

Optimallösungen von Marketing-Allokationsproblemen auf Grundlage von Marktreaktionsfunktionen mit unsicheren Parametern



Dissertation

zur Erlangung des Grades eines Doktors der Wirtschaftswissenschaft

Eingereicht an der Wirtschaftswissenschaftlichen Fakultät der Universität Regensburg

von

Marc Werkmeister

aus Regensburg

1. Berichterstatter: Prof. Dr. H. Hruschka
2. Berichterstatter: Prof. Dr. A. Hamerle

Disputation am 02.11.2005

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	V
Tabellenverzeichnis	VII
Abkürzungs- und Symbolverzeichnis	IX
1 Einleitung	1
1.1 Problematik	1
1.2 Aufbau	3
2 Problemstellung	5
2.1 Einführung	5
2.2 Fehlerquellen im Allokationsprozess	7
2.3 Flat-Maximum-Principle	9
2.4 Standardmodell zur Allokation knapper Ressourcen	12
2.5 Das COSTA Modell	13
2.6 Modellspezifische Änderungen	14
2.7 Problematik	16
2.7.1 Auswirkungen ungenauer Schätzwerte	16
2.7.2 Subjektive oder empirische Schätzung der Parameter	18
2.8 Schätzung der Parameter auf Basis weniger Beobachtungen	23
2.9 Thesen	24
2.9.1 These H_{01} : Die Beobachtungszahl beeinflusst die Ergebnisse einer Reallokation mit knapper Ressource.	24
2.9.2 These H_{02} : Aus der Optimierung mit wenigen Beobachtungen resultieren höhere Ergebnisse als aus zufällig erzeugten Allokationen	25
2.9.3 These H_{03} : Mit einem Bayesschen Schätzverfahren sind die erreichten Ergebnisse der Reallokation besser als mit OLS bei identischer Beobachtungszahl.	25
2.9.4 These H_{04} : Die Bestimmung der Parameter auf Basis eines beobachteten und eines subjektiv bestimmten Umsatzwertes ist der Schätzung auf Basis zweier Beobachtungswerte überlegen.	26
2.9.5 These H_{05} : Die Annahme homogener Elastizitäten des Marketinginstruments beeinflusst das Ergebnis negativ.	27
2.9.6 These H_{06} : Durch Anwendung der stochastischen Optimierung können die Ergebnisse der deterministischen Allokation verbessert werden	27

II Inhaltsverzeichnis

3	Hierarchical Bayes	29
3.1	Überblick.....	29
3.2	Grundlage.....	30
3.3	Aufbau des linearen Modells	34
3.4	Markov Chain Monte Carlo	37
3.5	Gibbs Sampler.....	38
4	Simulationsexperiment.....	41
4.1	Modellannahmen.....	41
4.2	Modell	42
4.3	Bestimmung der Parameter.....	47
4.3.1	Lösung eines genau bestimmten Gleichungssystems.....	47
4.3.2	Regressionsanalyse mit LS- bzw. OLS-Schätzung	48
4.3.3	Schätzmodell mit Hierarchical Bayes	51
4.4	Software	61
4.4.1	Excel Tabellen.....	61
4.4.2	Generierung der Zufallsdaten	62
4.4.3	Regression	62
4.4.4	Hierarchical Bayes.....	62
4.5	Truncation	67
4.5.1	Truncation bei Bayesschen Modellen	72
4.6	Modus, Median oder Erwartungswert	73
4.7	Korrelationskoeffizienten unterschiedlich verteilter Zufallsvariablen	75
4.8	Referenzwerte	76
4.9	Genauigkeit	77
4.10	Evaluierung der Schätzergebnisse	77
4.11	Verbesserung gegenüber der aktuellen Situation	78
5	Ergebnisse	79
5.1	Analyseverfahren	79
5.1.1	Regressions- oder Varianzanalyse.....	81
5.1.2	Varianzanalyse	82
5.1.3	Parameterschätzer	85
5.2	Annahme vollständiger Homogenität	88
5.3	Prüfung der Hypothesen	93
5.3.1	These H_{01} :	93
5.3.2	These H_{02} :	93
5.3.3	These H_{03} :	97
5.3.4	These H_{04} :	98
5.3.5	These H_{05} :	99
5.4	Fazit der Simulationsstudie.....	100
6	Stochastische Optimierung.....	103
6.1	Überblick.....	103
6.2	Grundlage.....	104
6.3	Momenterzeugende Funktion	106
6.4	Optimierung	109

6.5	Berechnung	110
6.6	Modellspezifikation	112
6.6.1	Stutzung des Wertebereiches	112
6.7	Ergebnisse.....	114
6.7.1	Überlegungen	114
6.7.2	Berechnungen.....	115
6.7.3	Varianzanalyse	120
6.7.4	These H_{06} :.....	122
6.8	Fazit	123
7	Schlussbetrachtung.....	125
	Anhang	129
	Literaturverzeichnis.....	143

Abbildungsverzeichnis

Abbildung 2-1: Flat-Maximum Intervall bei $G(w) = 0,33U(w) - w$ mit $U(w) = 10(3,25w^{0,5})$	11
Abbildung 2-2: Verlauf einer Regressionsgeraden bei zwei und bei drei Beobachtungen	18
Abbildung 3-1: Analyse des Mittelwertes für die Werbeelastizität aus Beispiel.....	32
Abbildung 3-2: Darstellung des hierarchischen Modells mit Hilfe des WinBUGS-Doodle-Editors	35
Abbildung 3-3: Sichtbare Konvergenz durch Plot der Iterationen von $b \sim N(2, 1)$ aus drei Startzuständen	39
Abbildung 4-1: Grafische Darstellung des bivariaten hierarchischen Schätzmodells ..	52
Abbildung 4-2: Sichtbare Konvergenz einiger Parameter nach wenigen Iterationen...	59
Abbildung 4-3: Verteilung ausgewählter Parameter nach 40000 Iterationen	60
Abbildung 4-4: Verteilung von β_{2a} in normalverteilter und in doppelt gestutzter Form	70
Abbildung 4-5: Verteilung von β_{2b} in normalverteilter und in doppelt gestutzter Form	71
Abbildung 4-6: Verteilung einer Funktion mit $\beta \sim \text{djl.dnorm.trunc}(\beta_2, 36, \sigma^2_{\beta_2}, 0,02; 0,66)$	72
Abbildung 4-7: Verteilungskruven mit Anwendung der trunc-Funktion bei vorzeitigem Abbruch	73
Abbildung 4-8: Übersicht Modus, Median und Erwartungswert bei unzulässigem Schätzer	75
Abbildung 5-1: Trendlinie der Ergebnisqualität von den einzelnen Untersuchungen ..	79

VI Abbildungsverzeichnis

Abbildung 5-2: Diagramm zur Interpretation von Wechselwirkungen zwischen F_2 und F_4	84
Abbildung 5-3: Diagramm zur Interpretation von Wechselwirkungen zwischen F_4 und F_5	85
Abbildung 5-4: Diagramm des Interaktionseffektes zwischen F_4 und der α -Allokation.....	91
Abbildung 5-5: Diagramme der Wechselwirkungen von F_2 und α -Allokation.....	99
Abbildung 5-6: Ergebnisse von alternativen Schätzmethoden mit wenigen Beobachtungen	99
Abbildung 5-7: Schema zur Entscheidungshilfe, welche Art der Allokation bei knapper Ressource durchgeführt werden sollte.....	102
Abbildung 6-1: Beispiel für gestutzte Gammaverteilung $\sigma_\beta \sim G(a, b)$ mit 90 %-Intervall.....	113
Abbildung 6-2: Diagramme der Wechselwirkungen bei stochastischer Optimierung aus OLS-Schätzungen	119

Tabellenverzeichnis

Tabelle 2-1: Variation der Optimalen Budgetgröße nach Tull et al. (1986).....	10
Tabelle 2-2: Eigene Darstellung der Elastizitäten bei unterschiedlichen Verkaufsanstrengungen zur Erreichung des Sättigungsumsatzes aus Lodish et al. (1988)	21
Tabelle 4-1: Ausgangdaten für die Simulation	45
Tabelle 5-1: Ergebnisse als Mittelwert über alle Simulationsläufe (N_1, N_2).....	80
Tabelle 5-2: Ergebnisse als Anteilswert des Referenzumsatzes	81
Tabelle 5-3: Ergebnisse der Varianzanalyse	83
Tabelle 5-4: Varianzanalyse mit abhängiger Variable als Logit.....	86
Tabelle 5-5: Parameterschätzer für die Ausprägungen der Faktoren $F_1 - F_5$	87
Tabelle 5-6: Varianzanalyse über die Beobachtungszahl bei Annahme vollständiger Homogenität	89
Tabelle 5-7: Umsatzmaximale Elastizitätsgrößen laut Excel-Solver bei Annahme von Homogenität	90
Tabelle 5-8: Anteile der Ergebnisse am Referenzumsatz bei Unterstellung einer homogenen Struktur	90
Tabelle 5-9: Zuwachs der <i>alpha-Allokation</i> gegenüber der herkömmlichen Methoden, wenn die gemittelten Schätzer über alle Zuordnungseinheiten eingesetzt werden	92
Tabelle 5-10: Wahrscheinlichkeit, mit Allokation die Umsatzsituation zu verbessern	95
Tabelle 5-11: Prozentualer Mittelwert um den sich der Umsatz durch die Allokation verändert	96
Tabelle 5-12: Varianzanalyse für die subjektive und die homogene Schätzung	98

VIII Tabellenverzeichnis

Tabelle 6-1: Ergebnisse der stochastischen Optimierung mit OLS-geschätzten Parametern	116
Tabelle 6-2: Ergebnisse der stochastischen Optimierung mit Bayes-geschätzten Parametern	117
Tabelle 6-3: Ergebnisse der Varianzanalyse zur Prüfung der stochastischen Optimierung für Schätzdaten aus OLS.....	120
Tabelle 6-4: Ergebnisse der Varianzanalyse zur Prüfung der stochastischen Optimierung für Bayessche Schätzdaten.....	122

Abkürzungs- und Symbolverzeichnis

α	Skalierungsparameter
β	Parametervektor
β_1	logarithmierter Skalierungsparameter
β_2	Elastizitätsparameter
γ	Parametervektor
Γ	Integral über positiven Bereich von $y^{a-1}\exp(-y)dy$
δ	Werbeelastizität
ΔS	Änderung des Umsatzes nach Allokation
∂	Differentialgleichung
ε	Fehlervariable (Vektor) der Reststreuung,
η	Effektgröße der Varianzanalyse
θ	Gesamte Stichproben-/ Iterationsanzahl beim Gibbs Sampling
κ	Zufallsvariable
λ	Lagrange Multiplikator
ℓ	Lagrange Funktion
μ	Mittelwert
ν	Erwartungswertvektor von Hyperprioris
Ξ	Menge aller Zuordnungseinheiten
π	Kreiszahl pi
ρ	Korrelationskoeffizient

X Abkürzungs- und Symbolverzeichnis

ς	Elastizitätsparameter bei stochastischer Optimierung
σ/σ^2	Standardabweichung/Varianz
Σ	Varianz-Kovarianzmatrix
τ	Präzisionsparameter = $1/\sigma^2$
ν	Freiheitsgrade der Wishartverteilung
ω	Stichproben-/ Iterationsanzahl Konvergenzziehung
A	Ereignis
ADM	Außendienstmitarbeiter
a	beliebiger Index
B	Ereignis
b	beliebiger Index
C	Nenner des Quotienten beim Gibbs Sampling
c	Kostensatz, Zähler des Quotienten beim Gibbs Sampling
D	Datenbasis
d	beliebiger Index
db	Stückdeckungsbeitrag
$E()$	Erwartungswert
$e^{()}, \exp()$	Exponentialfunktion
F	Faktorvariable
$F(,)$	Verteilungsfunktion
$f()$	Funktion
$G()$	Gewinn
$Ga(,)$	Gammaverteilung
$g(,)$	Funktion
h	Laufvariable bei Summen
I	Menge aller Segmente/Zuordnungseinheiten
i	Index für Zuordnungseinheiten
$IG(,)$	Inverse Gammaverteilung

J	Menge aller Beobachtungen
j	Index für Beobachtungswerte
KGE	kleinste Gebietseinheiten
KPR	kurzfristige Preisreduktion
k	Laufvariable bei Summen
$LN(,)$	Lognormalverteilung
li	Variable für linksseitige Stützung
MCMC	Markov Chain Monte Carlo
$MVN(,)$	multivariate Normalverteilung
m	Anzahl an Beobachtungen
$N(,)$	Normalverteilung
$N_{1,2}$	Simulationsindizes
n	Gesamtzahl an Segmenten/Zuordnungseinheiten
OLS	Ordinary Least Squares
P	Umsatzanteil
$p()$	Wahrscheinlichkeit
$p(\mid)$	bedingte Wahrscheinlichkeit
Q	Nenner des Quotienten beim Gibbs Sampling
q	Zähler des Quotienten beim Gibbs Sampling
R	Varianz-Kovarianzmatrix der Hyperpriori
R^2	Bestimmtheitsmaß
r	Index für Reisenden/ Bezirk
re	Variable für rechtsseitige Stützung
rl	Produkt beider Parameter beim Sampling
$S()$	Umsatz
Sp	Spannweite
s	beliebige Variable
sk	Skalar

XII Abkürzungs- und Symbolverzeichnis

T	Zeitpotential
t	Zeitvariable
$U(,)$	Gleichverteilung
u	Indexvariable für Iterationen/Perioden
V	Kovarianzmatrix für Hyperprioris
$Var()$	Varianz
$W(,)$	Wishartverteilung
w	Werbeausgaben
X	Gesamtmenge und Variablenmatrix für Marketinginstrument x
x	Inputvariable für Marketinginstrument
Y	Outputvektor für logarithmierten Umsatz
y	Outputvariable für logarithmierten Umsatz
z	z-Wert für Standardnormalverteilung
$()^T$	transponierter Vektor

1 Einleitung

Anlässlich des 50-jährigen Bestehens der renommierten Zeitschrift Management Science nutzten Morrison/Raju (2004) die Gelegenheit, um die Rolle des 1969 geborenen Marketing Departments, aus welchem dann 1982 die Zeitschrift Marketing Science hervorging, noch einmal in Erinnerung zu rufen. Dabei verwiesen sie noch einmal explizit auf zwei bewährte Artikel, welche nach geläufiger Meinung die Geburtsstunde des quantitativen Marketings einläuteten: Das Bass-Modell (Bass, 1969) sowie Littles „Decision Calculus“ (Little, 1970), welcher auch heute noch argumentativ für die praxisorientierte Arbeit mit Modellen zitiert wird. Die Erwähnung von CALLPLAN (Lodish, 1971) gleich im Folgesatz als weiteren Klassiker, zeigt hierbei die zentrale Bedeutung von Allokationsproblemen im Marketing auf. Basierend auf diesen Ansätzen, sind seither zahlreiche Artikel erschienen, die auf noch genauere Modellspezifikationen ausgerichtet waren und eine teils erheblich verbesserte Anpassung des Modells an die empirischen Daten aufzeigten. Andererseits gab es nicht minder viele Ansätze, die Optimierungstechniken zu verbessern, bzw. die zwangsläufig komplexer gewordenen Modelle analytisch oder heuristisch überhaupt lösbar zu machen.

1.1 Problematik

Idealtypisch verläuft die vereinfachte Anwendung und Optimierung mit Hilfe von Umsatz-Reaktionsmodellen nach Gedenk/Skiera (1994) chronologisch in folgender Weise ab: Nach Bestimmung eines auf die Aufgabenstellung zugeschnittenen, umsatzspezifischen Modellcharakters, gilt es entsprechende Funktionsparameter auf die wahren Begebenheiten möglichst realistisch anzupassen. Dazu werden diese entweder anhand von empirischen Daten, oder subjektiv geschätzt, wodurch ein künstlich modellierter Funktionsverlauf darstellbar wird. Durch heuristische oder analytische Verfahren werden anschließend bestimmte Prädiktoren hinsichtlich ihrer Größenordnung entsprechend den Zielvorgaben optimiert. Diese optimierten Größen sollen den Managern dann als Orientierungshilfe dienen, um Umsatzsteigerungen allein aus

verbesserter Angleichung der Ressourcen zu erreichen. Dabei übernehmen sie idealerweise diese berechneten Größen in vollem Umfang.

Bei Durchführung eines solchen Prozesses zur optimalen Anwendung einzelner Marketing-Instrumente lauert durch Erhebungsprobleme, Schätzungenauigkeiten, Heuristiken und nicht exakter Umsetzung an jeder Stufe des Optimierungsprozesses ein nicht unerhebliches Fehlerpotential. Je niedriger die Stufe, auf der diese Fehler entstehen, desto unschärfer werden auch die Lösungsansätze zur Umsetzung hin. Vielleicht ist dies ein Grund, weshalb vor allem im Bereich der Schätzmethode und der Modellspezifikation eine Vielzahl von Artikeln vorgestellt wurden, welche jeweils die Annäherung an die Realität verbesserten, und dies durch erhöhte Anpassungskennzahlen wie z.B. des Bestimmtheitsmaß R^2 dokumentieren konnten. Zur Validierung verweisen die Autoren dann auf die Signifikanz der Schätzer. Die weiteren Untersuchungen werden dann häufig an jener Stelle abgebrochen, wo keine signifikante Einwirkung der Modellparameter festgestellt werden kann.

Auf der anderen Seite wurden durch subjektiv bestimmte Annahmen, die Schätzverfahren zugunsten der Optimierung teilweise extrem vereinfacht, um eine anwendbare Methodik zu erhalten, vor dessen Umsetzung auch methodisch weniger versierte Manager nicht zurückschrecken. Ein weiterer Grund hierfür kann auch sein, die hohen Kosten für Marktstudien einzusparen und trotzdem einen effektiveren Einsatz der Marketinginstrumente zu erreichen. Dabei wird häufig für subjektive Parameterschätzungen dahingehend argumentiert, dass die erforderlichen empirischen Daten nicht vorhanden sind. Was aber nach dem Wissensstand des Autors bisher nicht untersucht wurde, ist die Auswirkung von ungenauen Schätzungen auf das Ergebnis der Optimierung. Insbesondere bei Allokationsproblemen mit fixer Ressource erscheint eine Untersuchung allein deshalb interessant, als dass nicht die Gesamtmenge des verfügbaren Marketinginstruments beeinflusst wird, jedoch deren Aufteilung suboptimal sein kann. Unter Umständen reicht sogar eine grobe Abschätzung über die Zuordnungsparameter aus, um nahezu optimale Ergebnisse zu erhalten. Vielleicht machen es sich aber auch einige Autoren mit subjektiver Bestimmung von Parametern zu einfach, da die Ungenauigkeiten mehr Suboptimalität erzeugen, als die Optimierung selbst an positiven Ergebniszuwachs auslöst, so dass man ex post schlechter gestellt ist als vorher.

Des Weiteren interessiert, ab welcher Beobachtungszahl ein zu definierender Höchststandard an Suboptimalität erreicht werden kann. Dabei liegt es im Interesse der Anwender, mit möglichst wenigen empirischen Beobachtungsdaten auszukommen, da zu dem unter Umständen hohen finanziellen Erhebungsaufwand zusätzlich die

langfristig nicht unbedingt gegebene Vergleichbarkeit von Vergangenheitsdaten problematisch sein kann. Auch die Schätzmethode soll hinsichtlich ihrer Fähigkeit zur Bestimmung von Funktionsparametern geprüft werden, indem alternativ zur bewährten Kleinst-Quadrat-Schätzung ein, auf die Problemstellung vermutlich besser zugeschnittenes Verfahren angewandt wird. Im Gegenzug beschäftigt sich die vorliegende Arbeit mit einer Möglichkeit, die Allokationsregel weiter zu vereinfachen, um andererseits dadurch ein komplexeres Schätzverfahren rechtfertigen zu können, ohne dabei die Ergebnisqualität zu mindern.

Es existiert außerdem eine potentielle Fehlerquelle, die bei der Arbeit mit Modellen unter Umständen problematisch ist, und der bisher noch nicht allzu viel Beachtung beigemessen wurde. Die Rede ist dabei von Unsicherheiten der Parameterschätzer, welche im Laufe der Schätzung eindeutig auftreten, aber im weiteren Hergang keinerlei Beachtung im Umsatz-Reaktionsmodell finden. Es wird üblicherweise derart agiert, als stünde durch Bestimmung von Punktschätzern als Parameter der Funktionsverlauf eindeutig fest. Diese somit deterministische Funktion erzeugt dann bei der Optimierung eine eindeutige Lösung. Unterschlagen wird hierbei die Tatsache, dass die Schätzer aber keine deterministischen Werte sind, sondern dass es sich hierbei um Annäherungen mit entsprechend definierten Wahrscheinlichkeiten handelt, also stochastische Werte. Es existieren einige wenige Artikel, welche diese Problematik aufgreifen und die Unsicherheiten mit in die Optimierungsmodelle integrieren, jedoch sind bei dieser Vorgehensweise bisher noch einige Fragen offen geblieben. Teilweise wurden die Unsicherheiten aber auch nur im nutzentheoretischen Entscheidungsansatz an sich und nicht in der Optimierung berücksichtigt.

1.2 Aufbau

Im folgenden Kapitel 2 soll noch einmal detailliert unter Berücksichtigung der bisher erschienenen Literatur in die Problemstellung eingeführt werden. Dabei sollen auch noch einmal die potenziellen Fehlerquellen benannt und analysiert werden. Die Problematik in Bezug auf Modellcharakter und Anwendbarkeit wird dazu mit Hilfe eines bestimmten Falls konkretisiert.

Aufgrund des Modellcharakters von mehreren homogenen Segmenten mit identischen Funktionscharakteren bietet sich ein hierarchisch Bayesscher Ansatz als Schätzalternative an. Um diese populärer werdende Methode vorzustellen, erfolgt in Kapitel 3 eine auf die hiesige Problematik beschränkte Einführung über Modellbildung und den zugehörigen Techniken zu Bestimmung vom Parametern. Die Methode bietet auch

noch die Möglichkeit ein generelles Vorwissen über die Parametereigenschaften mit in den Schätzprozess einzubeziehen und somit nicht ausschließlich die Beobachtungswerte in Betracht ziehen zu müssen.

Eine Simulationsstudie in Kapitel 4 soll dann Klarheit über die Fragestellungen schaffen, indem nahezu 3000 Allokationen mit zahlreichen möglichen Varianten und mit Hilfe zweier verschiedener Schätzmethoden einander gegenübergestellt werden. Die Schätzungen erfolgen mit zwei gängigen Verfahren. So wird die bewährte und weit verbreitete Kleinst-Quadrat-Schätzung (Ordinary-Least-Squares, OLS) für die linearisierte Absatzfunktion ebenso eingesetzt, wie das in Kapitel 3 vorgestellte und möglicherweise bessere Verfahren der hierarchisch Bayesschen Regression. Dieser Abschnitt soll unter anderem herausstellen, ob diese Opportunität des zweiten Verfahrens in Bezug auf diese Gewinنالlokation bei knappen Ressourcen vorteilhaft ist.

Eine statistische Auswertung bietet Kapitel 5, wobei hier auch die in Kapitel 2 erzeugten Thesen zu den bereits aufgeführten Untersuchungsbereichen überprüft werden.

Die stochastische Optimierung bildet in Kapitel 6 einen separaten Fall. Darin erfolgt zunächst die Entwicklung eines neuen Modells. Die Überprüfung geschieht wiederum durch Vergleichsdaten aus der in Kapitel 4 vorgestellten Simulationsstudie.

Das letzte Kapitel 7 greift mit einem Fazit noch einmal die neu gewonnenen Erkenntnisse dieser wissenschaftlichen Arbeit auf.

2 Problemstellung

2.1 Einführung

Im Zeitalter der ersten Rezession nach der wirtschaftlichen Globalisierung ist man besonders aufgrund zahlreicher Zusammenschlüsse und Übernahmen in weiten Teilen der Unternehmensbereiche mit der Konsolidierung der entstandenen Großkonzerne beschäftigt. Die Konzernspitzen sind im Interesse des Shareholder Value zu Kosteneinsparungen angehalten, welche vielfach auf Empfehlung externer Unternehmensberatungen umgesetzt werden. Häufig sind Kürzungen bei Budgets und Personal die getroffenen Maßnahmen, was wiederum zur Folge hat, mit den verbleibenden Mitteln die maximalen Erfolge erzielen zu müssen. Es werden also nicht mehr die Gewinne für einzelne Marketing-Mix-Variablen maximiert, sondern über eine verbesserte Aufteilung das bestmögliche Ergebnis bei festgelegtem Budget erzielt.

Diese Veränderung verstärkt die für den wissenschaftlichen Bereich des quantitativen Marketings seit jeher wichtige Rolle der Allokationen von knappen Ressourcen. Dabei können die Ressourcen außer als Budget auch in Form von Arbeitszeit oder Aufwand allgemein auftreten. Laut Carrol et al. (1979, S. 51) gibt es kaum Unternehmungen, in denen nicht an irgendeiner Stelle um knappe Ressourcen gewetteifert wird. Da die unmittelbare Wirkung des knappen Marketinginstruments auf den Umsatz jedoch bei jeder Zuordnungseinheit unterschiedlich sein kann, ist eine gewinnmaximale Verteilung dieser Ressource erstrebenswert. So verteilen Doyle/Saunders (1990) das Werbebudget auf die Werbeträger, oder Bultez/Naert (1988) sowie Chen (1999) beschäftigen sich mit der optimierten Aufteilung des Regalplatzes auf die Produkte und Kategorien des Einzelhandels. Als knappe Ressource des Marketing-Mix kann ebenso das Verkaufsförderungsbudget gesehen werden und natürlich steht auch die Arbeitszeit von Außendienstmitarbeitern nicht unbegrenzt zur Verfügung, mit deren gewinnmaximaler Verteilung sich Skiera/Albers (1994 und 1998) im COSTA-Modell¹

¹ Contribution Optimizing Sales Territory Alignment

beschäftigen, wobei sich zuvor Montgomery et al. (1971) und Lodish (1971) mit CALLPLAN² ausführlich mit dieser Thematik befassten. Unabhängig von der Ursache für fest vorgegebene Budgets kann es aber auch sinnvoll sein, den Focus, statt auf das absolute Optimum, auf die Reallokationen der Zuordnungseinheiten (z.B. Kunden bei knapper Arbeitszeit, Werbeträger bei knappem Werbebudget usw.) zu legen, weil gemäß dem Flat-Maximum-Principle³ (Tull et al. 1986) bereits bekannt ist, dass aufgrund abnehmender Grenzerträge die Variation der absoluten Budgetgröße, im Gegensatz zur optimalen Zuordnung, keinen nennenswerten Einfluss mehr auf den Gewinn haben (auch v. Winterfeldt/Edwards 1973, Chintagunta 1993).

Am Beispiel der optimierten Regalplatz-Aufteilung soll ein kurzer Überblick über die Variationen der Forschungsansätze dargestellt werden. In der älteren Literatur finden sich bereits Hinweise auf Modelle von Brown and Tucker (1961), die das Sortiment eines Händlers in drei Gruppen aufteilen, welche dann entsprechend mehr oder minder elastisch auf die Regalbreite reagieren. McKinsey (1963) und Malsagne (1972) schlagen vor, den Platz proportional zum Deckungsbeitrag bzw. proportional zum Absatz aufzuteilen. Corstjens/Doyle (1981) spezialisieren sich auf die Optimierung von Regalplatz für Speiseeis und Süßwaren, wobei diese Autoren erstmals auch nicht-symmetrische Kreuzelastizitäten zuließen. Bultez/Naert (1988) setzten bei ihrer in belgischen und holländischen Supermärkten durchgeführten Studie auf ein Attraktivitätsmodell, um entsprechend substitutive und komplementäre Interaktionen nachzuweisen. Der Nachweis dieser Interaktionseffekte ließ anschließend die einfache Regalplatzallokation fraglich erscheinen, da einerseits die Datenerhebung, andererseits auch die Berechnung wesentlich aufwändiger erscheint, weshalb zusätzlich noch eine heuristische Vorgehensweise präsentiert wird. In einer Studie von Drèze et al. (1994) wird neben dem Regalplatz an sich auch die optimale Höhenpositionierung untersucht. Diese Untersuchung brachte auch die Erkenntnis, dass im beobachteten Fall, wegen der geringen Elastizität, die bestehende Regalfläche insgesamt reduziert werden könnte. Chen et al. (1999) versuchen sich in Aussagen über die ideale Reihenfolge der Sortimente.

Albers (1997) entwickelte für die Ressourcenallokation eine heuristische Vorgehensweise, welche durch einfache iterative Berechnungen zu optimaler Aufteilung führt, und somit als besonders anwenderfreundlich gilt. Besonders hervorzuheben ist dabei, dass für die Konvergenz zum Optimum keine Erkenntnisse über die Umsatzreaktions-

² „An Interactive Salesman's **Calling Planning** System“

³ Vgl. Kapitel 2.3

funktion notwendig sind, außer dass deren Verlauf konkav, d.h. mit abnehmenden Grenzerträgen sein sollte.

2.2 Fehlerquellen im Allokationsprozess

In den obigen, aber auch in vielen anderen Artikeln dieses Themenbereiches, werden Verbesserungspotentiale aufgezeigt, wenn die Zuordnung in neuer Aufteilung erfolgt. Dabei blieben die Autoren meist entweder den Beweis der Gewinnsteigerung selbst schuldig, oder die Tatsache, dass der erhöhte Profit auch wirklich auf die Reallokation zurückzuführen ist⁴. Eine der Ursachen dafür ist sicherlich, dass im Verlauf des Optimierungsprozesses Fehler und Ungenauigkeiten unterschiedlicher Art entstehen und es schwer einzuschätzen ist, an welcher Stelle diese entstehen und anschließend darauf aufbauend weitergerechnet wird. Aus diesem Grund seien zunächst einmal in kompakter Form fünf Stufen dargestellt, welche den Prozess der Marketingplanung auf Basis von Reaktionsfunktionen⁵ ausdrücken und in denen aufgrund von Mutmaßungen, Messfehlern, Vereinfachungen etc. Mängel bei der Optimierung entstehen können.

I. Definition der knappen Ressource

Zuerst muss eine variable Einflussgröße ausgesucht werden, welche direkt auf die Umsatzentwicklung wirkt und welche nur in begrenztem Umfang zur Verfügung steht. Die Fehlerwahrscheinlichkeit ist an dieser Stufe noch relativ gering. Zu diesem Zeitpunkt reicht die Erkenntnis aus, in welchen kleinsten Einheiten die knappe Ressource vorliegt und dass eine Umsatzwirkung direkt aus der Veränderung des Instruments ableitbar ist. Dies gilt nicht, wenn die Wirkung in Form von Interaktionen zu anderen Marketinginstrumenten vorliegt (z.B. Umsatzwirkung geht von Werbebudget nur in Verbindung mit anfänglichen Verkaufsförderungsmaßnahmen aus)

II. Modellbestimmung der Absatzfunktion

Hierbei muss zunächst zwischen linearer, konkaver oder S-förmiger Absatzfunktion unterschieden werden. Durch die Betrachtung von alternativen Funktionsgleichungen kann man sich für die Form mit der besten Anpassung entscheiden, sofern dies nicht schon ohnehin aus früheren Untersuchungen bekannt ist. Hat man sich dabei festgelegt, bleiben verschiedene Modelle zur Auswahl, die weitere Annahmen wie

⁴ in Skiera/Albers (1994, S.1277):“Aufgrund der verbesserten Aufteilung ist nun mit einem Umsatz von ... zu rechnen“, in Doyle/Saunders (1990, S. 109):“... it was estimated that the retailer could increase sales and profits“.

⁵ Ablauf in etwa gemäß Gedenk/Skiera (1994)

Sättigungsabsatz, Mindestabsatz, Elastizitätsverlauf etc. ein- bzw. ausschließen⁶. Der Interpretationsspielraum für die subjektive Modellannahme beinhaltet somit die erste größere potentielle Fehlerquelle.

III. Schätzung der Parameter

Die Güte der Schätzung hängt natürlich von der Reinheit der verfügbaren Daten ab. Zur Schätzung sollten ausschließlich Variationen der zu messenden Prädiktoren stattfinden, wobei jeglicher zusätzlicher externer Einfluss minimiert werden sollte. Dies ist aber vielfach nicht gewährleistet. Zusätzlich stellen häufig mangelnde Methodenkenntnisse in der Marktforschung eine weitere Einschränkung in Bezug auf die Richtigkeit der Schätzungsergebnisse dar. Zur Evaluierung der Fehler von den Stufen II und III gibt es jedoch einige Bewertungsmaßstäbe, so dass man auf diese Weise über das Ausmaß des Fehlers in etwa informiert ist. Einige Autoren gestehen wiederum den Managern die Fähigkeit zu, diese Schätzungen auch aus ihrer Erfahrung in subjektiver Form abgeben zu können und entsprechend teure Marktstudien einsparen zu können. Der hierbei zusätzlich wirkende „menschliche Faktor“ beinhaltet natürlich ebenso latente Ungenauigkeiten.

IV. Berechnung der Reallokation

Je nachdem, wie komplex das unterstellte Modell ist, leitet sich die analytische Lösbarkeit für die Problemstellung ab. Ist diese nicht gegeben, oder auch mit Rechnerkapazitäten der heutigen Zeit nur mit enormem Zeitaufwand lösbar, bilden Heuristiken eine beliebte und häufig angewandte Alternative. Sie zeichnen sich durch einfachere aber dafür weniger genaue Lösungen aus, und bilden damit eine weitere Fehlerquelle im Allokationsprozess.

V. Umsetzung des Lösungsvorschlags

Zwar kann man durch die Einarbeitung entsprechender Restriktionen nahezu alle Lösungen durchführbar gestalten, jedoch verlagert dies einerseits das Fehlerpotential wieder in Stufe IV, da die Lösbarkeit entsprechend eingeschränkt ist. Verzichtet man auf zu viele Restriktionen, muss man der implementierenden Person einen Kreativitätsfreiraum eingestehen, um die Lösungsvorschläge überhaupt umsetzbar zu machen. Dadurch ist auch an dieser Stelle eine Einbuße der Optimalität gefordert.

Die Betrachtung dieser fünf Stufen könnte den Manager dazu bewegen, die modellorientierte Optimierung als zu fehleranfällig abzuweisen und weiterhin die eigenen

⁶ siehe hierzu z.B. Hruschka (1996, S. 19 - 32)

Allokationsmethoden, z.B. proportional zu Kennzahlen⁷, anwenden zu wollen. Dabei ist aber gar nicht klar, wie sich die Aufsummierung der Fehler auf die Ergebnisse auswirkt, oder ob die Ergebnisverbesserungen nicht durch die Ungenauigkeiten im Schätz- und Berechnungsprozess wieder verschlungen werden. Im Flat-Maximum-Principle von Tull et al. (1986) zeigt sich zum Beispiel, dass sich auch eher ungenaue optimierte Prädiktoren nicht in dem Maße negativ auf das Ergebnis auswirken, wie es zunächst nahe liegend erscheint.

Die vorliegende Arbeit hat nun zum Ziel, ausschließlich die Auswirkungen von Schätzungenauigkeiten (Stufe III) auf das theoretische Ergebnis (Stufe IV), also auf den Lösungsvorschlag isoliert zu betrachten. Dabei interessiert weder die Umsetzungsfähigkeit der Lösung (Stufe V), noch die Frage nach der Unterstellung des richtigen Modells (Stufe II) oder ob Interaktionswirkungen mit anderen Instrumenten vorliegen (Stufe I). Daher ist die Thematik auch nur als theoretisches Bindeglied im Optimierungsprozess zu betrachten und nicht direkt als Implementierungsvorschlag für die praktische Umsetzung zu verstehen. Die Ergebnisse sollen als eine Art wissenschaftlich basierter Empfehlungskatalog zur Durchführung von Allokationen verstanden werden, welcher für die gegebenen Umstände sowohl Schätz- als auch Allokationsmethoden befürwortet oder ablehnt.

2.3 Flat-Maximum-Principle

Bei der analytischen Ermittlung des Maximums einer Deckungsbeitragsfunktion, ergibt sich bei der Berechnung ein Wert für die Inputvariable(n), über den hinaus der Profit nicht mehr erhöht werden kann. Formell ausgedrückt bedeutet dies, dass die Steigung der Gewinnfunktion an dieser Stelle waagerecht verläuft. In der Regel nicht untersucht wird bei dieser Art der Ermittlung von optimalen Inputs wie Werbe- und Verkaufsförderungsbudgets oder Verkaufsanstrengungen, wie sich die Deckungsbeiträge bei Variation der Inputgröße in einem zu bestimmenden Intervall um diesen Bereich verhalten. Wie v. Winterfeldt und Edwards (1973) haben auch Tull et al. (1986) festgestellt, dass sich die Gewinnsituation in einem bestimmten Bereich um das Optimum nur geringfügig verändert.

In einem Fall mit multiplikativer Funktion und einem Prädiktor stellen die Autoren um Tull fest, dass die Variation des (in ihrem Fall untersuchten) Werbebudgets von bis zu 25 % nahezu keine Auswirkung auf die Gewinnsituation hat (siehe Beispiel in

⁷ vgl. Permut (1977), Patti/ Blasko (1981), Piercy (1987), Lynch/ Hooley (1990)

Abbildung 2-1). Die Steigung der Deckungsbeitragsfunktion verläuft rund um das Optimum also so flach, dass man in diesem Fall sogar von einem Maximumsintervall sprechen kann, was auch mit der Bezeichnung „Flat-Maximum“ ausgedrückt werden soll. Dies gilt für verschiedene untersuchte positive Elastizitäten im Bereich $[0, 1]$. Da in der vorliegenden Arbeit ebenfalls Absatzinstrumente mit positiven Elastizitäten aus diesem Intervall untersucht werden, ist davon auszugehen, dass man auch hier einen ähnlich flachen Verlauf der Gewinnfunktion um das Optimum vorfindet.

Elastizität $\beta_w = 0,15$		Spanne = 0,33
Werbudget als Anteil des optimalen Werbebudgets	Veränderung des Absatzes in Prozent	Veränderung des Gewinns in Prozent
$w = 0,75 w^*$	- 4,2	- 0,6
$w = 0,90 w^*$	- 1,6	- 0,01
$w = 1,10 w^*$	+ 1,4	- 0,1
$w = 1,25 w^*$	+ 3,4	- 0,4

Tabelle 2-1: Variation der Optimalen Budgetgröße nach Tull et al. (1986)

Der Ansatz von Tull et al. stellt heraus, dass die Anpassung der Inputgröße zum absoluten Optimum nicht das primäre Ziel sein sollte, wenn nur mit marginalen Gewinnzuwächsen gerechnet werden kann. Alternativ lassen sich also auch erhebliche Einsparungsmöglichkeiten finden, vorausgesetzt man liegt mit seinen Werbeausgaben bereits im oder kurz über dem Optimum. Angenommen es gelten die in Tabelle 2-1 dargestellten Zahlen und das Management stellt fest, dass die aktuellen Werbeausgaben 25 % über dem Optimum liegen, dann würde eine Verringerung des Budgets um ein Drittel einen Gewinnrückgang von nur 0,2 % auslösen, wobei sich der Absatz um über 7 % reduzierte. Diese freiwerdenden Mittel könnten entweder gespart werden, oder alternativ in andere, eventuell effektvollere Marketinginstrumente investiert werden.

Albers (1997) stellt fest, dass diese Erkenntnis im Wesentlichen zur Abkehr der Optimierung vom absoluten Budget, hin zur verbesserten Aufteilung geführt hat. Auch für den vorliegenden Fall kann man zum Beispiel unterstellen, dass sich das zu verteilende Budget innerhalb dieses Maximum-Intervalls fixiert wurde, und statt dessen die deckungsbeitragsmaximale Verteilung auf die Zuordnungseinheiten zu optimieren ist. Es bleibt aber zu erwähnen, dass jeder dieser Budget-Träger auch wieder einer eigenen Gewinnfunktion unterliegt, auf die ebenfalls die Effekte des Flat-

Maximum-Principles wirken. Dies ist ein wichtiges Argument dafür, dass auch hier ein Toleranzbereich vorliegt, der dafür verantwortlich sein kann, dass hohe Fehlerquoten bei der Modellbildung möglicherweise nicht den negativen Effekt haben, wie man ihnen vorab unterstellen könnte. Sollten z.B. die Parameterschätzer nur so ungenau sein, dass die Zuteilung der knappen Variable bei den Zuordnungseinheiten schon in dieses Optimumsintervall reicht, so kann das mitunter eine gute Argumentation für eine Allokation mit unsicheren oder ungenauen Parameterschätzungen sein. An dieser Stelle ergibt sich auch ein Argument dafür, Allokationen auf Basis nicht-signifikanter Schätzungen (auf Grundlage von wenigen Beobachtungen) auf ihre profiterhöhende Wirkung hin zu untersuchen.

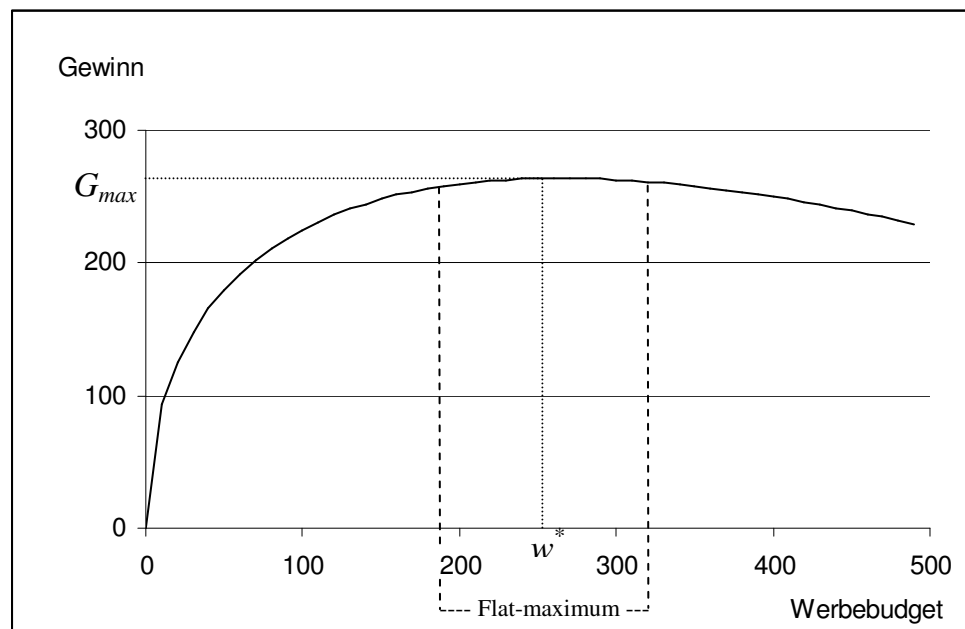


Abbildung 2-1: Flat-Maximum Intervall bei $G(w) = 0,33U(w) - w$ mit $U(w) = 10(3,25 w^{0,5})$

Auf der anderen Seite kann man dem wiederum entgegenhalten, dass die positive Wirkung von Ressourcenallokation wegen dieses flachen Maximums auch verpuffen kann, also eine Variation wenige Auswirkungen auf den Umsatz hat. Da Überlegungen sowohl für die eine als auch für die andere Seite sprechen, soll es unter anderem ein Ziel dieser Arbeit sein, per Simulationsstudie eine diesbezüglich klare Aussage treffen zu können.

2.4 Standardmodell zur Allokation knapper Ressourcen

Das mathematische Problem, welches diesen Modellen zugrunde liegt, geht auf Koopman (1952) zurück und wird in Anlehnung an Albers (1997) wie folgt beschrieben⁸:

$$(1) \quad \max_x \quad G(x_i) = \sum_{i \in I} db_i \cdot S_i(x_i) - cx_i$$

$$(2) \quad \text{mit} \quad \sum_{i \in I} x_i = X \quad \text{und} \quad x_i \geq 0, \quad \forall i \in I$$

Dabei bezeichnet G den Gewinn, x_i die Input- oder Prädiktorvariable zu dem Kostensatz c , db_i den Deckungsbeitragssatz⁹ (auch Marge) und S_i den Umsatz der Zuordnungseinheit i . X ist die Gesamtmenge der knappen Ressource und I stellt die Anzahl der Budget-Träger dar.

Da der Prädiktorvariable unterstellt ist, dass sie bei höherem Input den Umsatz erhöht, kann unabhängig vom Funktionstyp dieses Problem mit Hilfe der Lagrange-Funktion gelöst werden¹⁰.

$$(3) \quad \max_{x_i} \quad \ell = \sum_{i \in I} db_i \cdot S_i(x_i) - cx_i - \lambda \left(\sum_{i \in I} x_i - X \right)$$

Die partiellen Ableitungen nach den Inputgrößen x_i ergeben bei Nullsetzung die entsprechenden Optimalitätsbedingungen

$$(4) \quad \frac{\partial \ell}{\partial x_i} = db_i \frac{\partial S_i}{\partial x_i} - (\lambda + c) \stackrel{!}{=} 0 \quad \text{und somit} \quad db_i \frac{\partial S_i}{\partial x_i} = (\lambda + c).$$

Durch Erweiterung der linken Seite mit den optimalen Prädiktoren x_i^* und Prognosevariablen S_i^* erhält man eine Schreibweise in Abhängigkeit der optimalen Elastizität¹¹ β_i^* von Einheit i und der In- und Outputwerte

$$(5) \quad db_i \frac{\partial S_i}{\partial x_i} \cdot \frac{x_i^*}{S_i^*} \cdot \frac{S_i^*}{x_i^*} = (\lambda + c) \Leftrightarrow db_i \beta_i^* \frac{S_i^*}{x_i^*} = (\lambda + c).$$

⁸ in Albers (1997) wird die Subtraktion der Kosten des Marketinginstruments nicht berücksichtigt

⁹ $db_i = \frac{p_i - k_i}{p_i}$

¹⁰ vgl. Albers (1998) S. 5-9

¹¹ lt. Skiera/Albers (1998, S. 205) Elastizität der Variablen im Optimum

$$(6) \quad x_i^* = \frac{db_i S_i^* \beta_i^*}{(\lambda + c)} \text{ und mit (2) folgt daraus}$$

$$(7) \quad \frac{x_i^*}{X} = \frac{\frac{db_i S_i^* \beta_i^*}{(\lambda + c)}}{\sum_{h \in I} \frac{db_h S_h^* \beta_h^*}{(\lambda + c)}} \Leftrightarrow x_i^* = \frac{db_i S_i^* \beta_i^*}{\sum_{h \in I} db_h S_h^* \beta_h^*} \cdot X.$$

Hierbei handelt es sich dann auch um gleich hohe Grenzdeckungsbeiträge. Wie daraus die Verteilung erfolgt, ist maßgeblich von der unterstellten Absatzfunktion abhängig, welche in oben genannten Modell nicht immer spezifiziert wird. Stellvertretend für die Allokationsproblematik werden mit multiplikativen Umsatzreaktionsfunktionen die genannten Effekte untersucht. Dazu sollte die knappe Ressource der einzige Prädiktor für das Optimierungsmodell sein, und keinerlei Kreuzeffekte unterstellt werden, so dass nur zwei Parameter pro Budget-Träger geschätzt werden müssen. Diesen Anforderungen entspricht das Modell COSTA¹² von Skiera/Albers (1994), wobei hier die Heuristik zur Zuordnung der Außendienstmitarbeiter auf die kleinsten geografischen Einheiten (KGE) vernachlässigt werden soll und nur die Besuchszeitenallokation Berücksichtigung findet.

2.5 Das COSTA Modell

Im COSTA Modell von Skiera/Albers (1994) werden für die Zuordnungseinheiten i multiplikative Funktionen der Form

$$(8) \quad S_i = \alpha_i t_i^{\beta_i}$$

unterstellt, wobei die zu schätzenden Parameter hier die α_i und β_i sind. Diese Funktionsform bildet einen Verlauf ab, der aufgrund der Konkavität abnehmende Grenzumsätze darstellt und bietet die Vorteile der Linearisierbarkeit und der über den gesamten Wertebereich konstanten Elastizität des Marketinginstruments (hier Besuchszeit) t .

Die optimale Aufteilung der Ressource Arbeitszeit bei Skiera/Albers (1994) auf die KGE in einem gegebenen Verkaufsgebiet lässt sich dann analog zu (1) durch folgendes Problem formulieren:

¹² Beim genannten Artikel handelt es sich um die Veröffentlichung in der ZfB von 1994. Eine überarbeitete Version, in der das Modell ebenfalls COSTA hieß erschien vier Jahre später in der Zeitschrift Marketing Science. In diesem legten sich die Autoren nicht auf eine Funktionsform fest.

$$(9) \quad \begin{aligned} \max_{t_i} \quad & S_r = \sum_{i \in \Xi_r} \alpha_{ir} t_{ir}^{\beta_i} \\ & \sum_{i \in \Xi_r} t_{ir} \leq T_r \\ & t_{ir} \geq 0 \end{aligned}$$

mit Ξ_r : enthält alle KGE, die dem Reisenden r zugeordnet sind,
 S_r : Umsatz im r -ten Verkaufsgebiet,
 T_r : gesamte Arbeitszeit des r -ten Reisenden.

Bei Vorliegen gleicher Besuchszeitenelastizitäten in allen KGE ($\beta = \beta_i \forall i$) ergibt sich die optimale Verkaufsanstrengung des r -ten Reisenden im i -ten KGE durch

$$(10) \quad t_{ir}^* = \frac{(\alpha_{ir} \beta)^{\left(\frac{1}{1-\beta}\right)}}{\sum_{h \in \Xi_r} (\alpha_{hr} \beta)^{\left(\frac{1}{1-\beta}\right)}} T_r.$$

Liegen in den KGE unterschiedliche Besuchszeitenelastizitäten β_i vor, dann ergibt sich laut Skiera (1996, S. 326 f) die optimale Verkaufsanstrengung des r -ten Reisenden in der i -ten KGE durch

$$(11) \quad t_{ir}^* = \left(\frac{(\alpha_{ir} \beta_i)^{\left(\frac{1}{1-\beta_r^*}\right)}}{\sum_{h \in \Xi_r} (\alpha_{rh} \beta_h)^{\left(\frac{1}{1-\beta_h}\right)}} T_r \right)^{\left(\frac{1-\beta_r^*}{1-\beta_i}\right)},$$

mit β_r^* als einer Art mittlerer Besuchszeitenelastizität des Gebietes r , die zwischen der kleinsten und der größten Besuchszeitenelastizität aller KGE, die dem Verkaufsgebiet zugeordnet sind, liegt.

2.6 Modellspezifische Änderungen

Da hier die Zuweisung der Außendienstmitarbeiter (ADM) auf die Gebiete nicht relevant ist, sondern ausschließlich die zeitliche Zuordnung der knappen Ressource Arbeitszeit aller ADM gewinnmaximal vorgenommen werden soll¹³, kann die Funktionsform wie folgt vereinfacht werden:

¹³ Dadurch wird die Problemstellung vollständig auf den Modellcharakter einer Reallokation mit knapper Ressource anwendbar. Gleichzeitig repräsentiert die durchgeführte Simulationsstudie alle diese Reallokationsmodelle.

$$(12) \quad S_i = \alpha_i t_i^{\beta_{2i}}.$$

Auf diese Weise liegt nun unabhängig von der Aufteilung der KGE auf die Vertriebsmitarbeiter r pro Gebiet i eine multiplikative Umsatzreaktionsfunktion mit zwei Parametern und einer Prädiktorvariablen vor. Die Reisezeit vom Wohnort zum Kunden ist zwar eine den Gebietsgüteparameter α_i beeinflussende Eigenschaft, sie wird aber in der Simulation ignoriert, da die Gebietszuteilung ja nicht erfolgt¹⁴. Die Reisezeit muss auch als spezifisch für den persönlichen Verkauf gesehen werden und würde in der Allokation für andere Marketing-Mix Modelle nicht in Erscheinung treten. Daher sei unterstellt, dass die Länge der Reisezeit in einer absoluten Größenordnung vom Arbeitgeber pauschal entlohnt wird und dessen Überschreitung zum Privatvergnügen des Reisenden zählt, da ihm bei größeren Distanzen auch freisteht im Hotel vor Ort zu übernachten. Dadurch kann der ADM die Reisezeit so verkürzen, dass ihm kumuliert keine Nachteile durch weiter entfernte Bezirke entstehen. Die Pauschalentschädigung wiederum wirkt sich aufgrund ihrer additiven Eigenschaft nicht auf die Optimierung aus und kann daher auch entfallen. Somit seien die per Reallokation ermittelten optimalen Besuchszeiten für alle KGE i :

$$(13) \quad t_i^* = \left(\frac{(\alpha_i \beta_{2i})^{\left(\frac{1}{1-\beta^*}\right)}}{\sum_{h \in I} (\alpha_h \beta_{2h})^{\left(\frac{1}{1-\beta_{2h}}\right)}} T \right)^{\left(\frac{1-\beta^*}{1-\beta_{2i}}\right)}$$

bzw. bei identischen Elastizitäten

$$(14) \quad t_i^* = \frac{(\alpha_i \beta_2)^{\left(\frac{1}{1-\beta_2}\right)}}{\sum_{h \in I} (\alpha_h \beta_2)^{\left(\frac{1}{1-\beta_2}\right)}} T$$

mit t_i^* : Besuchszeit in der KGE i

T : Gesamtzeit aller ADM (knappe Ressource)

α_i : Gebietsgüteparameter der Einheit i

β_{2i} : Besuchszeitelastizität von i

Die Unterscheidung von Umsatz- und Gewinnmaximierung macht in diesem Fall nur bedingt Sinn, da der Deckungsbeitragssatz db_i , sofern nicht sogar einheitlich in allen Zuordnungseinheiten i , als Bestandteil des Gebietsgüteparameters α_i bereits integriert

¹⁴ In ihrer Simulationsstudie vernachlässigen auch Albers/Skiera (2002, S. 19) die Reisezeiten.

ist, vorausgesetzt man betrachtet den Gewinn statt dem Umsatz als abhängige Variable wie (15) zeigt.

$$\begin{aligned}
 G_i &= db_i S_i = \tilde{\alpha}_i t_{ij}^{\beta_{2i}} \\
 (15) \quad \Rightarrow S_i &= \frac{\tilde{\alpha}_i}{db_i} t_{ij}^{\beta_{2i}}, \text{ mit } \alpha_i = \frac{\tilde{\alpha}_i}{db_i} \\
 &\Rightarrow S_i = \alpha_i t_{ij}^{\beta_{2i}}
 \end{aligned}$$

2.7 Problematik

Der Siegeszug der Informationstechnologie hat durch die weltweite Vernetzung von Datensystemen nicht nur den Globalisierungsprozess ermöglicht, sondern auch dafür gesorgt, dass heutzutage eine erheblich schnellere Aneignung und Verarbeitung von größeren Mengen an Informationen möglich ist. Unbestritten hat dies vor allem die industrialisierte Welt wesentlich schnellleibiger gemacht, was als Folge dessen nun wiederum auch die Marketingabteilungen zu immer kurzfristigeren Aktivitäten und schnelleren Konkurrenzreaktionen zwingt.

Für die Erhebung und Verarbeitung von verwertbaren Marktforschungsdaten sind diese kürzen Zyklen durchaus nicht unproblematisch, da häufige Änderungen im Einkaufsverhalten von Konsumenten starke Verzerrungen für die erhobenen Daten nach sich ziehen. Beispielweise für Daten aus dem Geschäft mit Weihnachtsartikeln kann man nur einmal im Jahr Erfahrungswerte sammeln. Gleiches gilt wenn man saisonal schwankende Absatzentwicklungen hat und als Vergleichszeitraum sich immer nur derjenige des Vorjahres anbietet. Nach einem Jahr können aber aus vielerlei Gründen schon wieder andere Rahmenbedingungen vorliegen, weshalb die Vergleichszahlen möglicherweise weitere Fehler beinhalten. Sollte sich herausstellen, dass auch mit wenigen Beobachtungen gute Allokationen erzielt werden können, so erhöht dies die Rechtfertigung für die optimierte Zuordnung, auch vor dem Hintergrund der nur kurzfristig verwendbaren Zahlen. Es ergeben sich aber auch neue Argumente unter dem Aspekt der Erhebungskosten, falls mit Querschnittdaten gearbeitet wird.

2.7.1 Auswirkungen ungenauer Schätzwerte

Bei identischen Elastizitäten β_2 der Zuordnungseinheiten ergibt sich eine optimale Verteilung der knappen Ressource t gemäß Skiera/Albers (1994, S.1270) von

$$(16) \quad t_i^* = \frac{(\alpha_i \beta_2)^{\left(\frac{1}{1-\beta_2}\right)}}{\sum_{h \in I} (\alpha_h \beta_2)^{\left(\frac{1}{1-\beta_2}\right)}} T.$$

Ausgehend von der Gewinnfunktion (1) gelangt man auch auf anderem Weg¹⁵ über

$$(17) \quad \frac{\partial G_i}{\partial x_i} = \alpha_i \cdot \beta_2 \cdot t_i^{\beta_2-1} - 1 \stackrel{!}{=} 0 \quad \text{zu} \quad t_i^* = (\alpha_i \cdot \beta_2)^{\left(\frac{1}{1-\beta_2}\right)}.$$

Also gilt durch Erweiterung mit β

$$(18) \quad S_i^* \cdot \beta_2 = \alpha_i \left((\alpha_i \cdot \beta_2)^{\left(\frac{1}{1-\beta_2}\right)} \right)^{\beta_2} \cdot \beta_2 \Leftrightarrow S_i^* \cdot \beta_2 = \alpha_i^{\left(1+\frac{\beta_2}{1-\beta_2}\right)} \cdot \beta_2^{\left(1+\frac{\beta_2}{1-\beta_2}\right)},$$

daraus folgt

$$(19) \quad \beta_2 \cdot S_i^* = (\alpha_i \cdot \beta_2)^{\left(\frac{1}{1-\beta_2}\right)}$$

und damit ergibt sich die Optimalitätsbedingung (16) in anderer Darstellung als

$$(20) \quad t_i^* = \frac{\beta_2 \cdot S_i^*}{\sum_{h \in I} \beta_2 \cdot S_h^*} T.$$

Hier ist zu erkennen, dass die Heuristik der Allokationsregel „Deckungsbeitrag \times Elastizität“ bzw. hier aufgrund identischer Gewinnspannen „Umsatz \times Elastizität“ folgt. Im Fall von nicht identischen Elastizitäten β_i der KGE i werden den bezüglich der Einflussgröße elastischeren Zuordnungseinheiten höhere Anteile des zu verteilenden Budgets zugeteilt. Überschätzte Einheiten erhalten somit zuviel, unterschätzte entsprechend zuwenig Anteile der knappen Ressource¹⁶.

Wegen der Betrachtung möglicherweise unzureichender Datenerhebungen muss ebenfalls die Möglichkeit in Betracht gezogen werden, dass die Schätzungen negative Elastizitäten ausweisen. Dies bedeutete dann eine Abnahme des Umsatzes bei verstärktem Input des Marketinginstruments und wäre infolge dessen nicht nur unrealistisch, sondern würde auch den Definitionsbereich von t überschreiten. Da auch

¹⁵ Diese sei auf die Allokation eines Geldbudgets ausgerichtet, so dass in der Gewinnfunktion die Multiplikation mit dem Stundensatz aus Übersichtlichkeitsgründen entfallen kann. Auf das Allokationsergebnis wirkt sich das nicht aus.

¹⁶ An dieser Stelle soll der Gedanke aufgegriffen werden, ob hier die Annahme homogener Elastizitäten dieser Über-/ Unterbewertung entgegenwirken kann, so dass die Zuteilung der knappen Ressource nur anteilig zur Konstanten α_i erfolgt. Eine Analyse erfolgt in Kapitel 5.2 ab S. 88

Berechnungen auf Basis von nur zwei Beobachtungen in Betracht gezogen werden sollen, kann dieses Merkmal aufgrund von Reststreuungen durchaus vorkommen. Die Wahrscheinlichkeit eines Auftretens dieser Problematik, kann bereits bei Einbeziehung eines dritten Beobachtungswertes stark dezimiert werden (vgl. Abbildung 2-2). Entsprechend umfangreichere Datenbasen erhöhen die Genauigkeit einer Schätzung und führen zu vergleichbar besseren Resultaten.

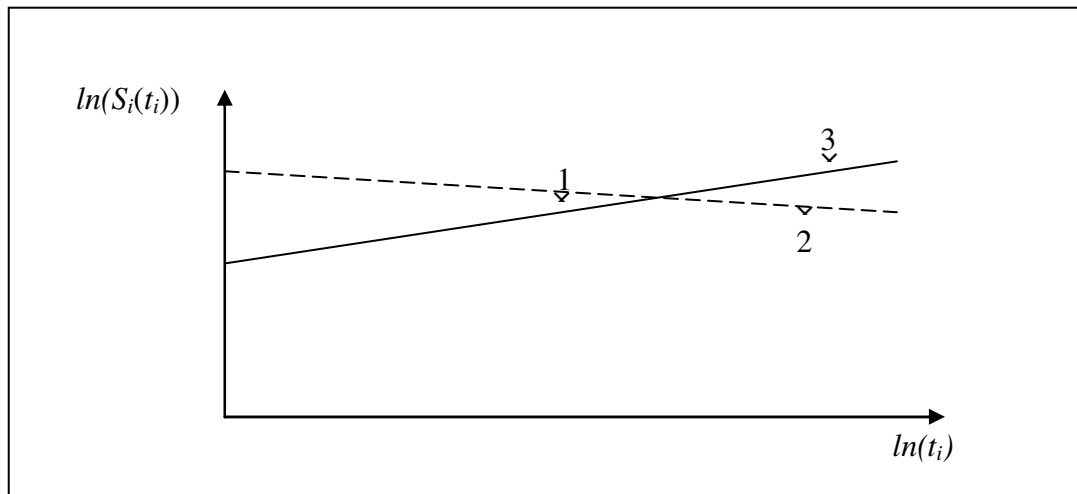


Abbildung 2-2: Verlauf einer Regressionsgeraden bei zwei und bei drei Beobachtungen

Unter Beachtung des oben genannten Flat-Maximum-Principle bleibt aber wie erwähnt offen, ob sich die Schätzfehler wirklich so gravierend auf die gesamte Umsatzsituation auswirken, denn die kumulierte Input-Menge über alle Zuordnungseinheiten ändert sich ja bekanntlich nicht.

2.7.2 Subjektive oder empirische Schätzung der Parameter

Zum Thema der subjektiven Schätzung von Parametern erfolgten in der Vergangenheit zahlreiche Diskussionen, in denen die Modellierung und deren Güte besprochen wurden. Es ist hier nicht beabsichtigt, diese Diskussionen weiter zu führen oder mit neuen Argumenten für oder gegen eine subjektive Schätzung zu ergänzen. Dafür sei verwiesen auf Chakravati et al. (1979 und 1983) sowie Naert/Weverbergh (1981) und Lodish et al. (1988). Es soll nur ein kurzer Überblick über die Unterschiede dieser Schätzmethoden mit seinen jeweiligen Problemen gegeben werden.

Dabei sei zunächst einmal festgestellt, dass es sich bereits bei der jeweils unterstellten funktionalen Modellform bereits um eine subjektive Klassifikation handelt, die den S-förmigen, konkaven, konvexen oder linearen Verlauf der Umsatzreaktionsfunktion so

abbildet, wie der Anwender dies persönlich einschätzt (Naert/Weverbergh 1982, S. 99 ff). Da es sich im vorliegenden Fall um ein multiplikatives Modell handelt, wird folglich ein konkaver Verlauf unterstellt¹⁷. Also ist unabhängig von der Schätzmethode eine anteilige Subjektivität gegeben, wenngleich sie auch in diesem Fall weniger vom Anwender als mehr vom Urheber des Algorithmus stammt.

Skiera (1997b, S. 64) führt als Argumentation gegen die Bestimmung der Parameter auf Datenbasis an, dass Verkaufsaußendienstmitarbeiter keine Statistiker seien, und es somit für sie nicht zumutbar ist, Regressionsschätzungen durchzuführen. Auch die bisweilen im Unternehmen nicht vorhandene Datenbasis gilt als Begründung gegen eine Schätzung auf dessen Grundlage. Dabei bleibt offen, wie umfangreich dieses Zahlenmaterial sein müsste, um es als ausreichend zu deklarieren. Weiter beinhaltet das Modell pro Zuordnungseinheit nur zwei zu bestimmende Parameter bei nur einer Prädiktorvariablen. Um diese zwei Unbekannten zu errechnen, sind daher wenigstens zwei Gleichungen notwendig. Dazu soll zunächst geklärt werden, welche beiden dies sein sollen.

Neben der aktuellen Situation, in der man Inputvariable und Umsatz kennt, benötigt man noch ein zweites Wertepaar. Nach Krafft (1995, S. 238 f) wird dieses von einem Manager oder einem Experten durch den zu erwartenden Umsatz bei 10 %iger Erhöhung, bzw. Senkung der Besuchszeit¹⁸ bestimmt. Geht man vom gegebenen aktuellen Umsatzwert $S(t_1)$ mit dem entsprechenden Prädiktor t_1 aus und gibt eine Einschätzung darüber ab, wie sich der Umsatz bei entsprechend höherem (bzw. niedrigerem) Input der Variable t_2 mit zum Beispiel $t_2 = 1,1 \times t_1$ (bzw. $t_2 = 0,9 \times t_1$) entwickeln würde, so ergeben sich jene beiden Gleichungen $S(t_1)$ und $S(t_2)$ aus denen die Skalierungsparameter und die Besuchszeitenelastizität errechnet werden. Der Experte, welcher die Annahme über $S(t_2)$ aufgrund seiner Kenntnis treffen soll, kann sein Vorwissen nutzen, um eventuell extreme Ausprägungen der Störgrößen¹⁹ ε welche die Berechnung beeinflussen, bereits im Vorfeld auszuklammern. An dieser, für den Manager stark vereinfachten Methode, muss kritisiert werden, dass derjenige, welcher eine solche Abschätzung abgibt, möglicherweise gar nicht in der Lage ist, mit dem Instrument der Elastizität richtig zu hantieren, was gerade bei der Unterscheidung zwischen konstanten und variablen Elastizitäten durchaus wichtig ist.

¹⁷ Dies gilt für den Fall von Marketinginstrumenten mit positiven Vorzeichen in der Umsatzreaktionsfunktion, also nicht für das Instrument Preis.

¹⁸ Hierzu sind die entsprechend involvierten Mitarbeiter, wenn auch mit hohem zeitlichen Aufwand lt. Lodish (1971) sowie Albers/Skiera (2002) durchaus in der Lage

¹⁹ vgl. Kapitel 4.3.2, S. 48

Unterstellt man nun unabhängig davon, dass der Umsatz $S(t_2)$ genau zu bestimmen ist, so bleibt nach wie vor das Problem, dass der andere Umsatzwert $S(t_1)$ immer noch den Fehlerwert ε enthält, da es sich ja bei $S(t_1)$ um den aktuellen Umsatz handelt. So ist es möglich, dass ein Verkaufsmitarbeiter trotz verminderter Verkaufsanstrengung in einer Periode durch selbst nicht zu verantwortende Umstände einen erhöhten Umsatz in einer KGE verzeichnen konnte²⁰. Unter diesen Gegebenheiten, kann man trotz realistischer Einschätzung von $S(t_2)$ zu dem Ergebnis kommen, dass mit erhöhten Verkaufsanstrengungen in Zukunft weniger Umsatz erreicht wird²¹. In diesem Fall wäre eine negative Besuchszeitenelastizität das Ergebnis, welche ökonomisch nicht plausibel erscheint und auch gar nicht im Definitionsbereich liegt. Hiergegen kann man anführen, stattdessen den Durchschnitt der letzten Perioden zu betrachten, wobei man dann jedoch wieder eine wachsende Datenbasis benötigt, wodurch die Vorteile der subjektiven Bestimmung verzehrt würden. Alternativ könnte der schätzende Manager auch beide Werte $S(t_1)$ und $S(t_2)$ aufgrund seiner persönlichen Betrachtung ansetzen, nur fehlt dann wiederum eine solide Basis zur Berechnung des Gebietsgüteparameters α , auch wenn er die Besuchszeitenelastizität sogar richtig voraussagt.

Neben Lodish (1971) und Albers/Skiera (2002) stellen auch Krafft (1995) und Beswick (1973) fest, dass sich die Verkaufs- und Vertriebsleiter zur subjektiven Abschätzung der Umsatzwerte $S(t_2)$ oder auch der Elastizität der Besuchszeit durchaus befähigt sehen. In LaForge, Cravens (1985) und Lodish et al. (1988) wird die Thematik von Methoden zur Voraussage von Umsatzwerten weiter spezifiziert. Ihnen ist gemeinsam, dass diese Voraussagen nicht durch kurze Überlegung getroffen werden können, sondern dass es für hochrangige und dementsprechend bezahlte Verkaufsmanager einen langen und intensiven Prozess darstellt, diese Größen zu ermitteln²². Entsprechend hoch sind die Kosten für die Bestimmung der Parameter, vor allem da man die Zielgrößen für jede Zuordnungseinheit einzeln bestimmen muss.

Eine solche Vorgehensweise wäre für den Planungszeitraum jedoch aufgrund des hohen Aufwands und den damit verbundenen Kosten nur einmalig oder ausnahmsweise noch einmal in korrigierter Form sinnvoll, keinesfalls aber nach jeder Periode erneut, weshalb eigentlich nur ein Modell mit konstanten Elastizitäten die subjektive Bestimmung von Parametern in kostensparender Hinsicht unterstützt.

²⁰ Dies ist zum Beispiel möglich, wenn (Teile der) Besuchsbemühungen die zum Abschluss eines größeren Auftrages geführt haben in eine andere Perioden gefallen sind als der Abschluss selbst.

²¹ Diese Problemstellung ist nicht als spezifisch für den persönlichen Verkauf zu sehen, auch bei der Regalplatzallokation können z.B. Komplementäreffekte auftreten, welche die Schätzungen in einzelnen Fällen bei zu geringer Beobachtungszahl verzerren.

²² Vgl. DELPHI-Methode in (Lodish et al. 1988, S. 5ff)

Elastizität von Verkaufsanstrengungen	Medikament							EW	Std
	Naprosyn	Anaprox	Norinyl 35	Norinyl 50	Synalar	Lydex	Nasalide		
ohne Sättigung	0,6168	0,9163	0,6018	0,4055	0,3275	0,3421	0,8727	0,5832	0,2420
Sättigung bei 200%	0,5288	0,6569	0,4391	0,2809	0,2642	0,2408	0,7115	0,4460	0,1933
Sättigung bei 300%	0,2896	0,3383	0,2276	0,1428	0,1419	0,1231	0,3835	0,2353	0,1045
Sättigung bei 400%	0,1885	0,2134	0,1441	0,0894	0,0915	0,0774	0,2476	0,1503	0,0676

Tabelle 2-2: Eigene Darstellung der Elastizitäten bei unterschiedlichen Verkaufsanstrengungen zur Erreichung des Sättigungsumsatzes aus Lodish et al. (1988)

In Lodish et al. (1988) erfolgt eine solche subjektive Bestimmung indem die erwarteten Absatzwerte bei 50 %, 100 % und 150 % der aktuellen Verkaufsanstrengung seitens der Verkaufsmanager prognostiziert werden. Unterstellt man dem Umsatzreaktionsmodell einen multiplikativen Verlauf, so ergibt sich aus der Studie eine mittlere (konstante) Elastizität der Produkte von $\mu_{\beta_2} = 0,58$ mit einer Standardabweichung von $\sigma_{\beta_2} = 0,24$. Außer der drei obigen Prognosen waren die Manager auch aufgefordert den Sättigungsumsatz anzugeben. Bezieht man diesen ebenfalls approximativ mit in die Berechnung der Elastizität mit ein, wird die Berechnung der Elastizität problematisch in der Hinsicht, mit wie viel Prozent der Verkaufsanstrengungen man diese Sättigungsgrenze erreicht. Tabelle 2-2 zeigt auf, wie sich die Elastizität verändert, wenn der maximale Umsatz annahmegemäß durch das doppelte, drei- oder vierfache des aktuellen Inputs erreicht wird²³. Hier wird eine weitere Schwäche der subjektiven Schätzung deutlich, zumal die Kalkulationen ohne Berücksichtigung der Sättigungsmenge zu ungenau und teilweise auch unrealistisch²⁴ sind. Werden die Umsatzpotentiale in die Berechnung zur Elastizität miteinbezogen, so bleibt offen, mit welchem Einsatz diese erreicht werden, obwohl dieser Wert ganz maßgeblich zu der Bestimmung der Elastizität beiträgt. Alternativ kann man als Umsatzreaktion eine modifizierte Exponentialfunktion (Hruschka 1996, S. 23) unterstellen. Dann stellt sich das Problem mit dem Sättigungsumsatz zwar nicht, jedoch muss man auf die konstante Elastizität verzichten, weshalb die Regel nach Albers (1997) wiederum entweder erst verzögert dem Optimum entgegenstrebt, oder aufgrund häufig zu wiederholender Schätzungen in Bezug auf die entstehenden Kosten fragwürdig ist.

Es bleibt schließlich noch zu erwähnen, dass man durch subjektive Schätzungen der Problematik von gestutzten Schätzverteilungen²⁵ entgehen kann. Bei, wie im vorliegenden Fall, positiven Grenzümsätzen im Falle gesteigerten Inputs, wird der

²³ Zahlen stammen aus eigener Berechnung; Unterstellt sei eine multiplikative Funktion

²⁴ Nach der Studie hätte das Produkt Anaprox eine sales-effort-Elastizität von 0,92. Das bedeutet, die zweifache Anzahl an Anrufen resultierte in einem nahezu verdoppelten Umsatz.

²⁵ vgl. Kapitel 4.5 S. 67

subjektiv Schätzende auch immer positive Elastizitäten prognostizieren, was im Fall von empirischer Schätzung nur durch einseitig gestutzte Verteilungen gewährleistet ist. Es bietet sich daher an, dieser doch eher komplexen Berechnung durch eine Bewertung nach persönlicher Einschätzung zu entgehen. Dafür spricht auch, dass keine Artikel über Allokationsprobleme gefunden wurden, in denen die Thematik der Stutzung aufgegriffen wurde.

Da nicht die subjektive, sondern die empirische Bestimmung beider Parameter der Umsatzreaktionsfunktion hier thematisch vertieft wird, soll dieser Überblick zur subjektiven Bestimmung ausreichen. Im Zusammenhang mit priori-Annahmen bei hierarchisch Bayesscher Regression und für die Definition der Parameter bei Annahme vollständig homogener Elastizitäten²⁶ fällt der subjektiven Schätzung jedoch eine Schlüsselrolle zu, wo diese Schätzmethode eventuell effektiver eingesetzt werden kann. In der Simulationsstudie von Kapitel 4 wird die Methodik der subjektiven Klassifikation von Parametern jedoch nur ergänzend als Alternative zur Berechnung auf Basis zweier empirischer Werte betrachtet.

Wenn man sich als Schätzbasis ausschließlich an den vorliegenden Daten orientiert, läuft man unter Umständen Gefahr, dass zu viele Fremdeinflüsse eine realistische Wiedergabe der unterstellten Absatzfunktion nahezu unmöglich erscheinen lassen. Auch fehlt der „gesunde Menschenverstand“, welcher manche Daten einfach wegen Absurdität in der dargebotenen Form nicht mit einbeziehen würde. Des Weiteren gestaltet sich die Verarbeitung von langfristigen Erfahrungswerten als ebenso schwierig wie die Einbeziehung von zukünftigen Erwartungen und das Ausklammern starker externer Effekte. Möglicherweise bestünde ja der Vorteil durch wiederholte Aktualisierung der Datenbasis nach jeder Periode zu einem kumulativ verbesserten Wert zu konvergieren, trotzdem können zu wenige Beobachtungswerte unter Umständen zu einer völlig falschen Einschätzung der wahren Parameter führen und beinhalten auch die Problematik der negativen, und damit unrealistischen Elastizitätswerte (siehe Steigung der gestrichelten Linie in Abbildung 2-2). Dies hätte dann zur Folge, dass ein solches Segment ein negatives, bzw. bei eingegrenztem Wertebereich, einen nicht berechtigt kleinen Anteil an der knappen Ressource für die nächste Periode zugewiesen bekommt und bis zur Konvergenz zunächst schlechtere Lösungen besucht werden müssen.

Bedingt durch die Reststreuung der abhängigen Variablen kann auch die Heuristik aus Albers (1997) nicht derart angewendet werden, dass die Bestimmung der Elastizität

²⁶ siehe Kapitel 5.2

entsprechend (21) auf Basis der jeweils letzten beiden Umsätze errechnet wird. In diesem Fall konvergiert die Lösung nämlich nicht²⁷.

$$(21) \quad \beta_i = \frac{\ln\left(\frac{\text{Umsatz in } i\text{-ter KGE in Periode } u}{\text{Umsatz in } i\text{-ter KGE in Periode } u-1}\right)}{\ln\left(\frac{\text{Input in Periode } u}{\text{Input in Periode } u-1}\right)}$$

Abschließend haben also sowohl die subjektive als auch die empirische Schätzung durchaus Schwächen. Die Vorteile der einen sind die Nachteile der anderen Methode. Somit bietet sich eine Kombination beider Verfahren an, um die gegenseitigen Nachteile aufwiegen zu können. Chakravarti et al. (1981) aber auch Naert/Weverbergh (1981) schlagen für diesen Fall Bayessche Schätzverfahren vor, wobei die subjektiven Schätzungen als priori-Informationen mit den empirischen Werten in Form der Likelihood verschmelzen.

2.8 Schätzung der Parameter auf Basis weniger Beobachtungen

Ein Ziel dieser Arbeit ist die Klärung der Suboptimalität von Allokationsentscheidungen auf Basis weniger Beobachtungen. Das Flat-Maximum-Principle lässt die Vermutung zu, dass die Parameterschätzungen für Allokationen unter Umständen größere Schätzfehler verzeihen. Neben Kostenaspekten spricht auch die zeitliche Dynamik dafür, die Anzahl der Beobachtungen so gering wie nötig zu halten. Ein unbedingt zu beseitigendes Problem ist das Auftreten negativer Schätzwerte für die elastische Reaktion auf das Marketinginstrument. Dies kann relativ einfach durch eine Stützung an der Stelle 0 geschehen, jedoch eignet sich ein sehr geringer positiver Wert wie z.B. 0,02 besser um sicherzustellen, dass das Instrument auf jeden Fall eine Wirkung auf den Umsatz ausübt. Ein Stützung bei 0 würde dann auch zu keiner Zuweisung des knappen Guts bei der Allokation im Falle eines negativen Schätzwertes führen.

Gerade bei der Betrachtung von Daten mit wenigen Beobachtungen, zeigt die gängige Kleinst-Quadrat-Methode bei zu wenigen Freiheitsgraden Schwächen, da außer der

²⁷ Unter Einbeziehung der Ergebnisse von Skiera/Albers (1998) stellt sich ohnehin die Frage, warum man die Iterationsschritte jeweils einzeln nach einer abgelaufenen Periode durchführen soll und nicht unmittelbar nach der erfolgten subjektiven Schätzung. Da keinerlei Daten der Folgeperioden mehr aufgenommen werden, können alle Iterationsschritte auch sofort durchgeführt werden, so wie es später in Skiera/Albers (1998) auch vorgeschlagen wird.

Stützung keine die Schätzung stabilisierenden Maßnahmen getroffen werden können. An dieser Stelle soll ein weiterer Vorteil, welcher sich aus der Allokation gegenüber anderer Optimierungsverfahren ergibt, für Schätzungen genutzt werden. Es soll die Tatsache beachtet werden, dass es sich bei den Zuordnungseinheiten um eine relativ homogene Struktur mit identischen Umsatzreaktionsmodellen handelt, wenngleich auch dessen Parameter sehr heterogen sein können. Das Schätzverfahren der hierarchisch Bayesschen Regression kann diese Strukturen beim Schätzprozess stabilisierend mit berücksichtigen, indem für die Bestimmung der Parameter die Daten der benachbarten Einheiten durch übergeordnete Informationen ausgeborgt werden. Im Gegensatz zum Vorschlag von Naert/Weverbergh (1981) stammen die priori-Informationen somit nicht aus subjektiven Schätzungen, sondern stellen eine Art Gesamtschätzung über alle Zuordnungseinheiten dar.

Eine Alternative, welche schon kurz benannt, aber nicht näher beschrieben wurde ist in (14) in Form einer homogenen Elastizität dargestellt. Unabhängig davon, ob sich die Homogenität aus Erfahrungswerten ergibt oder ob man sie aus Vereinfachungsgründen annimmt, gilt es in diesem Fall, nur etwa die Hälfte der Parameter zu schätzen, da die Elastizität nur einmal für alle Zuordnungseinheiten zu bestimmen ist. Die Zuteilung der knappen Ressource erfolgt dann anteilig zum optimalen Umsatz (siehe (20)). Ist diese homogen elastische Reaktion auf das Marketinginstrument empirisch gesichert, so ist dieses Modell klar die vernünftigste Alternative. Es ist differenziert zu betrachten, ob die homogene Struktur nur mangels Erkenntnis unterstellt wird, oder ob diese Annahme trotz besseren Wissens letztendlich nur als Vereinfachung erfolgt. Mit Argumentation des flachen Maximums ist dies als These insofern unterstützungswürdig, als dass die per Vereinfachung ausgelösten Ungenauigkeiten nicht zwingend so groß sein müssen, als dass daraus suboptimale Lösungen resultieren. Daher soll auch für diesen Fall in der Simulationsstudie ein Suboptimalitätsmaß berechnet werden.

2.9 Thesen

2.9.1 These H_{01} : Die Beobachtungszahl beeinflusst die Ergebnisse einer Reallokation mit knapper Ressource.

Kurz zusammengefasst gilt es, eine Größenordnung des Fehlereffektes der Stufe III auf Stufe IV an im Optimalisierungsprozess aus Kapitel 2.2 (S. 7 f) zu analysieren. Dabei spricht die Argumentation vor dem Hintergrund der Genauigkeit klar für die

Basis von vielen Beobachtungswerten, der Kosten- und Zeitaufwand wiederum wirkt dieser entgegen. Die Allokation von knappen Ressourcen stellt insofern einen Sonderfall bei der Optimierung dar, als dass das komplette Budget ausgeschüttet wird. Die Zuteilungsmenge des knappen Marketinginstruments, welche aufgrund falscher Schätzung von Parametern einer Zuordnungseinheit fehlt, kommt in einer oder mehreren anderen Segmenten trotzdem, in einer den Umsatz steigernden Form, zum Einsatz. Da schlussendlich nur das kumulierte Ergebnis bewertet wird, deutet sich hier ein hohes Potential an Schätzfehlertoleranz an, schränkt aber auch gleichzeitig das Gewinnpotential ein.

2.9.2 These H_{02} : Aus der Optimierung mit wenigen Beobachtungen resultieren höhere Ergebnisse als aus zufällig erzeugten Allokationen.

Laut Albers (1989, S. 89/90) sind Praktiker der Meinung, dass man die Besuchszeiten nicht planen könne, sondern dass diese sich ausschließlich aus der Situation heraus entwickelten und deshalb in Form von Zufallsvariablen vorliegen. Übertragen auf andere Problemstellungen von Ressourcenallokation können sich auch dort zufällige Zuteilungsmengen von Budget ergeben. Wenn man Albers' entgegen gesetzte Einschätzung hierzu teilt und ebenso die Notwendigkeit einer Planung und Vorgabe von Besuchszeiten sieht, dürfen diese in optimierter Aufteilung aber nicht zu schlechteren Ergebnissen, also niedrigeren Umsätzen führen als vorher. Die Frage ist daher, ob ungenaue Schätzwerte aufgrund geringer Beobachtungszahlen die optimierten Werte so zu verzerren vermögen, dass diese nicht einmal den zufällig gewählten Besuchszeiten in Bezug auf den erreichten Umsatz überlegen sind. Wie in 2.9.1 angedeutet, besteht die Möglichkeit bei optimierter Aufteilung von knappen Ressourcen sowohl Schätzfehler aber auch Gewinnpotential zu absorbieren. Es soll also herausgefunden werden, welcher der beiden Effekte überwiegt, bzw. unter welchen Bedingungen der Gewinn durch Reallokation sicher überwiegt. Die Stützung der zulässigen Schätzer für die Elastizitätswerte wirkt an dieser Stelle asymmetrisch für die Gewinnsteigerung.

2.9.3 These H_{03} : Mit einem Bayesschen Schätzverfahren sind die erreichten Ergebnisse der Reallokation besser als mit OLS bei identischer Beobachtungszahl.

Da die subjektiven Klassifikationen ebenso wie branchenübliche Kennzahlen nicht in der Kleinstquadrat-Schätzmethode berücksichtigt werden können empfehlen Naert/Weverbergh (1981) einen Bayesschen Ansatz. Ist aus früheren oder anderen Unter-

suchungen bekannt wie die Elastizität der Einflussvariablen üblicherweise verteilt ist, kann dies ebenso mit in ein Schätzmodell integriert werden, wie eine persönliche Einschätzung einzelner Parameter. Auch Begrenzungen des Wertebereichs lassen sich bei entsprechender Parametrisierung der priori-Informationen vorab bestimmen. Und selbst wenn keinerlei vorab-Informationen diesbezüglich vorliegen oder berücksichtigt werden sollen, vermag eine hierarchisch Bayessche Regression immerhin noch die empirischen Daten der übrigen Zuordnungseinheiten für jede Schätzung zu verwerten. Dies nährt die Hoffnung, bereits mit wenigen Beobachtungswerten gegenüber der OLS verbesserte Schätzwerte zu erhalten, aus denen dann folglich auch höhere Umsätze durch exaktere Allokationen resultieren.

Die Entwicklung des zugehörigen Modells, sowie dessen Berechnung erzeugen allerdings einen höheren Aufwand. Nicht zu unterschätzen ist auch die Komplexität dieser Methode, welche für Unternehmen mit geringen Statistikkenntnissen zwar eher ein Ausschlusskriterium für den Bayes-Ansatz darstellt, andererseits können derlei Kenntnisse extern erworben werden. Die Untersuchung soll deshalb auch herausstellen, ob sich dieser erhöhte Aufwand überhaupt lohnt.

2.9.4 These H₀₄: Die Bestimmung der Parameter auf Basis eines beobachteten und eines subjektiv bestimmten Umsatzwertes ist der Schätzung auf Basis zweier Beobachtungswerte überlegen.

Ergänzend zu den analytischen soll die subjektive Schätzmethodik bei den Berechnungen mit berücksichtigt werden. Subjektive Bestimmungen erweisen sich wissenschaftlich als grundsätzlich schwierig in der Handhabung, da natürlich die Güte der Umsatzprognose einzig und allein von der Person abhängt, die sie abgibt. Wie in Kapitel 2.7.2 bereits erörtert soll diese Auseinandersetzung hier keinen neuen Nährboden erhalten. Die Miteinbeziehung subjektiver Parameterbestimmungen soll vielmehr nur eine grob abschätzbare Ahnung vermitteln, wo in etwa man eine Optimierung anhand subjektiver Spezifizierungen von Umsatzprognosen einordnen kann, da neben ungenauer Schätzungen seitens der Manager noch andere Fehlerquellen bei der Zuverlässigkeit der für die Allokation zu bestimmenden Parametern, lauern.

Ausgangslage seien beim Problem der Besuchszeitenbestimmung die aktuellen Umsätze und Besuchszeiten pro kleinster geografischer Einheit i , also t_{1i} und S_{1i} . Es wird nun unterstellt, dass der Vertriebsmanager eine Umsatzprognose für den Fall der 10 %igen Erhöhung der aktuellen Besuchszeit (also für $S_{2i}(t_{2i})$ mit $t_{2i} = 1,1 \times t_{1i}$) exakt angeben kann. Die Unterstellung einer Fehlerwahrscheinlichkeit von 0 muss natürlich

als unrealistisch angesehen werden, aber hier soll von einer bestmöglichen Einschätzung ausgegangen werden, um das Fehlerpotential allein der niedrigen Beobachtungshäufigkeit zuzuweisen. Zu beachten bleibt aber, dass der Schätzende keine Prognose über die Elastizität, sondern ausschließlich eine Spekulation über den zu erwartenden Umsatz S_i der Zuordnungseinheit i bei einer ihm vorgegebenen Inputgröße t_i abgibt. Die Berechnung des Gebietsgüteparameters α_i und der Elastizität β_{2i} erfolgt dann aus diesen Angaben. Die These vergleicht nur die Allokationen auf Basis von zwei Beobachtungswerten, unterstützt also den Ansatz von COSTA zugunsten subjektiv bestimmter Werte. Obwohl die Art der subjektiven Klassifizierung hier mit aufgeführt wird, und diese sogar als These formuliert wird, ist aufgrund der unklaren Auslegung von subjektiver Bestimmung das Ergebnis sehr vorsichtig zu betrachten. Es gäbe viele Alternativen, wie man die hier benannte subjektive Schätzmethodik modellanalytisch generiert.

2.9.5 These H_{05} : Die Annahme homogener Elastizitäten des Marketinginstruments beeinflusst das Ergebnis negativ.

Man kann davon ausgehen, dass bei sehr heterogen elastischen Zuordnungseinheiten die Annahme homogener Elastizitäten zu suboptimalen Ergebnissen führen sollte, unklar bleibt dies aber im eher homogenen Fall. Der Hintergrund für die Überprüfung einer These ist die Ungewissheit, ob der Ungenauigkeit bei der Schätzung der Elastizitäten durch eine Vereinheitlichung entgegengewirkt werden kann. Dabei sei hervorgehoben, dass nicht die Zuordnungseinheiten an sich vereinheitlicht werden, sondern nur dessen elastische Reaktionen in Bezug auf das Marketinginstrument. Die Konstanten α_i bleiben pro Budget-Träger verschiedenartig²⁸. Offen bleibt erst einmal, wie die Berechnung dieses nun einheitlichen β erfolgt, ebenso ist von Interesse, wie sich die Ergebnisse bei steigenden Beobachtungswerten entwickeln. Nähere Ausführungen dazu sind im Kapitel 5.2 S. 88 f. und Kapitel 5.3.5 S. 99 dargestellt.

2.9.6 These H_{06} : Durch Anwendung der stochastischen Optimierung können die Ergebnisse der deterministischen Allokation verbessert werden.

Die stochastische Optimierung bezieht Unsicherheiten bei der Schätzung von Parametern von Absatzreaktionsfunktionen mit in den Optimierungsprozess ein. Dazu entwickeln Montgomery/Bradlow (1999) ein Modell indem die Parameterschätzer

²⁸ Allokation mit (16)

nicht wie üblich als deterministische Werte angenommen werden, sondern sie werden als Zufallsvariablen angesehen. Die Resultate von Montgomery/Bradlow (1999), nach denen die Einbeziehung der Unsicherheit die optimalen Ausprägungen der Inputfaktoren verändert, lassen sich jedoch nicht eindeutig auf diese Problemstellung übertragen. Sie erkennen in ihrer Studie vor allem Potential zu höheren Preisen, also einer absoluten Erhöhung des Inputs. Abgesehen davon, dass der Preis eine Sonderstellung bei den Marketinginstrumenten einnimmt, muss bei einer Allokation zusätzlich die Reduktion dieses Inputs an anderer Stelle in Betracht gezogen werden, was die Verteilungskorrekturen entsprechend beeinträchtigt. Trotzdem erscheint die Aufnahme weiterer Informationen über die Parameter zur Optimierung durchaus sinnvoll, da entsprechende Ungenauigkeitspotentiale, gerade bei Schätzungen mit wenigen Beobachtungen, ausgeschöpft werden können.

3 Hierarchical Bayes

3.1 Überblick

Da es sich bei hierarchisch Bayesscher Regression zwar um eine bekannte, jedoch bisher in der Unternehmenspraxis eher wenig verbreitete Methode handelt, soll in diesem Kapitel noch einmal eine kurze Übersicht über diese Technik erfolgen. Speziell bei Marketingfragestellungen ist die Anzahl an Autoren, welche diese Schätzmethode nutzen, noch relativ klein. Die Bezeichnung dieses alternativen Schätzverfahrens leitet sich aus der hierarchischen Struktur der Methodik und der Bayesschen Regression ab. Anders als im klassischen Ansatz, wo man Hypothesen annimmt oder ablehnt, wird in der Bayesschen Theorie jede Hypothese mit entsprechend definierten Wahrscheinlichkeiten bewertet. Dabei erfolgen laut Kleiter (1980, Vorwort) Aussagen über unbekannte Größen durch Bestimmung von Intervallen mit höchsten Wahrscheinlichkeiten, wobei Punktschätzer durch Erwartungswert oder andere geeignete Lageparameter aus einer Wahrscheinlichkeitsverteilung ersetzt werden. Lindley (1972) setzt sich ausführlich vergleichend mit dem klassischen und Bayesschen Ansatz auseinander. Dabei stellt er sich argumentativ klar auf die Seite der Bayes-Methode, indem er den Standard-Ansatz entsprechend scharf kritisiert.

Auch für die hier vorliegende Problematik, der Schätzung von Parametern auf Basis weniger Beobachtungswerte, scheint der Bayes-Ansatz geeigneter, da die in Kapitel 4.3.2 durchgeführte Inferenz, mit teilweise nicht signifikanten Parameterschätzern, nach dem klassischen Ansatz streng genommen so nicht zugelassen ist. Der eigentlich entscheidende Vorteil von hierarchisch Bayesscher Regression liegt aber in der Möglichkeit, hierarchisch übergeordnete Informationen über die unbekannten Parameter mit in die Berechnungen zu integrieren, oder auch daraus zu bestimmen. Aus dieser so genannten priori-Verteilung über die segmentspezifischen Parameter, können nun Informationen „ausgeliehen“ werden, um die Schätzungen zu stabilisieren.

Es soll im weiteren eine kurze Einsicht über die Theorie der Bayes-Statistik gegeben werden. Dieser sei aber auf die Bereiche beschränkt, welche für das hier vorliegende,

relativ simple Modell erforderlich sind. Die Beschreibung ist daher eng an die Problematik der Schätzung mehrerer bivariat normalverteilter Zufallsvariablen in einem linearen Modell angelehnt. Damit werden aber die sich bietenden Möglichkeiten von hierarchisch Bayesscher Regression bei weitem nicht ausgeschöpft. Für tiefer gehende Betrachtungen sei auf die gängige Literatur von Box/Tiao (1973), Zellner (1971), Lindley (1972) sowie auf Gelman et al. (1995) verwiesen.

3.2 Grundlage

Aus Bayesscher Sicht gibt es keinen wesentlichen Unterschied zwischen Parametern und Daten. Beide werden als Zufallsvariablen behandelt. Wie der Name schon sagt, basiert dieses Verfahren auf dem Bayes-Theorem, welches auf folgenden Wahrscheinlichkeitsansätzen aufgebaut ist:

$$(22) \quad p(B_i|A) = \frac{p(B_i)p(A|B_i)}{\sum_{h \in I} p(B_h)p(A|B_h)} \quad \text{oder auch} \quad p(B_i|A) = \frac{p(B_i)p(A|B_i)}{p(A)}$$

Dabei bezeichnet beispielsweise $p(B_i|A)$ die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses B_i nachdem Ereignis A eingetreten ist. Der Nenner dient gemäß Box/Tiao (1973, S. 10) nur als Normierungskonstante auf das Intervall $[0, 1]$ und kann dann entfallen, wenn man nur die Wahrscheinlichkeit $p(B_i|A)$ bestimmen will und (22) in Proportionalitätsform schreibt, so dass dann gilt

$$(23) \quad p(B_i|A) \propto p(B_i)p(A|B_i).$$

Dabei bezeichnet die linke Seite die so genannte posteriori-Wahrscheinlichkeit, welche das Produkt aus priori-Annahme ($p(B_i)$) und Likelihood ($p(A|B_i)$) darstellt. Letztere ist genau genommen keine Wahrscheinlichkeit, liegt aber in proportionaler Form auch im Intervall $[0, 1]$ ²⁹. Die Priori gibt die Wahrscheinlichkeitsfunktion der Ereignisse B_i an, während die Likelihood das Ereignis A bedingt für das unterstellte Ereignis B_i bewertet, so dass die Posteriori die Wahrscheinlichkeit der Ereignisse B_i auf Basis des Ereignisses A angibt.

Definiert man die B_i als Parametervektor und A als vorliegende Datenbasis, so kann man mit Hilfe des Bayes-Theorems Parameterschätzungen durchführen. Die Posteriori gibt also die zusammengefasste Version von priori-Informationen und Ergebnissen aus

²⁹ für nähere Erläuterungen des Begriffs „Likelihood“ siehe Kleiter (1980, S.115f) und Lindley (1965, S. 38/39). Eine eindeutige Übersetzung für den Wortgebrauch Likelihood ist schwierig. Da im deutschen keine Bezeichnung hierfür existiert entschied man sich für die Beibehaltung des englischen Begriffs.

den vorliegenden Daten an. Dazu muss mit (23) die Verteilungsfunktion der Posteriori berechnet werden, aus der sich dann allerlei mögliche Kenngrößen wie Erwartungswert, Quantile, Varianzen etc. festlegen lassen. Durch Bestimmung der Lageparameter erhält man also schlussendlich auch einen Punktschätzer für $(B_i|A)$. Fraglich bleibt zunächst, woher dabei die übergeordneten Informationen B_i kommen sollen, wie stark diese die Ergebnisse beeinflussen oder wie die Priori zu definieren ist, wenn keinerlei solcher übergeordneten Informationen existieren.

Im vorliegenden multiplikativen Modell mit positiv elastischen Marketinginstrumenten ist bekannt, dass die Elastizität β_2 innerhalb des Intervalls $[0, 1]$ liegen muss. Der Wertebereich für die hier zu bestimmenden Elastizitäten ist dann noch näher bestimmbar, wenn frühere Untersuchungen oder subjektive Einschätzungen herangezogen werden. Man kann in einigen Fällen von einer, für ein Marketinginstrument typischen Elastizität sprechen. Beispiele hierfür wären die subjektiv ermittelten Elastizitäten aus Tabelle 2-2 (S. 21) oder die von Beswick (1977) bestimmte mittlere Besuchszeitenelastizität von 0,217 wäre eine mögliche Schätzgröße als übergeordneter Mittelwert für elastische Reaktionen des Umsatzes auf persönliche Beratungszeit. Auch finden sich in den zahlreichen Untersuchungen über Regalplatzallokation aus Kapitel 2.1 ausreichend quantitative Größen, welche als priori-Annahmen über die Elastizität dienen könnten. Bei der OLS-Schätzung können diese zusätzlichen, auch subjektiv bestimmbaren Informationen nicht einbezogen werden.

Die hierarchisch Bayessche Regression bietet also einerseits die Möglichkeit diese priori-Informationen in ein Schätzmodell zur genaueren Spezifizierung der Parameter mit einfließen zu lassen, wird andererseits auch nicht selten zur Bestimmung eben dieser priori-Verteilung verwendet. Die Methodik erscheint für die vorliegende Problematik von Allokationen ideal, da die Zuordnungseinheiten, denen Anteile der knappen Ressource gewinnmaximal zugewiesen werden sollen, in ihrer Charakteristik einander stark ähneln. Sie unterliegen dem gleichen unterstellten Umsatzreaktionsmodell, haben die selbe Anzahl an zu schätzenden Parametern und verfügen über gleichartige endogene und exogene Variablen. Trotzdem sind die Zuordnungseinheiten oder auch Segmente in der Wertigkeit der Funktionsparameter heterogen aufgebaut. Somit macht es Sinn, diesen zu bestimmenden Parametern entsprechend übergeordnete priori-Informationen zu unterstellen und für die Schätzung mit in das Modell einzuarbeiten. Liegen keine Angaben vor, die als priori-Informationen verwertet werden können, birgt dieses Verfahren noch den Vorteil, diese somit unbekannten priori-Parameter aus der vorhandenen Datenbasis zu bestimmen. Anhand von

folgenden vereinfachten Beispielen³⁰ soll diese Vorgehensweise verständlicher gemacht werden.

Beispiel 1: Auf der Basis von $m = 15$ Beobachtungen wurde eine Stichprobe über die Werbeelastizität δ des Werbebudgets für Anzeigen in Printmedien mit dem Mittelwert $\bar{\delta} = 0,32$ erhoben. Aus früheren Untersuchungen ist bekannt, dass diese Elastizität normalverteilt ist mit einer Standardabweichung von $\sigma_\delta = 0,3$, so dass gilt $p(\delta | \mu_\delta, \sigma_\delta^2) \sim N(\mu_\delta, \sigma_\delta^2)$. Durch Berücksichtigung aller Beobachtungen j erhält man als Verteilung für die Likelihood laut Box/Tiao (1973, S. 20) dann die posteriori-Verteilung von δ mit

$$(24) \quad \prod_{j=1}^m p(\delta_j | \mu_\delta, \sigma_\delta^2) = p(\delta | \mu_\delta, \sigma_\delta^2) \sim N\left(\bar{\delta}, \frac{\sigma_\delta^2}{m}\right).$$

Geht man davon aus, dass keinerlei Informationen zur priori-Verteilung vorliegen, unterstellt man dieser Priori am besten eine Gleichverteilung. Dadurch verläuft die posteriori-Verteilung parallel zur Likelihood, und hat folglich den gleichen Erwartungswert (hier: $p(\delta | \mu_\delta, \sigma_\delta^2) \sim N(0,32, 0,3^2)$, vgl. feine Linie in Abbildung 3-1). Will man nun eine eigene priori-Einschätzung mit in die Berechnung einfließen lassen, so sollte man dieser ebenfalls aus realistischen Gründen eine Normalverteilung unterstellen.

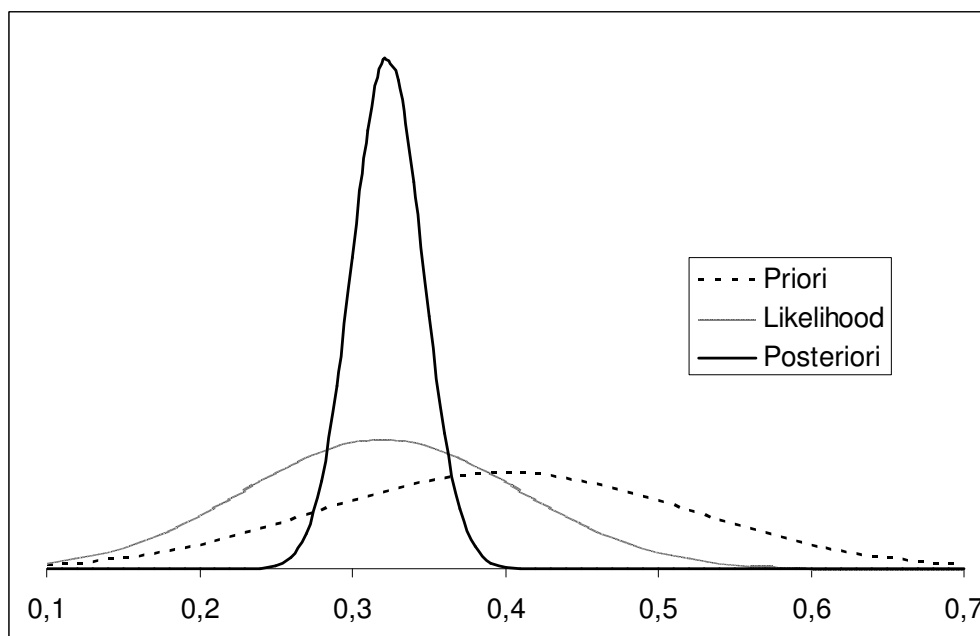


Abbildung 3-1: Analyse des Mittelwertes für die Werbeelastizität aus Beispiel

³⁰ Das erste Beispiel basiert auf dem in Kleiter (1980, S. 176 ff) vorgestellten Rechenexempel. Die Ausgangssituation und die Zahlenangaben wurden aber auf einen Marketing-Fall abgeändert.

Als priori-Annahme soll im vorliegenden Fall eine Untersuchung aus der Vergangenheit dienen, in der für die Branche der Printmedien hervorging, dass der Mittelwert für die Elastizität immer um die $\mu_0 = 0,4$ pendelte. Daher soll dies als plausible Schätzung für den übergeordneten Mittelwert gelten. Ebenso kann man aufgrund subjektiver Einschätzungen zu 90 % ausschließen, dass der wahre Mittelwert der Elastizität über 0,6 und unter 0,2 liegt, woraus sich eine Aussage über das Vertrauensintervall ableiten lässt. Also liegen 90 % der Verteilung innerhalb der genannten Grenzen $[0,2; 0,6]$. Wegen der symmetrischen Verteilung kann man mit $z = 1,64485$ die Obergrenze des 95 %-Quantils der Standardnormalverteilung bestimmen. Mit

$$(25) \quad z = \frac{\mu - \mu_0}{\sigma} \Leftrightarrow \sigma = \frac{\mu - \mu_0}{z}$$

errechnet sich dann eine Standardabweichung von $\sigma_0 = 0,1216$, so dass die priori-Funktion der Verteilung $p(\delta_0) \sim N(0,4; 0,1216^2)$ unterliegt. Ohne zunächst den Rechenweg näher zu erläutern gelangt man über das Produkt aus Priori und Likelihood zur Verteilung der Posteriori mit

$$(26) \quad p(\mu|\bar{\delta}, \sigma^2) \propto p(\delta_0)p(\bar{\delta}|\mu, \sigma^2) \sim N(0,3228; 0,02282^2).$$

Die daraus resultierende Verteilungskurve (fette Linie in Abbildung 3-1) beinhaltet nun die Verteilung der Erhebung gemeinsam mit den priori-Annahmen. Hier zeigt sich also, wie die subjektiven Annahmen den Verlauf der Verteilungskurve beeinflussen und dadurch verschieben können. Das Ausmaß der Beeinflussung hängt dabei entschieden von der Anzahl der Beobachtungswerte der Erhebung ab.

Beispiel 2: Durch Ausgabe von Rabattkarten, welche Kunden bei jedem Einkauf einscannen lassen, ist eine große Warenhauskette in der Lage das Einkaufsverhalten einzelner Kunden im Detail zu studieren. Unter anderem errechnet das Warenhaus aus diesen Informationen die Elastizität für kurzfristige Preisreduktionen (KPR), um für künftige Verkaufsförderungsaktionen die optimalen Preise zu ermitteln. Dabei stellt es kein Problem dar, für jeden Kunden einzeln die KPR-Elastizität zu errechnen, das Management kann aber für die Optimierung der Preisreduktion nur eine einzige Elastizität verwenden. Dazu wäre am besten eine Art übergeordnete Elastizität geeignet, die für alle Kunden einen angebrachten Mittelwert darstellt. Dies ist deshalb problematisch, weil jeder Kunde eine, wenn vielleicht auch nur marginal unterschiedlich elastische Reaktion auf entsprechende Preisänderungen zeigt. Zudem liegen pro Kunde, aufgrund der nicht identischen Einkaufsgewohnheiten ungleich viele Erhebungen zur Auswertung der Daten vor, weshalb das Management nicht auf den

einfachen Mittelwert über alle individuellen Elastizitäten zurückgreifen möchte, da ihnen diese Schätzung als verzerrt erscheint.

Geeigneter wäre hier ein Lageparameter der priori-Verteilung, welchen man mittels Bayesscher Modellierung ermitteln kann. Um diese nun neben der Posteriori ebenfalls aus der Stichprobe zu bestimmen, kann man die Momente der Priori wiederum als Zufallsvariablen definieren und als weitere bedingte Verteilungen im gleichen Verfahren mitschätzen. Aus der priori-Verteilung kann die Warenhauskette dann entsprechend der Kundenstruktur gewichtete Schätzer für deren KPR-Elastizität berechnen.

3.3 Aufbau des linearen Modells

Obwohl die Umsatzreaktionsfunktion aus der zu untersuchenden Problematik in multiplikativer Form dargestellt ist, erfolgen die Schätzungen auf Basis der linearierten Daten (vgl. Kapitel 4.3.2.1, S. 49), um von der selben Informationsbasis wie bei der Kleinst-Quadrat-Schätzung auszugehen. Für die Inferenzen bei dem vorliegenden Simulationsexperiment seien die B_i aus (23) (S. 30) nun als zu schätzender Parametervektor β dargestellt, und die Matrix X sowie der Vektor y geben die In- bzw. Outputvariablen an. Unter diesen Annahmen errechnet sich die Posteriori gemäß

$$(27) \quad p(\beta|X, y) \propto p(\beta)p(y|X, \beta)$$

Die Verteilung von β nach Kenntnis der abhängigen und unabhängigen Variablen ist also proportional zu dem Produkt aus der Verteilung von β und der Verteilung von der Prognosevariablen y , welche aus einer Funktion aus Prädiktoren und Parametern besteht. Obwohl davon ausgegangen werden kann, dass aus früheren Studien zahlreiche Informationen über die Elastizitäten des Marketinginstruments vorhanden sind und aufgrund der beidseitigen Stützung des Verteilungsraumes von β_{2i} sogar ein 100 %-Intervall³¹ für die priori von β_2 verfügbar ist, sei hier trotzdem von einer nicht-informativen priori-Verteilung ausgegangen, da ja vor allem der Vergleich zu OLS im Zentrum dieser Untersuchung steht und bei welcher diese Hinweise ebenfalls nicht in Betracht gezogen werden.

Zu beachten ist aber, dass wie im Beispiel 2 aus Kapitel 3.2 eine weitere Hierarchiestufe integriert ist. Über den hier unbekannten priori-Verteilungen stehen noch so

³¹ das bedeutet $\int_{UG}^{OG} p(\beta_{2i}) = 1$; OG, UG = Ober-, Untergrenze des Wertebereiches

genannte flach verteilte Hyperpriors³². Dies ermöglicht die erwähnte Schätzung jener übergeordneten Variablen in einem Zug mit der Schätzung der β_i . Trotzdem ist das Datenmaterial, aus dem die Schätzungen erfolgen, exakt dasselbe, wie bei der Regressionsanalyse aus Kapitel 4.3.2. Zu beachten ist allerdings, dass hier zunächst noch von zwei univariat zu schätzenden Parametern ausgegangen wird. Bei der Implementierung in Kapitel 4.3.3 werden dann multivariate Verteilungen berücksichtigt, wobei sich jedoch die Korrelation zwischen den Parametern ausschließlich auf die priori-Verteilungen auswirken, da sich bivariat verteilte OLS-Schätzer ($\rho_{\beta_1\beta_2} \neq 0$) nicht von zwei univariat verteilten (mit $\rho_{\beta_1\beta_2} = 0$) unterscheiden.

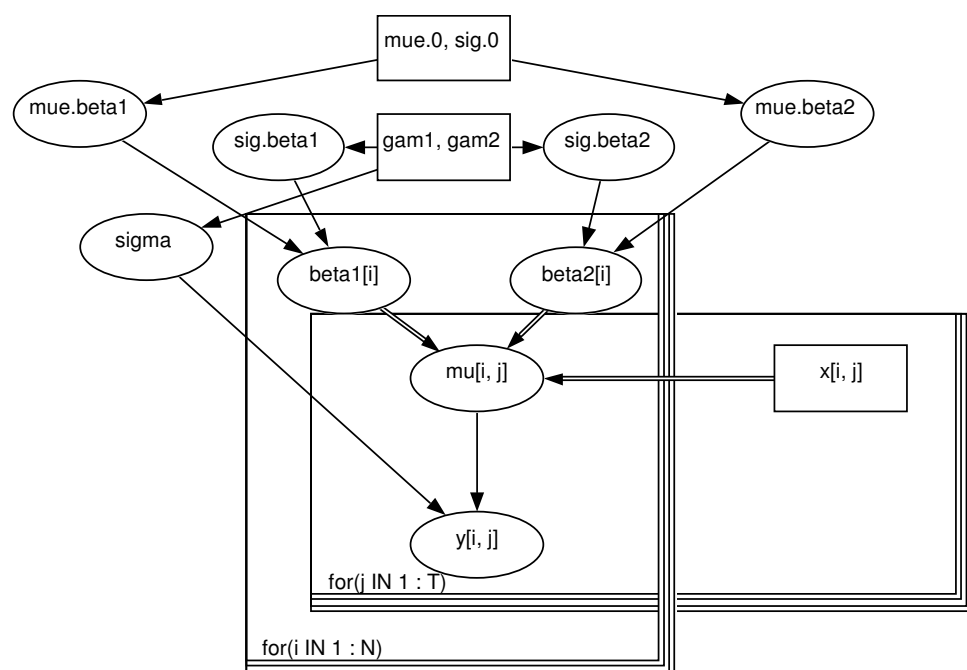


Abbildung 3-2: Darstellung des hierarchischen Modells mit Hilfe des WinBUGS-Doodle-Editors

Ausgangssituation sei zunächst das bekannte lineare Standardmodell mit zwei Parametern

$$(28) \quad y = \beta_1 + \beta_2 x + \varepsilon \text{ mit } \varepsilon \sim N(0, \sigma^2),$$

so dass gilt $y \sim N(\beta_1 + \beta_2 x, \sigma^2)$. Die Likelihood-Annahmen für die bedingten Verteilungen eines Schätzmodells mit zwei univariaten Parametern sind dann wie folgt spezifiziert:

³² Diese Wortschöpfung stammt aus Gelfand et al. (1990, S. 973). In Abbildung 3-2 sind diese durch die rechteckige Umrandung erkennbar. Ausgenommen davon ist die Variable $x[i, j]$, welche sich durch die Darstellung mittels Doppelpfeil auch optisch abhebt.

$$(29) \quad y_{ij} \sim N(\mu_{ij}, \sigma^2) \quad \text{mit} \quad \mu_{ij} = \beta_{1i} + \beta_{2i}x_{ij}$$

$$(30) \quad \beta_{1i} \sim N(\mu_{\beta_1}, \sigma_{\beta_1}^2), \beta_{2i} \sim N(\mu_{\beta_2}, \sigma_{\beta_2}^2).$$

Für die Momente der Priori sowie der Varianz der Residualgröße werden wiederum folgende übergeordnete Hyperprior-Verteilungen festgelegt. Dabei sind die Mittelwerte ebenfalls normalverteilt, während die Varianzen der Gammaverteilung folgen.

$$(31) \quad \mu_{\beta_1}, \mu_{\beta_2} \sim N(\mu_0, \sigma_0^2); \sigma^{-2}, \sigma_{\beta_1}^{-2}, \sigma_{\beta_2}^{-2} \sim G(\gamma_1, \gamma_2)$$

In Abbildung 3-2 wird das erwähnte Modell grafisch dargestellt. Der hierarchische Aufbau, welcher den Namen des Verfahrens begründet, wird dort deutlich sichtbar. Theoretisch kann ein Modell, abhängig von der Komplexität, aus noch mehr Hierarchiestufen bestehen, beim vorliegenden, einfach strukturierten Fall ergeben aber nur jene drei Ebenen. Da sich die Parameter der Priori ebenfalls aus der Schätzung ergeben sollen, werden auch sie als Zufallsvariablen definiert. Daraus ergibt sich die Notwendigkeit, die Hyperprioris nicht-informativ zu gestalten. Ideal wäre als Verteilungsform in diesem Fall zwar die Gleichverteilung, aber erforderte dies die Intervallgrenzen $[-\infty; \infty]$, mit denen der weitere Rechengang schwierig ist. Durch Annahme einer ausreichend großen Varianz kann man deshalb approximativ auch eine Normalverteilung unterstellen. Diese Vorgehensweise beeinflusst das Ergebnis faktisch nicht, bietet aber bei der Programmierung von multivariaten Normalverteilungen die Vorteile einer einfacheren Berechnung. Zur Darstellung einer so genannten nicht-informativen Hyperpriori eignen sich dann z.B. Verteilungsmomente wie

$$(32) \quad \mu_{\beta_1}, \mu_{\beta_2} \sim N(0, 10000); \sigma^2, \sigma_{\beta_1}^2, \sigma_{\beta_2}^2 \sim Ga(1000, 1000).$$

Wie erwähnt, stellt die posteriori-Funktion $p(\beta_i | X_i, y_i)$ die Verteilung der Parameter unter Berücksichtigung der Daten X_i und y_i dar. Dessen Erwartungswert ist in diesem Fall gemäß Lindley/Smith (1972, S. 6) der gesuchte Schätzwert für die Parameter β_i , welche sich per Integration berechnen:

$$(33) \quad E[f(\beta) | X, y] = \int f(\beta) p(\beta) p(y | \beta, X) d\beta$$

Integrationen auf diesem Niveau sind nach Gilks et al. (1996, S.4) in der Regel analytisch schwer oder gar nicht lösbar, und aus diesem Grund blieb diese Vorgehensweise trotz seiner scheinbaren Überlegenheit lange Zeit unpopulär. Erst als die Rechnerkapazitäten der jüngeren Computergeneration für brauchbare Ergebnisse aus Simulationsverfahren wie Markov-Chain-Monte-Carlo (MCMC) ausreichten, fand

dieser Ansatz zunehmend Anklang als Schätzmethodik. Einen kurzen Überblick über dieses Simulationsverfahren soll das nächste Kapitel verschaffen.

3.4 Markov Chain Monte Carlo

Es handelt sich bei Monte Carlo-Methoden um Simulations- oder auch künstliche statistische Modelle, welche die Realität als Alternative zu Erhebungen in einfacher Form wiedergeben sollen. Mit diesem Verfahren werden Parameter einer bekannten, aber analytisch nicht lösbaren Verteilung per Stichprobenziehung geschätzt. Bei den Monte Carlo-Methoden wird also etwa der Erwartungswert $E[f(Q)]$ bestimmt, indem eine Stichprobe Q_u , $u = 1, \dots, \theta$ aus der posteriori-Verteilung $p(\beta|D)$ gezogen wird und sich nach dem Gesetz der großen Zahlen durch

$$(34) \quad E[f(Q)] \approx \frac{1}{\theta} \sum_{u=1}^{\theta} f(Q_u)$$

ergibt.

Die Genauigkeit dieser Approximation hängt von der Größe θ der Stichprobe i ab, wobei diese mit der Zahl der gezogenen Werte steigt. Einfache Monte Carlo Simulation ist aber nur möglich, wenn direkt aus der posteriori-Verteilung gezogen werden kann. Meistens ist die posteriori-Verteilung jedoch keine bekannte Verteilung. Für diesen Fall lassen sich die Monte Carlo-Methoden durch entsprechende Markovketten erweitern. Bei einer solchen Markovkette handelt es sich um eine Folge, welche Abhängigkeitsstrukturen ausschließlich gegenüber des jeweiligen Vorgängers aufweist. Sie beschreiben die Entwicklung von Objekten, Sachverhalten, Systemen etc., die zu jedem Beobachtungszeitpunkt nur eine von endlich vielen Ausprägungen annehmen können. Bei den Markov Chain Monte Carlo-Methoden (MCMC) wird also ausgehend von einer beliebigen Startverteilung eine Markovkette erzeugt, die gegen die gesuchte posteriori-Verteilung konvergiert.

Anders gesagt werden also zufällige diskret zeitliche Abfolgen von Zuständen abgebildet, dessen Abhängigkeit sich aus den Übergangswahrscheinlichkeiten $P^u(a, b) = p_{ab}^u$ ergibt. Sie geben an, mit welcher Wahrscheinlichkeit zur Zeit u der Zustand b eintritt, wenn zur Zeit $u-1$ der Zustand a vorlag. Man kann diese Wahrscheinlichkeiten in einer Übergangsmatrix P_u anordnen

$$(35) \quad P^u = \begin{pmatrix} p_{11}^u & p_{12}^u & \cdots & p_{1N}^u \\ p_{21}^u & p_{22}^u & \cdots & p_{2N}^u \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ p_{N1}^u & p_{N2}^u & \cdots & p_{NN}^u \end{pmatrix}.$$

Diese Übergangsmatrix entspricht dem Markovkern und ist eine stochastische Matrix, was bedeutet, dass alle Einträge nichtnegativ sind und in den Zeilensummen eins ergeben. Des Weiteren handelt es sich hierbei um eine homogene, also nach u konstante Matrix. Eine Markovkette besitzt unter entsprechenden Voraussetzungen eine stationäre Verteilung, die ausschließlich vom Markovkern abhängt und unabhängig vom Startzustand in ihre Verteilung konvergiert³³.

3.5 Gibbs Sampler

Einer der am häufigsten angewandten Algorithmen auf MCMC-Basis ist der Gibbs Sampler. Er gilt als das ideale Instrument, wenn mit Hilfe Bayesscher Modelle Parameterschätzungen durchgeführt werden sollen. Nach Casella/George (1992), die eine ganz hervorragende Einführung zur Anwendung dieser Methodik darlegen, handelt es sich bei dem Gibbs-Sampler um eine von Geman and Geman (1984) entwickelte Technik, die es erlaubt, indirekt Zufallsvariablen zu erzeugen, ohne die Dichtefunktion berechnen zu müssen. Die Berechnungen erfolgen hierbei ausschließlich aus den bedingten Verteilungen der Übergangsmatrix, dabei ersetzt eine iterative Betrachtungsweise die zeitdiskrete Entwicklung des Markovkerns.

Für Posteriori-Verteilungen $p(\gamma|D)$ mit γ als Parametervektor auf Basis der Daten D funktioniert das Schema des Gibbs Sampler mit (36) als Markovkern folgendermaßen (Chen, Shao, Ibrahim 2000, S. 20 oder auch Gamerman 1997, S. 120 f):

Schritt 1: Wähle für alle Parameter γ_i einen Startwert $\gamma_{i,u=0}$ und setze $u = 0$

Schritt 2: Generiere für $u + 1$ alle $\gamma_{i,u+1}$ nach folgender Regel:

$$(36) \quad \begin{aligned} \gamma_{1,u+1} &\sim p(\gamma_1 | \gamma_{2,u}, \dots, \gamma_{i,u}, D) \\ \gamma_{2,u+1} &\sim p(\gamma_2 | \gamma_{1,u+1}, \gamma_{3,u}, \dots, \gamma_{i,u}, D) \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \\ \gamma_{i,u+1} &\sim p(\gamma_i | \gamma_{1,u+1}, \gamma_{2,u+1}, \dots, \gamma_{i-1,u}, D) \end{aligned}$$

³³ Für tiefer greifende Erklärungen, auch für die notwendigen Voraussetzungen zur Konvergenz einer Markovkette siehe z.B. Robert/Casella (1999, S. 159 ff), Gamerman (1997, S. 101 ff), Gilks et al. (1996, S. 46 ff, S. 64 ff).

Schritt 3: $u = u+1$, gehe zu Schritt 2

Nach Initialisierung werden also Stichproben aus bedingten Verteilungen gezogen, deren Erwartungswerte und Varianzen sich sukzessive updaten. Als Vorgänger gilt jeweils der Parameter mit dem nächst kleineren Index. Durch entsprechend großes u konvergiert dieser Algorithmus dann gegen die bedingte Zielverteilung $p(\gamma|D)$.

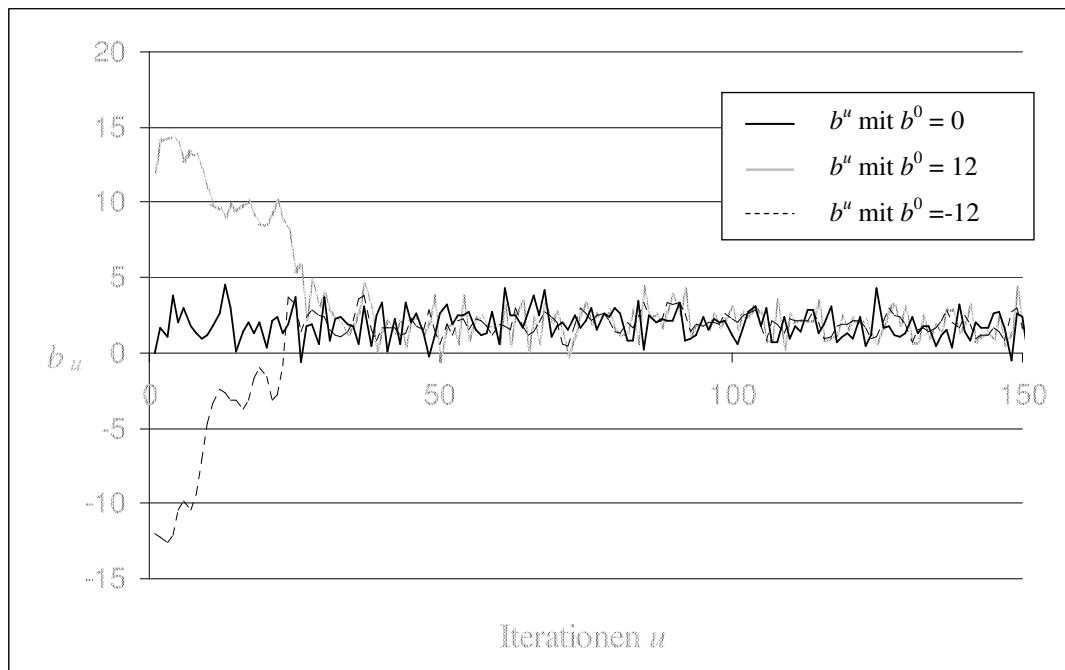


Abbildung 3-3: Sichtbare Konvergenz durch Plot der Iterationen von $b \sim N(2, 1)$ aus drei Startzuständen

Nach Ablauf einer gewissen Konvergenzrate ω , dem so genannten „burn-in“, kann man dann die anschließend gezogenen Werte als Stichprobe der gesuchten Verteilung ansehen und wie bei der einfachen Monte Carlo Simulation den Erwartungswert durch den Mittelwert von $f(Q_u)$ wie folgt approximieren

$$(37) \quad E[f(Q)] \approx \frac{1}{\theta - \omega} \sum_{u=1+\omega}^{\theta} f(Q_u).$$

Nach wie vielen Iterationen eine Kette konvergiert, dazu sind die Meinungen unter den Autoren unterschiedlich, solange es um formelle Darstellungen geht. Chen et al. (2000, S. 59 ff) bezweifeln die Existenz einer Diagnoseprozedur, welche zuverlässig die Konvergenz feststellt. Als bekannteste Methode führen sie Gelman und Rubins “Variance Ratio Method“ an (Gelman/Rubin, 1992). Nach Gelfand/Smith (1990) ist es jedoch auch zulässig die Ausprägungen der Iterationen als so genannten Trace-Plot

darzustellen und deren Streben in den Konvergenzraum visuell festzustellen. Dazu startet man mehrere Markovketten von unterschiedlichen Anfangszuständen aus und zeigt mittels grafischer Darstellung, dass die Ketten unabhängig vom Startzustand immer in diesen Konvergenzbereich streben (siehe Beispiel in Abbildung 3-3). Dabei ist laut Mengersen et al. (1999) strittig, ob dazu eine lange Kette beobachtet werden soll, oder mehrere kurze Ketten diesen Effekt nachweisen. In der vorliegenden Arbeit wurde grob entsprechend des Vorschlags aus Gelfand/Smith (1990) verfahren und die Konvergenz visuell beobachtet. Dabei wurden sowohl eine, als auch mehrere Plots stichprobenartig ausgewertet, um die Konvergenz an sich nachzuweisen. Da sowohl eine als auch mehrere Ketten diesen Nachweis führen konnten, sollte sowohl für die Konvergenzziehung (burn-in) als auch für die Schätzung, schließlich nur jeweils eine lange Kette herangezogen werden.

Bei der durchgeführten Monte Carlo Simulation für das hierarchisch Bayessche Regressionsmodell wurden bereits innerhalb der ersten 20 Iterationen klar erkennbare Konvergenzen beobachtet. Zur Entscheidung, wie viele Iterationen nach erfolgter Konvergenz gezogen werden müssen, um ausreichend Ziehungen für eine gültige Stichprobe zu haben, schlagen zum Beispiel Gilks et al. (1995, S.15) generell ca. 1% der gesamten Kettenlänge allein für die Konvergenz vor. Dies bedeutet im Umkehrschluss, dass nach erfolgter Konvergenz noch einmal die 100fache Anzahl an Ziehungen für die Schätzung herangezogen werden sollte. Dabei gilt generell das Prinzip, dass mehr Iterationen auch bessere Ergebnisse erwarten lassen, so dass also durchaus größere Stichproben erwünscht sind. Bei 20 Iterationen für die Konvergenz bedeutete dies, dass für die Schätzung 2000 Iterationen notwendig sind. In der Ziehung aus Kapitel 4.3.3.3 werden jedoch wesentlich größere Stichproben herangezogen.

Es existieren unterschiedliche Auffassungen darüber, wie das Ziehen der Stichproben erfolgen soll. Problematisch ist zunächst einmal die Tatsache, dass durch die Abhängigkeit eines Zustandes ausschließlich von der Ausprägung des vorigen Zustandes Autokorrelation vorliegt. Daher wird empfohlen zur Berechnung der Lageparameter nur jeden k -ten Wert zu berücksichtigen, um jene Verzerrungen durch Autokorrelation zu vermeiden. Mit wachsender Stichprobe verschwinden bei einfachen Modellen aber diese Verzerrungen, so dass durchaus jede Ziehung zur Berechnung zulässig ist, wenn die Stichprobe ausreichend groß ist (Spiegelhalter et al. 2003, Kapitel *Update*). Im hier betrachteten Fall kann von einem sehr simplen Modell ausgegangen werden, welches sehr große Stichproben zulässt. Durch eine entsprechend große Anzahl an Stichprobenziehungen können Verzerrungen, welche durch Autokorrelation ausgelöst werden könnten, vermieden werden.

4 Simulationsexperiment

4.1 Modellannahmen

Für die Überprüfung der Thesen aus Kapitel 2.9 bietet sich ein Simulationsexperiment an, da es ausschließlich um die Überprüfung einer modellanalytischen Theorie geht. Um den Effekt der Schätzungenauigkeiten isoliert betrachten zu können, müssen die Beobachtungsdaten unverzerrt sein. Durch die Generierung der Ausgangsdaten per Zufallszahlen ist es möglich dementsprechende Verzerrungen auszuschließen. Es bleibt steuerbar, ob das Auftreten von Autokorrelationen, Missing Values, Heteroskedastizität etc. erwünscht ist oder nicht. Auch Korrelationen zwischen den Parametern bleiben kontrollierbar, Carry-Over Effekte können ausgeblendet werden und es kann mit Sicherheit davon ausgegangen werden, dass das richtige Umsatzreaktionsmodell ausgewählt wurde. Zur Darstellung dieser externen Störfaktoren werden die Fehlervariablen derart erzeugt, dass ein vorgegebenes Bestimmtheitsmaß das Schätzmodell einheitlich spezifiziert. Weiterhin entstehen keine Komplikationen bei der Umsetzung des Lösungsvorschlags. Die daraus folgende Unterdrückung potentieller Fehlerquellen aus den Stufen I, II und V (vgl. Kapitel 2.2) ermöglicht in dieser künstlich geschaffenen Umwelt die Analyse der formulierten Thesen. Ein weiterer Vorteil ist die Kenntnis der wahren Parameter, so dass daraus so genannte Referenzwerte bestimmbar sind, welche sich besonders gut zur Evaluierung der Schätzergebnisse eignen.

Ein praktischer Versuch wäre nicht nur aufgrund der notwendigen Datenerhebungen viel zu teuer, es würde auch zu lang dauern und die Erfahrungswerte hätten bei weitem nicht die Reinheit und Unverzerrtheit, wie die künstlich erzeugten Werte. Außerdem enthielten Daten aus der Praxis wiederum die Fehler aus allen fünf Stufen des Optimierungsprozesses (vgl. Kapitel 2.2). Auch wären Unternehmen kaum bereit, durch derlei Experimente unter Umständen Umsatzeinbußen in Kauf zu nehmen und es bestünde nicht die Möglichkeit eine Vielzahl unterschiedlicher Situationen zu generieren (Skiera 1997a, S. 724f).

4.2 Modell

Die Umsatzreaktionsfunktionen der Zuordnungseinheiten folgen alle dem multiplikativen Modell. Da es sich hierbei, wenngleich auch im Rahmen eines künstlich geschaffenen Umfeldes, um Marktdaten handelt, sind externe Effekte in Form einer Fehlervariablen ε_{ij} zu berücksichtigen. Die Absatzfunktion einer jeden Budget-Trägereinheit i in Beobachtung j lautet dann

$$(38) \quad S_{ij} = \alpha_i t_{ij}^{\beta_{2i}} e^{\varepsilon_{ij}}.$$

Zunächst wurden allen Zuordnungseinheiten i „wahre“ und mit den übrigen Segmenten unkorrelierte Reaktionsfunktionen durch lognormalverteilte α_i und normalverteilte β_{2i} zugewiesen. Mit den ebenfalls normalverteilten Variablen t_{ij} , sollen die Prädiktoren über die Beobachtungen j simuliert werden und durch wiederum normalverteilte Störgrößen ε_{ij} die Absätze S_{ij} simulieren. Unter Annahme von Unkenntnis der „wahren“ Parametern werden anschließend für jede Einheit i die Parameter α_i und β_{2i} über die Beobachtungen j geschätzt. Mit (13) erfolgt dann eine optimierte Reallokation der Prädiktoren t_i^* welche durch Einsetzen in die wahre Reaktionsfunktion den Umsatz S_i^* erzeugt.

Um die Simulationsstudie für mehrere Umweltsituationen aussagekräftig zu gestalten, wurde sie für unterschiedliche Ausgangssituationen strukturiert, wobei insbesondere die Verschiedenartigkeit der Zuordnungseinheiten modelliert wurde, um die Verschiedenartigkeit der Allokationsprobleme weitläufig zu repräsentieren. Dazu werden folgende Faktoren ($F_1 - F_5$) mit den eingeklammerten Werten als alternative Ausprägungen pro Verkaufsgebiet generiert:

F_1 : Anzahl der Budget-Träger (8; 20; 40)

F_2 : Erwartungswert der Elastizität des Instrumentes β_{2i} (0,35; 0,25; 0,15)

F_3 : Streuung als Anteil der Elastizität (0,33; 0,2; 0,1)

F_4 : Beobachtungszahl j pro Einheit i (2; 3; 4; 8; 12; 24 und subjektiv)

F_5 : Verwendung von Hierarchical Bayes (HB) als Schätzverfahren (0; 1)

Die Variation der Anzahl von Zuordnungseinheiten (F_1) soll zeigen, ob hier ein signifikanter Einfluss auf die Ergebnisse der Allokation messbar ist. Bezogen auf die Problematik der Verkaufszeitenallokation sind die drei Größen lt. Beswick/Cravens (1977), Lodish (1980) und Zoltners/Sinha (1983) abhängig von der Produktkategorie durchaus realistisch. Die Annahme von 40 Einheiten, welches im Bereich des persönlichen Verkaufs von Pharmaartikeln eine wirklichkeitsnahe Gebietsgröße ist, wurde dennoch eher auf die Problemstellung von Regalplatzallokationen zugeschnit-

ten. In Dréze et al. (1994) wurden in etwa 40 Produkte auf den Regalplatz verteilt. Albers (1997) wählt eine Anzahl von 8 Allokationseinheiten und in Skieras Simulationsexperiment (1997a) betragen die Gebietsgrößen 19, 9,5 und 6,3 KGE, so dass die drei hier gewählten Größen das Feld durchaus repräsentativ abdecken.

Die Verteilungsregel „Deckungsbeitrag \times Elastizität“ legt nahe, dass die Güte der Allokation stark von der Höhe (F_2), aber auch von der Streuung ($F_3 \times F_2$) der Elastizität über die Einheiten i abhängt. Bei hohen F_2 wirken sich kleine Änderungen des Inputs der knappen Ressource aufgrund der exponentiellen Form stark auf die Umsatzsituation aus. Bei starken Elastizitätsunterschieden (F_3) zwischen den Budgetträgern erfolgt nach Optimierung eine entsprechend differenzierte Zuteilung des knappen Marketinginstruments. Nach Beswick (1977, S. 671) liegt eine mittlere Besuchszeitenelastizität bei 0,217. Nach LaForge/Cravens (1985, S. 189) ergibt sich bei Verkaufstelefonaten für deren Häufigkeit eine Elastizität von 0,3213 und für die Länge der Anrufe eine Elastizität von 0,3315. Dies lässt den Wert für das mittlere F_2 realistisch erscheinen. Laut Dréze et al. (1994) ergab sich in Studien von Cox (1970), Curhan (1972), Kotzan/Evanson (1969) und Krueckenberg (1969) eine mittlere Regalplatzelastizität von 0,2. Diese bewegt sich also in etwa im Bereich der Besuchszeitenelastizität. Bei Corstjens/Doyle (1981) ergibt sich eine Regalplatzelastizität bei Süßwaren und Eiscreme von 0,086, was auch eine Untersuchung der niedrigeren Elastizitätsniveaus bei $\approx 0,1$ begründet. Die von Skiera (1997b) durchgeführte Simulationsstudie geht infolge der von Krafft (1995) erhobenen Daten von einem Wertebereich für β_2 von $[0,1; 0,5]$ aus, obwohl sich aus einer früheren Untersuchung von Albers/Krafft (1992) für die Besuchszeitenelastizitäten noch das Intervall $[0,2; 0,3]$ ergab. Bei heterogenen Verkaufsgebieten (also bei hohen F_3) füllen die Elastizitäten diesen Bereich voll aus³⁴. Die anderen Kombinationen von F_2 und F_3 stellen entsprechende Abstufungen dar. Auch die Unterscheidung zwischen kurzfristiger und langfristiger Elastizität³⁵ begründet diese neun unterschiedlichen Parametergenerierungen.

Weiter wurden die Elastizitäten β_2 per Zufallszahlen so erzeugt, dass möglichst keine Werte außerhalb des hier als zulässig gewählten Intervalls von $[0,02; 0,66]$ liegen, da sonst Probleme für die Allokation entstehen. Die Untergrenze soll sicherstellen, dass der Umsatz überhaupt, wenngleich minimal auf das Marketinginstrument reagiert. Auch sollen negative elastische Reaktionen ausgeschlossen werden. Die Obergrenze bewahrt die Berechnung der Simulationsstudie vor Gleitkommaüberläufen durch zu

³⁴ Die niedrigste Elastizität beträgt hier $\beta_{2_{\min}}^{F_2=0,35} = 0,026$, die höchste liegt bei $\beta_{2_{\max}}^{F_2=0,35} = 0,653$

³⁵ vgl. z. B. Albers, Skiera (2002)

große Zwischenergebnisse. Lagen dennoch einige der erzeugten wahren Parameter außerhalb des zulässigen Intervalls, erfolgte eine manuelle Korrektur³⁶. Die Gebietsgüteparameter α_i folgen in jedem Modell, unabhängig von den F -Faktoren, einer identischen Verteilung. Die $\ln(\alpha)$ -Parameter wurden normalverteilt erzeugt und anschließend mit der Exponentialfunktion $\exp(\alpha)$ potenziert. Für das Optimierungsmodell liegen sie dadurch allerdings in logarithmischer Normalverteilung ($\alpha \sim LN(\mu_\alpha, \sigma_\alpha^2)$) vor. Hintergrund für diese Vorgehensweise war die Anforderung an eine später linearisierte Absatzfunktion, beide zu schätzenden Parameter einer identischen Verteilungsfunktionsform folgen zu lassen, um diese als multivariat normalverteilte Variablen betrachten zu können.

Die Parameter für $F_4 = 2$ werden durch Auflösung der beiden Gleichungen, die restlichen per OLS-Schätzung bestimmt. Bei $F_4 = 3, 4$ und 8 soll die Bestimmung der Parameter zusätzlich mit einem hierarchischen Bayes Modell erfolgen ($F_5 = 1$), vor allem um zu untersuchen, ob diese Alternative Schätzwerte liefert, welche bessere Allokationen ermöglichen. Dieses Verfahren fand nur bei den mittleren Beobachtungshäufigkeiten Verwendung, nachdem klar war, dass die Schätzungen per OLS bei $F_4 = 12$ und 24 so nah an ihren wahren Werten lagen, dass die aufwändigere hierarchisch Bayessche Regressionsmethode hier kaum hätte weitere Erkenntnisse bringen können.

Die unterschiedlichen Voraussetzungen wurden für 6 ungleiche Beispiele (N_1) mit je F_1 Segmenten erzeugt und dann zweimal ($N_2 = 2$) mit neuen Input- (t) und Störvariablen (ε) optimiert. Für jede Gebietseinheit $i = 1, \dots, F_1$ unterlagen die wahren Parameter der Reaktionsfunktionen der Lognormalverteilung mit $\alpha \sim LN(2500, 600^2)$ und der Normalverteilung mit $\beta_2 \sim N(F_2, (F_2 \times F_3)^2)$. Durch die Linearisierung folgt daraus, dass die Funktionsparameter in multivariater Normalverteilung ohne Korrelationen gemäß

$$(39) \quad \begin{pmatrix} \ln(\alpha) \\ \beta_2 \end{pmatrix} \sim N \begin{pmatrix} 7,824 & 0,25 & 0 \\ F_2 & 0 & F_2 \times F_3 \end{pmatrix}$$

vorliegen. Für die $j = 1, \dots, F_4$ Beobachtungsdaten über die pro Einheit i zugeordnete Menge gilt für $t_{ij}^{N_2=1} \sim N(35, 7^2)$ und $t_{ij}^{N_2=2} \sim N(35, 9^2)$. Diese Verteilung gilt ebenfalls unabhängig von allen F -Faktoren. Der Fehlerterm $\exp(\varepsilon)$ sorgt mit $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$ bei der späteren Linearisierung für die Erfüllung der Voraussetzung der Homoskedastizität

³⁶ Die manuelle Korrektur verzerrte natürlich ein wenig das Bild, aber es handelte sich nur ganz vereinzelt um Werte $< 0,02$ (3 mal) oder $> 0,7$ (0 mal), so dass dies bei 2160 erzeugten Parametern noch im Toleranzbereich liegen sollte, zumal die korrigierten Werte wieder zufällig erzeugt wurden.

bei der Regressionsanalyse. Die Zufallszahlengeneration der variierten Faktoren erfolgten gemäß erzeugter Verteilungen mit in Tabelle 4-1 dargestellten Mittelwerten und Standardabweichungen.

F_2	hoch	hoch	hoch	mittel	mittel	mittel	niedrig	niedrig	niedrig
$EW(\beta_2)$	0,35	0,35	0,35	0,25	0,25	0,25	0,15	0,15	0,15
F_3	hoch	mittel	niedrig	hoch	mittel	niedrig	hoch	mittel	niedrig
$Stabw(\beta_2)$	0,117	0,070	0,035	0,083	0,050	0,025	0,050	0,030	0,015
α	$\sim \text{Lognormal}(2500, 600^2)$								
$t_{N_2=1}$	$\sim \text{Normal}(35, 49)$								
$t_{N_2=2}$	$\sim \text{Normal}(35, 81)$								
S	$= \alpha t \beta^2 e^\varepsilon$ mit $\varepsilon \sim \text{Normal}(0, \sigma^2)$								
$\sigma^2_{N_2=1}$	0,057	0,061	0,051	0,034	0,042	0,041	0,022	0,024	0,022
$R^2_{\text{kor}N_2=1}$	0,60	0,60	0,60	0,60	0,60	0,60	0,60	0,60	0,60
$\sigma^2_{N_2=2}$	0,097	0,083	0,083	0,065	0,065	0,070	0,040	0,040	0,041
$R^2_{\text{kor}N_2=2}$	0,50	0,51	0,51	0,50	0,51	0,49	0,47	0,49	0,50

Tabelle 4-1: Ausgangsdaten für die Simulation

Es stehen nun unabhängige (t) sowie abhängige (S) Variablen zur Verfügung, aus welchen eine Parameterschätzung für α und β_2 möglich ist. Die Varianzen der Fehlerterme ε wurden unabhängig von F_1 und F_4 erzeugt und sind auf die Faktoren F_2 und F_3 so angepasst, dass sich im Simulationslauf mit $N_2 = 1$ über alle Allokationseinheiten bei $F_4 = 24$ Beobachtungswerten durchschnittlich ein korrigiertes Bestimmtheitsmaß $R^2_{\text{kor}} = 0,6$ beim linearisierten Modell ergab (siehe Tabelle 4-1). Für $N_2 = 2$ betrug diese Zielgröße $R^2_{\text{kor}} = 0,5$. Hintergrund dieser Vorgehensweise ist die Annahme, dass ein unifaktorielles Modell mit 22 Freiheitsgraden hinsichtlich der Beobachtungszahl als gesättigt angesehen werden kann. Dafür spricht auch, dass das korrigierte Bestimmtheitsmaß bei $F_4 = 12$ Beobachtungen im Schnitt nur in etwa um 0,1 darunter liegt. Der Regressor soll aber in dem gesamten Modell nur 60 % bzw. 50 % der Varianz erklären um somit eine pauschale Fehlergröße für die externen nicht zu isolierenden Einflüsse zu generieren. Zur Sicherstellung der Homoskedastizität über alle Beobachtungen mit $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$, bietet sich der Mittelwert dieser korrigierten Bestimmtheitsmaße als einheitliche Zielgröße an. Das R^2_{kor} reduziert sich natürlich mit abnehmender Beobachtungshäufigkeit, jedoch ist ein solcher Wert für nur eine erklärende Variable im ersten Fall schon eher hoch angesetzt. Andererseits geht man von ceteris paribus Annahmen aus, in der andere Einflussvariablen³⁷ über die Beobachtungszeiträume als konstant angesehen werden, was wiederum einen eher

³⁷ zum Beispiel: Saisonale Effekte, Qualität und Beschäftigungsdauer der Reisenden, Konjunktur etc.

hohen Bestimmtheitsgrad rechtfertigt. In der Beswick-Studie (1977) konnte man mit der Besuchszeit nur ca. 50 % der Streuung begründen, LaForge et al. (1984) erzeugen ein R^2 von 0,79 jedoch mit vier, statt nur einer erklärenden Variablen und auch Coughlan/Narashinham (1992, S. 111) erreichen als Bestimmtheitsmaß nicht mehr als 0,496. Das R^2_{korr} des multiplikativen Modells pendelt hierbei um 0,75 bei $N_2 = 1$ und um 0,68 bei $N_2 = 2$. Dies liegt zwar relativ gesehen eher weit über den vergleichbaren Untersuchungen, bezieht sich jedoch nicht wie obige Fälle auf Marktdaten, sondern auf „bereinigte“ Laborkonditionen.

Angesichts dessen sind durchschnittliche korrigierte Bestimmtheitsmaße von 0,6 und 0,5 aus dem linearisierten Modell geeignete Größen zur Fehlergenerierung. Diese Maße gehen auch in Einklang mit dem Ergebnis der Studie über die Variation von Verkaufsanstrengungen³⁸ von LaForge/Cravens (1985, S. 190), die mit ähnlichen Voraussetzungen erstellt wurde. Niedrigere korrigierte R^2 -Koeffizienten würden aufgrund des geringen Einfluss bei diesem Modellcharakter mit nur einer Variablen die Allokation nicht rechtfertigen, während höhere Erklärungswerte mit nur einem Prädiktor entweder unrealistisch hoch sind, oder der hohe Erklärungsgrad zu wenige Verzerrungen verursacht, so dass diese Untersuchung die Fehlereffekte nicht deutlich genug isolieren kann.

Nach Erhalt der problemspezifischen Schätzungen, wurden mit der Optimalitätsbedingung (13) die optimierten Besuchszeiten errechnet und schließlich in die wahre Reaktionsfunktion eingesetzt. Dabei galt $T = 35 \times F_1$. Die Ergebnisse wurden in Form des durchschnittlichen Umsatzes³⁹ pro Einheit dargestellt, um eine Vergleichbarkeit bei der Variation von F_1 zu schaffen und um einen eventuell vorhandenen signifikanten Einfluss von F_1 nachweisen zu können.

Insgesamt wurden 2.916 Fallsituationen⁴⁰ so simuliert, dass jeweils 12 Ergebnisse mit identischer Ausgangssituation zur Berechnung vorlagen. Diese Anzahl errechnet sich aus den Faktorenvariationen wie folgt: sechs Vertriebsgebiete (N_1) mit drei unterschiedlichen Segmentgrößen (F_1) wurden mit neun verschiedenartigen Elastizitätssituationen generiert ($F_2 \times F_3$) und sechs möglichen Beobachtungswerten (F_4) geschätzt. Davon wurden die mittleren drei Beobachtungshäufigkeiten mit zwei alternativen Methoden (F_5) bestimmt. Diese Prozedur wurde zweimal mit variierten Input- und Fehlergrößen (N_2) durchgeführt. Also ergibt sich: $6 \times 3 \times 9 \times (6 + 3) \times 2 = 2916$. Dies gilt zuzüglich der 648 Resultate aus der Betrachtung der subjektiv geschätzten

³⁸ hier allerdings in Form von Anzahl und Länge von Telefonaten mit Kunden

³⁹ gebildet über N_1 und N_2

⁴⁰ subjektiv geschätzte und homogene Daten nicht mitgerechnet

Werte, sowie den Ergebnissen mit der Suggestion einer homogenen Elastizitätsstruktur (vgl. Kapitel 5.2, S. 88).

4.3 Bestimmung der Parameter

Zur Berechnung der optimierten Aufteilung der Ressource nach (13) (S. 15) ist die Kenntnis von jeweils zwei Parametern je Zuordnungseinheit notwendig. Dies erfordert zur deterministischen Bestimmung folglich mindestens zwei Messungen mit bekannter Größe der abhängigen sowie der unabhängigen Variablen. Erfolgt die Optimierung nach (14) (S. 15) so reduziert sich die mindestens erforderliche Datenmenge auf eine Gleichung pro Zuordnungseinheit, jedoch muss der Parameter β_2 dann extern bestimmt werden. Stehen mehr als zwei Gleichungen zur Verfügung, ist das Modell überidentifiziert und es müssen diese Parameter auf Basis aller Daten geschätzt werden, da sich im analytischen Sinne keine eindeutige Lösung ergibt. In der hier durchgeführten Simulationsstudie liegen sowohl im Fall von $F_4 = 2$ als auch bei den subjektiven Schätzungen nach These H₀₄ (S. 26), genau bestimmte Gleichungssysteme vor. Dessen Rechenweg wird im nachfolgenden Kapitel verdeutlicht. Die Schätzung der Parameter für den Fall von überidentifizierten Gleichungssystemen erfolgt dann anschließend durch Unterscheidung der beiden Schätzmethoden OLS und hierarchisch Bayesscher Regression.

4.3.1 Lösung eines genau bestimmten Gleichungssystems

Wie erwähnt kann man ein Gleichungssystem genau bestimmen, wenn die Anzahl der unbekannten Parameter identisch mit der Anzahl der verfügbaren Gleichungen ist. Um wie im hier bearbeiteten Fall jeweils diese α und β_2 -Parameter zu ermitteln, werden also zwei gegebene Umsatzreaktionsgleichungen (hier a und b) benötigt. Ausgangssituation bei $F_4 = 2$ ist dann also:

$$(40) \quad S_{ia} = \alpha_i t_{ia}^{\beta_{2i}} \quad \text{und} \quad S_{ib} = \alpha_i t_{ib}^{\beta_{2i}}$$

umgeformt ergibt sich:

$$(41) \quad \frac{S_{ia}}{t_{ia}^{\beta_{2i}}} = \alpha_i = \frac{S_{ib}}{t_{ib}^{\beta_{2i}}}$$

$$(42) \quad \frac{S_{ia}}{S_{ib}} = \frac{t_{ia}^{\beta_{2i}}}{t_{ib}^{\beta_{2i}}} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{S_{ia}}{S_{ib}}\right) = \beta_{2i} \ln\left(\frac{t_{ia}}{t_{ib}}\right)$$

$$(43) \quad \frac{\ln\left(\frac{S_{ia}}{S_{ib}}\right)}{\ln\left(\frac{t_{ia}}{t_{ib}}\right)} = \beta_{2i}$$

den anderen Parameter errechnet man einfach per Umformung der Zielfunktion und Einsetzen in diese:

$$(44) \quad \alpha_i = \frac{S_{ia}}{t_{ia}^{\beta_{2i}}} \text{ oder besser}$$

$$(45) \quad \alpha_i = \frac{\bar{S}_i}{\bar{t}_i^{\beta_{2i}}} \text{ mit } \bar{S}_i = \frac{S_{ia} + S_{ib}}{2} \text{ und } \bar{t}_i = \frac{t_{ia} + t_{ib}}{2}.$$

Die Ermittlung aus den Durchschnittswerten gemäß (45) ist dann nötig, wenn die errechnete Marketinginstrument-Elastizität den zulässigen Wertebereich verfehlt (siehe Kapitel 4.5 Truncation).

4.3.2 Regressionsanalyse mit LS- bzw. OLS-Schätzung

Für den Fall von überidentifizierten Modellen müssen die Parameter derart bestimmt werden, dass ein zwangsläufig verbleibender Restfehler minimiert wird. Dies kann unter anderem mit der Regressionsanalyse geschehen. Sie wird angewandt wenn sowohl die abhängige als auch die unabhängige(n) Variable(n) metrisch skaliert sind und die Struktur der unterstellten Funktion bekannt ist. Handelt es sich bei jener um ein lineares Modell der Form

$$(46) \quad Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_n x_n + \varepsilon \text{ mit } \varepsilon \sim N(0, \sigma^2),$$

spricht man von Linearregression, einem Spezialfall dieses Analyseverfahrens. Sie stützt sich auf die Tatsache, dass zwischen erklärender und erklärende(r/n) Variable(n) ein linearer Zusammenhang besteht (Greene 1993, S. 143 ff) sowie einer normalverteilten Fehlergröße ε mit Erwartungswert 0. Für die Anwendung von hier angewandten Least Squares Schätzungen (LS) ist die Linearität Voraussetzung.

Bei diesem Schätzmodell der „Least Squares“ oder auch Kleinst-Quadrat-Schätzung handelt es sich um das wohl gängigste Verfahren der Regressionsanalyse. Vorausgesetzt man kann sowohl Heteroskedastizität als auch eine Abhängigkeit der Schätzfehler untereinander ausschließen, kann die einfache Kleinst-Quadrat-Schätzung oder „Ordinary-Least-Squares“ (OLS) Methode Anwendung finden. Deshalb soll zunächst untersucht werden, ob alle Voraussetzungen zur Anwendung von OLS vorliegen.

4.3.2.1 Linearität

Bei den hier zu schätzenden Modellen handelt es sich ausschließlich um multiplikative Reaktionsfunktionen⁴¹ der Form $S_{ij} = \alpha_i t_{ij}^{\beta_{2i}} e^{\varepsilon_{ij}}$. Diese Funktionsform lässt sich durch Logarithmierung wie folgt in ein lineares Modell umwandeln:

$$(47) \quad S_{ij} = \alpha_i t_{ij}^{\beta_{2i}} e^{\varepsilon_{ij}} \Leftrightarrow \ln(S_{ij}) = \ln(\alpha_i) + \beta_{2i} \ln(t_{ij}) + \varepsilon_{ij}.$$

Die Anforderung der Linearität ist also mit logarithmierten Werten für das vorliegende Problem erfüllt. Nimmt man an, dass $\ln(S_{ij}) = y_{ij}$, $\ln(t_{ij}) = x_{ij}$ und $\ln(\alpha_i) = \beta_{1i}$ dann gilt für das Modell

$$(48) \quad y_{ij} = \beta_{1i} + \beta_{2i} x_{ij} + \varepsilon_{ij} \text{ oder}$$

$$(49) \quad y = X\beta + \varepsilon \text{ mit } \varepsilon \sim N(0, U\sigma^2),$$

also die Grundform der Linearregression.

4.3.2.2 Homoskedastizität und Abhängigkeit der Schätzfehler

Weicht die Varianz der Schätzfehler ε proportional bzw. umgekehrt proportional zur unabhängigen Variablen ab, so spricht man von Heteroskedastizität, einem Verletzungskriterium für die Anwendung von OLS. Wie in Kapitel 4.1 erläutert sollen vor allem die Auswirkungen von wenigen Beobachtungswerten isoliert betrachtet werden. Deshalb ergibt sich schon bei der Erzeugung der Marktdaten die Notwendigkeit, die Anforderung der Homoskedastizität zu erfüllen. Die in diesem Beitrag verwendeten Fehlerwerte ε_{ij} wurden wie in Tabelle 4-1 erwähnt als normalverteilte Zufallsvariablen der Form $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$ generiert und gemäß (47) mit den logarithmierten Umsatzwerten $\ln(S_{ij})$ addiert. Dabei wurde jeder Durchlauf mit der einheitlichen Varianz σ^2 gestartet. Aufgrund ihrer zufälligen Ziehung mit Zurücklegen können sie keine Heteroskedastizität verursachen und sind auch von einander unabhängig.

4.3.2.3 Autokorrelation

Werden die Daten auf Basis aufeinander folgender Perioden erhoben (Zeitreihendaten), so besteht die Gefahr, dass diese nicht voneinander unabhängig sind. Die bei Zeitreihendaten häufig auftretenden Verzerrungen durch Autokorrelation erfordern Schätzungen mit der verwandten Generalized Least Squares Methode (GLS, vgl. Greene (1990, S. 413ff)). Zwar handelt es sich bei den erhobenen Daten in der Praxis möglicherweise manchmal um Zeitreihendaten, jedoch sollen analog zum Fall der

⁴¹ auch „double log“ oder „exponentiell gewichtete“

Heteroskedastizität bei dieser isolierten Betrachtung der Beobachtungszahl andere verzerrende Effekte ausgeschlossen sein. Wie bereits erwähnt, wurden sowohl die Prädiktoren t bzw. x als auch die Fehlervariablen ε unabhängig voneinander erzeugt, weshalb sich die Problematik der Autokorrelation hier folglich nicht stellt.

4.3.2.4 Modell

Bei der OLS-Schätzung werden die Parameter eines linearen Modells so bestimmt, dass die Residualgrößen minimiert werden. Dies bedeutet nichts anderes, als eine Gerade durch die vorliegende zweidimensionale Punktwolke, jeweils bestehend aus einer abhängigen und der unabhängigen Variablen so zu legen, dass die quadrierte Abweichung aller Punkte zu dieser Geraden minimal ist.

$$(50) \quad \min_{\beta} \varepsilon = (y - X\beta)^T (y - X\beta)$$

Für den hier vorliegenden bivariaten Fall mit β_1 als Konstante, besteht die erste Spalte von X nur aus Einsen. Daher bietet sich alternativ auch die Schreibweise an:

$$(51) \quad \min_{\beta} \sum_j \varepsilon_j^2 = \sum_j (y_j - \beta_1 - \beta_2 x_j)^2$$

Eine minimale Residualgröße ε ergibt sich für den Parameter der Steigung (β_2) durch das Verhältnis aus Kovarianz und Varianz mit

$$(52) \quad \beta_2 = \frac{\sum_j (x_j - \bar{x})(y_j - \bar{y})}{\sum_j (x_j - \bar{x})^2}$$

und für den Achsenabschnitt (β_1) mit

$$(53) \quad \beta_1 = \bar{y} - \beta_2 \bar{x}.$$

4.3.2.5 Anpassung und Signifikanz

Die geringe Anzahl an Freiheitsgraden im Bereich von $F_4 < 8$ hat natürlich zur Folge, dass ein großer Teil der Schätzer nicht signifikant ist. Auch die Anpassung des Gesamtmodells erreicht häufig nur ungenügende Werte. So sind die korrigierten Bestimmtheitsmaße R^2_{kor} nicht selten sogar negativ. Daher dürften all diese unzureichenden Ergebnisse regulär nicht zur Bestimmung der Parameter einer Umsatzreaktionsfunktion benutzt werden. Aber in dieser Studie soll sich genau über diese Anforderung hinweggesetzt werden, um eben zu untersuchen, ob sie bei einer Allokation von knappen Ressourcen überhaupt notwendig ist. Selbstverständlich eignen sich

die Schätzungen auf zu wenigen Beobachtungswerten nicht zur Bestimmung einer Marktreaktionsfunktion, aus welcher die Ableitung von Zielen wie in Albers/Skiera (2002) erfolgen soll. Die Ignorierung der Anforderung der Signifikanz kann nur deshalb erfolgen, weil die absolut zu verteilende Menge des Marketinginstruments bereits vorher festgelegt wurde, und somit die Risiken von Fehlinvestitionen eher gering sind.

4.3.3 Schätzmodell mit Hierarchical Bayes

Einen alternativen Ansatz zur Schätzung erreicht man mit der in Kapitel 3 vorgestellten Methode der hierarchisch Bayesschen Regression. Dabei sei von im Vergleich zur OLS identischen Ausgangsdaten ausgegangen, welche dieses Verfahren jedoch wie angeführt in anderer Weise verarbeitet.

4.3.3.1 Markovkern

Lindley und Smith (1972) beschreiben Anwendungsfälle für multivariat lineare hierarchische Bayes Strukturen der Form $E(y_i) = \mu_i = X_i\beta_i$. Hierbei gibt wie gewohnt β_i die zu schätzenden Parametervektoren der k Zuordnungseinheiten (i) an, X_i und y_i gelten als beobachtbare Werte. In Kapitel 4.3.2.1 wurde schon gezeigt, dass y_i jeweils mit $N(\mu_i, \sigma^2)$ normalverteilt ist. Somit gilt für den multivariaten Fall

$$(54) \quad y_i \sim N(X_i\beta_i, U_m\sigma^2)$$

pro Segment i , mit U_m als Einheitsmatrix der Dimension m und mit m als Anzahl der Beobachtungswerte j . Anhand eines linearen Modells entwickeln Gelfand et al. (1990) einen hierarchischen Entwurf über die Gewichtszunahme von Ratten nach dessen Geburt, welcher, wie der vorliegende Fall, zwei zu schätzende bivariat verteilte Parameter in einem linearen Modell beinhaltet. Dieser Ansatz bot eine ideale Basis zur Erstellung eines Bayesschen Verfahrens für die Schätzung von Parametern zur gewinnmaximalen Verteilung knapper Ressourcen, wobei die Struktur und die Parametrisierung in weiten Teilen übernommen werden konnten.

Da die priori-Parameter ebenso wie deren Verteilungen unbekannt sind und innerhalb des Verfahrens mit geschätzt werden sollen, ergibt sich daraus das folgende posteriori-Modell

$$(55) \quad p(\beta, \beta_0, \sigma^2, \Sigma_0 | y) \propto p(\beta, \beta_0, \sigma^2, \Sigma_0) p(y | \beta, \beta_0, \sigma^2, \Sigma_0) .$$

Für den multivariat normalverteilten Ansatz benötigt man zur Bestimmung statt einzelner Varianzen σ_β^2 eine Kovarianzmatrix Σ_0 , um eventuell vorhandene Korre-

tionen der beiden Parameter β_1 und β_2 bei der Inferenz mit zu beachten. Dabei sei β_0 ein Erwartungswertvektor und Σ_0 eine Kovarianzmatrix der Prioris für die Verteilungen von β_i , also ist $\beta_i \sim N(\beta_0, \Sigma_0)$. Im Vergleich zum im Kapitel 3.3 erläuterten Modell (Abbildung 3-2), handelt es sich hier also um bivariat verteilte Parameter. Die Unterschiede gehen aus Abbildung 4-1 unmittelbar hervor.

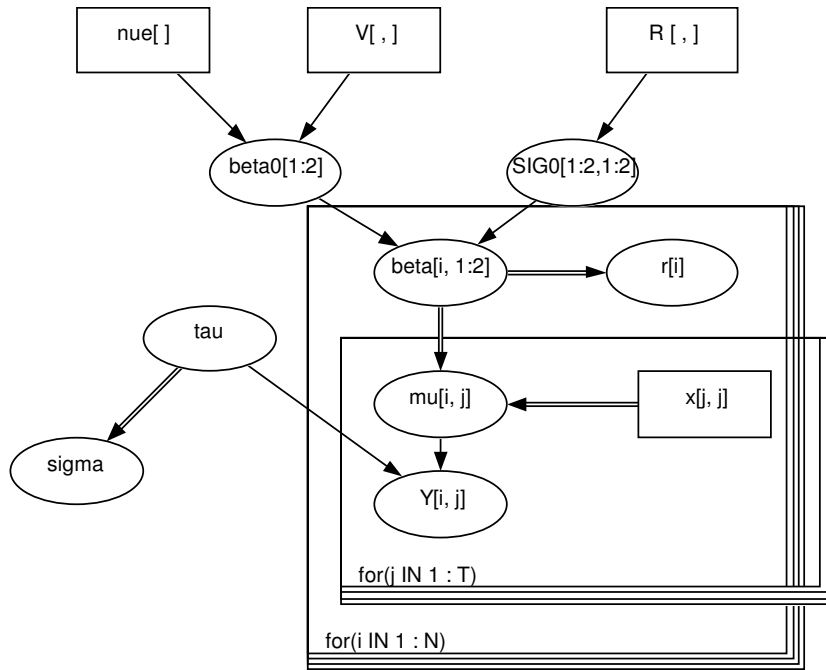


Abbildung 4-1: Grafische Darstellung des bivariaten hierarchischen Schätzmodells⁴²

Zur Bestimmung der relevanten Verteilungsmomente erhält man durch Umformung einen Markovkern, aus dem per Gibbs Sampling dann Stichproben gezogen werden können.

$$\begin{aligned}
 p(\beta|X, y, \beta_0, \sigma^2, \Sigma_0) &\propto p(\beta)p(y|X, \beta, \sigma^2) \\
 p(\sigma^2|X, y, \beta) &\propto p(\sigma^2)p(y|X, \beta, \sigma^2) \\
 p(\beta_0|X, y, \beta, \Sigma_0) &\propto p(\beta_0)p(y|X, \beta) \\
 p(\Sigma_0|X, y, \beta, \beta_0) &\propto p(\Sigma_0)p(y|X, \beta)
 \end{aligned}
 \tag{56}$$

Im folgenden sollen die Produktbeziehungen der rechten Seite noch als Verteilungsformen dargestellt werden. Für β_i gilt also $\beta_i = \beta_0 + \varepsilon_1$ mit $\varepsilon_1 \sim N(0, \Sigma_0)$. Die β_0 wiederum unterliegen als Priori einer bivariaten Normalverteilung ($\beta_0 \sim N(v, V)$), folglich ist $\beta_0 = v + \varepsilon_2$ mit $\varepsilon_2 \sim N(0, V)$. Auch hier wird mit V wieder eine, diesmal

⁴² Für Zusammenhänge der Variablen des Markovkerns siehe (77), S. 56 und Code 1, S. 64

konstante, Kovarianzmatrix unterstellt. Um die Verteilungen der Hyperprioris v und V (obere Ebene Abbildung 4-1) proportional zu den Priori verlaufen zu lassen, werden die Parameter so gewählt, dass die Normalverteilung annähernd so flach verläuft wie die Gleichverteilung. Letztere wird aber bewusst vermieden, um für die Parameterschätzer über Verteilungen des gleichen Typs auf den übergeordneten Hierarchieebenen zu verfügen. Der Hintergrund hierfür liegt einerseits in der vereinfachten Programmierung mit WinBUGS, andererseits in einer übersichtlicheren Darstellung bei der Berechnung.

4.3.3.2 Berechnung der posteriori-Verteilungen

Für die Likelihood ist bekannt, dass sie normalverteilt ist mit Erwartungswert $E(y_i) = X_i\beta_i$ und Varianz σ^2 , also ist die Wahrscheinlichkeit des bedingten y_i ein multivariater Gauss-Prozess (Greene, 1993, S. 75) mit

$$(57) \quad p(y_i|X_i, \beta_i, \sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{m}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(y_i - X_i\beta_i)^T(y_i - X_i\beta_i)\right].$$

Dabei stellt y_i den Ergebnisvektor, X_i die Inputdatenmatrix und β_i den Parametervektor der Einheit i dar, welcher sich im vorliegenden Fall aus den beiden Regressionskoeffizienten β_1 und β_2 zusammensetzt. Der nicht exponentielle Term kann aufgrund der bedingten Wahrscheinlichkeit als konstant betrachtet werden und daher wegfallen. Dann ergibt sich

$$(58) \quad p(y_i|X_i, \beta_i, \sigma^2) \propto \exp\left[-\frac{1}{2}(y_i - X_i\beta_i)^T \sigma^{-2}(y_i - X_i\beta_i)\right]$$

Die priori-Annahmen für β_i folgen der Verteilung $N(\beta_0, \Sigma_0)$, also gilt analog

$$(59) \quad \begin{aligned} p(\beta_i) &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \Sigma_0^{-1} \exp\left[-\frac{1}{2}(\beta_i - \beta_0)^T \Sigma_0^{-1}(\beta_i - \beta_0)\right] \\ &\propto \exp\left[-\frac{1}{2}(\beta_i - \beta_0)^T \Sigma_0^{-1}(\beta_i - \beta_0)\right] \end{aligned}$$

dann verhält sich die posteriori-Verteilung als Produkt der beiden vorgenannten Verteilungen entsprechend

$$\begin{aligned}
 (60) \quad p(\beta_i | X_i, y_i, \sigma^2 \beta_0, \Sigma_0) &\propto \exp \left[-\frac{1}{2} (y_i - X_i \beta_i)^T \sigma^{-2} (y_i - X_i \beta_i) \right] \\
 &\times \exp \left[-\frac{1}{2} (\beta_i - \beta_0)^T \Sigma_0^{-1} (\beta_i - \beta_0) \right] \\
 &= \exp \left(-\frac{1}{2} (y_i - X_i \beta_i)^T \sigma^{-2} (y_i - X_i \beta_i) + (\beta_i - \beta_0)^T \Sigma_0^{-1} (\beta_i - \beta_0) \right)
 \end{aligned}$$

Per Integration ergeben sich dann nach Lindley/Smith (1972, S. 5) als Verteilungsparameter

$$(61) \quad (\beta_i | X_i, y_i) \sim N(Q_i q_i, Q_i), \text{ wobei}$$

$$\begin{aligned}
 (62) \quad Q_i &= (X_i^T \sigma^{-2} X_i + \Sigma_0^{-1})^{-1}; \\
 q_i &= \sigma^{-2} X_i^T y_i + \Sigma_0^{-1} \beta_0
 \end{aligned}$$

Für die priori-Parameter gilt nach Gelfand et al. (1990, S. 978) analog

$$(63) \quad (\beta_0 | \beta_i, \Sigma_0) \sim N(Cc, C) \text{ mit}$$

$$\begin{aligned}
 (64) \quad C &= (n\Sigma_0^{-1} + V^{-1})^{-1}; \quad \text{und} \quad \bar{\beta} = \sum_{i=1}^n \frac{\beta_i}{n}. \\
 c &= n\Sigma_0^{-1} \bar{\beta} + V^{-1}v
 \end{aligned}$$

Bei nicht-informativer Hyperpriori wird durch die Wahl einer sehr hohen Varianz V der zweite Summand in (64) jeweils annähernd 0. Dadurch entfällt auch die Berücksichtigung von v als Mittelwert. Bei Annahme einer unbegrenzten Gleichverteilung mit $p(\beta_0) \sim U[-\infty, \infty]$ entfielen mit $V^{-1} = 0$ die zweiten Summanden sogar komplett.

Der Verlauf der Gammaverteilung ist gemäß Tanner (1996, S. 10) definiert als

$$(65) \quad \kappa \sim Ga(a, b)$$

$$(66) \quad p(\kappa) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} \kappa^{a-1} \exp(-b\kappa) \propto \kappa^{a-1} \exp(-b\kappa)$$

$$(67) \quad \text{mit } \Gamma(a) = \int_0^{\infty} y^{a-1} \exp(-y) dy;$$

dann folgt daraus für die bedingte Verteilung der Varianz σ^2 das Produkt aus $p(\sigma^2)$ und $p(y | X, \beta, \sigma^2)$, wobei gilt

$$(68) \quad p(\sigma^2) \sim IG(\gamma_1, \gamma_2);$$

$$(69) \quad p(y_i | X_i, \beta_i, \sigma^2) \sim N(X_i \beta_i, \sigma^2).$$

Zusätzlich gelte ab jetzt mit $\sigma^{-2} = \tau \sim Ga(\gamma_1, \gamma_2)$ analog zu Gelfand et al. (1990) die inverse Varianz als Präzisionsparameter und somit resultiert

$$(70) \quad p(\tau) \propto \tau^{\gamma_1-1} \exp(-\gamma_2 \tau)$$

$$(71) \quad p(y_i | X_i, \beta_i, \tau) \propto \tau^{\frac{n}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2} \left((y_i - X_i \beta_i)^T \tau (y_i - X_i \beta_i)\right)\right].$$

Als Produkt ergibt sich dann für die posteriori-Verteilung

$$(72) \quad p(\tau | X_i, y_i, \beta_i) \propto \tau^{\gamma_1-1} \exp(-\gamma_2 \tau) \tau^{\frac{n}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (y_i - X_i \beta_i)^T \tau (y_i - X_i \beta_i)\right]$$

$$(73) \quad = \tau^{\gamma_1 + \frac{n}{2} - 1} \exp\left[-\tau \left(\gamma_2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (y_i - X_i \beta_i)^T (y_i - X_i \beta_i)\right)\right]$$

und so sieht man, dass abgeleitet aus (66) die volle bedingte Verteilung für τ ebenfalls wieder gammaverteilt ist. Dabei stellt die Summe aus γ_1 und $n/2$ den ersten und der Inhalt der runden Klammern den zweiten Parameter der Gammaverteilung wie folgt dar

$$(74) \quad \tau \sim G\left(\gamma_1 + \frac{n}{2}; \gamma_2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (y_i - X_i \beta_i)^T (y_i - X_i \beta_i)\right)$$

$$(75) \quad \sigma^2 \sim IG\left(\gamma_1 + \frac{n}{2}; \gamma_2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (y_i - X_i \beta_i)^T (y_i - X_i \beta_i)\right).$$

Die Varianz σ^2 verläuft also bei flachverteilter Priori mit $\gamma_1, \gamma_2 \rightarrow 0$ parallel zu der inversen Gammaverteilung mit den o. g. Parametern.

Laut Gelman et al. (1995, S. 481) benutzt man für die konjugierte priori-Verteilung von Varianz-Kovarianz-Matrizen multivariat verteilter Parameter die Wishart-Verteilung⁴³ bzw. dessen Inverse. Sie ist nichts anderes, als die Gammaverteilung in multivariater Form. Dabei ist die Wishart-Verteilung für Matrizen definiert, dessen sämtliche Komponenten Zufallsvariablen sind. Verteilungsparameter der Wishart-Verteilung setzen sich aus einer quadratischen Matrix und der Anzahl an Freiheitsgraden

⁴³ vgl. Tanner (1996, S. 11)

zusammen. Aufgrund des multivariaten Charakters von β_i ist daher die inverse Kovarianzmatrix Σ_0^{-1} laut Gelfand et al. (1990, S. 979) auch invers-wishartverteilt mit

$$(76) \quad \Sigma_0^{-1} \sim W\left(\left[\sum_{i=1}^n (\beta_i - \beta_0)^T (\beta_i - \beta_0) + v \times R\right]^{-1}, v\right)$$

und den Parametern R und v wobei R eine quadratische Matrix der gleichen Dimension wie Σ_0 ist. Über die Matrix R kann der entsprechende Kenntnisstand von Σ_0 in dem Modell berücksichtigt werden. Für kleine v kann von eher nicht-informativen Priori ausgegangen werden, aber für einen gültigen Verlauf der Verteilung muss wiederum gelten $v \geq n$, also mindestens die Anzahl an zu schätzenden Parametern⁴⁴. Dies sind dann alle Parameter, die zur Schätzung für dieses Bayes-Modell mit dem Gibbs Sampler benötigt werden.

Nach Initialisierung der zu schätzenden Variablen β_i , β_0 , Σ_0 und σ^2 werden nun aus den folgenden bedingten Verteilungen in Iteration u sukzessive Stichproben gezogen.

$$(77) \quad \begin{aligned} p(\beta_i^{(u)} | Y, \beta_0^{(u-1)}, \Sigma_0^{-1(u-1)}, \sigma^{2(u-1)}) &\sim N(Q_i q_i, Q_i) \\ p(\beta_0^{(u)} | Y, \beta^{(u)}, \Sigma_0^{-1(u-1)}, \sigma^{2(u-1)}) &\sim N(Cc, C) \\ p(\Sigma_0^{-1(u)} | Y, \beta^{(u)}, \beta_0^{(u)}, \sigma^{2(u-1)}) &\sim W\left(\left[\sum_{i=1}^n (\beta_i - \beta_0)(\beta_i - \beta_0)^T + vR\right]^{-1}, v\right) \\ p(\sigma^{2(u)} | Y, \beta^{(u)}, \beta_0^{(u)}, \Sigma_0^{-1(u)}) &\sim IG\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^n (y_i - X_i \beta_i)^T (y_i - X_i \beta_i)\right]\right) \end{aligned}$$

Damit ist der Markovkern als Voraussetzung zum Gibbs Sampling komplett definiert. Aus dem Ziehen dieser Stichproben kann man für jeden Parameter neben dem Erwartungswert auch andere Lageparameter wie Konfidenzintervalle und Quantile sowie die Varianzen bestimmen.

Zum Sampeln sind nun noch quantitative Annahmen bezüglich der Hyperpriori-Parameter erforderlich. Außerdem soll noch festgelegt werden welche Initialisierungswerte eine schnelle Konvergenz versprechen, sowie ab welcher Iteration der burn-in erfolgt ist.

4.3.3.3 Annahmen des Schätzmodells

Ausgangssituation sei die Zuordnung von knappen Ressourcen, aufzuteilen auf $n = F_1$ Zuordnungseinheiten mit der logarithmierten Umsatzreaktionsfunktion

⁴⁴ vgl. Gelman et al. (2000, S.480f)

$$(78) \quad y_{ij} = \beta_{1,i} + \beta_{2,i}x_{ij} \text{ mit } i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m$$

Zur Schätzung der beiden Parameter liegen pro Einheit alternativ $m = 3, 4, 8$ Umsatzwerte y mit deren zugehörigen Prädiktoren x vor. Die Fehler seien homoskedastisch und normalverteilt, so dass mit $y_{ij} \sim N(\beta_{1,i} + \beta_{2,i}x_{ij}, \sigma^2)$ unabhängig von n oder m eine einheitliche Fehlervarianz σ^2 vorliegt. Für die Parameter β_i gilt wie oben:

$$(79) \quad \begin{pmatrix} \beta_{1,i} \\ \beta_{2,i} \end{pmatrix} \sim N \left\{ \begin{pmatrix} \beta_{0_1} \\ \beta_{0_2} \end{pmatrix}, \Sigma_0 \right\}$$

Für σ^2 , β_0 und Σ_0 werden folgende priori-Annahmen getroffen:

Es gilt Unabhängigkeit, also $p(\sigma^2, \Sigma_0^{-1}, \beta_0) = p(\sigma^2)p(\Sigma_0^{-1})p(\beta_0)$. Um die Schätzungen allein auf den Erhebungsdaten basieren zu lassen, werden keine (so genannte „nicht-informative“) Hyperpriori-Annahmen getroffen. Dafür folgen entsprechend Gilks et al. (1996 S. 28) die Verteilungen einem derart flachen Verlauf, dass daraus keine Vorabinformationen gewonnen werden können:

$$(80) \quad \beta_0 \sim N\{\nu, V\} \text{ mit } \nu = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} 10000 & 0 \\ 0 & 10000 \end{pmatrix}.$$

Die inverse Kovarianz-Matrix verläuft entsprechend Invers-Wishart verteilt

$$(81) \quad \Sigma_0^{-1} \sim W\{(\nu R)^{-1}, \nu\}, \text{ mit } R = 2 \times 2, \nu = \text{Freiheitsgrade.}$$

Für die Spezifizierung des Parameters R ist eine grobe Betrachtung der Datenstrukturen des Allokationsmodells notwendig. Zur Unterstellung einer strikt nicht-informativen priori-Verteilung müsste $R^{-1} = 0$ gelten. Schafer (2000, S. 150 ff) regt jedoch an, im Falle von sehr karger Datenbasis zur Stabilisierung der Inferenz eine grob strukturierte priori-Information zuzulassen. Daher sollte die Parametermatrix R wenigstens in groben Zügen auf das Modell zugeschnitten sein. Auch Gelfand et al. (1990, S. 979) geben in ihrem Modell mit dem gleichnamigen Parameter R ebenfalls eine vage priori-Kenntnis an.

Bei Σ_0^{-1} handelt es sich um die Varianz-Kovarianzmatrix der Parameterschätzer von β_1 und β_2 . Dabei sei zunächst eine Unkorreliertheit der beiden Parameter unterstellt, so dass nur die Hauptdiagonale von null verschieden ist. Die β_1 liegen in logarithmierter Form vor, so dass eine Varianz in Höhe von 10 den ursprünglichen Parameter bereits sehr breit schwanken lässt. Mit β_2 als Elastizitätsparameter ist dessen zulässiger Wertebereich wiederum von 0 bis 1 limitiert, so dass eine Varianz von 0,5 (Standard-

abweichung = 0,71) mit einem Teil der Stichproben sogar außerhalb des zulässigen Intervalls liegt und daher als allenfalls minimal informativ gelten kann. Mit

$$(82) \quad R = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{pmatrix}$$

erhält man also einen Hyperpriori-Parameter, welcher zwar nicht strikt nicht-informativ ist, jedoch höchstens Annahmen über den Modelltyp der multiplikativen Funktion impliziert, aber keinerlei datenspezifische Auskünfte gibt. Die Freiheitsgrade ν sollen bei wenigen priori-Informationen so niedrig wie möglich sein, daher wird hier mit $\nu = 2$, mit dem Rang der Matrix Σ_0 , die minimale Größe gewählt. Für die Fehlervarianz über alle y gilt dann wiederum mit

$$(83) \quad \sigma^2 = \frac{1}{\sqrt{\tau}}, \tau \sim Ga(0,001; 0,001)$$

eine sehr flache Verteilung.

Abschließend müssen nun noch die Startwerte für alle zu schätzenden Parameter festgelegt werden. Eine gute Initialisierung ist wichtig für eine schnelle Konvergenz der Parameter, um diese aber beobachtbar zu machen, sollte der Anfangswert außerhalb des Zielbereiches für die Konvergenz liegen. Daher scheint es angebracht die normalverteilten Zufallsvariablen β_i und β_0 durchweg mit 0 zu initialisieren. So starten die Stichproben außerhalb des zu erwartenden Konvergenzbereiches, sind aber gleichzeitig nicht so weit davon entfernt, als dass man eine zu hohe Iterationszahl für den burn-in berücksichtigen muss. Die gammaverteilte Variable τ startet mit 1, da ihre Inverse mit dem Startwert 0 nicht definiert wäre. Ähnlich verhält es sich bei der wishartverteilten Kovarianzmatrix Σ_0 , bei der die Hauptdiagonale mit den Werten 1 initialisiert wird⁴⁵.

Da, wie angekündigt, die Konvergenz visuell begutachtet werden soll, wurden einige Stichproben vorab gezogen, um anhand der Plots die Entwicklung der Parameterwerte zu beobachten. In Abbildung 4-2 sind mit $\beta_{9,1}$, $\beta_{9,2}$, σ , $\Sigma_{0,1,1}$, $\Sigma_{0,2,2}$ einige Beispiele für willkürlich ausgewählte Parameter grafisch dargestellt. Dort ist die doch sehr schnelle Konvergenz gut sichtbar. Für die Parameter β_9 wurden zur Veranschaulichung drei Ketten mit den Initialisierungswerten $u_a^0 = (0, 0)$; $u_b^0 = (10, 1)$; $u_c^0 = (-10, -1)$ abgebildet. Als burn-in wurden 1000 Iterationen bestimmt. Diese Anzahl an Iterationen

⁴⁵ weitere Details in Kapitel 4.4, Code 3

reicht zur Konvergenz für die hier zu schätzenden maximal 84 Parameter völlig aus, wie sich aus der Betrachtung der Konvergenzplots ergibt.

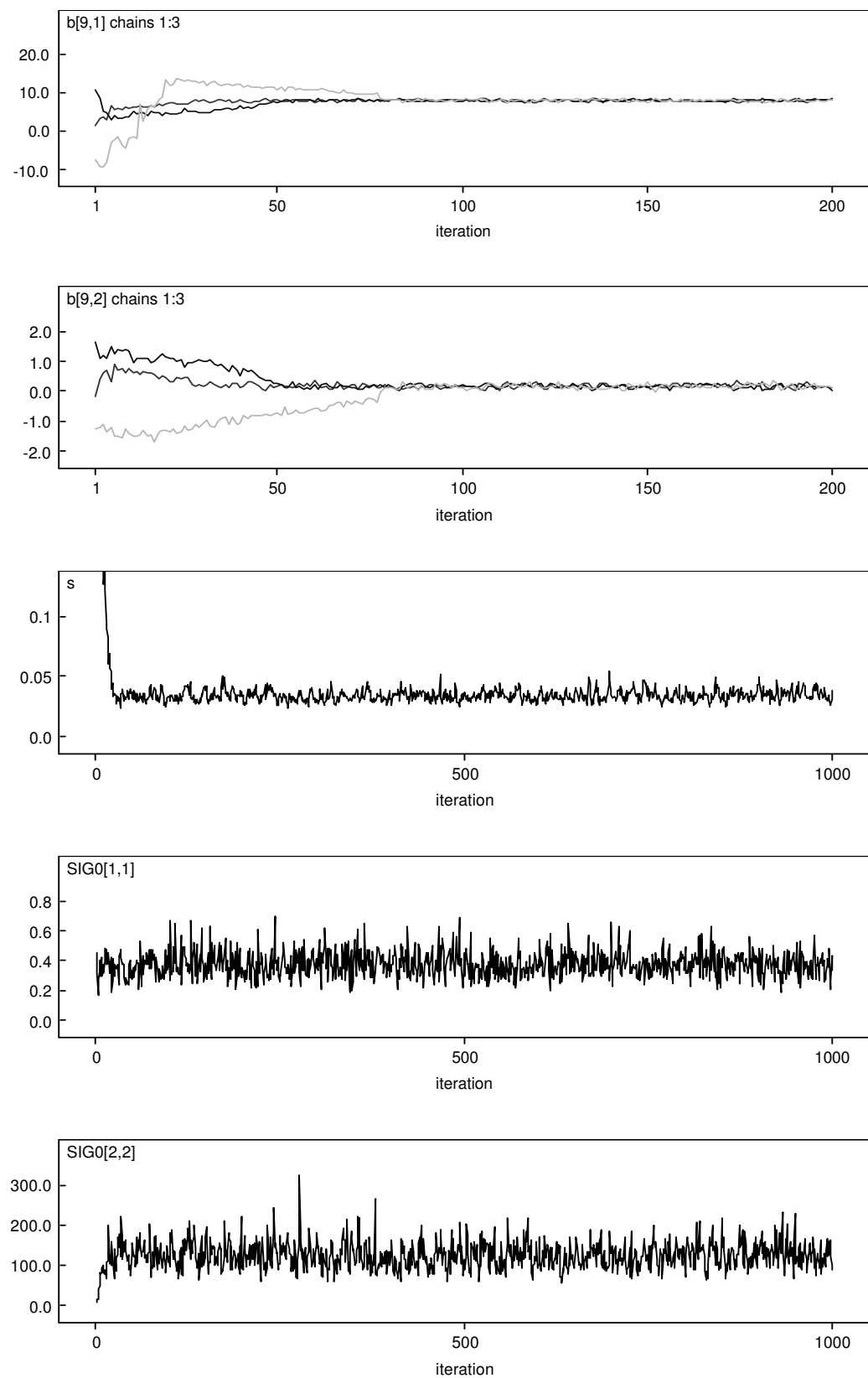


Abbildung 4-2: Sichtbare Konvergenz einiger Parameter nach wenigen Iterationen

Mit dieser Ausgangssituation kann nun weiter gemäß (77) gesampelt werden. Als Stichprobengröße wurde die Anzahl von 40000 Iterationen gewählt. Die Erwartungswerte der Parameter variieren ab dieser Größenordnung nur noch im Bereich der vierten Nachkommastelle oder dahinter und sind daher für die angestrebte Genauigkeit ausreichend. Zur Berechnung wurde eine lange Markovkette erzeugt, wobei jedoch sämtliche der 40000 Iterationen mit in die Berechnungen einbezogen wurden. Von der in Kapitel 3.4 befürchteten Verzerrung durch Autokorrelation ist bei dieser hohen Stichprobenzahl nicht auszugehen.

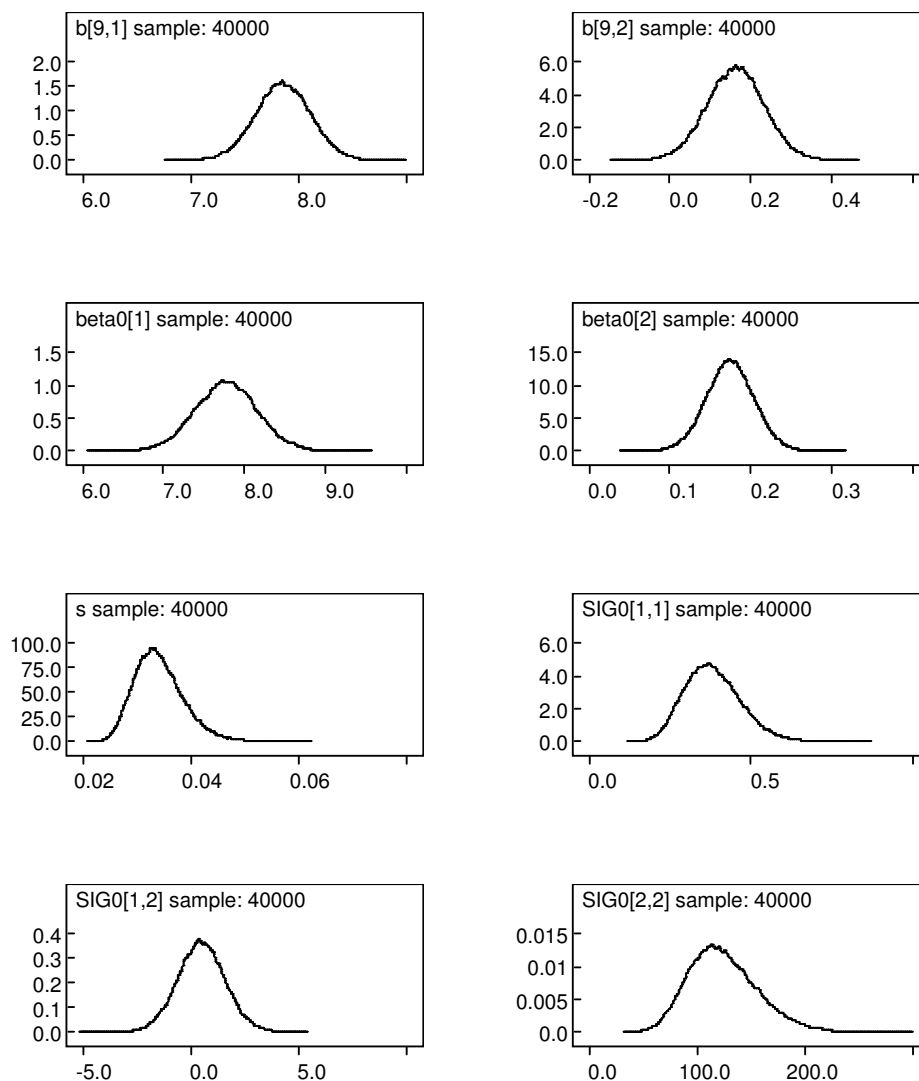


Abbildung 4-3: Verteilung ausgewählter Parameter nach 40000 Iterationen

Abbildung 4-3 zeigt einige zufällig ausgewählte Dichtefunktionsplots der zu bestimmenden Parameter. Im Falle der Erwartungswerte zeigt sich erwartungsgemäß der Verlauf einer gaußschen Glocke, während die Varianzen einer rechtsschiefen Verteilung folgen. Die Plots zeigen dabei nur die Ergebnisse der Samples nach erfolgter Konvergenzziehung, also von der Iteration u^{1001} bis u^{41000} .

4.4 Software

4.4.1 Excel Tabellen

Als Softwarebasis zur Generierung dieser Simulationsstudie dienten Microsoft Excel Dateien. Obwohl sich Excel nicht unbedingt als klassische höhere Programmiersprache versteht, so liegen doch einige Vorteile auf der Hand. Die Darstellung in Tabellen erweist sich als deutlich übersichtlicher im Vergleich zu gängiger Software wie S-Plus, Gauss oder SAS. Viele übliche Verfahren der statistischen Inferenz sind für die Schätzung und Erstellung von Simulationsdaten in dem Funktionseditor bereits vorprogrammiert. Durch die Übersicht von nahezu allen Zwischenergebnissen konnten Programmfehler schnell ausgemacht und korrigiert werden. Natürlich erwiesen sich vor allem der routinierte Umgang sowie die vielen vorhandenen Schnittstellentools als attraktive Eigenschaften, um die Programmierung mit Hilfe von Excel durchzuführen. Die Möglichkeit über Makro-Funktionen sich wiederholende Rechenoperationen per Mausklick durchzuführen, erlaubt somit auch neben der statischen Darstellung der Ergebnistabellen die Gestaltung der teilweise benötigten dynamischen Anpassung der Daten bei neuen Simulationsläufen⁴⁶. So ermöglicht beispielsweise die Zielwertsuche die schnelle und einfache Kalibrierung des in (11) (S. 14) beschriebenen Parameters β^* . Excel scheitert zudem auch nicht an der Berechnung rekursiver Programmroutinen. Hierbei handelt es sich um Programme, welche sich bei ihrer Ausführung selbst wiederholt aufrufen. Da beim Start einer solchen rekursiven Routine nicht klar ist, wie oft dessen Aufruf im weiteren Verlauf noch erfolgt, ist die Speicherverwaltung mit derlei Routinen generell schwierig. Im Verlauf des Simulationsexperimentes arbeitete Excel jedoch bei der Berechnung dieser Rekursionen grundsätzlich zuverlässig.

Einzig problematisch ist die Programmierung von iterativen Funktionen, wie sie zum Sampling von Stichproben für hierarchisch Bayessche Regressionen benötigt werden. Diese sind per Visual Basic Programmierung zwar möglich, arbeiten aber im

⁴⁶ Als Beispiel sei hier die Anpassung der β^* -Werte aus (13) (S. 15), oder auch die Erzeugung der Ausgangszufallszahlen genannt.

Vergleich zu WinBUGS langsam und stoßen schnell an die Kapazitätsgrenzen der Zellenanzahl von Excel. Deshalb erwies sich der Ex- und Re-Import der zu schätzenden Daten mit Hilfe von Makro-Routinen als bestmögliche Lösung für die hier zu bewältigenden Aufgaben.

4.4.2 Generierung der Zufallsdaten

Als Zufallsgrößen wurden neben den Parametern (α und β) der wahren Reaktionsfunktionen auch die Störgrößen ε_{ij} sowie die Inputdaten x_{ij} generiert⁴⁷. Hier stellt Excel über die per Add-In aktivierbaren *Analysefunktionen* ein praktisches Tool für die Zufallszahlenerzeugung zur Verfügung. Ausgangsdaten sind dabei Matrizengröße, Verteilungsparameter und Position der linken oberen Zelle eingegeben werden, um die entsprechenden Zahlen zu erhalten. Eine Zyklenbildung konnte nicht dabei festgestellt werden. Mit Hilfe dieses Tools wurden alle statischen Zufallszahlen der Simulationsstudie erzeugt. Die dynamischen Zufallszahlen für die Monte Carlo-Methoden entstanden innerhalb der ProgrammROUTINEN von WinBUGS.

4.4.3 Regression

Auf die für Regressionsschätzungen übliche und komfortable Software SPSS konnte bei diesem Simulationsexperiment aufgrund der primitiven Form des Umsatzreaktionsmodells verzichtet werden. Für die Berechnung der Schätzer reichte die zur Zufallszahlengeneration erzeugte Excel-Tabelle völlig aus, zumal auch dort eine Routine zur Bestimmung von linear bivariaten Schätzern vom Hersteller implementiert ist. So errechnet man mit „=Achsenabschnitt(Matrix1;Matrix2)“ einen Schätzer der β_1 -Variablen und der Befehl „=Steigung(Matrix1;Matrix2)“ den entsprechenden Erwartungswert für β_2 .

4.4.4 Hierarchical Bayes

Für Berechnungen des hierarchischen Bayes-Modells eignet sich die Freeware WinBUGS⁴⁸, welche unter <http://www.mrc-bsu.cam.ac.uk/bugs/> erhältlich ist. Ursprünglich ein Forschungsprojekt des Medical Research Councils wurde es in Kooperation mit der Imperial College School of Medicine at St. Marys in London weiterentwickelt und betreut.

⁴⁷ vgl Kapitel 4.1

⁴⁸ „Win“ für Windows-kompatibel, „BUGS“ für Bayesian Inference Using Gibbs Sampling

Die großen Vorteile dieser Software sind, neben der relativ einfachen Modellbeschreibung und den variablen Anwendungsmöglichkeiten, die komfortable und übersichtliche Gestaltung der Ausgabedaten sowie die kurze Berechnungszeit. Die Herkunft des Programms begründet einen hohen Grad an Unbedenklichkeit gegenüber der Qualität der Ergebnisse⁴⁹. Positiv ist auch die Einrichtung eines Online-Diskussionsforums in welchem sich die weltweiten BUGS-User austauschen und gegenseitig Hilfestellung leisten.

WinBUGS bietet vielseitige Möglichkeiten, um die Einstellungen der Markovketten entsprechend der Empfehlung der gängigen Literatur anzupassen. Seit September 2004 gibt es sogar eine open-source-Version (OpenBUGS), indem der Anwender seine individuellen Problemstellungen noch detaillierter programmieren kann. Positiv, wenn auch für den hier behandelten Fall nicht brauchbar⁵⁰, ist das seit Juli 2004 erhältliche Excel-Add-In, in dem man ohne Kenntnisse von WinBUGS Schätzungen mit selbigem direkt von Excel aus durchführen kann.

4.4.4.1 Modellspezifikation

Die Schätzung von Parametern mit BUGS erfordert mit der Modellbeschreibung, der Datenbasis und der Initialisierung das Aufrufen von drei Dateien, die im S-Plus-Codeformat implementiert und als .txt-Datei eingelesen werden. Dabei bezieht sich die Modellierung auf die hierarchische (Eltern-Kind-⁵¹) Beziehung aus dem bereits vorgestellten Schaubild Abbildung 3-2.

Die Modellierung in BUGS enthält ausschließlich die Definition des Markovkerns, wobei die Codierung für ein bivariat lineares Schätzmodell in relativ kompakter Weise darstellbar ist (vgl. Code 1). Die Variablen entsprechen denen aus Kapitel 4.3.3.3, wobei die griechischen Buchstaben in Lautschrift mit den zugeordneten Indizes aufgeführt sind. Es sei angemerkt, dass bei WinBUGS die Verteilungsparameter von Varianzen als Inverse eingegeben werden müssen, weshalb die Codierung hier von den in Kapitel 4.3.3.3 vorgestellten Modellannahmen entsprechend abweicht.

⁴⁹ Unter den Programmierern und Betreuern finden sich Autoren wieder, welche aus dem Bereich der Literatur von hierarchisch Bayesscher Regression bereits weitgehend bekannt sind. Diese zeigten sich auch aktuell im Hilfsforum der Homepage stark engagiert, egal ob es dabei um Fehlersuche bei Programmen einiger User ging, oder um die permanente Weiterentwicklung, wie beispielsweise die Erstellung von Add-ins für andere Programme.

⁵⁰ die Subroutine ist darauf ausgerichtet, genau eine Bayessche Schätzung durchzuführen. Für den vorliegenden Fall wurden jedoch knapp 1000 Schätzungen benötigt. Für diese Anzahl jedoch erwies es sich als in der Handhabung zu aufwändig.

⁵¹ vgl. Gilks et al. (1996, S. 26)

```

model
{
  for(i in 1 : N) {
    beta[i, 1:2] ~ dmnorm(beta0[, ], sigma0[ , ])
    rl[i] <- beta[i,1]*beta[i,2]
    for(j in 1 : M) {
      y[i, j] ~ dnorm(mu[i, j], tau)
      mu[i, j] <- beta[i, 1] + beta[i, 2] * x[i, j]
    }
  }
  beta0[1:2] ~ dmnorm(nue[, ], V[ , ])
  sigma0[1:2, 1:2] ~ dwish(R[ , ], 2)
  tau ~ dgamma(0.0001, 0.0001)
  sigma <- 1 / sqrt(tau)
}

```

Code 1: Text-Datei zur Modellspezifikation der vorliegenden Problematik für WinBUGS

Nach der Modellbeschreibung werden die Inputdaten eingelesen, welche in Textform gemäß Code 2 dargestellt sind und zunächst vom Programm auf Konsistenz überprüft werden, bevor die Initialisierungswerte (siehe Code 3) eingelesen werden können. Es besteht die Möglichkeit mehrere Markovketten parallel zu starten und sogar mit variierenden Initialisierungswerten laufen zu lassen. Dies ist ideal bei sehr komplex formulierten Modellen, wo nicht schon nach wenigen Iterationen eine Konvergenz sichtbar wird. Auch ermöglicht es die Vermeidung von Zyklenbildung und man kann anhand der Plots sehr gut den Zeitpunkt der Konvergenz nachvollziehen. Beim hier behandelten Allokationsmodell wurde wie erwähnt jedoch nur eine Kette zur Bestimmung der Schätzgrößen verwendet.

```

list(X = structure(.Data = c(3.4327104276887, 3.77348359273016,
  3.6212086362239, 3.43128320384743, 3.44055565183651,
  3.18094970511146, 3.58253698216478, 3.57644223770066,
  3.63002536005778, 3.70034342499921, 3.5218785671024,
  3.360888333489, 3.71107905880001, 3.79998239734505,
  3.50544612155365, 3.56103245751695, 3.5164438096602,
  3.16458362988008, 3.33324927877621, 3.73473530671196,
  3.70885025822577, 3.69379916663882, 3.36404325065363,
  3.41916599840642), .Dim = c(8, 3))),
  N = 8, M = 3,
  R = structure(.Data = c(1, 0, 0, 1), .Dim = c(2, 2)),
  nue = c(0,0),
  V = structure(.Data = c(1.0E-6, 0, 0, 1.0E-6), .Dim = c(2, 2)),
  Y = structure(.Data = c(8.10645446610412, 8.20626507411402,
  8.14119940092855, 8.94883340763146, 8.96740227062934,
  8.85887538608553, 8.55324271544453, 8.55067269388466,
  8.55257360653638, 8.78420965993331, 8.68134530911768,
  8.65219299843141, 7.95862489042491, 7.9893503765396,
  7.96977729377814, 9.15327083285947, 9.15734592559668,
  9.06849574745073, 8.90723726132359, 9.0295006776861,
  9.00790733104033, 8.47057005418905, 8.38684368040231,
  8.36021879612942), .Dim = c(8, 3)))

```

Code 2: Text-Datei (Bsp.) zur Dateneingabe als Schätzbasis für WinBUGS

Einzig die Darstellung der Kovarianzmatrix von den β_i war problematisch, da aus der Schätzung jeweils nur Erwartungswert und Standardabweichung berechnet wurden, nicht aber die Kovarianz der beiden bivariat verteilten Variablen. Zwar existiert in WinBUGS ein Tool, welches deren Berechnung ermöglicht, jedoch lässt es sich nicht extern⁵², also durch Aufruf eines anderen Programms bedienen. Daher wurde eine weitere Variable rl_i definiert, welche das Produkt der beiden Parameter β_{1i} und β_{2i} während der Samples u speichert. Mit

$$\begin{aligned}
 \text{cov}_{\beta_{1i}\beta_{2i}} &= \frac{1}{\theta} \sum_{u=1}^{\theta} (\beta_{1i}^u - \bar{\beta}_{1i})(\beta_{2i}^u - \bar{\beta}_{2i}) \\
 (84) \quad &= \frac{1}{\theta} \sum_{u=1}^{\theta} (\beta_{1i}^u \beta_{2i}^u) - (\bar{\beta}_{1i} \bar{\beta}_{2i}) \\
 &= rl_i - \bar{\beta}_{1i} \bar{\beta}_{2i} \quad \text{mit} \quad rl_i = \frac{1}{\theta} \sum_{u=1}^{\theta} (\beta_{1i}^u \beta_{2i}^u)
 \end{aligned}$$

lässt sich daraus in einer zweiten Prozedur dann die Kovarianz und somit auch die Korrelation der beiden Variablen berechnen. Die Inputdaten sowie die Initialisierungswerte sind beide im .txt-Format formulierte Dateitypen und wurden als Makro-Routine per Datenexport⁵³ erstellt, so dass hier manuelle Übertragungsfehler der Inputdaten nach WinBUGS auszuschließen sind.

4.4.4.2 Burn-in und Updating

Der Benutzer gibt über das *Update Tool* zunächst eine Anzahl an Iterationen ein, die er zum Erreichen des Konvergenzbereiches für notwendig erachtet. Diese Samples werden nicht für die Bestimmung der Verteilungsparameter von den Schätzern miteinbezogen, sie dienen nur dem Burn-in. Dazu wurde die Anzahl von 1000 Iterationen ausgewählt, obwohl eine Konvergenz bei dieser vergleichsweise kleinen Problemstellung schon innerhalb der ersten hundert Wiederholungen beobachtbar ist.

```
list(beta0 = c(0, 0), tau = 1,
     beta = structure(.Data = c(
       0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0),
     .Dim = c(8, 2)),
     sigma0 = structure(.Data = c(1, 0, 0, 1), .Dim = c(2, 2)))
```

Code 3: Text-Datei zur Initialisierung der Markovkette für WinBUGS

⁵² es existiert kein Befehl für das Script-File (vgl. Kap. 4.4.4.4) zum Start des *correlations-tool*

⁵³ siehe Kapitel Anhang, S. 129

In der Dialogbox existiert ein optionales Hilfsmittel *thin*, welches zur Reduktion von Autokorrelationen⁵⁴ geschaffen wurde. Die Eingabe eines Integer-Wertes, größer als das voreingestellte $d = 1$, bewirkt dann die Speicherung nur jedes d -ten Wertes zur Stichprobenziehung. Laut Manual besteht aber, außer einer geringeren Speicherbelegung während des Rechengangs, kein wirklicher Vorteil durch Nutzung dieser Option (Spiegelhalter et al. 2003, Kapitel *Update*, keine Seitenzahl).

Nach erfolgtem Burn-in gibt man über das *Sample Monitor Tool* die zu beobachtenden Variablen ein, welche dann für die folgenden Stichprobenziehungen von Bedeutung sind. Hier beginnt eigentlich erst das Sampling gemäß (77), für welches nun noch die Anzahl der Stichproben abgefragt wird. Dessen Höhe kann beliebig gewählt werden. Die Qualität der Schätzungen steigt mit der Anzahl, jedoch mit abnehmenden Grenzwerten. Wie oben erwähnt, bekommt man mit 40000 Iterationen sehr gute Schätzwerte. Brauchbare Parameter für die vorliegende Problemstellung liegen aber auch schon nach 10000 Wiederholungen vor.

4.4.4.3 Monitoring

Nach der (erstaunlich kurzzeitigen) Berechnung⁵⁵ können die gängigen verteilungsspezifischen Daten der beobachteten Variablen grafisch, ebenso wie numerisch abgerufen werden (vgl. Abbildung 4-2 und Abbildung 4-3). Dazu gehören bei jeder Variablen der Erwartungswert mit Standardabweichung ebenso wie Median, und benutzerdefinierte Konfidenzintervalle. Hier waren vor allem die ersten beiden Kenngrößen von Interesse. Beide wurden für jedes β in die Ausgangsdatenbank reimportiert, um mit diesen Daten die Vergleichsrechnung zur OLS anzustellen. Bei Bedarf liegen aber auch alle Ziehungen der Markovketten einzeln vor, falls die Datenreihen näher untersucht werden sollen⁵⁶.

4.4.4.4 Script File

Für den Fall, dass viele Schätzungen mit identischen Sample-Eigenschaften wie Iterationszahl, Länge des Burn-in, Anzahl der Ketten oder auch die zu beobachtenden Variablen häufig wiederholt werden sollen, bietet WinBUGS die Möglichkeit, ein so genanntes Script-file (vgl. Code 4) zu erstellen, welches bei Aktivierung zu immer den

⁵⁴ ein anderes Hilfsmittel ist die Option „over relax“. Hier werden lt. Neal (1998) pro Iteration mehrere Stichproben erzeugt und eine mit dem aktuellen Wert negativ korrelierte ausgewählt.

⁵⁵ 10000 Iterationen benötigen je nach Größenordnung von F_1 und F_4 1-3 Sekunden Rechenzeit. Dazu wurde ein IBM kompatibler PC mit pentium® 4 Prozessor (2 GHz) und 512 MB RAM-Speicher auf Basis von Windows® XP-Professional® benutzt.

⁵⁶ Vgl. Kapitel CODA, WinBUGS-Manual (2003)

gleichen Bedingungen die Markovkette(n) startet. Dabei ist es sogar möglich dieses aus einem fremden Programm aufzurufen.

```
check('COSTA.odc')
data('Database1.txt')
compile(1)
inits(1,'init40.txt')
update(1000)
set(beta)
set(r1)
set(s0)
set(s)
refresh(4000)
update(40000)
display('log')
stats(*)
save('schätzer.txt')
quit()
```

Code 4: Script-file zum wiederholten Aufruf von WinBUGS

Selbstverständlich müssen für jede Schätzung die Inputdaten (hier in 'Database1.txt') vor jedem Lauf erneuert werden, und es ist nötig, dass die Outputdatei ('schätzer.txt') vor dem nächsten Start ausgelesen wird, da diese immer wieder überschrieben wird. Jedoch stellen diese beiden Anforderungen programmtechnisch kein Problem dar, so dass es sich als gute Alternative erwies, WinBUGS über ein VBA-Makro als Subroutine für Excel zu verwenden.

4.5 Truncation

Die hinter diesem Begriff stehende Bedeutung eines eingeschränkten Wertebereiches für die Parameter ist in der Einleitung schon kurz angerissen worden. Man unterstellt hier mit der Besuchszeit ein sich bei Erhöhung positiv auf den Umsatz auswirkendes Absatzinstrument. Gleiches gilt bei anderen Marketinginstrumenten wie Werbebudget, Verkaufsförderungsbudget und beim Regalplatz, die auch über positive Elastizitäten verfügen. Abgesehen davon, dass Schätzungen von negativen Elastizitäten sowieso unrealistisch sind, stellt sich noch das Problem, dass das Verteilungsmodell aus (13) rechnerisch dann nicht mehr anwendbar ist, selbst wenn dieses Phänomen auch nur bei einer einzigen Zuordnungseinheit auftritt. Durch einen zu hohen Einfluss der Fehlervariablen, bedingt durch eine niedrige Beobachtungszahl kann es nun passieren, dass ein Schätzer für β_2 unzulässigerweise negativ wird. Deshalb muss der Wertebereich für den Elastizitätsparameter β_2 nach links gestutzt (truncated) werden. Eventuell noch realistisch, aber aufgrund von Gleitkommaüberläufen für die weiteren Berechnungen nicht zu gebrauchen, sind wiederum zu hoch geschätzte Elastizitäten, was auch eine

Beschneidung des Wertebereichs von der rechten Seite erforderlich macht. Daraus folgt die Annahme, dass die Besuchszeitenelastizität β_2 innerhalb eines Intervalls $[li, re]$ liegen muss. Nun liegt es nah, zur Anpassung der Schätzwerte über die einfache Formel

$$(85) \quad \beta_2 = \text{Min}(re, \text{Max}(li, \hat{\beta}_2)),$$

mit $\hat{\beta}_2$ als ursprünglich erhaltenen Schätzwert, diese in das zulässige Intervall zu zwingen. Demgegenüber steht aber die auf Barr und Sherrill (1999) zurückgehende Erkenntnis, dass nicht nur die, für die Punktschätzung zunächst noch unwichtige Varianz, mit zunehmender Beschneidung des Wertebereichs entsprechend stark abnimmt, sondern auch der Erwartungswert durch die Stutzung entsprechend verschoben wird. Johnson/Thomopoulos (2002) zeigen als Ergänzung zu Barr und Sherrill (1999) die charakteristischen Veränderungen von zweiseitig beschnittenen Normalverteilungen anhand von Zeichnungen und Tabellen gut auf. Dies sei nachfolgend auszugsweise beschrieben.

Aus der normalverteilten Zufallsvariablen β_2 mit dessen Dichtefunktion

$$(86) \quad f(\beta_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\beta_2 - \mu}{\sigma}\right)^2}, \quad -\infty \leq \beta_2 \leq \infty,$$

ergibt sich im Falle der Stutzung dieser, mit den Grenzen β_R und β_L die Funktion

$$(87) \quad f_{[x_L; x_R]}(\beta_2) = \begin{cases} 0, & -\infty \leq \beta_2 \leq \beta_{2L} \\ \frac{f(\beta_2)}{\int_{\beta_{2L}}^{\beta_{2R}} f(\beta_2) d\beta_2}, & \beta_{2L} \leq \beta_2 \leq \beta_{2R} \\ 0, & \beta_{2R} \leq \beta_2 \leq \infty \end{cases}$$

Durch Zurückführung von β_2 auf die Standardnormalverteilung $N(0,1)$ ergeben sich β_{2R} und β_{2L} zu

$$(88) \quad k_L = \frac{\beta_{2L} - \mu}{\sigma} \quad \text{und} \quad k_R = \frac{\beta_{2R} - \mu}{\sigma},$$

so dass die gestutzte Standardnormalverteilung entsprechend der folgenden Funktion verläuft:

$$(89) \quad f_{[k_L; k_R]}(z) = \begin{cases} 0, & -\infty \leq z \leq k_L \\ \frac{f(z)}{\int_{k_L}^{k_R} f(z) dz}, & k_L \leq z \leq k_R \\ 0, & k_R \leq z \leq \infty \end{cases}$$

Durch Integration über z erhält man die zugehörige Verteilungsfunktion

$$(90) \quad F_{[k_L; k_R]}(z) = \begin{cases} 0, & z \leq k_L \\ \frac{F(z) - F(k_L)}{F(k_R) - F(k_L)}, & k_L \leq z \leq k_R \\ 1, & z_R \leq z \end{cases} \quad \text{mit } F(z) = \int_{-\infty}^z f(z) dz$$

und dessen Momente Erwartungswert (E) und Varianz (Var)

$$(91) \quad E(\beta) = \mu + \sigma E(z) \quad \text{mit } E(z) = \frac{f(k_L) - f(k_R)}{F(k_R) - F(k_L)}$$

$$(92) \quad Var(\beta) = \sigma^2 Var(z) \quad \text{mit } Var(z) = 1 + \frac{k_L f(k_L) - k_R f(k_R)}{F(k_R) - F(k_L)} - \left(\frac{f(k_L) - f(k_R)}{F(k_R) - F(k_L)} \right)^2.$$

Zur Verdeutlichung soll folgendes Beispiel dienen. In Abbildung 4-4 und Abbildung 4-5 sind mit $\beta_{2a} \sim N(0,6; 0,2^2)$ und $\beta_{2b} \sim N(0,85; 0,3^2)$ zwei mögliche Dichtefunktionen von β_2 dargestellt (gestrichelte Linie).

Durch Stutzung des zulässigen Wertintervalls $[li, re]$ auf $[0,02; 0,66]$ (durchgezogene Linie) verändern sich die Momente durch Anwendung von (91) und (92) zu

$$(93) \quad E(\beta_{2a}^{trunc}) = 0.6 + 0.2 \left(\frac{f(-14.5) - f(1.5)}{F(1.5) - F(-14.5)} \right) = 0.5722 \quad \text{und}$$

$$(94) \quad Var(\beta_{2a}^{trunc}) = 0.2^2 \left(1 + \frac{-14.5 f(-14.5) - 1.5 f(1.5)}{F(1.5) - F(-14.5)} - 0.5722^2 \right) = 0.03090.$$

Hierbei zeigt sich auch, dass die Höhe der Varianz bei Stutzung abnimmt und der Erwartungswert von der entsprechend nächstliegenden Grenze abrückt. Bei β_{2a} liegt der Modus noch innerhalb des zulässigen Intervalls, im zweiten Fall (β_{2b}) aber außerhalb dessen.

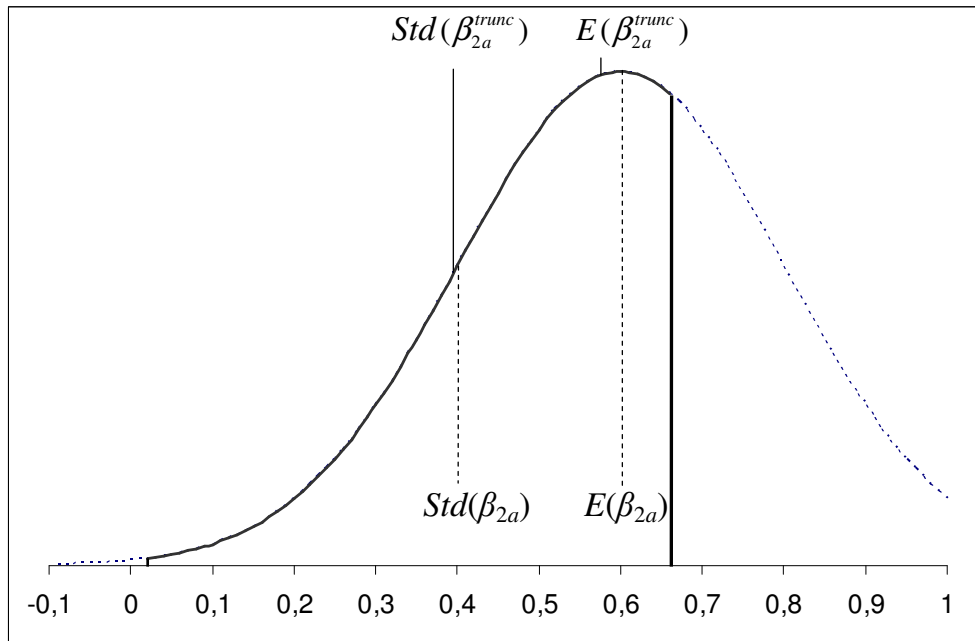


Abbildung 4-4: Verteilung von β_{2a} in normalverteilter und in doppelt gestutzter Form

Hier muss zunächst der Erwartungswert noch mit (85) auf die obere Grenze gesetzt werden, bevor die Korrekturen mit (91) und (92) durchgeführt werden. Dann ergeben sich mit $E(\beta_{2b}^{trunc}) = 0,4206$ und $Var(\beta_{2b}^{trunc}) = 0,0327$ doch erhebliche Abweichungen zu den nicht gestutzten Verteilungsparametern.

Diese Beschneidung des Wertebereiches hat nicht nur auf die Momente Erwartungswert und Varianz der Zufallsvariablen β_2 direkte Auswirkungen, sondern durch die bivariate Verteilung mit einer Korrelation $\rho(\sigma_{\beta_1}, \sigma_{\beta_2}) \neq 0$ verändert sich auch die Verteilungskurve von β_1 . Johnson und Dhungel (2003) entwickeln eine Approximation zur Berechnung der Verteilungsfunktion von bivariat gestutzten normal verteilten Variablen. Deren Artikel beschäftigt sich mit einseitig beschnittenen Variablen, dafür gelten aber bei beiden entsprechend begrenzte Wertebereiche.

Für die hiesige Problematik wird aber ein Modell benötigt, welches eine Variable zweiseitig stutzt (β_2) und die andere beidseitig unbegrenzt definiert. Deswegen eignet sich das oben genannte Modell nicht so gut. Besser man verfährt analog zu Greene (1990, S. 707 f) und berechnet eine gemeinsame gestutzte Verteilung von β_1 und β_2 mit

$$(95) \quad f(\beta_1, \beta_2 | li \leq \beta_2 \leq re) = \frac{f(\beta_1, \beta_2)}{p(li \leq \beta_2 \leq re)}.$$

Laut Theorem 22.4 (S. 707) errechnen sich die Momente ergänzend zu (93) und (94) gemäß

$$(96) \quad E(\beta_1 | li \leq \beta_2 \leq re) = \mu_{\beta_1} + \rho_{\beta_1, \beta_2} \sigma_{\beta_1} \mu_{\beta_2^{trunc}} \text{ und}$$

$$(97) \quad Var(\beta_1 | li \leq \beta_2 \leq re) = \sigma_{\beta_1}^2 (1 - \rho_{\beta_1, \beta_2}^2 (1 - \sigma_{\beta_2^{trunc}}^2)).$$

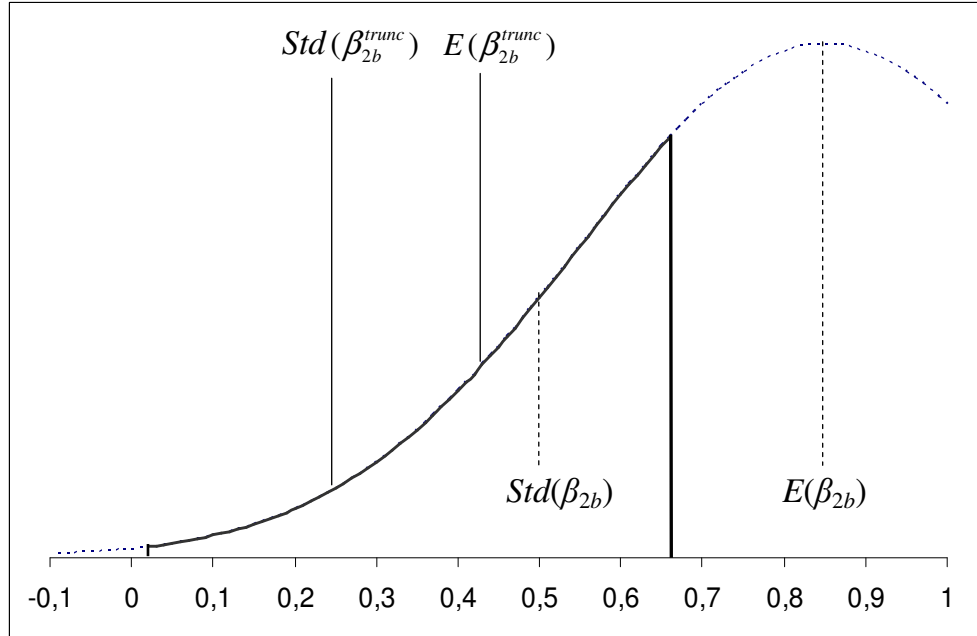


Abbildung 4-5: Verteilung von β_{2b} in normalverteilter und in doppelt gestutzter Form

Erweitert man o. g. Beispiel *b* so, dass mit β_1 eine bivariate Verteilung vorliegt

$$(98) \quad \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \sim N \left(\begin{bmatrix} \mu_{\beta_1} \\ \mu_{\beta_2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sigma_{\beta_1}^2 & \rho_{\beta_1, \beta_2} \\ \rho_{\beta_1, \beta_2} & \sigma_{\beta_2}^2 \end{bmatrix} \right) = N \left(\begin{bmatrix} 9 \\ 0.85 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & -0.8 \\ -0.8 & 0.09 \end{bmatrix} \right),$$

so ergeben sich für die zweiseitig gestutzte bivariate Normalverteilung gemäß (96) und (97) folgende korrigierte Parameter

$$(99) \quad \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2^{trunc} \end{pmatrix} | 0,02 \leq \beta_2^{trunc} \leq 0,66 \sim N \left(\begin{bmatrix} 10.277 \\ 0.4206 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2.37 & -0.8 \\ -0.8 & 0.0327 \end{bmatrix} \right).$$

Es zeigt sich anhand dieses Beispiels gut, wie stark sich die Varianzen beider bivariaten Schätzwerte reduzieren, wenn der ursprüngliche Erwartungswert außerhalb der zulässigen Grenzen liegt.

4.5.1 Truncation bei Bayesschen Modellen

Im Gegensatz zur OLS wird bei Bayes, insbesondere im hier angewandten bivariat normalverteilten Modell, der den konstanten Term darstellende Parameter β_1 nicht per Einsetzung in die Absatzfunktion (vgl. (53)) mit gemittelten Werten bestimmt. Die Berechnung der Konstanten β_1 aus einer gestutzten Elastizität β_2 wie in (45) (S. 48) ist deshalb nicht ohne weitere Analyse möglich. Vielmehr müssen beim Sampling zur Berechnung des Parameters β_1 die Ziehungen aus der bereits gestutzten Verteilungsfunktion von β_2 erfolgen, so dass Stichprobenziehungen nur aus diesem Wertebereich erfolgen können.

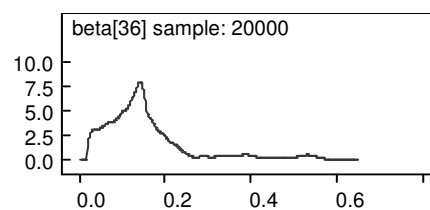


Abbildung 4-6: Verteilung einer Funktion mit $\beta \sim \text{djl.dnorm.trunc}(\beta_{2,36}, \sigma_{\beta_2}^2, 0,02; 0,66)$

Die Truncation ist mit der Berechnungssoftware WinBUGS jedoch nur bedingt möglich. Die Einschränkung bezieht sich auf die multivariate Modellformulierung, für die kein entsprechender Algorithmus vorhanden ist. Für univariat verteilte Parameter ist jener jedoch bereits verfügbar⁵⁷. Daher könnte man die Parameter alternativ gemäß $\beta_{1i} \sim N(\mu_{\beta_1}, \sigma_{\beta_1}^2)$; $\beta_{2i} \sim N(\mu_{\beta_2}, \sigma_{\beta_2}^2)$ unabhängig voneinander schätzen.

Aufgrund der aufgezeigten Korrelation stellt dies ein nicht unerhebliches Problem dar. Eine weitere Untersuchung ergab, dass das Programm in etwa die vierfache Berechnungszeit benötigt und auch noch im Bereich der höheren Elastizitäten ($F_2 = 0,35$) nicht zuverlässig arbeitet und mitunter nach wenigen Iterationen abbricht. Auch bei Durchlaufen von 20000 Iterationen ist die Funktionskurve, wie Abbildung 4-6 zeigt, von der gaußschen Glockenform noch zu weit entfernt. Weiter lässt die so erzielte Verteilung möglicherweise keine Schlüsse auf schnelle Konvergenz zur unterstellten

⁵⁷ Dave Lunn (2003) stellt einen Zusatzalgorithmus zur Verfügung der zweiseitige Begrenzungen für die Normalverteilungsfunktion mit einbezieht, gemäß: $z \sim \text{djl.dnorm.trunc}(\mu, \tau, \text{left}, \text{right})$. Leider lässt sich dieser nicht auf die bivariate Schätzung anwenden. Es gibt aber auch die Möglichkeit des Censoring, welches sogar mit multivariaten Fällen harmonisiert. Die Verteilung wird dann noch wie folgt um einen kurzen Term ergänzt: $z \sim \text{dmnorm}(\mu[,], \tau[,])I(\text{left}, \text{right})$. Die Notationen *left* und *right* geben die Ober- und Untergrenzen an. Für die vorliegende Problematik eignet sich das Censoring jedoch nicht, da bei dieser Vorgehensweise lediglich Stichproben, die außerhalb dieser Grenzen liegen, nicht berücksichtigt werden.

Verteilungsform ziehen, abgesehen vom Problem der zu geringen Anzahl an Stichproben/Iterationen, die im Falle eines vorzeitigen Routineabbruchs zur Schätzung (siehe Abbildung 4-7) verfügbar sind.

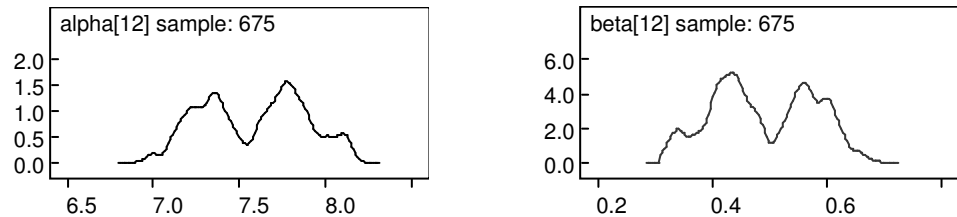


Abbildung 4-7: Verteilungskurven mit Anwendung der trunc-Funktion bei vorzeitigem Abbruch

Weil jedoch Schätzergebnisse außerhalb des zulässigen Bereiches bei Bayesscher Regression eine Ausnahme waren⁵⁸, erfolgte im hier implementierten Modell die Stutzung der Schätzwerte schließlich doch nach dem bereits erwähnten Prinzip gemäß (45) anhand der mit (96) korrigierten Elastizität. Das bivariate Modell lieferte außerdem gegenüber der vorgenannten, univariaten Variante die besseren Ergebnisse bei der Berechnung⁵⁹. Die Abweichungen von β_1 , im Vergleich von OLS zum bivariaten HB-Schätzergebnis sind offensichtlich gering und können somit toleriert werden⁶⁰. Die Korrekturen, welche sich für Erwartungswert und Varianz durch die Stutzung ergeben, können dann auch nachträglich via (91) und (92) erfolgen.

4.6 Modus, Median oder Erwartungswert

Der Modus ist der Wert mit der höchsten Wahrscheinlichkeit, während der Median das 50 %-Quantil der Verteilungsfunktion angibt. Der Median bietet den Vorteil, in Bezug auf Ausreißer nicht so empfindlich zu reagieren, während ein Modus simpel zu berechnen ist. Bei symmetrisch verteilten Parametern, wie im Fall der klassischen Normalverteilung, stimmen die beiden Lageparameter mit dem Erwartungswert überein. In der Literatur wurden keine Quellen gefunden, die sich mit der Problematik auseinandersetzen, welches dieser drei Maße nun als Punktschätzer für den Parameter übernommen werden sollte. Üblicherweise wird grundsätzlich der Erwartungswert herangezogen. In der vorliegenden Studie handelt es sich jedoch nicht um

⁵⁸ Im Mittel kann man bei 1,2 % aller Bayes-Schätzungen davon ausgehen, dass der geschätzte Mittelwert außerhalb des zulässigen Intervalls lag.

⁵⁹ In einer Stichprobe der Größe 15 waren die bivariaten Schätzungen den univariaten ohne Ausnahme überlegen.

⁶⁰ In einer Stichprobe der Größe 80 lagen die Abweichungen im einstelligen Promillebereich

symmetrische Funktionen, sondern mit der gestutzten Normalverteilung, sowie der Lognormalverteilung liegen Verteilungsformen vor, in denen die drei Lokalisationsmasse von einander abweichen. Nach Meinung des Autors sollte daher nicht selbstverständlich der Erwartungswert als Parameter für die β übernommen werden.

Mit Ausnahme des Falles, in dem der Mittelwert exakt in der Mitte zwischen den beiden Definitionsgrenzen liegt⁶¹, ist eine gestutzte Normalverteilung grundsätzlich asymmetrisch verteilt, weshalb dessen Lageparameter also in der Regel voneinander abweichen. Die Korrekturen der Momente gestutzter Verteilungen aus Kapitel 4.5 sind vor allem für die stochastische Optimierung wichtige Voraussetzungen, da die Verteilungsparameter Erwartungswert, Varianz und Korrelation für diese Analyse unbedingt benötigt werden. Fraglich ist aber, warum man auch bei der deterministischen Optimierung unbedingt den Erwartungswert als Parameter übernehmen soll, nicht aber den Modus oder den Median. In der Literatur wird im Zusammenhang mit dem Stichwort „Truncated Regression“ grundsätzlich der Erwartungswert berechnet. Dem Autor ist keine Literatur bekannt, in der im Zusammenhang mit gestutzter Regression eine Überlegung stattfindet, ob anstatt des Erwartungswertes ein anderer Lageparameter nun als Schätzer übernommen werden könnte.

Wenn bekannt ist, dass der wahre Wert, wie in diesem behandelten Fall, innerhalb dieses Intervalls $[li, re]$ liegen muss, der geschätzte Wert aber außerhalb liegt, bleibt unklar, warum man den Schätzer zum korrigierten Erwartungswert ansetzen soll, und nicht zum hier mit dem Modus nächstliegenden erlaubten Wert (siehe Abbildung 4-8). Selbst wenn der wahrscheinlichste Wert der Dichtefunktion innerhalb der Intervallgrenzen liegt, weicht der Erwartungswert bei entsprechend hoher Varianz von diesem deutlich ab. Nach Meinung des Autors macht die Zuweisung des Erwartungswertes als Punktschätzer für die Optimierung weniger Sinn als die Übernahme des Modus.

Aus dem simplen Grund, dass letzterer einfach näher an den ursprünglichen Schätzer heranreicht, wäre daher der Modalwert als Punktschätzer zwar subjektiv gesehen besser geeignet, trotzdem werden in dem Simulationsexperiment die Parameterschätzer β anhand der Erwartungswerte herbeigeführt, da sich in der Literatur eben keine andere Vorgehensweise findet. Viel entscheidender ist aber, dass man die errechneten Schätzer auch zum besseren Vergleich zu den Ergebnissen aus Kapitel 6 benötigt, da dort ebenfalls Erwartungswerte eingesetzt werden. Die Argumentation der Daten anhand unterschiedlicher Mittelwertschätzer wäre dann unsinnig. Eine Gegenüberstellung der mit den entsprechenden Punktschätzern erreichbaren Umsätze, zeigte

⁶¹ Im Beispiel von S. 70 wäre dies bei $E(\beta_2) = (0,66 - 0,02)/2 = 0,32$

zwar zum Teil deutliche Unterschiede, ließ aber keine der beiden Alternativen durchweg als dominant erscheinen.

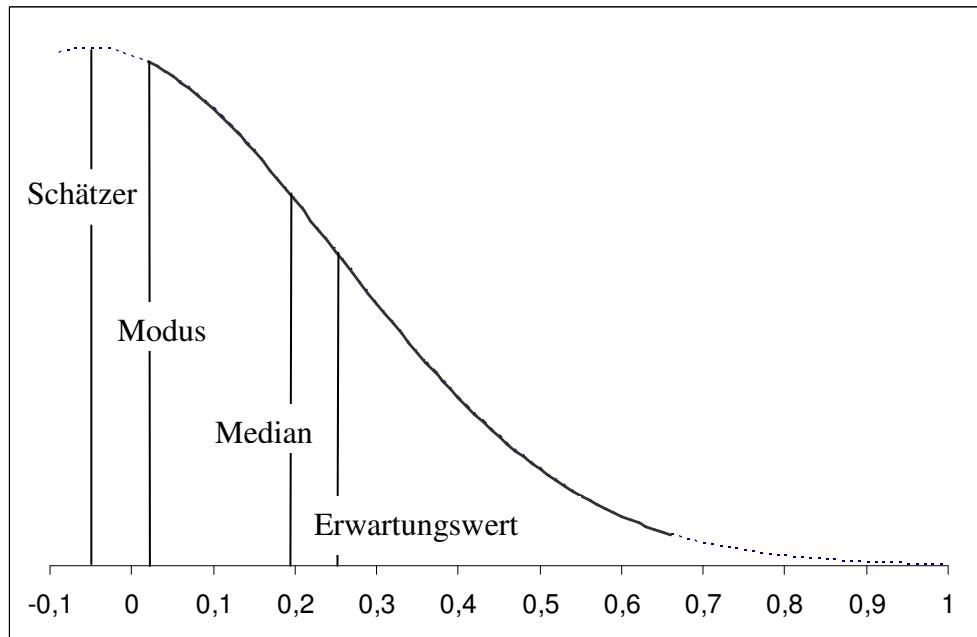


Abbildung 4-8: Übersicht Modus, Median und Erwartungswert bei unzulässigem Schätzer

4.7 Korrelationskoeffizienten unterschiedlich verteilter Zufallsvariablen

Die beiden pro Zuordnungseinheit zu schätzenden Parameter β_1 und β_2 sind gemäß (98) bivariat normalverteilte Zufallsvariablen. Der Korrelationskoeffizient berechnet sich deshalb aus den Varianzen und der Kovarianz der beiden Schätzer

$$(100) \quad \rho_{\beta_1, \beta_2} = \frac{\sigma_{\beta_1, \beta_2}}{\sigma_{\beta_1} \sigma_{\beta_2}}.$$

Der Gebietsgüteparameter oder auch die Konstante β_1 muss aber wegen seiner logarithmierten Form zunächst wieder mit $\exp(\beta_1)$ in α umgewandelt werden. Erst jetzt kann der optimierte Input für die Allokation aus den beiden Parametern α und β_2 bestimmt werden. Sowohl für die Berechnung der für die gestutzte Verteilung korrigierten Momente, als auch bei der stochastischen Optimierung aus Kapitel 6 wird der Korrelationskoeffizient ρ benötigt. Zu beachten ist dabei, dass wegen

$$(101) \quad \rho_{\beta_1, \beta_2} \neq \rho_{\alpha, \beta_2}$$

mit $\beta_1 \sim N(\mu_{\beta_1}, \sigma_{\beta_1}^2)$, $\alpha \sim LN(\mu_\alpha, \sigma_\alpha^2)$ und $\ln(\alpha) = \beta_1$ auch für den Korrelationskoeffizient noch eine Transformation erfolgen muss. Laut Greene (2003, S.870) besteht die Möglichkeit über die partiellen Ableitungen an der Stelle der geschätzten Parameterwerte diese mittels Taylor Reihen Expansion (vgl. Abramowitz (1970, S. 880)) approximativ zu berechnen. Dazu betrachtet man die geschätzten Parametervektoren als Funktion mit dessen partieller Ableitung

$$(102) \quad g_1 = \begin{pmatrix} \exp(\beta_1) \\ \beta_2 \end{pmatrix}; \quad \frac{\partial g_1}{\partial \beta_1} = \begin{pmatrix} \exp(\beta_1) \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$(103) \quad g_2 = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}; \quad \frac{\partial g_2}{\partial \beta_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Kovarianz ergibt sich nun näherungsweise als Produkt dieser partiellen Differentiale mit der Varianz-Kovarianzmatrix Σ

$$\begin{aligned} (104) \quad \text{Cov}(g_1, g_2) &= \sigma_{\alpha, \beta_2} \approx \left(\frac{\partial g_1}{\partial \mu_1} \right) \cdot \begin{pmatrix} \sigma_{\beta_1}^2 & \sigma_{\beta_1, \beta_2} \\ \sigma_{\beta_1, \beta_2} & \sigma_{\beta_2}^2 \end{pmatrix} \cdot \left(\frac{\partial g_2}{\partial \mu_2} \right)^T \\ &= \begin{pmatrix} \exp(\beta_1) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_{\beta_1}^2 & \sigma_{\beta_1, \beta_2} \\ \sigma_{\beta_1, \beta_2} & \sigma_{\beta_2}^2 \end{pmatrix} \cdot (0 \quad 1) \\ &= \exp(\beta_1) \sigma_{\beta_1, \beta_2} \\ &= \alpha \sigma_{\beta_1, \beta_2}. \end{aligned}$$

Vor der Berechnung des Korrelationskoeffizienten aus der Kovarianz, muss diese also zunächst noch mit dem Parameter α multipliziert werden, so dass gilt

$$(105) \quad \rho_{\alpha, \beta_2} = \frac{\sigma_{\alpha, \beta_2}}{\sigma_\alpha \sigma_{\beta_2}} = \frac{\alpha \sigma_{\beta_1, \beta_2}}{\sigma_\alpha \sigma_{\beta_2}}.$$

4.8 Referenzwerte

Durch die künstliche Erzeugung der Umsatzreaktionsfunktionen sind ja, wie bereits angeführt, die wahren Parameter bekannt. Diese Art der Generierung bietet den entscheidenden Vorteil auf Basis der wahren Parameter ein globales Optimum der Allokation zu berechnen, so dass der höchste erzielbare Gesamtwert, der Referenzumsatz, bekannt ist. Dies bietet die Gelegenheit, alle per Schätzung und Optimierung erhaltenen Umsatzwerte mit ebendiesen Referenzwerten zu vergleichen. In der Ergebnistabelle (siehe S.81) wurden daher alle Resultate auf den Wertebereich [0; 1]

nivelliert, indem sie als Quotient, mit dem bestmöglich erreichbaren Umsatz im Nenner, dargestellt wurden. Auf diese Weise lässt sich eine Art Gütemaß für die Schätzung auch als Anteilswert des Erreichbaren darstellen. Neben der absoluten Umsatzhöhe stellt auch dieser Referenzanteil ein wichtiges Beurteilungskriterium für die Qualität der Schätzmethoden dar.

4.9 Genauigkeit

Excel rechnet intern mit 11 Stellen nach dem Komma. Dies gilt auch, wenn weniger Nachkommastellen angezeigt sind. Für die Bestimmung der mittleren Besuchszeitenelastizität β^* gilt die Anforderung, die in der Zielzelle anvisierten 100 % auf fünf Nachkommastellen genau zu berechnen. Die aus WinBUGS importierten Schätzungen enthalten vier Nachkommastellen.

4.10 Evaluierung der Schätzergebnisse

Zur Bewertung der Güte von Schätzungen dienen generell Maßzahlen wie das Bestimmtheitsmaß R^2 und daraus abgeleitet, das korrigierte R^2 sowie der F -Test. Derlei Bewertungsansätze werden in der hier durchgeführten Simulationsstudie nicht benötigt. Es handelt sich im Kern um ein Optimierungsmodell, welches auf Basis der Schätzungen die exogenen Variablen einteilt und daraus explizit Umsätze oder auch Gewinne ableiten kann.

Da die Gewinn- und Umsatzmaximierung das generelle Unternehmensziel darstellt, wird zur Evaluierung wegen identischer Deckungsbeitragssätze der erreichte Umsatz herangezogen. Dieser hängt jedoch im Wesentlichen auch von anderen Faktoren als den hier untersuchten Beobachtungszahlen F_4 und der Schätzmethode F_5 ab, so dass ein höherer Umsatz nicht allein aus den beiden benannten Faktoren resultiert. Wegen der Möglichkeit mit wahren Werten arbeiten zu können, und als Folge daraus die Referenzumsätze zu kennen, bietet es sich an, den erzielten Umsatz als prozentualen Anteil des höchstmöglich Erzielbaren darzustellen. Höhere Anteile bedeuten deshalb entsprechend bessere Schätzungen. Als Evaluierungsmaß für die Schätzungen soll daher der Anteilswert von Referenzumsatz herangezogen werden.

4.11 Verbesserung gegenüber der aktuellen Situation

Die in Kapitel 2.9.2 angeführte These vergleicht die momentane Umsatzsituation mit dem Anspruch auf eine verbesserte Lösung, nach einer erfolgten Reallokation der Prädiktoren. Die benannten beliebigen Allokationen liegen hier vor, da die Prädiktoren ja entsprechend zufällig erzeugt wurden. Die Differenz aus optimierten und zufällig erzeugten Umsätzen ergaben die jeweilige Zielgröße, so dass positive Veränderungen für eine Bestätigung der These stehen. Zusätzlich zur absoluten Umsatzänderung liegen diese Werte auch in prozentualer Form vor. Die zufälligen Allokationen wurden so erzeugt, dass die Summe über alle Einheiten genau die zur Verfügung stehende Gesamtressource T ergaben, damit diese vor und nach der Allokation identisch ist. Ergebnisse dazu sind in Kapitel 5.3.2 (S. 93 f.) aufgeführt.

5 Ergebnisse

5.1 Analyseverfahren

Eine Übersicht der Ergebnisse liefert die Tabelle 5-1. Für die mittleren Umsätze der beiden Simulationsläufe (N_2) aus den sechs Zuordnungseinheiten (N_1) wurden in Abbildung 5-1 dargestellt, dessen Trend über die Variablen F_4 und F_5 gut nachvollziehbar ist. Hieraus bestätigt sich dem ersten Eindruck nach die These, dass die Schätzungen mit mehr Beobachtungswerten auch zu höheren Umsätzen führen. Ebenso deutlich wird die Dominanz des Bayesschen Schätzverfahrens gegenüber der bewährten OLS-Methode.

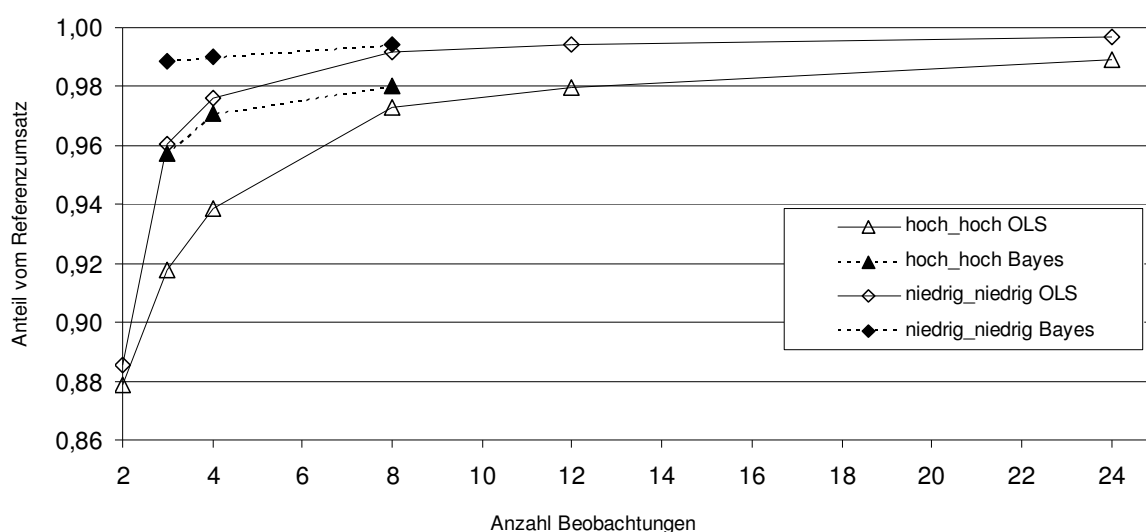


Abbildung 5-1: Trendlinie der Ergebnisqualität von den einzelnen Untersuchungen

Zur besseren Übersicht wurden nur zwei Varianten der Faktorkombinationen (F_2 - F_3) grafisch abgebildet. Die restlichen Grafen folgen allerdings auch dieser Tendenz und verlaufen überwiegend zwischen den abgebildeten Plots von *hoch_hoch* und *niedrig_niedrig*.

niedrig. Die Ergebnisse befinden sich auf einem zu erwartenden Niveau in Relation zum Referenzumsatz. Demnach erreicht man mit der Mehrheit der Schätzverfahren über 90 % des maximal möglichen Umsatzes. Einzig die Basis von zwei Beobachtungswerten scheint unzureichend.

Es deutet sich also an, dass das Flat-Maximum-Principle auch für die Verteilung knapper Ressourcen bei jeder Zuordnungseinheit individuell Gültigkeit besitzt. Der parallele Verlauf der beiden Randausprägungen von (F_2, F_3) zeigt offenbar, dass eher homogene und nicht so elastische Gebiete größere Schätzungenauigkeiten zulassen, und somit auch weniger Beobachtungen benötigen, um akzeptable Ergebnisse zu erreichen.

$F_2 \quad F_3$	$F_1 \quad F_4 \quad F_5$									
	40 24 OLS	40 12 OLS	40 8 OLS	40 8 Bayes	40 4 OLS	40 4 Bayes	40 3 OLS	40 3 Bayes	40 2 genau	40 subj.
hoch_hoch	11.196,74	11.071,14	10.942,91	11.069,01	10.481,15	10.963,43	10.109,01	10.860,51	9.785,04	9.661,44
hoch_mittel	9.857,15	9.759,99	9.703,84	9.831,89	9.434,13	9.788,38	9.273,54	9.806,66	8.376,41	8.217,26
hoch_niedrig	8.897,76	8.830,52	8.782,53	8.872,94	8.616,00	8.869,23	8.324,96	8.876,48	7.731,26	7.524,52
mittel_hoch	6.712,84	6.676,91	6.621,16	6.683,37	6.493,90	6.644,37	6.340,48	6.616,86	5.748,84	5.835,23
mittel_mittel	6.676,58	6.648,63	6.593,29	6.648,19	6.488,78	6.631,69	6.346,03	6.620,61	5.651,30	5.720,82
mittel_niedrig	6.004,25	5.969,93	5.944,29	5.992,32	5.860,02	5.977,66	5.777,23	5.979,19	5.093,20	4.999,34
niedrig_hoch	4.310,54	4.296,62	4.282,41	4.294,67	4.213,95	4.281,82	4.151,86	4.275,65	3.749,70	3.774,37
niedrig_mittel	4.306,42	4.293,01	4.280,11	4.293,39	4.196,40	4.280,49	4.130,86	4.280,99	3.712,78	3.782,17
niedrig_niedrig	4.336,30	4.324,54	4.310,29	4.326,96	4.250,31	4.319,12	4.185,82	4.310,21	3.763,76	3.780,62
$F_2 \quad F_3$	$F_1 \quad F_4 \quad F_5$									
	20 24 OLS	20 12 OLS	20 8 OLS	20 8 Bayes	20 4 OLS	20 4 Bayes	20 3 OLS	20 3 Bayes	20 2 genau	20 subj.
hoch_hoch	12.205,87	12.042,18	11.984,82	12.070,39	11.878,54	12.097,69	11.303,22	11.904,34	10.810,25	11.397,04
hoch_mittel	9.555,42	9.514,37	9.445,90	9.506,20	9.208,63	9.490,25	9.088,25	9.523,24	8.047,90	8.416,93
hoch_niedrig	9.260,11	9.161,33	9.187,23	9.254,98	8.992,77	9.232,87	8.713,48	9.239,11	7.864,15	7.987,06
mittel_hoch	7.551,50	7.512,04	7.469,48	7.514,09	7.310,08	7.472,71	7.136,41	7.482,30	6.608,90	6.559,36
mittel_mittel	6.376,06	6.342,08	6.316,44	6.346,22	6.189,52	6.308,54	6.080,85	6.343,18	5.360,36	5.548,72
mittel_niedrig	6.310,42	6.278,38	6.232,70	6.278,51	6.138,40	6.269,21	6.091,07	6.268,72	5.347,39	5.501,66
niedrig_hoch	4.353,01	4.342,49	4.323,33	4.334,60	4.240,47	4.325,83	4.147,38	4.312,43	3.838,88	3.972,60
niedrig_mittel	4.632,29	4.618,77	4.611,71	4.618,15	4.548,36	4.606,33	4.452,78	4.595,08	4.138,92	4.148,96
niedrig_niedrig	4.536,02	4.521,62	4.515,13	4.523,45	4.428,22	4.501,89	4.378,08	4.499,90	4.006,26	4.088,24
$F_2 \quad F_3$	$F_1 \quad F_4 \quad F_5$									
	8 24 OLS	8 12 OLS	8 8 OLS	8 8 Bayes	8 4 OLS	8 4 Bayes	8 3 OLS	8 3 Bayes	8 2 genau	8 subj.
hoch_hoch	11.509,35	11.452,47	11.408,09	11.453,47	10.787,54	11.211,86	10.990,72	11.031,66	10.409,52	10.051,59
hoch_mittel	10.032,62	10.000,85	10.017,52	10.052,16	9.704,04	9.942,17	9.491,37	9.913,48	8.415,53	8.372,95
hoch_niedrig	9.313,20	9.219,51	9.184,42	9.225,10	9.147,31	9.244,61	8.838,23	9.249,58	8.252,40	7.889,37
mittel_hoch	6.656,12	6.633,86	6.619,96	6.633,03	6.505,65	6.580,75	6.304,87	6.598,78	5.653,64	5.675,64
mittel_mittel	6.272,55	6.235,43	6.181,38	6.205,63	6.163,22	6.238,14	6.044,91	6.200,78	5.403,14	5.102,69
mittel_niedrig	5.972,33	5.924,19	5.910,89	5.930,35	5.836,54	5.929,72	5.553,37	5.914,84	5.198,55	4.867,65
niedrig_hoch	4.551,17	4.538,41	4.529,34	4.532,74	4.480,18	4.520,63	4.405,88	4.505,70	4.217,48	3.962,93
niedrig_mittel	4.605,74	4.590,13	4.577,48	4.584,72	4.528,37	4.557,41	4.476,65	4.557,15	4.259,04	4.071,07
niedrig_niedrig	4.374,10	4.364,83	4.354,15	4.359,47	4.308,62	4.337,91	4.217,68	4.327,60	3.996,88	3.995,42

Tabelle 5-1: Ergebnisse als Mittelwert über alle Simulationsläufe (N_1, N_2)

Zur besseren Übersicht sind die einzelnen direkt vergleichbaren Methoden so dargestellt, dass der jeweils überlegene Wert fett, der unterlegene Umsatz bzw. Anteil kursiv gedruckt ist. Vergleichend stehen sich dabei für $F_4 = 8, 4$ und 3 die beiden Schätzverfahren OLS und hierarchisch Bayessche Regression gegenüber. Bei $F_4 = 2$ Beobachtungswerten ist die Dominanz von subjektiver oder empirischer Datenerhebung von Interesse.

F ₂ F ₃	F ₁ F ₄ F ₅		40 8 OLS	40 8 Bayes	40 4 OLS	40 4 Bayes	40 3 OLS	40 3 Bayes	40 2 genau	40 subj.
	40 24 OLS	40 12 OLS								
hoch_hoch	0,98815	0,97707	0,96575	0,97688	0,92500	0,96756	0,89215	0,95848	0,86356	0,85265
hoch_mittel	0,98985	0,98009	0,97445	0,98731	0,94737	0,98294	0,93124	0,98478	0,84115	0,82517
hoch_niedrig	0,99111	0,98362	0,97827	0,98834	0,95972	0,98793	0,92730	0,98874	0,86117	0,83814
mittel_hoch	0,99336	0,98805	0,97980	0,98900	0,96096	0,98323	0,93826	0,97916	0,85071	0,86349
mittel_mittel	0,99424	0,99008	0,98184	0,99001	0,96627	0,98756	0,94502	0,98591	0,84156	0,85191
mittel_niedrig	0,99292	0,98724	0,98300	0,99094	0,96907	0,98852	0,95537	0,98877	0,84226	0,82674
niedrig_hoch	0,99730	0,99408	0,99079	0,99363	0,97495	0,99065	0,96059	0,98923	0,86754	0,87325
niedrig_mittel	0,99696	0,99385	0,99087	0,99394	0,97149	0,99095	0,95631	0,99107	0,85953	0,87559
niedrig_niedrig	0,99650	0,99380	0,99052	0,99435	0,97674	0,99255	0,96192	0,99051	0,86493	0,86880
F ₂ F ₃	F ₁ F ₄ F ₅		20 8 OLS	20 8 Bayes	20 4 OLS	20 4 Bayes	20 3 OLS	20 3 Bayes	20 2 genau	20 subj
	20 24 OLS	20 12 OLS								
hoch_hoch	0,98757	0,97433	0,96969	0,97661	0,96109	0,97882	0,91454	0,96318	0,87465	0,92213
hoch_mittel	0,98957	0,98532	0,97823	0,98447	0,95366	0,98282	0,94119	0,98624	0,83345	0,87167
hoch_niedrig	0,99049	0,97993	0,98270	0,98994	0,96190	0,98758	0,93202	0,98825	0,84117	0,85432
mittel_hoch	0,99449	0,98979	0,98418	0,99006	0,96318	0,98461	0,94030	0,98587	0,87079	0,86427
mittel_mittel	0,99502	0,98972	0,98572	0,99036	0,96591	0,98448	0,94895	0,98989	0,83652	0,86591
mittel_niedrig	0,99398	0,98893	0,98174	0,98895	0,96688	0,98749	0,95943	0,98741	0,84229	0,86659
niedrig_hoch	0,99633	0,99393	0,98954	0,99212	0,97058	0,99011	0,94927	0,98705	0,87866	0,90926
niedrig_mittel	0,99668	0,99377	0,99225	0,99364	0,97862	0,99109	0,95806	0,98867	0,89053	0,89269
niedrig_niedrig	0,99738	0,99421	0,99278	0,99461	0,97367	0,98987	0,96265	0,98943	0,88089	0,89892
F ₂ F ₃	F ₁ F ₄ F ₅		8 8 OLS	8 8 Bayes	8 4 OLS	8 4 Bayes	8 3 OLS	8 3 Bayes	8 2 genau	8 subj
	8 24 OLS	8 12 OLS								
hoch_hoch	0,98926	0,97952	0,97293	0,98025	0,93865	0,97094	0,91802	0,95752	0,87849	0,87159
hoch_mittel	0,98991	0,98419	0,98050	0,98800	0,95296	0,98238	0,93643	0,98318	0,83509	0,84110
hoch_niedrig	0,99186	0,98251	0,98041	0,98763	0,96597	0,98739	0,93421	0,98806	0,86104	0,84483
mittel_hoch	0,99449	0,98988	0,98456	0,99024	0,96559	0,98390	0,94039	0,98386	0,85558	0,85876
mittel_mittel	0,99486	0,98974	0,98280	0,98836	0,97005	0,98730	0,95106	0,98657	0,84515	0,84250
mittel_niedrig	0,99438	0,98813	0,98358	0,98971	0,96985	0,98838	0,94705	0,98761	0,85057	0,83510
niedrig_hoch	0,99704	0,99424	0,99102	0,99307	0,97582	0,99052	0,95850	0,98793	0,89019	0,88369
niedrig_mittel	0,99705	0,99392	0,99151	0,99352	0,97696	0,98970	0,96131	0,98891	0,89083	0,88333
niedrig_niedrig	0,99698	0,99431	0,99194	0,99423	0,97751	0,99041	0,96199	0,98880	0,88563	0,89282

Tabelle 5-2: Ergebnisse als Anteilswert des Referenzumsatzes

Die oberflächliche Betrachtung von Grafik und Ergebnistabellen kann aber allenfalls nur eine Tendenz aufzeigen. Die wissenschaftliche Untermauerung der Thesen und der Nachweis signifikanter Einflussfaktoren mit deren Wechselwirkungen erfordert jedoch eine Regressions- bzw. eine Varianzanalyse.

5.1.1 Regressions- oder Varianzanalyse

Mit diesen Verfahren zur Strukturprüfung werden Zusammenhänge zwischen einer abhängigen und in diesem Fall mehreren unabhängigen Variablen untersucht. Dabei unterscheiden sich diese Methoden dadurch, ob die unabhängigen Variablen kategorial (Varianzanalyse) oder metrisch (Regression) skaliert sind. Das übliche Verfahren bei Experimenten mit unterschiedlichen Inputfaktoren ist die Varianzanalyse. Da auch für die vorliegende Untersuchung primär von Interesse ist, ob die in den Thesen benannten Einflussfaktoren überhaupt eine signifikant positive Wirkung auf die unabhängige Variable ausüben, könnte die Varianzanalyse als Prüfverfahren ausreichen, um die Thesen aus Kapitel 2.9 zu bewerten. Andererseits handelt es sich bei nahezu allen endogenen Variablen um metrische Größen. Die Dummy-Variablen sind zwar streng

genommen nicht metrisch, können aber durch eine binäre 0/1-Kodierung wie solche behandelt werden und verfälschen dadurch die Analysen nicht. Eigentlich ist die Regressionsanalyse sogar das präzisere Instrument zur Aussage über Abhängigkeitsstrukturen, mit dem sich auch die Höhe des Einflusses auf die Prädiktorvariable bestimmen lässt.

Dagegen spricht zum einen das mögliche Auftreten von Interaktionseffekten. Es ist möglich, dass ein Faktor nur in Kombination mit einem anderen Auswirkungen auf die endogene Variable hat. Dazu muss aber die Abhängigkeitsstruktur des Modells bekannt sein, und diese lässt sich besser mit Hilfe der Varianzanalyse bestimmen, da alle Wechselwirkungen untersucht werden können. Des Weiteren liegen die unabhängigen Variablen für die meisten Variablen nur in drei oder weniger Ausprägungen vor, so dass bei dieser hohen Stichprobenanzahl eigentlich nicht von metrischen Daten die Rede sein kann, sondern eher von Kategorien. Für die hier zu untersuchenden Einflussfaktoren eignet sich daher die Varianzanalyse besser, zumal noch eine weitere kategoriale Variable (N_1) mit im Modell aufgenommen werden kann.

5.1.2 Varianzanalyse

Zuerst interessiert, ob die Auswahl der Experimentfaktoren für alle eine signifikante Einflussgröße auf den Umsatz bildet. Dazu wurde mit SPSS eine Varianzanalyse mit zunächst gesättigtem Modell, also mit allen möglichen Interaktionen durchgeführt. Hierbei sollen die Wechselwirkungen der Faktoren Aufschluss darüber geben können, ob bestimmte Wirkungen der Experimentfaktoren nur dann auftreten, wenn diese in Kombination vorkommen. Es wurden alle Einflussvariablen bei der univariaten Varianzanalyse als Zwischensubjektfaktoren definiert, mit dem Ziel alle Interaktionseffekte dieser Faktoren zu berechnen⁶².

In einem zweiten Durchlauf wurde dann ein Modell formuliert, in welchem nur noch die Interaktionen auftraten, die sich zuvor als signifikant herausstellten. Hierbei ergaben sich dann die in Tabelle 5-3 ausgewiesenen bi- und trilateralen Interaktionseffekte. Da es in der Simulationsstudie nur um den Nachweis der Wirkung von Beobachtungszahlen auf die Umsätze geht, sind hierfür nur die Variablen F_4 und für den Einfluss der Schätzmethodik der hierarchisch Bayesschen Regression die Variable F_5 von Interesse. Somit begrenzt sich der Interpretationsbedarf auf diese Haupteffekte, sowie alle Interaktionen mit Beteiligung von F_4 und/oder F_5 . Es bleiben dann zwei

⁶² Dies sind bei 6 Faktoren 56 unterschiedliche (zwei- und mehrseitige) Interaktionen.

signifikante Interaktionen und die beiden signifikanten Haupteffekte bestehen, welche es zu erörtern gilt.

Abhängige Variable: Umsatz

Quelle	Quadratsumme vom Typ III	df	Mittel der Quadrate	F	Signifikanz	Partielles Eta ²
Korrigiertes Modell	16854473813,147(a)	44	383056223,026	503,590	,000	,885
Konstanter Term	118507658604,148	1	118507658604,148	155797,64	,000	,982
F1	31728863,472	2	15864431,736	20,856	,000	,014
F2	13587886528,568	2	6793943264,284	8931,746	,000	,862
F3	540019588,434	2	270009794,217	354,972	,000	,198
F4	191546369,386	5	38309273,877	50,364	,000	,081
F5	12594151,177	1	12594151,177	16,557	,000	,006
F1 * F3	56835918,497	4	14208979,624	18,680	,000	,025
F2 * F3	480992369,242	4	120248092,311	158,086	,000	,180
F2 * F4	31553231,415	10	3155323,142	4,148	,000	,014
F4 * F5	4977024,612	2	2488512,306	3,272	,038	,002
F1 * F2 * F3	88652662,914	12	7387721,910	9,712	,000	,039
Fehler	2183829536,673	2871	760651,180			
Gesamt	156024824660,394	2916				
Korrigierte Gesamtvariation	19038303349,820	2915				

a R-Quadrat = ,885 (korrigiertes R-Quadrat = ,884)

Tabelle 5-3: Ergebnisse der Varianzanalyse

5.1.2.1 Interpretation von Wechselwirkungen

Das Problem bei den festgestellten Wechselwirkungen ist die Interpretierbarkeit der Einflussvariablen. So weisen Rosnow/Rosenthal (1989) darauf hin, dass die gleichzeitige Berücksichtigung von Interaktions- und Haupteffekten Verfälschungen aufwerfen können. Besteht eine Interaktion zwischen mehreren Variablen, so ist nur dieser Effekt eindeutig interpretierbar. Dies trifft dann aber deshalb nicht automatisch auf die Haupteffekte zu, selbst wenn diese ebenfalls signifikant sind. Zur eindeutigen Interpretierbarkeit der Haupteffekte klassifizieren Leight/Kinnear (1980) die Interaktionen in drei Kategorien. Dazu stellt man wie in Bortz (1993, S. 276) die bilateralen Wechselwirkungen grafisch nebeneinander dar, so dass jeweils beide Effekte einmal auf der Abszisse abgetragen werden. Verlaufen die Linienzüge dann parallel, existiert überhaupt kein Interaktionseffekt, obwohl dieser laut Varianzanalyse signifikant auftritt. Das kann vorkommen, wenn der Einfluss dieser Variablen so stark ist, dass möglicherweise sogar Scheinwirkungen mit anderen Variablen auftreten, dessen Effekte dann aber grafisch nicht nachzuvollziehen sind.

Von ordinaler Interaktion spricht man, wenn die Linien der Diagramme in beiden Darstellungsformen den gleichen Trend ausweisen, also beide monoton steigen oder fallen und zusätzlich die Rangfolge beide Male identisch bleibt. Bei ordinalen Interaktionen bleiben dann auch beide Haupteffekte eindeutig interpretierbar. Zeigen die Linienzüge gegenläufige Trends an, werden sie als hybride Interaktion eingestuft, wenn sie sich in nur einem der beiden Diagramme überschneiden. Hierbei ist nur der Haupteffekt eindeutig, in dem die Rangfolge der Mittelwerte des Haupteffektes für alle Stufen des anderen Faktors gilt. Das bedeutet, dass nur der Faktor interpretiert werden sollte, der auf der Abszisse von dem Diagramm abgetragen ist, in dem die Linienzüge gleichsinnige Trends aufweisen. Überschneiden sich die Linienzüge in beiden Diagrammen, ist die Rede von disordinaler Interaktion und man sollte in dem Fall die Haupteffekte gar nicht einzeln interpretieren.

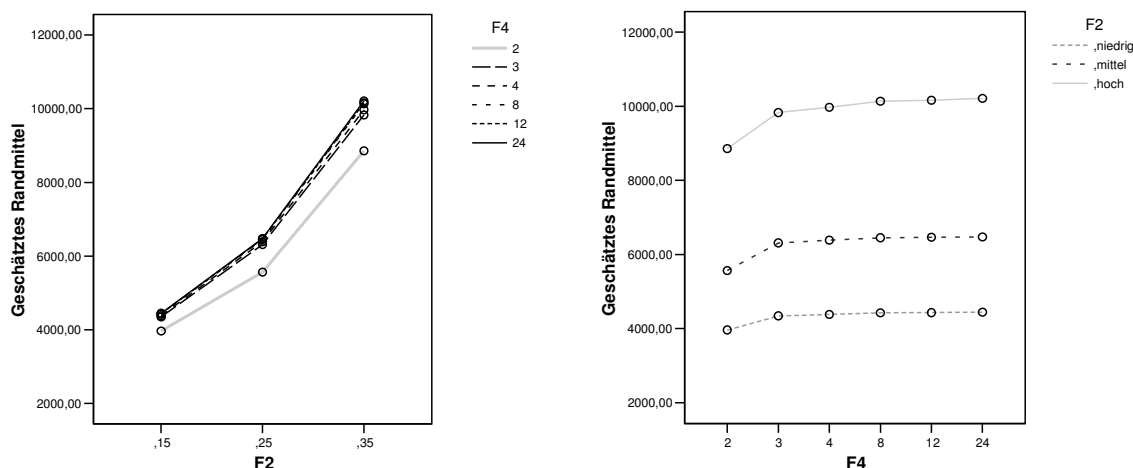


Abbildung 5-2: Diagramm zur Interpretation von Wechselwirkungen zwischen F_2 und F_4

Zur Deutung der Wechselwirkungen aus der Varianzanalyse der Simulationsstudie (vgl. Tabelle 5-3) sollen ebenfalls die Plots angeführt werden. Mit $F_2 \times F_4$ und $F_4 \times F_5$ sind zwei signifikante Interaktionseffekte von Interesse, da sie die zu untersuchenden Variablen enthalten. Schaut man sich die Verläufe in beiden Darstellungsformen an (vgl. Abbildung 5-2), so zeigt sich aufgrund der nicht überlagerten und trendgleichen Linienzüge von $F_2 \times F_4$ ein ordinaler Interaktionseffekt, welcher in Folge dessen auf zwei voll interpretierbare Haupteffekte hinweist. Zwar ist aus der linken Darstellung nicht ganz eindeutig zu erkennen, ob sich die Linienzüge kreuzen oder nicht, deutlich ist aber in der rechten Abbildung eine in allen Fällen monoton steigende Linie. Daraus lässt sich folgern, dass eine Überlagerung links zu verneinen ist.

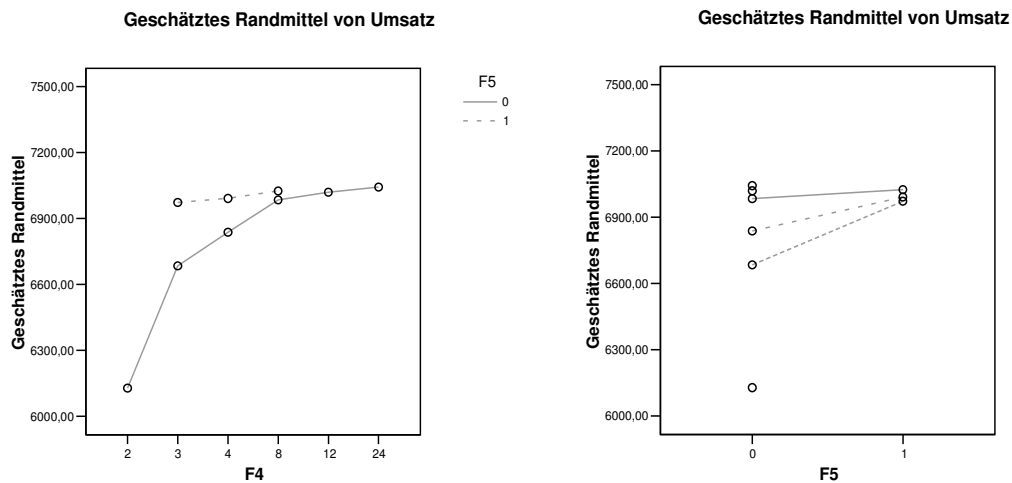


Abbildung 5-3: Diagramm zur Interpretation von Wechselwirkungen zwischen F_4 und F_5

Die andere Wechselwirkung besteht direkt zwischen den beiden im Focus stehenden Variablen F_4 und F_5 . Wie im ersten Fall zeigen die Linien auch hier keinerlei Überschneidungen und steigen beide streng monoton. Dies lässt für die Haupteffekte von F_4 und F_5 den eindeutigen Schluss zu, dass beide Variablen unabhängig von allen anderen exogenen Größen einen den Umsatz beeinflussenden Effekt haben. Durch den eindeutig steigenden Trendverlauf bei wachsender Beobachtungszahl bestätigt die Analyse auch die Unterstellung, positive Umsatzeffekte mit zunehmender Datenbasis zu realisieren. Die Vermutung der Thesen ist damit also bestätigt (vgl. 5.3.1, S. 93).

5.1.3 Parameterschätzer

Aus der Analyse mit dem Umsatz als abhängige Variable ließ sich zwar generell ein positiver Einfluss nachweisen, jedoch bleibt offen wie stark sich die Faktoren F_4 und F_5 auf die Steigerung der Umsätze auswirken. Der Schätzer der Effektgröße stellt üblicherweise die Einflussstärke der einzelnen Variablen dar, jedoch in diesem Fall wird dessen Aussagekraft zu stark verzerrt. Wie aus Tabelle 5-3 zu entnehmen liegt die Hauptwirkung auf den beiden, die Funktion charakterisierenden Variablen F_2 und F_3 . Diese wirken sich so dominant auf den absoluten Wert des Umsatzes aus, dass der anteilige Effekt von F_4 oder F_5 nur einen verschwindend geringen Einfluss ausübt. Um als abhängige Variable eine vereinheitlichte Größe zu messen, wurde der Umsatz durch den in Tabelle 5-2 errechneten Anteilswert ersetzt. Weiter soll auch ein Modell formuliert werden, dass es ermöglicht anhand der vorliegenden Faktoren eine Abschätzung zur Güte der Allokation abgeben zu können. Dazu ist die Formulierung

aller Ausprägungen in binärer Form notwendig. Geeignete Parameterschätzer für die Kategorialen Variablen liefert SPSS optional bei der Varianzanalyse.

Abhängige Variable: Logit

Quelle	Quadratsumme vom Typ III	df	Mittel der Quadrate	F	Signifikanz	Partielles Eta-Quadrat
Korrigiertes Modell	3030,923(a)	13	233,148	618,261	,000	,735
Konstanter Term	34900,163	1	34900,163	92548,140	,000	,970
F1	54,555	2	27,278	72,335	,000	,047
F2	252,157	2	126,079	334,335	,000	,187
F3	6,855	2	3,427	9,089	,000	,006
F4	2358,517	5	471,703	1250,861	,000	,683
F5	380,119	1	380,119	1007,998	,000	,258
N2	29,587	1	29,587	78,459	,000	,026
Fehler	1094,352	2902	,377			
Gesamt	51542,091	2916				
Korrigierte Gesamtvariation	4125,276	2915				

a R-Quadrat = ,735 (korrigiertes R-Quadrat = ,734)

Tabelle 5-4: Varianzanalyse mit abhängiger Variable als Logit

Ein mögliches lineares Modell mit 14 binären Parametern würde zunächst lauten:

$$(106) \quad P = b_0 + b_{1,8}F_{1,8} + b_{1,20}F_{1,20} + b_{2,hoch}F_{2,hoch} + \dots + b_5F_{5,0}$$

mit $P = \text{Anteil des maximal erreichbaren Umsatzes}; 0 \leq P \leq 1$

$$F_{k,l} = \begin{cases} 1, & \text{wenn } F_k = l \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

Der Fall des linearen Ansatzes birgt die Gefahr ein $P > 1$ zu erhalten. Für die Analyse von Prozentzahlen eignet sich gemäß Lindner/Berchtold (1976, S. 23) generell besser ein Logitmodell der Form

$$(107) \quad \ln\left(\frac{P}{1-P}\right) = b_0 + b_{1,8}F_{1,8} + b_{1,20}F_{1,20} + b_{2,hoch}F_{2,hoch} + \dots + b_5F_{5,0}$$

wodurch einerseits, insbesondere bei hohem Niveau, der Wertebereich auseinandergezerrt wird, andererseits der Anteilswert 1 keinesfalls überschritten werden kann. Die abhängige Variable wurde daher als Logit wie in (107) erfasst. Wegen ihrer vollen Interpretierbarkeit⁶³ wurden nur die Haupteffekte in der Varianzanalyse modelliert und geschätzt. Der große Vorteil dieser Methode liegt nun darin, mit standardisierten Para-

⁶³ Die restlichen Interaktionseffekte wurden auch untersucht. Es ergaben sich ausschließlich ordinale Interaktionen und somit waren alle Haupteffekte voll interpretierbar.

meterschätzern detailliertere Angaben zur Effektstärke der einzelnen Faktoren machen zu können. Die Ergebnisse sind in Tabelle 5-4 aufgeführt und bieten mit einem korrigierten R^2 von 0,734 eine relativ gute Anpassung.

Anhand der standardisierten Koeffizienten (siehe Tabelle 5-5, redundante Schätzer für die Referenzkategorien wurden entfernt) zeigt sich, dass die Beobachtungen (F_4) klar den höchsten Einfluss auf die Güte des Ergebnisses ausmachen, was eindeutig für eine breite Datenbasis argumentiert. Bei sinkender Beobachtungszahl reduziert sich auch das anteilige Umsatzmaximum.

Abhängige Variable: Logit

Parameter	B	Standard- fehler	T	Signifikanz	95 % Konfidenzintervall		Partielles Eta ²
					Untergrenze	Obergrenze	
Konstanter Term	5,726	,053	107,348	,000	5,621	5,830	,799
[F1=8]	,321	,028	11,520	,000	,266	,376	,044
[F1=20]	,077	,028	2,765	,006	,022	,132	,003
[F2=,niedrig]	,716	,028	25,702	,000	,661	,771	,185
[F2=,mittel]	,289	,028	10,388	,000	,235	,344	,036
[F3=,niedrig]	,118	,028	4,247	,000	,064	,173	,006
[F3=,mittel]	,068	,028	2,449	,014	,014	,123	,002
[F4=2]	-3,324	,048	-68,890	,000	-3,418	-3,229	,621
[F4=3]	-2,051	,044	-46,570	,000	-2,137	-1,965	,428
[F4=4]	-1,729	,044	-39,268	,000	-1,816	-1,643	,347
[F4=8]	-1,161	,044	-26,371	,000	-1,248	-1,075	,193
[F4=12]	-,589	,048	-12,207	,000	-,684	-,494	,049
[F5=0]	-,884	,028	-31,749	,000	-,939	-,830	,258
[N2=1]	-,201	,023	-8,858	,000	-,246	-,157	,026

Tabelle 5-5: Parameterschätzer für die Ausprägungen der Faktoren $F_1 - F_5$

In Verbindung mit Bayesscher Schätzung (F_5), welche nach F_4 den zweithöchsten Einfluss ausübt, kann man der für hohe Beobachtungszahlen wiederum notwendigen teuren Datenerhebung entgegensteuern. Die positiven Exponenten der Variablen F_1 , F_2 und F_3 deuten darauf hin, dass sich der Umsatzverlust bei beobachtungsbedingter suboptimaler Verteilung der knappen Ressource verringert, wenn eher wenige Segmente möglichst unelastisch und strukturell homogen sind.

Um das Modell anwendbar und aussagefähig zu machen, ist noch die Umformung und Auflösung nach P notwendig:

$$(108) \left(\frac{P}{1-P} \right) = \alpha_0 \alpha_{1,8}^{F_{1,8}} \alpha_{1,20}^{F_{1,20}} \alpha_{2,hoch}^{F_{2,hoch}} \dots \alpha_{5,0}^{F_{5,0}}$$

mit $\alpha_{k,l} = \exp(b_{k,l})$

$$(109) \quad P = \frac{1}{1 + \exp(-(\alpha_0 \alpha_{1,8}^{F_{1,8}} \alpha_{1,20}^{F_{1,20}} \alpha_{2,hoch}^{F_{2,hoch}} \dots \alpha_{5,0}^{F_{5,0}}))}.$$

Durch Einsetzen der für das Unternehmen zutreffenden Situation (z. B. $F_2 = \text{mittel}$, $F_3 = \text{niedrig}$, $F_5 = 0$ (nicht verfügbar), usw.), kann eine Abschätzung darüber abgegeben werden, wie nah man nach einer Allokation am wahren Optimum liegt.

5.2 Annahme vollständiger Homogenität

Laut Skiera/Albers (1994) besteht gemäß Formel (10) (S. 14) die Möglichkeit einer Allokation unter der Annahme nur einer Elastizität β_2 für alle Gebietseinheiten. Voraussetzung dafür ist die Eigenschaft, dass alle Gebiete der gleichen Besuchszeitenelastizität unterliegen. Bei $F_3 = \text{niedrig}$ kann es durchaus Sinn machen, vereinfachend von einer einheitlichen Elastizität auszugehen. Zusätzlich interessiert die Unterschiedlichkeit der Ergebnisse bei Anwendung von (10) und (11) zumal die erste Formel erheblich einfacher zu berechnen ist. Nachfolgend soll daher zum Vergleich, nicht nur für die eher homogenen Zuordnungseinheiten, untersucht werden, inwieweit sich die Resultate bei Anwendung dieser differenzierten Optimierungsregel verändern.

Positiv ist zunächst die Tatsache, dass die Allokation nun sogar auf Basis von nur einem Beobachtungswert möglich ist, da der Gebietsgüteparameter nun für jede Zuordnungseinheit die einzig Unbekannte, und somit nur eine Gleichung zur Auflösung notwendig ist. Die für alle Zuordnungseinheiten gültige Elastizität müsste man in diesem Fall dann subjektiv schätzen oder als bekannt voraussetzen. In einer weiteren Simulationsstudie wurde diese Annahme für $F_4 = \{1, 2, 3, 4, 8, 12 \text{ und } 24\}$ untersucht. Dabei waren die Ausgangsdaten dieselben, wie in den vormals behandelten Fällen. Erwartet wurden, für die eher homogenen Gebiete, ein gleiches bis geringfügig schlechteres Ergebnis, während sich diese Methodik für die heterogen verteilten Zuordnungseinheiten, ganz und gar nicht zu eignen schien.

Es stellte sich schnell heraus, dass für dieses Modell die Anzahl der Beobachtungswerte eigentlich keine Rolle spielt. Es ist kein steigender Trend der Umsätze bei zunehmender Beobachtungszahl erkennbar, was die Signifikanz von F_4 als zweifelhaft erscheinen lässt. Eine Varianzanalyse bestätigte auch diesen, nicht vorhandenen Einfluss des Faktors F_4 (siehe Tabelle 5-6). Die Eigenschaft lässt den Schluss zu, dass die Schätzungen auf Basis von nur einem Beobachtungswert pro Zuordnungseinheit ausreichend ist. Dies ist kostentechnisch eine ganz entscheidende Eigenschaft, die bei

entsprechend guten Ergebnissen die bisherigen Schätzmethoden dominieren könnte. Fraglich ist jedoch, welches ein geeigneter Schätzwert für die Elastizität sein kann. Dazu wurden drei Alternativen erprobt, um für die Unterstellung von homogener Struktur ein möglichst gutes Ergebnis zu erhalten.

Abhängige Variable: UMSATZ

Quelle	Quadratsumme vom Typ III	df	Mittel der Quadrate	F	Signifikanz
Korrigiertes Modell	6717300530,842(a)	188	35730321,973	61,553	,000
Konstanter Term	58821503047,026	1	58821503047,026	101333,215	,000
F4	2472,579	6	412,096	,001	1,000
F1	11241557,698	2	5620778,849	9,683	,000
F2 * F3	6652676307,522	8	831584538,440	1432,591	,000
F4 * F1	612,502	12	51,042	,000	1,000
F4 * F2 * F3	5583,909	48	116,331	,000	1,000
F1 * F2 * F3	53367982,357	16	3335498,897	5,746	,000
F4 * F1 * F2 * F3	6014,276	96	62,649	,000	1,000
Fehler	548549852,762	945	580476,035		
Gesamt	66087353430,645	1134			
Korrigierte Gesamtvariation	7265850383,604	1133			

a R-Quadrat = ,925 (korrigiertes R-Quadrat = ,909)

Tabelle 5-6: Varianzanalyse über die Beobachtungszahl bei Annahme vollständiger Homogenität

Zunächst wurde β_2 subjektiv bestimmt (β_2^S). Dabei war auch hier die Ausgangssituation, dass der Schätzende anhand von Erfahrungswerten die Elastizität genau voraussagen kann. Als Schätzgröße wurde dazu der aus der Zufallszahlengeneration bekannte Mittelwert benutzt. Als zweite Alternative diente bei einer Beobachtungszahl $F_4 \geq 2$ der über die Zuordnungseinheiten gemittelte Wert für die Besuchszeitenelastizität (β_2^μ), während drittens noch die Optimalwerte mit Hilfe des Excel-Solvers errechnet wurden (β_2^{opt}). Dieser bestimmte die in Tabelle 5-7 mittig dargestellten Werte für die unterschiedlichen Modellparameter von F_2 und F_3 . Letztere Parameter (β_2^{opt}) können aber nur zur Ergebniskontrolle verwendet werden, da man in der Praxis keine Informationen über die wahren Parameter zur Verfügung hat, und daher der Solver dann nicht anwendbar ist.

Das Ergebnis überraschte in doppelter Hinsicht. Zum einen waren die optimalen Elastizitäten β_2^{opt} in unmittelbarer Nähe des Mittelwertes über die Segmente β_2^μ erwartet worden. Die Ergebnisse des Solvers zeigen jedoch meist deutlich darüber liegende Werte als geeignete Größen. Es zeigte sich bei geringfügiger Variation der optimalen Werte β_2^{opt} aber, dass für diese ebenfalls ein flaches Maximum vorliegt, weshalb sich eine heuristische Vorgehensweise zur Berechnung der Größe β_2 anbietet.

In Tabelle 5-7 wurden neben Erwartungswert auch die Streuung zum Vergleich mit dargestellt. Aus diesen wahren Verteilungsparametern kann möglicherweise ein Näherungsverfahren zur Bestimmung von β_2 derart entwickelt werden, dass diese möglichst nah an den per Solver ermittelten, optimalen Elastizitäten β_2^{opt} liegen.

Elastizität F_2	Anteil Streuung F_3	Streuung $F_2 \times F_3$	Heuristik $F_2 + F_3$	Optimalwert lt. Solver
0,35	0,33	0,12	0,68	0,66
0,35	0,20	0,07	0,55	0,55
0,35	0,10	0,04	0,45	0,44
0,25	0,33	0,08	0,58	0,58
0,25	0,20	0,05	0,45	0,48
0,25	0,10	0,03	0,35	0,38
0,15	0,33	0,05	0,48	0,50
0,15	0,20	0,03	0,35	0,31
0,15	0,10	0,02	0,25	0,18

Tabelle 5-7: Umsatzmaximale Elastizitätsgrößen laut Excel-Solver bei Annahme von Homogenität

Es stellte sich heraus, dass schon die einfache Summe der Faktoren F_2 und F_3 eine hervorragende heuristische Größe zur Bestimmung eines geeigneten Parameters β_2 für den heterogenen Fall bietet.

Weiterhin überrascht die Qualität, der mit Hilfe dieser Methode errechneten Ergebnisse positiv (vgl. Tabelle 5-8). Trotz wesentlich simplerer Berechnung und mit der Möglichkeit auf Basis von nur einem Beobachtungswert je Einheit, kann diese Verteilungsregel auf das Niveau der beiden qualitativ hochwertigsten Schätzungen ($F_4 = 24$, $F_5 = \text{OLS}$ und $F_4 = 8$, $F_5 = \text{Bayes}$) aufschließen. Für die mittleren bis eher homogen verteilten Segmente dominiert es sogar die beiden vorgenannten Methoden. Der Parameter β_2 lässt sich dabei folgendermaßen heuristisch bestimmen:

$$(110) \quad \beta_2 = \mu_{\beta_2} + \frac{\sigma_{\beta_2}}{\mu_{\beta_2}}, \text{ wenn gilt } \beta_{2i} \sim N(\mu_{\beta_2}, \sigma_{\beta_2}).$$

F_2 F_3	α -Allocation	F_1 F_4 F_5 40 24 OLS	40 12 OLS	40 8 Bayes	α -Allocation	20 24 OLS	20 12 OLS	20 8 Bayes	α -Allocation	8 24 OLS	8 12 OLS	8 8 Bayes
hoch_hoch	0,97129	0,98815	0,97707	0,97688	0,97554	0,98757	0,97433	0,97661	0,97878	0,99207	0,98717	0,98725
hoch_mittel	0,98951	0,98985	0,98009	0,98731	0,98997	0,98957	0,98532	0,98447	0,99248	0,99030	0,98716	0,99222
hoch_niedrig	0,99512	0,99111	0,98362	0,98834	0,99589	0,99049	0,97993	0,98994	0,99625	0,99399	0,98399	0,98459
mittel_hoch	0,98594	0,99336	0,98805	0,98900	0,98696	0,99499	0,98979	0,99006	0,98547	0,99512	0,99179	0,99167
mittel_mittel	0,99228	0,99424	0,99008	0,99001	0,99537	0,99502	0,98972	0,99036	0,99465	0,99532	0,98943	0,98470
mittel_niedrig	0,99774	0,99292	0,98724	0,99094	0,99760	0,99398	0,98893	0,98895	0,99780	0,99625	0,98822	0,98924
niedrig_hoch	0,99253	0,99730	0,99408	0,99363	0,99250	0,99633	0,99393	0,99212	0,99380	0,99750	0,99470	0,99346
niedrig_mittel	0,99656	0,99696	0,99385	0,99394	0,99652	0,99668	0,99377	0,99364	0,99496	0,99752	0,99414	0,99297
niedrig_niedrig	0,99891	0,99650	0,99380	0,99435	0,99908	0,99738	0,99421	0,99461	0,99905	0,99705	0,99494	0,99372

Tabelle 5-8: Anteile der Ergebnisse am Referenzumsatz bei Unterstellung einer homogenen Struktur

Die Berechnungen wurden mit Hilfe der oben angegebenen Heuristik durchgeführt, wobei allerdings die „wahren“ Werte für F_2 und F_3 eingesetzt wurden. Auch wenn diese übergeordneten (priori) Parameter meist nicht in der Praxis vorliegen, ist zur Darstellung einer alternativen Allokationsmethode diese Vorgehensweise jedoch ein ausreichender Nachweis über die Güte des Verfahrens. Die Methode soll aufgrund der einheitlichen Elastizitäten und der Allokation ausschließlich auf Basis der konstanten Terme α im folgenden *alpha-Allokation* heißen.

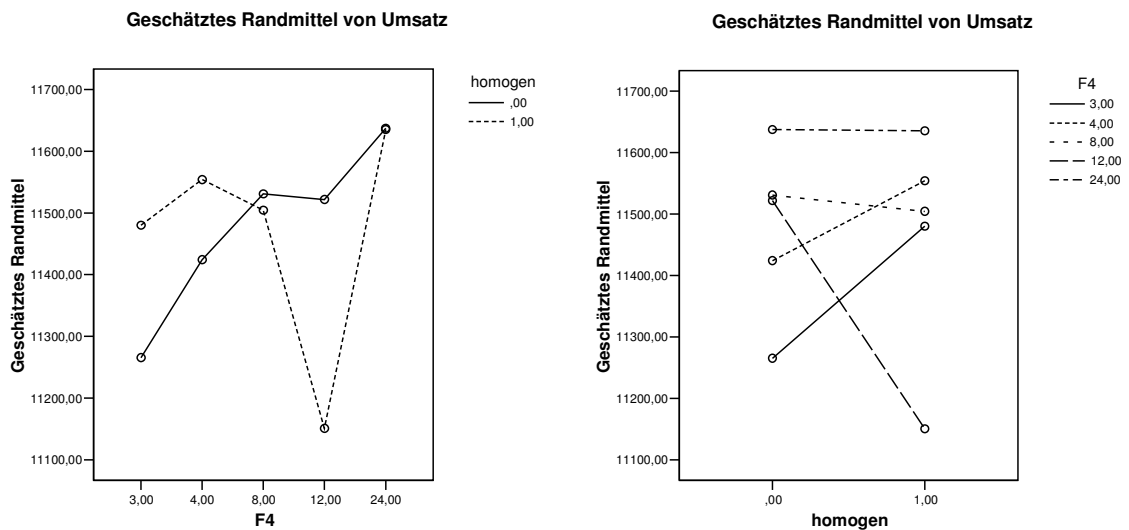


Abbildung 5-4: Digramm des Interaktionseffektes zwischen F_4 und der *alpha*-Allokation

Einschränkend dazu ist zu beachten, dass in der Praxis die unbekannten Momente für die Verteilung der Elastizität trotzdem ermittelt werden müssen. Berechnet man diese durch den Mittelwert und die Varianz über die Elastizitäten aller Segmente auf Basis von nur zwei Beobachtungen, so sind die Resultate beispielsweise unbefriedigend, während auf Basis einer höheren Beobachtungszahl wiederum die eigentlich dominierenden Effekte dieser Methode, nämlich die einfache Handhabung sowie die nur geringe erforderliche Datenbasis, entfallen.

Hier kann sich nun die subjektive Bestimmung der Parameter als eine geeignete Alternative etablieren. Abgesehen von möglichen branchenüblichen Daten, welche übernommen oder einbezogen werden können, müssen bei Unterstellung einer homogenen Instrumentelastizität mit Erwartungswert und Standardabweichung insgesamt nur zwei Größen ermittelt werden, wenn diese aus früheren Untersuchungen möglicherweise nicht sowieso schon bekannt sind. So kann beispielsweise Manager I, der in Unternehmen A per Datenerhebung für die Besuchszeitenelastizität über A's Kunden eine Verteilung $\beta_2 \sim N(0,3; 0,15)$ errechnet hat, bei einem Wechsel zum

brachengleichen Konkurrenten B diese Daten verwerten. Statt der aufwändigen Besuchszeitenallokation mit (11) nutzt er sein Vorwissen und kann einfach per *alpha-Allokation* und dem einheitlichen Parameter $\beta_2 = 0,3 + 0,15/0,3$ die aktuelle Besuchszeitenallokation verbessern.

			F ₁ F ₄ Zuwachs ggü. Heterogen N ₂ =1					Zuwachs ggü. Heterogen N ₂ =2				
F ₂	F ₃	N ₁	40 24	40 12	40 8	40 4	40 3	40 24	40 12	40 8	40 4	40 3
hoch	hoch	1	-95,58	18,01	166,31	132,62	360,37	-7,10	-38,00	206,27	35,74	108,91
hoch	hoch	2	-98,02	-64,61	-100,31	75,74	211,38	-204,06	27,84	-72,82	63,37	-48,62
hoch	hoch	3	-17,74	54,56	-64,28	246,90	119,27	-91,48	1,13	134,51	0,48	52,11
hoch	hoch	4	-176,11	553,73	-146,58	-120,14	682,58	230,35	18,79	-121,05	181,04	274,05
hoch	hoch	5	-41,40	-120,89	150,49	56,96	147,00	-109,77	-8,40	243,54	359,69	93,47
hoch	hoch	6	-175,25	-52,96	-47,17	48,40	222,98	-54,29	18,56	91,84	216,88	-40,10
			-100,68	64,64	-6,92	73,41	290,60	-39,39	3,32	80,38	142,87	73,30
			-0,00889	0,00570	-0,00061	0,00648	0,02565	-0,00348	0,00029	0,00709	0,01261	0,00647
F ₂	F ₃	N ₁	20 24	20 12	20 8	20 4	20 3	20 24	20 12	20 8	20 4	20 3
hoch	hoch	1	-162,18	-26,93	-136,36	-8,41	23,68	45,43	-6,48	125,12	98,01	114,47
hoch	hoch	2	320,63	599,99	580,47	164,34	281,68	-276,25	-33,43	0,49	36,59	533,87
hoch	hoch	3	33,02	108,91	-9,95	68,59	33,83	12,60	-40,06	-12,22	13,14	223,17
hoch	hoch	4	-255,10	663,65	-78,61	90,95	628,13	-44,97	-131,30	-26,05	-132,20	-10,24
hoch	hoch	5	-61,75	51,92	340,18	273,29	125,60	-6,67	-81,43	382,09	10,02	42,02
hoch	hoch	6	114,28	-194,22	3,19	93,90	9,15	-54,42	-4,00	-76,85	70,80	55,47
			-1,85	200,55	116,48	113,78	183,68	-54,05	-49,45	65,43	16,06	159,79
			-0,00015	0,01623	0,00942	0,00921	0,01486	-0,00437	-0,00400	0,00529	0,00130	0,01293
F ₂	F ₃	N ₁	8 24	8 12	8 8	8 4	8 3	8 24	8 12	8 8	8 4	8 3
hoch	hoch	1	-105,16	42,23	-170,30	270,43	49,34	-502,77	-1.976,41	-189,78	76,79	38,10
hoch	hoch	2	-354,89	147,74	-319,80	122,42	244,61	-94,84	-409,81	294,03	295,17	88,46
hoch	hoch	3	-503,29	131,93	-72,71	816,47	3.409,89	-603,53	-54,36	-8,48	-1.112,06	244,38
hoch	hoch	4	-33,13	-77,81	-9,90	19,05	16,24	-286,19	-166,08	26,32	-51,91	-262,37
hoch	hoch	5	-450,74	-202,22	10,86	19,56	57,32	-329,34	83,16	61,14	114,52	217,48
hoch	hoch	6	-145,91	-20,16	50,42	412,52	14,36	-54,27	27,54	26,10	341,06	329,61
			-265,52	3,62	-85,24	276,74	631,96	-311,82	-415,99	34,89	-56,07	109,28
			-0,02289	0,00031	-0,00735	0,02385	0,05447	-0,02688	-0,03586	0,00301	-0,00483	0,00942

Tabelle 5-9: Zuwachs der *alpha-Allokation* gegenüber der herkömmlichen Methoden, wenn die gemittelten Schätzer über alle Zuordnungseinheiten eingesetzt werden

Aufgrund der guten Ergebnisse, die aus dieser Methode resultieren, liegt die Überlegung nahe, sich gerade bei wenigen Beobachtungen bei der Schätzung auf die Verteilung von den β_{2i} zu beschränken und die knappe Ressource mit Hilfe der *alpha-Allokation* durchzuführen. Zur Untersuchung wurden daher alle Parameter wie gehabt per OLS (Bei $F_4 = 12, 24$) oder Bayes ($F_4 = 3, 4, 8$) geschätzt, dessen priori-Momente Erwartungswert und Standardabweichung zur Berechnung der Elastizität in (110) eingesetzt und anschließend per *alpha-Allokation* optimiert.

Die Ergebnisse dazu sind in Tabelle 5-9 dargestellt. Eine weitere Varianzanalyse ergab jedoch keinen signifikanten Haupteffekt für diesen Methoden-Mix, vielmehr war eine laut Abbildung 5-4 disordinale Interaktion mit F_4 sehr einflussreich. Das Diagramm zeigt dabei im Fall von niedrigen Beobachtungszahlen ($F_4 = 3$ oder 4) eine klare Dominanz der *alpha-Allokation*, während im Fall höherer Beobachtungszahlen besser nicht auf diesen Methoden-Mix zurückgegriffen werden sollte. Als eine mögliche

Handlungsempfehlung ließe sich daraus also ableiten, bei wenigen vorhandenen Beobachtungsdaten die Schätzungen mittels hierarchisch Bayesscher Regression durchzuführen, jedoch nur die erhaltenen priori-Verteilungsmomente der Elastizität zu errechnen, und die Zuordnung mittels *alpha-Allokation* durchzuführen. Dass man bei dieser Vorgehensweise auch keine Rücksicht auf gestutzte Verteilungen zu nehmen braucht, sollte ein weiteres gewichtiges Argument darstellen.

5.3 Prüfung der Hypothesen

5.3.1 These H_{01} : Die Beobachtungszahl beeinflusst die Ergebnisse einer Reallokation mit knapper Ressource.

Die Untersuchungen aus Kapitel 5.1.2 zeigen einen signifikanten Einfluss der Variable F_4 auf die Umsatzhöhe. Zwar treten auch Wechselwirkungen mit den Variablen F_2 und F_5 auf, die Interpretationen aus Kapitel 5.1.2.1 zeigen aber ausdrücklich, dass der Haupteffekt von F_4 auch unabhängig von den Wechselwirkungen einen deutlichen Einfluss ausübt. Die Effektgröße η^2 bestätigt einen, in der Relation zu Elastizität und Heterogenität zwar eher geringen, insgesamt aber dennoch eindeutig vorhandenen Effekt der Beobachtungszahl. Deutlicher wird dies bei den Ergebnissen, in denen die abhängige Variable das Logit der anteiligen Referenzwerte darstellt. Hierbei zeigen sich die standardisierten Parameterschätzer der Beobachtungszahlen als die einflussreichsten. Die Hypothese, F_4 habe einen signifikanten Einfluss auf die Umsatzhöhe kann also mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 0 % angenommen werden.

5.3.2 These H_{02} : Aus der Optimierung mit wenigen Beobachtungen resultieren höhere Ergebnisse als aus zufällig erzeugten Allokationen.

Um die optimierten Ergebnisse mit denen der zufälligen Allokationen vergleichen zu können, wurden diese voneinander subtrahiert und Mittelwerte daraus erzeugt. Die so erhaltenen Ergebnisse sind aber, trotz ihres Vorzeichens, nicht aussagekräftig genug. Zur Entscheidung, ob man im Unternehmen in Zukunft optimale Allokationen zur Verteilung knapper Ressourcen berechnet und verwendet, eignen sich Wahrscheinlichkeiten zur Verbesserung von Umsätzen besser, als die Darstellung eines Mittelwertes. Wegen der Streuung mancher Ergebnisse um den Nullpunkt, resultiert zwar unter Umständen ein positiver Mittelwert, dieser lässt aber keine weiteren Annahmen zu. Ein Beispiel zeigt sich in Tabelle 5-11 (S. 96) an der Stelle $\{F_1 = 20, F_2 = \text{hoch},$

$F_3 = \text{niedrig}, F_4 = 4, F_5 = 0\}$, wo der Mittelwert aus den Ergebnissen der Simulationsstudie eine Verbesserung gegenüber der zufälligen Allokation vermuten lässt. Die genaue Betrachtung der einzelnen Ergebnisse verdeutlichte aber, dass in acht von zwölf Fällen ein negativer Zuwachs folgte, wodurch sich die Wahrscheinlichkeit, den Umsatz zu erhöhen, als eher gering erwies (vgl. hierzu Ergebnistabellen im Anhang S. 137 und 140). Es erscheint daher sinnvoll, die Ergebnisse nicht anhand der Mittelwerte zu beurteilen, sondern jeder Faktoren-Kombination eine Wahrscheinlichkeit zur Verbesserung des Umsatzes zuzuordnen. Die Umsatzänderung sei definiert durch

$$(111) \quad S_{F_1-F_5}^{opt} - S_{F_1-F_5} = \Delta S_{F_1-F_5}.$$

Eine Aussage über die Wahrscheinlichkeit erfordert die Kenntnis einer Verteilung der Ergebnisse. Pro Simulationsvariante stehen nur $N_1 \times N_2 = 12$ Stichprobenergebnisse zur Verfügung. Aufgrund dieser eher geringen Anzahl, kann hier nicht über das Gesetz der großen Zahlen eine Annahme der Normalverteilung erfolgen. Daher muss zuvor ein Test über die Verteilung durchgeführt werden. Über die Grenzümsätze ΔS , welche die Differenz aus optimierten und vorherigem Umsatz für jeweils verschiedene F -Faktoren nach (111) bildet, werden Mittelwert und Standardabweichung berechnet.

Zur Annahme über Normalverteilung bieten sich laut Literatur mit dem Kolmogorov-Smirnov-Test, dem χ^2 -Anpassungstest sowie der Shapiro-Wilk-Test gängige Testverfahren an. Ein schnelles und elegantes Verfahren zum Test auf Normalverteilung stellt aber der Test von David⁶⁴ dar, in dem der Quotient aus Spannweite und Standardabweichung $[^{Sp}/_{\sigma}]$ gebildet und mit tabellierten Grenzwerten⁶⁵ verglichen wird. Für $m = 12$ und $\alpha = 0,05$ beginnt dieser Wertebereich laut David et al. (1954, S. 491) bei $[^{Sp}/_{\sigma}] = 2,8$ und endet bei $[^{Sp}/_{\sigma}] = 3,91$. Liegt der Quotient außerhalb der Grenzen, so wird die Hypothese der Normalverteilung abgelehnt. Der durchgeführte Test untermauerte die Annahme von Normalverteilung bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5 % bei 249 von 270 Fällen. Mit

$$(112) \quad \Delta S_{F_1-F_5} \sim N(\mu_{\Delta S}, \sigma_{\Delta S}^2)$$

war die Verteilung des Umsatzzuwachs dann bestimmt und mit

$$(113) \quad p(\Delta S > 0) = 1 - \int_{-\infty}^0 \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{\Delta S}^2}} \exp\left(-\frac{(\Delta S - \mu_{\Delta S})^2}{2\sigma_{\Delta S}^2}\right) \right) d\Delta S$$

⁶⁴ vgl. David, Hartley and Pearson (1954)

⁶⁵ vgl. Pearson and Stephens (1964)

lag für fast jede Variation der fünf F -Faktoren separat eine Wahrscheinlichkeit zur Verbesserung einer zufälligen Allokation mit Hilfe von Schätzung und Optimierung vor. Tabelle 5-10 gibt hierbei alle Wahrscheinlichkeiten an, wobei diejenigen über 80 % fettgedruckt dargestellt sind. Bei den leeren Feldern musste die Normalverteilungsannahme abgelehnt werden. Bei näherer Untersuchung der Tabellen stellt sich dann folgendes Resultat heraus:

F ₂ F ₃	F ₁ F ₄ F ₅									
	40 24 OLS	40 12 OLS	40 8 OLS	40 4 OLS	40 3 OLS	40 2 genau	40 α -Allok	40 8 Bayes	40 4 Bayes	40 3 Bayes
hoch_hoch	1,000	1,000	1,000	0,986	0,930		1,000	1,000	1,000	1,000
hoch_mittel	1,000	0,999	0,999	0,835	0,717	0,032	1,000	1,000	0,998	1,000
hoch_niedrig	0,996	0,924	0,758	0,221	0,001	0,003	0,970	0,938	0,968	0,947
mittel_hoch	1,000	1,000	0,983	0,970	0,751	0,006	0,997	0,999	0,999	0,999
mittel_mittel	0,977	0,960	0,887	0,765	0,339	0,003	0,945	0,947	0,955	0,916
mittel_niedrig	0,992			0,142	0,023		0,904	0,904	0,720	
niedrig_hoch	0,999	0,999	0,975	0,670	0,196	0,000	0,980	0,989	0,991	0,990
niedrig_mittel	1,000	0,999	0,848	0,083	0,000	0,000	0,907	0,994	0,700	0,636
niedrig_niedrig	1,000	0,915	0,689	0,172	0,020	0,000	0,889	0,999	0,733	0,661

F ₂ F ₃	F ₁ F ₄ F ₅									
	20 24 OLS	20 12 OLS	20 8 OLS	20 4 OLS	20 3 OLS	20 2 genau	20 α -Allok	20 8 Bayes	20 4 Bayes	20 3 Bayes
hoch_hoch	0,953	0,948	0,949	0,932	0,873	0,644	0,940	0,961	0,956	0,957
hoch_mittel	0,994	0,987	0,980	0,747	0,596	0,004	0,921	0,990	0,975	0,981
hoch_niedrig	0,941	0,756	0,776	0,529	0,071	0,032	0,956	0,856	0,853	0,912
mittel_hoch	0,988	0,981	0,989	0,927	0,753		0,988	0,990	0,977	0,973
mittel_mittel	0,970	0,946	0,953	0,588		0,000	0,970	0,978	0,954	0,842
mittel_niedrig		0,886	0,672	0,241	0,115	0,001	0,957	0,878	0,685	
niedrig_hoch	0,998	0,996		0,513	0,206	0,006	0,974		0,962	0,874
niedrig_mittel	1,000	0,978	0,907	0,186	0,092	0,003	0,954	0,939	0,771	0,526
niedrig_niedrig	1,000	0,917	0,868	0,074	0,048		0,882	0,961	0,293	0,600

F ₂ F ₃	F ₁ F ₄ F ₅									
	8 24 OLS	8 12 OLS	8 8 OLS	8 4 OLS	8 3 OLS	8 2 genau	8 α -Allok	8 8 Bayes	8 4 Bayes	8 3 Bayes
hoch_hoch				0,935	0,952	0,728	0,961		0,993	0,941
hoch_mittel	0,939	0,907	0,919	0,628	0,592	0,080	0,852	0,932	0,823	0,849
hoch_niedrig	0,994	0,814		0,701		0,122	0,888	0,889	0,801	0,869
mittel_hoch	1,000	0,997	0,967	0,943	0,446	0,098	0,807	0,984	0,994	0,963
mittel_mittel	0,819	0,777	0,693	0,667		0,067	0,834	0,729	0,766	0,690
mittel_niedrig	0,842	0,667	0,718	0,274	0,110	0,017	0,655	0,778	0,557	0,804
niedrig_hoch			0,908	0,630	0,369	0,020	0,904	0,923	0,836	0,742
niedrig_mittel		0,903	0,849	0,573	0,381	0,043	0,702	0,874	0,747	0,698
niedrig_niedrig	0,878	0,796	0,636	0,223	0,042	0,027	0,691	0,718	0,322	0,193

Tabelle 5-10: Wahrscheinlichkeit, mit Allokation die Umsatzsituation zu verbessern

Um eine mehr als 80prozentige Garantie zu haben, den Umsatz gegenüber der Ausgangssituation wirklich zu steigern, sollte entweder mit auf Basis von hierarchisch Bayesscher Regression geschätzten Werten kalkuliert werden⁶⁶, oder man benötigt mindestens 12 Beobachtungen für den Fall der OLS-Schätzung. Für homogen verteilte und unelastische Zuordnungseinheiten⁶⁷ ist eine Verbesserung der Umsatzsituation kaum möglich. Die maximale Wahrscheinlichkeit zur Steigerung des Umsatzes beträgt

⁶⁶ ausgenommen F_2 und $F_3 = \text{niedrig}$, dann nur bei $F_4 > 3$

⁶⁷ F_2 und $F_3 = \text{niedrig}$

hier zwar 100 %, auf einer Datenbasis von 24 Schätzungen pro Einheit jedoch können in dem Fall die Ergebnisse im Vergleich zu den zufälligen Allokationen nur minimal gesteigert werden. Auch hierarchische Schätzmethoden vermögen für diesen Fall keine Ergebnisse zu erzielen, die den Aufwand der Erhebungen, Berechnungen und Umstrukturierungen rechtfertigen würden. Stattdessen reduziert sich der Umsatz im Schnitt um bis zu 10 % wenn eine Allokation auf zu wenigen Daten basiert.

Mit Ausnahme der sehr elastischen und heterogenen Verkaufsgebiete⁶⁸ eignet sich die Allokation auf Basis von OLS-Schätzungen mit bis zu vier Beobachtungen grundsätzlich nicht, da meistens niedrigere oder fast unveränderte Umsätze resultieren. Ein Parametertest ergab bei einem Mittelwert von -80,14, sowie einer Standardabweichung von 675,7 und $n = 972$, dass die Nullhypothese $\Delta S \geq 0$ abzulehnen ist, wenn gilt $F_4 \leq 4$ und $F_5 = 0$. Im Gegenteil konnte für den Fall von $F_4 \leq 4$ und $F_5 = 1$ festgestellt werden, dass eine Allokation auf Basis Bayesscher Schätzungen zu signifikant höheren Umsätzen führt.

F ₂ F ₃	F ₁ F ₄ F ₅									
	40 24 OLS	40 12 OLS	40 8 OLS	40 4 OLS	40 3 OLS	40 2 genau	40 α -Allok	40 8 Bayes	40 4 Bayes	40 3 Bayes
hoch_hoch	21,26	19,83	18,37	13,53	9,53	4,98	18,63	19,68	18,68	17,80
hoch_mittel	7,78	6,62	6,15	3,42	1,04	-8,58	7,76	7,54	7,28	6,83
hoch_niedrig	2,45	1,60	0,92	-0,95	-4,38	-11,12	3,35	1,96	1,96	1,96
mittel_hoch	7,48	6,76	5,79	3,84	1,88	-8,18	6,90	6,76	6,22	6,38
mittel_mittel	4,77	4,24	3,55	1,46	-0,82	-11,32	4,42	4,40	3,70	3,45
mittel_niedrig	1,06	0,28	0,00	-1,58	-2,87	-14,41	1,66	0,80	0,39	0,54
niedrig_hoch	2,72	2,42	1,99	0,50	-0,97	-10,68	2,12	2,28	2,12	1,98
niedrig_mittel	1,00	0,73	0,44	-1,70	-3,37	-12,80	0,65	0,75	0,27	0,14
niedrig_niedrig	0,76	0,49	0,20	-1,29	-2,72	-12,78	1,06	0,58	0,28	0,19

F ₂ F ₃	F ₁ F ₄ F ₅									
	20 24 OLS	20 12 OLS	20 8 OLS	20 4 OLS	20 3 OLS	20 2 genau	20 α -Allok	20 8 Bayes	20 4 Bayes	20 3 Bayes
hoch_hoch	19,23	17,70	16,91	16,10	10,11	5,42	19,02	17,73	18,25	15,82
hoch_mittel	6,12	5,59	5,21	1,67	0,52	-10,31	5,74	5,89	4,75	5,41
hoch_niedrig	2,97	1,63	1,57	0,23	-3,23	-12,38	3,50	2,32	2,92	2,63
mittel_hoch	8,58	8,28	7,59	5,00	2,71	-4,89	8,13	8,21	7,37	7,57
mittel_mittel	3,35	2,65	2,21	0,46	-1,97	-12,63	3,73	2,69	2,39	2,27
mittel_niedrig	1,63	1,13	0,53	-1,45	-1,72	-13,62	2,49	1,27	0,65	1,16
niedrig_hoch	2,70	2,42	1,90	0,03	-2,38	-9,41	2,21	2,16	2,07	1,50
niedrig_mittel	1,08	0,69	0,64	-0,85	-3,01	-9,75	1,33	0,79	0,43	0,08
niedrig_niedrig	0,77	0,41	0,40	-1,88	-2,54	-11,02	0,82	0,59	-0,23	0,15

F ₂ F ₃	F ₁ F ₄ F ₅									
	8 24 OLS	8 12 OLS	8 8 OLS	8 4 OLS	8 3 OLS	8 2 genau	8 α -Allok	8 8 Bayes	8 4 Bayes	8 3 Bayes
hoch_hoch	18,98	18,83	18,69	12,11	14,15	5,76	15,99	19,11	16,38	15,08
hoch_mittel	5,76	5,24	5,69	1,80	1,33	-11,59	5,80	6,05	4,32	5,75
hoch_niedrig	3,77	1,90	2,50	1,58	-1,39	-7,65	4,60	2,97	2,63	3,12
mittel_hoch	4,86	4,64	4,70	3,05	-0,43	-10,54	3,14	4,90	4,23	4,19
mittel_mittel	3,97	3,09	2,70	1,94	-0,58	-10,73	4,97	3,10	3,19	1,95
mittel_niedrig	1,38	0,72	0,68	-1,31	-4,74	-12,62	1,07	1,02	0,22	1,21
niedrig_hoch	2,44	1,92	1,81	0,55	-1,15	-5,01	1,72	1,88	1,46	1,07
niedrig_mittel	2,06	1,49	1,37	0,38	-0,68	-5,78	1,19	1,53	1,02	1,10
niedrig_niedrig	0,52	0,42	0,21	-1,01	-3,21	-7,93	0,86	0,33	-0,37	-0,67

Tabelle 5-11: Prozentualer Mittelwert um den sich der Umsatz durch die Allokation verändert

⁶⁸ $F_2 \geq 0,25$ und $F_3 = 0,33$

Im Fall von $F_2 = \text{hoch}$ und $F_3 = \text{hoch}$ ist eine Allokation wiederum unabhängig von der Beobachtungszahl unbedingt empfehlenswert. Das Zugewinnpotential liegt hier bei 7 bis 25 %, jeweils abhängig von der Quantität der vorhandenen Datenbasis (vgl. Tabellen 2.7 bis 2.12 im Anhang). Bei homogen verteilten Zuordnungseinheiten ($F_3 = \text{niedrig}$) kann man den Umsatz um maximal 3 % erhöhen. Gleiches gilt unabhängig von der Heterogenität für unelastische Gebiete ($F_2 = \text{niedrig}$), wo die maximal mögliche Steigerung durch die angewandten Methoden ebenfalls knapp 3 % beträgt. Stehen gar keine oder wenige Erfahrungswerte zur Verfügung sollte man nichts an der gegenwärtigen Aufteilung der knappen Ressource verändern, bis entweder drei oder acht Beobachtungswerte⁶⁹ pro Einheit erhältlich sind. Eine Ausnahme gilt hier, wenn deutlich wird, dass das Elastizitätsniveau des Marketinginstruments hoch ist und über die Zuordnungseinheiten stark streut.

5.3.3 These H_{03} : Mit einem Bayesschen Schätzverfahren sind die erreichten Ergebnisse der Reallokation besser als mit OLS bei identischer Beobachtungszahl.

Die Signifikanz der Binärvariablen F_5 aus der Varianzanalyse unterstützt die Annahme dieser These aus Kapitel 2.9.3 ebenso wie dessen hoher standardisierter Beta-Koeffizient aus Kapitel 5.1.3. Trotz des Auftretens von Interaktionseffekten konnte ein unabhängiger, signifikant positiver Einfluss dieser Schätzalternative nachgewiesen werden. Die Interpretation der Wechselwirkung mit F_4 lässt jedoch, analog zu den grafischen Darstellungen von Abbildung 5-1 und Abbildung 5-3, den Schluss zu, dass die Überlegenheit des Schätzverfahrens mit zunehmender Beobachtungszahl abnimmt. Auch die Ergebnistabellen (siehe S. 80) sagen aus, dass die Schätzungen auf Basis von hierarchisch Bayesscher Regression, diejenigen auf OLS-Basis ohne Ausnahmen deutlich dominieren, wobei einschränkend angeführt werden muss, dass es sich dabei um zusammengefasste Werte handelt. Bei den Einzelergebnissen gab es insgesamt zwölf Fälle⁷⁰, in denen aus OLS-Schätzungen höhere Allokationsumsätze resultieren konnten.

⁶⁹ drei Beobachtungen bei Anwendung der Bayes-Schätzung, acht bei Schätzung mit OLS.

⁷⁰ von 324 Beobachtungen

5.3.4 These H₀₄: Die Bestimmung der Parameter auf Basis eines beobachteten und eines subjektiv bestimmten Umsatzwertes ist der Schätzung auf Basis zweier Beobachtungswerte überlegen.

Die Tabelle 5-1 (S. 80) führt in der rechten Spalte die erzielbaren Ergebnisse auf, wenn die Elastizitäten subjektiv geschätzt werden. Dabei seien die Annahmen aus Kapitel 2.7.2 unterstellt. Die Ergebnisse wie auch die Trendlinie aus Abbildung 5-5 verdeutlichen aber rasch, dass sich eine subjektive Schätzmethodik in etwa auf dem gleichen schlechten Niveau befindet wie eine Aufteilung auf Basis von nur 2 Beobachtungswerten. Zum Vergleich wurde noch je ein Ergebnis aus der OLS- und der Bayes-Schätzung mit angeführt.

Abhängige Variable: Umsatz

Quelle	Quadratsumme vom Typ III	df	Mittel der Quadrate	F	Signifikanz	Partielles Eta-Quadrat
Korrigiertes Modell	5169877923,613(a)	32	161558685,113	186,135	,000	,864
Konstanter Term	28056935503,519	1	28056935503,519	32324,907	,000	,972
F1	18976865,046	2	9488432,523	10,932	,000	,023
F2	4222950279,367	2	2111475139,684	2432,669	,000	,838
F3	195911888,500	2	97955944,250	112,857	,000	,194
subjektiv	16148,042	1	16148,042	,019	,892	,000
alpha-Allokation	135116122,924	1	135116122,924	155,670	,000	,142
F1 * F2	11034566,284	4	2758641,571	3,178	,013	,013
F1 * F3	18390713,448	4	4597678,362	5,297	,000	,022
F1 * subjektiv	3431008,885	2	1715504,443	1,976	,139	,004
F2 * F3	186427473,068	4	46606868,267	53,697	,000	,186
F2 * alpha-Allokation	26375348,131	2	13187674,065	15,194	,000	,031
F1 * F2 * F3	19453911,861	8	2431738,983	2,802	,005	,023
Fehler	815020527,852	939	867966,483			
Gesamt	46166581937,140	972				
Korrigierte Gesamtvariation	5984898451,464	971				

a R-Quadrat = ,864 (korrigiertes R-Quadrat = ,859)

Tabelle 5-12: Varianzanalyse für die subjektive und die homogene Schätzung

Die Ergebnisse aus der Varianzanalyse sind ebenso eindeutig. Ein generell signifikanter Effekt von subjektiv geschätzten Elastizitäten gegenüber der Berechnung aus zwei Beobachtungswerten ist sowohl einzeln als auch in Kombination einer anderen Variablen klar abzulehnen.

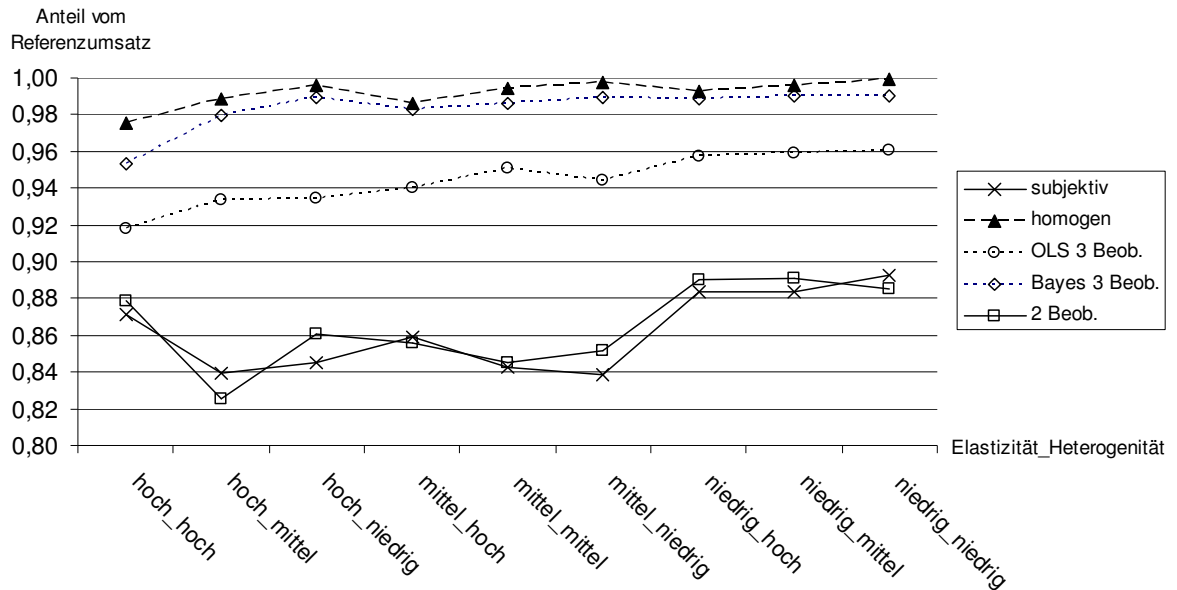
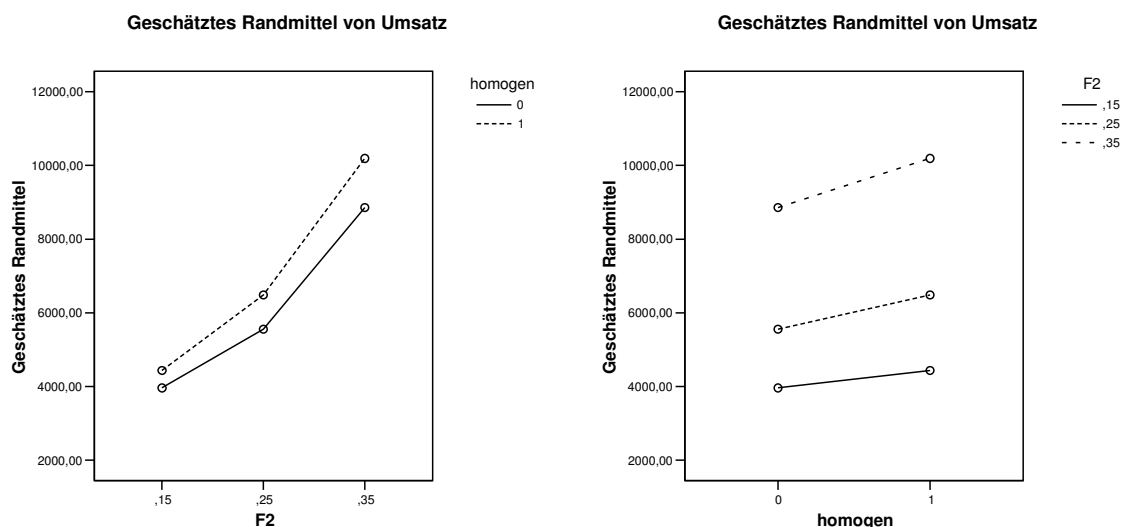


Abbildung 5-5: Ergebnisse von alternativen Schätzmethoden mit wenigen Beobachtungen

5.3.5 These H_{05} : Die Annahme homogener Elastizitäten des Marketinginstruments beeinflusst das Ergebnis

Wie schon in Kapitel 5.2 deutlich wurde, bestätigt auch die Varianzanalyse einen starken Einfluss von homogener Schätzstruktur auf den Umsatz. Dazu wurde die Variable homogen als 0/1-Dummy kodiert. Die Abbildung 5-5 illustriert auch noch einmal das überragende Abschneiden der *alpha-Allokation* (siehe Plot homogen).

Abbildung 5-6: Diagramme der Wechselwirkungen von F_2 und *alpha-Allokation*

Zwar existiert neben der signifikanten Wirkung des Haupteffektes noch eine bilaterale Interaktion mit der Variablen F_2 , jedoch verdeutlichen die Diagramme aus Abbildung 5-6 einen deutlich ordinalen Zusammenhang, so dass die Haupteffekte voll interpretierbar bleiben. Aus den Plots geht auch der auf die Umsätze positive Einfluss dieser alternativen Schätzmethodik hervor. Die Hypothese kann daher nicht unterstützt werden.

5.4 Fazit der Simulationsstudie

Die Vorüberlegungen und Thesen haben sich weitestgehend bestätigt. So führt eine Bestimmung der Umsatzreaktionsparameter, aufgrund von zwei Beobachtungen, trotz Flat-Maximum-Principles zu einem suboptimalen Ergebnis, unabhängig davon, ob diese aus Datenquellen stammen, oder subjektiv bestimmt wurden. Die Güte steigt mit zunehmenden Beobachtungswerten und nähert sich dem Referenzwert asymptotisch an. Überraschend klar ist die Dominanz der hierarchisch Bayesschen Schätzmethodik trotz nicht-informativer priori-Funktionen. Die Problematik wäre noch dahingehend erweiterbar, dass entweder noch zusätzlich subjektiv angenommene priori-Informationen integriert werden, oder die gewonnenen Resultate bei der nächsten Allokation als priori-Hinweise verwendet werden. Die Gewissheit, mit einem Bayesschen Modell auch auf geringer Datenbasis die Umsatzsituation unabhängig von anderen hier getesteten Einflussfaktoren zu verbessern, liefert auch ein Argument zur Rechtfertigung des höheren Berechnungsaufwandes. Dieser ist mit Hilfe der vorhandenen Software zwar nicht wirklich größer, die Modellierung und Vorbereitung in WinBUGS erfordert jedoch einen speziell hierfür geschulten Anwender. Da das Modell als Entscheidungshilfe für Manager bestimmt ist, deren Kenntnisse nur selten die von Bayesschen Modellen beinhalten, stellt die Umsetzung sicherlich eine weitere Hürde zur praktischen Anwendung von Modellen dar.

Die Empfehlung lautet, dass bei wenigen Erfahrungsdaten (bis 8) zur Optimierung die Parameter der Reaktionsfunktionen mit hierarchisch Bayesscher Regression bestimmt werden sollten, während bei umfangreicherer Datenbasis die Schätzung mit OLS vollkommen genügt, um eine Umsatzsteigerung aus der Reallokation resultieren zu lassen. Die Erkenntnisse aus Kapitel 5.2 offenbaren aber eine gute Alternative zur Anwendung der subjektiven Schätzung oder bei Vorliegen branchenüblicher Werte. Zielsicher subjektiv schätzenden Managern sei dann geraten, die Allokation mit Hilfe der *alpha-Allokation* (Optimalitätsregel (10), S. 14) vorzunehmen, anstatt zuerst alle einzelnen gestutzten Elastizitäten β_{2i} der Zuordnungseinheiten i zu bestimmen.

Dieser Ratschlag gilt auch für alle Optimierungen, welche mit wenigen Beobachtungswerten auskommen müssen. Es konnte die Überlegenheit der *alpha-Allokation* deutlich gemacht werden, wenn die priori-Verteilungsmomente der Bayesschen Schätzwerte von den Elastizitätsparametern verwendet werden. Auch Skiera/Albers (1998) verwenden bei ihrer praktischen Umsetzung, trotz ausführlicher Darlegung einer Heuristik zur Allokation anteilig nach segmentspezifischen „Deckungsbeitrag \times Elastizität“ (vgl. Modell (11), S. 14), schlussendlich doch das Modell, welches eine homogene Elastizitätsstruktur unterstellt (vgl. Modell (10), S. 14). Dabei orientieren sich die Autoren mit dem einheitlichen Wert für $\hat{\beta} = 0,375$ eher hoch, denn obwohl Albers/Krafft (1992) feststellten, dass die Besuchszeitenelastizität häufig zwischen 0,2 und 0,3 schwankt, liegt der subjektiv gewählte Mittelwert der Autoren deutlich oberhalb dieses Intervalls. Mit den Erkenntnissen der *alpha-Allokation* muss dies aber kein Widerspruch mehr sein, da möglicherweise der Mittelwert der wahren Besuchszeitenelastizität wesentlich niedriger liegt (z.B. $\bar{\beta} = 0,275$) und über die KGE eher homogen verteilt ist (mit z.B. $\sigma_{\beta} = 0,0275$), so dass mit (110) (vgl. S. 90) der von Skiera/Albers (1998) verwendete, subjektiv geschätzte Parameter hinsichtlich der *alpha-Allokation* als geeignet gelten kann⁷¹. Eventuell ist diese Elastizität aber auch der korrekte Mittelwert. In diesem Fall bliebe auf Basis der Erkenntnisse aus Kapitel 5.2 noch Potential zur Verbesserung des Gesamtumsatzes, indem zu dieser Elastizität die an ihrem Erwartungswert anteilige (geschätzte) Varianz noch addiert würde.

Aufgrund unterschiedlicher Ausgangssituationen lässt sich keine generelle Handlungsempfehlung ableiten, zumal auch noch die Qualität der Zahlen von entscheidender Bedeutung ist. Auf der folgenden Seite sei dazu eine Orientierungshilfe dargestellt, welche eine Entscheidungsempfehlung zur Durchführung einer Allokation knapper Ressourcen je nach Ausgangssituation abgibt.

⁷¹ $\hat{\beta} = \bar{\beta} + \frac{\sigma_{\beta}}{\bar{\beta}} \Rightarrow 0,375 = 0,275 + \frac{0,0275}{0,275}$

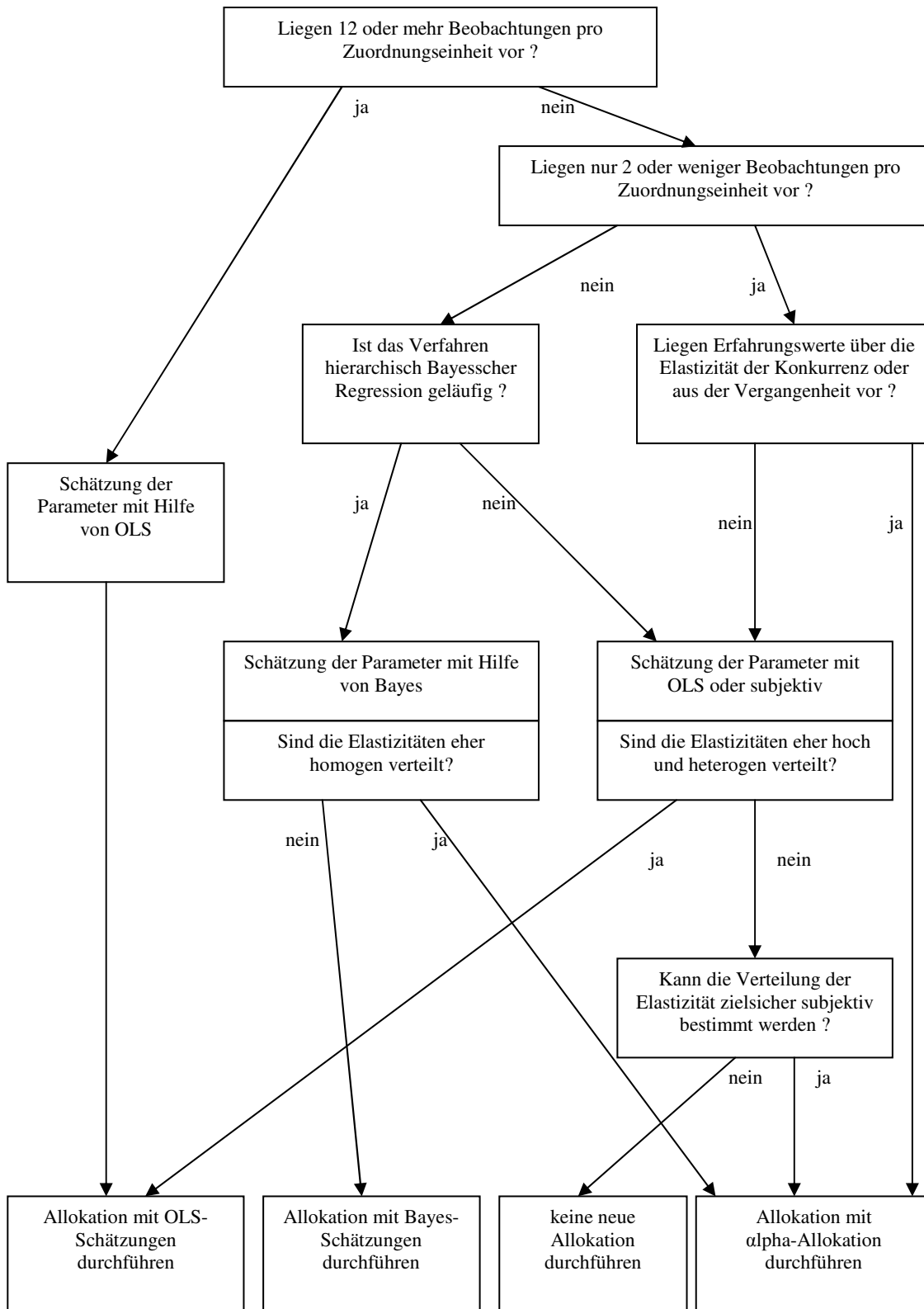


Abbildung 5-7: Schema zur Entscheidungshilfe, welche Art der Allokation bei knapper Ressource durchgeführt werden sollte

6 Stochastische Optimierung

6.1 Überblick

Wenn man die Ergebnisse aus dem vorigen Kapitel genauer betrachtet, fällt wiederholt auf, dass insbesondere aus Inferenzen mit wenigen Beobachtungswerten häufig nicht nur mangelhafte Schätzer resultieren, sondern durch die teilweise extrem hohen Varianzen einzelner Punktschätzer diese Bezeichnung eigentlich gar nicht angebracht ist. Durch die besagten starken Abweichungen vom Mittelwert entsteht eine so flache Verteilung, dass man eher ein Schätzintervall statt einen einzelnen Wert zur Berechnung heranziehen sollte. Aber auch bei den eindeutigeren Schätzungen gibt es Unterschiede in der Varianz, welche sich in der Beschaffenheit der Umsatzreaktionsfunktionen nicht widerspiegelt. Man behandelt bei der Modellierung dann die Parameter wie deterministische Variablen, obwohl man aus der vorausgegangenen Schätzung, insbesondere mit hierarchischer Bayesscher Regression, eindeutig nachgewiesen hat, dass diese eben nicht deterministisch sind. In diesem Kapitel soll nun untersucht werden, inwieweit sich die Allokation ändert, wenn diese ja bekannten Informationen über die Schätzer mit in die Optimierung integriert werden. Wie in der Ausgangssituation schon kurz angerissen, soll hierbei der Fall von nicht deterministischen Umsatzreaktionsfunktionen untersucht werden. Dazu sei gleich am Anfang angemerkt, dass sich die Unsicherheit, welche berücksichtigend mit einbezogen wird, ausschließlich auf die Modellparameter, nicht aber auf den Funktionscharakter bezieht. Außerdem soll sich die Optimierung nur auf die Allokation von knappen Ressourcen beziehen.

Die Grundlagen der stochastischen Optimierung liegen vor allem im Operations Research, finden aber zunehmend auch im Bereich der Finanzierung, beispielsweise bei der Entwicklung von Portfolios vermehrt Anklang. Die Zuordnung von knappem Werbebudget unter Unsicherheit untersuchen Holthausen/Assmus (1982), indem sie die Unsicherheit auf die abhängige Variable der exponentialfunktionalen Umsatzreaktion bezogen. Als Allokation wurden dann einige Ergebnisse in Abhängigkeit zur

steigenden Unsicherheit des Umsatzes vorgeschlagen. Sonst wurden im Marketing vor allem Ansätze über Unsicherheiten der Funktionsform untersucht, aber es finden sich nur vereinzelt Artikel über die Annahme von Parameterunsicherheit. Einen entscheidungstheoretischen Ansatz entwickeln Aykac et al. (1989), in welchem sowohl Unsicherheit über die Funktionsform als auch über die Parameterschätzer berücksichtigt wurde. In diesem beeinflusst die stochastische Parametrisierung jedoch ausschließlich das Verhalten des nutzenorientierten Managers, nicht aber die Höhe des zu optimierenden Inputfaktors. Für die auf Unsicherheit beruhende Preisbildung leistete vor allem Kalyanam (1996, S. 209) laut eigener Aussage Pionierarbeit. Er entwickelt dazu ein Bayessches Mix-Modell, indem er die Einstellung des Entscheiders zur Unsicherheit in dessen Nutzenfunktion integriert und diese wiederum mit den Eigenschaften der Absatzfunktion kombiniert.

Aufgegriffen wurde dieser Gedanke dann von Montgomery/Bradlow (1999), die zwar schwerpunktmäßig auch die Unsicherheit der Funktionsform behandeln, aber auch einen hervorragenden Ansatz für die Optimierung mit Parameterunsicherheit präsentieren. Zu beachten sei jedoch, dass die in dieser Arbeit relevanten Marketinginstrumente sich von dem bei o. g. Artikeln untersuchten Instrument des Preises in entscheidenden Merkmalen abweichen. Über die stochastische Optimierung von anderen Instrumenten außer dem Preis konnte ansonsten kein weiterer Vorschlag in der Literatur gefunden werden, erst recht nicht für die Problemstellung der Allokation von knappen Ressourcen.

6.2 Grundlage

Ausgangssituation ist bei Montgomery/Bradlow (1999, S. 574f) ein multiplikatives Preis-Absatz-Modell mit den Parametern Konstante (β_1) und Preiselastizität (β_2) in logarithmierter Form. Im Unterschied zum Preis-Absatz-Modell, wird im hier vorliegenden Fall jedoch von Marketinginstrumenten mit positiven Elastizitäten ausgegangen (x, t). Daher weicht die Gleichung in Bezug auf das Vorzeichen von β_2 vom Modell der Autoren ab und lautet wie bereits gezeigt

$$(114) \ln(S_i) = \beta_1 + \beta_2 \ln(t_i) + \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2).$$

Wegen der lognormalen Verteilung wird das Modell zur Berechnung des Erwartungswertes durch Addition der halben Varianz korrigiert⁷², so dass

⁷² vgl. Greene (1993, S. 299)

$$(115) \quad E(S|\beta_1, \beta_2) = \exp\left[\beta_1 + \beta_2 \ln(t) + \frac{\sigma^2}{2}\right].$$

Die Autoren unterstellen nun den beiden Parametern β_1 und β_2 eine bivariate Normalverteilung gemäß

$$(116) \quad \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix} \bar{\beta}_1 \\ \bar{\beta}_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_{\beta_1}^2 & \sigma_{\beta_1, \beta_2} \\ \sigma_{\beta_1, \beta_2} & \sigma_{\beta_2}^2 \end{pmatrix}\right)$$

und integrieren diese dann entsprechend in das Modell, um den unbedingten Erwartungswert zu berechnen. Dazu zieht man den letzten Term vor die Klammer, so dass

$$(117) \quad E(S) = E[E(S|\beta_1, \beta_2)] = \exp\left(\frac{\sigma^2}{2}\right) E(\exp(\beta_1 + \beta_2 \ln(t))).$$

Der zweite Term ist nun wieder lognormalverteilt. Daher muss zur korrekten Bestimmung des Erwartungswertes von der Zufallsvariablen β_1 und β_2 , auch hier dessen halbe Varianz addiert werden. Aufgrund der bivariaten Verteilung beider Parameter, ist diese wegen ihrer linearen Transformation relativ leicht herbeizuführen, jedoch gilt es dabei die Korrelation der beiden Parameter zu berücksichtigen. Nach Greene (1993, S. 65) gilt in diesem Fall für Erwartungswert und Varianz der korrelierten Zufallsvariablen κ_1 und κ_2

$$(118) \quad \begin{aligned} E(a\kappa_1 + b\kappa_2 + c) &= aE(\kappa_1) + bE(\kappa_2) + c \\ \text{Var}(a\kappa_1 + b\kappa_2 + c) &= a^2\text{Var}(\kappa_1) + b^2\text{Var}(\kappa_2) + 2ab\text{Cov}(\kappa_1, \kappa_2) \end{aligned}$$

Übertragen auf die vorliegende Problemstellung ergibt sich für die beiden Momente

$$(119) \quad \begin{aligned} E(\beta_1 + \beta_2 \ln(t)) &= \bar{\beta}_1 + \bar{\beta}_2 \ln(t) \\ \text{Var}(\beta_1 + \beta_2 \ln(t)) &= \sigma_{\beta_1}^2 + \sigma_{\beta_2}^2 \ln(t)^2 + 2\ln(t)\sigma_{\beta_1, \beta_2} \\ &= \sigma_{\beta_1}^2 + 2\rho\sigma_{\beta_1}\sigma_{\beta_2}\ln(t) + \sigma_{\beta_2}^2 \ln(t)^2 \end{aligned}$$

Dabei ist zu beachten, dass $\ln(t)$ keine Zufallsvariable in Zusammenhang mit den Parametern darstellt. Wegen Greene (1993, S. 299)

$$(120) \quad E(\exp(\kappa)) = \exp\left(\mu_\kappa + \frac{\sigma_\kappa^2}{2}\right), \text{ mit } \kappa \sim N(\mu_\kappa, \sigma_\kappa^2)$$

gilt für den Erwartungswert aus (117) dann

$$(121) \quad E(S) = \exp\left[\bar{\beta}_1 + \bar{\beta}_2 \ln(t) + \frac{1}{2}(\sigma_{\beta_1}^2 + 2\rho\sigma_{\beta_1}\sigma_{\beta_2}\ln(t) + \sigma_{\beta_2}^2 \ln(t)^2) + \frac{\sigma^2}{2}\right].$$

Aufgrund der Betrachtung eines bivariat normalverteilten Standardmodells, war die Bestimmung der stochastischen Absatzfunktion hier relativ simpel. Schwieriger ist dies, wenn das Verteilungsmodell nicht standardisiert ist, so dass man zur Berechnung der Verteilungsparameter eine momenterzeugende Funktion benötigt.

6.3 Momenterzeugende Funktion

Wie der Name schon sagt, handelt es sich hierbei um eine Funktion, welche die Bestimmung der Momente einer Verteilung ermöglicht. Dabei sind im vorliegenden Fall nur die beiden ersten zentralen Momente von Interesse, aus welchen sich Erwartungswert und Varianz bestimmen lassen. Die Momente dritten und vierten Ranges (Schiefe und Kurtosis) eröffnen zwar auch interessante Erkenntnisse über die Verteilungen⁷³, sind aber für die vorliegende Problematik nicht von Interesse.

Eine Zufallsvariable κ besitzt dann eine Momenterzeugende Funktion $g_{\kappa}(s)$, wenn es ein $b > 0$ gibt, mit dem für alle $s \in (-b, b)$ gilt

$$(122) \quad E(e^{s\kappa}) < \infty.$$

Diese lautet dann allgemein

$$(123) \quad g_{\kappa}(s) = E(\exp(s\kappa))$$

Der Vorteil bei Verwendung von Momenterzeugenden Funktionen ergibt sich dann aus der einfachen Handhabung, indem für das k -te Moment nun einfach die k -te Ableitung gebildet werden muss. An der Stelle $s = 0$ liefert die Funktion dann das entsprechende Moment.

Aus (123) folgt dann

$$\begin{aligned} g_{\kappa}^{(1)}(s) &= \frac{\partial}{\partial s} g_{\kappa}(s) \\ (124) \quad g_{\kappa}^{(1)}(s) &= E(\kappa \cdot \exp(s \cdot \kappa)) \\ g_{\kappa}^{(1)}(0) &= E(\kappa) \end{aligned}$$

Für die zweite Ableitung gilt

⁷³ Die Schiefe ist bei symmetrischer Verteilung gleich 0, die Kurtosis nimmt bei Normalverteilung den Wert 3 an

$$\begin{aligned}
 g_{\kappa}^{(2)}(s) &= \frac{\partial}{\partial s} g_{\kappa}^{(1)}(s) = \frac{\partial}{\partial s} E(\kappa \cdot \exp(s\kappa)) \\
 (125) \quad &= E\left(\frac{\partial}{\partial s} \kappa \cdot \exp(s\kappa)\right) = E(\kappa^2 \cdot \exp(s\kappa)) . \\
 g_{\kappa}^{(2)}(0) &= E(\kappa^2) \\
 \text{Var}(\kappa) &= E(\kappa)^2 - E(\kappa^2)
 \end{aligned}$$

Für den Fall von standardnormalverteilten Zufallsvariablen z ergibt sich dann

$$\begin{aligned}
 g_z(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(sz) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2} + sz\right) dz \\
 (126) \quad &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}(z^2 - 2sz + s^2) + \frac{1}{2}s^2\right) dz \\
 &= \exp\left(\frac{1}{2}s^2\right) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(z-s)^2}{2}\right) dz}_{=1} \\
 &= \exp\left(\frac{1}{2}s^2\right)
 \end{aligned}$$

mit den Ableitungen

$$\begin{aligned}
 g_z(s) &= \exp\left(\frac{s^2}{2}\right) \\
 (127) \quad g_z^{(1)}(s) &= s \cdot \exp\left(\frac{s^2}{2}\right) . \\
 g_z^{(2)}(s) &= s^2 \exp\left(\frac{s^2}{2}\right) + \exp\left(\frac{s^2}{2}\right)
 \end{aligned}$$

Als Momente resultieren an der Stelle $s = 0$ daraus

$$\begin{aligned}
 g_z^{(1)}(0) &= 0 \cdot \exp\left(\frac{0^2}{2}\right) = 0 \\
 (128) \quad g_z^{(2)}(0) &= 0^2 \exp\left(\frac{0^2}{2}\right) + \exp\left(\frac{0^2}{2}\right) = 1 .
 \end{aligned}$$

Für normalverteilte Zufallsvariablen κ gilt

$$(129) \quad z = \frac{\kappa - \mu}{\sigma} \Leftrightarrow \kappa = z\sigma + \mu$$

und als momenterzeugende Funktion von κ folgt daraus dann

$$\begin{aligned}
 g_{\kappa}(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(s(z\sigma + \mu)) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz \\
 &= \exp(\mu s) \int_{-\infty}^{\infty} \exp(z\sigma s) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz \\
 (130) \quad &= \exp\left(\mu s + \frac{\sigma^2 s^2}{2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(z-s)^2}{2}\right) dz \\
 &= \exp\left(\mu s + \frac{\sigma^2 s^2}{2}\right)
 \end{aligned}$$

mit den Ableitungen erster und zweiter Ordnung

$$\begin{aligned}
 g_{\kappa}^{(1)}(s) &= (\mu + \sigma^2 s) \exp\left(\mu s + \frac{\sigma^2 s^2}{2}\right) \\
 (131) \quad g_{\kappa}^{(2)}(s) &= (\mu + \sigma^2 s)^2 \exp\left(\mu s + \frac{\sigma^2 s^2}{2}\right) + \exp\left(\mu s + \frac{\sigma^2 s^2}{2}\right) \sigma^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g_{\kappa}^{(1)}(0) &= \mu \\
 (132) \quad g_{\kappa}^{(2)}(0) &= \mu^2 + \sigma^2 \\
 E(\kappa) &= \mu; \quad Var(\kappa) = \underbrace{\mu^2 + \sigma^2}_{E(\kappa^2)} - \underbrace{\mu^2}_{E(\kappa)^2} = \sigma^2
 \end{aligned}$$

Montgomery/Bradlow (1999, S. 582) errechnen den Erwartungswert aus (121) über diesen doch eher umständlichen Weg der Momenterzeugenden Funktion. Diese Methode diene ihnen anschließend als Basis zur Formulierung eines gestutzt bivariat normalverteilten Modells.

In der vorliegenden Arbeit kann ein alternativer Weg aufgezeigt werden, indem die Funktionsintervalle zuerst gestutzt und die Erwartungswerte und Varianzen gemäß (91) und (92) korrigiert werden. Daraus ergibt sich ein doch erheblich einfacheres und übersichtlicheres Modell zur Berechnung der stochastischen Erwartungswerte nach (121). Aus diesem soll nun im Folgenden die Reallokation nicht mehr nur auf Basis von Erwartungswerten als deterministisch angenommenen Punktschätzern, sondern unterstützt von den Verteilungsmomenten der ersten und zweiten Ordnung erfolgen.

6.4 Optimierung

Mit (121) liegt also ein Erwartungswert für den Absatz vor, wenn die Parameter β_1 und β_2 als bivariat normalverteilte stochastische Variablen einbezogen werden. Man kann diese Beziehung mit $E(S) = S(t)$ wegen $\exp(a \ln(t)) = t^a$ dann wie folgt umformen:

$$(133) \quad S(t) = \exp\left(\beta_1 + \frac{\sigma_{\beta_1}^2 + \sigma^2}{2}\right) t^{(\beta_2 + \rho\sigma_{\beta_1}\sigma_{\beta_2} + \sigma_{\beta_2}^2 \ln(t))}.$$

dabei entspricht der Exponentialterm dem α aus (8), während der Exponent das β_2 darstellt. Die neue Elastizität ς des Instrumentes t ändert sich also von $\varsigma = \beta_2$ zu

$$(134) \quad \varsigma = (\beta_2 + \rho\sigma_{\beta_1}\sigma_{\beta_2} + \sigma_{\beta_2}^2 \ln(t)).$$

Wegen der negativen Korrelation ρ verringert der mittlere Summand die Elastizität im Vergleich zum deterministischen Fall. Unter der Annahme für $\sigma_{\beta_2} < 1$ ist die Varianz auch kleiner als die Standardabweichung, allerdings bleibt der Wertebereich für $\ln(t)$ ungewiss⁷⁴, so dass ς sowohl kleiner als auch größer sein kann als β_2 . Gegenüber dem deterministischen Fall ist die Elastizität dann höher, wenn gilt

$$(135) \quad -\rho\sigma_{\beta_1} < \sigma_{\beta_2} \ln(t) \Leftrightarrow -\rho \frac{\sigma_{\beta_1}}{\sigma_{\beta_2}} < \ln(t) \quad .$$

Das bedeutet, dass das Verhältnis der beiden Standardabweichungen der Größe der Störvariablen gegenübersteht. Ist beispielsweise die Schätzung von β_2 eher unsicher, und damit dessen Standardabweichung eher hoch, so erhöht sich ceteris paribus die Elastizität. Weil aber der Wertebereich von $\beta_1 \in [0; \infty]$ gegenüber dem von $\beta_2 \in [0; 1]$ erheblich breiter ist, gilt meist auch $\sigma_{\beta_1} > \sigma_{\beta_2}$. Daraus folgt die Erkenntnis, dass unsichere Schätzungen die Elastizitäten im Trend eher schmälern als erhöhen. Eine präzisere Aussage zur Größenordnung der stochastischen Elastizität ist wegen der vielen möglichen Variationen im Modell (135) leider nicht erreichbar. Zur Übertragung auf ein Problem der Ressourcenallokation ergibt sich dann analog zu (11)

$$(136) \quad t_i^* = \left(\frac{(\exp(\cdot)\varsigma_i)^{\frac{1}{1-\varsigma_i}}}{\sum_r (\exp(\cdot)\varsigma_r)^{\frac{1}{1-\varsigma_r}}} T \right)^{\left(\frac{1-\beta^*}{1-\varsigma_i} \right)}$$

⁷⁴ Bei der Art von Marketinginstrumenten, welche hier mit einer Elastizität zwischen 0 und 1 behandelt werden, ist die Inputvariable sicher > 1 , und daher ist auch $\ln(t)$ immer positiv.

als stochastisches Optimum. Es handelt sich bei der Optimalitätsbedingung um eine Fixpunktgleichung, welche nicht weiter zu vereinfachen ist. Mangels der Möglichkeit, komplett nach t auflösen zu können, bleibt diese in rekursiver Form bestehen, ist aber als Fixpunktgleichung eindeutig lösbar. Wie in (20) angeführt, handelt es sich um eine Allokation nach Umsatz \times Elastizität. Erfolgt die Berechnung der optimalen t_i^* mit Hilfe dieser Optimalitätsbedingung, so kann sogar zusätzlich der mittlere Elastizitätsparameter β^* eingespart werden, die Berechnung ist dann jedoch nur mittels numerischen Rekursionsverfahren gemäß

$$(137) \quad t_i^* = \frac{\exp\left(\beta_{li} + \frac{\sigma_{\beta_{li}}^2 + \sigma^2}{2}\right) t_i^{\zeta_i} \zeta_i}{\sum_r \exp\left(\beta_{lr} + \frac{\sigma_{\beta_{lr}}^2 + \sigma^2}{2}\right) t_r^{\zeta_r} \zeta_r} T$$

durchführbar.

Im Vergleich zum deterministischen Fall ist es möglich, dass die unsicheren Parameter, also jene mit hoher Standardabweichung, eine höhere Zuweisung der knappen Ressource t erhalten, welche sich in Folge der Rekursion immer weiter erhöhen. Dies geschieht jedoch aufgrund der logarithmischen Form $\ln(t)$ nur bis zu einem Grenzwert, welcher dann asymptotisch erreicht wird. Insoweit ist dieses Gleichungssystem eindeutig lösbar, wobei aber die Computerkapazitäten zur Berechnung bei ungünstiger Wertkonstellation schnell an ihre Grenzen stoßen können.

6.5 Berechnung

Aufgrund der rekursiven Form erwies sich die Berechnung der optimierten Allokation zwar als aufwändiger, aber nicht als umständlich, so dass durchaus befriedigende Resultate entstanden. Die Berechnungen nach (136) und (137) lieferten, soweit vorhanden, die gleichen Lösungen. Obwohl beide Formeln in rekursiver (also sich selbst aufrufender) Form formuliert sind, Ergaben sich bei der Berechnung mit (136) wesentlich weniger Gleitkommaüberläufe, und somit mehr gültige Lösungen. Der Grund dafür soll hier jedoch nicht weiter erörtert werden, es wurden jedoch deshalb alle Berechnungen aus Kapitel 6 via (136) berechnet. Auch muss hier klar zwischen den Ergebnissen der beiden angewandten Schätzmethoden aus Kapitel 4.3.2 und 4.3.3 unterschieden werden. Bei der Ermittlung der stochastischen Optimalwerte wurde noch einmal deutlich, dass sich die hierarchisch Bayessche Regression und OLS nicht

nur hinsichtlich ihrer Methoden unterscheiden, sondern auch bezüglich der Aussagekraft ihrer Ergebnisse.

An dieser Stelle sei noch einmal auf die unterschiedlichen Intentionen der beiden Verfahren hingewiesen. Wie in Lindley (1972, S. 2 ff) ausgedrückt, kennzeichnet sich der Standardansatz vor allem durch Annahme oder Verwerfung von Null- und Alternativhypothesen, Aussagen über unbekannte Größen in Form von Konfidenzintervallen und wie hier, der Bestimmung von Punktschätzern. Sowohl für die Hypothesen als auch für die Parameter ist eine Aussage über dessen Wahrscheinlichkeit unzulässig. Ganz im Gegenteil zum Bayes-Ansatz, wo den Lageparametern direkte Wahrscheinlichkeiten zugeordnet werden (auch Kleiter 1981, Vorwort).

Dieser Unterschied ist für das Kapitel der stochastischen Optimierung ganz entscheidend, da hier die Berechnung über die gesamten Wahrscheinlichkeitsintervalle und nicht mittels Punktschätzern erfolgt. Entsprechend große Unterschiede zeigen sich auch bei der Allokation. Zur Erinnerung sei darauf hingewiesen, dass es sich bei dem Datenmaterial für die Schätzungen von OLS und hierarchisch Bayesscher Regression exakt um das Gleiche handelte und dass durch nicht-informative priori-Funktionen auch keinerlei subjektive Einflüsse oder Informationen mit in das Bayessche Modell geflossen sind. Weiterhin war bekannt, dass aufgrund der starken externen Einflüsse viele der OLS-Schätzer bei weniger als acht Beobachtungen nicht signifikant waren.

Die Ermittlung der Momente Erwartungswert und Varianz war bei beiden Modellen kein Problem. Während aus den großen Stichproben des Gibbs Samplers die Lageparameter einfach errechnet werden konnten (WinBUGS gab diese unter anderem mit aus), waren bei der Kleinstquadratschätzung zunächst nur die Erwartungswerte bekannt, dessen Varianz-Kovarianz-Matrix sich dann mit

$$(138) \text{Var}(\hat{\beta}_{OLS}) = \sigma^2 (X'X)^{-1},$$

mit σ^2 als Residuenvarianz errechnete.

Da Normalverteilung der Residuen angenommen wird, ist die Berechnung der Kovarianzmatrix der Koeffizienten bei OLS zulässig. Die Korrektur der Lageparameter, welche aufgrund der Stützung erforderlich war⁷⁵, erfolgte vor der Optimierung. Daraus resultierte die Eigenschaft, dass grundsätzlich mit Verteilungsfunktionen gerechnet wurde, dessen kumulierte Werte innerhalb der Intervallgrenzen 1 ergaben.

⁷⁵ vgl. Kapitel 4.5 Truncation S. 67

Der eigentlich große Unterschied in den Ergebnissen der beiden Schätzmethoden war die Verteilung der Varianzen. Während diese bei den OLS-Schätzungen mit abnehmender Beobachtungszahl zunehmend exponential streute, war die Varianz der Parameter aus den hierarchischen Modellen doch eher homogen. Genau hier sollten die Beschaffenheiten der stochastischen Optimierung ihre Wirkung zeigen, indem die Informationen über die Streuung mit einberechnet wurden, und es liegt der Vorstellung nicht fern, dass die OLS-Schätzer durch diese Form der Optimierung ihre Unterlegenheit möglicherweise wieder wett machen könnten.

Die Ergebnisse aus Kapitel 5.3.2 zeigen das sehr hohe Niveau, auf dem man sich mit der deterministischen Schätzung für mittlere und niedrige F_2 und F_3 bewegt. Der Spielraum für Steigerungen durch alternative Schätzmethoden ist bei jenen Parameterkonstellationen begrenzt. Daher erfolgten die Berechnungen zur stochastischen Optimierung ausschließlich für das Modell mit den Annahmen hoher und heterogener Elastizitäten ($F_2 = \text{hoch}$, $F_3 = \text{hoch}$) für den Fall von drei, vier und acht Beobachtungen (F_4), jedoch für beide Schätzmethoden ($F_5 = 0$ und $F_5 = 1$). Nur für diese Faktorenkombination zeichnet sich noch ein erwähnenswertes Verbesserungspotential ab.

6.6 Modellspezifikation

Die größte programmtechnische Herausforderung bei diesem rekursiven Verfahren war die Nivellierung des Parameters β^* , welcher, wie in (11) (S. 14), zur Gewichtung des knappen Gutes dient, so dass genauso viel Ressource T verteilt wird, wie vorher zur Verfügung stand. Dieser musste so bestimmt werden, dass nach der iterativen Prozedur zur Einpendelung von T jener wieder auf genau 100 % stand. Auch wenn es in den meisten Fällen gelang, gibt es eine Reihe von Beispielen, wo ein Parameter β^* zur Erfüllung dieser Forderung nicht existiert. In einem solchen Fall kann daher auch kein Ergebnis präsentiert werden. Dies ist eine Einschränkung, welche man bei stochastischer Optimierung hinnehmen muss. Es existieren nicht immer reale Lösungen.

6.6.1 Stutzung des Wertebereiches

Es war auffällig, dass die nicht lösbaren Beispiele vor allem diejenigen waren, bei denen Schätzwerte mit exorbitant hohen Varianzen auftraten, wenngleich dies ausschließlich der Fall bei OLS-geschätzten Parametern war. Sie wichen teilweise um das hundertfache von den üblichen Varianzen ab und können daher klar als Ausreißer

klassifiziert werden. Durch derart hohe Werte, die offenbar ausschließlich auf die geringe Beobachtungszahl zurückzuführen sind, ergeben sich sehr starke Verzerrungen für die Zuordnung. Um dessen Einfluss entgegenzuwirken, wurde der zulässige Wertebereich folgendermaßen gestutzt.

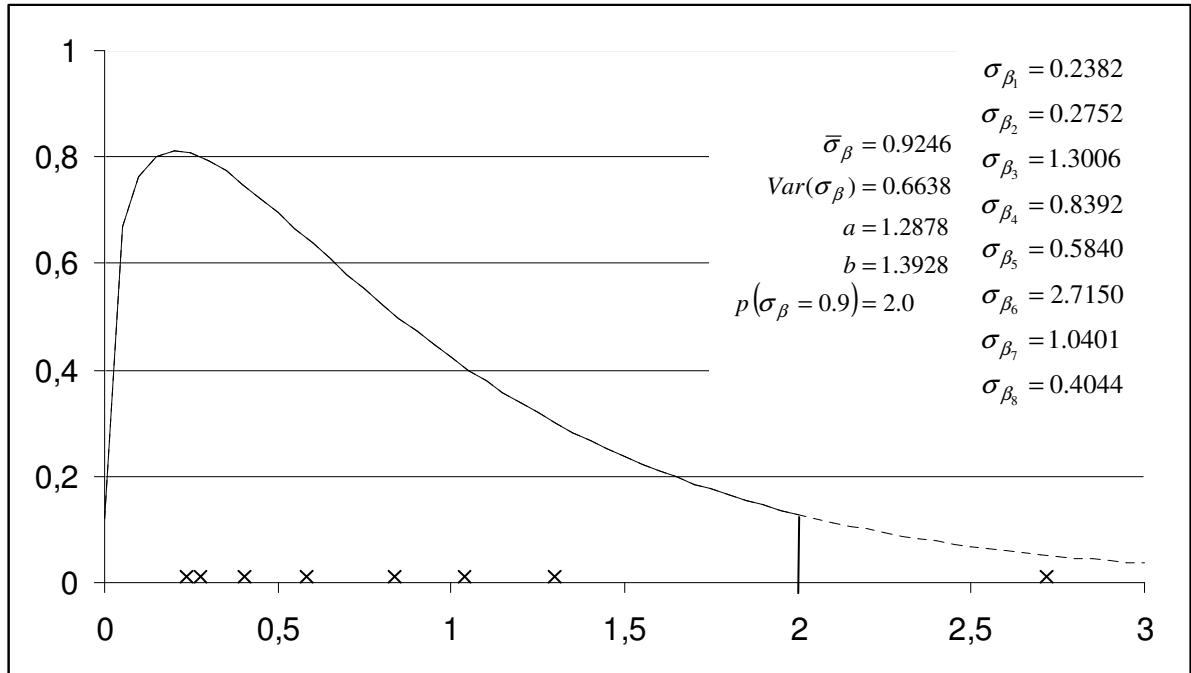


Abbildung 6-1: Beispiel für gestutzte Gammaverteilung $\sigma_\beta \sim G(a, b)$ mit 90 %-Intervall

Wie schon beim Bayesschen Modell wurde auch hier für die Verteilung der Varianzen eine Gammaverteilung angenommen. Pro Allokation wurde dann jeweils der Mittelwert und die Varianz der Varianzen bestimmt. Mit

$$(139) \quad \sigma_\beta^2 \sim Ga(a, b) \text{ mit } E(\sigma_\beta^2) = \frac{a}{b} \text{ und } Var(\sigma_\beta^2) = \frac{a}{b^2}$$

kann man die entsprechenden Verteilungsparameter dieser Gammaverteilungen wie folgt berechnen:

$$(140) \quad a = \frac{E(\sigma_\beta^2)^2}{Var(\sigma_\beta^2)} \text{ und } b = \frac{E(\sigma_\beta^2)}{Var(\sigma_\beta^2)}.$$

Die Obergrenze des 90 %-Intervalls dieser Gammaverteilung entspricht dann der maximal für die stochastische Optimierung zulässigen Varianz eines Parameterschätzers.

Die Abbildung 6-1 verdeutlicht ein Beispiel mit acht Zuordnungseinheiten, wobei die Nummer 6 den Ausreißer darstellt. Hier wird nun die Varianz von β_6 auf ein Maximum von $\sigma_{\rho_{\max}} = 2,0$ gestutzt. Aus diesem Beispiel wird die Notwendigkeit zur Stutzung nicht unbedingt so deutlich, es soll aber auch nur zur Veranschaulichung der Vorgehensweise dienen. In der Simulationsstudie existieren gerade bei Schätzungen mit wenigen Beobachtungszahlen einige extreme Ausreißer, welche die Berechnung von optimierten Ressourcen erheblich erschweren. Durch diese Art der Reduktion wird die Eigenschaft des Ausreißers an sich zwar mit berücksichtigt, jedoch fließen sie mit deutlich verminderten Werten in die Berechnung ein. Wie bereits angedeutet traten derlei Ausreißer ausschließlich bei OLS-geschätzten Daten auf. Wurden die Parameter mit Hilfe von hierarchisch Bayesscher Regression ermittelt, so folgten die Varianzen einer wesentlich schmaleren Verteilung. Aus Gründen der Vergleichbarkeit wurden aber auch bei den Bayes-Daten die oberen 10 % gekappt und entsprechend in der Optimierung einbezogen. Gegenüberstellende Berechnungen ergaben, dass diese 10 %-Kappung, meist zu besseren Ergebnissen besonders bei wenigen Beobachtungen führen konnte.

Die Festlegung auf die Kappung des zugelassenen Intervalls bei 90 % resultierte aus mehreren Versuchen. So war das 95 %-Intervall zu breit bemessen, während ein 80 % Intervall, gerade bei der Optimierung mit Bayes, zu viele nicht-Ausreißer mit einschloss. Andere Versuche unterstellten eine diskrete Verteilung und setzten als Obergrenze einfach den d -höchsten Wert aller Varianzen an, so dass beispielsweise immer die $d = 4$ höchsten Varianzen auf den Wert der fünfhöchsten gesetzt wurden. Diese Vorgehensweise wird aber den Anforderungen nicht gerecht, da nicht in allen Fällen Ausreißer auftraten.

6.7 Ergebnisse

6.7.1 Überlegungen

Die Autoren Montgomery/Bradlow (1999) erreichen durch ihr Modell der stochastischen Optimierung als Ergebnis einen höheren gewinnmaximalen Preis. Jedoch räumen sie ein, dass es sich bei diesem Optimum auch nur um ein lokales und nicht um ein globales handelt. Auch bei ihnen existiert der Fall von nicht analytisch lösbaren Fixpunktgleichungen und es gibt Lösungen, deren globales Optimum auch unendlich groß sein kann.

Im Unterschied zum obigen Artikel konkurrieren hier die Zuordnungseinheiten mit unterschiedlich verteilten Parametern. Es kann also passieren, dass breiter verteilte Schätzer nur aufgrund der höheren Varianz mehr Anteil der knappen Ressource zugewiesen bekommen. Einerseits wird es der Logik insofern gerecht, als dass breiter verteilte Elastizitäten auch mit höherer Wahrscheinlichkeit unterschätzt wurden. Andererseits kann mit den gleichen Gründen genau gegenteilig argumentiert werden. Als Anhaltspunkt für bessere Ergebnisse durch Optimierung der Gewinne unter Zuhilfenahme stochastischer Parameter bleibt vorab eigentlich nur die Verarbeitung einer größeren Menge an Informationen gegenüber dem deterministischen Fall.

Die unterschiedlichen Schätzmethoden lieferten wie gesagt stark heterogene Verteilungseigenschaften der Parameter. Während die OLS-Schätzer grundsätzlich schon einmal deutlich höhere Standardabweichungen aufwiesen, ergab sich hierbei noch die Problematik mit den Ausreißern bei wenigen Beobachtungswerten. Die OLS-Schätzungen liefern bei drei oder vier Beobachtungen keine eher homogenen Varianzen, wie es bei Bayes der Fall ist. Erst ab acht oder mehr Beobachtungswerten nähern sich die Verteilungen zwischen diesen beiden Verfahren einander an, die Varianzen der Bayes-Schätzer bleiben aber grundsätzlich kleiner. Da die OLS aber auch nur auf die Berechnung von Punktschätzern ausgerichtet ist, während die Bayes-Statistik entsprechende Wahrscheinlichkeiten berechnet, ist vorab von einer besseren Eignung der jüngeren Methodik auszugehen. Auch in diesem Fall gilt, dass ein Verfahren dann besser ist, wenn die aus der Optimierung resultierenden Umsätze höher sind. Kennzahlen wie R^2 oder ähnliches bleiben auch hier bedeutungslos.

6.7.2 Berechnungen

Zur Berechnung der Umsätze wurden die selben Datensätze wie in dem Simulationsexperiment des Kapitels 4 benutzt. Der Unterschied liegt also ausschließlich bei der Optimierungsformel, welche durch (136) ersetzt wurde.

F ₂	F ₃	N ₁	N ₂	REFERENZ	F ₁ = 40, F ₅ = OLS, F ₆ = deterministisch			F ₁ = 40, F ₅ = OLS, F ₆ = stochastisch		
					F ₄ = 8	F ₄ = 4	F ₄ = 3	F ₄ = 8	F ₄ = 4	F ₄ = 3
hoch	hoch	1	1	10.523,96	10.039,42	10.229,28	9.131,65	10.219,45	9.089,91	#ZAHL!
hoch	hoch	2	1	11.253,61	11.080,14	10.407,95	10.797,55	11.043,70	#ZAHL!	#ZAHL!
hoch	hoch	3	1	9.805,24	9.499,83	9.627,34	8.732,94	9.565,21	8.327,91	#ZAHL!
hoch	hoch	4	1	11.738,83	11.406,51	10.285,32	10.433,33	11.496,89	#ZAHL!	#ZAHL!
hoch	hoch	5	1	13.388,07	12.455,13	11.433,80	12.119,54	12.823,30	10.910,85	#ZAHL!
hoch	hoch	6	1	11.276,36	10.917,14	10.359,85	10.721,04	11.079,79	#ZAHL!	#ZAHL!
Mittelwert				11.331,01	10.899,69	10.390,59	10.322,67	11.038,06	#ZAHL!	#ZAHL!
Anteil				1,00	0,961935	0,917005	0,911011	0,97415	#ZAHL!	#ZAHL!
hoch	hoch	1	2	10.523,96	10.039,42	10.229,28	9.131,65	10.286,24	#ZAHL!	#ZAHL!
hoch	hoch	2	2	11.253,61	11.080,14	10.407,95	10.797,55	11.065,91	#ZAHL!	#ZAHL!
hoch	hoch	3	2	9.805,24	9.499,83	9.627,34	8.732,94	9.505,92	#ZAHL!	#ZAHL!
hoch	hoch	4	2	11.738,83	11.406,51	10.285,32	10.433,33	11.370,49	#ZAHL!	#ZAHL!
hoch	hoch	5	2	13.388,07	12.455,13	11.433,80	12.119,54	12.934,01	#ZAHL!	#ZAHL!
hoch	hoch	6	2	11.276,36	10.917,14	10.359,85	10.721,04	11.036,34	#ZAHL!	#ZAHL!
Mittelwert				11.331,01	10.899,69	10.390,59	10.322,67	11.033,15	#ZAHL!	#ZAHL!
Anteil				1,00	0,961935	0,917005	0,911011	0,97371	#ZAHL!	#ZAHL!
F ₂	F ₃	N ₁	N ₂	REFERENZ	F ₁ = 20, F ₅ = OLS, F ₆ = deterministisch			F ₁ = 20, F ₅ = OLS F ₆ = stochastisch		
					F ₄ = 8	F ₄ = 4	F ₄ = 3	F ₄ = 8	F ₄ = 4	F ₄ = 3
hoch	hoch	1	1	11.454,63	10.920,03	10.879,53	10.982,25	11.143,54	#ZAHL!	#ZAHL!
hoch	hoch	2	1	12.484,34	12.189,21	12.163,12	10.830,83	12.199,69	11.451,66	7.862,40
hoch	hoch	3	1	12.188,97	11.903,30	11.760,10	11.128,85	12.033,51	11.329,99	#ZAHL!
hoch	hoch	4	1	15.530,87	15.112,93	15.247,28	14.281,65	15.157,48	12.149,82	#ZAHL!
hoch	hoch	5	1	12.733,33	12.139,16	12.641,70	12.140,14	12.347,94	7.417,67	#ZAHL!
hoch	hoch	6	1	9.764,52	9.668,14	9.405,99	9.328,36	9.688,91	8.807,66	#ZAHL!
Mittelwert				12.359,44	11.988,80	12.016,29	11.448,68	12.095,18	#ZAHL!	#ZAHL!
Anteil				1,00	0,970011	0,972235	0,926310	0,97862	#ZAHL!	#ZAHL!
hoch	hoch	1	2	11.454,63	11.308,93	11.168,69	10.339,25	11.333,92	8.750,21	#ZAHL!
hoch	hoch	2	2	12.484,34	11.570,84	11.387,75	11.392,69	11.767,15	#ZAHL!	#ZAHL!
hoch	hoch	3	2	12.188,97	11.874,17	11.755,50	11.395,33	12.042,07	#ZAHL!	5.630,22
hoch	hoch	4	2	15.530,87	15.250,28	14.715,79	12.386,86	15.256,68	15.010,66	#ZAHL!
hoch	hoch	5	2	12.733,33	12.319,50	12.022,09	12.075,46	12.408,63	#ZAHL!	#ZAHL!
hoch	hoch	6	2	9.764,52	9.561,39	9.394,92	9.356,99	9.606,56	#ZAHL!	#ZAHL!
Mittelwert				12.359,44	11.980,85	11.740,79	11.157,76	12.069,17	#ZAHL!	#ZAHL!
Anteil				1,00	0,969368	0,949945	0,902772	0,97651	#ZAHL!	#ZAHL!
F ₂	F ₃	N ₁	N ₂	REFERENZ	F ₁ = 8, F ₅ = OLS F ₆ = deterministisch			F ₁ = 8, F ₅ = OLS F ₆ = stochastisch		
					F ₄ = 8	F ₄ = 4	F ₄ = 3	F ₄ = 8	F ₄ = 4	F ₄ = 3
hoch	hoch	1	1	7.029,40	6.897,16	6.745,74	6.328,38	6.871,82	6.827,48	#ZAHL!
hoch	hoch	2	1	11.042,49	10.227,37	8.716,97	10.564,06	10.579,94	#ZAHL!	#ZAHL!
hoch	hoch	3	1	14.672,94	14.579,71	14.325,70	13.883,25	14.601,23	14.486,80	#ZAHL!
hoch	hoch	4	1	10.767,36	10.646,19	10.670,54	10.360,09	10.581,14	10.095,55	10.286,04
hoch	hoch	5	1	11.029,70	10.936,28	10.808,47	10.411,44	10.900,55	10.886,62	10.641,10
hoch	hoch	6	1	15.066,34	14.630,41	14.675,91	13.660,98	14.895,60	13.166,44	#ZAHL!
Mittelwert				11.601,37	11.319,52	10.990,55	10.868,03	11.405,05	#ZAHL!	#ZAHL!
Anteil				1,00	0,975705	0,947349	0,936789	0,98308	#ZAHL!	#ZAHL!
hoch	hoch	1	2	7.029,40	6.891,97	6.587,52	6.719,12	6.899,07	6.780,75	#ZAHL!
hoch	hoch	2	2	11.042,49	10.947,98	9.687,65	10.709,88	10.900,10	#ZAHL!	#ZAHL!
hoch	hoch	3	2	14.672,94	14.615,81	12.678,39	14.098,41	14.617,39	12.814,32	#ZAHL!
hoch	hoch	4	2	10.767,36	10.688,87	10.553,24	9.742,44	10.673,32	10.139,69	#ZAHL!
hoch	hoch	5	2	11.029,70	10.984,48	10.665,36	10.563,48	10.931,22	10.729,37	#ZAHL!
hoch	hoch	6	2	15.066,34	14.850,86	13.334,93	14.847,12	14.933,10	#ZAHL!	14.313,77
Mittelwert				11.601,37	11.496,66	10.584,51	11.113,41	11.492,37	#ZAHL!	#ZAHL!
Anteil				1,00	0,990974	0,912350	0,957939	0,99060	#ZAHL!	#ZAHL!

Tabelle 6-1: Ergebnisse der stochastischen Optimierung mit OLS-geschätzten Parametern

F ₂	F ₃	N ₁	N ₂	REFERENZ	F ₁ = 40, F ₅ = Bayes, F ₆ = deterministisch			F ₁ = 40, F ₅ = Bayes, F ₆ = stochastisch		
					F ₄ = 8	F ₄ = 4	F ₄ = 3	F ₄ = 8	F ₄ = 4	F ₄ = 3
hoch	hoch	1	1	10.523,96	10.196,50	10.382,18	10.255,20	10.258,86	10.419,76	10.387,78
hoch	hoch	2	1	11.253,61	11.097,11	10.864,25	11.066,91	11.095,57	10.967,71	11.086,30
hoch	hoch	3	1	9.805,24	9.578,42	9.719,19	9.664,10	9.628,53	9.708,34	9.689,63
hoch	hoch	4	1	11.738,83	11.539,69	11.115,39	10.779,00	11.587,31	11.346,93	10.925,24
hoch	hoch	5	1	13.388,07	12.795,76	12.543,55	12.847,68	12.914,81	12.930,01	12.965,64
hoch	hoch	6	1	11.276,36	11.071,85	10.929,75	11.131,16	11.132,70	11.001,11	11.147,82
Mittelwert				11.331,01	11.046,56	10.925,72	10.957,34	11.102,96	11.062,31	11.033,74
Anteil				1,00	0,974896	0,964232	0,967022	0,97987	0,97629	0,97376
hoch	hoch	1	2	10.523,96	10.251,29	10.126,56	9.979,39	10.297,19	10.330,08	10.247,83
hoch	hoch	2	2	11.253,61	11.065,77	10.852,74	10.786,85	11.099,44	10.937,44	11.005,28
hoch	hoch	3	2	9.805,24	9.707,25	9.478,66	9.606,48	9.690,92	9.596,83	9.706,30
hoch	hoch	4	2	11.738,83	11.573,37	11.491,18	10.577,31	11.561,17	11.519,21	10.861,67
hoch	hoch	5	2	13.388,07	12.820,02	13.005,97	12.764,41	12.976,83	13.098,87	13.158,13
hoch	hoch	6	2	11.276,36	11.131,12	11.051,72	10.868,99	11.122,28	11.074,30	11.039,41
Mittelwert				11.331,01	11.091,47	11.001,14	10.763,90	11.124,64	11.092,79	11.003,10
Anteil				1,00	0,978860	0,970888	0,949951	0,98179	0,97898	0,97106
F ₂	F ₃	N ₁	N ₂	REFERENZ	F ₁ = 20, F ₅ = Bayes, F ₆ = deterministisch			F ₁ = 20, F ₅ = Bayes, F ₆ = stochastisch		
					20 8 Bayes	20 4 Bayes	20 3 Bayes	st.Opt. 20 8	st.Opt. 20 4	st.Opt. 20 3
hoch	hoch	1	1	11.454,63	11.172,33	11.200,01	11.113,29	11.216,56	11.369,33	11.230,71
hoch	hoch	2	1	12.484,34	12.183,41	12.191,44	11.758,19	12.248,64	12.204,51	12.158,22
hoch	hoch	3	1	12.188,97	12.017,67	12.025,63	11.830,92	12.050,75	12.051,16	11.896,60
hoch	hoch	4	1	15.530,87	15.144,26	15.266,96	14.776,86	15.295,28	15.340,07	15.115,65
hoch	hoch	5	1	12.733,33	12.227,92	12.617,81	12.556,86	12.382,68	12.666,97	12.596,25
hoch	hoch	6	1	9.764,52	9.711,81	9.552,14	9.609,04	9.713,60	9.517,02	9.610,27
Mittelwert				12.359,44	12.076,23	12.142,33	11.940,86	12.151,25	12.191,51	12.101,28
Anteil				1,00	0,977086	0,982434	0,966132	0,98316	0,98641	0,97911
hoch	hoch	1	2	11.454,63	11.378,59	11.281,57	11.092,30	11.386,00	11.250,36	11.160,45
hoch	hoch	2	2	12.484,34	11.617,55	12.046,27	11.965,12	11.835,95	12.393,21	12.276,62
hoch	hoch	3	2	12.188,97	12.074,53	11.978,68	12.006,97	12.066,08	12.054,61	11.883,03
hoch	hoch	4	2	15.530,87	15.378,03	15.147,49	14.170,11	15.357,40	15.171,67	14.971,54
hoch	hoch	5	2	12.733,33	12.308,64	12.308,89	12.387,78	12.424,79	12.582,28	12.357,64
hoch	hoch	6	2	9.764,52	9.629,96	9.555,39	9.584,63	9.648,43	9.572,60	9.558,56
Mittelwert				12.359,44	12.064,55	12.053,05	11.867,82	12.119,77	12.170,79	12.034,64
Anteil				1,00	0,976140	0,975210	0,960223	0,98061	0,98474	0,97372
F ₂	F ₃	N ₁	N ₂	REFERENZ	F ₁ = 8, F ₅ = Bayes, F ₆ = deterministisch			F ₁ = 8, F ₅ = Bayes, F ₆ = stochastisch		
					8 8 Bayes	8 4 Bayes	8 3 Bayes	st.Opt. 8 8	st.Opt. 8 4	st.Opt. 8 3
hoch	hoch	1	1	7.029,40	6.961,53	6.847,91	6.816,56	6.961,88	6.810,43	6.640,41
hoch	hoch	2	1	11.042,49	10.274,60	10.313,70	10.471,08	10.511,62	10.735,28	10.053,78
hoch	hoch	3	1	14.672,94	14.569,49	14.514,40	14.235,33	14.597,84	14.548,25	12.753,27
hoch	hoch	4	1	10.767,36	10.669,57	10.722,81	10.433,64	10.630,78	10.587,66	10.367,37
hoch	hoch	5	1	11.029,70	10.949,43	10.777,88	10.786,97	10.959,69	10.919,37	10.767,70
hoch	hoch	6	1	15.066,34	14.911,63	14.688,96	14.653,96	14.957,60	14.767,38	14.796,74
Mittelwert				11.601,37	11.389,38	11.310,94	11.232,92	11.436,57	11.394,73	10.896,54
Anteil				1,00	0,981727	0,974966	0,968241	0,98579	0,98219	0,93925
hoch	hoch	1	2	7.029,40	6.899,65	6.644,83	6.804,53	6.883,65	6.788,22	#ZAHL!
hoch	hoch	2	2	11.042,49	10.874,40	10.463,67	10.415,02	10.909,17	10.637,33	9.901,81
hoch	hoch	3	2	14.672,94	14.659,77	13.507,06	11.168,78	14.649,68	14.437,52	#ZAHL!
hoch	hoch	4	2	10.767,36	10.692,83	10.637,76	10.670,86	10.627,08	10.574,32	9.938,90
hoch	hoch	5	2	11.029,70	10.991,96	10.812,77	10.941,10	10.991,90	10.958,20	10.916,09
hoch	hoch	6	2	15.066,34	14.986,72	14.610,64	14.982,08	14.989,89	14.538,38	15.014,22
Mittelwert				11.601,37	11.517,56	11.112,79	10.830,39	11.508,56	11.322,33	#ZAHL!
Anteil				1,00	0,992775	0,957886	0,933544	0,99200	0,97595	#ZAHL!

Tabelle 6-2: Ergebnisse der stochastischen Optimierung mit Bayes-geschätzten Parametern

Der erste Blick zeigt die vielen unzulässigen Lösungen (vgl. „#ZAHL!“) bei den Resultaten der mit OLS geschätzten Parameter. Weiterhin können bei drei und vier Beobachtungswerten die wenigen zulässigen Lösungen nicht an die der deterministischen Ergebnisse heranreichen, so dass die Eignung der Ergebnisse dieser Schätzmethode für die stochastische Optimierung klar zu verneinen ist. Diese Konsequenz kam nicht unerwartet, zumal vorher schon klar war, dass die Schätzer ja überwiegend

gar nicht signifikant waren. Bei den OLS-Schätzern auf Basis von acht Beobachtungen scheinen jedoch höhere Umsätze als bei deterministischer Optimierung möglich. Zwar muss auch dies zunächst per Varianzanalyse überprüft werden, jedoch ist ein erster Trend erkennbar, wenn die Daten entsprechend valide sind.

Anders bei den mit hierarchisch Bayesscher Regression bestimmten Parametern. Hier ist auf den ersten Blick die Dominanz der stochastischen Optimierung gegenüber dem gängigen Verfahren erkennbar. Einzig zwei von 108 Werten sind ungültig. Über 75 % der Ergebnisse können jene aus Kapitel 5, welche schon nah am jeweiligen Referenzwert lagen, noch übertreffen. Deutlicher als sonst zeigt sich aber ein Unterschied der Qualität in Beziehung zur Anzahl F_1 der Zuordnungseinheiten, in Verbindung mit der Anzahl F_4 an Beobachtungswerten. Eine Varianzanalyse wird auch hierfür eine klare Aussage ermöglichen.

Bei den in Kapitel 6.6.1 angedeuteten Variationen mit verschiedenen Verfahren und Begrenzungen wurde versucht, die hohe Anzahl an ungültigen Ergebnissen bei wenigen Beobachtungen aus Tabelle 6-1 zu reduzieren. Eine entsprechend starke Stützung des Varianzbereiches konnte dieses Ziel nur erreichen, wenn als Maximum der $d = n/2$ -te Wert also der Median bestimmt wurde (n als Anzahl der Segmente). Dann waren zwar alle Lösungen zulässig, jedoch waren die Ergebnisse durchweg niedriger, als im Fall der deterministischen Optimierung. Bei $d = \frac{3}{4}n$, also bei diskreter Kappung der Varianz bei 25 %, konnten die Ergebnisse dann meist die Vorgaben aus Kapitel 5 übertreffen. In diesem Fall ist aber die Argumentation zu schwach, um weitere Überlegungen anzustellen, da dann eigentlich nicht mehr von stochastischen Daten gesprochen werden kann. Es wurde auch die Möglichkeit geprüft, die Varianzen der Parameter mit einem über alle Einheiten konstanten Skalar sk mit $[0 < sk < 1]$ zu gewichten. Auch dies führte bei gut gewähltem sk zu höheren Umsätzen, entbehrt aber einer Grundlage aus der Herleitung der Formel aus Kapitel 6.2. So bleibt als Erkenntnis, dass drei bzw. vier Beobachtungen mit OLS nicht ausreichen, um bei der stochastischen Optimierung geeignete Ergebnisse zu erzielen.

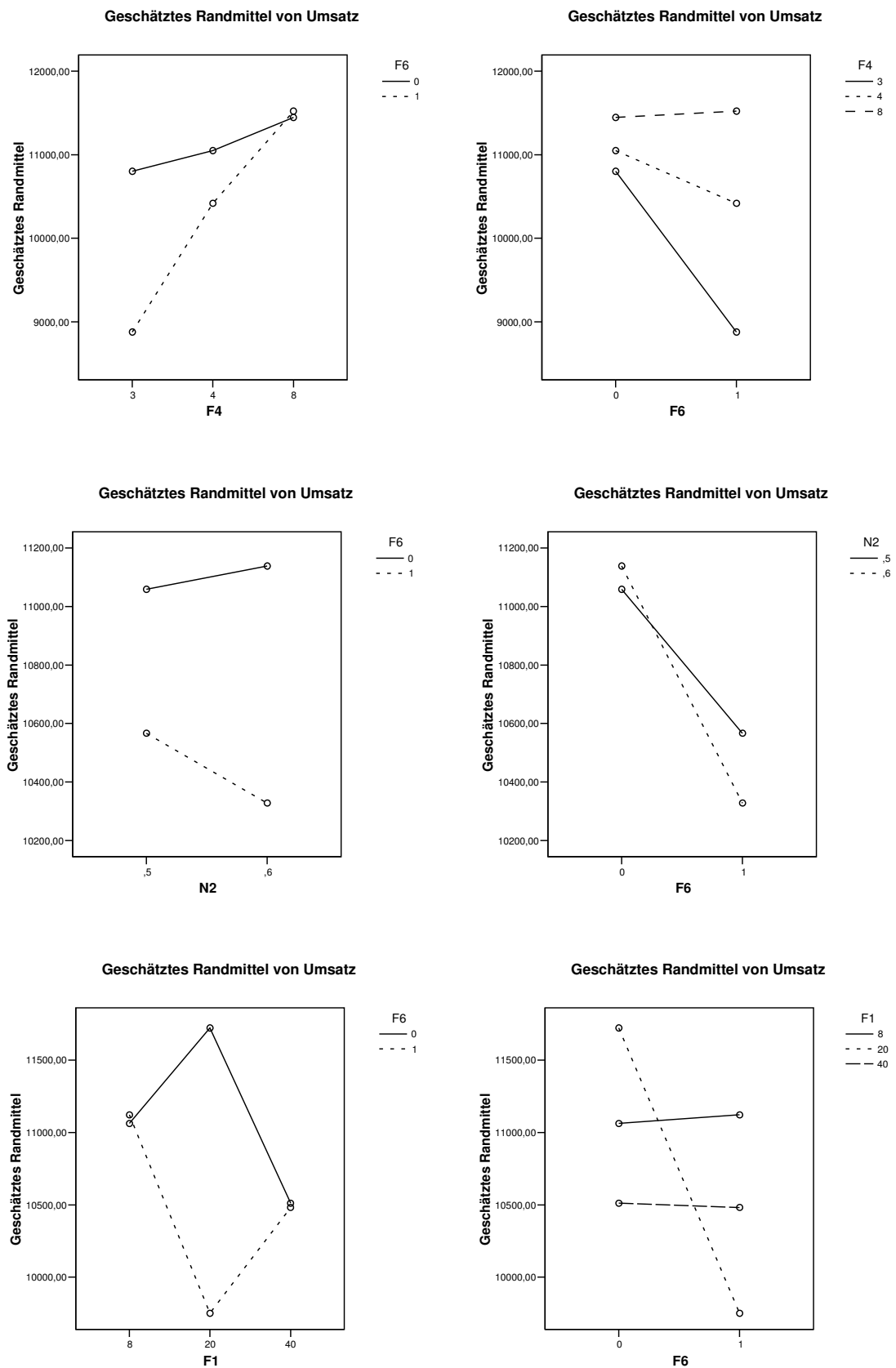


Abbildung 6-2: Diagramme der Wechselwirkungen bei stochastischer Optimierung aus OLS-Schätzungen

6.7.3 Varianzanalyse

Wegen der zwei unterschiedlichen Schätzverfahren wurden auch zwei voneinander getrennte Varianzanalysen durchgeführt. Die Betrachtung der Ergebnistabellen lässt zunächst vermuten, dass im Falle von Bayes-Schätzungen eine signifikante Verbesserung der Ergebnisse eintritt, während dies bei OLS nicht der Fall zu sein scheint. Zwar ergeben dort stochastisch optimale Allokationen bei acht Beobachtungen fast ausnahmslos höhere Umsätze, jedoch ist dieses Verhältnis bei Daten aus weniger Beobachtungen umgekehrt, oder es existiert kein gültiges Ergebnis. Aufgrund der vielen ungültigen Ergebnisse der OLS-Schätzungen, kann aber eine Varianzanalyse nur die Wirkungen der stochastischen Optimierung bei $F_4 = 8$ Beobachtungen bewerten. Von den restlichen Resultaten war weniger als ein Drittel der Lösungen zulässig, weshalb entsprechend wenige dieser Effekte miteinbezogen wurden.

Abhängige Variable: Umsatz

Quelle	Quadratsumme vom Typ III	df	Mittel der Quadrate	F	Signifikanz	Partielles Eta ²
Korrigiertes Modell	263229344,45(a)	23	11444754	3,632	,000	,367
Konstanter Term	10616222030	1	10616222030,214	3368,651	,000	,959
N2	229745,215	1	229745,215	,073	,788	,001
N1	163251104,72	5	32650221	10,360	,000	,265
F1	19387852,124	2	9693926,1	3,076	,049	,041
F4	44173050,546	2	22086525	7,008	,001	,089
F6	16983746,637	1	16983747	5,389	,022	,036
N2 * F6	922896,730	1	922896,730	,293	,589	,002
F1 * F6	20756204,034	2	10378102	3,293	,040	,044
F4 * F6	16691245,710	2	8345622,9	2,648	,074	,035
Fehler	453812460,27	144	3151475,4			
Gesamt	21339595384,304	168				
Korrigierte Gesamtvariation	717041804,71	167				

a R-Quadrat = ,367 korrigiertes R-Quadrat = ,266

Tabelle 6-3: Ergebnisse der Varianzanalyse zur Prüfung der stochastischen Optimierung für Schätzdaten aus OLS

In der Varianzanalyse wurde ein Modell mit vier Variablen generiert. Die Faktoren F_2 und F_3 waren in diesem Fall konstant, da es sich ja nur um Daten aus den sehr elastischen und sehr heterogenen Simulationen (*hoch_hoch*) handelte. Wegen der getrennten Untersuchung von Bayes und OLS entfiel auch die Variable F_5 , es wurde aber mit einem neuen Dummy-Faktor F_6 zwischen stochastischer ($F_6 = 1$) und deterministischer Optimierung ($F_6 = 0$) unterschieden. Somit blieben die fünf Faktoren F_1 , F_4 , F_6 , N_1 und N_2 für diese beiden Untersuchungen bestehen.

Wie zuvor wurde auch hier zunächst jeweils das gesättigte Modell berechnet. Wegen dem hohen Anteil an missing Values bei den Berechnungen auf Basis der OLS-Schätzungen war das Modell schlecht interpretierbar. Dies begründet das mit $R^2 = 0,366$ sehr niedrige Bestimmtheitsmaß und ließ den Schluss erahnen, dass stochastische Optimierung auf Basis von OLS-Schätzern mit wenigen Freiheitsgraden nicht harmoniert. Zu beachten bleiben aber die häufigen Interaktionen der Variablen F_6 , weshalb der zwar signifikante Haupteffekt auch hier nicht ohne weiteres interpretierbar ist. Erneut soll die Beschaffenheit der Wechselwirkungsdiagramme die Beziehungen zwischen den exogenen Variablen verdeutlichen.

Aus der Tabelle sind drei Interaktionen erkennbar, die mit der hier relevanten Variablen Wechselwirkungen aufzeigen. Die Beziehungen zwischen N_2 und F_6 und zwischen F_4 und F_6 klassifizieren sich als hybride Interaktionen (vgl. Kapitel 5.1.2.1 S. 83). Diese lassen nur Rückschlüsse auf den Haupteffekt zu, bei dem die Trends die gleichsinnige Richtung aufweisen, also im ersten Fall für F_6 , welcher somit immer noch eindeutig interpretierbar scheint. Bei der zweiten Interaktion verliert F_6 jedoch seine eindeutige Interpretierbarkeit da die gleichsinnige Richtung nur für den Faktor F_4 zutrifft. Spätestens die dritte, ebenfalls disordinale Interaktion zwischen F_1 und F_6 nimmt den beiden Haupteffekten F_6 und F_1 seine Eindeutigkeit. Die Überschneidung der Linien in beiden der unteren Diagramme von Abbildung 6-2 zeigt, dass nur im Fall von $F_1 = 8$ die Umsätze der stochastischen Optimierung signifikant größer sind als bei unterstelltem Determinismus. Auch ohne diese tiefer gehende Untersuchung war eigentlich schon klar, dass die stochastische Optimierung nicht mit Daten aus der OLS mit wenigen Freiheitsgraden durchgeführt werden sollte. Zur Anwendung dieser alternativen Optimierungsmethode sollten schon wenigstens acht Beobachtungen je Einheit vorliegen. Jedoch ist auch dann nicht sicher, dass sich das Ergebnis verbessert, da hierfür kein signifikanter Parameterschätzer vorliegt.

Für die optimierten Zuordnungen von mit Hilfe von Bayes geschätzten Daten war das Resultat in diesem Fall wesentlich deutlicher. Hier waren neben den Haupteffekten nur noch drei weitere Wechselwirkungen erkennbar, jedoch trat die relevante Variable F_6 dabei nicht auf. Aus der Signifikanz des Haupteffektes von F_6 und seines für $[F_6 = 0]$ negativen Parameterschätzers zeigt sich ein eindeutig gerichteter positiver Einfluss auf die Umsatzhöhe.

Abhängige Variable: Umsatz

Quelle	Quadratsumme vom Typ III	df	Mittel der Quadrate	F	Signifikanz	Partielles Eta ²
Korrigiertes Modell	786621420,021(a)	74	10630019,189	238,051	,000	,992
Konstanter Term	27866044087,469	1	27866044087,469	624038,097	,000	1,000
N2	144420,229	1	144420,229	3,234	,074	,023
N1	192609339,772	5	38521867,954	862,667	,000	,969
F1	45130032,488	2	22565016,244	505,326	,000	,879
F4	2658851,028	2	1329425,514	29,771	,000	,300
F6	236125,263	1	236125,263	5,288	,023	,037
N1 * F1	535481863,982	10	53548186,398	1199,169	,000	,989
N2 * N1	471410,398	5	94282,080	2,111	,068	,071
F1 * F4	1274469,840	4	318617,460	7,135	,000	,170
N1 * F4	3123757,527	10	312375,753	6,995	,000	,335
N2 * F4	302211,013	2	151105,506	3,384	,037	,046
N2 * N1 * F1	1391064,032	12	115922,003	2,596	,004	,183
N1 * F1 * F4	4889273,188	20	244463,659	5,475	,000	,441
Fehler	6206960,994	139	44654,396			
Gesamt	28892422330,336	214				
Korrigierte Gesamtvariation	792828381,015	213				

a R-Quadrat = ,992 (korrigiertes R-Quadrat = ,988)

Tabelle 6-4: Ergebnisse der Varianzanalyse zur Prüfung der stochastischen Optimierung für Bayessche Schätzdaten

6.7.4 These H_{06} : Durch Anwendung der stochastischen Optimierung können die Ergebnisse der deterministischen Allokation verbessert werden.

Die Hypothese muss vor der Annahme oder Ablehnung zunächst differenziert betrachtet werden. Aufgrund der vielen ungültigen Lösungen waren die Ergebnisse der Varianzanalyse für die stochastische Optimierung der OLS-Schätzungen nicht brauchbar. Einzig der Plot der Interaktion von $F_4 \times F_6$ bestätigt, dass bei acht Beobachtungswerten die stochastische Optimierung der deterministischen Überlegen ist. Die Hypothese kann deshalb nicht bestätigt werden, wenn die Parameter mit OLS geschätzt wurden.

Anders dagegen im Fall der Bayes basierten Schätzungen. Durch die Fähigkeit des hierarchischen Schätzverfahrens, die Varianzen der Parameter gering zu halten, zeigt sich eine signifikant positive Wirkung der stochastischen Optimierung. Daher ist die Hypothese in diesem Fall auf einem Signifikanzniveau von 95 % anzunehmen.

6.8 Fazit

Für den Fall der Ressourcenallokation zeigt sich generell eine Eignung der stochastischen Optimierung, wenn man zuvor die richtigen Schätzmethoden anwendet oder ausreichend Datenmaterial zur Verfügung hat. Zur Unterscheidung lagen hierbei die beiden Verfahren OLS und hierarchisch Bayessche Regression vor. In früheren Kapiteln zeigte sich schon wiederholt, dass die Schätzungen mit wenigen Freiheitsgraden sich bei OLS als unterlegen präsentierten. In diesem Kapitel stand unter anderem die Frage im Raum, ob diese Schwächen vielleicht per stochastischer Optimierung ausgeglichen werden könnten. Bei eben diesen Daten erwies sich jedoch die Bestimmung des nivellierenden Elastizitätsparameters β^* bei der Berechnung als problematisch. Dies führte dazu, dass die meisten Ergebnisse von OLS-Schätzungen mit drei bzw. vier Beobachtungen aufgrund viel zu hoher Varianzen nicht lösbar waren. Somit kann leider auch diese Methode nicht mehr Informationen aus den Basisdaten verwerten, als die Schätzung an sich.

Anders bei den Ergebnissen aus der hierarchischen Bayes-Schätzung. Durch die Eigenart, übergeordnete Verteilungsinformationen an die untergeordneten Schätzer „ausborgen“ zu können, gestaltet sich dieses Verfahren auch für die stochastische Optimierung als überlegen. Es waren hierbei besonders die Informationen der Schätzervarianzen von Bedeutung, indem diese in ihrer Größenordnung realistisch gestaltet werden konnten. Daraus resultiert eine ideale Basis an Schätzparametern, welche mit der stochastischen Optimierung, trotz des bereits sehr hohen Ausgangsniveaus, zu weiter verbesserten Ergebnissen beitragen konnten. Die Kombination aus hierarchisch Bayesscher Regression und stochastischer Optimierung präsentiert sich für die Problematik der Ressourcenallokation also als exzellentes Verfahren zur Maximierung des Umsatzes bei elastischer und heterogener Struktur der Zuordnungseinheiten.

7 Schlussbetrachtung

Die Intention der vorliegenden Arbeit lag in der Analyse unterschiedlicher Einflussfaktoren bei der Allokation von knappen Ressourcen, mit Hilfe bereits bestehender Modelle im Bereich des Marketing. Dabei lag unter anderem das Interesse auf der Wirkung unterschiedlich großer Datenbasen auf das Ergebnis. Es wurde ebenso die Eignung zweier unterschiedlicher Schätzverfahren untersucht, wobei mit der Kleinst-Quadrat-Methode das altbewährte System gegen die zwar nicht neue, aber aufgrund des technischen Fortschritts zunehmend beachtete Praktik, der hierarchisch Bayesschen Inferenz. Bei der Simulation bot sich zusätzlich an, andere Bestimmungsmethoden zur Erlangung der notwendigen Parameterschätzer in Relation dazu zu betrachten. So wurde ferner eine Möglichkeit der subjektiven Bestimmung modelliert und eine Berechnung per Auflösung eines genau bestimmten Gleichungssystems durchgeführt. Die Unterstellung einer homogenen Elastizitätsstruktur der Zuordnungseinheiten bot die Vorzüge, die Anzahl der zu bestimmenden Parameter stark zu reduzieren. Deshalb sollte auch diese Möglichkeit mit in die Untersuchung einfließen. Dabei brachten die hervorragenden Ergebnisse der *alpha-Allokation* zur Bestimmung von Parametern sicherlich die am meisten überraschenden Erfolge und konnte sich entsprechend gut als geeignete Alternative behaupten.

Einen zweiten Schwerpunkt bildete die Betrachtung einer veränderten Vorgehensweise bei der Optimierung. Es schien inkonsequent, den bei der Schätzung eindeutig festgestellten nicht-deterministischen Verlauf von Umsatz-Reaktionsfunktionen mit Hilfe von Punktschätzern und dessen stochastische Eigenschaft zu ignorieren. Da bei der Schätzung der Parameter in der Regel nur der Erwartungswert ohne Berücksichtigung von anderen Verteilungsmomenten wie Varianz und Schiefe zur Optimierung von Funktionen verwendet werden, kann ein Ergebnis daraus auch nur für den deterministischen Fall repräsentativ sein. Diese Inkonsequenz wurde durch Anwendung der stochastischen Optimierung beseitigt, indem die zusätzlichen Informationen aus der Varianz-Kovarianz-Struktur der zu schätzenden Variablen bei der Optimierung mit berücksichtigt wurden. Jedoch muss einschränkend gesagt werden, dass die stochastische Optimierung ebenso wie die Schätzmethodik der hierarchisch Bayesschen

Regression als technisch sehr anspruchsvolle Verfahren anzusehen sind. Gerade ersteres wird sich bei Erhöhung der Anzahl von exogenen Variablen, zunehmend schwierig gestalten und auch mit dem hohen Niveau der heutigen Rechnerleistungen nur bedingt lösbar sein.

Die Ergebnisse dieser Untersuchungen, welche allesamt mit Hilfe von Simulationsstudien erzielt wurden, ergaben meist signifikante Schlussfolgerungen. Dabei erwies sich die Kenntnis der wahren Parameter insofern als Vorteil, als das alle erzielten Umsätze als Anteil des maximal Erreichbaren dargestellt werden konnten. Man erhielt somit schnell interpretierbare Kennzahlen, anhand derer ein grober Überblick der Resultate im folgenden vereinfachend präsentiert werden könnten.

Bei einem Umsatzreaktionsmodell mit nur einer endogenen Variablen, welche mit einem Bestimmtheitsmaß von etwa 0,5 – 0,6 den Umsatz beeinflusst, erreicht man unabhängig von Schätzdaten und Methode bei der Optimierung mit einem Reallokationsmodell immer mehr als 80 % des Wertes, welcher bei vollständiger Information das Maximum darstellt. Dabei liegt dieser Anteil höher, wenn die Elastizität der Zuordnungseinheiten eher gering und eher homogen verteilt ist. Es sei jedoch Vorsicht geboten, da nicht bei jeder Reallokation sichergestellt ist, dass sich die Umsätze auch gegenüber der möglicherweise aktuell zufällig entstandenen Aufteilung auch wirklich verbessern, denn auch zufällige Allokationen liegen meistens auf entsprechend hohem Niveau. Diese Unsicherheit kann aber beseitigt werden, wenn man die Parameter mit Hilfe von hierarchisch Bayesscher Regression schätzt oder wenn man über ausreichend Freiheitsgrade verfügt. Die neue Alternative der Unterstellung einer homogenen Struktur kann ebenfalls mit Sicherheit die vorhandenen zufälligen Allokationen verbessern, wenn priori-Informationen über die Verteilung der Elastizitäten von den Zuordnungseinheiten verfügbar sind.

Somit kristallisiert sich eine Kombination aus den Verfahren unter den Gesichtspunkten von Genauigkeit und Kosten als empfehlenswerter Vorschlag heraus. Nach diesem sollte man zunächst einmalig auf möglichst breiter Datenbasis versuchen, die priori-Informationen über die Momente der Elastizität des Marketinginstruments abhängig von der Größenordnung der verfügbaren Marktinformationen mit Hilfe von hierarchisch Bayesscher Regression zu erlangen. Dies könnte bei mangelnder Methodenkenntnis einmalig von unternehmensexternen Stellen bewerkstelligt werden. Auf Grundlage der Verteilungsinformationen bietet es sich dann mit Hilfe der *alpha-Allokation* an, diese in jeder Periode erneut durchzuführen, ohne dass besondere Statistik- oder Mathematikkenntnisse im Unternehmen notwendig sind. Liegen die Prioris aufgrund von markspezifischen Kenntnissen auf Basis früherer Unter-

suchungen oder wegen guter subjektiver Schätzungen bereits vor, so entfällt zusätzlich auch noch deren anfangs sehr aufwändige und mitunter teure Ermittlung.

Ist das technische Know-how bezüglich hierarchisch Bayesscher Regression und stochastischer Optimierung jedoch vorhanden, so können aus einer Kombination dieser beiden Verfahren extrem genaue Allokationen errechnet werden, die mit anteilig minimal 97 % nahezu identisch mit den zugehörigen Referenzwerten sind, auch wenn nur drei Beobachtungswerte pro Zuordnungseinheit vorliegen. Die Untersuchung der vorliegenden Arbeit ergibt somit, dass sich abhängig von vorhandenem Datenmaterial, dynamischer Veränderung des Marktes, der bereitstehenden Budgets für die Marktforschung und des technischen Know-how individuell sehr praktische und den Zielvorgaben entsprechende Lösungsansätze für die Allokation von knappen Ressourcen auf Basis von Marktreaktionsfunktionen gefunden werden können.

Bleibt zu erwähnen, dass sich diese Studie nur auf einen sehr beschränkten Problemkreis bezogen hat. Um Aussagen zur allgemeinen Güte über die verwendeten Instrumente machen zu können, müssten weitere Studien Aussagen über alternative Reaktionsfunktionsmodelle zulassen. Auch sollten in weiteren Studien Kreuzelastizitätseffekte berücksichtigt werden, da diese ja insbesondere bei der Regalplatzallokation eine wichtige Rolle spielen.

Anhang

A.1 VBA-Code zum Datenaustausch und externen Starten von WinBUGS und Excel

```
Sub BUGS_N1_40_8()  
,  
, BUGS_40_8 Makro  
, Makro am 06.08.2004 von PP aufgezeichnet  
,  
  
Range("D304:AQ311").Select  
Selection.Copy 'markiert und kopiert die unabhängigen Variablen  
Run ("x408Werte") 'formt die Matrix mit den Daten in für WinBUGS lesbare Form um  
Windows("Simulation_N1_40.xls").Activate  
Range("D238:AQ245").Select  
Selection.Copy  
Run ("y408Werte") 'formt die Matrix mit den Daten in für WinBUGS lesbare Form um  
Windows("Simulation_N1_40.xls").Activate  
Range("D391").Select  
Shell ("C:\Programme\WinBUGS14\WinBUGS14.exe /PAR Script40")  
'startet WinBUGS obigem Datensatz  
Application.Wait (Now + TimeValue("0:00:33"))  
'wartet die Berechnungszeit von WinBUGS ab  
Kill ("C:\Programme\WinBUGS14\Databasel.txt")  
'löscht die Datei  
Workbooks.Open "C:\Programme\WinBUGS14\schätzer.txt"  
  
Run ("sort40") 'sortiert die Daten für den re-Import  
Windows("Simulation_N1_40.xls").Activate  
Range("D391").Select  
ActiveSheet.Paste 're-Import  
Application.CutCopyMode = False  
Workbooks("schätzer.txt").Close SaveChanges:=False  
  
Range("AT304:CG311").Select  
'neuer Prozedurstart für folgenden Simulationslauf  
  
. . .  
Workbooks("schätzer.txt").Close SaveChanges:=False  
  
. . .
```

A.2 Ergebnistabellen

A.2.1 Ergebnisse $N_2=1$, $F_1 = 40$

			N ₂ = 1	F ₁ F ₄ F ₅																	
F ₂	F ₃	N ₁	REFERENZ	40 24 OLS	40 12 OLS	40 8 OLS	40 4 OLS	40 3 OLS	2 genau	40 Subj.	α-Allokation	40 8 Bayes	40 4 Bayes	40 3 Bayes							
hoch	hoch	1	10.523,96	10.427,99	10.379,79	10.039,42	10.229,28	9.131,65	9.131,76	8.862,48	10.406,55	10.196,51	10.382,18	10.255,20							
hoch	hoch	2	11.253,61	11.204,98	10.951,85	11.080,15	10.407,95	10.797,55	10.064,69	9.418,23	11.046,81	11.097,11	10.864,25	11.066,91							
hoch	hoch	3	9.805,24	9.764,82	9.676,56	9.499,83	9.627,34	8.732,94	7.771,50	8.431,19	9.604,21	9.578,42	9.719,19	9.664,10							
hoch	hoch	4	11.738,83	11.301,13	11.486,53	11.406,51	10.285,32	10.433,33	11.050,42	10.631,68	11.269,49	11.539,69	11.115,39	10.779,00							
hoch	hoch	5	13.388,07	13.226,49	13.067,03	12.455,12	11.433,80	12.119,05	12.588,37	12.483,28	12.884,33	12.795,75	12.543,55	12.846,39							
hoch	hoch	6	11.276,36	11.149,44	11.122,48	10.917,14	10.359,84	10.721,04	9.985,07	10.244,12	11.124,44	11.071,85	10.929,75	11.131,16							
			11.331,01	11.179,14	11.114,04	10.899,70	10.390,59	10.322,59	10.098,64	10.011,83	11.055,97	11.046,55	10.925,72	10.957,12							
			1,00	0,98660	0,98085	0,96194	0,91700	0,91100	0,89124	0,88358	0,97573	0,97490	0,96423	0,96700							
hoch	mittel	1	10.504,84	10.430,75	10.325,93	10.091,82	10.183,82	9.644,15	8.092,41	8.141,20	10.400,30	10.404,50	10.344,27	10.247,56							
hoch	mittel	2	8.833,67	8.744,04	8.678,05	8.715,37	8.524,94	8.184,86	7.303,31	7.841,63	8.763,99	8.758,50	8.729,02	8.626,53							
hoch	mittel	3	10.484,62	10.376,33	10.139,46	10.038,05	10.176,80	9.843,23	9.272,13	9.080,63	10.359,20	10.197,05	10.346,98	10.358,91							
hoch	mittel	4	9.005,07	8.922,26	8.750,44	8.892,51	8.665,84	8.557,23	7.591,23	7.180,63	8.933,13	8.940,23	8.872,42	8.896,62							
hoch	mittel	5	10.221,14	10.157,02	10.019,07	10.006,61	9.475,27	9.449,41	8.731,70	8.412,76	10.161,05	10.087,31	10.093,86	10.070,84							
hoch	mittel	6	10.700,05	10.619,14	10.565,41	10.402,98	9.897,29	10.024,48	9.848,82	9.406,26	10.638,51	10.554,33	10.365,80	10.563,17							
			9.958,23	9.874,92	9.746,39	9.691,22	9.487,33	9.283,89	8.473,27	8.343,85	9.876,03	9.823,65	9.792,06	9.793,94							
			1,00	0,99163	0,97873	0,97319	0,95271	0,93228	0,85088	0,83788	0,99175	0,98649	0,98331	0,98350							
hoch	niedrig	1	9.066,23	9.002,66	8.935,22	8.920,75	8.690,41	8.469,06	7.534,20	7.615,77	9.030,37	9.008,63	8.865,97	8.955,56							
hoch	niedrig	2	8.664,64	8.583,20	8.571,87	8.551,49	8.228,72	7.949,43	7.881,56	7.367,96	8.640,64	8.608,23	8.495,12	8.602,90							
hoch	niedrig	3	9.179,90	9.105,01	9.041,76	8.914,88	8.952,33	8.569,33	7.920,15	8.011,95	9.146,50	9.013,32	9.117,78	9.123,37							
hoch	niedrig	4	9.484,46	9.415,44	9.385,03	9.340,97	9.156,06	8.905,82	8.242,14	8.122,60	9.438,59	9.426,72	9.428,47	9.342,40							
hoch	niedrig	5	8.780,83	8.690,14	8.611,20	8.625,12	8.430,02	8.189,85	7.572,23	7.601,84	8.750,83	8.697,92	8.631,49	8.672,82							
hoch	niedrig	6	8.689,46	8.637,08	8.582,79	8.474,86	8.432,30	8.185,15	7.725,91	7.399,90	8.649,40	8.574,86	8.582,62	8.538,83							
			8.977,59	8.905,59	8.854,65	8.804,68	8.648,31	8.378,11	7.812,70	7.686,67	8.942,72	8.888,28	8.853,58	8.872,65							
			1,00	0,99198	0,98631	0,98074	0,96332	0,93322	0,87024	0,85621	0,99612	0,99005	0,98619	0,98831							
mittel	hoch	1	6.673,86	6.633,85	6.613,74	6.567,94	6.532,00	6.339,86	6.031,37	6.171,77	6.536,55	6.590,14	6.588,82	6.547,35							
mittel	hoch	2	7.326,97	7.286,97	7.271,98	7.228,01	6.990,03	7.093,33	6.433,65	6.443,01	7.245,27	7.262,91	7.138,86	7.234,19							
mittel	hoch	3	6.877,59	6.847,34	6.763,28	6.813,50	6.315,92	6.500,65	5.727,76	6.050,93	6.745,58	6.845,45	6.790,66	6.692,91							
mittel	hoch	4	6.353,03	6.313,76	6.285,40	6.282,61	6.202,05	5.988,93	5.616,73	5.384,62	6.279,11	6.304,26	6.262,81	6.214,13							
mittel	hoch	5	6.299,64	6.283,88	6.214,67	6.172,37	6.143,09	6.003,62	5.106,73	5.470,68	6.219,07	6.213,13	6.246,01	6.225,82							
mittel	hoch	6	7.015,62	6.993,56	6.963,24	6.902,21	6.808,21	6.783,31	6.132,73	6.011,48	6.940,87	6.965,11	6.932,39	6.893,80							
			6.757,69	6.726,56	6.685,39	6.661,11	6.498,55	6.451,62	5.841,50	5.922,08	6.661,08	6.696,83	6.659,93	6.634,70							
			1,00	0,99539	0,98930	0,98571	0,96165	0,95471	0,86442	0,87635	0,98570	0,99099	0,98553	0,98180							
mittel	mittel	1	6.589,78	6.566,82	6.505,68	6.515,39	6.453,64	6.260,89	5.480,39	5.312,92	6.546,23	6.546,09	6.508,91	6.475,56							
mittel	mittel	2	6.306,30	6.288,57	6.244,05	6.198,94	6.102,20	5.834,98	5.224,61	5.466,67	6.263,49	6.235,26	6.238,54	6.225,72							
mittel	mittel	3	7.029,81	6.990,51	6.974,36	6.887,01	6.878,04	6.808,96	6.142,17	5.817,40	6.977,78	6.933,05	6.943,00	6.942,02							
mittel	mittel	4	7.293,63	7.271,40	7.249,32	7.232,70	7.085,95	6.827,86	6.254,20	6.199,88	7.233,98	7.252,26	7.253,15	7.199,83							
mittel	mittel	5	6.221,66	6.192,48	6.171,12	6.152,72	6.063,24	6.061,30	5.355,83	5.512,57	6.190,97	6.177,33	6.153,92	6.153,64							
mittel	mittel	6	6.850,37	6.833,43	6.792,90	6.686,63	6.677,62	6.619,37	6.248,85	6.236,61	6.793,40	6.770,02	6.769,24	6.728,78							
			6.715,26	6.690,54	6.656,24	6.612,23	6.543,45	6.402,23	5.784,34	5.757,67	6.667,64	6.652,33	6.644,46	6.620,92							
			1,00	0,99632	0,99121	0,98466	0,97442	0,95339	0,86137	0,85740	0,99291	0,99063	0,98946	0,98595							
mittel	niedrig	1	5.778,20	5.727,84	5.705,79	5.719,78	5.674,42	5.584,13	4.775,99	4.701,34	5.768,02	5.748,06	5.746,06	5.723,22							
mittel	niedrig	2	6.842,97	6.804,17	6.757,16	6.763,54	6.520,59	6.667,52	5.807,63	5.765,78	6.828,67	6.803,58	6.732,41	6.745,83							
mittel	niedrig	3	6.069,19	6.032,99	6.008,53	5.975,91	5.931,13	5.822,28	5.259,50	5.322,70	6.056,43	6.020,32	5.994,04	6.027,97							
mittel	niedrig	4	5.795,93	5.775,11	5.741,38	5.693,30	5.636,84	5.477,46	5.029,45	5.177,24	5.788,94	5.744,66	5.744,86	5.738,70							
mittel	niedrig	5	5.917,79	5.874,70	5.877,56	5.769,16	5.673,92	5.602,96	4.916,43	4.970,60	5.904,36	5.829,58	5.828,61	5.821,96							
mittel	niedrig	6	5.878,42	5.848,56	5.823,60	5.811,01	5.726,51	5.462,69	4.811,46	4.972,76	5.869,02	5.839,32	5.807,35	5.829,85							
			6.047,08	6.010,56	5.985,67	5.955,45	5.860,57	5.769,51	5.100,08	5.151,74	6.035,91	5.997,59	5.975,54	5.981,25							
			1,00	0,99396	0,98984	0,98485	0,96916	0,95410	0,84339	0,85194	0,99815	0,99181	0,98817	0,98911							
niedrig	hoch	1	4.051,96	4.045,08	4.035,69	4.020,38	3.993,38	3.963,19	3.533,34	3.626,90	4.030,94	4.030,19	4.020,26	4.007,02							
niedrig	hoch	2	4.298,82	4.289,04	4.281,12	4.277,30	4.215,83	4.178,03	3.751,68	3.715,87	4.274,49	4.284,08	4.266,02	4.274,72							
niedrig	hoch	3	4.415,45	4.407,17	4.402,46	4.392,72	4.362,00	4.197,84	3.925,81	3.832,81	4.396,27	4.398,55	4.386,64	4.341,00							
niedrig	hoch	4	4.																		

A.2.2 Ergebnisse $N_2=1, F_1 = 20$

			N ₂ = 1		F ₁ F ₄ F ₅														
F ₂	F ₃	N ₁	REFERENZ	20 24 OLS	20 12 OLS	20 8 OLS	20 4 OLS	20 3 OLS	2 genau	20 2 subj	α-Allokation	20 8 Bayes	20 4 Bayes	20 3 Bayes					
hoch	hoch	1	11.454,63	11.259,66	11.302,02	10.920,03	10.879,54	10.982,25	9.405,67	10.263,55	11.298,90	11.172,34	11.200,01	11.113,29					
hoch	hoch	2	12.484,34	12.453,45	12.158,85	12.189,21	12.163,12	10.830,83	9.078,80	11.598,45	12.218,51	12.183,41	12.191,44	11.758,19					
hoch	hoch	3	12.188,97	12.054,30	12.114,25	11.903,30	11.760,10	11.128,85	11.253,20	10.975,68	12.004,08	12.017,67	12.025,63	11.830,91					
hoch	hoch	4	15.530,88	15.358,34	15.390,47	15.112,94	15.247,28	14.281,66	14.930,62	14.915,46	15.201,24	15.144,26	15.266,96	14.776,86					
hoch	hoch	5	12.733,34	12.661,35	12.565,32	12.139,16	12.641,70	12.140,14	11.514,25	12.196,52	12.466,45	12.227,92	12.617,81	12.556,86					
hoch	hoch	6	9.764,52	9.671,69	9.585,33	9.668,15	9.405,99	9.328,36	8.166,48	9.047,35	9.487,83	9.711,81	9.552,14	9.609,04					
			12.359,44	12.243,13	12.186,04	11.988,80	12.016,29	11.448,68	10.724,84	11.499,50	12.112,83	12.076,23	12.142,33	11.940,86					
			1,00	0,99059	0,98597	0,97001	0,97224	0,92631	0,86774	0,93042	0,98005	0,97709	0,98243	0,96613					
hoch	mittel	1	9.470,04	9.367,02	9.366,81	9.123,34	9.129,71	8.956,15	8.277,09	8.330,88	9.401,23	9.189,01	9.257,58	9.343,29					
hoch	mittel	2	9.975,84	9.889,66	9.831,04	9.839,91	9.773,01	9.544,31	8.163,32	8.940,38	9.951,32	9.889,80	9.898,86	9.848,39					
hoch	mittel	3	10.566,80	10.507,85	10.352,21	10.339,57	9.906,47	10.112,51	8.676,00	10.037,27	10.505,11	10.421,74	10.370,82	10.246,96					
hoch	mittel	4	7.738,67	7.665,17	7.653,61	7.645,36	7.431,72	7.260,32	6.686,29	6.734,84	7.665,12	7.674,67	7.630,20	7.661,06					
hoch	mittel	5	10.302,54	10.168,01	10.197,56	10.134,94	9.651,95	9.867,34	8.209,00	8.283,99	10.249,74	10.148,03	10.175,23	10.261,99					
hoch	mittel	6	9.882,82	9.847,80	9.775,92	9.559,34	9.087,19	8.864,41	7.910,81	9.566,77	9.753,43	9.647,58	9.651,91	9.740,51					
			9.656,12	9.574,25	9.529,53	9.440,41	9.163,34	9.100,84	7.987,08	8.649,02	9.587,66	9.495,14	9.497,43	9.517,03					
			1,00	0,99152	0,98689	0,97766	0,94897	0,94249	0,82715	0,89570	0,99291	0,98333	0,98357	0,98560					
hoch	niedrig	1	8.953,96	8.880,73	8.782,61	8.880,75	8.582,00	8.497,74	7.462,34	7.214,60	8.923,23	8.910,55	8.707,55	8.912,53					
hoch	niedrig	2	9.771,39	9.724,68	9.579,31	9.590,88	9.358,38	9.229,36	8.434,86	8.935,37	9.745,06	9.631,90	9.616,72	9.614,80					
hoch	niedrig	3	9.548,16	9.479,35	9.400,29	9.400,44	9.030,00	8.889,86	8.813,91	8.293,00	9.512,68	9.476,78	9.459,60	9.390,32					
hoch	niedrig	4	9.831,19	9.764,53	9.701,65	9.616,66	9.352,28	8.954,84	9.154,70	8.961,60	9.785,09	9.724,00	9.694,04	9.601,39					
hoch	niedrig	5	8.889,79	8.838,10	8.712,56	8.726,56	8.622,91	8.094,45	6.974,71	6.956,30	8.854,40	8.792,45	8.814,59	8.806,64					
hoch	niedrig	6	9.099,51	8.998,02	8.938,12	8.899,58	8.573,78	8.677,86	7.592,90	7.941,87	9.076,23	8.995,71	8.923,65	9.030,07					
			9.349,00	9.280,90	9.185,76	9.185,81	8.919,89	8.724,02	8.072,24	8.050,46	9.316,12	9.255,23	9.202,69	9.225,96					
			1,00	0,99272	0,98254	0,98254	0,95410	0,93315	0,86343	0,86110	0,99648	0,98997	0,98435	0,98684					
mittel	hoch	1	6.960,91	6.946,69	6.877,14	6.900,94	6.772,54	6.574,86	5.931,96	6.004,90	6.909,04	6.920,44	6.877,15	6.870,21					
mittel	hoch	2	8.047,42	8.003,80	7.935,33	7.904,52	7.706,27	7.595,13	6.917,31	6.591,22	7.983,49	7.947,96	7.969,96	8.024,55					
mittel	hoch	3	7.134,54	7.110,40	7.058,26	7.066,05	7.050,57	6.760,74	6.379,24	6.318,03	7.073,02	7.094,81	7.096,63	7.042,89					
mittel	hoch	4	8.964,85	8.931,62	8.904,85	8.797,94	8.746,04	8.131,73	6.687,71	8.272,20	8.729,27	8.816,37	8.908,15	8.763,28					
mittel	hoch	5	6.338,86	6.299,70	6.285,07	6.286,93	6.029,67	6.163,04	5.629,65	5.318,16	6.308,92	6.296,11	6.126,28	6.240,16					
mittel	hoch	6	8.090,59	8.066,12	7.983,62	7.973,18	7.824,02	7.803,95	6.871,90	7.392,41	8.045,68	8.004,07	7.975,07	8.030,88					
			7.589,53	7.559,72	7.507,38	7.488,26	7.354,85	7.171,58	6.402,96	6.649,49	7.508,24	7.513,29	7.492,21	7.495,33					
			1,00	0,99607	0,98918	0,98666	0,96908	0,94493	0,84366	0,87614	0,98929	0,98996	0,98718	0,98759					
mittel	mittel	1	6.474,56	6.444,46	6.422,65	6.411,74	6.319,63	6.251,25	5.436,64	5.477,97	6.444,55	6.428,54	6.385,32	6.420,59					
mittel	mittel	2	6.659,01	6.648,28	6.624,06	6.554,14	6.433,94	6.408,13	5.506,66	6.232,88	6.631,60	6.595,19	6.566,18	6.615,29					
mittel	mittel	3	5.670,65	5.639,37	5.627,47	5.599,45	5.570,01	5.529,53	5.075,37	4.942,84	5.637,95	5.615,36	5.625,39	5.620,01					
mittel	mittel	4	7.023,10	7.013,84	6.986,52	6.971,95	6.890,88	6.660,93	5.681,76	6.039,08	6.997,34	6.984,91	6.945,57	6.944,15					
mittel	mittel	5	6.313,76	6.285,39	6.290,70	6.241,65	6.160,60	6.104,42	5.244,84	5.500,11	6.272,24	6.261,62	6.228,66	6.290,36					
mittel	mittel	6	6.306,75	6.298,72	6.238,34	6.148,35	6.195,46	5.989,72	5.466,02	5.578,40	6.283,99	6.199,70	6.234,70	6.173,25					
			6.407,97	6.388,34	6.364,96	6.321,22	6.261,75	6.157,33	5.401,88	5.628,55	6.377,94	6.347,55	6.330,97	6.343,94					
			1,00	0,99694	0,99329	0,98646	0,97718	0,96089	0,84299	0,87837	0,99531	0,99057	0,98798	0,99001					
mittel	niedrig	1	5.956,61	5.927,48	5.876,85	5.857,42	5.754,65	5.728,88	5.412,15	5.493,21	5.946,04	5.890,64	5.845,56	5.921,24					
mittel	niedrig	2	6.494,83	6.458,57	6.449,37	6.362,92	6.126,60	6.308,24	5.234,34	5.938,42	6.471,60	6.390,02	6.435,30	6.405,06					
mittel	niedrig	3	6.636,30	6.609,48	6.575,81	6.484,29	6.439,68	6.410,56	5.301,86	5.795,37	6.625,64	6.540,28	6.523,15	6.576,33					
mittel	niedrig	4	6.360,83	6.344,81	6.307,77	6.241,70	6.228,58	6.034,03	5.619,80	5.612,67	6.351,36	6.288,47	6.292,82	6.265,97					
mittel	niedrig	5	6.307,56	6.278,52	6.260,95	6.182,72	6.158,26	6.195,37	5.236,44	5.277,20	6.299,53	6.211,54	6.260,45	6.240,87					
mittel	niedrig	6	6.335,80	6.322,29	6.245,50	6.217,88	6.126,08	5.999,05	5.469,46	5.334,12	6.311,70	6.288,79	6.188,09	6.262,66					
			6.348,65	6.323,52	6.286,04	6.224,49	6.138,98	6.112,69	5.379,01	5.575,16	6.334,31	6.268,29	6.257,56	6.278,69					
			1,00	0,99604	0,99014	0,98044	0,96697	0,96283	0,84727	0,87816	0,99774	0,98734	0,98565	0,98898					
niedrig	hoch	1	4.201,17	4.188,99	4.182,72	4.185,93	3.956,83	4.086,63	3.656,58	4.069,98	4.167,59	4.187,94	4.149,05	4.171,81					
niedrig	hoch	2	4.255,45	4.244,66	4.219,03	4.214,10	4.176,34	4.062,90	3.570,80	4.014,80	4.223,48	4.220,63	4.231,13	4.184,13					
niedrig	hoch	3	4.407,05	4.395,80	4.366,46	4.377,57	4.336,24	4.099,52	4.013,19	4.014,25	4.375,34	4.387,98	4.371,14	4.359,08					
niedrig	hoch	4	4.431,93	4.420,41	4.411,75	4.409,83	4.273,43	4.312,73	4.083,38	3.825,85	4.409,85	4.416,46	4.398,16	4.391,89					
niedrig	hoch	5	4.636,87	4.625,22	4.615,60	4.613,93	4.593,43	4.319,15	3.804,08	4.421,29	4.588,22	4.618,20	4.605,28	4.584,01					
niedrig	hoch	6	4.281,69	4.271,00	4.261,71	4.256,44	4.155,38	3.794,61	3.590,35	3.895,77	4.259,53	4.259,75	4.192,08	4.114,84					
			4.369,03	4.357,68	4.342,88	4.342,97	4.248,61	4.112,59	3.786,40	4.040,32	4.337,34	4.348,49	4.324,47	4.300,96					
			1,00	0,99740	0,99401	0,99403	0,97244	0,94131	0,86664	0,92477	0,99275	0,99530	0,98980	0,98442					
niedrig	mittel	1	4.712,24	4.701,53	4.692,69	4.678,56	4.624,10	4.640,32	3.974,90	4.049,60	4.697,51	4.684,04	4.695,34	4.675,81					
niedrig	mittel	2	4.552,43	4.541,25	4.536,40	4.524,60	4.460,11	4.448,00	4.017,58	4.426,97	4.524,89	4.531,05	4.525,60	4.496,55					
niedrig	mittel	3																	

A.2.3 Ergebnisse $N_2=1$, $F_1=8$

			N ₂ = 1	F ₁ F ₄ F ₅												
F ₂	F ₃	N ₁	REFERENZ	8 24 OLS	8 12 OLS	8 8 OLS	8 4 OLS	8 3 OLS	8 2 OLS	8 2 subj	α-Allokation	8 8 Bayes	8 4 Bayes	8 3 Bayes		
hoch	hoch	1	7.029,40	7.000,63	7.007,99	6.897,16	6.745,74	6.328,38	5.356,94	6.489,53	6.924,25	6.961,53	6.847,91	6.816,56		
hoch	hoch	2	11.042,49	10.768,90	10.963,23	10.227,37	8.716,97	10.564,07	10.999,70	7.318,87	10.473,22	10.274,60	10.313,70	10.471,08		
hoch	hoch	3	14.672,94	14.639,01	14.660,57	14.579,71	14.325,70	13.883,25	13.516,09	14.217,00	14.629,07	14.569,50	14.514,40	14.235,33		
hoch	hoch	4	10.767,36	10.709,48	10.623,87	10.646,19	10.670,54	10.360,09	10.330,11	9.773,76	10.508,53	10.669,57	10.722,81	10.433,65		
hoch	hoch	5	11.029,70	10.923,29	10.681,43	10.936,29	10.808,47	10.411,44	8.540,03	10.725,76	10.919,28	10.949,43	10.777,88	10.786,97		
hoch	hoch	6	15.066,34	15.038,08	15.010,70	14.630,42	14.675,91	13.660,98	13.938,96	11.451,26	14.843,71	14.911,63	14.688,96	14.653,96		
			11.601,37	11.513,23	11.491,30	11.319,52	10.990,56	10.868,03	10.446,97	9.996,03	11.383,01	11.389,38	11.310,94	11.232,92		
			1,00	0,99240	0,99051	0,97571	0,94735	0,93679	0,90049	0,80878	0,98118	0,98173	0,97497	0,96824		
hoch	mittel	1	7.191,18	7.128,21	7.146,07	7.129,60	6.938,33	6.901,40	5.097,58	6.143,28	7.146,12	7.168,17	7.086,64	7.129,01		
hoch	mittel	2	9.863,68	9.818,28	9.662,69	9.801,39	9.809,63	9.296,97	8.011,82	7.252,11	9.823,33	9.828,01	9.729,77	9.389,45		
hoch	mittel	3	10.075,42	10.007,36	9.935,51	9.996,74	9.932,13	9.360,13	7.785,14	9.486,64	9.886,31	9.988,45	9.947,67	9.775,61		
hoch	mittel	4	11.521,94	11.339,27	11.363,87	11.378,14	10.999,53	10.891,94	10.796,58	9.397,28	11.431,45	11.450,26	11.212,90	11.463,84		
hoch	mittel	5	10.601,85	10.589,61	10.452,93	10.567,23	10.308,03	10.024,51	9.669,14	7.435,81	10.550,44	10.562,42	10.450,20	10.530,00		
hoch	mittel	6	11.531,50	11.334,29	11.311,20	11.447,39	11.271,24	11.032,17	9.494,35	10.916,75	11.489,80	11.452,70	11.351,51	11.294,23		
			10.130,93	10.036,17	9.978,71	10.053,41	9.876,48	9.584,52	8.475,77	8.438,64	10.054,58	10.075,00	9.963,11	9.930,36		
			1,00	0,99065	0,98497	0,99235	0,97488	0,94607	0,83662	0,83296	0,99246	0,99448	0,98344	0,98020		
hoch	niedrig	1	9.869,71	9.844,22	9.813,63	9.616,58	9.615,74	9.471,47	8.882,01	9.279,33	9.843,99	9.659,97	9.727,47	9.839,85		
hoch	niedrig	2	7.849,88	7.804,41	7.789,74	7.593,88	7.404,91	7.525,11	6.094,55	5.713,34	7.831,92	7.688,56	7.481,61	7.794,28		
hoch	niedrig	3	7.470,10	7.398,10	7.319,76	7.358,02	7.379,30	7.149,19	6.628,31	5.890,84	7.442,83	7.368,29	7.367,56	7.419,42		
hoch	niedrig	4	10.239,09	10.163,12	9.992,98	9.937,33	10.168,50	10.123,34	9.511,30	9.359,00	10.212,56	10.009,87	10.174,84	9.938,21		
hoch	niedrig	5	9.476,07	9.420,77	9.293,15	9.301,05	9.179,89	9.374,89	8.823,47	7.994,39	9.463,92	9.344,23	9.421,24	9.426,79		
hoch	niedrig	6	11.312,01	11.271,66	11.267,18	11.207,39	11.134,82	10.613,81	9.873,00	9.196,37	11.281,28	11.217,64	11.240,12	11.158,32		
			9.369,48	9.317,04	9.246,07	9.169,04	9.147,19	9.042,97	8.302,11	7.905,54	9.346,08	9.214,76	9.235,47	9.262,81		
			1,00	0,99440	0,98683	0,97861	0,97628	0,96515	0,88608	0,84376	0,99750	0,98349	0,98570	0,98862		
mittel	hoch	1	6.928,44	6.873,68	6.917,53	6.915,08	6.821,21	6.538,04	5.634,37	5.230,74	6.881,68	6.914,96	6.861,85	6.862,05		
mittel	hoch	2	7.024,89	7.006,10	6.974,16	6.957,81	6.999,76	6.785,93	5.350,68	5.819,69	6.995,58	6.965,18	6.995,93	6.969,85		
mittel	hoch	3	5.759,14	5.729,35	5.667,84	5.723,03	5.709,15	5.424,76	4.896,08	4.866,52	5.712,44	5.726,28	5.719,72	5.674,07		
mittel	hoch	4	6.781,25	6.769,84	6.764,18	6.732,70	6.577,80	6.298,62	5.589,09	6.154,20	6.702,55	6.749,17	6.690,96	6.665,72		
mittel	hoch	5	6.895,85	6.867,97	6.879,72	6.672,04	6.625,71	6.202,54	5.043,37	6.128,42	6.845,91	6.737,21	6.714,96	6.859,87		
mittel	hoch	6	6.743,03	6.722,98	6.719,84	6.709,13	6.607,89	6.334,31	5.977,87	5.328,74	6.564,87	6.704,22	6.700,63	6.725,80		
			6.688,77	6.661,65	6.653,88	6.618,30	6.556,92	6.264,03	5.415,25	5.588,05	6.617,17	6.632,83	6.614,01	6.626,23		
			1,00	0,99595	0,99478	0,98946	0,98029	0,93650	0,80960	0,83544	0,98930	0,99164	0,98882	0,99065		
mittel	mittel	1	6.846,36	6.838,78	6.797,19	6.813,69	6.766,64	6.716,12	5.542,48	5.755,47	6.834,49	6.819,08	6.779,81	6.767,91		
mittel	mittel	2	6.507,90	6.461,65	6.349,90	6.285,75	6.458,47	6.282,99	5.963,08	5.560,33	6.496,19	6.344,90	6.467,04	6.465,61		
mittel	mittel	3	6.306,10	6.296,51	6.288,26	6.011,25	6.142,22	5.911,20	5.710,99	5.094,80	6.284,53	6.059,60	6.221,51	6.254,58		
mittel	mittel	4	6.353,38	6.318,25	6.336,29	6.324,35	6.226,30	6.154,32	6.038,04	4.837,56	6.268,71	6.321,17	6.329,43	6.296,31		
mittel	mittel	5	5.720,87	5.688,39	5.691,14	5.635,17	5.644,01	5.668,68	4.568,69	5.081,83	5.714,11	5.649,34	5.653,31	5.697,01		
mittel	mittel	6	6.077,72	6.055,41	6.057,00	6.015,27	6.016,19	5.955,77	5.421,30	5.380,92	6.050,59	6.038,35	6.037,56	6.018,36		
			6.302,05	6.276,50	6.253,30	6.180,91	6.208,97	6.114,85	5.540,76	5.285,15	6.274,77	6.205,41	6.248,11	6.249,96		
			1,00	0,99595	0,99226	0,98078	0,98523	0,97029	0,87920	0,83864	0,99567	0,98466	0,99144	0,99173		
mittel	niedrig	1	5.629,63	5.605,07	5.580,35	5.499,98	5.416,76	5.508,43	5.047,48	4.363,89	5.617,75	5.524,29	5.578,54	5.553,32		
mittel	niedrig	2	5.951,71	5.936,97	5.930,50	5.885,43	5.829,40	5.564,72	5.403,86	4.679,77	5.938,07	5.897,51	5.882,87	5.855,46		
mittel	niedrig	3	4.862,49	4.839,69	4.767,22	4.815,41	4.668,48	4.707,34	3.952,88	3.757,59	4.854,05	4.823,36	4.688,27	4.827,41		
mittel	niedrig	4	6.654,98	6.635,01	6.524,26	6.471,35	6.341,21	5.669,75	6.287,67	5.359,74	6.639,22	6.517,87	6.541,32	6.571,85		
mittel	niedrig	5	6.142,94	6.123,62	6.116,47	6.128,22	6.066,33	5.756,99	5.226,63	4.897,94	6.128,82	6.131,48	6.091,39	6.043,42		
mittel	niedrig	6	6.727,19	6.710,53	6.716,61	6.644,65	6.665,68	6.497,77	5.661,75	5.969,90	6.726,59	6.649,18	6.719,70	6.657,96		
			5.994,82	5.975,15	5.939,24	5.907,51	5.831,31	5.617,50	5.263,38	4.838,14	5.984,08	5.923,95	5.917,01	5.918,24		
			1,00	0,99672	0,99073	0,98543	0,97272	0,93706	0,87799	0,80705	0,99821	0,98818	0,98702	0,98722		
niedrig	hoch	1	4.878,57	4.868,64	4.848,32	4.846,76	4.725,53	4.832,50	4.519,31	4.561,09	4.840,27	4.846,46	4.768,52	4.870,73		
niedrig	hoch	2	3.581,93	3.576,24	3.571,53	3.558,52	3.561,90	3.518,71	3.342,96	3.311,06	3.563,40	3.562,05	3.566,85	3.527,01		
niedrig	hoch	3	5.039,09	5.034,22	5.028,47	5.023,15	5.023,19	5.011,42	4.749,52	4.338,62	5.005,75	5.025,80	5.024,93	5.016,97		
niedrig	hoch	4	4.700,99	4.697,83	4.668,97	4.621,68	4.646,41	4.403,47	4.403,36	3.911,97	4.685,53	4.647,29	4.678,95	4.642,84		
niedrig	hoch	5	4.239,48	4.235,61	4.226,46	4.200,81	4.169,00	4.198,81	4.007,74	3.956,10	4.215,86	4.204,31	4.217,57	4.212,66		
niedrig	hoch	6	4.935,45	4.919,31	4.929,37	4.896,95	4.797,16	4.653,73	4.539,95	4.419,83	4.929,87	4.907,23	4.889,25	4.846,01		
			4.562,58	4.555,31	4.545,52	4.524,64	4.487,20	4.436,44	4.260,48	4.083,11	4.540,11	4.532,19	4.524,34	4.519,37		
			1,00	0,99840	0,99626	0,99168	0,98348	0,97235	0,93379	0,89491	0,99507	0,99334	0,99162	0,99053		
niedrig	mittel	1	4.730,56	4.722,95	4.698,28	4.694,26	4.687,29	4.424,26	4.337,79	4.213,66	4.718,02	4.697,23	4.693,51	4.612,20		
niedrig	mittel	2	4.115,15	4.105,46	4.093,37	4.097,69	4.058,17	4.051,89	3.975,58	4.004,52	4.063,18	4.101,68	4.067,00	4.085,89		
niedrig	mittel	3	4.700,40	4.696,41	4.684,62	4.67										

A.2.4 Ergebnisse $N_2=2, F_1 = 40$

F_2	F_3	N_1	$N_2 = 2$	$F_1 F_4 F_5$															
			REFERENZ	40 24 OLS	40 12 OLS	40 8 OLS	40 4 OLS	40 3 OLS	2 genau	40 Subj.	α -Allokation	40 8 Bayes	40 4 Bayes	40 3 Bayes					
hoch hoch 1	hoch hoch 1	hoch hoch 1	10.523,96	10.464,20	10.373,95	10.192,08	9.265,66	8.947,33	7.940,01	9.167,44	10.388,05	10.251,29	10.126,56	9.979,39					
hoch hoch 2	hoch hoch 2	hoch hoch 2	11.253,61	11.128,54	11.043,46	11.005,00	10.244,62	10.688,96	9.357,65	8.793,29	10.765,65	11.065,77	10.852,74	10.786,85					
hoch hoch 3	hoch hoch 3	hoch hoch 3	9.805,24	9.684,48	9.616,78	9.613,23	9.371,23	8.927,15	7.615,97	8.301,80	9.606,92	9.707,25	9.478,66	9.606,48					
hoch hoch 4	hoch hoch 4	hoch hoch 4	11.738,83	11.650,46	10.913,28	11.625,56	11.205,63	8.758,01	11.016,34	8.541,12	11.300,64	11.573,37	11.491,18	10.577,31					
hoch hoch 5	hoch hoch 5	hoch hoch 5	13.388,07	13.127,40	13.095,84	12.424,02	12.869,16	11.727,82	11.973,51	11.404,02	12.605,52	12.820,02	13.005,97	12.764,41					
hoch hoch 6	hoch hoch 6	hoch hoch 6	11.276,36	11.231,00	11.126,10	11.056,84	10.473,92	10.323,26	8.925,23	9.658,65	11.066,37	11.131,12	11.051,72	10.868,99					
			11.331,01	11.214,35	11.028,23	10.986,12	10.571,71	9.895,42	9.471,45	9.311,05	10.955,53	11.091,47	11.001,14	10.763,90					
			1,00	0,98970	0,97328	0,96956	0,93299	0,87330	0,83589	0,82173	0,96686	0,97886	0,97089	0,94995					
hoch mittel 1	hoch mittel 1	hoch mittel 1	10.504,84	10.312,18	10.385,38	10.195,62	9.559,46	9.878,07	8.461,97	8.896,22	10.354,56	10.403,29	10.220,43	10.355,27					
hoch mittel 2	hoch mittel 2	hoch mittel 2	8.833,67	8.723,65	8.643,68	8.599,09	8.239,17	8.253,42	7.797,47	6.607,92	8.732,07	8.745,24	8.700,24	8.667,88					
hoch mittel 3	hoch mittel 3	hoch mittel 3	10.484,62	10.401,23	10.160,96	10.286,61	10.134,34	9.830,60	8.782,42	8.622,05	10.329,74	10.355,94	10.331,31	10.310,25					
hoch mittel 4	hoch mittel 4	hoch mittel 4	9.005,07	8.831,93	8.822,79	8.794,76	8.722,63	8.351,22	7.644,49	7.003,04	8.882,11	8.882,70	8.929,96	8.888,72					
hoch mittel 5	hoch mittel 5	hoch mittel 5	10.221,14	10.152,42	10.066,40	9.930,57	9.532,71	9.492,94	7.936,67	8.321,32	10.075,38	10.092,81	9.944,18	10.123,04					
hoch mittel 6	hoch mittel 6	hoch mittel 6	10.700,05	10.614,80	10.562,38	10.492,03	10.097,30	9.772,89	9.054,26	9.093,49	10.615,42	10.560,80	10.582,03	10.571,17					
			9.958,23	9.839,37	9.773,60	9.716,45	9.380,93	9.263,19	8.279,55	8.090,67	9.831,55	9.840,13	9.784,69	9.819,39					
			1,00	0,98806	0,98146	0,97572	0,94203	0,93020	0,83143	0,81246	0,98728	0,98814	0,98257	0,98606					
hoch niedrig 1	hoch niedrig 1	hoch niedrig 1	9.066,23	8.957,18	8.898,26	8.836,75	8.686,43	8.442,32	8.257,11	7.373,71	9.033,44	8.939,52	8.990,93	8.937,11					
hoch niedrig 2	hoch niedrig 2	hoch niedrig 2	8.664,64	8.546,91	8.446,39	8.430,87	8.362,99	7.913,09	7.644,17	6.137,04	8.615,31	8.535,66	8.540,77	8.584,67					
hoch niedrig 3	hoch niedrig 3	hoch niedrig 3	9.179,90	9.094,54	9.067,28	8.959,00	8.702,79	8.569,78	7.377,24	7.864,70	9.123,22	9.031,71	9.098,48	9.106,99					
hoch niedrig 4	hoch niedrig 4	hoch niedrig 4	9.484,46	9.426,21	9.361,27	9.218,76	9.157,57	8.653,98	7.640,39	8.258,57	9.414,59	9.352,49	9.412,98	9.363,76					
hoch niedrig 5	hoch niedrig 5	hoch niedrig 5	8.780,83	8.684,53	8.578,02	8.592,94	8.434,81	8.063,93	7.700,71	7.167,54	8.733,71	8.693,56	8.663,39	8.732,41					
hoch niedrig 6	hoch niedrig 6	hoch niedrig 6	8.689,46	8.630,16	8.487,08	8.523,96	8.157,63	7.987,73	7.279,36	7.372,64	8.629,27	8.592,68	8.602,71	8.556,95					
			8.977,59	8.889,92	8.806,38	8.760,38	8.583,70	8.271,81	7.649,83	7.362,37	8.924,92	8.857,60	8.884,88	8.880,31					
			1,00	0,99024	0,98093	0,97581	0,95613	0,92138	0,85210	0,82008	0,99413	0,98664	0,98967	0,98916					
mittel hoch 1	mittel hoch 1	mittel hoch 1	6.673,86	6.623,66	6.635,53	6.567,61	6.533,87	5.975,79	5.555,19	5.610,32	6.513,62	6.604,29	6.601,26	6.422,97					
mittel hoch 2	mittel hoch 2	mittel hoch 2	7.326,39	7.242,50	7.223,68	6.933,02	6.913,43	6.909,71	6.450,29	6.072,94	7.242,95	7.188,28	7.217,67	7.189,28					
mittel hoch 3	mittel hoch 3	mittel hoch 3	6.877,59	6.775,99	6.717,06	6.736,61	6.613,91	6.150,93	5.427,41	6.131,22	6.786,40	6.785,52	6.750,83	6.665,37					
mittel hoch 4	mittel hoch 4	mittel hoch 4	6.353,03	6.312,26	6.269,10	6.260,07	6.060,09	5.795,33	5.181,57	5.529,50	6.297,26	6.294,15	6.178,06	6.243,69					
mittel hoch 5	mittel hoch 5	mittel hoch 5	6.299,64	6.265,43	6.240,45	6.101,95	6.053,77	5.885,37	5.285,38	5.074,11	6.230,70	6.205,25	6.153,62	6.178,88					
mittel hoch 6	mittel hoch 6	mittel hoch 6	7.015,62	6.974,82	6.924,78	6.888,00	6.760,42	6.658,87	6.037,30	6.072,12	6.914,48	6.942,00	6.871,44	6.893,88					
			6.757,69	6.699,11	6.668,43	6.581,21	6.489,25	6.229,33	5.656,19	5.748,37	6.664,23	6.669,91	6.628,81	6.599,01					
			1,00	0,99133	0,98679	0,97389	0,96028	0,92181	0,83700	0,85064	0,98617	0,98701	0,98093	0,97652					
mittel mittel 1	mittel mittel 1	mittel mittel 1	6.589,78	6.484,17	6.513,31	6.462,49	6.380,65	6.267,04	5.066,41	5.393,38	6.560,59	6.525,71	6.482,73	6.531,28					
mittel mittel 2	mittel mittel 2	mittel mittel 2	6.306,30	6.258,66	6.264,87	6.232,50	6.011,24	6.042,27	5.342,89	5.070,88	6.247,60	6.264,92	6.234,48	6.193,29					
mittel mittel 3	mittel mittel 3	mittel mittel 3	7.029,81	6.974,42	6.959,40	6.810,97	6.735,54	6.642,41	6.005,41	6.139,24	6.953,39	6.919,79	6.946,61	6.932,54					
mittel mittel 4	mittel mittel 4	mittel mittel 4	7.293,63	7.266,33	7.159,83	7.194,22	6.864,27	6.560,49	6.093,54	6.262,38	7.219,94	7.244,69	7.185,47	7.209,18					
mittel mittel 5	mittel mittel 5	mittel mittel 5	6.221,66	6.193,54	6.163,93	6.083,55	5.941,98	5.875,86	5.100,15	4.979,17	6.193,49	6.158,73	6.112,17	6.141,20					
mittel mittel 6	mittel mittel 6	mittel mittel 6	6.850,37	6.798,59	6.784,83	6.662,40	6.671,01	6.350,98	5.501,16	6.258,80	6.780,17	6.750,47	6.752,03	6.714,31					
			6.715,26	6.662,62	6.641,03	6.574,36	6.434,11	6.289,84	5.518,26	5.683,98	6.659,20	6.644,05	6.618,91	6.620,30					
			1,00	0,99216	0,98895	0,97902	0,95813	0,93665	0,82175	0,84643	0,99165	0,98940	0,98565	0,98586					
mittel niedrig 1	mittel niedrig 1	mittel niedrig 1	5.778,20	5.729,01	5.703,92	5.688,98	5.594,91	5.501,58	4.892,35	4.518,58	5.762,54	5.721,95	5.725,82	5.672,82					
mittel niedrig 2	mittel niedrig 2	mittel niedrig 2	6.842,97	6.793,81	6.751,66	6.662,58	6.694,62	6.473,48	5.692,09	5.856,05	6.824,09	6.734,78	6.747,23	6.804,58					
mittel niedrig 3	mittel niedrig 3	mittel niedrig 3	6.069,19	6.015,33	5.962,61	5.967,51	5.865,45	5.826,49	5.293,52	4.902,50	6.050,57	6.013,33	5.998,80	5.995,33					
mittel niedrig 4	mittel niedrig 4	mittel niedrig 4	5.795,93	5.754,53	5.671,71	5.664,72	5.539,06	5.650,34	4.754,75	4.714,40	5.782,31	5.738,82	5.752,83	5.760,94					
mittel niedrig 5	mittel niedrig 5	mittel niedrig 5	5.917,79	5.889,68	5.828,85	5.801,70	5.757,51	5.691,82	4.955,99	4.719,31	5.901,98	5.869,26	5.844,30	5.828,68					
mittel niedrig 6	mittel niedrig 6	mittel niedrig 6	5.878,42	5.805,31	5.806,44	5.813,32	5.705,24	5.565,96	4.929,21	4.370,86	5.863,94	5.844,15	5.809,71	5.800,46					
			6.047,08	5.997,95	5.954,20	5.933,13	5.859,46	5.784,95	5.086,32	4.846,95	6.030,91	5.987,05	5.979,78	5.977,14					
			1,00	0,99187	0,98464	0,98116	0,96897	0,95665	0,84112	0,80153	0,99732	0,99007	0,98887	0,98843					
niedrig hoch 1	niedrig hoch 1	niedrig hoch 1	4.051,96	4.038,41	4.016,39	4.010,51	3.901,97	3.870,79	3.528,49	3.584,04	4.024,04	4.030,64	4.027,14	4.017,01					
niedrig hoch 2	niedrig hoch 2	niedrig hoch 2	4.298,82	4.281,78	4.269,37	4.242,62	4.216,98	4.134,87	3.648,04	3.721,78	4.263,33	4.263,72	4.250,38	4.247,81					
niedrig hoch 3	niedrig hoch 3	niedrig hoch 3	4.415,45	4.399,59	4.380,85	4.389,52	4.286,71	4.266,36	3.720,01	3.714,87	4.389,90	4.394,53	4.381,82	4.380,21					
niedrig hoch 4	niedrig hoch 4	niedrig hoch 4	4.458,58	4.445,07	4.424,70	4.405,54	4.326,85	4.282,97	3.829,68	3.964,43	4.408,22	4.420,24	4.390,15	4.394,80					
niedrig hoch 5	niedrig hoch 5	niedrig hoch 5	4.109,43	4.094,74	4.085,14	4.057,62	3.912,67	3.868,62	3.572,18	3.573,57	4.067,25	4.070,22	4.065,05	4.069,11					
niedrig hoch 6	niedrig hoch 6	niedrig hoch 6	4.599,04	4.584,72	4.553,90	4.530,15	4.457,79	4.418,33	4.010,69	3.806,75	4.564,60	4.556,37	4.559,26	4.548,28					
			4.322,22	4.307,38	4.288,39	4.272,66	4.183,83	4.140,32	3.718,18	3.727,57	4.286,23	4.289,29	4.278,97	4.276,20					

A.2.5 Ergebnisse $N_2=2, F_1 = 20$

N2 = 2	REFERENZ	20 24 OLS	20 12 OLS	20 8 OLS	20 4 OLS	20 3 OLS	2 genau	20 2 subj	α -Allokation	20 8 Bayes	20 4 Bayes	20 3 Bayes
hoch hoch 1	11.454,63	11.377,19	11.196,24	11.308,94	11.168,70	10.339,25	10.420,57	9.640,42	11.147,47	11.378,60	11.281,57	11.092,28
hoch hoch 2	12.484,34	12.010,19	11.657,97	11.570,86	11.387,75	11.392,69	9.083,75	11.771,22	12.247,19	11.617,57	12.046,25	11.965,11
hoch hoch 3	12.188,97	11.958,35	11.948,02	11.874,16	11.755,49	11.395,33	10.055,17	11.172,58	11.691,13	12.074,52	11.978,69	12.007,01
hoch hoch 4	15.530,87	15.449,08	14.612,92	15.250,34	14.715,79	12.386,88	15.015,18	14.870,88	15.197,87	15.378,06	15.147,51	14.170,08
hoch hoch 5	12.733,33	12.718,55	12.384,65	12.319,51	12.022,09	12.075,46	12.370,65	11.663,14	12.505,68	12.308,65	12.308,89	12.387,80
hoch hoch 6	9.764,52	9.498,26	9.590,25	9.561,40	9.394,94	9.356,99	8.428,58	8.649,26	9.219,15	9.629,95	9.555,42	9.584,64
	12.359,44	12.168,60	11.898,34	11.980,87	11.740,79	11.157,77	10.895,65	11.294,58	12.001,42	12.064,56	12.053,05	11.867,82
	1,00	0,98456	0,96269	0,96937	0,94995	0,90277	0,88157	0,91384	0,97103	0,97614	0,97521	0,96022
hoch mittel 1	9.470,04	9.368,70	9.331,69	9.234,37	9.325,26	8.609,14	7.849,42	7.812,21	9.371,76	9.243,45	9.395,43	9.212,78
hoch mittel 2	9.975,83	9.893,56	9.764,92	9.819,80	9.575,89	9.290,85	8.565,12	8.106,13	9.887,87	9.856,90	9.905,97	9.885,90
hoch mittel 3	10.566,80	10.449,45	10.449,12	10.455,72	10.126,08	10.259,12	8.476,57	8.430,02	10.386,70	10.481,94	10.361,69	10.473,87
hoch mittel 4	7.738,67	7.676,34	7.580,57	7.531,41	7.409,35	7.292,34	6.793,00	6.648,70	7.648,51	7.606,27	7.591,47	7.668,86
hoch mittel 5	10.302,54	10.060,54	10.211,09	10.171,22	9.812,75	9.835,36	8.830,08	9.578,55	10.217,01	10.185,25	9.928,25	10.190,02
hoch mittel 6	9.882,82	9.770,94	9.657,98	9.495,83	9.274,17	9.167,11	8.138,13	8.533,45	9.673,22	9.729,77	9.715,63	9.745,26
	9.656,12	9.536,59	9.499,23	9.451,39	9.253,92	9.075,65	8.108,72	8.184,84	9.530,84	9.517,26	9.483,08	9.529,45
	1,00	0,98762	0,98375	0,97880	0,95835	0,93989	0,83975	0,84763	0,98703	0,98562	0,98208	0,98688
hoch niedrig 1	8.953,96	8.808,21	8.779,01	8.792,23	8.481,47	8.542,39	6.825,20	7.478,28	8.910,49	8.827,75	8.881,78	8.815,98
hoch niedrig 2	9.771,39	9.636,71	9.400,72	9.578,18	9.626,58	9.334,67	7.685,93	9.181,29	9.748,89	9.666,83	9.653,50	9.683,56
hoch niedrig 3	9.548,16	9.452,93	9.414,30	9.430,13	9.453,72	8.943,43	8.654,38	7.904,02	9.503,16	9.497,40	9.486,52	9.507,69
hoch niedrig 4	9.831,19	9.716,20	9.641,26	9.708,84	9.707,79	9.036,46	7.865,40	8.029,34	9.792,34	9.773,70	9.789,00	9.741,89
hoch niedrig 5	8.889,79	8.778,21	8.684,16	8.681,36	8.460,98	8.253,16	7.483,48	7.612,49	8.836,66	8.780,66	8.718,71	8.810,77
hoch niedrig 6	9.099,51	9.043,56	8.902,01	8.941,24	8.663,39	8.107,50	7.421,94	7.336,51	9.038,92	8.982,05	9.048,78	8.953,67
	9.349,00	9.239,30	9.136,91	9.188,66	9.065,66	8.702,93	7.656,06	7.923,66	9.305,08	9.254,73	9.263,05	9.252,26
	1,00	0,98827	0,97731	0,98285	0,96969	0,93089	0,81892	0,84754	0,99530	0,98992	0,99081	0,98965
mittel hoch 1	6.960,91	6.942,65	6.897,70	6.830,46	6.679,02	6.500,04	6.123,59	6.197,86	6.856,80	6.869,32	6.826,54	6.881,78
mittel hoch 2	8.047,42	7.990,02	7.974,68	7.861,36	7.797,97	7.549,66	7.034,04	6.638,05	7.936,86	7.943,31	7.898,65	7.922,92
mittel hoch 3	7.134,54	7.064,66	7.017,14	7.019,68	6.966,52	6.657,52	6.153,85	6.265,01	7.054,72	7.065,42	7.093,79	7.016,12
mittel hoch 4	8.964,85	8.914,09	8.889,39	8.719,95	8.520,76	7.974,06	8.265,06	6.921,78	8.682,01	8.876,88	8.662,71	8.721,01
mittel hoch 5	6.338,86	6.309,60	6.283,12	6.302,11	5.947,50	5.975,84	5.722,37	5.678,45	6.277,20	6.315,03	6.260,28	6.249,44
mittel hoch 6	8.090,59	8.038,55	8.038,24	7.970,63	7.680,14	7.950,35	7.590,11	7.114,29	8.029,51	8.019,27	7.977,28	8.024,35
	7.589,53	7.543,26	7.516,71	7.450,70	7.265,32	7.101,24	6.814,84	6.469,24	7.472,85	7.514,87	7.453,21	7.469,27
	1,00	0,99390	0,99041	0,98171	0,95728	0,93566	0,89793	0,85239	0,98463	0,99016	0,98204	0,98415
mittel mittel 1	6.474,56	6.440,24	6.409,55	6.361,07	6.283,46	6.124,76	5.399,25	5.240,74	6.449,37	6.411,89	6.404,01	6.391,29
mittel mittel 2	6.659,01	6.618,58	6.595,50	6.567,77	5.893,44	6.202,98	5.766,70	6.039,08	6.635,84	6.602,89	6.354,16	6.633,40
mittel mittel 3	5.670,65	5.631,13	5.586,62	5.573,98	5.536,16	5.014,43	4.602,66	4.950,62	5.635,83	5.606,08	5.598,59	5.607,42
mittel mittel 4	7.023,10	6.987,62	6.942,31	6.920,27	6.883,47	6.537,44	6.072,82	6.323,80	6.983,90	6.939,50	6.967,76	6.903,03
mittel mittel 5	6.313,76	6.237,93	6.150,89	6.218,38	6.140,55	6.173,25	5.086,93	5.231,21	6.292,90	6.248,85	6.265,18	6.269,85
mittel mittel 6	6.306,75	6.267,19	6.230,29	6.228,45	5.966,69	5.973,41	4.984,72	5.027,95	6.274,31	6.260,07	6.126,95	6.249,45
	6.407,97	6.363,78	6.319,19	6.311,65	6.117,29	6.004,38	5.318,85	5.468,90	6.378,69	6.344,88	6.286,11	6.342,41
	1,00	0,99310	0,98615	0,98497	0,95464	0,93702	0,83004	0,85345	0,99543	0,99015	0,98098	0,98977
mittel niedrig 1	5.956,61	5.926,39	5.906,03	5.821,95	5.695,98	5.711,43	5.229,45	5.380,60	5.945,80	5.878,68	5.893,75	5.870,31
mittel niedrig 2	6.494,83	6.458,49	6.394,85	6.379,74	6.177,30	6.130,01	5.458,99	5.237,06	6.475,05	6.420,57	6.417,27	6.446,41
mittel niedrig 3	6.636,30	6.601,15	6.533,08	6.484,39	6.501,76	6.390,89	5.787,96	5.372,57	6.624,19	6.575,30	6.563,94	6.530,54
mittel niedrig 4	6.360,83	6.270,62	6.290,56	6.245,95	6.240,29	6.135,27	4.921,70	5.488,78	6.342,97	6.295,79	6.294,09	6.263,35
mittel niedrig 5	6.307,56	6.229,37	6.241,06	6.245,91	6.040,39	5.854,53	5.204,70	5.615,42	6.296,89	6.263,90	6.242,77	6.180,86
mittel niedrig 6	6.335,80	6.297,83	6.258,66	6.267,56	6.171,18	6.194,63	5.291,81	5.474,57	6.309,96	6.298,15	6.273,34	6.261,00
	6.348,65	6.297,31	6.270,71	6.240,92	6.137,82	6.069,46	5.315,77	5.428,17	6.332,48	6.288,73	6.280,86	6.258,74
	1,00	0,99191	0,98772	0,98303	0,96679	0,95602	0,83731	0,85501	0,99745	0,99056	0,98932	0,98584
niedrig hoch 1	4.201,17	4.167,15	4.160,76	4.149,73	4.066,18	3.953,23	3.779,73	3.845,50	4.178,11	4.164,29	4.137,17	4.161,30
niedrig hoch 2	4.255,45	4.235,76	4.228,99	4.200,66	4.029,32	4.098,19	3.687,27	3.949,27	4.219,62	4.210,94	4.199,56	4.213,06
niedrig hoch 3	4.407,05	4.394,82	4.380,61	4.374,14	4.361,00	4.113,99	4.064,80	3.919,02	4.360,30	4.371,67	4.386,16	4.385,24
niedrig hoch 4	4.431,93	4.413,07	4.420,89	4.391,26	4.164,16	4.305,01	4.087,60	4.023,72	4.405,46	4.407,17	4.380,01	4.391,68
niedrig hoch 5	4.636,87	4.617,46	4.600,76	4.541,11	4.556,46	4.460,84	3.891,93	4.034,01	4.595,07	4.565,76	4.597,72	4.551,15
niedrig hoch 6	4.281,69	4.261,77	4.260,57	4.165,28	4.216,93	4.161,76	3.836,91	3.657,69	4.252,70	4.204,39	4.262,51	4.241,00
	4.369,03	4.348,34	4.342,10	4.303,70	4.232,34	4.182,17	3.891,37	3.904,87	4.335,21	4.320,71	4.327,19	4.323,91
	1,00	0,99526	0,99384	0,98505	0,96872	0,95723	0,89067	0,89376	0,99226	0,98894	0,99042	0,98967
niedrig mittel 1	4.712,24	4.698,02	4.675,58	4.685,98	4.617,93	4.504,07	4.126,66	3.915,11	4.696,05	4.688,02	4.671,83	4.692,36
niedrig mittel 2	4.552,43	4.534,24	4.508,94	4.521,73	4.314,77	4.304,83	3.935,38	4.266,72	4.526,80	4.528,00	4.487,20	4.490,57
niedrig mittel 3	4.361,67	4.322,69	4.336,92	4.304,97	4.208,95	4.204,97	3.640,25	3.986,16	4.351,57	4.322,03	4.305,75	4.301,40
niedrig mittel 4	4.806,30	4.789,98	4.779,31	4.750,30	4.688,62	4.677,58	4.415,38	4.054,19	4.780,09	4.755,02	4.742,94	4.750,94
niedrig mittel 5	4.893,67	4.877,50	4.864,47	4.850,19	4.842,10	4.551,24	4.250,64	4.305,07	4.885,00	4.854,45	4.873,72	4.764,06
niedrig mittel 6	4.560,04	4.547,36	4.516,89	4.538,88	4.501,09	4.350,42	4.284,99	3.945,55	4.539,33	4.544,18	4.534,42	4.522,88
	4.647,72	4.628,30	4.613,68	4.608,67	4.528,91	4.432,18	4.108,88	4.078,80	4.629,81	4.615,28	4.602,64	4.587,04
	1,00	0,99582	0,99268	0,99160	0,97444	0,95362	0,88406	0,87759	0,99615	0,99302	0,99030	0,98694
niedrig niedrig 1	4.573,24	4.566,14	4.551,56	4.537,49	4.416,77	4.405,18	4.052,38	3.950,17	4.564,78	4.543,92	4.518,80	4.529,56
niedrig niedrig 2	4.916,40	4.896,07	4.875,42	4.880,36	4.858,48	4.697,19	4.299,03	4.470,35	4.911,97	4.894,36	4.879,33	4.880,52
niedrig niedrig 3	4.492,07	4.480,77	4.470,23	4.468,91	4.382,64	4.338,22	3.958,46	4.168,13	4.487,63	4.471,32	4.463,45	4.443,54
niedrig niedrig 4	4.256,88	4.238,70	4.209,06	4.213,38	4.071,38	4.099,05	3.779,67	3.990,24	4.253,97	4.229,54	4.206,90	4.199,33
niedrig niedrig 5	4.342,32	4.329,77	4.317,34	4.310,03	4.171,22	4.240,37	3.664,45	3.814,07	4.339,27	4.319,66	4.270,15	4.316,77
nied												

A.2.6 Ergebnisse $N_2=2, F_1 = 8$

			N ₂ = 2		F ₁ F ₄ F ₅															
F ₂	F ₃	N ₁	REFERENZ	20 24 OLS	20 12 OLS	20 12 OLS	20 8 OLS	20 4 OLS	20 3 OLS	2 genau	20 2 subj	α-Allokation	20 8 Bayes	20 4 Bayes	20 3 Bayes					
hoch	hoch	1	11.454,63	11.377,18	11.196,22	11.308,93	11.168,70	10.339,25	10.420,57	9.640,42	11.147,47	11.378,59	11.281,57	11.092,30						
hoch	hoch	2	12.484,34	12.010,19	11.657,95	11.570,84	11.387,75	11.392,69	9.083,75	11.771,22	12.247,19	11.617,55	12.046,27	11.965,12						
hoch	hoch	3	12.188,97	11.958,35	11.947,97	11.874,17	11.755,50	11.395,33	10.055,17	11.172,58	11.691,13	12.074,53	11.978,68	12.006,97						
hoch	hoch	4	15.530,88	15.449,07	14.612,90	15.250,29	14.715,79	12.386,86	15.015,18	14.870,88	15.197,87	15.378,03	15.147,49	14.170,11						
hoch	hoch	5	12.733,34	12.718,60	12.384,65	12.319,50	12.022,09	12.075,46	12.370,65	11.663,14	12.505,68	12.308,64	12.308,89	12.387,77						
hoch	hoch	6	9.764,52	9.498,25	9.590,25	9.561,39	9.394,92	9.356,99	8.428,58	8.649,26	9.219,15	9.629,96	9.555,39	9.584,63						
			12.359,44	12.168,61	11.898,32	11.980,85	11.740,79	11.157,76	10.895,65	11.294,58	12.001,42	12.064,55	12.053,05	11.867,82						
			1,00	0,98456	0,96269	0,96937	0,94994	0,90277	0,88156	0,91384	0,97103	0,97614	0,97521	0,96022						
hoch	mittel	1	9.470,04	9.368,70	9.331,68	9.234,36	9.325,26	8.609,14	7.849,42	7.812,21	9.371,76	9.243,45	9.395,43	9.212,76						
hoch	mittel	2	9.975,84	9.893,56	9.764,91	9.819,79	9.575,89	9.290,85	8.565,12	8.106,13	9.887,87	9.856,93	9.905,97	9.885,91						
hoch	mittel	3	10.566,80	10.449,46	10.449,12	10.455,71	10.126,08	10.259,10	8.476,57	8.430,02	10.386,70	10.481,94	10.361,66	10.473,88						
hoch	mittel	4	7.738,67	7.676,35	7.580,56	7.531,41	7.409,35	7.292,34	6.793,00	6.648,70	7.648,51	7.606,27	7.591,47	7.668,85						
hoch	mittel	5	10.302,54	10.060,55	10.211,08	10.171,21	9.812,75	9.835,36	8.830,08	9.578,55	10.217,01	10.185,25	9.928,25	10.190,04						
hoch	mittel	6	9.882,82	9.770,93	9.657,97	9.495,81	9.274,17	9.167,14	8.138,13	8.533,45	9.673,22	9.729,76	9.715,63	9.745,27						
			9.656,12	9.536,59	9.499,22	9.451,38	9.253,92	9.075,65	8.108,72	8.184,84	9.530,84	9.517,27	9.483,07	9.529,45						
			1,00	0,98762	0,98375	0,97880	0,95835	0,93989	0,83975	0,84763	0,98703	0,98562	0,98208	0,98688						
hoch	niedrig	1	8.953,96	8.808,22	8.779,00	8.792,22	8.481,47	8.542,39	6.825,20	7.478,28	8.910,49	8.827,75	8.881,79	8.816,01						
hoch	niedrig	2	9.771,39	9.636,73	9.400,70	9.578,16	9.626,57	9.334,67	7.685,93	9.181,29	9.748,89	9.666,85	9.653,49	9.683,55						
hoch	niedrig	3	9.548,16	9.452,94	9.414,30	9.430,13	9.453,69	8.943,43	8.654,38	7.904,02	9.503,16	9.497,41	9.486,51	9.507,70						
hoch	niedrig	4	9.831,19	9.716,21	9.641,28	9.708,84	9.707,79	9.036,46	7.865,40	8.029,34	9.792,34	9.773,70	9.789,01	9.741,90						
hoch	niedrig	5	8.889,79	8.778,22	8.684,16	8.681,35	8.460,98	8.253,16	7.483,48	7.612,49	8.836,66	8.780,66	8.718,69	8.810,78						
hoch	niedrig	6	9.099,51	9.043,54	8.902,01	8.941,23	8.663,38	8.107,50	7.421,94	7.336,51	9.038,92	8.982,04	9.048,78	8.953,66						
			9.349,00	9.239,31	9.136,91	9.188,65	9.065,65	8.702,93	7.656,06	7.923,66	9.305,08	9.254,73	9.263,05	9.252,27						
			1,00	0,98827	0,97731	0,98285	0,96969	0,93089	0,81892	0,84754	0,99530	0,98992	0,99081	0,98965						
mittel	hoch	1	6.960,91	6.942,65	6.897,69	6.830,45	6.679,02	6.500,04	6.123,59	6.197,86	6.856,80	6.869,32	6.826,54	6.881,78						
mittel	hoch	2	8.047,42	7.990,04	7.974,70	7.861,37	7.797,97	7.549,64	7.034,04	6.638,05	7.936,86	7.943,32	7.898,65	7.922,90						
mittel	hoch	3	7.134,54	7.064,67	7.017,14	7.019,69	6.966,52	6.657,52	6.153,85	6.265,01	7.054,72	7.065,43	7.093,79	7.016,12						
mittel	hoch	4	8.964,85	8.914,10	8.889,38	8.719,95	8.520,76	7.974,06	8.265,06	6.921,78	8.682,01	8.876,87	8.662,71	8.721,01						
mittel	hoch	5	6.338,86	6.309,61	6.283,12	6.302,10	5.947,50	5.975,84	5.722,37	5.678,45	6.277,20	6.315,03	6.260,28	6.249,45						
mittel	hoch	6	8.090,59	8.038,56	8.038,24	7.970,63	7.680,13	7.950,34	7.590,11	7.114,29	8.029,51	8.019,29	7.977,28	8.024,34						
			7.589,53	7.543,27	7.516,71	7.450,70	7.265,32	7.101,24	6.814,84	6.469,24	7.472,85	7.514,88	7.453,21	7.469,27						
			1,00	0,99391	0,99041	0,98171	0,95728	0,93566	0,89793	0,85239	0,98463	0,99016	0,98204	0,98415						
mittel	mittel	1	6.474,56	6.440,25	6.409,56	6.361,07	6.283,46	6.124,76	5.399,25	5.240,74	6.449,37	6.411,91	6.404,02	6.391,29						
mittel	mittel	2	6.659,01	6.618,58	6.595,50	6.567,78	5.893,44	6.202,96	5.766,70	6.039,08	6.635,84	6.602,89	6.354,15	6.633,41						
mittel	mittel	3	5.670,65	5.631,13	5.586,62	5.573,99	5.536,16	5.014,43	4.602,66	4.950,62	5.635,83	5.606,09	5.598,59	5.607,42						
mittel	mittel	4	7.023,10	6.987,62	6.942,31	6.920,27	6.883,47	6.537,43	6.072,82	6.323,80	6.983,90	6.939,50	6.967,76	6.903,02						
mittel	mittel	5	6.313,76	6.237,94	6.150,90	6.218,38	6.140,54	6.173,25	5.086,93	5.231,21	6.292,90	6.248,85	6.265,18	6.269,86						
mittel	mittel	6	6.306,75	6.267,19	6.230,31	6.228,45	5.966,69	5.973,41	4.984,72	5.027,95	6.274,31	6.260,08	6.126,95	6.249,45						
			6.407,97	6.363,79	6.319,20	6.311,66	6.117,29	6.004,38	5.318,85	5.468,90	6.378,69	6.344,89	6.286,11	6.342,41						
			1,00	0,99310	0,98615	0,98497	0,95464	0,93702	0,83004	0,85345	0,99543	0,99016	0,98098	0,98977						
mittel	niedrig	1	5.956,61	5.926,39	5.906,03	5.821,95	5.695,98	5.711,42	5.229,45	5.380,60	5.945,80	5.878,68	5.893,75	5.870,31						
mittel	niedrig	2	6.494,83	6.458,49	6.394,86	6.379,74	6.177,30	6.130,01	5.458,99	5.237,06	6.475,05	6.420,57	6.417,26	6.446,41						
mittel	niedrig	3	6.636,30	6.601,15	6.533,09	6.484,39	6.501,76	6.390,88	5.787,96	5.372,57	6.624,19	6.575,31	6.563,94	6.530,54						
mittel	niedrig	4	6.360,83	6.270,62	6.290,57	6.245,95	6.240,28	6.135,26	4.921,70	5.488,78	6.342,97	6.295,80	6.294,10	6.263,35						
mittel	niedrig	5	6.307,56	6.229,37	6.241,06	6.245,91	6.040,39	5.854,53	5.204,70	5.615,42	6.296,89	6.263,90	6.242,77	6.180,85						
mittel	niedrig	6	6.335,80	6.297,83	6.258,68	6.267,56	6.171,19	6.194,62	5.291,81	5.474,57	6.309,96	6.298,17	6.273,34	6.261,01						
			6.348,65	6.297,31	6.270,71	6.240,92	6.137,82	6.069,45	5.315,77	5.428,17	6.332,48	6.288,74	6.280,86	6.258,75						
			1,00	0,99191	0,98772	0,98303	0,96679	0,95602	0,83731	0,85501	0,99745	0,99056	0,98932	0,98584						
niedrig	hoch	1	4.201,17	4.167,15	4.160,76	4.149,74	4.066,18	3.953,23	3.779,73	3.845,50	4.178,11	4.164,29	4.137,17	4.161,30						
niedrig	hoch	2	4.255,45	4.235,76	4.228,99	4.200,66	4.029,32	4.098,19	3.687,27	3.949,27	4.219,62	4.210,94	4.199,56	4.213,06						
niedrig	hoch	3	4.407,05	4.394,82	4.380,61	4.374,14	4.360,99	4.113,99	4.064,80	3.919,02	4.360,30	4.371,67	4.386,16	4.385,24						
niedrig	hoch	4	4.431,93	4.413,07	4.420,89	4.391,26	4.164,16	4.305,01	4.087,60	4.023,72	4.405,46	4.407,18	4.380,01	4.391,68						
niedrig	hoch	5	4.636,87	4.617,46	4.600,76	4.541,11	4.556,46	4.460,85	3.891,93	4.034,01	4.595,07	4.565,76	4.597,72	4.551,15						
niedrig	hoch	6	4.281,69	4.261,77	4.260,57	4.165,28	4.216,93	4.161,76	3.836,91	3.657,69	4.252,70	4.204,39	4.262,51	4.241,00						
			4.369,03	4.348,34	4.342,10	4.303,70	4.232,34	4.182,17	3.891,37	3.904,87	4.335,21	4.320,71	4.327,19	4.323,91						
			1,00	0,99526	0,99384	0,98505	0,96871	0,95723	0,89067	0,89376	0,99226	0,98894	0,99042	0,98967						
niedrig	mittel	1	4.712,24	4.698,02	4.675,58	4.685,99	4.617,93	4.504,08	4.126,66	3.915,11	4.696,05	4.688,02	4.671,83	4.692,36						
niedrig	mittel	2	4.552,43	4.534,24	4.508,94	4.521,73	4.314,77	4.304,83	3.935,38	4.266,72	4.526,80	4.528,01	4.487,20	4.490,57						
niedrig	mittel	3	4.361,67	4.322																

A.2.7 Veränderung $N_2=1, F_1 = 40$

	$N_2 = 1$ Veränderung										Veränderung									
	40 24 OLS	%	40 12 OLS	%	40 8 OLS	%	40 4 OLS	%	40 3 OLS	%	40 2 genau	%	40 8 Bayes	%	40 4 Bayes	%	40 3 Bayes	%	α -Allokation	%
hoch hoch 1	2.041,95	24,35	1.972,54	23,46	1.651,06	19,68	1.763,09	20,83	627,23	7,38	709,20	8,42	1.808,14	21,56	1.915,99	22,63	1.750,78	20,59	1.866,05	21,85
hoch hoch 2	1.756,60	18,59	1.454,83	15,32	1.606,44	16,96	904,42	9,52	1.324,24	13,98	334,90	3,44	1.623,40	17,14	1.360,72	14,32	1.593,60	16,82	1.650,92	17,57
hoch hoch 3	1.224,98	14,34	1.144,51	13,41	861,62	9,97	1.094,56	12,83	204,92	2,40	-790,22	-9,23	940,21	10,88	1.186,42	13,90	1.136,08	13,32	1.038,87	12,13
hoch hoch 4	2.253,36	24,91	2.436,65	26,92	2.392,46	26,54	1.213,20	13,37	1.518,38	17,03	1.927,92	21,13	2.525,64	28,02	2.043,27	22,52	1.864,05	20,91	2.255,02	25,02
hoch hoch 5	2.798,20	26,83	2.668,78	25,67	2.027,24	19,44	979,24	9,37	1.680,59	16,10	2.082,71	19,82	2.367,87	22,71	2.088,98	19,98	2.407,93	23,07	2.389,97	22,77
hoch hoch 6	1.666,07	17,57	1.608,72	16,91	1.396,41	14,67	910,73	9,64	1.204,31	12,65	476,81	5,01	1.551,11	16,29	1.480,63	15,67	1.614,43	16,96	1.758,23	18,77
	1.956,86	21,10	1.881,00	20,28	1.655,87	17,88	1.144,21	12,59	1.093,28	11,59	790,22	8,10	1.802,73	19,43	1.679,33	18,17	1.727,81	18,61	1.826,51	19,69
hoch mittel 1	1.041,27	11,09	937,41	9,98	663,16	7,03	746,82	7,91	222,97	2,37	-1.369,24	-14,47	975,83	10,35	907,27	9,61	826,39	8,77	1.122,24	12,10
hoch mittel 2	524,60	6,38	472,13	5,75	507,00	6,18	339,56	4,15	-107,82	-1,30	-970,21	-11,73	550,13	6,70	543,65	6,64	333,86	4,03	669,55	8,27
hoch mittel 3	861,40	9,05	722,69	7,67	587,88	6,22	693,72	7,32	439,32	4,67	-306,28	-3,20	746,88	7,90	863,90	9,11	954,99	10,16	665,87	6,87
hoch mittel 4	538,47	6,42	416,24	4,99	514,40	6,14	324,59	3,89	133,66	1,59	-851,87	-10,09	562,11	6,71	531,18	6,37	473,05	5,62	575,96	6,89
hoch mittel 5	580,73	6,06	416,11	4,33	454,14	4,75	-113,59	-1,18	-43,76	-0,46	-825,94	-8,64	534,84	5,60	505,00	5,27	577,66	6,09	609,62	6,38
hoch mittel 6	794,39	8,09	716,11	7,27	558,62	5,67	55,44	0,56	91,90	0,93	57,34	0,59	709,98	7,21	523,95	5,32	630,59	6,35	857,97	8,77
	723,48	7,85	613,45	6,27	547,53	6,00	341,09	3,77	122,71	1,30	-711,04	-7,92	679,96	7,41	645,82	7,05	632,76	6,83	750,20	8,21
hoch niedrig 1	306,69	3,53	212,14	2,43	162,65	1,86	-73,14	-0,83	-190,04	-2,19	-1.164,35	-13,39	250,53	2,86	102,42	1,17	296,46	3,42	473,56	5,53
hoch niedrig 2	316,83	3,83	318,97	3,86	299,59	3,63	-35,41	-0,43	-304,27	-3,69	-439,99	-5,29	356,33	4,32	230,99	2,80	349,20	4,23	478,33	5,86
hoch niedrig 3	193,37	2,17	127,03	1,42	-17,18	-0,19	22,22	0,25	-387,12	-4,32	-1.065,50	-11,86	81,27	0,91	187,67	2,10	166,93	1,86	319,22	3,62
hoch niedrig 4	209,74	2,28	117,69	1,27	61,38	0,66	-85,56	-0,93	-366,18	-3,95	-1.034,95	-11,16	147,13	1,59	186,84	2,02	70,39	0,76	272,48	2,97
hoch niedrig 5	134,74	1,57	78,71	0,92	55,73	0,65	-105,41	-1,23	-412,01	-4,79	-905,48	-10,68	128,52	1,50	96,06	1,13	70,96	0,82	225,59	2,65
hoch niedrig 6	109,40	1,28	119,39	1,41	-59,78	-0,70	-61,56	-0,72	-248,33	-2,64	-759,89	-8,95	40,22	0,47	88,76	1,04	105,35	1,25	159,04	1,87
	211,80	2,44	162,32	1,89	83,73	0,98	-56,48	-0,65	-317,99	-3,85	-895,03	-10,22	167,33	1,94	148,79	1,71	176,55	2,06	321,37	3,75
mittel hoch 1	416,89	6,71	427,11	6,90	352,87	5,68	319,61	5,14	167,16	2,71	-168,23	-2,71	375,07	6,03	376,44	6,06	374,65	6,07	328,75	5,30
mittel hoch 2	400,22	5,81	324,98	4,68	280,73	4,04	68,67	0,99	231,79	3,38	-466,91	-6,77	315,63	4,54	217,51	3,14	372,65	5,43	311,54	4,49
mittel hoch 3	723,18	11,81	583,01	9,43	633,63	10,25	146,39	2,37	401,51	6,58	-242,60	-6,93	665,58	10,77	621,12	10,07	593,77	9,74	587,24	9,54
mittel hoch 4	387,22	6,53	388,55	6,59	360,26	6,08	303,87	5,15	90,97	1,54	-316,72	-5,34	381,90	6,45	364,62	6,18	316,16	5,36	331,37	5,57
mittel hoch 5	340,90	5,74	267,66	4,50	222,25	3,74	241,77	4,10	94,12	1,59	-805,86	-13,63	263,01	4,42	344,69	5,84	316,32	5,35	257,32	4,32
mittel hoch 6	558,42	8,68	540,91	8,42	494,46	7,72	354,55	5,49	382,19	5,97	-341,83	-5,28	557,37	8,70	478,73	7,42	492,69	7,70	448,34	6,91
	471,14	7,55	422,04	6,75	390,70	6,25	239,14	3,88	227,96	3,63	-421,02	-6,78	426,43	6,82	400,52	6,45	411,04	6,61	377,43	6,02
mittel mittel 1	246,92	3,91	191,31	3,03	220,05	3,50	124,59	1,97	-102,76	-1,61	-803,10	-12,78	250,74	3,98	179,86	2,84	111,92	1,76	325,47	5,23
mittel mittel 2	280,59	4,67	215,58	3,58	168,67	2,80	73,85	1,23	-192,18	-3,19	-771,71	-12,87	204,99	3,40	210,19	3,49	198,56	3,29	328,55	5,54
mittel mittel 3	253,77	3,77	233,81	3,47	171,47	2,55	169,27	2,52	31,66	0,47	-630,54	-9,31	217,51	3,24	234,22	3,49	164,73	2,43	175,24	2,58
mittel mittel 4	600,19	9,00	624,14	9,42	606,66	9,16	446,91	6,73	231,07	3,50	-392,46	-5,90	626,22	9,45	614,11	9,25	603,04	9,14	674,78	10,29
mittel mittel 5	204,55	3,42	154,56	2,57	152,26	2,54	89,41	1,50	73,33	1,22	-598,29	-10,05	176,87	2,95	180,09	3,01	165,67	2,77	186,99	3,11
mittel mittel 6	271,24	4,13	243,46	3,72	134,67	2,06	137,85	2,11	-0,49	-0,01	-299,57	-4,57	218,05	3,33	229,47	3,51	108,91	1,65	183,90	2,78
	309,54	4,82	277,14	4,30	242,30	3,77	173,65	2,68	6,77	0,06	-582,61	-9,25	282,40	4,39	274,66	4,27	225,47	3,51	312,49	4,92
mittel niedrig 1	61,73	1,09	14,37	0,25	62,54	1,11	-11,63	-0,20	-85,63	-1,51	-908,88	-15,99	90,81	1,61	59,94	1,05	53,45	0,94	59,10	1,04
mittel niedrig 2	105,25	1,57	34,80	0,52	67,86	1,01	-227,76	-3,38	-31,35	-0,47	-940,67	-13,94	107,90	1,61	-15,94	-0,24	46,96	0,70	175,54	2,64
mittel niedrig 3	78,93	1,33	61,63	1,04	2,23	0,04	0,51	0,01	-142,68	-2,39	-699,77	-11,74	46,64	0,78	63,41	1,07	63,01	1,06	97,69	1,64
mittel niedrig 4	51,04	0,89	21,25	0,37	-60,80	-1,06	-120,37	-2,09	-224,72	-3,94	-617,77	-10,94	-9,45	-0,16	-12,35	-0,21	36,52	0,64	60,23	1,05
mittel niedrig 5	52,68	0,90	39,52	0,68	-62,75	-1,08	-154,87	-2,66	-266,50	-4,54	-889,25	-15,32	-2,33	-0,04	-0,19	0,00	-47,49	-0,81	51,50	0,88
mittel niedrig 6	65,41	1,13	17,53	0,30	28,35	0,49	-63,31	-1,09	-330,45	-5,70	-976,26	-16,87	56,66	0,98	17,53	0,30	36,71	0,63	52,06	0,89
	69,17	1,15	31,52	0,53	6,24	0,09	-96,24	-1,57	-180,22	-3,09	-838,76	-14,13	48,37	0,80	18,73	0,33	31,53	0,53	82,69	1,36
niedrig hoch 1	71,08	1,79	66,95	1,69	38,58	0,97	31,77	0,80	-14,29	-0,36	-440,33	-11,08	48,38	1,22	58,65	1,48	29,53	0,74	60,58	1,53
niedrig hoch 2	80,09	1,90	76,73	1,83	62,63	1,49	-6,84	-0,16	-13,90	-0,33	-460,09	-10,92	69,41	1,65	43,36	1,03	82,79	1,98	38,77	0,92
niedrig hoch 3	107,52	2,50	101,37	2,36	88,46	2,06	59,76	1,39	-103,82	-2,41	-373,90	-8,70	94,28	2,19	84,41	1,96	39,33	0,91	84,05	1,95
niedrig hoch 4	134,40	3,11	106,89	2,47	106,42	2,47	3,55	0,08	29,12	0,67	-426,54	-9,90	113,66	2,63	85,66	1,98	106,91	2,48	107,81	2,50
niedrig hoch 5	117,66	2,95	113,21	2,84	83,55	2,10	87,32	2,20	-16,90	-0,42	-455,94	-11,42	94,87	2,38	97,62	2,46	76,47	1,91	92,56	2,33
niedrig hoch 6	178,56	4,05	171,54	3,89	174,30	3,96	108,82	2,47	-91,56	-2,08	-347,59	-7,89	180,66	4,10	158,26	3,60	123,72	2,80	149,52	3,39
	114,89	2,72	106,12	2,51	92,32	2,17	47,40	1,13	-35,23	-0,82	-417,40	-9,99	100,21	2,36	87,99	2,08	76,46	1,80	88,88	2,10
niedrig mittel 1	29,42	0,73	26,07	0,65	15,31	0,38	-53,50	-1,33	-91,43	-2,28	-480,60	-11,97	24,64	0,61	-4,55	-0,11	-38,66	-0,96	-9,29	-0,23
niedrig mittel 2	56,06	1,29	29,35	0,67	41,4															

A.2.8 Veränderung $N_2=1, F_1 = 20$

	N ₂ = 1				Veränderung				Veränderung				Veränderung							
	20 24 OLS	20 12 OLS	%	20 8 OLS	%	20 4 OLS	%	20 3 OLS	%	20 2 genau	%	α-Allokation	%	20 8 Bayes	%	20 4 Bayes	%	20 3 Bayes	%	
hoch hoch 1	1.222,02	12,17	1.333,86	13,38	833,91	8,27	949,45	9,56	1.046,17	10,58	-566,74	-5,68	1.281,84	12,80	1.086,22	10,77	1.269,92	12,79	1.177,20	11,85
hoch hoch 2	2.719,81	27,94	2.295,76	23,28	2.415,23	24,71	2.470,30	25,49	982,78	9,93	-773,45	-7,85	2.080,31	20,52	2.409,42	24,65	2.498,62	25,78	1.910,14	19,40
hoch hoch 3	1.032,80	9,37	1.163,82	10,63	974,19	8,91	755,66	6,87	8,92	0,08	235,85	2,14	1.275,22	11,89	1.088,56	9,96	1.021,19	9,28	710,99	6,39
hoch hoch 4	4.026,62	35,53	4.236,78	37,99	3.600,33	31,27	3.857,88	33,87	3.103,09	27,76	3.236,83	27,68	3.992,93	35,62	3.631,65	31,54	3.877,57	34,05	3.596,29	32,19
hoch hoch 5	2.578,09	25,57	2.485,51	24,66	2.024,27	20,01	2.423,01	23,71	2.005,49	19,79	1.361,51	13,41	2.386,03	23,67	2.113,03	20,89	2.399,12	23,48	2.422,16	23,90
hoch hoch 6	750,43	8,41	704,24	7,93	779,50	8,89	532,68	6,00	416,58	4,67	-749,74	-8,41	650,22	7,36	833,16	9,38	678,83	7,65	697,26	7,82
	2.054,96	19,83	2.036,66	19,64	1.772,91	17,01	1.831,50	17,58	1.260,50	12,14	457,34	3,55	1.944,43	18,64	1.860,34	17,87	1.957,54	18,84	1.752,67	16,93
hoch mittel 1	791,13	9,23	783,37	9,13	540,76	6,30	326,55	3,71	257,30	2,96	-272,85	-3,19	600,55	6,82	606,44	7,07	454,42	5,16	644,45	7,41
hoch mittel 2	390,19	4,11	381,11	4,03	359,47	3,79	314,40	3,32	-26,28	-0,27	-1.284,04	-13,59	464,96	4,90	409,36	4,32	440,25	4,65	277,80	2,90
hoch mittel 3	583,82	5,88	372,04	3,73	359,07	3,60	-63,21	-0,63	162,52	1,63	-1.203,58	-12,58	156,98	1,52	441,23	4,42	401,14	4,02	296,96	2,98
hoch mittel 4	158,47	2,11	178,69	2,39	147,48	1,97	-202,45	-2,65	-246,73	-3,29	-772,58	-10,36	123,94	1,64	176,80	2,36	-3,97	-0,05	154,00	2,05
hoch mittel 5	625,29	6,55	679,33	7,14	681,17	7,21	172,12	1,82	353,04	3,71	-1.406,45	-14,63	658,65	6,87	694,26	7,34	695,41	7,34	747,68	7,86
hoch mittel 6	808,94	8,95	675,20	7,42	583,39	6,50	113,96	1,27	-224,84	-2,47	-1.218,49	-13,35	908,91	10,28	671,63	7,48	678,69	7,56	651,26	7,17
	559,64	6,14	511,62	5,64	445,22	4,89	110,23	1,14	45,84	0,38	-1.026,33	-11,22	485,67	5,34	499,95	5,40	444,32	4,78	462,03	5,06
hoch niedrig 1	175,64	2,02	-11,43	-0,13	130,63	1,49	-332,81	-3,73	-348,27	-3,94	-1.321,48	-15,04	170,81	1,95	160,43	1,83	-207,26	-2,32	66,52	0,75
hoch niedrig 2	276,89	2,93	110,78	1,17	120,70	1,27	-152,04	-1,60	-199,17	-2,11	-811,83	-8,78	459,87	4,95	461,72	1,71	106,30	1,12	186,28	1,98
hoch niedrig 3	545,70	6,11	450,35	5,03	360,49	3,99	-57,10	-0,63	-170,35	-1,88	-185,78	-2,06	476,49	5,27	136,84	1,83	372,50	4,10	330,11	3,64
hoch niedrig 4	506,97	5,48	340,18	3,63	299,80	3,22	92,45	1,00	-329,02	-3,54	-255,95	-2,72	252,39	2,65	407,15	4,37	434,21	4,69	317,53	3,42
hoch niedrig 5	204,15	2,36	-19,13	-0,22	0,23	0,00	-24,99	-0,29	-659,88	-7,54	-1.628,06	-18,92	-52,80	-0,59	66,12	0,76	166,69	1,93	52,31	0,60
hoch niedrig 6	147,36	1,66	81,75	0,92	57,72	0,65	-347,37	-3,90	-207,79	-2,34	-1.078,55	-12,44	168,88	1,91	153,84	1,74	2,30	0,03	144,41	1,63
	309,45	3,43	158,75	1,73	161,59	1,77	-137,01	-1,52	-319,08	-3,56	-880,27	-10,00	246,11	2,69	231,02	2,54	145,79	1,59	182,86	2,00
mittel hoch 1	414,64	6,35	391,26	6,03	412,28	6,35	295,89	4,57	93,23	1,44	-542,36	-8,38	316,62	4,80	431,78	6,65	400,49	6,18	388,58	6,00
mittel hoch 2	639,88	8,69	571,31	7,76	547,27	7,44	343,37	4,66	275,88	3,77	-662,58	-6,27	437,31	5,80	590,79	8,03	607,07	8,25	705,29	9,64
mittel hoch 3	253,74	3,70	183,92	2,68	261,33	3,84	96,67	1,43	-103,16	-1,50	-525,87	-7,62	151,48	2,19	290,09	4,26	145,74	2,10	178,99	2,61
mittel hoch 4	1.037,41	13,14	1.054,58	13,43	919,13	11,67	819,20	10,33	195,23	2,46	-1.278,54	-16,05	888,86	11,34	937,56	11,90	981,31	12,38	826,77	10,42
mittel hoch 5	527,73	9,14	502,22	8,68	496,62	8,58	257,03	4,45	388,33	6,72	-197,03	-3,38	656,86	11,62	505,79	8,74	353,64	6,13	465,44	8,06
mittel hoch 6	782,88	10,75	755,53	10,45	721,49	9,95	600,86	8,32	551,03	7,60	-303,53	-4,23	776,35	10,68	752,37	10,38	751,92	10,41	777,96	10,73
	609,38	8,63	576,47	8,17	559,68	7,97	402,67	5,63	233,42	3,41	-551,65	-7,65	537,92	7,78	584,72	8,35	540,03	7,57	557,17	7,91
mittel mittel 1	313,49	2,08	119,51	1,90	130,62	2,08	46,77	0,75	-85,05	-1,34	-849,49	-13,51	212,49	3,41	147,41	2,35	112,46	1,79	84,30	1,33
mittel mittel 2	441,56	7,11	358,22	5,72	277,31	4,42	188,64	3,02	266,69	4,34	-709,89	-11,42	492,24	8,02	318,35	5,07	320,88	5,14	473,86	7,72
mittel mittel 3	84,74	1,53	98,82	1,79	46,77	0,85	8,18	0,15	-64,78	-1,16	-468,37	-8,45	98,98	1,79	62,88	1,13	63,56	1,14	25,70	0,46
mittel mittel 4	205,39	3,02	249,49	3,70	183,42	2,70	141,20	2,09	-131,35	-1,93	-1.081,05	-15,99	196,78	2,89	196,38	2,89	195,90	2,90	151,87	2,24
mittel mittel 5	192,17	3,15	168,04	2,74	152,62	2,51	83,18	1,37	86,31	1,43	-797,47	-13,20	166,40	2,73	172,58	2,83	151,24	2,49	272,25	4,52
mittel mittel 6	214,73	3,53	165,87	2,73	68,26	1,12	116,77	1,92	-126,31	-2,07	-600,76	-9,90	157,39	2,57	119,62	1,97	156,00	2,57	57,23	0,94
	211,68	3,40	193,32	3,10	143,20	2,28	97,46	1,55	-9,08	-0,12	-751,17	-12,08	220,71	3,57	169,54	2,71	166,67	2,67	177,53	2,87
mittel niedrig 1	59,35	1,01	3,81	0,06	17,58	0,30	-176,95	-1,99	-114,66	-1,96	-410,06	-7,04	82,24	1,40	50,80	0,87	-26,03	-0,44	77,71	1,33
mittel niedrig 2	76,25	1,19	41,60	0,65	-57,52	-0,90	-253,69	-3,98	-132,46	-2,06	-1.187,13	-18,49	128,15	2,02	-30,43	-0,47	55,01	0,86	-35,64	-0,55
mittel niedrig 3	54,73	0,83	32,58	0,50	-35,31	-0,54	-143,43	-2,18	-112,10	-1,72	-1.323,24	-19,97	52,85	0,80	20,68	0,32	-59,96	-0,91	53,68	0,82
mittel niedrig 4	157,27	2,54	79,75	1,28	43,26	0,70	-14,25	-0,20	-161,72	-2,61	-600,03	-9,65	145,45	2,49	90,03	1,45	50,00	0,80	70,23	1,13
mittel niedrig 5	171,02	2,80	176,82	2,91	79,86	1,31	40,45	0,66	35,79	0,58	-895,85	-14,61	172,23	2,81	108,68	1,78	142,64	2,33	81,29	1,32
mittel niedrig 6	171,81	2,79	108,18	1,76	97,45	1,59	-51,79	-0,84	-166,22	-2,70	-650,49	-10,63	219,16	3,60	168,36	2,75	10,21	0,17	97,39	1,58
	115,07	1,86	73,79	1,19	24,22	0,41	-89,94	-1,43	-108,56	-1,74	-844,47	-13,40	134,85	2,19	68,02	1,12	28,64	0,47	57,44	0,94
niedrig hoch 1	125,14	3,08	107,80	2,65	112,98	2,77	-88,46	-2,19	32,86	0,81	-412,74	-10,12	92,87	2,28	114,98	2,82	103,76	2,57	118,04	2,91
niedrig hoch 2	106,66	2,58	81,25	1,96	88,12	2,14	27,39	0,66	-87,95	-2,12	-558,03	-13,52	129,77	3,17	94,66	2,29	82,19	1,98	33,28	0,80
niedrig hoch 3	74,73	1,73	51,14	1,19	42,33	0,98	18,75	0,43	-201,21	-4,68	-293,24	-6,81	62,35	1,45	52,74	1,22	53,65	1,24	58,34	1,36
niedrig hoch 4	103,55	2,40	98,32	2,28	94,04	2,18	-11,86	-0,97	-24,10	-0,56	-263,45	-6,06	95,23	2,21	100,66	2,33	82,86	1,92	55,06	1,27
niedrig hoch 5	175,52	3,94	172,99	3,89	181,50	4,09	164,92	3,72	-98,49	-2,23	-652,00	-14,63	95,80	2,13	185,77	4,19	176,77	3,99	166,37	3,70
niedrig hoch 6	91,46	2,19	76,23	1,82	73,05	1,75	-43,72	-1,04	-372,73	-8,94	-568,56	-13,67	93,09	2,23	76,37	1,83	-7,02	-0,17	-52,50	-1,26
	112,84	2,65	97,96	2,30	98,67	2,32	6,17	0,10	-125,27	-2,95	-458,00	-10,81	94,85	2,24	104,20	2,45	82,04	1,92	63,10	1,47
niedrig mittel 1	38,78	0,83	38,55	0,83	25,01	0,54	-20,82	-0,45	-18,22	-0,39	-682,10	-14,65	21,70	0,46	30,49	0,66	50,42	1,09	17,27	0,37
niedrig mittel 2	54,73	1,22	46,46	1,03	54,59	1,22	-20,89	-0,47	-50,28	-1,12	-439,01	-9,85	20,03	0,44	61,04	1,37	44,60	1,00	-1,73	-0,04
niedrig mittel 3	74,11	1,73	51,70	1,20	41,22	0,96	14,75	0,34	-215,14	-5,01	-539,95	-12,59	66,83	1,56	44,44	1,04	30,08	0,70	11,49	0,27
niedrig mittel 4	53,82	1,14	36,13	0,76	28,25	0,59	-19,60	-0,41	-87,84	-1,85	-142,72	-3,00	21,00	0,44	37,75	0,79	19,77	0,42	47,59	1,00
niedrig mittel 5	40,07	0,83	1,55	0,03	6,28	0,13	-78,93	-1,62	-321,18	-6,62	-252,34	-5,21	80,26	1,67	13,36	0,28	-36,99	-0,77	-2,07	-0,04
niedrig mittel 6	22,44	0,50	14,43	0,32	-3,27	-0,07	-13,73	-0,30	5,53	0,12	-472,20	-10,40	33,39	0,74	2,68	0,06	6,75	0,15	18,85	0,42
	47,33	1,04	31,47	0,70	25,34	0,56	-23,20	-0,49	-114,52	-2,48	-421,39	-9,28	40,54	0,89	31,63	0,70	19,01	0,43	15,23	0,33
niedrig niedrig 1	36,01	0,80	10,07	0,22	12,67	0,28	-73,61	-1,62	-187,26	-4,13	-329,98	-7,27	3,86	0,08	21,10	0,47	-24,45	-0,54	19,91	0,44
niedrig niedrig 2	39,69	0,82	32																	

A.2.9 Veränderung $N_2=1, F_1=8$

	N ₂ = 1					Veränderung					Veränderung					Veränderung				
	8 24 OLS	%	8 12 OLS	%	8 8 OLS	%	8 4 OLS	%	8 3 OLS	%	8 2 genau	%	g-Allokation	%	8 8 Bayes	%	8 4 Bayes	%	8 3 Bayes	%
hoch hoch 1	1.066,52	17,97	977,15	16,20	876,69	14,56	793,75	13,34	559,39	9,70	-459,62	-7,90	673,24	10,77	941,06	15,63	895,92	15,05	1.047,56	18,16
hoch hoch 2	1.812,58	20,24	2.095,64	23,63	1.454,70	16,58	-217,84	-2,44	1.949,55	22,63	1.918,89	21,13	1.462,66	16,23	1.501,93	17,12	1.378,89	15,43	1.856,56	21,55
hoch hoch 3	2.878,25	24,47	2.951,18	25,20	2.919,78	25,04	2.584,52	22,01	2.302,79	19,89	2.258,33	20,06	2.675,42	22,38	2.909,57	24,95	2.773,22	23,62	2.654,87	22,93
hoch hoch 4	828,31	8,38	808,66	8,24	930,50	9,58	617,74	6,15	405,81	4,08	518,28	5,28	394,73	3,90	953,88	9,82	670,02	6,67	479,37	4,82
hoch hoch 5	2.134,90	24,29	1.775,92	19,94	2.340,38	27,23	2.008,78	22,83	1.847,78	21,58	-325,20	-3,67	2.626,76	31,68	2.353,53	27,38	1.978,18	22,48	2.223,31	25,96
hoch hoch 6	2.315,82	18,20	2.371,99	18,77	2.109,27	16,85	1.950,21	15,32	875,50	6,85	1.206,46	9,48	1.687,35	12,83	2.390,49	19,09	1.963,26	15,43	1.868,49	14,61
	1.839,40	18,93	1.830,09	18,66	1.771,89	18,31	1.289,53	12,87	1.323,47	14,12	852,86	7,40	1.586,69	16,30	1.841,74	19,00	1.609,91	16,45	1.688,36	18,00
hoch mittel 1	7,96	0,11	-14,57	-0,20	5,45	0,08	-269,25	-3,74	-246,09	-3,44	-1.977,05	-27,95	-204,46	-2,78	44,01	0,62	-120,95	-1,68	-18,48	-0,26
hoch mittel 2	483,20	5,18	311,36	3,33	439,84	4,70	470,52	5,04	-40,02	-0,43	-1.422,70	-15,08	483,33	5,17	466,46	4,98	390,66	4,18	52,46	0,56
hoch mittel 3	835,18	9,11	708,55	7,68	715,36	7,71	524,17	5,57	77,05	0,83	-1.262,08	-13,95	1.030,44	11,64	707,07	7,62	539,71	5,74	492,53	5,31
hoch mittel 4	397,16	3,63	394,04	3,59	529,82	4,88	-139,74	-1,25	100,89	0,93	-276,18	-2,49	349,33	3,15	601,94	5,55	73,63	0,66	672,79	6,23
hoch mittel 5	650,27	6,54	495,53	4,98	609,55	6,12	368,03	3,70	353,94	3,66	-445,05	-4,40	283,28	2,76	604,74	6,07	510,19	5,13	859,43	8,89
hoch mittel 6	1.159,93	11,40	1.039,20	10,12	1.233,92	12,08	1.197,56	11,89	1.169,43	11,86	-727,90	-7,12	1.268,11	12,41	1.239,23	12,13	1.277,83	12,68	1.431,50	14,51
	588,95	5,99	489,02	4,92	588,99	5,93	358,55	3,54	235,87	2,24	-1.018,49	-11,83	535,01	5,39	610,58	6,16	445,18	4,45	581,70	5,87
hoch niedrig 1	311,92	3,27	260,21	2,72	13,30	0,14	73,60	0,77	-47,82	-0,50	-543,50	-5,77	493,32	5,28	56,69	0,59	185,33	1,94	320,55	3,37
hoch niedrig 2	170,56	2,23	135,45	1,77	-37,06	-0,49	-372,11	-4,78	-237,50	-3,06	-1.675,87	-21,57	337,82	4,51	57,61	0,75	-295,41	-3,80	31,67	0,41
hoch niedrig 3	209,80	2,92	86,46	1,20	146,32	2,03	46,76	0,64	-70,00	-0,97	-712,97	-9,71	213,46	2,95	156,59	2,17	35,01	0,48	200,23	2,77
hoch niedrig 4	280,30	2,84	57,09	0,57	58,34	0,59	584,88	6,10	222,40	2,25	-271,94	-2,78	948,46	10,24	130,88	1,32	591,22	6,17	37,27	0,38
hoch niedrig 5	457,77	5,11	300,86	3,35	492,39	5,59	514,85	5,94	427,94	4,78	-115,58	-1,29	723,40	8,28	535,57	6,08	756,19	8,73	479,83	5,36
hoch niedrig 6	586,92	5,49	451,81	4,18	520,26	4,87	339,76	3,15	-64,26	-0,60	-997,32	-9,17	706,05	6,68	530,52	4,96	445,06	4,12	480,26	4,50
	336,21	3,64	215,31	2,30	198,93	2,12	197,96	1,97	38,46	0,32	-71,53	-0,38	570,42	6,32	246,65	2,65	286,23	2,94	258,30	2,80
mittel hoch 1	370,35	5,69	390,39	5,98	442,39	6,83	318,66	4,90	-39,37	-0,60	-950,76	-14,44	330,77	5,05	442,27	6,83	359,29	5,53	284,64	4,33
mittel hoch 2	288,71	4,30	216,11	3,20	259,59	3,88	333,07	5,00	43,95	0,65	-1.445,93	-21,27	136,02	1,98	266,96	3,99	329,24	4,94	227,86	3,38
mittel hoch 3	319,64	5,91	248,81	4,59	385,97	7,23	251,53	4,61	-45,71	-0,84	-450,11	-8,42	197,00	3,57	389,21	7,29	262,10	4,80	203,60	3,72
mittel hoch 4	248,94	3,82	339,46	5,28	191,40	2,93	65,22	1,00	-278,13	-4,23	-993,18	-15,09	255,97	3,97	207,87	3,18	178,38	2,74	88,97	1,35
mittel hoch 5	189,50	2,84	244,94	3,69	-47,87	-0,71	-12,15	-0,18	-532,04	-7,90	-1.774,36	-26,03	256,08	3,89	17,30	0,26	77,10	1,16	125,29	1,86
mittel hoch 6	439,58	7,00	466,09	7,45	462,85	7,41	264,96	4,18	160,52	2,60	-171,98	-2,80	267,71	4,25	457,94	7,33	357,70	5,64	552,01	8,94
	309,45	4,93	317,63	5,03	282,39	4,59	203,55	3,25	-115,13	-1,72	-964,39	-14,67	240,59	3,79	296,92	4,81	260,64	4,13	247,06	3,93
mittel mittel 1	126,78	1,89	130,05	1,95	162,77	2,45	60,11	0,90	30,28	0,45	-1.126,52	-16,89	197,88	2,98	168,16	2,53	73,28	1,09	82,06	1,23
mittel mittel 2	117,40	1,85	-0,17	0,00	-20,81	-0,33	137,10	2,17	-179,82	-2,78	-330,83	-5,26	290,19	4,68	38,34	0,61	145,67	2,30	2,81	0,04
mittel mittel 3	73,32	1,18	74,38	1,20	-170,67	-2,76	-5,35	-0,09	-362,24	-5,77	-737,46	-9,71	-44,24	-0,70	-122,32	-1,98	73,94	1,20	-18,86	-0,30
mittel mittel 4	755,68	13,59	733,02	13,08	755,22	13,56	693,41	12,53	601,25	10,83	285,16	4,96	715,61	12,89	752,04	13,50	796,54	14,40	743,24	13,38
mittel mittel 5	73,20	1,30	46,16	0,82	20,52	0,37	-34,97	-0,62	-50,73	-0,89	-1.085,50	-19,20	186,13	3,37	34,69	0,62	-25,66	-0,45	-22,40	-0,39
mittel mittel 6	199,11	3,40	202,69	3,46	212,90	3,67	204,91	3,53	97,12	1,66	-412,87	-7,08	130,25	2,20	235,99	4,07	226,28	3,89	159,71	2,73
	224,25	3,87	197,69	3,42	159,99	2,83	175,87	3,07	22,64	0,58	-541,34	-8,77	245,97	4,24	184,48	3,22	215,01	3,74	157,76	2,78
mittel niedrig 1	65,69	1,19	7,00	0,13	-63,97	-1,15	-176,89	-3,16	63,29	1,16	-540,32	-9,67	-21,80	-0,39	-39,66	-0,71	-15,11	-0,27	108,18	1,99
mittel niedrig 2	18,55	0,31	42,19	0,72	-0,83	-0,01	-138,37	-2,32	-320,14	-5,44	-553,33	-9,29	63,94	1,09	11,26	0,19	-84,90	-1,42	-29,40	-0,50
mittel niedrig 3	54,70	1,14	-75,84	-1,57	11,85	0,25	-181,34	-3,74	-117,39	-2,43	-859,55	-17,86	56,20	1,17	19,81	0,41	-161,55	-3,33	2,68	0,06
mittel niedrig 4	240,82	3,77	131,26	2,05	42,11	0,66	-107,80	-1,67	-655,53	-10,36	-174,49	-2,70	338,22	5,37	88,64	1,38	92,31	1,43	246,56	3,90
mittel niedrig 5	29,60	0,49	13,94	0,23	44,23	0,73	-50,06	-0,82	-245,43	-4,09	-899,93	-14,69	-72,12	-1,16	47,49	0,78	-25,00	-0,41	41,00	0,68
mittel niedrig 6	150,91	2,30	208,11	3,20	151,88	2,34	195,32	3,02	-109,65	-1,66	-914,33	-13,90	176,27	2,69	156,40	2,41	249,34	3,85	50,54	0,76
	93,38	1,53	54,44	0,79	30,88	0,47	-76,53	-1,45	-230,81	-3,80	-656,99	-11,35	90,12	1,46	47,32	0,74	9,18	-0,02	69,93	1,15
niedrig hoch 1	192,09	4,11	137,19	2,91	132,09	2,80	29,71	0,63	118,46	2,51	-198,39	-2,97	151,83	3,24	131,78	2,80	72,70	1,55	156,70	3,32
niedrig hoch 2	40,15	1,14	23,65	0,67	3,26	0,09	33,94	0,96	-36,49	-1,03	-250,59	-6,97	36,16	1,03	6,80	0,19	38,90	1,10	-28,19	-0,79
niedrig hoch 3	161,56	3,32	128,07	2,61	150,47	3,09	149,54	3,07	124,26	2,54	-105,93	-2,18	88,92	1,81	153,13	3,14	151,28	3,10	129,81	2,66
niedrig hoch 4	85,86	1,86	51,31	1,11	17,99	0,39	44,05	0,96	-201,10	-4,37	-173,19	-3,78	69,57	1,51	43,60	0,95	76,59	1,66	38,27	0,83
niedrig hoch 5	81,49	1,96	64,01	1,54	32,09	0,77	-3,33	-0,08	60,66	1,47	-148,69	-3,58	7,02	0,17	35,60	0,85	45,24	1,08	74,52	1,80
niedrig hoch 6	103,70	2,15	142,40	2,97	107,73	2,25	-35,02	-0,72	-186,99	-3,86	-233,09	-4,88	112,57	2,34	118,01	2,46	57,06	1,18	5,29	0,11
	110,81	2,42	91,10	1,97	73,94	1,57	36,48	0,80	-20,20	-0,46	-174,98	-4,06	77,68	1,68	81,49	1,73	73,63	1,61	62,73	1,32
niedrig mittel 1	64,51	1,38	13,19	0,28	28,91	0,62	8,01	0,17	-285,72	-6,07	-314,85	-6,77	-0,45	-0,01	31,89	0,68	14,23	0,30	-97,78	-2,08

Veränderung $N_2=2, F_1=40$

		N ₂ = 2		Veränderung										Veränderung										Veränderung										e-Allokation	
		F ₁	N ₁	40 24 OLS	%	40 12 OLS	%	40 8 OLS	%	40 4 OLS	%	40 3 OLS	%	40 2 genau	%	40 8 Bayes	%	40 4 Bayes	%	40 3 Bayes	%														
hoch	hoch 1	2.054,80	24,43	1.944,34	23,07	1.858,12	22,30	679,00	7,91	652,86	7,87	-380,30	-4,57	1.917,33	23,01	1.539,90	17,93	1.684,92	20,31	1.728,88	19,97														
hoch	hoch 2	1.673,22	17,70	1.672,35	17,85	1.596,59	16,97	760,06	8,01	241,22	2,49	-74,28	-0,82	1.657,36	17,62	1.368,18	14,93	1.339,11	14,17	1.610,20	17,97														
hoch	hoch 3	1.066,55	12,38	999,95	11,60	988,89	11,47	900,64	10,63	424,09	4,99	-1.003,86	-11,65	1.082,90	12,56	1.008,07	11,90	1.103,42	12,98	1.056,47	12,36														
hoch	hoch 4	2.701,07	30,18	1.884,49	20,87	2.535,99	27,90	2.267,81	25,37	403,69	-4,41	2.076,82	23,23	2.483,80	27,33	2.553,35	28,57	1.415,61	15,45	2.060,00	22,29														
hoch	hoch 5	2.733,59	26,30	2.736,42	26,41	1.949,83	18,62	2.374,51	22,63	1.257,05	12,01	1.643,36	15,93	2.345,82	22,40	2.511,33	23,93	2.293,63	21,91	1.789,80	16,55														
hoch	hoch 6	1.675,83	17,54	1.569,10	16,42	1.516,61	15,90	1.133,07	12,20	1.040,77	11,21	-667,09	-6,95	1.590,90	16,68	1.716,86	18,39	1.586,49	16,99	1.578,58	16,58														
		1.984,18	21,42	1.801,10	19,37	1.741,00	18,86	1.359,57	14,46	702,05	7,47	199,11	1,86	1.846,35	19,93	1.782,95	19,19	1.570,53	17,09	1.638,82	17,64														
		0,9997	1	0,9996	1	0,9997	1	0,9855	1	0,9299	1	0,6619	0	0,9997	1	0,9997	1	1,0000	1	1,0000	1														
hoch	mittel 1	945,01	10,09	994,08	10,59	836,27	8,94	315,17	3,41	257,58	2,68	-863,86	-9,26	1.043,94	11,15	976,13	10,56	734,78	7,64	820,89	8,61														
hoch	mittel 2	596,99	7,35	446,50	5,45	440,14	5,39	57,62	0,70	64,84	0,79	-598,04	-7,12	586,29	7,19	518,70	6,34	479,29	5,85	616,21	7,59														
hoch	mittel 3	929,50	9,81	668,59	7,04	779,85	8,20	784,18	8,39	242,26	2,53	-642,17	-6,81	849,19	8,93	981,16	10,49	721,91	7,53	853,05	9,00														
hoch	mittel 4	427,17	5,08	478,80	5,74	412,69	4,92	407,59	4,90	11,22	0,13	-672,48	-8,09	500,63	5,97	614,92	7,40	548,71	6,58	384,45	4,52														
hoch	mittel 5	591,32	6,18	425,84	4,42	238,64	2,46	-164,69	-1,70	7,29	0,08	-1.527,06	-16,14	400,88	4,14	246,77	2,54	637,39	6,72	580,27	6,11														
hoch	mittel 6	763,74	7,75	620,09	6,28	768,81	7,91	267,37	2,72	-145,23	-1,46	-781,25	-7,94	837,57	8,61	752,09	7,65	653,04	6,58	782,28	7,96														
		708,95	7,71	605,65	6,58	579,40	6,30	277,87	3,07	72,99	0,79	-847,48	-9,23	703,08	7,67	681,63	7,50	629,19	6,82	672,86	7,30														
		0,9998	1	0,9986	1	0,9994	1	0,8352	1	0,7175	1	0,0319	1	0,9997	1	0,9981	1	0,9999	1	0,9999	1														
hoch	niedrig 1	343,22	3,98	183,75	2,11	210,35	2,44	87,51	1,02	-236,70	-2,73	-398,93	-4,61	313,11	3,63	392,01	4,56	258,09	2,97	261,70	2,98														
hoch	niedrig 2	275,79	3,33	238,48	2,91	154,52	1,87	-8,33	-0,10	-381,40	-4,60	-772,38	-9,18	259,32	3,13	169,45	2,02	290,17	3,50	460,49	5,65														
hoch	niedrig 3	219,24	2,40	182,37	2,05	104,57	1,18	-206,87	-2,32	-386,24	-4,31	-1.378,23	-15,74	177,28	2,00	188,82	2,12	150,96	1,69	250,89	2,83														
hoch	niedrig 4	168,28	1,82	95,97	1,04	65,56	0,72	-27,76	-0,30	-594,27	-6,43	-1.600,62	-17,32	199,28	2,18	227,64	2,48	115,51	1,25	426,56	4,75														
hoch	niedrig 5	127,82	1,49	-31,97	-0,37	-42,82	-0,50	-195,39	-2,26	-538,53	-6,26	-920,68	-10,68	57,81	0,67	33,19	0,38	129,95	1,51	-8,14	-0,09														
hoch	niedrig 6	145,31	1,71	14,69	0,17	-48,46	-0,57	-299,44	-3,54	-546,00	-6,40	-1.244,64	-14,60	20,27	0,24	145,64	1,22	23,22	0,27	129,90	1,53														
		212,22	2,46	113,88	1,32	73,95	0,86	-108,38	-1,25	-447,19	-5,12	-1.052,58	-12,02	171,18	1,97	192,79	2,21	161,32	1,86	253,57	2,94														
		0,9957	1	0,9236	1	0,7578	1	0,2214	1	0,0014	1	0,0031	1	0,9385	1	0,9682	1	0,9466	1	0,9702	1														
mittel	hoch 1	464,47	7,54	389,46	6,24	400,12	6,49	318,09	5,12	-164,77	-2,68	-607,38	-8,86	436,79	7,08	385,48	6,20	282,41	4,60	226,21	3,60														
mittel	hoch 2	359,74	5,23	332,06	4,82	52,10	0,76	11,86	0,17	87,79	1,29	-437,75	-6,36	307,37	4,47	316,10	4,58	367,37	5,39	511,75	7,60														
mittel	hoch 3	623,52	10,13	630,68	10,36	561,79	9,10	425,71	6,88	127,13	2,11	-775,91	-12,51	610,69	9,89	562,64	9,09	641,57	10,65	677,55	11,09														
mittel	hoch 4	415,70	7,04	380,58	6,46	332,53	5,61	193,98	3,31	-154,92	-3,00	-726,05	-12,29	366,61	6,18	311,95	5,32	293,44	4,93	437,54	7,47														
mittel	hoch 5	337,61	5,70	307,53	5,18	147,96	2,94	136,77	2,31	-17,10	-0,29	-637,52	-10,76	251,27	4,22	236,62	4,00	276,41	4,68	359,36	6,12														
mittel	hoch 6	568,35	8,87	484,74	7,53	481,53	7,52	326,06	5,07	194,39	3,01	-365,48	-5,71	535,52	8,36	437,08	6,79	429,40	6,64	677,29	10,86														
		461,50	7,42	420,84	6,76	329,34	5,33	235,41	3,81	12,09	0,14	-591,69	-9,58	418,04	6,70	374,98	6,00	381,77	6,15	481,62	7,79														
		0,9999	1	0,9999	1	0,9832	1	0,9703	1	0,7506	1	0,0060	1	0,9988	1	0,9993	1	0,9995	1	0,9972	1														
mittel	mittel 1	201,93	3,21	215,37	3,42	209,06	3,34	11,99	0,19	-143,02	-2,23	-1.216,55	-19,36	272,27	4,35	114,07	1,79	121,21	1,89	166,08	2,60														
mittel	mittel 2	255,50	4,26	248,19	4,13	217,75	3,62	-59,13	-0,97	17,80	0,30	-633,68	-10,60	250,17	4,16	164,11	2,70	168,81	2,80	169,22	2,78														
mittel	mittel 3	263,95	3,93	228,79	4,00	51,79	0,77	-18,05	-0,27	-167,32	-2,46	-683,76	-10,22	160,61	2,38	193,02	2,86	122,81	1,80	126,19	1,85														
mittel	mittel 4	655,96	9,32	570,63	8,66	610,85	9,40	101,28	1,50	-136,03	-0,20	-558,51	-8,40	668,51	10,17	422,47	6,25	512,66	7,66	593,24	8,95														
mittel	mittel 5	198,08	3,30	185,15	3,10	61,45	1,02	-38,38	-0,64	-65,40	-1,10	-92,56	-15,36	136,64	2,27	131,81	2,20	199,94	3,37	181,34	3,02														
mittel	mittel 6	243,21	3,71	156,42	2,36	120,40	1,84	112,41	1,71	-177,10	-2,71	-1.075,53	-16,35	208,47	3,19	193,43	2,95	186,23	2,85	281,01	4,32														
		303,10	4,72	267,42	4,18	213,08	3,33	18,35	0,25	-111,85	-1,71	-848,93	-13,38	282,78	4,42	203,15	3,13	218,61	3,40	252,85	3,92														
		0,9772	1	0,9602	1	0,8874	1	0,7651	1	0,3394	1	0,0033	1	0,9469	1	0,9547	1	0,9157	1	0,9446	1														
mittel	niedrig 1	43,44	0,76	33,56	0,59	20,76	0,37	-126,49	-2,21	-175,75	-3,09	-806,39	-14,15	53,74	0,95	4,42	0,08	-3,92	-0,07	59,34	1,04														
mittel	niedrig 2	112,98	1,69	6,78	0,10	-34,88	-0,52	24,97	0,37	-220,93	-3,30	-977,11	-14,65	37,32	0,56	77,59	1,16	110,17	1,65	179,59	2,70														
mittel	niedrig 3	73,94	1,24	12,16	0,20	31,72	0,53	-109,24	-1,83	-136,71	-2,29	-623,99	-10,54	77,54	1,31	24,10	0,40	32,13	0,54	273,83	4,74														
mittel	niedrig 4	28,13	0,49	-88,54	-1,54	-35,02	-0,61	-247,36	-4,27	-76,91	-1,34	-929,37	-16,35	39,09	0,69	-33,58	-0,58	33,69	0,59	2,84	0,05														
mittel	niedrig 5	69,24	1,19	17,43	0,30	-61,95	-1,06	-81,31	-0,39	-143,17	-2,45	-961,25	-16,24	5,62	0,10	5,48	0,09	-6,32	-0,11	52,53	0,90														
mittel	niedrig 6	27,29	0,47	34,35	0,60	42,94	0,74	-12,68	-0,22	-193,42	-3,36	-951,58	-16,18	73,77	1,28	91,79	1,61	41,08	0,71	133,95	2,34														
		59,17	0,98	2,62	0,04	-6,07	-0,09	-92,02	-1,59	-157,72	-2,64	-874,95	-14,69	47,85	0,81	28,30	0,46	34,47	0,55	117,01	1,96														
		0,9920	1	0,6798	0	0,5007	0	0,1417	1	0,0229	1	0,0000	0	0,9045	1	0,7201	1	0,7997	0	0,9036	1														
niedrig	hoch 1	72,84	1,84	58,85	1,49	31,27	0,79	-40,45	-1,03	-102,50	-2,58	-438,18	-11,05	51,40	1,29	84,72	2,15	43,72	1,10	56,11	1,41														
niedrig	hoch 2	79,85	1,90	77,89	1,86	23,37	0,55	7,57	0,18	-53,76	-1,28	-570,51	-13,52	44,46	1,05	40,97	0,97	59,18	1,41	8,44	0,20														
niedrig	hoch 3	102,94	2,40	94,89	2,21	97,26	2,27	-19,30	-0,45	-21,44	-0,50	-585,04	-13,59	102,27	2,38	75,81	1,76	92,41	2,16	95,89	2,23														
niedrig	hoch 4	131,83	3,06	117,91	2,74	95,29	2,21	13,15	0,30	-18,69	-0,43	-688,78	-10,91	109,99	2,55	76,46	1,77	93,14	2,17	121,56	2,84														
niedrig	hoch 5	118,49	2,98	101,40	2,55	77,05	1,94	-45,03	-1,14	-93,28	-2,35	-402,87	-10,13	89,65	2,25	107,35	2,71	107,20	2,71	99,25	2,50														
niedrig	hoch 6	185,51	4,22	137,40	3,11	134,23	3,05	57,78	1,31	17,57	0,40	-399,48	-9,06	160,44	3,65	159,26	3,62	147,52	3,35	158,60	3,60														
		115,24	2,73	98,06	2,33	76,41	1,80	-4,38	-0,14	-45,35	-1,13	-477,48	-11,38	93,03	2,20	90,76	2,16	90,53	2,15	89,98	2,13														
		0,9987	1	0,9994	1																														

A.2.11 Veränderung $N_2=2, F_1 = 20$

N ₂ = 2			Veränderung										Veränderung										Veränderung											
F ₂	F ₃	N ₁	20 24 OLS	%	20 12 OLS	%	20 8 OLS	%	20 4 OLS	%	20 3 OLS	%	20 2 genau	%	g-Allokation	%	20 8 Bayes	%	20 4 Bayes	%	20 3 Bayes	%	20 2 Bayes	%	20 1 Bayes	%	20 0 Bayes	%	20 -1 Bayes	%	20 -2 Bayes	%	20 -3 Bayes	%
hoch hoch 1	1.322,93	13,16	1.170,51	11,68	1.177,81	11,63	1.240,57	12,50	227,40	2,25	532,95	5,39	1.511,99	15,69	1.247,48	12,31	1.353,44	13,63	980,45	9,70	1.247,48	12,31	1.353,44	13,63	980,45	9,70	1.247,48	12,31	1.353,44	13,63	980,45	9,70	1.247,48	12,31
hoch hoch 2	2.198,83	22,41	1.865,98	19,06	1.874,64	19,33	1.524,73	15,46	1.292,40	12,80	-788,04	-7,98	2.433,48	24,80	1.921,35	19,82	2.183,25	22,14	1.864,83	18,46	1.921,35	19,82	2.183,25	22,14	1.864,83	18,46	1.921,35	19,82	2.183,25	22,14	1.864,83	18,46	1.921,35	19,82
hoch hoch 3	987,58	9,00	804,13	7,22	946,44	8,66	713,73	6,46	216,08	1,93	-993,06	-9,99	740,77	6,76	1.146,80	10,49	936,91	8,49	827,73	7,40	1.146,80	10,49	936,91	8,49	827,73	7,40	1.146,80	10,49	936,91	8,49	827,73	7,40	1.146,80	10,49
hoch hoch 4	3.984,37	34,75	3.388,63	30,19	3.786,44	33,03	3.339,20	29,35	905,71	7,89	3.822,07	34,15	4.287,46	39,30	3.914,18	34,14	3.770,90	33,15	2.688,96	23,42	3.914,18	34,14	3.770,90	33,15	2.688,96	23,42	3.914,18	34,14	3.770,90	33,15	2.688,96	23,42	3.914,18	34,14
hoch hoch 5	2.574,05	25,37	2.102,64	20,45	2.117,60	20,76	1.859,52	18,30	1.922,80	18,94	2.341,24	23,34	2.614,67	26,43	2.106,74	20,65	2.146,32	21,12	2.235,11	22,02	2.106,74	20,65	2.146,32	21,12	2.235,11	22,02	2.106,74	20,65	2.146,32	21,12	2.235,11	22,02	2.106,74	20,65
hoch hoch 6	630,84	7,11	541,37	5,98	657,64	7,39	504,47	5,67	422,07	4,72	-181,73	-2,11	304,04	3,41	726,21	8,16	664,94	7,48	649,71	7,27	726,21	8,16	664,94	7,48	649,71	7,27	726,21	8,16	664,94	7,48	649,71	7,27	726,21	8,16
	1.949,77	18,64	1.645,54	15,76	1.760,09	16,80	1.530,37	14,62	831,08	8,09	788,90	7,30	1.982,07	19,40	1.843,79	17,60	1.842,63	17,67	1.541,13	14,71	1.843,79	17,60	1.842,63	17,67	1.541,13	14,71	1.843,79	17,60	1.842,63	17,67	1.541,13	14,71	1.843,79	17,60
	0,9530	1	0,9484	1	0,9495	1	0,9323	1	0,8733	1	0,6443	1	0,9404	1	0,9606	1	0,9564	1	0,9574	1	0,9606	1	0,9564	1	0,9574	1	0,9606	1	0,9564	1	0,9574	1	0,9606	1
hoch mittel 1	806,10	9,41	705,61	8,18	664,07	7,75	577,55	6,60	-122,36	-1,40	-584,37	-6,93	1.215,90	14,91	673,15	7,85	647,72	7,40	481,26	5,51	673,15	7,85	647,72	7,40	481,26	5,51	673,15	7,85	647,72	7,40	481,26	5,51	673,15	7,85
hoch mittel 2	513,47	5,47	347,48	3,69	351,05	3,71	-27,42	-0,29	5,42	0,06	-756,92	-8,12	-21,25	-0,21	388,18	4,10	302,66	3,15	600,49	6,47	388,18	4,10	302,66	3,15	600,49	6,47	388,18	4,10	302,66	3,15	600,49	6,47	388,18	4,10
hoch mittel 3	559,48	5,66	507,09	5,10	696,72	7,14	104,31	1,04	256,92	2,57	-1.346,30	-13,71	500,01	5,06	722,94	7,41	339,90	3,39	471,70	4,72	722,94	7,41	339,90	3,39	471,70	4,72	722,94	7,41	339,90	3,39	471,70	4,72	722,94	7,41
hoch mittel 4	178,26	2,38	94,38	1,26	28,44	0,38	-70,09	-0,94	-265,72	-3,52	-753,96	-9,99	150,72	2,01	103,30	1,38	112,03	1,50	110,79	1,47	103,30	1,38	112,03	1,50	110,79	1,47	103,30	1,38	112,03	1,50	110,79	1,47	103,30	1,38
hoch mittel 5	543,74	5,71	708,23	7,45	794,09	8,47	488,09	5,23	485,02	5,19	-778,69	-8,10	738,15	7,79	808,13	8,62	603,58	6,47	839,69	8,98	808,13	8,62	603,58	6,47	839,69	8,98	808,13	8,62	603,58	6,47	839,69	8,98	808,13	8,62
hoch mittel 6	720,33	7,96	679,96	7,57	512,51	5,71	139,77	1,53	93,59	1,03	-856,68	-9,52	653,67	7,25	746,46	8,31	581,23	6,36	671,73	7,40	746,46	8,31	581,23	6,36	671,73	7,40	746,46	8,31	581,23	6,36	671,73	7,40	746,46	8,31
	553,56	6,10	507,13	5,54	507,81	5,52	202,03	2,20	75,48	0,65	-846,16	-9,40	539,53	6,13	573,70	6,28	431,19	4,71	529,28	5,76	573,70	6,28	431,19	4,71	529,28	5,76	573,70	6,28	431,19	4,71	529,28	5,76	573,70	6,28
	0,9938	1	0,9866	1	0,9797	1	0,7466	1	0,5963	1	0,0037	1	0,9212	1	0,9901	1	0,9752	1	0,9814	1	0,9901	1	0,9752	1	0,9814	1	0,9901	1	0,9752	1	0,9814	1	0,9901	1
hoch niedrig 1	19,33	0,22	-138,19	-1,55	-93,91	-1,06	-208,60	-2,40	-162,29	-1,86	-1.921,31	-21,97	151,99	1,74	-58,38	-0,66	191,71	2,21	111,33	1,28	-58,38	-0,66	191,71	2,21	111,33	1,28	-58,38	-0,66	191,71	2,21	111,33	1,28	-58,38	-0,66
hoch niedrig 2	305,40	3,27	-7,31	-0,08	102,67	1,08	446,13	4,86	-191,41	-2,01	-1.531,08	-16,61	599,01	6,55	191,36	2,02	473,05	5,15	157,47	1,65	191,36	2,02	473,05	5,15	157,47	1,65	191,36	2,02	473,05	5,15	157,47	1,65	191,36	2,02
hoch niedrig 3	483,43	5,39	504,38	5,66	469,28	5,24	481,06	5,36	-10,12	-0,11	-282,04	-3,16	347,83	3,80	536,56	5,99	513,88	5,73	554,15	6,19	536,56	5,99	513,88	5,73	554,15	6,19	536,56	5,99	513,88	5,73	554,15	6,19	536,56	5,99
hoch niedrig 4	347,92	3,71	373,38	4,03	365,20	3,91	633,75	6,98	-132,56	-1,45	-1.652,02	-17,36	467,62	5,01	430,05	4,60	714,97	7,88	572,88	6,25	430,05	4,60	714,97	7,88	572,88	6,25	430,05	4,60	714,97	7,88	572,88	6,25	430,05	4,60
hoch niedrig 5	89,04	1,02	117,68	1,37	40,11	0,46	-108,88	-1,27	-438,15	-5,04	-1.174,58	-13,57	300,86	3,52	139,42	1,61	148,83	1,74	119,48	1,37	139,42	1,61	148,83	1,74	119,48	1,37	139,42	1,61	148,83	1,74	119,48	1,37	139,42	1,61
hoch niedrig 6	133,98	1,50	-27,06	-0,30	-124,35	-1,37	-139,21	-1,58	-606,08	-6,96	-1.401,24	-15,88	446,08	5,19	-83,54	-0,92	246,19	2,80	240,09	2,76	-83,54	-0,92	246,19	2,80	240,09	2,76	-83,54	-0,92	246,19	2,80	240,09	2,76	-83,54	-0,92
	229,85	2,52	137,15	1,52	126,50	1,38	184,04	1,99	-256,77	-2,90	-1.327,05	-14,76	385,57	4,30	192,58	2,11	381,44	4,25	292,57	3,25	192,58	2,11	381,44	4,25	292,57	3,25	192,58	2,11	381,44	4,25	292,57	3,25	192,58	2,11
	0,9410	1	0,7555	1	0,7762	1	0,5288	1	0,0708	1	0,0317	1	0,9560	1	0,8559	1	0,8530	1	0,9122	1	0,8559	1	0,8530	1	0,9122	1	0,8559	1	0,8530	1	0,9122	1	0,8559	1
mittel hoch 1	431,32	6,62	381,67	5,86	252,29	3,84	172,88	2,66	50,93	0,79	-503,85	-5,60	413,10	6,41	291,16	4,43	320,40	4,92	432,67	6,71	291,16	4,43	320,40	4,92	432,67	6,71	291,16	4,43	320,40	4,92	432,67	6,71	291,16	4,43
mittel hoch 2	644,67	8,78	674,93	9,25	529,77	7,23	423,86	5,75	148,24	2,00	-378,86	-5,11	614,83	8,40	611,72	8,34	524,54	7,11	521,50	7,05	611,72	8,34	524,54	7,11	521,50	7,05	611,72	8,34	524,54	7,11	521,50	7,05	611,72	8,34
mittel hoch 3	214,73	3,13	205,99	3,02	189,44	2,77	86,59	1,26	-365,03	-5,20	-655,85	-9,63	342,37	5,10																				

A.2.12 Veränderung $N_2=2, F_1=8$

$N_2 = 2$				Veränderung		Veränderung										Veränderung									
F_2	F_3	N_1	8 24 OLS	%	8 12 OLS	%	8 8 OLS	%	8 4 OLS	%	8 3 OLS	%	8 2 genau	%	α -Allokation	%	8 8 Bayes	%	8 4 Bayes	%	8 3 Bayes	%			
hoch hoch 1	1.003,01	16,83	851,86	14,23	904,94	15,12	665,62	11,24	710,35	11,82	-1.483,15	-24,67	879,26	14,74	912,62	15,24	722,93	12,21	795,75	13,24					
hoch hoch 2	1.987,20	22,21	1.825,97	20,77	2.142,62	24,33	1.012,20	11,67	1.627,41	17,92	1.680,12	18,54	1.114,05	11,49	2.069,04	23,50	1.788,22	20,61	1.332,54	14,67					
hoch hoch 3	2.739,40	23,35	2.917,77	25,23	2.726,10	22,93	1.215,08	10,60	2.429,90	20,82	1.166,07	9,72	3.007,70	26,20	2.770,06	23,30	2.043,75	17,83	-499,73	-4,28					
hoch hoch 4	842,66	8,60	800,68	8,13	757,78	7,63	918,49	9,53	-43,94	-0,45	-713,70	-7,09	734,36	7,52	761,73	7,67	1.003,01	10,41	884,47	9,04					
hoch hoch 5	2.115,83	23,91	2.191,66	25,07	2.265,07	25,98	1.732,21	19,39	1.760,21	19,99	1.321,05	15,06	2.176,62	25,41	2.272,54	26,06	1.879,63	21,04	2.137,83	24,28					
hoch hoch 6	2.432,07	19,27	2.547,50	20,52	2.310,67	18,43	722,00	5,72	1.933,35	14,97	1.676,85	13,23	1.178,70	8,80	2.446,52	19,51	1.997,70	15,84	2.068,30	16,02					
	1.853,36	19,03	1.855,91	18,99	1.851,19	19,07	1.044,27	11,36	1.402,88	14,18	607,87	4,13	1.515,11	15,69	1.872,09	19,21	1.572,54	16,32	1.119,86	12,16					
	0,9939	0	0,9885	0	0,9898	0	0,9348	1	0,9522	1	0,7284	1	0,9610	1	0,9904	0	0,9928	1	0,9409	1					
hoch mittel 1	22,93	0,32	16,15	0,23	-118,11	-1,66	-294,73	-4,11	41,16	0,60	-431,27	-6,20	-556,14	-7,22	-77,81	-1,09	-5,86	-0,08	30,84	0,45					
hoch mittel 2	441,35	4,71	273,16	2,88	506,04	5,48	-62,87	-0,67	-530,95	-5,82	-2.770,09	-28,87	563,68	6,12	509,20	5,52	333,52	3,55	657,59	7,21					
hoch mittel 3	688,33	7,41	809,75	8,83	604,41	6,47	-537,04	-5,65	308,21	3,40	-322,04	-3,41	773,93	8,44	619,39	6,63	293,12	3,08	776,35	8,57					
hoch mittel 4	359,53	3,25	337,58	3,06	449,78	4,14	-34,06	-0,32	-485,74	-4,28	-971,57	-9,71	762,96	7,14	546,13	5,02	519,08	4,82	-168,14	-1,48					
hoch mittel 5	626,27	6,34	549,24	5,52	548,31	5,50	-224,47	-2,22	-391,49	-3,99	-1.362,95	-13,20	1.023,44	10,76	607,03	6,09	30,20	0,30	407,20	4,15					
hoch mittel 6	1.132,51	11,12	1.297,40	12,82	1.288,05	12,79	1.338,21	13,34	1.255,50	12,58	-699,50	-6,76	1.230,80	12,00	1.360,67	13,51	1.352,72	13,48	1.483,19	14,86					
	545,15	5,53	547,21	5,56	546,41	5,45	30,84	0,06	32,78	0,42	-1.092,90	-11,36	633,11	6,21	594,10	5,94	420,46	4,19	531,17	5,63					
	0,9395	1	0,9070	1	0,9192	1	0,6278	1	0,5916	1	0,0800	1	0,8524	1	0,9319	1	0,8226	1	0,8489	1					
hoch niedrig 1	252,46	2,64	215,72	2,26	-51,90	-0,54	-24,16	-0,25	-146,14	-1,59	-84,00	-0,93	227,10	2,38	-41,18	-0,43	160,62	1,66	627,27	6,82					
hoch niedrig 2	242,84	3,20	-225,25	-2,90	162,39	2,13	-64,86	-0,84	-193,99	-2,49	-1.335,65	-18,09	302,76	4,02	199,38	2,62	-0,64	-0,01	22,83	0,29					
hoch niedrig 3	222,87	3,11	240,15	3,35	311,47	4,45	-77,98	-1,05	69,08	0,98	-377,73	-5,21	46,93	0,64	334,99	4,78	7,01	0,09	388,23	5,52					
hoch niedrig 4	427,39	4,39	35,32	0,35	519,56	5,37	190,00	1,95	-833,54	-8,38	-294,42	-3,01	-248,02	-2,37	522,53	5,40	347,79	3,57	-159,02	-1,60					
hoch niedrig 5	516,88	5,80	487,81	5,49	60,52	0,67	563,67	6,51	-260,41	-2,97	-84,40	-0,96	442,99	4,94	175,54	1,94	537,72	6,21	546,05	6,22					
hoch niedrig 6	456,28	4,24	54,32	0,49	559,75	5,23	85,50	0,78	-453,64	-4,17	-1.420,17	-13,36	806,47	7,70	584,42	5,46	257,68	2,34	373,18	3,43					
	353,12	3,90	134,68	1,51	260,30	2,89	112,03	1,18	-303,11	-3,10	-599,39	-6,93	263,04	2,88	295,94	3,30	218,36	2,31	299,76	3,45					
	0,9939	1	0,8145	1	0,8333	0	0,7008	1	0,3393	0	0,1219	1	0,8878	1	0,8890	1	0,8009	1	0,8693	1					
mittel hoch 1	286,98	4,35	420,13	6,50	367,83	5,66	301,00	4,67	295,73	4,57	-650,78	-10,50	434,99	6,82	383,43	5,90	336,09	5,22	390,81	6,04					
mittel hoch 2	251,14	3,74	290,76	4,37	251,51	3,74	76,98	1,17	61,92	0,93	-437,62	-6,45	300,02	4,49	258,85	3,85	206,73	3,15	191,87	2,87					
mittel hoch 3	351,29	6,53	219,00	3,99	223,55	4,11	260,60	4,85	206,37	3,90	-125,84	-2,33	405,48	7,67	253,42	4,65	313,76	5,84	433,61	8,20					
mittel hoch 4	245,42	3,77	256,63	3,96	243,80	3,78	118,57	1,80	-65,70	-1,03	-124,70	-1,91	202,29	3,15	241,40	3,74	122,51	1,86	345,28	5,44					
mittel hoch 5	243,45	3,66	76,29	1,13	179,83	2,71	57,20	0,86	-418,67	-6,25	-817,58	-12,71	-210,65	-2,97	201,45	3,03	208,59	3,15	96,09	1,43					
mittel hoch 6	418,54	6,70	344,55	5,53	542,50	8,82	228,28	3,74	194,57	3,08	-295,79	-4,59	-279,70	-4,18	540,05	8,78	413,63	6,78	170,30	2,70					
	299,47	4,79	267,89	4,25	301,50	4,80	173,77	2,85	45,70	0,87	-408,72	-6,41	142,07	2,50	313,10	4,99	266,89	4,33	271,33	4,45					
	1,0000	1	0,9971	1	0,9671	1	0,9428	1	0,4464	1	0,0982	1	0,8067	1	0,9837	1	0,9941	1	0,9630	1					
mittel mittel 1	193,17	2,92	170,48	2,58	53,62	0,80	-122,64	-1,81	-60,48	-0,91	-473,10	-7,00	259,34	3,96	82,62	1,23	19,79	0,29	78,30	1,18					
mittel mittel 2	124,27	1,96	107,91	1,70	158,15	2,53	33,23	0,51	-116,39	-1,86	-941,18	-14,92	242,77	3,88	177,53	2,94	30,26	0,47	141,80	2,27					
mittel mittel 3	83,58	1,35	87,18	1,42	-115,12	-1,82	-218,02	-3,49	-515,00	-8,13	-650,96	-10,57	372,58	6,31	-88,30	-1,40	-3,13	-0,05	-130,24	-2,05					
mittel mittel 4	768,11	13,83	597,23	10,52	731,50	13,08	441,44	7,92	192,55	3,30	-1.053,48	-18,90	981,72	18,61	742,59	13,28	573,57	10,29	255,97	4,38					
mittel mittel 5	47,82	0,85	-22,19	-0,39	-147,62	-2,65	-34,31	-0,61	-220,36	-3,89	-313,29	-5,77	54,77	0,97	-92,36	-1,66	81,39	1,46	-71,87	-1,21					
mittel mittel 6	207,85	3,55	43,37	0,74	206,35	3,56	138,07	2,37	58,96	1,02	-1.124,54	-18,97	27,27	0,45	208,83	3,60	200,01	3,44	124,99	2,16					
	237,47	4,08	164,00	2,76	147,81	2,58	39,63	0,82	-110,12	-1,75	-759,42	-12,69	323,07	5,70	171,82	2,98	150,31	2,65	66,50	1,11					
	0,8188	1	0,7773	1	0,6926	1	0,6669	1	0,4388	0	0,0670	1	0,8335	1	0,7293	1	0,7663	1	0,6898	1					
mittel niedrig 1	49,68	0,89	56,24	1,02	115,01	2,11	5,63	0,10	-75,47	-1,36	-742,47	-13,59	-55,01	-0,97	146,59	2,69	-8,71	-0,16	43,70	0,79					
mittel niedrig 2	52,02	0,88	-57,42	-0,97	88,11	1,53	-206,42	-3,42	-409,87	-6,98	-498,58	-8,44	20,54	0,35	92,03	1,59	-149,03	-2,47	-41,28	-0,70					
mittel niedrig 3	-40,26	-0,83	-14,21	-0,30	-35,19	-0,72	10,45	0,22	-95,79	-2,01	-1.147,32	-23,26	61,55	1,29	-8,43	-0,17	66,52	1,40							

Literaturverzeichnis

Albers, S. (1996), „Entscheidungshilfen für den persönlichen Verkauf“, Berlin: Duncker und Humbolt

Albers, S. (1997), „Rules for the allocation of a marketing budget across products or market segments“, EMAC Conference, Warwick Business School,

Albers, S./ Krafft, M. (1992), „Steuerungssysteme für den Verkaufsaußendienst“, Manuskripte aus den Instituten für Betriebswirtschaftslehre der Universität Kiel, Nr. 306

Albers, S./ Skiera, B. (1999), „Bestimmung von Umsatzvorgaben für Außendienstmitarbeiter“, in Herrmann, A./Homburg, C.(Hrsg.), „Marktforschung“, Wiesbaden, S. 959-978

Albers, S./ Skiera, B. (2002), „Einsatzplanung eines Verkaufsaußendienstes auf der Basis einer Umsatzreaktionsfunktion“, ZfB, 72. Jg., S. 1105-1131

Aykac, A./ Corstjens, M./ Gautschi, D./ Horowitz, I. (1989), „Estimation under Uncertainty and Optimal Advertising Decisions“, Marketing Science, Vol. 35, S. 42 - 50

Backhaus, K./ Erichson, B./ Plinke, W./ Weber, R. (1994), Multivariate Analysemethoden, 7. Auflage, Springer Verlag, Berlin

Barr, D. R./ Sherrill, E. T. (1999), “Mean and Variance of Truncated Normal Distributions”, The American Statistician, Vol. 53 № 4, S. 357-361

Bass, F. M. (1969), “A new Product Growth for Model Consumer Durables”, Management Science, Vol. 15, № 5, S. 215 – 227

Beswick, C. A. (1973), “An Aggregate Multistage Decision Model for Sales Force Management”, Dissertation at the University of Tennessee

- Beswick, C. A.** (1977), "Allocating Selling Effort via Dynamic Programming", *Management Science*, Vol. 23, S. 667 – 678
- Beswick, C. A./ Cravens, D. W.** (1977), "A Multistage Decision Model for Sales Force Management", *Journal of Marketing Research*, Vol. 14, S. 135- 144
- Bortz, Jürgen** (1993), *Statistik für Sozialwissenschaftler*, 4. Auflage, Springer Verlag, Berlin
- Box, G. E. P./ Tiao, G. C** (1973), "Bayesian Inference in Statistical Analysis", Addison-Wesley Publishing Company, Reading Massachusetts
- Brown, W./ Tucker, W. T.** "The Marketing Center: Vanishing Shelf Space", *Atlanta Economic Review*, (October), S. 9 - 13
- Bultez, A./ Naert, P.** (1988), "SH.A.R.P.: Shelf Allocation for Retailers' Profit ", *Marketing Science*, Vol. 7, № 3, S. 211 - 231
- Carroll, D./ Green, P. E./ DeSarbo, W. S.** (1979), "Optimizing the Allocation of a fixed Ressource: A simple Model and its experimental Test", *Journal of Marketing*, Vol. 43, (January), S. 51 - 57
- Casella, G./ George, E. I.** (1992), " Explaining the Gibbs Sampler", *The American Statistician*, Vol. 53 № 4, S. 167-174
- Chakravarti, D./ Mitchell, A./ Staelin, R.** (1981), "Judgment Based Marketing Decision Models: Problems and possible Solutions", *Journal of Marketing*, Vol. 45, (Fall), S. 13 - 23
- Chen, Y./ Hess, J. D./ Wilcox, R. T./ Zhang, Z. J.** (1999), "Accounting Profits versus Marketing Profits: A Relevant Metric for Category Management", *Marketing Science*, Vol. 18 № 3, S. 208-229
- Chen, M./ Shao, Q./ Ibrahim, J.** (2000), *Monte Carlo Methods in Bayesian Computation*, Springer Verlag New York
- Chintagunta, P. K.** (1993), "Investigating the Sensitivity of Equilibrium Profits to Advertising Dynamics and Competitive Effects", *Management Science*, Vol. 39, № 9, S. 1146 – 1162
- Cohen, A. C./ Whitten, B. J.** (1988), "Parameter Estimation in Reliability and life span Models", Dekker, New York
- Corstjens, M./ Doyle, P.** (1981), "A Model for Optimizing Retail Space Allocations", *Management Science*, Vol. 27, S. 822 – 833

- Coughlan**, A. T./ Narashimhan, C. (1992), "An empirical Analysis of Sales Force Compensation Plans", Journal of Business, Vol. 65, 1, S. 93 - 121
- Cox**, K. K. (1970), "The Effect of Shelf Space Upon Sales of Branded Products", Journal of Marketing Research, 7 (February), S. 55 - 58
- Crow**, E. L./ Shimizu, K. (1988), "Lognormal Distributions: Theory and Applications", Dekker, New York
- Curhan**, R. (1972), "The Relationship between Shelf Space and Unit Sales, Journal of Marketing Research, 9 (November), S. 406 - 412
- David**, H. A./ Hartley, H. O./ Pearson, E. S. (1954), "The Distribution of the Ratio, in a single normal Sample, of range to standard Deviation", Biometrika, 41, S. 482-493
- Dorfman**, R./ Steiner, P. O. (1954), "Optimal Advertising and Optimal Quality", American Economic Review, 64, S. 826 - 836
- Doyle**, P./ Saunders, J. (1990), "Multiproduct Advertising Budgeting", Marketing Science, Vol. 9, S. 97 - 113
- Dréze**, X./ Hoch, S. J./ Purk, M. E. (1994), "Shelf Management and Space Elasticity", Journal of Retailing Volume 70, № 4 S. 301 - 326
- Einbu**, J. M. (1981), "Extension of the Luss-Gupta Ressource Allocation", Operations Research Vol. 29, S. 621-626
- Gamerman**, D. (1997), "Markov Chain Monte Carlo", Chapman Hall, London
- Gedenk**, K./ Skiera, B. (1994), "Marketing-Planung auf Basis von Reaktionsfunktionen – Funktionsschätzung und Optimierung", Wirtschaftswissenschaftliches Studium, 23, S. 258 - 262
- Gelfand**, A. E./ Smith, A. F. M. (1990), "Sampling Based Approaches to Calculating Marginal Densities", Journal of the American Statistical Association, Vol. 85, S. 398 - 409
- Gelfand**, A. E./ Hills, S. E./ Racine-Poon, A./ Smith, A. F. M. (1990), "Illustration of Bayesian Inference in Normal Data Models using Gibbs Sampling", Journal of the American Statistical Association, Vol. 85, S. 972-985
- Gelfand**, A. E./ Sahu, S. K./ Carlin, B. P. (1995), "Efficient parametrisations for normal linear mixed models", Biometrika, 82, S. 479-488
- Gelman**, A./ Carlin, J. B./ Stern, H. S./ Rubin, D. B. (1995), "Bayesian Data Analysis", Chapman Hall, Boca Raton

- Gelman**, A./ Rubin, D. B. (1995), "Inference from Iterative Simulation Using Multiple sequences", Statistical Science 7, S. 457 - 511
- Geman** S./ Geman, D. (1984), "Stochastic Relaxation, Gibbs Distributions, and the Bayesian Restoration of Images", IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 6, S. 721 - 741
- Gilks**, W. R./ Richardson, S./ Spiegelhalter, D. J. (1996), Markov Chain Monte Carlo in Practice, Chapman Hall, London
- Greene**, W. (1993), „Econometric Analysis“ 2nd ed. Macmillan Publishing Company, New York
- Greene**, W. (2003), „Econometric Analysis“ 5th ed. Macmillan Publishing Company, New York
- Herrmann**, A./ Homburg, C. (2000), Marktforschung, 2. Auflage, Gabler Verlag Wiesbaden
- Holthausen**, D. M./ Assmus, G. (1982), „Advertising Budget Allocation under Uncertainty“, Marketing Science, Vol.28, S. 487 - 499
- Hruschka**, H. (1996), Marketing Entscheidungen, Vahlen Verlag, München
- Johnson**, A.C./ Dhungel, B.K. (2003), "Approximation of the Cumulative Distribution Function of the Bivariate Truncated Normal Distribution," Proceedings of the Decision Sciences Institute, 2003, pp. 3111-3118., auch unter <http://domin.dom.edu/faculty/ajohnson/311-5069.pdf>
- Johnson**, A. C./ Thomopoulos, N. T. (2002), "Characteristics and Tables of the Doubly-Truncated Normal Distribution", Proceedings of POM High Tech, 2002, 18 S. auch unter http://domin.dom.edu/faculty/ajohnson/POMS_DTN_Final_Paper.pdf
- Kalyanam**, K. (1996), "Pricing Decisions under Demand Uncertainty: A Bayesian Mixture Model Approach", Marketing Science, Vol. 15, S. 207-221
- Kleiter**, G. D. (1981), Bayes Statistik: Grundlagen und Anwendungen, Walter de Gruyter, Berlin
- Kleywegt**, A. J./ Shapiro, A. (2000), "Stochastic Optimization", School of Industrial and Systems Engineering, Chapter 101, Atlanta
- Kleywegt**, A. J./ Shapiro, A./ Homem-de-Mello, T. (2001), "The sample average Approximation Method for Stochastic Discrete Optimization", SIAM J. Optim. Vol. 12 S. 479-502

- Kotzan, J. A./** Evanson, R. U. (1969), "Responsiveness of Drug Store Sales to Shelf Space Reallocation", Proceedings of the Fall Conference, American Marketing Association, 30, S. 456 - 469
- Koopman, B. O.** (1952), " The Optimum Distribution of Effort ", Journal of Operations Research 1, S. 54 – 63
- Krueckenberg, H. F.** (1969), The significance of Consumer Response to Display Space Reallocation, Proceedings of the Fall Conference, American Marketing Association, 30, S. 336 - 339
- Krafft, M.** (1995), „Außendienstentlohnung im Licht der neuen Institutionenlehre“, Wiesbaden, Gabler
- LaForge, R./** Cravens, D. W. (1985), "Empirical and Judgement based Sales Force Decision Models: A comparative Analysis", Decision Science, Vol. 16, S. 177 - 195
- LaForge, R./** Cravens, D. W./ Ranney, G. B. (1984), "Comparative Evaluation of Empirical Response Functions in Sales Management Decision Making", Journal of Business Research, Vol. 12, S. 377 - 391
- Leigh, J. H./** Kinnear, T. C. (1980), „On Interaction Classification“, Educational psychological Measurement, 40, S. 841 – 843
- Lindley, D. V.** (1971), „The Estimation of Many Parameters“ in Godambe, V. P./ Sprott, D. A. Foundations of Statistical Inference, Proceedings of the Symposium on the Foundations of Statistical Inference, Ontario, Canada
- Lindley, D. V.** (1972), "Bayesian Statistics, a Review", Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), National Science Foundation, Philadelphia
- Lindley, D.V./** Smith, A. F. M. (1972), „Bayes Estimates for the Linear Model“, Journal of the Royal Statistical Society, Ser. B, Vol. 34, S. 1-18
- Lindner, A./** Berchtold, W. (1976), „Statistische Auswertung von Prozentzahlen“ 1.Aufl. Basel, Stuttgart: Birkhäuser, (UTB; 522)
- Little, J. D. C.** (1970), „Models and Managers: The Concept of a Decision Calculus“, Management Science, Vol. 16, № 8, S. 466 – 485
- Lodish, L. M.** (1971), " CALLPLAN: An interactive Salesman's Call Planning System", Management Science, Vol. 18, (4, Part 2), S. 25 – 40
- Lodish, L. M.** (1980), "A User-oriented Model for Sales Force Size, Product and Market Allocation Decisions", Journal of Marketing, Vol. 44, S. 70 - 78

- Lodish, L. M.** (1988), "Sales Force Sizing and Deployment using a Decision Calculus Model at Syntex Laboratories", *Interfaces* 18: 1 January-February, S. 5 – 20
- Lynch, J. E./ Hooley, G. J.** (1990), "Increasing Sophistication in Advertising Budget Setting", *Journal of Advertising Research*, Vol. 30, S. 67 – 75
- Malsagne, R.** (1972) "La Productivité de la Surface de Vente Passe Maintenant par l'Ordinateur", *Travail et Methodes*, No. 274 Französisch???
- Mantrala, M. K./ Sinha, P./ Zoltners, A. A.** (1992), "Impact of Ressource Allocation Rules on Marketing Investment-Level Decisions and Profitability", *Journal of Marketing Research* Vol. XXIX, S. 162 – 175
- McKinsey-General Foods Study** (1963), "The Economics of Food Distributors", New York: General Foods
- Mengersen, K. L./ Robert, C. P./ Guihenneuc-Jouyaux, C.** (1999), "MCMC Convergence Diagnostics: A Review (with Discussion)", in *Bayesian Statistics 6*, Oxford University press, S. 415 - 440
- Montgomery, D. B./ Silk, A. J./ Zaragoza, C. E.** (1971), "A Multiple-Product Sales Force Allocation Model", *Management Science*, Vol. 18, (4, Part 2), S. 3 - 24
- Montgomery, A. L./ Bradlow, E. T.** (1999), "Why Analyst Overconfidence About the Functional Form of Demand Models Can Lead to Overpricing", *Marketing Science*, Vol. 18, № 4, S. 569 – 583
- Morrison, D. G./ Raju, J. S.** (2004), "The Marketing Department in Management Science: Its History, Contributions, and the Future", *Management Science*, Vol. 50, № 4, S. 425 - 428
- Muller, P.** (1998), "Simulation Based Optimal Design", *Bayesian Statistics 6*, Oxford University Press
- Naert, P./ Weverbergh, M.** (1981), "Subjective versus empirical Decision Models", in *Schultz, R./ Zoltners, A.A., Marketing Decision Models*, North Holland, Amsterdam
- Nguyen, D.** (1985), „An Analysis of optimal Advertising under Uncertainty", *Management Science*, Vol. 31, № 5, S. 622 - 633
- Nguyen, D.** (1997), „Marketing Decisions under Uncertainty", Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht
- Odell, P. L./ Feiveson, A. H.** (1966), „A Numerical Procedure to generate a Sample Covariance Matrix", *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 61 S. 199-203

- Patti**, C. H./ Blasko, V. C. (1981), "Budgeting Practices of Big Advertisers", Journal of Advertising Research, Vol. 21, S. 23 – 29
- Pearson** E. S./ Stephens M. A. (1964), "The Ratio of Range to standard Deviation in the same normal Sample", Biometrika, 51, S. 484-487
- Permut**, S. E. (1977), "How European Managers set Advertising Budgets", Journal of Advertising Research, Vol. 17, S. 77 – 79
- Piercy**, N. F. (1987), " The Marketing Budgeting Process: Marketing Management Implications", Journal of Marketing, Vol. 51, S. 45 - 59
- Robert**, C. P./ Casella, G. (2000), "Monte Carlo Statistical Methods", 2.Auflage Springer Verlag, New York
- Rosnow**, R. L./ Rosenthal, R. (1989), "Definition and Interpretation of Interactive Effects", Psychological Bulletin, 105, S. 143 - 146
- Schafer**, J. L. (2000), "Analysis of Incomplete Multivariate Data", Chapman & Hall, Boca Raton
- Skiera**, B. (1996), „Verkaufsgebietseinteilung zur Maximierung des Deckungsbeitrags“ Wiesbaden: Gabler
- Skiera**, B. (1997a), „Wieviel Deckungsbeitrag verschenkt man durch gleichartige Einteilung der Verkaufsgebiete“, in Schmalenbachs Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung, 49, S. 723-746
- Skiera**, B. (1997b), „Mehr rausholen“, Absatzwirtschaft 9/97, S. 62-67
- Skiera**, B./ Albers, S. (1994), „COSTA: Ein Entscheidungs-Unterstützungs-System zur deckungsbeitragsmaximalen Einteilung von Verkaufsgebieten“, ZfB, 64. Jg., S. 1261-1283
- Skiera**, B./ Albers, S. (1998), „COSTA: Contribution Optimizing Sales Territory Alignment“, Marketing Science S. 196-213
- Spiegelhalter**, D./ Thomas A./ Best, N./ Lunn, D. (2003), "WinBUGS User Manual Version 1.4", online Dokument erhältlich unter <http://www.mrc-bsu.cam.ac.uk/bugs/winbugs/manual14.pdf>
- Tanner**, M. A. (1996), Tools for Statistical Inference, Third Edition, Springer Verlag, New York
- Tiao**, G. C./ Zellner, A. (1964), „Bayes's theorem and the use of prior knowledge in regression analysis", Biometrika, 51, S. 219-230

- Tull**, D. S./ Wood, V. R./ Duhan, D./ Gillpatrick, T./ Robertson, K. R./ Helgeson, J. G (1986), “ ‘Leveraged’ Decision Making in Advertising: The Flat Maximum Principle and its Implications”, Journal of Marketing Research, Vol. XXIII, (Februar), S. 25 - 30
- Verdinelli**, I./ Kadane, J. B. (1992), “Bayesian Designs for Maximizing Information and Outcome”, Journal of the American Statistical Association, Vol. 87 S. 510-515
- v. Winterfeldt**, D./ Edwards, W. (1973), “Flat Maxima in Linear Optimization Models”, Engineering Psychology Laboratory Technical Report 011313-4-T (November), Ann Arbor: University of Michigan
- Zellner**, A. (1971), “Bayesian Analysis in Econometrics and Statistics”, North-Holland, Amsterdam
- Zoltners**, A. A./ Sinha, P. (1983), “Sales Territory Alignment: A Review and Model“, Management Science, Vol. 29, S. 1237 -1256
- Zufryden**, F. S. (1973), “Media Scheduling: A stochastic dynamic Model Approach“, Management Science, Vol.19, S. 1395 - 1406