

# Singularitäten von Phase und Polarisation des Lichts



## Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)  
der Naturwissenschaftlichen Fakultät II - Physik  
der Universität Regensburg

vorgelegt von

**Florian Flossmann**

aus Regensburg

Juni 2006

Promotionsgesuch eingereicht am: 22.6.2006

Die Arbeit wurde angeleitet von: PD. Dr. Ulrich Schwarz

Prüfungsausschuss:

Vorsitzender:	Prof. Dr. Matthias Brack
1. Gutachter:	PD Dr. Ulrich Schwarz
2. Gutachter:	Prof. Dr. Christian Schüller
weiterer Prüfer:	Prof. Dr. Karl Renk

# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>7</b>
<b>1 Singularitäten der Phase</b>	<b>11</b>
1.1 Grundlagen . . . . .	11
1.1.1 Phase, Phasenflächen und Phasensingularitäten . . . . .	11
1.1.2 Laguerre-Gauß-Bündel . . . . .	26
1.1.3 Rechenmethoden . . . . .	31
1.2 Experimenteller Aufbau . . . . .	32
1.3 Verschiedene optische Wirbel . . . . .	36
1.3.1 Punktwirbel . . . . .	37
1.3.2 r-Wirbel . . . . .	39
1.3.3 tanh-Wirbel . . . . .	44
1.3.4 Das fluiddynamische Modell für die Bewegung von Wirbeln in Hintergrundbündeln . . . . .	46
1.4 Wirbel in Laguerre-Gauß-Bündeln - Theorie . . . . .	48
1.4.1 Generische Wirbel in $LG_1^0$ -Bündeln . . . . .	49
1.4.2 Generische Wirbel in $LG_p^0$ -Bündeln . . . . .	55
1.4.3 Wirbel mit anderen Kernfunktionen in Laguerre-Gauß-Bündeln	58
1.4.4 Erweiterung des fluiddynamischen Modells . . . . .	62
1.4.5 Dekomposition in Laguerre-Gauß-Moden . . . . .	66

1.5	Wirbel in Laguerre-Gauß-Bündeln - Messungen . . . . .	69
1.5.1	Wirbel mit Ladung 1 in $LG_1^0$ -Bündeln - Experimentelle Ergebnisse	69
1.5.2	Wirbel mit Ladung $m = 1$ in $LG$ -Bündeln höherer radialer Ordnung - Experimentelle Ergebnisse . . . . .	73
1.5.3	Zusammenfassung . . . . .	75
<b>2</b>	<b>Singularitäten der Polarisation</b>	<b>77</b>
2.1	Grundlagen . . . . .	77
2.1.1	Polarisation des Lichts . . . . .	77
2.1.2	Messung von Polarisation: Stokes-Parameter . . . . .	80
2.1.3	Doppelbrechung . . . . .	82
2.1.4	Singularitäten der Polarisation . . . . .	87
2.1.5	Polarisationssingularitäten: Einfache Beispiele . . . . .	91
2.2	Experimenteller Aufbau . . . . .	102
2.2.1	Überlegungen zur experimentellen Realisierung . . . . .	102
2.2.2	Experimenteller Aufbau . . . . .	104
2.3	Polarisationssingularitäten in doppelbrechenden Kristallen . . . . .	108
2.3.1	Linear polarisiertes Gauß-Bündel . . . . .	108
2.3.2	Linear polarisierter Wirbel mit topologischer Ladung 1, allgemei- ner Fall ( $\beta \neq 45^\circ$ ) . . . . .	111
2.3.3	Linear polarisierter Wirbel mit topologischer Ladung 1, symme- trischer Fall ( $\beta = 45^\circ$ ) . . . . .	122
2.3.4	Zirkular polarisierter Wirbel . . . . .	123
2.3.5	Elliptisch polarisierter Wirbel . . . . .	125
2.3.6	Wirbel mit höherer topologischer Ladung . . . . .	126
2.3.7	Entfaltung von Phasensingularitäten in doppelbrechenden Kris- tallen - Zusammenfassung . . . . .	129
	<b>Zusammenfassung</b>	<b>131</b>



Literaturverzeichnis

137



# Einleitung

Am Anfang war das Licht - und seitdem fasziniert es den Menschen. Die meiste Faszination ging dabei stets von extremen Erscheinungen wie Aufblitzen bei Lichteinfall aus. Man denke nur an die Vorliebe der Menschheit für geschliffene Edelsteine und poliertes, spiegelndes Metall. Mit Spiegeln und Glasperlen wurden ganze Kontinente erobert.

All dieses Glitzern, Funkeln und Blitzen sind Singularitäten der Lichtintensität, sogenannte Kaustiken. Diese sind natürlich auftretende, stabile Lichtfoki, wie sie z. B. am Boden von Schwimmbädern durch die an der lokal gekrümmten Wasseroberfläche gebündelten Lichtstrahlen entstehen [1]. Die einfacheren Kaustiken sind seit langem verstanden, da sie allein durch die Gesetze der Strahlenoptik erklärbar sind.

Eine einfache Kaustik, die sogenannte Kaffeetassen-Kaustik (sie tritt an der Innenseite von Porzellantassen auf) zeigt Abb. 1 (a). Das Sonnenlicht wird hier an der Innenseite eines goldenen Rings reflektiert und wie in einem zweidimensionalen sphärischen Spiegel fokussiert. Abb. 1 (b) zeigt die zugehörige Konstruktion. Die Zeichnung stammt von Leonardo da Vinci (ca. 1508) und verdeutlicht, wie lange diese Phänomene schon bemerkt und verstanden werden (aus [1]). Die reflektierten Strahlen bilden als Einhüllende eine Kurve, die sogenannte Kaustik, die im Fall der Kaffeetasse eine Epizykloide ist. In drei Dimensionen, also z. B. bei einem sphärischen Hohlspiegel, ist die Kaustik eine Fläche. Auf der Kaustik treffen unendlich viele Strahlen zusammen, es liegt eine Singularität der Strahlenoptik vor [1]. Eine Kaustik ist nicht dasselbe wie der aus der Strahlenoptik bekannte punktförmige Fokus einer Linse, diesen erhält man nur in der paraxialen Näherung, in der alle Strahlen kleine Winkel mit der Achse einschließen. Lässt man nicht-paraxiale Strahlen zu, wird auch der Fokus einer Linse zur Kaustik.

Die Kaustik ist eine strukturell stabile Figur. Würde man die Tasse verformen, so würde die Figur verzerrt werden, aber nicht verschwinden. Daraus folgt aber auch,

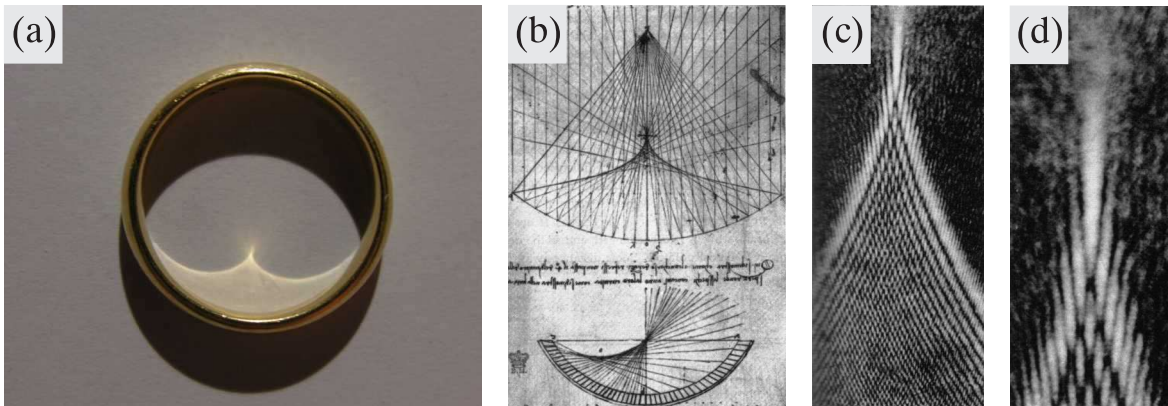


Abbildung 1: *Singularitäten in der Optik: (a) zeigt die sogenannte Kaffeetassen-Kaustik, die bei der Reflexion von Licht an der Innenseite von sphärischen Flächen auftritt. (b) zeigt die dazugehörige Konstruktion des Strahlenverlaufs (Leonardo da Vinci, 1508). Abb. (c) und (d) zeigen Vergrößerungen der Spitze der Figur mit Interferenzmustern [1].*

dass jede gekrümmte Oberfläche Kaustiken erzeugt, sie muss dazu keine spezielle Form haben. Kaustiken können daher natürlicherweise auftreten, wie eben an Wasseroberflächen. Sie werden deshalb als generisch bezeichnet [1], ein Ausdruck, der in dieser Arbeit synonym für „natürlich auftretend“ verwendet wird.

Systematisch erforscht wurden diese Singularitäten erst seit den 1960er Jahren, wobei hier durch J. F. Nye, J. Hannay und M. Berry sowohl experimentell als auch theoretisch Pionierarbeit geleistet wurde [1]. Sie betrachteten diverse Kaustiken unter dem Mikroskop und stellten dabei Feinstrukturen wie in Abb1 (c) und (d) fest, die im Strahlenoptik-Bild nicht mehr zu beschreiben sind. Es treten hier regelmäßige Nullstellen des Lichtfeldes auf, die durch Interferenzeffekte und damit der Sprache der Wellenoptik erklärbar sind. Im Kapitel 1.1.1 wird erläutert, dass es sich bei diesen Nullstellen ebenfalls um Singularitäten handelt, nämlich um Singularitäten der Phase, sogenannte optische Wirbel.

Optische Wirbel (wegen einiger Analogien zu Wirbeln in Flüssigkeiten so genannt) haben seit der ersten wichtigen Veröffentlichung auf diesem Sektor (Nye & Berry, 1974:[2]) ein ganzes neues Gebiet der modernen Optik hervorgerufen, das sich mit optischen Wirbeln in allen Variationen und Anwendungen beschäftigt. Zu nennen sind z. B. die Interaktion mehrerer optischer Wirbel ([3]), die Ausbreitung optischer Wirbel in linearen und nichtlinearen Medien ([4, 5]), die Verwendung als optische Pinzetten ([6]) und Wellenleiter für Bose-Einstein-Kondensate ([7]) und nicht zuletzt ihre Verwendung bei

der optischen Signalübertragung ([8]).

Mit optischen Wirbeln, vor allem in Laguerre-Gauß-Moden, beschäftigt sich der erste Teil dieser Arbeit sowohl experimentell als auch theoretisch.

Optische Wirbel als die generischen Singularitäten der Phase treten natürlicherweise z. B. in von rauen Oberflächen gestreuten Feldern auf (sogenannte Speckle-Muster [9]), aber auch in den Gauß-Moden höherer Ordnung des stabilen Resonators eines Lasers. Sie haben erstaunliche Eigenschaften, z. B. verleihen sie den Photonen einen Bahndrehimpuls. Vor allem jedoch sind sie, sofern generisch, wieder stabil unter kleinen Störungen, solange man im skalaren Regime bleibt und den Vektorcharakter des Lichts vernachlässigt.

Ist dies nicht mehr der Fall, kommt also die Polarisation des Lichts ins Spiel, so sind auch die Singularitäten der Phase nicht mehr stabil, sondern zerfallen unter dem Einfluss von Störungen in die Singularitäten der Polarisation, nämlich Linien zirkularer und Flächen linearer Polarisation in drei Dimensionen, die nun die generischen, stabilen Objekte der Lichtfelder bilden.

Es ergibt sich damit folgendes Bild: Die in der Strahlenoptik stabilen und generischen Kaustiken zerfallen in der Wellenoptik in Phasensingularitäten, die wiederum im Wellenbild stabil sind. Sobald aber die Polarisation des Lichts berücksichtigt wird, werden auch diese Singularitäten instabil und entfalten sich in Singularitäten der Polarisation. Diese drei Typen von Singularitäten legen die topologische Struktur des Lichtfeldes bis auf Skalierungen der Intensität zwischen den Singularitäten fest. Sie bilden etwas wie das Skelett des Lichtfeldes, das das umgebende Fleisch auch bei Verformungen und Störungen stabilisiert.

Diese Polarisationssingularitäten sind bisher im sichtbaren Licht noch recht wenig untersucht (es liegen Experimente im Mikrowellenbereich vor, [10, 11]). Im zweiten Teil dieser Arbeit werden solche generischen Singularitäten der Polarisation gemessen, vor allem aber wird an dem Fall eines linear polarisierten optischen Wirbels, der sich beim Passieren eines doppelbrechenden Kristalls selbst stört, die natürliche Entfaltung der nun instabilen Singularitäten der Phase in die generischen Singularitäten der Polarisation demonstriert.



# Kapitel 1

## Singularitäten der Phase

### 1.1 Grundlagen

#### 1.1.1 Phase, Phasenflächen und Phasensingularitäten

Betrachtet man ein beliebiges monochromatisches Lichtfeld, so ist es allgemein üblich, dieses durch zeitlich veränderliche elektrische und magnetische Vektorfelder mit ortsabhängiger Amplitude, Phase und Richtung zu beschreiben [31]. Bei der Betrachtung von unpolarisierten oder homogen polarisierten Lichtfeldern kann auf eine vektorwertige Behandlung verzichtet werden, sodass das Problem auf ein skalares reduziert wird. Das Feld kann dann an jedem Ort  $\mathbf{R} = \mathbf{R}(x, y, z)$  dargestellt werden als Produkt aus einer reellen Amplitude  $A$  und einem komplexen Phasenterm:

$$E(\mathbf{R}, t) = A(\mathbf{R}, t)e^{i\chi(\mathbf{R}, t)} \quad (1.1)$$

wobei  $A$  und  $\chi$  rein reelle Funktionen sind.

Beschränkt man sich auf die Behandlung von monochromatischen Lichtfeldern, wie sie von Lasern näherungsweise emittiert werden, so kann der komplexe Faktor  $e^{i\chi(\mathbf{R}, t)}$  geschrieben werden als

$$e^{i\chi(\mathbf{R}, t)} = e^{i\phi(\mathbf{R})}e^{i\omega t} \quad (1.2)$$

wobei  $\omega = \frac{2\pi}{\lambda}$  die Kreisfrequenz bezeichnet und  $\phi$  als rein reelle Funktion angenommen werden kann.

Damit wird (1.1) zu

$$E(\mathbf{R}, t) = A(\mathbf{R}, t)e^{i\phi(\mathbf{R})}e^{i\omega t} \quad (1.3)$$

Der zeitlich veränderliche Term  $e^{i\omega t}$  bewirkt nur eine schnelle ortsunabhängige Phasenänderung mit der Frequenz  $\omega$ . Da im Experiment die Intensität gemessen und dabei über viele Perioden dieser Phasenänderung gemittelt wird, kann dieser Faktor bei zeitunabhängigen Problemen der Einfachheit halber oft weggelassen werden. Zur mathematischen Beschreibung eines homogen linear polarisierten monochromatischen Lichtfeldes bleibt dann:

$$E(\mathbf{R}) = A(\mathbf{R})e^{i\phi(\mathbf{R})} \quad (1.4)$$

Der Term  $A$  wird dabei als die Amplitude und der Exponent  $\phi(\mathbf{R})$  als die Phase des Feldes bezeichnet.

Alle Punkte im Raum, an denen das Lichtfeld die gleiche Phase hat, fasst man zu einer Fläche zusammen, die als Phasenfläche oder Wellenfront bezeichnet wird. Für eine ebene Welle sind die Phasenflächen tatsächlich Ebenen wie in Abbildung 1.1 (a) gezeichnet, für ein Laser-typisches Gauß-Bündel liegt nur in der Strahltaille (dort ist der Strahldurchmesser am kleinsten) eine Ebene vor, vor und hinter der Strahltaille sind die Phasenflächen gekrümmt (Abbildung 1.1 (b)).

Ist in einer solchen Wellenfront eine Stelle vorhanden, an der die Phase nicht definiert

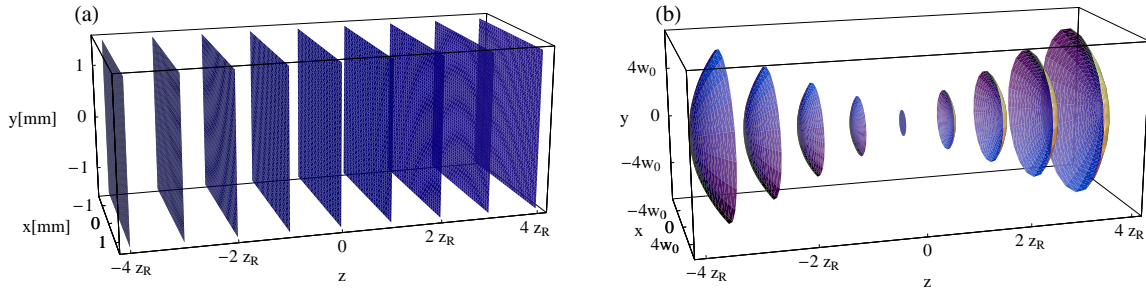


Abbildung 1.1: Die Flächen gleicher Phase sind für eine ebene Welle parallele Ebenen wie in Bild (a). Für ein Gauß-Bündel sind die Phasenflächen nur in der Strahltaille eben, überall sonst sind sie gekrümmt.

ist, zum Beispiel ein Punkt, an dem im Phasenterm ein Nenner Null wird, so spricht man von einer Singularität der Phase (siehe [13], S. 457ff und [12], S. 107). Da der Phase hier kein eindeutiger Wert zugeordnet ist, kann sie jeden Wert annehmen, weswegen die Amplitude an dieser Stelle Null sein muss. Dies sieht man leicht, wenn man sich vorstellt, dass zu jeder möglichen Phase  $\phi$  auch  $\phi + \pi$  existiert, sodass destruktive Interferenz auftritt.

Die Amplitude  $A(\mathbf{R})$  einer komplexen Funktion ist genau dann Null, wenn sowohl ihr



Real - als auch Imaginärteil Null sind. Nun muss ein Lichtfeld ja die Wellengleichung erfüllen, das heißt insbesondere, dass die ersten und zweiten Ableitungen des Feldes existieren müssen. Das bedingt aber, dass Real- und Imaginärteil des Feldes glatt sind, also keine Knicke haben. Die Nullstellen von Real - und Imaginärteil von  $A(\mathbf{R}, t)$  sind dann glatte Flächen im Raum, und da der Schnitt glatter Flächen eine glatte Kurve ergeben muss, sind Phasensingularitäten, die ja zwingend mit einer Nullstelle einhergehen, eine glatte Kurve im Raum [1] wie in Abbildung 1.2.

Im Experiment werden solche Phasensingularitäten meistens beobachtet, indem man die Intensität in einer Ebene mehr oder weniger senkrecht zu Ausbreitungsrichtung des Feldes misst. Die stationäre Linie der Phasensingularität durchstößt diese Ebene an einem oder mehreren Punkten, die als Nullstellen der Intensität im Experiment sichtbar werden. Die Lage dieser Schnittpunkte verändert sich natürlich bei einer Verschiebung der Ebene, in der gemessen wird, so „wandern“ z. B. die Punkte in Abbildung 1.2 bei einer Änderung der Beobachtungsebene D1 nach D2. In diesem Kontext wird daher auch von „Bewegung“ von Phasensingularitäten gesprochen. In Ebene D3 haben sich die Punkte sogar gegenseitig „ausgelöscht“ bzw. sind aus dem Nichts zwei Punkte entstanden, je nach dem, ob man die Beobachtungsebene von D2 nach D3 verschiebt oder umgekehrt.

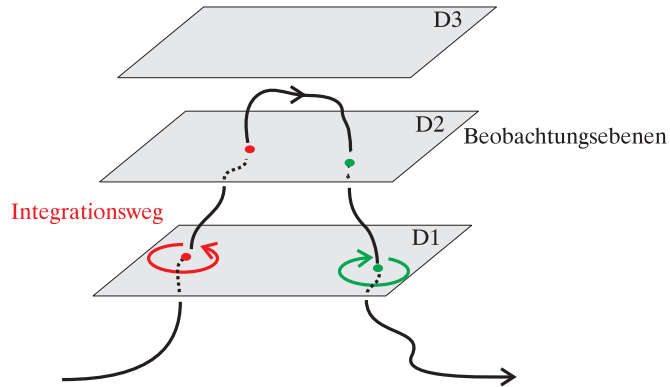
Integriert man über den Gradienten der Phase des Feldes auf einer geschlossenen Kurve, die von der Nulllinie der Phasensingularität durchstoßen wird, so erhält man eine wichtige Eigenschaft:

$$\oint \text{grad}\phi(\mathbf{R})d\mathbf{R} = \pm 2m\pi. \quad (1.5)$$

Die sogenannte topologische Ladung oder Stärke  $m$  ist dabei im allgemeinen Fall ganzzahlig. Spezielle Fälle von nichtganzzahligen topologischen Ladung können jedoch konstruiert werden.

Beim Umlaufen einer Phasensingularität ändert sich also die Phase um ganzzahlige Vielfache von  $2\pi$  (siehe [1], S.97). Wie üblich bei Umlaufintegralen ist der Wert des Integrals unabhängig vom Weg, vorausgesetzt der Weg ist geschlossen und umschließt die Nulllinie (Abbildung 1.2). Es muss jedoch eine Richtung der Singularität definiert und die Richtung des Umlaufintegrals damit verknüpft werden, sonst erhält man verschiedene Ladungen an verschiedenen Stellen der Singularität. In Abb. 1.2 sieht man, dass aus diesem Grund der grüne und der rote Integrationsweg in der Ebene D1 unterschiedlichen Umlaufsinn haben müssen.

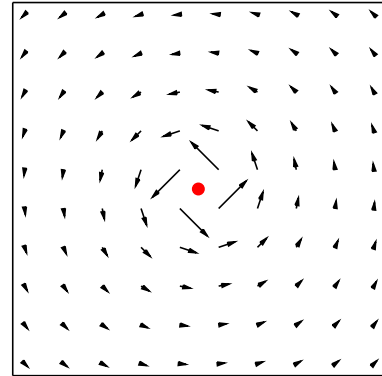
Abbildung 1.2: *Phasensingularität mit Integrationswegen (rot und grün) und den räumlich veränderlichen Durchstoßpunkten durch die Beobachtungsebenen D1, D2 und D3. Das Integral über den Gradienten der Phase auf dem geschlossenen Weg ergibt im Allgemeinen ganzzahlige Vielfache von  $2\pi$ .*



Damit eine „generische“ Singularität vorliegt, muss  $m = -1$  oder  $m = +1$  gelten, für andere Werte von  $m$  (in Spezialfällen kann  $m$  sogar rational werden, [14]) liegen „nicht-generische“ Phasensingularitäten vor, die instabil gegenüber Störungen sind und in generische Phasensingularitäten zerfallen ([13], S. 462).

Berechnet man den Gradienten der Phase in der Umgebung einer Singularität in einer Ebene senkrecht zur Nulllinie, so wird deutlich, woher der Name „optischer Wirbel“, der ebenfalls für Phasensingularitäten verwendet wird, kommt: Trägt man den Phasen-

Abbildung 1.3: *Der Gradient der Phase in der Umgebung einer Phasensingularität in einer Ebene senkrecht zur Nulllinie (roter Punkt in der Mitte), dargestellt als Vektorfeld. Er nimmt die Form eines Wirbels an, daher werden Phasensingularitäten auch als optische Wirbel bezeichnet.*



gradienten in Form eines Vektorfeldes so auf, dass Betrag und Richtung durch Länge und Richtung entsprechend normierter Pfeile dargestellt werden, so ergibt sich die Form eines Wirbels wie in Abbildung 1.3. Ein analoges Bild erhält man, wenn man das Geschwindigkeitsfeld von einem Wirbel in einer Flüssigkeit zeichnet.

## Phasensingularitäten als Versetzungen der Phasenflächen

Die Wellenfronten von manchen Phasensingularitäten ähneln den Gitterebenen bei speziellen Versetzungen in Kristallen. Dieser Analogie mit der Festkörperphysik entstammt die Bezeichnung „Phasenversetzung“ als alternativer Begriff für Phasensingularitäten ([1], S.96). Mit Hilfe dieser Analogie lassen sich die Grundtypen der Phasensingularitäten erklären. Die einfachsten Typen von Versetzungen in Kristallen sind Stufen- und Schraubenversetzungen. Eine Stufenversetzung kann man sich entstanden denken durch Einschieben einer unvollständigen Gitterebene in das Kristallgitter. Das Ende dieser eingeschobenen Ebene bestimmt die Versetzungslinie (Abbildung 1.4). Eine Schraubenversetzung entsteht anschaulich dadurch, dass man das Gitter teilweise aufschneidet und an der Schnittlinie die beiden Schnittflächen gegeneinander verschiebt ([15], Seite 625f). Die Versetzungslinie ist hier das Ende des Schnitts (Abbildung 1.6). Die Abbildungen 1.5 und 1.7 zeigen die Phasenflächen in einem Lichtbündel bei Anwesenheit einer Stufen- bzw. einer Schraubenversetzung in Analogie zu den Gitterebenen in einem Kristall.

Bei Versetzungen in der Festkörperphysik gibt der Burgers-Vektor an, wie Nach-

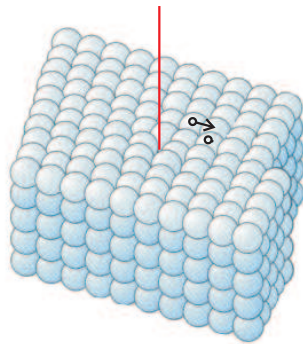


Abbildung 1.4: Stufenversetzung in einem kubischen Kristall mit Burgers - Vektor (schwarz) und Versetzungslinie (rot). Eine zusätzliche Gitterebene ist eingeschoben, die an der Versetzungslinie endet. (Aus [15], S. 625)

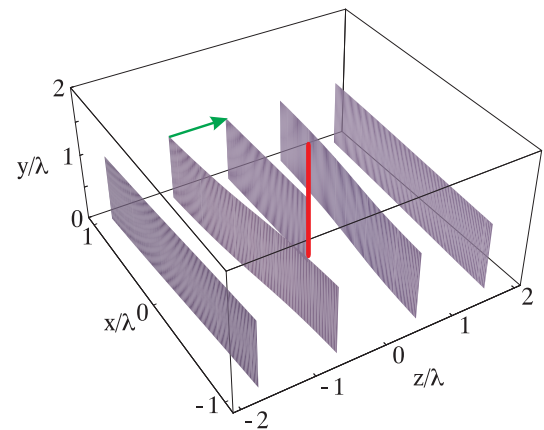


Abbildung 1.5: Die Flächen gleicher Phase einer Stufenversetzung gleichen den Gitterebenen aus Abbildung 1.4. Der Burgersvektor (grün) zeigt in die Ausbreitungsrichtung der Welle, die mit der  $z$ -Achse zusammenfällt, die Versetzungslinie ist rot eingezeichnet. Dargestellt sind die Flächen  $\phi = 0$ .

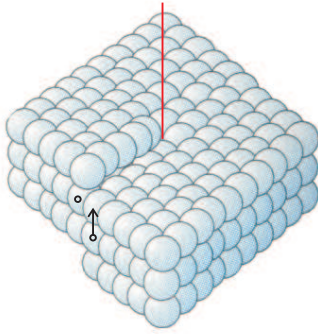


Abbildung 1.6: *Schraubenversetzung in einem kubischen Kristall. (Aus [15], S. 625)*

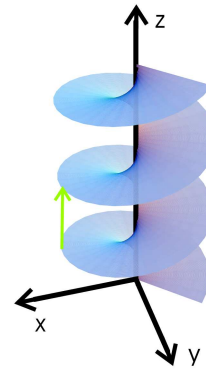


Abbildung 1.7: *Die Flächen gleicher Phase einer Schraubenversetzung der Stärke 1. Die Versetzungslinie fällt hier mit der z-Achse zusammen. Der Burgers-Vektor ist grün eingezeichnet.*

baratome verschoben werden müssten, um die Störung rückgängig zu machen ([15], Seite 625f). Die Richtung des Vektors ist festgelegt durch die Richtung der nötigen Verschiebung, die Länge muss immer ein Vielfaches des Gittervektors sein. Bei einer Stufenversetzung ist der Burgersvektor also senkrecht zur Versetzungslinie, bei einer Schraubenversetzung ist er parallel oder antiparallel dazu.

In der Wellenoptik ist das Analogon ein Vektor, der angibt, wie jeder Punkt einer Wellenfront verschoben werden müsste, um die Wellenfronten eines ungestörten Bündels zu erhalten. Dieser Vektor ist senkrecht zu den Wellenfronten, zeigt in der Regel (ein Ausnahmefall ist zum Beispiel die Lichtausbreitung in doppelbrechenden Kristallen, siehe Kapitel 2.1.3) in Ausbreitungsrichtung und hat eine Länge gleich der Wellenlänge.

## Schraubenversetzungen

Folgt man dieser Analogie zur Festkörperphysik, so können mit dem Begriff des Burgers-Vektor die Versetzungsformen in Kristallen auf Wellenfrontversetzungen in der Optik übertragen werden. Eine reine Schraubenversetzung wird dann durch die Forderung definiert, dass der Burgers-Vektor parallel oder antiparallel zur Versetzungslinie sein muss.

Eine solche Schraubenversetzung mit topologischer Ladung  $m$ , deren Versetzungslinie

mit der  $z$ -Achse zusammenfällt, ist gegeben durch:

$$E(x, y, z) = (x + i \operatorname{sign}(m)y)^{|m|} e^{-ikz}. \quad (1.6)$$

Hier ist wie immer  $k = 2\pi/\lambda$ . Die Phase dieser Welle ist dann

$$\phi(x, y, z) = m \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - kz. \quad (1.7)$$

Die Phase ändert sich also in  $z$  linear und nimmt bei einem Umlauf um den Ursprung um  $2\pi m$  zu. In Abb. 1.9 (a) ist die Phase einer Schraubenversetzung in einer Ebene senkrecht zur  $z$ -Achse als Falschfarbendarstellung aufgetragen. Der Abbildung sind zusätzliche die Linien gleicher Phase in Abständen von  $\pi/4$  überlagert. Diese Linien haben wie bei allen Phasensingularitäten ihren Ursprung auf der Versetzungslinie, auf der alle Phasen gleichzeitig existieren.

Die Flächen gleicher Phase (Abbildung 1.7) sind für  $m = \pm 1$  Schraubenflächen mit Ganghöhe  $\lambda$  (nach [1], S.98). Die topologische Ladung  $m$  der Schraubenversetzung gibt

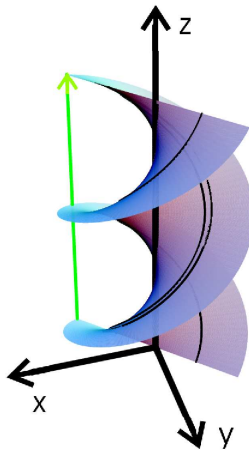


Abbildung 1.8: Flächen gleicher Phase für eine Schraubenversetzung mit Stärke 2. Es entstehen zwei gegeneinander um  $\pi$  verdrehte Spiralen, die in der Zeichnung durch eine bzw. zwei schwarze Linien gekennzeichnet sind.

an, um welches Vielfache von  $2\pi$  sich die Phase beim Umlaufen der Versetzungslinie ändert. Für höhere Werte von  $m$  entstehen als Phasenflächen  $m$  Spiralen der gleichen Ganghöhe, die um jeweils  $2\pi/m$  gegeneinander verdreht sind, so zum Beispiel in Abbildung 1.8 eine Doppelspirale, verursacht durch eine Schraubenversetzung der Ladung  $m = 2$ .

## Stufenversetzungen

Verwendet man wieder die Definition aus der Festkörperphysik, so ist eine Stufenversetzung durch einen Burgers-Vektor senkrecht zur Versetzungslinie festgelegt. Nachdem ja der Burgers-Vektor im Allgemeinen in Ausbreitungsrichtung der Welle zeigt, ist demnach die Versetzungslinie einer Stufenversetzung senkrecht zur Ausbreitungsrichtung. Um dies zu erreichen, kann zum Beispiel in Gleichung (1.6) die  $y$ -Koordinate durch  $z$  ersetzt werden (siehe [1], S.99):

$$E(x, y, z) = k(x + iz)e^{-ikz}. \quad (1.8)$$

Gleichung (1.8) stellt eine Stufenversetzung mit der Versetzungslinie, die mit der  $y$ -Achse zusammenfällt. In der Festkörperphysik wäre dies eine zusätzlich eingeschobene,

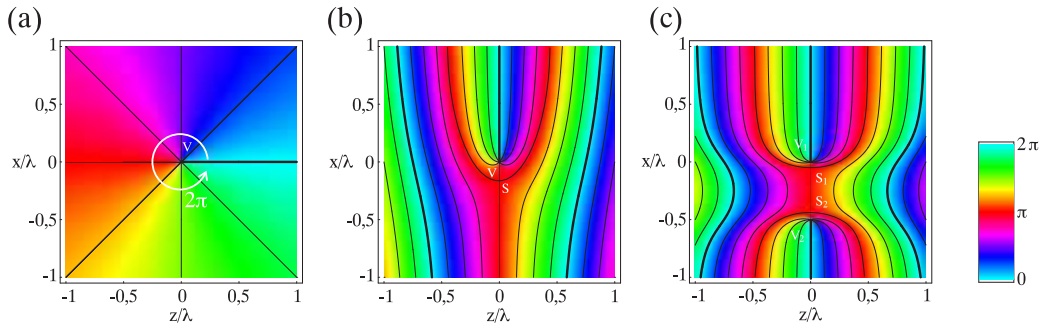


Abbildung 1.9: Die Phase verschiedener Phasensingularitäten in Ebenen senkrecht zu den Versetzungslinien  $V$ . Die Phase ist in Falschfarben nach der nebenstehenden Skala dargestellt, überlagert sind Linien gleicher Phase im Abstand von  $\pi/4$ . Auf den dicken Linien ist die Phase null. In (a): Phase einer Schraubenversetzung in  $z$ -Richtung, in der  $x$ - $y$ -Ebene dargestellt. Auf dem weiß eingezeichneten Weg ändert sich die Phase von 0 auf  $2\pi$ . In (b) ist eine, in (c) sind zwei Stufenversetzungen dargestellt. Hier ist im Unterschied zu (a) die Phase in der  $x$ - $z$ -Ebene senkrecht zu den Versetzungslinien aufgetragen. In (b) und (c) bilden sich an den Punkten  $S$  Sattelpunkte der Phase. Bei allen Typen von Versetzungen treten an der Singularität alle Phasen gleichzeitig auf, deshalb sind die Versetzungslinien Ursprung der Linien gleicher Phase.

zur  $y$ -Achse parallele Halbebene, die bei  $x = 0$  endet. Durch den Term  $e^{-ikz}$  sind die Phasenflächen verbogene Ebenen mit einem Phasensprung an der Linie  $(x, z) = (0, 0)$ , auf der eine Phasensingularität auftritt (Abbildung 1.5). Aufgetragen sind hier die Flächen der Phase  $\phi = 0$ , die  $z$ -Achse ist die Ausbreitungsrichtung.

Der Phasengradient nimmt an der Stelle der Versetzung wieder die Form eines Wirbels

mit der Versetzungslinie als Achse an wie in Abb. 1.3. In Abb. 1.9 (b) ist die Phase einer Stufenversetzung nach Gleichung (1.8) als Falschfarbendarstellung aufgetragen. Überlagert sind Linien gleicher Phase im Abstand von  $\pi/4$ , die Linien der Phase null sind dicker gezeichnet. Im Unterschied zu Abb. 1.9 (a) ist hier die Phase der Funktion in der  $x$ - $z$ -Ebene dargestellt, da ja die Versetzungslinie in  $y$ -Richtung verläuft.

Nahe der Versetzungslinie  $V$ , nämlich genau an dem Punkt, an dem sich die Phasengradienten des Terms  $e^{-ikz}$  und des Terms  $x+iz$  gerade aufheben, entsteht ein Sattelpunkt  $S$  der Phase, d.h. ein Punkt, an dem sich die Phase lokal nicht ändert.

Eine solche Stufenversetzung erfüllt jedoch nicht die Wellengleichung  $c^2 \nabla^2 E - \ddot{E} = 0$ , den Einsetzen von Gleichung (1.8) multipliziert mit  $e^{i\omega t}$  ergibt

$$c^2 \nabla^2 E - \ddot{E} = -2\omega^2 e^{i(\omega t - kz)} \neq 0$$

Gleichung (1.8) kann daher nur als lokale Näherung einer exakten Lösung der Wellengleichung gesehen werden. Ein Beispiel für eine Stufenversetzung, die die Wellen-

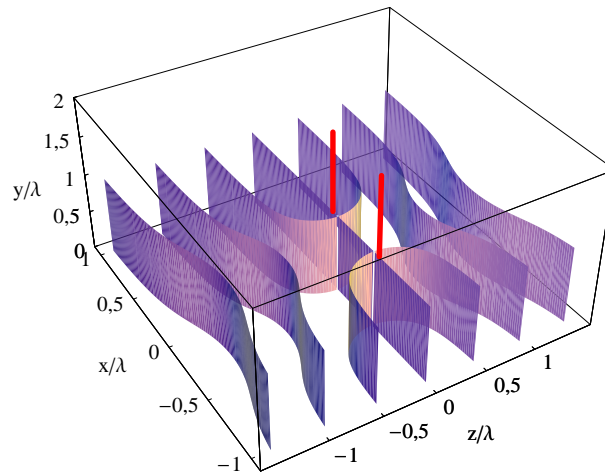


Abbildung 1.10: Flächen gleicher Phase für zwei Stufenversetzungen nach Gleichung (1.9) mit  $a = \pi$ , die beiden Versetzungslinien sind rot, die Ausbreitungsrichtung ist die  $z$ -Achse. Gezeichnet sind im Unterschied zu Abb. 1.5 die Flächen der Phase null und  $\pi$ .

gleichung erfüllt, enthält quadratische Terme in  $x$  ([1], S.99) und ist deshalb etwas komplizierter:

$$E(x, y, z) = (ax + kx^2 + iz)e^{i(\omega t - kz)} \quad (1.9)$$

Gleichung (1.9) stellt zwei Stufenversetzungen parallel zur  $y$ -Achse in der Ebene  $z = 0$  an den Punkten  $x = 0$  und  $x = -a/k$  dar. In Abb. 1.9 (c) ist die Phase dieser beiden

Versetzungen für  $a = \pi$  aufgetragen. Aus der Graphik erkennt man, dass die beiden Versetzungen entgegengesetzte topologische Ladungen haben und in diesem Fall zwei Sattelpunkte  $S$  jeweils an den den eingeschobenen Halbebenen abgewandten Seiten der Versetzungslinien entstehen. Auch hier gehen die Linien gleicher Phase radial von den Versetzungslinien aus, wodurch der Gradient der Phase in der  $x$ - $z$ -Ebene zwei Wirbel mit entgegengesetzter Rotationsrichtung aufweist.

Abbildung 1.10 zeigt eine dreidimensionale Darstellung der Phasenflächen dieser Stufenversetzungen für den Parameter  $a = \pi$ . Gezeichnet sind die Flächen der Phase null und  $\pi$ .

## Photonen-Bahndrehimpuls

In einem Lichtfeld mit einer Schraubenversetzung der Ladung  $m$ , also einer Wirbellinie parallel zur Ausbreitungsrichtung, haben die Photonen wie Teilchen in einer rotierenden Flüssigkeit einen Bahndrehimpuls von  $m\hbar$  pro Photon. Der Grund dafür ist, dass der  $\mathbf{k}$ -Vektor, der an jeder Stelle senkrecht auf den Wellenfronten steht, durch die schraubenartige Verformung der Wellenfront Komponenten erhält, die nicht mehr parallel zum Ortsvektor  $\mathbf{r}$  sind. Der Impuls  $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$  der Photonen ist damit nicht mehr parallel zu  $\mathbf{r}$ . Der Drehimpuls der Photonen, der wie der Drehimpuls eines jeden Teilchens als  $\mathbf{r} \times \mathbf{p}$  definiert ist, verschwindet in diesem Fall nicht mehr. Integriert man über den Strahlquerschnitt, so erhält man im Falle eines Bündels mit einem optischen Wirbel einen nichtverschwindenden Gesamtdrehimpuls (siehe [16]). Abb. 1.11 zeigt die helixförmige Wellenfront und die darauf senkrecht stehenden  $\mathbf{k}$ -Vektoren eines Bündels mit einer Phasensingularität parallel zur Ausbreitungsrichtung  $z$ .

Der Bahndrehimpuls der Photonen kann experimentell nachgewiesen werden: Er kann in optischen Pinzetten, die zum Teil mit optischen Wirbeln arbeiten, auf in der Pinzette gefangene Teilchen übertragen werden und diese in Rotation versetzen [6]. Außerdem kann der Drehimpulsübertrag auf ein Paar Zylinderlinsen, die dazu verwendet werden, Laguerre-Gauß-Moden (mit Photonen-Bahndrehimpuls) in Hermite-Gauß-Moden (ohne Photonen-Bahndrehimpuls) umzuwandeln, gemessen werden [16].



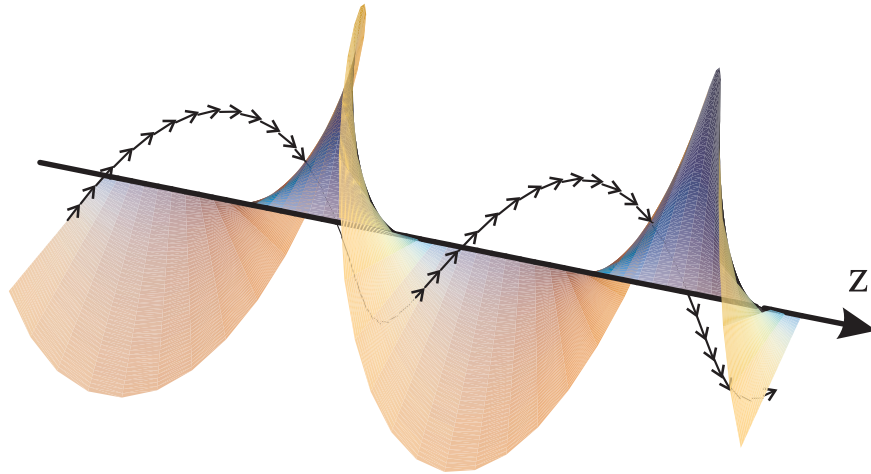


Abbildung 1.11: Die  $\mathbf{k}$ -Vektoren eines Lichtbündels mit einer Schraubenversetzung im Zentrum: Sie stehen überall senkrecht auf der helixförmigen Wellenfront und formen daher eine Spirale. Der Gesamtdrehimpuls des Bündels ist auch im linear polarisierten Fall von null verschieden, die Photonen haben einen Bahndrehimpuls.

## Versetzungsflächen

Bisher wurden nur sogenannte generische und daher nicht entartete Fälle von Phasensingularitäten behandelt. Diesen allen war gemeinsam, dass die Versetzung eine Linie im Raum bildet. Bei nicht-generischen Versetzungen muss das nicht mehr der Fall sein. Ein Beispiel ist ein Grenzfall der Stufenversetzungen in Abb. 1.10: Durch verändern der Konstante  $a$  in Gleichung (1.9) ändert sich der Abstand zwischen den beiden Stufenversetzungen. Mit größer werdendem  $a$  überwiegt der lineare Term in  $x$ , und die zweite Versetzung, die durch den Term proportional  $x^2$  gebildet wird, rutscht immer weiter auf der  $x$ -Achse vom Ursprung weg (siehe [1], S.101). Abbildung 1.12 zeigt die Linien der Phase  $0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$  in der  $x$ - $z$ -Ebene für diese Situation für verschiedene  $a$ . Die Abbildung entspricht der Darstellung in Abb. 1.9 (c), jedoch ohne Farbkodierung. Die Amplitude des Feldes hat bei  $(x, z) = (0, 0)$  ein Minimum in Form einer Nullstelle. Die Amplitudenverteilung um den Ursprung ist näherungsweise proportional zu  $k\sqrt{a^2x^2 + z^2}$  (siehe Gleichung 1.9). Für wachsendes  $a$  wird dieses Minimum daher parallel zu  $z$ -Achse immer flacher und in  $x$ -Richtung immer schärfer. Diese Nullstelle wird im Grenzfall  $a \rightarrow \infty$  zu einer Geraden parallel zur  $z$ -Achse, bei deren Überschreiten die Phase einen Sprung um  $\pi$  macht, wie aus Abbildung 1.12 (d) deutlich wird. In 3 Dimensionen wird diese Linie, da die Koordinate  $y$  beliebig ist, zur  $y$ - $z$ -Ebene. Aus einer

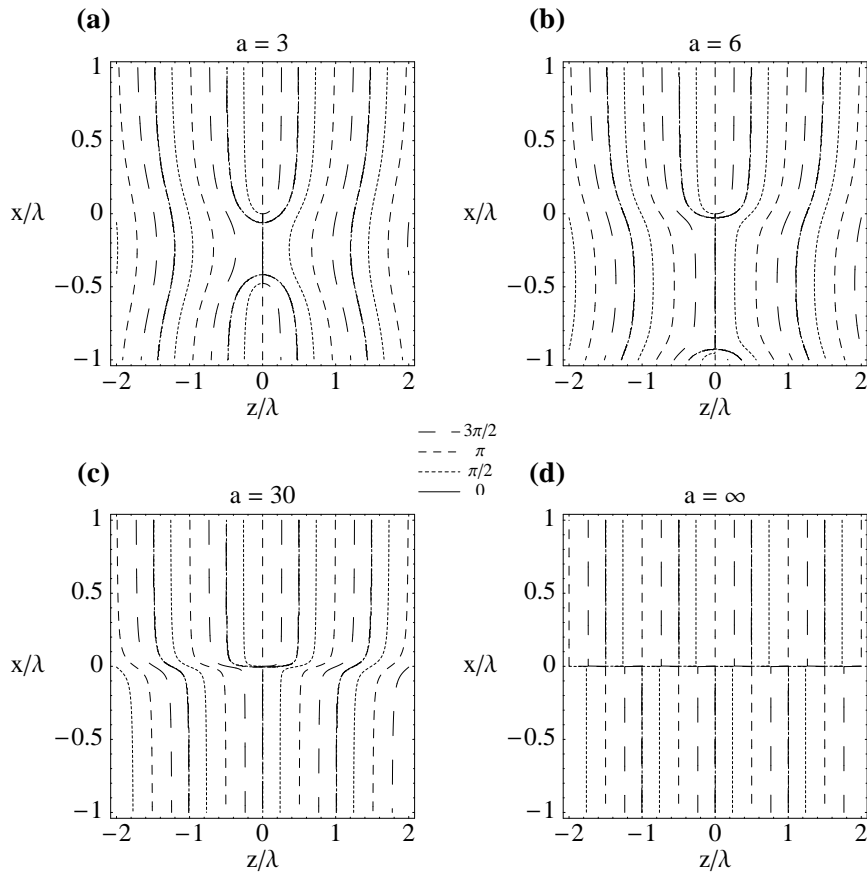


Abbildung 1.12: Linien konstanter Phase für die Stufenversetzungen aus Gleichung (1.8) bei  $a = 3, 6, 30$  und  $\infty$ . Die Phasenlinien sind nach der Legende in der Mitte kodiert. Für größer werdendes  $a$  rutscht die zweite Stufenversetzung ((a), (b)) auf der negativen  $x$ -Achse ins Unendliche (c) und die Stufenversetzung im Ursprung wird entartet (d). Die Nullstelle der Intensität ist im zweidimensionalen Fall kein Punkt mehr, sondern wird zu einer Linie parallel zur  $z$ -Achse (d). In 3 Dimensionen wird diese Linie zur  $y$ - $z$ -Ebene.

Nulllinie der Amplitude ist damit eine Nullfläche geworden, bei deren Überschreiten sich die Phase um  $\pi$  ändert. Diese Fläche ist eine entartete Nullstelle, die nicht mehr stabil gegen Störung ist.

Man kann im Übrigen jede Nullstelle mit Vorzeichenwechsel als Phasensprung um  $\pi$  auffassen. Als Beispiel betrachte man ein Laguerre-Gauß-Bündel der Ordnung 3 (siehe Kapitel 1.1.2): Die Phase einer reellen Funktion  $f(x)$  erhält man, wenn man sich in der komplexen Zahlenebene die Lage des Funktionswertes  $f(x)$  veranschaulicht. Der Funktionswert liegt immer auf der reellen Achse und hat daher nach Definition der Phase einer komplexen Zahl für positive Funktionswerte die Phase 0, für negative Funktions-

werte die Phase  $\pi$ . Für jeden Nulldurchgang der Funktion wandert der Punkt  $f(x)$  durch den Ursprung, wobei sich die Phase des Punktes um  $\pi$  ändert (siehe Abbildung 1.13). Man kann daher von einem Phasensprung um  $\pi$  bei jedem Nulldurchgang einer

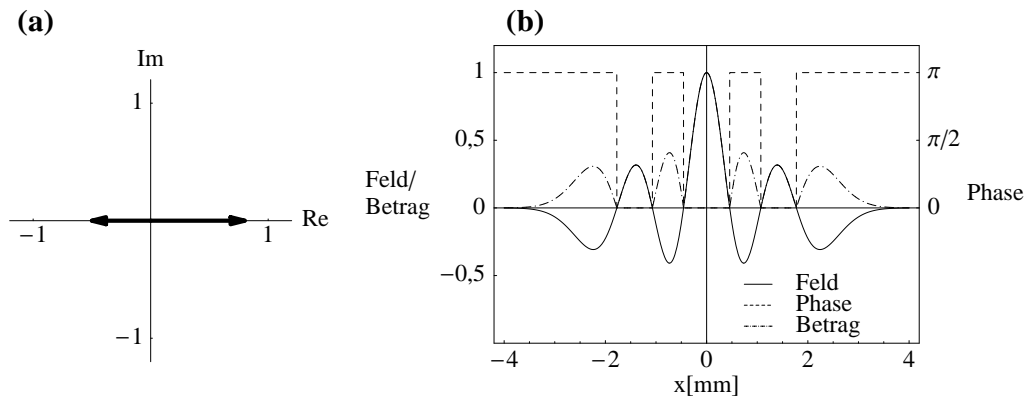


Abbildung 1.13: Die Nullstellen mit Vorzeichenwechsel können bei einer beliebigen Funktion als Phasensprung um  $\pi$  aufgefasst werden. Hier als Beispiel ein Laguerre-Gauß-Bündel. Die Spitze des Vektors  $LG_3^0(x)$  (schwarzer Pfeil) bewegt sich in der komplexen Ebene auf der reellen Achse (a) und hat daher die Phase 0 oder  $\pi$ . Daher macht die Phase der Funktion beim Nulldurchgang der Funktion einen Phasensprung um  $\pi$  (b). Auch eine reelle Funktion kann so durch Betrag und Phase dargestellt werden.

reellen Funktion sprechen und könnte die Funktion statt durch ihren Funktionswert auch durch den Betrag des Funktionswertes und seine Phase beschreiben.

Indem man dieses Konzept auf zwei Dimensionen erweitert, werden z. B. die Nulllinien von  $f(x, y) = \cos x$ , als Funktion in zwei Variablen über der x-y-Ebene aufgefasst, zu Stellen mit einem Phasensprung um  $\pi$ . Fasst man  $\cos x$  als Funktion in drei Variablen auf,  $f(x, y, z) = \cos x$ , so werden diese Nulllinien zu Nullflächen parallel zur z-Achse und damit zu entarteten Stufenversetzungen.

Solche entarteten Stufenversetzungen sind zum Beispiel die Nullstellen der Intensität, die bei der Interferenz zweier ebener Wellen im Raum entstehen. Ein für diese Arbeit wichtiges Beispiel sind die Nullstellen von Laguerre-Gauß-Bündeln (siehe Abb. 1.13,

die in drei Dimensionen Rotationshyperboloid-Flächen bilden.

## Entartung und Stabilität

Die meisten der bisher behandelten Fälle waren Singularitäten der Ladung  $m = \pm 1$ , bei denen das Feld eine Nullstelle erster Ordnung hatte. Diese Singularitäten werden, sofern sie nicht in Flächen entartet sind, als generisch bezeichnet. Sie haben die Eigenschaft, dass sie strukturell stabil gegenüber kleinen Störungen sind, d.h. die Wirbellinien mögen sich verformen, im Raum rotiert oder verschoben werden, aber sie lösen sich nicht einfach auf [1].

Man bekommt eine Vorstellung davon, wenn man zu einem generischen Wirbel bei  $(x, y) = (0, 0)$  eine ebene Welle als Störterm addiert:

$$(x + iy)e^{ikz} + \varepsilon e^{ikz} = (x + \varepsilon + iy)e^{ikz} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x, y) = (-\varepsilon, 0).$$

Die Nullstelle des Feldes und damit die Lage der Wirbellinie verschiebt sich in diesem Fall nur zu  $(x, y) = (-\varepsilon, 0)$ . Liegt jedoch eine Nullstelle höherer Ordnung vor, wie das z. B. bei einem Wirbel mit höherer topologischer Ladung der Fall ist, so wird die Entartung dieser Nullstelle bei Störungen aufgehoben:

$$(x + iy)^2 e^{ikz} + \varepsilon e^{ikz} = (x^2 + 2ixy - y^2 + \varepsilon)e^{ikz} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x, y) = (\pm\sqrt{\varepsilon}, 0).$$

Es entstehen daher aus einer Wirbellinie der Ladung 2 bei  $(x, y) = (0, 0)$  zwei Wirbellinien der Ladung 1 bei  $(x, y) = (\pm\sqrt{\varepsilon}, 0)$ .

Als Beispiel ist in Abb. 1.14 (a) ein sogenanntes Bessel-Bündel zu sehen, das ist ein Lichtbündel, dessen radiale Feldverteilung einer Bessel-Funktion gehorcht und daher aus unendlich vielen konzentrischen Ringen mit abnehmender Intensität besteht. Zwischen den hellen Ringen sind entartete Nullstellen, die in drei Dimensionen Zylindermäntel bilden. Das vorliegende Bessel-Bündel ist eines der Ordnung 2, d.h. seine Feldverteilung gehorcht einer Bessel-Funktion der Ordnung 2. Zusätzlich trägt das Bündel im Zentrum einen (nicht-generischen) Wirbel der topologischen Ladung  $m = 2$ . Dieses Bündel wird in Abb. 1.14 (b) durch eine ebene Welle gestört. Durch die überlagerte ebene Welle werden die entarteten Versetzungsflächen zerstört und der Wirbel der Ladung 2 im Zentrum in zwei Wirbel einfacher Ladung aufgespalten.

Viele weitere Beispiele der Störung von entarteten Versetzungen sind zu finden in den

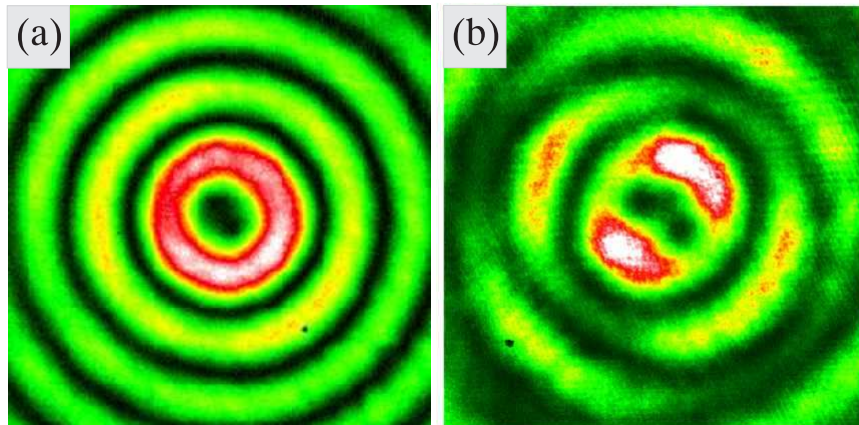


Abbildung 1.14: Zerfall eines nichtgenerischen Wirbels mit Ladung 2 in zwei Wirbel mit Ladung 1 durch die Störung durch eine ebene Welle: Bild (a) zeigt ein  $J_2$ -Bessel-Bündel (radiale Feldverteilung gehorcht einer Bessel-Funktion  $J_2$ ), das einen Wirbel der Ladung 2 im Zentrum trägt (schwarzer Fleck) und dessen radiale Nullstellen in 3 Dimensionen entartete Versetzungsflächen, in zwei Dimensionen dunkle Ringe sind. In (b) ist das Bündel durch eine ebene Welle gestört, wodurch der nichtgenerische Wirbel im Zentrum in zwei einzelne dunkle Flecken aufgespalten und die Nulllinien zerstört werden. Die Intensitätsverteilung ist farbkodiert (schwarz entspricht minimaler, weiß maximaler Intensität).

Kapiteln über Wirbel in Laguerre-Gauß-Bündel (1.4.1, 1.4.2, 1.5.1) und in den Kapiteln über Polarisationsingularitäten (2.3.2 und 2.3.6).

### Charakterisierung des Feldes durch seine Phasensingularitäten

Durch die Nullstellen einer Funktion sind schon viele ihrer Eigenschaften festgelegt. So lässt sich z. B. durch  $n$  Punkte genau ein (bis auf einen Skalierungsfaktor eindeutiges) Polynom der Ordnung  $n$  bestimmen, das diese Punkte als Nullstellen hat.

Nun sind ja nach obigen Kapitel die Nullstellen des Lichtfeldes eindeutig mit seinen Phasensingularitäten zu identifizieren, jede Nullstelle der Intensität ist also ein optischer Wirbel. Diese Wirbel bilden stetige Linien im Raum, sie sind zeitlich stabil und darüberhinaus auch noch stabil gegenüber kleineren Störungen des Feldes, wie sie z. B. durch leichte Symmetriebrechungen (astigmatische Linsen) induziert werden. Dadurch sind die wesentlichen topologischen Eigenschaften des Feldes festgelegt, die Wirbellinien bilden sozusagen das Skelett des Lichtfeldes. Zwei Lichtfelder mit gleichen Wirbeln an den gleichen Stellen sind sich sowohl in der Intensität als auch der Phase sehr ähn-

lich und werden sich auch z.B. bei der freien Ausbreitung im Vakuum oder bei der Beugung an Öffnungen oder der Transformation durch Linsen ähnlich verhalten.

Dieses Skelett aus Wirbellinien kann sehr komplizierte Strukturen annehmen: Abb.

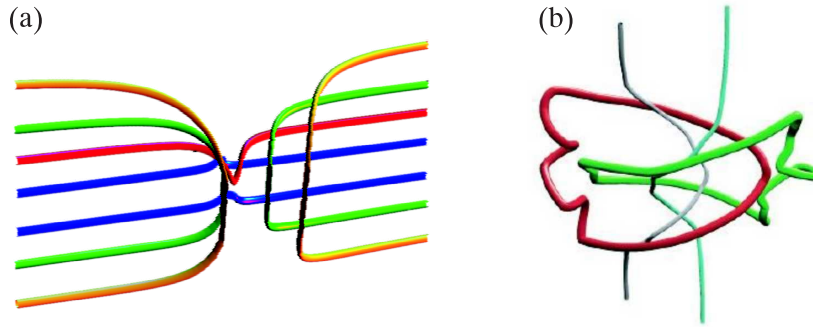


Abbildung 1.15: Wirbellinien sind das Skelett des Lichtfeldes und können komplizierte Strukturen annehmen: Bild (a) zeigt die Wirbellinien, die in einem Laguerre-Gauß  $LG_3^0$ -Bündel entstehen, wenn in das Bündel ein zusätzlicher Wirbel eingebracht wird (siehe auch Kapitel 1.4.2). Bild (b) zeigt verknotete Wirbellinien, die durch eine Überlagerung von drei verschiedenen Bessel-Bündeln entstehen ([17]).

1.15 (a) zeigt die Wirbellinien, die bei der Störung eines  $LG_3^0$ -Laguerre-Gauß-Bündels durch einen weiteren Wirbel entstehen. Das Bild ist aus Kapitel 1.4.2 entnommen und wird dort genauer besprochen. Abb. 1.15 (b) zeigt verknotete Wirbellinien, die bei der Überlagerung von drei verschiedenen Bessel-Bündeln entstehen ([17]).

### 1.1.2 Laguerre-Gauß-Bündel

Stabile optische Resonatoren, bestehend aus zwei planen oder sphärisch gekrümmten Spiegeln wie sie in den meisten Lasern verwendet werden, besitzen sogenannte **Transversale Elektromagnetische EigenModen**. Das sind Feldverteilungen in der Ebene senkrecht zur Achse des Resonators, die nach einem Umlauf im Resonator wieder auf sich selbst abgebildet werden, also Eigenfunktionen der Wellengleichung im Resonator.

Man findet je nach dem verwendeten Koordinatensystem verschiedene Familien von Eigenfunktionen. Die bekannteste ist die Familie der Hermite-Gauß-Funktionen, die man bei Verwendung von kartesischen Koordinaten  $(x, y, z)$  erhält (siehe [18], Kapitel 16). Sie werden auch als  $TEM_{k,l}$  bezeichnet, wobei die Indizes  $k$  und  $l$  die Anzahl der

Nullstellen in  $x$ - und  $y$ -Richtung angeben. Transformiert man die Wellengleichung auf elliptische Koordinaten, so erhält man die Familie der Ince-Gauß-Moden als Lösungen ([19]). Verwendet man zylindrische Polarkoordinaten  $(r, \varphi, z)$ , so erhält man als Eigenfunktionen die Familie der Laguerre-Gauß-Moden. Diese bestehen im Wesentlichen aus einer Gauß - Einhüllenden der Form  $e^{-\frac{r^2}{w^2}}$ , einem generalisierten Laguerre - Polynom  $L_p^l(\frac{2r^2}{w^2})$ , das die radiale Intensitätsverteilung vorgibt, und einem azimuthalen Phasenterm  $e^{il\varphi}$ . Die Laguerre-Gauß-Moden sind gegeben durch ([18], Kapitel 16):

$$LG_p^l(r, \varphi, z) = C_p^l e^{-\frac{r^2}{w^2(z)} - i\frac{kr^2}{2R_k(z)} + i\Phi_p^l(z) + il\varphi} \left(\frac{2r^2}{w^2(z)}\right)^{\frac{l}{2}} L_p^l\left(\frac{2r^2}{w^2(z)}\right) \quad (1.10)$$

mit einem Normierungsfaktor  $C_p^l$ , dem Strahlradius  $w(z)$ , dem Krümmungsradius der Wellenfronten  $R_k(z)$  und der Gouy-Phase  $\Phi_p^l(z)$ :

$$C_p^l = \frac{1}{w(z)} \left[ \frac{2p!}{\pi(p+l)!} \right]^{1/2}, \quad (1.11)$$

$$w^2(z) = w_0^2 \left(1 + \frac{z^2}{z_R^2}\right), \quad (1.12)$$

$$R_k(z) = \frac{z^2 + z_R^2}{z}, \quad (1.13)$$

$$\Phi_p^l(z) = (2p + l + 1) \arctan\left(\frac{z}{z_R}\right). \quad (1.14)$$

$w_0$  ist der Radius der Strahltaile und  $z_R = kw_0^2/2$  die Rayleigh-Reichweite.

Die Indizes  $p \geq 0$  und  $l \in \mathbb{Z}$  bestimmen die radiale und azimuthale Ordnung der Moden. Der azimuthale Index  $l$  bestimmt die Ladung des im Zentrum vorhandenen optischen Wirbels  $e^{il\varphi}$ , der radiale Index  $p$  legt die Anzahl der radialsymmetrischen Nullstellen fest. Dadurch haben die  $LG_p^l$ -Moden für  $l = 0$  genau  $p$  konzentrische Nullstellen mit einem Maximum im Zentrum, für  $l \geq 0$  tragen sie im Zentrum einen Wirbel der Ladung  $l$ .

Gleichung (1.15) gibt für  $p = 0, 1, 2, \dots, 4$  die Laguerre-Polynome  $L_p^0(x)$  mit azimuthalem Index  $l = 0$  an:

$$\begin{aligned} L_0^0(x) &= 1 \\ L_1^0(x) &= 1 - x \\ L_2^0(x) &= \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 2) \\ L_3^0(x) &= \frac{1}{6}(-x^3 + 9x^2 - 18x + 6) \\ L_4^0(x) &= \frac{1}{24}(x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 24) \end{aligned} \quad (1.15)$$

Abbildung 1.16 zeigt die radialen Intensitätsverteilungen von vier  $LG_p^l$ -Moden ( $LG_1^0$ ,  $LG_2^0$ ,  $LG_3^0$ ,  $LG_4^0$ ) für  $w_0 = 1$  in der Strahltaile, Abbildung 1.18 zeigt die zweidimen-

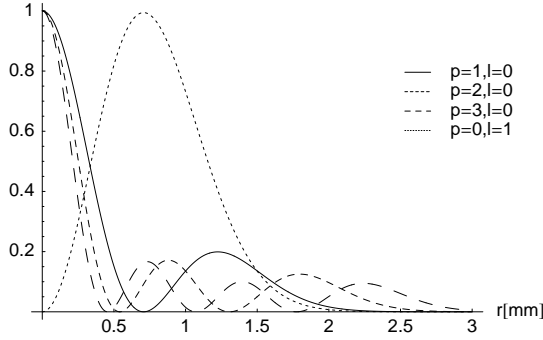


Abbildung 1.16: Radiale Intensitätsverteilungen von vier  $LG_p^l$ -Moden ( $LG_1^0$ ,  $LG_2^0$ ,  $LG_3^0$ ,  $LG_0^1$ ) in der Strahltille mit  $w_0 = 1$ .

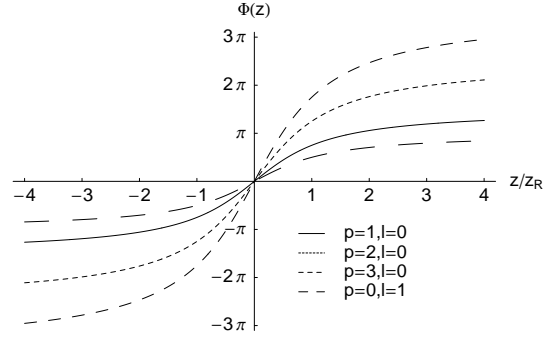


Abbildung 1.17: Die Gouy-Phase von vier  $LG_p^l$ -Moden in einem Bereich von  $-4z/z_R$  bis  $+4z/z_R$  um die Strahltille. Sie gibt den während der Ausbreitung zum Punkt  $z$  angesammelten Phasenunterschied zu einer ebenen Welle an.

sionalen Intensitätsverteilungen als Graustufenplot (dunkel entspricht geringer Intensität). Die Gouy-Phase  $\Phi_p^l(z)$  gibt den während der Ausbreitung bis zum Punkt  $z$  angesammelten Phasenunterschied zu einer ebenen Welle an. Er ist über  $(2p + l + 1) \arctan(\frac{z}{z_R})$  sowohl von der Ordnung der Mode als auch von der Ausbreitungsentfernung  $z$  im Vergleich zur Rayleigh-Reichweite abhängig. Abb. 1.17 zeigt die Gouy-Phase für verschiedene  $LG_p^l$ -Moden in einem Bereich von  $-4z/z_R$  bis  $+4z/z_R$  um die Strahltille des Bündels.

Für die  $LG$ -Moden gilt, da sie eine Basis bilden, eine Orthonormalitätsrelation wie sie auch für Hermite-Gauß-Moden existiert (siehe [18], Kapitel 16):

$$\langle LG_q^m(r, \varphi, z), LG_p^l(r, \varphi, z) \rangle = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \{LG_q^m(r, \varphi, z)\}^* LG_p^l(r, \varphi, z) r dr d\varphi = \delta_{qp} \delta_{ml} \quad (1.16)$$

Außerdem ist es möglich, jede Funktion  $f(r, \varphi, z)$  in dieser Basis als Reihe zu entwickeln:

$$f(r, \varphi, z) = \sum_{l,p} A_p^l LG_p^l(r, \varphi, z). \quad (1.17)$$

Die Koeffizienten  $A_p^l$  dieser Reihe werden dabei durch die Skalarprodukte an der Stelle  $z_0$  von  $f(r, \varphi, z)$  mit den Basisfunktionen bestimmt:

$$A_p^l = \langle f(r, \varphi, z_0), LG_p^l(r, \varphi, z_0) \rangle. \quad (1.18)$$



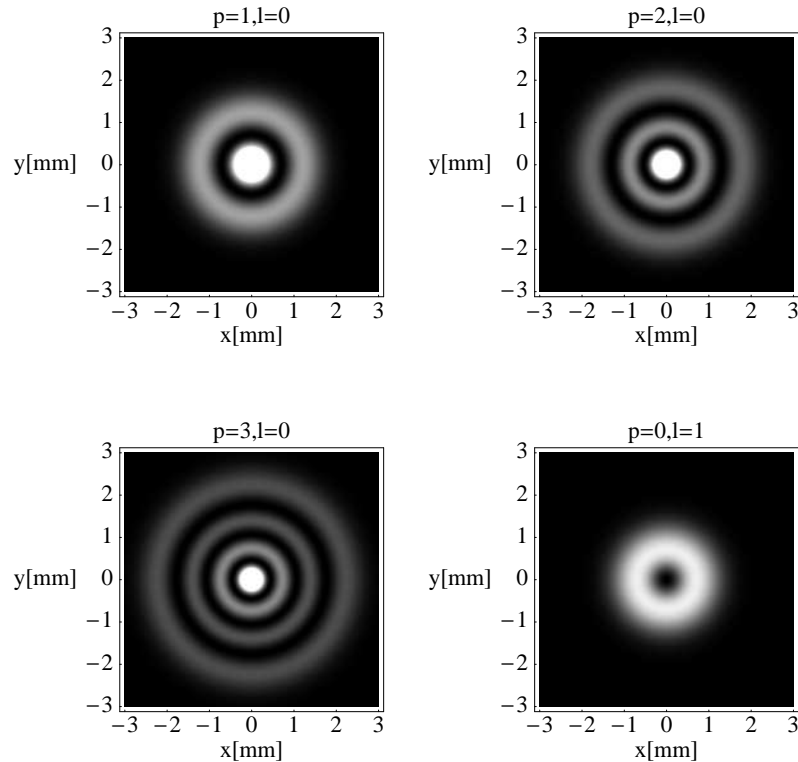


Abbildung 1.18: Intensitäten von vier  $LG_p^l$ -Moden ( $LG_1^0$ ,  $LG_2^0$ ,  $LG_3^0$ ,  $LG_0^1$ ) als Graustufenplot in der Strahltaile für  $w_0 = 1$ .

Im Kapitel 1.4.5 wird diese Entwicklung für  $LG$ -Bündel mit zusätzlichen optischen Wirbeln berechnet. Für Hermite-Gauß-Bündel als Basisfunktionen wird diese Vorgehensweise z. B. in [18], Kapitel 16 besprochen.

Die Laguerre-Gauß-Bündel sind selbstähnlich während der Propagation in  $z$ -Richtung, d.h. die Form der transversalen Intensitätsverteilung bleibt bis auf die beugungsbedingte Skalierung der Koordinaten  $x$  und  $y$  um den Faktor  $w(z)$  dieselbe.

Zusätzlich zu dem optischen Wirbel  $e^{il\varphi}$  im Zentrum enthalten die  $LG_p^l$ -Bündel noch  $p$  weitere Phasensingularitäten: Die  $p$  konzentrischen Nulllinien der Bündel sind in drei Dimensionen zu Flächen entartete Singularitäten, genauer Stufenversetzungen. Diese Versetzungsflächen bilden wegen Gleichung (1.12)  $p$  konzentrische Rotationshyperboloide um die  $z$ -Achse:

$$w^2(z) = w_0^2 \left(1 + \frac{z^2}{z_R^2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{w^2}{w_0^2} - \frac{z^2}{z_R^2} = 1.$$

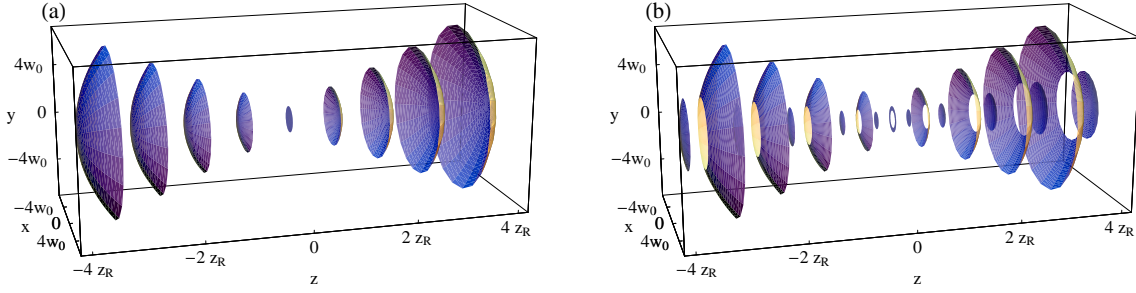


Abbildung 1.19: Flächen gleicher Phase eines Gauß-Bündels in (a) und eines  $LG_1^0$ -Bündels in (b). Die Phasenflächen sind Teile von Kugelschalen mit  $z$ -abhängigen Radien und für ein  $LG_1^0$ -Bündel wegen der hyperbolischen entarteten Phasenversetzungsfläche in einen Innen- und einen Aussenteil zerlegt, die um  $\pi$  gegeneinander verschoben sind.

Die Versetzungen sind wegen ihrer Entartung instabil und brechen unter dem Einfluss von Störungen in Versetzungslinien auf (siehe Kapitel 1.1.1).

In Abb. 1.19 (b) sind die Flächen gleicher Phase eines  $LG_1^0$ -Bündels im Vergleich zu den Phasenflächen eines Gauß-Bündels (a) an den Punkten  $(0, z_R, 2z_R \dots)$  gezeichnet: Für alle Gauß-Moden haben die Phasenflächen eine  $z$ -abhängige Krümmung mit Krümmungsradius  $R_k(z) = z + z_R^2/z$  (siehe Gleichung (1.13)), sind also überall außerhalb der Strahltaile Kugelkalotten. Die Größe dieser Kugelkalotten ist in Abb. 1.19 proportional zum Strahlradius  $w(z)$  gewählt, um die Divergenz der Gauß-Moden zu veranschaulichen. In der Strahltaile divergiert der Krümmungsradius, die Phasenflächen sind eben. Für ein  $LG_1^0$ -Bündel haben die Flächen gleicher Phase Sprünge an der konzentrischen Nulllinie, wodurch der Innenteil der Kugelkalotten gegenüber dem Außenbereich verschoben ist. Bei einem Laguerre-Gauß-Bündel der Ordnung  $p$  wäre die Kugelschale in  $p$  abwechselnd gegeneinander verschobene Teile zerstückelt.

Die Ausbreitung von Laguerre-Gauß-Bündeln lässt sich unter Verwendung einer Näherung für den Propagationsfaktor (siehe 1.1.3) sogar mit darin enthaltenen r-Wirbeln (siehe 1.3.2) analytisch berechnen, was mit Wirbeln in Bessel-Bündeln nur numerisch möglich ist. Weiter sind  $LG_p^l$ -Bündel mit großem radialen Index  $p$  eine im Innenbereich sehr gute Näherung für  $J_l$ -Bessel-Bündel. Daher sind Laguerre-Gauß-Bündel beim Verständnis der Untersuchung von Wirbeln in Bessel-Bündeln [20] ein hilfreiches Werkzeug.

### 1.1.3 Rechenmethoden

Zur Kontrolle und Vorhersage der experimentellen Ergebnisse wurden numerische und analytische Rechnungen zur Ausbreitung der Lichtbündel durchgeführt. Das Prinzip dieser Rechnungen ist mittlerweile eine Standardmethode in der Optik (siehe [21]) und beruht auf der sogenannten „Ausbreitung des Winkelspektrums“: Das am Ort  $z = z_0$  bekannte Feld  $f(\mathbf{r}_0)$  wird als eine kontinuierliche Überlagerung von ebenen Wellen mit verschiedenen Wellenvektoren  $\mathbf{k}$  dargestellt, was einer Fourier-Transformation des Feldes bei  $z = z_0$  entspricht. Da die Wellenvektoren alle dieselbe Länge haben, unterscheiden sie sich nur durch ihren Winkel zur Ausbreitungsrichtung, daher spricht man auch vom Winkelspektrum der Verteilung.

Jede dieser ebenen Wellen breitet sich nun geradlinig in Richtung ihres Wellenvektors zum Punkt  $z = z_1$  aus, dabei verändert sich nur ihre Phase im Bezug auf den Ursprung. Dieser Ausbreitung wird durch Multiplikation mit dem Faktor  $e^{2\pi i \sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - \sigma_x^2 - \sigma_y^2} z_1}$  Rechnung getragen, wobei die  $\sigma_i = k_i/\lambda$  normierte Koordinaten im Fourierraum sind. Die anschließende Fourier-Rücktransformation liefert das Feld  $f(\mathbf{r}_1)$  an der Stelle  $z = z_1$ :

$$f(x, y, z_1) = 4\pi^2 \mathcal{F}^{-1} \{ \mathcal{F} \{ f(x, y, z_0) \} e^{2\pi i \sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - \sigma_x^2 - \sigma_y^2} z_1} \}. \quad (1.19)$$

Der Faktor  $4\pi^2$  resultiert aus der Normierung der Koordinaten im Fourier-Raum. Es ist also das Feld an der Stelle  $z_1$  gleich dem Feld an der Stelle  $z_0$ , gefaltet mit der Funktion  $e^{2\pi i \sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - \sigma_x^2 - \sigma_y^2} z_1}$ , der sogenannten „Dispersionsfunktion des Vakuums“. Im Unterschied zum Fresnel-Integral, das eine Näherung für kleine Winkel zur Ausbreitungsrichtung verwendet, ist diese Methode exakt und liefert auch für die Phase des Feldes die richtigen Ergebnisse.

Da es in jeder Programmiersprache optimierte Algorithmen zur diskreten Fourier-Transformation (*Fast Fourier Transformation*) gibt, bietet sich diese Methode zur numerischen Berechnung mithilfe des PCs geradezu an. Jedoch treten hier durch die Auswertung auf einem räumlich begrenzten Raster künstliche Beugungseffekte an dessen Rändern auf. Diese können abgemildert werden, indem man die Propagation in mehrere kurze Schritte aufteilt und das Feld nach jedem dieser Schritte mit einer Funktion, die einen absorbierenden Rand simuliert (typischerweise verwendet man eine Super-Gauß-Funktion der Form  $e^{-x^n}$ ), multipliziert.

In einigen Spezialfällen ist die Berechnung der Fourier-Transformationen in Gleichung (1.19) analytisch möglich. Besonders einfach ist dies bei Gauß-Verteilungen, die noch

mit einem Polynom moduliert sein können. Verwendet man zusätzlich eine paraxiale Näherung für den Propagationsfaktor ( $e^{2\pi i \sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - \sigma_x^2 - \sigma_y^2} z_1} \approx e^{\frac{2\pi i}{\lambda} z_1} e^{-\pi i \lambda z_1 (\sigma_x^2 + \sigma_y^2)}$ ), so kann auch die Rücktransformation analytisch durchgeführt werden. So ist z. B. für alle Gauß-Laguerre-Moden, auch in Kombination mit einem off-Axis (r-)Wirbel eine analytische Berechnung des Feldes an jeder Stelle möglich.

Um das Fernfeld einer Verteilung, also das Feld dieser Verteilung für  $z \rightarrow \infty$ , zu messen, wird die Verteilung üblicherweise in der hinteren Brennebene einer Linse betrachtet. Mathematisch entspricht dies bis auf einen skalierenden Faktor der Fourier-Transformierten der Verteilung, sodass man auf diese Weise das Fernfeld einer Funktion berechnen kann. Man muss dabei aber beachten, dass durch diese Methode strenggenommen das Winkelspektrum der Verteilung gemessen bzw. berechnet wird, das nicht immer mit dem Fernfeld der Verteilung übereinstimmt. So ist z. B. bei Bessel-Bündeln das Fernfeld ein Bessel-Bündel, denn diese Bündel sind ausbreitungsinvariant. Das Winkelspektrum eines Bessel-Bündels ist aber ein unendlich schmaler Ring.

## 1.2 Experimenteller Aufbau

Die im Rahmen dieser Arbeit untersuchten Lichtbündel wurden alle mit computer-generierten Hologrammen hergestellt. Bei dieser Technik wird das Interferenzbild einer ebenen Referenzwelle mit dem gewünschten Lichtbündel berechnet und auf transparentes oder reflektives Material übertragen. Man erhält damit ein optisches Gitter. Wird dieses Gitter mit einer ebenen Welle beleuchtet, so erhält man, dem Prinzip der Holographie folgend, in der ersten Ordnung des gebeugten Bündels das gewünschte Lichtfeld.

Für die Experimente auf dem Gebiet der Polarisations-singularitäten stand ein Lichtmodulator aus einem kleinen LCD-Display zur Verfügung (siehe Kapitel 2.2.2), der als variables Beugungsgitter vom PC aus mit dem entsprechenden Hologramm angesteuert wurde. Für die Arbeiten über Phasensingularitäten stand dieser Lichtmodulator jedoch noch nicht zur Verfügung, hier wurden die Hologramme mit einem Montage Graphics FR2 Dia-Belichter (8 Bit Farbtiefe, 2900 dpi Auflösung) auf handelsübliche 35 mm Kleinbild-Diafilme belichtet.

Abbildung 1.20 zeigt den im Experiment verwendeten Aufbau. Das Gitter **G** wird mit einem Helium - Neon - Laser mit  $\lambda = 632 \text{ nm}$  beleuchtet, der von 1,1 mm Durchmesser

durch das erste Teleskop bestehend aus den Linsen **L1** und **L2** mit den Brennweiten 12 mm und 200 mm auf den Durchmesser des Hologramms (ca. 20 mm) aufgeweitet wird. Die Wellenfront des Strahls wird dabei im Zentrum in guter Näherung eben. Der Strahl wird durch die Blende **B1** beschnitten, sodass Störungen am Rand des Bündels ausgeblendet und das Bündel an die Größe des Gitters angepasst werden kann. Zusätzlich wird durch diese Blende wie weiter unten beschrieben die Effizienz der gewünschten *LG*-Mode erhöht und die der unerwünschten unterdrückt.

Die beiden Linsen **L3** und **L4** sind wieder als Teleskop angeordnet und dienen dazu, den Bündeldurchmesser an die Größe des CCD-Chips der Kamera anzupassen und die Rayleigh-Reichweite des Bündels auf eine Länge ( $z_R \approx 1$  m) einzustellen, die noch bequem vermessen werden kann. Die Brennweiten der Linsen sind typischerweise 1000 mm und 300 mm. In der Brennebene der Linse **L3** liegt das Fernfeld des Strahls vor; die verschiedenen Beugungsordnungen sind hier auf Punkte reduziert und deutlich getrennt. Die gewünschte Beugungsordnung wird durch die Blende **B2** selektiert und durch **L4** in den Ortsraum rücktransformiert. Mit der CCD-Kamera kann das Bündel am Bildschirm eines angeschlossenen Computers analysiert werden.

Die verwendete CCD-Kamera (Pulnix TM-6CN) hat einen Chip mit  $240 \times 240$  Pixeln

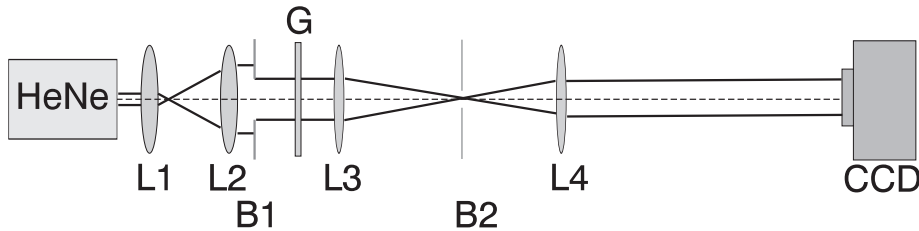


Abbildung 1.20: Experimenteller Aufbau zur Erzeugung eines Laguerre-Gauß-Bündels mittels eines holographischen Gitters *G*. Der Strahl des HeNe-Lasers wird durch die Linsen *L1* und *L2* aufgeweitet und beleuchtet das holographische Gitter *G*. Durch das Teleskop *L3*, *L4* wird der Strahl verkleinert und die erste Beugungsordnung des Gitters mit der Blende *B2* selektiert.

der Größe  $16,6 \mu\text{m} \times 24,4 \mu\text{m}$ , wodurch Auflösung und Bildgröße festgelegt sind.

Bei der Berechnung der Hologramme wurde eine unter dem Winkel  $\gamma \neq 0$  einfallende Referenzwelle verwendet, sodass die Beugungsordnungen des Hologramms bei der Rekonstruktion der Objektwelle getrennt auftreten. Im resultierenden Hologramm erhält

man dadurch ein überlagertes Strichgitter mit Gitterkonstante  $g$ , für die gilt:

$$\sin(\gamma) = \frac{\lambda}{g} \quad (1.20)$$

Die ersten Beugungsordnungen erscheinen dann unter dem Winkel  $\gamma$  zur Referenzwelle. Lässt man die sinusförmige Modulation dieses überlagerten Strichgitters unverändert, erhält man nur die nullte und die zwei ersten Beugungsordnungen, wird das Gitter rechteckig moduliert, so erscheinen die  $j$ -ten Ordnungen unter den Winkeln:

$$\alpha_j = \arcsin(j \cdot \frac{\lambda}{g}) \quad j = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (1.21)$$

Die Transmissionsfunktion  $T(x, y)$  eines Hologramms mit der Gitterkonstanten  $g$  zur Erzeugung eines optischen Wirbels mit Ladung  $m$  und Kernfunktion  $c(x, y)$  (siehe Kapitel 1.3) ist:

$$T(x, y) = c(x, y)e^{2\pi i x/g}e^{im\phi} \quad (1.22)$$

mit  $\phi = \arctan(y/x)$ . Der Real- oder Imaginärteil dieser Transmissionsfunktion wird mit dem oben beschriebenen Diabelichter auf einen Film belichtet. Man erhält im einfachsten Fall ( $c(x, y) = 1$ , das entspricht einem Punktwirbel) ein Dia mit einem Strichgitter der vorgegebenen Gitterkonstante  $g$ , aber mit  $m$  zusätzlich eingeschobenen halben (schwarzen) Gitterlinien, die am Punkt  $(0, 0)$  enden (siehe Abbildung 1.21 mit  $m = 1$ ).

Zusätzlich kann durch Wahl einer entsprechenden Kernfunktion  $c(x, y)$  die Intensität des Feldes rund um den Wirbel mitkodiert werden, was sich in einer Intensitätsänderung im Gitter rund um den Ursprung zeigt.

Um Laguerre-Gauß  $LG_p^l$ -Bündel (siehe Kapitel 1.1.2) zu erzeugen, kann man im Prinzip genauso vorgehen, d.h. das Interferenzbild des Bündels mit einer ebenen Referenzwelle berechnen. Wegen des charakteristischen Intensitätsprofils der  $LG$ -Bündel mit einem starken zentralen Maximum und zahlreichen, wesentlich schwächeren Ringen ist dann jedoch das Hologramm im Außenbereich sehr dunkel. Dadurch ist die Effizienz der Rekonstruktion nicht sehr hoch. Besser ist es, ein Gitter herzustellen, auf dem nur die Phasensprünge um  $\pi$  an den  $p$  ringförmigen Versetzungslinien des  $LG$ -Bündels vorgegeben sind. Um die Beugungsordnungen zu trennen, ist wieder ein Winkel  $\gamma \neq 0$  zwischen Objekt- und Referenzwelle gewählt, die Phasensprünge werden dadurch als Versetzungen der Linien im überlagerten Strichgitter sichtbar.

Die Transmissionsfunktion eines solchen off-Axis-Gitters für ein  $LG_p^0$ -Bündel ist [22]:

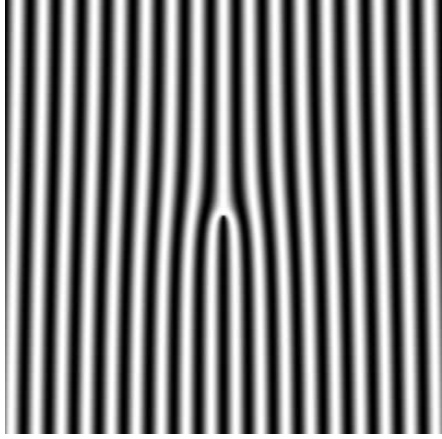


Abbildung 1.21: Holographisches Gitter für einen Punktwirbel mit Ladung 1. Das Strichgitter enthält eine zusätzlich eingeschobene halbe Gitterlinie, die am Ort des Wirbels endet.

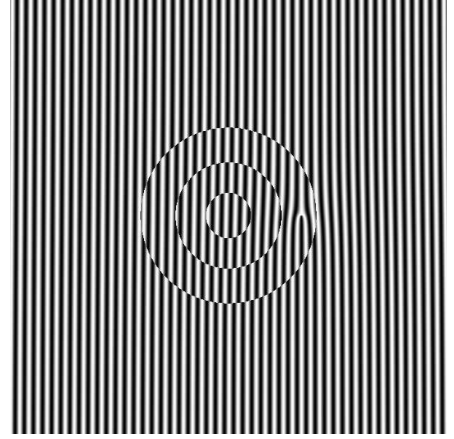


Abbildung 1.22: Holographisches Gitter für ein  $LG_3^0$  - Bündel mit einem dezentralen Punktwirbel mit Ladung 1 (rechts zwischen dem zweiten und dritten Kreis).

$$T(r) = \begin{cases} \cos(2\pi x/g) & \text{für } R_{j-1} \leq r < R_j \\ \cos(2\pi x/g + \pi) & \text{für } R_j < r \leq R_{j+1} \end{cases} \quad \text{für } j = 1, \dots, p$$

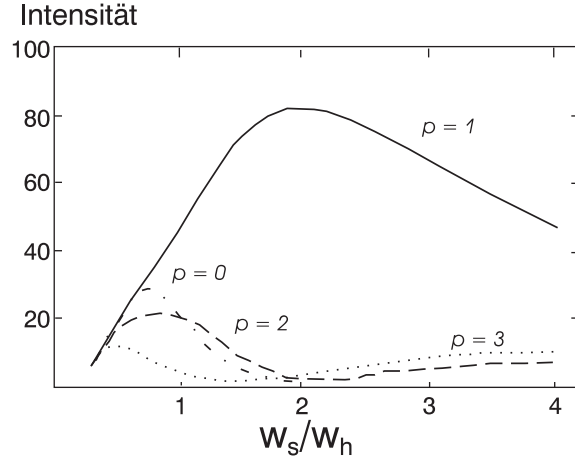
$R_j$  bezeichnet dabei den Radius der  $j$ -ten Nullstelle vom Zentrum aus gezählt, wobei  $j$  die Anzahl der Nullstellen durchläuft.

Ein solches Gitter erzeugt ein LG-Bündel nur in guter Näherung, denn bei der Beleuchtung dieses Gitters mit einem Gauß-Bündel entstehen sämtliche LG-Moden, die an den vorgegebenen Stellen Phasenversetzungen haben. Wird aber der Durchmesser des beleuchtenden Bündels an den Durchmesser der gewünschten Mode angepasst, erhöht sich nach [22] die Effizienz für diese Mode auf bis zu 80%, die anderen Moden werden entsprechend unterdrückt.

Abbildung 1.23 zeigt diesen Zusammenhang für ein  $LG_p^{l=1}$ -Bündel. Mit  $w_s$  wird hier der Strahldurchmesser des beleuchtenden Gauß-Bündels, mit  $w_h$  der Durchmesser der äußersten Nulllinie des LG-Bündels auf dem Hologramm bezeichnet. Man sieht, dass z. B. das  $LG_1^1$ -Bündel für das Verhältnis  $w_s/w_h = 2$  maximale Intensität erreicht.

Um LG-Bündel mit zusätzlichen optischen Wirbel an beliebigen Stellen im Bündel zu erhalten, werden die beschriebenen Techniken einfach zu einem Hologramm kombiniert, indem die Transmissionsfunktionen der Hologramme eines Wirbels und eines LG-Bündels miteinander multipliziert und auf einen Film belichtet werden. Man erhält

Abbildung 1.23: Intensität verschiedener  $LG_p^{l=1}$ -Moden als Funktion von  $w_s/w_h$  bei der Erzeugung mit einem computergenerierten Hologramm [22].



dann im einfachsten Fall eine zusätzliche eingeschobene halbe Gitterlinie am Ort des Wirbels. Abb. 1.22 zeigt das so berechnete Hologramm eines  $LG_3^0$ -Bündel mit einem dezentralen Punktwirbel mit Ladung  $m = 1$  zwischen dem zweiten und dritten Kreis. Mit dieser Methode ist jedoch die Position des Wirbels im Bündel auf dem Gitter festgelegt. Flexibler ist es, ein separates Gitter für den Wirbel direkt hinter dem LG-Gitter in den Strahlengang zu stellen. Dabei muss jedoch darauf geachtet werden, dass die Linien der Beugungsgitter der beiden Hologramme senkrecht zueinander stehen. Dadurch erhält man in der Blendenebene die verschiedenen Beugungsordnungen der beiden Gitter nicht auf einer Linie, sondern in einer Matrix. Die möglichen zu wählenden Ordnungen sind dann die an den Positionen  $(1, 1)$ ,  $(-1, -1)$ ,  $(-1, +1)$  und  $(+1, -1)$ .

### 1.3 Verschiedene optische Wirbel

Optische Wirbel, also Phasensingularitäten, gibt es in verschiedenen Ausprägungen, sie sind nur dadurch festgelegt, dass sich die Phase des Lichtfeldes beim Umlaufen der Versetzungslinie um (im Allgemeinen ganzzahlige) Vielfache von  $2\pi$  ändert. Das Feld eines Wirbels ist daher im einfachsten Fall beschrieben durch:

$$E(x, y, z) = e^{im\phi_a} e^{ikz} \quad (1.23)$$

wobei  $\phi_a$  von der Form  $\arctan(\frac{y-a_2}{x-a_1})$  ist. Die Phasenänderung, d.h. der Betrag des Gradienten der Phase beim Umlaufen der Versetzungslinie durch  $(a_1, a_2)$  ist also unabhängig vom Drehwinkel. Solche Wirbel heißen kanonisch. Es sind jedoch auch nicht-



kanonische Formen [44] denkbar, bei denen die Phasenänderung winkelabhängig ist, diese sollen jedoch hier keine Rolle spielen.

Bisher wurde nur die durch den Wirbel verursachte Veränderung der Phase des Fel-

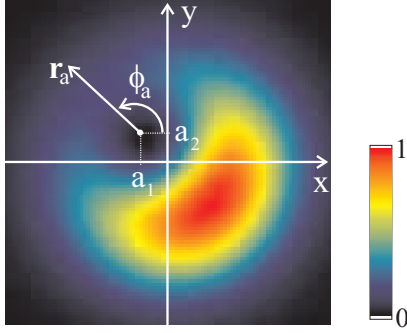


Abbildung 1.24: Koordinatensystem: Mithilfe von ebenen Polarkoordinaten  $(r_a, \phi_a)$  mit Ursprung  $(a_1, a_2)$  am Ort des Wirbels können Kernfunktion und Phase des Wirbels leichter angegeben werden.

des betrachtet. Man kann aber zusätzlich zu dem Phasenterm  $e^{im\phi_a}$  einen rein reellen Faktor  $c(\mathbf{r}_a)$ , die sogenannte Kernfunktion, einführen, der die Intensität des Hintergrundbündels beeinflusst.  $\mathbf{r}_a$  ist hier der Radiusvektor vom Zentrum des Wirbels aus (siehe Abb. 1.24). Der Wirbel schreibt sich dann als:

$$E(x, y, z) = c(\mathbf{r}_a) e^{im\phi_a} e^{ikz} \quad (1.24)$$

Den natürlichsten Fall erhält man mit  $c(\mathbf{r}_a) = r_a$ , einen sogenannten r-Wirbel. Die Kernfunktionen  $c(\mathbf{r}_a) = 1$  und  $c(\mathbf{r}_a) = \tanh(\frac{r_a}{r_c})$  ( $r_c$  ist ein frei wählbarer reeller Parameter, siehe Kapitel 1.3.3) sind im Rahmen dieser Arbeit ebenfalls von Bedeutung. Auf die Eigenschaften der Wirbel mit den verschiedenen Kernfunktionen soll nun näher eingegangen werden.

### 1.3.1 Punktwirbel

Da Wirbel nach Gleichung (1.23), also Punktwirbel mit einer Kernfunktion  $c(\mathbf{r}_a) = 1$ , von bestechender mathematischer Einfachheit zu sein scheinen, standen sie am Anfang der Untersuchungen von Wirbeln. Auch sind sie experimentell am einfachsten herzustellen (allerdings natürlich nur näherungsweise), daher sind sie der Hauptgegenstand vieler experimenteller Veröffentlichungen über optische Wirbel.

Nun erzwingt ja die Singularität der Phase eine Nullstelle auf der Wirbellinie, durch die fehlende Kernfunktion ist diese Nullstelle jedoch im Fall eines Punktwirbels nur ein mathematischer Punkt (durch eine Diracsche Delta-Funktion beschrieben) und sollte an der Stelle  $z = 0$  unsichtbar sein. Physikalisch sind aber punktförmige Objekte

unmöglich. In der Praxis ist ein Punktwirbel also sehr klein (je nach Realisierung, d.h. je nach Güte des verwendeten Phasengitters im Bereich der Wellenlänge), aber nicht unendlich klein, und daher hat auch der Sprung von Eins auf Null in der Intensität des Feldes eine sehr steile, aber keine unendliche Steigung. Auch bei einer numerischen Simulation kann ein Punktwirbel nur so klein realisiert werden, wie der Abstand zwischen zwei Gitterpunkten, auf denen die Funktion ausgewertet wird, bei der Berechnung ist. Nichtsdestotrotz ist ein Punktwirbel am Anfang der Ausbreitung nicht oder kaum sichtbar (sowohl im Experiment wie in der Simulation) und wird erst nach einiger Ausbreitungsstrecke als deutliche Nullstelle der Intensität sichtbar. Der Grund dafür ist die Beugung, die für einen Punktwirbel besonders stark ist. Der Beugungsterm  $\nabla^2\psi$  in der Wellengleichung

$$c^2\nabla^2\Psi - \ddot{\Psi} = 0 \quad (1.25)$$

enthält die zweiten Ableitungen des Feldes, die auf der Versetzungslinie eines Punktwirbels divergieren. Daher wird der Punktwirbel zu Beginn der Ausbreitung sehr starker Beugung unterliegen. Durch die Beugung wird die Steigung des Feldes auf der Wirbelnlinie flacher und damit das schwarze Loch im Intensitätsbild größer [12].

Durch die Beugung laufen wellenförmige Störungen ausgehend vom Ort des Wirbels nach aussen durch das Intensitätsbild der Funktion, wie sie auch bei Beugung von Lichtstrahlen an scharfen Kanten von Blenden oder ähnlichem auftreten. Diese Störungen werden im Verlauf der Propagation schwächer und verschwinden schließlich ganz nach der Rayleigh-Reichweite  $z_R = \frac{1}{2}kw_0^2$ . Die Kernfunktion eines Punktwirbels kann für  $z \neq 0$  durch eine Überlagerung von zwei modifizierten Besselfunktionen der ersten Art beschrieben werden [12].

Abbildung 1.25 zeigt den Querschnitt durch die Intensitätsverteilung eines Punktwirbels in einem Gauß-Bündel nahe bei der Strahltaile (für  $z = 15$  mm, links) und weiter von der Strahltaile entfernt ( $z = 250$  mm, rechts). Beides sind experimentelle Aufnahmen. Die erwähnten wellenförmigen Störungen sind stark ausgeprägt und laufen für wachsende  $z$  über den ganzen Strahlquerschnitt. Deutlich zu sehen ist außerdem, dass der Wirbelkern durch die Beugung aufgeweitet wird.

Punktwirbel lassen sich durch eine berechnetes Hologramm erzeugen wie in Kapitel 1.2 beschrieben. Eine weitere Möglichkeit ist die Verwendung einer Glasplatte mit spiralförmig wachsender Dicke, die dem Feld genau die Phasenverzögerung  $e^{i\phi}$  aufprägt. Hier besteht jedoch das Problem der exakten Fertigung, vor allem im Innenbereich der Spirale. Vor allem für größere Wellenlängen wie z. B. im Mikrowellenbereich werden

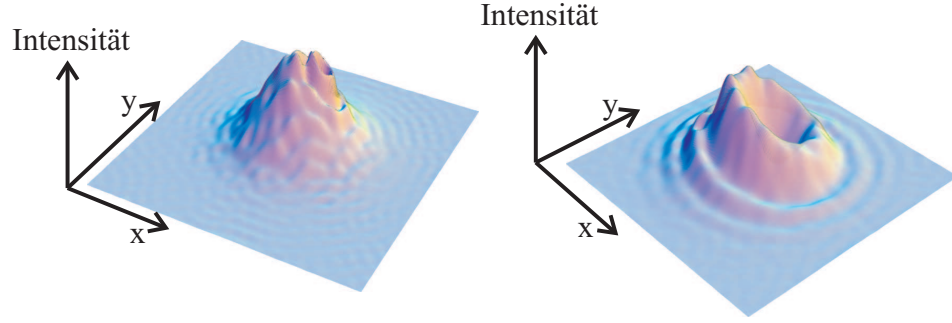


Abbildung 1.25: Experimentelle Bilder: Beugung eines Punktwirbels in einem Gauß-Bündel. Die Abbildung zeigt die Intensitätsverteilung eines Punktwirbels in einem Gauß-Bündel nahe der Strahltaile ( $z = 15$  mm, links) und weiter von der Strahltaile entfernt ( $z = 250$  mm, rechts). Durch die Beugung entstehen wellenförmige Störungen und der Kern des Wirbels wird größer. Um wellenförmigen Strukturen besser erkennen zu können, wurde eine dreidimensionale Auftragung der Intensität über der  $x$ - $y$ -Ebene gewählt.

solche spiralförmigen Phasenplatten verwendet, da hier die Fertigungstoleranzen größer sein können.

### 1.3.2 r-Wirbel

Besitzt ein Wirbel eine Kernfunktion  $c(\mathbf{r}_a) = r_a$ , so spricht man von einem **r-Wirbel** [12]. Das Feld eines r-Wirbels mit Ladung  $m$  am Punkt  $\mathbf{r}_a = (a_1, a_2)$  ist in Polarkoordinaten  $(r, \phi, z)$

$$E(r, \phi, z) = |r - r_a|^{|m|} e^{im\phi} e^{-ikz} \quad (1.26)$$

oder in kartesischen Koordinaten

$$\psi(x, y, z) = ((x - a_1) + i \cdot \text{sign}(m)(y - a_2))^{|m|} e^{-ikz}. \quad (1.27)$$

Gleichung (1.26) ergibt einen Wirbel, dessen Versetzungslinie parallel zur  $z$ -Achse verläuft und die transversale Ebene im Punkt  $\vec{r}_0 = (a_1, a_2)$  durchstößt. Im Unterschied zu einem Punktwirbel, der ja durch einen reinen Phasenfaktor beschrieben wird, besitzt ein r-Wirbel eine Amplitude, die proportional zu  $r$  ansteigt. Dadurch ist ein r-Wirbel schon zu Beginn der Propagation durch niedrige Intensität rund um die Nullstelle des Feldes sichtbar, im Gegensatz zu einem Punktwirbel, der erst durch Beugung sichtbar wird. Wie man im vorigen Kapitel gesehen hat, unterliegt ein Punktwirbel starken Beugungseffekten. Im Gegensatz dazu wird ein r-Wirbel überhaupt nicht gebeugt, da die

zweiten Ableitungen von  $x$  und  $y$  ja Null sind. Daher bleibt die Form eines  $r$ -Wirbels, d.h. die Funktion, mit der die Einhüllende des Feldes in der Umgebung der Nullstelle beschrieben werden kann, während der Ausbreitung erhalten.

Wegen der einfachen Schreibweise in Gleichung (1.27) (im einfachsten Fall  $m = 1$  und  $\mathbf{r}_a = (0, 0)$ ) wird der Wirbel zu  $(x + iy)e^{-ikz}$  und wegen der Tatsache, dass sie keiner Beugung unterliegen und daher die natürlich auftretenden Wirbel (z. B. in von rauen Oberflächen gestreuten Feldern oder in Laguerre-Gauß-Moden) alle  $r$ -Wirbel sind, werden  $r$ -Wirbel mittlerweile als die generischen Wirbel verstanden. In den meisten Fällen spricht man daher einfach von „Wirbel“ und verwendet nur bei Wirbeln mit anderen Kernfunktionen genauere Bezeichnungen. Dabei muss aber erwähnt werden, dass ein reiner  $r$ -Wirbel ohne zusätzliches Hintergrundbündel wegen der ins Unendliche ansteigenden Intensität experimentell nicht realisierbar ist.

### **$r$ -Wirbel in einem Gauß-Bündel**

Bei genauer Betrachtung des Modells zur Bewegung von Wirbeln, das in Kapitel 1.3.4 vorgestellt wird, fällt auf, dass das erhaltene Ergebnis (Gleichung (1.36)) unabhängig von der Kernfunktion des Wirbels ist. Es ist daher zu erwarten, dass die Form der Wirbellinie eines einzelnen  $r$ -Wirbels mit der eines Punktwirbels oder eines tanh-Wirbels übereinstimmt.

Man kann jedoch die Form der Wirbellinie eines  $r$ -Wirbels in einigen Hintergrundbündeln analytisch nach der im Kapitel 1.1.3 geschilderten Methode der Ausbreitung des Winkelspektrums mit dem vereinfachten Propagationsterm  $e^{\frac{2\pi i}{\lambda} z_1} e^{-\pi i \lambda z_1 (\sigma_x^2 + \sigma_y^2)}$  berechnen. Einer dieser Fälle ist der eines  $r$ -Wirbels in einem Gauß-Hintergrundbündel. Der Wirbel soll sich bei  $z = 0$  am Punkt  $(x, y) = (a, 0)$  befinden (durch eine geeignete Drehung des Koordinatensystems ist dies immer zu erreichen). Der Wirbel habe die Ladung  $m = +1$ . Das Feld in der  $x$ - $y$ -Ebene ist dann:

$$E(x, y, 0) = \frac{1}{w_0} \sqrt{(x - a)^2 + y^2} e^{i\phi_a} e^{-\frac{x^2 + y^2}{w_0^2}} \quad (1.28)$$

wieder mit dem Phasenfaktor  $\phi_a = \arctan(\frac{y}{x-a})$ . In kartesischen Koordinaten lässt sich das Feld umschreiben zu:

$$E(x, y, 0) = \frac{1}{w_0} [(x - a) + iy] e^{-\frac{x^2 + y^2}{w_0^2}}. \quad (1.29)$$

Für das Feld bei  $z$  erhält man nach der Faltung mit dem Propagationsterm:

$$E(x, y, z) = \frac{\pi w_0}{(iz\lambda + \pi w_0^2)^2} [\pi w_0^2((x - a) + iy) - iaz\lambda] e^{-\frac{\pi(x^2+y^2)}{iz\lambda + \pi w_0^2}} \quad (1.30)$$

Das Feld hat also wie erwartet auch nach Propagation noch eine Gauß-förmige Einhüllende. Außerdem hat das Feld genau eine Nullstelle, wie man sofort am Grad des komplexen Polynoms in  $x$  und  $y$  sieht, und daher auch immer noch genau einen Wirbel. Um die  $z$ -abhängige Position der Nullstelle und damit die Koordinaten  $(x_0(z), y_0(z))$  des Wirbels zu finden, muss die Gleichung

$$\pi w_0^2[(x - a) + iy] - iaz\lambda = 0 \quad (1.31)$$

für reelle  $x$  und  $y$  gelöst werden. Man erhält in den absoluten kartesischen Koordinaten  $x$  und  $y$  mit der Rayleigh -Reichweite  $z_R = kw_0^2/2$ :

$$(x_0(z), y_0(z)) = (a, \frac{az\lambda}{\pi w_0^2}) = (a, \frac{az}{z_R}). \quad (1.32)$$

Die Wirbellinie ist also eine Gerade durch den Punkt  $(x, y, z) = (a, 0, 0)$  windschief im Winkel  $\arctan(a/z_R)$  zur  $z$ -Achse (siehe Abb. 1.26 (a)). Der Schnittpunkt dieser Geraden mit der  $x - y$ -Ebene, also die Nullstelle der Intensität, die man auch im Experiment sieht, „bewegt“ sich beim Fortschreiten in  $z$ -Richtung mit der „Geschwindigkeit“  $\mathbf{v} = (\frac{dx_0(z)}{dz}, \frac{dy_0(z)}{dz}) = (0, a/z_R)$  in der  $x$ - $y$ -Ebene (wie im Kapitel 1.3.4 keine herkömmliche Geschwindigkeit durch Bildung der Zeitableitung, sondern durch Bildung der Ableitung nach  $z$ ). Diese Geschwindigkeit ist konstant und hängt nur von den Parametern  $a$  und  $z_R$  ab.

In Abb. 1.26 (a) wurde für die Parameter  $\lambda = 633 \text{ nm}$ ,  $w_0 = 1 \text{ mm}$  und  $a = 0,5 \cdot w_0$  die Wirbellinie für  $z$  zwischen  $-6z_R$  und  $6z_R$  aufgetragen. Die konstante Geschwindigkeit der „Bewegung“ ist durch die Steigung der Geraden gegeben. Das Vorzeichen der Steigung dieser Geraden hängt vom Vorzeichen der Ladung des Wirbels ab. Die Projektion der Wirbellinie des Halbraums  $z > z_R$  in die  $x$ - $y$ -Ebene, die „Trajektorie“, ist eine Gerade parallel zur  $y$ -Achse im Abstand  $a$  (Abb. 1.27 (a)).

Normiert man die Koordinaten auf den jeweiligen  $1/e^2$ -Strahldurchmesser  $w(z) = \sqrt{w_0^2(1 + \frac{z^2}{z_R^2})}$  der Intensität des ungestörten Gauß-Bündels, erhält man die Position der Wirbellinie relativ zum Hintergrundbündel:

$$(x_{0,\text{rel}}(z), y_{0,\text{rel}}(z)) = (\frac{a}{w_0\sqrt{1 + \frac{z^2}{z_R^2}}}, \frac{az}{z_R w_0\sqrt{1 + \frac{z^2}{z_R^2}}}) \quad (1.33)$$

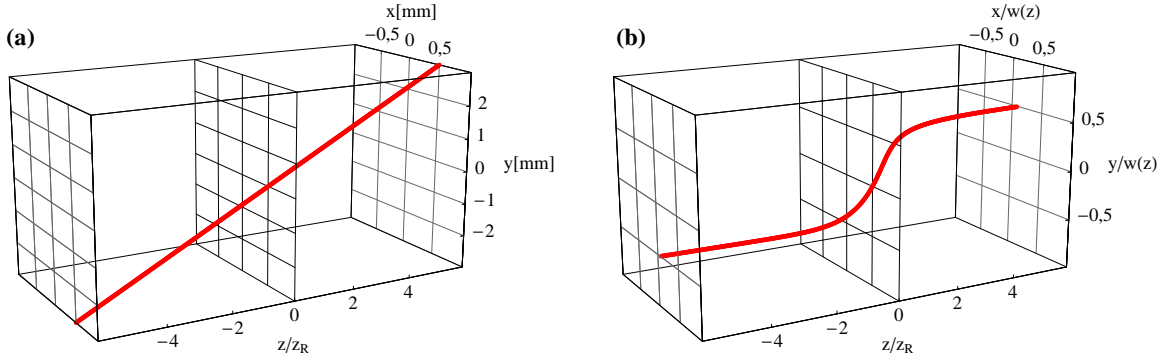


Abbildung 1.26: Ein  $r$ -Wirbel in einem Gauß-Hintergrundbündel mit  $\lambda = 633 \text{ nm}$ ,  $w_0 = 1 \text{ mm}$  und  $a = 0,5 \cdot w_0$ . In (a) in absoluten  $x$ - $y$ -Koordinaten aufgetragen, in (b) sind die Koordinaten in den  $x$ - $y$ -Ebenen auf den  $z$ -abhängigen Strahldurchmesser  $w(z)$  normiert. Die  $z$ -Koordinate ist auf die Rayleigh-Reichweite  $z_R$  normiert. Je nach Auftragung ist die Wirbellinie eine Gerade oder liegt auf einem Zylindermantel.

In diesen relativen Koordinaten liegt die Wirbellinie auf einem Kreiszylinder mit Radius  $R = \sqrt{x_{rel}^2 + y_{rel}^2} = a/w_0$  (siehe Abbildung 1.26 (b)), die Projektion (Abb. 1.27) ist hier ein Viertelkreise mit Radius  $a/w_0$ . Die „Geschwindigkeit“ der Wirbelbewegung geht hier für große  $z$  gegen Null, wie an dem abnehmenden Winkel zwischen  $z$ -Achse und Wirbellinie zu sehen ist. Die Linie verläuft asymptotisch zur  $y$ - $z$ -Ebene, denn der Grenzwert des Winkels  $\arctan(\frac{y_{rel}}{x_{rel}})$  ist:

$$\lim_{z \rightarrow \pm\infty} \arctan\left(\frac{y_{0,rel}}{x_{0,rel}}\right) = \lim_{z \rightarrow \pm\infty} \arctan\left(\frac{z}{z_R}\right) = \pm \frac{\pi}{2} \quad (1.34)$$

Eine Folge von mit Gleichung (1.30) berechneten Aufnahmen der Intensitätsverteilung in Ebenen transversal zur  $z$ -Achse des Feldes, wie man sie auch im Experiment erhalten würde, zeigt Abbildung 1.28. Die verwendeten Parameter sind hier  $w_0 = 1 \text{ mm}$ ,  $a = 0,1 \cdot w_0$  und  $\lambda = 633 \text{ nm}$ . Der Bildausschnitt ist an den divergierenden Strahl angepasst, wodurch man die in Gleichung (1.33) vorausgesetzte normierte Darstellung erhält. Man sieht die scheinbare Rotationsbewegung der Intensitätsnullstelle, die oben abgeleitet wurde.

Dies stimmt sowohl mit dem Ergebnis in [23] überein als auch mit den Ergebnissen wie sie aus dem Modell in Kapitel 1.3.4 abgeleitet wurden.

Es sei angemerkt, dass dies für mehrere Wirbel in einem Hintergrundbündel nicht mehr gültig ist, da ja zusätzliche Wirbel das Hintergrundbündel verändern. So stellen die Autoren von [5] fest, dass sich mehrere Wirbel in einem Hintergrundbündel solange

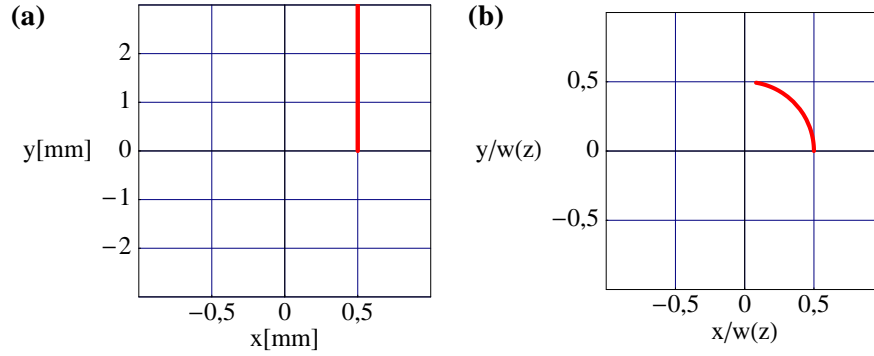


Abbildung 1.27: Die Projektionen der Wirbellinien des Halbraums  $z > z_R$  aus Abb. 1.26 auf eine Ebene senkrecht zur  $z$ -Achse. In (a) in absoluten  $x$ - $y$ -Koordinaten aufgetragen, hier ist die Wirbellinie eine Gerade parallel zur  $y$ -Achse durch den Punkt  $x = a$ . In (b) sind die Koordinaten auf  $w(z)$  normiert, hier ergibt sich ein Viertelkreis mit positivem Drehsinn (für  $z \rightarrow \infty$  wird die  $y$ -Achse erreicht).

unabhängig voneinander bewegen, bis ihre Kernfunktionen überlappen. Da dies jedoch bei r-Wirbeln, deren Amplitude sich im Gegensatz zu der von Punktwirbeln über das ganze Hintergrundbündel erstreckt, von Anfang an der Fall ist, ist hier die Wirbelbewegung nicht mehr unbeeinflusst von dem zweiten Wirbel.

Leider sind r-Wirbel experimentell nur schwer herzustellen. Das liegt daran, dass wegen der proportional zu  $r^2$  ansteigenden Intensität eines r-Wirbels ein auf Diafilm belichtetes Amplitudengitter für einen r-Wirbel über große Bereiche fast schwarz ist. Dadurch wird erstens die Effizienz dieser Gitter sehr gering und zweitens ist die Qualität des

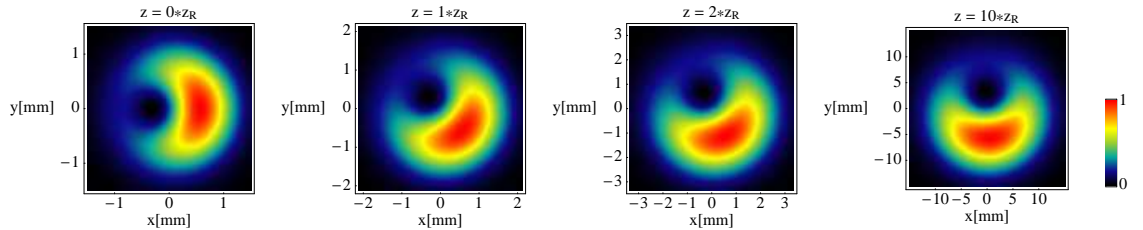


Abbildung 1.28: Propagation eines r-Wirbels in einem Gauß-Hintergrundbündel. Von links nach rechts sind die Propagationentfernungen  $z = 0 \cdot z_R, 1 \cdot z_R, 2 \cdot z_R, 10 \cdot z_R$ . Die Nullstelle des Feldes bewegt sich scheinbar auf einem Viertelkreis, dies ist jedoch eine optische Täuschung und liegt daran, dass der Bildausschnitt auf den Strahldurchmesser  $w(z)$  normiert ist. Die Bilder sind für die Parameter  $w_0 = 1$  mm,  $a = 0,1 \cdot w_0$  und  $\lambda = 633$  nm gerechnet.

resultierenden Strahls so schlecht, dass eine Beobachtung des Wirbels über größere Distanzen unmöglich ist. Einen Ausweg bieten Gitter, die eine Näherung eines r-Wirbels herstellen, wie sie in Kapitel 1.3.3 beschrieben werden.

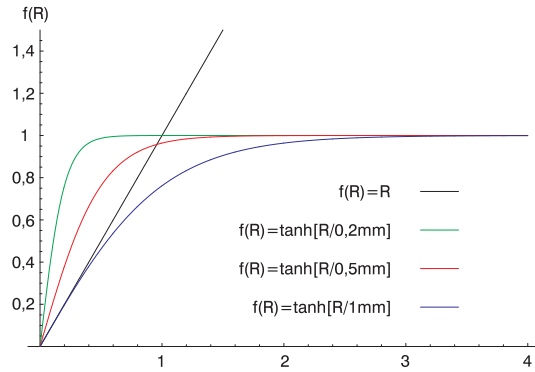
### 1.3.3 tanh-Wirbel

Wirbel mit einer Kernfunktion proportional zu  $\tanh(\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_a|}{r_c})$  ( $\mathbf{r}_a = (a_1, a_2)$  ist der Ortsvektor des Wirbels,  $r_c$  ist ein frei wählbarer reeller Parameter) nennt man Tangens-Hyperbolicus- bzw. tanh-Wirbel. Das Feld eines solchen Wirbels mit Ladung 1 an der Stelle  $(a_1, a_2)$  ist:

$$E(x, y) = \tanh\left(\frac{R(x, y)}{r_c}\right) e^{i\phi_a} \quad (1.35)$$

Hierbei ist  $R(x, y) = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_a| = \sqrt{(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2}$  und die Phase  $\phi_a$  des Wirbels wie immer  $\phi_a = \arctan(\frac{y-a_2}{x-a_1})$ . Mit solche Wirbeln ist eine näherungsweise Herstellung von r-Wirbeln im Experiment möglich. Der Grund dafür liegt in den Eigenschaften der Funktion  $\tanh(R/r_c)$ , die in Abbildung 1.29 gezeichnet ist. In der Abbildung ist die Funktion für verschiedene Parameter  $r_c$  im Vergleich mit der Funktion  $f(R) = R$ , also der Kernfunktion eines r-Wirbels, aufgetragen. Man sieht, dass die Funktion  $\tanh(R/r_c)$  für kleine R linear verläuft und für große R gegen den Wert 1 konvergiert. Die Steigung

Abbildung 1.29: Die Funktion  $\tanh(R/r_c)$  im Vergleich mit der Funktion  $f(R) = R$  für verschiedenen Parameter  $r_c$ . Für den Grenzfall  $r_c \rightarrow 0$  mm wird die Funktion zur Kernfunktion eines Punktwirbels, für  $r_c = 1$  mm ist sie im Ursprung eine gute Näherung für die Kernfunktion eines r-Wirbels. Im Außenbereich konvergiert die Funktion  $R$  gegen 1, was die Herstellung von optischen Gittern vereinfacht.



im Nullpunkt wird dabei durch den Parameter  $r_c$  bestimmt.

Setzt man einen solchen tanh-Wirbel in ein Hintergrundbündel mit Gauß-förmiger Einhüllender, so wird für  $r_c \rightarrow 0$  ein Punktwirbel, für  $r_c \rightarrow 1$  ein r-Wirbel gut approximiert. Die experimentelle Herstellung von r-Wirbeln ist ja deshalb so schwierig, weil durch die linear ansteigende Kernfunktion des Wirbels die Intensitätsgitter zu dunkel



werden, um noch genügend Intensität des Hintergrundbündels durchzulassen. Da die Funktion  $\tanh(R)$  für  $R > 1$  gegen 1 konvergiert, sind Gitter mit tanh-Wirbel im Vergleich zu Gittern für r-Wirbel je nach Parameter  $r_c$  auf einer erheblich kleineren Fläche dunkel, was die Effizienz solcher Gitter erhöht. Weil r-Wirbel lokal durch tanh-Wirbel gut genähert werden, ist mit solchen Gittern experimentell die Herstellung von näherungsweise r-Wirbeln bei gleichzeitig höherer Gesamttransmission und damit höherer Effizienz des Gitters möglich.

Da die Form der Wirbellinie zumindest für einen einzelnen Wirbel in einem hinreichend glatten Hintergrundbündel unabhängig von der Kernfunktion ist, gleicht die Wirbellinie eines tanh-Wirbels in einem Gauß-Hintergrundbündel der eines r- oder eines Punktwirbels (siehe 1.3.2 und 1.3.1). Zu diesem Schluss kommen auch einige Veröffentlichungen zu diesem Thema, so z. B. [5].

Die Beugungserscheinungen eines tanh-Wirbels in einem Gauß-Hintergrundbündel sind nach den in Kapitel 1.3.1 gemachten Überlegungen je nach der Größe des Parameters  $r_c$  vergleichbar denen eines Punktwirbels ( $r_c \ll 1$ ) oder denen eines r-Wirbels ( $r_c \rightarrow 1$ ). Für Zwischengrößen ist der Übergang von dem einem zu dem anderen Verhalten fließend.

Befinden sich mehrere Wirbel in einem Hintergrundbündel, so ist ihre gegenseitige Beeinflussung abhängig davon, ob und wann sich ihre Kernfunktionen überlappen.

Die Schlussfolgerung ist daher, dass das Verhalten von tanh-Wirbeln von dem Wert  $r_c$  abhängt und sie sich je nach Größe dieses Wertes eher wie Punktwirbel oder eher wie r-Wirbel verhalten werden.

### 1.3.4 Das fluiddynamische Modell für die Bewegung von Wirbeln in Hintergrundbündeln

Es gibt bei der Untersuchung von optischen Wirbeln zwei verschiedene Betrachtungsweisen: Die meisten theoretisch orientierten Gruppen sehen optische Wirbel als stationäre Versetzungslinien oder Linien verschwindender Intensität im Raum (Wirbellinien).

Die meisten experimentell arbeitenden Gruppen sehen optische Wirbel als die Schnittpunkte dieser Linien mit den zur Ausbreitungsrichtung transversalen Ebenen, in denen im Experiment die Messung von Phase und Intensität erfolgt (also die Filmebene der verwendeten Kamera). Wird nun die Kamera in Ausbreitungsrichtung verschoben und liegen die Versetzungslinien nicht parallel zur Ausbreitungsrichtung, so bewegen sich die Nullstellen in den gemessenen Intensitätsverteilungen (siehe auch Abb. 1.2) wie Teilchen in einer Flüssigkeit. Dies soll im Folgenden unter dem Begriff „Bewegung“ von optischen Wirbeln verstanden werden.

Um die „Bewegung“ dieser „Teilchen“ zu beschreiben, wurde ein Modell entwickelt, das deutliche Analogien mit eben der Bewegung von Wirbeln in Flüssigkeiten aufweist.

Eine Herleitung und Beschreibung dieses Modells findet man in [5] und in [24] und [25]. Man erhält aus der nichtlinearen Schrödingergleichung zwei Gleichungen, die formal zweien der grundlegenden Gleichungen der Fluidodynamik gleichen: der Bernoulli- und der Kontinuitätsgleichung. Hierbei übernimmt der transversale  $\mathbf{k}$ -Vektor  $\mathbf{k}_\perp$  die Rolle des Geschwindigkeitsfeldes einer Flüssigkeit, die Intensität des Lichtfeldes entspricht der Dichte und das Quadrat der Intensität dem Druck der Flüssigkeit.

Das Modell gilt für hinreichend glatte Hintergrundbündel mit kleinen Intensitäts- und Phasengradienten (hinreichend glatt heißt hier im Vergleich zur Größe des Wirbelkernes).

Die Ergebnisse werden hier kurz für den Brechungsindex  $n_0 = 1$  des Vakuums dargestellt. Was in diesem Modell zum Ausdruck kommt, ist das sogenannte Wirbel-Theorem:

In einem linearen optischen Medium wird der Weg des Wirbels bestimmt durch die Eigenschaften des Hintergrundbündels, das sind Phase  $\phi_b$  und Intensität  $I_b$  und deren Ableitungen, **ohne** den Wirbel, ausgewertet an der Stelle  $\mathbf{r}_a(z)$  des Wirbels.

Die Bewegungsgeschwindigkeit des Wirbels ist dann gegeben durch ([24], S.202):

$$\frac{d\mathbf{r}_a(z)}{dz} = (-\nabla_{\perp}\phi_b + \frac{m}{2}C\tilde{\nabla}_{\perp}\ln I_b)|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_a(z)} \quad (1.36)$$

wobei  $\tilde{\nabla}_{\perp} = (-\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial x})$  den um  $90^\circ$  rotierten transversalen Gradienten bezeichnet. Der Faktor  $C$  ist eine sich nur langsam ändernde Funktion der Intensität des Hintergrundfeldes.

In Worten bedeutet dies: Der Wirbel bewegt sich parallel zu dem transversalen Anteil des Phasengradienten  $\nabla_{\perp}\phi_b$  und senkrecht zum transversalen Anteil des Intensitätsgradienten  $\nabla_{\perp}\ln I_b$  des Hintergrundbündels.

Für ein Hintergrundbündel mit Gauß-Profil kann man für die Bewegung des Wirbels folgendes ableiten: Bei einer zweidimensionalen Gauß-Funktion sind die Linien gleicher Intensität konzentrische Kreise um das Maximum der Intensität (Abbildung 1.30), der Intensitätsgradient zeigt also überall nach Innen. Der Wirbel wird sich daher senkrecht dazu auf einem Kreis um den Mittelpunkt bewegen, das Vorzeichen der Ladung  $m$  des Wirbels gibt dabei die Drehrichtung an.

Der negative transversale Phasengradient eines Gauß-Bündels zeigt aufgrund der gekrümmten Wellenfronten hinter der Strahltaile wie in Abbildung 1.1, Kapitel 1.1.1, an jeder Stelle radial nach aussen, deshalb muss der Wirbel parallel dazu zur Strahlperipherie wandern. Da das Gauß-Profil des Hintergrundbündels während der Aus-

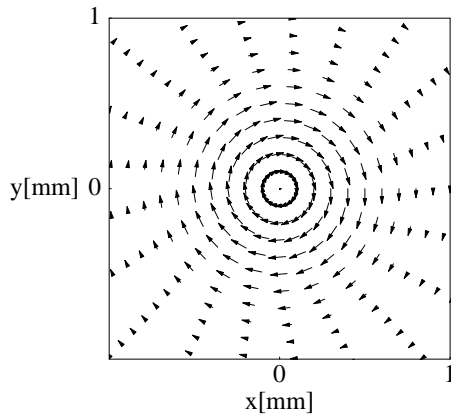


Abbildung 1.30: Der um  $90^\circ$  gedrehte transversale Intensitätsgradient bei einem Gauß-Bündel bildet konzentrische Kreise entlang der Linien gleicher Intensität

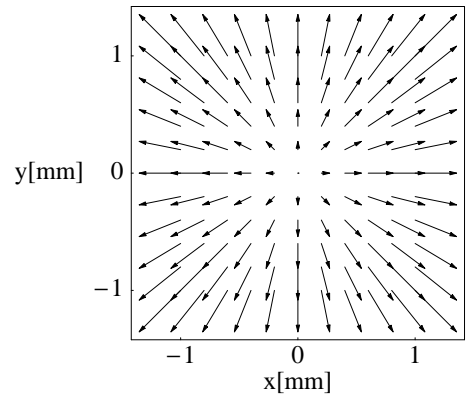


Abbildung 1.31: Der negative Phasengradient bei einem Gauß-Bündel zeigt an jeder Stelle radial nach aussen, sofern man sich auf der positiven  $z$ -Achse, also hinter der Strahltaile befindet.

breitung wegen der Divergenz des Strahls immer breiter und flacher wird, nimmt mit zunehmender Entfernung von der Strahltaile die Stärke des Intensitätsgradienten ab, die azimuthale Bewegung des Wirbels wird also immer langsamer. Die Gesamtbewegung eines Wirbels in einem Gauß-Bündel folgt also in relativen Koordinaten einem Kreisbogen. Dies ist auch die Schlussfolgerung der Autoren von [24] nach expliziter Berechnung der Position des Wirbels mit Gleichung (1.36) für ein Gauß-Profil des Hintergrundbündels.

In Kapitel 1.3.2 wird die Position eines Wirbels in einem Gauß-Bündel exakt berechnet, die Rechnung liefert genau dieses Ergebnis. Abb. 1.27 (b) in Kapitel 1.3.2 zeigt die berechnete projizierte Wirbellinie, die genau entlang des vorhergesagten Kreisbogens verläuft.

In Kapitel 1.4.4 wird dieses Modell auf den Fall von Hintergrundbündeln mit zusätzlichen (instabilen) Phasensingularitäten, die durch den zusätzlichen Wirbel empfindlich und dauerhaft gestört werden, erweitert.

## 1.4 Wirbel in Laguerre-Gauß-Bündeln - Theorie

Laguerre-Gauß-Bündel haben als Familie von Lasermodeen an sich schon interessante Eigenschaften. So weisen sie z. B. eine Forminvarianz bei der Ausbreitung auf, die für höhere radiale Moden so stark ist, dass diese Bündel in guter Näherung zu ausbreitungsinvarianten Bessel-Bündeln werden. Daher eignen sie sich auch zur rechnerischen Untersuchung von Bessel-Bündeln, ihre polynomiale Form (anstelle der transzendenten Bessel-Funktionen) gestattet nämlich erhebliche Vereinfachungen bei der Berechnung der Felder.

*LG*-Bündel sind jedoch auch unter den Gesichtspunkten der singulären Optik von Interesse, da sie, wie im Kapitel 1.1.2 bereits erwähnt, nicht nur in ihrem Zentrum einen Wirbel der topologischen Ladung  $l$  tragen, sondern ihre  $p$  radialen konzentrischen Nullstellen in drei Dimensionen zusätzlich flächenhaft entartete Phasensingularitäten (Versetzungsflächen) darstellen. Diese entarteten Phasensingularitäten bilden Rotationshyperboloiden und sind wegen ihrer Entartung instabil gegenüber Störungen.

Die Interaktion von optischen Wirbeln mit solchen entarteten Singularitäten ist bis auf das Verhalten von Wirbeln in Bessel-Bündeln [20, 26] bisher noch wenig untersucht worden. Das Studium von Wirbeln in Laguerre-Gauß-Bündeln dürfte auf diesem Ge-

biet einige grundlegende Erkenntnisse bringen.

### 1.4.1 Generische Wirbel in $LG_1^0$ -Bündeln

Die  $z$ -abhängige Feldverteilung von beliebigen, in einer Ebene bekannten Feldern kann mit der in Kapitel 1.1.3 beschriebenen Methode der Ausbreitung des Winkelspektrums berechnet werden. Im Falle von  $r$ -Wirbeln in  $LG$ -Hintergrundbündeln und bei der Verwendung des genäherten Propagationsfaktors  $e^{\frac{2\pi i}{\lambda} z_1} e^{-\pi i \lambda z_1 (\sigma_x^2 + \sigma_y^2)}$  kann diese Rechnung nach der gleichen Vorgehensweise wie in Kapitel 1.3.2 analytisch durchgeführt werden. Den einfachsten nichttrivialen Fall stellt ein  $r$ -Wirbel mit Ladung  $m = +1$  in einem  $LG_1^0$ -Bündel dar (siehe auch [37, 38]). Ein solches Bündel besitzt neben dem zentralen Maximum einen hellen Ring, der von diesem durch eine kreisförmige Nulllinie (eine entartete Versetzung) getrennt ist. Das Feld eines solchen Bündels mit einem off-Axis  $r$ -Wirbel an der Stelle  $(a, 0)$  ist in der Strahltaille ( $z = 0$ ) mit  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  gegeben durch:

$$E(x, y, 0) = \frac{1}{w_0} [(x - a) + iy] e^{-r^2/w_0^2} (1 - 2 \frac{r^2}{w_0^2}) \quad (1.37)$$

Die Berechnung der Ausbreitung erfolgt analog zu der Rechnung in Kapitel 1.3.2. Als Ergebnis für das Feld an der Stelle  $z$  erhält man wieder ein Polynom:

$$E(x, y, z) = \frac{e^{-r^2/w_0^2} e^{-\frac{1}{1+iz/z_R}}}{w_0(1+iz/z_R)^4} \times \{ (x + iy) [LG_1^0(\frac{2r^2}{w_0^2}) - \frac{z}{z_R}(3 - 2i)] - a(1 + \frac{iz}{z_R}) [LG_1^0(\frac{2r^2}{w_0^2}) + (\frac{z}{z_R})^2] \} \quad (1.38)$$

Dabei ist  $z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}$  die Rayleigh-Reichweite. Wie man an Gleichung (1.38) erkennt, besitzt das Feld wieder eine Gauß-förmige Einhüllende und ein Zählerpolynom vom gleichen Grad in  $x$  und  $y$  wie in der Ausgangsfunktion (Grad 3). Das Feld hat also auch für  $z \neq 0$  bis zu drei reelle Nullstellen der Intensität und damit für jedes  $z$  bis zu drei Punkte, an denen Wirbellinien die  $x$ - $y$ -Ebene durchstoßen.

Leider ist die Gleichung  $E(x, y, z) = 0$  nicht mehr so einfach analytisch zu lösen wie im Fall eines  $r$ -Wirbels in einem Gauß-Bündel. Man kann jedoch numerisch die Nullstellen des polynomialen Anteils  $\bar{E}(x, y, z)$  der Funktion  $E(x, y, z)$ , also von

$$\bar{E}(x, y, z) = (x + iy) [LG_1^0(\frac{2r^2}{w_0^2}) - \frac{z}{z_R}(3 - 2i)] - a(1 + \frac{iz}{z_R}) [LG_1^0(\frac{2r^2}{w_0^2}) + (\frac{z}{z_R})^2] \quad (1.39)$$

für jedes feste  $z$  bestimmen. Die Nullstellen sind die  $z$ -abhängigen Koordinaten der Wirbel und ergeben glatte Kurven in drei Dimensionen.

Je nach der Wahl der lateralen Verschiebung  $a$  des Wirbels in der Strahltaile im Vergleich zu  $w_0$  ergeben sich drei deutlich unterschiedliche Fälle:

### Wirbel innerhalb der Versetzungsfläche ( $a \leq \frac{w_0}{\sqrt{2}}$ )

Befindet sich der optische Wirbel in der Strahltaile innerhalb der entarteten Versetzungsfläche des  $LG_1^0$ -Bündels (die in der Strahltaile einen Radius von  $\frac{w_0}{\sqrt{2}}$  hat), gilt also  $a \leq \frac{w_0}{\sqrt{2}}$ , so ergibt sich ein Bild wie in Abb. 1.32 (a) und (b). Hier sind die entstehenden Wirbellinien in einem  $LG_1^0$ -Bündel mit einem Radius  $w_0 = 0,388$  mm in der Strahltaile für eine laterale Verschiebung von  $a = 0,4w_0$  aufgetragen, die transversalen Koordinaten  $x$  und  $y$  sind dabei in (a) auf den  $z$ -abhängigen Strahldurchmesser  $w(z)$  normiert, in (b) unnormiert in Millimetern aufgetragen. Um die entstehenden Wirbel-

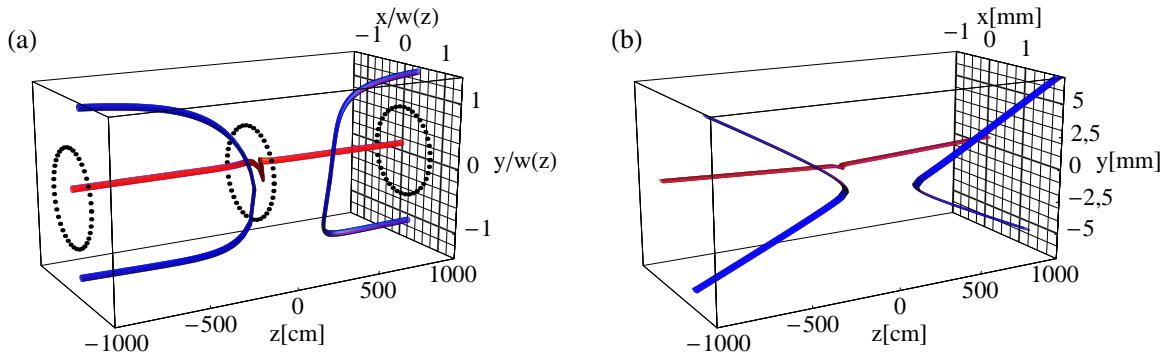


Abbildung 1.32: Wirbellinien, wie sie durch einen off-Axis Wirbel ( $a = 0,4w_0$ ) in einem  $LG_1^0$ -Bündel ( $w_0 = 0,388$  mm) entstehen. In (a) sind die Koordinaten in der transversalen  $x$ - $y$ -Ebene auf den jeweiligen Strahldurchmesser  $w(z)$  normiert, in (b) nicht. Der zusätzlich in das Bündel eingesetzte Wirbel ist jeweils in rot gezeichnet und nähert sich in der Darstellung in (a) asymptotisch der  $z$ -Achse. Die entartete Versetzungsfläche des Hintergrundbündels wird durch die mit dem Wirbel induzierte Störung in generische Versetzungslinien (blau) aufgelöst.

linien sowohl vor als auch hinter der Strahltaile darzustellen, läuft  $z$  von  $-1000$  cm bis  $1000$  cm, das entspricht ungefähr  $\pm 13z_R$ . Das Feld in den beiden Halbräumen  $z < 0$  und  $z > 0$  ist jedoch spiegelbildlich zur Ebene  $z = 0$ .

In Abb. 1.33 (a) und (b) sind jeweils die Projektionen der Wirbellinien im Halbraum  $z > 0$  in die  $x$ - $y$ -Ebene dargestellt. Die gestrichelten schwarzen Kreise in (a) deuteten

die Lage der ursprünglichen entarteten Nullstelle des Hintergrundbündels an.

Durch den Wirbel (rote Linie) wird die Versetzungsfläche des  $LG_1^0$ -Bündels im gesamten Raum zerstört. Sie verschwindet jedoch nicht einfach, sondern es wird die Entartung der Versetzungsfläche aufgehoben, sodass nun statt einer Versetzungsfläche in jedem Halbraum  $z < 0$  bzw.  $z > 0$  eine generische Wirbellinie der Ladung 1 vorliegt (blaue Linien). Diese neuen Wirbellinien entstehen außerhalb der zerstörten Versetzungsfläche und sind von U-förmiger Gestalt. Die beiden Schenkel des jeweiligen U zeigen dieselbe Form wie eine Wirbellinie in einem Gauß-Bündel (siehe Kapitel 1.3.2, Abb. 1.26). Sie bilden in den Projektionen Viertelkreise (Abb. 1.33 (a)) und in einer unnormierten Darstellung (Abb. 1.32 (b) und 1.33 (b)) für größere  $z$  annähernd gerade Linien.

Die rote Wirbellinie des eingesetzten Wirbels zeigt jedoch eine Form, die nicht mit der Form von Wirbellinien in einem Gauß-Bündel übereinstimmt: Sie nähert sich in der normierten Darstellung (Abb. 1.32 (a)) asymptotisch der  $z$ -Achse an, in der Projektion erreicht sie also das Zentrum des Bündels (Abb. 1.33 (a)). Dieser Verlauf kann durch das gängige Modell (siehe 1.3.4) nicht erklärt werden. In Kapitel 1.4.4 wird dieses Modell jedoch erweitert, um die Form dieser Wirbellinie erklären zu können.

Würde man wie im Experiment (Kapitel 1.5.1, Abb. 1.42) die Intensitätsverteilungen in verschiedenen Ebenen senkrecht zur  $z$ -Achse betrachten, so würde man die Schnittpunkte der Wirbellinien mit diesen Ebenen als Nullstellen der Intensitätsverteilung sehen. Hier würde der Eindruck entstehen, dass ab einer bestimmten Entfernung  $z$  (in Abb. 1.32 (a) ungefähr 210 cm), wenn das Minimum der U-förmigen Linie die Ebene  $z = 210$  cm berührt, zwei neue Wirbel entgegengesetzter topologischer Ladung entstehen. Der eingesetzte Wirbel würde in dieser Sichtweise beim Fortschreiten auf der  $z$ -Achse ins Zentrum des Hintergrundbündels wandern und dort gefangen werden. Insgesamt hat man ab ungefähr 210 cm drei Wirbel, von denen zwei aus der Zerstörung der Versetzungsfläche des Hintergrundbündels stammen. Dadurch, dass diese beiden entgegengesetzte topologische Ladung tragen, bleibt die Gesamtladung des Bündels erhalten.

Verkleinert man  $a$  wesentlich, erhält man im Grenzfall  $a \rightarrow 0$  ein  $LG_1^1$ -Bündel, dessen zentraler Wirbel mit der  $z$ -Achse zusammenfällt. Die neu entstehenden U-förmigen Wirbellinien beginnen für kleiner werdende  $a$  in  $\pm z$ -Richtung gesehen immer später, für  $a \rightarrow 0$  verschwinden sie im Unendlichen, dafür bleibt die Versetzungsfläche für diesen Grenzfall erhalten. Man erhält also für diesen Grenzfall ein  $LG_1^1$ -Bündel, das sich während der Ausbreitung bis auf die Änderung des Strahldurchmessers  $w(z)$  nicht

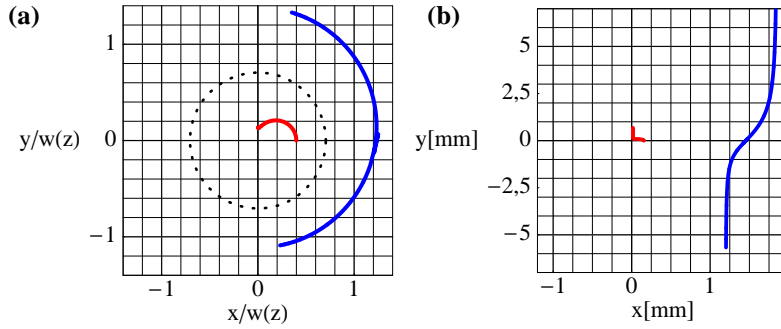


Abbildung 1.33: Projektionen der Wirbellinien aus Abb. 1.32 in die transversale  $x$ - $y$ -Ebene. Projeziert sind nur die Wirbellinien des Halbraumes  $z > 0$ . In (a) sind die Koordinaten in der transversalen  $x$ - $y$ -Ebene auf den jeweiligen Strahldurchmesser  $w(z)$  normiert, in (b) nicht. Der zusätzlich in das Bündel eingesetzte Wirbel ist jeweils in rot gezeichnet und nähert sich in der Darstellung in (a) asymptotisch dem Ursprung. Die entartete Versetzungsfläche des Hintergrundbündels wird durch die mit dem Wirbel induzierte Störung in generische Versetzungslinien (blau) aufgelöst, die sich in (a) auf Viertelkreisen, in (b) für größere  $z$  annähernd geradlinig bewegen.

verändert.

### Wirbel außerhalb der Versetzungsfläche, aber im Innenbereich des Hintergrundbündels ( $w_0 \geq a \geq \frac{w_0}{\sqrt{2}}$ )

Befindet sich der zusätzliche optische Wirbel in der Strahltaile zwar außerhalb der Versetzungsfläche, aber noch innerhalb des  $1/e$ -Strahldurchmessers des Hintergrundbündels, gilt also  $w_0 \geq a \geq \frac{w_0}{\sqrt{2}}$ , so tritt ein Spezialfall ein, der in Abb. 1.34 (a) und (b) mit  $a = 0,9w_0$  gezeigt ist: Die Versetzungsfläche wird ebenso wie im vorigen Fall zerstört und in generische Wirbellinien (blau) aufgelöst. Die ursprüngliche Wirbellinie (rot) nimmt hier aber die Form einer geschlossenen Schleife an, die bei  $z = 0$  die (vormalige) Versetzungsfläche des Hintergrundbündels schneidet. Würde man dies in verschiedenen Ebenen senkrecht zur  $z$ -Achse betrachten (hierzu existiert keine Abbildung), so entstände hier der Eindruck, dass sich der ursprüngliche Wirbel und ein aus der Versetzungsfläche neu entstandener Wirbel entgegengesetzter Ladung gegenseitig auslöschen! (siehe Kapitel 1.1.1 und Abb. 1.2).

Zusätzlich dazu werden drei weitere Wirbellinien erzeugt, zwei davon in U-Form (blau), die Projektion dieser U-förmigen Linien sind wieder, wie im vorigen Fall, Viertelkreise



(Abb. 1.34 (b)). Die Abbildung zeigt die Projektionen der Wirbellinien, allerdings im Gegensatz zu 1.34 (a) für einen Bereich von  $0 < z < 1000$  cm. Die dritte Wirbellinie (blau) verläuft wieder asymptotisch zur  $z$ -Achse, d.h. in der Projektion zum Zentrum. In im Experiment gemessenen Intensitätsverteilungen wie im Kapitel 1.5.1 hätte man also das folgende Bild: Bei  $z = 0$  entstehen aus der zerstörten Versetzungsfläche zwei neue Wirbel entgegengesetzter Ladung, deren einer nach einigen Zentimetern in  $z$ -Richtung den ursprünglichen Wirbel auslöscht, deren anderer jedoch zum Zentrum des Bündels wandert und dort auch für  $z \rightarrow \infty$  bleibt. Ab einer Entfernung von ungefähr 50 cm entsteht ein Wirbelpaar entgegengesetzter topologischer Ladung, die sich beide wie von Wirbeln in Gauß-Bündeln gewohnt auf Viertelkreisen bewegen würden.

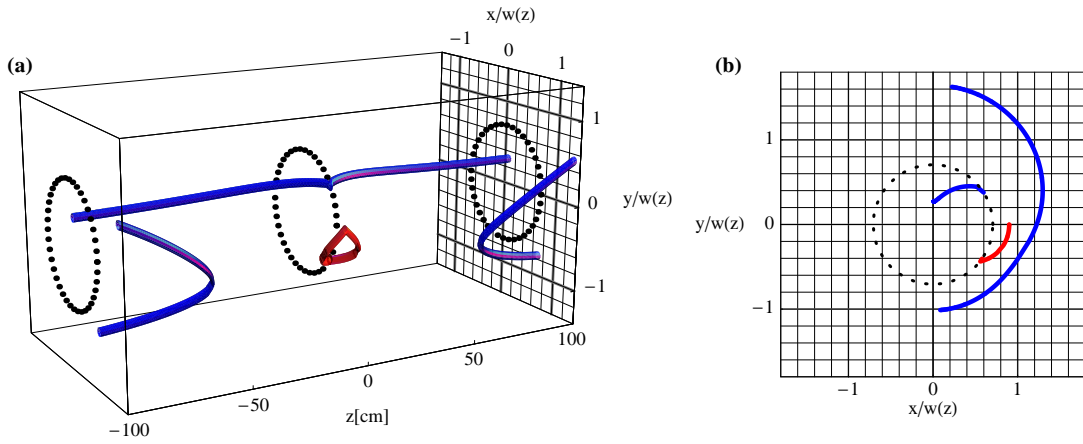


Abbildung 1.34: Wirbellinien in einem  $LG_1^0$ -Bündel, die laterale Verschiebung  $a$  des Wirbels (rot) ist hier  $0,9w_0$ . Wie in Abb. 1.32 sind in (a) normierte Koordinaten verwendet. Für diesen Fall entsteht eine geschlossene Wirbelschleife (rot). Um diese Schleife sehen zu können, ist der Maßstab in  $z$ -Richtung im Vergleich zu Abb. 1.32 und 1.35 geändert. In (b) sind die Projektionen der Wirbellinien für  $z$  zwischen 0 und 1000 cm dargestellt.

### Wirbel im Außenbereich des Hintergrundbündels ( $a \geq w_0$ )

Wird der Abstand des zusätzlichen Wirbels zum Zentrum des Bündels weiter vergrößert (wie in Abb. 1.35 (a) und (b) auf  $1,2w_0$ ), so zerfällt die Versetzungsfläche in zwei Wirbellinien entgegengesetzter topologischer Ladung (blau), deren eine asymptotisch zur  $z$ -Achse verläuft. Diese hat immer dieselbe topologische Ladung wie der ursprüngliche Wirbel (rot). Die andere Wirbellinie hat wieder die Form, wie sie auch ein einzelner

Wirbel in einem Gauß-Bündel zeigt, d.h. ihre senkrechte Projektion formt in normierten Koordinaten einen Viertelkreis (Abb. 1.36 (a)). Die beiden Linien verlaufen beide von  $z = -\infty$  bis  $z = +\infty$  und berühren sich bei  $z = 0$  nur für  $a = w_0$ , d.h. für diesen Wert der lateralen Verschiebung des Wirbels berühren sich zwei U-förmigen Linien wie in Abbildung 1.32 (a) in der Ebene  $z = 0$ . Vergrößert man den Abstand  $a$  des Wirbels zum Zentrum des Bündels, so reißen diese U-Linien an ihrem Berührungspunkt auf, die Schenkel vereinigen sich zu zwei einzelnen Versetzungslinien. Die Schnittpunkte dieser Linien mit der Ebene  $z = 0$  wandern für größer werdende  $a$  auf dem durch die zerstörte Versetzungsfläche vorgegebenen Kreis zur  $y$ -Achse.

Der eingesetzte Wirbel (rot) verläuft für  $a \geq w_0$  nicht mehr wie im Fall  $a < \frac{w_0}{\sqrt{2}}$

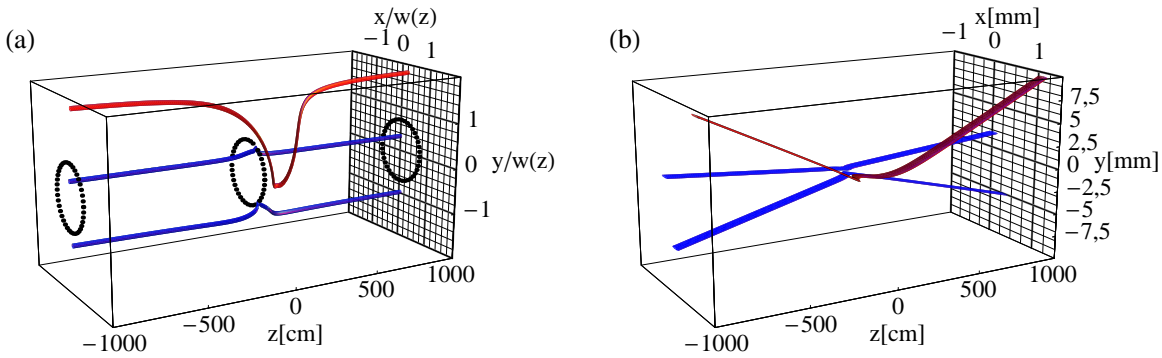


Abbildung 1.35: Wirbellinien in einem  $LG_1^0$ -Bündel für eine laterale Verschiebung  $a$  des Wirbels von  $1,2w_0$ . In (a) sind normierte Koordinaten verwendet. Für diesen Fall entstehen zwei Wirbellinien (blau) aus der aufgelösten Versetzungsfläche, deren eine sich asymptotisch der  $z$ -Achse annähert. Die andere Wirbellinie und auch der zusätzliche Wirbel (rot) zeigen die gewohnte Form, ihre Projektionen (Abb.1.36) ergeben für größere  $z$  Kreise (in (a)) bzw. Geraden (in der Darstellung in (b)).

asymptotisch zur  $z$ -Achse, sondern bleibt (in normierten Koordinaten) an der Strahlperipherie, immer außerhalb des Zylinders der vormaligen Versetzungsfläche. Die Form der Wirbellinie gleicht für größere  $z$  wieder der eines Wirbels in einem Gauß-Bündel, ihre Projektion ist also ein Kreisbogen wie in Abb.1.36 (a).

Im Grenzfall  $a \rightarrow \infty$  verschwindet die durch den zusätzlichen Wirbel verursachte lokale Störung der Intensität des Hintergrundbündels, die Rotationssymmetrie um die  $z$ -Achse bleibt nahezu erhalten. Durch die Phase des Wirbels wird aber eine Störung induziert, die sich über den ganzen Raum erstreckt. Deshalb wird auch in diesem Grenzfall die Versetzungsfläche des Hintergrundbündels in zwei Versetzungslinien aufgelöst, deren Fußpunkte in der Ebene  $z = 0$  jedoch dann auf der  $y$ -Achse zu liegen kommen.

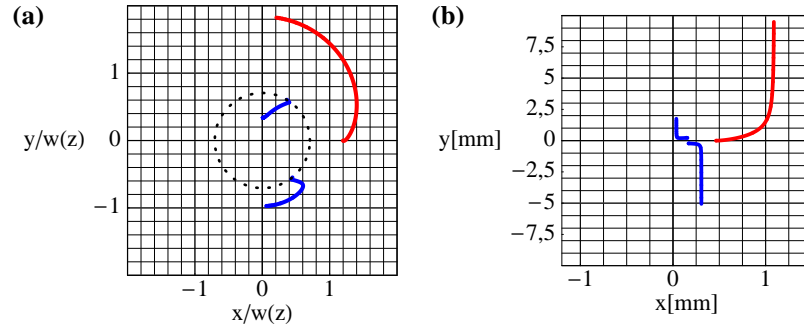


Abbildung 1.36: Die Projektionen auf die  $x$ - $y$ -Ebene der Wirbellinien aus Abb. 1.35. In (a) sind normierte Koordinaten verwendet worden, in (b) absolute Koordinaten.

Eine dieser beiden Linien wird auch weiterhin asymptotisch zur  $z$ -Achse verlaufen, die andere wird dann zu einer Parallelen zur  $z$ -Achse.

### 1.4.2 Generische Wirbel in $LG_p^0$ -Bündeln

Im letzten Kapitel wurden die Phasensingularitäten eines Laguerre-Gauß  $LG_1^0$ -Bündels mit einem zusätzlichen dezentralen Wirbel untersucht. Eine naheliegende Frage ist nun, wie sich die Singularitäten des Feldes bei einer Erhöhung der radialen Ordnung  $p$  des Hintergrundbündels entwickeln (siehe auch [38]).

Für einen  $r$ -Wirbel mit Ladung  $m = 1$  in einem  $LG_{p=2}^0$ -Bündel folgt die analytische Berechnung der Feldverteilung dem Muster der Berechnung in Kapitel 1.3.2. Das Polynom, das man als Endergebnis erhält, ist jedoch schon so kompliziert und unübersichtlich, dass es hier nicht mehr angegeben wird. Das Feld bei  $z$  ließe sich aber sehr bequem und übersichtlich als eine Summe von drei  $LG$ -Polynomen darstellen wie in Kapitel 1.4.5 gezeigt. Damit würde man  $E(x, y, z) = -w_0 LG_1^1(r, \phi, z) + \sqrt{3/2} w_0 LG_2^1 - a LG_2^0$  erhalten [38]. Leider kann man aus dieser Darstellung nicht auf die Anzahl der Nullstellen des Feldes schließen. Die Ausgangsfunktion ist mit einem  $r$ -Wirbel an der Stelle  $(a, 0)$  in der Strahltaile:

$$E(x, y, z) = [(x - a) + iy] e^{-(x^2+y^2)/w_0^2} \frac{1}{2w_0} \left\{ \left[ \frac{2(x^2 + y^2)}{w_0^2} \right]^2 - 4 \frac{2(x^2 + y^2)}{w_0^2} + 2 \right\} \quad (1.40)$$

Dies ist ein Polynom von Grad 5 in  $x$  und  $y$ , und da sich der Grad eines Polynoms durch zweimalige Fourier-Transformation bei der Berechnung des Feldes am Punkt  $z$

nicht ändert, ist das Feld auch bei jedem  $z$  ein Polynom von Grad 5. Das Feld in Gleichung (1.40) wird also je nach Entfernung  $z$  und je nach Wahl des Parameters  $a$  bis zu fünf Nullstellen enthalten. Zusätzlich zu dem ursprünglich eingesetzten Wirbel werden daher wie im vorherigen Kapitel aus den beiden durch den Wirbel gestörten entarteten Versetzungsflächen des  $LG_2^0$ -Bündels mehrere Wirbellinien entstehen, abhängig von der Wahl des Parameters  $a$  im Verhältnis zu  $w_0$ . Diese Wirbellinien dürfen die  $x$ - $y$ -Ebene für festes  $z$  in maximal fünf Punkten schneiden. Abb. 1.37 zeigt für  $w_0 = 0,343$  mm und  $a = 0,85w_0$  die auf diese Weise in einem  $LG_2^0$ -Bündel entstehenden Wirbellinien. Die Auftragung ist wieder in normierten Koordinaten  $x/w(z)$ - $y/w(z)$  für  $z$  zwischen  $-1000$  und  $1000$  cm. Der ursprüngliche Wirbel ist als rote Linie gezeichnet, die aus

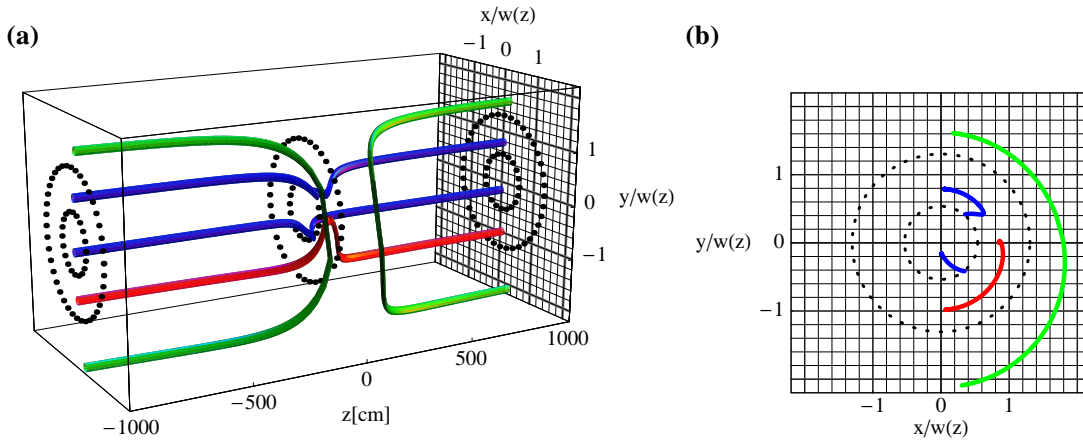


Abbildung 1.37: (a) Wirbellinien in einem  $LG_2^0$ -Bündel mit  $w_0 = 0,343$  mm und  $a = 0,85w_0$ . Außer dem zusätzlich eingebrachten Wirbel (rot) entstehen hier vier weitere Wirbellinien (blau und grün), deren Lage und Form vom Verhältnis  $a/w_0$  abhängt. In (b) sind die Projektionen der Linien in die  $x$ - $y$ -Ebene dargestellt, die beiden gestrichelten Kreise deuten die Nulllinien des Hintergrundbündels an.

den gestörten Versetzungsflächen entstehenden neuen Wirbellinien sind blau und grün. Genau wie im Fall  $p = 1$  werden die beiden Versetzungsflächen aufgelöst, an ihre Stelle treten zwei Wirbel (blau), die jeweils von  $-\infty$  bis  $\infty$  durchlaufen und die Ebene  $z = 0$  auf der inneren der beiden Nulllinien schneiden. Zwei weitere U-förmige Linien (grün) treten in Bereichen mit größeren  $z$  auf. Wie im Fall  $p = 1$  sind Form und Verlauf dieser Linien von  $a$  abhängig.

Erhöht man wie in Abb. 1.38 die radiale Ordnung  $p$  des Hintergrundbündels auf  $p = 3$ , so erhält man, da nun ein Produkt aus  $[(x - a) + iy]$  und einem Polynom vom Grad 3 in  $r^2$  vorliegt, eine Funktion mit bis zu 7 reellen Nullstellen als Ausdruck

für das Feld an der Stelle  $z$  (als Summe von  $LG$ -Funktionen hätte man  $E(x, y, z) = -\sqrt{3/2}w_0 LG_2^1 + \sqrt{2}LG_3^1 - aLG_3^0$ ). Man hat damit für jede Ebene transversal zur  $z$ -Achse bis zu 7 mögliche Schnittpunkte mit Wirbellinien. Abb. 1.38 zeigt die für die Parameter  $w_0 = 0,434 \text{ mm}$  und  $a = 0,75w_0$  berechneten Wirbellinien. Der eingesetzte  $r$ -Wirbel ist wieder in rot, die neu entstehenden Wirbel in blau, grün und gold gezeichnet. In beiden Fällen verläuft wieder eine der Wirbellinien asymptotisch zur  $z$ -Achse,

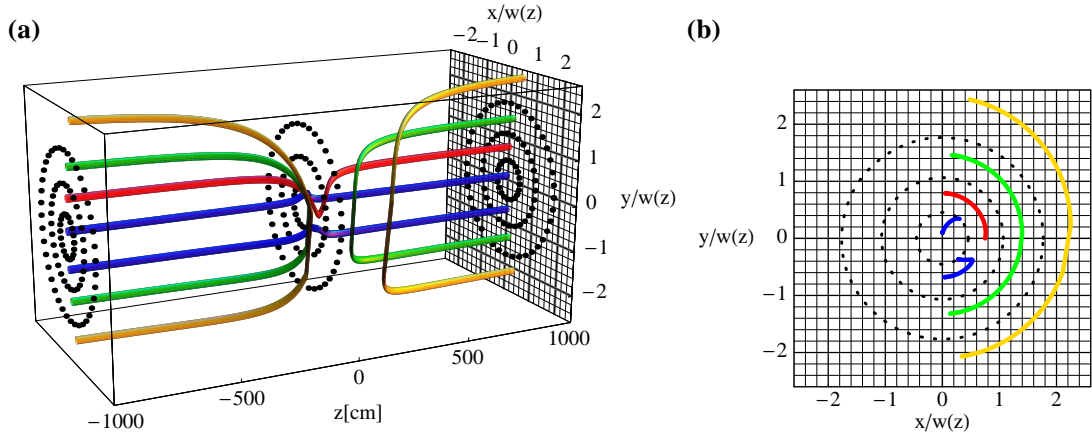


Abbildung 1.38: (a) Wirbellinien in einem  $LG_3^0$ -Bündel mit  $w_0 = 0,343 \text{ mm}$  und  $a = 0,75w_0$ . Außer dem zusätzlich eingebrachten Wirbel (rot) entstehen sechs weitere Wirbellinien (blau, grün und gold). Abbildung (b) zeigt wieder die Projektionen der Wirbellinien aus (a).

was in den Projektionen (Abb. 1.37 (b) und 1.38 (b)) besser zu erkennen ist. Abhängig davon, ob sich bei  $z = 0$  der zusätzliche Wirbel innerhalb oder außerhalb der ersten Versetzungsfläche des  $LG$ -Bündels befindet, trifft dies für ihn zu oder für eine der neu entstehenden Wirbellinien. Der Verlauf dieser asymptotischen Linie lässt sich wieder mit dem Modell aus Kapitel 1.4.4 mit Hilfe der Gradienten von Phase und Intensität des Hintergrundbündels erklären. Die anderen Wirbellinien verlaufen wie gewohnt in relativen Koordinaten so, dass ihre Projektionen Kreisbögen bilden, die für  $z \rightarrow \pm\infty$  die  $y$ -Achse berühren.

Analoge Resultate erhält man, wenn man als Hintergrundbündel ein beliebiges  $LG_p^0$ -Bündel verwendet: Auch in diesem Fall kann das Feld an jeder Stelle analytisch berechnet werden und wird durch ein Polynom vom Grad  $2p+1$  in  $x$  und  $y$  repräsentiert. Man erhält daher maximal  $2p+1$  Nullstellen des Feldes für jedes  $z$  und damit  $2p+1$  mögliche Schnitte mit Wirbellinien. Die  $p$  Versetzungsflächen des Hintergrundbündels werden zerstört und eine Wirbellinie wird sich asymptotisch der  $z$ -Achse annähern, so dass, betrachtet man nur die Nullstellen der Intensität in den  $x$ - $y$ -Ebenen, einer dieser

Wirbel ins Zentrum des Bündels „wandert“ und dort „gefangen“ wird.

### 1.4.3 Wirbel mit anderen Kernfunktionen in Laguerre-Gauß-Bündeln

In den vorangegangenen Kapiteln wurde ein  $r$ -Wirbel in Laguerre-Gauß-Bündeln untersucht. Dieser Fall ist interessant, da sich das Feldes analytisch berechnen lässt. Leider ist es schwierig,  $r$ -Wirbel experimentell herzustellen. Wegen der im Kapitel 1.3.2 beschriebenen Probleme ist es im Experiment einfacher,  $\tanh$ -Wirbel mit kleinem Kerndurchmesser einzusetzen.

Verwendet man statt eines  $r$ -Wirbel einen  $\tanh[\frac{|r-r_c|}{r_c}]$ -Wirbel oder einen Punktwirbel (siehe Kapitel 1.3.3 und 1.3.1), so sind die Kernfunktionen dieser beiden Wirbel nicht mehr durch ein Polynom darstellbar: Die Funktion des Tangens Hyperbolicus als auch die Bessel-Funktionen, die den Wirbelkern eines Punktwirbels außerhalb der Strahltille beschreiben [5], sind beide transzendente Funktionen. Für diese existiert zwar eine Potenzreihendarstellung, diese Reihe hat aber unendlich viele Glieder und ist damit kein Polynom von endlichem Grad. Das Feld eines  $LG_p^0$ -Bündels mit Wirbel hat damit nicht mehr  $2p + 1$  mögliche Nullstellen, sondern unendlich viele [27].

Die Konsequenz daraus ist, dass im Feld eines  $LG$ -Bündels mit Punkt- oder  $\tanh$ -Wirbel beliebig viele neue Wirbel auftreten können. Je nach Größe des  $\tanh$ -Wirbels (d.h. je nach Wahl von  $r_c$ ) wird sich dieser aber zumindest näherungsweise wie ein  $r$ -Wirbel oder wie ein Punktwirbel verhalten.

Abb. 1.39 zeigt einen gerechneten Vergleich zwischen der „Propagation“ eines  $r$ -Wirbels (A-D), eines  $\tanh$ -Wirbels mit großem Wirbelkern (a-d,  $r_c = 1$  mm) und eines  $\tanh$ -Wirbels mit kleinem Wirbelkern ( $\alpha - \delta$ ,  $r_c = 0,001$  mm). Die Bilder sind  $x$ - $y$ -Querschnitte durch die Intensitätsverteilung des Feldes für verschiedene  $z$ , im Unterschied zu den bisherigen Abbildungen, die die Nullstellen des Feldes im ganzen dreidimensionalen Raum gezeigt hatten. Diese Darstellung ist hier gewählt, um erstens die Nullstellen des Feldes besser identifizieren zu können und zweitens den Anschluss an die experimentellen Aufnahmen in Kapitel 1.5.1 herzustellen. Man kann hier von der „Propagation“ der Wirbel (in diesem Kontext die Schnittpunkte der Wirbellinien mit den transversalen Ebenen bzw. die Nullstellen der transversalen Intensitätsverteilungen) wie in Kapitel 1.3.4 sprechen.

Das Hintergrundbündel ist ein  $LG_1^0$ -Bündel mit  $w_0 = 0,388$  mm, der Wirbel ist um

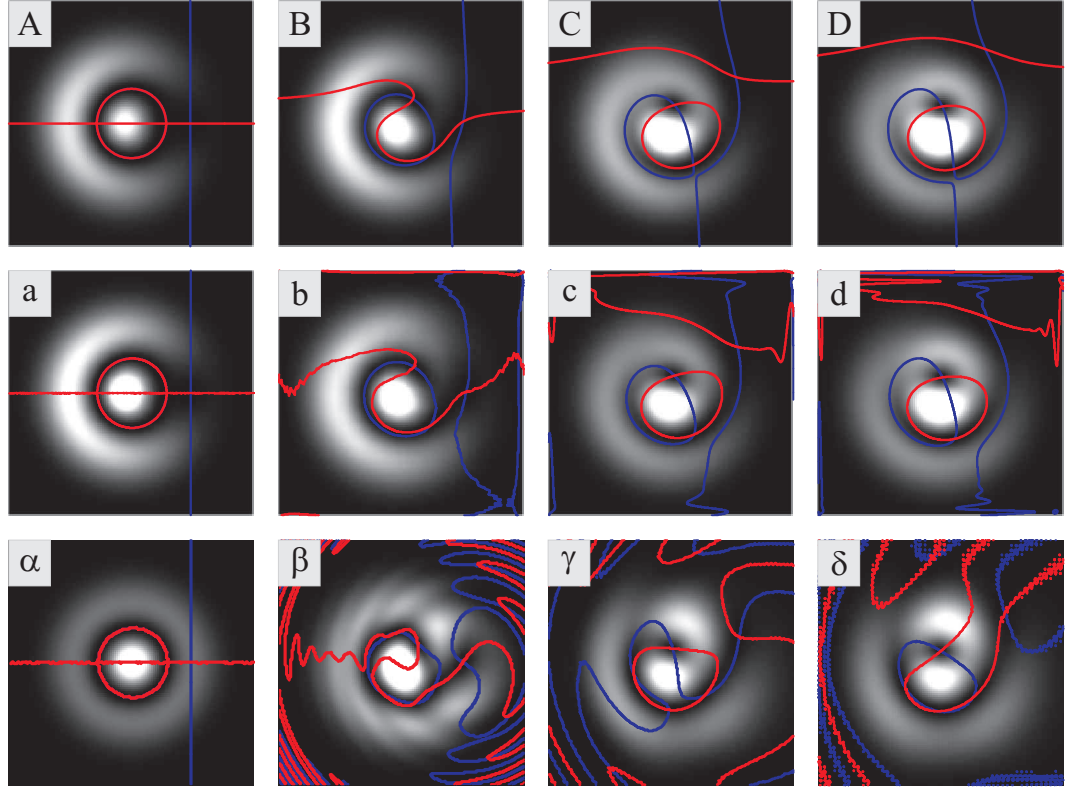


Abbildung 1.39: Berechnete Intensitätsverteilungen mit überlagerten Nullstellen von Real- und Imaginärteil (rot und blau) des Lichtfeldes in der  $x$ - $y$ -Ebene für verschiedene  $z$ . Dargestellt ist die Entwicklung des Feldes eines  $LG_1^0$ -Bündels mit einem  $r$ -Wirbel (A-D), einem  $\tanh$ -Wirbel mit  $r_c = 1$  mm (a-d) und einem  $\tanh$ -Wirbel mit  $r_c = 0,001$  mm ( $\alpha - \delta$ ). Die Entfernungen sind  $z = 0, 250, 1000$  und  $2000$  mm, die Bündelparameter sind  $w_0 = 0,388$  mm und  $a = 1,2w_0$ . An den Schnittpunkte der roten und blauen Nulllinien sind Nullstellen des Feldes und damit Wirbel. In (A), (a) und ( $\alpha$ ) liegen auf der Nulllinie des LG-Bündels ein roter und ein blauer Kreis genau aufeinander, weshalb der blaue Kreis nicht zu sehen ist.

$a = 1,2w_0$  aus dem Zentrum verschoben, befindet sich also auf dem hellen Ring des LG-Bündels. In Kapitel 1.4.1 zeigt Abb. 1.35 für genau diese Konfiguration eine dreidimensionalen Darstellung der Wirbellinien. Die Propagationsentfernungen sind von links nach rechts  $z = 0, 250, 1000$  und  $2000$  mm. Den Bildern sind, um die Nullstellen der Intensität und damit die Position der Wirbel erkennen zu können, die Nulllinien von Real- und Imaginärteil des Feldes in rot und blau überlagert. An den Schnittpunkten von roten und blauen Linien ist eine Nullstelle des Feldes und damit ein Wirbel. Die Bildausschnitte sind auf  $5w(z)$  normiert, d.h. die Kantenlänge der Bilder ist von links nach rechts 1,9 mm, 2,0 mm, 3,2 mm und 5,5 mm. Die Feldverteilung des  $r$ -Wirbels ist analytisch berechnet, die der  $\tanh$ -Wirbel numerisch. Deshalb treten an den Rändern

der Bilder a bis d und  $\alpha$  bis  $\delta$  viele verschlungene rote und blaue Linien als numerische Artefakte auf.

Durch den r-Wirbel wird die Versetzungsfläche des Hintergrundbündels (in Abb. 1.39 als roter Kreis erkennbar, unter dem jedoch noch ein verdeckter blauer Kreis liegt) zerstört und in eine zusätzliche Wirbellinie aufgelöst, die die transversalen Ebenen in zwei Punkten schneidet. Dadurch entstehen zwei „Wirbel“ entgegengesetzter Ladung, die in den Bildern B bis D zu sehen sind. Einer dieser neuen Wirbel (er hat dieselbe topologische Ladung wie der zusätzlich eingesetzte) „wandert“ zum Zentrum des Bündels.

Im Vergleich dazu zeigt die Propagation des großen tanh-Wirbels in (a-d) bis auf kleinere numerische Artefakte am Rand (Entstehen von roten und blauen Linien an Stellen, an denen die Intensität fast Null ist) kaum Unterschiede. Dies ist unabhängig von der Wahl der Verschiebung  $a$ .

Verkleinert man jedoch den Wirbelkern des tanh-Wirbels auf  $r_c = 0,001$  mm, sodass er näherungsweise einem Punktwirbel gleicht, ändert sich das Ergebnis drastisch ( $\alpha - \delta$ ): Zwar ist es immer noch so, dass je nach Wahl von  $a$  der ursprüngliche Wirbel oder einer der neu entstandenen zum Zentrum des Bündels wandert, doch wird die Versetzungslinie des Hintergrundbündels in der  $x$ - $y$ -Ebene anders zerstört (siehe ( $\beta$ )).

Im Gegensatz zu Wirbeln mit großen Kernen ist hier die Verschiebung der Nullstellen von Real- und Imaginärteil der früheren Nulllinie gegeneinander in bestimmten Bereichen geringer, sodass die beiden Nulllinien aufgrund der numerischen Auflösung an manchen Stellen nicht getrennt werden können. An diesen Stellen bleibt die Versetzungsfläche näherungsweise erhalten.

Außerdem entstehen hier wie vorhergesagt je nach Entfernung  $z$  mehr als nur  $2p$ , d.h. in diesem Fall 2 neue Wirbel, wie bei genauerem Betrachten der Bilder zu erkennen ist. Bei  $z = 250$  mm ( $\beta$ ) sind z. B. sechs oder sieben Wirbel vorhanden. Einige dieser Wirbel entstehen durch lokale Verschlingungen der Nulllinien von Real- und Imaginärteil, deren Ursache die Störungen sind, die bei der Beugung des Wirbelkernes wellenförmig über das Bild laufen ( $\beta$ ).

Ersetzt man den tanh-Wirbel mit kleinem  $r_c$  durch einen fast perfekten Punktwirbel, so beobachtet man keinen Unterschied zwischen der Entwicklung der beiden Wirbel. Der Verlauf der Nulllinien von Real- und Imaginärteil ist identisch, und es treten die selben Beugungserscheinungen und dadurch zusätzliche Wirbel auf. Daraus folgt, dass die Unterschiede im Propagationsverhalten zwischen r-, tanh-, und Punktwirbeln ein Resultat



der unterschiedlichen „Größe“ und Steilheit der Kerne ist und damit hauptsächlich auf der unterschiedlichen Beugung dieser Wirbel beruht.

Das Verhalten von Wirbeln mit kleinem und großem Kern ist aufgrund der obigen Unterschiede nur eingeschränkt vergleichbar, denn die Wirbellinien des ursprünglichen Wirbels und des Wirbels, der zum Zentrum wandert, sind zwar ähnlich, doch entstehen je nach Größe des Wirbelkerns unterschiedlich viele zusätzliche Wirbellinien.

### 1.4.4 Erweiterung des fluiddynamischen Modells

Die bisherigen Rechnungen haben gezeigt, dass im Feld eines  $LG_p^l$ -Bündels mit zusätzlichem off-Axis Wirbel aus den gestörten entarteten Versetzungsflächen neue Wirbel entstehen. Sie liefern aber keine Erklärung für die Tatsache, dass in der senkrechten Projektion in normierten Koordinaten einer dieser sich wie z. B. in Abb. 1.38 (b) für große  $z$  dem Zentrum annähert. Diese Annäherung steht ja ganz im Gegensatz zu dem Verhalten der anderen Wirbel, die sich auf Kreisbögen bewegen und sich damit gemäß dem fluiddynamischen Modell und den Rechnungen für einen einzelnen Wirbel in einem Gauß-Hintergrundbündel verhalten (siehe Kapitel 1.3.4 und 1.3.2).

Das fluiddynamische Modell führt ja die Bewegung eines Wirbels in einem hinreichend glatten Hintergrundbündel auf den negativen Gradienten der Phase und den (um  $90^\circ$  gedrehten) Gradienten der Intensität des Hintergrundbündels (ohne den Wirbel) zurück. Nun ist aber ein LG-Bündel höherer Ordnung aufgrund der vorhandenen entarteten Phasensingularitäten kein hinreichend glattes Hintergrundfeld, auf das dieses Modell angewendet werden kann. Tatsächlich ist der Gradient der Phase (wie auch die Phase selbst) an den Stellen der Phasensprünge um  $\pi$  nicht definiert, existiert aber an jeder anderen Stelle des Bündels.

Betrachtet man die Phasenflächen eines  $LG_p^0$ -Bündels an einer beliebigen Stelle außerhalb der Strahltaile, so sieht man, dass diese wie bei jeder Gauß-Mode (vergleiche Kapitel 1.1.2, Abbildung 1.19) gemäß dem Term  $e^{-ikr^2/2R_k(z)}$  (Gleichung (1.10)) an jedem Punkt außer an den Sprungstellen dieselbe  $z$ -abhängige Krümmung mit Krümmungsradius  $R_k(z) = (z^2 + z_R^2)/z$  (Gleichung (1.13)) besitzt. Der Gradient der Phase zeigt daher an jedem Punkt außerhalb der Sprungstellen nach innen, der negative Phasengradient zeigt also überall nach aussen. Soweit würde die Anwendung des Modells aus Kapitel 1.3.4 im Widerspruch zu den in den Kapiteln 1.4.1 und 1.4.2 durchgeführten Rechnungen stehen, da nach den obigen Überlegungen unter den Voraussetzungen des fluiddynamischen Modells Wirbel auch in Laguerre-Gauß-Bündeln höherer Ordnung immer zur Strahlperipherie laufen sollten.

Im Gegensatz zu einem Wirbel in einem Gauß-Bündel werden aber in einem LG-Bündel höherer Ordnung durch einen zusätzlichen Wirbel die instabilen Versetzungsflächen gestört und damit die Phase und Intensität des Hintergrundbündels entscheidend und irreversibel verändert. Zusätzlich ist diese Änderung auch noch für verschiedene  $z$  unterschiedlich, daher ist es falsch, für die Anwendung des fluiddynamischen Modells die

Phasen- und Intensitätsgradienten des ungestörten Bündels heranzuziehen.

Die richtige Vorgehensweise ist die folgende: Man berechnet das Feld eines  $LG$ -Bündels mit  $r$ -Wirbel bei einer beliebigen Entfernung  $z$ . Hier sucht man die aktuellen Koordinaten des Wirbels und dividiert das Feld durch einen  $r$ -Wirbel gleicher Ladung an derselben Stelle. Dadurch wird der Wirbel aus dem Feld entfernt. Man erhält in guter Näherung das Feld des durch den Wirbel gestörten Hintergrundbündels, aber *ohne* den Wirbel. Nach dem Modell in Kapitel 1.3.4 bestimmt das verbleibende Hintergrundfeld die Bewegung des Wirbels, wobei eine gewisse Ungenauigkeit darin liegt, dass man durch das Feld eines kanonischen  $r$ -Wirbels teilt, obwohl für dieses spezielle  $z$  der so entfernte Wirbel nicht unbedingt exakt diese Form hat.

In Abbildung 1.40 sind die entsprechenden Bilder zu dieser Rechnung am Beispiel eines  $r$ -Wirbels am Rande des zentralen Maximums ( $a = 0,4 \cdot w_0$ ) eines  $LG_1^0$ -Bündels gezeigt. Die gezeigten Strahlquerschnitte sind für  $z = 20$  cm berechnet. Die erste Spalte zeigt die Intensitätsverteilung (a) und den negativen Phasengradienten (d) eines ungestörten  $LG_1^0$ -Bündels. In Abb. (d) zeigt der überlagerte orangefarbene Kreis die Stelle der Versetzungsfläche des Bündels.

Die zweite Spalte zeigt Intensität (b) und Phasengradient (e) desselben Bündels mit einem off-Axis  $r$ -Wirbel. Den Bildern sind wieder die Nullstellen von Real- und Imaginärteil des Feldes überlagert, um die Position des Wirbels zu verdeutlichen. Die Phase des Wirbels beeinflusst den Phasengradienten des ganzen Bündels, sodass dieser die typische Wirbelstruktur zeigt.

In der dritten Spalte wurde aus diesem Feld wie oben beschrieben der Wirbel entfernt, die Stelle des entfernten Wirbels ist mit einem grünen Kreuz gekennzeichnet. In der Intensitätsverteilung (c) ist die typische Form des  $LG_1^0$ -Bündels noch wiederzuerkennen, jedoch ist der frühere Nullring keine echte Nullstelle mehr, außerdem ist das Bündel nicht mehr exakt rotationssymmetrisch. Der negative Phasengradient dieses bereinigten Hintergrundbündels (f) zeigt nun im Außenbereich immer noch zur Strahlperipherie, an der Stelle des Wirbels und im gesamten zentralen Maximum zeigt er aber nach innen. Der negative Phasengradient hat also im zentralen Maximum des Bündels im Vergleich zu einem ungestörten  $LG_1^0$ -Bündel seine Richtung umgedreht.

Wendet man darauf nun das Modell aus Kapitel 1.3.4 an, so wird klar, warum die Wirbellinie zum Zentrum läuft: der negative Phasengradient zeigt an jedem Punkt des zentralen Maximums nach innen.

Nebenbei sei bemerkt, dass es kein Zufall ist, dass die Pfeile des negativen Phasengra-

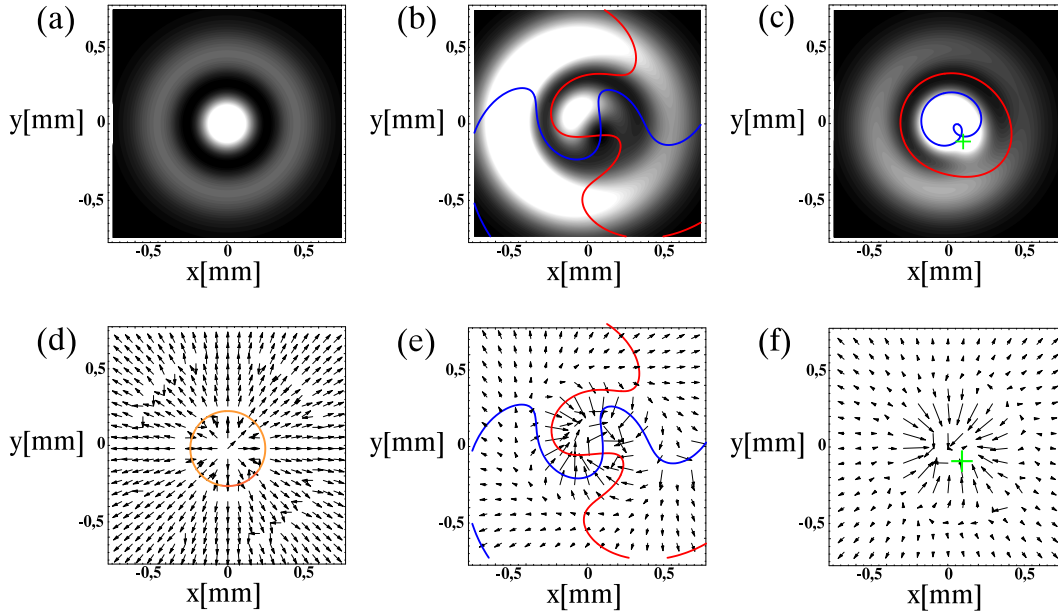


Abbildung 1.40: Erste Spalte: Intensitätsverteilung (a) und negativer Phasengradient (d) eines ungestörten  $LG_1^0$ -Bündels mit  $w_0 = 0,388$  mm. In Abb. (d) deutet der orangefarbene Kreis die Lage des Nullrings an. Zweite Spalte: off-Axis r-Wirbel ( $a = 0,4w_0$ ) in einem  $LG_1^0$ -Bündel bei  $z = 20$  cm. Abb. (b) zeigt die Intensitätsverteilung mit den überlagerten Nulllinien von Real- und Imaginärteil des Feldes. Abb. (e) zeigt den negativen Phasengradienten des Bündels, der die typische Wirbelstruktur aufweist. Dritte Spalte: Dieselben Bilder wie (b) und (e), allerdings sind hier Phase und Kernfunktion des Wirbels nachträglich herausgerechnet. Das grüne Kreuz deutet den Ort an, an dem der Wirbels vorher war. Der Phasengradient (f) zeigt nun erstaunlicherweise im Innenbereich des Bündels an jedem Punkt nach innen.

dienten in Abbildung 1.40 (e) überall nahezu senkrecht auf den Nulllinien von Real- und Imaginärteil stehen. Der Grund dafür ist, dass der Gradient einer Funktion immer senkrecht auf den Flächen (bzw. in zwei Dimensionen auf den Linien) konstanter Funktionswerte steht (siehe [28], S.566). Linien konstanter Phase sind aber z. B. die Linien, auf denen der Real- oder Imaginärteil der Funktion verschwinden.

Abb. 1.41 zeigt die Gültigkeit des Modells. Für diese Abbildung wurden mit der Methode der Ausbreitung des Winkelspektrums die Wirbellinien berechnet, die entstehen, wenn ein r-Wirbel off-Axis in ein  $LG_1^0$ -Bündel gesetzt wird. Das Bündel hat die Parameter  $w_0 = 0,388$  mm und  $a = 0,4w_0$ . In Abb. 1.41 (a) sind die Projektionen der Wirbellinien in die  $x$ - $y$ -Ebene gezeigt (absolute Koordinaten). Für die innerste Wirbellinie (rot) wurde an jedem Punkt  $z$  der Wirbel nach der oben beschriebenen Methode entfernt und die Gradienten von Intensität und Phase des resultierenden Feldes in der Nachbarschaft des (entfernten) Wirbels durch Mittelung auf einem Kreis um den Wir-

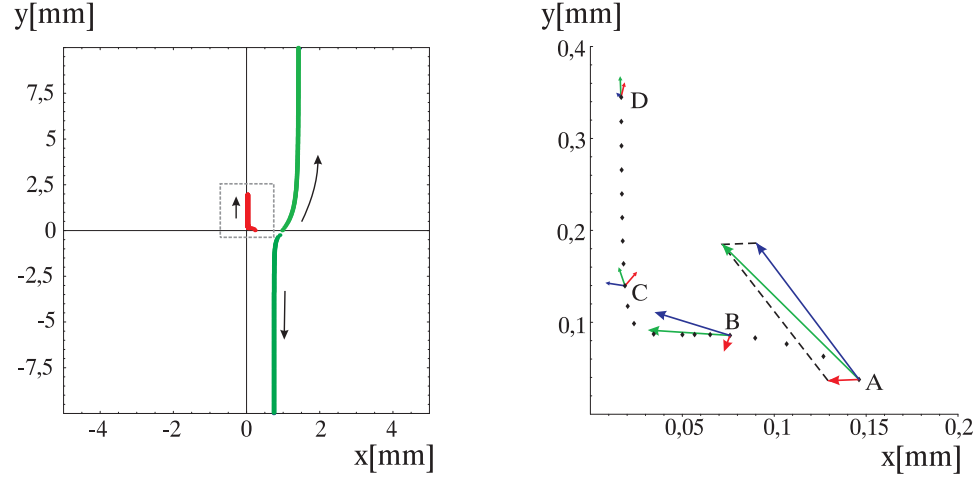


Abbildung 1.41: Wirbel in einem  $LG_1^0$ -Bündel mit  $w_0 = 0,388 \text{ mm}$  und  $a = 0,4w_0$ . Abb. (a) zeigt die Projektionen der Wirbellinien in absoluten Koordinaten. Auf den Wirbel, der in der normierten Darstellung zum Zentrum läuft (rote Linie), wurde in (b) das im Text besprochene Modell angewendet. Der negative Gradient der Phase (rote Pfeile) und der um  $90^\circ$  gedrehte Gradient der Intensität (blaue Pfeile) werden gemäß Kapitel 1.3.4 Gleichung (1.36) zu einer resultierenden „Kraft“ (grüne Pfeile) addiert. Die resultierende „Kraft“ ist an jedem Punkt (A bis D) tangential zur Wirbellinie, was die Anwendbarkeit des Modells auf diesen Fall beweist.

bel berechnet.

Mit der Gleichung

$$\frac{d\mathbf{r}_a(z)}{dz} = (-\nabla_\perp \phi_b + \frac{m}{2} C \tilde{\nabla}_\perp \ln I_b)|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_a(z)} \quad (1.41)$$

aus Kapitel 1.3.4 wurde daraus ein Vektor berechnet, der wie eine „Kraft“ die „Bewegungsrichtung“ des Wirbels angibt. Der feste Parameter  $C$  wurde dabei so angepasst, dass die resultierenden Vektoren überall Tangenten an die Trajektorie des Wirbels bilden. Der damit erhaltene Wert für  $C$  ist  $C = 1,1$ . In Abb. 1.41 (b) wurden die negativen Gradienten der Phase  $-\nabla_\perp \phi_b$  (rote Pfeile) und die um  $90^\circ$  gedrehten Gradienten der Intensität  $\tilde{\nabla}_\perp \ln I_b$  (blaue Pfeile) des Hintergrundbündels zusammen mit ihrer Vektorsumme, der resultierenden „Kraft“ (grüne Pfeile) an den entsprechenden Punkte der projizierten Wirbellinie eingezeichnet. Der Übersichtlichkeit halber wurden die Vektoren nur an den Punkten A bis D gezeichnet, berechnet wurden sie jedoch alle. Die resultierende „Kraft“ zeigt überall tangential an die Wirbellinie, was den Beweis für die Gültigkeit des Modells liefert. Für kleine  $z$  (Punkt A,  $z = 5 \text{ cm}$  und B,  $z = 25 \text{ cm}$ ) ist ein starker, zum Zentrum weisender Phasengradient vorhanden, der die Wirbel-

linie nach innen abbiegen lässt. Für größere  $z$  (Punkt C und D bei  $z = 180$  cm und  $z = 500$  cm) zeigt zwar die resultierende Kraft nicht mehr zum Zentrum des Bündels, ist aber so klein geworden, dass die „Bewegungsgeschwindigkeit“ des Wirbels kleiner als die beugungsbedingte laterale Ausdehnung des Bündels ist und die Wirbellinie in absoluten Koordinaten im Zentrum zu bleiben scheint. In auf  $w(z)$  normierten Koordinaten läuft der Wirbel daher zum Zentrum des Bündels.

Die Trajektorie der Wirbel, die später aus der aufgelösten Versetzungsfläche entstehen (in Abb. 1.41 (a) die grünen Linien), befindet sich im Außenbereich des Bündels und findet dort einen negativen Phasengradienten vor, der an jedem Punkt in Richtung der Strahlperipherie zeigt. Diese Trajektorien verlaufen daher in relativen Koordinaten wie in einem Gauß-Bündel nicht in Richtung des Zentrums. Da die Linien gleicher Intensität bei einem LG-Bündel in guter Näherung denen eines Gauß-Bündels gleichen, ist die azimuthale Komponente der Wirbelbewegung im Außenbereich eines LG-Bündels ähnlich der in einem Gauß-Bündel, die Trajektorien der Wirbel sind also in relativen Koordinaten zwei Viertelkreise.

Diese Modell gilt mit Sicherheit auch für die Form von Wirbellinien in anderen Hintergrundbündeln mit entarteten Versetzungsflächen wie z. B. Hermite-Gauß-Moden.

### 1.4.5 Dekomposition in Laguerre-Gauß-Moden

Wie in Kapitel 1.1.2 erwähnt, bilden die Laguerre-Gauß-Bündel eine vollständige Familie von Lösungen der Wellengleichung in zylindrischen Polarkoordinaten, also eine orthonormierte Basis, aus der sich jedes Lichtfeld, das die Wellengleichung löst, konstruieren lässt. Für die Modenfamilie der Hermite-Gauß- und Ince-Gauß-Moden gilt dasselbe.

Die Idee ist, das Feld eines  $LG_q^n$ -Bündels in der Strahltaille mit einem oder mehreren off-Axis Wirbeln als Superposition von verschiedenen  $LG_p^l$ -Bündeln derselben Familie ohne off-Axis Wirbel darzustellen. Dieses Prinzip wäre ähnlich einer Fourier-Entwicklung des Feldes, jedoch mit Laguerre-Bündeln als Basisfunktionen anstelle von ebenen Wellen, wie dies bei einer Fourier-Transformation der Fall ist. Die Vorteile sind ähnlich denen einer Fourier-Transformation, d.h. dadurch, dass die  $z$ -Abhängigkeit der Basisfunktionen explizit gegeben ist, kann das Feld an jeder Stelle ohne weitere Rechnung angegeben werden. Außerdem kann mit dem ABCD-Propagator für Gauß-Bündel (siehe [18]), der natürlich auch für höhere Gauß-Moden gilt, der Durchgang eines  $LG_q^n$ -Bündels mit

off-Axis Wirbeln durch ein System von beliebigen optischen Elementen analytisch berechnet werden.

Jede Funktion  $f(r, \phi, z)$  kann als eine Reihe von Laguerre-Funktionen  $LG_p^l$  mit passenden Koeffizienten  $A_p^l$  dargestellt werden:

$$f(r, \phi, z) = \sum_{l,p} A_p^l LG_p^l(r, \phi, z). \quad (1.42)$$

Die Koeffizienten  $A_p^l$  dieser Reihe sind durch die Skalarprodukte der Funktion  $f(r, \phi, z)$  mit der jeweiligen Basisfunktion  $LG_p^l$  am Punkt  $z = z_0$  gegeben:

$$A_p^l = \langle f(r, \phi, z_0), LG_p^l(r, \phi, z_0) \rangle = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} f^*(r, \phi, z_0) LG_p^l(r, \phi, z_0) r dr d\phi. \quad (1.43)$$

Dieses Integral kann natürlich keineswegs immer analytisch gelöst werden, außerdem wird im Allgemeinen die Reihe (1.42) eine Unendliche sein.

Für einen off-Axis Wirbel der Ladung  $m$  in einem  $LG_q^n$ -Bündel gibt es jedoch eine analytische Lösung, und für den Spezialfall eines on-Axis Wirbels der Ladung  $m$  in einem  $LG_q^0$ -Bündel (das ist der hier interessante) sogar eine sehr elegante: Das Feld ist bei  $z = z_0$  (dem Punkt der Entwicklung):

$$(x + iy)^m LG_q^0(r, \phi, z_0) = r^m e^{im\phi} LG_q^0(r, \phi, z_0). \quad (1.44)$$

Die Koeffizienten  $A_p^l$  sind dann:

$$\begin{aligned} A_p^l &= \langle r^m e^{im\phi} LG_q^0(r, \phi, z_0), LG_p^l(r, \phi, z_0) \rangle \\ &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} (r^m e^{im\phi} LG_q^0(r, \phi, z_0))^* LG_p^l(r, \phi, z_0) r dr d\phi \\ &= \frac{C_q^0 C_p^l}{w^2(z_0)} e^{i\psi(z_0)(2(q-p)-l)} \times \\ &\quad \times \int_0^{2\pi} d\phi e^{i\phi(l-m)} \int_0^\infty dr r^{(m+1)} \left(\frac{2r^2}{w^2(z_0)}\right)^{\frac{l}{2}} e^{-\frac{2r^2}{w^2(z_0)}} L_p^l\left(\frac{2r^2}{w^2(z_0)}\right) L_q^0\left(\frac{2r^2}{w^2(z_0)}\right) \end{aligned}$$

mit der Definition der Laguerre-Gauß-Bündel aus Kapitel 1.1.2, Gleichung 1.10 und dem Phasenterm  $\psi(z) := \arctan(z/z_R)$ . Die Integration über  $\phi$  liefert  $2\pi$ , wenn  $m = l$  gilt, ansonsten null. Es sind also nur die  $A_p^m$  ungleich null.

Die Integration über  $r$  lässt sich durch die Substitution  $\eta := 2r^2/w^2(z_0)$  etwas verein-

fachen, das Ergebnis dieses Integrals ist tabelliert [41]:

$$\begin{aligned} A_p^l &= \frac{\pi}{2} C_q^0 C_p^m \left( \frac{w^2(z_0)}{2} \right)^{\frac{l}{2}} e^{i\psi(z_0)(2(q-p)-m)} \int_0^\infty d\eta e^{-\eta} \eta^m L_q^0(\eta) L_p^m(\eta) \\ &= \frac{\pi}{2} C_q^0 C_p^m \left( \frac{w^2(z_0)}{2} \right)^{\frac{l}{2}} e^{i\psi(z_0)(2(q-p)-m)} (-1)^{q+p} m! \binom{m+p}{q} \binom{q}{p}. \end{aligned}$$

Setzt man die Definition für die  $C_p^m$  (Gleichung 1.11, Kapitel 1.1.2) ein, so erhält man:

$$A_p^l = \begin{cases} \left( \frac{w^2(z_0)}{2} \right)^{\frac{l}{2}} e^{i\psi(z_0)(2(q-p)-m)} (-1)^{q+p} \frac{m!(m+p)!}{(m+p-q)!p!(q-p)!} \sqrt{\frac{p!}{(m+p)!}} & \text{mit } \begin{matrix} p \leq q \leq m+p \\ l = m \end{matrix} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (1.45)$$

Die Bedingungen für  $p$ ,  $q$  und  $m$  ergeben sich aus der Tatsache, dass die Fakultät einer negativen Zahl als Unendlich definiert ist. Aus diesen Bedingungen folgt auch, dass die Reihe in (1.42) aus nur endlich vielen Gliedern besteht und damit konvergiert.

Für einen Wirbel der Ladung  $m = 1$  in einem  $LG_q^0$ -Bündel sind nur noch für die Koeffizienten mit  $p = q - 1$  und  $p = q$  die Bedingungen erfüllt, die Reihe besteht also nur noch aus zwei Gliedern.

Wegen  $x - a + iy = re^{i\phi} - a$  lässt sich damit auch die Zerlegung eines off-Axis Wirbels mit Ladung 1 in einem Laguerre-Bündel bestimmen. So erhält man beispielsweise für ein  $LG_1^0$ -Bündel:

$$(x - a + iy) LG_1^0(r, \phi, z) = -\frac{w_0}{\sqrt{2}} LG_0^1(r, \phi, z) + w_0 LG_1^1(r, \phi, z) - a LG_1^0(r, \phi, z). \quad (1.46)$$

Diese Ergebnisse scheinen auf den ersten Blick verwirrend: Wie kann ein Feld, das keine Rotationssymmetrie besitzt, durch eine konzentrische Überlagerung von drei rotationssymmetrischen Feldern dargestellt werden? Auf den zweiten Blick verschwindet jedoch der Widerspruch, denn die beteiligten drei Felder sind nur in der Intensität, nicht jedoch in der Phase rotationssymmetrisch.

Betrachtet man die an der Überlagerung beteiligten Felder (siehe Kapitel 1.1.2, Gleichung 1.10), so wird deutlich, wodurch die komplette Dynamik der Entwicklung des Wirbelfeldes bestimmt ist: Der einzige  $z$ -abhängige Anteil, der nicht für alle Laguerre-Moden gleich ist, ist die Gouy-Phase  $e^{i(2p+l+1) \arctan(\frac{z}{z_R})}$  (Kapitel 1.1.2, Gleichung (1.14)), die von der Ordnung der beteiligten Moden abhängt. Für die an der Überlagerung beteiligten Moden  $LG_q^0$ ,  $LG_{q-1}^1$  und  $LG_q^1$  sind die Gouy-Phasen  $2q \arctan(z/z_R)$ ,  $(2q +$



1)  $\arctan(z/z_R)$  und  $(2q + 2) \arctan(z/z_R)$ , die Phasenunterschiede sind also genau  $\arctan(z/z_R)$ .

Im Vergleich mit dem Beispiel eines Wirbel in einem  $LG_0^0$ -Bündel (siehe Kapitel 1.3.2) sieht man, dass dies genau der dort erhaltene Winkel der Wirbellinie zur  $z$ -Achse ist. Diese Art der Zerlegung sollte auch mit Hermite-Gauß-Moden und Ince-Gauß-Moden als Basisfunktionen funktionieren, jedoch sind Laguerre-Moden an die Symmetrie des Problems besser angepasst.

## 1.5 Wirbel in Laguerre-Gauß-Bündeln - Messungen

### 1.5.1 Wirbel mit Ladung 1 in $LG_1^0$ -Bündeln - Experimentelle Ergebnisse

Um die rechnerischen Vorhersagen zu verifizieren, wurden auch Experimente mit Wirbeln in Laguerre-Gauß-Bündeln durchgeführt [37, 38]. Der dabei verwendete Aufbau ist wie in Kapitel 1.2 beschrieben: Ein aufgeweiteter HeNe-Laser beleuchtet ein Phasengitter, das ein  $LG$ -Bündel passender Ordnung mit einem zusätzlichen optischen Wirbel außerhalb des Zentrums erzeugt. Die Intensität des Bündels wird an verschiedenen Stellen auf der optischen Achse mit einer verschiebbaren CCD-Kamera aufgenommen und anschließend mit den gerechneten Intensitätsverteilungen verglichen. Die Übereinstimmung ist dabei so gut, dass auf Interferenzexperimente zur Messung der Phasenverteilung des Bündels verzichtet werden kann. Außerdem liegen die zu messenden Wirbel in den Laguerre-Gauß-Bündeln alle an Stellen niedriger Intensität und in der Nähe ehemaliger Versetzungsflächen, sodass sie mit einem Interferenzexperiment kaum zu identifizieren sind.

Da in diesem Kapitel das Hauptaugenmerk auf den experimentell ermittelten zweidimensionalen Intensitätsverteilungen liegt, in denen die Schnittpunkte der Wirbellinien mit den zur Ausbreitungsrichtung transversalen  $x$ - $y$ -Ebenen als Nullstellen der Intensität auftreten, überwiegt in diesem Kapitel die Beschreibung der Vorgänge in einer zweidimensionalen Sichtweise, in der sich „Wirbel“ im Hintergrundbündel „bewegen“. Gemeint ist damit natürlich immer, dass sich bei einer Änderung von  $z$  der Schnittpunkt der stationären Wirbellinie mit der  $x$ - $y$ -Ebene ändert.

### $LG_1^0$ -Bündel mit einem Wirbel innerhalb der Nulllinie des Hintergrundbündels ( $a = 0,6w_0$ )

Einen Ausschnitt aus der experimentell gemessenen Propagation eines kleinen tanh-Wirbels zeigt Abb. 1.42. Das verwendete  $LG_1^0$ -Bündel hat einen Strahlradius  $w_0 = 0,388$  mm (und damit eine Rayleigh-Reichweite von 75 cm), der Wirbel befindet sich bei  $z = 0$  gerade innerhalb der Versetzungslinie des Hintergrundbündels, also  $a = 0,6w_0$ . In der ersten Reihe (Bilder A bis D) sind die experimentell gemessenen Intensitätsver-

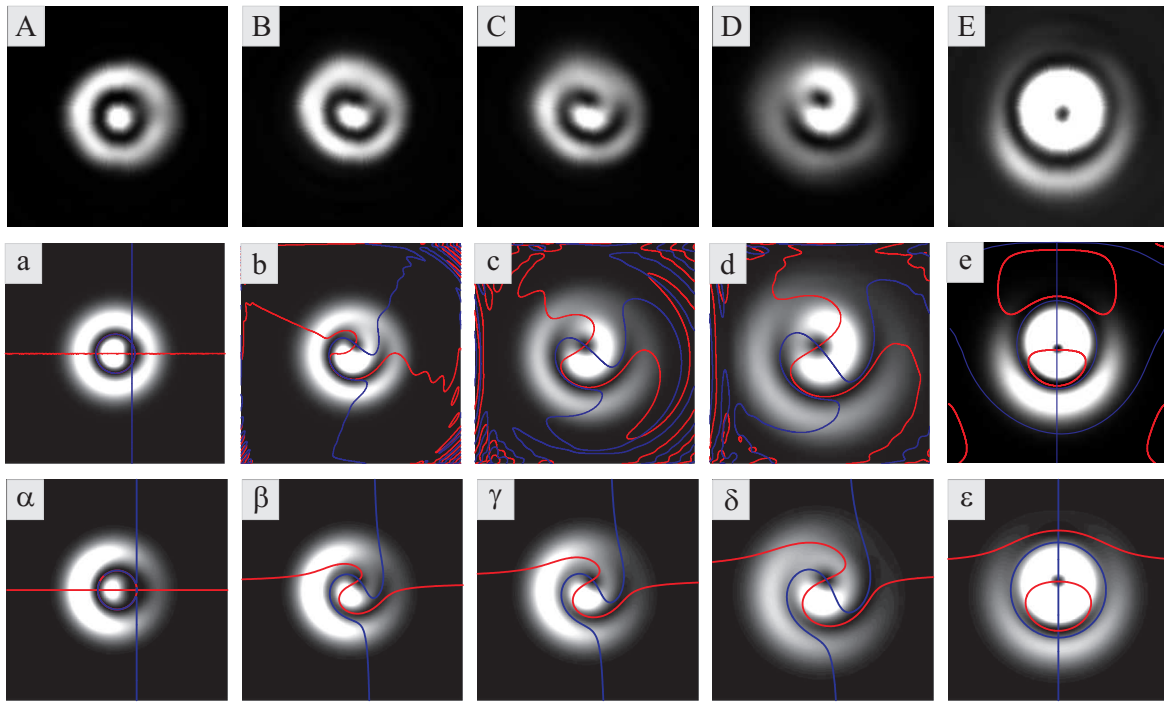


Abbildung 1.42: Experimentelle Aufnahmen eines kleinen tanh-Wirbels in einem  $LG_1^0$ -Bündel ( $w_0 = 0,388$ ). Der Wirbel ist zu Beginn gerade innerhalb der Versetzungslinie, also ungefähr  $a = 0,6w_0$ , und ist deswegen schlecht zu sehen. Die Entfernungen sind: 0 cm (Bild A), 30 cm (Bild B), 45 cm (Bild C) und 75 cm (Bild D). Bild E zeigt das Fernfeld des Bündels. In der zweiten und dritten Reihe sind zum Vergleich gerechnete Bilder eines kleinen tanh-Wirbels (a-e) und eines r-Wirbels ( $\alpha - \epsilon$ ) abgebildet.

teilungen als Graustufenplot (hell = hohe Intensität) aufgetragen, die Propagationsentfernung  $z$  ist dabei von links nach rechts 0 cm, 30 cm, 45 cm und 70 cm. Bild E zeigt das Fernfeld des Bündels, das in der Brennebene einer Linse aufgenommen wurde.

Die zweite und dritte Reihe zeigen für die gleichen Entfernungen gerechnete Intensitätsverteilungen eines kleinen tanh-Wirbels (a-e) und eines r-Wirbels ( $\alpha - \epsilon$ ). Den

gerechneten Bildern sind wieder die Nulllinien von Real- und Imaginärteil des Feldes überlagert, um die Position der Wirbel exakt bestimmen zu können.

Der Vergleich der gerechneten und gemessenen Bilder zeigt im Intensitätsbild keine deutlichen Unterschiede. Man kann sowohl an den gerechneten Bildern als auch an den gemessenen Aufnahmen sehen, dass der dunkle Versetzungsring des Hintergrundbündels in A, a, und  $\alpha$  zerstört wird, wodurch sich eine helle Spirale ausbildet. Schon bei einer Entfernung von 60 cm (Bilder C, c und  $\gamma$ ) taucht der Wirbel im zentralen Maximum des  $LG$ -Bündels auf, wo er auch im Fernfeld (E, e und  $\epsilon$ ) noch zu finden ist. Im Bild D (bzw. d und  $\delta$ ) ist der Wirbel im Zentrum schon deutlich ausgeprägt. Die im Kapitel 1.4.1 vorhergesagten zusätzlichen Wirbel erscheinen für diese Wahl von  $a$  erst für so große  $z$ , dass sie hier nicht mehr erfasst sind. Im Fernfeld des r-Wirbels (Bild  $\epsilon$ ) sind die zusätzlichen zwei Wirbel sichtbar, sie liegen zusammen mit dem ins Zentrum gewanderten ursprünglichen Wirbel auf der  $y$ -Achse. Im Fernfeld des tanh-Wirbels (Bild e) sind sogar vier Wirbel vorhanden, von denen aber alle außer einem in einem Bereich des Bündels auftreten, an dem die Intensität schon sehr niedrig ist. Auch hier liegen alle Wirbel auf einer Linie, der  $y$ -Achse.

### **$LG_1^0$ -Bündel mit einem Wirbel außerhalb der Versetzungsfläche ( $a = 1,2w_0$ )**

Abbildung 1.43 zeigt wie oben experimentelle und gerechnete Bilder eines kleinen tanh-Wirbels in einem  $LG_1^0$ -Bündel mit  $w_0 = 0,388$  mm und  $a = 1,2w_0$ . In Bild A ist der Wirbel zu Beginn auf dem hellen Ring. Nach 60 cm (Bild C) ist der Versetzungsring deutlich zerstört, in den gerechneten Bildern (c und  $\gamma$ ) liegen die Nulllinien von Real- und Imaginärteil nach 60 cm nur noch für den tanh-Wirbel (c) nahe beieinander, im Feld des r-Wirbels ( $\gamma$ ) dagegen ist die Nullstelle bereits überall deutlich aufgehoben. Aus dem zerstörten Versetzungsring haben sich neue Wirbel entwickelt, im Fall des r-Wirbels sind dies zwei, von denen einer bereits in der Nähe des Zentrums liegt (Bild  $\gamma$ ). Im Fall des tanh-Wirbels sind mehr als nur zwei neue Wirbel entstanden (die rote und blaue Linie umschlingen sich einige Male), von denen aber nur der am nächsten zum Zentrum gelegene deutlich ausgeprägt und kanonisch ist (Bild c und d). Bei kanonischen Wirbeln ist die Phasenänderung pro Grad Umlauf konstant und die Nulllinien von Real- und Imaginärteil schneiden sich daher unter  $90^\circ$ .

Die beiden neu entstandenen Wirbel in Bild c und  $\gamma$  haben entgegengesetzte Ladungen

+1 und -1, wie man an der unterschiedlichen Krümmungsrichtung der Nulllinien und ihrer Anzahl sieht (bei einem Wirbel mit Ladung +2 müssten sich je zwei blaue und rote Linien schneiden), wodurch die Gesamtladung des Bündels erhalten bleibt.

In Bild D (90 cm) ist bereits ein Ende des inneren dunklen Rings deutlich vom Rest

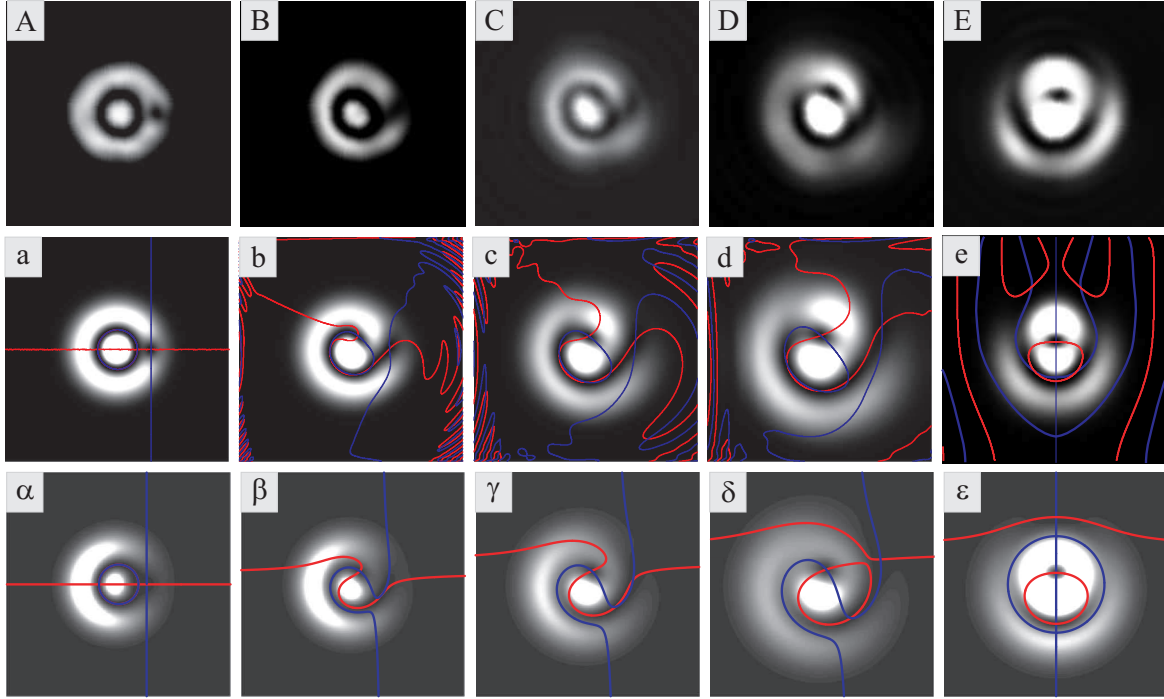


Abbildung 1.43: Experimentelle Aufnahmen eines kleinen  $\tanh$ -Wirbels in einem  $LG_1^0$ -Bündel ( $w_0 = 0,388$ ). Der Wirbel ist zu Beginn mit  $a = 1,2w_0$  auf dem hellen Ring und damit außerhalb des Versetzungsringes des Bündels. Die Entfernungen sind: 0 cm (Bild A), 30 cm (Bild B), 60 cm (Bild C) und 90 cm (Bild D). Bild E zeigt das Fernfeld des Bündels. In der zweiten und dritten Reihe sind zum Vergleich gerechnete Bilder eines kleinen  $\tanh$ -Wirbels (a-e) und eines r-Wirbels ( $\alpha - \epsilon$ ) abgebildet.

abgetrennt und der helle Ring hat sich in eine Spirale verwandelt, das Bild ähnelt deutlich den gerechneten Bildern für den r-Wirbel und den  $\tanh$ -Wirbel (c und  $\gamma$ ). Im Fall des  $\tanh$ -Wirbels sind hier alleine im Innenteil des Bündels in Bild d fünf Wirbel zweifelsfrei zu identifizieren, im Außenbereich können die vielen Überschneidungen der roten und blauen Linien auch ein Resultat der Numerik sein.

In Bild D (90 cm) ist der Wirbel nahe des Zentrums stark ausgeprägt. Typisch für ein Laguerre-Gauß-Bündel niedriger Ordnung ist auch, dass die dunkle Spirale der aufgelösten Versetzungsfläche nicht vollständig ausgebildet, sondern von helleren Stellen

unterbrochen ist (Bild D). In Bild E ist das Fernfeld des Strahls zu sehen, auch hier sind die Unterschiede im Intensitätsbild zu dem eines  $LG_1^0$ -Bündels mit einem r-Wirbel oder einem tanh-Wirbel gering. Dieses Fernfeld ist im Vergleich zu Abb. 1.42 (e bis  $\epsilon$ ) unsymmetrischer, was auf die stärkere Unsymmetrie des Feldes bei  $z = 0$  zurückzuführen ist.

### 1.5.2 Wirbel mit Ladung $m = 1$ in $LG$ -Bündeln höherer radialer Ordnung - Experimentelle Ergebnisse

Ebenso wie in den gerechneten Fällen in Kapitel 1.4.2 wurden auch Experimente mit Laguerre-Gauß-Bündeln höherer Ordnung durchgeführt [38]. Der verwendete Aufbau war derselbe wie in Kapitel 1.5.1, es wurden nur Gitter zur Erzeugung von höheren Laguerre-Moden verwendet.

Abb. 1.44 zeigt die Ergebnisse für ein Laguerre-Gauß-Bündel der Ordnung  $p = 2$ . Das

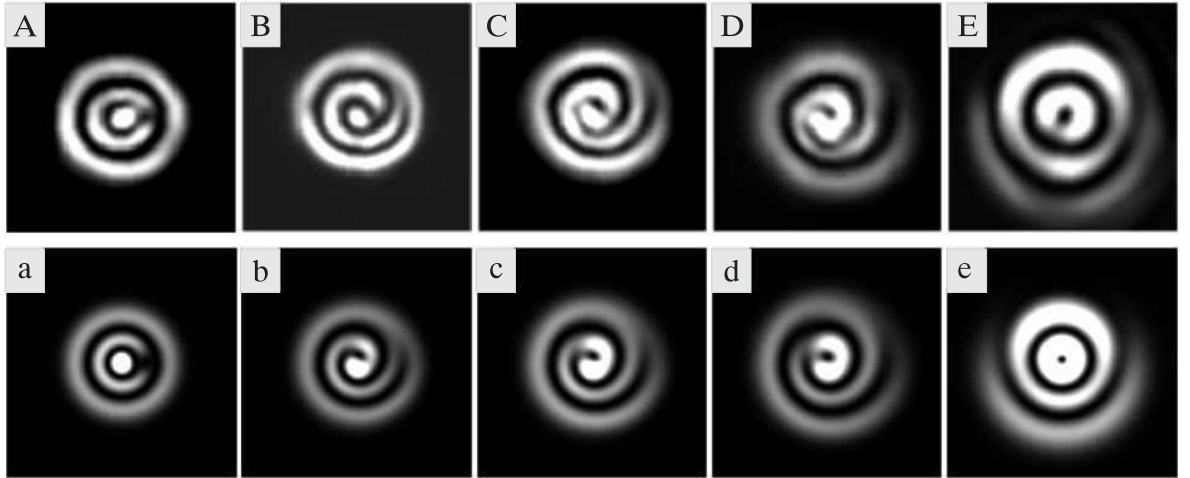


Abbildung 1.44: Experimentelle (Bild A-E) und gerechnete (Bild a-e) Aufnahmen eines tanh-Wirbels in einem  $LG_2^0$ -Bündel mit  $w_0 = 0,343$  mm, der sich zu Beginn auf dem ersten hellen Ring des Bündels befindet (das entspricht  $a = 0,9w_0$ ). Die Bilder sind bei den Entfernungen 0 cm (A), 25 cm (B), 35 cm (C), 45 cm (D) und dem Fernfeld (E).

Bündel hatte einen Strahlradius von  $w_0 = 0,343$  mm, der tanh-Wirbel befand sich bei  $z = 0$  auf dem ersten hellen Ring des Hintergrundbündels, das entspricht ungefähr  $a = 0,9w_0$ . Die Bilder A bis E zeigen die experimentell gemessenen Intensitätsvertei-

lungen bei  $z = 0$  cm (A), 25 cm (B), 35 cm (C), 45 cm (D) und das Fernfeld des Bündels, das in der Brennebene einer Linse gemessen wurde (E). Zum Vergleich zeigen die Bilder 1.44 (a) bis (e) berechnete Intensitätsverteilungen.

Die während der Propagation des Bündels ablaufende Entwicklung ist analog zum Fall  $p = 1$ : Durch den eingesetzten Wirbel werden die beiden entarteten Versetzungsringe des Hintergrundbündels zerstört (Bild B und b), im Zentrum des Bündels bildet sich ein deutlicher Wirbel aus (Bild C und D bzw. c und d), der dort auch im Fernfeld (Bild E und e) noch vorhanden ist.

Genau wie in den Berechnungen für den Fall eines r-Wirbels vorhergesagt (siehe 1.4.2) läuft also eine Trajektorien der Wirbel zum Zentrum des Bündels. Erklärt werden kann dies wieder mit dem in 1.4.4 beschriebenen Modell.

Auch für ein  $LG_7^0$ -Bündel wie in Abb. 1.45 erhält man diese Ergebnisse. Das Bündel hat einen Strahlradius  $w_0 = 0,48$  mm, eine Rayleigh-Reichweite von  $z_R = 114$  cm und der Wirbel befand sich bei  $z = 0$  auf dem zweiten hellen Ring ( $a = 0,9w_0$ ). Die Ent-

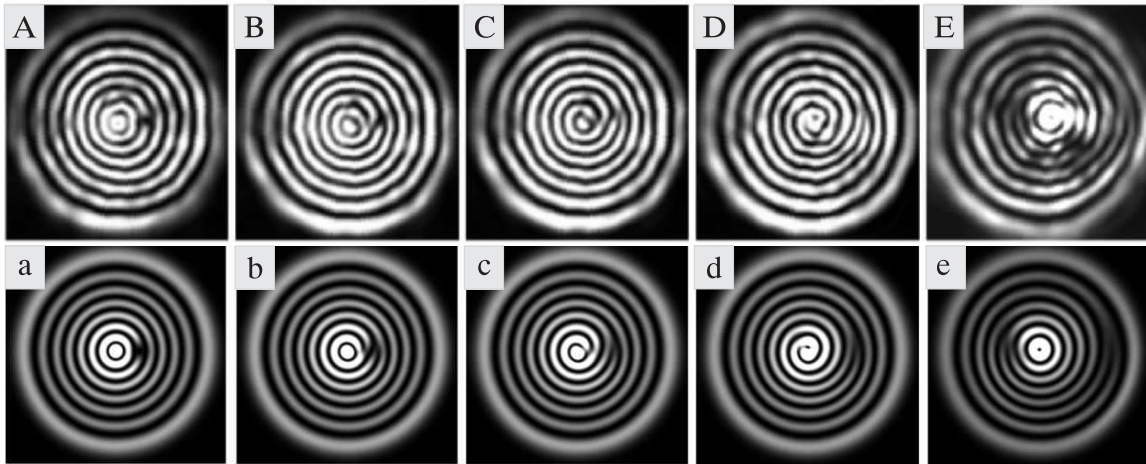


Abbildung 1.45: Experimentelle (Bild A-E) und gerechnete (Bild a-e) Aufnahmen eines tanh-Wirbels in einem  $LG_7^0$ -Bündel mit  $w_0 = 0,48$  mm,  $z_R = 114$  cm. Der Wirbel befindet sich bei  $z = 0$  auf dem ersten hellen Ring, das entspricht ungefähr  $a = 0,9w_0$ . Hier bildet sich durch die Auflösung der 7 Versetzungsringe des Bündels ein spiralförmiges Intensitätsmuster, dessen Enden während der Propagation des Bündels wandern. Im Zentrum des Bündels entsteht ein neuer Wirbel. Die Entfernungen sind hier (von links nach rechts): 0 cm, 7 cm, 15 cm, 30 cm und 70 cm.

fernungen sind hier: 0 cm (A), 7 cm (B), 15 cm (C), 30 cm (D) und 70 cm (E). Die Bildgröße ist jeweils ungefähr  $8w_0$ , also ca. 3,85 mm. Auch werden die Versetzungsrin-

ge des Hintergrundbündels beginnend an der Stelle des Wirbels aufgelöst (Bild B und b), wodurch ein spiralförmiges Intensitätsmuster entsteht (C und D bzw. c und d), das abwechselnd aus dunklen und hellen Ringen besteht. Ein Ende dieser Spirale „wandert“ immer zuerst in Richtung des Zentrums, das andere Ende zur Strahlperipherie, wobei sich beide Enden auf einer Linie „bewegen“. Sobald das innere Ende der dunklen Spirale das zentrale Maximum erreicht, wird dort ein Wirbel erkennbar (C). Das innere Ende wandert nun weiter durch das Zentrum hindurch in Richtung der anderen Seite des Strahls, wobei die Spirale wieder an Windungszahl abnimmt (Bild E und e).

Das Hintergrundbündel hat im Fall  $p = 7$  bereits so viele Ringe, dass im Innenbereich eine gute Übereinstimmung mit den bei der Propagation von Bessel-Bündeln mit Wirbel auftretenden Intensitätsmustern vorliegt (siehe [20]).

### 1.5.3 Zusammenfassung

Man kann also die auf dem Gebiet der optischen Wirbel in Laguerre-Gauß-Hintergrundbündeln gewonnenen Erkenntnisse folgendermaßen zusammenfassen:

$LG_p^0$ -Bündel besitzen  $p$  zu Flächen entartete Versetzungen. Diese sind wegen ihrer Entartung instabil und zerfallen bei Störungen des Bündels in generische, nichtentartete Wirbellinien. Dadurch, dass die Laguerre-Polynome  $L_p^0$  stets vom Grad  $2p$  sind, kann die Anzahl der Schnitte dieser Wirbellinien mit der  $x$ - $y$ -Ebene für ein festes  $z$  höchstens  $2p$  sein.

Befindet sich ein zusätzlicher Wirbel in einem Laguerre-Gauß-Bündel, so verursacht dieser durch seine Phase und Kernfunktion eine Störung des Hintergrundbündels, die genau diese Entfaltung der entarteten Versetzungsflächen bewirkt. Je nachdem, ob der zusätzliche Wirbel ein r-Wirbel (mit einem Polynom vom Grad 1 als Kernfunktion) oder ein tanh- oder Punktwirbel (mit transzendenten Kernfunktionen, die durch unendliche Reihen mit unendlich vielen Nullstellen dargestellt werden) ist, verursacht dieser Wirbel selbst eine oder mehrere Nullstellen des Feldes an jeder Stelle  $z$ .

Insgesamt hat man also für einen r-Wirbel höchstens  $2p + 1$ , für Punkt- oder tanh-Wirbel unbegrenzt viele Nullstellen der Feldverteilung in den transversalen  $x$ - $y$ -Ebenen. Da die Wirbellinien keine parallelen Geraden zur  $z$ -Achse sind, ändern diese Nullstellen bei einer Änderung von  $z$  ihre Lage in den transversalen Ebenen, was den Eindruck erweckt, als würden sich Objekte in einer Flüssigkeit bewegen.

Die Bewegung dieser Objekte lässt sich auch im Fall der  $LG$ -Bündel (der sich von dem

ursprünglichen Modell dadurch unterscheidet, dass das Hintergrundbündel nicht hinreichend glatt und durch den Wirbel nachhaltig gestört ist) durch eine Gleichung beschreiben, die formal mit der Gleichung übereinstimmt, die die Bewegung von tatsächlichen Wirbeln in Flüssigkeiten angeben. Das Modell erklärt die Bewegung der Nullstellen durch die Wirkung der Gradienten von Phase und Intensität des Hintergrundbündels. Eine der Wirbellinien, und zwar die, die in der Strahlteile dem Zentrum am nächsten ist und die gleiche topologische Ladung hat wie der eingesetzte Wirbel, verläuft asymptotisch zur  $z$ -Achse, sodass im Fernfeld des Bündels (für  $z \rightarrow \infty$ ) eine Nullstelle im Zentrum des Bündels zu finden ist, was in einem normalen Gauß-Hintergrundbündel nie der Fall ist und durch das ursprüngliche fluiddynamische Modell nicht erklärbar scheint. Es wird jedoch durch die Zerstörung der Versetzungsflächen und durch den eingesetzten Wirbel der Phasen- und Intensitätsgradient des  $LG$ -Hintergrundbündels so verändert, dass die Nullstelle des Feldes durch die nun gedrehten Gradienten zum Zentrum des Bündels „getrieben“ wird.

Die restlichen Wirbellinien haben annähernd (für etwas größere  $z$ ) dieselbe Form wie eine einzelne Wirbellinie in einem Gauß-Hintergrundbündel: in absoluten  $x$ - $y$ -Koordinaten sind sie Geraden im Raum mit einer Steigung, die vom Abstand der Linie vom Zentrum des Bündels abhängt, in relativen (auf den  $z$ -abhängigen Strahldurchmesser  $w(z)$  normierten) Koordinaten verlaufen sie so, dass ihre senkrechten Projektionen Kreisbögen ergeben. Der ungewöhnliche Verlauf der Wirbellinien und damit die  $z$ -abhängige Änderung der Intensitätsverteilung in transversalen Ebenen kann auch anders erklärt werden: Ein  $LG_p^0$ -Bündel mit einem zusätzlichen Wirbel außerhalb des Zentrums lässt sich als eine Überlagerung von drei verschiedenen  $LG$ -Moden mit unterschiedlichen Gouy-Phasentermen schreiben, sodass sich eine  $z$ -abhängige Phasendifferenz zwischen den drei Summanden ergibt. Diese ändert natürlich das entstehende Interferenzmuster und damit die Lage der Wirbel in den  $x$ - $y$ -Ebenen.

Die mit Wirbeln mit etwas kleinerem Wirbelkern durchgeführten Experimente bestätigen diese Berechnungen, hier entwickelt sich die im Experiment beobachtbare Intensitätsverteilung durch die Zerstörung der konzentrischen Nulllinien des  $LG$ -Bündels für wachsende  $z$  zu einer Spirale, in deren Mitte ein Wirbel „wandert“.

Es ist zu erwarten, dass die gemachten Beobachtungen und Berechnungen in analoger Weise (zerstörte Versetzungsflächen, neu entstehende Wirbellinien) auch für andere Familien von Gauß-Moden (Ince-Gauß, Hermite-Gauß) gelten und sich im Limes  $p \rightarrow \infty$  auf Bessel-Bündel übertragen lassen.



# Kapitel 2

## Singularitäten der Polarisation

### 2.1 Grundlagen

#### 2.1.1 Polarisation des Lichts

Licht ist ein elektromagnetisches Wechselfeld, bestehend aus dem elektrischen Feldvektor  $\mathbf{E}$  und dem darauf senkrechten magnetischen Feldvektor  $\mathbf{B}$ . Beide sind in isotropen Medien senkrecht zum  $\mathbf{k}$ -Vektor und oszillieren mit der gleichen Frequenz und Phase, deshalb kann die Betrachtung auf entweder  $\mathbf{E}$  oder  $\mathbf{B}$  beschränkt werden. Traditionell wird nur der elektrische Anteil des Feldes betrachtet. Ist die Richtung der Oszillation des elektrischen Feldvektors zufällig, so spricht man von unpolarisiertem Licht (siehe Abb. 2.1 (a)). Unpolarisiertes Licht ist zugleich inkohärent, da zeitlich zufällig verteilte Richtungen des  $\mathbf{E}$ -Vektors nur von unterschiedlichen Wellenzügen kommen können.

Der einfachste Fall von polarisiertem Licht liegt vor, wenn die Schwingungsebene des elektrischen Feldvektors konstant ist, das Licht ist dann linear polarisiert (siehe Abb. 2.1 (c)) und kann, im Fall einer linear in  $x$ -Richtung polarisierten ebenen Welle, dargestellt werden als [29]:

$$\mathbf{E} = (E_x, 0) = (A_x e^{i(\omega t - kz + \phi_x)}, 0). \quad (2.1)$$

Analog ist eine in  $y$ -Richtung polarisierte ebene Welle  $\mathbf{E} = (0, A_y e^{i(\omega t - kz + \phi_y)})$ . Hierbei seien  $A_x$  und  $A_y$  reell und jede zusätzliche Phase stecke in  $\phi_x$  bzw.  $\phi_y$ . Der gemeinsame Phasenfaktor  $e^{i(-kz)}$  wird meist vernachlässigt, er beschreibt die Ausbreitung der Welle in  $z$ -Richtung.

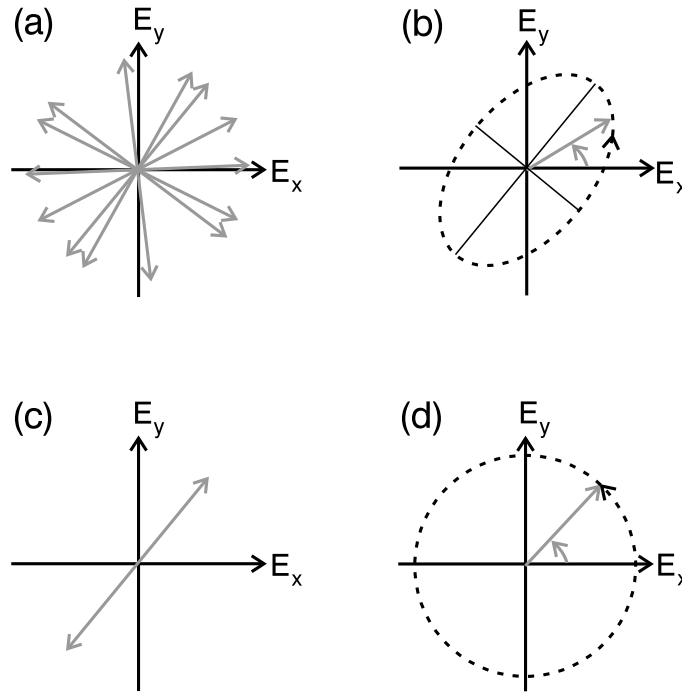


Abbildung 2.1: Die Richtung des  $\mathbf{E}$ -Feld-Vektors von Licht ist zufällig bei unpolarisiertem Licht (a), bei polarisiertem Licht beschreibt die Spitze des  $\mathbf{E}$ -Feld-Vektors im Allgemeinen eine Ellipse (b). Spezialfälle: lineare Polarisation (c), die Spitze des  $\mathbf{E}$ -Vektor beschreibt eine Gerade und zirkulare Polarisation (d), die Spitze des  $\mathbf{E}$ -Vektor beschreibt einen Kreis.

Ist im Allgemeinen das elektrische Feld  $\mathbf{E} = (E_x, E_y) = e^{i(\omega t - kz)}(A_x e^{i(\phi_x)}, A_y e^{i(\phi_y)})$  und die gegenseitige Phasendifferenz  $\Delta = \phi_y - \phi_x = 0$  oder  $\pi$ , so erhält man durch vektorielle Addition von  $E_x$  und  $E_y$  je nach Verhältnis der Amplituden jede beliebige Richtung der linearen Polarisation.

Ist  $\Delta \neq 0$ , jedoch weiterhin zeitlich konstant, so beschreibt die Spitze des  $\mathbf{E}$ -Vektors im allgemeinen Fall eine Ellipse, man spricht von elliptisch polarisiertem Licht (siehe Abb. 2.1 (b)). Diese Ellipse wird durch drei Parameter charakterisiert [29]: durch den Azimutwinkel  $\alpha$ , den die große Halbachse mit der  $x$ -Achse einschließt, durch ihre Elliptizität  $\omega$  (nicht zu verwechseln mit der Kreisfrequenz  $\omega$  der Schwingung des  $\mathbf{E}$ -Vektors) und ihrer Händigkeit, das ist der Drehsinn, mit dem der elektrische Feldvektor die Ellipse durchläuft (siehe Abb. 2.2 (b)).

Ist die Phasenverschiebung  $\Delta$  zwischen  $E_x$  und  $E_y$  genau  $\pi/2$  und die Amplituden  $A_x$  und  $A_y$  gleich, so liegt ein Sonderfall der elliptischen Polarisation vor: die Spitze des Vektors des elektrischen Feldes beschreibt nun einen Kreis, man spricht von zirkularer Polarisation und unterscheidet je nach Drehrichtung zwischen rechts- bzw. linkszirku-

lar polarisiertem Licht.

Verwendet man die doppelte Elliptizität  $2\omega$  und den doppelten Azimuthwinkel  $2\alpha$  als Winkel in sphärischen Polarkoordinaten ( $r = 1, 2\alpha, 2\omega$ ), so erhält man für jeden möglichen Polarisationszustand des Lichts einen eindeutigen Punkt auf der Oberfläche einer Kugel, der sogenannten Poincaré-Sphäre (siehe Abb. 2.2 (a)) [29]. An den Polen der

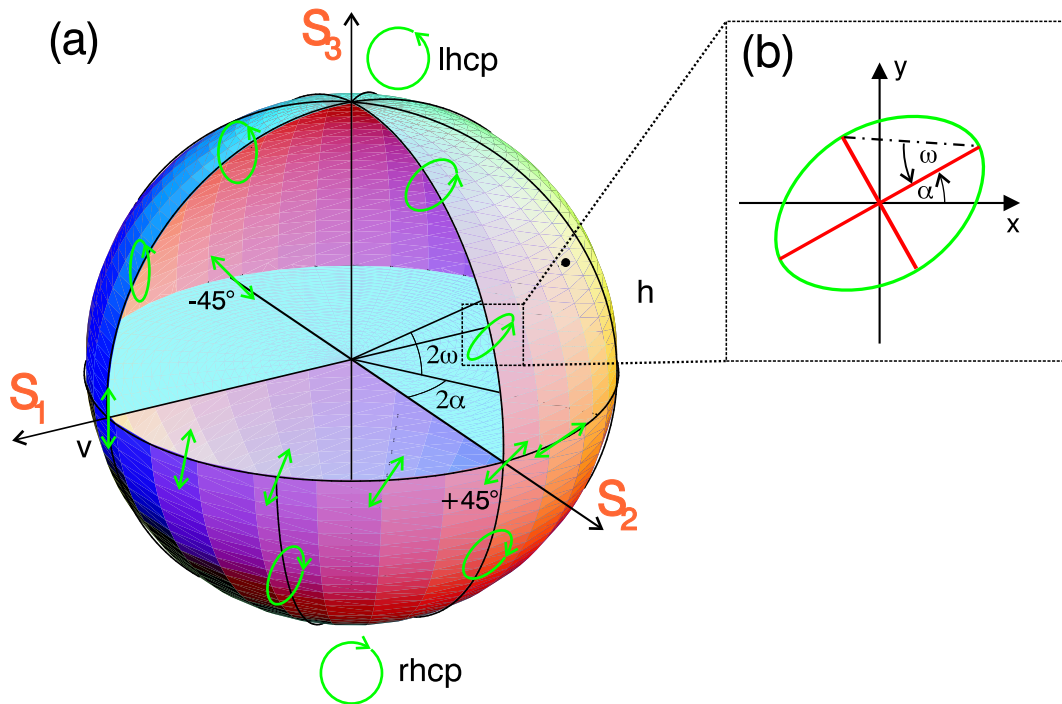


Abbildung 2.2: Die Poincaré-Sphäre. Verwendet man Elliptizität und Azimuthwinkel als sphärische Polarkoordinaten ( $r = 1, 2\alpha, 2\omega$ ), so entspricht jeder Polarisationszustand einem Punkt auf der Oberfläche der entstehenden Kugel (a). Das Licht ist an den Polen rein zirkular polarisiert (linkshändig (lhcp) bzw. rechtshändig (rhcp)), auf dem Äquator rein linear polarisiert. (b) zeigt die Polarisationsellipse.

Poincaré-Sphäre ist das Licht rein zirkular polarisiert, am Nordpol links zirkular (lhcp = left handed circular polarized), am Südpol rechts zirkular. Am Äquator ist die Elliptizität  $\omega$  null, dort liegt rein lineare Polarisation vor, deren Richtung sich allerdings über den Kugelumfang um  $\pi$  ändert. Alle anderen Punkte der Kugeloberfläche sind elliptisch polarisiert, wobei die gesamte südliche Hemisphäre rechtshändige Polarisation, die nördliche Hemisphäre linkshändige Polarisation repräsentieren. Die Längengrade sind Orte gleichen Azimuthwinkels, die Breitenkreise sind Orte gleicher Elliptizität.

An der Lage von zirkularer bzw. linearer Polarisation auf der Poincaré-Sphäre erkennt man bereits den singulären Charakter dieser Zustände (siehe Kapitel 2.1.4).

Die Poincaré-Sphäre kann dazu dienen, die Wirkung von phasenverzögernden optischen Elementen zu veranschaulichen. Das Element habe den schnellen Eigenvektor  $\mathbf{v}_1$  und den langsamen Eigenvektor  $\mathbf{v}_2$ . Das sind Vektoren vom Ursprung der Sphäre zu den zwei Polarisationszuständen auf der Oberfläche der Kugel, die durch das Element nicht verändert werden. Verzögert das Element nun die Phase um den Winkel  $\gamma$ , so wird dies durch eine Rotation der Sphäre im Uhrzeigersinn um den Winkel  $\gamma$  mit der Achse  $\mathbf{v}_1$  repräsentiert. Als Beispiel betrachte man ein  $\lambda/4$ -Plättchen mit der optischen Achse in vertikaler Richtung. Der schnelle Eigenvektor des Plättchens ist dann der Zustand vertikaler linearer Polarisation, die Rotation der Sphäre erfolgt also um die  $S_1$ -Achse. Der Rotationswinkel entspricht der Phasenverzögerung zwischen schnellem und langsamen Eigenvektor des Plättchens, also  $\gamma = \pi/2$ . Die Drehung um diesen Winkel um die  $S_1$ -Achse überführt  $S_3$  in  $S_2$  und  $S_2$  in  $-S_3$ , verwandelt also linkshändig zirkular polarisiertes Licht in linear unter  $45^\circ$  polarisiertes und dieses in rechtshändig zirkulares. Dies ist genau die Wirkung eines  $\lambda/4$ -Plättchens.

### 2.1.2 Messung von Polarisation: Stokes-Parameter

Eine andere Möglichkeit um den Polarisationszustand des Lichts darzustellen ist der Stokes-Vektor  $\mathbf{S} = (S_0, S_1, S_2, S_3)$  (siehe auch [29]). Hierbei ist  $S_0$  die Gesamtintensität, und die Komponenten  $S_1, S_2$  und  $S_3$  spannen als kartesisches Koordinatensystem die Poincaré-Sphäre auf (siehe Abb. 2.2 (a)). Ist z. B. in normierter Darstellung  $\mathbf{S} = (1, 1, 0, 0)$ , so ist das Licht vertikal linear polarisiert, für  $\mathbf{S} = (1, 0, 0, -1)$  liegt rechtshändig zirkular polarisiertes Licht vor.

Der Stokes-Vektor  $\mathbf{S} = (S_0, S_1, S_2, S_3)$  ist folgendermassen definiert [29]:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ I_{0^\circ} - I_{90^\circ} \\ I_{45^\circ} - I_{135^\circ} \\ I_{\text{rhcp}} - I_{\text{lhcp}} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Hierbei ist  $I$  die Gesamtintensität und  $I_{0^\circ}$  die Intensität der unter  $0^\circ$  polarisierten Anteile des Feldes,  $I_{90^\circ}$  die Intensität der unter  $90^\circ$  polarisierten Anteile usw.  $I_{\text{rhcp}}$  und  $I_{\text{lhcp}}$  sind die Intensitäten der links- bzw. rechtshändig zirkular polarisierten Komponenten des Feldes.

Dies ergibt sofort eine Anweisung zur Messung der Stokes-Parameter: Man messe die

Intensitäten des Feldes mit sieben Einzelmessungen hinter einem linearen Polarisator unter den entsprechenden Winkeln  $0^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $45^\circ$  und  $135^\circ$  bzw. hinter einer Kombination aus  $\lambda/4$ -Plättchen (Achse auf  $0^\circ$  ausgerichtet) und linearem Polarisator unter  $45^\circ$  und  $135^\circ$ . Durch Bildung der Differenzen erhält man die Stokes-Parameter.

Natürlich kann man aus den Komponenten des Stokes-Vektors die Elliptizität, die Händigkeit und den Azimutwinkel der Polarisationsellipse bestimmen und daher die ortsabhängigen Polarisationsellipsen einer gemessenen Intensitätsverteilung berechnen. Dazu sei das elektrische Feld (ohne den zeit- und  $z$ -abhängigen Anteil  $e^{i(\omega t - kz)}$ ):

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_x e^{i\phi_x} \\ A_y e^{i\phi_y} \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

Dann gelten folgende Identitäten [29]:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ I_{0^\circ} - I_{90^\circ} \\ I_{45^\circ} - I_{135^\circ} \\ I_{\text{rhcp}} - I_{\text{lhcp}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_x^2 + A_y^2 \\ A_x^2 - A_y^2 \\ 2A_x A_y \cos(\Delta) \\ 2A_x A_y \sin(\Delta) \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

wobei hier  $\Delta = \phi_y - \phi_x$  substituiert wurde. Zum Nachweis dieser Identitäten bedarf es längerer Rechnungen, die hier nicht ausgeführt werden, aber in [29] zu finden sind.

Aus den Stokes-Parametern erhält man nach [29] den Azimutwinkel  $\alpha$  der Polarisationsellipse (Abb. 2.2 (b)) zu:

$$\tan(2\alpha) = \frac{2A_x A_y \cos(\Delta)}{A_x^2 - A_y^2}, \quad (2.5)$$

wieder mit  $\Delta = \phi_y - \phi_x$ .

Die Elliptizität  $\omega$  der Polarisationsellipse ist:

$$\epsilon := \sin(2\omega) = \frac{2A_x A_y \sin(\Delta)}{A_x^2 + A_y^2}, \quad (2.6)$$

wobei hier noch  $\epsilon$  als zwar weniger anschauliches, dafür aber einfacheres Maß für die Elliptizität definiert wurde. Die Händigkeit des Lichts ist gegeben durch das Vorzeichen von  $\tan(\omega)$  und je nach Definition rechtshändig für  $\tan(\omega) > 0$  und linkshändig für  $\tan(\omega) < 0$ . Mit Gleichung 2.4 erhält man schließlich eine Vorschrift, um  $\alpha$  und  $\epsilon$  bzw.  $\omega$  aus den gemessenen Stokes-Parametern  $S_0, S_1, S_2$  und  $S_3$  zu berechnen:

$$\tan(2\alpha) = \frac{S_2}{S_1} \quad (2.7)$$

$$\epsilon = \frac{S_3}{S_0}. \quad (2.8)$$

### 2.1.3 Doppelbrechung

Die Entdeckung der Doppelbrechung spielte eine Schlüsselrolle bei der Entstehung des Wellenbildes in der Optik und in der Erforschung der Polarisation des Lichts. Entdeckt wurde die Doppelbrechung erstmals 1669 von Erasmus Bartholin, einem dänischem Wissenschaftler, an „isländischem Kristall“ (Kalzit). Die Publikation der Ergebnisse unter dem Titel „Versuche mit dem doppeltbrechenden isländischen Kristall, die zur Entdeckung einer wunderbaren und außergewöhnlichen Brechung führt“ war die erste experimentelle Publikation in Dänemark.

Als Doppelbrechung bezeichnet man das Phänomen, dass Lichtstrahlen je nach ihrer Polarisation beim Durchgang durch optisch anisotrope Medien in zwei Strahlen aufgespalten werden, deren einer dem Snelliusschen Brechungsgesetz gehorcht (ordentlicher Strahl), deren anderer jedoch ein abweichendes Verhalten zeigt und unter einem anderen Winkel gebrochen wird (außerordentlicher Strahl), sodass hinter dem doppeltbrechenden Material zweifache Bilder auftreten können [30, 31].

Doppelbrechung tritt auf in elektrisch anisotropen Medien, in denen die dielektrische Verschiebung  $\mathbf{D}$  von der Richtung des elektrischen Feldes  $\mathbf{E}$  abhängt und nicht wie in optisch isotropen Medien von ihr unabhängig ist. Dies sind z. B. alle Kristalle, die nicht dem kubischen System angehören, aber auch unter Spannung gesetzte isotrope Materialien (Spannungsdoppelbrechung). In solchen anisotropen Materialien ist  $\mathbf{D}$  nicht länger parallel zu  $\mathbf{E}$ , sondern über den dielektrischen Tensor  $\boldsymbol{\epsilon}$  durch  $\mathbf{D} = \boldsymbol{\epsilon}\mathbf{E}$  mit dem elektrischen Feld verknüpft. Dabei ist  $\boldsymbol{\epsilon}$  eine symmetrische 3x3-Matrix, bestehend aus den Dielektrizitätskonstanten  $\epsilon_{kl}$ , die für ein isotropes Medium alle gleich sind. In seinem Hauptachsensystem ist der Tensor symmetrisch mit den Diagonaleinträgen  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  und  $\epsilon_z$ , den sogenannten Hauptdielektrizitätskonstanten. Diese Hauptdielektrizitätskonstanten sind die Quadrate der drei Hauptbrechungsindizes  $n_x$ ,  $n_y$  und  $n_z$ .

Die Lichtausbreitung im Inneren des Materials ist polarisationsabhängig mit zwei erlaubten Polarisationsrichtungen, die zueinander orthogonal sind. Für diese beiden Polarisationsrichtungen gelten unterschiedliche Brechungsindizes. Nur entlang der sogenannten optischen Achsen, den Achsen der Isotropie, ist die Lichtausbreitung von der Polarisation unabhängig.

Zur Veranschaulichung der Materialeigenschaften und als geometrisches Hilfsmittel kann man ein Ellipsoid konstruieren, dessen drei Hauptachsen den Hauptbrechungsindizes proportional sind [30, 31]. Dies ist das sogenannte Indexellipsoid (Abb. 2.3).

Mithilfe des Indexellipsoids kann man die erlaubten Schwingungsrichtungen des  $\mathbf{D}$ -

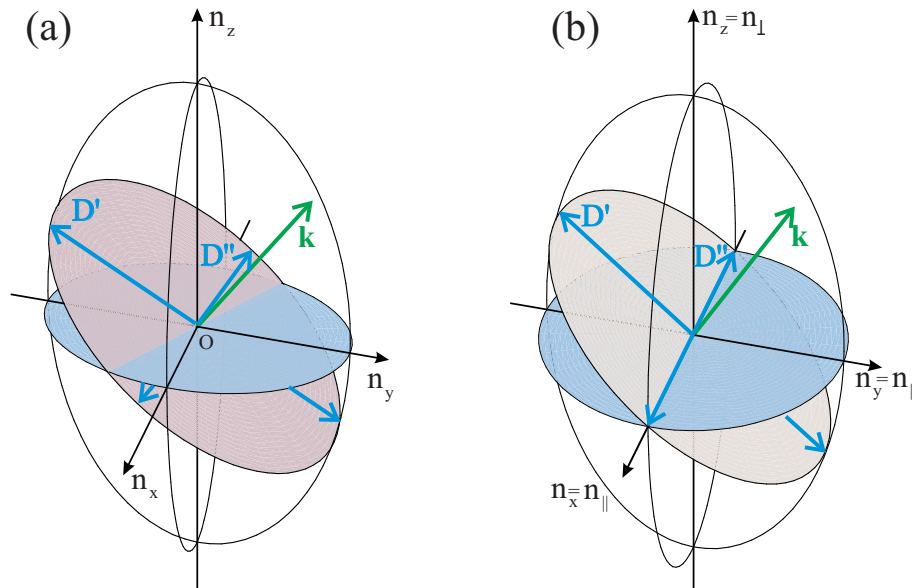


Abbildung 2.3: Das Indexellipsoid. Die Längen der Hauptachsen sind den drei Hauptbrechungsindizes  $n_x, n_y, n_z$  proportional. Der  $\mathbf{k}$ -Vektor der einfallenden Welle definiert eine zu ihm senkrechte Schnittellipse, deren Hauptachsen die beiden erlaubten Schwingungsrichtungen des  $\mathbf{D}$ -Vektors angeben. (a) zeigt das Indexellipsoid für einen zweiachsig doppelbrechenden Kristall, (b) das für einen einachsig doppelbrechenden Kristall. Im letzteren Fall wird das Ellipsoid ein Rotationsellipsoid.

Vektors bestimmen: der  $\mathbf{k}$ -Vektor der einfallenden Welle definiert eine zu ihm senkrechte Schnitt-Ellipse mit dem Ellipsoid (siehe Abb. 2.3). Die Hauptachsen dieser Ellipse geben die beiden Schwingungsrichtungen  $\mathbf{D}'$  und  $\mathbf{D}''$  an. Die Längen der Hauptachsen sind die für diese beiden Strahlen geltenden Brechungsindizes.

Man kann drei Fälle unterscheiden, je nachdem, wieviele der  $n_i$  verschieden sind [30, 31]:

1. Optisch isotrope Medien: Alle drei Brechungsindizes sind gleich, das Indexellipsoid wird zu einer Kugel und die optischen Eigenschaften sind richtungsunabhängig. In diese Kategorie fallen Flüssigkeiten, Gläser und Kristalle, die kubische Symmetrie aufweisen.
2. Optisch einachsige Kristalle: Zwei der Brechungsindizes sind gleich, es gilt also  $n_x = n_y =: n_{\parallel}$  und  $n_z =: n_{\perp}$ . Das Indexellipsoid wird zu einem Rotationsellipsoid (Abb. 2.3 (b)). Es kann eine optische Achse eingeführt werden, die mit der Rotationsachse des Ellipsoids und der Hauptsymmetrieachse des Kristalls

zusammenfällt und längs derer die Lichtausbreitung polarisationsunabhängig ist. In diese Kategorie fallen Kristalle mit hexagonaler, tetragonaler und rhomboedrischer Symmetrie. Man unterscheidet zwischen negativ und positiv einachsigen doppelbrechenden Kristallen, je nachdem, ob  $n_{\parallel}$  kleiner oder größer als  $n_{\perp}$  ist.

3. Optisch zweiachsige Kristalle: Alle Brechungsindizes sind verschieden. Das Indexellipsoid (Abb. 2.3 (a)) hat keine Symmetrieachse. Hier gibt es zwei optische Achsen, längs derer die Lichtausbreitung polarisationsunabhängig ist. Sie fallen zusammen mit den Normalen der zwei möglichen kreisförmigen Schnitte des Indexellipsoids.

Zur Veranschaulichung der Lichtausbreitung in optisch anisotropen Medien bedient man sich der sogenannten Strahlenflächen, die man wie folgt berechnen kann:

Die Maxwell-Gleichungen für eine ebene Welle  $\mathbf{E}_0 \exp[i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})]$  im Kristall liefern eine Gleichung für das elektrische Feld im Medium:

$$\mathbf{e}_k \times \mathbf{e}_k \times \mathbf{E}_0 + \frac{1}{n^2} \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{E}_0 = 0 \quad (2.9)$$

mit dem Einheitsvektor  $\mathbf{e}_k$  in  $\mathbf{k}$ -Richtung. Diese Gleichung lässt sich in eine Matrixgleichung der Form  $\mathbf{M} \cdot \mathbf{E}_0 = 0$  umschreiben und ist nur dann lösbar, wenn die Determinante von  $\mathbf{M}$  null wird. Diese Bedingung liefert eine Gleichung 2. Grades in  $n^2$ . Man erhält also zwei positive Werte für  $n$  für die beiden möglichen Polarisationsrichtungen. Damit kann man mit Gleichung (2.9) die Richtung von  $\mathbf{E}_0$  und daraus mit  $\mathbf{D} = \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{E}$  die Richtung von  $\mathbf{D}$  bestimmen.

Trägt man die so gewonnenen Brechungsindizes als Funktion der Ausbreitungsrichtung  $\mathbf{e}_k$  auf, erhält man die sogenannte Strahlenfläche des Mediums, eine im allgemeinen mehrschalige Fläche. Abb. 2.4 (a) zeigt die Strahlenfläche eines negativ einachsigen doppelbrechenden Kristalls, der Unterschied in den Brechungsindizes ( $n_o = 1, n_e = 1,8$ ) ist hier der Deutlichkeit halber übertrieben. Die Fläche besteht aus einem Rotationsellipsoid mit den Halbachsen  $n_o$  und  $n_e$ , das eine Kugel mit dem Radius  $n_o$  enthält. Für einen positiv einachsigen Kristall würde die Kugel das Ellipsoid umschließen,  $n_e$  wäre hier kleiner als  $n_o$ . Durch die Berührungspunkte von Kugel und Ellipsoid verläuft die optische Achse, die einzige Ausbreitungsrichtung im Kristall, in der für ordentlichen und außerordentlichen Strahl derselbe Brechungsindex gilt.

Abb. 2.4 (b) zeigt die Strahlenflächen eines zweiachsigen doppelbrechenden Kristalls mit den Brechungsindizes  $n_1 = 1, n_2 = 1,5$  und  $n_3 = 2,25$ . Diese Fläche ist wesentlich



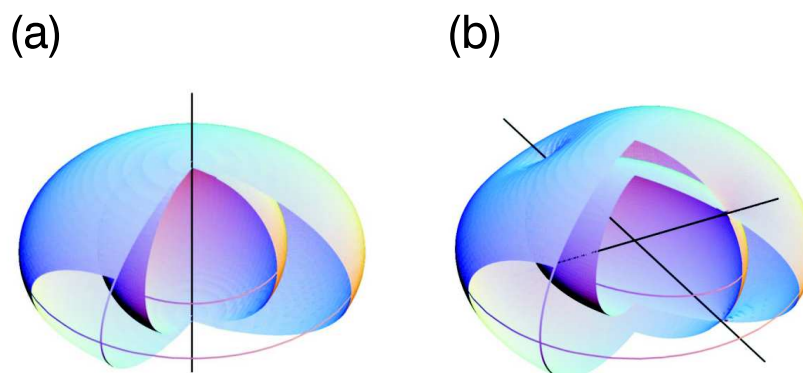


Abbildung 2.4: Die Strahlenfläche für einen negativ einachsigen doppelbrechenden (a) und einen zweiachsigen doppelbrechenden Kristall (b). Die optischen Achsen sind durch die Berührungspunkte der Flächen festgelegt und schwarz eingezeichnet. Beide Flächen sind der Deutlichkeit halber teilweise aufgeschnitten dargestellt.

komplizierter als im Fall (a). Durch die Berührungspunkte der inneren und äußeren Fläche sind hier zwei optische Achsen (schwarz) festgelegt.

Die Lichtausbreitung in doppelbrechenden Kristallen ist für den einachsigen doppelbrechenden Fall noch einfach zu beschreiben. Da dies der für das Verständnis der in dieser Arbeit beschriebenen Experimente relevante Fall ist, wird darauf noch näher eingegangen. Der zweiachsigen doppelbrechenden Fall ist komplizierter und im Rahmen dieser Arbeit nicht von Interesse. Auf eine Beschreibung der Lichtausbreitung in optisch zweiachsigen Medien wird daher verzichtet. In z. B. [31] ist diese zu finden.

Im Fall eines optisch einachsigen Kristalls werden zuerst die beiden im Kristall erlaubten Polarisationsrichtungen bestimmt. Dazu bedient man sich des Indexellipsoids oder (einfacher) des sogenannten Hauptschnitts.

Ein Hauptschnitt (eines Lichtbündels) ist eine Ebene, die von dem  $\mathbf{k}$ -Vektor des einfallenden Bündels und der optischen Achse des Kristalls aufgespannt wird. Licht, das senkrecht zu einem Hauptschnitt polarisiert ist (in Abb. 2.3 (b) ist dies die Richtung von  $\mathbf{D}''$ ), wird zum sogenannten ordentlichen Strahl und folgt dem Snelliusschen Brechungsgesetz mit dem Brechungsindex  $n_o = n_{\perp}$ , der der Länge der kleinen Halbachse der Schnitt-Ellipse in Abb. 2.3 (b) entspricht. Dieser Brechungsindex ist von der Rich-

tung von  $\mathbf{k}$  unabhängig.

Licht, das im Hauptschnitt polarisiert ist (in Abb. 2.3  $\mathbf{D}'$ ), bildet den außerordentlichen Strahl. Er gehorcht nicht mehr dem Snelliusschen Brechungsgesetz. Der für diesen Strahl geltende Brechungsindex  $n_e = n_e(\theta)$  entspricht der Länge der großen Halbachse der Schnittellipse und ist vom Winkel  $\theta$  zwischen  $\mathbf{k}$  und der optischen Achse abhängig. Es gilt:

$$\frac{1}{n_e(\theta)^2} = \frac{\cos(\theta)^2}{n_{\perp}^2} + \frac{\sin(\theta)^2}{n_{\parallel}^2}. \quad (2.10)$$

Die Lichtausbreitung in einem einachsigen doppelbrechenden Kristall kann mit einer Abwandlung des Huygensschen Prinzips geometrisch bestimmt werden [30]. Abb. 2.5 zeigt das Schema der Konstruktion: Fällt eine ebene Welle auf die Oberfläche eines einachsigen doppelbrechenden Kristalls, so erregen dort sowohl ordentlicher als auch außerordentlicher Strahl Elementarwellen, deren richtungsabhängige Ausbreitung durch die Strahlenflächen bestimmt ist. Die Phasenflächen der beiden Wellen werden durch die Einhüllende dieser Elementarwellen bestimmt, ihre Normalen sind die Wellenvektoren  $\mathbf{k}_o$  des ordentlichen und  $\mathbf{k}_e$  des außerordentlichen Strahls. Die Strahlrichtung, die in Richtung des Poynting-Vektors  $\mathbf{s}$  verläuft, ist durch die Strecke vom Ursprung der Strahlenflächen bis zu ihrem Berührungspunkt mit der Wellenfront gegeben. Für den ordentlichen Strahl fallen Strahlrichtung  $\mathbf{s}_o$  und Richtung des Wellenvektors  $\mathbf{k}_o$  zusammen, für den außerordentlichen Strahl jedoch sind  $\mathbf{s}_e$  und  $\mathbf{k}_e$  nicht mehr parallel, wie aus Abb. 2.5 klar wird. Damit sind die Strahlrichtungen für ordentlichen und außerordentlichen Strahl im Kristall unterschiedlich, was eine laterale Verschiebung  $\Delta x$  zwischen ordentlichem und außerordentlichem Strahl am Ausgang des Kristalls verursacht, sodass ein Doppelbild entsteht. Zusätzlich tritt wegen der unterschiedlichen optischen Weglängen eine Phasenverschiebung  $\Lambda$  zwischen ordentlichem und außerordentlichem Strahl auf. Für den außerordentlichen  $\mathbf{k}$ -Vektor gilt jedoch immer noch das Snelliussche Brechungsgesetz mit dem Brechungsindex  $n_e(\theta)$ , d.h.

$$n_e(\theta) \sin(\gamma') = n_1 \sin(\gamma) \quad (2.11)$$

wenn  $\gamma$  und  $\gamma'$  die Winkel zwischen dem Einfallslot und  $\mathbf{k}$  bzw.  $\mathbf{k}_e$  bezeichnen. Nach [30] gilt für den Winkel  $\theta'$  zwischen optischer Achse und  $\mathbf{k}_e$  und dem Winkel  $\theta''$  zwischen optischer Achse und Strahlrichtung  $\mathbf{s}_e$  des außerordentlichen Strahls:

$$\tan(\theta'') = \frac{n_{\perp}^2}{n_{\parallel}^2} \tan(\theta'). \quad (2.12)$$

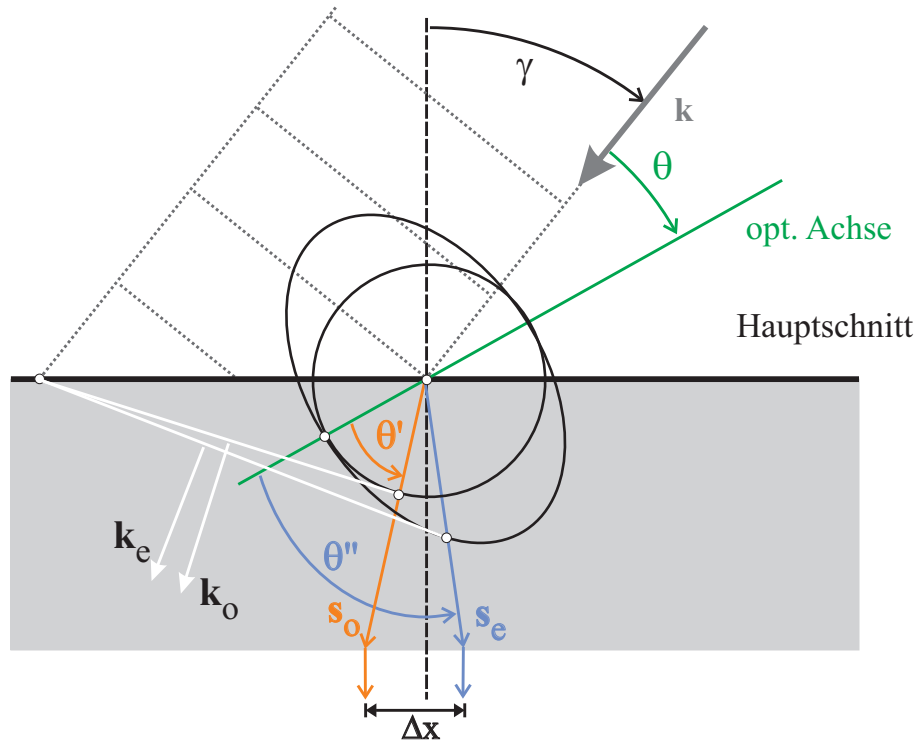


Abbildung 2.5: Konstruktion der Strahlrichtungen und Wellenvektoren von ordentlichem und außerordentlichem Strahl in einem einachsigen doppelbrechenden Kristall nach einem Prinzip ähnlich dem Huygensschen. Zur Konstruktion und Erklärung der Bezeichnungen siehe Text.

Damit und mit 2.11 lässt sich der Winkel  $\gamma''$  zwischen  $\mathbf{s}_e$  und dem Einfallslot berechnen. Man erhält daraus die laterale Verschiebung  $\Delta x$  und die Phasenverschiebung  $\Lambda$ .

#### 2.1.4 Singularitäten der Polarisation

Phasensingularitäten (siehe Kapitel 1.1.1) sind in der rein skalaren Optik stabile Objekte, d.h. eine kleine Störung zerstört die Vortexlinien nicht, sondern deformiert oder verschiebt sie [1].

Ein triviales Beispiel: Ein skalarer Wirbel  $x + iy$  liefert eine Nullstelle des skalaren Feldes im Ursprung. Überlagert man eine ebene Welle mit konstanter Phase und Amplitude  $c$ , so erhält man  $E(x, y) = x + iy + c$  mit einer Nullstelle bei  $x = -c$  und  $y = 0$ , der Wirbel wurde also nur verschoben.

Berücksichtigt man jedoch die Polarisation, also den Vektorcharakter des Lichts, so verschwindet diese Stabilität: Addiert man zu einem linear polarisierten Wirbel eine dazu

senkrecht linear polarisierte ebene Welle, so bekommt man  $E(x, y) = (x + iy, c)$ . Die Intensität dieses Feldes ist die Summe der Intensitäten der linear polarisierten Komponenten,  $x^2 + y^2 + c^2$  und ist überall von Null verschieden: Der Wirbel als Nullstelle des gesamten Feldes ist verschwunden [1] (er überlebt nur in den getrennt gemessenen linear polarisierten Komponenten des Feldes).

Welche stabilen Objekte treten nun in der Vektoroptik an die Stelle der skalaren Phasensingularitäten? Eine Phasensingularität lässt sich in polarisiertem Licht nicht mehr definieren (jede Komponente hat ihre eigene Phase), jedoch eine Singularität der Polarisation. Singularitäten der Polarisation sind isolierte Stellen des Feldes, an denen eine Eigenschaft der Polarisation nicht mehr definiert ist. Im Fall von vollständig polarisiertem Licht sind dies genau die Punkte, an denen die Polarisationsellipse (siehe Kapitel 2.1.1, Abb. 2.2 (b)) entartet [1]. Wir unterscheiden zwei Fälle, nämlich zirkulare und lineare Polarisation.

## L-Linien und L-Flächen

Liegt rein lineare Polarisation vor, so entartet die Polarisationsellipse in eine Linie, wodurch der Umlaufsinn des  $\mathbf{E}$ -Vektors nicht mehr definiert und damit singular ist [1, 10]. Die Elliptizität  $\omega$  verschwindet bzw. die Phasenverschiebung  $\Delta$  zwischen den beiden linear polarisierten Komponenten des Feldes wird null (modulo  $\pi$ ). Auf der Poincarè-Sphäre (siehe Abb. 2.2 (a)) liegen diese Punkte auf dem Äquator, woraus man ableitet, dass auch der dritte Stokes-Parameter  $S_3$  an Punkten linearer Polarisation eine Nullstelle hat.

Punkte linearer Polarisation bilden Linien in Ebenen senkrecht zur Ausbreitungsrichtung  $z$  des Lichts, da sich ja die Richtung der linearen Polarisation genau wie auf dem Äquator der Poincarè-Sphäre stetig ändern kann, ohne die Bedingung  $\omega = 0$  zu verletzen. Diese Linien heißen *L-Linien*. Mit dem gleichen Stetigkeitsargument schließt man, dass diese Linien in drei Dimensionen  $(x, y, z)$  zusammenhängende *L-Flächen* bilden.

L-Linien bzw. L-Flächen sind immer geschlossen, im Zweifelsfall verbinden sich ihre Enden im Unendlichen. Daher muss sich, wieder aus Gründen der Stetigkeit, die Richtung der linearen Polarisation bei einem Umlauf auf der Linie um  $\pi$  ändern (außer sie bleibt konstant, dann liegt jedoch ein entarteter Fall vor). Abb. 2.6 (a) zeigt eine L-Linie (gelb) in der  $x$ - $y$ -Ebene, Abb. 2.6 (b) zeigt eine schematische Zeichnung einer

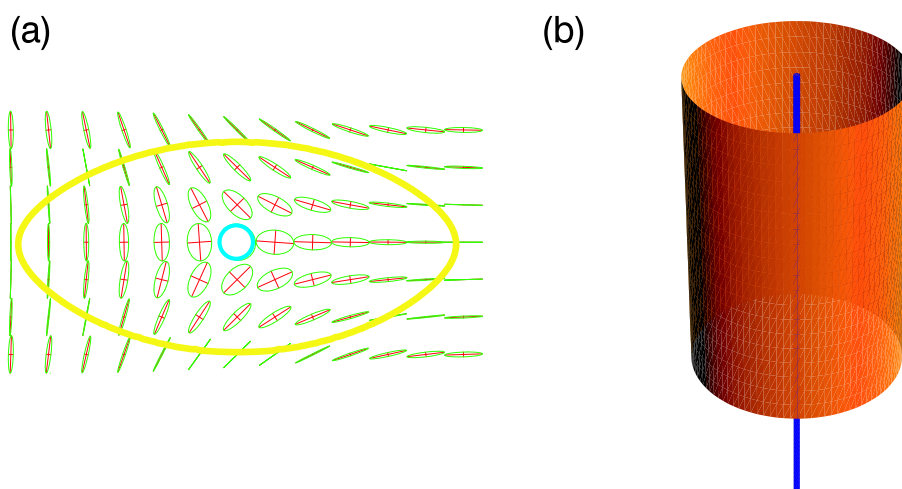


Abbildung 2.6: *Polarisationssingularitäten: (a) Eine L-Linie (lineare Polarisation, gelb) umgibt einen C-Punkt (zirkulare Polarisation, blau). In drei Dimensionen (b) wird die L-Linie zur L-Fläche, der C-Punkt wird zu einer C-Linie.*

zylinderförmigen L-Fläche (gold). Die L-Linie bzw. L-Fläche umgibt einen C-Punkt (siehe unten).

### C-Punkte und C-Linien

Liegt an einem Punkt des Feldes rein zirkulare Polarisation vor, so entartet die Polarisationsellipse in einen Kreis, wodurch die Richtung ihrer Hauptachsen und damit der Azimuthwinkel  $\alpha$  nicht mehr definiert und damit singular ist [1, 10]. Die Polarisation kann hier links- oder rechtshändig zirkular sein. Das Feld hat eine Nullstelle in der jeweils anderen zirkularen Polarisationsrichtung und es verschwinden sowohl  $S_1$  als auch  $S_2$ , wie man aus Abb. 2.2 sieht. Diese Punkte heißen *C-Punkte* und sind, im Gegensatz zu Stellen linearer Polarisation, isolierte Punkte (in zwei Dimensionen) des Feldes, sofern keine entartete Singularität (wie bei einem rein zirkular polarisierten Bündel) vorliegt. Der isolierte Charakter der C-Punkte wird schon an ihrer Lage an den Polen der Poincarè-Sphäre deutlich.

In drei Dimensionen bilden C-Punkte Linien, sog. *C-Linien*. C-Linien verschiedener Händigkeit sind stets von L-Flächen umgeben, können diese jedoch nie durchdringen. Abb. 2.6 (a) zeigt in der Mitte der ihn umgebenden L-Linie einen C-Punkt (blau), in (b) ist schematisch eine C-Linie im Zentrum einer L-Fläche dargestellt.

In Anlehnung an die Stärke bzw. topologische Ladung der Phasensingularitäten kann auch für C-Punkte eine Kenngröße definiert werden: Bei einem Umlauf um die Singularität auf einem geschlossenen Weg werden die Drehungen der Hauptachsen der Polarisationsellipsen unter Berücksichtigung der Drehrichtung (Vorzeichen) gezählt. Dies ist der *Index* des C-Punktes [1, 10]. Im Gegensatz zur Stärke von Phasensingularitäten ist der Index aufgrund der  $\pi$ -Symmetrie der Polarisationsellipse nicht ganzzahlig, sondern halbzahlig.

Eine weitere Klassifizierungsmöglichkeit erhält man, wenn man die Form der „Flusslinien“ des Ellipsenfeldes betrachtet. Dies sind die Linien, die als Tangenten an jedem Punkt die großen Halbachsen der Ellipsen haben. Hier werden zwei Haupttypen unterschieden, die nach ihrer Form „lemon“ und „star“ heißen (siehe Abb. 2.7 (c) und (a)). Ein weiterer Typ, der jedoch nur bei der Verschmelzung und gegenseitigen Auslöschung eines „star“- und eines „lemon“-C-Punkt auftritt, heißt „monstar“ (siehe Abb. 2.7 (b)). Der Index eines „star“ ist  $+1/2$ , die beiden anderen haben Index  $-1/2$ . Zusätzlich zu ihrem Index sind diese Typen von Singularitäten nach der Anzahl der geraden Flusslinien, die ins Zentrum der Singularitäten laufen, unterscheidbar [1, 10]. M. Dennis

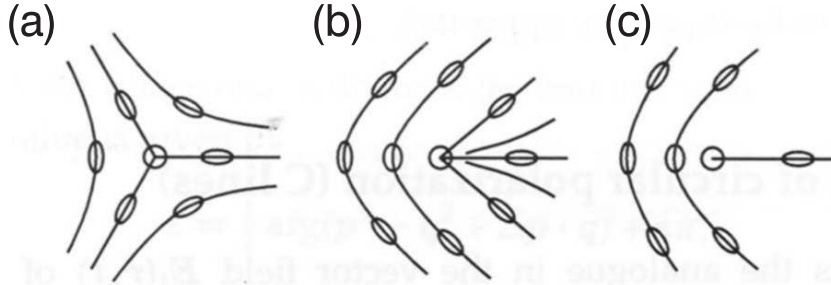


Abbildung 2.7: Typen von C-Punkten, unterschieden nach dem Muster der Flusslinien in der Umgebung der Singularität. (a) „star“, (b) „monstar“, (c) „lemon“. Der „star“-C-Punkt hat Index  $+1/2$ , die beiden Anderen haben jeweils  $-1/2$ .

gibt dafür ein mathematisches Kriterium an [34], das die Stokes-Parameter  $S_i$  und ihre Ableitungen  $S_{i,j}$ , ( $j = x, y$ ) in der Umgebung des C-Punkts benutzt:

$$\begin{aligned}
 D = & ((2S_{1,y} + S_{2,x})^2 - 3S_{2,y}(2S_{1,x} - S_{2,y})) \\
 & \times ((2S_{1,x} - S_{2,y})^2 + 3S_{2,x}(2S_{1,y} + S_{2,x})) \\
 & - (2S_{1,x}S_{1,y} + S_{1,x}S_{2,x} - S_{1,y}S_{2,y} + 4S_{2,x}S_{2,y})^2
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

Je nach Vorzeichen dieser Funktion, ausgewertet am Punkt der Singularität, laufen drei Geraden (star oder monstar) für  $D > 0$  oder nur eine Gerade (lemon) für  $D < 0$  in das Zentrum der Singularität. In Kombination mit dem Index der Singularität kann man damit die drei Typen unterscheiden.

Bei der Klassifikation der C-Punkte hat man sich stark an der Theorie der Defekte in Flüssigkristallen (siehe z. B. [42], S. 406 ff) orientiert, da die Topologie der C-Punkten der Flüssigkristalle gleicht. Der Grund dafür ist, dass es sich in beiden Fällen um Singularitäten der Richtung eines „Direktors“, eines Vektors ohne Kopf, handelt, der in der Polarisation durch die Richtung der großen Halbachse und bei den Flüssigkristallen durch die Vorzugsrichtung der Moleküle gegeben ist. Daraus resultiert eine in beiden Fällen gegebene  $\pi$ -Symmetrie, die sich in der Geometrie des Ellipsenfeldes bzw. der Flüssigkristalle niederschlägt.

### 2.1.5 Polarisationsingularitäten: Einfache Beispiele

Wo findet man Polarisationsingularitäten? Genau wie Phasensingularitäten in jedem natürlich vorkommenden Lichtfeld (z. B. [11, 34, 35, 36]). Will man Polarisationsingularitäten aber gezielt herstellen, muss man dazu in der Lage sein, ein ortsabhängiges Polarisationsmuster zu erzeugen.

Oder man verfolgt einen Ansatz wie in [1] beschrieben: Hier wird eine uniform polarisierte Phasensingularität, also eine Nullstelle des Feldes, gestört. Nun kann ja das Licht an einer Nullstelle jede Polarisation haben, man kann sich also vorstellen, dass eine Nullstelle des Feldes jeden nur denkbaren Polarisationszustand gleichzeitig enthält. Stört man nun das uniform polarisierte Feld, beispielsweise durch eine überlagerte ebene Welle anderer Polarisation, so wird die Nullstelle wie in obigen Beispiel aufgehoben und die „Polarisationsentartung“ entfaltet sich in mehrere Singularitäten der Polarisation.

## Entfaltung eines Wirbels durch eine ebene Welle

Abb. 2.8 zeigt die Polarisation eines linear polarisierten Wirbels, gestört durch eine senkrecht dazu linear polarisierte ebene Welle mit Amplitude  $c$ :

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} x + iy \\ ce^{i\Lambda} \end{bmatrix}. \quad (2.14)$$

Die Polarisation dieses Feldes ist nicht mehr uniform linear, wie man auf den ersten Blick erwarten würde, sondern es treten durch die Entfaltung der im Wirbel entarteten Polarisation alle Polarisationen auf, sodass für  $\Lambda = 0$  zwei C-Punkte von Typ lemon und star entstehen (roter bzw. blauer Kreis), die durch eine gerade C-Linie (gelb) getrennt sind (siehe auch [1]). Der Abstand der C-Punkte hängt von der Stärke  $c$  der Störung ab und geht für  $c \rightarrow 0$  gegen 0, für  $c \rightarrow \infty$  gegen  $\infty$ .

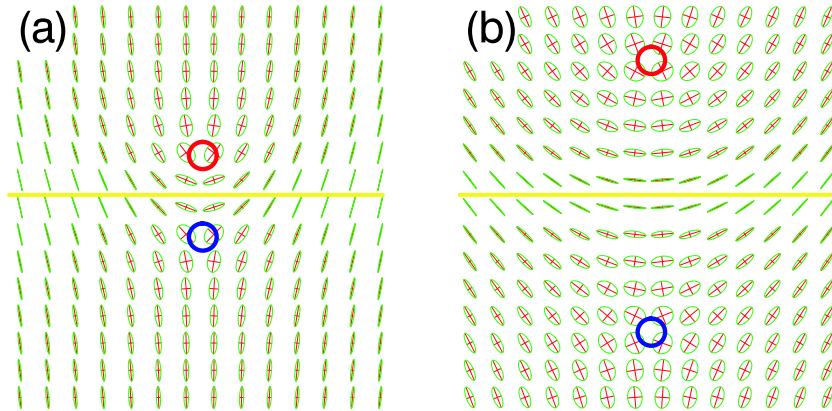


Abbildung 2.8: Polarisationssingularitäten in dem Feld aus Gleichung 2.14 bei  $\Lambda = 0$  für  $c = 0,3$  (a) und  $c = 1$  (b). Die Polarisationsellipsen sind grün gezeichnet. Durch die Störung des linear polarisierten Wirbels mit einer ebenen Welle entstehen zwei C-Punkte (roter Kreis, lemon-Typ, und blauer Kreis, star) und eine L-Linie (gelb).

Wird die Phasenverschiebung  $\Lambda$  variiert, so ändert sich die Form und Lage der L-Linie und Position und Anzahl der C-Punkte, es entstehen L-Flächen und C-Linien in Abhängigkeit von  $\Lambda$ . Diese werden im Folgenden betrachtet. Es wird also nicht die Raumkoordinate  $z$ , sondern die Phasenverschiebung  $\Lambda$  neben  $x$  und  $y$  als dritte Koordinate verwendet. Die folgenden dreidimensionalen Bilder sind also im  $(x, y, \Lambda)$ -Raum gezeichnet !

Um die Stokes-Parameter (Kapitel 2.1.2) des Feldes zu berechnen, kann man entweder Gleichung (2.4) verwenden oder einfach die Wirkung der bei der Messung verwendeten



optischen Elemente rechnerisch nachbilden. Die Wirkung eines linearen Polarisators entspricht dem Skalarprodukt mit dem Einheitsvektor in der entsprechenden Richtung, die eines  $\lambda/4$ -Plättchens der Multiplikation des Feldes mit  $e^{i\pi/2} = i$ .

Die L-Linien entsprechen den Nullstellen des Stokes-Parameters  $S_3$  (siehe oben), es muss also gelten:

$$|(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)i[(x + iy)\mathbf{e}_1 + ce^{i\Lambda}\mathbf{e}_2]|^2 - |(\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1)i[(x + iy)\mathbf{e}_1 + ce^{i\Lambda}\mathbf{e}_2]|^2 = 0.$$

Dies vereinfacht sich zu:

$$y = x \tan(\Lambda), \quad (2.15)$$

das ist eine Gerade mit dem Winkel  $\Lambda$  zur  $x$ -Achse in der  $x$ - $y$ -Ebene. In drei Di-

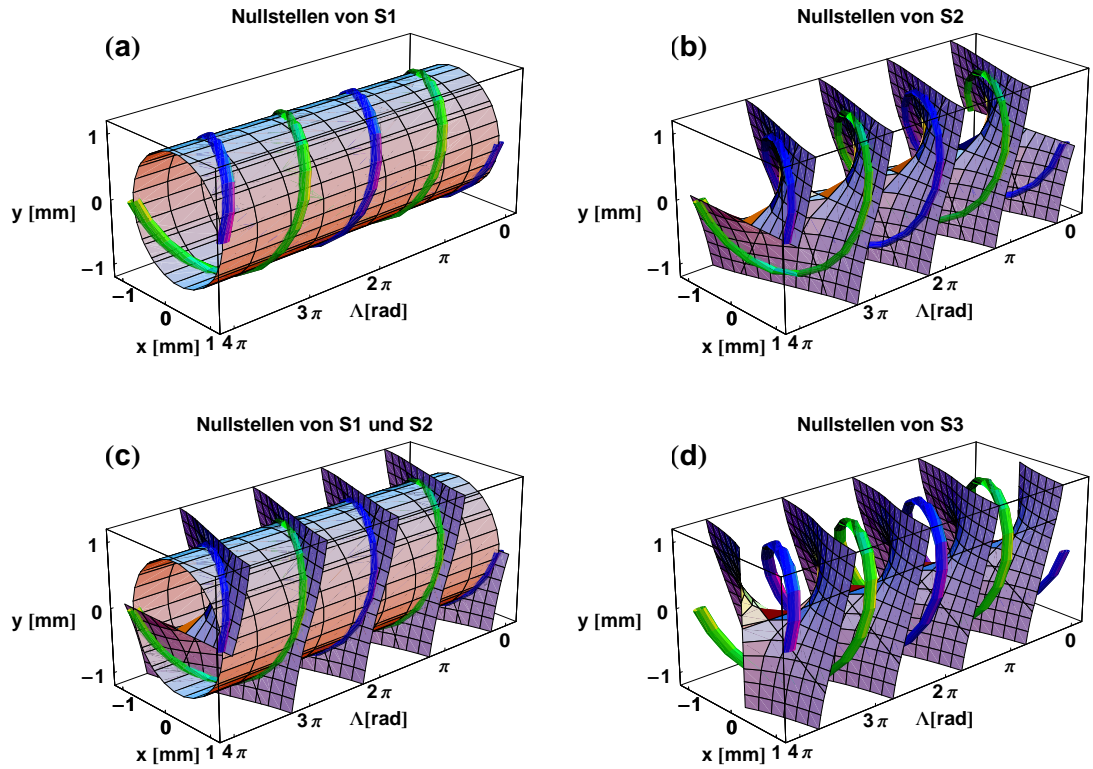


Abbildung 2.9: Nullstellen der Stokes-Parameter  $S_1, S_2$  und  $S_3$  bei der Störung eines Wirbels mit einer ebenen Welle (siehe Gleichung (2.14)). Den Bildern sind die C-Linien (blau und grün) überlagert. Abbildung (a) zeigt die Nullfläche von  $S_1$ , ein Kreiszyylinder. Abbildungen (b) und (d) zeigen die Nullstellen von  $S_2$  und  $S_3$ , zwei Schraubenflächen, die bis auf eine Verschiebung um  $\pi/2$  in  $\Lambda$ -Richtung identisch sind. (c) zeigt den Schnitt der Nullflächen von  $S_1$  und  $S_2$ , der die C-Linien (in Blau und Grün überlagert) bestimmt.

mensionen  $(x, y, \Lambda)$  wird dies eine Schraubenfläche wie in Abb. 2.9 (d) gezeigt. In die

Abbildung sind zusätzlich die entstehenden C-Linien eingezeichnet (blau und grün). Die C-Punkte liegen an den gemeinsamen Nullstellen von  $S_1$  und  $S_2$  (siehe oben), dies ergibt zwei Bedingungen:

$$0 = |\mathbf{e}_1[(x + iy)\mathbf{e}_1 + ce^{i\Lambda}\mathbf{e}_2]|^2 - |\mathbf{e}_2[(x + iy)\mathbf{e}_1 + ce^{i\Lambda}\mathbf{e}_2]|^2 \quad (2.16)$$

$$0 = |(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)[(x + iy)\mathbf{e}_1 + ce^{i\Lambda}\mathbf{e}_2]|^2 - |(\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1)[(x + iy)\mathbf{e}_1 + ce^{i\Lambda}\mathbf{e}_2]|^2. \quad (2.17)$$

Vereinfacht ergibt das:

$$0 = x^2 + y^2 - c^2 \quad (2.18)$$

$$0 = y - x \cot(\Lambda). \quad (2.19)$$

Die Nullfläche von  $S_1$  ist also ein Zylinder mit Radius  $c$  (siehe Abb. 2.9 (a)), die von  $S_2$  (siehe Abb. 2.9 (b)) ist dieselbe Schraubenfläche wie die Nullfläche von  $S_3$ , nur um  $90^\circ$  in  $\Lambda$ -Richtung verschoben (was aus der Definition von  $S_2$  und  $S_3$  klar ist und auch an der Poincaré-Sphäre abgelesen werden kann: eine Rotation um  $90^\circ$  um die  $S_1$ -Achse überführt  $S_2$  in  $S_3$ , dies entspricht der Wirkung eines  $\lambda/4$ -Plättchens).

Die C-Linien, als Schnitt der Nullflächen von  $S_1$  und  $S_2$  (siehe Abb. 2.9 (c) und (d)), werden daher eine Doppelspirale mit Radius  $c$  bilden.

### Entfaltung eines Wirbels durch einen Wirbel

Eine Erweiterung dieses Beispiels wäre die Störung eines linear polarisierten Wirbels mit einem senkrecht dazu linear polarisierten Wirbel, dessen Zentrum um die Strecke  $a$  in  $x$ -Richtung aus dem Ursprung verschoben ist:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} x + iy \\ (x - a + iy)e^{i\Lambda} \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

Die Polarisation des hier entstehenden Feldes zeigt Abbildung 2.10 für  $\Lambda = 0$  in (a) und  $\Lambda = \pi/4$  in (b). Das Feld besitzt zwei C-Punkte (blau und grün) und eine L-Linie, deren Form von  $\Lambda$  abhängt. Um die Form der C-Linien und L-Flächen im  $(x, y, \Lambda)$ -Raum

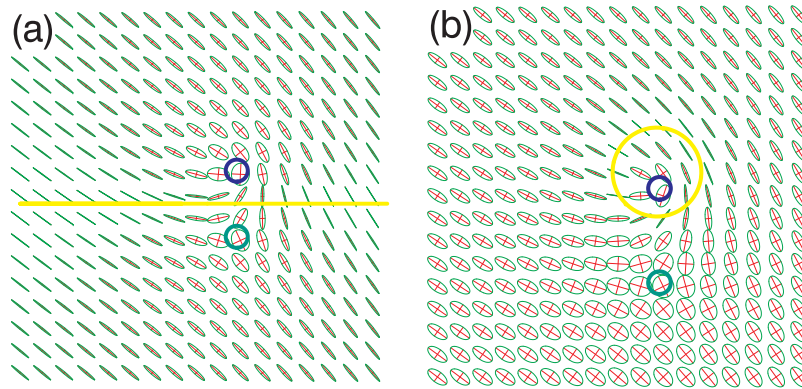


Abbildung 2.10: *Polarisationsellipsen und Singularitäten des Feldes aus Gleichung (2.20), die Überlagerung zweier senkrecht zueinander polarisierter Wirbel mit gegenseitiger Verschiebung  $a$ . Es entstehen wieder zwei C-Punkte (blau und grün) und eine L-Linie (gelb), die jedoch hier je nach  $\Lambda$  auch geschlossen ist. (a) zeigt die Polarisation des Feldes für  $a = 0,5$  und  $\Lambda = 0$ , (b) für  $\Lambda = \pi/4$ . Die L-Linie ist im letzteren Fall ein Kreis.*

angeben zu können, werden wieder die Nullstellen der Stokes-Parameter bestimmt. Die Nullfläche von  $S_1$  ist bestimmt durch:

$$|\mathbf{e}_1[(x + iy)\mathbf{e}_1 + (x - a + iy)e^{i\Lambda}\mathbf{e}_2]|^2 - |\mathbf{e}_2[(x + iy)\mathbf{e}_1 + (x - a + iy)e^{i\Lambda}\mathbf{e}_2]|^2 = 0.$$

Dies ergibt die Gleichung:

$$x - \frac{a}{2} = 0, \quad (2.21)$$

was eine Ebene durch  $x = a/2$  parallel zur  $\Lambda$ -Achse beschreibt. Die Nullfläche von  $S_1$  ist also wie im letzten Beispiel unabhängig von  $\Lambda$ , was klar wird, wenn man sich überlegt, dass hier nur die Differenz der Intensitäten in den  $\mathbf{e}_1$ - und  $\mathbf{e}_2$ -Komponenten

des Feldes gebildet wird und dabei jegliche Phasenfaktoren verschwinden. Abbildung 2.11 (a) zeigt diese Ebene, wieder sind die entstehenden C-Linien überlagert (rot).

Die Nullfläche von  $S_2$  ist gegeben durch:

$$\frac{1}{2}|(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)[(x + iy)\mathbf{e}_1 + (x - a + iy)e^{i\Lambda}\mathbf{e}_2]|^2 - \frac{1}{2}|(\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1)[(x + iy)\mathbf{e}_1 + (x - a + iy)e^{i\Lambda}\mathbf{e}_2]|^2 = 0,$$

dies ergibt vereinfacht:

$$x^2 + y^2 - ax - ay \tan(\Lambda) = 0. \quad (2.22)$$

Das ist die Gleichung eines Kreises mit Radius  $r = a/2\sqrt{1 + \tan^2(\Lambda)}/4$  und Mittelpunkt bei  $(a/2, a/2 \tan(\Lambda))$ , in drei Dimensionen ergibt das eine Figur wie in Abb. 2.11 (b). Diese Figur, bestehend aus sich periodisch wiederholenden Schläuchen, die parallele Ebenen verbinden, ist topologisch äquivalent zu einem berühmten Beispiel einer Minimalfläche, das zuerst von Bernhard Riemann vorgestellt wurde ([32]). Die Periodizität der Figur ist  $\pi$ . Abb. 2.11 (b) zeigt diese Fläche. Wie oben entstehen aus dem Schnitt der Nullflächen von  $S_1$  und  $S_2$  die C-Linien, hier rot eingezeichnet (siehe Abb. 2.11 (c)) Die Nullfläche von  $S_3$ , die zur L-Fläche der Anordnung identisch ist, zeigt Abb. 2.11 (d) zusammen mit den C-Linien. Die Fläche ist wieder dieselbe wie für  $S_2$ , nur um  $\pi/2$  in  $\Lambda$ -Richtung verschoben.

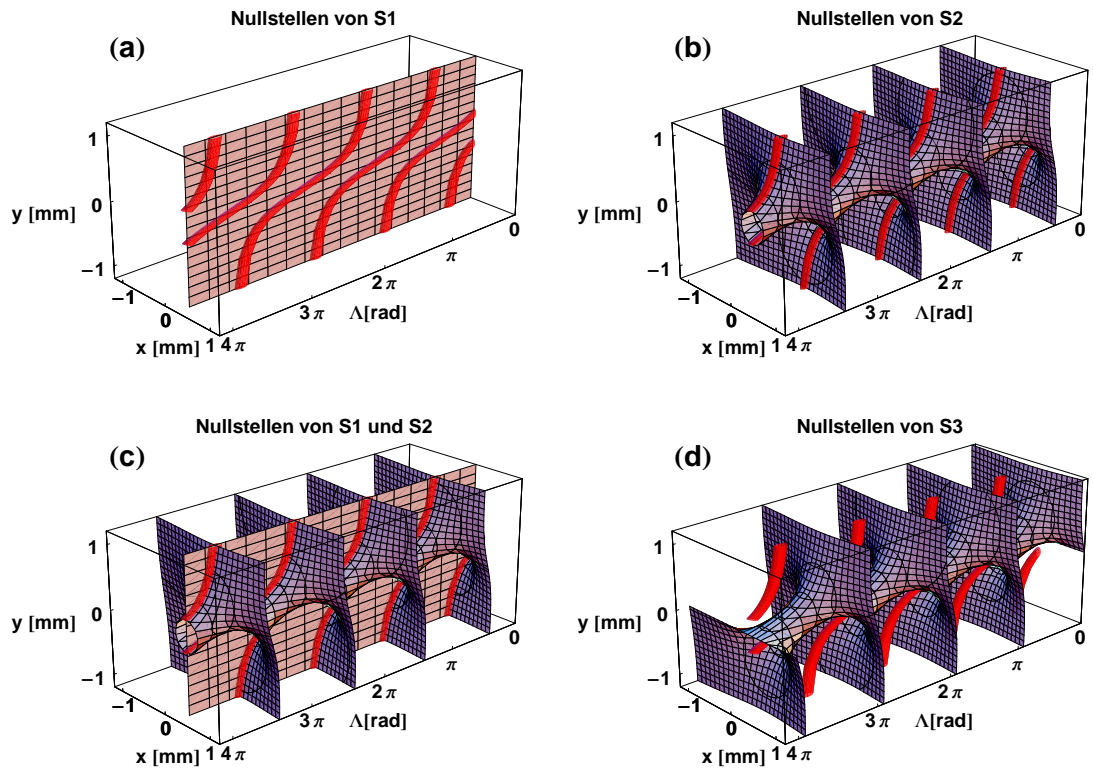


Abbildung 2.11: Nullstellen der Stokes-Parameter  $S_1$ ,  $S_2$  und  $S_3$  bei der Störung eines Wirbels mit einem Wirbel (siehe Gleichung (2.20)). Den Bildern sind die C-Linien (rot) überlagert. Abbildung (a) zeigt die Nullfläche von  $S_1$ , eine Ebene parallel zur  $y-z$ -Ebene. Abbildungen (b) und (d) zeigen die Nullstellen von  $S_2$  und  $S_3$ , die bis auf eine Verschiebung um  $\pi/2$  in  $\Lambda$ -Richtung identisch sind. Abb. (c) zeigt den Schnitt der Nullflächen von  $S_1$  und  $S_2$ , der die C-Linien (in Rot überlagert) bestimmt.

### Störung einer Laguerre-Gauß-Mode $LG_0^1$ durch ein Gauß-Bündel

Als weiteres Beispiel betrachte man das Feld eines linear polarisierten Wirbels in einem Gauß-Bündel (also ein  $LG_0^1$ -Bündel), der durch ein in  $x$ -Richtung um  $a$  dazu verschobenes  $LG_0^0$ -Gauß-Bündel mit orthogonaler Polarisation gestört wird. Das Feld ist dann:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} (x + iy)e^{-(x^2+y^2)/w_0^2} \\ e^{-((x-a)^2+y^2)/w_0^2}e^{i\Lambda} \end{bmatrix}$$

Die Gleichungen für die Nullstellen von  $S_1$ ,  $S_2$  und  $S_3$  werden dann zu:

$$x^2 + y^2 = e^{4xa/w_0^2}e^{-2a^2/w_0^2} \quad (2.23)$$

$$y = -x \cot(\Lambda) \quad (2.24)$$

$$y = x \tan(\Lambda). \quad (2.25)$$

Die Gleichungen für die Nullstellen von  $S_2$  und  $S_3$  (Gleichung (2.24) und Gleichung (2.25)) sind wieder dieselben wie bei (2.14) und ergeben die Schraubenflächen aus Abb. 2.9. Die Gleichung für  $S_1$  (Gleichung (2.23)) jedoch ist diesmal nicht mehr analytisch lösbar. Nur für den Spezialfall  $a = 0$  beschreibt sie einen Kreiszylinder um die  $\Lambda$ -Achse mit Radius 1, für andere Werte von  $a$  entstehen Nullflächen, die im Querschnitt wie ein Tropfen aussehen, der sich von einer Flüssigkeitsoberfläche löst. Abb. 2.12 (a) und 2.13 (a) zeigen diese Flächen für  $a = 0,5w_0$  (hier hängt der Tropfen noch an der Oberfläche) bzw.  $a = 0,65w_0$ . Im ersteren Fall entstehen durch den Schnitt der Fläche mit den Nullstellen von  $S_2$  (Abb. 2.12 (b) und (c)) C-Linien, die bis auf Verformungen denen aus Abb. 2.11 gleichen, im letzteren Fall bilden sich als Nullstellen von  $S_1$  zwei getrennte Flächen, die für größer werdendes  $a$  zu einem Zylinder und einer Ebene werden. Dadurch entstehen nun im Schnitt mit den Nullflächen von  $S_2$  (Abb. 2.13 (b) und (c)) zwei schraubenförmige C-Linien (blau und grün) zusätzlich zu vier C-Linien in  $4\pi$  (rot), die von  $y = -\infty$  kommen und nach  $+\infty$  verschwinden.

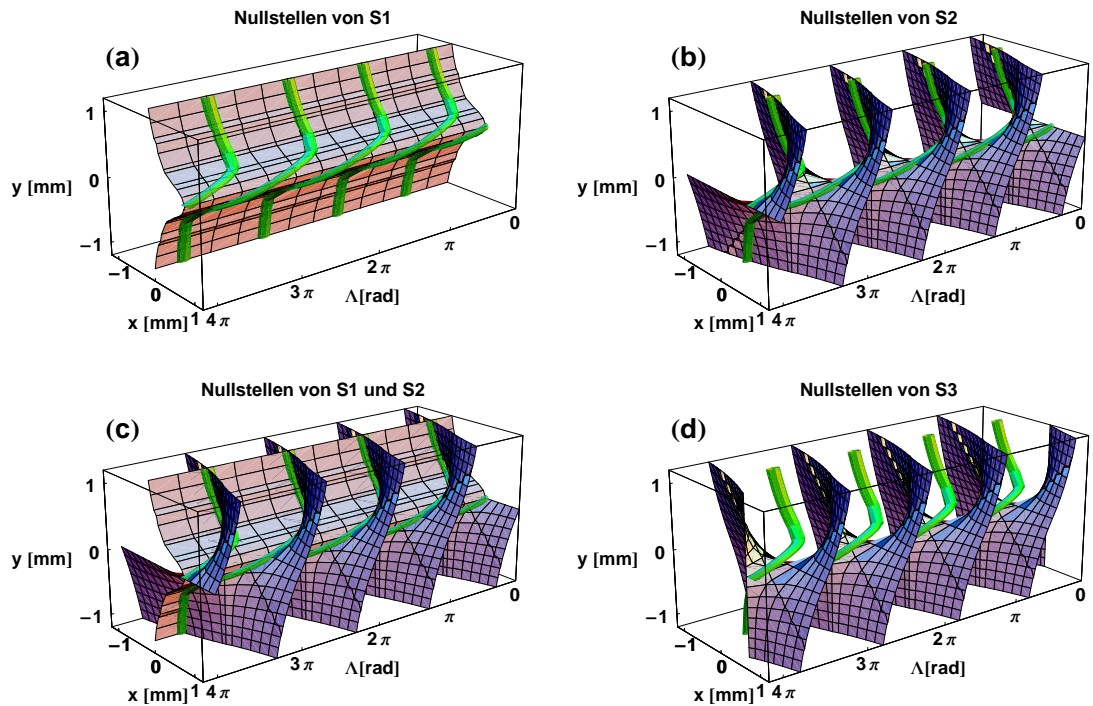


Abbildung 2.12: Nullstellen der Stokes-Parameter  $S_1, S_2$  und  $S_3$ , wie sie bei der Überlagerung eines linear polarisierten  $LG_0^0$ -Bündels mit einem senkrecht dazu polarisierten  $LG_1^0$ -Bündel entstehen (siehe Gleichung (2.1.5)). Die Bündel sind hier um  $a = 0,5w_0$  gegeneinander in  $x$ -Richtung verschoben. Die Nullfläche für  $S_1$  (a) ist eine in Abhängigkeit von  $a$  verformte Ebene, die für  $S_2$  und  $S_3$  ((b) und (d)) sind wie für Gleichung (2.8) Schraubenflächen.

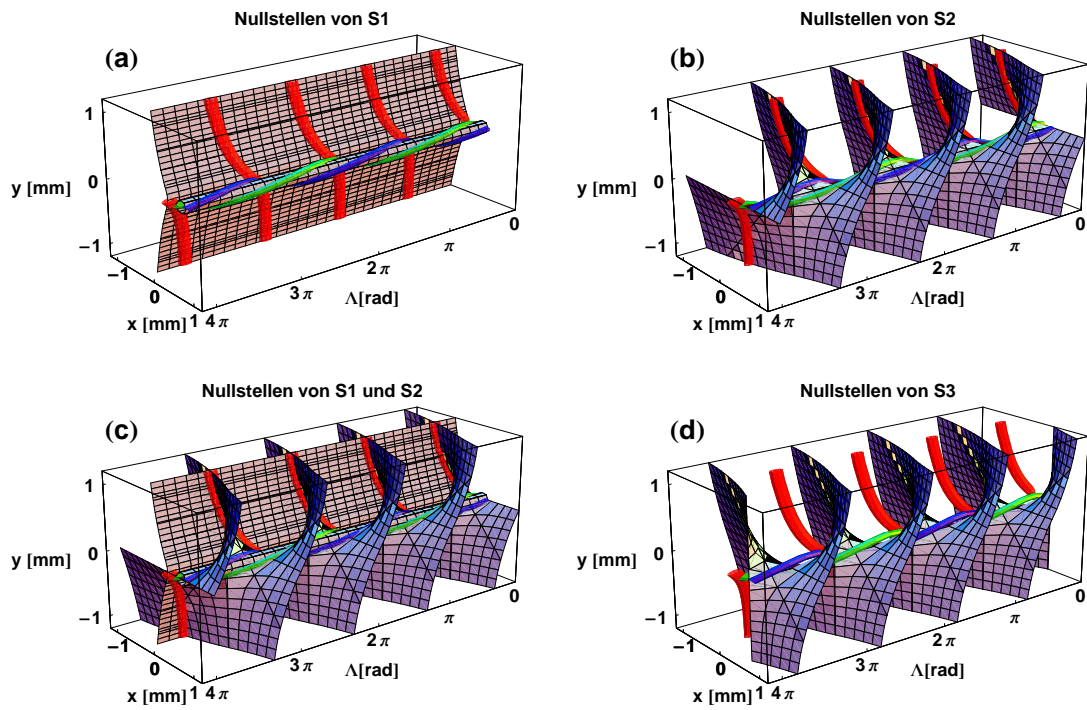


Abbildung 2.13: Wie in Abb. 2.12, jedoch mit  $a = 0,65w_0$ . Hier entstehen als Nullflächen für  $S_1$  zwei getrennte Flächen (a) und damit zusätzliche C-Linien (grün und blau).



## **Polarisationssingularitäten im Himmelslicht**

Am Rande sei bemerkt, dass es noch weitere Arten von Singularitäten der Polarisation gibt. So beschreibt M. Dennis in [33] das am Himmel durch die mehrfache Streuung des Sonnenlichts an den Molekülen der Atmosphäre entstehende Polarisationsmuster. Das Himmelslicht ist im Gegensatz zu den eben besprochenen Beispielen nicht vollständig, sondern nur teilweise polarisiert, zudem tritt nur lineare Polarisation auf. Die Richtung dieser linearen Polarisation ist vom der relativen Position des jeweiligen Himmelssegments zur Sonne abhängig, sodass ein ortsabhängiges Muster von Linien entsteht, die die Polarisationsrichtung angeben. Dieses Polarisationsmuster hat vier lemon-Typ Singularitäten, an denen die Polarisationsrichtung undefiniert ist. Jedoch sind hier keine C-Punkte, sondern Stellen, an denen das Licht vollständig unpolarisiert ist. Insekten wie z. B. Bienen orientieren sich an diesem Muster und an den Singularitäten des Feldes, da die Polarisation des Himmelslichts auch detektierbar ist, wenn die Sonne als Richtungsweiser verdeckt ist.

## 2.2 Experimenteller Aufbau

### 2.2.1 Überlegungen zur experimentellen Realisierung

Um Polarisationsingularitäten zu erhalten, kann man, wie im Kapitel 2.1.4 beschrieben, einen uniform linear polarisierten optischen Wirbel stören. Um diese Störung zu realisieren, bräuchte man eigentlich einen klassischen Interferenzaufbau mit zwei getrennten Wegen, die dann an einer Stelle parallel zusammengeführt werden. Dies bedeutet einen hohen Aufwand an optischen Elementen, Empfindlichkeit gegenüber Vibrationen und Luftströmungen und damit eine hohe Fehleranfälligkeit.

Wesentlich einfacher und eleganter wird der Aufbau, wenn man einen doppelbrechenden Kristall verwendet [39]. Abb. 2.14 zeigt die Idee: Ein Laserbündel mit einem optischen Wirbel im Zentrum (genauer: ein  $LG_0^1$ -Bündel, siehe Kapitel 1.1.2) beleuchtet einen einachsigen doppelbrechenden Kristall. Das Lichtbündel ist rein linear, aber unter einem bestimmten Winkel  $\beta$  (hier nahe  $45^\circ$ ) zum Hauptschnitt des Kristalls polarisiert. Dadurch wird das Bündel beim Eintritt in den Kristall in zwei senkrecht zueinander polarisierte Komponenten aufgespalten, den ordentlichen und den ausserordentlichen Strahl, deren Intensitätsverhältnis vom Winkel  $\beta$  abhängt. Der ordentliche Strahl unterliegt dem Snelliusschen Brechungsgesetz und wird bei senkrechtem Einfall den Kristall unabgelenkt passieren, der außerordentliche Strahl jedoch wird auch bei senkrechtem Einfall aus der Achse des Systems gebrochen, sodass er beim Austritt aus dem Kristall eine räumliche Verschiebung  $\Delta x$  im Vergleich zu dem ordentlichen Strahl erhält. Zusätzlich erfährt er eine Phasenverschiebung  $\Lambda$  im Vergleich zu dem ordentlichen Strahl aufgrund der unterschiedlichen optischen Weglängen. Die beiden Strahlen überlagern sich am Ausgang des Kristalls zu einem Feld, das nun nicht mehr, wie man auf den ersten Blick annehmen würde, uniform linear polarisiert ist, sondern die in Kapitel 2.1.4 prognostizierten Polarisationsingularitäten aufweist.

Das einfallende Feld sei  $\mathbf{E}_{in} = \psi(x, y)\mathbf{d}_{in}$ , wobei der komplexe Vektor  $\mathbf{d}_{in}$  einen im Allgemeinen elliptischen Polarisationszustand repräsentiert und  $\psi(x, y)$  eine beliebige skalare, komplexe Amplitude ist.

Sofern der doppelbrechende Kristall transparent und nicht chiral ist, hat er zwei zueinander senkrechte Eigenpolarisationen  $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2$  mit jeweiligen Brechungsindizes  $n_1, n_2$ . Die Richtungen dieser Eigenpolarisationen sind parallel und senkrecht zum Hauptschnitt (Ebene gebildet aus optischer Achse und  $\mathbf{k}$ -Vektor der einfallenden Welle) des Kristalls.

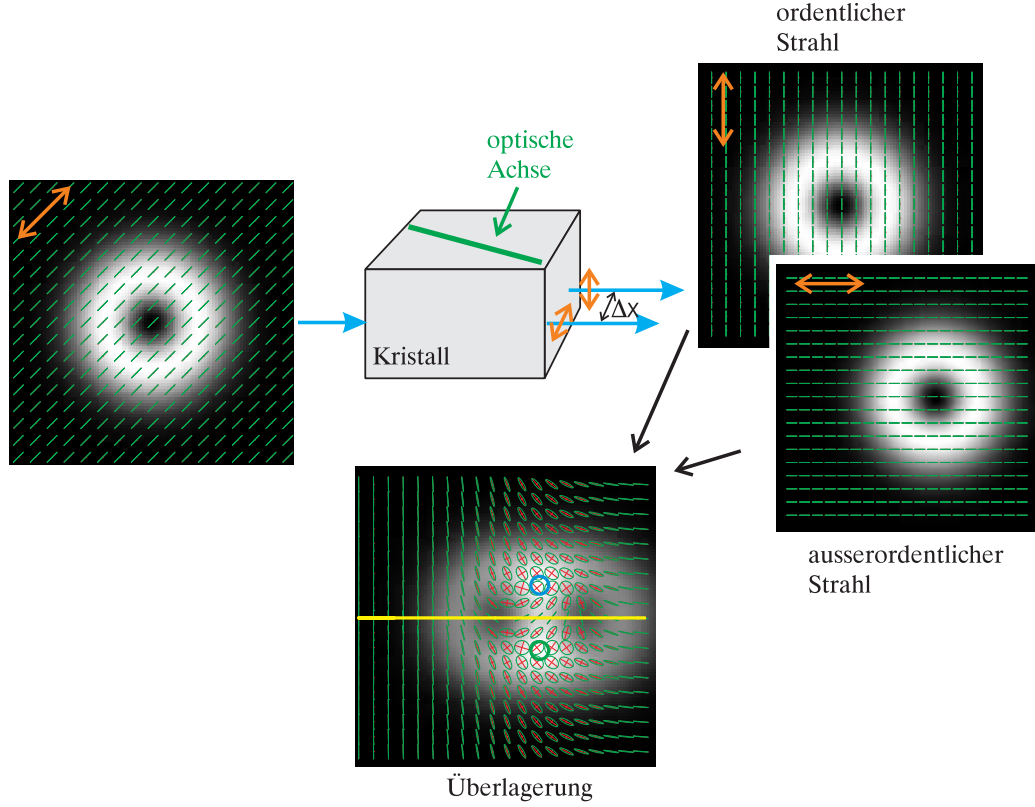


Abbildung 2.14: Schematisch: Störung eines linear polarisierten optischen Wirbels durch ein senkrecht dazu polarisiertes Feld mithilfe eines doppelbrechenden Kristalls. Der optische Wirbel wird im Kristall in ordentlichen und ausserordentlichen Strahl aufgespalten. Der außerordentliche Strahl erfährt eine Phasenverzögerung und eine seitliche Verschiebung  $\Delta x$ . Die Überlagerung der Felder am Ausgang (hier berechnet) liefert wie erwartet Polarisationsingularitäten, hier eine L-Linie (gelb) und zwei C-Punkte (rot und blau).

Das einfallende Feld  $\mathbf{E}_{in}$  wird im Kristall in diese beiden Eigenpolarisationen zerlegt. Diese werden mit  $n_1$  und  $n_2$  ordentlich und außerordentlich gebrochen, sodass die beiden Anteile des Feldes nach dem Kristall räumlich um  $\Delta x$  gegeneinander verschoben sind. Zusätzlich sammelt sich aufgrund der unterschiedlichen optischen Weglängen je nach zurückgelegter Strecke im Kristall eine Phasendifferenz  $\Lambda$  zwischen ordentlichen und ausserordentlichen Strahl an.

Das Feld am Ende des Kristall lässt sich damit schreiben als:

$$\mathbf{E}(x, y, \Lambda) = \sum_{j=1,2} \psi(x + s_j, y) (\mathbf{d}_{in} \cdot \mathbf{d}_j) \mathbf{d}_j e^{i(-1)^j \Lambda/2}. \quad (2.26)$$

Wobei hier  $s_1 = +\frac{\Delta x}{2}$  und  $s_2 = -\frac{\Delta x}{2}$  ersetzt wird. Ist  $\psi(x, y)$  ein  $LG_0^1$ -Bündel, also ein Gauß-Laserbündel mit einem r-Wirbel, so wird  $\mathbf{E}_{in}$  zu:

$$\mathbf{E}_{in} = (x + iy)e^{-(x^2+y^2)/w_0^2}\mathbf{d}_{in}. \quad (2.27)$$

Ist die Eingangspolarisation  $\mathbf{d}_{in}$  elliptisch, so lässt sich dies natürlich wieder in zwei senkrecht zueinander linear polarisierte Anteile mit einer gegenseitigen Phasenverschiebung  $e^{i\delta}$  zerlegen, was im Endeffekt in Gleichung (2.26) einem der beiden Terme dazugerechnet wird, sodass sich nur die gegenseitige Phasenverschiebung  $\Lambda$  ändert.

Das Feld am Ausgang des Kristalls lässt sich damit also stets schreiben als [39]:

$$\mathbf{E}(x, y, \Lambda) = (x + s_1 + iy)e^{-\frac{(x+s_1)^2+y^2}{w_0^2}}e^{-i\frac{\Lambda}{2}}\mathbf{d}_1 + \epsilon(x + s_2 + iy)e^{-\frac{(x+s_2)^2+y^2}{w_0^2}}e^{i\frac{\Lambda}{2}}\mathbf{d}_2. \quad (2.28)$$

Hierbei ist  $\epsilon$  ein Intensitätsfaktor, der von der Richtung der Eingangspolarisation abhängt und für linear unter dem Winkel  $\beta$  zum Hauptschnitt polarisiertes Licht gleich  $\cos(\beta)/\sin(\beta)$  ist.

Diese Beschreibung ist unabhängig von der Art des Kristalls und universell auf jede Polarisation anwendbar. Das Ergebnis wird bis auf Phasenfaktoren unverändert bleiben.

So liegt z. B. für  $\mathbf{d}_{in} = \mathbf{d}_1 \cos(\beta) + \mathbf{d}_2 \sin(\beta)e^{i\delta}$  beliebige elliptische Polarisation vor. Mit  $\mathbf{d}_{in} \cdot \mathbf{d}_1 = \cos(\beta)$  und  $\mathbf{d}_{in} \cdot \mathbf{d}_2 = \sin(\beta)e^{i\delta}$  erhält man:

$$\mathbf{E}(x, y, \Lambda) = e^{-i\Lambda/2} \sin(\beta) \left\{ (x + s_1 + iy)e^{-\frac{(x+s_1)^2+y^2}{w_0^2}}\mathbf{d}_1 + \epsilon(x + s_2 + iy)e^{-\frac{(x+s_2)^2+y^2}{w_0^2}}e^{i\frac{\Lambda}{2}+\delta}\mathbf{d}_2 \right\}. \quad (2.29)$$

## 2.2.2 Experimenteller Aufbau

Der Aufbau zu dieser Idee sieht folgendermassen aus (Abb. 2.15, siehe auch [39]): Ein Helium-Neon-Laser (633 nm) mit ca. 15 mW und konstanter Polarisation wird durch das Teleskop L1 (f=12 mm) und L2 (f=300 mm) auf 40 mm Durchmesser aufgeweitet. Der Polarisator Pol1 polarisiert den Strahl linear in einer Richtung, die zusammen mit Pol2 auf optimalen Kontrast des LCD-Displays SLM abgestimmt werden muss. Die LCD-Einheit dreht die Polarisationsebene des einfallenden Strahls pixelweise um bis zu 90°, was mit Hilfe des Polarisators Pol2 in eine Intensitätsänderung übersetzt wird. Durch das Teleskop L3 (f=1000 mm) und L4 (f=300 mm) und die Lochblende P

(Durchmesser 0,4 mm) wird die erste Beugungsordnung des modulierten Strahls herausgefiltert und der Strahl um den Faktor  $1/3$  verkleinert (in den Experimenten wurde eine  $LG_0^1$ -Mode mit  $w_0 = 0,7$  mm verwendet).

Hinter der Linse L4 fällt der Strahl auf den KDP-Kristall, der von einem Schrittmotor mit einer Auflösung von 75 Schritten für  $0,056^\circ$  in der  $x$ - $z$ -Ebene gedreht werden kann. Hinter dem Kristall befindet sich der Aufbau zur Messung der Stokes-Parameter (2.1.2), bestehend aus  $\lambda/4$ -Platte und linearem Polarisator P3 in Kombination mit einer CCD-Kamera der Firma Laser 2000, deren Signal auf dem PC ausgewertet und gespeichert wird. Die Kamera (Modell WinCamD) hat bei einer Auflösung von  $4,7 \mu\text{m}$   $1360 \times 1024$  Pixel auf einem Chip der Grösse  $6,5 \times 4,8$  mm. Die verwendeten Polaris-

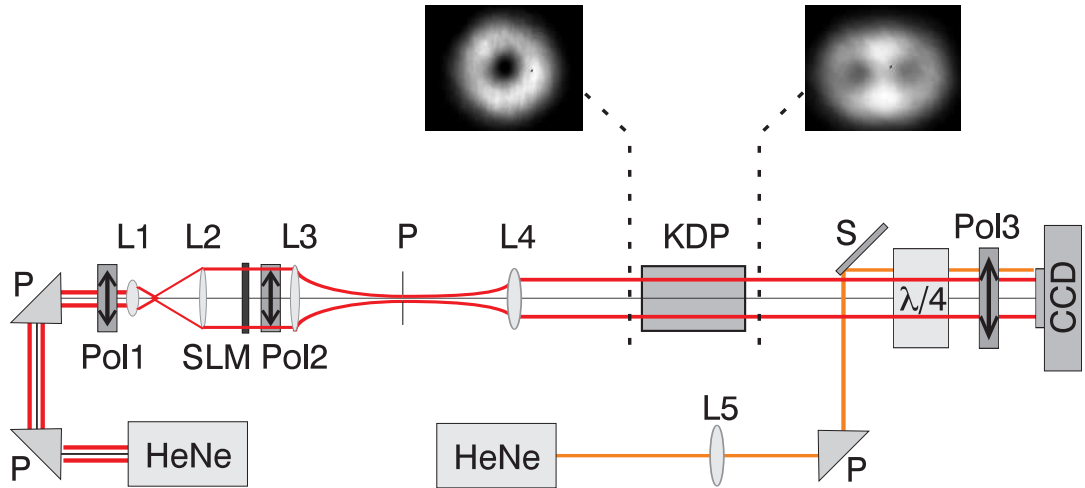


Abbildung 2.15: Experimenteller Aufbau zur Messung der Polarisation eines optischen Wirbels in einem doppelbrechenden Kristall.

toren sind Glan-Taylor-Prismen, die leider nicht mit vollkommen parallelen Ein- und Austrittsflächen hergestellt werden können. Der durchgehende Strahl wird daher aus der optischen Achse abgelenkt und rotiert bei Drehungen des Polarisators um diese. Da sich zudem die Intensitätsverteilung auf der Kamera bei der Messung der unterschiedlichen Stokes-Parameter ändert, wäre es bei der späteren Auswertung unmöglich, die sieben Messungen für die Stokes-Parameter pixelgenau miteinander zu verrechnen. Um trotzdem einen Fixpunkt zur Auswertung der Bilder zu bekommen, wird daher ein zweiter unpolarisierter Helium-Neon-Laser parallel durch Pol3 und das  $\lambda/4$ -Blättchen geführt, dessen Position sich relativ zum Hauptstrahl nicht ändert. Dieser Referenzstrahl wird durch die Linse L5 ( $f=500$  mm) auf die Kamera fokussiert, sodass er auf

der Filmebene einen Durchmesser von 0,2 mm hat.

Der gesamte Aufbau ist zur Verringerung von Vibrationen auf einem schwingungsarm gelagerten Tisch mit einer 12 cm dicken Steinplatte aufgebaut. Um den Einfluss von Luftströmungen zu minimieren, wurde eine Abdeckung aus Alublech und Plastikfolie hergestellt.

### **Lichtmodulator im Eigenbau**

Das zur Lichtmodulation verwendete SLM (**S**patial **L**ight **M**odulator = räumlicher Licht-Modulator) ist im Eigenbau aus einem ausrangierten Video-Projektor („Beamer“) Modell DP 9200 der Firma Proxima hergestellt worden. Der Projektor enthält drei LCD-Displays mit einer Bildschirmdiagonalen von 38 mm (1,5 Zoll) und einer Auflösung von  $1024 \times 768$  Punkten, je eines für Rot, Blau und Grün. Diese Displays werden in Transmission verwendet und drehen je nach angelegter Spannung die Polarisations Ebene des transmittierten Lichts (siehe [40]). Bei dem mir zur Verfügung stehenden Display war dieser Drehwinkel ca.  $120^\circ$ . Um eine Intensitätsmodulation wie in einem Projektor benötigt zu erreichen, werden die Displays mit einer linear polarisierenden Folie beklebt.

Bei dem vorhandenen Gerät wurde einfach ein Display ausgebaut und das dazugehörige Anschlusskabel mit einer Verlängerung aus dem Gerät herausgeführt. Die auf das Display aufgebrachte Polarisationsfolie musste wegen ihrer schlechten optischen Qualität entfernt werden. An ihre Stelle treten jetzt die Glan-Taylor-Polarisatoren Pol1 und Pol2 (Abb. 2.15). Dieses Display wird in Transmission verwendet und einfach über die vorhandene Elektronik des laufenden Projektors angesteuert.

### **Der KDP-Kristall**

Der verwendete einachsige doppelbrechende Kristall (Abb. 2.16, siehe auch [39]) ist ein KDP (Kalium-Dihydrogen-Phosphat) der Größe  $20 \text{ mm} \times 20 \text{ mm} \times 26 \text{ mm}$  und ist so geschnitten, dass die optische Achse einen Winkel von  $40^\circ$  mit der langen Kante bildet. Der Kristall war ursprünglich zur Frequenzverdopplung vorgesehen, daher diese spezielle Geometrie.

Im vorliegenden Experiment fällt der Strahl nahezu senkrecht auf den Kristall, die ordentliche Polarisierung des Kristalls ist senkrecht zu Zeichenebene, die außerordentliche Polarisierung liegt in der Zeichenebene. Für den ordentlichen Strahl hat der Kristall den Brechungsindex  $n_1 = n_{\perp} = 1,507$ , der vom Winkel  $\theta$  zwischen optischer Achse und einfallendem Strahl unabhängig ist. Der außerordentliche Brechungsindex  $n_2 = n(\theta = 40^\circ) = 1,490$  hängt jedoch von  $\theta$  ab und kann durch Drehung des Kristalls um den Winkel  $\gamma$  mittels eines durch einen Schrittmotor gesteuerten Drehtisches variiert werden. Die dadurch induzierte Änderung der optischen Weglänge des aus-

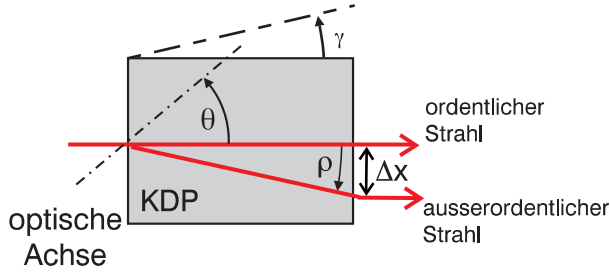


Abbildung 2.16: Der verwendete KDP-Kristall (siehe Text).

serordentlichen Strahls führt zu einer relativen Phasenverschiebung  $\Lambda$  zwischen dem ordentlichen und dem außerordentlichen Strahl mit:

$$\Lambda = 2\pi[n(\theta) - n_{\perp}] \frac{l}{\lambda} \quad (2.30)$$

wenn  $l$  die Kantenlänge des Kristalls und  $\lambda$  die Wellenlänge des Lasers bezeichnet. Eine  $\Lambda$ -Periode entspricht einer Drehung des Kristalls um  $\gamma = 0,056^\circ$  oder 75 Schritten des Schrittmotors. Die durch die Drehung induzierte Änderung der geometrischen Weglängen ist vernachlässigbar.

Die durch die Doppelbrechung verursachte räumliche Verschiebung zwischen ordentlichem und außerordentlichem Strahl ist  $\Delta x$ . Sie ist von dem Winkel  $\rho = \theta'' - \theta'$  zwischen der ordentlichen und der außerordentlichen Strahlrichtung abhängig (siehe Kapitel 2.1.3). Für die vorliegende Anordnung ist  $\rho = 1,52^\circ$  und damit  $\Delta x = 0,7 \text{ mm}$ . Diese räumliche Verschiebung ist für kleine Drehwinkel  $\gamma$  näherungsweise konstant.

## 2.3 Polarisationsingularitäten in doppelbrechenden Kristallen

### 2.3.1 Linear polarisiertes Gauß-Bündel

Als einfachstes Beispiel wurden die Stokes-Parameter eines linear polarisierten Gauß-Bündels nach dem Kristall vermessen. Dazu wurde der Aufbau aus Kapitel 2.2.2 verwendet.

Zuerst wurde der Kristall in eine Stellung gebracht, in der die Phasenverschiebung zwischen ordentlichem und außerordentlichem Strahl  $0 \bmod 2\pi$  war. Um diesen Punkt zu finden, muss der Kristall mit einem unter  $45^\circ$  linear polarisiertem Gauß-Laserbündel beleuchtet werden. Ist  $\Lambda = 0 \bmod 2\pi$ , so ist das austretende Feld im Überlappungsbereich von ordentlichem und außerordentlichem Strahl wieder unter  $45^\circ$  linear polarisiert, was mit einem auf Auslöschung eingestelltem Polarisator detektiert werden kann.

Um keinen Spezialfall zu messen, wurde die Eingangspolarisation des Bündels auf einen Winkel  $\beta \neq 45^\circ$  zum Hauptschnitt des Kristalls eingestellt. Dann wurden die zur Bestimmung der Stokes-Parameter (siehe Kapitel 2.1.2) nötigen sieben Intensitätsmessungen für eine Drehung des Kristalls in einem Bereich von  $4\pi$  mit einer Auflösung von 50 Schritten durchgeführt, das entspricht  $14,4^\circ$  pro Schritt.

Abb. 2.17 zeigt die Werte der gemessenen Stokes-Parameter  $S_0 \dots S_3$  für eine Phasenverschiebung  $\Lambda = 0^\circ$ .

Die erwartete Form der Nullflächen der Stokes-Parameter in Abhängigkeit von  $\Lambda$  lässt sich leicht berechnen. Das Feld hinter dem Kristall ist:

$$\mathbf{E}(x, y, \Lambda) = e^{-\frac{(x+s/2)^2+y^2}{w_0^2}} \mathbf{d}_1 + \epsilon e^{-\frac{(x-s/2)^2+y^2}{w_0^2}} e^{i\Lambda} \mathbf{d}_2, \quad (2.31)$$

wobei hier der Einfachheit halber die laterale Verschiebung  $s$  in  $x$ -Richtung symmetrisch zum Ursprung angenommen wurde und  $\epsilon = \frac{\cos(40^\circ)}{\sin(40^\circ)}$  gilt. Die Gleichungen für die Nullstellen von  $S_1$ ,  $S_2$  und  $S_3$  sind dann:

$$S_1 : \quad x = \frac{\ln(\epsilon)}{s w_0^2} \quad (2.32)$$

$$S_2 : \quad 0 = 2 \cos(\Lambda) e^{-4 \frac{x^2+y^2+(s/2)^2}{w_0^2}} \quad (2.33)$$

$$S_3 : \quad 0 = 2 \sin(\Lambda) e^{-4 \frac{x^2+y^2+(s/2)^2}{w_0^2}}. \quad (2.34)$$

Gleichung (2.32) beschreibt eine Ebene parallel zur  $y$ - $\Lambda$ -Ebene, Gleichung (2.33) be-



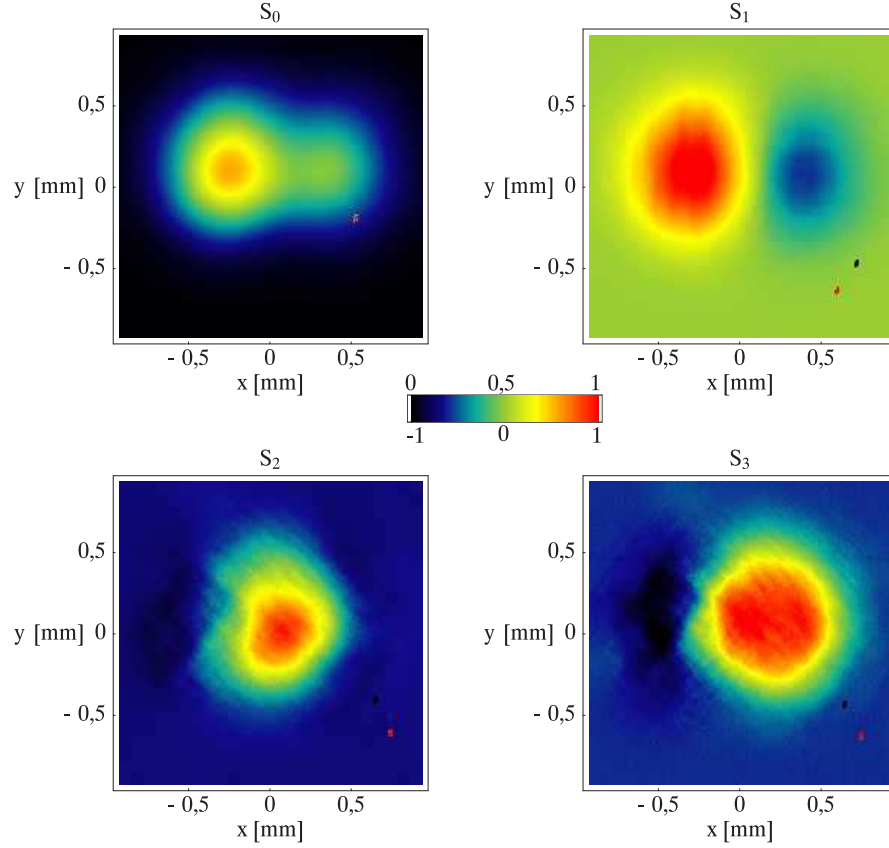


Abbildung 2.17:

Gemessene Stokes-Parameter  $S_0, \dots, S_3$  für ein linear polarisiertes Gauß-Bündel nach einem doppelbrechenden Kristall. Der experimentelle Aufbau ist wie in Abb. 2.2.2. Die Phasenverschiebung  $\Lambda$  ist hier 0.  $S_0$  (links oben) entspricht der Gesamtintensität des Feldes. Die Intensitäten sind nach der gezeigten Falschfarbenskala skaliert, wobei die obere Skala für  $S_0$ , die untere Skala für  $S_1, S_2$  und  $S_3$  gilt.

schreibt, da der Exponentialterm nie verschwindet, Ebenen parallel zur  $x$ - $y$ -Ebene durch die Punkte  $\cos(\Lambda) = 0$  und die L-Flächen (Gleichung (2.34) für die Nullstellen von  $S_3$ ) gleichen wieder bis auf eine Verschiebung um  $\pi/2$  in  $\Lambda$ -Richtung den Nullflächen von  $S_2$ .

Zeichnet man die Nullstellen der experimentell ermittelten Stokes-Parameter  $S_1, S_2$  und  $S_3$  in Abhängigkeit von  $\Lambda$ , erhält man die in Abb. 2.18 gezeigten Flächen, die dieser Vorhersage zumindest topologisch entsprechen. Abb. 2.18 (a) zeigt die Nullflächen von  $S_1$  und  $S_2$  gleichzeitig, um an ihrem Schnitt die Lage der C-Linien ablesen zu können. Die Nullfläche von  $S_1$  ist annähernd eben und deutlich in  $x$ -Richtung verschoben, die

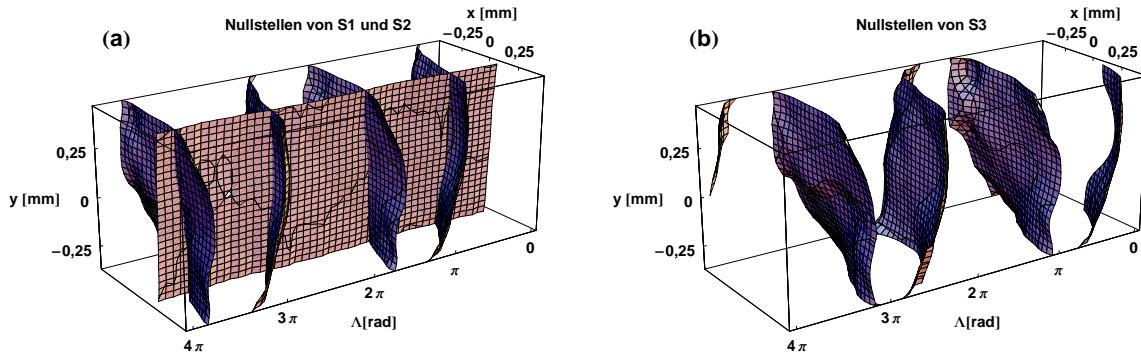


Abbildung 2.18:

Die gemessenen Nullflächen der Stokes-Parameter des Feldes eines linear polarisierten Gauß-Bündels hinter dem doppelbrechenden Kristall. (a) zeigt die Nullflächen für  $S_1$  und  $S_2$ , ihr Schnitt gibt die Lage der C-Linien. (b) zeigt die Nullstellen von  $S_3$ , die den L-Flächen entsprechen. Die Bilder sind unsymmetrisch, da die Eingangspolarisation  $\neq 45^\circ$  war.

Nullflächen von  $S_2$  sind leider nicht so eben, haben aber immerhin eine Periode von  $\pi$  und sind gegen die Nullflächen von  $S_3$  (Abb. 2.18 (b)) um  $\pi/2$  verschoben. Man erhält also im Idealfall C-Linien als Parallelen zur  $y$ -Achse, getrennt von L-Ebene parallel zur  $x$ - $y$ -Ebene.

### 2.3.2 Linear polarisierter Wirbel mit topologischer Ladung 1, allgemeiner Fall ( $\beta \neq 45^\circ$ )

#### Experimentelle Ergebnisse, zweidimensional

Mit demselben Aufbau wie in Kapitel 2.3.1 erhält man, wenn man mit dem SLM ein  $LG_0^1$ -Bündel erzeugt, die Überlagerung zweier  $LG_0^1$ -Bündel wie in Abb. 2.14 und darf hier nun auf ein interessanteres Ergebnis ähnlich den Bildern in Kapitel 2.1.4 hoffen [39].

Wieder wurde, um einen allgemeinen Fall zu messen, die Eingangspolarisation des Bündels unter einem Winkel  $\beta \neq 45^\circ$  zum Hauptschnitt des Kristalls gewählt und die Phasenverschiebung  $\Lambda$  zwischen ordentlichem und auserordentlichem Strahl auf 0 mod  $2\pi$  eingestellt. Dann wurden die Stokes-Parameter für eine Drehung des Kristalls in einem Bereich von  $-\pi \dots 5\pi$  mit einer Auflösung von 124 Schritten gemessen.

Aus den Stokes-Parametern wurden die Elliptizität  $\omega$  und der Azimutwinkel  $\alpha$  der Polarisationsellipsen an jedem Punkt des Bündelquerschnittes ermittelt, um damit die Polarisationsellipsen des Feldes zu zeichnen.

Für eine Phasenverschiebung von  $\Lambda = 0$  erhält man für die Stokes-Parameter Verteilungen wie in Abb. 2.19. Die Verteilung für  $S_0$  ist die Gesamtintensität des Feldes, und in der Verteilung von  $S_3$  kann man bereits die Lage und Art der Polarisationsingularitäten erkennen: Ein Maximum und ein Minimum der Intensität deuten auf einen links- und einen rechtshändigen C-Punkt hin, da dort  $S_3$  den Wert  $\pm 1$  annimmt.

Wertet man die erhaltenen Daten wie in 2.1.2 beschrieben nach Gleichungen (2.7) und (2.8) aus, so erhält man die in Abb. 2.20 und 2.21 gezeigten Verteilungen für  $\alpha$  und  $\omega$ . In Abb. 2.20 sind die Azimutwinkel  $\alpha$  der Polarisationsellipsen, kodiert nach der gezeigten Skala, in einer Falschfarbendarstellung aufgetragen. Überlagert sind Höhenlinien, also Linien gleichen Winkels, „Äqui-Alpha-Linien“. Nachdem der singuläre Charakter von C-Punkten darin besteht, dass der Azimutwinkel  $\alpha$  unbestimmt wird, liegen an C-Punkten alle möglichen Winkel  $\alpha$  vor. Man erkennt sie daher in Abb. 2.20 als Ursprung der Äqui-Alpha-Linien. Die (rein formale) Analogie zu Phasensingularitäten, die ja am Ursprung der Linien gleicher Phase liegen, ist deutlich (siehe Kapitel 1.1.1). Der Grund dafür ist, dass C-Punkte die Singularitäten der Phase des (abstrakten) Feldes  $S_1 + iS_2$  sind. Im Unterschied zu Singularitäten der Phase liegt hier jedoch eine  $\pi$ -Symmetrie anstelle der  $2\pi$ -Symmetrie vor, wodurch die generischen C-Punkte Index

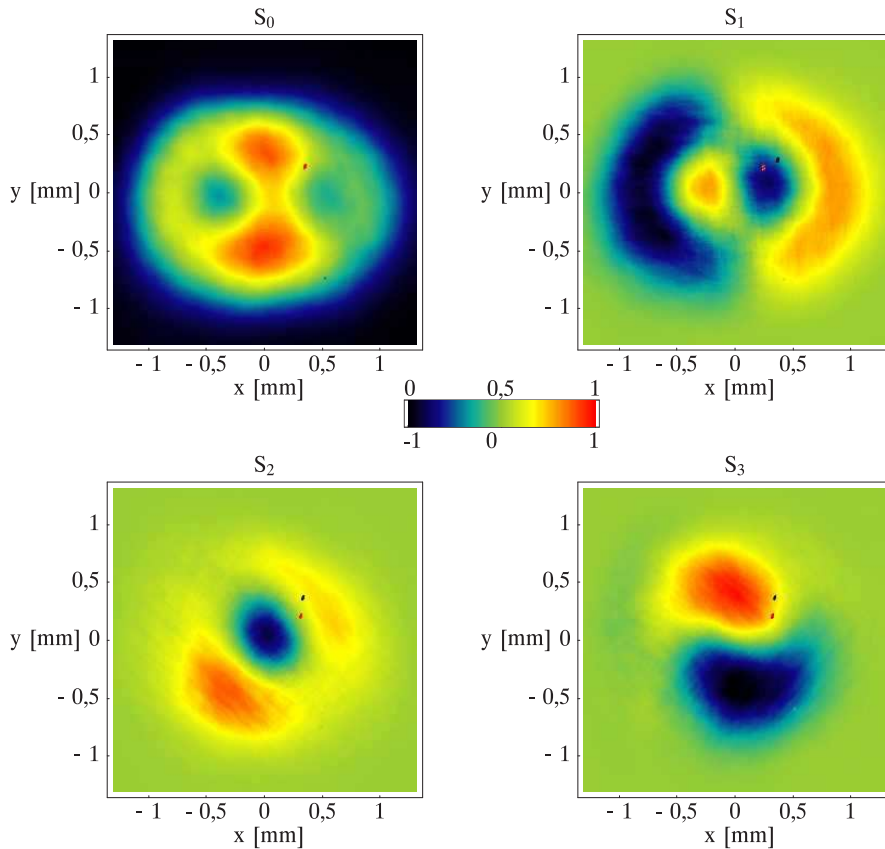


Abbildung 2.19:

Gemessene Stokes-Parameter  $S_0, \dots, S_3$  für die Konfiguration aus Abb. 2.14. Die Phasenverschiebung  $\Lambda$  ist hier 0.  $S_0$  (links oben) entspricht der Gesamtintensität des Feldes. Aus der Verteilung von  $S_3$  (rechts unten) kann man bereits auf zwei C-Punkte schließen (Maximum und Minimum für rechts- bzw. linkszirkular polarisiertes Licht. Die Intensitäten sind nach der gezeigten Falschfarbenskala skaliert, wobei die obere Skala für  $S_0$ , die untere Skala für  $S_1, S_2$  und  $S_3$  gilt.

$\pm 1/2$  haben, im Unterschied zu generischen Phasensingularitäten mit Index  $\pm 1$ .

In Abb. 2.21 ist der Betrag der Elliptizität  $\omega$  mit der gleichen Falschfarbenskala wie

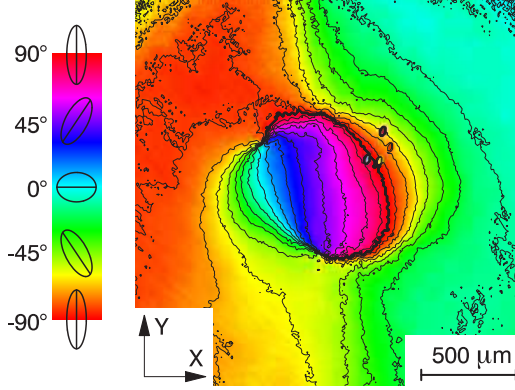


Abbildung 2.20: Verteilung des Azimutwinkels  $\alpha$  für  $\Lambda = 0^\circ$  mit Äqui-Alpha-Linien (Linien gleichen Winkels). Die Falschfarbendarstellung ist nach nebenstehender Skala kodiert. Man kann die Lage der C-Punkte als die Stellen ablesen, von denen viele Äqui-Alpha-Linien ausgehen.

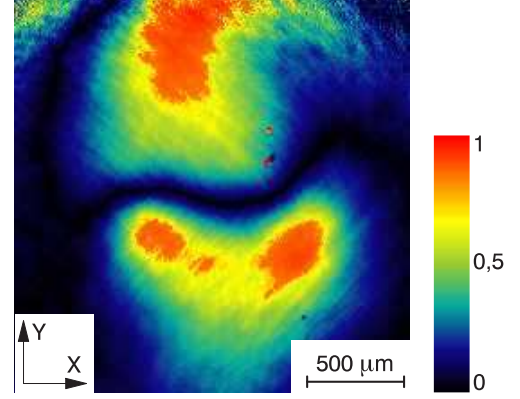


Abbildung 2.21: Verteilung des Betrags der Elliptizität  $\omega$  für  $\Lambda = 0^\circ$ . Die Nullstellen sind Punkte linearer Polarisation. Sie bilden eine L-Linie. Die Falschfarben sind nach der abgebildeten Skala kodiert.

in Abb. 2.19 gezeichnet. Die Nullstellen dieser Verteilung sind die Punkte rein linearer Polarisation, also die L-Linien. Diese Verteilung wurde geglättet und daraus die Höhenlinie für den Wert  $\omega = 0$  (die L-Linie) entnommen, um sie in Abb. 2.22 und 2.23 überlagert einzuzeichnen.

Aus den Verteilungen für  $\alpha$  und  $\omega$  wurden sodann die Polarisationsellipsen an jedem fünften Punkt des Feldes aus den Messdaten berechnet und dem Intensitätsbild überlagert (siehe Abb. 2.22). Diese Rekonstruktion gelingt topologisch im Vergleich mit dem berechneten Bild in Abb. 2.14 so gut, dass auf Simulationen zur Diskussion der Ergebnisse im Weiteren meist verzichtet wird. Topologisch meint, dass Lage und Art der C-Punkte und L-Linien annähernd mit den Rechnungen übereinstimmen. Genauere Details wie z. B. eine exakte Kreisform der L-Linien sind für die Diskussion unwichtig.

Abb. 2.22 wurden zusätzlich zwei Kreise (grün und blau) an den Positionen der C-Punkte (entnommen aus Abb. 2.20) und die L-Linie (gelb) überlagert. Die zwei schwarzen Quadrate zeigen die Position der optischen Wirbel in den getrennt gemessenen ordentlichen und ausserordentlichen Strahlen. Die Verteilung enthält wie erwartet (siehe Abb. 2.14) zwei C-Punkte verschiedener Händigkeit, die von einer zumindest im In-

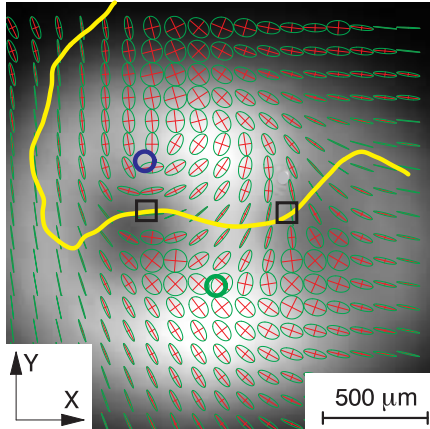


Abbildung 2.22: Das mit den Verteilungen für  $\alpha$  und  $\omega$  (Abb. 2.20 und 2.21) rekonstruierte Ellipsenfeld zeigt den Polarisationszustand des Feldes für  $\Lambda = 0^\circ$  an jedem Punkt. Überlagert ist die L-Linie (gelb); die Positionen der beiden C-Punkte sind mit einem blauen und einem roten Kreis markiert. Die schwarzen Quadrate kennzeichnen die Lage der Phasensingularitäten in den (getrennt gemessenen) ordentlichen und ausserordentlichen Strahlen.

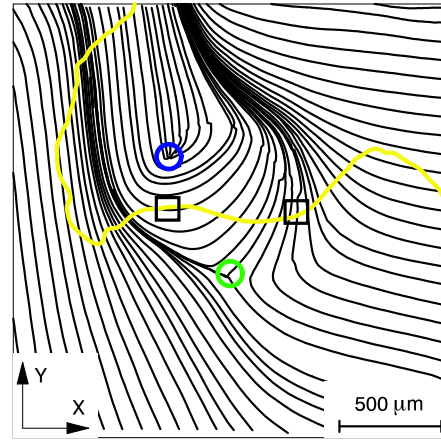


Abbildung 2.23: Die „Flusslinien“ der Verteilung für  $\alpha$ , also die Linien, deren Tangenten die großen Halbachsen der Polarisationsellipsen bilden. Man sieht deutlich, dass die beiden C-Punkte vom Typ „lemon“ (blau) bzw. „star“ (grün) sind.

nenbereich annähernd geraden, nicht geschlossenen L-Linie getrennt werden, was der gerechneten Verteilung in Abb. 2.14 entspricht.

Zusätzlich gelang es sogar, aus den Werten für den Azimuthwinkel  $\alpha$  die Flusslinien des Feldes, also die Linien, deren Tangenten die großen Halbachsen der Ellipsen bilden, zu rekonstruieren. Dazu wurde mit einem simplen Algorithmus von jedem Randpunkt des Feldes ein Schritt in Richtung eines Vektors mit dem Winkel  $\alpha$  zur x-Achse gemacht und der Wert von  $\alpha$  an der Zielposition ausgewertet. Iteration des Verfahrens liefert Punkte einer Linie durch die  $\alpha(x, y)$ -Ebene, deren Tangenten an jeder Stelle  $(x, y)$  den Wert  $\alpha(x, y)$  haben. Diese Flusslinien sind in Abb. 2.23 gezeigt, aus ihrer Form in der Nachbarschaft der C-Punkte lässt sich der Typ bestimmen: Hier liegen C-Punkte vom Typ „lemon“ (blau, oben) und „star“ (grün, unten) vor.

Wie präsentieren sich diese Verteilungen nun für eine andere Phasenverzögerung  $\Lambda$ ? Natürlich ändert sich der Polarisationszustand des Feldes völlig, da ja z. B. bei einer Änderung der relativen Phase um  $\pi/2$  zwischen den zwei senkrechten Komponenten der Polarisation linear polarisiertes Licht in elliptisch polarisiertes übergeht. Wertet



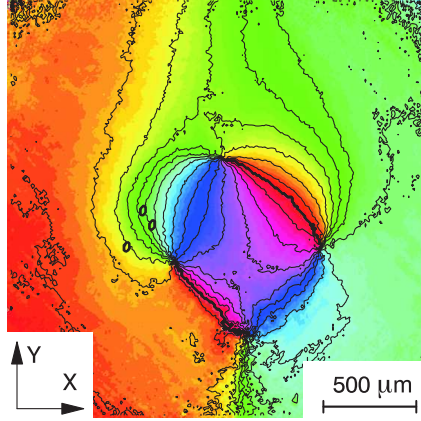


Abbildung 2.24: Verteilung des Azimuthwinkels  $\alpha$  für  $\Lambda = 0,9\pi$  mit Äqui-Alpha-Linien. Im Gegensatz zu  $\Lambda = 0^\circ$  treten hier vier C-Punkte auf.

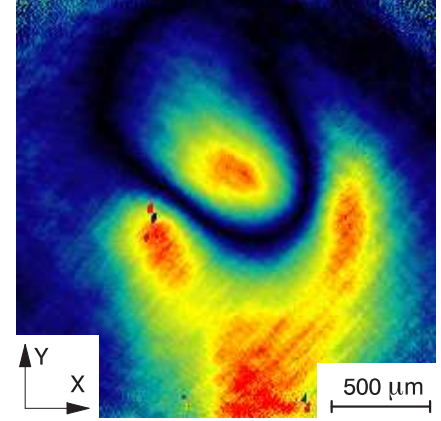


Abbildung 2.25: Verteilung des Betrags der Elliptizität  $\omega$  für  $\Lambda = 0,9\pi$ . Die L-Linie ist hier geschlossen und nahezu kreisförmig.

man die Stokes-Parameter für  $\Lambda = 0,9\pi$  aus, so sieht man schon aus der Darstellung von  $\alpha$  (Abb. 2.24), dass nun vier anstelle von zwei C-Punkten auftreten. Aus dem Plot für den Betrag von  $\omega$  (Abb. 2.25) erhält man eine L-Linie, die diesmal geschlossen und näherungsweise kreisförmig ist (Rechnungen weiter unten zeigen, dass diese C-Linie idealerweise ein Kreis ist) und einen der C-Punkte von den anderen drei, die andere Händigkeit haben, trennt.

Abb. 2.26 zeigt die für diesen Fall rekonstruierten Ellipsen, wieder mit überlagerter L-Linie und markierten C-Punkten. Die rekonstruierten Flusslinien (Abb. 2.27) zeigen, dass diesmal zwei „lemon“- und zwei „star“-Typ C-Punkte vorliegen. Eine Änderung der Phasendifferenz  $\Lambda$  um  $0,9\pi$  zwischen dem ordentlichen und dem ausserordentlichen Strahl, bewerkstelligt durch eine Drehung des Kristalls um den Winkel  $0,025^\circ$ , ändert also die Anzahl, Form und Lage der Polarisationsingularitäten vollständig. Diese Veränderung sollte erstens stetig und zweitens, da die Phase ja eine  $2\pi$  periodische Größe ist, periodisch in  $\Lambda$  ablaufen.

Nun entspricht eine Änderung der Phasendifferenz zwischen dem ordentlichen und dem ausserordentlichen Strahl ja einer Änderung des Unterschieds in den optischen Weglängen. Dieser Unterschied akkumuliert sich beim Durchgang des Wirbels durch den Kristall linear. Sieht man von der Änderung der lateralen Verschiebung  $s_j$ , die auf einer völlig anderen Längenskala abläuft, ab, so kann man damit mit einer Drehung des Kristalls die Entwicklung der Polarisationsingularitäten **im Inneren** des Kristalls

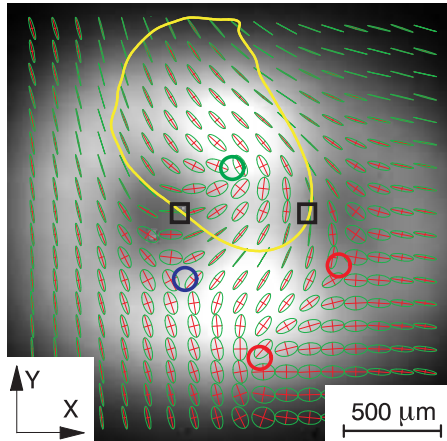


Abbildung 2.26: Die Polarisationsellipsen des Feldes, hier für  $\Lambda = 0,9\pi$ . Überlagert ist wieder die diesmal geschlossene L-Linie (gelb). Die in diesem Fall vier auftretenden C-Punkte sind mit farbigen Kreisen (blau, grün, zweimal rot) markiert.

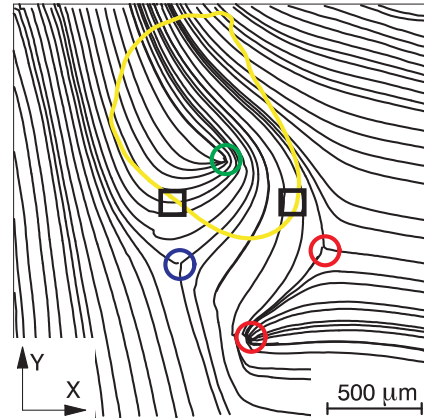


Abbildung 2.27: Die „Flusslinien“ für  $\Lambda = 0,9\pi$ . Hier treten zwei C-Punkte vom Typ „star“ (blau und rot) und zwei vom Typ „lemon“ (grün und rot) auf.

simulieren und erhält damit eine Veranschaulichung der Entfaltung einer Phasensingularität in Polarisationsingularitäten in einem doppelbrechenden Kristall.

## Berechnung der Singularitäten in drei Dimensionen

Die Form dieser Polarisationsingularitäten kann man sich wieder wie in Kapitel 2.1.4 mithilfe der Nullstellen der Stokes-Parameter überlegen. Es ist ja das Feld hinter dem Kristall in Abhängigkeit von  $\Lambda$ :

$$\mathbf{E}(x, y, \Lambda) = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = LG_0^1(x - \frac{s}{2}, y) \cdot \mathbf{d}_1 + \epsilon LG_0^1(x + \frac{s}{2}, y) e^{i\Lambda} \cdot \mathbf{d}_2. \quad (2.35)$$

Hier ist wieder die laterale Verschiebung  $s$  in  $x$ -Richtung symmetrisch zum Ursprung angenommen und  $\epsilon = \frac{\cos(40^\circ)}{\sin(40^\circ)}$  gesetzt. Mithilfe von  $S_1 = |E_1|^2 - |E_2|^2$ ,  $S_2 = |E_1| \cdot |E_2| \cdot \cos(\Delta\Phi)$  und  $S_3 = |E_1| \cdot |E_2| \cdot \sin(\Delta\Phi)$  ( $\Delta\Phi$  ist der gesamte Phasenunterschied zwischen  $\mathbf{E}_1$  und  $\mathbf{E}_2$ , siehe Kapitel 2.1.2), sind die Stokes-Parameter auch für diesen etwas weniger übersichtlichen Fall leicht anzugeben und führen zu den folgenden Gleichungen



für die Nullstellen von  $S_1$ ,  $S_2$  und  $S_3$ :

$$S_1 : \quad [(x - \frac{s}{2})^2 + y^2]e^{2sx/w_0^2} = \epsilon^2[(x + \frac{s}{2})^2 + y^2]e^{-2sx/w_0^2} \quad (2.36)$$

$$S_2 : \quad x^2 + [y + \frac{s}{2} \cot(\delta_{S_2})]^2 = \frac{s^2}{4}[1 + \cot(\delta_{S_2})^2] \quad (2.37)$$

$$S_3 : \quad x^2 + [y + \frac{s}{2} \cot(\delta_{S_3})]^2 = \frac{s^2}{4}[1 + \cot(\delta_{S_3})^2]. \quad (2.38)$$

Dabei sind die Winkel  $\delta_{S_2}$  und  $\delta_{S_3}$  definiert als:

$$\delta_{S_2} = (\frac{\pi}{2} \cdot (2m + 1) - \Lambda) \quad (m \in \mathbb{Z}) \quad (2.39)$$

$$\delta_{S_3} = (\pi \cdot 2m - \Lambda) \quad (m \in \mathbb{Z}). \quad (2.40)$$

Setzt man diese Definitionen ein, so vereinfachen sich die Gleichungen noch etwas:

$$S_1 : \quad [(x - \frac{s}{2})^2 + y^2]e^{2sx/w_0^2} = \epsilon^2[(x + \frac{s}{2})^2 + y^2]e^{-2sx/w_0^2} \quad (2.41)$$

$$S_2 : \quad x^2 + [y + \frac{s}{2} \tan(\Lambda)]^2 = \frac{s^2}{4}[1 - \tan(\Lambda)^2] \quad (2.42)$$

$$S_3 : \quad x^2 + [y - \frac{s}{2} \cot(\Lambda)]^2 = \frac{s^2}{4}[1 - \cot(\Lambda)^2]. \quad (2.43)$$

Dies beschreibt drei Flächen, deren Form leider nur für  $S_2$  und  $S_3$  leicht anzugeben ist. Die Nullfläche von  $S_2$  wird durch Kreise mit Radius  $r = \frac{s}{2}\sqrt{(1 - \tan(\Lambda)^2)}$  um den Punkt  $(0, \frac{s}{2} \tan(\Lambda))$  gebildet, sie ähnelt also der Fläche in dem Beispiel der Überlagerung zweier Wirbel ohne Gaußsche Einhüllende (Kapitel 2.1.4. Die Fläche für  $S_3$  ist wieder einfach um  $\pi/2$  in  $\Lambda$ -Richtung verschoben.

Die Nullflächen von  $S_1$  sind wie in Kapitel 2.1.4, Beispiel 2.1.5 nicht mehr in geschlossener Form anzugeben. Sie können jedoch wie in Abb. 2.28 in Abhängigkeit von der seitlichen Verschiebung  $s$  gezeichnet werden. Die Abbildung zeigt für  $s = 0,1w_0$ ,  $s = 1,5w_0$  und  $s = 1,6w_0$  Schnitte durch die ( $\Lambda$ -invarianten) Nullflächen von  $S_1$ . Die Nulllinien ähneln dem Querschnitt eines Flüssigkeitstropfens, der eine Oberfläche durchdringt. Für  $s \rightarrow 0$  wird die Nullfläche zu einem Zylinder und einer Ebene im Unendlichen (ähnlich Abb. 2.28 (a)), für  $s \neq 0$  wandert die Ebene ins Endliche und wird dabei scheinbar durch die Nähe des Zylinders verformt (Abb. 2.28 (b)), bis sich für  $s > w_0$  ein zweiter Zylinder abschnürt (Abb. 2.28 (c)).

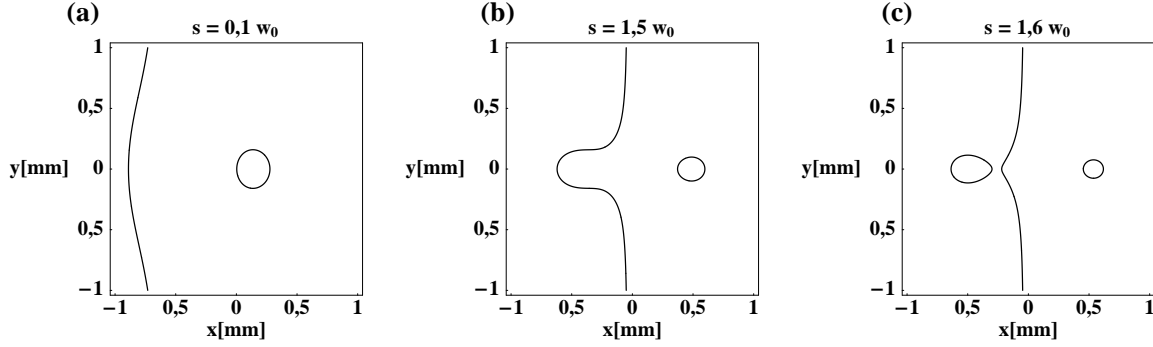


Abbildung 2.28:

Nach Gleichung 2.41 für  $s = 0,1 w_0$  (a),  $s = 1,5 w_0$  (b) und  $s = 1,6 w_0$  (c) gezeichnete Querschnitte durch die Nullflächen von  $S_1$ . Die Flächen bestehen aus einer Ebene und einem Zylinder, die sich durch gegenseitigen Einfluss verformen zu scheinen. Für  $s > 1,6 w_0$  wird ein zweiter Zylinder abgeschnürt.

## Experimentelle Ergebnisse in drei Dimensionen

Um die Nullflächen der Stokes-Parameter und damit die Form der L-Flächen und C-Linien experimentell zu erhalten, wurden die Stokes-Parameter über einen Bereich von ca.  $6\pi$  in Abständen von  $0,16\pi$  gemessen und daraus jeweils die Verteilung des Azimutwinkels  $\alpha$  und der Elliptizität  $\omega$  bestimmt.

Die aus den experimentellen Daten berechneten Nullflächen der Stokes-Parameter mit den bestimmten C-Linien zeigen für  $S_1$ ,  $S_2$  und  $S_3$  Abb. 2.29 (a), (b) und (d) in einem Bereich von 0 bis  $4\pi$ . Abb. 2.29 (c) zeigt  $S_1$  und  $S_2$  gemeinsam, um die Form der aus dem Schnitt entstehenden C-Linien zu verdeutlichen. Die Abbildung ist aus einem anderen Blickwinkel gezeichnet, um ansonsten verborgene Teile der Nullfläche von  $S_1$  sehen zu können. Wie man sieht, ist eine klare topologische Übereinstimmung mit der vorhergesagten Form der Flächen (Gleichungen (2.41), (2.42) und (2.43)) vorhanden: die Nullflächen von  $S_1$  sind näherungsweise konstant in  $\Lambda$  und von der Form eines deformierten Zylinders und einer deformierten Ebene, die von  $S_2$  und  $S_3$  sind um  $\pi/2$  gegeneinander verschoben und bestehen beide aus Schläuchen mit näherungsweise kreisförmigem Querschnitt. Der Radius und der Mittelpunkt der Schläuche sind von  $\Lambda$  abhängig, und der Radius geht für  $\Lambda \rightarrow \pi/2$  bei  $S_2$  (bzw.  $\Lambda \rightarrow \pi$  bei  $S_3$ ) gegen Unendlich, sodass aus dem kreisförmigen Querschnitt eine Gerade wird.

Aus dem Schnitt der Nullflächen von  $S_1$  und  $S_2$  erhält man wie in Abb. 2.29 (c)

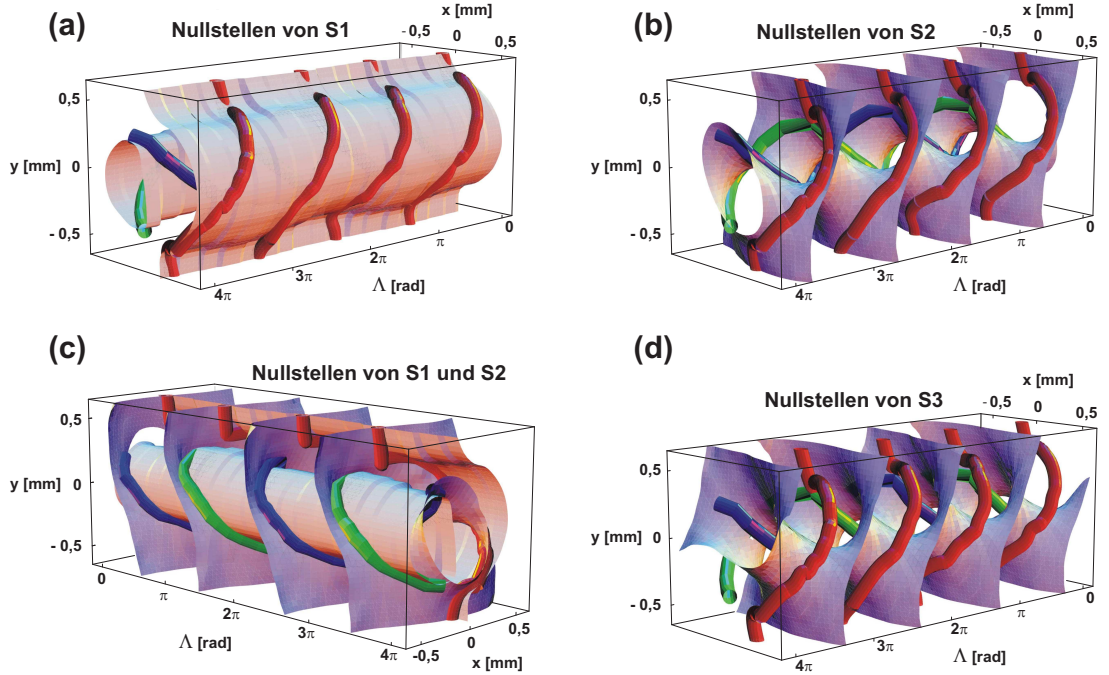


Abbildung 2.29:

Experimentell gewonnene Nullflächen der Stokes-Parameter mit den überlagerten C-Linien (rot, blau und grün) eines Wirbels nach einem doppelbrechenden Kristall. (a), (b) und (d) zeigen die Nullflächen für  $S_1$ ,  $S_2$  und  $S_3$ , (c) zeigt  $S_1$  und  $S_2$  gemeinsam aus einem anderem Blickwinkel.

angedeutet die C-Linien. Dieses Vorgehen ist jedoch mit den experimentellen Daten schwierig. Einfacher ist es, die Koordinaten der C-Punkte händisch aus den Verteilungen des Azimuthwinkels  $\alpha$  (Abb. 2.20) zu entnehmen und dreidimensional gegen  $\Lambda$  aufzutragen. Das Ergebnis dieser Auftragung ist in Abb. 2.30 zusammen mit der Nullfläche von  $S_3$ , also der L-Fläche, zu sehen. Die L-Fläche ist hier nur über einen Bereich von  $2\pi$  gezeichnet, die C-Linien jedoch über einen Bereich von  $4\pi$ , um ansonsten verdeckte Teile der C-Linien darstellen zu können.

Mit der vorliegenden Konfiguration ( $s = 0,7w_0$ ) erhält man ein Paar von C-Linien (im Bild blau und grün), die eine Doppelspirale mit Steigung  $2\pi$  bilden, und zwei weitere Paare (rot) pro  $4\pi$ , die von  $y = -\infty$  kommen und nach  $y = +\infty$  verschwinden.

Die roten C-Linien bilden je zwei Knie. Würde man die Schnittpunkte dieser roten C-Linien mit verschiedenen  $x$ - $y$ -Ebenen betrachten, so hätte man den Eindruck, dass an diesen Knien Paarbildung bzw. Annihilation von C-Punkten auftritt. Würde man

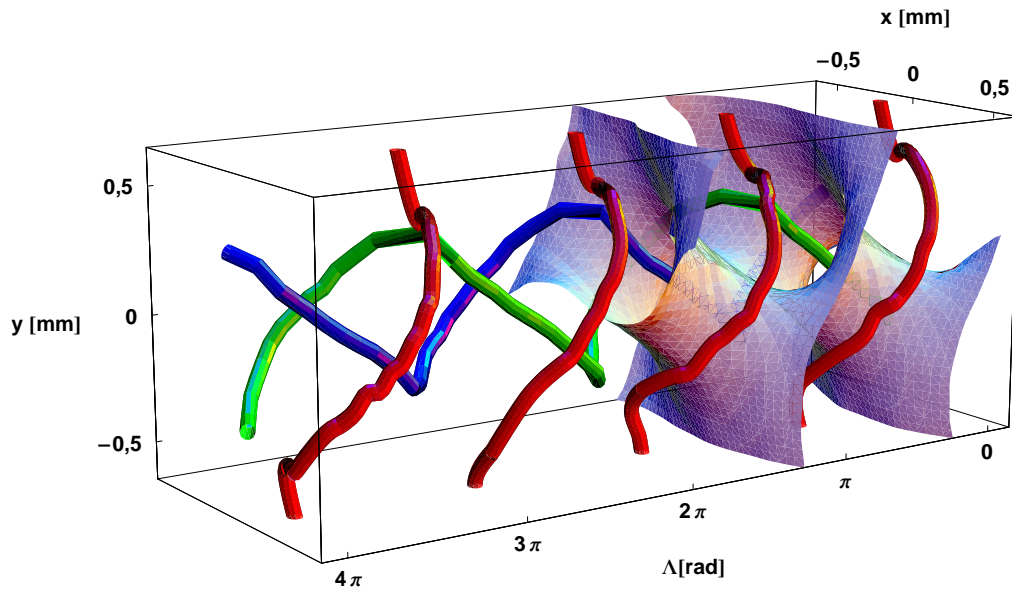


Abbildung 2.30:

*L-Flächen und C-Linien des Feldes eines linear polarisierten optischen Wirbels (unsymmetrischer Fall,  $\beta = 40^\circ$ ) nach einem doppelbrechenden Kristall. Zwei der C-Linien bilden eine Doppelspirale mit Steigung  $2\pi$  (blau und grün), die anderen vier kommen von und verschwinden nach  $y = \pm\infty$ . Die Schnitte durch die L-Fläche bestehen aus Kreisen mit  $\Lambda$ -abhängigem Radius und Mittelpunkt, die bei  $0 \bmod \pi$  in Geraden entarten und in drei Dimensionen zwei Schläuche bilden.*

die  $x$ - $y$ -Ebene kontinuierlich in  $\Lambda$ -Richtung durch Abb. 2.30 bewegen, würde man als Schnittpunkte mit den C-Linien zwei C-Punkte bekommen, die umeinander kreisen (die Schnittpunkte mit der blauen und der grünen Linie). Die Schnittpunkte mit den roten Linien ergeben zuerst (bei  $\Lambda = 0$ , siehe auch Abb. 2.22) keinen C-Punkt. Für wachsende  $\Lambda$  entstehen dann zwei C-Punkte mit entgegengesetztem Index am selben Ort (Paarbildung an der Stelle des oberen Knies), sodass nun vier C-Punkte wie in Abb. 2.26 vorliegen. Einer von diesen verschwindet nach  $y = +\infty$ , der andere wandert in negativer  $y$ -Richtung durch die Schnittebene. Bei  $\Lambda = \pi$  taucht dann, von  $y = -\infty$  kommend, ein weiterer C-Punkt auf. Diese beiden C-Punkte löschen sich dann gegenseitig aus (an der Stelle des unteren Knies).

Der Schnitt mit den L-Flächen ergibt eine L-Linie, die bei  $\Lambda = 0$  idealerweise eine Gerade ist, die den blauen und grünen C-Punkt trennt (siehe Abb. 2.22). Für  $\Lambda \neq 0$  verbiegt sich diese Gerade zu einem Kreis mit  $\Lambda$ -abhängigem Radius und Mittelpunkt, der den grünen C-Punkt umschließt. Bei  $\Lambda = \pi$  öffnet sich dieser Kreis, um nun den

blauen C-Punkt zu umschließen. Dieser Ablauf wiederholt sich periodisch mit Periode  $\pi$ .

Für andere Werte von  $s$  würde man nach Abb. 2.28 (c) mehr C-Linien erhalten, da nun zwei statt nur einem Zylinder als Nullflächen von  $S_1$  die von  $S_2$  schneiden würden. Man bekäme zwei Doppelspiralen, die auf den beiden Zylindern der Nullfläche von  $S_1$  aufgewickelt sind und die vier roten C-Linien aus Abb. 2.30, die nun auf der die Doppelspiralen trennenden Fläche liegen. Experimentell wäre dies entweder durch einen anderen (längeren) Kristall oder durch ein Bündel mit kleinerem  $w_0$  zu erreichen.

### 2.3.3 Linear polarisierter Wirbel mit topologischer Ladung 1, symmetrischer Fall ( $\beta = 45^\circ$ )

Wählt man die Polarisationsrichtung des  $LG_0^1$ -Bündels vor dem Kristall so, dass die Intensitäten im ordentlichen und ausserordentlichen Strahl gleich sind, d.h. für diesen Aufbau eine lineare Polarisation unter  $\beta = 45^\circ$ , so tritt ein entarteter Spezialfall von Abb. 2.30 auf. Die Form der Nullflächen von  $S_2$  und damit auch  $S_3$  bleibt unverändert, wie aus den Gleichungen (2.42) und (2.43) (die Gleichungen sind unabhängig von  $\epsilon$ ) zu sehen ist. Die Nullflächen von  $S_1$  sind jedoch von  $\epsilon$  abhängig, wie Gleichung (2.41) zeigt.

Für  $\epsilon = 1$  und verschiedene Abstände  $s \neq 0$  sind die Querschnitte durch die Nullfläche von  $S_1$  jetzt symmetrisch. Abb. 2.31 (a)-(c) zeigt die Querschnitte für  $s = 0,7w_0$ ,  $\sqrt{2}w_0$  und  $1,5w_0$ . Für  $s \rightarrow 0$  wird der Querschnitt von  $S_1$  zu einem Kreis um den Ursprung,

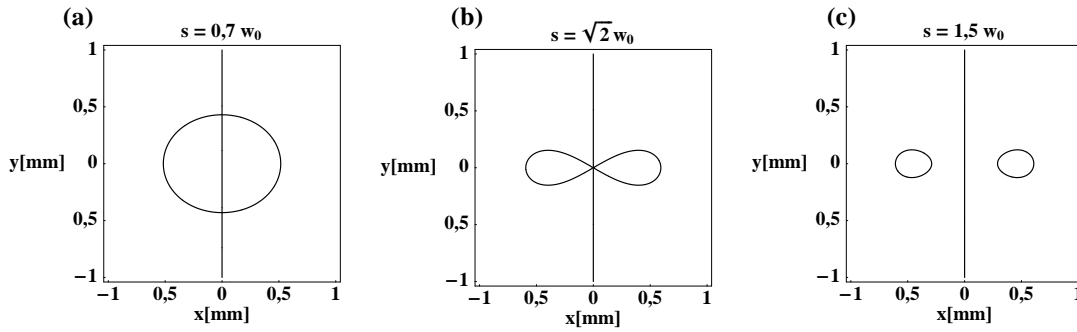


Abbildung 2.31:

Nach Gleichung (2.41) für  $\epsilon = 1$  und  $s = 0,7w_0$  (a),  $s = \sqrt{2}w_0$  (b) und  $s = 1,5w_0$  (c) gezeichnete Querschnitte durch die Nullflächen von  $S_1$ . Die Flächen bestehen aus einer Ebene, die einen Zylinder symmetrisch einschnürt und für  $s > \sqrt{2}w_0$  in zwei Zylinder zerteilt.

der von der Gerade  $x = 0$  geschnitten wird. Wächst  $s$ , so bleibt die Gerade  $x = 0$  eine Nullstelle, der Kreis wird an den Schnittstellen mit der Gerade immer weiter eingeschnürt, bis für  $s > \sqrt{2}$  der Kreis in zwei geschlossene Kurven geteilt wird (Abb. 2.31 (a) bis (c)). Mit den Parametern des Experiments ( $s = 0,7w_0$ ) verbinden sich hier im Gegensatz zu Abb. 2.30 die C-Linien zu geschlossenen, miteinander verbundenen Kreisen wie in Abb. 2.32 zu sehen. Dieser Fall ist entartet, d.h. die Verbindungen zwischen den C-Linien brechen bei der kleinsten Störung der Symmetrie der Anordnung auf, die Verbindungen der C-Linien sind deshalb im Experiment auch nur näherungs-

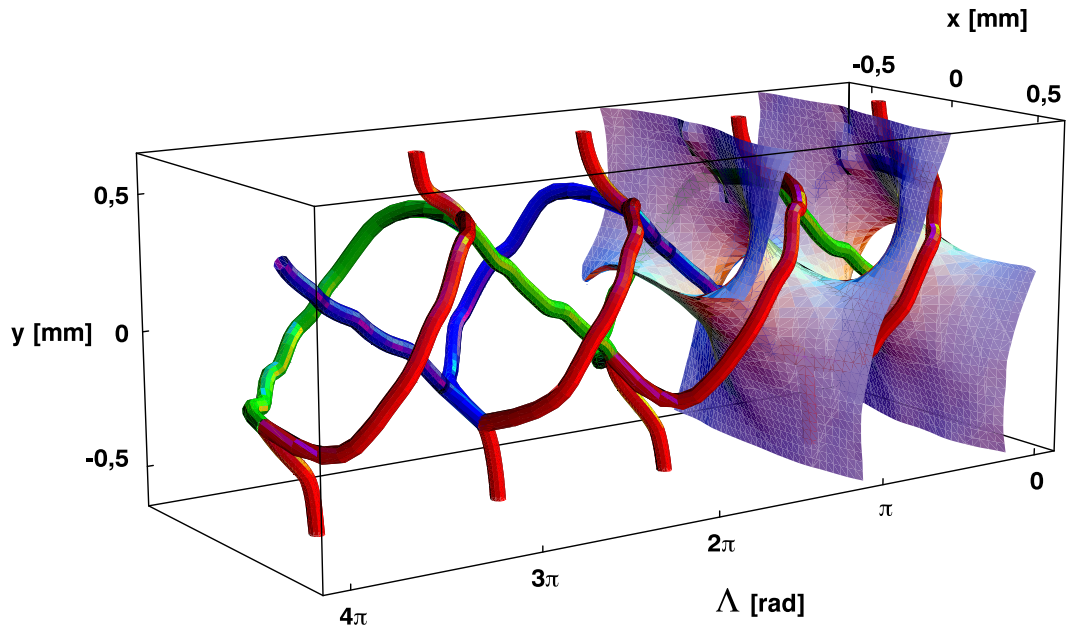


Abbildung 2.32:

*L-Flächen und C-Linien des Feldes eines linear polarisierten optischen Wirbels nach einem doppelbrechenden Kristall wie in Abb. 2.32, jedoch mit gleichen Intensitäten in ordentlichem und außerordentlichem Strahl (lineare Polarisation unter  $\beta = 45^\circ$ , damit  $\epsilon = 1$ ). Die C-Linien sind nun alle miteinander verbunden, es entstehen dadurch zusammenhängende geneigte Kreise.*

weise feststellbar. Für eine Polarisation des einfallenden Bündels  $\beta > 45^\circ$  brechen die Verbindungen wieder wie in Abb. 2.30 auf, die Doppelspirale liegt dann jedoch auf der anderen Seite der  $y$ - $\Lambda$ -Ebene.

### 2.3.4 Zirkular polarisierter Wirbel

Was ändert sich an den obigen Ergebnissen, wenn die Polarisation des auf den Kristall einfallenden Bündels nicht mehr rein linear, sondern z. B. rein zirkular gewählt wird? Zirkular polarisiertes Licht unterscheidet sich von linear unter  $45^\circ$  polarisiertem nur durch eine Phasendifferenz von  $\pi/2$  zwischen den beiden linearen Anteilen des Feldes. Diese Phasendifferenz bleibt beim Durchgang des Bündels durch den Kristall erhalten, sodass das Feld hinter dem Kristall folgende Form annimmt (siehe Kapitel 2.2.1,

Gleichung (2.29)):

$$\mathbf{E}(x, y, \Lambda) = LG_0^1(x - \frac{s}{2}, y) \cdot \mathbf{d}_1 + LG_0^1(x + \frac{s}{2}, y) e^{i\pi/2} e^{i\Lambda} \cdot \mathbf{d}_2. \quad (2.44)$$

Wenn man die beiden Phasenfaktoren zu  $e^{i(\pi/2+\Lambda)}$  zusammenfasst, sieht man, dass die Verwendung von zirkular polarisierten Licht nur eine Verschiebung um  $\pi/2$  in  $\Lambda$ -Richtung bewirkt. Experimentell lässt sich das schön nachweisen, indem man den Po-

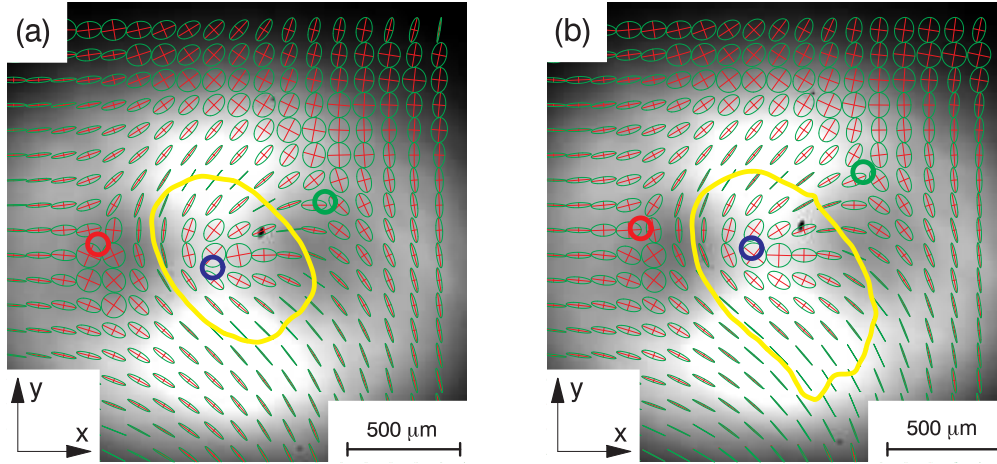


Abbildung 2.33:

- (a) *Polarisationsellipsen des Feldes eines zirkular polarisierten optischen Wirbels nach einem doppelbrechenden Kristall. Drei vorhandene C-Punkte sind wieder farblich markiert.*  
 (b) *Die gleiche Konfiguration wie in (a), jedoch mit entferntem  $\lambda/4$ -Plättchen, d.h. mit rein linear unter  $45^\circ$  polarisiertem Licht. Der doppelbrechende Kristall ist hier im Vergleich zu (a) um das Äquivalent einer Phasenverschiebung von  $-\pi/2$  gedreht.*

larisator Pol2 (Abb. 2.15) auf  $45^\circ$  zur senkrechten  $y$ -Achse ausrichtet und nach Linse L4, vor dem KDP-Kristall, ein  $\lambda/4$ -Plättchen mit optischer Achse parallel zur  $y$ -Achse einbaut. Das auf den Kristall einfallende Bündel ist dann rein zirkular polarisiert. Abb. 2.33 (a) zeigt die Polarisationsellipsen, C-Punkte (rot, grün und blau) und L-Linien (gelb) des hinter dem Kristall gemessenen Feldes. Entfernt man nun das  $\lambda/4$ -Plättchen, sodass der Kristall wieder mit unter  $45^\circ$  rein linear polarisiertem Licht beleuchtet wird, dreht dafür aber den Kristall um -18 Schritte, das entspricht einer Phasenverschiebung von  $-\pi/2$  zwischen ordentlichem und außerordentlichem Strahl, so sollte man nach Gleichung (2.44) wieder dasselbe Feld erhalten. Abb. 2.33 (b) zeigt die entsprechende Messung. Die Verteilung der Polarisation inklusive C-Punkte und L-Linien gleicht Abb.



2.33 (a) tatsächlich verblüffend.

An der Poincaré-Sphäre (Abb. 2.2) lässt sich dies veranschaulichen: Die Wirkung eines  $\lambda/4$ -Plättchens entspricht ja einer Drehung der Poincaré-Sphäre um  $\pi/2$  um die Achse  $S_1$  (siehe Kapitel 2.1.1). Diese Drehung überführt  $S_3$  in  $S_2$  und  $S_2$  in  $-S_3$ , was ja genau einer Verschiebung von  $\pi/2$  auf der  $\Lambda$ -Achse gleicht. Würde man also für den Fall eines zirkular polarisierten Wirbels die Nullflächen der Stokes-Parameter zeichnen, so wären im Vergleich zum linear polarisierten Fall die  $S_3$ - und  $S_2$ -Flächen vertauscht.

### 2.3.5 Elliptisch polarisierter Wirbel

Was passiert, wenn die Polarisation des ursprünglichen Bündels elliptisch gewählt wird? Sei die Polarisation vorerst rein linear. Ist sie parallel zu einer der Eigenpolarisationen des Kristalls, so passiert nichts, das Feld bleibt rein linear polarisiert, da es zu keiner Aufspaltung in ordentlichen und ausserordentlichen Strahl kommt und daher auch keine Störung der Phasensingularität vorliegt. Ist die Polarisation linear und nahe  $45^\circ$ , treten die beschriebenen symmetrischen und asymmetrischen Fälle auf. Für andere Polarisationsrichtungen  $\beta$  ändert sich an den Nullflächen der Stokes-Parameter  $S_2$  und  $S_3$  nichts, denn die Gleichungen (2.42) und (2.43) sind von  $\epsilon = \frac{\sin(\beta)}{\cos(\beta)}$  unabhängig. Die Nullstellen von  $S_1$  hängen allerdings wie in Abb. 2.34 zu sehen von  $\epsilon$  ab. In Abb. 2.34 (a) ist  $\beta = 40^\circ$  wie im beschriebenen Experiment. In 2.34 (b) und (c) ist  $\beta = 25^\circ$  und  $15^\circ$ , hier wird der Durchmesser des Zylinders kleiner und die Fläche wandert weiter nach aussen, bis für  $\beta \rightarrow 0^\circ$  der Zylinder verschwindet und die Fläche im Unendlichen landet. Für die C-Linien und L-Flächen des Feldes bedeutet dies: die L-Fläche bleibt unverändert, da  $S_3$  unverändert bleibt. Sie verschwindet natürlich im Fall  $\beta = 0^\circ$  bzw.  $\beta = 90^\circ$ , da hier  $S_2$  und  $S_3$  insgesamt Null werden. Die C-Linien jedoch ändern sich. Es bleibt zwar bei der Doppelspirale und den zusätzlichen roten C-Linien aus Abb. 2.30, aber der Durchmesser der Spirale wird mit kleiner werdendem  $\beta$  kleiner und die roten C-Linien wandern ins Unendliche.

Ist die Polarisation nicht mehr rein linear, sondern von beliebiger elliptischer Form, so kann dies natürlich auch wieder in zwei linear polarisierte Anteile mit einer passenden Phasendifferenz  $\delta$  zerlegt werden. Man erhält dann dieselbe Figur wie im Fall rein linearer Polarisation unter einem beliebigen Winkel  $\beta$ , jedoch um  $\delta$  auf der  $\Lambda$ -Achse verschoben.

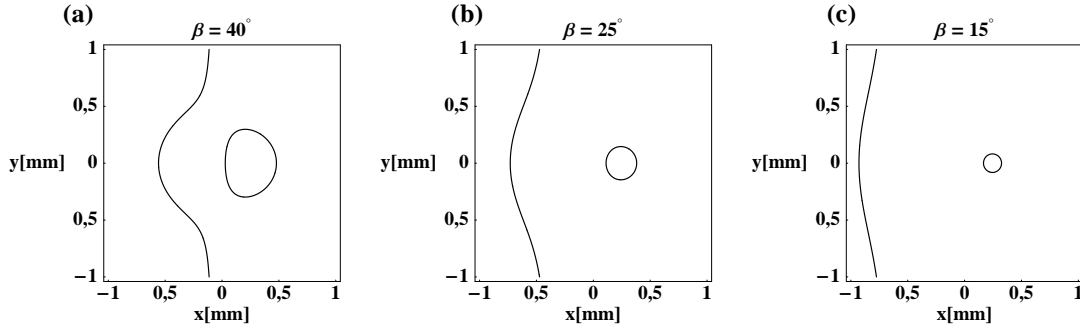


Abbildung 2.34:

Berechnete Nullstellen des Stokes-Parameters  $S_1$  eines  $LG_0^1$ -Bündels. Die Polarisation ist rein linear, jedoch unter dem Winkel  $\beta$  zur Vertikalen. In (a) ist  $\beta = 40^\circ$  wie in Abb. 2.30. In (b) und (c) ist  $\beta = 25^\circ$  bzw.  $\beta = 15^\circ$ , hier wird der Durchmesser des Zylinders kleiner und die verformte Fläche wandert nach aussen.

### 2.3.6 Wirbel mit höherer topologischer Ladung

Ein weiterer wichtiger Parameter, dessen Änderung großen Einfluss auf die Polarisationsingularitäten hat, ist die topologische Ladung  $n$  des Wirbels im ursprünglichen Bündel. Ist  $n$  ungleich 1, so wird das Feld hinter dem Kristall z. B. zu:

$$\mathbf{E}(x, y, \Lambda) = LG_0^n(x - \frac{s}{2}, y) \cdot \mathbf{d}_1 + \epsilon LG_0^n(x + \frac{s}{2}, y) e^{i\Lambda} \cdot \mathbf{d}_2. \quad (2.45)$$

Die Gleichungen für die Nullstellen der Stokes-Parameter dieses Systems lauten dann:

$$S_1 : \quad [(x - \frac{s}{2})^2 + y^2] e^{2sx/(nw_0^2)} = \epsilon^2 [(x + \frac{s}{2})^2 + y^2] e^{-2sx/(nw_0^2)} \quad (2.46)$$

$$S_2 : \quad x^2 + [y + \frac{s}{2} \cot(\delta_{S_2})]^2 = \frac{s^2}{4} [1 + \cot(\delta_{S_2})^2] \quad (2.47)$$

$$S_3 : \quad x^2 + [y + \frac{s}{2} \cot(\delta_{S_3})]^2 = \frac{s^2}{4} [1 + \cot(\delta_{S_3})^2], \quad (2.48)$$

wobei für  $\delta_{S_2}$  und  $\delta_{S_3}$  gilt:

$$\delta_{S_2} = \frac{1}{n} [\frac{\pi}{2} \cdot (2m + 1) - \Lambda] \quad (m \in \mathbb{Z}) \quad (2.49)$$

$$\delta_{S_3} = \frac{1}{n} [\pi \cdot 2m - \Lambda] \quad (m \in \mathbb{Z}). \quad (2.50)$$

Für  $S_1$  bleibt die Form der Nullstellen im Wesentlichen dieselbe, da der Faktor  $1/n$  im Exponenten in eine Skalierung der Strahltaile  $w_0$  des Bündels verrechnet werden

kann. Jedoch muss man beachten, dass diese Skalierung bei gleichbleibendem Abstand  $s$  der Bündel erfolgt. Abb. 2.35 zeigt die Querschnitte durch die Nullfläche von  $S_1$  für verschiedene topologische Ladungen  $n$ , die sich im Wesentlichen bis Skalierung in  $x$ - $y$ -Richtung gleichen.

Für die Nullfläche von  $S_2$  (und die von  $S_3$ , die wieder um  $\pi/2$  verschoben ist), ändert

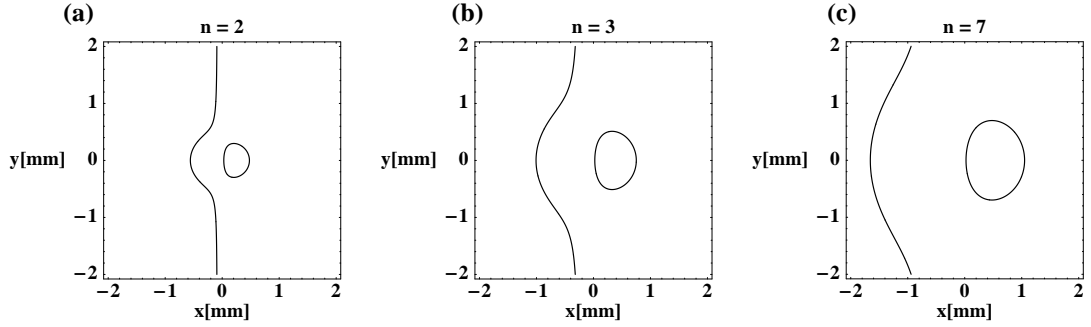


Abbildung 2.35:

Nach Gleichung (2.46) für  $s = 0,7 w_0$ ,  $w_0 = 0,7 \text{ mm}$  berechnete Nullstellen von  $S_1$ . In (a) für eine topologische Ladung  $n = 2$ , in (b) für  $n = 3$  und in (c) für  $n = 7$ .

sich mit Variation von  $n$  erheblich mehr:

Die Nullstellen sind, wie aus Gleichungen (2.47) und (2.48) zu sehen, Kreise mit Mittelpunkt  $(0, -s/2 \cot(\delta_{S_2}))$  und Radius  $s/2\sqrt{(1 + \cot(\delta_{S_2})^2)}$ . Jedoch nimmt der Cotangens der Winkel  $\delta_{S_2}$  und  $\delta_{S_3}$  für alle  $m$  jeweils genau  $n$  verschiedene Werte an, sodass die Nullstellen für festes  $\Lambda$  nun gleichzeitig durch  $n$  Kreise mit verschiedenen Radii und Mittelpunkten gegeben sind. Die Nullflächen bestehen daher aus denselben Schläuchen wie im Fall  $n = 1$ , es treten aber jeweils  $n$  dieser Schläuche gleichzeitig und gegeneinander in  $\Lambda$ -Richtung verschoben auf. Die Periodenlänge der Flächen erhöht sich wegen  $\Lambda/n$  auf das  $n$ -fache.

Für  $n = 2$  bedeutet dies:

$$\cot(\delta_{S_2}) = \begin{cases} \frac{\cos(\Lambda/2) + \sin(\Lambda/2)}{\cos(\Lambda/2) - \sin(\Lambda/2)} & m \text{ gerade} \\ \frac{\sin(\Lambda/2) - \cos(\Lambda/2)}{\cos(\Lambda/2) + \sin(\Lambda/2)} & m \text{ ungerade} \end{cases}. \quad (2.51)$$

Dies ergibt zwei verschiedene Radien und Mittelpunkte pro  $\Lambda$ , die bei einer Verschiebung um  $\pi$  in  $\Lambda$ -Richtung ineinander übergehen. Man erhält zweimal die Fläche für  $n = 1$ , gestreckt auf eine Länge von  $2\pi$  und um  $\pi$  gegeneinander verschoben. Dies bedeutet, dass nun zwei gleichzeitige Schnitte des Zylinders der  $S_1$ -Fläche mit der Fläche

für  $S_2$  möglich sind, daher verdoppelt sich die Spirale aus Abb. 2.30 bei verdoppelter Ganghöhe.

Für den asymmetrischen Fall ( $\beta = 40^\circ$ ) wurde dies experimentell nachgewiesen, indem

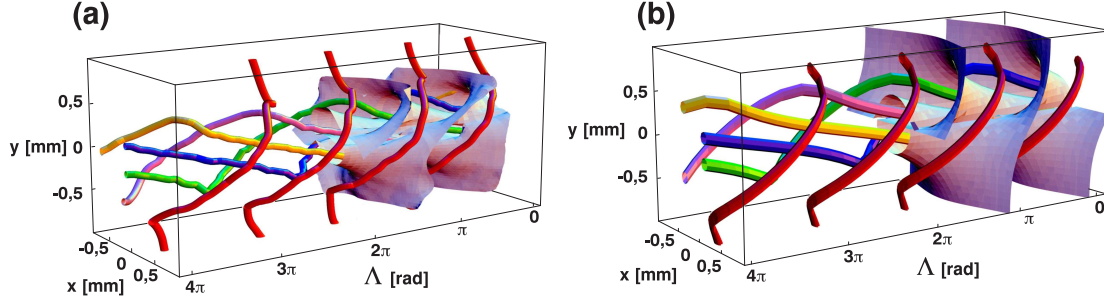


Abbildung 2.36:

(a) Gemessene C-Linien und L-Flächen für einen Wirbel der topologischen Ladung  $n = 2$  in einem doppelbrechenden Kristall. (b) zum Vergleich die gerechneten C-Linien und L-Flächen. Die zwei entstehenden L-Flächen haben dieselbe Struktur wie im Fall  $n = 1$  (Abb. 2.30), sind aber um  $\pi$  gegeneinander verschoben und auf das Doppelte gestreckt. Dementsprechend entsteht hier eine vierfache Spirale aus C-Linien mit doppelter Ganghöhe.

mit dem SLM ein  $LG_0^2$ -Bündel erzeugt und für dieses die Stokes-Parameter nach dem KDP-Kristall über einen Bereich von  $6\pi$  vermessen wurden. Das Ergebnis ist in Abb. 2.36 (a) dargestellt, in 2.36 (b) wurden die C-Linien und L-Flächen zusätzlich rechnerisch bestimmt, um eine etwas klarere Darstellung zu erhalten. Die Abbildung zeigt die vorhergesagte Struktur der L-Fläche und der C-Linien, jedoch sind die Überschneidungen der L-Flächen entartete Nullstellen von  $S_3$  und deshalb instabil gegen Störungen. Im Experiment sind sie daher nicht exakt reproduzierbar. Die C-Linien stimmen jedoch gut mit den gerechneten überein und die vorhergesagte vierfache Spirale mit im Vergleich zu Abb. 2.30 doppelter Ganghöhe ist schön zu sehen.

Abb. 2.37 zeigt Berechnungen der Nullflächen von  $S_3$  für  $n = 2$  in (a) und  $n = 3$  in (b). Hier sind nur noch die Nullflächen von  $S_3$  gezeigt, da die Nullfläche von  $S_2$  dieser stets bis auf eine Verschiebung um  $\pi/2$  gleicht und sich die Nullfläche von  $S_1$  bei Änderung von  $n$  nicht wesentlich ändert. Aus der Fläche von  $S_3$  lassen sich daher auch die Formen der C-Linien ableiten.

Aus der Abbildung kann man die oben abgeleitet Erhöhung der Periodenlänge auf das  $n$ -fache zusammen mit der Streckung der Schläuche um den Faktor  $n$  im Vergleich zum Fall  $n = 1$  erkennen. Die Nullflächen sind gegeneinander verschoben und schneiden

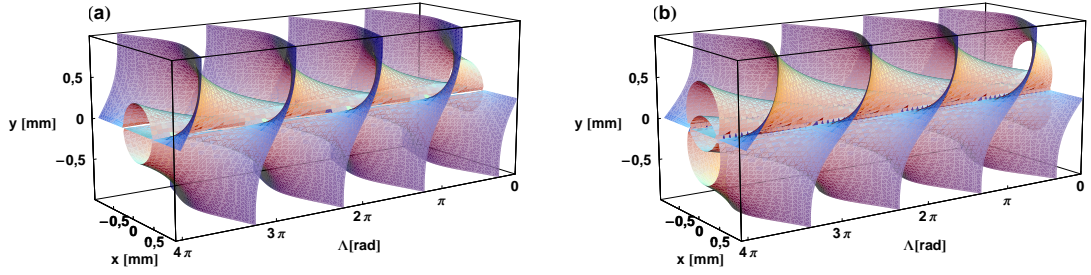


Abbildung 2.37:

*L-Flächen bzw. Nullflächen von  $S_3$  für ein  $LG_0^n$ -Bündel in einem doppelbrechendem Kristall. (a)  $LG_0^2$ -Bündel. (b)  $LG_0^3$ -Bündel. Die Flächen sind dieselben wie in Abb. 2.30 für den Fall  $n = 1$ , jedoch treten hier  $n$  dieser Flächen um den Faktor  $n$  gestreckt und gegeneinander verschoben auf. Die dabei auftretenden Überschneidungen der Flächen sind entartete Nullstellen des Feldes und damit nichtgenerisch und instabil.*

sich genau auf den Linien, die durch die Positionen der Wirbel in ordentlichem und außerordentlichem Strahl vorgegeben sind. Diese Überschneidung ist wie im Fall  $n = 2$  eine  $n$ -fach entartete Nullstelle von  $S_3$  und instabil gegen Störungen. Es dürfte also sehr schwierig sein, diese Flächen im Experiment zu erhalten. Die C-Linien werden, da sie ja auf der Nullfläche von  $S_2$  liegen müssen, eine  $n$ -fache Doppelspirale mit  $n$ -facher Ganghöhe zusätzlich zu den bestehenden roten C-Linien bilden, wie das schon am Fall  $n = 2$  (Abb. 2.36) abzusehen ist.

### 2.3.7 Entfaltung von Phasensingularitäten in doppelbrechenden Kristallen - Zusammenfassung

Für die vorgestellte Konfiguration eines homogen polarisierten optischen Wirbels beim Durchgang durch einen doppelbrechenden Kristall lässt sich also folgendes zusammenfassen:

Jedes homogen polarisierte Feld stellt einen entarteten Zustand dar. Schon ein homogen linear polarisiertes Gauß-Bündel ohne jede Phasensingularität wird bei Störungen ein Feld entwickeln, das Polarisationsingularitäten enthält.

Erst recht ist ein optischer Wirbel, egal welcher topologischer Ladung, sobald die Polarisation des Lichts berücksichtigt wird, nicht länger ein stabiles, generisches Objekt,

sondern zerfällt bei Störungen in die generischen Singularitäten der Polarisation, also C-Linien und L-Flächen.

Der Wirbel, egal welcher homogener Polarisation, wird beim Eintritt in den Kristall entsprechend der Lage der optischen Achse des Kristalls in einen ordentlichen und einen außerordentlichen Anteil zerlegt, die orthogonal zueinander polarisiert sind, eine bestimmte Phasendifferenz  $\Lambda$  aufweisen und gegeneinander um  $\Delta x$  räumlich verschoben sind. Die Phasendifferenz  $\Lambda$  ändert sich periodisch von Null auf  $2\pi$  bei Änderungen der optischen Weglängen der beiden Anteile, wie sie z. B. bei kleinen Drehungen des Kristalls auftreten oder bei einer Änderung der Dicke des Kristalls auftreten würden. Damit erhält man durch Drehung des Kristalls eine Veranschaulichung des Feldes an jeder Stelle im Kristall.

Der optische Wirbel, der ja nach dem Kristall nur noch in den beiden getrennt gemessenen linear polarisierten Anteilen nachzuweisen wäre, wird hierbei in C-Linien und L-Flächen entfaltet, deren Form man durch Auftragen der Nullstellen der Stokes-Parameter des Feldes im  $x$ - $y$ - $\Lambda$ -Raum erhält. Die Nullfläche des Stokes-Parameters  $S_1$  erweist sich dabei in jedem Fall als  $\Lambda$ -invariant. Die Nullflächen von  $S_2$  und  $S_3$  sind bis auf eine Verschiebung um  $\pi/2$  in  $\Lambda$ -Richtung identisch. Für einen Wirbel der Ladung  $m = 1$  stellen sie sich als topologisch äquivalent zu einer von Riemann beschriebenen Minimalfläche heraus. Wird  $m$  erhöht, so entstehen mehrere dieser Flächen, die gestreckt und in  $\Lambda$ -Richtung gegeneinander verschoben sind.

Die Nullfläche von  $S_3$  entspricht der entstehenden L-Fläche, aus dem Schnitt von  $S_1$  und  $S_2$  erhält man die C-Linien, die unter anderem eine periodische  $m$ -fache Helix ergeben.

Ändert man die Eingangspolarisation, so ergibt sich für den Fall, dass die Intensitäten in ordentlichem und außerordentlichem Strahl gleich sind, eine entartete symmetrische Variante, bei der die C-Linien zu einer Struktur aus verbundenen Kreisen werden. Alle anderen Änderungen der Polarisation resultieren nur in einer Phasenverschiebung zwischen ordentlichem und außerordentlichem Strahl, sodass man als Resultat wieder die beschriebenen Strukturen erhält, jedoch in  $\Lambda$ -Richtung verschoben.

# Zusammenfassung

Ich habe in dieser Arbeit verschiedene Singularitäten des Lichts sowohl experimentell als auch theoretisch untersucht.

Der erste Teil der Arbeit beschäftigt sich mit den Singularitäten der Phase des Lichts, die das Skelett des Lichtfeldes darstellen. Insbesondere wird hier die Interaktion von optischen Wirbeln mit den flächenhaft entarteten Singularitäten (Flächen, an denen das Lichtfeld Null ist) in Laguerre-Gauß-Moden ( $LG$ -Moden) untersucht. Es wurde jeweils ein optischer Wirbel mit topologischer Ladung  $m = 1$  in  $LG_p^0$ -Bündeln außerhalb des Zentrums untersucht. Für den generischen Fall eines  $r$ -Wirbels wurden die Berechnungen der Feldverteilung in Ebenen senkrecht zur Ausbreitungsrichtung  $z$  als Funktion von  $z$  auf zwei verschiedene Arten analytisch durchgeführt.

Als erste Rechenmethode wurde die Feldverteilung mit der üblichen Technik der Ausbreitung des Winkelspektrums berechnet. Daraus erhält man verschiedene Informationen über das Lichtfeld an verschiedenen Punkten auf der  $z$ -Achse:

Zunächst wird klar, dass durch die durch einen zusätzlichen Wirbel induzierte Störung die entarteten Versetzungsflächen des  $LG_p^0$ -Hintergrundbündels zerstört werden. Im ungestörten Fall sind diese Rotationshyperboloidflächen, im gestörten Fall zerfallen sie in generische Wirbellinien, deren Lage und Form so ist, dass das Feld nie mehr als  $2p + 1$  Nullstellen (Schnitte der entstehenden Wirbellinien mit Ebenen senkrecht zur Ausbreitungsrichtung) besitzt.

Mit der erhaltenen Funktion für die Feldverteilung wurden diese Wirbellinien im Raum zuerst für ein  $LG_1^0$ -Bündel mit einem Wirbel berechnet. Je nach Abstand des Wirbels in der Strahltille vom Zentrum des Bündels ergaben sich verschiedene Situationen:

Befand sich der Wirbel in der Strahltille innerhalb der Versetzungslinie des Bündels, so entstanden zwei zusätzliche U-förmige generische Wirbellinien, deren beide Schenkel dasselbe Verhalten zeigten wie eine Wirbel in einem Gauß-Bündel. Die Wirbellinie ist

hier in absoluten Koordinaten eine Gerade im Raum, in auf den Bündeldurchmesser  $w(z)$  normierten relativen Koordinaten so, dass ihre Projektion einen Kreisbogen bildet. Die Wirbellinie des eingesetzten Wirbels jedoch verlief so, dass sie sich in relativen, auf den Strahldurchmesser  $w(z)$  normierten Koordinaten asymptotisch dem Zentrum des Bündels annäherte, sodass sich für  $z \rightarrow \pm\infty$  völlig unerwartet eine Nullstelle im Zentrum fand.

Befand sich der Wirbel in der Strahltaille außerhalb des  $1/e$ -Radius des Bündels (und damit auch außerhalb der Versetzungslinie), so wurde diese wieder in zwei generische Wirbellinien aufgelöst, die diesmal die Ebene  $z = 0$  schnitten. In diesem Fall verlief die ursprüngliche Wirbellinie und eine der neu entstandenen normal, die zweite neu entstandene Linie verlief nun asymptotisch zur  $z$ -Achse.

Dieser ungewöhnliche asymptotische Verlauf, der dafür sorgt, dass für  $z \rightarrow \pm\infty$  eine Nullstelle im Zentrum des Bündels zu finden ist, wurde mit einem Modell erklärt, das eine Erweiterung des bekannten fluiddynamischen Modells für die Form der Wirbellinien in glatten Hintergrundbündeln darstellte. Es wurde deutlich, dass auch hier die Gradienten von Phase und Intensität des Hintergrundbündels ohne den Wirbel den Verlauf der Wirbellinie bestimmen.

Die für den Fall  $p = 1$  gewonnenen Erkenntnisse wurden ebenso für  $LG$ -Hintergrundbündel höherer Ordnung bestätigt: Auch hier war der Verlauf der Wirbellinien so, dass der Wirbel, der sich in der Strahltaille dem Zentrum am nächsten befand, einen zur  $z$ -Achse asymptotischen Verlauf zeigte. Man findet also auch hier für  $z \rightarrow \pm\infty$  eine Nullstelle im Zentrum des Bündels. Der Verlauf der restlichen  $2p$  Wirbellinien zeigte wieder die aus Gauß-Bündeln gewohnte Form.

Für Wirbel mit anderen Kernfunktionen (tanh- und Punktwirbel) waren nur numerische Berechnungen möglich. Aus der Tatsache, dass die Kernfunktionen dieser Wirbel keine rationalen, sondern transzendente Funktionen sind, liess sich jedoch die Beobachtung erklären, dass in Feldern mit diesen Wirbeln beliebig viele zusätzliche Wirbel aus den auch hier zerstörten Versetzungslinien des Hintergrundbündels entstehen: Das Feld eines Laguerre-Gauß-Bündels mit einem tanh- oder Punktwirbel ist, wegen der transzendenten Kernfunktion des Wirbels, nur noch durch eine unendliche Reihe beschreibbar und kann damit beliebig viele Nullstellen enthalten. Die sonstigen Effekte (eine Wirbellinie asymptotisch zur  $z$ -Achse) waren vergleichbar zu den Ergebnissen für einen r-Wirbel.

Als zweite Rechenmethode wurde eine Reihenentwicklung des Lichtfeldes verwendet,



und zwar, an das Problem angepasst, eine Entwicklung in der Basis der Laguerre-Gauß-Moden. Es konnte durch Berechnung der Skalarprodukte dieses Feldes mit den Funktionen der Familie der Laguerre-Gauß-Moden bewiesen werden, dass sich ein r-Wirbel in einem  $LG_p^0$ -Bündel immer als Summe von nur drei Funktionen derselben Familie schreiben lässt. Diese drei Summanden haben alle bis auf den jeweiligen Gouy-Phasenterm die gleichen Abhängigkeiten in  $z$ . Dadurch konnte die  $z$ -abhängige Veränderung der Feldverteilung und damit die von Parallelen zur  $z$ -Achse abweichende Form der Wirbellinien auf den sich bei einer Variation von  $z$  ändernden Phasenunterschied zwischen den Gouy-Phasentermen der drei Summanden der Zerlegung zurückgeführt werden. Zur Überprüfung der theoretisch getroffenen Vorhersagen wurden Experimente durchgeführt. In den Experimenten wurden Laguerre-Gauß-Bündel mit einem eingebrachten tanh-Wirbel durch computergenerierte Hologramme erzeugt und die Feldverteilung in verschiedenen Ebenen senkrecht zur  $z$ -Achse gemessen. Diese Messreihen wurden für  $LG_1^0$ ,  $LG_2^0$  und  $LG_7^0$  mit unterschiedlich platzierten Wirbeln durchgeführt und mit numerischen Simulationen der Intensitätsverteilung verglichen, wobei sich eine gute Übereinstimmung zwischen Experiment und Simulation ergab.

Die im Experiment gemessenen Intensitätsbilder zeigen alle das durch den Wirbel verursachte Aufbrechen der Versetzungslinien der Hintergrundbündel, wodurch sich aus den konzentrischen Nulllinien der Laguerre-Gauß-Bündel Spiralen entwickeln, deren Enden nach aussen (zur Strahlperipherie) wandern. Bei allen Experimenten zeigt sich für größere  $z$  eine Nullstelle, also ein optischer Wirbel im Zentrum des Bündels, auch dies in Übereinstimmung mit den Rechnungen.

Der zweite Teil der Arbeit beschäftigt sich mit den Singularitäten der Polarisation und ihrem Zusammenhang mit den Phasensingularitäten. Dazu wurde rechnerisch an verschiedenen Beispielen gezeigt, wie durch die Störung von homogen polarisierten optischen Wirbeln mit überlagerten Bündeln anderer homogener Polarisation aus der Entfaltung der nun entarteten Phasensingularität Linien zirkularer Polarisation (C-Linien) und Flächen linearer Polarisation (L-Flächen) im  $x$ - $y$ - $\Lambda$ -Raum entstehen, die im Falle von polarisiertem Licht das Skelett des Lichtfeldes bilden.  $\Lambda$  bezeichnet dabei die Phasenverschiebung zwischen den beiden überlagerten Feldern. Die Form der entstehenden C-Linien und L-Flächen wurde berechnet und mithilfe der Nullflächen der Stokes-Parameter, die zur Bestimmung der Polarisation des gesamten Lichtfeldes der Überlagerung verwendet wurden, erklärt.

Es wurde ein Experiment entwickelt, das die Probleme der üblichen Interferenz-Experimente umging: Ein doppelbrechender Kristall wurde mit einem homogen polarisierten Wirbel beleuchtet, wodurch je nach Richtung der Eingangspolarisation am Ausgang des Kristalls eine Überlagerung von zwei orthogonal zueinander homogen linear polarisierten optischen Wirbeln vorlag. Die Phasenverschiebung  $\Lambda$  zwischen den beiden Bündeln konnte hierbei durch Drehung des Kristalls eingestellt werden.

Der Aufbau wurde mit einem KDP-Kristall verwirklicht, der durch einen Schrittmotor in Schritten von  $0,056^\circ$  gedreht werden konnte, wodurch eine Phasenverschiebung von  $2\pi$  mit 75 Schritten aufgelöst werden konnte.

Der homogen polarisierte optische Wirbel wurde mithilfe eines selbstgebauten Lichtmodulators (aus dem LCD-Display eines Video-Projektors) erzeugt und die Stokes-Parameter des resultierenden Feldes mit einer CCD-Kamera aufgenommen, um daraus die Polarisationszustände an jedem Punkte zu berechnen.

Aus diesen Daten wurden C-Linien und L-Flächen des Lichtfeldes rekonstruiert und mit Rechnungen verglichen. Es ergab sich eine bisher einmalige Struktur aus helixförmigen C-Linien und einer L-Fläche, die zu einer Riemannschen Minimalfläche topologisch äquivalent ist. Die Form dieser Polarisationsingularitäten konnte durch die Nullflächen der Stokes-Parameter des Feldes beschrieben werden, die experimentellen und theoretischen Ergebnisse sind dabei wieder in guter Übereinstimmung.

Diese Experimente und Rechnungen wurden für verschiedene Anfangspolarisationen des optischen Wirbels durchgeführt. Wurde die Polarisationsrichtung im Bezug auf die optische Achse des Kristalls so gewählt, dass die Intensitäten des ordentlichen und außerordentlichen Strahls gleich waren, so trat ein entarteter Fall auf, bei dem sich die C-Linien verbanden, sodass nun statt einer Helix verbundene Kreise in verschiedenen Ebenen vorlagen. Im Falle eines zirkular polarisierten Wirbels ergab sich im Vergleich dazu dasselbe Bild, nur um  $\Lambda = \pi/2$  phasenverschoben. Beliebige andere Polarisationen des Wirbels liessen sich alle auf den ersten Fall plus eine Verschiebung des Bildes in  $\pm\Lambda$ -Richtung zurückführen.

Des Weiteren wurde ein nicht-generischer Wirbel mit Ladung  $m = 2$  verwendet, dessen Feld hinter dem Kristall in Abhängigkeit von  $\Lambda$  aufgezeichnet und mit Rechnungen verglichen. Es ergab sich eine Verdopplung der Struktur des Falles  $m = 1$ , sodass die C-Linien nun als vierfache Helix vorlagen, die L-Flächen tauchten nun zweimal auf, jedoch in  $\Lambda$ -Richtung um eine halbe Periode gegeneinander verschoben. Auch diese Ergebnisse konnten mithilfe der Nullflächen der Stokes-Parameter des Feldes erklärt

werden. Für den allgemeinen Fall höherer topologischer Ladung des Wirbels wurden Rechnungen durchgeführt, die zeigten, dass sich hier die Strukturen ver- $m$ -fachen bei gleichzeitiger Vergrößerung der Periodenlänge um den Faktor  $m$ .

Diese Ergebnisse veranschaulichen die natürliche Entfaltung einer generischen Phasensingularität in die generischen Singularitäten der Polarisation beim Durchgang durch einen doppelbrechenden Kristall und erhellen so den Zusammenhang zwischen den Singularitäten der Phase und der Polarisation.



# Literaturverzeichnis

- [1] J. F. Nye, *Natural focusing and fine structure of light*, Institute of Physics Publishing, Bristol (1999).
- [2] J. F. Nye, M. V. Berry, *Dislocations in Wave Trains*, Proc. Roy. Soc. Lond. A **336** 165 (1974).
- [3] D. Rozas, Z. S. Sacks, G. A. Swartzlander Jr., *Experimental Observation of Fluid-like Motion of Optical Vortices* Phys. Rev. Lett. **79** 3399 (1997).
- [4] G. A. Swartzlander Jr., C. T. Law, *Optical vortex solitons observed in Kerr nonlinear media* Phys. Rev. Lett. **69** 2503 (1992).
- [5] D. Rozas, C. T. Law, G. A. Swartzlander Jr., *Propagation dynamics of optical vortices* J. Opt. Soc. Am. B **14** 3054 (1997).
- [6] N. B. Simpson, K. Dholakia, I. Allen, M. J. Padgett, *Mechanical equivalence of spin and orbital angular momentum of light: an optical spanner* Opt. Lett. **22** 52 (1997).
- [7] K. Bongs, S. Burger, S. Dettmer, D. Hellweg, J. Arlt, W. Ertmer, K. Sengstock, *Waveguide for Bose-Einstein condensates* Phys. Rev. A **63** 031602 (2001).
- [8] G. Gibson, J. Courtial, M. J. Padgett, M. Vasnetsov, V. Pas'ko, S. M. Barnett, S. Franke-Arnold, *Free-space information transfer using light beams carrying orbital angular momentum* Opt. Express **12** 5448 (2004).
- [9] K. Stalinas, A. Berzanskis, V. Jarutis, *Vortex statistics in optical speckle fields* Opt. Commun. **120** 23 (1995).

- [10] J. V. Hajnal, J. F. Nye, *Singularities in the Transverse Fields of Electromagnetic Waves. I. Theory*, Proc. R. Soc. A **414** 433 (1987).
- [11] J. V. Hajnal, J. F. Nye, *Singularities in the Transverse Fields of Electromagnetic Waves. II. Observations on the Electric Field*, Proc. R. Soc. A **414** 447 (1987).
- [12] Grover A. Swartzlander Jr., *Optical vortex filaments*, in *Optical Vortices*, M. Vasnetsov, K. Stalinunas (Eds.), Volume 228 Horizons in World Physics, Nova Science Publishers, New York, (1999).
- [13] Michael Berry, *Singularities in waves and rays in Les Houches, Session XXXV, 1980 - Physique des Défauts*, R. Balian et al., Eds., North-Holland Publishing Company, (1981).
- [14] I. V. Basistiy, V. A. Pas'ko, V. V. Slyusar, M. S. Soskin, M. V. Vasnetsov, *Synthesis and analysis of optical vortices with fractional topological charges*, J. Opt. A **6** S166 (2004).
- [15] C. Gerthsen, I. Kneser, H. Vogel, *Physik*, Springer-Verlag, Berlin (1977).
- [16] L. Allen, M. W. Beijersbergen, R. K. C. Spreeuw, J. P. Woerdman, *Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian laser modes*, Phys. Rev. A **45** 8185 (1992).
- [17] J. Leach, M. R. Dennis, J. Courtial, M. J. Padgett, *Vortex knots in light*, New J. Phys. **7** 55 (2005).
- [18] A. Siegman, *Lasers*, University Science Books, Mill Valley (2005).
- [19] M. A. Bandres, J. C. Gutierrez-Vega, *Ince-Gaussian beams*, Opt. Lett. **29** 144 (2003).
- [20] U. T. Schwartz, S. Sogomonian, Max Maier, *Propagation dynamics of phase dislocations embedded in a Bessel light beam*, Opt. Commun. Opt. Lett. **208** 255 (2002).
- [21] Masud Mansuripur, *Certain computational aspects of vector diffraction problems* J.Opt.Soc.Am. A **6** 786 (1989).

- [22] J.Arlt, K.Dholakia, L.Allen, M.J.Padgett, *The production of multiringed Laguerre-Gaussian modes by computer generated holograms*, J.Mod. Opt. **45** 1231 (1998).
- [23] I. Freund, *Saddle point wave fields* Opt. Commun. **163** 203 (1999).
- [24] Y. S. Kivshar, J. Christou, V. Tikhonenko, B. Luther-Davies, L. M. Pismen, *Dynamics of optical vortex solitons*, Opt. Commun. **152** 198 (1998).
- [25] Y. S. Kivshar, J. Christou, V. Tikhonenko, B. Luther-Davies, *Vortex soliton motion and steering* Opt. Lett. **21** 1649 (1996).
- [26] F. Flossmann *Optische Wirbel in Bessel-Hintergrundbündeln*, Zulassungsarbeit, Universität Regensburg (2002).
- [27] F. S. Roux *Optical vortex trajectories in an astigmatic and elliptical Gaussian beam*, Preprint, (2006).
- [28] I. N. Bronstein, K. A. Semendjajew *Taschenbuch der Mathematik*, Verlag Harri Deutsch, Frankfurt/Main (1985).
- [29] D. S. Kliger, J. W. Lewis, C. E. Randall, *Polarized Light in Optics and Spectroscopy*, Academic Press, Inc., San Diego (1990)
- [30] W. Zinth, U. Zinth, *Optik*, Oldenbourg Verlag, München (2005).
- [31] M. Born, E. Wolf, *Principles of Optics*, Cambridge University Press, Cambridge (2005).
- [32] B. Riemann, *Über die Fläche von kleinstem Inhalt bei gegebener Begrenzung* Bernhard Riemanns gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass, B. G. Teubner, Leipzig (1892).
- [33] M. R. Dennis, *Polarization singularities in the clear sky* New J. Phys. **6** 162 (2004).
- [34] M. R. Dennis, *Polarization singularities in paraxial vector fields: morphology and statistics*, Opt. Commun. **213** 201 (2002).
- [35] M. S. Soskin, V. Denisenko, I. Freund, *Optical polarization singularities and elliptic stationary points*, Opt. Lett. **28** 1475 (2003).

- [36] M. V. Berry, M. R. Dennis, *Polarization singularities in isotropic random vector waves*, Proc. R. Soc. A **457** 141 (2001).
- [37] F. Flossmann, U. T. Schwarz, M. Maier, *Optical vortices in a Laguerre-Gaussian  $LG_1^0$ -beam*, Opt. Commun. **250** 218 (2005).
- [38] F. Flossmann, U. T. Schwarz, M. Maier, *Propagation dynamics of optical vortices in Laguerre-Gaussian beams*, J. Mod. Opt. **52** 1009 (2005).
- [39] F. Flossmann, U. T. Schwarz, M. Maier, M. R. Dennis, *Polarization Singularities from Unfolding an Optical Vortex through a Birefringent Crystal*, Phys. Rev. Lett. **95** 253901 (2005).
- [40] J. Amako, T. Sonehara, *Kinoform using an electrically controlled birefringent liquid-crystal spatial light modulator* Appl. Opt. **30** 4622 (1991).
- [41] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, *Tables of Integrals, Series, and Products*, Academic Press, New York (1980).
- [42] D. Demus, J. Goodby, G. W. Gray, H.-W. Spiell, V. Vill (Eds.) *Handbook of Liquid Crystals, Vol. 1*, Wiley-VCH, Weinheim (1998).
- [43] L. Bergmann, C. Schaefer, H. Gobrecht (Ed.), *Lehrbuch der Experimentalphysik, Band III, Optik*, Walter de Gruyter, Berlin (1974).
- [44] G. Molina-Terriza, E. M. Wright, L. Torner, *Propagation and control of noncanonical optical vortices*, Opt. Lett. **26** 163 (2001).



# Danksagung

Im Laufe meiner Doktorarbeit habe ich von vielen Leuten Hilfe und Unterstützung erhalten, bei denen ich mich hiermit bedanken möchte. Besonders hervorzuheben sind:

Prof. Dr. M. Maier und PD Dr. U. Schwarz, meine beiden Betreuer, die sich immer für mein Thema begeistern konnte, beide aktiv daran mitgearbeitet und mich sehr unterstützt haben.

Dr. Mark Dennis (Southampton), mit dem ich vor allem über den zweiten Teil der Arbeit viel diskutiert habe.

Jürgen Baier, der mich jahrelang als Zimmernachbar ausgehalten hat.

Markus Pindl, der immer hilfsbereit und an fachlichen Diskussionen interessiert war.

Herr Ascherl, der mich bei allen „mechanischen“ Problemen unterstützt hat und immer für eine Unterhaltung zu haben war.

Natürlich möchte ich mich auch bei allen Mitgliedern des Lehrstuhls Maier für die freundliche Atmosphäre und das gute Arbeitsklima bedanken.