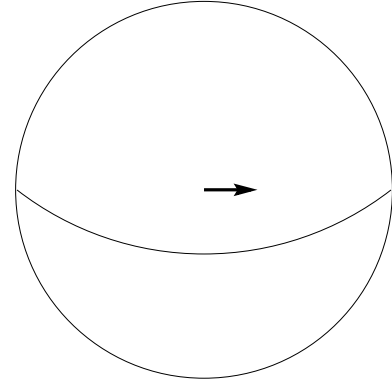


ABBILDUNG 2.8: Unter dem Einfluß der Dekohärenz schrumpft der Bloch-Vektor auf den Mittelpunkt der Bloch-Sphäre.

zu verstehen. Makroskopische Objekte setzen sich zusammen aus Mikroobjekten, die den Gesetzen der Quantenmechanik gehorchen. Dennoch zeigen sich spezifisch quantenmechanische Eigenschaften wie die Superposition von Zuständen nicht mehr bei makroskopischen Objekten. Es erhob sich daher die Frage, wo die Grenze zwischen klassischer und quantenmechanischer Beschreibung von Systemen zu ziehen sei, bzw. was bei makroskopischen Objekten zur Unterdrückung oder zum Verschwinden quantenmechanischer Phänomene führt.

Die Theorie der Dekohärenz erklärt dies durch die Tatsache, daß die Formulierung der Quantentheorie sich im wesentlichen auf isolierte Systeme konzentriert und der Einfluß, den ein Reservoir auf ein System ausübt, unberücksichtigt bleibt, wenn man dieses System als isoliert von seiner Umgebung betrachtet.

Zieht man den Einfluß der Umgebung mit in Betracht, so erhält man für ein einfaches System wie den harmonischen Oszillator oder für eine Mode des elektromagnetischen Feldes ein exponentielles Abklingen der Kohärenzen bei überlagerten Zuständen. Als Folge dessen entwickeln sich Überlagerungszustände im Limes in statistische Gemische, die spezifisch quantenmechanischen Interferenzen zwischen den beteiligten Zuständen werden ausgelöscht.

Insofern scheint im Rahmen der Quantentheorie eine schlüssige Erklärung gefunden zu sein, wie klassische Eigenschaften als Grenzfall der Quantentheorie aufzufassen sind.

Es bleibt jedoch zu bedenken, daß zwar die Nichtdiagonalelemente der Dichtematrix, die die Interferenzfähigkeit der beteiligten Zustände widerspiegeln, asymptotisch gegen Null gehen, daß sie dies unter den meisten realistischen Bedingungen auch auf einer sehr kurzen Zeitskala tun, daß sie aber nach einer endlichen Zeit zwar sehr klein, aber dennoch von Null verschieden sein werden. Die Frage ist also, wann ist es erlaubt, von einem sta-

tistischen Gemisch der Zustände und nicht mehr von einer Überlagerung derselben zu sprechen? Wenn auch die Interferenzeffekte in realen Experimenten sehr schnell aus dem Bereich des Beobachtbaren verschwinden werden, ist es von der Warte der Theorie aus trotzdem unbefriedigend, den Grenzübergang von der Quantenmechanik in den Bereich der Alltagserfahrung auf diese Weise zu ziehen.

Hinzu kommt, daß die Dekohärenzeigenschaften eines bestimmten System keine system-inhärente Größe sind, sondern stark von der Art der Kopplung an die Umgebung und die Struktur der Umgebung selbst abhängen. Ob ein gegebenes System also quantenmechanische Eigenschaften besitzt oder sich wie ein klassisches Objekt verhält, hängt also auch von der Umgebung ab, in die das System eingebettet ist. Insofern ist die Frage nach einer eindeutig definierbaren Grenze zwischen der Quantenwelt und der klassischen Welt für ein System nicht eindeutig zu beantworten.

KAPITEL 3

Grundlagen der Experimente

Die wesentlichen Ergebnisse dieser Dissertation betreffen einen neuen Vorschlag zur Messung der Dekohärenz am Ein-Atom-Maser. Daher werden die dafür relevanten Aspekte im vorliegenden Kapitel erörtert.

3.1 Der Ein-Atom-Maser

Für die Untersuchung der Wechselwirkung von Licht mit Materie hat sich der Ein-Atom-Maser oder Mikromaser als hervorragendes Hilfsmittel bewährt. Die Arbeitsweise beruht auf der Wechselwirkung einer einzelnen Mode des Strahlungsfeldes in einem Resonator mit einem einzelnen Atom, das an diese Mode koppelt.

Die Frequenz der Resonatormode liegt dabei im Mikrowellenbereich, woraus sich auch die Bezeichnung Maser (**m**icrowave **a**mplification by **s**timulated **e**mission of **r**adiation) erklärt. Daraus ergeben sich Anforderungen an die Art der verwendeten Atome:

- Der Maserübergang im Atom sollte zwischen zwei Zuständen stattfinden, deren Übergangsfrequenz der Eigenfrequenz des Resonators im Mikrowellenbereich entspricht; für diesen Wellenlängenbereich stehen Resonatoren sehr hoher Güte ($Q \approx 10^{10}$) zur Verfügung. Dadurch erzielt man für das Photonenfeld im Innern des Resonators sehr lange Lebensdauern.
- Um eine möglichst starke Kopplung zwischen Atom und Feld zu erreichen, sollte das elektrische Dipolmoment zwischen den zwei gewählten Atomzuständen möglichst groß sein;
- Die Lebensdauer dieser Zustände sollte lange genug sein, um spontanen Zerfall aus den beteiligten Rydberg-Zuständen in tiefere Zustände während der Wechselwirkungszeit mit der Resonatormode auszuschließen. Dies ist dadurch gewährleistet, daß die Wellenfunktionen der Rydberg-Zustände und die von tieferliegenden Zuständen, insbes. des Grundzustands 5 S , einen sehr geringen Überlapp haben.

Energie der Rydberg-Zustände	$\sim (n^*)^{-2}$
Radius	$\sim (n^*)^2$
Lebensdauer	$\sim (n^*)^3$ $\tau(63P) = 466 \mu s$ $\tau(61D) = 244 \mu s$
Dipol-Matrixelement	$\sim (n^*)^2$
kritisches Feld für Ionisation	$\sim (n^*)^{-4}$ $E_{krit.}(63P) = 26,2V$ $E_{krit.}(61D) = 27,8V$

TABELLE 3.1: Eigenschaften von Rydberg-Zuständen. Vgl. [53], [54].

Der spontane Zerfall zwischen den beiden beteiligten Rydberg-Zuständen selbst ist gering, weil die Übergangsfrequenz im Mikrowellenbereich liegt.

Als besonders geeignet erweisen sich daher sog. *Rydberg-Atome* ([53], [54]), d.h. Atome, deren Valenzelektron in einen besonders hohen Energiezustand angeregt wurde.

Die hohe Energiequantenzahl solcher Zustände verleiht solchen Zuständen quasi-klassische Eigenschaften; so ist die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Valenzelektrons in *Rydberg-Atomen* nur innerhalb eines kreisförmigen Torus wesentlich von Null verschieden und entspricht daher der klassischen Vorstellung einer Elektronenbahn.

Die Übergangsfrequenz zwischen den gewählten *Rydberg-Zuständen* von Rubidium-Atomen liegt im Mikrowellenbereich, und die hoch angeregten Zustände garantieren ein starkes Dipolmoment für die beiden beteiligten Zustände. Für das Weitere relevant sind die beiden *Rydberg-Zustände* $63P_{3/2}(=|e\rangle)$ und $61D_{3/2}(=|g\rangle)$, die das obere bzw. untere Maserniveau darstellen. Die Übergangsfrequenz zwischen diesen beiden Niveaus beträgt 21,506 GHz (s. Abb.(3.1)).

3.1.1 Geschwindigkeitsselektive Anregung

Der Grundzustand von Rubidium ist $5S_{1/2}$, aus welchem das Atom in das obere Maserniveau $63P_{3/2}$ mit Hilfe von UV-Licht der Wellenlänge 297 nm angeregt wird. Dies liefert ein frequenzverdoppelter Farbstoff-Ringlaser (Coherent 699 mit Farbstoff Rhodamin 6G, BBO-Kristall im Laserresonator zur Frequenzverdoppelung).

Die Rubidium-Atome verlassen den Atom-Ofen nicht alle mit einer wohldefinierten Geschwindigkeit, sondern weisen eine modifizierte Maxwell-Boltzmann-Geschwindigkeitsverteilung auf. Daher ist es nötig, die Klasse der Atome mit der gewünschten Geschwindigkeit auszuwählen, um eine definierte Wechselwirkungszeit der Atome mit dem Resonatorfeld zu gewährleisten.

Dies geschieht dadurch, daß man zusätzlich zum Hauptstrahl, der in den Resonator eintritt, einen Referenzstrahl von Atomen betrachtet, der unter einem kleinen Winkel zur Horizontalen nach oben läuft und eine Elektrodenanordnung passiert, mit deren Hilfe man ein elektrisches Feld von einigen 100 mV/cm erzeugen kann. Dies führt für Atomzustände mit kleinem Drehimpuls zu einem quadratischen Stark-Effekt, was die Frequenz des Übergangs $5S_{1/2} \rightarrow 63P_{3/2}$ um einige 100 MHz in Richtung größerer Wellenlängen verschiebt. Ein Strahlteiler im Strahlengang des UV-Lasers spaltet einen Teilstrahl des Lasers ab, der in senkrechter Richtung auf den Referenzstrahl aus Rubidium-Atomen gelenkt wird, um eine Dopplerverbreiterung des Spektrums zu vermeiden, und regt die Atome des Referenzstrahls in den $63P_{3/2}$ -Zustand an. Der Nachweis der Atome des Referenzstrahls erfolgt durch Feldionisation und mit Hilfe eines Channeltrons. Dieses Signal wirkt über eine digitale Rückkoppelungselektronik auf den Farbstofflaser zurück und stabilisiert diesen auf den Stark-verschobenen Übergang der Referenz-Atome (s. Abb. (3.3)).

Die Auswahl einer bestimmten Geschwindigkeitsklasse des Hauptstrahls von Rubidium-Atomen erfolgt nun auf folgende Weise: Der nicht-abgelenkte Teilstrahl des Farbstofflasers wird nicht senkrecht zum Atomstrahl eingestrahlt, sondern bildet mit der Normalen zur Atomstrahlachse einen Winkel von etwa 11° . Die Atome sehen den Laser auf Grund des Doppler-Effekts blauverschoben. Wie eben beschrieben wurde der Laser in der Referenzeinheit auf einen rotverschobenen Übergang stabilisiert. Dadurch kompensieren sich diese Rotverstimmung des Lasers und die Doppler-Blauverschiebung nur für eine bestimmte Klasse von Atomen mit der "richtigen" Geschwindigkeit. Dadurch können diese Atome resonant mit dem Laser wechselwirken.

Durch Änderung der Elektrodenspannung in der Referenzeinheit läßt sich somit die Geschwindigkeit der angeregten Atome im Hauptstrahl auswählen.

Für die Genauigkeit der Geschwindigkeitsselektivität ist hauptsächlich die spektrale Breite des Lasers maßgeblich. Typische Werte für die Genauigkeit liegen bei $\Delta t_{int}/t_{int} < 3\%$, typische Werte für die Geschwindigkeiten der Atome liegen im Bereich von 400 m/s.

3.1.2 Zustandsselektive Detektion mittels Feldionisation

Im Mikromaser ist das Feld innerhalb des Resonators keine unmittelbar meßbare Größe, sondern wird mittelbar mit Hilfe der *Rydberg*-Atome, die den Resonator passiert haben, sondiert.

Der zustandsselektiven Detektion der Atome nach ihrer Wechselwirkung mit dem Resonatorfeld kommt daher bei Mikromaser-Experimenten stets eine bedeutende Rolle zu. Dabei soll mit möglichst hoher Effizienz (möglichst wenig Atome entgehen der Detektion) und möglichst kleiner Fehlerrate (möglichst wenig Atome werden im falschen Zustand gezählt) zwischen dem angeregten Zustand ($63P_{3/2}$) und dem tiefer liegenden Zustand ($61D_{3/2}$) unterschieden werden können.

Die dazu verwendete Feldionisationseinheit ist in Abbildung (3.2) gezeigt und besteht

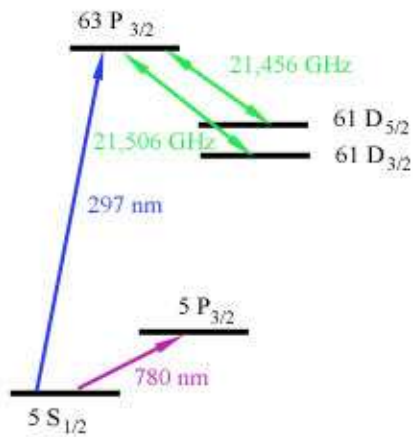
Niveau-Schema ^{85}Rb 

ABBILDUNG 3.1: Niveauschema der verwendeten Rubidium-Atome.

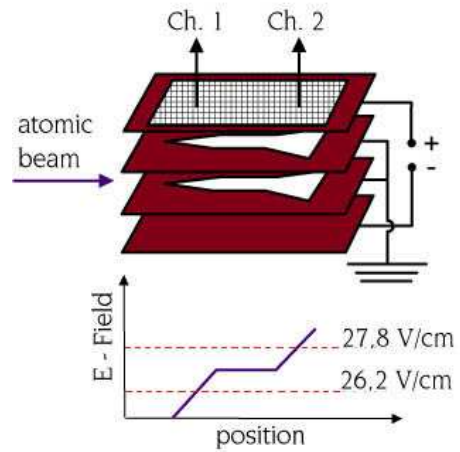


ABBILDUNG 3.2: Details der Feldionisationseinheit und Verlauf der elektrischen Feldstärke.

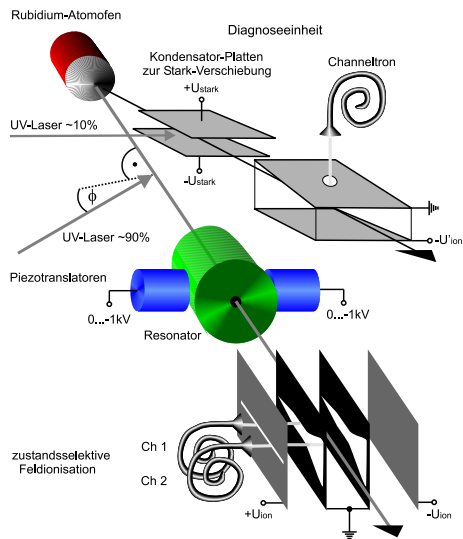


ABBILDUNG 3.3: Standardaufbau eines Mikromaser-Experiments mit den wesentlichen Komponenten. Aus [23].

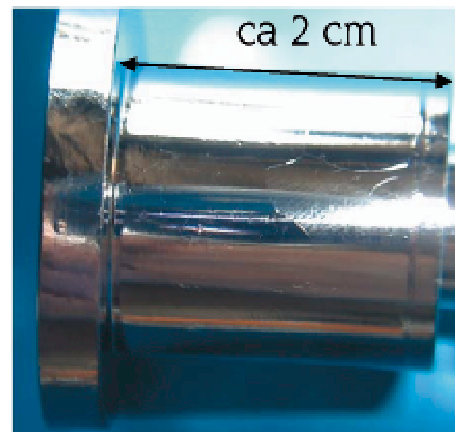


ABBILDUNG 3.4: Foto eines Hohlraumresonators aus dem Garchinger Mikromaser-Aufbau.

aus zwei Elektroden, zwischen denen sich bei Anlegen einer Spannung ein statisches elektrisches Feld aufbaut. Zwischen diesen beiden Elektroden auf unterschiedlichem Potential befinden sich außerdem zwei geerdete Elektroden, durch deren Schlitze das elektrische Feld durchgreifen kann. Die Geometrie dieser Schlitze ist derart gewählt, daß das Feld im Bereich zwischen diesen Schlitzen zunächst langsam ansteigt, dann auf einem plateauartigen Wert verbleibt, um schließlich wieder anzusteigen. Durch dieses Plateau ist gewährleistet, dass sich Atome in unterschiedlichen Niveaus mit einer besseren räumlichen Auflösung detektieren lassen.

Diese Detektion geschieht mittels zweier Channeltrons, die an den Orten angebracht sind, an denen Atome in den jeweiligen Niveaus ionisiert werden.

Die Detektionseffizienz liegt pro Kanal bei ca. 40%, die Fehlerrate bei $\leq 7\%$ (s. [22]).

3.2 Atom-Resonatorfeld-Wechselwirkung

Das *Jaynes-Cummings*-Modell (s. [55]-[58]) beschreibt die Dynamik eines Zwei-Niveau-Atoms in Wechselwirkung mit einem Strahlungsfeld $\mathbf{E}$. Dabei werden sowohl das Strahlungsfeld als auch das Atom als quantisierte Systeme behandelt. Wechselwirkt ein Ein-Elektron-Atom mit einem Strahlungsfeld $\mathbf{E}$, das über die Dimensionen des Atoms als uniform angenommen wird (*Dipol-Näherung*), erhält man für das System folgenden Hamilton-Operator:

$$\hat{H} = \hat{H}_A + \hat{H}_F - e\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}. \quad (3.1)$$

Hierbei sind $\hat{H}_A$ und $\hat{H}_F$ die Energien des Atoms bzw. des Strahlungsfeldes in Abwesenheit der Wechselwirkung, während der letzte Term die Dipol-Wechselwirkungsenergie darstellt.

Jede einzelne Mode des Strahlungsfeldes, charakterisiert durch einen Wellenvektor $\mathbf{k}$, verhält sich wie ein harmonischer Oszillator mit dem entsprechenden Hamilton-Operator, das gesamte Feld ist die Summe dieser verschiedenen unabhängigen harmonischen Oszillatoren mit dem daraus folgenden Hamilton-Operator

$$\hat{H}_F = \sum_{\mathbf{k}} \hbar \nu_{\mathbf{k}} \left(\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} \right). \quad (3.2)$$

Hierbei sind $\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger, \hat{a}_{\mathbf{k}}$ die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren für Photonen in den einzelnen Moden.

Die Eigenwerte $E_{n_{\mathbf{k}}}$ und Eigenzustände $|n_{\mathbf{k}}\rangle$ des Hamiltonoperators $\hat{H}_F$ ergeben sich als Lösung der stationären Schrödingergleichung $\hat{H}_F |n_{\mathbf{k}}\rangle = E_{n_{\mathbf{k}}} |n_{\mathbf{k}}\rangle$. Als Ergebnis erhält man:

$$\hat{H}_F |n_{\mathbf{k}}\rangle = \hbar \omega_{\mathbf{k}} \left(n_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} \right) |n_{\mathbf{k}}\rangle, \quad n_{\mathbf{k}} = 0, 1, 2, \dots \quad (3.3)$$

Diese Eigenzustände $|n_{\mathbf{k}}\rangle$ des Feld-Hamiltonian $\hat{H}_F$ heissen *Fockzustände* und beschreiben ein Feld mit einer genau definierten Zahl von Photonen in der Mode $\mathbf{k}$. Es ist daher auch üblich diese Eigenzustände als *Photonenzahlzustände* einer Mode des elektromagnetischen Feldes zu bezeichnen.

Mit ihrer Hilfe läßt sich allgemein jedes Feld durch geeignete Kombination von Zuständen diskreter Photonenzahl in den beteiligten Moden darstellen. Elektromagnetische Felder sind entweder als Mischung von Fockzuständen (‘‘gemischter Zustand’’) oder als Superposition

$$|\psi_F\rangle = \sum_{n_{\mathbf{k}}} c_{n_{\mathbf{k}}} |n_{\mathbf{k}}\rangle$$

der einzelnen Fockzustände (‘‘reiner Zustand’’) darstellbar. Um zu den Hamilton-Operatoren für das Atom und die Dipolwechselwirkung zu gelangen, betrachte man die Eigenwertgleichung

$$\hat{H}_A |i\rangle = E_i |i\rangle. \quad (3.4)$$

Bilden die Energie-Eigenzustände des Atoms einen vollständigen Satz von Zuständen, so gilt die Vollständigkeitsrelation

$$\sum_i |i\rangle\langle i| = 1, \quad (3.5)$$

womit sich wegen der Linearität des Hamilton-Operators $\hat{H}_A$ die Gleichung (3.4) schreiben läßt:

$$\hat{H}_A = \sum_i E_i |i\rangle\langle i| = \sum_i \sigma_{ii} \quad (3.6)$$

mit dem Übergangsoperator $\hat{\sigma}_{ij} = |i\rangle\langle j|$.

Auf ähnliche Weise kommt man unter zweimaliger Anwendung der Vollständigkeitsrelation (3.5) zu einem Ausdruck für $\mathbf{er}$ in Form des Übergangsoperators:

$$\mathbf{er} = \sum_{i,j} e |i\rangle\langle i| \mathbf{r} |j\rangle\langle j| = \sum_{i,j} \wp_{ij} \hat{\sigma}_{ij}, \quad (3.7)$$

dabei ist $\wp_{ij} = e\langle i|\mathbf{r}|j\rangle$ das Dipol-Übergangsmatrixelement.

Um Gleichung (3.1) explizit angeben zu können, bleibt noch, das elektrische Feld in quantisierter Form auszudrücken. Dies geschehe ohne Einschränkung unter der Annahme, das Atom befinde sich im Ursprung des Koordinatensystems. Für eine lineare Polarisierung mit reellen Polarisierungseinheitsvektoren $\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}}$ schreibt sich das elektrische Feld in Operatorform und in der Dipolnäherung am Ort des Atoms

$$\mathbf{E} = \sum_{\mathbf{k}} \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}} \mathcal{E}_{\mathbf{k}} \left(\hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \right), \quad (3.8)$$

mit der Abkürzung $\mathcal{E}_{\mathbf{k}} = (\hbar\nu_{\mathbf{k}}/2\epsilon_0 V)^{1/2}$.

Vernachlässigt man den Beitrag der Vakuumfluktuationen $\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \hbar\nu_{\mathbf{k}}$ in (3.2), dann wird

mit Hilfe von Gleichungen (3.2), (3.6), (3.7) und (3.8) der Hamilton-Operator für die Atom-Feld-Wechselwirkung

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k}} \hbar \nu_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{k}} + \sum_i E_i \hat{\sigma}_{ii} + \hbar \sum_{i,j} \sum_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}}^{ij} \hat{\sigma}_{ij} (\hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger}). \quad (3.9)$$

Die Grösse $g_{\mathbf{k}}^{ij} = -\frac{\mathcal{P}_{ij} \cdot \hat{\epsilon}_{\mathbf{k}} \mathcal{E}_{\mathbf{k}}}{\hbar}$ ist dabei eine Kopplungskonstante, die angibt, wie stark eine Mode mit der Polarisationsrichtung $\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}}$ an den Dipol-Übergang zwischen den Energieniveaus $|i\rangle$ und $|j\rangle$ koppelt.

Dies läßt sich im Fall eines Zwei-Niveau-Atoms weiter vereinfachen:

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k}} \hbar \nu_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{k}} + (E_a \hat{\sigma}_{aa} + E_b \hat{\sigma}_{bb}) + \hbar \sum_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}} (\hat{\sigma}_{ab} + \hat{\sigma}_{ba}) (\hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger}). \quad (3.10)$$

Unter Berücksichtigung von $(E_a - E_b) = \hbar \omega$, sowie $\hat{\sigma}_{aa} + \hat{\sigma}_{bb} = 1$ lässt sich schreiben

$$E_a \hat{\sigma}_{aa} + E_b \hat{\sigma}_{bb} = \frac{1}{2} \hbar \omega (\hat{\sigma}_{aa} - \hat{\sigma}_{bb}) + \frac{1}{2} (E_a + E_b). \quad (3.11)$$

Nun kann wiederum der konstante Beitrag $(E_a + E_b)/2$ vernachlässigt werden, so dass der Hamilton-Operator folgende Form annimmt:

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k}} \hbar \nu_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} \hbar \omega \hat{\sigma}_z + \hbar \sum_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}} (\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-) (\hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger}). \quad (3.12)$$

Dabei wurde von der Notation

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_z &:= \hat{\sigma}_{aa} - \hat{\sigma}_{bb} = |a\rangle\langle a| - |b\rangle\langle b|, \\ \hat{\sigma}_+ &:= \hat{\sigma}_{ab} = |a\rangle\langle b|, \\ \hat{\sigma}_- &:= \hat{\sigma}_{ba} = |b\rangle\langle a| \end{aligned}$$

Gebrauch gemacht.

Rotating-wave-Näherung (RWA)

Wie an der Definition der Operatoren leicht zu sehen ist, führt $\hat{\sigma}_-$ das Atom vom oberen Zustand $|a\rangle$ in den unteren Zustand $|b\rangle$ über, wohingegen der Operator $\hat{\sigma}_+$ den umgekehrten Prozeß vermittelt.

Damit läßt sich die letzte Summe in (3.12) leicht interpretieren: nach dem Ausmultiplizieren des Klammerausdrucks erhält man vier Terme, von denen zwei die Energie-Erhaltung verletzen:

$\hat{\sigma}_+ \hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger}$ beschreibt die Anregung des Atoms vom unteren in den höheren Zustand und die gleichzeitige Erzeugung eines Photons in der Mode $\mathbf{k}$, so daß das System einen Energiebetrag von $2\hbar\omega$ gewönne. Ebenso beschreibt $\hat{\sigma}_- \hat{a}_{\mathbf{k}}$ den Übergang des Atoms vom höheren

Zustand in den niedrigeren und die gleichzeitige Vernichtung eines Photons der Mode $\mathbf{k}$, d.h. das System verlöre $2\hbar\omega$ an Energie.

Schließt man die Terme, die diese nicht-konservativen Prozesse beinhalten, aus, so entspricht das der sog. *rotating-wave-Näherung* und führt schliesslich auf den vereinfachten Hamilton-Operator:

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k}} \hbar\nu_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} \hbar\omega \hat{\sigma}_z + \hbar \sum_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}} (\hat{\sigma}_+ \hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger} \hat{\sigma}_-). \quad (3.13)$$

Dies ist der für die im Mikromaser stattfindende Wechselwirkung zwischen Atom und Strahlungsfeld maßgebliche Hamilton-Operator. Er beschreibt die Dynamik der Wechselwirkung eines Zwei-Niveau-Atoms mit einem Multimoden-Strahlungsfeld. Wählt man, wie dies im Mikromaser tatsächlich möglich ist, aus dem Multimoden-Spektrum des Strahlungsfeldes eine einzige Mode aus, an die das Atom koppeln kann, so vereinfacht sich die Form des Hamilton-Operators in offensichtlicher Weise weiter.

Wählt man die Energie $\hbar\omega$ des Vakuumzustands $|0\rangle$ der betrachteten Resonatormode als Energienullpunkt, so ergibt sich für den Zeitentwicklungsoperator im Schrödingerbild:

$$\begin{aligned} \hat{U}(t) &= \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \hat{H} t\right) = \\ &= \exp(-i\omega_g t) |g, 0\rangle \langle 0, g| + \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}i[\omega_g + \omega_e + \omega(2n+1)]t\right\} \times \\ &\times \left\{ \left[\cos\left(\frac{1}{2}\Delta_n t\right) + i\frac{\delta}{\Delta_n} \sin\left(\frac{1}{2}\Delta_n t\right) \right] |g, n+1\rangle \langle n+1, g| + \right. \\ &+ \left[\cos\left(\frac{1}{2}\Delta_n t\right) - i\frac{\delta}{\Delta_n} \sin\left(\frac{1}{2}\Delta_n t\right) \right] |e, n\rangle \langle n, e| + \\ &+ \left. i\frac{\Omega_n}{\Delta_n} \sin\left(\frac{1}{2}\Delta_n t\right) (|g, n+1\rangle \langle n, e| + |e, n\rangle \langle n+1, g|) \right\}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

mit den Bezeichnungen

$$\delta := \omega_{eg} - \omega, \quad (3.15)$$

$$\Omega_n := 2g\sqrt{n+1}, \quad (3.16)$$

$$\Delta_n := \sqrt{\delta^2 + \Omega_n^2}. \quad (3.17)$$

Der Operator (3.14) beschreibt dabei den allgemeinen Fall einer Wechselwirkung einer einzelnen Mode des Resonatorfelds mit der Frequenz ω mit einem Zwei-Niveau-Atom, dessen Übergangsfrequenz ω_{eg} um den Betrag δ gegenüber der Resonatoreigenfrequenz verstimmt ist. Die Größe Ω_n ist dabei die Rabi-Frequenz, d.h. die Frequenz, mit welcher ein Atom im Resonanzfall mit einem Photonenfeld im Zustand $|n\rangle$ ein Energiequant austauscht. Dem entspricht bei einer Verstimmung δ gegenüber der Resonanz die verallgemeinerte Rabi-Frequenz Δ_n .

Im folgenden werden die wichtigen Spezialfälle einer verschwindenden Verstimmung $\delta = 0$ (Resonanz) und einer sehr starken Verstimmung $\delta \gg \Omega_n$ näher beleuchtet.

3.2.1 Resonante Wechselwirkung

Im Resonanzfall vereinfacht sich der Zeitentwicklungsoperator, da

$$\begin{aligned}\delta &= 0, \\ \Delta_n &= \Omega_n.\end{aligned}$$

Man hat folglich:

$$\begin{aligned}\hat{U}(t) &= \exp(-i\omega_g t)|g, 0\rangle\langle 0, g| + \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}i[\omega_g + \omega_e + \omega(2n+1)]t\right\} \times \\ &\times \left\{ \cos\left(\frac{1}{2}\Omega_n t\right)|g, n+1\rangle\langle n+1, g| + \cos\left(\frac{1}{2}\Omega_n t\right)|e, n\rangle\langle n, e| + \right. \\ &\left. + i \sin\left(\frac{1}{2}\Omega_n t\right)(|g, n+1\rangle\langle n, e| + |e, n\rangle\langle n+1, g|) \right\}.\end{aligned}\quad (3.18)$$

Im Resonanzfall sind die Zustände $|g, n+1\rangle$ und $|e, n\rangle$ energetisch entartet. Der im hier verwendeten Schrödingerbild auftretende Phasenfaktor

$$\exp\left(-\frac{i}{2}[\omega_e + \omega_g + (2n+1)\omega]t\right)$$

resultiert aus der freien Entwicklung des Systems. Wie eine kurze Rechnung unter Verwendung von $\omega_e = \omega + \omega_g$ im einen, und $\omega_g = \omega_e - \omega$ im andern Fall zeigt, ist nämlich

$$\hbar\frac{1}{2}(\omega_e + \omega_g + (2n+1)\omega) = \hbar(\omega_e + n\omega) = \hbar(\omega_g + (n+1)\omega)$$

die Gesamtenergie E des Systems und tritt daher in der Zeitentwicklung als Phasenfaktor $\exp(-iEt/\hbar)$ auf.

3.2.2 Nicht-resonante Wechselwirkung - Dispersives Regime

Ein zweiter wichtiger Grenzfall ist der Fall großer Verstimmung, also für

$$\frac{2g\sqrt{n+1}}{|\delta|} \ll 1.$$

Dann läßt sich nämlich (vgl. [60]) die verallgemeinerte Rabi-Frequenz Δ_n in eine Potenzreihe entwickeln gemäß:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \dots, \quad |x| \ll 1$$

Damit läßt sich schreiben:

$$\begin{aligned}\Delta_n &= \delta \sqrt{1 + \frac{\Omega_n^2}{\delta^2}} = \delta \sqrt{1 + \frac{4g^2(n+1)}{\delta^2}} \\ &\approx \delta \left[1 + \frac{1}{2} \frac{4g^2(n+1)}{\delta^2} - \dots \right] = \delta + \frac{2g^2(n+1)}{\delta}.\end{aligned}$$

Die große Verstimmung des Resonatorfeldes gegenüber der Übergangsfrequenz im Atom hat zwei wichtige Auswirkungen, die man direkt am Zeitentwicklungsoperator (3.14) ablesen kann:

die letzte Zeile von (3.14) vermittelt Übergänge zwischen den Systemzuständen $|e, n\rangle$ und $|g, n+1\rangle$. Im Fall großer Verstimmung sind diese Übergänge stark unterdrückt, da der Vorfaktor

$$\frac{\Omega_n}{\Delta_n} = \frac{2g\sqrt{n+1}}{\delta(1 + \frac{2g^2(n+1)}{\delta^2})} = \underbrace{\frac{2g\sqrt{n+1}}{\delta}}_{\ll 1} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \underbrace{\left(\frac{4g^2(n+1)}{\delta^2}\right)}_{\ll 1}} \ll 1.$$

Zusätzlich zu der Phase, die aus der freien Entwicklung des Systems stammt, nehmen die Zustände eine weitere Phase $\varphi(n, t)$ auf, da sich der Vorfaktor vor den Sinus-Termen

$$\frac{\delta}{\Delta_n} = \frac{\delta}{\delta \left[1 + \underbrace{\frac{2g^2(n+1)}{\delta^2}}_{\ll 1} \right]} \approx 1,$$

und die Cosinus- und Sinus-Terme zu einer Exponentialfunktion zusammenfassen lassen. Für den Operator für die Zeitentwicklung bei großer Verstimmung erhält man schließlich:

$$\begin{aligned}\hat{U}_{disp.}(t) &= \exp(-i\omega_g t) |g, 0\rangle \langle 0, g| + \sum_{n=0}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{1}{2} i [\omega_g + \omega_e + \omega(2n+1)] t \right\} \times \\ &\times \left\{ \left[\exp \left(i \left(\frac{1}{2} \Delta_n t \right) \right) \right] |g, n+1\rangle \langle n+1, g| + \right. \\ &+ \left. \left[\exp \left(-i \left(\frac{1}{2} \Delta_n t \right) \right) \right] |e, n\rangle \langle n, e|. \right.\end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung von $\delta := \omega_e - \omega_g - \omega$ findet man:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} (\omega_e + \omega_g + (2n+1)\omega) &= \omega_e + n\omega - \frac{\delta}{2} \\ &= \omega_g + (n+1)\omega + \frac{\delta}{2}.\end{aligned}$$

Damit erhält man für die Zeitentwicklung der einzelnen Zustände:

$$\hat{U}_{disp.}(t)|g, n\rangle = e^{(-i[\omega_g + (n+1)\omega]t)} \cdot \exp\left(i\frac{g^2(n+1)}{\delta}t\right)|g, n\rangle. \quad (3.19)$$

$$\hat{U}_{disp.}(t)|e, n\rangle = e^{(-i[\omega_e + n\omega]t)} \cdot \exp\left(i\frac{g^2n}{\delta}t\right)|e, n\rangle. \quad (3.20)$$

3.3 Atom-Laser-Wechselwirkung

Interessiert man sich nicht wie im vorigen Abschnitt für die exakten Zustände des Systems, sondern z. B. für atomare Übergangswahrscheinlichkeiten, so berechnet man diese am besten mit Hilfe störungstheoretischer Methoden¹.

Die Zustände $|\phi_n\rangle$ seien Eigenzustände zum ungestörten Hamilton-Operator H_0 , und $\tilde{W}(t)$ eine zeitabhängige Störung, also

$$\begin{aligned} H_0|\phi_n\rangle &= E_n|\phi_n\rangle \\ H(t) &= H_0 + \tilde{W}(t), \end{aligned}$$

die als klein genug angenommen werden soll, um Störungstheorie betreiben zu können, die sich also in der Form $\tilde{W}(t) = \lambda W(t)$ mit einem Parameter $0 < \lambda < 1$ schreiben lassen soll und zudem bei $t=0$ einsetzen soll: $W(t \leq 0) = 0$.

Da man Übergänge und deren Wahrscheinlichkeiten zwischen Eigenzuständen des ungestörten Hamilton-Operators berechnen möchte, ist es zweckmäßig, die Zustände des Atoms in der Basis dieser Eigenzustände darzustellen gemäß:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n \langle \phi_n | \psi(t) | \phi_n \rangle =: \sum_n c_n(t) |\phi_n\rangle.$$

Die $c_n(t)$ sind dabei die zeitabhängigen Wahrscheinlichkeitsamplituden dafür, im Zustand $|\psi(t)\rangle$ zum Zeitpunkt t den stationären Eigenzustand $|\phi_n\rangle$ zu finden.

Wegen der Orthogonalität der Eigenzustände gilt $\langle \phi_n | H_0 | \phi_k \rangle = E_n \delta_{nk}$, wegen der Vollständigkeitsrelation außerdem $\sum_k |\phi_k\rangle \langle \phi_k| = 1$.

Setzt man dies in die Schrödinger-Gleichung ein und projiziert anschließend mit $\langle \phi_n |$, so erhält man ein System gekoppelter linearer Differentialgleichungen für die Koeffizienten $c_n(t)$:

$$i\hbar \dot{c}_n(t) = E_n c_n(t) + \lambda \sum_k W_{nk}(t) c_k(t) \quad (3.21)$$

mit den Matrixelementen $W_{nk}(t) := \langle \phi_n | W(t) | \phi_k \rangle$. Ohne die Störung, also für $\lambda W(t) = 0$, ist Gleichung (3.21) leicht zu lösen:

$$c_n(t) = b_n e^{-iE_n t/\hbar}. \quad (3.22)$$

¹Die Darstellung folgt im wesentlichen der Darstellung in [42].

Ist die Störung klein, so wird die Lösung von Gleichung (3.21) von der gleichen Form, allerdings mit zeitlich langsam variierenden Koeffizienten $b_n(t)$ sein:

$$c_n(t) = b_n(t)e^{-iE_nt/\hbar}. \quad (3.23)$$

Dies eingesetzt in Gleichung (3.21) führt auf eine Gleichung für die $b_n(t)$:

$$i\hbar \frac{d}{dt} b_n(t) = \lambda \sum_k e^{i\omega_{nk}t} W_{nk}(t) b_k(t) \quad (3.24)$$

mit der Abkürzung $\omega_{nk} := \frac{1}{\hbar}(E_n - E_k)$.

Zur Lösung dieses Systems gekoppelter Differentialgleichungen macht man einen Potenzreihenansatz in λ . Für hinreichend kleines $\lambda \ll 1$ konvergiert die Potenzreihe rasch genug:

$$b_n(t) = b_n^{(0)}(t) + \lambda b_n^{(1)}(t) + \lambda^2 b_n^{(2)}(t) + \dots \quad (3.25)$$

Für die verschiedenen Ordnungen r der störungstheoretischen Rechnung erhält man folglich:

$$r = 0 \quad : \quad i\hbar \frac{d}{dt} b_n^{(0)}(t) = 0. \quad (3.26)$$

$$r \neq 0 \quad : \quad i\hbar \frac{d}{dt} b_n^{(r)}(t) = \sum_k e^{i\omega_{nk}t} W_{nk}(t) b_n^{(r-1)}(t) \quad (3.27)$$

3.3.1 Störungstheorie erster Ordnung - Ein-Photon-Prozesse

Das Atom möge sich bei $t = 0$ im Anfangszustand $|\phi_i\rangle$ befinden, so daß für die Koeffizienten der Potenzreihenentwicklung gilt:

$$b_n(t=0) = \delta_{ni} \quad (3.28)$$

Da dies für jeden Wert von λ gilt, müssen die Koeffizienten folgenden Gleichungen genügen:

$$\begin{aligned} b_n^{(0)}(t=0) &= \delta_{ni} \\ b_n^{(r)}(t=0) &= 0 \quad (r \geq 1). \end{aligned}$$

Daraus folgt unmittelbar die Lösung nullter Ordnung:

$$b_n^{(0)}(t) = \delta_{ni}, \quad (3.29)$$

für alle $t \geq 0$.

Damit erhält man für die erste Ordnung Störungstheorie:

$$i\hbar \frac{d}{dt} b_n^{(1)}(t) = \sum_k e^{i\omega_{nk}t} W_{nk}(t) \delta_{ki} = e^{i\omega_{ni}t} W_{ni}(t). \quad (3.30)$$

$$b_n^{(1)}(t) = \frac{1}{i\hbar} \int_0^t e^{i\omega_{ni}t'} W_{ni}(t') dt'. \quad (3.31)$$

Es bezeichne $P_{if}(t) = |\langle \phi_f | \psi(t) \rangle|^2$ die Wahrscheinlichkeit dafür, das System nach der Zeit t im Endzustand $|\phi_f\rangle$ (Eigenzustand von H_0) zu finden, wenn es zu Beginn der Störung in einem anderen Eigenzustand von H_0 $|\phi_i\rangle (= |\psi(t=0)\rangle)$ war.

$$P_{if}(t) = |\langle \phi_f | \psi(t) \rangle|^2 = |c_f(t)|^2 = |b_f(t)|^2, \quad (3.32)$$

mit $b_f(t) = b_f^{(0)}(t) + \lambda b_f^{(1)}(t) + \dots$

Wegen Gleichung (3.29) wird die Wahrscheinlichkeit, daß die Störung $\lambda W(t)$ einen Übergang zwischen zwei verschiedenen Eigenzuständen von H_0 induziert, in erster Ordnung zu:

$$P_{if}(t) = \lambda^2 |b_f^{(1)}(t)|^2 \quad (3.33)$$

Resubstituiert man den Störungsterm aus dem vollen Hamiltonian ($\lambda W(t) \rightarrow \tilde{W}(t)$), so erhält man schließlich das Ergebnis für die erste Ordnung Störungstheorie zu:

$$P_{if}(t) = \frac{1}{\hbar^2} \left| \int_0^t e^{i\omega_{fi}t'} \tilde{W}_{fi}(t') dt' \right|^2. \quad (3.34)$$

Dies zeigt, daß die Wahrscheinlichkeit, bei einer Messung zur Zeit t das Atom im Zustand $|\phi_f\rangle$ zu finden, im wesentlichen von der Fourier-Transformierten der Störung $\tilde{W}_{fi}(t')$ bestimmt ist, wobei die Frequenz der Fourier-Transformation der Frequenz des Übergangs zwischen dem Anfangs- und dem Endzustand entspricht.

Monochromatische Störung

Ein wichtiger Spezialfall ist der einer monochromatischen sinusförmigen Störung:

$$W(t) = W \sin(\omega t) \quad (3.35)$$

mit den Matrixelementen

$$W_{fi}(t) = W_{fi} \sin(\omega t) = \frac{W_{fi}}{2i} (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}). \quad (3.36)$$

Um den Zustandsvektor des Systems in erster Ordnung Störungstheorie zu berechnen, ist folgendes Integral auszuwerten:

$$\begin{aligned} b_n^{(1)}(t) &= -\frac{W_{ni}}{2\hbar} \int_0^t \left[e^{i(\omega_{ni}+\omega)t'} - e^{i(\omega_{ni}-\omega)t'} \right] dt' = \\ &= \frac{W_{ni}}{2i\hbar} \left[\frac{1 - e^{i(\omega_{ni}+\omega)t}}{\omega_{ni} + \omega} - \frac{1 - e^{i(\omega_{ni}-\omega)t}}{\omega_{ni} - \omega} \right] \end{aligned}$$

Damit wird Gleichung (3.34) zu:

$$P_{if}(t; \omega) = \lambda^2 |b_f^{(1)}(t)|^2 = \frac{|\tilde{W}_{fi}|^2}{4\hbar^2} \left| \frac{1 - e^{i(\omega_{ni}+\omega)t}}{\omega_{ni} + \omega} - \frac{1 - e^{i(\omega_{ni}-\omega)t}}{\omega_{ni} - \omega} \right|^2 \quad (3.37)$$

Zwei-Niveau-System

Will man induzierte Übergänge in einem Atom zwischen zwei Zuständen desselben beschreiben, so kann das Atom unter folgender Voraussetzung als idealisiertes Zwei-Niveau-System angesehen werden:

die beiden zu betrachtenden Zustände liegen weit genug isoliert von anderen Zuständen des Atoms, an die die Störung wegen einer eventuellen Verbreiterung (quasi-monochromatische Störung), wie es in der Praxis immer auftritt, auch noch koppeln könnte.

Für feste Zeiten t ist dann die Übergangswahrscheinlichkeit nach (3.37) eine Funktion der eingestrahlten Frequenz ω mit einem Maximum bei

$$\omega \approx \omega_{fi}$$

oder

$$\omega \approx -\omega_{fi}$$

Erinnert man sich an die Definition von $\omega_{fi} := \omega_f - \omega_i$, so entsprechen obige Extremalbedingungen Einschränkungen an die Energien gemäss: $\hbar\omega + \hbar\omega_i \approx \hbar\omega_f$ im ersten oder $\hbar\omega - \hbar\omega_i \approx \hbar\omega_f$ im zweiten Fall.

Im ersten Fall liegt also der Endzustand energetisch um $\hbar\omega$ über dem Anfangszustand, was der Absorption eines Quants der Energie $\hbar\omega$ entspricht, im zweiten Fall liegt der Endzustand um den Betrag energetisch tiefer, entspricht hier also der Emission eines Quants der Energie $\hbar\omega$.

An dieser Stelle sei auf Gleichung (3.37) zurückverwiesen, in der das Betragsquadrat von zwei Termen auftritt:

$$\begin{aligned} A_+ &:= \frac{1 - e^{i(\omega_{fi} + \omega)t}}{\omega_{fi} + \omega} = -ie^{i(\omega_{fi} + \omega)t/2} \frac{\sin[(\omega_{fi} + \omega)t/2]}{(\omega_{fi} + \omega)/2} \\ A_- &:= \frac{1 - e^{i(\omega_{fi} - \omega)t}}{\omega_{fi} - \omega} = -ie^{i(\omega_{fi} - \omega)t/2} \frac{\sin[(\omega_{fi} - \omega)t/2]}{(\omega_{fi} - \omega)/2} \end{aligned}$$

Dabei wird A_- gewöhnlich als Resonanzterm bezeichnet, da es bei $\omega \approx \omega_{fi}$ den dominanten Beitrag leistet, A_+ heißt Anti-Resonanzterm.

Unter der Voraussetzung $|\omega - \omega_{fi}| \ll |\omega_{fi}|$ kann A_+ gegenüber dem Resonanzterm vernachlässigt werden, und man erhält:

$$P_{fi}(t, \omega) = \frac{|\tilde{W}_{fi}|^2}{4\hbar^2} F(t, \omega - \omega_{fi}), \quad (3.38)$$

mit

$$F(t, \omega - \omega_{fi}) = \frac{\sin^2[(\omega_{fi} - \omega)t/2]}{(\omega_{fi} - \omega)/2}.$$

Für festes t liegt das Maximum von $P_{fi}(t, \omega)$ bei $\omega \approx \omega_{fi}$ und ist proportional zu t^2 , die Breite der Funktion ist indirekt proportional zu t .

Grenzen der Näherung erster Ordnung

Im folgenden werde das Verhalten der Übergangswahrscheinlichkeit für große Zeiten t untersucht. Dazu erinnert man sich an zwei Eigenschaften aus der Theorie der Diracschen δ -Funktion:

$$\begin{aligned} a) \delta(x) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \left(\frac{\epsilon}{\pi} \frac{\sin^2(x/\epsilon)}{x^2} \right) \\ b) \delta(cx) &= \frac{1}{|c|} \delta(x). \end{aligned}$$

Mit den Entsprechungen $x = \frac{1}{2}(\omega - \omega_{fi})$, $\epsilon = 1/t$ berechnet man für die Funktion $F(t; \omega - \omega_{fi})$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (F(t; \omega - \omega_{fi})) = \pi t \delta\left(\frac{1}{2}(\omega - \omega_{fi})\right) = 2\pi t \delta(\omega - \omega_{fi}) \quad (3.39)$$

Dies zeigt bereits die Grenzen der Näherung in erster Ordnung an. Offensichtlich wächst ja die Übergangswahrscheinlichkeit linear mit der Zeit t , würde also für $t \rightarrow \infty$ alle Grenzen überschreiten, während schon *p. def.* die Wahrscheinlichkeit kleiner oder gleich Eins bleiben sollte. Die Störungsrechnung erster Ordnung kann also nur für kleine Zeiten t , genauer für Zeiten, die der Bedingung $t \ll \frac{\hbar}{|W_{fi}|}$ genügen, gültig sein.

Um zu einem Ausdruck zu gelangen, der auch für längere Zeiten Gültigkeit hat, existiert eine weitere Näherungsmethode, die im folgenden Abschnitt vorgestellt werden soll.

3.3.2 Die Säkular-Näherung

In dieser Näherung betrachtet man lediglich die zeitliche Entwicklung der Koeffizienten des Anfangs- und Endzustands im Atom, $b_i(t)$ und $b_f(t)$, unter Vernachlässigung anderer Zustände. D.h. das Atom wird als reines Zwei-Niveau-System beschrieben.

Mit der gleichen Form der Störung wie oben erhält man zwei gekoppelte Differentialgleichungen der folgenden Form

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} b_i(t) &= \frac{1}{2i} \left\{ [e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}] W_{ii} b_i(t) + [e^{i(\omega - \omega_{fi})t} - e^{-i(\omega - \omega_{fi})t}] W_{if} b_f(t) \right\} \\ i\hbar \frac{d}{dt} b_f(t) &= \frac{1}{2i} \left\{ [e^{i(\omega + \omega_{fi})t} - e^{-i(\omega - \omega_{fi})t}] W_{fi} b_i(t) + [e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}] W_{ff} b_f(t) \right\}. \end{aligned}$$

Im Resonanzfall, d.h. wenn $\omega \approx \omega_{fi}$, sind die $e^{\pm i(\omega - \omega_{fi})t}$ Funktionen, welche langsam mit der Zeit variieren, während sowohl die $e^{\pm i\omega t}$ als auch die $e^{\pm i(\omega + \omega_{fi})t}$ zeitlich schnell variierende Funktionen sind.

Die Säkular-Näherung besteht nun darin, ebendiese letzteren zu vernachlässigen, da die Integration über einige Perioden praktisch Null ergibt, und die Zeitabhängigkeit nach Voraussetzung hauptsächlich in den Exponentialfaktoren und nicht in den Koeffizienten

$b_i(t)$ und $b_f(t)$ selber steckt.

Diese Annahmen führen dann auf das Gleichungssystem in der Säkular-Näherung:

$$\frac{d}{dt}b_i(t) = -\frac{1}{2\hbar}e^{i(\omega-\omega_{fi})t}W_{if}b_f(t) \quad (3.40)$$

$$\frac{d}{dt}b_f(t) = \frac{1}{2\hbar}e^{-i(\omega-\omega_{fi})t}W_{fi}b_i(t). \quad (3.41)$$

Betrachtet werde nun der Fall, daß die eingestrahlte Frequenz zwar nahezu, aber nicht genau mit der Frequenz des atomaren Übergangs übereinstimmt.

Zur Lösung des obigen Gleichungssystems definiert man zunächst neue Funktionen

$$B_i(t) := e^{-i(\omega-\omega_{fi})t/2}b_i(t)$$

$$B_f(t) := e^{i(\omega-\omega_{fi})t/2}b_f(t).$$

Dadurch wird das Gleichungssystem mit zeitabhängigen Koeffizienten zu einem mit konstanten Koeffizienten, denn durch Einsetzen erhält man

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(e^{i(\omega-\omega_{fi})t/2} B_i(t) \right) &= -\frac{1}{2\hbar} e^{i(\omega-\omega_{fi})t} W_{if} e^{-i(\omega-\omega_{fi})t/2} B_f(t) \\ \Rightarrow \frac{i}{2}(\omega - \omega_{fi}) e^{i(\omega-\omega_{fi})t/2} B_i(t) + e^{i(\omega-\omega_{fi})t/2} \frac{d}{dt} B_i(t) &= -\frac{1}{2\hbar} e^{i(\omega-\omega_{fi})t/2} W_{if} B_f(t) \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} B_i(t) &= -\frac{i}{2}(\omega - \omega_{fi}) B_i(t) - \frac{1}{2\hbar} W_{if} B_f(t). \end{aligned}$$

Analog verfährt man mit der Gleichung für $(d/dt)b_f(t)$.

Das transformierte Gleichungssystem hat dann die Form:

$$\frac{d}{dt}B_i(t) = -\frac{i}{2}(\omega - \omega_{fi})B_i(t) - \frac{1}{2\hbar}W_{if}B_f(t) \quad (3.42)$$

$$\frac{d}{dt}B_f(t) = \frac{i}{2}(\omega - \omega_{fi})B_f(t) + \frac{1}{2\hbar}W_{fi}B_i(t). \quad (3.43)$$

Zur Lösung dieses System mit konstanten Koeffizienten kann z. B. die Methode der Laplace-Transformation herangezogen werden.

Mit $\mathcal{L}\{\cdot\}$ sei die Laplacetransformation bezeichnet. Verwendet man dann die Schreibweise

$$X(s) := \mathcal{L}\{B_i(t)\}$$

$$Y(s) := \mathcal{L}\{B_f(t)\}$$

und beachtet man die Anfangsbedingungen

$$B_i(0) = b_i(0) = 1$$

$$B_f(0) = b_f(0) = 0,$$

so wird daraus ein System zweier gekoppelter linearer Gleichungen:

$$sX(s) = -\frac{i}{2}(\omega - \omega_{fi})X(s) - \frac{W_{if}}{2\hbar}Y(s) + 1 \quad (3.44)$$

$$sY(s) = \frac{i}{2}(\omega - \omega_{fi})Y(s) + \frac{W_{fi}}{2\hbar}X(s). \quad (3.45)$$

Auflösen von (3.45) nach $X(s)$ liefert:

$$X(s) = \frac{2\hbar}{W_{fi}} \left[s - \frac{i}{2}(\omega - \omega_{fi}) \right] Y(s).$$

Eingesetzt in (3.44) ergibt das:

$$\begin{aligned} \frac{2\hbar}{W_{fi}} \left[s + \frac{i}{2}(\omega - \omega_{fi}) \right] \left[s - \frac{i}{2}(\omega - \omega_{fi}) \right] Y(s) &= -\frac{W_{if}}{2\hbar}Y(s) + 1 \\ \left[s^2 - \frac{1}{4}(\omega - \omega_{fi})^2 \right] Y(s) &= -\frac{W_{if}W_{fi}}{4\hbar^2}Y(s) + \frac{W_{if}}{2\hbar} \end{aligned}$$

Oder:

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{W_{fi}/2\hbar}{s^2 + \frac{W_{fi}W_{if}}{4\hbar^2} - \frac{1}{4}(\omega - \omega_{fi})^2} = \frac{W_{fi}/2\hbar}{s^2 + \left(\sqrt{\frac{W_{fi}W_{if}}{4\hbar^2} - \frac{1}{4}(\omega - \omega_{fi})^2} \right)^2} \\ &= \frac{W_{fi}/2\hbar}{s^2 + \left(\sqrt{\frac{W_{fi}W_{if} - \hbar^2(\omega - \omega_{fi})^2}{4\hbar^2}} \right)^2}. \end{aligned}$$

Aus der Theorie der Laplace-Transformation ist bekannt:

$$\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s^2 + a^2} \right) = \frac{1}{a} \sin(at).$$

Damit erhält man für die Grösse $B_f(t) \equiv \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$:

$$B_f(t) = \frac{W_{fi}}{\sqrt{W_{if}W_{fi} - \hbar^2(\omega - \omega_{fi})^2}} \sin \left\{ \sqrt{W_{if}W_{fi} - \hbar^2(\omega - \omega_{fi})^2} \frac{t}{2} \right\}, \quad (3.46)$$

und damit für die gesuchte Übergangswahrscheinlichkeit $P_{if}(t) = |b_f(t)|^2 = |B_f(t)|^2$:

$$P_{if}(t) = \frac{W_{fi}^2}{W_{if}W_{fi} - \hbar^2(\omega - \omega_{fi})^2} \sin^2 \left\{ \sqrt{W_{if}W_{fi} - \hbar^2(\omega - \omega_{fi})^2} \frac{t}{2} \right\}, \quad (3.47)$$

3.3.3 Störungstheorie zweiter Ordnung - Zwei-Photonen-Prozesse

Es kann nun aus Gründen von Auswahlregeln der Fall eintreten, daß das Matrixelement W_{fi} zwischen Anfangs- und Endzustand verschwindet. Damit verschwindet auch der Beitrag erster Ordnung in Gleichung (3.25), und der Korrekturterm zweiter Ordnung wird zum führenden Term in der Potenzreihenentwicklung (3.25).

Der Berechnung dieser Korrektur zweiter Ordnung ist der nun folgende Abschnitt gewidmet.

Gleichung (3.27) liefert eine Rekursionsformel für die Koeffizienten höherer Ordnung. $b_n^{(2)}(t)$ erhält man daher, indem man die Lösung für $b_n^{(1)}(t)$ in diese Formel einsetzt.

Um das folgende möglichst übersichtlich zu halten, betrachte man den wichtigen Spezialfall einer monochromatischen Störung, für die die Lösung in erster Ordnung Störungstheorie im vorangehenden Abschnitt hergeleitet wurde.

Monochromatische Störung

Mit der Störung aus (3.35) wird die Gleichung für die Koeffizienten zweiter Ordnung:

$$\begin{aligned}
 b_f^{(2)}(t) &= -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' \sum_k e^{i\omega_{fk}t'} W_{fk}(t') \int_0^{t'} d\tau e^{i\omega_{ki}\tau} W_{ki}(\tau) = \\
 &= -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt \sum_k e^{i\omega_{fk}t} \frac{W_{fk}}{2i} (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) \int_0^{t'} d\tau e^{i\omega_{ki}\tau} \frac{W_{ki}}{2i} (e^{i\omega\tau} - e^{-i\omega\tau}) = \\
 &= \frac{1}{4i\hbar^2} \int_0^t dt' \sum_k W_{fk} W_{ki} \left[e^{i(\omega_{fk}+\omega)t'} - e^{i(\omega_{fk}-\omega)t'} \right] \left[\frac{1 - e^{i(\omega_{ki}+\omega)t'}}{(\omega_{ki} + \omega)} - \frac{1 - e^{i(\omega_{ki}-\omega)t'}}{(\omega_{ki} - \omega)} \right] = \\
 &= \frac{1}{4i\hbar^2} \sum_k W_{fk} W_{ki} \int_0^t dt' \underbrace{\left[\frac{e^{i(\omega_{fk}+\omega)t'} - e^{i(\omega_{fk}-\omega)t'}}{(\omega_{ki} + \omega)} - \frac{e^{i(\omega_{fk}+\omega)t'} - e^{i(\omega_{fk}-\omega)t'}}{(\omega_{ki} - \omega)} \right]}_{=0} - \\
 &\quad - \frac{e^{i(\omega_{fk}+\omega_{ki}+2\omega)t'}}{(\omega_{ki} + \omega)} + \frac{e^{i(\omega_{fk}+\omega_{ki})t'}}{(\omega_{ki} + \omega)} + \frac{e^{i(\omega_{fk}+\omega_{ki})t'}}{(\omega_{ki} - \omega)} - \frac{e^{i(\omega_{fk}+\omega_{ki}-2\omega)t'}}{(\omega_{ki} - \omega)} \Big] = \\
 &\stackrel{1)}{=} \sum_{\pm} \sum_k \frac{iW_{fk}W_{ki}}{4\hbar^2} \int_0^t \left[\frac{e^{i(\omega_{fk}+\omega_{ki}\pm 2\omega)t'}}{(\omega_{ki} \pm \omega)} - e^{i(\omega_{fk}+\omega_{ki})t'} \left[\frac{\omega_{ki}}{(\omega_{ki}^2 - \omega^2)} \right] \right] dt' = \\
 &\stackrel{2)}{=} i \sum_{\pm} \sum_k \frac{W_{fk}W_{ki}}{4\hbar^2} \left[\frac{1}{(\omega_{ki} \pm \omega)} \right] t - i \sum_k \frac{W_{fk}W_{ki}}{4\hbar^2} \int_0^t dt' e^{i(\omega_{fk}+\omega_{ki})t'} \left[\frac{2\omega_{ki}}{(\omega_{ki}^2 - \omega^2)} \right].
 \end{aligned}$$

Hierbei ist zu beachten, daß in der Summe $\sum_{\pm}$ jeweils nur ein Summand wesentlich von Null verschieden sein kann, da der Nenner jeweils nur entweder für “+” oder für “-” sehr klein wird (entsprechend der Emission (“+”) oder Absorption (“-”) von Photonen).

Zu 1):

- Im Falle der Absorption (Emission) zweier Photonen haben die Frequenzen ω_{fk} und ω_{ki} gleiches Vorzeichen. Daher können die Terme mit den Integranden, die proportional zu $e^{i(\omega_{fk}+\omega_{ki})t'}$ sind, vernachlässigt werden, da die Integration über rasch oszillierende Funktionen Null ergibt.

Zu 2):

- die Integration der exp-Funktion liefert den Wert $\frac{1-e^{i(\omega_{fk}+\omega_{ki}+2\omega)t}}{i(\omega_{fk}+\omega_{ki}+2\omega)}$, woraus sich unter Berücksichtigung von $e^{i(\omega_{fk}+\omega_{ki}+2\omega)t} = 1 + i(\omega_{fk} + \omega_{ki} + 2\omega)t + \mathcal{O}(2)$ der angegebene Wert ergibt.

Für die 2-Photonen-Emission findet man also den Koeffizienten zweiter Ordnung zu:

$$b_f^{(2)}(t) = \frac{i}{2\hbar} \sum_k \frac{W_{fk}W_{ki}}{(E_k - E_i + \hbar\omega)} t. \quad (3.48)$$

Und analog für die 2-Photonen-Absorption:

$$b_f^{(2)}(t) = \frac{i}{2\hbar} \sum_k \frac{W_{fk}W_{ki}}{(E_k - E_i - \hbar\omega)} t. \quad (3.49)$$

Hierbei ist also über sämtliche mögliche Zwischenzustände k , für die die Übergangsmatrixelemente W_{fk} und W_{ki} nicht verschwinden, zu summieren.

Die erste Diskussion von Zwei-Quanten-Prozessen bei der Wechselwirkung elektromagnetischer Strahlung mit Atomen findet sich in einer Veröffentlichung von Göppert-Mayer [43] und in einer späteren Zusammenfassung ihrer Dissertation [44]. Umfassend behandelt wird der Themenkomplex in Lehrbuchform beispielsweise in [45] - [48].

3.3.4 Dynamischer Stark-Effekt

Bisher wurde angenommen, daß der Anfangs- und Endzustand des Atoms verschieden seien, so daß es zu realen Übergängen zwischen verschiedenen Atomniveaus im Verbund mit der Emission bzw. Absorption zweier Photonen kommt.

Fallen jedoch der Anfangs- und Endzustand zusammen (für die Indices bedeutet dies: " $f=i$ "), so bilden andere Terme als die bisher betrachteten den Hauptbeitrag zum Integral.

Denn dann gilt $\omega_{fk} = \omega_{ik} = -\omega_{ki}$ und aus den Funktionen $e^{i(\omega_{fk}+\omega_{ki}\pm 2\omega)t'}$ werden schnell oszillierende Funktionen $e^{i(\pm 2\omega)t'}$, deren Beitrag wieder vernachlässigt werden kann.

Im Gegensatz dazu liefert jetzt die Funktion $e^{i(\omega_{fk}+\omega_{ki})t'} = e^{i(-\omega_{ki}+\omega_{ki})t'} = 1$ den Hauptbeitrag zum Integral.

Aus dem Schritt 1) des vorigen Abschnitts wird nun:

$$b_{f=i}^{(2)}(t) \stackrel{1')}{=} -i \sum_k \frac{W_{fk}W_{ki}}{4\hbar^2} \left[\frac{2\omega_{ki}}{\omega_{ki}^2 - \omega^2} \right] t =$$

$$= \frac{i}{4\hbar} \sum_k |W_{ki}|^2 \left[\frac{2(E_k - E_i)}{(E_k - E_i)^2 - (\hbar\omega)^2} \right] t. \quad (3.50)$$

Fallen Anfangs- und Endzustand des Atoms wie im hier betrachteten Fall zusammen, so gibt es zwei mögliche Prozesse, an denen zwei Photonen beteiligt sind (s. Abb.(3.5)). Im ersten liegt der Zwischenzustand energetisch über dem Anfangs-/Endzustand ($E_k > E_i$), es wird ein Photon absorbiert und anschliessend emittiert. Im zweiten Prozess liegt der Zwischenzustand tiefer ($E_k < E_i$) und es wird zunächst ein Photon emittiert und dann absorbiert.

Diese Prozesse treten auf, wenn man auf ein Atom Licht einstrahlt, dessen Frequenz nahe bei einer atomaren Übergangsfrequenz liegt, wobei der Übergang aber durch bestimmte Auswahlregeln verboten ist. Da dies ein Effekt zweiter Ordnung ist, ist er v.a. bei hohen Lichtintensitäten wie sie z. B. ein Laser zu liefern vermag, zu beobachten.

Die durch den Laser "gekoppelten" Energieniveaus des Atoms werden dadurch verschoben, und dieser Effekt heisst *dynamischer Stark-Effekt* (oder in der englischsprachigen Literatur häufig auch *AC Stark shift*), da hier nicht ein statisches elektrisches Feld, sondern das elektrische Wechselfeld diese Energieverschiebung bewirkt.

Zur Berechnung der Größe der Energieverschiebung betrachte man zunächst die ungestörte atomare Wellenfunktion

$$|\psi(t)\rangle = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E_i t\right) |\psi(0)\rangle \quad (3.51)$$

Unter Berücksichtigung der Korrektur zweiter Ordnung wird daraus die Wellenfunktion

$$|\psi(t)\rangle_S = \left[1 + b_{f=i}^{(2)}(t)\right] \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E_i t\right) |\psi(0)\rangle. \quad (3.52)$$

Andererseits kann man diesen Zustand auch in der Form (3.51) schreiben, wenn man die Energie E_i durch die verschobene Energie $E_i + \delta E_i$ ersetzt, wobei δE_i als klein angenommen wird.

Entwickelt man die Exponentialfunktion nach Potenzen von δE_i , so erhält man

$$|\psi(t)\rangle_S = \left[1 - \frac{i}{\hbar} \delta E_i t\right] \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E_i t\right) |\psi(0)\rangle. \quad (3.53)$$

Ein Koeffizientenvergleich von (3.52) mit (3.53) zeigt dann:

$$\delta E_i = -\frac{\hbar}{it} b_{f=i}^{(2)}(t). \quad (3.54)$$

Mit den Ergebnis aus (3.50) erhält man schließlich für die gesuchte Größe der Energieverschiebung beim dynamischen Stark-Effekt (vgl. [49]):

$$\delta E_i = \frac{1}{4} \sum_k |W_{ki}|^2 \left[\frac{2(E_k - E_i)}{(E_k - E_i)^2 - (\hbar\omega)^2} \right]. \quad (3.55)$$

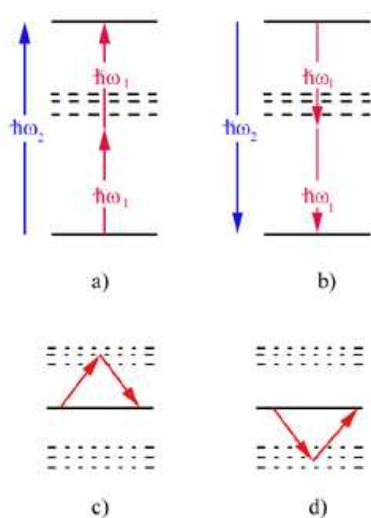


ABBILDUNG 3.5: Mögliche Prozesse zweiter Ordnung: Anfangs- und Endzustand sind verschieden: a) Zwei-Photonen-Absorption, b) Zwei-Photonen-Emission. Anfangs- und Endzustand sind gleich: c) Absorption und anschließende Emission, d) Emission und anschließende Absorption. In allen vier Fällen braucht der Energieerhaltungssatz für die Übergänge in die Zwischenzustände nicht respektiert zu sein; lediglich für den Gesamtprozeß muß die Energieerhaltung erfüllt sein.

KAPITEL 4

Experimente am Ein-Atom-Maser

Dieses Kapitel beinhaltet die im Rahmen dieser Dissertation erarbeiteten theoretischen Grundlagen für neue Experimente am Ein-Atom-Maser, mit denen v.a. die Dekohärenz besonders einfacher Quantensysteme untersucht werden kann. Zu solchen Systemen gehören Überlagerungen aus nur zwei Fockzuständen $|0\rangle$ und $|1\rangle$ des Photonenfelds im Resonator. Geschildert wird deren Erzeugung sowie die Möglichkeit, an ihnen Dekohärenz zu beobachten.

Dabei ist besonders die Möglichkeit hervorzuheben, den Einfluß der Umgebung zu kontrollieren, was z. B. durch Änderung der Lochgröße geschehen kann.

Darüberhinaus werden Experimente vorgeschlagen, die die Grundlagen der Quantenmechanik betreffen (Tunneln von Photonen zwischen zwei Resonatoren, Test der Bell'schen Ungleichung, Teleportation von Quantenzuständen des Photonenfeldes).

4.1 Messung der Dekohärenz von überlagerten Photonenzuständen

Die experimentelle Vorrichtung zur Messung der Dekohärenz von Superpositionen von Photonenanzahlzuständen im Mikromaser entspricht dem Standardaufbau eines Ein-Atom-Masers, wie er in Kapitel 3 dargelegt wurde.

Das Experiment besteht aus zwei Arbeitsschritten. Der erste dient der Erzeugung eines überlagerten Zustands aus den Fockzuständen $|0\rangle$ und $|1\rangle$ des Photonenfelds im Innern des Resonators.

Hieran schließt sich ein variables Zeitintervall Δt , während dessen der eben präparierte Zustand sich selbst überlassen wird. Durch Kopplung an die Umgebung kommt es in dieser Zeit zur Dekohärenz, d. h. zur fortschreitenden Auslöschung der Phasenbeziehung zwischen den beiden beteiligten Photonenzuständen. Diese wohldefinierte Phasenbeziehung zwischen den Zuständen des Feldes wurde im Präparationsvorgang erzeugt und kann in der hier vorgestellten Methode variiert werden.

In einem zweiten Schritt "sondiert" ein weiteres Atom die verbliebene Phaseninformation, so daß man als eine Funktion des Wartezeit-Intervalls Δt ein zeitaufgelöstes Bild des Dekohärenzvorgangs erhält.

4.1.1 Präparation des Resonatorfeldes

Das Herzstück des am Institut verwendeten Ein-Atom-Masers stellt der *geschlossene* Mikrowellenresonator dar (vgl. Abb.(3.4)). Diese Art von Hohlraumresonatoren hat den Vorteil, daß die Kopplung eines darin eingeschlossenen Feldes an die Umgebung im wesentlichen nur durch die beiden Öffnungen an den Stirnseiten des Resonators erfolgen kann. Dies ermöglicht es zum einen, das Feld sehr gut nach außen hin abzuschirmen, zum anderen wird es möglich, die Kopplung durch eine Änderung der Lochgrößen gezielt zu variieren. Dieser Vorteil in bezug auf die Abschirmung eines Feldes im Innern auf der einen Seite bringt aber auch einen Nachteil mit sich, wenn es um die hier gewünschte Erzeugung eines Überlagerungszustands aus zwei Photonenanzuständen geht: soll die gewünschte Kohärenz des Feldes nämlich mit Hilfe der in den Resonator geschickten Atome allein durch die Rabioszillation erzeugt werden, so muß die Kohärenz vorher eine Eigenschaft des Atoms gewesen sein und von diesem dem Feld durch die im Hohlraum stattfindende Wechselwirkung aufgeprägt werden. Dies bedeutet jedoch, das Atom muß in einem überlagerten Zustand $\alpha|g\rangle + \beta|e\rangle$ in den Resonator eintreten, was üblicherweise durch ein klassisches Feld erzielt wird, das in einer dem Resonator vorgelagerten Zone erzeugt wird. Nun führen aber Streufelder an den Öffnungen des Resonators unweigerlich zu einer unkontrollierten Störung dieser Kohärenz, umso mehr als es sich bei den Atomen um Rydberg-Atome handelt, die schon allein auf Grund ihrer räumlichen Ausdehnung auf derartige Streufelder besonders sensitiv reagieren.

Hier befindet man sich offensichtlich in einem Dilemma, was zum einen die Erzeugung des gewünschten Feldzustands und zum andern dessen Abschirmung nach außen angeht. Denn für Letzteres wäre die Größe der Öffnungen möglichst klein zu halten, was aber unerwünschte und unkontrollierbare Störungen bei der Präparation nach sich zöge.

Im folgenden soll daher eine Alternative vorgeschlagen werden, die zwar zusätzlich zur Wechselwirkung des Atoms mit dem Photonenfeld des Mikromasers zwei Laser benötigt, die aber einen Ausweg aus diesem Dilemma darstellen kann. Dieser Ausweg besteht darin, das Atom im oberen Maserzustand $|e\rangle$ in den Resonator eintreten zu lassen, so daß etwaige Streufelder nur eine globale Phase bewirken können. Im Laufe der durch die Rabioszillation bestimmten Wechselwirkung kommt es zur Ausbildung eines verschränkten Zustands zwischen Atom- und Feldzuständen ($\alpha(t)|g, 1\rangle + \beta(t)|e, 0\rangle$). Die Koeffizienten $\alpha(t)$ und $\beta(t)$ sind dabei durch die Zeitstruktur der Rabioszillation bestimmt, welche somit die Phase zwischen diesen beiden Zuständen festlegt. Mit Hilfe der zusätzlichen Laser werden zu einem frei wählbaren Zeitpunkt t_0 Ein-Photon- bzw. Zwei-Photonen-Übergänge aus den beiden Maserniveaus $|e\rangle$ und $|g\rangle$ in einen gemeinsamen Atomzustand $|a\rangle$ induziert. Auf Grund der Ununterscheidbarkeit der Wege, die in diesen Zustand führen, bleibt als Ergebnis eine kohärente Überlagerung der jeweils zugehörigen Photonzustände $|0\rangle$ und $|1\rangle$.

Nach dieser kurzen Darstellung sollen nun die notwendigen Schritte im Einzelnen näher betrachtet werden. Vorausgeschickt sei dabei, daß für die Rechnungen die Achse des Atom-

strahls stets als Quantisierungsachse angenommen wird, und die Einstrahlrichtung der Laser als dazu parallel gesetzt wurde¹.

Zu Beginn befinde sich das Feld im Innern des Resonators im Vakuumzustand $|0\rangle$. Ein Atom tritt im oberen der beiden Maserzustände $|e\rangle$ in den Resonator. Die zeitliche Entwicklung des Systems aus Atom und Resonatorfeld folgt dem unitären Zeitentwicklungsoperator, der für den Fall, daß der Atomübergang und die Resonatormode in Resonanz sind, folgende Form hat (s. (3.14)):

$$\begin{aligned}\hat{U}(t) &= \exp\{-i\omega_g t\}|g, 0\rangle\langle 0, g| + \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}i[\omega_g + \omega_e + (2n+1)\omega]t\right\} \left[\cos\left(\frac{1}{2}\Omega_n t\right) (|g, n+1\rangle\langle n+1, g| + |e, n\rangle\langle n, e|) \right. \\ &+ \left. i \sin\left(\frac{1}{2}\Omega_n t\right) (|g, n+1\rangle\langle n, e| + |e, n\rangle\langle n+1, g|) \right],\end{aligned}\quad (4.1)$$

wobei $\hbar\omega_g, \hbar\omega_e$ die Energien des Atomzustands $|g\rangle$ bzw. $|e\rangle$ sind, und $\hbar\omega$ die Energie des Photonenzustands $|1\rangle$ bezeichnet. Die Energie des Vakuumzustands $|0\rangle$ wurde dabei als Energienullpunkt gewählt.

Ω_n bedeutet hierin wie früher die Rabifrequenz des n-Photonzustands.

Nach der Zeit t_0 befindet sich das System im Zustand:

$$\begin{aligned}|\Psi(t_0)\rangle = \hat{U}(t_0)|e\rangle|0\rangle &= e^{-i\omega_e t} \left[\cos\left(\frac{1}{2}\Omega_0 t_0\right) |e, 0\rangle + i \sin\left(\frac{1}{2}\Omega_0 t_0\right) |g, 1\rangle \right] = \\ &= \alpha(t_0)|e, 0\rangle + \beta(t_0)|g, 1\rangle.\end{aligned}$$

Nun bezeichne t_0 den Zeitpunkt, zu dem die beiden Laser L_1 und L_2 eingestrahlt werden. Dabei induziert der Laser L_1 den Übergang $61D_{3/2} \rightarrow 5P_{3/2}$ als einen Ein-Photon-Übergang, der Laser L_2 den Übergang $63P_{3/2} \rightarrow 5P_{3/2}$ als Zwei-Photonen-Übergang. Ist τ die Dauer des Laserpulses, so lautet der Hamiltonian für diese Wechselwirkung

$$\hat{H}_{int} = -\frac{\hbar}{2}(\Omega_{R1} e^{-i\nu_1 \tau} |a, 1\rangle\langle 1, g| + \Omega_{R2} e^{-i\nu_2 \tau} |a, 0\rangle\langle 0, e|) + H.C. \quad (4.2)$$

wobei ² $\hbar\Omega_{R1} = |\wp_{ga}| \mathcal{E}_{(1)}$, $\hbar\Omega_{R2} = |\tilde{\wp}| \tilde{\mathcal{E}}$.

Mit den Anfangsbedingungen $c_{e0}(0) = \alpha(t_0)$, $c_{g1}(0) = \beta(t_0)$ ergibt sich für die Wahrscheinlichkeitsamplituden für die Zustände $|a, 0\rangle$ bzw. $|a, 1\rangle$:

$$\begin{aligned}c_{a0}(\tau) &= \alpha(t_0) \cdot i \cdot \sin(1/2 \cdot \Omega_{R1} \tau) =: \alpha(t_0) \cdot c'_{a0}(\tau), \\ c_{a1}(\tau) &= \beta(t_0) \cdot i \cdot \sin(1/2 \cdot \Omega_{R2} \tau) =: \beta(t_0) \cdot c'_{a1}(\tau).\end{aligned}$$

Sollen diese Wahrscheinlichkeitsamplituden gleich sein, so ergibt sich daraus eine Bedin-

¹Dies stellt keine Einschränkung dar. Eine nicht-parallele Einstrahlung hätte zwar zur Folge, daß für einen Zustand i.d.R. alle möglichen Richtungsquantenzahlen realisiert würden; die dabei auftretenden

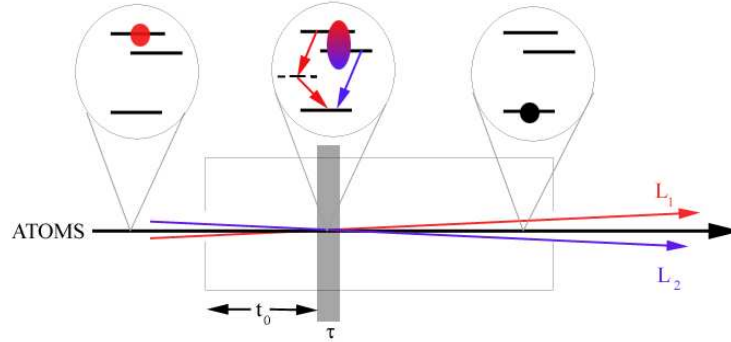


ABBILDUNG 4.1: Schematische Darstellung zur Präparation des Resonatorfeldes. Die beiden oberen Energieniveaus sind die 63 P- und 61 D-Zustände der Rubidiumatome, das unterste Niveau ist das 5 P-Niveau (schwarz) der Atome. Der rote Kreis bezeichnet den Systemzustand $|e, 0\rangle$, die rot-blaue Ellipse bezeichnet den Überlagerungszustand $\alpha(t_0)|e, 0\rangle + \beta(t_0)|g, 1\rangle$. t_0 ist der Zeitpunkt zu Beginn der Lasereinstrahlung und τ ist die Dauer (grau-schattierter Bereich).

gung für die Laserintensitäten (bzw. für die elektrischen Feldstärken)³:

$$\begin{aligned} \Omega_{R1} &\stackrel{!}{=} \Omega_{R2} \\ \Longleftrightarrow \tilde{\mathcal{E}} &\stackrel{!}{=} \frac{|\wp_{ga}|}{|\tilde{\wp}|} \mathcal{E}_{(1)} \end{aligned}$$

Bei gleichen Wahrscheinlichkeitsamplituden $c'_{a0}(\tau) = c'_{a1}(\tau) =: c'_a(\tau)$ separieren die Feldzustände und der Atomzustand, und als Ergebnis der laserinduzierten Übergänge ergibt sich als Zustand des Systems zur Zeit $t' := t_0 + \tau$:

$$|\Psi(t')\rangle = c'_a(\tau) (\alpha(t_0)|0\rangle + \beta(t_0)|1\rangle) |a\rangle + [\gamma(t')|g, 1\rangle + \eta(t')|e, 0\rangle]. \quad (4.3)$$

Da die laserinduzierten Übergänge nicht mit 100% Effizienz geschehen, verbleiben wie zu sehen noch Komponenten, in denen das Atom in einem der beiden Maserniveaus ist. Dies stellt jedoch keine Beschränkung dar, denn eine Detektion des Atoms im Zustand $|a\rangle$ projiziert diese unerwünschten Komponenten schließlich heraus.

Genauer muß man sagen, daß der Zustand $|a\rangle = 5P$ von Rubidium eine sehr kurze Lebensdauer besitzt, so daß dieser noch innerhalb des Resonators in den wahren Grundzustand von Rubidium (5 S) zerfällt. D. h. am Ende wird nicht der 5 P-Zustand, sondern der 5

Clebsch-Gordan-Koeffizienten bewirken aber weder eine Änderung der Größenordnungsverhältnisse noch stellen sie ein grundsätzliches Problem für die Realisierung der hier vorgeschlagenen Methode dar.

²Die genaue Bedeutung der hier auftretenden Größen wird im anschließenden Abschnitt über die benötigten Laser-Intensitäten erläutert.

³Beide Größen sind über die Beziehung $I = \frac{1}{2} c \epsilon_0 \mathcal{E}^2$ miteinander verknüpft.

S-Zustand detektiert. Das bedeutet einen weiteren Vorteil, denn der Grundzustand wechselt beim Verlassen des Resonators nicht mit etwaigen Streufeldern an den Öffnungen. Als weitere Folge der Lasereinstrahlung wurde die Verschränkung zwischen Resonatorfeld und Atom aufgehoben, und als Zustand des Feldes im Mikromaser allein ergibt sich:

$$|\psi_f(t_0 + \tau)\rangle = c'_a(\tau) (\alpha(t_0)|0\rangle + \beta(t_0)|1\rangle). \quad (4.4)$$

Hier wird deutlich, daß sich durch Ausnutzung der Zeitstruktur, die durch die Rabioszillation und die zugehörigen Wahrscheinlichkeitsamplituden $\alpha(t_0)$ und $\beta(t_0)$ gegeben ist, eine beliebige Überlagerung der Photonenanzahlzustände $|0\rangle$ und $|1\rangle$ erreichen läßt.

Dies ist insbesondere von Bedeutung, wenn man mit dem hier gezeigten Versuch die Stabilität von Überlagerungen eines Zwei-Zustands-Systems testen will, um Erkenntnisse über den Einfluß der Dekohärenz auf das Register von Quantencomputern zu erlangen. Denn in diesen ist es wesentlich, daß man sog. Qubits als beliebige Überlagerungen von Zuständen eines Zwei-Zustands-System realisieren und über eine gewisse Zeit (zumindest die Zeit, die eine Quantenoperation benötigt) stabil halten kann.

An dieser Stelle stellt sich die Frage, woher die Kohärenz, die zwischen den Photonenanzahlzuständen nun besteht, stammt. Offensichtlich waren zu keiner Zeit weder das Atom noch das Resonatorfeld für sich allein genommen in solch einer kohärenten Überlagerung (dazu berechne man die reduzierten Dichtematrizen für beide Systeme). Lediglich die Produktzustände $|e, 0\rangle$ und $|g, 1\rangle$ waren dies, vermittelt durch die Rabioszillation im Innern des Resonators.

Die Antwort auf diese Frage ist folgende: die Übergänge werden von Lasern induziert, deren Feld ein sog. kohärenter Zustand oder Glauber-Zustand des elektromagnetischen Feldes ist, der fast-klassische Eigenschaften besitzt und insbesondere eine sehr hohe mittlere Photonenanzahl aufweist. Dadurch ist es nicht möglich, zwischen den beiden Wegen zu unterscheiden, die in den Zustand $|a\rangle$ geführt haben, obwohl bei einem dieser Übergänge **ein**, beim anderen aber **zwei** Photonen in das Laserfeld emittiert wurden. Es ist also die Ununterscheidbarkeit der Wege, die in den Endzustand geführt haben, die die Kohärenz oder Interferenzfähigkeit der beteiligten Photonenanzahlzustände ermöglicht.

Benötigte Laser-Intensitäten

Wie im vorangegangenen Abschnitt gesehen, läuft die Forderung nach gleichen Übergangswahrscheinlichkeiten für die beiden induzierten Prozesse auf eine Bedingung für das Verhältnis der eingestrahlten Laser-Intensitäten hinaus. Dieses wiederum muß dem Verhältnis der Übergangsmatrixelemente des Ein-Photon- und Zwei-Photonen-Übergangs entsprechen. Die Abschätzung wird unter den bereits erwähnten vereinfachenden Annahmen vorgenommen und dient lediglich dazu, sich über die Größenordnungsverhältnisse Klarheit zu verschaffen. Insbesondere werden für die Berechnung von Matrixelementen die radialen Wellenfunktionen für Wasserstoff $R_{n,l}(r)$ herangezogen, die für Rydberg-Zustände eine

gute Näherung darstellen.

Wie Gleichungen (3.48) und (3.49) zeigen, ist beim Zwei-Photonen-Übergang über alle vorkommenden Zwischenzustände zu summieren. Diese Summe läßt sich für eine Abschätzung durch ein effektives Matrixelement ersetzen:

$$\tilde{\wp} := \sum_{n'} \frac{\wp_{a,n'} \wp_{n',e}}{(E_{n'} - E_e) + (h\tilde{\nu})}.$$

Ebenso führt man eine effektive Feld-Amplitude $\tilde{\mathcal{E}} := \mathcal{E}_{(2)}^2$ und eine effektive Frequenz $\tilde{\nu} := 2 \cdot \nu_{ea}$ ein, wodurch der Zwei-Photonen-Übergang durch einen effektiven Ein-Photon-Übergang beschrieben werden kann.

Im vorliegenden Fall kann überdies eine weitere Vereinfachung angebracht werden. Weil für den Zwei-Photonen-Übergang bei der gewählten Laser-Wellenlänge von 961,5 nm der 6S-Zustand den dominanten Beitrag liefert, können alle übrigen Zwischenzustände vernachlässigt werden. Die entsprechenden Übergangsfrequenzen zwischen diesen vernachlässigten Zwischenzuständen und dem Anfangs- bzw. Endzustand liegen nämlich bereits so weit auseinander, daß der im Matrixelement für den Zwei-Photonen-Übergang auftretende Energienenner sehr groß wird, und sie folglich keinen nennenswerten Beitrag mehr liefern.

Die Energien der beteiligten Zustände können aus den Wellenzahlen errechnet werden, die der im Anhang beigefügten Tabelle (aus [51]) zu entnehmen sind.

Die Umrechnung erfolgte mit Hilfe der Beziehung $E = h \cdot \nu = h \cdot c \cdot k$, wobei für das Planck'sche Wirkungsquantum der Wert $h = 6,626184 \cdot 10^{-34} J \cdot sec$ und für die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum $c = 2,997924 \cdot 10^{10} cm \cdot sec^{-1}$ verwendet wurde.

In der Dipolnäherung gilt für ein in $\hat{e}$ -Richtung polarisiertes elektrisches Feld für das Matrixelement zwischen den wasserstoffähnlichen Zuständen $|\phi_i\rangle$ (Anfangszustand) und $|\phi_f\rangle$ (Endzustand):

$$\langle \phi_f | \hat{e} \cdot \hat{r} | \phi_i \rangle = \int_0^\infty r^2 dr R_{n_f, l_f}^*(r) r R_{n_i, l_i}(r) \int d\Omega Y_{l_f, m_f}^*(\theta, \phi) \hat{e} \cdot \hat{r} Y_{l_i, m_i}(\theta, \phi). \quad (4.5)$$

Mit der Beziehung

$$\hat{e} \cdot \hat{r} = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \left(\epsilon_z Y_{1,0} + \frac{-\epsilon_x + i\epsilon_y}{\sqrt{2}} Y_{1,1} + \frac{\epsilon_x + i\epsilon_y}{\sqrt{2}} Y_{1,-1} \right)$$

wird daraus z. B. für σ^+ -polarisiertes Licht:

$$\langle \phi_f | \hat{e} \cdot \hat{r} | \phi_i \rangle = \int_0^\infty r^3 dr R_{n_f, l_f}^*(r) R_{n_i, l_i}(r) \int d\Omega Y_{l_f, m_f}^*(\theta, \phi) \left(\sqrt{\frac{2\pi}{3}} (\epsilon_x + i\epsilon_y) Y_{1,-1} \right) Y_{l_i, m_i}(\theta, \phi). \quad (4.6)$$

Zustand	n	l	m	Wellenzahl k [cm ⁻¹]	Energie E [J]
63P _{3/2}	63	1	-1, 0, +1	33660,82	6,686653 · 10 ⁻¹⁹
6 S _{1/2}	6	0	0	20133,6	3,999499 · 10 ⁻¹⁹
5 P _{3/2}	5	1	-1,0,+1	12816,56	2,545983 · 10 ⁻¹⁹

TABELLE 4.1: Quantenzahlen und Energien der relevanten Zustände für den Zwei-Photonen-Übergang. Der verwendete Laser hat eine Wellenlänge von 961,5 nm, was einer Energie von $E_{Laser}^{2-Photon} = 2,066021 \cdot 10^{-19}$ J entspricht.

Die hierbei auftretenden Integrale über Produkte von Kugelflächenfunktionen lassen sich in der folgenden Weise durch die Wigner-3j-Symbole ausdrücken ([50]):

$$\int d\Omega Y_{l_1,m_1}(\Omega)Y_{l_2,m_2}(\Omega)Y_{l_3,m_3}(\Omega) = \left[\frac{(2l_1+1)(2l_2+1)(2l_3+1)}{4\pi} \right]^{1/2} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \\ \times \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}.$$

Unter Berücksichtigung der Eigenschaft von Kugelflächenfunktionen unter komplexer Konjugation: $Y_{l,-m} = (-1)^m Y_{l,m}^*$ erhält man weiter:

$$\langle \phi_f | \hat{\epsilon} \cdot \hat{r} | \phi_i \rangle = (-1)^{m_f} \sqrt{\frac{2\pi}{3}} (\epsilon_x + i\epsilon_y) \int_0^\infty r^3 dr R_{n_f,l_f}^*(r) R_{n_i,l_i}(r) \left[\frac{3(2l_f+1)(2l_i+1)}{4\pi} \right]^{1/2} \times \\ \times \begin{pmatrix} l_f & 1 & l_i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_f & 1 & l_i \\ -m_f & -1 & m_i \end{pmatrix}.$$

Ein-Photon-Übergang 61D_{3/2} → 5P_{3/2}

Die Wellenlänge des induzierenden Laserlichts beträgt 479,2 nm.

Das Dipolmatrixelement beträgt für diesen Übergang 61D_{3/2} → 5P_{3/2} : -0,185816 · 10⁻⁹. Weitere Ausführungen finden sich weiter unten im Abschnitt über magnetische Quantenzahlen.

Zwei-Photonen-Übergang 63P_{3/2} → 5P_{3/2}

Dieser Übergang findet im wesentlichen über einen S-Zustand als Zwischenzustand statt. Daraus ergeben sich gewisse Einschränkungen für die im gesamten Prozeß auftretenden Drehimpuls- und magnetischen Quantenzahlen und insbesondere für die Quantenzahlen des Endzustands.

Die relevanten Zustände sind zusammen mit den zugehörigen Quantenzahlen und Energien in Tabelle (4.1) zusammengefaßt. Aus den Auswahlregeln für elektrische Dipolübergänge ($\Delta l = 0, \pm 1$ und $\Delta m = \pm 1$) ergeben sich insgesamt vier verschiedene Kombinationsmöglich-

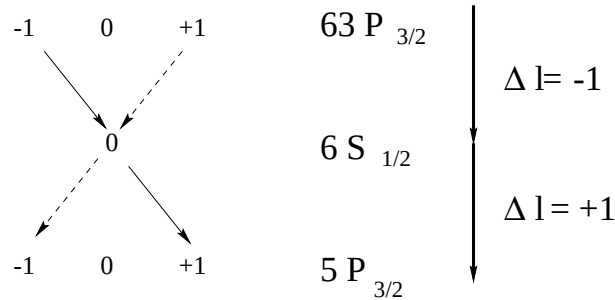


ABBILDUNG 4.2: Schema zu den dipol-erlaubten Übergängen über einen S-Zustand. Die gestrichelten Pfeile entsprechen Übergängen mit $\Delta m = -1$, die durchgezogenen Pfeile solchen mit $\Delta m = +1$. Der Endzustand kann nur einer der beiden magnetischen Unterzustände mit $m = \pm 1$ sein.

keiten, die in Abb. (4.2) graphisch dargestellt sind. Die möglichen magnetischen Unterzustände des Endzustands sind in allen Fällen Zustände mit der magnetischen Quantenzahl $m = \pm 1$.

Magnetische Quantenzahlen

Von diesen vier Möglichkeiten sind jedoch nicht alle geeignet, wenn bei beiden induzierten Übergängen derselbe Endzustand erreicht werden soll. Im allgemeinen Fall beginnt die Präparation des Feldes mit einem Atom im oberen Maserzustand $63P_{3/2}$ in einer Mischung aus allen drei möglichen Richtungsquantenzahlen $m = 0, \pm 1$. Der untere Maserzustand $61D_{3/2}$ entsteht aus dem $63P_{3/2}$ -Zustand unter Emission eines Photons in die resonante Mode des Mikromaser-Resonators, hierbei ändert sich also die magnetische Quantenzahl um $\Delta m = \pm 1$ (elektrische Dipolstrahlung).

Im folgenden sei für diese Wechselwirkung im Resonator $\Delta m = -1$ angenommen (der Fall für $\Delta m = +1$ verläuft analog). Dann ist jedoch für alles weitere, wie in Abb. (4.3) zu sehen, nur der Zustand $63P_{3/2}$ mit $m = +1$ relevant⁴. Die Wechselwirkung mit dem Resonatorfeld induziert Übergänge in den unteren Maserzustand, bei denen wie angenommen $\Delta m = -1$ ist. Folglich befindet sich das Atom im unteren Maserzustand in einem magnetischen Unterzustand mit $m = 0$.

Um sowohl beim Ein-Photon-Prozeß als auch beim Zwei-Photonen-Prozeß in einen Endzustand mit derselben magnetischen Quantenzahl zu gelangen, muß das Licht beider Laser, die diese Übergänge induzieren, so polarisiert sein, daß jeweils $\Delta m = -1$. Der Endzustand ist dann in beiden Fällen der $5P_{3/2}$ -Zustand mit der magnetischen Quantenzahl $m = -1$.

⁴Der Zustand mit $m = 0$ ermöglicht zwar auch die Wechselwirkung im Resonator, aber mit den gewählten Polarisationen der beiden Laser könnte weder der Ein-Photon-Übergang noch der Zwei-Photonen-Übergang realisiert werden.

Atome mit der Richtungsquantenzahl $m = -1$ wechselwirken nicht mit der Resonatormode.

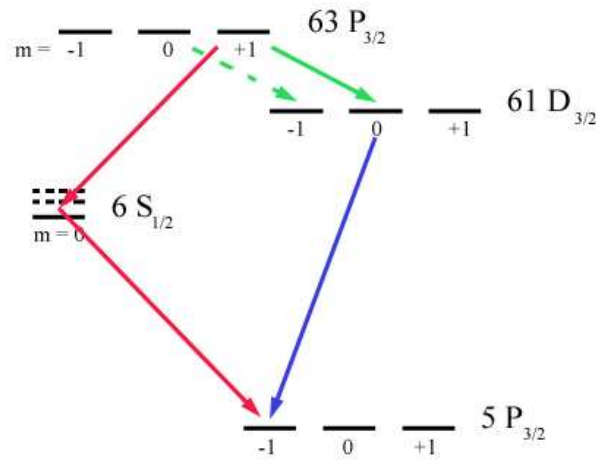


ABBILDUNG 4.3: Schema zu den dipol-erlaubten Übergängen beim Präparationsprozeß auf der Ebene der Richtungsquantenzahlen. Eingezeichnet ist der Fall, daß sowohl bei der Wechselwirkung im Resonator als auch mit den beteiligten Laser die magnetischen Quantenzahlen sich um jeweils $\Delta m = -1$ ändern. Die grünen Pfeile symbolisieren die Wechselwirkung des Atoms mit der Resonatormode. Die roten und blauen Pfeile beziehen sich auf den Zwei-Photonen- und Ein-Photon-Übergang.

Übergang	Matrixelement [$C \cdot cm$]
$63P_{3/2} \rightarrow 6S_{1/2}$	$-0,18434 \cdot 10^{-9} \cdot q$
$6S_{1/2} \rightarrow 5P_{3/2}$	$0,159998 \cdot 10^{-7} \cdot q$
$61D_{3/2} \rightarrow 5P_{3/2}$	$-0,185816 \cdot 10^{-9} \cdot q$

TABELLE 4.2: Übergangsmatrixelemente zur Berechnung der benötigten Laserintensitäten.

Die Übergangsmatrixelemente findet man in Tabelle (4.2).

Wählt man wie in Tabelle (4.3) ausgeführt nun beispielsweise eine Intensität von $10^{-3} W cm^{-2}$ für den Laser, der den Ein-Photon-Übergang induziert, so muß man für den zweiten Laser, der den Zwei-Photonen-Übergang induzieren soll, eine entsprechend höhere Intensität wählen, im Beispiel etwa $10^4 W cm^{-2}$.

4.1.2 Sondierung der Kohärenz

Die Sondierung erfolgt nach einem (variablen) Zeitintervall Δt , während dessen das Feld im Innern des Resonators der Dekohärenz ausgesetzt ist.

Wie oben beschrieben läßt sich das elektromagnetische Feld in einem Mikromaser-Resonator

	Ein-Photon-Übergang $61D_{3/2} \rightarrow 5P_{3/2}$ ($ g\rangle \rightarrow a\rangle$)	Zwei-Photonen-Übergang $63P_{3/2} \rightarrow 6S_{1/2} \rightarrow 5P_{3/2}$ ($ e\rangle \rightarrow m\rangle \rightarrow a\rangle$)
Matrixelement	$\wp_{ga} = q \cdot \langle g \hat{r} a\rangle$	$\tilde{\wp} = q^2 \cdot \langle e \hat{r} m\rangle \langle m \hat{r} a\rangle (E_m - E_e + h\nu)^{-1}$
Feldstärke	$\mathcal{E}_{(1)} \approx 1 \frac{V}{cm}$ ($I_{(1)} \approx 10^{-3} \frac{W}{cm^2}$)	$\mathcal{E}_{(2)} = ?$
Rabifrequenz	$\Omega_{R1} = \frac{1}{\hbar} \wp_{ga} \cdot \mathcal{E}_{(1)}$	$\Omega_{R2} = \frac{1}{\hbar} \tilde{\wp} \cdot \mathcal{E}_{(2)}^2$
$\Omega_{R1} \stackrel{!}{=} \Omega_{R2} \iff \mathcal{E}_{(2)}^2 = \left \frac{\wp_{ga}}{\tilde{\wp}} \right \cdot \mathcal{E}_{(1)}$ $\iff \mathcal{E}_{(2)}^2 = 0,244 \cdot 10^8 \cdot \mathcal{E}_{(1)} V^2 cm^{-2}.$ $\mathcal{E}_{(2)} = 5 \cdot 10^3 V cm^{-1}.$ $\implies I_{(2)} = 3 \cdot 10^4 W cm^{-2}.$		

TABELLE 4.3: Zur Berechnung der Laserintensität für den induzierten Zwei-Photonen-Übergang bei gegebener Laserintensität für den Ein-Photon-Übergang.

in einer Überlagerung $\alpha(t_0)|0\rangle + \beta(t_0)|1\rangle$ aus zwei Photonenanzahlzuständen präparieren. Die relative Phase zwischen diesen beiden Zuständen ist nahezu frei wählbar durch den Zeitpunkt t_0 , der den laserinduzierten Übergang in den $5P$ -Zustand markiert. $\alpha(t_0)$ und $\beta(t_0)$ sind dabei gegeben durch die Zeitstruktur der Rabioszillation. Ist dieser Zeitpunkt t_0 einmal gewählt und das Feld in einer bestimmten Überlagerung präpariert, so würde ohne den Einfluß der Dekohärenz die mit t_0 einmal gewählte relative Phasenbeziehung zwischen den beiden Photonenanzahlzuständen bestehen bleiben. Etwas technischer formuliert könnte man sagen, das Nicht-Diagonalelement ρ_{10} der Dichtematrix für das Photonenfeld würde sich in der Zeit nicht oder nur sehr langsam ändern: **ohne** Dekohärenz würde für dieses Nichtdiagonalelement der Dichtematrix gelten:

$$\rho_{10}(t_0 + \Delta t) \approx \rho_{10}(t_0).$$

Unter dem Einfluß der Dekohärenz ist allerdings zu erwarten, daß dieses Nicht-Diagonalelement in der Zeit sehr schnell gegen Null gehen wird.

Nun ist dieses Nicht-Diagonalelement des Dichteoperators keine direkt zugängliche Meßgröße. Um deren allmähliches Verschwinden sichtbar machen zu können, benötigt man also eine Abbildung dieser Größe auf eine meßbare Größe. Die physikalische Implementierung dieser Abbildungsvorschrift ist Gegenstand dieses Abschnitts.

Wie sich zeigen wird, ist die gesuchte Meßgröße die Wahrscheinlichkeit P_e , ein zweites sog. Probe-Atom, das zuvor den Resonator passiert hatte, im angeregten Zustand zu detektieren. Diese Größe enthält die gesuchte Information über die Phasenbeziehung zwischen den Photonenanzahlzuständen. Die Abbildung dieser Information auf das Atom wird wiederum vermittelt durch die resonante Wechselwirkung des Atoms mit dem Resonatorfeld.

Um die Kohärenz des Photonenfeldes im Resonator zu proben, ist es zweckmäßig, dies

über die Wechselwirkung mit Atomen zu tun, die den Hohlraum passieren. Wesentlich dafür ist (s. Gleichung (4.9)), daß zu Beginn dieser Wechselwirkung auch das Atom in einem überlagerten Zustand ist ($\sigma_{ge}(\Delta t) \neq 0$). Die Situation ist somit ähnlich der im vorausgegangenen Abschnitt beschriebenen, mit allen Einschränkungen bzgl. Streufelder usw. Es liegt demnach nahe, die dort gefundene Lösung auf das vorliegende Problem zu übertragen. Genauer gesagt soll das Schema mit den zusätzlich eingestrahnten Lasern invertiert werden.

Man sendet dazu Atome im (wahren)⁵ Grundzustand $5S_{1/2}$ in den Resonator, wo er mit einem weiteren Laser in den Zustand $5P_{3/2}$ angeregt wird. Diese beiden Zustände wechselwirken nicht mit dem Resonatorfeld und bewirken keine Änderungen diesbezüglich. Nun bewirkt die Anwendung der beiden Laser L_1 und L_2 , daß das Atom in den überlagerten Zustand $1/\sqrt{2}[|g_2\rangle + |e_2\rangle]$ übergeht⁶.

Damit ist die oben erwähnte Bedingung für das Nichtdiagonalelement der reduzierten Dichtematrix für das Atom wegen $\sigma_{ge}(\Delta t) = \frac{1}{2} \neq 0$ zu Beginn der Wechselwirkung mit dem Photonenfeld erfüllt.

Diese Wechselwirkung kann nun stattfinden, da das Atom in einem entsprechenden Zustand präpariert wurde, und es mit dem Resonatorfeld ein Photon austauschen kann.

Da während der Zeit Δt Dekohärenzeffekte das Feld im Innern des Resonators beeinflussen haben, ist davon auszugehen, daß der Zustand des Systems nicht mehr als reiner Zustand geschrieben werden kann. Daher findet der Dichtematrixformalismus Anwendung.

Zu Beginn der Rabioszillation zum Zeitpunkt Δt sind das Atom und das Feld im Resonator noch nicht miteinander verschränkt, was erst durch die Wechselwirkung geschieht. Deshalb kann der Zustand des gesamten Systems zu diesem Zeitpunkt noch als Produkt der beiden Dichteoperatoren geschrieben werden:

$$\hat{\rho}_{ges.}(\Delta t) = \hat{\sigma}(\Delta t) \otimes \hat{\rho}'(\Delta t).$$

Dabei bezeichnet $\hat{\sigma}$ den Dichteoperator für das Teilsystem "Atom" und $\hat{\rho}'$ den Dichteoperator für das Teilsystem "Resonatorfeld", wobei der gestrichene Dichteoperator auf die bereits stattgefundene Dekohärenz im Feld hindeuten soll.

Ausgeschrieben lauten die Dichteoperatoren:

$$\hat{\sigma}(\Delta t) = \sigma_{gg}(\Delta t)|g\rangle\langle g| + \sigma_{ee}(\Delta t)|e\rangle\langle e| + \sigma_{ge}(\Delta t)|g\rangle\langle e| + \sigma_{eg}(\Delta t)|e\rangle\langle g| \quad (4.7)$$

und

$$\hat{\rho}'(\Delta t) = \rho'_{00}(\Delta t)|0\rangle\langle 0| + \rho'_{11}(\Delta t)|1\rangle\langle 1| + \rho'_{01}(\Delta t)|0\rangle\langle 1| + \rho'_{10}(\Delta t)|1\rangle\langle 0|. \quad (4.8)$$

Die weitere zeitliche Entwicklung des Gesamtsystems Atom $\otimes$ Feld wird bestimmt durch die unitäre Zeitentwicklung gemäß Gleichung (4.1).

⁵Im Unterschied zum Zustand $|g\rangle$, der das untere Maserniveau, also den Grundzustand des Maserübergangs, bezeichnet.

⁶Der Index "2" weist darauf hin, daß es sich um das zweite in den Hohlraum gesendete Atom ("Probeatom") handelt.

Das Atom wechselwirkt mit dem Resonatorfeld für eine Zeit t , nach welcher man für die Wahrscheinlichkeit $P_e(t)(= \sigma_{ee}(t))$ findet:

$$\begin{aligned}
 P_e(t; \Delta t) = \sigma_{ee}(t) &= \langle e | Tr_f | \hat{U}(t) (\hat{\sigma}(\Delta t) \otimes \hat{\rho}'(\Delta t)) \hat{U}^\dagger(t) | e \rangle = \\
 &= \sigma_{ee}(\Delta t) \cos^2 \left(\frac{1}{2} \Omega_0 t \right) \rho'_{00}(\Delta t) + \\
 &+ \left[\sigma_{gg}(\Delta t) \sin^2 \left(\frac{1}{2} \Omega_0 t \right) + \sigma_{ee}(\Delta t) \cos^2 \left(\frac{1}{2} \Omega_1 t \right) \right] \rho'_{11}(\Delta t) + \\
 &+ 2Re \left\{ i \sin(\Omega_0 t) \cos \left(\frac{1}{2} \Omega_0 t \right) \sigma_{ge}(\Delta t) \rho'_{10}(\Delta t) \right\}. \quad (4.9)
 \end{aligned}$$

Gleichung (4.9) stellt die gesuchte Abbildungsvorschrift für die Phaseninformation, die in ρ'_{10} enthalten ist, auf die meßbare Größe $P_e(t; \Delta t)$ dar.

Die Gleichung enthält die drei Unbekannten ρ'_{00} , ρ'_{11} und ρ'_{10} . Zur Lösung dieser Gleichung führt man die Messung für verschiedene Zeiten t_1, t_2, t_3 aus.

Damit erhält man ein Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} P_e(t_1; \Delta t) \\ P_e(t_2; \Delta t) \\ P_e(t_3; \Delta t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \rho'_{00}(\Delta t) \\ \rho'_{11}(\Delta t) \\ \rho'_{10}(\Delta t) \end{pmatrix}. \quad (4.10)$$

Hierbei sind die Elemente der Matrix A wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}
 A_{i1} &: = \sigma_{ee}(\Delta t) \cos^2 \left(\frac{1}{2} \Omega_0 t_i \right); \\
 A_{i2} &: = \left[\sigma_{gg}(\Delta t) \sin^2 \left(\frac{1}{2} \Omega_0 t_i \right) + \sigma_{ee}(\Delta t) \cos^2 \left(\frac{1}{2} \Omega_1 t_i \right) \right]; \\
 A_{i3} &: = 2Re \left\{ i \sin \left(\frac{1}{2} \Omega_0 t_i \right) \cos \left(\frac{1}{2} \Omega_0 t_i \right) \sigma_{ge}(\Delta t) \right\};
 \end{aligned}$$

für $i \in \{1; 2; 3\}$.

Formal reicht dies aus, um die drei Unbekannten eindeutig zu bestimmen. In der Praxis wird man die Lösung jedoch für mehrere Zeittripel bestimmen, und daraus die Mittelwerte und mittleren quadratischen Abweichungen bestimmen, da die Meßdaten $P_e(t_i; \Delta t)$ meßfehlerbehaftet sind.

Überdies ist es für die Lösung der Gleichung (4.10) wesentlich, daß die Matrix A nicht schlecht konditioniert ist. Dies entspricht einer Bedingung an die Determinante der Koeffizientenmatrix, deren Betrag einen bestimmten empirisch zu ermittelnden Wert ε nicht unterschreiten darf: $|det(A)| \geq \varepsilon$.

Schlechte Konditionierung des Gleichungssystems kann z.B. durch die Wahl eines Tripels von Zeiten, die sich nur wenig unterscheiden, entstehen. Man kann derartige Sätze schlecht

konditionierter Gleichungen nachträglich durch diese Bedingung an die Determinante eliminieren ⁷.

4.1.3 Einfluß nicht-idealer experimenteller Bedingungen

Einfluß endlicher Temperaturen

Im folgenden soll untersucht werden, welche Korrekturen auftreten, falls der Initialzustand des Mikromasers nicht das Vakuum ist, sondern höhere Moden thermisch angeregt sind. Bei der endlichen Temperatur T läßt sich das Mikromaserfeld durch folgenden Dichteoperator beschreiben:

$$\hat{\rho}_{th} = \sum_n \left[1 - \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right) \right] \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{k_B T} n\right) |n\rangle\langle n|. \quad (4.11)$$

Führt man $N_1 := e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}}$ ein, und beachtet, daß $N_1 \ll 1$ gilt, so kann man folgende Näherung verwenden:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{th} &= \sum_n [1 - N_1] N_1^n |n\rangle\langle n| \\ &\approx \sum_n N_1^n |n\rangle\langle n|. \end{aligned}$$

Bei niedrigen Temperaturen von einigen 100 mK, wie sie beim Mikromaser-Experiment erreicht werden, kommt die Korrektur führender Ordnung vom Ein-Photon-Zustand $|1\rangle$ her.

Das System wird folglich beschrieben durch den Dichteoperator:

$$\hat{\rho}(0) = \hat{\sigma}(0) \otimes \hat{\rho}_{th}(0) = \mathcal{N}(|e, 0\rangle\langle 0, e| + N_1 |e, 1\rangle\langle 1, e|). \quad (4.12)$$

Dementsprechend erhält man als Zustand des Systems zum Zeitpunkt t_0 der Einstrahlung der beiden Laser:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}(t_0) &= \hat{U}(t_0) \hat{\rho}(0) \hat{U}^\dagger(t_0) = \\ &= \mathcal{N} \left\{ \cos^2\left(\frac{1}{2}\Omega_0 t_0\right) |e, 0\rangle\langle 0, e| + i \cos\left(\frac{1}{2}\Omega_0 t_0\right) \sin\left(\frac{1}{2}\Omega_0 t_0\right) |e, 0\rangle\langle 1, g| + \right. \\ &+ \sin^2\left(\frac{1}{2}\Omega_0 t_0\right) |g, 1\rangle\langle 1, g| + N_1 \left[\cos^2\left(\frac{1}{2}\Omega_1 t_0\right) |e, 1\rangle\langle 1, e| + \right. \\ &+ \left. i \sin\left(\frac{1}{2}\Omega_1 t_0\right) \cos\left(\frac{1}{2}\Omega_1 t_0\right) |g, 2\rangle\langle 1, e| + \sin^2\left(\frac{1}{2}\Omega_1 t_0\right) |g, 2\rangle\langle 2, g| \right] + H.C. \left. \right\}. \end{aligned}$$

Wie zu erwarten tritt durch die anfängliche Beimischung des Ein-Photon-Zustands zum Vakuum durch die Wechselwirkung mit dem Atom, das im angeregten Zustand in den

⁷Da die Meßwerte $P_e(t_i; \Delta t)$ auf einem Rechner gespeichert werden, ist dies leicht möglich durch die Anwendung entsprechender Routinen.

Resonator eintritt, auch der Photonenanzahlzustand $|2\rangle$ auf.

Die Anwendung der Laser überführt die Atomzustände $|g\rangle$ und $|e\rangle$ in gleicher Weise in einen gemeinsamen tieferliegenden Zustand $|a\rangle$. Daher findet man den für das weitere wichtigen Dichteoperator des Resonatorfeldes:

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_{th} = & \mathcal{N} \left\{ \cos^2 \left(\frac{1}{2} \Omega_0 t_0 \right) |0\rangle\langle 0| + \left[\sin^2 \left(\frac{1}{2} \Omega_0 t_0 \right) + N_1 \cos^2 \left(\frac{1}{2} \Omega_1 t_0 \right) \right] |1\rangle\langle 1| + \right. \\ & + i \cos \left(\frac{1}{2} \Omega_0 t_0 \right) \sin \left(\frac{1}{2} \Omega_0 t_0 \right) |0\rangle\langle 1| + N_1 \sin^2 \left(\frac{1}{2} \Omega_1 t_0 \right) |2\rangle\langle 2| \\ & \left. + i N_1 \cos \left(\frac{1}{2} \Omega_1 t_0 \right) \sin \left(\frac{1}{2} \Omega_1 t_0 \right) |2\rangle\langle 1| + H.C. \right\}.\end{aligned}$$

Dies zeigt, was nach dem Prozeß der Präparation der Zustand des Resonatorfeldes ist, wenn anfangs nicht der ideale Vakuumzustand vorgelegen hat.

Was eigentlich interessiert, ist die Größe der dadurch bewirkten Abweichung im Meßergebnis.

Dazu stellt man sich wieder vor, dieses Feld würde durch ein zweites Atom sondiert, das mit dem Feld im Resonator die Zeitspanne t wechselwirkt. Das Meßergebnis hat im allgemeinen Fall (beliebiger Dichteoperator für Feld und Atom) folgende rechnerische Gestalt:

$$\begin{aligned}P_e(t) = & \frac{1}{2} \sum_n \left\{ [1 - \cos(\Omega_n t)] \sigma_{ee} \rho_{nn} + [1 - \cos(\Omega_n t)] \sigma_{gg} \rho_{n+1, n+1} + \right. \\ & \left. + \operatorname{Re} \left[\sum_n i \sin(\Omega_n t) \sigma_{ge} \rho_{n+1, n} \right] \right\}.\end{aligned}$$

Hierbei sind die Elemente beider Dichtematrizen $\hat{\sigma}$ und $\hat{\rho}$ jeweils zu Beginn der Wechselwirkung zu verstehen.

Unter der Voraussetzung, daß anfangs der Zustand $|1\rangle$ nicht zu stark thermisch angeregt ist, ist die Annahme $\mathcal{N} \approx 1$ eine gute Näherung. Wie man leicht nachrechnet, erhält man dann als Korrektur zu dem Fall mit idealem Vakuum:

$$\begin{aligned}\delta P_e(t) = & \frac{1}{2} \left\{ [1 - \cos(\Omega_1 t)] \sigma_{gg} + [1 + \cos(\Omega_2 t)] \sigma_{ee} \right\} N_1 \sin^2 \left(\frac{1}{2} \Omega_1 t_0 \right) + \\ & + \frac{1}{2} \left\{ [1 - \cos(\Omega_0 t)] \sigma_{gg} + [1 + \cos(\Omega_1 t)] \sigma_{ee} \right\} N_1 \cos^2 \left(\frac{1}{2} \Omega_1 t_0 \right) - \\ & - \frac{1}{2} N_1 \sin(\Omega_1 t) \sigma_{ge} \sin(\Omega_1 t_0).\end{aligned}$$

Dann ergibt eine grobe Abschätzung der Cosinus- und Sinus-Terme für den zu erwartenden Fehler⁸:

$$|\delta P_e(t)| \leq \frac{5}{4} N_1, \quad \forall t. \quad (4.13)$$

⁸Das Probeatom wird im Zustand $1/\sqrt{2}(|g\rangle + |e\rangle)$ präpariert, so daß $\sigma_{gg} = \sigma_{ee} = \sigma_{ge} = 1/2$ gilt.

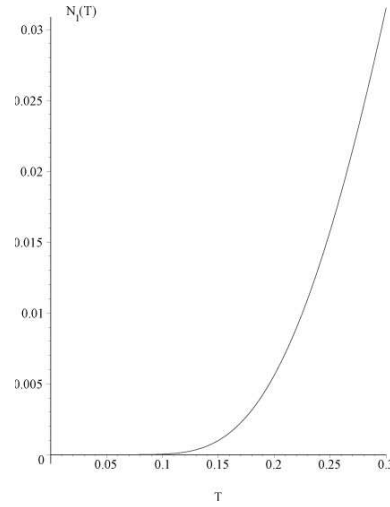


ABBILDUNG 4.4: Abhängigkeit der Besetzungswahrscheinlichkeit $N_1(T)$ von der Temperatur in der relevanten Resonatormode mit $\nu \approx 22$ GHz. Die Temperatur ist in Kelvin abgetragen.

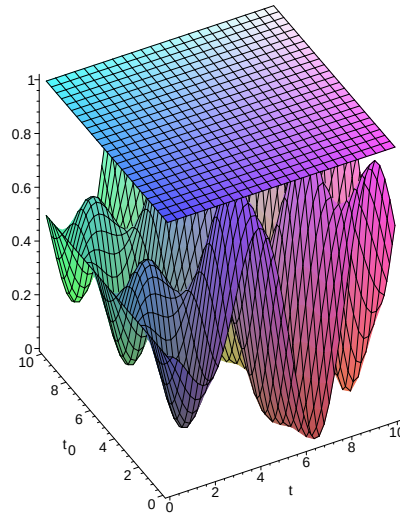


ABBILDUNG 4.5: Abhängigkeit des Fehlers $\delta P_e(t, t_0)$. Die Waagrechte Ebene markiert den Wert N_1 . Wie zu sehen bleibt der Fehler stets unterhalb dieses Werts, unterschreitet also sogar den durch eine grobe Abschätzung erhaltenen Grenzwert von $\frac{5}{4}N_1$. Für die Rabi-Frequenzen wurde $\Omega_0 = 4 \cdot 10^4$ Hz, $\Omega_1 = \sqrt{2} \cdot \Omega_0$ und $\Omega_2 = \sqrt{3} \cdot \Omega_0$ gesetzt.

D.h. befindet sich das Resonatorfeld zu Beginn der Präparation nicht im Vakuumzustand („Idealfall“), sondern ist auch noch der Photonzustand $|1\rangle$ mit der Wahrscheinlichkeit N_1 besetzt, so weicht das Ergebnis höchstens um einen Wert in der Größenordnung von N_1 vom Ergebnis im Idealfall ab. Die Abhängigkeit $N_1(T)$ der Anregungswahrscheinlichkeit von der Temperatur ist in Abb. (4.4) gezeigt. Verglichen mit dem Meßwert P_e liegt $N_1(T)$ auch noch bei einer Temperatur von 300 mK im Prozentbereich.

Endliche Breite der Geschwindigkeiten

Um die Wechselwirkungszeit der Atome mit dem Resonatorfeld zu kontrollieren, selektiert man aus dem Atomstrahl Atome aus der gewünschten Geschwindigkeitsklasse, wie bereits im vorangehenden Kapitel beschrieben.

Eine Ungenauigkeit in der gewählten Geschwindigkeit führt zu einer abweichenden Wechselwirkungszeit der Atome und damit zu einem Fehler bei der Präparation des Resonatorfeldes.

Zum Zeitpunkt t_0 der Lasereinstrahlung liegt das System in folgendem Zustand vor:

$$|\Psi(t_0)\rangle = \cos\left(\frac{1}{2}\Omega_0 t_0\right) |e, 0\rangle + i \sin\left(\frac{1}{2}\Omega_0 t_0\right) |g, 1\rangle. \quad (4.14)$$

Eine Abweichung der Wechselwirkungszeit um δt_0 ergibt dann eine Korrektur

$$\delta|\Psi(t_0)\rangle = \sin\left(\frac{1}{2}\Omega_0 t_0\right) \frac{\delta t_0 \Omega_0}{2} |e, 0\rangle - i \cos\left(\frac{1}{2}\Omega_0 t_0\right) \frac{\delta t_0 \Omega_0}{2} |g, 1\rangle. \quad (4.15)$$

Betrachtet man den Fall maximaler Überlagerung definiert durch:

$$|\Psi(t_0^{max})\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|e, 0\rangle + i |g, 1\rangle], \quad (4.16)$$

so ergibt sich der korrigierte Zustand zu

$$\begin{aligned} |\Psi(t_0^{max} + \delta t_0)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\left(1 - \frac{\delta t_0 \Omega_0}{2}\right) |e, 0\rangle + i \left(1 + \frac{\delta t_0 \Omega_0}{2}\right) |g, 1\rangle \right] = \\ &= |\psi(t_0^{max})\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{\delta t_0 \Omega_0}{2} |e, 0\rangle + i \frac{\delta t_0 \Omega_0}{2} |g, 1\rangle \right]. \end{aligned}$$

Statt der maximalen Überlagerung von Photonenzuständen

$$|\psi_f\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|0\rangle + |1\rangle]$$

erhält man aufgrund der Geschwindigkeitsdispersion der Atome eine davon abweichende Überlagerung der Form

$$|\tilde{\psi}_f\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\left(1 - \frac{\delta t_0 \Omega_0}{2}\right) |0\rangle + i \left(1 + \frac{\delta t_0 \Omega_0}{2}\right) |1\rangle \right].$$

In das Meßergebnis gehen die Elemente ρ_{00} , ρ_{11} und ρ_{10} der Dichtematrix ein.

Dies bedeutet für die Korrekturen durch Geschwindigkeitsdispersion:

$$\begin{aligned}\rho_{00} = \frac{1}{2} &\longrightarrow \tilde{\rho}_{00} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\delta t_0 \Omega_0}{2\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{1}{2} - \frac{\delta t_0 \Omega_0}{2} + \left(\frac{\delta t_0 \Omega_0}{2\sqrt{2}} \right)^2; \\ \rho_{11} = \frac{1}{2} &\longrightarrow \tilde{\rho}_{11} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\delta t_0 \Omega_0}{2\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{\delta t_0 \Omega_0}{2} + \left(\frac{\delta t_0 \Omega_0}{2\sqrt{2}} \right)^2; \\ \rho_{10} = i \cdot \frac{1}{2} &\longrightarrow \tilde{\rho}_{10} = i \cdot \left[\frac{1}{2} - \left(\frac{\delta t_0 \Omega_0}{2\sqrt{2}} \right)^2 \right].\end{aligned}$$

Realistische Werte sind für ein Experiment am Mikromaser:

$$\begin{aligned}\delta t_0 &\approx 10^{-6} \text{ sec} \\ \Omega_0 &\approx 8 \cdot 10^4 \text{ Hz}.\end{aligned}$$

In erster Ordnung ergibt dies eine Korrektur $\frac{1}{2}\delta t_0 \Omega_0 \approx 4 \cdot 10^{-2}$ für die Diagonalelemente. In das Nichtdiagonalelement, das als Träger der Signatur für Dekohärenz die eigentlich interessierende Größe ist, geht sogar nur der quadratische Korrekturterm ein. Dieser liegt bei etwa $8 \cdot 10^{-4}$, was 0,2% des "Soll-Werts" $\frac{1}{2}$ entspricht.

4.2 Dekohärenzmessung an gekoppelten Mikrowellen-Resonatoren

Im letzten Abschnitt wurde ausführlich diskutiert, wie man in einem geschlossenen Mikromaser eine Überlagerung zweier Photonenzahlzustände erzeugen und anschließend die Dekohärenz im Experiment sichtbar machen kann. Beschränkt man sich nicht auf nur einen Resonator, so läßt sich der Vorgang der Dekohärenz auch an einer weiteren Anordnung mit Mikromaser in einem Experiment sichtbar machen. Obgleich diese im folgenden zu schildernde Anordnung sowohl theoretisch als auch experimentell in vielem einfacher zu realisieren zu sein scheint, wird sie erst hier erläutert, weil sich durch geringfügige Modifikationen auch noch andere Experimente aufbauen lassen, die im Anschluß noch zu besprechen sein werden.

Die physikalische Grundidee ist dabei das Tunneln eines Photons von einem Resonator in den anderen, was einen oszillatorischen Vorgang darstellt. Dekohärenz manifestiert sich an diesem System daran, daß die Amplitude des Tunnelprozesses im Lauf der Zeit abnimmt. Die ersten Vorschläge zur Erzeugung verschränkter Zustände in mehreren Mikromaser-Resonatoren finden sich in [61]-[64].

Wie in Abb. (4.6) zu sehen besteht der Aufbau aus zwei symmetrischen Teilen: entweder man teilt den Hohlraum eines Resonators durch eine Trennwand in zwei symmetrische Bereiche oder man verwendet zwei identische Resonatoren, die man hintereinanderschaltet.

Vom experimentellen Standpunkt aus, scheint die zweite Möglichkeit vorzuziehen zu sein, da man durch Änderung des Abstands zwischen den Resonatoren sehr leicht die Stärke der Kopplung variieren kann.

Gelingt es, eine kohärente Überlagerung zwischen Photonenzuständen im linken und rechten Resonator zu erzeugen, so ist der Ausdruck dieser Kohärenz dabei ein oszillatorisches Verhalten der Größe $P(t) = P_R(t) - P_L(t)$, der Differenz der Wahrscheinlichkeiten, das Photon im rechten (P_R) oder linken Resonator (P_L) zu finden.

Dekohärenz zerstört diese Phasenkohärenz zwischen den Amplituden für “Photon links” und “Photon rechts” und die damit verbundene Oszillation $P(t)$.

Koppelt man Zwei-Zustands-Systeme an ein dissipatives bosonisches Reservoir, so spricht

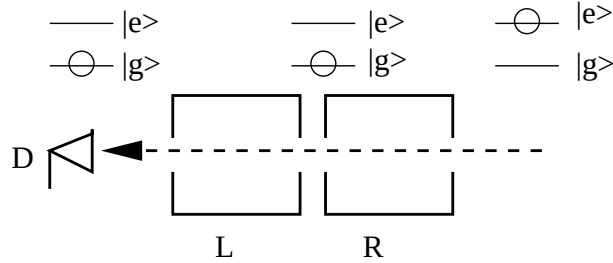


ABBILDUNG 4.6: Anordnung zur Erzeugung des Zustands $|0\rangle_L + |1\rangle_R$.

man vom *Spin-Boson-Modell*. Untersucht wurde dieses Modell u.a. von Leggett et al. ([65]). Zunächst präpariert man in einem der Resonatoren den Ein-Photon-Zustand $|1\rangle$, während der zweite Resonator das Photonen-Vakuum der entsprechenden Mode enthält. Experimentell kann dies dadurch geschehen, daß man aus dem Rubidium-Atomstrahl Atome aus derjenigen Geschwindigkeitsklasse auswählt, die dann beim Durchgang durch den ersten Resonator den Übergang $|e\rangle \rightarrow |g\rangle$ machen (π -Puls). Sie hinterlassen also in dem ersten Resonator ein Photon und treten im Masergrundzustand $|g\rangle$ in den zweiten Resonator ein, der den Null-Photon-Zustand enthält und somit keine weitere Anregung des Atoms bewerkstelligen kann. Der Präparationsvorgang ist in Abb. (4.6) schematisch gezeigt. Auf Grund der Kopplung zwischen den beiden Resonatoren sind die neuen Eigenzustände des Systems die symmetrische und antisymmetrische Linearkombination von $|0\rangle$ - und $|1\rangle$ -Zuständen in den jeweiligen Resonatoren links (L) und rechts (R):

$$\begin{aligned} |\psi_+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_L |1\rangle_R + |1\rangle_L |0\rangle_R), \\ |\psi_-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_L |1\rangle_R - |1\rangle_L |0\rangle_R). \end{aligned}$$

Ausgangszustand ist wie oben erwähnt:

$$|\psi(0)\rangle = |0\rangle_L |1\rangle_R = |\psi_+\rangle + |\psi_-\rangle. \quad (4.17)$$

Da dieser präparierte Zustand keiner der Eigenzustände des Systems ist, ist er auch nicht stationär: die Kopplung zwischen den beiden Resonatoren bewirkt nun ein oszillatorisches Tunneln des Photons von einem Resonator in den anderen:

$$|\psi(t)\rangle = \cos(\Omega_T t) |0\rangle_L |1\rangle_R + i \sin(\Omega_T t) |1\rangle_L |0\rangle_R. \quad (4.18)$$

Dieser Vorgang erzeugt nun gewissermaßen von selbst die erwünschte kohärente Überlagerung durch den Tunnelvorgang.

Die Frequenz, mit der der Austausch des Photons passiert, hängt von der Differenz der Energien der Eigenzustände des Systems $\Omega_T = \frac{1}{\hbar} |E_+ - E_-|$ ab. Im Unterschied zu den vorher betrachteten Systemen ist die Phase zwischen den beiden Zuständen zeitlich nicht konstant, sondern oszilliert mit der Frequenz Ω_T . Die kohärente Überlagerung oszilliert also in der Zeit. Dekohärenz manifestiert sich an diesem System dadurch, daß die Amplitude dieser Oszillation gedämpft wird und im Grenzfall ausstirbt.

Das System geht dann von dem kohärenten Zustand, der durch die Dichtematrix ⁹

$$\hat{\rho}(t) = \begin{pmatrix} \cos^2(\Omega_T t) & -i \cos(\Omega_T t) \sin(\Omega_T t) \\ i \cos(\Omega_T t) \sin(\Omega_T t) & \sin^2(\Omega_T t) \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

beschrieben wird, durch Dekohärenz in den Zustand mit der Dichtematrix

$$\hat{\rho}(t \rightarrow \infty) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

über. Im Grenzfall hat Dekohärenz die Tendenz, das System in einem der beiden Zustände $|0\rangle_L |1\rangle_R$ oder $|1\rangle_L |0\rangle_R$ zu lokalisieren. Eine Messung am System zu verschiedenen Zeiten zeigt dann nicht mehr die charakteristische Oszillation, sondern man findet mit gleicher Wahrscheinlichkeit das Photon im linken oder im rechten Resonator¹⁰.

Man kann das Tunneln des Photons zwischen den beiden Resonatoren nun im Experiment dadurch sichtbar machen, daß man z. B. den Zustand des Systems zu verschiedenen Zeiten t_i mit $t_i < t_{i+1}$, $i \in \{1, \dots, n\}$ mit einem Probe-Atom sondiert. Dazu sendet man dieses im Maser-Grundzustand $|g\rangle$ durch die Anordnung und detektiert das Atom im angeregten Zustand $|e\rangle$, wobei die Wechselwirkungszeit gerade wieder einem π -Puls entsprechend gewählt wird. Die beiden Zustände, zwischen denen das System oszilliert, führen dabei zu folgenden Entwicklungen:

$$|g\rangle |0\rangle_L |1\rangle_R \longrightarrow |e\rangle |0\rangle_L |0\rangle_R \quad (4.21)$$

$$|g\rangle |1\rangle_L |0\rangle_R \longrightarrow |g\rangle |0\rangle_L |1\rangle_R. \quad (4.22)$$

⁹Die Dichtematrix ist ausgedrückt in der Basis $\{|0\rangle_L |1\rangle_R, |1\rangle_L |0\rangle_R\}$.

¹⁰Das entspricht dem *Hund'schen Paradoxon* [66] bei optisch aktiven Substanzen (genauer: *Das Paradoxon der optischen Isomeren*, S. 810 l.c.).

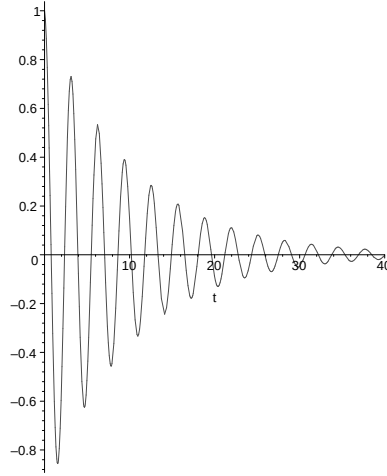


ABBILDUNG 4.7: Dämpfung der Oszillation von $P(t) = P_e(t) - P_g(t)$ aufgrund von Dekohärenz.

Dadurch werden Oszillationen zwischen den Zuständen $|0\rangle_L|1\rangle_R$ und $|1\rangle_L|0\rangle_R$ eindeutig übertragen auf Oszillationen zwischen den Atomzuständen $|g\rangle$ und $|e\rangle$, die am Detektor registriert werden können.

Die Signatur für die im System vorhandene Kohärenz ist wie bereits erwähnt die Größe $P(t)$. Wie aus den Gleichungen (4.21) und (4.22) ersichtlich bedeutet dies auf die im Experiment zugänglichen Meßgrößen übertragen :

$$P(t) = P_R(t) - P_L(t) = P_e(t) - P_g(t) = \cos^2(\Omega_T t) - \sin^2(\Omega_T t) = \cos(2\Omega_T t). \quad (4.23)$$

Im Grenzfall großer Zeiten wird das System nicht mehr durch die Dichtematrix (4.19), sondern durch (4.20) beschrieben. Entsprechend verschwindet die Oszillation von $P(t)$ als Kohärenzsignatur:

$$P(t \rightarrow \infty) = P_R(t \rightarrow \infty) - P_L(t \rightarrow \infty) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0. \quad (4.24)$$

Testet man also das Spin-Boson-Modell experimentell auf die geschilderte Weise, so erwartet man durch die Kopplung an ein Bose-Gas bei einer bestimmten Temperatur qualitativ das in Abb. (4.7) gezeigte Verhalten.

Nun können in dieser Anordnung sehr leicht einige Parameter, wie z.B. der Abstand der Resonatoren, die Größe der Resonatoröffnungen oder die Umgebungstemperatur geändert werden. Damit kann der Einfluß dieser Größen auf die Dekohärenz relativ leicht untersucht werden.

4.3 Test der Bell'schen Ungleichung

Die eben beschriebene Anordnung aus zwei Mikromaser eignet sich auch zum Test der Bell'schen Ungleichung, wenn man das System im Zustand

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_L |1\rangle_R + |1\rangle_L |0\rangle_R)$$

präpariert.

Für die Korrelationsmessungen müssen je zwei zusätzliche Öffnungen im Mantel des Resonators angebracht werden, damit der Feldzustand eines jeden Resonators wie in Abb. (4.10) dargestellt separat und unabhängig von Zustand des anderen geprobt werden kann. Das Experiment zum Test der Bell'schen Ungleichung gliedert sich in zwei Teile, nämlich Präparation und Korrelationsmessung.

1) Präparation

Die Präparation des verschränkten Zustands verläuft im Detail wie folgt: den Ausgangszustand bildet das Atom im Zustand $|e\rangle$ sowie die Vakuummoden in der linken und der rechten Hälfte:

$$|\Psi(0)\rangle = |e\rangle |0\rangle_L |0\rangle_R. \quad (4.25)$$

Am anderen Ende der Apparatur befindet sich ein Detektor, der den Grundzustand $|g\rangle$ des Maserübergangs detektiert. Die Wechselwirkung zwischen Atom und den Resonatorfeldern gehorcht wieder dem bekannten Zeitentwicklungsoperator. Nach dem Austritt aus dem ersten und vor Eintritt in den zweiten Resonator (nach der Wechselwirkungszeit t_1) ist das System im Zustand

$$|\Psi(t_1)\rangle = e^{-i\omega_e t_1} \left(\cos\left(\frac{1}{2}\Omega_0 t_1\right) |e\rangle |0\rangle_L |0\rangle_R + i \sin\left(\frac{1}{2}\Omega_0 t_1\right) |g\rangle |1\rangle_L |0\rangle_R \right). \quad (4.26)$$

Die weitere Wechselwirkung mit der Wechselwirkungszeit t_2 im zweiten Resonator versetzt das System in den Zustand

$$\begin{aligned} |\Psi(t_1 + t_2)\rangle &= e^{-i\omega_e t_1} e^{-i\omega_e t_2} \cos\left(\frac{1}{2}\Omega_0 t_1\right) \left[\cos\left(\frac{1}{2}\Omega_0 t_2\right) |e\rangle |0\rangle_L |0\rangle_R + i \sin\left(\frac{1}{2}\Omega_0 t_2\right) |g\rangle |0\rangle_L |1\rangle_R \right] \\ &+ e^{-i\omega_e t_1} e^{-i\omega_e t_2} i \sin\left(\frac{1}{2}\Omega_0 t_1\right) |g\rangle |1\rangle_L |0\rangle_R. \end{aligned}$$

Der letzte Summand nimmt nicht mehr an der Rabi-Oszillation im zweiten Resonator teil, da das Atom im Grundzustand in den Resonator im Vakuumzustand eintritt. Diese Komponente nimmt lediglich eine Phase auf, die sich aus der freien Entwicklung des Atoms im Grundzustand und des Resonatorfeldes des ersten Resonators im Zustand $|1\rangle_1$ zusammensetzt. Wegen $\omega_g + \omega = \omega_e$ ist diese Phase die gleiche, die auch die andere Komponente durch die Rabi-Oszillation erhält.

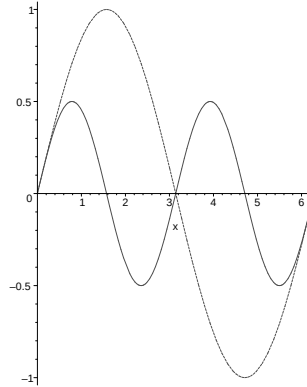


ABBILDUNG 4.8: Verlauf der Funktionen $\sin(x)$ (gestrichelte Linie) und $\sin(x)\cos(x)$ (durchgezogene Linie).

Die Detektion des Grundzustands des Atoms projiziert den Zustand der beiden Resonatoren auf:

$$|\psi(t_D)\rangle = \cos(\frac{1}{2}\Omega_0 t_1) \sin(\frac{1}{2}\Omega_0 t_2) |0\rangle_L |1\rangle_R + \sin(\frac{1}{2}\Omega_0 t_1) |1\rangle_L |0\rangle_R, \quad (4.27)$$

wobei die für beide Komponenten gleich großen Phasenfaktoren weggelassen wurden. Sollen die Wahrscheinlichkeitsamplituden für die beiden Komponenten gleich sein, bieten sich zwei Möglichkeiten:

die erste besteht darin, bei gleichen Wechselwirkungszeiten $t_1 = t_2$ diese derart zu wählen, daß $\cos(\frac{1}{2}\Omega_0 t') \sin(\frac{1}{2}\Omega_0 t') \approx \sin(\frac{1}{2}\Omega_0 t')$ gilt, was für Argumente, die kleiner etwa 0,3 sind oder in der Nähe von 2π liegen, näherungsweise erfüllt ist (s. Abb.(4.8)).

Die zweite Möglichkeit verwendet den dynamischen Stark-Effekt, um den Beginn der Rabi-Oszillation im ersten Resonator hinauszuzögern, so daß die Wechselwirkungszeit t_1 gegenüber t_2 verringert ist. Dazu ist ein zusätzlicher Laser nötig, der den dynamischen Stark-Effekt induziert, wie das im Theorieteil beschrieben wurde.

Eine geeignete Wahl der Argumente ist dafür

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Omega_0 t_1 &= \frac{\pi}{4}, \\ \frac{1}{2}\Omega_0 t_2 &= \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

und die beiden Resonatoren befinden sich wie gewünscht im verschränkten Zustand

$$|\psi(t_D)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_L |1\rangle_R + |1\rangle_L |0\rangle_R). \quad (4.28)$$

Ein Vergleich dieser beiden Möglichkeiten zeigt, daß im ersten Fall der experimentelle Aufwand gering ist, der erzeugte Zustand jedoch nur näherungsweise ein sog. Bell-Zustand

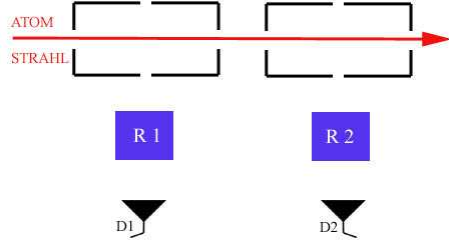


ABBILDUNG 4.9: Präparation eines makroskopisch-verschränkten Zustands zwischen zwei Mikromaser

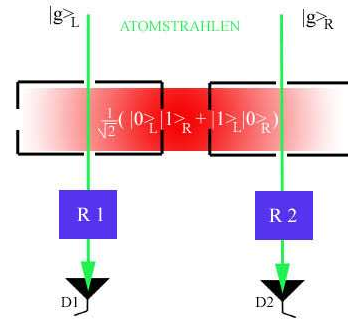


ABBILDUNG 4.10: Messung zum Test der Bell'schen Ungleichung

mit gleichen Wahrscheinlichkeitsamplituden für beide Komponenten ist. Diesen kann man mit der zweiten Methode jedenfalls vom Standpunkt der Theorie aus erzeugen, dafür erhöht sich aber auch der experimentelle Aufwand.

2) Korrelationsmessung

Die Messung der Korrelationen zwischen den Zuständen im linken und rechten Resonator erfolgt mit Hilfe zweier Atomstrahlen, die wie in Abb. (4.10) gezeigt senkrecht zur Achse des präparierenden Atomstrahls durch den linken und rechten Resonator geschickt werden. Die Atome treten im Masergrundzustand $|g\rangle_L$ und $|g\rangle_R$ in die Resonatoren. Während der Wechselwirkung mit den Feldern im Innern der Resonatoren übertragen sich die Zustände und Korrelationen auf das jeweilige Atom und sind somit einer Messung zugänglich. Die Geschwindigkeit der Atome ist dabei so gewählt¹¹, daß sie während der Durchflugszeit durch den Resonator t_{FZ} einen π -Puls erfahren, sofern der Resonator ein Photon enthält.

Die Dynamik sei am Beispiel des Atoms, das den linken Resonator passiert, für die gewählten Parameter genauer dargestellt:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_L |1\rangle_R + |1\rangle_L |0\rangle_R) |g\rangle_L \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_L |1\rangle_R |g\rangle_L + |0\rangle_L |0\rangle_R |e\rangle_L). \quad (4.29)$$

Analog für das Atom, das den rechten Resonator passiert.

Folglich erhält man als Zustand des Systems, wenn beide Atome den jeweiligen Resonator passiert haben:

$$|\Psi(t_{FZ})\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|g\rangle_L |e\rangle_R + |e\rangle_L |g\rangle_R) |0\rangle_L |0\rangle_R. \quad (4.30)$$

¹¹Die Geschwindigkeit errechnet sich aus der Forderung $\frac{1}{2}\Omega_0 t_{FZ} = \pi$ und wegen $v = \frac{s}{t}$ zu $v = \frac{r\Omega_0}{\pi}$, wobei r den Radius des zylindrischen Resonators bezeichnet.

Wie zu sehen ist, separieren die Atomzustände von den Feldzuständen in den beiden Resonatoren, so daß letztere nur noch als "Zuschauer" in die weitere Entwicklung eingehen und deshalb nicht mehr aufgeführt zu werden brauchen.

Der Zustand des Gesamtsystems zu dem Zeitpunkt, da die Atome die Resonatoren verlassen haben ist durch Glchg. (4.30) gegeben. Danach tritt das Atom auf der linken Seite in die Ramsey-Vorrichtung R1, dasjenige auf der rechten Seite in R2. Die beiden Ramsey-Resonatoren werden als identisch behandelt. Im Inneren dieser Resonatoren befindet sich jeweils ein klassisches elektromagnetisches Feld. Der Einfluß des klassischen Feldes mit der Amplitude $\mathcal{E}_0$ auf ein Zwei-Niveau-Atom ist durch folgende Transformation gegeben:

$$|\psi\rangle = c_g|g\rangle + c_e|e\rangle \xrightarrow{\mathcal{E}_0} |\psi'\rangle = c'_g|g\rangle + c'_e|e\rangle, \quad (4.31)$$

mit den neuen Amplituden

$$\begin{aligned} c'_g &= c'_g(c_g; c_e) = \cos(\Omega_{klass.}t)c_g - i\sin(\Omega_{klass.}t)c_e; \\ c'_e &= c'_e(c_g; c_e) = \cos(\Omega_{klass.}t)c_e - i\sin(\Omega_{klass.}t)c_g. \end{aligned}$$

Die klassische Rabifrequenz hängt dabei vom Dipolmoment des Atoms und der Feldstärke des elektromagnetischen Feldes ab: $\Omega_{klass.} = \wp\mathcal{E}_0/\hbar$. Ein klassisches elektromagnetisches Feld läßt sich durch einen kohärenten Zustand $|\alpha\rangle$ des Feldes beschreiben, der eine Überlagerung von $|n\rangle$ -Photonenzuständen darstellt. Der Effekt des klassischen Feldes im Innern der Ramsey-Zonen ist, daß Atome, die in einem der Basiszustände $|g\rangle$ oder $|e\rangle$ in den Resonator treten, dadurch in eine Überlagerung aus beiden Basiszuständen überführt werden:

$$|g\rangle|\alpha\rangle \longrightarrow \left[\cos(\theta)|g\rangle - i\sin(\theta)|e\rangle \right]|\alpha\rangle, \quad (4.32)$$

$$|e\rangle|\alpha\rangle \longrightarrow \left[\cos(\theta)|e\rangle - i\sin(\theta)|g\rangle \right]|\alpha\rangle. \quad (4.33)$$

Hierbei wurde aus Analogiegründen zu einem Spin- $\frac{1}{2}$ -System mit einem *Stern-Gerlach*-Analysator der Drehwinkel $\theta = \Omega_{klass.}t_R$ eingeführt.

Gleichung (4.30) transformiert sich dann wie angegeben auf den Zustand

$$\begin{aligned} |\psi_f\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\left(\cos(\theta_a)|g\rangle_L - i\sin(\theta_a)|e\rangle_L \right) \left(\cos(\theta_b)|e\rangle_R - i\sin(\theta_b)|g\rangle_R \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\cos(\theta_a)|e\rangle_L - i\sin(\theta_a)|g\rangle_L \right) \left(\cos(\theta_b)|g\rangle_R - i\sin(\theta_b)|e\rangle_R \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Es bezeichne nun $P_{e,e}(\theta_a, \theta_b)$ die Wahrscheinlichkeit, das Atom im linken Detektor D1 im Zustand $|e\rangle_L$ und das Atom im rechten Detektor D2 im Zustand $|e\rangle_R$ vorzufinden, wenn in der linken Ramsey-Anordnung der Drehwinkel θ_a und in der rechten Ramsey-Anordnung der Drehwinkel θ_b realisiert wurde. Gleichung (4.34) liefert dann:

$$\begin{aligned} P_{e,e}(\theta_a, \theta_b) &= |\langle e_L, e_R | \psi_f \rangle|^2 = \frac{1}{2} \left[\sin(\theta_a) \cos(\theta_b) + \cos(\theta_a) \sin(\theta_b) \right]^2 = \\ &= \frac{1}{2} \sin^2(\theta_a + \theta_b). \end{aligned}$$

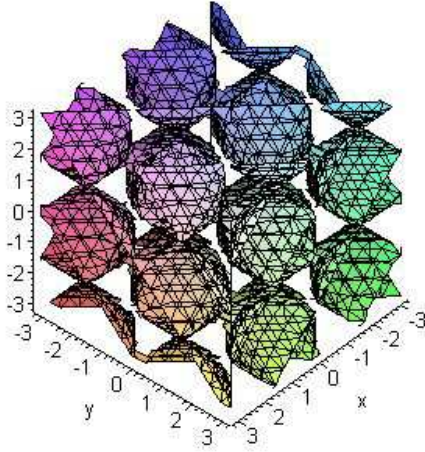


ABBILDUNG 4.11: Graphische Darstellung der Lösungen für die Ungleichung $\frac{1}{2} \sin^2(x + y) + \frac{1}{2} \sin^2(y + z) - \frac{1}{2} \sin^2(x + z) < 0$.

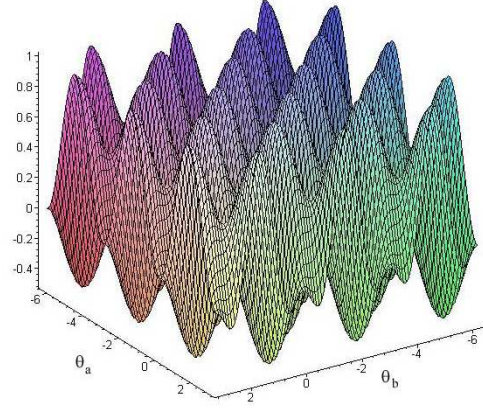


ABBILDUNG 4.12: Verlauf der im Text definierten Größe $\Delta(\theta_a, \theta_b, \theta_c)$ für die Wahl $\theta_a = \theta_c$. Der Bereich negativer Werte ist für Theorien mit verborgenen Variablen verboten und kann nur durch die Quantenmechanik erklärt werden.

Die *Bell'sche Ungleichung* stellt für Theorien mit verborgenen Variablen folgende Relation zwischen den Wahrscheinlichkeiten bei drei Drehwinkeln $\theta_a, \theta_b, \theta_c$ auf:

$$P_{e,e}(\theta_a, \theta_b) + P_{e,e}(\theta_b, \theta_c) \geq P_{e,e}(\theta_a, \theta_c). \quad (4.35)$$

Nun gibt es aber Parametereinstellungen, die diese Ungleichung eindeutig verletzen (gezeigt in Abb. (4.11), sobald man die quantenmechanisch erhaltenen Ausdrücke für die jeweiligen Wahrscheinlichkeiten einsetzt:

$$\frac{1}{2} \sin^2(\theta_a + \theta_b) + \frac{1}{2} \sin^2(\theta_b + \theta_c) \geq \frac{1}{2} \sin^2(\theta_a + \theta_c), \quad (4.36)$$

oder

$$\Delta(\theta_a, \theta_b, \theta_c) := \frac{1}{2} \sin^2(\theta_a + \theta_b) + \frac{1}{2} \sin^2(\theta_b + \theta_c) - \frac{1}{2} \sin^2(\theta_a + \theta_c) \geq 0. \quad (4.37)$$

Abb.(4.12) zeigt den Verlauf für die Wahl $\theta_a = \theta_c$, woran deutlich zu erkennen ist, daß auch negative Werte erreicht werden können.

4.4 Teleportation überlagerter Photonenzustände

Das erste Protokoll zur Teleportation eines unbekannten Quantenzustands stammt von Bennett et al. aus dem Jahr 1993 ([32]).

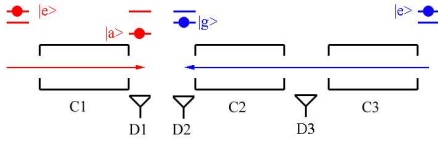


ABBILDUNG 4.13: Schritt 1: Erzeugung des zu teleportierenden Zustands in C1 und der Verschränkung von C2 mit C3.

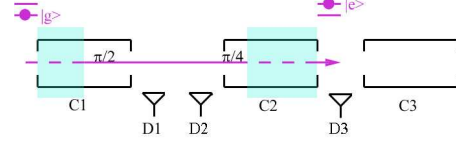


ABBILDUNG 4.14: Schritt 2: Verschränkung von C1 mit C2.

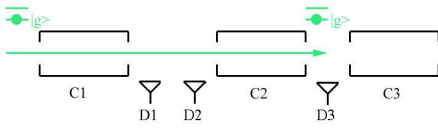


ABBILDUNG 4.15: Schritt 3: Projektion auf die gewünschten Komponenten des Gesamtzustands der drei Resonatoren.

Im Unterschied zum Bennett-Brassard-Protokoll beruht die hier geschilderte Version eines Protokolls zur Teleportation nicht auf der Messung von Bell-Zuständen.

Das Schema zur Teleportation eines überlagerten Photonenzustands beinhaltet drei identische Mikromaser-Resonatoren, die wie in Abb. (4.13) mit C1, C2 und C3 bezeichnet werden. In der Literatur wird der Sender häufig als “Alice”, der Empfänger häufig mit “Bob” bezeichnet. Im vorliegenden Fall ist Bob im Besitz des Resonators C3, Alice ist im Besitz von C1. In diesem befindet sich der Zustand

$$|\phi\rangle_1 = \alpha|0\rangle_1 + \beta|1\rangle_1, \quad (4.38)$$

den Alice zu Bob in den Resonator C3 teleportieren möchte.

Das hier vorgestellte Protokoll zur Teleportation dieses Zustands von C1 nach C3 gliedert sich in drei Schritte.

1. Schritt: Präparation des Zustands in C1 und Verschränkung von C2 mit C3

Zur Präparation des zu teleportierenden Zustands als Überlagerung von $|0\rangle$ - und $|1\rangle$ -Fockzuständen des Photonenfeldes kann man wie in Abschnitt 1 beschrieben vorgehen.

Die Verschränkung der Resonatoren C2 und C3 erzielt man mit Hilfe eines Atoms im Zustand $|e\rangle$, das wie in Abb. (4.13) zu sehen von rechts in die Apparatur eintritt. Nach dem Resonator C3 passiert es den Resonator C2 und wird vom Detektor D2 im Zustand $|g\rangle$ nachgewiesen.

Dann befinden sich die beiden Resonatoren C2 und C3 in einem überlagerten Zustand von

folgender Form:

$$|\phi\rangle_{2\otimes 3} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_2|1\rangle_3 + |1\rangle_2|0\rangle_3).$$

Damit erhält man für das Gesamtsystem einen Zustandsvektor der Form:

$$|\Phi\rangle_{1\otimes 2\otimes 3} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha|0\rangle_1|0\rangle_2|1\rangle_3 + \beta|1\rangle_1|1\rangle_2|0\rangle_3 + \alpha|0\rangle_1|1\rangle_2|0\rangle_3 + \beta|1\rangle_1|0\rangle_2|1\rangle_3). \quad (4.39)$$

2. Schritt: Sondierung von C1 und C2

Um den Zustand (4.38) zu teleportieren, zeigt Glchg. (4.39), daß eine Messung das System auf die letzten beiden Summanden von Glchg. (4.39) projizieren muß.

Zu diesem Zweck sondiert man die beiden Resonatoren C1 und C2 mit einem Atom im Masergrundzustand $|g\rangle$ von links und detektiert mit Detektor D3 den angeregten Maserzustand $|e\rangle$. Dabei kann mit Hilfe eines geeignet gewählten Lasers¹² der Zustand $|g\rangle$ in Folge des dynamischen Stark-Effekts, wie im Theorie-Teil dieser Arbeit beschrieben, verschoben werden, so daß der Übergang $|g\rangle \leftrightarrow |e\rangle$ nicht mehr resonant mit der Hohlraummode ist. Dieser verschobene Zustand sei mit $|\tilde{g}\rangle$ (zugehörige Energie $E_{\tilde{g}} = \hbar\omega_{\tilde{g}}$) bezeichnet.

Die Folge ist eine rein dispersive Wechselwirkung während der Zeit, die der Laser eingestrahlt wird. In dieser Zeit nimmt der Zustandsvektor des Systems eine Phase auf, die der Photonenzahl im Resonatorfeld proportional ist.

Die Energie der Vakuumfelder in den Resonatoren wurde als Nullpunkt der Energieskala gesetzt. Dies beeinflußt zwar den Wert derjenigen Phasen, die sich aus den freien Entwicklungen der Felder ergeben, dieser spielt jedoch, wie man sehen wird, keine Rolle.

Im einzelnen entwickeln sich die jeweiligen Komponenten zeitlich wie folgt¹³:

$$|g\rangle|0\rangle_1|0\rangle_2 \xrightarrow{C1\&C2} e^{-i[\omega_{\tilde{g}}(t_{11}+t_{22})]} e^{-i[\omega_g(t_{12}+t_{21})]} |g\rangle|0\rangle_1|0\rangle_2. \quad (4.40)$$

$$\begin{aligned} |g\rangle|0\rangle_1|1\rangle_2 &\xrightarrow{C1} e^{-i(\omega_{\tilde{g}}+\omega)t_{11}} e^{-i(\omega_g+\omega)t_{12}} |g\rangle|0\rangle_1|1\rangle_2 \\ &\xrightarrow{C2} \underbrace{e^{-i(\omega_{\tilde{g}}+\omega)t_{11}} e^{-i(\omega_g+\omega)t_{21}} e^{-i\omega_e t_{21}}}_{=:A} [\cos y|g\rangle|1\rangle_2 + i \sin y|e\rangle|0\rangle_2] |0\rangle_1 \\ &\longrightarrow A \cdot \left[e^{i\phi_2} \cos y e^{-i(\omega_{\tilde{g}}+\omega)t_{22}} |g\rangle|1\rangle_2 + i \cdot e^{-i\omega_e t_{22}} \sin y |e\rangle|0\rangle_2 \right] |0\rangle_1 \\ &\xrightarrow{D2} e^{-i(\omega_{\tilde{g}}+\omega)t_{11}} e^{-i(\omega_g+\omega)t_{21}} e^{-i\omega_e(t_{21}+t_{22})} i \cdot \sin y |0\rangle_1|0\rangle_2. \end{aligned} \quad (4.41)$$

$$\begin{aligned} |g\rangle|1\rangle_1|0\rangle_2 &\xrightarrow{C1} \underbrace{e^{i\phi_1} e^{-i(\omega_{\tilde{g}}+\omega)t_{11}} e^{-i\omega_e t_{12}}}_{=:B} [\cos x|g\rangle|1\rangle_1 + i \sin x|e\rangle|0\rangle_1] |0\rangle_2 \\ &\xrightarrow{C2} B \cdot e^{-i\omega_e t_{21}} \cdot \{ \cos x|g\rangle|1\rangle_1|0\rangle_2 + i \cdot \sin x [\cos y|e\rangle|0\rangle_2 + i \cdot \sin y|g\rangle|1\rangle_2] |0\rangle_1 \} \\ &\longrightarrow B e^{-i\omega_e(t_{21}+t_{22})} \left\{ \cos x|g\rangle|1\rangle_1|0\rangle_2 + \right. \end{aligned}$$

¹²Die Frequenz desselben ist gegenüber dem Übergang $|e\rangle \leftrightarrow |g\rangle$ und gegenüber anderen Atomübergängen verstimmt zu wählen, um keine Übergänge zu induzieren.

¹³Zur Abkürzung wurde $\frac{1}{2}\Omega_0 t_{12} =: x$, $\frac{1}{2}\Omega_0 t_{21} =: y$ und $\tilde{y} := \frac{1}{2}\Omega_1 t_{21}$ gesetzt

$$\begin{aligned}
& + i \sin x \left[\cos y |e\rangle |0\rangle_2 + e^{-i(\omega_{\tilde{g}} - \omega_e + \omega)t_{22}} e^{i\phi_2} i \sin y |\tilde{g}\rangle |1\rangle_2 \right] |0\rangle_1 \Big\} \\
& \xrightarrow{D2} e^{i\phi_1} e^{-i(\omega_{\tilde{g}} + \omega)t_{11}} e^{-i\omega_e(t_{12} + t_{21} + t_{22})} i \cos y |e\rangle |0\rangle_1 |0\rangle_2. \tag{4.42} \\
|g\rangle |1\rangle_1 |1\rangle_1 & \xrightarrow{C1} e^{i\phi_1} e^{-i(\omega_{\tilde{g}} + 2\omega)t_{11}} e^{-i(\omega_e + \omega)t_{12}} \left[\underbrace{\cos x}_{=0} |g\rangle |1\rangle_1 + i \underbrace{\sin x}_{=1} |e\rangle |0\rangle_1 \right] |1\rangle_2 \\
& \xrightarrow{C2} \underbrace{e^{i\phi_1} e^{-i(\omega_{\tilde{g}} + 2\omega)t_{11}} e^{-i(\omega_e + \omega)t_{12}} e^{-i(\omega_e + \omega)t_{21}}}_{=:C} i [\cos y |e\rangle |1\rangle_2 + i \sin y |\tilde{g}\rangle |2\rangle_2] |0\rangle_1 \\
& \longrightarrow C \cdot i \left[e^{i\phi_2} e^{-i(\omega_e + \omega)t_{22}} \cos y |e\rangle |1\rangle_2 + i e^{2i\phi_2} e^{-i(\omega_{\tilde{g}} + 2\omega)t_{22}} \sin y |\tilde{g}\rangle |2\rangle_2 \right] |0\rangle_1 \\
& \xrightarrow{D2} C \cdot i \cdot e^{i\phi_2} e^{-i(\omega_e + \omega)t_{22}} \cos y |e\rangle |0\rangle_1 |1\rangle_2. \tag{4.43}
\end{aligned}$$

Führt man die Abkürzungen ¹⁴

$$A' := e^{-i(\omega_{\tilde{g}} + \omega)t_{11}} e^{-i\omega_e(t_{12} + t_{21} + t_{22})}; \tag{4.44}$$

$$B' := e^{i\phi_1} e^{-i(\omega_{\tilde{g}} + \omega)t_{11}} e^{-i\omega_e(t_{12} + t_{21} + t_{22})}; \tag{4.45}$$

$$C' := e^{i(\phi_1 + \phi_2)} e^{-i(\omega_{\tilde{g}} + 2\omega)t_{11}} e^{-i(\omega_e + \omega)(t_{12} + t_{21} + t_{22})}; \tag{4.46}$$

ein, so läßt sich zusammenfassend schreiben:

$$\begin{aligned}
|g\rangle |\Phi\rangle_{1\otimes 2\otimes 3} & \xrightarrow{C1\&C2\&D2} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\beta C' \cos y |0\rangle_1 |1\rangle_2 |0\rangle_3 \right. \\
& + i \cdot \alpha A' \sin y |0\rangle_1 |0\rangle_2 |0\rangle_3 + \\
& \left. + i \cdot \beta B' \cos y |0\rangle_1 |0\rangle_2 |1\rangle_3 \right). \tag{4.47}
\end{aligned}$$

Man beachte, daß die letzten beiden Summanden die gewünschten Komponenten $\alpha|0\rangle_3 + \beta|1\rangle_3$ ergeben.

Es bleibt also nur noch, für die Koeffizienten $A' = B'$ sicherzustellen, sowie den ersten Summanden herauszuprojizieren.

Ersteres ist erfüllt, wenn $\phi_1 = 0 \bmod 2\pi$ und $y = \frac{1}{4}\pi$ gewählt wird.

3. Schritt: Projektion auf die geeigneten Komponenten

Um die Projektion auf die letzten beiden Summanden auszuführen, benötigt man ein weiteres Atom, das den Unterschied zwischen dem ersten Summanden einerseits und dem zweiten und dritten andererseits sondiert. Der Unterschied zwischen diesen ist offenbar die Photonenzahl im Resonator C2.

Man schickt ein Atom im unteren Zustand $|g\rangle$ des Maserübergangs durch die Resonatoren C1 und C2. Dabei soll das Atom die Geschwindigkeit haben, so daß bei Anwesenheit eines Photons im Resonatorfeld gerade der Übergang $|g\rangle \rightarrow |e\rangle$ stattfindet. Ist kein Photon vorhanden, so verbleibt das Atom im Grundzustand. Dabei ist zu beachten, daß in jedem Fall der Resonator C1 im Vakuumzustand $|0\rangle_1$ ist und somit keine Wechselwirkung mit

¹⁴Man beachte, daß $\omega_e = \omega_{\tilde{g}} + \omega$ gilt.

dem Atom in diesem Resonator stattfindet. Detektiert man anschließend am Detektor D3 das Atom in diesem Zustand $|g\rangle$, so projiziert man den Zustand des Systems wie gewünscht auf die beiden letzten Komponenten in Glchg. (4.47).

Bis auf einen gemeinsamen Vorfaktor endet das System aus den drei Resonatoren nach diesen Manipulationen im Zustand

$$|\tilde{\Phi}\rangle_{1\otimes 2\otimes 3} = \alpha|0\rangle_1|0\rangle_2|0\rangle_3 + \beta|0\rangle_1|0\rangle_2|1\rangle_3, \quad (4.48)$$

oder für den Resonator C3 alleine:

$$|\tilde{\phi}\rangle_3 = \alpha|0\rangle_3 + \beta|1\rangle_3. \quad (4.49)$$

Ein Vergleich mit Glchg. (4.38) zeigt, daß der Zustand aus dem Resonator C1 in den Resonator C3 erfolgreich teleportiert wurde.

Zusammenfassung

Die im Rahmen dieser Arbeit entwickelte Methode zur Erzeugung einer Überlagerung von Photonenzahlzuständen in einem geschlossenen Mikromaser-Resonator eignet sich aus mehreren Gründen besonders zur Untersuchung von Dekohärenzeffekten des Mikromaserfeldes:

- Die Überlagerung ist in dem Sinne “minimal”, als sie aus nur zwei Photonenzahlzuständen besteht. Damit zeigt eine anschließende Sondierung des Feldes sehr klar den Einfluß, den die Dekohärenz auf die relative Phase zwischen diesen beiden Zuständen ausübt;
- Die Phase zwischen den Zuständen kann kontrolliert präpariert werden, indem man die von der Rabi-Oszillation vorgegebene Zeitstruktur ausnutzt;
- Der geschlossene Resonator ist ein angemessenes “Speichermedium” für das Photonenfeld: die im Vergleich zu offenen Resonatoren verminderte Kopplung an die Umgebung kann zudem durch Variation der Lochgrößen verändert werden. Der Einfluß der Kopplungsstärke auf die Dekohärenzzeiten läßt sich dadurch im Experiment beobachten;
- Das dargestellte Verfahren zur Präparation kann in zeitlich umgekehrter Abfolge auch analog zur Sondierung des Feldes benutzt werden. Der experimentelle Aufwand wird dadurch gering gehalten.

Die weiteren Vorschläge betreffen Mikromaser-Experimente zu den Grundlagen der Quantenmechanik und sind als solche für sich allein genommen von Interesse. Insbesondere ist die Präparation eines verschränkten Zustands zwischen zwei Resonatoren wie in Kapitel 4.3 geschildert ein anschauliches Beispiel für das Superpositionsprinzip.

In einer Weiterführung dieser Arbeit könnten beispielsweise Dekohärenzeffekte an solchen verschränkten Zuständen untersucht werden. Dies wäre sicherlich interessant für das Gebiet der experimentellen Quanteninformationstechnologie, und eine logische Fortführung

der vorliegenden Arbeit: nach der Entwicklung eines Verfahrens zur Bestimmung der Dekohärenzeffekte auf einzelne “Qubits” bleibt natürlich zu klären, in wie weit nicht nur die “Qubits”, sondern auch die zum Rechnen notwendigen Verschränkungen derselben anfällig für Dekohärenzeinflüsse sind.

ANHANG A

Termschema von Rubidium

RUBIDIUM	
Rb I	
37 electrons	Z=37
Ground state $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^4 3d^{10} 4s^2 4p^6 5s^2 S_{1/2}$	
$5s^2 S_{1/2}$ Rb ^{II} $33691.02 \pm 0.03 \text{ cm}^{-1}$	I. P. 4.176 volts
$5s^2 S_{1/2}$ Rb ^{II} $33691.10 \pm 0.03 \text{ cm}^{-1}$	I. P. 4.176 volts

The well known series of Rb I reported in the classical publications of Paschen-Götze and Fowler have recently been extended. Kratz has observed in absorption the principal series ($np^2 P^o$) to $n=77$.

Mack has furnished in advance of publication his observations of forbidden absorption lines, all of which are combinations of the ground term, $5s^2 S$, with higher series members $nd^2 D$ and $ns^2 S$. The series called $nf^2 F^o$ in the table is labeled by Mack as $n^2 Q$ to indicate that the terms are $nf^2 F^o$, $ng^2 G$, $nh^2 H^o$, etc.

Ramb has observed with the interferometer 33 lines between 5169.651 Å and 10075.711 Å. The inverted terms of the Bergmann series have been discussed in detail by Meissner and Masaki. From these and other papers Mack has prepared the list of terms as far as $12s^2 S$, and furnished his manuscript for inclusion here. He notes that the values of the terms $6s^2 S$, $4d^2 D$, 4 to $8f^2 F^o$, 5, 6g $^2 G$, and $6h^2 H^o$ need further adjustment from more accurate wave lengths. He suggests, also, the following improved values of intervals:

Term	Interval	Term	Interval
$5p^2 P^o$	237.598	$7d^2 D$	1.507
$5d^2 D$	2.990	$8d^2 D$	1.013
$6d^2 D$	2.202	$9d^2 D$	0.697

Brackets denote that the tabular entries have been derived from series calculations.

Kratz derives the limit $33690.96 \pm 0.03 \text{ cm}^{-1}$ from the long $np^2 P^o$ series, and calculates the limit of the lowest hyperfine structure sublevel as 33691.02 ± 0.03 . Mack confirms this calculation for Rb^{II} and adds the value quoted above for Rb^{II}.

Beutler has observed in absorption 39 lines between 594.61 Å and 809.72 Å, and classified all but 3 as transitions from the ground term to levels above the ionization limit. His rounded-off wave numbers have been entered in the table. These levels have as limits, two higher terms $^2 P^o$ and $^4 P^o$ in Rb II. The miscellaneous levels have been assigned numbers by the writer. The double entries of J for these levels (unlike those for unresolved terms) indicate that the existing data are insufficient to distinguish which value of J is correct.

The Quadratic Zeeman Effect in the principal series of Rb I is discussed by Harting and Klinkenberg.

REFERENCES

- F. Paschen und R. Götze, *Seriengesetze der Linienspektren*, p. 61 (Julius Springer, Berlin, 1922). (T) (C L)
A. Fowler, *Report on Series in Line Spectra*, p. 103 (Fleetway Press, London, 1922). (T) (C L)
R. Ramb, *Ann. der Phys.* [5] **10**, 311 (1931). (T) (C L)
K. W. Meissner and O. Masaki, *Ann. der Phys.* [5] **16**, 225 (1931). (T) (C L)
W. F. Meggers, *Bur. Std. J. Research* **19**, 674 RP558 (1933). (C L)
H. Beutler, *Zeit. Phys.* **91**, 131 (1934). (T) (C L)
D. Harting and P. F. A. Klinkenberg, *Physica* **14**, No. 10, 669 (1949). (Z E)
H. R. Kratz, *Phys. Rev.* **75**, 1844 (1949). (I F) (T) (C L) (hfs)
P. Kusch and H. Tausch, *Phys. Rev.* **75**, 1477 (1949). (hfs)
J. E. Mack, *Rev. Mod. Phys.* **22**, 64 (1950). (Summary hfs)
J. E. Mack, unpublished material (May 1951); *Phys. Rev.* **84**, 716 (1952). (T) (C L)

Rb I					Rb I				
Config.	Desig.	J	Level	Interval	Config.	Desig.	J	Level	Interval
$4p^4(^1S)5s$	$5s\ ^2S$	$0\frac{1}{2}$	0.00		$4p^4(^1S)11d$	$11d\ ^2D$	$1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}$	32514.63 32514.93	0.30
$4p^4(^1S)5p$	$5p\ ^2P^o$	$0\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}$	12578.96 12816.56	237.60	$4p^4(^1S)13p$	$13p\ ^2P^o$	$0\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}$	32665.03 32667.63	2.60
$4p^4(^1S)4d$	$4d\ ^2D$	$2\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}$	19355.01 19355.45	-0.44	$4p^4(^1S)12d$	$12d\ ^2D$	$1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}$	32724.68 32724.93	0.25
$4p^4(^1S)6s$	$6s\ ^2S$	$0\frac{1}{2}$	20133.6		$4p^4(^1S)14p$	$14p\ ^2P^o$	$0\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}$	32838.02 32840.02	2.00
$4p^4(^1S)6p$	$6p\ ^2P^o$	$0\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}$	23715.19 23792.69	77.50	$4p^4(^1S)13d$	$13d\ ^2D$	$1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}$	32883.21 32883.41	0.20
$4p^4(^1S)5d$	$5d\ ^2D$	$1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}$	25706.56 25703.52	2.96	$4p^4(^1S)15p$	$15p\ ^2P^o$	$0\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}$	32970.66 32972.19	1.53
$4p^4(^1S)7s$	$7s\ ^2S$	$0\frac{1}{2}$	26311.46		$4p^4(^1S)14d$	$14d\ ^2D$	$1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}$	33005.84	
$4p^4(^1S)4f$	$4f\ ^2F^o$	$2\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}$	26791.98		$4p^4(^1S)16p$	$16p\ ^2P^o$	$0\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}$	33074.59 33075.83	1.24
$4p^4(^1S)7p$	$7p\ ^2P^o$	$0\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}$	27835.05 27870.14	35.09	$4p^4(^1S)15d$	$15d\ ^2D$	$1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}$	33102.39	
$4p^4(^1S)6d$	$6d\ ^2D$	$1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}$	28687.15 28689.41	2.26	$4p^4(^1S)17p$	$17p\ ^2P^o$	$0\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}$	33157.54 33158.54	1.00
$4p^4(^1S)8s$	$8s\ ^2S$	$0\frac{1}{2}$	29046.84		$4p^4(^1S)16d$	$16d\ ^2D$	$1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}$	33180.03	
$4p^4(^1S)5f$	$5f\ ^2F^o$	$3\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}$	29277.58 29277.59	-0.01	$4p^4(^1S)18p$	$18p\ ^2P^o$	$0\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}$	33224.83 33225.67	0.84
$4p^4(^1S)5g$	$5g\ ^2G$	$3\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2}$	29297.6		$4p^4(^1S)17d$	$17d\ ^2D$	$1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}$	33244.23	
$4p^4(^1S)8p$	$8p\ ^2P^o$	$0\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}$	29834.96 29853.82	18.86	$4p^4(^1S)19p$	$19p\ ^2P^o$	$0\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}$	33280.13 33280.81	0.68
$4p^4(^1S)7d$	$7d\ ^2D$	$1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}$	30280.18 30281.69	1.51	$4p^4(^1S)18d$	$18d\ ^2D$	$1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}$	33295.28	
$4p^4(^1S)9s$	$9s\ ^2S$	$0\frac{1}{2}$	30499.06		$4p^4(^1S)20p$	$20p\ ^2P^o$	$0\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}$	33326.13 33326.70	0.57
$4p^4(^1S)6f$	$6f\ ^2F^o$	$3\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}$	30627.77 30627.78	-0.01	$4p^4(^1S)19d$	$19d\ ^2D$	$1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}$	33338.80	
$4p^4(^1S)6g$	$6g\ ^2G$	$3\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2}$	30636.9		$4p^4(^1S)21p$	$21p\ ^2P^o$	$0\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}$	33364.81 33365.29	0.48
$4p^4(^1S)6h$	$6h\ ^2H^o$	$4\frac{1}{2}, 5\frac{1}{2}$	30643.5		$4p^4(^1S)20d$	$20d\ ^2D$	$1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}$	33375.4	
$4p^4(^1S)9p$	$9p\ ^2P^o$	$0\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}$	30958.94 30970.22	11.28	$4p^4(^1S)22p$	$22p\ ^2P^o$	$0\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}$	33397.66 33398.09	0.43
$4p^4(^1S)8d$	$8d\ ^2D$	$1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}$	31221.47 31222.48	1.01	$4p^4(^1S)21d$	$21d\ ^2D$	$1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}$	33406.86	
$4p^4(^1S)10s$	$10s\ ^2S$	$0\frac{1}{2}$	31362.36		$4p^4(^1S)23p$	$23p\ ^2P^o$	$0\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}$	33425.76 33426.15	0.39
$4p^4(^1S)7f$	$7f\ ^2F^o$	$3\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}$	31441.52 31441.53	-0.01	$4p^4(^1S)22d$	$22d\ ^2D$	$1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}$	33433.88	
$4p^4(^1S)10p$	$10p\ ^2P^o$	$0\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}$	31653.88 31661.19	7.31	$4p^4(^1S)24p$	$24p\ ^2P^o$	$0\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}$	33450.03 33450.38	0.35
$4p^4(^1S)9d$	$9d\ ^2D$	$1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}$	31821.88 31822.58	0.70	$4p^4(^1S)23d$	$23d\ ^2D$	$1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}$	33457.06	
$4p^4(^1S)11s$	$11s\ ^2S$	$0\frac{1}{2}$	31917.25		$4p^4(^1S)25p$	$25p\ ^2P^o$	$0\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}$	33471.11 33471.43	0.32
$4p^4(^1S)8f$	$8f\ ^2F^o$	$2\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}$	31969.43		$4p^4(^1S)24d$	$24d\ ^2D$	$1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}$	33477.0	
$4p^4(^1S)11p$	$11p\ ^2P^o$	$0\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}$	32113.58 32118.55	4.97	$4p^4(^1S)26p$	$26p\ ^2P^o$	$0\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}$	33489.53 33489.79	0.26
$4p^4(^1S)10d$	$10d\ ^2D$	$1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}$	[32227.68] 32228.16	[0.48]	$4p^4(^1S)25d$	$25d\ ^2D$	$1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}$	33494.8	
$4p^4(^1S)12s$	$12s\ ^2S$	$0\frac{1}{2}$	[32295.04]		$4p^4(^1S)27p$	$27p\ ^2P^o$	$0\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}$	33506.92	
$4p^4(^1S)12p$	$12p\ ^2P^o$	$0\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}$	32433.50 32437.04	3.54	$4p^4(^1S)26d$	$26d\ ^2D$	$1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}$	33510.1	
					$4p^4(^1S)28p$	$28p\ ^2P^o$	$0\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}$	33520.22	

Rb I—Continued

Rb I—Continued

Config.	Desig.	<i>J</i>	Level	Interval	Config.	Desig.	<i>J</i>	Level	Interval
4p ⁴ (¹ S)4d	49d ² D	1½, 2½	33642. 7		4p ⁴ 5s(³ P ₁)4d	4d 2°	0½, 1½	139910	
4p ⁴ (¹ S)51s	51s ¹ S	0½	33643. 98		4p ⁴ 5s(³ P ₁)4d	4d 3°	0½, 1½	145540	
4p ⁴ (¹ S)51p	51p ¹ P°	0½, 1½	33644. 02		4p ⁴ 5s(³ P ₁)4d	4d 4°	0½, 1½	146060	
4p ⁴ (¹ S)50d	50d ¹ D	1½, 2½	33644. 5		4p ⁴ 5s(³ P ₁)4d	4d 5°	0½, 1½	146780	
4p ⁴ (¹ S)52s	52s ¹ S	0½	33644. 95		4p ⁴ 5s(³ P ₁)4d	4d 6°	0½, 1½	147330	
4p ⁴ (¹ S)52p	52p ¹ P°	0½, 1½	33645. 96		4p ⁴ 5s(³ P ₁)4d	4d 7°	0½, 1½	147680	
4p ⁴ (¹ S)51d	51d ¹ D	1½, 2½	33646. 54		4p ⁴ 5s(³ P ₁)4d	4d 8°	0½, 1½	148910	
4p ⁴ (¹ S)53s	53s ¹ S	0½	33646. 84?		4p ⁴ 5s(³ P ₁)6s	6s ¹ P°	1½	151760	— 1220
4p ⁴ (¹ S)53p	53p ¹ P°	0½, 1½	33647. 72		4p ⁴ 5s(³ P ₁)6s	6s ¹ P°	0½?	152980	
4p ⁴ (¹ S)52d	52d ¹ D	1½, 2½	33648. 29		4p ⁴ 5s(³ P°)6s	6s ¹ P°	2½	152380	— 6140
4p ⁴ (¹ S)54p	54p ¹ P°	0½, 1½	33649. 33		4p ⁴ 5s(³ P ₁)6s		1½?	153520	
4p ⁴ (¹ S)53d	53d ¹ D	1½, 2½	33650. 03		4p ⁴ 5s(³ P ₁)4d	4d' 9°	0½, 1½	152690	
4p ⁴ (¹ S)55p	55p ¹ P°	0½, 1½	33650. 96		4p ⁴ 5s(³ P ₁)4d	4d' 10°	0½, 1½	154040	
4p ⁴ (¹ S)54d	54d ¹ D	1½, 2½	33651. 36		4p ⁴ 5s(³ P ₁)5d	5d 11°	0½, 1½	154260	
4p ⁴ (¹ S)56p	56p ¹ P°	0½, 1½	33652. 41		4p ⁴ 5s(³ P ₁)4d?	4d' 12°	0½, 1½	154960	
4p ⁴ (¹ S)57p	57p ¹ P°	0½, 1½	33653. 80		4p ⁴ 5s(³ P ₁)5d	5d 13°	0½, 1½	156310	
4p ⁴ (¹ S)58p	58p ¹ P°	0½, 1½	33655. 11		4p ⁴ 5s(³ P ₁)5d	5d 14°	0½, 1½	156980	
4p ⁴ (¹ S)59p	59p ¹ P°	0½, 1½	33656. 39		4p ⁴ 5s(³ P ₁)5d	5d 15°	0½, 1½	157380	
4p ⁴ (¹ S)60p	60p ¹ P°	0½, 1½	33657. 55		4p ⁴ 5s(³ P ₁)5d	5d 16°	0½, 1½	157750	
4p ⁴ (¹ S)61p	61p ¹ P°	0½, 1½	33658. 69		4p ⁴ 5s(³ P ₁)5d	5d 17°	0½, 1½	159070	
4p ⁴ (¹ S)62p	62p ¹ P°	0½, 1½	33659. 80		4p ⁴ 5s(³ P ₁)6s	6s' ¹ P°	0½	159210	1780
4p ⁴ (¹ S)63p	63p ¹ P°	0½, 1½	33660. 82				1½	160990	
4p ⁴ (¹ S)64p	64p ¹ P°	0½, 1½	33661. 81		4p ⁴ 5s(³ P ₁)7s	7s ¹ P°	1½	159210	
4p ⁴ (¹ S)65p	65p ¹ P°	0½, 1½	33662. 73				0½		
4p ⁴ (¹ S)66p	66p ¹ P°	0½, 1½	33663. 63		4p ⁴ 5s(³ P°)7s	7s ¹ P°	2½		
4p ⁴ (¹ S)67p	67p ¹ P°	0½, 1½	33664. 48		4p ⁴ 5s(³ P ₁)7s?		1½?	160080	— 6770
4p ⁴ (¹ S)68p	68p ¹ P°	0½, 1½	33665. 28		4p ⁴ 5s(³ P ₁)7s?		0½?	166830	
4p ⁴ (¹ S)69p	69p ¹ P°	0½, 1½	33666. 04		4p ⁴ 5s(³ P ₁)6d	6d 18°	0½, 1½	161210	
4p ⁴ (¹ S)70p	70p ¹ P°	0½, 1½	33666. 78		4p ⁴ 5s(³ P ₁)6d	6d 19°	0½, 1½	161450	
4p ⁴ (¹ S)71p	71p ¹ P°	0½, 1½	33667. 49		4p ⁴ 5s(³ P ₁)6d	6d 20°	0½, 1½	162320	
4p ⁴ (¹ S)72p	72p ¹ P°	0½, 1½	33668. 11		4p ⁴ 5s(³ P ₁)7d	7d 21°	0½, 1½	162320	
4p ⁴ (¹ S)73p	73p ¹ P°	0½, 1½	33668. 79		4p ⁴ 5s(³ P ₁)5d	5d 22°	0½, 1½	163380	
4p ⁴ (¹ S)74p	74p ¹ P°	0½, 1½	33669. 36		4p ⁴ 5s(³ P°)8s	8s ¹ P°	2½		
4p ⁴ (¹ S)75p	75p ¹ P°	0½, 1½	33670. 01		4p ⁴ 5s(³ P ₁)8s		1½?	163500	
4p ⁴ (¹ S)76p	76p ¹ P°	0½, 1½	33670. 61				0½		
4p ⁴ (¹ S)77p	77p ¹ P°	0½, 1½	33671. 07		4p ⁴ 5s(¹ P ₁)5d	5d' 23°	0½, 1½	164700	
Rb II (¹ S ₀)	Limit	-----	33691. 02		4p ⁴ 5s(¹ P ₁)5d	5d' 24°	0½, 1½	165080	
4p ⁴ (³ P ₁)5s ²	5s ² ¹ P°	1½	123500	— 6820	4p ⁴ 5s(¹ P ₁)5d	5d' 25°	0½, 1½	166060	
4p ⁴ (¹ P ₁)5s ²		0½	130320		4p ⁴ 5s(¹ P ₁)7s	7s' ¹ P°	0½?	168180	
4p ⁴ 5s(³ P ₁)4d	4d 1°	0½, 1½	138780				1½		
					Rb II (5s ¹ P ₁)	Limit	-----	167040	
					Rb II (5s ¹ P ₁)	Limit	-----	168670	
					Rb II (5s ¹ P ₁)	Limit	-----	175670	
					Rb II (5s ¹ P ₁)	Limit	-----	177160	

June 1951.

Literaturverzeichnis

- [1] Planck, M. (1900), *Über eine Verbesserung der Wien'schen Spektralgleichung*, Verh. D. Phys. Ges. **2**, 202-204.
- [2] Planck, M. (1900), *Zur Theorie des Gesetzes der Energieverteilung im Normalspektrum*, Verh. D. Phys. Ges. **2**, 237-245.
- [3] Wheeler, J. A., Zurek, W. H. (Hrsg.) (1983), *Quantum Theory and Measurement*, Princeton Series in Physics, Princeton University Press.
- [4] Schrödinger, E. (1935), *Die gegenwärtige Situation in der Quantenmechanik*, Naturwissenschaften **23**, 807.
- [5] Blanchard, Ph., Giulini, D., Joos, E., Kiefer, C., Stamatescu, I.-O. (Hrsg.) (2000), *Decoherence: Theoretical, Experimental, and Conceptual Problems*, in: Lecture Notes in Physics 38, Springer-Verlag.
- [6] Giulini, D., Joos, E., Kiefer, C., Kupsch, J., Stamatescu, I.-O., Zeh, H. D. (1996), *Decoherence and the Appearance of a Classical World in Quantum Theory*, Springer-Verlag, Berlin.
- [7] Zeh, H. D. (1970), *On the interpretation of measurement in quantum theory*, Found. Phys. **1**, 69-76.
- [8] Kübler, O., Zeh, H. D. (1973), *Dynamics of quantum correlations*, Ann. Phys. (N.Y.) **76**, 405-418.
- [9] Zurek, W. H. (1991), *Decoherence and the Transition from Quantum to Classical*, Phys. Tod. **44** (Oct.), 36-44.
- [10] Zurek, W. H. (2003), *Decoherence, einselection, and the quantum origins of the classical*, Rev. Mod. Phys. **75**, 715.
- [11] Zurek, W. H. (1981), *Pointer basis of quantum apparatus: Into what mixture does the wave packet collapse?*, Phys. Rev. D **24**, 1516-1525.

- [12] Joos, E., Zeh, H. D. (1985), *The emergence of classical properties through interaction with the environment*, Z. Phys. B **59**, 223-243.
- [13] Kiefer, C. (1992), *Decoherence in quantum electrodynamics and quantum cosmology*, Phys. Rev. D **46**, 1658-1670.
- [14] Omnès, R. (1997), *General theory of the decoherence effect in quantum mechanics*, Phys. Rev. A **56**, 3383-3394.
- [15] Meschede, D., Walther, H., Müller, G. (1985), *One-Atom Maser*, Phys. Rev. Lett. **54**, 551.
- [16] Krause, J., Scully, M. O., Walther, H. (1986), *Quantum Theory of the Micromaser: Symmetry Breaking via Off-Diagonal Atomic Injection*, Phys. Rev. A **34**, 2032-2037.
- [17] Rempe, G., Walther, H., Klein, N. (1987), *Observation of Quantum Collapse and Revival in a One-Atom Maser*, Phys. Rev. Lett. **58**, 353-356.
- [18] Krause, J., Scully, M. O., Walther, H. (1987), *State Reduction and $|n\rangle$ -State Preparation in a High-Q Micromaser*, Phys. Rev. A **36**, 4547-4550.
- [19] Krause, J., Scully, M. O., Walther, Th., Walther, H. (1989), *Preparation of a Pure Number State and Measurement of the Photon Statistics in a High-Q Micromaser*, Phys. Rev. A **39**, 1915-1921.
- [20] Raithel, G., Wagner, C., Walther, H., Narducci, L. M., Scully, M. O. (1994), *The Micromaser: A Proving Ground for Quantum Physics*, Advances in Atomic, Molecular and Optical Physics, Supplement 2, 57-121, Academic Press.
- [21] Englert, B.-G., Löffler, M., Benson, O., Varcoe, B., Weidinger, M., Walther, H. (1998), *Entangled Atoms in Micromaser Physics*, Fortschr. Phys. **46**, 897-926.
- [22] Brattke, S. (2001), *Untersuchung von Photonenanzahlzuständen mit dem Ein-Atom-Maser*, Dissertation Ludwig-Maximilians-Universität, München.
- [23] Bodendorf, C. T. (2000), *Untersuchungen am Ein-Atom-Maser mit externer Einkoppelung*, Dissertation Ludwig-Maximilians-Universität, München.
- [24] Brune, M., Hagley, E., Dreyer, J., Maître, X., Maali, A., Wunderlich, C., Raimond, J. M., Haroche, S. (1996), *Observing the Progressive Decoherence of the "Meter" in a Quantum Measurement*, Phys. Rev. Lett. **77**, 4887-4890.
- [25] Bouwmeester, D., Ekert, A., Zeilinger, A. (Hrsg.) (2000), *The Physics of Quantum Information*, Springer-Verlag.

-
- [26] Chen, G., Brylinski, R. K. (Hrsg.) (2002), *Mathematics of Quantum Computation*, Chapman & Hall/CRC.
- [27] Bell, J. S. (1964), *Physics* **1**, 195.
- [28] Einstein, A., Podolsky, B., Rosen, N. (1935), *Can a quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?*, *Phys. Rev.* **41**, 777.
- [29] Bohr, N. (1935), *Can a quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?*, *Phys. Rev.* **48**, 696.
- [30] Aspect, A. (1982), *Experimental tests of Bell's inequalities in atomic physics*, in: *At. Phys.* **8**, Proceedings of the Eighth International Conference on Atomic Physics. Lindgren, I., Rosen, A., Svanberg, S. (Hrsg.).
- [31] Aspect, A., *Bell's Theorem: The Naive View of an Experimentalist*, in: *Quantum [Un]speakables, From Bell to Quantum Information* (2002), Bertlmann, R. A., Zeilinger, A. (Hrsg.), Springer-Verlag.
- [32] Bennett, C. H., Brassard, G., Crepeau, C., Josza, R., Peres, A., Wootters, W. (1993), *Teleporting an Unknown Quantum State via Dual Classical and EPR Channels*, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 1895-1899.
- [33] Laloë, F. (2001), *Do we really understand quantum mechanics? Strange correlations, paradoxes, and theorems*, *Am. J. Phys.* **69** (6), 655.
- [34] Bouwmeester, D., Pan, J.-W., Mattle, K., Eibl, M., Weinfurter, H., Zeilinger, A. (1997), *Experimental quantum teleportation*, *Nature* **390**, 575-579.
- [35] Boschi, D., Branca, S., De Martini, F., Hardy, L., Popescu, S. (1998), *Experimental Realization of Teleporting an Unknown Pure Quantum State via Dual Classical and Einstein-Podolsky-Rosen Channels*, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 1121-1125.
- [36] Furusawa, A., Sørensen, J. L., Braunstein, S. L., Fuchs, C. A., Kimble, H. J., Polzik, E. S. (1998), *Unconditional Quantum Teleportation*, *Science* **282**, 706-709.
- [37] Pipkin, F. M. (1978), *Atomic Physics Tests of the Basic Concepts in Quantum Mechanics*, *Advances in Atomic and Molecular Physics* **14**, 281.
- [38] Myatt, C. J., King, B. E., Turchette, Q. A., Sackett, C. A., Kielpinski, D., Itano, W. M., Monroe, C., Wineland, D. J. (2000), *Decoherence of quantum superpositions through coupling to engineered reservoirs*, *Nature* **403**, 269-273.
- [39] Feynman, R. P., Vernon, F. L. (1963), *Ann. of Phys.*, **24**, 118.

- [40] Caldeira, A. O., Leggett, A. J. (1983), *Ann. of Phys.*, **149**, 374.
- [41] Gardiner, C.W., Zoller, P. (2000), *Quantum Noise*, Springer-Verlag.
- [42] Cohen-Tannoudji, C., Diu, B., Laloë, F. (1977), *Quantum Mechanics II*, Wiley & Sons.
- [43] Göppert-Mayer, M. (1929), *Naturwiss.* **17**, 932.
- [44] Göppert-Mayer, M. (1931), *Annalen d. Physik* **9**, 273.
- [45] Faisal, F. H. M. (1987), *Theory of Multiphoton Processes*, in: *Physics of Atoms and Molecules*, Plenum Press.
- [46] Delone, N. B., Krainov, V. P. (1984), *Atoms in Strong Light Fields*, in: *Springer Series in Chemical Physics* **28**, Springer-Verlag.
- [47] Cohen-Tannoudji, C., Dupont-Roc, J., Grynberg, G. (1987), *Photons and Atoms, Introduction to Quantum Electrodynamics*, John Wiley & Sons, Inc.
- [48] Cohen-Tannoudji, C., Dupont-Roc, J., Grynberg, G. (1992), *Atom-Photon Interactions, Basic Processes and Applications*, John Wiley & Sons, Inc.
- [49] Ohnesorge, W., Diedrich, F., Leuchs, G., Elliott, D. S., Walther, H. (1984), *Influence of the dynamic Stark effect on photoelectron angular distributions in multiphoton ionization*, *Phys. Rev. A* **29**, 1181.
- [50] Messiah, A. (1985), *Quantenmechanik 2, Anhang C.1.2.*, 2. Auflage, Walter de Gruyter, Berlin, New York.
- [51] Moore, Ch. E. (1952), *Atomic Energy Levels*, vol. II, Circular of the National Bureau of Standards **467**.
- [52] Lindblad, G. (1976), *On the Generators of Quantum Dynamical Semigroups*, *Commun. Math. Phys.* **48**, 119.
- [53] Feneuille, S., Jacquinet, P. (1981), *Atomic Rydberg States*, in: *Advances in Atomic and Molecular Physics* **17**, Academic Press.
- [54] Edelstein, S. A., Gallagher, T. F. (1978), *Rydberg Atoms*, in: *Advances in Atomic and Molecular Physics* **14**, Academic Press.
- [55] Scully, M. O., Zubairy, M.S. (1997), *Quantum Optics*, Cambridge University Press.
- [56] Meystre, P., Sargent III, M. (1990), *Elements of Quantum Optics*, Springer-Verlag.
- [57] Walls, D. F., Milburn, G. J. (1994), *Quantum Optics*, Springer-Verlag.

-
- [58] Vogel, W., Welsch, D.-G., Wallentowitz, S. (2001), *Quantum Optics - An Introduction*, Wiley-VCH.
- [59] Mahler, G., Weberruß, V. A. (1998), *Quantum Networks, 2nd Edition*, Springer-Verlag.
- [60] Schleich, W. P. (2001), *Quantum Optics in Phase Space*, Wiley-VCH.
- [61] Bergou, J. A., Hillery, M. (1997), *Generation of highly entangled field states in multiple micromaser cavities*, Phys. Rev. A **55**, 4585-4588.
- [62] Bogár, P., Bergou, J. A. (1996), *Entanglement of atomic beams: Tests of complementarity and other applications*, Phys. Rev. A **53**, 49-52.
- [63] Bogár, P., Bergou, J. A., Hillery, M. (1995), *Pump-coupled high-Q micromasers with conditional measurements of atoms: Transient and steady-state entanglement of non-local fields*, Phys. Rev. A **51**, 2396-2409.
- [64] Bogár, P., Bergou, J. A. (1995), *Pump-coupled micromasers: Entangled trapping states of nonlocal fields*, Phys. Rev. A **51**, 2381-2395.
- [65] Leggett, A. J., Chakravarty, S., Dorsey, A. T., Fisher, M. P. A., Garg, A., Zwerger, W. (1987), *Dynamics of the dissipative two-state system*, Reviews of Modern Physics **59**, No. 1, 1-84.
- [66] Hund, F. (1927), *Zur Deutung der Molekelspektren. III.*, Z. f. Phys. **43**, 805.

Danksagung

Hiermit möchte ich mich bei allen herzlich bedanken, die zum Gelingen dieser Arbeit durch ihre Hilfe beigetragen haben.

Prof. Dr. Ernst Werner, der stets ein offenes Ohr für meine Fragen hatte. Die freundliche und vertrauensvolle Atmosphäre dieser Diskussionen hat mich immer wieder aufs Neue motivieren können und Probleme als Herausforderung begreifen lassen.

Prof. Dr. Herbert Walther, dessen Unterstützung und Vertrauen diese Arbeit erst ermöglicht haben. Die zahlreichen Diskussionen mit ihm am MPQ waren immer eine große Bereicherung und Hilfe.

Dr. Thomas Becker, der immer ein bereitwilliger Zuhörer war, wenn ich mit Fragen zum Mikromaser zu ihm kam.

Andrea Bertoldi: für die Hilfe bei numerischen Problemen und bei dem Versuch, Italien zu verstehen.

Dem Max-Planck-Institut für Quantenoptik, an dem ich während der Zeit meiner Promotion beschäftigt sein durfte. Dadurch ist diese Arbeit erst möglich geworden.

Meiner Familie, meinen Eltern und meinen Brüdern: für alles.