Konstruktion verfeinerter Kamber-Tondeur Klassen in der glatten Deligne-Kohomologie

Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades
der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)
der Naturwissenschaftlichen Fakultät I — Mathematik
der Universität Regensburg

vorgelegt von
Jonny Dambrowski
aus Landshut

Naturwissenschaftliche Faktultät I — Mathematik
der Universität Regensburg
im Januar 2007

Promotionsgesuch eingereicht am: 29.01.2007
Die Arbeit wurde angeleitet von : Prof. Dr. Sebastian Goette
Prüfungsausschuß : Prof. Dr. Sebastian Goette, Prof. Dr. Uwe Jannsen, Prof. Dr. Günter Tamme, Prof. Dr. Felix Finster

Zusammenfassung

Sei R ein Unterring von $\mathbb{C}$. In der vorliegenden Dissertation zeigen wir, daß es eine natürliche Verfeinerung der Kamber-Tondeur Klassen auf der Kategorie der flachen *hermiteschen* Vektorbündel mit einer R-Struktur gibt, in Gestalt expliziter Repräsentanten in der (äquivarianten) glatten Deligne-Kohomologie mit Werten in einer gewissen abelschen Gruppe $A(R)$, die nur von der R-Struktur abhängt. Die Konstruktion erfolgt einerseits in funktorieller Weise für jedes hermitesche R-Bündel und, unabhängig davon, andererseits auf dem in dieser Arbeit eigens konstruierten *universellen* hermiteschen R-Bündel. Da die verfeinerten Klassen die Kamber-Tondeur Klassen liften, erhalten wir Kamber-Tondeur Klassen, deren Koeffizienten ebenfalls in $A(R)$ liegen, was bei geeigneten R Torsionsklassen sichtbar macht. Zudem geben wir eine universelle Konstruktion der Kamber-Tondeur Klassen an, und zwar direkt auf dem klassifizierenden Raum aller hermiteschen R-Bündel. Als Beispiele berechnen wir konkret die erste verfeinerte Klasse für ein beliebiges hermitesche R-Bündel und zeigen, daß der Koeffizientenbereich der verfeinerten Klassen von Rang 2-Bündeln erzeugt wird von Logarithmen, Dilogarithmen und Wurzeln von Elementen aus R.

Einleitung

Ausgangspunkt dieser Dissertation ist die Chern-Weil Beschreibung der Kamber-Tondeur Klassen flacher $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$-Bündel von J.-M.Bismut und J. Lott:

Theorem ([BL95]). (i) *Sei* $(F,\nabla) \to X$ *ein differenzierbares komplexes Vektorbündel vom Rang* n *mit flachem Zusammenhang* ∇ *über einer zusammenhängenden Basis* X *und* h *eine hermitesche Metrik in* $F \to X$*. Sei* $k \geq 0$*. Die Kamber-Tondeur Form vom Grad* $2k+1$*, definiert durch*

$$c_{2k+1}(F,h) := \frac{1}{(2\pi i)^k 2^{2k+1}} \mathrm{Tr}\left\{\left[h^{-1}(\nabla h)\right]^{2k+1}\right\} \quad \in A^{2k+1}(X,\mathbb{R})$$

ist eine reelle, geschlossene $2k+1$*-Form auf* X *, deren Klasse — bezeichnet mit* $c_{2k+1}(F)$ *— in der de Rham-Kohomologie* $H^{2k+1}_{\mathrm{dR}}(X,\mathbb{R})$ *nicht von der Wahl der hermiteschen Metrik* h *in* F *abhängt.*

(ii) *Diese Zuordnung ist additiv und funktoriell (also verträglich mit Pullback) auf der Kategorie der flachen komplexen Vektorbündel, insbesondere demnach eine charakteristische Klasse für flache* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$*-Bündel.*

Unmittelbar hieraus ergeben sich folgende Fragestellungen:

- Gibt es verfeinerte Kamber-Tondeur Klassen, die zwischen flachen Vektorbündeln mit verschiedenen Metriken unterscheiden können, d.h. charakteristische Klassen *hermitescher* Bündel in Gestalt eines Liftes der klassischen Kamber-Tondeur Klassen ?
- Gibt es Kamber-Tondeur Klassen mit Koeffizienten in einer echten Untergruppe von $\mathbb{R}$, um damit etwaige Torsionsklassen aufspüren zu können ?

Die Beantwortung dieser Fragen ist Hauptgegenstand der vorliegenden Arbeit. Die Konstruktion der verfeinerten Klassen ist motiviert durch die Arbeiten von Cheeger-Simons [ChS85], Chern-Simons [CS74] und Brylinski-McLaughlin [BrMcL96], während der technische Rahmen – welcher sich gleichsam wie ein roter Faden durch fast alle Resultate zieht — auf den simplizialen Methoden von J. Dupont [Du76] sowie [Du78], G. Segal [Seg68] sowie [Seg74] und P. Deligne [D74] basiert.

Schon für gewöhnliche Vektorbündel ist es nicht-trivial, explizite Repräsentanten von Euler-, Chern- oder Pontrjagin Klassen mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$ zu finden. Die klassische Chern-Weil Theorie liefert an dieser Stelle bekanntlich nur *reelle* Klassen. Eine Methode charakteristische Klassen von G-Prinzipalbündeln mit Werten in einer Untergruppe A_k von $\mathbb{R}$ zu konstruieren besteht in der Angabe eines Kozykels in der glatten Deligne-Kohomologie, dessen Bild unter dem Krümmungshomomorphismus $d : H^k_{\mathcal{D}}(X, A_k) \to A^k(X)$ gerade die vorgegebene Chern-Weil Form der charakteristischen Klasse ist. Genauer hat man eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow H^k(X,\mathbb{R})/r(H^k(X,A_k)) \longrightarrow H^{k+1}_{\mathcal{D}}(X,A_k) \xrightarrow{(d,pr)} R^{k+1}(X,A_k) \longrightarrow 0,$$

die sich aus den Faserprodukten über $H^*(X,\mathbb{R})$ der beiden kurzen exakten Sequenzen

$$0 \longrightarrow H^k(X,\mathbb{R}/A_k) \longrightarrow H^{k+1}_{\mathcal{D}}(X,A_k) \xrightarrow{d} A^{k+1}(X)_{A_k} \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow A^k(X)/A^k(X)_{A_k} \longrightarrow H^{k+1}_{\mathcal{D}}(X,A_k) \xrightarrow{pr} H^{k+1}(X,A_k) \longrightarrow 0,$$

ergibt, wobei $A^k(X)_{A_k}$ die k-Formen auf X mit Perioden in $A_k \subset \mathbb{R}$ bezeichnet. Zur Erinnerung: Die (reelle) glatte Deligne-Kohomologie mit Werten in A_k ist definiert als die Hyperkohomologie des Komplexes abelscher Garben

$$0 \longrightarrow A_k \xrightarrow{i} A^0_X \xrightarrow{d} A^0_X \xrightarrow{d} \ldots \xrightarrow{d} A^{k-1}_X,$$

wobei A^q_X die Garbe der reellen q-Formen auf X und A_k die konstante Garbe auf X bezeichnet. Damit konstruieren J-L.Brylinski und D.A.McLaughlin in [BrMcL96] für $A_k := \mathbb{Z}_k = \mathbb{Z}$ konkrete Liftungen der Euler-, Chern- und Pontrjagin Klassen, welche via der dritten exakten Sequenz konkrete Repräsentanten mit Werten in $\mathbb{Z}$ der drei Klassen liefert. Auch wenn das Bündel flach ist und also die rationalen Chern- und Pontrjagin Klassen verschwinden, erhält man mit dieser Methode immer noch explizite Repräsentanten für Torsionsklassen. Aufgrund der kanonischen Isomorphie $H^\bullet_{\mathcal{D}}(X,A_k) \cong \hat{H}^{\bullet-1}(X,\mathbb{R}/A_k)$ zwischen der glatten Deligne-Kohomologie mit Koeffizienten in A_k und den mod-A_k Cheeger-Simons Differentialcharakteren ([Br93] oder [DuK05]), lassen sich die gelifteten Klassen als verfeinerte charakteristische Klassen auffassen.

Cheeger-Simons zeigen, daß man unter gewissen Vorraussetzungen *gerade* charakteristische Klassen von G-Prinzipalbündeln immer in eindeutiger und auf natürliche Weise verfeinern kann, ohne dabei einen expliziten Lift anzugeben. Es gilt

Theorem ([ChS85]Thm.2.2). *Sei G eine Lie-Gruppe mit endlich vielen Zusammenhangskomponenten. Dann gibt es zu jedem G-Prinzipalbündel $\pi : (E,\theta) \to X$ mit Zusammenhang θ und jeder charakteristischen Klasse $u \in H^{2k}(BG,A)$ mit einem dazu korresponierenden invariantem Polynom $P \in I^k(G)$ genau einen mit Pullback verträglichen Differentialcharakter $S_{P,u}(E) \in \hat{H}^{2k-1}(X,\mathbb{R}/A)$, dessen Bilder unter den beiden Abbildungen d und pr der entsprechenden unteren beiden exakten Sequenzen gerade $P(\Omega^k)$ und $u(E)$ sind. Dabei ist Ω die Krümmung von θ in E.*

Der Beweis basiert auf zwei Resultaten, nämlich einem Satz von M.S. Narasimhan und S. Ramanan [NR6163] über die Existenz universeller Zusammenhänge und ferner dem Verschwinden der ungeraden reellen Kohomologie $H^{2k+1}(BG,\mathbb{R})$ des klassifizierenden Raumes BG. In der Situation von [BrMcL96] sind die Voraussetzungen des Theorems erfüllt und es folgt sogar die Eindeutigkeit der gelifteten Euler-,Chern- und Pontrjagin Klassen.

Für die Konstruktion verfeinerter Kamber-Tondeur Klassen können wir das Theorem in zweierlei Hinsicht nicht verwenden: Zum Ersten sind die klassischen Kamber-Tondeur Klassen *ungerade* Klassen. Das Theorem liftet aber nur gerade Klassen. Zum Zweiten erfüllen wir die Voraussetzung an G im Theorem nicht, da die Strukturgruppe in flachen Bündeln diskret ist. Genau diese Voraussetzung an G im Theorem sichert aber $H^{2k+1}(BG,\mathbb{R}) = 0$ und mit Hilfe der ersten obigen kurzen exakten Sequenz die Existenz und Eindeutigkeit der gelifteten Klassen.

Die Kamber-Tondeur Klassen sind als charakteristische Klassen flacher Bündel bereits verfeinerte Klassen, oder wie man auch sagt *sekundäre Invarianten.* Unsere Aufgabe besteht gerade darin, diese ein zweites mal zu verfeinern, um damit Klassen mit Koeffizienten in einer Untergruppe von $\mathbb{R}$

zu erhalten. Wir konstruieren die verfeinerten Kamber-Tondeur Klassen, indem wir eine explizite Kokette bestehend aus einer Familie von Integralen von gewissen modifizierten Kamber-Tondeur Formen im Čech-de Rham-Modell der glatten Deligne-Kohomologie angeben und beweisen, daß diese Kokette bereits ein Kozykel ist. Dabei integrieren wir über Simplizes und nicht wie Brylinksi-McLaughlin über gewisse Zykel in $Map(U_{i_0\dots i_p}, St^n_{2k-1})$ mit der Stiefelmannigaltigkeit St^n_{2k-1}. Die Krux und der Segen gleichermaßen ist dabei die Tatsache, daß der Koeffizientenbereich dieses Kozykels ebenfalls explizit über eine Familie solcher Integrale erzeugt wird, die letztlich nur von der R-Struktur abhängen. Hieraus motiviert sich, warum wir flache hermitesche Bündel studieren, die eine Reduktion der Strukturgruppe nach $\mathrm{GL}_n(R)$ für einen *Unterring* R von $\mathbb{C}$ haben.

Sei R ein Unterring von $\mathbb{C}$, z.B. $\mathbb{Z}$ oder der Ganzheitsring $\mathcal{O}_K$ eines algebraischen Zahlkörpers K. Ein R-Bündel über X ist das zu einer lokal konstanten R-Modulgarbe von endlichem Rang gehörige flache Bündel. Geometrisch bedeutet dies nichts anderes als, daß das zugehörige flache G-Prinzipalbündel die (diskrete) Strukturgruppe $G := \mathrm{GL}_n(R)$ hat. Betrachte nun die folgende Unterkategorie $\mathscr{V}_R^{\mathrm{herm}}$ der Kategorie der flachen komplexen Vektorbündel: Die Objekte sind hermitesche R-Bündel $(F,h) \to X$, d.h. R-Bündel, deren Komplexifizierung mit einer hermiteschen Metrik h ausgestattet sind, und die Morphismen sind die Metrik respektierenden Bündelmorphismen. In $\mathscr{V}_R^{\mathrm{herm}}$ haben wir das Objekt

$$p : (EG \times_G (GL_n(\mathbb{C})/U(n) \times \mathbb{C}^n), h^{\mathrm{kan}}) \longrightarrow EG \times_G GL_n(\mathbb{C})/U(n), \tag{1}$$

welches in dem folgenden Sinne universell ist:

Theorem. *Zu jedem hermiteschen R-Bündel gibt es einen bis auf horizontale Homotopie (vgl.Def.1.2.3) eindeutigen Morphismus*

$$\begin{tikzcd} (F_{\mathbb{C}}, h) \arrow[r, "\tilde{\varphi}"] \arrow[d, "\pi"'] & (EG \times_G (GL_n(\mathbb{C})/U(n) \times \mathbb{C}^n), h^{\mathrm{kan}}) \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "\varphi"] & EG \times_G GL_n(\mathbb{C})/U(n) \end{tikzcd}$$

in $\mathscr{V}_R^{\mathrm{herm}}$ *nach* p.

Die obige Bündelabbildung ist natürlich nicht differenzierbar, weil EG keine Mannigfaltigkeit ist. Insbesondere ist eine Konstruktion charakteristischer Klassen via Differentialformen auf dem universellen hermiteschen R-Bündel nicht möglich. Dies gibt Anlaß, nach einer kombinatorischen[1] Version des Theorems (vgl. A.3) zu suchen und sodann in der Kategorie simplizialer Mannigfaltigkeiten zu arbeiten. Von nun an bezeichne $G_{\mathbb{C}} := \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ und $K := \mathrm{U}(n)$. Die Nervkonstruktion (Bsp. A.3.3) liefert ein kombinatorisches Modell von p, nämlich das differenzierbare simpliziale hermitesche R-Bündel

$$Np : (N\bar{G} \times_G (GL_n(\mathbb{C})/U(n) \times \mathbb{C}^n), h^{\mathrm{kan}}) \longrightarrow N\bar{G} \times_G GL_n(\mathbb{C})/U(n),$$

welches im folgenden Sinne universell ist: Für jedes hermitesche R-Bündel $(F,h) \to X$ gibt es zu den Daten einer Trivialisierung $T := (\mathcal{U}, e)$, bestehend aus einer (guten) offenen Überdeckung $\mathcal{U} := (U_i)_{i\in I}$ und Rahmen $e := (e_i)_{i\in I}$, mittels der Nervkonstruktionen eine kanonische simpliziale Bündelabbildung

$$\begin{tikzcd} (NF_{\mathcal{V}}, h_{\mathcal{U}}) \arrow[r, "\tilde{\varphi}^e_{\mathcal{V}}"] \arrow[d, "\pi_{\mathcal{U}}"'] & (N\bar{G} \times_G (G_{\mathbb{C}}/K \times \mathbb{C}^n), h^{\mathrm{kan}}) \arrow[d, "Np"] \\ NX_{\mathcal{U}} \arrow[r, "\varphi^e_{\mathcal{U}}"] & N\bar{G} \times_G G_{\mathbb{C}}/K, \end{tikzcd}$$

[1] wobei im Anhang A.3 präzisiert ist, was man unter einem kombinatorischen Modell versteht;

die bis auf kanonische Äquivalenz eindeutig ist (Sätze A.3.4, A.3.7 und 2.3.22). Die geometrische Realisierung des vorstehenden kommutativen Diagramms liefert bis auf Homotopieäquivalenz das Diagramm aus dem Theorem. Andere Trivialsierungen von $(F,h) \to X$ induzieren andere simpliziale Bündelabbildungen, die jedoch homotop als Bündelabbildungen nach Anwendung des geometrischen Realisierungsfunktors sind. Die Flucht in die simpliziale Welt rechtfertigt sich — im Hinblick auf unserer Definition kombinatorischer Modelle — aus Standardargumenten von G. Segal und J. Dupont und der Eigenschaft (äquivariente) glatte Deligne-Kohomologie auf guten Überdeckungen berechnen zu könnnen.

Damit sind wir nun in der Lage universelle Klassen von p zu definieren, in dem wir Differentialformen auf dem universellen simplizialen hermiteschen R-Bündel Np angeben und deren Kohomologieklassen betrachten. Beispielsweise ist die durch $\tilde{c}_{2k+1} := (\tilde{c}^p_{2k+1})_{p\geq 0}$ mit

$$\tilde{c}^p_{2k+1} := \begin{cases} \frac{1}{(2\pi i)^k 2^{2k+1}} \mathrm{Tr}[(h^{\mathrm{kan}})^{-1} dh^{\mathrm{kan}}]^{2k+1} & \text{für } p=0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

definierte simpliziale Form ein Kozykel in $A^\bullet(N_\bullet \bar{G} \times_G G_\mathbb{C}/K)$. Sie heißt *universelle Kamber-Tondeur Form* von p vom Grade $2k+1$ und repräsentiert eine Klasse $\tilde{c}_{2k+1}$ in der äquivarianten Kohomologie $H^{2k+1}(N\bar{G} \times_G G_\mathbb{C}/K, \mathbb{R}) \cong H^{2k+1}(EG \times_G G_\mathbb{C}/K, \mathbb{R})$, die aufgrund der Zusammenziehbarkeit von $G_\mathbb{C}/K$ nach $H^{2k+1}(BG, \mathbb{R}) \cong H^{2k+1}(G, \mathbb{R})$ absteigt. Die Klasse $\tilde{c}_{2k+1}$ in $H^{2k+1}(EG \times_G G_\mathbb{C}/K, \mathbb{R})$ heißt *universelle Kamber-Tondeur Klasse* von p vom Grade $2k+1$ mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$. Mit den oben genannten simplizialen Methoden beweist man den

Satz. *Jede Kamber-Tondeur Klasse eines hermiteschen R-Bündels ist Pullback der universellen Kamber-Tondeur Klasse.*

Weil die Kamber-Tondeur Form von $(F,h) \to X$ durch eine beliebige Trivialisierung bereits global eindeutig festgelegt ist, so bleibt der Satz auch auf Formen-Niveau richtig.

Das Resultat bleibt ersichtlich auch im rein flachen Fall für $R = \mathbb{C}$ richtig. Damit haben wir insbesondere eine explizite und *universelle* Konstruktion der klassischen Kamber-Tondeur Formen flacher Bündel gefunden. Dies ist ein neues Resultat, selbst im klassischen Fall. Es ist wohlbekannt, daß es universelle Kamber-Tondeur Klassen in $H^*(BGL_n(\mathbb{C})^\delta, \mathbb{R})$ gibt [BL95] I.g sowie [BL195] I.c, die sich als Borel-Klassen interpretieren lassen. Die Borel-Klassen b_k sind definiert als das Bild des Chern-Charakterers $ch_k \in H^{2k}(BGL_n(\mathbb{C}), \mathbb{R})$ unter der Komposition [Bu02] 9.6

$$\begin{array}{rcl} H^{2k}(BGL_n(\mathbb{C}), \mathbb{R}) & \xrightarrow{s} & H^{2k-1}(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), \mathbb{R}) \\ & = & H^{2k-1}(\mathrm{U}_n(\mathbb{C}), \mathbb{R}) = \Lambda(x_1, x_3, \ldots, x_{2n-1}) \\ & \xrightarrow{\cong} & H^{2k-1}(\mathfrak{u}_n \oplus \mathfrak{u}_n, \mathfrak{u}_n, \mathbb{R}) \\ & \xrightarrow{\cong} & H^{2k-1}(\mathfrak{gl}_n, \mathfrak{u}_n, \mathbb{R}) \\ & \xrightarrow{\cong} & H^{2k-1}_{\mathrm{cont}}(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), \mathbb{R}). \end{array}$$

Dabei ist der erste Morphismus die Suspension und der letzte Isomorphismus der inverse van Est-Isomorphismus. Die universelle Kamber-Tondeur Klasse $\tilde{c}_{2k-1}$ ist nun definiert als das Bild der Borel-Klasse b_k unter der Vergiß-Abbildung

$$\mu : H^{2k-1}_{\mathrm{cont}}(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), \mathbb{R}) \to H^{2k-1}(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})^\delta, \mathbb{R}).$$

Explizite Repräsentanten der Borel-Klassen gibt es in Gestalt *reeller* stetiger Gruppenkohomologie [Du76] und in relativer Lie-Algebren-Kohomologie in [Bu02] 9.7. Im letzteren Fall heißt dieser Repräsentant auch die kanonische Form auf $G_\mathbb{C}/K$. Wir zeigen im Detail in 2.3.1, wie man aus der kanonischen Form die klassischen Kamber-Tondeur Klassen flacher Bündel gewinnt.

Ebenfalls auf dem universellen simplizialen hermiteschen R-Bündel konstruieren wir die verfeinerte Kamber-Tondeur Form wie folgt: Sei $p \geq 0$. Mittels der kanonischen Abbildung

$$G^{p+1} \longrightarrow (\mathrm{herm}_n^+(\mathbb{C}))^{p+1},\ (g_0,...,g_p) \longmapsto (h_0,...,h_p)$$

mit $h_i := g_i^* g_i$ ist vermöge

$$\tilde{h}^p(t_0,...,t_{p+1},x)_{g_0\cdots g_p} := \sum_{i=0}^{p} t_k h_i + t_{p+1} h^{\mathrm{kan}}(x), \quad \sum_{i=0}^{p+1} t_i = 1,\ t_i \geq 0,\ i = 0,...,p+1$$

eine hermitesche Metrik $\tilde{h}^p := (\tilde{h}^p_{g_0\cdots g_p})_{(g_0,...,g_p)\in G^{p+1}}$ in $\Delta^{p+1} \times N_p\bar{G} \times G_{\mathbb{C}}/K \times \mathbb{C}^n \to \Delta^{p+1} \times N_p\bar{G} \times G_{\mathbb{C}}/K$ gegeben. Das Paar $(f, C^{p,2k-p}_{2k+1}(\tilde{h}))_{p\geq 0}$, bestehend aus

$$C^{p,2k-p}_{2k+1}(\tilde{h})_{g_0\cdots g_p} := (-1)^{p-1} \int_{\Delta^{p+1}} c_{2k+1}(\tilde{h}) \in A^{2k-p}(N_p\bar{G} \times_G G_{\mathbb{C}}/K)$$

und

$$f_{g_0\cdots g_{2k+1}} := -\left(\delta C^{2k,0}_{2k+1}(\tilde{h})\right)_{g_0\cdots g_{2k+1}} \in C^{2k+1}(NG, A_{2k+1}(R))$$

heißt **universelle verfeinerte Kamber-Tondeur Form** von $p : (EG \times_G (G_{\mathbb{C}}/K \times \mathbb{C}^n), h^{\mathrm{kan}}) \to EG \times_G G_{\mathbb{C}}/K$ vom Grade $2k+1$. Man nennt dabei

$$A_{2k+1}(R) := \left\langle \left\{ \int_{\varepsilon^{2k+2}\Delta^{2k+2}} c_{2k+1}(\tilde{h})_{g_0\cdots g_{2k+1}} \right\}_{(g_0,...,g_{2k+1})\in G^{2k+2}} \right\rangle_{\mathbb{Z}}.$$

den **Koeffizientenbereich** von $(f, C^{p,2k-p}_{2k+1}(\tilde{h}))_{p\geq 0}$.

In Verallgemeinerung glatter Deligne-Kohomologie und gewöhnlicher äquivarianter Kohomologie hat K. Gomi in [G05] die äquivariante glatte Delgine-Kohomologie mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$ definiert und systematisch studiert. Sei X eine G-Mannigfaltigkeit und A_k wie oben. Dann heißt der Komplex von simplizialen abelschen Garben

$$0 \to (A_k)_{N\bar{G}\times_G X} \to A^0_{N\bar{G}\times_G X} \xrightarrow{d} A^1_{N\bar{G}\times_G X} \xrightarrow{d} \ldots \xrightarrow{d} A^{k-1}_{N\bar{G}\times_G X}$$

G-äquivarianter glatter Deligne-Komplex auf $N\bar{G} \times_G X$. Seine Hyperkohomologie (vgl. A.6) wird äquivariante glatte Deligne-Kohomologie mit Koeffizienten in A_k genannt.

Theorem. *Die universelle verfeinerte Kamber-Tondeur Form repräsentiert eine Klasse in der G-äquivarianten glatten Deligne-Kohomologie $H^{2k+1}_{\mathcal{D}}(N\bar{G} \times_G G_{\mathbb{C}}/K, A_{2k+1}(R))$ mit Koeffizienten in der abelschen Gruppe $A_{2k+1}(R)$. Sie heißt* **universelle verfeinerte Kamber-Tondeur Klasse** *von $p : (EG \times_G (G_{\mathbb{C}}/K \times \mathbb{C}^n, h^{\mathrm{kan}}) \to EG \times_G G_{\mathbb{C}}/K$ und wird mit C_{2k+1} bezeichnet.*

Während Gomi vordergründig differenzierbare Operationen (kompakter) Lie-Gruppe auf Mannigfaltigkeiten betrachtet, studieren wir ausschließlich den Fall diskreter Gruppen. In diesem Fall zeigen wir, daß die zweite eingangs genannte kurze exakte Sequenz für zusammenziehbares X sich auf die äquivariante Situation verallgemeinert, d.h. die Sequenz

$$0 \to H^{k-1}(N\bar{G} \times_G X, \mathbb{C}/A_k) \to H^k_{\mathcal{D}}(N\bar{G} \times_G X, A_k) \xrightarrow{d} A^k(X)^G_{A_k} \to 0$$

ist exakt. Dabei ist d die äquivariante Verallgemeinerung des Krümmungshomomorphismus und $A^k(X)^G_{A_k}$ die G-invarianten k-Formen mit Perioden in A_k. Damit folgt

Satz. *Die universelle verfeinerte Klasse C_{2k+1} von p ist via des äquivarianten Krümmungshomomorphismus ein Lift der klassischen universellen Kamber-Tondeur Klasse, d.h. es gilt*

$$dC_{2k+1} = -\tilde{c}_{2k+1} \quad \in H^{2k+1}(N\bar{G} \times_G G_{\mathbb{C}}/K, A_{2k+1}(R)) \cong H^{2k+1}(G, A_{2k+1}(R)).$$

Insbesondere verfeinert die universelle verfeinerte Klasse die klassische universelle Kamber-Tondeur Klasse, die ihre Werte nun in der abelschen Untergruppe $A_{2k+1}(R)$ statt $\mathbb{R}$ annimmt.

Weiter reiht sich die Konstruktion der verfeinerten Kamber-Tondeur Klassen für ein beliebiges hermiteschen R-Bündel wie folgt in den simplizialen Formalismus ein: Sei also $\pi : (F, h) \to X$ ein Objekt in $\mathscr{V}_R^{\mathrm{herm}}$ und $T := (\mathcal{U}, e, h_{\mathcal{U}}^R)$ eine Trivialisierung, bestehend aus einer guten offenen Überdeckung $\mathcal{U} := (U_i)_{i\in I}$, flachen R-Rahmen $(e_i)_{i\in I}$ und hermiteschen R-Metriken $h_{\mathcal{U}}^R := (h_i)_{i\in I}$ mit $h_i(e_i) = 1$. Sei $\mathcal{V} := (V_i)_{i\in I}$ die offene Überdeckung von F definiert durch $V_i := \pi^{-1}(U_i) = U_i \times \mathbb{C}^n$ via e_i. Dann liefert die Nervkonstruktion das kombinatorisches Modell von π, nämlich das simpliziale hermitesche R-Bündel $\pi_{\mathcal{U}} : (NF_{\mathcal{V}}, h_{\mathcal{U}}) \to NX_{\mathcal{U}}$. Für jedes $p \geq 0$ ist vermöge

$$\bar{h}^p_{i_0\dots i_p}(t_0, \dots, t_{p+1}, x) := \sum_{j=0}^{p} t_j h_{i_j|U_{i_0\dots i_p}} + t_{p+1} h_{|U_{i_0\dots i_p}}(x), \quad \sum_{j=0}^{p+1} t_j = 1,\ t_j \geq 0$$

eine Familie von hermiteschen Metriken $\bar{h}_p := (\bar{h}_{i_0\dots i_p})$ in $\Delta^{p+1} \times N_pF_{\mathcal{V}} \to \Delta^{p+1} \times N_pX_{\mathcal{U}}$ gegeben. Das Paar $(f, C^{p,2k-p}_{2k+1}(F, \bar{h})_{p=0,\dots,2k})$, bestehend aus

$$C^{p,2k-p}_{2k+1}(F, \bar{h})_{i_0\dots i_p} := (-1)^{p-1} \int_{\Delta^{p+1}} c_{2k+1}(F, \bar{h})_{i_0\dots i_p} \quad \in A_X^{2k-p}(N_pX_{\mathcal{U}})$$

und

$$f_{i_0\dots i_{2k+1}} := \left(\delta C^{2k,0}_{2k+1}(F, \bar{h})\right)_{i_0,\dots,i_{2k+1}}$$

heißt **verfeinerte Kamber-Tondeur Form** von $(F, h) \to X$ vom Grade $2k+1$. Der Unterschied dieser Konstuktion zur klassischen Kamber-Tondeur Form liegt in der Affinkombination der hermiteschen R-Metriken und der gegebenen hermiteschen Metrik h in $(F, h) \to X$. Hierdurch ist die R-Struktur des hermiteschen R-Bündels in der Kamber-Tondeur Form $c_{2k+1}(F, \bar{h})$ kodiert. Diese simpliziale $2k+1$-Form lebt jedoch nicht auf $NX_{\mathcal{U}}$, sondern in $A^{2k+1}(\Delta^{\bullet+1} \times N_\bullet X_{\mathcal{U}})$. Die anschließende Faserintegration $\Delta^{p+1} \times N_pX_{\mathcal{U}} \to N_pX_{\mathcal{U}}$ für alle $p \geq 0$ eliminiert die Simplexrichtung und via dem simplizialen Stokes zeigt man

Theorem. *i) Die verfeinerte Kamber-Tondeur Form repräsentiert eine Klasse in der glatten Deligne-Kohomologie $H^{2k+1}_{\mathcal{D}}(X, A_{2k+1}(R))$ mit Koeffizienten in $A_{2k+1}(R)$, die nicht von der Wahl der Trivialisierung abhängt. Sie heißt* **verfeinerte Kamber-Tondeur Klasse** *von $(F, h) \to X$ vom Grad $2k+1$ und wird mit $C_{2k+1}(F, h)$ bezeichnet.*

ii) Die Bildung der verfeinerten Kamber-Tondeur Klasse ist additiv und funktoriell auf der Kategorie $\mathscr{V}_R^{\mathrm{herm}}$ der hermiteschen R-Bündel und also eine charakterische Klasse hermitescher R-Bündel.

Unmittelbar aus der Konstruktion folgt, daß der Koeffizientenbereich der verfeinerten Klassen bei abzählbaren R in einer abzählbaren Untergruppe von $\mathbb{R}$ liegt. Dies ist eine erste Verfeinerung der Kamber-Tondeur Klassen. Mit Hilfe der kurzen exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow H^{2k}(X, \mathbb{R}/A_{2k+1}(R)) \longrightarrow H^{2k+1}_{\mathcal{D}}(X, A_{2k+1}(R)) \xrightarrow{d} A^{2k+1}(X)_{A_{2k+1}(R)} \longrightarrow 0$$

erhält man

Theorem. *Die verfeinerten Kamber-Tondeur Klassen sind Lifts der klassischen Kamber-Tondeur Klassen, d.h. via dem Krümmungshomomorphismus d in der obigen kurzen exakten Sequenz gilt:*

$$dC_{2k+1}(F, h) = -c_{2k+1}(F) \quad \in H^{2k+1}(X, A_{2k+1}(R)).$$

Also verfeinern die verfeinerten Kamber-Tondeur Klassen die klassischen.

Mit denselben simplizialen Methoden wie im klassischen universellen Fall zeigen wir das

Theorem. *Jede verfeinerte Kamber-Tondeur Klasse ist Pullback der universellen verfeinerten.*

Diese Aussage läßt sich auf Formenniveau verschärfen, wenn man die Trivialisierung fixiert. Aufgrund der universellen Konstruktion der verfeinerten Klassen hängt der Koeffizientenbereich nur noch von der R-Struktur ab und nicht vom hermiteschen R-Bündel selbst. In zwei Fällen haben wir ihn genauer bestimmt:

Theorem (Der Fall C_1)**.** *Ist $(F,h) \to X$ ein hermitesches R-Bündel und $(\mathcal{U}, e)$ eine Trivialisierung, bestehend aus einer offenen Überdeckung $\mathcal{U} := (U_i)_{i\in I}$ und R-Rahmen $(e_i)_{i\in I}$, so lautet die erste verfeinerte Kamber-Tondeur Klasse*

$$C_1(F,h) = \left(\{\ln|\det g_{ij}|\}_{i,j\in I}, \left\{\frac{1}{2}\ln\det h_{e_i}\right\}_{i\in I} \right) \qquad \in H^1_{\mathcal{D}}(X, A_1),$$

mit $r := \det g_{ij}$, wobei die g_{ij}'s die Übergangsfunktionen sind.

Betrachte nun hermitesche R-Bündel vom Rang 2 der Form

$$p : (EG \times_G (SL_2(\mathbb{C})/SU(2) \times \mathbb{C}^2), h^{\text{kan}}) \to EG \times_G SL_2(\mathbb{C})/SU(2)$$

mit $G := SL_2(R)$. In solchen Bündeln verschwindet die erste Kamber-Tondeur Form und insbesondere die erste verfeinerte Kamber-Tonder Klasse. Aus Dimensionsgründen verschwindet auch C_k für $k > 3$. Also ist nur der Koeffizientenbereich A_3 der verfeinerten Klasse C_3 zu bestimmen, welcher in diesem Fall gegeben ist durch Integration über affine 3-Simplizes im Raum $\mathcal{B}$ der hermiteschen Formen auf dem $\mathbb{C}^2$, deren Ecken aber im Raum $\mathcal{B}_0$ aller hermiteschen Formen mit Determinante 1 liegen. Mit Hilfe von

$$\mathcal{B}_0 \cong SL_2(\mathbb{C})/SU(2) \cong \mathbb{H}^3,$$

wobei $\mathbb{H}^3$ der hyperbolische 3-Raum ist, zeigen wir, daß es für die Berechnung von A_3 genügt, Volumina hyperbolischer 3-Simplizes zu bestimmen. Hierfür gibt es jedoch eine konkrete Formel von Murakami-Ushijima [Mu04], mit deren Hilfe wir schließlich zeigen:

Theorem. *Der Koeffizientenbereich A_3 wird über $\mathbb{Z}$ von Wurzeln, Logithmen und Dilogarithmen von Elementen aus R erzeugt.*

Für die konkreten Rechnungen sei auf Theorem 3.3.9 verwiesen. Hieraus erhellt sich die Vermutung, daß der Koeffizientenbereich der verfeinerten Kamber-Tondeur Klassen von Rang n-Bündeln über $\mathbb{Z}$ erzeugt wird aus Polylogarithmen und Wurzeln von Elementen aus der R-Struktur. Die Konstruktion der verfeinerten Klasse in Gestalt eines Kozykels in der (äquivarianten) glatten Deligne-Kohomologie ist zwar kanonisch, aber *nicht* eindeutig. Eine Wahl liegt beispielsweise in der *Affinkombination* der hermiteschen Metriken vor. Ebensogut sind andere Funktionen vorstellbar. Aber dies wiederum bietet zum Trost Optimierungsspielraum für den Koeffizientenbereich der verfeinerten Klassen.

Danksagung An dieser Stelle möchte ich allen danken, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben. Besonders danke ich Prof. Dr. Sebastian Goette und Prof. Dr. Uwe Jannsen für das vorzügliche Thema, die freundliche Betreuung und für die Zeit und Geduld, die sie mir zur Beantwortung meiner Fragen aufbrachten. Ohne diese Unterstützung wäre es nicht möglich gewesen, die vorliegende Arbeit in so kurzer Zeit anzufertigen. Darüberhinaus möchte ich mich ganz herzlich bei Prof. Dr. Johan Dupont für die zahlreichen richtungsweisenden Anregungen bedanken, die er mir während seines Aufenthaltes in Regensburg gab. Weiter gilt mein Dank der Arbeitsgemeinschaft Higher Torsion Invariants in Differential Topology and Algebraic K-Theory vom 02.-08.04.2006 in Oberwolfach, im Besonderen Prof. Dr. Guido Kings, Prof. Dr. Ulrich Bunke, Dr. Marco Hien, Georg Tamme und Volker Neumaier. Schließlich geht ein lieber Dank an meine Eltern und an meine Freundin Sabine, die es mir erst ermöglichten, meine Arbeit konsequent voranzubringen.

Inhaltsverzeichnis

1 Hermitesche R-Bündel

Während im ersten Abschnitt grundlegende Begriffe der Bündeltheorie in knapper Form bereitgestellt werden, geht es im zweiten Abschnitt um die Konstruktion des für diese Arbeit zentralen universellen hermiteschen R-Bündel.

1.1 Grundlagen

Definition 1.1.1. *i*) Eine hermitesche Metrik in einem komplexen Vektorbündel $\pi : E \to X$ ist ein globaler Schnitt h in $\Gamma(X, (E \otimes_{\mathbb{C}} E)^*)$ (oder äquivalent dazu, eine Abbildung $h : E \times_X E \to \mathbb{C}$) derart, daß $h_x : E_x \times E_x \to \mathbb{C}$ für jedes $x \in X$ ein hermitesches Skalarprodukt auf dem $\mathbb{C}$-Vektorraum E_x ist.

ii) Ein Paar $(E, h) \to X$, bestehend aus einem komplexen Vektorbündel $E \to X$ und einer hermiteschen Metrik h auf E heißt **hermitesches Vektorbündel**.

Bemerkung 1.1.2. Ist $(\hat{f}, f)$ eine Bündelabbildung von $E \to X$ nach einem hermiteschen Vektorbündel $(E', h') \to X'$, so induziert h' eine hermitesche Metrik h, die auch f^*h' bezeichnet wird, auf E durch

$$h_x(s,t) := h'_{f(x)}(\hat{f}(s), \hat{f}(t)), \qquad \text{für alle } s, t \in E \times_X E$$

Sprechweise 1.1.3. Eine Bündelabbildung $(\tilde{f}, f) : (E', h') \to (E, h)$ *respektiert die Metriken*, wenn die durch h auf E' induzierte Metrik mit h' übereinstimmt, d.h. $f^*h = h'$. Eine Bündelabbildung zwischen hermiteschen Vektorbündeln ist ein Morphismus in der Kategorie der hermiteschen Vektorbündel.

Definition 1.1.4. Zwei hermitesche Metriken h_0, h_1 in einem Vektorbündel $E \to X$ heißen *homotop*, falls es eine hermitesche Metrik h in dem durch Pullback entlang $p_X : X \times I \to X$ zurückgeholten Bündel $p_X^* E$ über $X \times I$ gibt, mit $h_{|X \times i} = h_i$, also

$$\begin{tikzcd} p_X^* E \arrow[r] \arrow[d] & (E, h_i) \arrow[d] \\ X \times I \arrow[r, "p_X"'] & X \end{tikzcd}$$

Theorem 1.1.5 ([Kar77]I.8.9)**.** *Sei X parakompakt und $(E, h) \to X \times I$ ein hermitesches Vektorbündel über $X \times I$. Dann sind $(E_0, h_0) := (E, h)_{|X \times 0}$ und $(E_1, h_1) := (E, h)_{|X \times 1}$ isomorph in der Kategorie der hermiteschen Vektorbündel.*

Ein Zusammenhang $\theta \in A^1(P, \mathfrak{g})$ eines G-Prinzipalbündel $P \to X$ heißt **flach**, falls seine Krümmung $\Omega := d\theta + \theta \wedge \theta$ verschwindet.

Lemma 1.1.6 (Charakterisierung flacher Bündel)**.** Sei $P \to X$ ein G-Prinzipalbündel. Dann hat man eine eineindeutige Korrespondenz von:

i) {Flache Zusammenhänge in $P \to X$ }.

ii) { Offene Überdeckungen $\{U_i\}_{i \in I}$ von X, so daß die Übergangsfunktionen $g_{ij} : U_{ij} \to G$ von P für alle $i, j \in I$ konstant sind }.

iii) {Reduktionen von $P \to X$ nach G^δ}, wobei G^δ die Gruppe G in diskreter Topologie ist.

iv) { Darstellungen $\rho : \pi_1(X, x_0) \to G$ der Fundamentalgruppe }.

Beweis. Vergleiche hierzu J. Dupont [Du78], Kor.3.22 auf der Seite 53 und S. Kobayashi [Kob87] Prop.2.6 auf Seite 6. □

Die Eigenschaften $ii) - iv)$ machen auch für topologische G-Prinzipalbündel Sinn. Daher definiert man Flachheit in diesem Falle durch eine dieser Eigenschaften.

Zwei Bündelabbildungen $(\tilde{f}_0, f_0), (\tilde{f}_1, f_1) : (E, B) \to (E', B')$ heißen **homotop**, wenn es eine Bündelabbildung $(\tilde{H}, H) : (E \times I, B \times I) \to (E', B')$ gibt, mit $(\tilde{H}_i, H_i) = (\tilde{f}_i, f_i)$. Dies ist äquivalent dazu, daß es eine G-äquivariante Abbildung $\tilde{H} : E \times I \to E'$ auf den Totalräumen mit $\tilde{H}_i = \tilde{f}_i$ für $i = 0, 1$ gibt. Dabei operiert G in naheliegenderweise durch $(e, t)g := (eg, t)$ auf $E \times I$. Man nennt $\tilde{H}$ in diesem Zusammenhang auch eine G-Homotopie von $\tilde{f}_0$ nach $\tilde{f}_1$.

Definition 1.1.7. Ein G-Prinzipalbündel[2] $E \to B$ heißt **universell**, wenn es zu jedem G-Prinzipalbündel $P \to X$ eine bis auf Homotopie eindeutige Bündelabbildung nach $E \to B$ gibt.

Ist $E' \to B'$ ein anderes universelles G-Prinzipalbündel, so folgt unmittelbar aus der Definition, daß die beiden Bündel homotopieäquivalent sind. Daher spricht man auch von *dem* universellen G-Prinzipalbündel $E \to B$.

Theorem 1.1.8 (Topologische Charakterisierung universeller Bündel)**.** *Sei $E \to B$ ein G-Prinzipalbündel. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *Es ist $E \to B$ universell.*
2. *Der Totalraum E ist zusammenziehbar.*
3. *Es gibt einen in X funktoriellen Isomorphismus von der Menge der Homotopieklassen von Abbildungen von X nach B in die Menge der Isomorphieklassen von G-Prinzipalbündeln über X*
$$\varphi : [X, B] \xrightarrow{\cong} \mathscr{P}_G^{\mathrm{Iso}}(X), \quad f \longmapsto f^*E.$$

Beweis. $i) \Rightarrow iii)$: Die in $iii)$ definierte Abbildung ist wohldefiniert, da homotope Abbildungen äquivalente Bündel induzieren. Ist P ein G-Prinzipalbündel über X, so gibt es nach $i)$ eine Bündelabbildung $\tilde{f} : P \to E$. Ein zu P isomorphes Bündel P' über X hat ebenfalls nach $i)$ eine Bündelabbildung $\tilde{g}$ nach E und damit hat P (oder P') zwei Bündelabbildungen nach E, die aber nach $i)$ homotop sind. Also ist das Urbild $[f : X \to B]$ von $P \to X$ unabhängig von der Wahl des Repräsentanten in der Isomorphieklasse $[P \to X]$. Mithin ist die in $iii)$ angegebene Abbildung surjektiv und mit denselben Argument auch injektiv.

$iii) \Rightarrow i)$: Es ist zu zeigen, daß vermöge $\varphi([\mathrm{id}_B])$ das universelle Bündel $E \to B$ gegeben ist. Sei dazu P ein G-Prinzipalbündel über X. Dann gibt es eine bis auf Homotopie eindeutige Abbildung $f : X \to B$. Da f eine Abbildung auf den Quotienten $X = P/G$ und $B = E/G$ ist, liftet sie sich zu einer G-Abbildung $\tilde{f}$ auf den Totalräumen. Sind nun $(\tilde{f}_i, f_i)$ zwei Bündelabbildungen von P nach E, so gibt es nach $iii)$ eine Homotopie $H : X \times I \to B$ von f_0 nach f_1. Da $E \to B$ als G-Prinzipalbündel eine Hurewicz-Faserung (vgl.[Do63] 4.7 und 4.8) ist, also die Homtopieliftungseigenschaft für jeden topologischen Raum X besitzt, folgt die Existenz einer G-Homotopie auf den Totalräumen. Genauer gibt es ein $\tilde{H}$, so daß das folgende Diagramm

$$\begin{tikzcd}
P \times 0 \arrow[rr, "\tilde{H}_0 = \tilde{f}_0"] \arrow[d] & & E \arrow[d] \\
P \times I \arrow[r] \arrow[urr, dashed, "\exists \tilde{H}"] & X \times I \arrow[r, "H"] & B
\end{tikzcd}$$

[2] wir betrachten hier nur numerierbare Bündel.

kommutativ ist mit $\tilde{H}_i = \tilde{f}_i$ für $i = 0, 1$. Für die Äquivalenz von *iii*) und *ii*) vgl. [Do63] 7.5. $\square$

Aufgrund der Homotopieinvarianz des Pullbacks faktorisiert sich der kontravariante Funktor

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{P}_G^{\mathrm{Iso}} : Top & \longrightarrow & Sets \\ X & \longmapsto & \mathscr{P}_G^{\mathrm{Iso}}(X) \\ f : X \to Y & \longmapsto & \begin{array}{rcl} f^* : \mathscr{P}_G^{\mathrm{Iso}}(Y) & \to & \mathscr{P}_G^{\mathrm{Iso}}(X) \\ {[P \to Y]} & \to & [f^*P \to X] \end{array} \end{array}$$

über die Homotopiekategorie $\mathscr{H}Top$ der topologischen Räume und der Homotopieklassen von stetigen Abbildungen als Morphismen. Dementsprechend läßt sich *iii*) im vorstehenden Theorem wie folgt formulieren: Der Funktor $\mathscr{P}_G^{\mathrm{Iso}}$ ist darstellbar, d.h. es gibt eine Darstellung

$$\left(B, \varphi : [-, B] \xrightarrow{\cong} \mathscr{P}_G^{\mathrm{Iso}}\right)$$

des Funktors $\mathscr{P}_G^{\mathrm{Iso}}$ mit *dem* darstellenden Objekt B. Beachte dabei, daß das darstellende Objekt einer Darstellung eindeutig bis auf eindeutige Isomorphie ist, d.h. ist $(B', \varphi' : [-, B'] \xrightarrow{\cong} \mathscr{P}_G^{\mathrm{Iso}})$ eine andere Darstellung von $\mathscr{P}_G^{\mathrm{Iso}}$, so gibt es nach Yoneda [Sch70]4.2 genau eine Homotopieäquivalenz von B nach B'.

Eine konkrete und in G funktorielle Konstruktion des universellen G-Prinzipalbündel geht auf Milnor [Mi56] und Dold [Do63] zurück. Milnor konstruierte zu gegebener topologischer Gruppe G das G-Prinzipalbündel $EG \to BG$, welches definiert ist durch

$$E_nG := \underbrace{G * \cdots * G}_{\text{n+1 Join}}, \qquad EG := \varinjlim E_nG, \qquad BG := EG/G$$

mit schwach zusammenziehbarem Totalraum (d.h.$\pi_n(EG) = 0$ für alle n). Dold konnte zudem zeigen, daß dieses Bündel numerierbar und der Totalraum EG zusammenziehbar und also nach Theorem 1.1.8 ein universelles Bündel ist.

Theorem 1.1.9 ([Mi56],[Do63]). *Es gibt einen Funktor von der Kategorie der topologischen Gruppen in die universellen Bündel, welcher jeder topologischen Gruppe G das universelle Bündel $EG \to BG$ und jedem Morphismus $G \to H$ den Bündelmorphismus $(EG \to BG) \longrightarrow (EH \to BH)$ zuordnet.*

Für ein G-Prinzipalbündel $P \to X$ heißt die bis auf Homotopie eindeutig bestimmte Abbildung $X \to BG$ **klassifizierende Abbildung von** $P \to X$ und BG der **klassifizierende Raum von** G. Aus Lemma 1.1.6 *iii*) folgt

Korollar 1.1.10. Der klassifizierende Raum aller flachen G-Bündel ist BG^δ.

1.2 Konstruktion des universellen hermiteschen R-Bündel

In diesem Abschnitt konstruieren wir das universelle Bündel, welches alle R-Bündel klassifiziert, deren Komplexifizierung mit einer hermiteschen Metrik ausgestattet sind.

Sei R ein diskreter Unterring von $\mathbb{C}$, z.B. $\mathbb{Z}$ oder der Ganzheitsring $\mathcal{O}_K$ eines algebraischen Zahlkörpers K.

Ein R-lokales System vom Rang n auf X ist eine lokal konstante Garbe $\mathscr{F}$ von freien R-Moduln von Rang n, d.h. es gibt eine offene Überdeckung $\{U_i\}_{i \in I}$ von X mit $\mathscr{F}_{|U_i} \cong R^n_X$, wobei R^n_X die konstante Garbe bezeichne. Das zum lokalen System $\mathscr{F}$ gehörige flache Bündel $F := \mathscr{F} \otimes_R A^0_X \to X$ hat also Strukurgruppe $\mathrm{GL}_n(R)$ (in der diskreten Topologie) und typische Faser R^n.

Definition 1.2.1. Das zu einem R-lokalen System vom Rang n gehörige flache Faserbündel nennen wir *R-Bündel* oder *Bündel mit einer R-Struktur über X.*

Durch Abmontieren der Faser R^n erhält man das zu $F \to X$ assoziierte $Gl_n(R)$-Prinzipalbündel $V^n \to X$, das sogenannte R-Rahmenbündel (also V^n ist das Bündel aller R-Rahmen) von $F \to X$. Die Komplexifizierung von F liefert ein komplexes Vektorbündel $F_{\mathbb{C}} := F \otimes_R \mathbb{C} = V^n \times_{\mathrm{GL}_n(R)} \mathbb{C}^n$ mit Strukturgruppe $\mathrm{GL}_n(R)$ und Faser $\mathbb{C}^n$ über X.

Die bisherige Klassifizierung flacher Bündel berücksichtigt nicht die Metrik. Betrachte daher die folgende Kategorie $\mathscr{V}_R^{\mathrm{herm}}$: Die Objekte darin sind **hermitesche R-Bündel** $(F_{\mathbb{C}}, h) \to X$, d.h. komplexifizierte R-Bündel $F \to X$. Die Morphismen $\tilde{\varphi} : (F'_{\mathbb{C}}, h') \to (F_{\mathbb{C}}, h)$ in $\mathscr{V}_R^{\mathrm{herm}}$ sind Morphismen von flachen Bündeln

$$\begin{tikzcd}
(F'_{\mathbb{C}}, h') \arrow[r, "\tilde{\varphi}"] \arrow[d] & (F_{\mathbb{C}}, h) \arrow[d] \\
X' \arrow[r, "\varphi"] & X,
\end{tikzcd}$$

welche zusätzlich die Metriken respektieren (d.h. $\varphi^* h = h'$).

Notation 1.2.2. Zur Vereinfachung der Notation und wenn keine Verwechslungen zu befürchten sind, schreiben wir für hermitesche R-Bündel statt $(F_{\mathbb{C}}, h) \to X$ einfach $(F, h) \to X$. Es seien ferner die Notationen $G := \mathrm{GL}_n(R)$, $G_{\mathbb{C}} := \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ und $K := \mathrm{U}(n)$ fortan fixiert.

Definition 1.2.3. Sei $i = 0, 1$. Zwei Morphismen von hermiteschen R-Bündeln $\tilde{\varphi}_i : (F', h') \to (F, h)$ in $\mathscr{V}_R^{\mathrm{herm}}$ heißen **homotop**, wenn es eine G-Homotopie $\tilde{H} : (F' \times I, \hat{h}) \to (F, h)$ und eine von $t \in I$ abhängige Metrik $\hat{h} = \hat{h}_t$ in $F' \times I$ gibt, mit

1. $H^* h = \hat{h}$
2. $H_i^* h = \varphi_i^* h = h'$
3. $\hat{h}_i = h'$.

Ist dabei $\hat{h}_t = h'$ für alle $t \in I$, so nennen wir die beiden Morphismen φ_i **horizontal homotop** und $\tilde{H}$ entsprechend eine **horizontale Homotopie** von φ_0 nach φ_1.

Theorem 1.2.4 (Klassifizierung flacher Bündel mit Metrik)**.** *Sei $(F_{\mathbb{C}} \to X, h)$ ein Objekt in $\mathscr{V}_R^{\mathrm{herm}}$. Dann gibt es einen bis auf horizontale Homotopie eindeutig bestimmten Morphismus*

$$\begin{tikzcd}
(F_{\mathbb{C}}, h) \arrow[r, "\tilde{\varphi}"] \arrow[d] & (EG \times_G (G_{\mathbb{C}}/K \times \mathbb{C}^n), h^{\mathrm{kan}}) \arrow[d, "p"] \\
X \arrow[r, "\varphi"] & EG \times_G G_{\mathbb{C}}/K
\end{tikzcd}$$

in $\mathscr{V}_R^{\mathrm{herm}}$.

Sprechweise 1.2.5. Das Bündel p nennen wir auch das universelle hermitesche R-Bündel in der Kategorie $\mathscr{V}_R^{\mathrm{herm}}$ der hermiteschen R-Bündel.

Beweis. Der Beweis erfolgt in drei Schritten:

1.Schritt: Konstruktion der kanonischen Metrik auf $p : EG \times_G (G_{\mathbb{C}}/K \times \mathbb{C}^n) \to EG \times_G G_{\mathbb{C}}/K$

Identifiziert man

$$\tau : G_{\mathbb{C}}/K \xrightarrow{\cong} \mathrm{herm}_n^+(\mathbb{C}), \quad [\gamma] \longmapsto (\gamma^*)^{-1} \cdot E \cdot \gamma^{-1} = (\gamma^*)^{-1}\gamma^{-1},$$

wobei $\mathrm{herm}_n^+(\mathbb{C})$ die positiv definiten hermiteschen Formen auf dem $\mathbb{C}^n$ sind und E die Einheitsmatrix ist, so ist vermöge

$$h^{\mathrm{kan}}((e,[\gamma],v),(e,[\gamma],v')) := v^*(\gamma^*)^{-1}\gamma^{-1}v'$$

eine mit der G-Opeararation verträgliche hermitesche Metrik auf $EG \times G_{\mathbb{C}}/K \times \mathbb{C}^n \to EG \times G_{\mathbb{C}}/K$ gegeben. Denn für $g \in G$ gilt

$$\begin{aligned} h^{\mathrm{kan}}((eg, g^{-1}[\gamma], g^{-1}v),(eg, g^{-1}[\gamma], g^{-1}v')) &= (g^{-1}v)^*(g^{-1}\gamma)^{*-1}(g^{-1}\gamma)^{-1}g^{-1}v' \\ &= v^*g^{*-1}g^*\gamma^{*-1}\gamma^{-1}gg^{-1}v' \\ &= v^*(\gamma^*)^{-1}\gamma^{-1}v'. \end{aligned}$$

Demnach ist h^{kan} invariant unter der Diagonaloperation von G und damit wohldefiniert auf dem Quotienten $p : EG \times_G (G_{\mathbb{C}}/K \times \mathbb{C}^n) \to EG \times_G G_{\mathbb{C}}/K$. Man nennt die auf diese Weise auf dem Bündel p definierte Metrik auch die **kanonische Metrik** und bezeichnet sie wieder mit h^{kan}.

2.Schritt: Konstruktion der Bündelabbildung

Sei $\pi : F_{\mathbb{C}} \to X$ ein Objekt in $\mathscr{V}_R^{\mathrm{herm}}$, d.h. $F \to X$ ein Bündel mit einer R-Struktur, also insbesondere flach. Sei $V^n \to X$ das zu $F \to X$ assoziierte R-Rahmenbündel. Dann gilt $F = V^n \times_G R^n$ und nach Kor.1.1.10 gibt es eine bis auf Homotopie eindeutige Bündelabbildung

$$\begin{array}{ccc} V^n & \xrightarrow{\tilde f} & EG \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & BG \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} V^n \times R^n & \xrightarrow{(\tilde f, id)} & EG \times R^n \\ \downarrow & & \downarrow \\ F & \xrightarrow{(\tilde f, \mathrm{kan})} & EG \times_G R^n \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & BG. \end{array}$$

Die Notationen beibehaltend beweisen wir nun das

Lemma 1.2.6. Sei $F_{\mathbb{C}} \to X$ ein Vektorbündel. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

i) Es ist $F_{\mathbb{C}} \to X$ ein hermitesches R-Bündel.

ii) Das Bündel $V^n \times \mathbb{C}^n \to X$ trägt eine G-invariante hermitesche Metrik.

iii) Es gibt eine G-äquivariante Abbildung $\phi : V^n \to G_{\mathbb{C}}/K$.

iv) Es gibt einen G-äquivarianten Lift $\bar\phi : V^n \to EG \times G_{\mathbb{C}}/K$ von $\tilde f$.

v) Es gibt einen Lift $\varphi : X \to EG \times_G G_{\mathbb{C}}/K$ von f.

Aus den Konstruktionen im Lemma folgt unmittelbar:

Korollar 1.2.7. Man hat eine eineindeutige Korrespondenz von

$$\{\text{hermitesche Metriken in } F_{\mathbb{C}}\} \xrightarrow{\cong} \{\text{Liftungen } \varphi : X \to EG \times_G G_{\mathbb{C}}/K \text{ von } f\ \}$$

Beweis. [des Lemmas] *i)* $\Rightarrow$ *ii)*: Ist h eine hermitesche Metrik auf $F_{\mathbb{C}} \to X$, so definiert

$$(V^n \times \mathbb{C}^n) \times_X (V^n \times \mathbb{C}^n) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad ((e,v),(e',v')) \longmapsto h(ev, e'v')$$

offenbar eine G-invariante hermitesche Metrik auf $V^n \times \mathbb{C}^n \to X$. Dabei ist $ev = \sum_{i=1}^n v_i e_i$ mit $e = (e_1, ..., e_n) \in V^n$ und $v = (v_1, ..., v_n) \in R^n$.

ii) $\Rightarrow$ *i)*: Klar, G-invariante Objekte auf $V^n \times \mathbb{C}^n$ leben bereits auf dem Quotienten $V^n \times_G \mathbb{C}^n$.

i) $\Rightarrow$ *iii)*: Sei h eine hermitesche Metrik in $F_{\mathbb{C}} \to X$. Setze

$$\phi : V^n \longrightarrow G_{\mathbb{C}}/K, \quad e \longmapsto \phi(e) := \tau^{-1}(h_e),$$

wobei h_e die hermitesche Metrik bezüglich des R-Rahmens e ist. Die Linksoperation $G \times G_{\mathbb{C}}/K \to G_{\mathbb{C}}/K$, $(g,[\gamma]) \mapsto g[\gamma] := [g\gamma]$ induziert via τ eine Operation auf $\mathrm{herm}_n^+(\mathbb{C})$, so daß τ G-äquivariant wird, d.h.

$$\begin{aligned} \tau([g\gamma]) &= (g\gamma)^{*-1}(g\gamma)^{-1} \\ &= g^{*-1}\gamma^{*-1}\gamma^{-1}g^{-1} \\ &= g^{*-1}\tau([\gamma])g^{-1}. \end{aligned}$$

Dies ist genau die bekannte Rahmentransformationseigenschaft für Vektorbündel $h_{eg} = g^* h_e g$. Mithin folgt $\phi(eg) = \tau^{-1}(h_{eg}) = g^{-1}\phi(e)$, d.h. die behauptete G-Äquivarianz von $\bar\phi$.

iii) $\Rightarrow$ *i)*: Nutze ϕ als lokale Definition einer Metrik in $F_{\mathbb{C}} \to X$. Wegen der Rahmentransformationseigenschaft verklebt sich diese zu einer globalen Metrik.

iii) $\Rightarrow$ *iv)*: Vermöge

$$\bar\phi : V^n \longrightarrow EG \times G_{\mathbb{C}}/K, \quad e \longmapsto (\tilde f(e), \phi(e))$$

ist ein Lift $\tilde f$ gegeben. Nach Definition von $\tilde f$ und der Vorausetzung *iii)* gilt $eg \mapsto (\tilde f(eg), \phi(eg)) = (\tilde f(e)g, g^{-1}\phi(e))$, also ist die oben definierte Abbildung G-äquivariant.

iv) $\Rightarrow$ *v)*: Betrachte das folgende kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & & EG \times G_{\mathbb{C}}/K \arrow[d] \arrow[dr, "pr"] & \\
 & V^n \arrow[ur, "\bar\phi"] \arrow[r, "\tilde f"'] \arrow[d] & EG \arrow[d] & EG \times_G G_{\mathbb{C}}/K \arrow[dl] \\
X/G \arrow[r, equal] & X \arrow[r, "f"'] \arrow[urr, dashed, "\varphi"] & BG &
\end{tikzcd}$$

und definiere φ durch $x = eG \longmapsto \varphi(x) := (pr \circ \bar\phi)(e) = [\tilde f(e), \phi(e)]$. Dies hängt nicht von der Wahl von $g \in G$ (also vom Element in der Faser G von $V^n \to X$) ab, da $\bar\phi$ äquivariant ist und somit die Komposition $pr \circ \bar\phi$ konstant auf der Faser G ist.

iv) $\Rightarrow$ *v)*: Vermöge

$$\begin{array}{ccccc} X & \longrightarrow & EG \times_G G_{\mathbb{C}}/K & \longrightarrow & G_{\mathbb{C}}/K \\ x = eG & \longmapsto & [\tilde f(e), \phi(e)] & \longmapsto & \phi(e) \end{array}$$

ist lokal eine hermitesche Metrik in $F_{\mathbb{C}} \to X$ gebeben, die sich aufgrund der Rahmentransformationseigenschaft zu einer globalen zusammenklebt. Mithin ist das Lemma bewiesen. □

Die Existenz einer hermiteschen Metrik h in $F_{\mathbb{C}} \to X$ impliziert also nach dem Lemma einen Lift $\varphi : X \to EG \times_G G_{\mathbb{C}}/K$ von $f : X \to BG$. Die noch fehlende Abbildung $\tilde\varphi$ auf den Totalräumen konstruiert man wie folgt: Betrachte das $\tilde\varphi$ definierende kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
V^n \times \mathbb{C}^n \arrow[r, "(\bar{\phi}, id)"] \arrow[d] & EG \times G_{\mathbb{C}}/K \times \mathbb{C}^n \arrow[d] \\
F_{\mathbb{C}} \arrow[r, dashed, "\Rightarrow \tilde{\varphi}"] \arrow[d] & EG \times_G (G_{\mathbb{C}}/K \times \mathbb{C}^n) \arrow[d] \\
X \arrow[r, "\varphi"] & EG \times_G G_{\mathbb{C}}/K
\end{tikzcd}$$

und beachte, daß die durch $(\bar{\phi}, id)(e, v) = (\tilde{f}(e), \phi(e), v)$ auf dem Quotienten definierte Abbildung $\tilde{\varphi}$ wohldefiniert ist. (Dies folgt unmittelbar aus dem Lemma.) Damit ist also $\tilde{\varphi}$ durch φ eindeutig bestimmt. Nach Konstruktion der kanonischen Metrik gilt $\varphi^*(h^{\text{kan}}) = h$.

3.Schritt: Es sind $(\tilde{\varphi}, \varphi)$ eindeutig bis auf horizontale Homotopie.

Es ist zu zeigen: Sind $(\tilde{\varphi}_0, \varphi_0)$ und $(\tilde{\varphi}_1, \varphi_1)$ zwei Morphismen nach p in $\mathscr{V}_R^{\text{herm}}$, so sind sie horizontal G-homotop. Betrachte dazu das durch Pullback in $\mathscr{V}_R^{\text{herm}}$ gewonnene flache Bündel

$$\begin{tikzcd}
p_X^*(F_{\mathbb{C}}, h) \arrow[r] \arrow[d] & (F_{\mathbb{C}}, h) \arrow[d] \\
X \times I \arrow[r, "p_X"] & X
\end{tikzcd}$$

$p_X^*(F_{\mathbb{C}}, h) = (F_{\mathbb{C}} \times I, h)$ über $X \times I$. Als flaches Bündel ohne Metrik gibt es nach Kor.1.1.10 eine Homotopie $(\tilde{H}, H) : (V^n \times I \to X \times I) \longrightarrow (EG \to BG)$ mit $(\tilde{H}_i, H_i) = (\tilde{f}_i, f_i)$ wobei $f_i = \text{kan} \circ \varphi_i$ ist. Nach Lemma 1.2.6 gibt es eine Homotopie $(\tilde{H}', H')$

$$\begin{tikzcd}
 & EG \times_G G_{\mathbb{C}}/K \arrow[d, "\text{kan}"] \\
X \times I \arrow[ur, dashed, "H'"] \arrow[r, "H"'] & BG
\end{tikzcd}$$

gegeben durch $H'(x, t) = [\tilde{H}(e, t), \phi(e)]$ und $\tilde{H}'([e, v], t) = [\tilde{H}(e, t), \phi(e), v]$. Ferner folgt aus dem Lemma, daß eine Homotopie nach p genau dann horizontal (also $H'^* h^{\text{kan}} = h$) ist, wenn die zweite Komponente ϕ von H' nicht von $t \in I$ abhängt. Daher macht es auch Sinn von der Menge der *horizontalen Homotopieklassen* von Abbildungen

$$[X, EG \times_G G_{\mathbb{C}}/K]^{\text{hor}}$$

zu sprechen. Offenbar ist $(\tilde{H}', H')$ horizontal und es gilt $(\tilde{H}'_i, H'_i) = (\tilde{\varphi}_i, \varphi_i)$ für $i = 0, 1$. □

Korollar 1.2.8. Es ist $EG \times_G G_{\mathbb{C}}/K$ der klassifizierende Raum flacher hermitescher Bündel, genauer hat man einen in X funktoriellen Isomorphismus

$$\begin{array}{rcl}
[X, EG \times_G G_{\mathbb{C}}/K]^{\text{hor}} & \longrightarrow & \mathscr{V}_R^{\text{herm}}(X)^{Iso} \\
\varphi & \longmapsto & \varphi^*(EG \times_G (G_{\mathbb{C}}/K \times \mathbb{C}^n), h^{\text{kan}}).
\end{array}$$

Beweis. Horizontal homotope Abbildungen sind insbesondere homotop und induzieren daher äquivalente Bündel (betrachtet als Bündel ohne Metrik) Nach Theorem 1.1.5 respektiert dieser Isomorphismus auch die Metrik. Damit ist die vorstehende Abbildung wohldefiniert. Wegen Theorem 1.2.4 haben in $\mathscr{V}_R^{\text{herm}}(X)$ isomorphe Bündel denselben Lift $\varphi : X \to EG \times_G G_{\mathbb{C}}/K$ in folgendem

Sinne: Ist $\psi : (F_{\mathbb{C}}, h) \to (F'_{\mathbb{C}}, h')$ ein Isomorphismus in $\mathscr{V}_R^{\mathrm{herm}}(X)$ und sind φ' und φ zwei nach Theorem 1.2.4 existierende Liftungen von $f : X \to BG$, so gilt

$$\varphi'(x) = [\tilde{f}'(e'), \tau^{-1}(h'_{e'})] = [\tilde{f}'(\psi(e)), \tau^{-1}(h'_{\psi(e)})] = [\tilde{f}(e), \tau^{-1}(h_e)] = \varphi(x).$$

Dabei sind natürlich zwei Bündelabbildungen der zugrundeliegenden R-Rahmenbündel gewählt worden, nämlich $(\tilde{f}', f') : (V'^n \to X) \longrightarrow (EG \to BG)$ und für das Bündel $V \to X$ setzt man $\tilde{f} := \tilde{f}' \circ \psi$ und $f := f'$. Wählte man andere Bündelabbildungen, so landet man immer noch in derselben horizontalen Homotopieklasse von φ. Damit ist auch die Umkehrabbildung

$$(F_{\mathbb{C}}, h) \longmapsto \varphi$$

wohldefiniert. Die Behauptung folgt nun wiederum aus Theorem 1.2.4. $\square$

Bemerkung 1.2.9. Man kann *nicht* die in Schritt 1 im Beweis des Theorems definierte Identifikation $\tau : G_{\mathbb{C}}/K \cong \mathrm{herm}_n^+(\mathbb{C})$ durch $\tau' : G_{\mathbb{C}}/K \cong \mathrm{herm}_n^+(\mathbb{C})$, $[\gamma] \mapsto \gamma^*\gamma$ ersetzen, da diese nicht verträglich mit der G-Operation ist. Insofern sind die beiden Räume in einer für diese Arbeit kanonischen Weise identifiziert worden.

2 Charakteristische Klassen flacher Bündel

2.1 Grundlagen

Sei Λ ein Unterring von $\mathbb{R}$. Für topologische G-Prinzipalbündel $P \to B$ definiert man:

Definition 2.1.1. Eine **charakteristische Klasse** c für ein G-Prinzipalbündel ordnet jeder Isomorphieklasse von topologischen G-Prinzipalbündeln $[P \to B]$ eine Kohomologieklasse $c(P) \in H^*(B, \Lambda)$ derart zu, daß für jede stetige Abbildung $g : X \to B$ gilt

$$g^* c(P) = c(g^* P). \tag{2}$$

Man hat eine eineindeutige Korrespondenz

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{charakteristische Klassen} \\ \text{von } G\text{-Prinzipalbündeln} \\ \text{mit Koeffizienten in } \Lambda \end{array} \right\} \longleftrightarrow H^*(BG, \Lambda) \tag{3}$$

zwischen den charakteristischen Klassen von G- Prinzipalbündeln und den Kohomologieklassen in $H^*(BG, \Lambda)$ des klassifizierenden Raumes BG der topologischen Gruppe G.

Insofern hätte man dies auch als Definition für charakteristischen Klassen verwenden können. Ist nämlich c eine charakteristische Klasse, so ist $c(EG)$ definitionsgemäß ein Element in $H^*(BG, \Lambda)$. Sei umgekehrt $u \in H^*(BG, \Lambda)$ und $P \to B$ ein beliebiges G-Prinzipalbündel, so gibt es eine bis auf Homotopie eindeutige Bündelabbildung

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[d, "\pi"'] & EG \arrow[d] \\ B \arrow[r, "f"] & BG. \end{tikzcd}$$

Vermöge $c(P) := f^* u \in H^*(B, \Lambda)$ ist dann eine charakterische Klasse für P gegeben. Dies ist wohldefiniert, da homotope Abbildungen dieselbe Abbildung in der Kohomologie induzieren (Homotopieinvarianz der Kohomologie). Aus den funktoriellen Eigenschaften des Pullbacks folgt sofort die Natürlichkeit (2) der so definierten charakteristischen Klasse $c(P)$.

Sei nun fortan G eine Liegruppe, $\pi : P \to B$ ein differenzierbares G-Prinzipalbündel über einer Mannigfaltigkeit X mit Zusammenhang $\theta \in A^1(P, \mathfrak{g})$. Sei $\mathfrak{g}$ die Liealgebra von G und sei $I^*_{\mathbb{R}}(G) = Sym^*(\mathfrak{g}, \mathbb{R})^G$ die graduierte Algebra der $Ad_{g^{-1}}$-invarianten Polynome.

Eine Möglichkeit explizit charakteristische Klassen zu konstruieren, bietet die Chern-Weil Theorie. Ist $f \in I^k_{\mathbb{R}}(G)$ ein invariantes Polynom und $\Omega := d\theta + 1/2[\theta, \theta] \in A^2(P, \mathfrak{g})$ die Krümmung, so ist bekanntlich [Du78] Th.4.3 $f(\Omega^k)$ eine geschlossene Form in $A^{2k}(B)$, deren Klasse in der de Rham-Kohomologie $H^{2k}(B, \mathbb{R})$ nicht von der Wahl des Zusammenhangs θ in $P \to B$ abhängt. Damit ist vermöge

$$W_P : I^*_{\mathbb{R}}(G) \longrightarrow H^*(B, \mathbb{R}),\ I^k_{\mathbb{R}}(G) \ni f \longmapsto W_P(f) := f(\Omega^k)$$

ein mit Pullback verträglicher Algebrenmorphismus gegeben, der sogenannte (reelle) **Chern-Weil Homomorphismus**. Die Elemente im Bild des Chern-Weil Homomorphismus $W_P : I^*(G) \to H^{2*}(B, \mathbb{R})$ werden **charakteristische Klassen** von $P \to X$ genannt. Entsprechend ist auch der komplexe Chern-Weil Homomorphismus definiert.

Zum Beispiel mit Hilfe simplizialer Methoden läßt sich der Chern-Weil Homomorphismus auf das universelle G-Prinzipalbündel fortsetzen. Es gilt genauer

Theorem 2.1.2 ([Du78]6.13). *Es gibt einen kanonischen in G funktoriellen Algebrenhomomorphismus*

$$\mathscr{W} : I^*_{\mathbb{R}}(G) \longrightarrow H^*(BG, \mathbb{R}),$$

mit der Eigenschaft, daß für ein beliebiges differenzierbares G-Prinzipalbündel $E \to X$ und invariantem Polynom $f \in I^k_{\mathbb{R}}(G)$ gilt

$$\mathscr{W}(f)(E) = W_E(f),$$

d.h. der Chern-Weil Homomorphismus W_E faktorisiert sich über $H^*(BG, \mathbb{R})$

$$\begin{tikzcd} I^*(G) \arrow[rr, "W_E"] \arrow[dr, "\mathscr{W}"'] & & H^*(X, \mathbb{R}) \\ & H^*(BG, \mathbb{R}), \arrow[ur, "\varphi^*"'] & \end{tikzcd}$$

wobei φ^* gegeben durch $\varphi^* u := u(E)$ für $u \in H^*(BG, \mathbb{R})$ gerade die durch die bis auf Homotopie eindeutig bestimmte Abbildung $\varphi : X \to BG$ induziert ist (vgl. auch Theorem 1.1.8).

Bemerkung 2.1.3. *i*) Je nachdem welche Lie-Gruppe bzw. je nachdem welches invariante Polynom man betrachtet, erhält man die wohlbekannten Pontrjagin-, Chern- und Euler-Klassen, jedoch lediglich mit reellen Koeffizienten. Diese Klassen sind bekanntlich topologischer Natur und als solche nehmen sie ihre Werte in $\mathbb{Z}$ an.

ii) Im Fall von komplexen Vektorbündeln vom Rang n kommt erleichternd die Tatsache hinzu, daß die endlichen Approximationen des klassifizierenden Raumes $G_{n,\infty}(\mathbb{C})$, der Grassmannschen, torsionsfrei und die Chern-Klassen des universellen Bündels $U_{n,N} \to G_{n,N}$ ihre Perioden in $\mathbb{Z}$ annehmen ([We80] Ch.III sec.4 S.101). In diesem Fall liefert die Chern-Weil Theorie für ein beliebiges komplexes Vektorbündel $E \to X$ gemäß (3) via Pullback der universellen Chern-Klasse $c_k(U_{n,N})$ für ein genügend großes N die k-te Chern-Klasse von $E \to X$ mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$, also $c_k(E) \in H^{2k}(X, \mathbb{Z})$.

Die Chern-Weil Theorie stiftet demnach eine geometrische Interpretation der charakteristischen Klassen mit *reellen* Koeffizienten durch invariante Polynome. Es stellt sich nunmehr die Frage, in wie weit diese durch den Chern-Weil Homomorphismus im Sinne von (3) charakterisierend sind. Auf H.Cartan geht zurück

Theorem 2.1.4 (H.Cartan). *Für kompakte und zusammenhängende Lie-Gruppen G ist der Chern-Weil Homomorphismus $\mathscr{W}$ ein Isomorphismus und also sind die invarianten Polynome charakterisierend für die charakteristischen Klassen von G-Prinzipalbündeln mit reellen Koeffizienten.*

Diese charakterisierende Eigenschaft bleibt auch für Lie-Gruppen mit endlich vielen Zusammenhangskomponenten richtig. Dazu betrachte zunächst:

Fakt I: [[HiNe91] Satz III.7.3] Ist G eine zusammenhängende Lie-Gruppe, so gibt es eine maximale kompakte Untergruppe K von G, so daß die kanonische Inklusion $K \hookrightarrow G$ eine Homotopieäquivalenz ist.

Fakt II: [[Du78] Prop.7.2] Ist $\alpha : K \to G$ ein Homomorphismus von Lie-Gruppen, welcher einen Isomorphismus in der Kohomologie mit Koeffizienten in Λ induziert, so induziert auch $B\alpha : BK \to BG$ einen Isomorphismus in der Kohomologie mit Koeffizienten in Λ.

Mit diesen beiden Zutaten zeigt man den

Satz 2.1.5. *Sei G eine Lie-Gruppe mit endlich vielen Zusammenhangskomponeten. Dann sind die charakteristischen Klassen von G Prinzipalbündeln mit reellen Koeffizienten bereits eindeutig bestimmt durch die invarianten Polynome einer maximalen kompakten Untergruppe K von G oder äquivalent durch die Kohomologie des klassifizierenden Raumes BK von K.*

Beweis. Fakt I bleibt ersichtlich auch richtig, wenn G eine Lie-Gruppe mit endlich vielen Zusammenhangskomponenten ist. Wähle also eine maximale kompakte Untergruppe K von G. Mit Fakt II folgt $H^*(BK,\mathbb{R}) \cong H^*(BG,\mathbb{R})$. Andererseits kommutiert aufgrund der funktoriellen Eigenschaften des universellen Chern-Weil Homomorphismus das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
I^*_{\mathbb{R}}(G) \arrow[r, "\mathscr{W}"] \arrow[d, "\iota^*"'] & H^*(BG,\mathbb{R}) \arrow[d, "\cong"] \\
I^*_{\mathbb{R}}(K) \arrow[r, "\mathscr{W}", "\cong"'] & H^*(BK,\mathbb{R})),
\end{tikzcd}$$

wobei der Morphismus $H^*(BK,\mathbb{R}) \to H^*(BG,\mathbb{R})$ durch die kanonische Inklusion $\iota : K \hookrightarrow G$ via $BK \to BG$ induziert und wegen Fakt II ein Isomorphismus ist. Der untere Chern-Weil Homomorphismus ist nach H.Cartan ebenfalls ein Isomorphismus. Dies zeigt die Behauptung. □

Für beliebige Lie-Gruppen treten jedoch folgende Phänomene auf:

i) Der Chern-Weil Homomorphismus ist weder injektiv (z.B. für $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ [ChS85] §4) noch surjektiv (z.B. für $\mathrm{SL}_{2n}(\mathbb{R})$ J.Milnor [Mi58] und [MiSt74] App.C)

ii) Vom differentialgeometrischen Standpunkt aus eine Trivialität (topologisch allerdings ganz und gar nicht [Du78] ch.9) ist der Chern-Weil Homomorphismus für flache Bündel trivial, das bedeutet die Komposition

$$I^*_{\mathbb{R}}(G) \xrightarrow{\mathscr{W}} H^*(BG) \xrightarrow{\mathrm{id}^*} H^*(BG^\delta)$$

verschwindet. Dabei ist id^* induziert durch die (stetige) Identität $\mathrm{id} : G^\delta \to G$.

iii) Auch wenn G kompakt und zusammenhängend, und damit der Chern-Weil Homomorphismus ein Isomorphismus ist, kann eine charakteristische Klasse mit reellen Koeffizienten verschwinden, aber nicht-trivial in einem Unterring von $\mathbb{R}$ sein. Zum Beispiel verschwinden alle *reellen* Pontrjagin-Klassen flacher $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$-Bündel, jedoch konnte J.Milnor in [Mi58] für ein flaches $\mathrm{SO}(2)$-Bündel über einen Linsenraum zeigen, daß die erste Pontrjagin-Klasse mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$ nicht-trivial, also eine Torsionsklasse ist

Der entscheidende Punkt bei dem Beispiel von Milnor ist allerdings die Nicht-Trivialität der Euler-Klasse e, so daß wegen $e^2 = p_1$ auch die erste Pontrjagin-Klasse nicht-trivial ist. Ferner zeigt das Beispiel überhaupt die Existenz nicht-trivialer charakteristischer Klassen in *flachen* Bündeln. Daß das Milnor-Beispiel von fundamentalem Interesse war, zeigt das

Korollar 2.1.6. Ist G eine Lie-Gruppe mit endlich vielen Zusammmenhangskomponenten und K eine maximale kompakte Untergruppe von G, so ist der untere Morphismus id^* in

$$\begin{tikzcd}
I^*_{\mathbb{R}}(G) \arrow[r, "\mathscr{W}"] \arrow[d, "\iota^*"'] & H^*(BG,\mathbb{R}) \arrow[r, "\mathrm{id}^*"] \arrow[d, "\cong"] & H^*(BG^\delta,\mathbb{R}) \arrow[d] \\
I^*_{\mathbb{R}}(K) \arrow[r, "\mathscr{W}", "\cong"'] & H^*(BK,\mathbb{R})) \arrow[r, "\mathrm{id}^*"] & H^*(BK^\delta,\mathbb{R}),
\end{tikzcd}$$

der Nullmorphismus. Insbesondere gibt es in flachen $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$-bzw.$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$-Bündeln keine nichttrivialen *reellen* Chern- und Pontrjagin-Klassen.

Beweis. Wähle gemäß Fakt I eine maximale kompakte Untergruppe $\iota : K \hookrightarrow G$. Dann ist nach H.Cartan der universelle Chern-Weil Homomorphismus $I^*_{\mathbb{R}}(K) \to H^*(BK, \mathbb{R})$ ein Isomorphismus. Mit Satz 2.1.5 und *ii*) folgt die erste Behauptung. Die zweite Behauptung sieht man so: Da jedes komplexe Vektorbündel $E \to X$ ein hermitesche Metrik trägt, gibt es eine Reduktion der Strukturgruppe von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ nach $\mathrm{U}(n)$. Also liegen die Chern-Klassen $c_k(E)$ im Bild der kanonischen Abbildung $H^{2k}(X, \mathbb{R}) \to H^{2k}(X, \mathbb{C})$. Es ist ferner $\mathrm{U}(n)$ eine maximale kompakte Untergruppe von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ und daher einerseits der Chern-Weil Homomorphismus nach H.Cartan ein Isomorphismus. Andererseits gilt $H^*(BU(n), \mathbb{R}) \cong H^*(BGL_n(\mathbb{C}), \mathbb{R})$. Also $H^*(BU(n), \mathbb{R}) \to H^*(BU(n)^\delta, \mathbb{R})$ der Nullmorphismus. analog die Pontrjagin-Klassen; $\square$

2.2 Cheeger-Simons Differentialcharaktere

Dieser Abschnitt dient zum einen der Reminiszenz, zum anderen der Motivation für die im darauffolgenden Kapitel konstruierten verfeinerten Kamber-Tonduer Klassen. Gleichwohl die dort verwendeten technischen Methoden völlig verschieden sind, liegt die tiefere Urasache der Analogie in der kanonischen Isomorphie zwischen den Cheeger-Simons Differentialcharakteren und der glatten Deligne-Kohomologie. Ungeachtet dessen haben Bismut-Lott bereits in [BL95] Prop.1.14 gezeigt, daß der Imaginärteil der Cheeger-Chern-Simons Klasse eines flachen Bündels bis auf gewisse Faktoren der totalen Kamber-Tondeur Klasse entspricht. Wir folgen hier im Wesentlichen den Zeilen des Orginalartikels [ChS85].

Sei wieder Λ ein Unterring von $\mathbb{R}$. Ebensogut bleibt alles für Teilringe von $\mathbb{C}$ mit den naheliegenden Modifikationen richtig. Für eine differenzierbare Mannigfaltigkeit B bezeichne $C_n(B)$ die abelsche Gruppe der differenzierbaren singulären n-Ketten mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$, d.h. $C_n(B) :=< S_nB >_{\mathbb{Z}}$ mit $S_nB := \{\sigma_n : \Delta^n \to B \,|\, \sigma_n \,\text{differenzierbar}\}$ und $Z_n(B) := \mathrm{kern}(\partial : C_n(B) \to C_{n-1}(B)) \subset C_n(B)$ die Untergruppe der differenzierbaren n-Zykel auf B. Dabei bezeichnet ∂ den üblichen Randoperator auf den singulären Ketten. Weiter sei $\delta : C^n(B, \Lambda) \to C^{n+1}(B, \Lambda)$ der übliche Korandoperator auf den singulären Koketten $C^n(B, \Lambda) := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_n(B), \Lambda)$. Im Falle $\Lambda = \mathbb{Z}$ schreiben wir $C^n(B) := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_n(B), \mathbb{Z})$.

Ferner bezeichne $A^*_{\mathrm{cl}}(B)$ die geschlossenen Differentialformen auf B und

$$A^*_\Lambda(B) := \{\alpha \in A^k(B) \,|\, d\alpha = 0, \forall_{\sigma \in Z_k(B)} : \int_\sigma \alpha \in \Lambda, k \geq 0\}$$

die geschlossenen Differentialformen auf B mit Perioden in Λ.

Bemerkung 2.2.1. Man beachte, daß Differentialformen mit Perioden in einem Ring Λ die Integration über *Zykeln* und nicht Ketten in $C_k(B)$ erfolgt.

Für ein G-Prinzipalbündel $P \to B$ mit einer Lie-Gruppe G betrachte das folgende kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
I^*(G) \arrow[r, "\mathscr{W}"] \arrow[d, "W_P"'] & H^*(BG, \mathbb{R}) \arrow[d, "c_{\mathbb{R}}"] & H^*(BG, \Lambda) \arrow[l, "r"'] \arrow[d, "c_\Lambda"] \\
A^*_{\mathrm{cl}}(B) \arrow[r, "dR"] & H^*(B, \mathbb{R}) & H^*(B, \Lambda), \arrow[l, "r"']
\end{tikzcd}$$

wobei dR der deRham-Morphismus und r der durch die kanonische Abbildung $\Lambda \to \mathbb{R}$ induzierte Morphismus ist. Die klassische Theorie der charakteristischen Klassen von $P \to B$ wird beschrieben durch die Abbildungen $c_{\mathbb{R}}$ bzw. c_{Λ}.

Betrachte nun die folgenden Faserprodukte:

$$\begin{aligned} K^{2k}(G,\Lambda) &:= I^k(G) \times_{H^{2k}(BG,\mathbb{R})} H^{2k}(BG,\Lambda) := \{(P,u) \in I^k(G) \times H^{2k}(BG,\Lambda) \,|\, \mathscr{W}(P) = r(u)\} \\ R^k(B,\Lambda) &:= A^k_{\Lambda}(B) \times_{H^k(B,\mathbb{R})} H^k(B,\Lambda) := \{(\omega,u) \in A^k_{\Lambda}(B) \times H^k(B,\Lambda) \,|\, [\omega] = r(u)\} \end{aligned}$$

Die universelle Eigenschaft des Faserproduktes liefert die natürliche Transformation

$$W_P \times c_{\Lambda} : K^*(G,\Lambda) \to R^*(B,\Lambda),$$

welche die klassische Theorie der charakteristischen Klassen für G-Prinzipalbündel mit Werten in Λ repräsentiert.

Die Idee ist nun die folgende: Suche ein Paar $(\hat{H},\psi)$, bestehend aus einem Funktor $\hat{H}$ auf der Kategorie der differenzierbaren Mannigfaltigkeiten in die Kategorie der graduierten abelschen Gruppen und eine natürliche Transformation $\psi : \hat{H} \twoheadrightarrow R^*$, so daß zu jedem G-Prinzipalbündel $P \to B$ ein Lift

$$\begin{tikzcd} & \hat{H}(B) \arrow[d, "\psi"] \\ K^*(G,\Lambda) \arrow[ur, dashed, "\exists\, S\,?"] \arrow[r, "W_P \times c_{\Lambda}"'] & R^*(B,\Lambda) \end{tikzcd}$$

des Chern-Weil Homomorphismus $W_P \times c_{\Lambda}$ existiert. Wenn ein solcher Lift exisitiert, so hat man insbesondere die klassische Theorie und eine Chance auf Verfeinerung, der im Kern von ψ zu suchen wäre.

Der de Rham-Morphismus $\mathscr{I} : A^*(B) \to C^*(B,\mathbb{R})$ induziert via Komposition mit $C^*(B,\mathbb{R}) \to C^*(B,\mathbb{R}/\Lambda)$ den Morphismus

$$\mathscr{I}_{\Lambda} : A^*(B) \longrightarrow C^*(B,\mathbb{R}/\Lambda), \quad \omega \longmapsto (\sigma \mapsto \int_{\sigma} \omega \mod \Lambda)$$

Lemma 2.2.2. Die Abbildung $\mathscr{I}_{\Lambda}$ ist für $k > 0$ injektiv.

Beweis. Sei $\omega \in A^k(B)$. Zeige

$$\omega \neq 0 \Rightarrow \left\langle \int_{\sigma} \omega \,|\, \sigma \in C^B_k \right\rangle = \mathbb{R}.$$

Sei $\sigma \in C_k(B)$ mit $\int_{\sigma} \omega = r \in \mathbb{R}$. Definiere Homotopie

$$\sigma_s : \Delta^k \times [0,1] \to \Delta^k \xrightarrow{\sigma} M, \quad (t_0,...,t_k,s) \mapsto (st_0 + 1 - (\sum_{i=0}^{k} st_i), st_1, ..., st_k) \mapsto \sigma_s(t).$$

Dann gilt $\sigma_0(t) = \sigma(1,0,...,0) =: x_0 \in B$ und $\sigma_1(t) = \sigma$. Es folgt

$$\int_{\{\sigma_s\}_{s\in[0,1]}} \omega \supseteq [0,r], \quad \int_{\sigma_0} \omega = 0, \quad \int_{\sigma_1} \omega = r.$$

Da $[0,1]$ kompakt, zusammenhängend und die Zuordnung $s \mapsto \int_{\sigma_s} \omega$ stetig ist, nimmt $\int_{\sigma_s} \omega$ jeden Wert in $[0,r]$ an. $\square$

Definition 2.2.3. Die Gruppe der **mod-Λ Differentialcharaktere vom Grade** k ist definiert durch

$$\hat{H}^k(B,\mathbb{R}/\Lambda) := \{f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(Z_k(B),\mathbb{R}/\Lambda) \mid f \circ \partial \in \mathscr{I}_\Lambda(A^{k+1}(B)) \subset C_B^{k+1}(\mathbb{R}/\Lambda)\}.$$

Für $k < 0$ setze $\hat{H}^k(B,\mathbb{R}/\Lambda) = 0$.

Dabei ist

$$\delta f = f \circ \partial \in \mathscr{I}_\Lambda(A^{k+1}(B)) \iff \exists_{\alpha \in A^{k+1}(B)} \forall_{\sigma \in C_{k+1}(B)} : f(\partial\sigma) = \int_\sigma \alpha \mod \Lambda.$$

Auf $\hat{H}^*(B,\mathbb{R}/\Lambda) := \bigoplus_k \hat{H}^k(B,\mathbb{R}/\Lambda)$ gibt es eine funktorielle Produktstruktur, so daß $\hat{H}^*(B,\mathbb{R}/\Lambda)$ zu einem Ring wird, vgl. [ChS85] Thm.1.11. Interessante Beispiele für Λ sind $\mathbb{Q}, \mathbb{Z}, 0$.

Lemma 2.2.4 (Funktorialität)**.** Es ist $\hat{H}^*(-,\mathbb{R}/\Lambda)$ ein kontravarianter Funktor von der Kategorie der differenzierbaren Mannigfaltigkeiten $Difftop$ in die Kategorie der Λ-graduierten Ringe, d.h.

$$\begin{array}{rcl} \hat{H}^*(-,\mathbb{R}/\Lambda) : Difftop & \longrightarrow & (\Lambda - \text{graduierte Ringe}) \\ B & \longmapsto & \hat{H}^*(B,\mathbb{R}/\Lambda) \\ \varphi : B \to B' & \longmapsto & \varphi^* : \hat{H}^*(B',\mathbb{R}/\Lambda) \to \hat{H}^*(B,\mathbb{R}/\Lambda) \\ & & f' \mapsto f := \varphi^* f' := f' \circ \varphi_*. \end{array}$$

Beweis. Die Abbildung $\varphi : B \to B'$ induziert einen Kettenhomomorphismus $\varphi_* : C_*(B) \to C_*(B')$. Wegen $Z_*(B) \subset C_*(B)$ und $\partial\varphi_*\sigma = \varphi_*\partial\sigma$ für $\sigma \in C_*(B)$ folgt $\varphi_* = \varphi_{*|Z_*(B)} : Z_*(B) \to Z_*(B')$. Ist $f' \in \hat{H}^k(B',\mathbb{R}/\Lambda)$ ein Differentialcharakter, so definiert das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} Z_k(B) \arrow[r, "\varphi_*"] \arrow[dr, dashed, "\varphi^* f'"'] & Z_k(B') \arrow[d, "f'"] \\ & \mathbb{R}/\Lambda \end{tikzcd}$$

ein Element $f := \varphi^* f' := f' \circ \varphi_*$ in $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(Z_k(B),\mathbb{R}/\Lambda)$. Für $\sigma \in C_{k+1}(B)$ ist

$$\begin{array}{rcll} f(\partial\sigma) & = & \varphi^* f'(\partial\sigma) & \\ & = & f' \circ \varphi_*(\partial\sigma) & \\ & = & f'(\partial\varphi_*\sigma) & \\ & = & \displaystyle\int_{\varphi_*\sigma} \alpha \mod \Lambda & (\text{da } f' \text{ Differentialcharakter}) \\ & = & \displaystyle\int_\sigma \varphi^*\alpha \mod \Lambda, & \end{array}$$

d.h. $f \in \hat{H}^k(B,\mathbb{R}/\Lambda)$ ein Differentialcharakter und also ist φ^* wohldefiniert. □

Notiz 2.2.5. Ist $f \in \hat{H}^k(B,\mathbb{R}/\Lambda)$ ein Differentialcharakter, so hat die nach Definition existierende $(k+1)$-Form α bereits folgende Eigenschaften:

1. $\deg \alpha > 0$.
2. α ist wegen Lemma 2.2.2 eindeutig bestimmt.
3. α hat offenbar Perioden in Λ.

4. α ist geschlossen.

Ist $f \in \hat{H}^k(B, \mathbb{R}/\Lambda)$, so gibt es definitiongemäß eine $(k+1)$-Form α, so daß für alle $\sigma \in C_{k+1}(B)$ gilt $f(\partial\sigma) = \int_\sigma \alpha \bmod \Lambda$. Also hat α definitionsgemäß genau dann Perioden Λ , wenn dieses Integral auf Zykel-Niveau verschwindet. Aber das ist klar, denn für alle $(k+1)$-Zykel $\sigma \in Z_{k+1}(B)$ gilt $0 = f(\partial\sigma) = \int_\sigma \alpha \bmod \Lambda$. Also hat α Perioden in Λ.

Die letzte Behauptung folgt aus der Konstruktion der Abbildungen δ_1 und δ_2 in dem nun folgenden fundamentalen

Theorem 2.2.6. *Man hat folgende drei kurze exakte Sequenzen:*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & H^k(B, \mathbb{R}/\Lambda) & \xrightarrow{\iota_1} & \hat{H}^k(B, \mathbb{R}/\Lambda) & \xrightarrow{\delta_1} & A^{k+1}(B)_\Lambda & \to & 0 \\ 0 & \to & A^k_B / A^k(B)_\Lambda & \xrightarrow{\iota_2} & \hat{H}^k(B, \mathbb{R}/\Lambda) & \xrightarrow{\delta_2} & H^{k+1}(B, \Lambda) & \to & 0 \\ 0 & \to & H^k(B, \mathbb{R})/r(H^k(B, \Lambda)) & \to & \hat{H}^k(B, \mathbb{R}/\Lambda) & \xrightarrow{(\delta_1, \delta_2)} & R^{k+1}(B, \Lambda) & \to & 0 \end{array}$$

Bemerkung 2.2.7. *i*) An der ersten Sequenz erkennt man sofort, daß die Standardkohomologie mit Werten in $\mathbb{R}/\Lambda$ in den Differentialcharakteren enthalten ist und damit erste Beispiele dafür liefert.
ii) Die dritte Sequenz entsteht aus den ersten beiden.
iii) Für $n := \dim B$ folgt sofort $\hat{H}^n(B, \mathbb{R}/\Lambda) = H^n(B, \mathbb{R}/\Lambda)$ und $\hat{H}^k(B, \mathbb{R}/\Lambda) = 0$ für $k > n$.

Beweis. Beh.: Die Abbildung

$$\iota_1 : H^k(B, \mathbb{R}/\Lambda) \longrightarrow \hat{H}^k(B, \mathbb{R}/\Lambda), \quad [c] \longmapsto c_{|Z_k(B)}$$

ist injektiv.

Zunächst ist ι_1 wohldefiniert: Denn ist $c \in [c]$ ein Repräsentant, so ist $c \in Z^k(B, \mathbb{R}/\Lambda)$, d.h. $c : C_k(B) \to \mathbb{R}/\Lambda$ mit $\delta c = 0$. Setze $\iota_1([c]) := c_{|Z_k(B)} : Z_k(B) \to \mathbb{R}/\Lambda$. Dadurch ist offenbar ein Differentialcharakter gegeben, denn $c \circ \partial = \delta c = 0 \in \mathscr{I}_\Lambda(A^{k+1}_B)$. Ist nun c' ein anderer Repräsentant von $[c]$, so gilt $c' = c + \delta e$ mit einem Korand $e \in C^{k-1}(B, \mathbb{R}/\Lambda)$. Mithin

$$c'_{|Z_k(B)} \circ \partial = (c_{|Z_k(B)} + (e \circ \partial))\partial = c_{|Z_k(B)} \circ \partial$$

ist ι_1 wohldefiniert. Für die Injektivität von ι_1 ist zu zeigen: Ein Kozykel $c \in C^k(B, \mathbb{R}/\Lambda) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_k(B, \mathbb{R}/\Lambda)$, der auf allen k-Zykeln $Z_k(B)$ verschwindet, verschwindet schon auf allen k-Ketten $C_k(B)$. Es ist $\mathbb{R}$ ein divisibler $\mathbb{Z}$-Modul[3] und daher auch $\mathbb{R}/\Lambda$, also $\mathbb{R}/\Lambda$ divisibel als $\mathbb{Z}$-Modul $\Leftrightarrow$ $\mathbb{R}/\Lambda$ injektiver $\mathbb{Z}$-Modul $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, \mathbb{R}/\Lambda)$ exakter Funktor $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(-, \mathbb{R}/\Lambda) = 0$. Mittels universellen Koeffizienten-Theorem $0 \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(H_{k-1}(B), \mathbb{R}/\Lambda) \to H^k(B, \mathbb{R}/\Lambda) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_k(B), \mathbb{R}/\Lambda) \to 0$ folgt

$$H^k(B, \mathbb{R}/\Lambda) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_k(B), \mathbb{R}/\Lambda). \tag{4}$$

Andererseits liefert die durch $0 \to B_k(B) \to Z_k(B) \to H_k(B) \to 0$ exakte Sequenz eine exakte Sequenz

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_k(B), \mathbb{R}/\Lambda) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(Z_k(B), \mathbb{R}/\Lambda) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(B_k(B), \mathbb{R}/\Lambda),$$

so daß schließlich mit (4)

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(Z_k(B), \mathbb{R}/\Lambda) \\ H^k(B, \mathbb{R}/\Lambda) \arrow[ur, "\cong"] \arrow[r, tail, "\iota_1"] & \hat{H}^k(B, \mathbb{R}/\Lambda) \arrow[u] \end{tikzcd}$$

[3] d.h. zu jedem $y \in \mathbb{R}$ und jedem $n \in \mathbb{Z}\backslash 0$ exisitiert ein $x \in \mathbb{R}$ mit $n \cdot x = y$, m.a.W. für jedes $n \in \mathbb{Z}\backslash 0$ ist die Multiplikation mit $n\cdot : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ surjektiv; vlg. [Weibel94] S.39 Cor.2.3.2 und S.50 Exc.2.5.1;

die Behauptung folgt.

Zur Definition von δ_1 und δ_2:

Sei $f \in \hat{H}^k(B, \mathbb{R}/\Lambda)$. Da $\mathbb{R}/\Lambda$ ein injektiver $\mathbb{Z}$-Modul ist, gibt es eine Fortsetzung $\overline{T} : C_k(B) \to \mathbb{R}/\Lambda$ von f. Weil jede Kokette in $C^k(B, \mathbb{R}/\Lambda)$ von einer in $C^k(B, \mathbb{R})$ herkommt (weil $0 \to \Lambda \to \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\Lambda \to 0$ exakt $\Longrightarrow$ $0 \to C^*(B, \Lambda) \to C^*(B, \mathbb{R}) \to C^*(B, \mathbb{R}/\Lambda) \to 0$ exakt;), gibt es ein $T \in C^k(B, \mathbb{R})$ mit $\overline{T}_{|Z_k(B)} = f$. Man hat also das kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
C_k \arrow[r, dashed, "\exists T"] \arrow[dr, dashed, "\exists \overline{T}"] & \mathbb{R} \arrow[d] \\
Z_k(B) \arrow[u] \arrow[r, "f"] & \mathbb{R}/\Lambda) \\
C_{k+1}(B) \arrow[u, "\partial"] \arrow[ur, "f \circ \partial"'] \arrow[uu, bend left, "\partial"] &
\end{tikzcd}$$

Hieraus folgt $\overline{\delta T} = (\overline{T \circ \partial}) = (\overline{T} \circ \partial) = \delta \overline{T} = \delta f$. Weil $f \in \hat{H}^k(B\mathbb{R}/\Lambda)$ ist, gibt es ein $\omega \in A_B^{k+1}$ mit $\delta \overline{T} = (f \circ \partial) = \mathscr{I}_\Lambda(\omega) \in C^{k+1}(B, \mathbb{R}/\Lambda)$. Setze $c := \mathscr{I}(\omega) - \delta T \in C^{k+1}(B, \mathbb{R})$. Dann ist wegen der Exaktheit von

$$\begin{array}{rcl}
0 \to C^{k+1}(B, \Lambda) \to C^{k+1}(B, \mathbb{R}) & \to & C^{k+1}(B, \mathbb{R}/\Lambda) \to 0 \\
\mathscr{I}(\omega) - \delta T & \mapsto & \overline{\mathscr{I}(\omega) - \delta T} = \mathscr{I}_\Lambda(\omega) - f \circ \partial = 0,
\end{array}$$

liegt c bereits in $C^{k+1}(B, \Lambda)$. Weiter ist $0 = \delta^2 T = \delta \mathscr{I}(\omega) - \delta c = d\omega - \delta c$, also $d\omega = \delta c$. Also würde $d\omega$ nur Werte in dem echten Teilring Λ von $\mathbb{R}$ annehmen, was aber nach dem Lemma 2.2.2 nur sein kann, wenn $d\omega = \delta c = 0$ ist. Also ist einerseits ω geschlossen und hat nach Notiz 2.2.5 Perioden in Λ, d.h. $\omega \in \Lambda_0^{k+1}$ und andererseits ist $c \in C^{k+1}(B, \Lambda)$ ein Kozykel mit Koeffizienten in Λ, d.h $u := [c] \in H^{k+1}(B, \Lambda)$. Wegen $\delta T = \mathscr{I}(\omega) - c$ folgt $r(u) = [\omega]$ in $H^k(B, \mathbb{R})$.

Die Elemente ω und u sind unabhängig von der Wahl von T, denn ist T' eine andere Fortsetzung von f mit $\overline{T'}_{|Z_k(B)} = f$, so ist $\overline{(T - T')}_{|Z_k(B)} = 0$ in $\mathbb{R}/\Lambda$. Weil die kurze exakte Sequenz

$$0 \to Z_B^k(\mathbb{R}) \to C_B^k(\mathbb{R}) \to B_B^k(\mathbb{R}) \to 0$$

spaltet (alles freie abelsche Gruppen), gibt ein Element $\epsilon \in C^{k-1}(B, \mathbb{R})$ und $e \in C^k(B, \Lambda)$ mit $T' = T + \delta\epsilon + e$. Dann gilt

$$\begin{array}{rcl}
\underbrace{\mathscr{I}(\omega) - \mathscr{I}(\omega')}_{\in C_B^{k+1}(\mathbb{R})} & = & \delta T' \\
& = & \delta(T + e + \delta\epsilon) \\
& = & \delta T + \delta e \\
& = & \underbrace{c - c' + \delta e}_{\in C_B^{k+1}(\Lambda)}.
\end{array}$$

Abermals mit Lemma 2.2.2 folgt $\mathscr{I}(\omega) - \mathscr{I}(\omega') = 0$ und $c - c' + \delta e = 0$, d.h. $\mathscr{I}(\omega) = \mathscr{I}(\omega')$ und $[c] = u = [c']$. Damit sind δ_1, δ_2 vermöge

$$\delta_1(f) := \omega, \qquad \delta_2(f) := u$$

wohldefiniert.

Die Abbildungen δ_1 und δ_2 sind surjektiv:

Vorbemerkung: Aus der langen exakten Sequenz von $0 \to \Lambda \to \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\Lambda \to 0$ folgt: Ist $\omega \in \Lambda_0^{k+1}$ betrachtet als Element in $H^{k+1}(B,\mathbb{R})$ gegeben, so gibt es ein $u \in H^{k+1}(B,\Lambda)$ mit $r(u) = [\omega]$. Ist umgekehrt so ein u gegeben, so ist $r(u) =: [\omega]$ eine geschlossene $k+1$ Form mit Perioden in Λ. Dabei ist $r : H^{k+1}(B,\Lambda) \to H^{k+1}(B,\mathbb{R})$ der kanonische Morphismus induziert durch $\Lambda \to \mathbb{R}$. Damit läßt sich die Surjektivität der beiden Abbildungen δ_1 und δ_2 wie folgt auf einmal zeigen: Sei $[c] = u$. Setze $r(u) := [\omega]$. Es folgt $[\omega] - r(u) = 0$, d.h. $\mathscr{I}(\omega) - c$ ist exakt, also gleich ein δT für $T \in C_B^k(\mathbb{R})$. Dann ist $f := \overline{T}_{|Z_k(B)} \in \hat{H}^k(B,\mathbb{R}/\Lambda)$ mit $\delta_1(f) = \omega$, $\delta_2(f) = u$.

zu $\ker\delta_1 = \operatorname{im}\iota_1$:

Sei $f \in \ker(\delta_1)$. Dann gilt - wie oben schon gesehen- $\delta T = \mathscr{I}(\omega) - c = -c$, da $\delta\overline{T} = f \circ \partial = \mathscr{I}_\Lambda(\omega) = 0$. Also ist $\overline{T}$ ein Kozykel in $C_B^k(\mathbb{R}/\Lambda)$. Ist nun T' eine andere Fortsetzung von f, so gilt $\overline{T'} = \overline{T + \delta\epsilon} = \overline{T} + \delta\epsilon$, also definiert $\overline{T}$ ein Element in $H^k(B,\mathbb{R}/\Lambda)$ mit $r([\overline{T}]) = f$. Daß $\delta_1 \circ \iota_1 = 0$ folgt sofort aus der Konstruktion.

Die durch

$$\iota_2(\alpha \mod \Lambda_0^k) := \mathscr{I}_\Lambda(\alpha)_{|Z_k(B)}.$$

definierte Abbildung $\iota_2 : A_B^k/\Lambda_0^k \to \hat{H}^k(B,\mathbb{R}/\Lambda)$ ist offenbar wohldefiniert, denn sei $\sigma \in C_{k+1}(B)$, so gilt

$$\begin{aligned} f(\partial\sigma) &:= \iota_2(\alpha \mod \Lambda_0^k)(\partial\sigma) \\ &= \mathscr{I}_\Lambda(\alpha)_{|Z_k(B)}(\partial\sigma) \\ &= \int_{\partial\sigma} \alpha \mod \Lambda \\ &= \int_\sigma d\alpha \mod \Lambda \qquad \text{(Stokes).} \end{aligned}$$

zu $\ker\delta_2 = \operatorname{im}\iota_2$:

Sei $f \in \ker\delta_2$, dann folgt $\delta T = \mathscr{I}(\omega) - c$ mit einem $c = \delta e$ und $e \in C_B^k(\Lambda)$. Dann ist $\delta(T - e) = \mathscr{I}(\omega)$. Mittels de Rham existiert ein $\alpha \in A_B^k$ mit $d\alpha = \omega$. Wegen $\delta(T - e - \mathscr{I}(\alpha)) = 0$ ist $z := T - e - \mathscr{I}(\alpha) \in Z_B^k(\mathbb{R})$. Nach de Rham gibt es eine geschlossene k-Form $\alpha' \in A_B^k$, so daß insbesondere $z_{|Z_k(B)} = \mathscr{I}(\alpha')_{|Z_k(B)}$ gilt, also $T_{|Z_k(B)} = (\mathscr{I}(\alpha) + \mathscr{I}(\alpha') + e)_{|Z_k(B)}$ und damit

$$\overline{T}_{|Z_k(B)} = \mathscr{I}_\Lambda(\alpha + \alpha')_{|Z_k(B)} = f.$$

Offensichtlich gilt $\delta_2 \circ \iota_2 = 0$. Damit ist das Theorem bewiesen. □

Korollar 2.2.8. Bezeichnet $\beta : H^k(B,\mathbb{R}/\Lambda) \to H^{k+1}(B,\Lambda)$ den Verbindungshomomorphismus zu der kurzen exakten Sequenz

$$0 \to \Lambda \to \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\Lambda \to 0,$$

so gilt

$$\delta_{2|\iota_1(H^k(B,\mathbb{R}/\Lambda)} = -\beta, \qquad \delta_{1|\iota_2(A_B^k/\Lambda_0^k)} = d.$$

Beweis. Beide Aussagen folgen unmittelbar aus den Konstruktionen im vorstehenden Beweis des Theorems. (Für erstere vergleiche Konstruktion von β und u; letztere folgt aus der Wohldefiniertheit von ι_2.) □

Beispiel 2.2.9. Es ist $\mathcal{C}^\infty(B,S^1) \overset{\cong}{\to} \hat{H}^0(B,\mathbb{R}/\mathbb{Z}), f \to \bar{f}$. Wegen $S_0(B) = B$ und $C_0(B) = Z_0(B)$ hat man zu f

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{kan}"'] & S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \\ Z_0(B) \arrow[ur, dashed, "\exists!\,\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

wegen der universellen Eigenschaft frei-abelscher Gruppen genau ein $\bar{f}$. Damit ist die Abbildung eine Bijektion. Mit $\alpha := df$ folgt, daß $\bar{f}$ ein Differentialcharakter ist.

Sei fortan G eine Lie-Gruppe mit endlich vielen Zusammenhangskomponenten. Wir führen die folgende Kategorie $\mathscr{P}_G$ ein: Die Objekte sind durch die Daten (P, B, θ) gegeben, wobei $\pi : P \to B$ ein G-Prinzipal-Bündel mit fest gewähltem Zusammenhang θ ist. Die Morphismen sind die zusammenhangserhaltenden Bündelabbildungen, d.h. $(\bar{\varphi}, \varphi) : (P, B, \theta) \to (P', B', \theta')$ ist eine gewöhnliche Bündelabbildung mit $\varphi^*(\theta') = \theta$.

Ein Objekt $(\tilde{P}, \tilde{B}, \tilde{\theta}) \in \mathscr{P}_G$ heißt m-**klassifizierend**, falls es zu jedem Objekt (P, B, θ) in $\mathscr{P}_G$ mit $\dim B \leq m$ einen bis auf (gewöhnliche) Homotopie eindeutigen Morphismus $\varphi : (P, B, \theta) \to (\tilde{P}, \tilde{B}, \tilde{\theta})$ in $\mathscr{P}_G$ gibt.

Bemerkung 2.2.10. Je zwei solche Morphismen sind also homotop, aber im Sinne gewöhnlicher Bündelabbildungen, nicht etwa homotop als Morphismus in $\mathscr{P}_G$. (Zusammenhänge müssen demnach nicht respektiert werden)

Nach [NR6163] gibt es zu jedem $m \in \mathbb{Z}$ ein m-klassifizierendes Objekt in $\mathscr{P}_G$. Insbesondere gibt es zu jedem Objekt (P, B, θ) in $\mathscr{P}_G$ ein m-klassifizierendes Objekt $(\tilde{P}, \tilde{B}, \tilde{\theta}) \in \mathscr{P}_G$, so daß θ der Pullback von $\tilde{\theta}$.

Theorem 2.2.11 ([ChS85] Thm.2.2). *Für jedes G-Prinzipalbündel $P \to B$ hat der Chern-Weil-Homomorphismus in Gestalt des funktoriellen Morphismus $S : K^*(G, \Lambda) \to \hat{H}^*(B, \mathbb{R}/\Lambda)$ einen eindeutigen Lift, also es kommutiert das Diagramm*

$$\begin{tikzcd} & \hat{H}^*(B, \mathbb{R}/\Lambda) \arrow[d, "(\delta_1, \delta_2)"] \\ K^*(G, \Lambda) \arrow[ur, dashed, "\exists\,!S"] \arrow[r, "W \times c_\Lambda"'] & R^*(B, \Lambda). \end{tikzcd}$$

Genauer: Sei $(P, u) \in K^{2k}(G, \Lambda)$. Dann gibt es für jedes Objekt $\xi := (P, B, \theta) \in \mathscr{P}_G$ ein eindeutig bestimmtes Element $S_{P,u}(\xi)$ mit

- $\delta_1(S_{P,u}(\xi)) = P(\Omega)$
- $\delta_2(S_{P,u}(\xi)) = u(\xi)$
- *Ist $\varphi : \xi \to \xi'$ ein Morphismus in $\mathscr{P}_G$, so gilt*

$$\varphi^*(S_{P,u}(\xi')) = S_{P,u}(\xi).$$

Beweis. Nach Narasimhan-Ramanan [NR6163] gibt es zu ξ ein m-klassifizierendes Objekt $\tilde{\xi}$ in $\mathscr{P}_G$ mit $\dim B < m$. Da $H^{2k-1}(BG, \mathbb{R}) = 0$ folgt $H^{2k-1}(\tilde{B}, \mathbb{R}) = 0$, da $\tilde{\xi}$ für genügend großes m den klassifiziernden Raum BG approximiert. Die dritte kurze exakte Sequenz in Theorem 2.2.6 liefert einen Isomorphismus $(\delta_1, \delta_2) : \hat{H}^{2k-1}(B, \mathbb{R}/\Lambda) \to R^{2k}(B, \Lambda)$ und man definiert daher

$$S_{P,u}(\tilde{\xi}) := (\delta_1, \delta_2)^{-1}(P(\tilde{\Omega}), u(\tilde{\xi})).$$

Damit folgt die Behauptung im universellen Fall. Für den allgemeinen Fall definiert man $S_{P,u}(\xi) := f^* S_{P,u}(\tilde{\xi})$ wobei $f : B \to \tilde{B}$ ist. Man hat dann Wohldefiniertheit zu zeigen. Ist nämlich $\tilde{\xi}'$ ein anderes m-universelles Objekt in $\mathscr{P}_G$, so ist $f^* S_{P,u}(\tilde{\xi}) = f'^* S_{P,u}(\tilde{\xi}')$ zu zeigen. Dazu wähle zu $\tilde{\xi}$ und $\tilde{\xi}'$ wiederum ein gemeinsames n-klassifizierendes Objekt ξ_n in $\mathscr{P}_G$ und zeige

$$(g \circ f)^* S_{P,u}(\xi_n) = (g' \circ f')^* S_{P,u}(\xi_n)$$

mit $g : \tilde{B} \to B_n$ und $g' : \tilde{B}' \to B_n$. Im weiteren Verlauf des Beweises konstruiert man eine Homotopie zwischen $(g \circ f)$ und $(g' \circ f')$ derart, daß die Differenz $(g' \circ f')^* S_{P,u}(\xi_n) - (g \circ f)^* S_{P,u}(\xi_n)$ ein Differentialcharakter auf $B \times I$ ist. □

Der entscheidende Punkt bei der Konstruktion des Differentialcharakters als Lift einer bestimmten klassischen charakteristischen Klasse eines G-Prinzipalbündels ist das Verschwinden der ungeraden reellen Kohomologie des klassifizierenden Raumes BG und das Theorem von [NR6163] über universelle Zusammenhänge. Aufgrund dieses Theorems haben also charakteristische Klassen *geraden* Grades einen Lift, eben genau jene, die man mit dem Chern-Weil Homomorphismus erreichen kann. Insofern verfeinert Cheeger-Simons Theorie die Chern-Weil Theorie.

Korollar 2.2.12. Ist $P(\Omega) = 0$, so ist

$$S_{P,u}(\xi) \in H^{2k-1}(B, \mathbb{R}/\Lambda) = \ker \delta_1 \tag{5}$$

$$\beta(S_{P,u}(\xi)) = -u(\xi). \tag{6}$$

Dabei meint $u(\xi)$ den Pullback der universellem Klasse u, also das Bild von u unter $g^* : H^{2k}(BG, \Lambda) \to H^{2k}(B, \Lambda), u \mapsto g^*(u) =: u(\xi)$, induziert durch die bis auf Homotopie eindeutig bestimmte Abbildung $g : B \to BG$.

Nach Theorem 2.2.11 gibt es also einen Lift der Euler-, Chern- und Pontrjagin-Klassen. Diese werden der Reihe nach Euler-, Chern- und Pontrjagin Charaktere [ChS85] oder verfeinerte Euler-, Chern- und Pontrjagin-Klassen genannt.

Bemerkung 2.2.13 (Zusammenhang zur Chern-Simons-Theorie)**.** Sei $(\pi : E \to X, \theta)$ ein Objekt in $\mathscr{P}_G$, Ω die Krümmung bezüglich des Zusammenhangs θ und $P \in I^k(G)$ ein invariantes Polynom. Dann ist vermöge

$$TP(\theta) := k \int_0^1 P(\theta \wedge \Omega_t^{k-1}) dt \qquad \in A^{2k-1}(E)$$

eine invariante $2k-1$-Form in E gegeben, wobei $\Omega_t := d\theta_t + 1/2[\theta, \theta] = t\Omega + \frac{1}{2}(t^2 - t)[\theta, \theta]$ die zum Zusammenhang $\theta_t := t\theta$ mit $t \in I$ gehörigen Krümmung in E ist. Die Bildung von $TP(\theta)$ ist natürlich auf der Kategorie $\mathscr{P}_G$ und bis auf exakte Formen charakterisiert durch die Eigenschaft $dTP(\theta) = P(\Omega^k) \in A^{2k}(E)$. Sei nun $(P, u) \in K^{2k}(G, \Lambda)$ gegeben, d.h. ein invariantes Polynom $P \in I^k(G)$ und eine charakteristische Klasse $u \in H^{2k}(BG, \Lambda)$ mit $\mathscr{W}(P) = r(u)$, wobei $\mathscr{W}$ der universelle Chern-Weil Homomorphismus und $r : H^*(BG, \Lambda) \to H^*(BG, \mathbb{R})$ der durch die kanonische Inklusion in der kurzen exakten Sequenz

$$0 \to \Lambda \xrightarrow{r} \mathbb{R} \xrightarrow{-} \mathbb{R}/\Lambda \to 0$$

induzierte Morphismus ist. Bezeichne ferner $- : H^*(X, \mathbb{R}) \to H^*(X, \mathbb{R}/\Lambda)$ die kanonische Projektion, induziert durch $-$ in der vorstehenden kurzen exakten Sequenz. Dann gilt [CS74] Thm.3.16 bzw. [ChS85] Prop.2.8:

$$\pi^* S_{P,u}(E) = \overline{TP(\theta)}_{|Z_{2k-1}(E)}.$$

Damit haben Cheeger-Simons Charaktere Repräsentanten in Gestalt von Differentialformen — den sogenannten *charakteristischen Formen* $TP(\theta)$. Dies erhellt die Sprechweise, die Liftungen $S_{P,u}(E) \in \hat{H}^{2k-1}(X, \mathbb{R}/\Lambda)$ der charakteristischen Klassen auch *Cheeger-Chern-Simons Klassen* zu nennen, wie man desöffteren in der Literatur antrifft.

Die bisherigen Konstruktionen verfeinerter Klassen basierend auf Theorem 2.2.11 und den charakteristischen Formen von Chern-Simons sind zwar natürlich, aber nicht kanonisch und ebenfalls nicht explizit. Die Ursache hierfür liegt im Wesentlichen darin, daß als technisches Hauptthilfsmittel in den Beweisen das Resultat von [NR6163] über die Existenz universeller Zusammenhänge verwendet wird. Um $H^{2k+1}(BG,\mathbb{R}) = 0$ anwenden zu können, muß man die Auswahl von G auf Lie-Gruppen mit endlich vielen Zusammenhangskomponenten einschränken. Dies impliziert, daß man das Theorem nicht für flache Bündel anwenden kann, die ja bekanntlich eine diskrete Strukturgruppe G^δ tragen.

Eine intrinsischere Konstruktion für Cheeger-Chern-Simons Klassen, die ohne universelle Zusammenhänge auskommt und auch für flache Bündel funktioniert [ChS85] (8.19), ist bereits in [ChS85] §4 und §8 skizziert und im Detail in [DuHaZu00] 3.5 ausgeführt. Sei $\pi : E \to X$ ein $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$-Prinzipalbündel. Ähnlich wie in der Chern-Simons Theorie, zeigt man die Existenz einer Form Q, für die es aber in diesem Falle eine kanonische eindeutige Wahl gibt, in dem Stiefelbündel $p : V^n_{n-k+1} := P \times_{\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})} \mathrm{St}^n_{n-k+1} \to X$ mit $dQ = p^*c_k(E)$. Dabei ist St^n_{n-k+1} die Stiefel-Mannigfaltigkeit, also die Mannigkfaltigkeit aller $n-k+1$-Beine im $\mathbb{C}^n$.

Eine andere Möglichkeit der Konstruktion verfeinerter Klassen besteht in der expliziten Angabe eines Kozykels in der glatten Deligne-Kohomologie, zum Beispiel in der Čech-de Rham Auflösung (vgl. Anhang B.0.4). Genau diesen Weg wollen wir in dieser Arbeit beschreiten und genau auf diesem Wege haben bereits J-L. Brylinsky und D.A McLaughlin in [BrMcL96] konkrete Repräsentanten für Euler-, Chern- und Pontrjagin- Klassen mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$ konstruiert. Es gilt

Satz 2.2.14 ([DuK05] Prop.2.5, [Br93] Prop.1.5.7). *Man hat für jedes k einen kanonischen Isomorphismus*

$$\hat{H}^k(B,\mathbb{R}/\Lambda) \xrightarrow{\cong} H^{k+1}_{\mathcal{D}}(B,\Lambda_k)$$

von den mod Λ-Cheeger-Simons Differentialcharakteren in die glatte Deligne-Kohomologie mit Koeffizienten in Λ.

Da die Beweise der beiden kurzen exakten Sequenzen

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^k(X,\mathbb{R}/\Lambda) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & H^{k+1}_{\mathcal{D}}(X,\mathbb{R}/\Lambda) \arrow[r, "d"] \arrow[d, dashed, "\gamma"] & A^{k+1}(X)_\Lambda \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & H^k(X,\mathbb{R}/\Lambda) \arrow[r] & \hat{H}^k(X,\mathbb{R}/\Lambda) \arrow[r, "\delta_1"] & A^{k+1}(X)_\Lambda \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

unabhängig voneinander sind, genügt es die gestrichelte Abbildung zu konstruieren.

2.3 Kamber-Tondeur Klassen

In diesem Abschnitt werden verschiedene Konstruktionen der Kamber-Tonder Klasse eines hermiteschen R-Bündels vorgestellt und ihre Äquivalenz untereinander bewiesen. Sowohl lokale, globale als auch die Konstruktion via der kanonischen Form auf dem symmetrischen Raum $G_\mathbb{C}/K$ sind wohlbekannt. Sie stammen im Wesentlichen aus den Arbeiten von J-M.Bismut, J.Lott [BL95] und S.Goette [Goe03] und sind hier lediglich um einige Beweise ergänzt. Neu jedoch ist die Konstruktion der universellen Kamber-Tondeur Form auf dem in Theorem 1.2.4 konstruierten klassifizierenden Raum aller hermiteschen R-Bündel $EG \times_G G_\mathbb{C}/K$, deren äquivariante Kohomologieklasse in $H^*(EG \times_G G_\mathbb{C}/K,\mathbb{R}) = H_G(G_\mathbb{C}/K,\mathbb{R})$ aufgrund der Zusammenziehbarkeit von $G_\mathbb{C}/K$ erwartungsgemäß nach $H^*(BG,\mathbb{R})$ absteigt. Schließlich wird sich herausstellen, daß jede Kamber-Tondeur Klasse Pullback der Universellen ist. Dies gilt sogar auf Formenniveau.

Gleichwohl die folgenden Konstruktionen und Aussagen auch für beliebige flache $\mathbb{C}$-Vektorbündel richtig sind, formulieren wir sie in der Unterkategorie $\mathscr{V}^{\mathrm{herm}}_R(X)$ der hermiteschen R-Bündel. Sei also fortan $(F,h) \to X$ ein Objekt in $\mathscr{V}^{\mathrm{herm}}_R(X)$.

Bemerkung 2.3.1 (Lokale Konstruktion)**.** Vermöge

$$\omega(F,h) := h^{-1}\nabla h, \tag{7}$$

ist eine endomorphismenwertige 1-Form auf X gegeben, d.h. $\omega(F,h) \in A^1(X, \mathrm{End}(F))$. Denn: Lokal bezüglich flachen Rahmen $e = (e_1, ..., e_n)$ ist h eine matrixwertige Funktion auf X, die wieder mit h_e bezeichnet sei. Also hat (7) die Form

$$\omega_e = h_e^{-1} dh_e \qquad \in A_U^1 \otimes_{A_U^0} G_{\mathbb{C}}.$$

Ist e' ein anderer flacher Rahmen, so gibt es ein $g \in G_{\mathbb{C}}$ (da F flach ist) mit $e' = eg$. Dann setzt sich ω_e wegen der Rahmentransformationseigenschaft

$$\omega_{e'} = h_{e'}^{-1} dh_{e'} = (g^* h_e g)^{-1} d(g^* h_e g) = (g^* h_e g)^{-1}[(dg^*)h_e g + g^* dh_e] = (g^* h_e g)^{-1} g^* dh_e g = g^{-1}\omega_e g$$

in eindeutiger Weise zu einer globalen Form $\omega(F,h)$ in $A^1(X, \mathrm{End}(F))$ fort. Insbesondere hängt sie also nicht von der Wahl der Rahmen ab.

Bemerkung 2.3.2 (Globale Konstruktion)**.** Der Zusammenhang ∇ induziert auf dem Antidualbündel $\overline{F}^* := \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{anti}}(F, \mathbb{C})$ von F via der kanonischen Paarung $< .,. >: \overline{F}^* \times F \to \mathbb{C}$, $(\alpha, s) \mapsto < \alpha, s > := \alpha(s)$ den kanonischen Zusammenhang $\overline{\nabla}^*$, welcher definiert ist durch $d < \alpha, s > = < \overline{\nabla}^* \alpha, s > + < \alpha, \nabla s >$. Damit erklärt man den **adjungierten Zusammenhang** von ∇ in F durch das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow[\cong]{h} & \overline{F}^* \\ {\scriptstyle \nabla^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \overline{\nabla}^*} \\ F \otimes_{A_X^0} A_X^1 & \xrightarrow[\cong]{h} & \overline{F}^* \otimes_{A_X^0} A_X^1 \end{array}$$

d.h. $\nabla^* := h^{-1}\overline{\nabla}^* h$, oder äquivalent für jeden Schnitt $s, t \in F$ durch

$$dh(s,t) = h(\nabla s, t) + h(s, \nabla^* t). \tag{8}$$

Vermöge

$$\tilde{\omega}(F,h) := \nabla^* - \nabla \qquad \in \mathrm{Hom}(F, F \otimes_{A_X^0} A_X^1) \tag{9}$$

ist offensichtlich eine A_X^0-lineare Abbildung, also ein Element in

$$\mathrm{End}(F) \otimes_{A_X^0} A_X^1 = \mathrm{Hom}(F, F \otimes_{A_X^0} A_X^1)$$

gegeben.

Proposition 2.3.3. *Es gilt*

$$\omega(F,h) = \tilde{\omega}(F,h).$$

Beweis. Es genügt die Behauptung lokal zu prüfen. Sei dazu e ein flacher Rahmen von F über einer offenen Teilmengen U in X. Dann ist der zu e duale Rahmen e^* ebenfalls flach bezüglich $\overline{\nabla}^*$, denn $\overline{\nabla}_e^* := \overline{\nabla}_{|U}^* = d - \bar{\theta}^t$, wobei θ die Zusammenhangsmatrix von ∇ in F ist. Sodann erhält man

$$\begin{aligned} (\nabla^* - \nabla)_e v &= (h^{-1}\overline{\nabla}^* h - \nabla)_e v \\ &= h_e^{-1} dh_e v - dv \\ &= h_e^{-1}(dh_e)v + h_e^{-1} h_e dv - dv \\ &= h_e^{-1} dh_e v. \end{aligned}$$

□

Aus (8) und (9) folgt unmittelbar, daß $\omega(F,h)=0$ ist genau dann, wenn der Zusammenhang ∇ metrisch ist. Dabei heißt ein (nicht notwendigerweise flacher) Zusammenhang metrisch, wenn $dh(s,t)=h(\nabla s,t)+h(s,\nabla t)$ für alle Schnitte $s,t\in F$ gilt. Wie im vorstehenden Beweis gesehen ist mit F flach auch sein Antidualbündel $\overline{F}^*$ flach, also $\overline{\nabla}^*\circ\overline{\nabla}^*=0$ und damit auch der adjungierte Zusammenhang ∇^* in F flach.

Definition 2.3.4. Sei $(F,h)\to X$ ein hermitesches R-Bündel und $k\geq 0$. Dann heißt

$$c_{2k+1}(F,h) := \frac{1}{(2\pi i)^k 2^{2k+1}} \mathrm{Tr}\left[\omega^{2k+1}(F,h)\right] \quad \in A^{2k+1}(X,\mathbb{C})$$

die **Kamber-Tondeur Form** von $(F,h)\to X$ vom Grade $2k+1$ und die formale Summe

$$c(F,h) := \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k+1}(F,h) \quad \in A^{2\bullet+1}(X,\mathbb{C})$$

die **totale Kamber-Tondeur Form** von $(F,h)\to X$.

Dabei ist

$$\mathrm{Tr} := \mathrm{id}_{A_X^*}\otimes_{A_X^0}\mathrm{tr} : A_X^*\otimes_{A_X^0}\mathrm{End}(F)\longrightarrow A_X^*$$

die kanonische Fortsetzung der gewöhnlichen Spurabbildung $\mathrm{tr}:\mathrm{End}(F)\to A_X^0$. Bekanntlich ist die Spur invariant unter zyklischer Permutation und die Algebra der Formen auf X antikommutiativ. Für $\omega=\alpha\otimes A$ folgt damit $\mathrm{Tr}(\omega^{2k})=\mathrm{Tr}(\omega\wedge\omega^{2k+1})=\alpha\wedge\alpha'\mathrm{tr}(AA')=(-1)^{1\cdot(2k+1)}\alpha'\wedge\alpha\mathrm{tr}(A'A)=-\mathrm{Tr}(\omega^{2k})$, also $\mathrm{Tr}(\omega^{2k})=0$ und also leben die Kamber-Tondeur Formen nur in ungeraden Graden.

Der hier benutzte Vorfaktor $(2\pi i)^{-k}2^{-(2k+1)}$ stammt aus [BL95] I.g (1.34). Andere Autoren nutzen andere Vorfaktoren; vergleiche z.B. K. Igusa in [Ig03].

Lemma 2.3.5. Die Kamber-Tondeur Form ist $G_{\mathbb{C}}$-invariant, insbesondere G-invariant, d.h. invariant unter R- Rahmentransformationen.

Beweis. Ist $e'=eg$ mit $g\in G_{\mathbb{C}}$ eine Rahmentransformation, so folgt $h_{eg}=g^*h_eg$. Damit

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}[((g^*h_eg)^{-1}d(g^*h_eg))^{2k+1}] &= \mathrm{Tr}[(g^{-1}h_e^{-1}g^{*-1}g^*dh_e\cdot g)^{2k+1}]\\
&= \mathrm{Tr}[(g^{-1}h_e^{-1}dh_e\cdot g)^{2k+1}]\\
&= \mathrm{Tr}[(g^{-1}(h_e^{-1}dh_e)^{2k+1}g)]\\
&= \mathrm{Tr}[(h_e^{-1}dh_e)^{2k+1}].
\end{aligned}$$

Also ist $c_{2k+1}(F,h)$ wie verlangt $G_{\mathbb{C}}$-invariant. □

Theorem 2.3.6 ([BL95] Th.1.11). *Die Kamber-Tondeur Form $c_{2k+1}(F,h)$ ist reell, geschlossen und die zugehörige Klasse in der de Rham-Kohomologie hängt nicht von der Wahl der hermiteschen Metrik h in F ab. Wir schreiben für die Kamber-Tondeur-Klasse vom Grade $2k+1$ daher $c_{2k+1}(F)\in H^{2k+1}(X,\mathbb{R})$.*

Ist ∇ metrisch, so ist $c_k(F)=0$ für jedes k. Die Kamber-Tondeur Klasse ist also ein Maß für die Existenz einer hermiteschen Metrik, welche kompatibel zur flachen Struktur von F ist. Die Kamber-Tondeur Form $c_{2k+1}(F,h)$ ist ein Maß für die Kompatibilität der flachen Struktur zur *gegebenen* hermiteschen h, oder äquivalent, daß der flache Zusammenhang ∇ von F metrisch, also ein h-Zusammenhang ist.

Man beachte, sowohl Form als Klasse sind von der Wahl der flachen Struktur oder äquivalent von der Wahl des flachen Zusammenhangs auf dem Bündel abängig.

Proposition 2.3.7 (Eigenschaften). *Seien $(F,h) \to X$ und $(F',h') \to X$ zwei Objekte in $\mathscr{V}_R^{\mathrm{herm}}(X)$. Dann hat man folgende Eigenschaften:*

i) Sind F und F' isomorph in $\mathscr{V}_R^{\mathrm{herm}}(X)$, so sind die Kamber-Tondeur Formen gleich, also

$$c_{2k+1}(F,h) = c_{2k+1}(F',h').$$

ii) Natürlichkeit*: Ist $f : X' \to X$ differenzierbar, so gilt*

$$c_{2k+1}(f^*F, f^*h) = f^* c_{2k+1}(F,h).$$

iii) Additivität*:*

$$c_{2k+1}((F,h) \oplus (F',h')) = c_{2k+1}(F,h) + c_{2k+1}(F',h')$$

iv) Dualität *:*

$$c_{2k+1}(\overline{F,h}^*) = -c_{2k+1}(F,h)$$

v) "Multiplikativität" *:*

$$c_{2k+1}((F,h) \otimes (F',h')) = \mathrm{rk}(F') c_{2k+1}(F,h) + \mathrm{rk}(F) c_{2k+1}(F',h')$$

Beweis. zu *i*): Das ist klar, denn Isomorphismen in $\mathscr{V}_R^{\mathrm{herm}}$ respektieren nicht nur die flache Struktur, sondern auch die Metrik. Sodann läßt sich die Behauptung lokal nachrechnen.

zu *ii*): Dies folgt aus der Verträglichkeit der Spur und der Cartan-Ableitung d mit Pullback.

zu *iii*) Die Metrik $h \oplus h'$ in $F \oplus F'$ hat lokal bezüglich Rahmen e, e' von F bzw. F' die Form

$$\begin{pmatrix} h_e & 0 \\ 0 & h_{e'} \end{pmatrix}.$$

Damit ist *iii*) klar.

Für den Rest des Beweises vergleiche [BL95] Prop.1.13. □

Betrachtet man flache statt hermitesche Bündel, so bleiben nach Theorem 2.3.6 alle vorstehenden Aussagen für die Kamber-Tondeur *Klassen* richtig. Beispielsweise wäre schon die erste Aussage *i*) im Allgemeinen falsch für flache Bündel, da die Morphismen in dieser Kategorie nicht notwendig die Metrik respektieren.

Damit erhält man unmittelbar das

Korollar 2.3.8. Die Kamber-Tondeur Klassen sind additive charakteristische Klassen flacher Bündel im Sinne von Definition 2.1.1.

2.3.1 Konstruktion via Pullback der kanonischen Form

Es bezeichne wie üblich $G := \mathrm{GL}_n(R)$, $G_{\mathbb{C}} := \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $K := \mathrm{U}(n)$ In diesem Abschnitt führen wir die in [BL95] I.g skizzierte Konstruktion der Kamber-Tondeur Klassen im Detail aus. Die Borel-Klassen sind in Gestalt der kanonischen Formen (10) Repräsentanten in der relativen Lie-Algebren Kohomologie $H^{2\bullet+1}(\mathfrak{gl}_n, \mathfrak{u}_n, \mathbb{R})$ [Bu02]. Da jede Kamber-Tondeur Klasse eines flachen hermiteschen Vektorbündels bis auf Konstanten von der Borel-Klasse entsprechenden Grades herkommt, lassen sie sich die Borel-Klassen als quasi-universelle Kamber-Tondeur Klassen auffassen. Zur richtigen Universalität fehlt es aber insofern, weil sie nicht direkt auf dem klassifizierenden Raum BG leben (vgl. Abschnitt über die universelle Konstruktion).

Sei $(F,h) \to X$ ein hermitesches R-Bündel. Als flaches Bündel ist $F \to X$ nach Theorem 1.1.6 von der Form $F = \tilde{X} \times_\rho \mathbb{C}^n \to X$ mit der Darstellung $\rho : \pi_1(X,x_0) \to G$ und der universellen Überlagerung $\tilde{X}$ von X. Wie in Lemma 1.2.6 bereits gesehen, ist der symmetrische Raum $G_\mathbb{C}/K$ isomorph zum Raum der hermiteschen Metriken $\mathrm{herm}_n^+(\mathbb{C})$ auf dem $\mathbb{C}^n$. Sei fortan $G_\mathbb{C}/K$ mit $\mathrm{herm}_n^+(\mathbb{C})$ in kanonischer Weise (Bem.1.2.9) identifiziert. Betrachte nun das Bündel $E := \tilde{X} \times_\rho G_\mathbb{C}/K \to X$. Dann gilt

Lemma 2.3.9. Man hat eine eineindeutige Korrespondenz zwischen

$$\{\text{Hermitesche Metriken in } F \to X\} \xrightarrow{\cong} \{\text{Schnitte } X \to E\ \}$$

Beweis. Sei h eine hermitesche Metrik in $F \to X$. Dann ist vermöge

$$\tilde{X} \times G \to G_\mathbb{C}/K, \quad (\tilde{x}, g) \mapsto h_g$$

eine $\pi_1(X,x_0)$-äquivariante Abbildung gegeben. Denn $(\tilde{x}\gamma, \rho_\gamma g) \mapsto \rho_\gamma^* h_g \rho_\gamma$ für $\gamma \in \pi_1(X,x_0)$. Also ist $\tilde{X} \times_\rho G \to G_\mathbb{C}/K, [\tilde{x},g] \mapsto h_g$ wohldefiniert und folglich $\tilde{X} \times_\rho G \to (\tilde{X} \times_\rho G) \times G_\mathbb{C}/K$, $[\tilde{x},g] \mapsto [\tilde{x},g,h_g]$ G-äquivariant. Wegen $(\tilde{X} \times_\rho G)/G = X = \tilde{X}/\pi_1(X,x_0)$ erhält man einen Schnitt

$$\sigma : X \longrightarrow E = \tilde{X} \times_\rho G_\mathbb{C}/K = (\tilde{X} \times_\rho G) \times_G G_\mathbb{C}/K, \quad x \longmapsto [e, h_{e(x)}].$$

Die Behauptung folgt nun ganz analog wie im Beweis von Lemma 1.2.6 *iii*). □

Seien $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{k}$ die Lie-Algebren von $G_\mathbb{C}$ bzw. K. Der Tangentialraum $T_{eK}(G_\mathbb{C}/K) \cong \mathfrak{g}/\mathfrak{k}$ am 1-Element ist isomorph zu dem Raum der hermiteschen $n \times n$-Matrizen $\mathrm{herm}_n(\mathbb{C})$ vgl. Bismut-Lott [BL95] Chap.I.(g). Hierauf operiert K durch Adjunktion, also $K \times \mathrm{herm}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{herm}_n(\mathbb{C}), (U,H) \mapsto U^{-1}HU$. Dies ist aufgrund von $(U^{-1}HU)^* = U^*H^*U^{-1*} = U^{-1}HU$ wohldefiniert.

Definition 2.3.10. Für hermitesche Matrizen $H_1, ..., H_k$ ist vermöge (via den obigen Identifikationen)

$$\Phi_k(H_1,...,H_k) := \sum_{\sigma \in S_k} (-1)^{\mathrm{sgn}(\sigma)} \mathrm{tr}(H_{\sigma(1)} \cdots H_{\sigma(k)}) \tag{10}$$

eine k-Form auf $\mathfrak{g}/\mathfrak{k}$ gegeben. Sie heißt die *kanonische Form* vom Grade k auf $G_\mathbb{C}/K$.

Aufgrund der $G_\mathbb{C}$-Invarianz der Spur ist Φ_k auch K-invariant und setzt sich damit wegen (vgl. Dupont [Du03] Prop.A2 Seite 68)

$$\mathrm{Alt}^k(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})^K \cong A^k(G_\mathbb{C}/K)^{G_\mathbb{C}} \tag{11}$$

zu einer $G_\mathbb{C}$-invarianten Form - die wieder mit Φ_k bezeichnet werde - auf ganz $G_\mathbb{C}/K$ fort. Insbesonder ist Φ_k natürlich G-invariant.

Bemerkung 2.3.11. Die kanonische Form Φ_k ist geschlossen.

Beweis. Das durch die Kettenisomorphie $A^*(G_\mathbb{C}/K)^{G_\mathbb{C}} \cong \mathrm{Alt}^*(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})^K$ am 1-Element induzierte Differential $d : \mathrm{Alt}^k(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})^K \to \mathrm{Alt}^{k+1}(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})^K$ lautet:

$$(d\Phi_k)(X_1,...,X_{k+1}) = \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \Phi_k([X_i,X_j], X_1, ..., \hat{X}_i, ..., \hat{X}_j, ..., X_{k+1}), \quad X_l \in \mathfrak{g}/\mathfrak{k}$$

Für hermitesche Matrizen H_j, H_i ist $[H_i,H_j] \in \mathfrak{k}$ = Menge aller schiefhermiteschen Matrizen. Denn es gilt $[H_i,H_j]^* = (H_iH_j - H_jH_i)^* = H_j^*H_i^* - H_i^*H_j^* = H_jH_i - H_iH_j = -[H_i,H_j]$. Da insbesondere K-invariante Formen auf Vektoren aus $\mathfrak{k}$ mit Null antworten ist $d\Phi_k$ geschlossen. □

Der Pullback von Φ_k entlang der kanonischen Projektion $p_2 : \tilde{X} \times G_{\mathbb{C}}/K \to G_{\mathbb{C}}/K$ liefert eine geschlossene Form $p_2^*\Phi_k$ auf dem Produktbündel $\tilde{X} \times G_{\mathbb{C}}/K$, die wegen der G-Invarianz auch $\pi_1(X, x_0)$-invariant ist, d.h. $p_2^*\Phi_k$ kommt von einer geschlossenen k-Form α_k auf $\tilde{X} \times_\rho G_{\mathbb{C}}/K$.

Proposition 2.3.12. *Sei F ein hermitesches R-Bündel über X. Dann gilt*

$$c_{2k+1}(F, h) = \frac{1}{(2\pi i)^k 2^{2k+1}} \sigma^* \alpha_{2k+1}$$

Dabei ist $\sigma : X \to E$ der nach Lemma 2.3.9 zur hermiteschen Metrik h gehörige Schnitt.

Beweis. Der in Lemma 2.3.9 konstruierte Schnitt $\sigma : X \to E$ hat lokal die Form $h_e : U \to U \times G_{\mathbb{C}}/K$ gegeben durch $x \mapsto (x, h_{e(x)})$. Bezeichne die ersichtlich $\pi_1(X, x_0)$-invariante Form $\pi_2^*\phi_k$ wieder mit Φ_k. Ist α eine am 1-Element in $G_{\mathbb{C}}/K$ definierte K-invariante k-Form, so erhält man die zu ihr eindeutig bestimmte G-invarainte k-Form an einem beliebigen Punkt gK durch $(\alpha')_{gK}(X_1, ..., X_k) := \alpha((dL_{g^{-1}})_g(X_1), ..., (dL_{g^{-1}})_g(X_k))$. Dadurch läßt sich der Pullback der Form ϕ_k an einem beliebigen Punkt als Pullback am 1-Element in $G_{\mathbb{C}}/K$ beschreiben. Die Linkstranslation $L_{g^{-1}} : G_{\mathbb{C}}/K \to G_{\mathbb{C}}/K$ induziert via dem Isomorphismus $G_{\mathbb{C}}/K \to \mathrm{herm}_n^+(\mathbb{C}), xK \mapsto x^{-1*}x^{-1}$ die Abbildung $\mathrm{herm}_n^+(\mathbb{C}) \to \mathrm{herm}_n^+(\mathbb{C})$, $H \mapsto g^*Hg$. Für $V_1, ..., V_k \in T_xX$ folgt

$$\begin{aligned}
(h_e^*\Phi_k)_x(V_1, ..., V_k) &= (\Phi_k)_{h_{e(x)}}((dh_e)_x(V_1), ..., (dh_e)_x(V_k)) \\
&= \Phi_k(d(g^* \, ? \, g)_{h_{e(x)}}(dh_e)_x(V_1), ..., d(g^* \, ? \, g)_{h_{e(x)}}(dh_e)_x(V_k)) \\
&= \Phi_k(g^*(dh_e)_x g(V_1), ..., g^*(dh_e)_x g(V_k)) \\
&= \sum_{s \in S_k} (-1)^{\mathrm{sgn}(s)} \mathrm{tr}(g^*(dh_e)_x g(V_{s(1)}) \cdots g^*(dh_e)_x g(V_{s(k)})) \\
&= \mathrm{tr}[(g^* dh_e g)^k](V_1, ..., V_k) \\
&= \mathrm{tr}[(g g^* dh_e)^k](V_1, ..., V_k) \\
&= \mathrm{tr}[(h_{e(x)}^{-1} dh_e)^k](V_1, ..., V_k)
\end{aligned}$$

und schließlich die Behauptung. □

Da das Bündel $G_{\mathbb{C}}/K \to \tilde{X} \times_\rho G_{\mathbb{C}}/K \to X$ zusammenziehbare Fasern $G_{\mathbb{C}}/K$ hat, folgt aus der langen exakten Homotopiesequenz $\pi_i(\tilde{X} \times_\rho G_{\mathbb{C}}/K) \cong \pi_i(X)$ für alle $i \geq 0$. Zusammen mit dem Satz von Whitehead ([tDk00] Satz VII.2.5) sind die Räume $\tilde{X} \times_\rho G_{\mathbb{C}}/K$ und $X = \tilde{X}/\pi_1(X)$ homotopieäquivalent. Mithin existiert ein Isomorphismus $\iota : H^*(\tilde{X} \times_\rho G_{\mathbb{C}}/K, \mathbb{C}) \to H^*(X, \mathbb{C})$. Die Kamber-Tondeur Klasse $c_{2k+1}(F)$ ist dann gegeben durch

$$c_{2k+1}(F) = \frac{1}{(2\pi i)^k 2^{2k+1}} \iota([\alpha_{2k+1}]) \qquad \in H^{2k+1}(X, \mathbb{R}).$$

Die Unabhängigkeit der Klasse von der Wahl des Isomorphismus ι entspricht der Unabhängigkeit von der Wahl des Schnittes $\sigma : X \to \tilde{X} \times_\rho G_{\mathbb{C}}/K$ aber dies wiederum übersetzt sich nach dem Lemma in die Unabhängigkeit von der Wahl der hermiteschen Metrik.

2.3.2 Universelle Konstruktion

Die Notationen aus dem vorherigen Abschnitt beibehaltend konstruieren wir nun die universelle Kamber-Tondeur Form, d.h. die Kamber-Tondeur Form des universellen hermiteschen R-Bündels

$$p : (EG \times_G (G_{\mathbb{C}}/K \times \mathbb{C}^n, h^{\mathrm{kan}}) \longrightarrow EG \times_G G_{\mathbb{C}}/K.$$

Dies geschieht, indem wir einen Kozykel in Gestalt einer Differentialform, der sogenannten universellen Kamber-Tondeur Form, auf der Basis eines kombinatorischen Modells von p angeben und sodann die Kohomologieklasse betrachten. Weil die Elemente in der simplizialen Kohomologie eineindeutig den Elementen in der Kohomologie der geometrischen Realisierung entsprechen, repräsentiert die Kamber-Tondeur Form eine Klasse in $H^\bullet(EG \times_G G_\mathbb{C}/K, \mathbb{R})$. Wegen $H^\bullet(EG \times_G G_\mathbb{C}/K, \mathbb{R}) \cong H^\bullet(BG, \mathbb{R})$, steigt die universelle Kamber-Tondeur Klasse nach BG ab.

Für die in diesem Abschnitt und den folgenden Abschnitten verwendeten simplizialen Techniken sei auf den Anhang A verwiesen.

Die Nervkonstruktion $N\bar{G}$ liefert bekanntlich (Bsp.A.3.3 *i*)) ein kombinatorisches Modell für EG und damit auch für das universelle Bündel $p : (EG \times_G (G_\mathbb{C}/K \times \mathbb{C}^n), h^{\mathrm{kan}}) \to EG \times_G G_\mathbb{C}/K$, nämlich (Bsp.A.3.3 *iv*)) durch die simpliziale Abbildung $Np : (N\bar{G} \times_G (G_\mathbb{C}/K \times \mathbb{C}^n), h^{\mathrm{kan}}) \to N\bar{G} \times_G G_\mathbb{C}/K$ für jedes $q \geq 0$.

Definition 2.3.13. Sei S eine simpliziale Mannigfaltigkeit. Der Komplex der simplizialen q-Formen mit $q \geq 0$ und dem Cartan-Differential d, gegeben durch

$$A_S^\bullet : \qquad 0 \to A_S^0 \xrightarrow{d} A_S^1 \xrightarrow{d} A_S^2 \xrightarrow{d} \ldots,$$

heißt der *simpliziale de Rham-Komplex* auf S. Er löst die konstante simpliziale abelsche Garbe $\mathbb{C}$ azyklisch auf. Nach Anwendung des globalen Schnittfunktors Γ erhält man den Doppelkomplex $A(S) := \Gamma(S, A_S^\bullet) = A^{\bullet,\bullet}(S)$ vermöge $A^{p,q}(S) := A^q(S_p)$ mit dem $(-1)^p$ fachen Cartan-Differential d in horizontaler und dem simplizialen Differential $\delta : A^{p,q}(S) \to A^{p+1,q}(S)$ definiert durch $\delta\omega := \sum_{i=0}(-1)^i \varepsilon_i^* \omega$ in vertikaler Richtung.

Bemerkung 2.3.14. Wende die vorstehende Definition auf die simpliziale Mannigfaltigkeit $S = (S_p)$ mit $S_p := N\bar{G}(p) \times_G G_\mathbb{C}/K$ mit den G-äquivarianten Rand -und Entartungsoperatoren $\varepsilon^i \times id$ bzw. $\eta_i \times id$ an. Eine k-Form α auf $N\bar{G} \times_G G_\mathbb{C}/K$ ist also eine Folge von G-invarianten k-Formen $(\alpha^p)_{p \geq 0}$ auf $N\bar{G} \times G_\mathbb{C}/K$, d.h. eine Folge $(\alpha^p)_{p\geq 0}$ mit $\alpha^p \in A^k(N\bar{G}(p) \times G_\mathbb{C}/K)^G$. Das simpliziale Differential lautet dann

$$\begin{aligned} \delta : A^q(N\bar{G}(p) \times G_\mathbb{C}/K)^G &\to A^q(N\bar{G}(p+1) \times G_\mathbb{C}/K)^G \\ (\delta\omega)_{g_0 \ldots g_{p+1}} &:= \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i \omega_{g_0 \ldots \hat{g}_i \ldots g_{p+1}}. \end{aligned}$$

Natürlich sind die G-invarianten Formen auf dem Produkt $N\bar{G} \times G_\mathbb{C}/K$ genau die Formen auf $N\bar{G} \times_G G_\mathbb{C}/K$, also $A^k(N\bar{G} \times G_\mathbb{C}/K)^G = A^k(N\bar{G} \times_G G_\mathbb{C}/K)$. Der Doppelkomplex $A^\bullet(N_\bullet\bar{G} \times_G G_\mathbb{C}/K) =: A^{\bullet,\bullet}(N\bar{G} \times_G G_\mathbb{C}/K)$ entsteht aus dem simplizialen de Rham-Komplex

$$A^\bullet_{N\bar{G}\times_G G_\mathbb{C}/K} : \qquad 0 \to A^0_{N\bar{G}\times_G G_\mathbb{C}/K} \to A^1_{N\bar{G}\times_G G_\mathbb{C}/K} \to A^2_{N\bar{G}\times_G G_\mathbb{C}/K} \to \ldots,$$

welcher die konstante simpliziale Garbe $\mathbb{C}$ azyklisch auflöst, durch Anwenden des globalen Schnittfunktors Γ.

Bemerkung 2.3.15. Bezeichnet $A^q(G_\mathbb{C}/K)^G$ die G-invarianten q-Formen auf dem symmetrischen Raum $G_\mathbb{C}/K$ und $A^\bullet(G_\mathbb{C}/K)^G$ den G-invarianten Komplex

$$0 \longrightarrow A^0(G_\mathbb{C}/K)^G \xrightarrow{d} A^1(G_\mathbb{C}/K)^G \xrightarrow{d} A^2(G_\mathbb{C}/K)^G \xrightarrow{d} \ldots,$$

so nennt man (vgl.[GHV73] ch.IV)

$$H_I^\bullet(G_\mathbb{C}/K, \mathbb{R}) := H^\bullet\left((A^\bullet(G_\mathbb{C}/K)^G\right)$$

die G**-invariante Kohomologie** von $G_\mathbb{C}/K$. Aufgrund

$$A^q(G \times G_\mathbb{C}/K)^G \cong A^q(G \times_G G_\mathbb{C}/K) \cong A^q(G_\mathbb{C}/K)$$

ist eine kanonische Injektion

$$i : A^\bullet(G_\mathbb{C}/K)^G \hookrightarrow A^\bullet(N_0\bar{G} \times_G G_\mathbb{C}/K)$$

von Komplexen gegeben. Ist andererseits $\omega \in A^q(G_\mathbb{C}/K)$ mit $\delta\omega = 0$, so liegt ω bereits in $A^q(G_\mathbb{C}/K)^G$, denn für $\omega_{[g,\gamma]} \in A^q(G \times_G G_\mathbb{C}/K)$ mit $g \in G$ und $\gamma \in G_\mathbb{C}/K$ gilt $0 = (\delta\omega)_{[g_0 g_1,\gamma]} = \omega_{[g_1,\gamma]} - \omega_{[g_0,\gamma]}$ für alle $g_0, g_1 \in G$. Insbesondere folglich $\omega_{g\gamma} = \omega_{[g,\gamma]} = \omega_{[1,\gamma]} = \omega_\gamma$ für alle $g \in G$ und also ω eine G-invariante q-Form auf $G_\mathbb{C}/K$. Mit anderen Worten ist die Sequenz von Komplexen

$$0 \longrightarrow A^\bullet(G_\mathbb{C}/K)^G \xrightarrow{\ i\ } A^\bullet(N_0\bar{G} \times_G G_\mathbb{C}/K) \xrightarrow{\ \delta\ } A^\bullet(N_1\bar{G} \times_G G_\mathbb{C}/K) \tag{12}$$

exakt.

Proposition 2.3.16. *Bezüglich der de Rham-Filtrierung*

$$F^q A^{\bullet,\bullet}(N\bar{G} \times_G G_\mathbb{C}/K) := \bigoplus_{j \geq q} A^{i,j}(N\bar{G} \times_G G_\mathbb{C}/K)$$

des Doppelkomplexes $A^{\bullet,\bullet}(N\bar{G} \times_G G_\mathbb{C}/K)$ gibt es eine funktorielle Spektralsequenz

$$E_2^{pq} = H_d^p H_\delta^q(A^{\bullet,\bullet}(N\bar{G} \times_G G_\mathbb{C}/K)) \Longrightarrow E^{p+q} = H_G^{p+q}(G_\mathbb{C}/K)$$

mit dem Kantenmorphismus

$$E_2^{p0} = H_I^p(G_\mathbb{C}/K, \mathbb{R}) := H^p(A^\bullet(G_\mathbb{C}/K)^G) \longrightarrow H_G^p(G_\mathbb{C}/K, \mathbb{R})$$

von der invarianten Kohomologie $H_I(G_\mathbb{C}/K, \mathbb{R})$ in die äquivariante Kohomologie $H_G^{p+q}(G_\mathbb{C}/K, \mathbb{R})$.

Beweis. Die bezüglich der de Rham-Filtrierung zum Doppelkomplex $A^{\bullet,\bullet}(N\bar{G} \times_G G_\mathbb{C}/K)$ gehörige Spektralsequenz lautet

$$E_2^{pq} = H_d^p H_\delta^q(A^{\bullet,\bullet}(N\bar{G} \times_G G_\mathbb{C}/K)) \Longrightarrow E^{p+q} = H^{p+q}(sA(N\bar{G} \times_G G_\mathbb{C}/K)).$$

Definitionsgemäß ist letzteres gleich $H^{p+q}(N\bar{G} \times_G G_\mathbb{C}/K, \mathbb{R})$ und nach Dupont [Du78] Prop.6.1 ist dies gerade isomorph zu $H^{p+q}(EG \times_G G_\mathbb{C}/K, \mathbb{R}) := H^{p+q}(|N\bar{G} \times_G G_\mathbb{C}/K|, \mathbb{R})$. Wegen der exakten Sequenz (12) folgt $E_2^{p0} = H^p(A^\bullet(G_\mathbb{C}/K)^G, \mathbb{R})$. Die Existenz der beiden Kantenmorphismen zu einer kohomomolischen Spektralsequenz ist Standard (vergleiche hierzu G. Tamme [Ta79] Prop.2.3.1 oder [Ta99] I.3). □

Da der symmetrische Raum G/K zusammenziehbar ist, gilt $H_G^p(G_\mathbb{C}/K, \mathbb{R}) \cong H^p(BG, \mathbb{R}) \cong H^p(G, \mathbb{R})$, wobei letzteres die Gruppenkohomologie von G mit Werten in $\mathbb{R}$ ist.

Definition 2.3.17. Die **universelle Kamber-Tondeur-Form** $\tilde{c}_{2k+1} = (\tilde{c}_{2k+1}^p)_{p \geq 0}$ von

$$Np : (N\bar{G} \times_G (G_\mathbb{C}/K \times \mathbb{C}^n), h^{\text{kan}}) \to N\bar{G} \times_G G_\mathbb{C}/K$$

vom Grade $2k+1$ ist definiert durch

$$\tilde{c}_{2k+1}^p := \begin{cases} \frac{1}{(2\pi i)^k 2^{2k+1}} \operatorname{Tr}\left\{[(h^{\text{kan}})^{-1} dh^{\text{kan}}]^{2k+1}\right\} & \text{für } p = 0 \text{ und alle } g \in G \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

D.h. $\tilde{c}_{2k+1}$ lebt in dem Doppelkomplex $A^{\bullet,\bullet}(N\bar{G} \times G_\mathbb{C}/K)$.

Sprechweise 2.3.18. Wir nennen $\tilde{c}_{2k+1}$ auch *die universelle Kamber-Tondeur Form* auf dem universellen hermiteschen R-Bündel

$$p : (EG \times_G (G_{\mathbb{C}}/K \times \mathbb{C}^n, h^{\mathrm{kan}}) \longrightarrow EG \times_G G_{\mathbb{C}}/K,$$

wohl wissend, daß es sich um eine Form auf dem kombinatorischen Modell Np von p handelt.

Lemma 2.3.19. Die universelle Kamber Tondeur Form $\tilde{c}_{2k+1}$ ist

i) eine Kokette in dem Doppelkomplex $A^{\bullet,\bullet}(N\bar{G} \times_G G_{\mathbb{C}}/K)$.

ii) sowohl d- als auch δ-geschlossen, also insbesondere ein Kozykel in $A^{\bullet,\bullet}(N\bar{G} \times_G G_{\mathbb{C}}/K)$ und ein Element in $A^{2k+1}(G_{\mathbb{C}}/K)^G$.

Beweis. Zu *i)*: Es ist nur die G-Invarianz auf der Nullkomponente $N_0\bar{G} = G$ zu zeigen. Da die kanonische Metrik h^{kan} nicht von $g \in G$ abhängt, ist sie auch die kanonische Metrik in dem Produktbündel $p^0 : G \times G_{\mathbb{C}}/K \times \mathbb{C}^n \to G \times G_{\mathbb{C}}/K$. Jedenfalls ist $\tilde{c}^0_{2k+1} \in A^{2k+1}(G \times G_{\mathbb{C}}/K)$ und dieselbe Rechnung wie in Lemma 2.3.5 liefert die verlangte G-Invarianz. Also ist $\tilde{c}^0_{2k+1} \in A^{2k+1}(G \times G_{\mathbb{C}}/K)^G$. Die erste Behauptung in *ii)* folgt aus Theorem 2.3.6; die zweite ist klar, und die dritte folgt aus Bem.2.3.15. $\square$

Offensichtlich ist die Einschränkung von $\tilde{c}_{2k+1}$ auf $A^{2k+1}(N_\bullet\bar{G} \times_G G_{\mathbb{C}}/K)$ eine simpliziale $2k+1$-Form auf $N\bar{G} \times_G G_{\mathbb{C}}/K$.

Korollar 2.3.20. Die universelle Kamber-Tondeur Form $\tilde{c}_{2k+1}$ repräsentiert eine Klasse in der äquivarianten Kohomologie $H^{2k+1}_G(G_{\mathbb{C}}/K, \mathbb{R})$ und weil $G_{\mathbb{C}}/K$ zusammenziehbar ist, steigt diese Klasse nach $H^{2k+1}(BG, \mathbb{R})$ ab.

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus Prop. 2.3.16. $\square$

Lemma 2.3.21. Die Kamber-Tondeur Form $c_{2k+1}(F, h)$ auf X des hermiteschen R-Bündels $\pi : (F, h) \to X$ ist eindeutig bestimmt durch die Vorgabe der simplizialen $2k+1$-Form, definiert durch

$$c^p_{2k+1} := \begin{cases} \omega_i^{2k+1} & := \frac{1}{(2\pi i)^k 2^{2k+1}} \mathrm{Tr}[(h_{e_i})^{-1} dh_{e_i}]^{2k+1} \quad \text{für } p = 0 \text{ und alle } i \in I \\ \omega_{i_0 \ldots i_p}^{2k+1} & := 0 \quad \text{für } p > 0 \text{ und alle } (i_0, ..., i_p) \in I^{p+1}. \end{cases}$$

auf $NX_{\mathcal{U}}$ des simplizialen hermiteschen R-Bündels $\pi_{\mathcal{U}} : (NF_{\mathcal{V}}, h_{\mathcal{U}}) \to NX_{\mathcal{U}}$, zu einer (dann zu jeder) Trivialisierung T, die durch die lokalen Daten einer offenen Überdeckung $\mathcal{U} := (U_i)_{i\in I}$ und flachen R-Rahmen e_i auf jedem U_i gegeben ist.

Beweis. Sei $(c^p_{2k+1})_{p\geq 0}$ die Kamber-Tondeur Form auf $NX_{\mathcal{U}}$ zur Trivialisierung T. Dann folgt die Behauptung entweder aus lokalen Konstruktion von $c_{2k+1}(F, h)$ Bem.2.3.1 oder in Analogie zu Lemma 2.3.19 *ii)* aus der G-Invarianz der Kamber-Tondeur Form und der Garbenbedingung von A^{2k+1}_X, nämlich so: Es gilt $(\delta c^0_{2k+1})_{ij} = (c^0_{2k+1\,j})_{|U_{ij}} - (c^0_{2k+1\,i})_{|U_{ij}}$. Wegen der G-Invarianz der Kamber-Tondeur Form (Lemma 2.3.5) folgt $c^0_{2k+1\,j} = c^0_{2k+1\,i}$ und also ist $\delta c^0_{2k+1} = 0$. Aufgrund der exakten Sequenz

$$0 \to A^{2k+1}_X(X) \to A^{2k+1}_X(N_0 X_{\mathcal{U}}) \to A^{2k+1}_X(N_1 X_{\mathcal{U}})$$

existiert genau eine globale $2k+1$-Form, nämlich gerade $c_{2k+1}(F, h)$ mit $c_{2k+1}(F, h)_{|U_i} = c^0_{2k+1}$. $\square$

Dieses Lemma hilft in zweierlei Weise: Erstens sagt es, daß man die Kamber-Tonduer Form eines hermiteschen R-Bündels in ganz analoger Weise betrachten kann wie die universelle Kamber-Tondeur Form des universellen hermiteschen R-Bündels und zweitens kann man den nun folgenden Satz o.B.d.A. rein kombinatorisch lösen.

Satz 2.3.22. *Jede Kamber-Tondeur Form eines hermiteschen R-Bündels ist Pullback der Universellen.*

Beweis. Sei also $c_{2k+1}(F,h)$ die Kamber-Tondeur Form des hermiteschen R-Bündels $\pi : (F,h) \to X$ und $T := (\mathcal{U}, e)$ eine Trivialisierung von π. Dann gibt es vermöge der Nervkonstruktion das simpliziale hermitesche R-Bündel $\pi_{\mathcal{U}} : (NF_{\mathcal{V}}, h_{\mathcal{U}}) \to NX_{\mathcal{U}}$ und nach Theorem 1.2.4 und Anhang A.3 die simpliziale Bündelabbildung:

$$\begin{tikzcd}
(NF_{\mathcal{V}}, h_{\mathcal{U}}) \arrow[r, "\tilde{\varphi}^e_{\mathcal{V}}"] \arrow[d, "\pi"'] & (N\bar{G} \times_G G_{\mathbb{C}}/K \times \mathbb{C}^n, h^{\mathrm{kan}}) \arrow[d, "p"] \\
NX_{\mathcal{U}} \arrow[r, "\varphi^e_{\mathcal{U}}"] & N\bar{G} \times_G G_{\mathbb{C}}/K
\end{tikzcd}$$

Dies ist das kombinatorische Modell von

$$\begin{tikzcd}
(F,h) \arrow[r, "\tilde{\varphi}"] \arrow[d, "\pi"'] & (EG \times_G (G_{\mathbb{C}}/K \times \mathbb{C}^n), h^{\mathrm{kan}}) \arrow[d, "p"] \\
X \arrow[r, "\varphi"] & EG \times_G G_{\mathbb{C}}/K
\end{tikzcd}$$

zur Trivialisierung T. Die horizontalen simplizialen Abbildungen sind gegeben durch $N_pX_{\mathcal{U}} \ni U_{i_0\dots i_p} \to G^{p+1} \times_G G_{\mathbb{C}}/K$, $x \mapsto [(1, g_{i_1 i_0}, \dots., g_{i_p i_0}), \tau^{-1}(h_{e_{i_0}}(x))]$. Dies ist wohldefiniert, denn stellt man h bezüglich eines anderen R-Rahmens $e_{i_j} = e_{i_0} g_{i_0 i_j}$ mit $j = 1, ..., p$ dar, so gilt aufgrund der Kozykelbedingung $g_{ii} = 1$ und $g_{ij}g_{jk} = g_{ik}$ auf U_{ijk}:

$$\begin{aligned}
[(1, g_{i_0 i_j}, \dots., g_{i_p i_j}), \tau^{-1}(h_{e_{i_j}})] &= [(1 g_{i_0 i_j}, g_{i_1 i_0} g_{i_0 i_j}, \dots., g_{i_p i_0} g_{i_0 i_j}), g_{i_j i_0} \tau^{-1}(h_{e_{i_0}})] \\
&= [(1, g_{i_1 i_0}, \dots., g_{i_p i_0}) g_{i_0 i_j}, g_{i_j i_0} \tau^{-1}(h_{e_{i_0}})]
\end{aligned}$$

Also sorgt die G-Operation auf $N\bar{G} \times G_{\mathbb{C}}/K$ für die Wohldefiniertheit der simplizialen Abbildung $\varphi^e_{\mathcal{U}}$; analog für $\tilde{\varphi}^e_{\mathcal{V}}$. Auf der Nullkomponente gilt nach Konstruktion der kanonischen Metrik h^{kan} sowie wegen der funktoriellen Eigenschaften der Kamber-Tondeur Formen (vgl. Prop. 2.3.7) für jedes $i \in I$

$$\begin{aligned}
(\varphi^0_{U_i})^* \tilde{c}^0_{2k+1} &= (\varphi^0_{U_i})^* \frac{1}{(2\pi i)^k 2^{2k+1}} \mathrm{Tr}([(h^{\mathrm{kan}})^{-1} dh^{\mathrm{kan}}]^{2k+1}) \\
&= \frac{1}{(2\pi i)^k 2^{2k+1}} \mathrm{Tr}([((\varphi^0_{U_i})^* h^{\mathrm{kan}})^{-1} d(\varphi^0_{U_i})^* h^{\mathrm{kan}}]^{2k+1}) \\
&= \frac{1}{(2\pi i)^k 2^{2k+1}} \mathrm{Tr}([h^{-1}_{e_i} dh_{e_i}]^{2k+1}).
\end{aligned}$$

Aus der lokalen Konstruktion der Kamber-Tondeur Formen bzw. dem Lemma 2.3.21 folgt schließlich die Behauptung. □

Man beachte, daß die Wahl der Überdeckung $\mathcal{U}$ und der R-Rahmen $(e_i)_i$ die simplilziale Bündelabbildung $(\tilde{\varphi}^e_{\mathcal{V}}, \varphi^e_{\mathcal{U}})$ in kanonischer Weise festlegt. Andere Wahlen liefern zwar andere Bündelabbildungen, jedoch dieselbe zurückgeholte Form.

3 Charakteristische Klassen hermitescher R-Bündel

Ziel des nun folgenden Kapitels ist, ganz dem Vorbild der Cheeger-Chern- Simons Theorie folgend, die Verfeinerung der Kamber-Tondeur Klassen in Gestalt eines Liftes der klassischen Kamber-Tondeur Klassen. Zu jedem hermiteschen R-Bündel konstruieren wir zu einer vorgegebenen Trivialisierung eine verfeinerte Kamber-Tondeur Form, deren Klasse im Gegensatz zur klassischen Situation nicht in der reellen de Rham-Kohomologie, sondern in der glatten Deligne-Kohomologie mit Koeffizienten in einer gewissen abelschen Gruppe lebt. Eine andere Trivialisierung liefert zwar auch eine andere Form, jedoch die Klasse in der Deligne-Kohomologie bleibt dieselbe. Die Bildung der verfeinerten Klassen ist additiv und funktoriell auf der Kategorie der hermiteschen R-Bündel. Im zweiten Abschnitt wird diese Konstruktion auf dem universellen hermiteschen R-Bündel verallgemeinert. Die universelle verfeinerte Kamber-Tondeur Klasse lebt jedoch nicht in der glatten Deligne-Kohomologie, sondern in der äquivarianten glatten Deligne-Kohomologie. Es stellt sich erwartungsgemäß heraus, daß jede verfeinerte Kamber-Tondeur Klasse Pullback der universellen verfeinerten ist.
Das gesamte Kapitel nutzt die volle technische Schlagkraft der im Anhang entwickelten simplizialen Methoden, die auch schon stellenweise im vorangegangenen Kapitel Anwendung fand.

3.1 Konstruktion der verfeinerten Kamber-Tondeur Klassen

Definition 3.1.1. Eine **R-Metrik** in einem hermiteschen R-Bündel ist eine Metrik, die lokal bezüglich eines R-Rahmens nur Werte in R annimmt, d.h. bezüglich eines R-Rahmens hat die darstellende Matrix der Metrik nur Einträge aus R.

Man beachte, daß die zu den Daten eines hermiteschen R-Bündels $(F, h) \to X$ gehörige hermitesche Metrik h nicht notwendigerweise eine R-Metrik ist.

Sei $\pi : (F, h) \to X$ ein hermitesches R-Bündel und $T := (\mathcal{U}, e, h^R_{\mathcal{U}})$ die Trivialisierung bestehend aus einer offenen Überdeckung $\mathcal{U} := (U_i)_{i\in I}$ von X, flachen R-Rahmen $(e_i)_{i\in I}$ und hermiteschen R-Metriken h_i auf jedem U_i mit $h_i(e_i) = 1$. Sei weiter $\mathcal{V} := (V_i)_{i\in I}$ die offene Überdeckung von F mit $V_i := \pi^{-1}(U_i) = U_i \times \mathbb{C}^n$. Dann liefert die Nervkonstruktion von X zur Überdeckung $\mathcal{U}$ das simpliziale hermitesche R-Bündel $\pi_{\mathcal{U}} : (NF_{\mathcal{V}}, h_{\mathcal{U}}) \to NX_{\mathcal{U}}$, also ein kombinatorisches Modell von π (Bsp.A.3.3 *iii*)).

Der simplizialen de Rham-Komplex

$$0 \to A^0_{NX_{\mathcal{U}}} \xrightarrow{d} A^1_{NX_{\mathcal{U}}} \xrightarrow{d} A^2_{NX_{\mathcal{U}}} \xrightarrow{d} \dots,$$

auf $NX_{\mathcal{U}}$, welcher die konstante simpliziale Garbe $\mathbb{C}$ auflöst, ist ein Spezialfall von Beispiel A.5.3 *ii*). Der durch den globalen Schnittfunktor Γ enstehende Doppelkomplex $A^{\bullet,\bullet}(NX_{\mathcal{U}})$ ist gegeben durch $A^{p,q}(NX_{\mathcal{U}}) := A^q(N_pX_{\mathcal{U}})$. Dies ist der wohlbekannte Čech-de Rham-Doppelkomplex, also $A^{p,q}(NX_{\mathcal{U}}) = \check{C}^p(\mathcal{U}, A^q_X)$.

Sei $p \geq 0$. Dann ist vermöge

$$\bar{h}(t_0, ..., t_{p+1}, x)_{i_0\dots i_p} := \sum_{k=0}^{p} t_k h_{i_k}(x)_{|U_{i_0\dots i_p}} + t_{p+1} h(x)_{|U_{i_0\dots i_p}}$$

eine Familie von hermiteschen Metriken $\bar{h}_p := (\bar{h}_{i_0\dots i_p})$ auf

$$\coprod_{i_0,\dots,i_p} \Delta^{p+1} \times U_{i_0\dots i_p} \times \mathbb{C}^n \to \coprod_{i_0,\dots,i_p} \Delta^{p+1} \times U_{i_0\dots i_p},$$

also in $\Delta^{p+1} \times N_p F_{\mathcal{V}} \to \Delta^{p+1} \times N_p X_{\mathcal{U}}$ gegeben. Setzt man weiter $\omega^p_{2k+1}(F,\bar{h}) := (\omega^p_{2k+1}(F,\bar{h})_{i_0 \dots i_p})$ mit

$$\omega^p_{2k+1}(F,\bar{h})_{i_0 \dots i_p} := \frac{1}{(2\pi i)^k 2^{2k+1}} \mathrm{Tr}[(\bar{h}^{-1} d\bar{h})^{2k+1}], \tag{13}$$

so erhält man für jedes $(i_0, ..., i_p) \in I^{p+1}$ eine $2k+1$-Form auf $\Delta^{p+1} \times U_{i_0 \dots i_p}$, also eine $2k+1$-Form auf $\Delta^{p+1} \times N_p X_{\mathcal{U}}$. Durch Integration über die Faser bezüglich des trivialen Bündels $\Delta^{p+1} \times N_p X_{\mathcal{U}} \to N_p X_{\mathcal{U}}$ ist eine Form $C^{p,2k-p}_{2k+1}(F,\bar{h}) := (C^{p,2k-p}_{2k+1}(F,\bar{h})_{i_0 \dots i_p})$ mit

$$C^{p,2k-p}_{2k+1}(F,\bar{h})_{i_0 \dots i_p} := (-1)^{p-1} \int_{\Delta^{p+1}} \omega^p_{2k+1}(F,\bar{h})_{i_0 \dots i_p} \quad \in A^{2k-p}(N_p X_{\mathcal{U}}) \tag{14}$$

vom Grad $2k+1$ gegeben. Das Paar $(f, (C^{p,2k+1}_{2k+1})_{p \geq 0}(F,\bar{h}))$ mit

$$f_{i_0 \dots i_{2k+1}} := -\left(\delta C^{2k,0}_{2k+1}(F,\bar{h})\right)_{i_0 \dots i_{2k+1}}$$

heißt **verfeinerte Kamber-Tondeur-Form** von $\pi : (F,h) \to X$ vom Grade $2k+1$. Sie hängt von der Wahl der Trivialisierung T ab.

Setze

$$A_{2k+1}(F)_T := \left\langle \int_{\varepsilon^{2k+2}\Delta^{2k+2}} \omega^{2k+1}_{2k+1}(F,\bar{h})_{i_0 \dots i_{2k+1}} \right\rangle_{\mathbb{Z}} \qquad \subset \mathbb{R}$$

und

$$A_{2k+1}(F) := \sum_T A_{2k+1}(F)_T \qquad \subset \mathbb{R},$$

wobei über alle Trivialisierungen T summiert wird. Es wird sich im folgenden Abschnitt über die Konstruktion der universellen verfeinerten Klassen herausstellen, daß diese etwas adhoc wirkendende Definition von $A_{2k+1}(F)$ überflüssig ist und durch den "universellen Koeffizientenbereich" $A_{2k+1}(R)$ ersetzt werden kann. (vergleiche hierzu auch Bem. 3.1.5).

Theorem 3.1.2. *Das Paar $(f, (C^{p,2k+1}_{2k+1}(F,\bar{h}))_{p \geq 0})$, bestehend aus den $2k-p$-Formen*

$$\{C^{p,2k-p}_{2k+1}(F,\bar{h})\}_{p=0,\dots,2k}$$

in dem Doppelkomplex $A^{\bullet,\bullet}(NX_{\mathcal{U}})$ zusammen mit

$$f := -\delta C^{2k,0}_{2k+1}(F,\bar{h}) \in \check{C}^{2k+1}(\mathcal{U}, A_{2k+1}(F))$$

bildet einen $2k+1$-Kozykel in dem glatten Deligne-Komplex

$$A_{2k+1}(F)_{\mathcal{D}} : 0 \to A_{2k+1}(F) \xrightarrow{i} A^0_X \xrightarrow{d} A^1_X \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} A^{2k}_X,$$

dessen Kohomologieklasse nicht von der Wahl der flachen R-Rahmen und damit den flachen R-Metriken $h_{i_0}, ..., h_{i_p}$ abhängt und ferner invariant unter Verfeinerung von $\mathcal{U}$ ist, d.h.

$$C_{2k+1}(F,\bar{h}) := \left\{f, \left(C^{p,2k-p}_{2k+1}(F,\bar{h})\right)\right\}_{p=0,\dots,2k} \in H^{2k+1}_{\mathcal{D}}(X, A_{2k+1}(F)).$$

Beweis. 1.Schritt: Beweis der Kozykeleigenschaft

Fixiere ein $p+1$-Tupel $(i_0,...,i_p)\in I^{p+1}$. Bezeichnet d' das Cartan-Differential auf $X\times\Delta^{p+1}$ und d_Δ das in Richtung von Δ^{p+1}, so gilt $d'=d+d_\Delta$ und damit

$$\begin{aligned}
dC^{p,2k-p}_{2k+1}(F,\bar h)_{i_0\ldots i_p} &= (-1)^{p-1}d\int_{\Delta^{p+1}}\omega^p_{2k+1}(F,\bar h)_{i_0\ldots i_p}\\
&= (-1)^{p-1}\underbrace{\int_{\Delta^{p+1}}d'\omega^p_{2k+1}(F,\bar h)_{i_0\ldots i_p}}_{=0 \quad \text{Theorem 2.3.6}}-(-1)^{p-1}\int_{\Delta^{p+1}}d_\Delta\omega^p_{2k+1}(F,\bar h)_{i_0\ldots i_p}\\
&\underset{\text{Stokes}}{=} (-1)^p\sum_{j=0}^{p}(-1)^j\int_{\varepsilon^j\Delta^{p+1}}\omega^p_{2k+1}(F,\bar h)_{i_0\ldots i_p}-\int_{\varepsilon^{p+1}\Delta^{p+1}}\omega^p_{2k+1}(F,\bar h)_{i_0\ldots i_p}\\
&= (-1)^p(\delta C^{p-1,2k-p+1}_{2k+1})(F,\bar h)_{i_0\ldots i_p}-\int_{\varepsilon^{p+1}\Delta^{p+1}}\omega^p_{2k+1}(F,\bar h)_{i_0\ldots i_p}.
\end{aligned}$$

Das Integral in der letzten Zeile verschwindet für $p=0,...,2k$, denn ist $x_0\in U_{i_0\ldots i_p}$ ein beliebiger Punkt, so gibt es wegen $(F_{|U_i},h_i)\cong p^*(F_{x_0},h_i(x_0))$ einen kanonischen Isomorphismus

$$(\Delta^{p+1}\times F)_{|U_{i_0\ldots i_p}\times\varepsilon^{p+1}\Delta^{p+1}},\bar h)\cong(\mathrm{id}\times p)^*\left(F_{x_0}\times\varepsilon^{p+1}\Delta^{p+1},\bar h_{|\{x_0\}\times\varepsilon^{p+1}\Delta^{p+1}}\right),$$

weil auf $\varepsilon^{p+1}\Delta^{p+1}$ die Koordinate t_{p+1} Null ist und somit die Metrik $\bar h$ konstant auf $U_{i_0\ldots i_p}$ ist. Also läßt sie sich von einer Metrik auf einem Punkt zurückziehen. Es folgt

$$\begin{aligned}
\int_{\varepsilon^{p+1}\Delta^{p+1}}\omega^p_{2k+1}(F,\bar h)_{i_0\ldots i_p} &= \int_{\varepsilon^{p+1}\Delta^{p+1}}\omega^p_{2k+1}((p\times id)^*F_{x_0},(p\times id)^*(\bar h_{|\{x_0\}\times\varepsilon^{p+1}\Delta^{p+1}}))_{i_0\ldots i_p}\\
&= \int_{\varepsilon^{p+1}\Delta^{p+1}}(p\times id)^*\omega^p_{2k+1}(F_{x_0},\bar h_{\{x_0\}\times\varepsilon^{p+1}\Delta^{p+1}})_{i_0\ldots i_p}\\
&= \underbrace{p^*\int_{\varepsilon^{p+1}\Delta^{p+1}}\underbrace{\omega^p_{2k+1}(F_{x_0},\bar h_{\{x_0\}\times\varepsilon^{p+1}\Delta^{p+1}})_{i_0\ldots i_p}}_{\in A^{2k+1}(\{x_0\}\times\varepsilon^{p+1}\Delta^{p+1})}}_{\in A^{2k+1-p}(\{x_0\})}.
\end{aligned}$$

Aber eine $2k+1-p$-Form auf einem Punkt ist entweder Null, für $2k+1-p>0$ oder eine Nullform für $2k+1-p=0$, d.h.

$$\int_{\varepsilon^{p+1}\Delta^{p+1}}\omega^p_{2k+1}(F,\bar h)_{i_0\ldots i_p}=\begin{cases}0 & 2k+1>p\\ c,\quad c\in A_{2k+1}(F) & 2k+1=p\end{cases}\tag{15}$$

mit einer noch näher zu bestimmenden Untergruppe $A_{2k+1}(F)$ von $\mathbb{R}$. Damit ist

$$d\left(C^{p,2k-p}_{2k+1}(F,\bar h)\right)_{i_0,\ldots,i_p}=(-1)^p\left(\delta C^{p-1,2l-p+1}_{2k+1}(F,\bar h)\right)_{i_0,\ldots,i_p},\quad\text{für}\quad p=1,\cdots 2k$$

gezeigt. Setze $f_{i_0\ldots i_{2k+1}}:=-\left(\delta C^{2k,0}_{2k+1}(F,\bar h)\right)_{i_0\ldots i_{2k+1}}$ und zeige, daß f im Bild von $i:\check C^{2k+1}(\mathcal{U},A_{2k+1}(F))\to\check C^{2k+1}(\mathcal{U},A^0_X)=A^0_X(N_{2k+1}X_{\mathcal{U}})$ liegt. Dazu betrachte den Fall $p=2k+1$. Wegen $C^{2k+1,-1}_{2k+1}(F,\bar h)=0$ ist

$$\int_{\Delta^{2k+2}}d_\Delta\omega^{2k+1}_{2k+1}(F,\bar h)_{i_0\ldots i_{2l+1}}=\int_{\Delta^{2k+2}}d'\omega^{2k+1}_{2k+1}(F,\bar h)_{i_0\ldots i_{2l+1}}=0.$$

Mit Stokes folgt weiter

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\Delta^{2k+2}}d_\Delta\omega^{2k+1}_{2k+1}(F,\bar h)_{i_0\ldots i_{2k+1}}\\
&= (-1)^{2k+1}\left(\delta C^{2k+1-1,2k-(2k+1)+1}_{2k+1}(F,\bar h)\right)_{i_0\ldots i_{2l+1}}-\int_{\varepsilon^{2k+2}\Delta^{2k+2}}\omega^{2k+1}_{2k+1}(F,\bar h)_{i_0\ldots i_{2k+1}}\\
&= -\left(\delta C^{2k,0}_{2k+1}(F,\bar h)\right)_{i_0\ldots i_{2k+1}}-\int_{\varepsilon^{2k+2}\Delta^{2k+2}}\omega^{2k+1}_{2k+1}(F,\bar h)_{i_0\ldots i_{2k+1}}.
\end{aligned}$$

Also liegt $(\delta C^{2k,0}_{2k+1}(F,\bar{h}))_{i_0\dots i_{2k+1}}$ im Bild von i. Bezeichne das durch i eindeutig bestimmte Element in $\check{C}^{2k+1}(\mathcal{U}, A_{2k+1}(F))$ wieder mit f. Dies zeigt die Kozykeleigenschaft.

2.Schritt: Die Klasse $C^{p,2k-p}_{2k+1}(F,\bar{h})$ hängt weder von der Wahl der flachen R-Rahmen noch von den R-Metriken ab.

Sei $i \in I$ fest gewählt. Betrachte die offene Überdeckung $\mathcal{U}' := \mathcal{U} \cup U_{i'}$ von X mit $U_{i'} := U_i$. Wähle hierauf einen flachen R-Rahmen $e_{i'}$ und eine R-Metrik $g_{i'}$ mit $g_{i'}(e_{i'}) = 1$. Die Idee ist nun, daß sich die beiden Formen $C_{2k+1}(F,\bar{h})$ und $C_{2k+1}(F,\bar{h}')$ um einen Korand unterscheiden. Dabei ist $C_{2k+1}(F,\bar{h}')$ die verfeinerte Kamber-Tondeur-Form bezüglich der Überdeckung $\mathcal{U}'\backslash U_i$. Für jedes $p \geq 0$ ist vermöge

$$H^{p,2k-1-p}_{i_0\dots i_p} := \begin{cases} 0 & \text{für } i \notin \{i_0 \dots i_p\} \\ (-1)^{\nu+p} C^{p+1,2k-p-2}_{i_0\dots i_{\nu-1} i i' \dots i_p} & \text{für } 0 \leq p < 2k \\ f^{2k+1}_{i_0\dots ii'\dots 2k} := f & \text{für } p = 2k \end{cases}$$

eine $2k$-Deligne-Kokette in $A(2k+1)_{\mathcal{D}}$ gegeben, wobei ν die Stelle des Elementes i im Tupel $i_0 \dots i_p$ bezeichnet. Zur Abkürzung seien im folgenden die Formengrade in $H^{p,q}$ unterdrückt. Für $0 < p \leq 2k$ gilt

$$\begin{aligned}
(dH^p + (-1)^p \delta H^{p-1})_{i_0\dots i_p} &= (dH^p)_{i_0\dots i_p} + (-1)^p (\delta H^{p-1})_{i_0\dots i_p} \\
&= d(H^p_{i_0\dots i_p}) + (-1)^p \sum_{j=0}^{p} (-1)^j H^{p-1}_{i_0\dots \hat{i}_j \dots i_p} \\
&= (-1)^{\nu+p} dC^{p+1,2k-p-1}_{i_0\dots ii'\dots i_p} + (-1)^p \sum_{j=0}^{p} (-1)^j H^{p-1}_{i_0\dots \hat{i}_j \dots p} \\
&= (-1)^{\nu+p} (-1)^{p+1} (\delta C^{p,2k-p})_{i_0\dots ii'\dots i_p} + (-1)^p \sum_{j=0}^{p} (-1)^j H^{p-1}_{i_0\dots \hat{i}_j \dots i_p} \\
&= (-1)^{\nu+2p+1} (\sum_{j<\nu} (-1)^j C^{p,2k-p}_{i_0\dots .\hat{i}_j \dots ii'\dots i_p} + \sum_{j>\nu}^{p} (-1)^{j+1} C^{p,2k-p}_{i_0\dots ii'\dots \hat{i}_j \dots i_p} \\
&+ (-1)^{\nu} C^{p,2k-p}_{i_0\dots \hat{i}i'\dots i_p} + (-1)^{\nu+1} C^{p,2k-p}_{i_0\dots i\hat{i}'\dots i_p}) \\
&+ (-1)^p (\sum_{j<\nu} (-1)^{\nu-1+p-1+j} C^{p,2k-p}_{i_0\dots \hat{i}_j \dots ii'\dots i_p} \\
&+ \sum_{j>\nu} (-1)^{\nu+p-1+j} C^{p,2k-p}_{i_0\dots ii'\dots \hat{i}_j \dots i_p}) \\
&= (-1)^{\nu} C^{p,2k-p}_{i_0\dots \hat{i}i'\dots i_p} + (-1)^{\nu+1} C^{p,2k-p}_{i_0\dots i\hat{i}'\dots i_p}
\end{aligned}$$

und im Falle $p = 0$ sieht man sofort $dH^0_i = dC^{1,2k-1}_{ii'} = -(\delta C^{0,2k})_{ii'} = -C^{0,2k}_{i'} + C^{0,2k}_i$. Damit ist Schritt 2 gezeigt. Wegen Schritt 2 ist die Klasse $C^{p,q}_{2k+1}$ invariant unter Verfeinerung der Überdeckung, was den Beweis des Theorems abschließt. □

DEFINITION 3.1.3. Die Klasse $C_{2k+1}(F,\bar{h})$ heißt **verfeinerte Kamber-Tondeur Klasse** von $\pi : (F,h) \to X$ vom Grade $2k+1$ und wird fortan mit $C_{2k+1}(F,h)$ bezeichnet.

Im Folgenden sei stets die Überdeckung $\mathcal{U}$ als *gut* vorausgesetzt. Damit ist die Bedingung der Invarianz unter Verfeinerung von $\mathcal{U}$ wegen $H^*_{\mathcal{D}}(\mathcal{U}, A_{2k+1}(F)) \cong H^*_{\mathcal{D}}(X, A_{2k+1}(F))$ überflüssig.

KOROLLAR 3.1.4. Aus der Konstruktion von $\omega_{2k+1}(F,\bar{h})_{i_0\dots i_{2k+1}}$ zusammen mit (15) folgt unmittelbar, daß für abzählbares R der Koeffizientenbereich $A_{2k+1}(F)$ in einer abzählbaren Untergruppe von $\mathbb{R}$ enthalten ist.

Bemerkung 3.1.5. *i)* Man beachte, daß nach Prop.2.3.6 die Form ω_{2k+1} reell ist. Daher ist der Koeffizientenbereich $A_{2k+1}(F)$ eine Untergruppe von $\mathbb{R}$.

ii) Der bisher definierte Koeffizientenbereich $A_{2k+1}(F)$ der verfeinerten Kamber-Tondeur Klassen hat den Makel vom R-Bündel $(F, h) \to X$ abhängig zu sein. Dies wird jedoch durch die im folgenden Abschnitt behandelte universelle Konstruktion der verfeinerten Kamber-Tondeur Klassen behoben. Ihr Koeffizientenbereich hängt nur noch von der R-Struktur, d.h. vom Ring R ab und wird daher mit $A_{2k+1}(R)$ bezeichnet. Da für jedes R-Bündel $(F, h) \to X$ der Koeffizientenbereich $A_{2k+1}(F)$ in $A_{2k+1}(R)$ enthalten ist, macht es Sinn von vornherein das obige Theorem mit $A_{2k+1}(R)$ zu formulieren.

In völliger Analogie zu Prop.2.3.7 haben wir

Proposition 3.1.6 (Eigenschaften). *Seien $(F, h) \to X$ und $(F', h') \to X$ zwei Objekte in $\mathscr{V}_R^{\mathrm{herm}}(X)$. Dann hat man folgende Eigenschaften:*

i) *Sind F und F' isomorph in $\mathscr{V}_R^{\mathrm{herm}}$, so gilt*

$$C_{2k+1}(F, h) = C_{2k+1}(F', h').$$

ii) Natürlichkeit*: Ist $f : X' \to X$ differenzierbar, so gilt*

$$C_{2k+1}(f^*F, f^*h) = f^*C_{2k+1}(F, h).$$

iii) Additivität*:*

$$C_{2k+1}((F, h) \oplus (F', h')) = C_{2k+1}(F, h) + C_{2k+1}(F', h')$$

iv) Dualität *:*

$$C_{2k+1}(\overline{F, h}^*) = -C_{2k+1}(F, h)$$

v) "Multiplikativität" *:*

$$C_{2k+1}(F \otimes F') = \mathrm{rk}(F')C_{2k+1}(F, h) + \mathrm{rk}(F)C_{2k+1}(F', h')$$

Beweis. Dies folgt alles aus Prop.2.3.7, der Verträglichkeit der Integration mit Pullback und der Konstruktion der verfeinerten Klassen. □

Korollar 3.1.7. Die verfeinerten Kamber-Tondeur Klassen sind additive charakteristische Klassen hermitescher R-Bündel.

Korollar 3.1.8. Die verfeinerten Kamber-Tondeur Klassen sind Lifts der klassischen. Genauer gilt für jedes $k \geq 0$

$$dC_{2k+1}(F, h) = -c_{2k+1}(F) \in H^{2k+1}(X), A_{2k+1}(R)),$$

wobei $d : H_{\mathcal{D}}^{2k+1}(X, A_{2k+1}(R)) \to A^{2k+1}(X)_{A_{2k+1}(R)}$ der Krümmungshomomorphismus aus Lemma B.0.8 ist.

Beweis. Fixiere eine Trivialisierung T von $(F, h) \to X$. Dann ist die verfeinerte Kamber-Tondeur Form $C_{2k+1}(F, \bar{h})$ zu T ein Repräsentant der Klasse $C_{2k+1}(F, h) \in H_{\mathcal{D}}^{2k+1}(X, A_{2k+1}(F))$. Mit denselben Methoden wie im vorstehenden Theorem sieht man

$$\begin{aligned}
dC^{0,2k}_{2k+1}(F,\bar{h})_i &= d\int_{\Delta^1}\omega^0_{2k+1}(F,\bar{h})_i \\
&\underset{\text{Theorem 2.3.6}}{=} -\int_{\Delta^1} d_\Delta\omega^0_{2k+1}(F,\bar{h})_i \qquad (d' = d + d_\Delta) \\
&\underset{\text{Stokes}}{=} -\int_{\varepsilon^0\Delta^1}\omega^0_{2k+1}(F,\bar{h})_i + \int_{\varepsilon^1\Delta^1}\omega^0_{2k+1}(F,\bar{h})_i \\
&\underset{(15)}{=} -\int_{\varepsilon^0\Delta^1}\omega^0_{2k+1}(F,\bar{h})_i + 0 \\
&= -c_{2k+1}(F,h)_{|U_i}
\end{aligned}$$

ein. Da die Kamber-Tondeur Form $c_{2k+1}(F,h)$ nicht von der Wahl der Trivialisierung abhängt, folgt mithin die Behauptung. □

Bemerkung 3.1.9. Aus den verfeinerten Kamber-Tondeur Klassen gewinnt man also via dem Krümmungshomomorphismus nicht nur die klassischen Kamber-Tondeur Klassen, sondern sogar die Formen selbst, d.h. die Information über die Metrik der hermiteschen R-Bündeln bleibt erhalten. Da die klassischen Kamber-Tondeur Klassen nicht von der hermiteschen Metrik abhängen, sind sie demnach Invarianten flacher R-Bündel. Die verfeinerten hingegen sind Invarianten hermitescher R-Bündel.

Weil das Bild des Krümmungshomomorphismus geschlossene Differentialformen mit Perioden in $A_{2k+1}(R)$ liefert, liegen die klassischen Kamber-Tondeur Klassen bereits in $H^{2k+1}(X, A_{2k+1}(R))$. Auch dies ist eine zusätzliche Information über die klassischen Kamber-Tondeur Klassen.

3.2 Konstruktion der universellen verfeinerten Kamber-Tondeur Klasse

In diesem Abschnitt behandeln wir den sogenannten *universellen Fall*, d.h. die Konstruktion der verfeinerten Kamber-Tondeur Klassen erfolgt nun auf dem universellen hermiteschen R-Bündel

$$p : (EG \times_G (G_{\mathbb{C}}/K \times \mathbb{C}^n), h^{\text{kan}}) \to EG \times_G G_{\mathbb{C}}/K.$$

Wie üblich geschieht dies auf simpliziale Weise, (vgl. Anhang A). Wir zeigen, daß die universelle verfeinerte Kamber-Tondeur Klasse — in völliger Analogie zur klassischen Situation — in der äquivarianten glatten Deligne- Kohomologie lebt (3.2.13) und daß jede verfeinerte Kamber-Tondeur Klasse Pullback der universellen verfeinerten ist. Zusätzlich verallgemeinern wir den aus der glatten Deligne-Kohomomologie bekannten Krümmungshomomorphismus auf den äquivarianten Fall (Lemma 3.2.5) und können damit wiederum ganz analog zum vorangegangenen Abschnitt Cor.3.1.8 zeigen, daß die verfeinerte universelle Kamber-Tondeur Klasse ein Lift der klassischen universellen ist.

Die Nervkonstruktion des universellen Bündels

$$p : (EG \times_G (G_{\mathbb{C}}/K \times \mathbb{C}^n), h^{\text{kan}}) \to EG \times_G G_{\mathbb{C}}/K$$

liefert ein kombinatorisches Modell (vgl.A.3.3 *iv*)), nämlich das simpliziale hermitesche R-Bündel

$$Np : (N\bar{G} \times_G (G_{\mathbb{C}}/K \times \mathbb{C}^n), h^{\text{kan}}) \to N\bar{G} \times_G G_{\mathbb{C}}/K.$$

Der simpliziale de Rham-Komlex

$$0 \longrightarrow A^0_{N\bar{G}\times_G G_{\mathbb{C}}/K} \xrightarrow{d} A^1_{N\bar{G}\times_G G_{\mathbb{C}}/K} \xrightarrow{d} A^2_{N\bar{G}\times_G G_{\mathbb{C}}/K} \xrightarrow{d} \cdots$$

auf $N\bar{G} \times_G G_{\mathbb{C}}/K$ ist ein Spezialfall von Bsp.A.5.3. Wie bereits in Bem.2.3.14 gesehen, erhält man durch Anwenden des globalen Schnittfunktors den Doppelkomplex $A^{\bullet,\bullet}(N\bar{G} \times_G G_{\mathbb{C}}/K)$, welcher gegeben ist durch $A^{p,q}(N\bar{G} \times_G G_{\mathbb{C}}/K) := A^q(N_p\bar{G} \times_G G_{\mathbb{C}}/K)$.

Konstruktion der Form: Sei $p \geq 0$. Mittels der kanonischen Abbildung

$$G^{p+1} \longrightarrow (\mathrm{herm}_n^+(\mathbb{C}))^{p+1},\ (g_0, ..., g_p) \longmapsto (h_0, ..., h_p)$$

mit $h_i := g_i^* g_i$ ist vermöge

$$\tilde{h}^p(t_0, ..., t_{p+1}, x)_{g_0 \dots g_p} := \sum_{i=0}^{p} t_k h_i + t_{p+1} h^{\mathrm{kan}}(x), \quad \sum_{i=0}^{p+1} t_i = 1,\ t_i \geq 0,\ i = 0, ..., p+1$$

eine hermitesche Metrik $\tilde{h}^p := (\tilde{h}^p_{g_0 \dots g_p})_{(g_0,\dots,g_p)\in G^{p+1}}$ in $\Delta^{p+1} \times N_p\bar{G} \times G_{\mathbb{C}}/K \times \mathbb{C}^n \to \Delta^{p+1} \times N_p\bar{G} \times G_{\mathbb{C}}/K$ gegeben. (Dabei wurde der symmetrisch Raum $G_{\mathbb{C}}/K$ in kanonischer Weise (vlg. Bem.1.2.9) mit $\mathrm{herm}_n^+(\mathbb{C})$ identifiziert.) Setzt man nun $\omega^p_{2k+1}(\tilde{h}) := (\omega^p_{2k+1}(\tilde{h})_{g_0 \dots g_p})$ mit

$$\omega^p_{2k+1}(\tilde{h})_{g_0 \dots g_p} := \frac{1}{(2\pi i)^k 2^{2k+1}} \mathrm{Tr}\left[\left(\tilde{h}^{-1} d\tilde{h}\right)^{2k+1}\right], \tag{16}$$

so erhält man eine reelle, geschlossene (Theorem 2.3.6), G-invariante (Lemma 2.3.5) $2k+1$-Form auf $\Delta^{p+1} \times N_p\bar{G} \times G_{\mathbb{C}}/K$. Für jedes p-Tupel $(g_0, ..., g_p) \in G^{p+1} = N_p\bar{G}$ erhält man durch Integration über die Faser bezüglich des trivialen Bündels $\Delta^{p+1} \times G_{\mathbb{C}}/K \to G_{\mathbb{C}}/K$ die $2k-p$-Form

$$C^{p,2k-p}_{2k+1}(\tilde{h})_{g_0 \dots g_p} := (-1)^{p-1} \int_{\Delta^{p+1}} \omega^p_{2k+1}(\tilde{h}), \tag{17}$$

also ist

$$C^{p,2k-p}_{2k+1}(\tilde{h}) := \left(C^{p,2k-p}_{2k+1}(\tilde{h})_{g_0 \dots g_p}\right)_{(g_0,\dots,g_p)\in G^{p+1}} \in A^{2k-p}(N_p\bar{G} \times_G G_{\mathbb{C}}/K).$$

Das Paar $(f, C^{p,2k-p}_{2k+1}(\tilde{h}))_{p\geq 0}$ mit

$$f_{g_0, \dots, g_{2k+1}} := -\left(\delta C^{2k,0}_{2k+1}(\tilde{h})\right)_{g_0 \cdots g_{2k+1}}$$

heißt **universelle verfeinerte Kamber-Tondeur Form** von $p : (EG \times_G (G_{\mathbb{C}}/K \times \mathbb{C}^n), h^{\mathrm{kan}}) \to EG \times_G G_{\mathbb{C}}/K$ vom Grade $2k+1$.

Definition 3.2.1. Setze

$$A_{2k+1}(R) := \left\langle \left\{ \int_{\varepsilon^{2k+2}\Delta^{2k+2}} \omega^{2k+1}_{2k+1}(\tilde{h})_{g_0 \dots g_{2k+1}} \right\}_{(g_0,\dots,g_{2k+1})\in G^{2k+2}} \right\rangle_{\mathbb{Z}}.$$

Man nennt $A_{2k+1}(R)$ den **Koeffizientenbereich** von $(f, C^{p,2k-p}_{2k+1}(\tilde{h}))_{p\geq 0}$.

Bemerkung 3.2.2. Sei A eine abelsche Gruppe. Nach Beispiel A.1.4 *iii)* läßt sich jeder simplizialen Menge X die simpliziale abelsche Gruppe $\mathbb{Z}X :=< X >_{\mathbb{Z}}$ zuordnen. Hierzu hat man den Kettenkomplex

$$\mathbb{Z}X_0 \overset{\partial}{\leftarrow} \mathbb{Z}X_1 \overset{\partial}{\leftarrow} \mathbb{Z}X_1 \overset{\partial}{\leftarrow} \dots$$

mit seinem Differential $\partial := \sum_i (-1)^i \varepsilon_i$. Dualisieren mit dem kontravarianten Hom-Funktor $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, A)$ liefert den Kokettenkomplex

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}X_0, A) \xrightarrow{\delta} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}X_1, A) \xrightarrow{\delta} \dots \xrightarrow{\delta} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}X_p, A) \xrightarrow{\delta} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}X_{p+1}, A) \xrightarrow{\delta} \dots$$

mit dem durch

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}X_p \arrow[r, "\sigma_p"] & A \\
\mathbb{Z}X_{p+1} \arrow[u, "\varepsilon_i"] \arrow[ur, dashed, "\varepsilon_i^* := \sigma_p \circ \varepsilon_i"'] &
\end{tikzcd}$$

induzierten Differential

$$\delta\sigma_p := \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i \varepsilon_i^*.$$

Wendet man das vorstehende auf die Nervkonstruktion $X := NG$ von G (vgl. Bsp.A.1.4) mit $C^p(NG, A) := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}N_pG, A)$ an, so erhält man die aus der Gruppenkohomologie wohlbekannte *Bar-Auflösung* von A mit ihrem Differential $\delta : C^{p-1}(NG, A) \to C^p(NG, A)$

$$\begin{aligned}
(\delta\sigma_{p-1})(g_1, ..., g_p) \quad := \quad & g_1\sigma_{p-1}(g_2, ..., g_p) \\
& + \sum_{i=1}^{p-1} (-1)^i \sigma_{p-1}(g_1, ..., g_i g_{i+1}, ..., g_p) \\
& + (-1)^p \sigma_{p-1}(g_1, ..., g_{p-1}).
\end{aligned}$$

Die n-te Kohomologiegruppe dieses Komplexes heißt n-te Gruppenkohomologie von G mit Werten in A , also

$$H^n(G, A) = H^n(C^\bullet(NG, A)).$$

Diese Konstruktion wird verwendet in dem folgenden

Theorem 3.2.3. *Das Paar* $(f, C^{p,2k-p}_{2k+1}(\tilde{h}))_{p\geq 0}$, *bestehend aus den* $2k - p$ *Formen*

$$(C^{p,2k-p}_{2k+1}(\tilde{h}))_{p=0,\ldots,2k}$$

in dem Doppelkomplex $A^{\bullet,\bullet}(N\bar{G} \times G_{\mathbb{C}}/K)^G = A^{\bullet,\bullet}(N\bar{G} \times_G G_{\mathbb{C}}/K)$ *bilden zusammen mit*

$$\tilde{f} := -\left(\delta C^{p,2k-p}_{2k+1}(\tilde{h})\right) \in C^{2k+1}(NG, A_{2k+1}(R)) := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}N_{2k+1}G, A_{2k+1}(R))$$

einen $2k + 1$*-Kozykel in dem Doppelkomplex* $A_{2k+1}(R)_{\mathcal{D}}$*:*

$$0 \to C^\bullet(NG, A_{2k+1}(R)) \xrightarrow{i} A^{\bullet,0}(N\bar{G}\times_G G_{\mathbb{C}}/K) \xrightarrow{d} A^{\bullet,1}(N\bar{G}\times_G G_{\mathbb{C}}/K) \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} A^{\bullet,2k}(N\bar{G}\times_G G_{\mathbb{C}}/K)$$

d.h.

$$C_{2k+1}(\tilde{h}) := \left\{\tilde{f}, \left(C^{p,2k-p}_{2k+1}(\tilde{h})\right)\right\}_{p=0,\ldots,2k} \in H^{2k+1}(sA_{2k+1}(R)_{\mathcal{D}}).$$

wobei $sA_{2k+1}(R)_{\mathcal{D}}$ *den zum Doppelkomplex* $A_{2k+1}(R)_{\mathcal{D}}$ *gehörigen Totalkomplex bezeichnet. Der Koeffizientenbereich* $A_{2k+1}(R)$ *von* $C_{2k+1}(\tilde{h})$ *ist eine Untergruppe von* $\mathbb{R}$*, die von* k *und* R *abhängt. Ist* R *abzählbar, so ist* $A_{2k+1}(R)$ *in einer abzählbaren Untergruppe von* $\mathbb{R}$.

Beweis. Der Beweis der Kozykeleigenschaft funktioniert genau wie in Theorem 3.1.2. Man ersetze dazu

1. $C^{p,2k-p}_{2k+1}(F, \bar{h})_{i_0\ldots i_p}$ durch $C^{p,2k-p}_{2k+1}(\tilde{h})_{g_0\ldots g_p}$,
2. das Bündel F durch das triviale Bündel $G_{\mathbb{C}}/K \times \mathbb{C}^n \to G_{\mathbb{C}}/K$,
3. $NX_{\mathcal{U}}$ durch die triviale simpliziale Mannigfaltigkeit $N(G_{\mathbb{C}}/K)_{\mathcal{U}}$ zur Überdeckung $\mathcal{U} := (U_g)_{g\in G}$ mit $U_g := G_{\mathbb{C}}/K$ für alle g in G.

Genauso wie in Korollar 3.1.4 folgt die Abzählbarkeit von $A_{2k+1}(R)$. □

Definition 3.2.4. Die Klasse $C_{2k+1}(\tilde{h})$ heißt **universelle verfeinerte Kamber-Tondeur-Klasse** von $p : (EG \times_G (G_{\mathbb{C}}/K \times \mathbb{C}^n), h^{\mathrm{kan}}) \to EG \times_G G_{\mathbb{C}}/K$ vom Grade $2k+1$ und wird fortan mit C_{2k+1} bezeichnet.

Man hat eine äquivariante Version des Krümmungshomomorphismus (vgl. hierzu Lemma B.0.8)

Lemma 3.2.5. Es gibt einen kanonischen Epimorphismus

$$d : H^{2k+1}(sA_{2k+1}(R)_{\mathcal{D}}) \longrightarrow A^{2k+1}(G_{\mathbb{C}}/K)^G_{A_{2k+1}(R)}, \quad x = \overline{(a,\omega)} \longmapsto F_\omega$$

in die G-invarianten, geschlossenen $2k+1$-Formen mit Perioden in $A_{2k+1}(R)$.

Beweis. Eine Klasse $x \in H^{2k+1}(sA_{2k+1}(R)_{\mathcal{D}})$ wird repräsentiert durch $(a, \omega_0, ..., \omega_{2k})$ mit $a \in C^{2k+1}(NG, A_{2k+1}(R))$ und $\omega_i = (\omega_{g_0 \dots g_i})_{g_j \in G} \in A^{i,2k-i}(N\bar{G} \times_G G_{\mathbb{C}}/K)$. Wegen der nach Bem.2.3.15 existierenden exakten Sequenz (12)

$$0 \longrightarrow A^\bullet(G_{\mathbb{C}}/K)^G \xrightarrow{i} A^\bullet(N_0\bar{G} \times_G G_{\mathbb{C}}/K) \xrightarrow{\delta} A^\bullet(N_1\bar{G} \times_G G_{\mathbb{C}}/K)$$

von Komplexen, folgt die Behauptung ganz analog wie in Lemma B.0.8: Es gilt nämlich $\delta d\omega_0 = d\delta\omega_0$ und $\delta\omega_0 = \pm d\omega_1$, also $\delta d\omega_0 = 0$. Wegen der Exaktheit der obigen Sequenz, gibt es eine ersichtlich d-geschlossene G-invariante $2k+1$-Form F_ω mit $i(F_\omega) = d\omega_0$, d.h. F_ω ist wie in Lemma B.0.8 eindeutig bestimmt durch ω_0. Mit denselben Argument wie im dortigen Lemma hängt die Konstruktion von F_ω nicht von der Wahl des Repräsentanten in x ab.

Man hat eine kanonische Abbildung $H^{2k+1}(BG, A_{2k+1}(R)) \to H^{2k+1}_G(G_{\mathbb{C}}/K)$ definiert durch $\bar{a} \mapsto \overline{(a, 0, ..., 0)}$. Kommt a von einem Repräsentanten in $(a, \omega_0, ..., \omega_{2k})$ in $H^{2k+1}(sA_{2k+1}(R)_{\mathcal{D}})$, so gilt $a = -\delta\omega_{2k}$. Das bedeutet, daß die Bilder $(a, 0..., 0)$ und $(0, ..., d\omega_0)$ in $H^{2k+1}_G(G_{\mathbb{C}}/K)$ kohomolog sind. Mit anderen Worten kommutiert das folgende Diagramm

$$\begin{tikzcd}
H^{2k+1}(sA_{2k+1}(R)_{\mathcal{D}}) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\mathrm{pr}"] & A^{2k+1}(X)^G_{\mathrm{cl}} \arrow[d, "\mathrm{kan}"] \\
H^{2k+1}(BG, A_{2k+1}(R)) \arrow[r, "\mathrm{kan}"] & H^{2k+1}_G(G_{\mathbb{C}}/K, \mathbb{C})
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\overline{(a, \omega_0, ..., \omega_{2k})} \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & F_\omega \arrow[d, mapsto] \\
\bar{a} \arrow[r, mapsto] & \overline{(0, ..., 0, d\omega_0)}
\end{tikzcd}$$

und also hat F_ω Perioden in $A_{2k+1}(R)$.

Sei schließlich α eine G-invariante $2k+1$-Form auf $G_{\mathbb{C}}/K$ mit Perioden in $A_{2k+1}(R)$. Wegen der obigen exakten Sequenz ist $i(\alpha) \in A^{2k+1}(G_{\mathbb{C}}/K)$. Da die simplizialen Garben

$$A^q_{N\bar{G} \times_G G_{\mathbb{C}}/K}$$

wegen $N\bar{G} \times_G G_{\mathbb{C}}/K \cong NG \times G_{\mathbb{C}}/K$ für alle q azyklisch sind[4], gibt es eine $2k$-Form $\omega_0 \in A^{2k}(G_{\mathbb{C}}/K)$ mit $d\omega_0 = \alpha$. Setze $\omega_1 := \delta\omega_0$. Induktiv fortfahrend erhält man $x := (\delta\omega_{2k}, \omega_0, ..., \omega_{2k})$ mit $\omega_i \in A^{i,2k-i}(N\bar{G} \times_G G_{\mathbb{C}}/K)$. Da α Perioden in $A_{2k+1}(R)$ hat, folgt mit Lemma B.0.7, daß $\delta\omega_{2k}$ im Bild der kanonischen Abbildung $C^{2k+1}(NG, A_{2k+1}(R)) \to C^{2k+1}(NG, \mathbb{C})$ liegt. Also repräsentiert x wirklich eine Klasse in $H^{2k+1}(sA_{2k+1}(R)_{\mathcal{D}})$. Dies zeigt die Surjektivität des Krümmungshomomorphismus d. □

Sprechweise 3.2.6. Wir nennen den Krümmungshomomorphismus aus Lemma 3.2.5 auch *äquivarianten Krümmungshomomorphismus.*

[4]Der symmetrische Raum $G_{\mathbb{C}}/K$ ist zusammenziehbar.

KOROLLAR 3.2.7. Die universelle verfeinerte Kamber-Tondeur Klasse ist via dem äquivarianten Krümmungshomomorphismus ein Lift der klassischen universellen, d.h. für jedes $k \geq 0$ gilt

$$dC_{2k+1} = -\tilde{c}_{2k+1} \quad \in H_G^{2k+1}(G_{\mathbb{C}}/K, A_{2k+1}(R)) \cong H^{2k+1}(G, A_{2k+1}(R)).$$

Beweis. Wie im Beweis von Kor.3.1 verfahrend

$$\begin{aligned} dC_{2k+1}^{0,2k}(\tilde{h}) &= d\int_{\Delta^1} \omega_{2k+1}(\tilde{h}) \\ &\underset{\text{Theorem 2.3.6}}{=} -\int_{\Delta^1} d_\Delta \omega_{2k+1}(\tilde{h}) \qquad (d' = d + d_\Delta) \\ &\underset{\text{Stokes}}{=} -\int_{\varepsilon^0\Delta^1} \omega_{2k+1}(\tilde{h}) + \int_{\varepsilon^1\Delta^1} \omega_{2k+1}(\tilde{h}) \\ &\underset{(15)}{=} -\int_{\varepsilon^0\Delta^1} \omega_{2k+1}(\tilde{h}) + 0 \\ &= -\tilde{c}_{2k+1}^0 \end{aligned}$$

folgt die Behauptung zusammen mit dem Lemma 2.3.19. Die Konstruktion der universellen Kamber-Tondeur Klasse liefert, wie in Kor.2.3.20 angegeben, a apriori nur reelle Koefizienten. Die zweite Aussage folgt aus dem äquivarianten Krümmungshomomorphismus Lemma 3.2.5. ☐

BEMERKUNG 3.2.8. Bei näherer Betrachtung der beiden Konstruktionen stellt man fest, daß die "verfeinerte" Information bereits in den Formen $\omega_{2k+1}(\tilde{h})$, $\omega_{2k+1}(F, \bar{h})$ steckt. Die nachträgliche Integration über die Faser eliminiert lediglich die Koordinaten in Richtung der Simplizes und ermöglicht die Anwendung des (simplizialen) Stokes in der Rechnung, um die Kozykeleigenschaft nachzuweisen.

Wir verallgemeinern nun die invariante Kohomologie in Bem.2.3.15 und die Spektralsequenz in Prop.2.3.16 wie folgt: Es operiere G trivial auf $A_{2k+1}(R)$ und wie üblich auf $G_{\mathbb{C}}/K$ durch Linksmultiplikation. Betrachte den glatten Deligne-Komplex

$$0 \longrightarrow A_{2k+1}(R)_{G_{\mathbb{C}}/K} \longrightarrow A^0_{G_{\mathbb{C}}/K} \longrightarrow A^1_{G_{\mathbb{C}}/K} \longrightarrow \ldots \longrightarrow A^{2k}_{G_{\mathbb{C}}/K}.$$

Der durch Komposition des globalen Schnittfunktors Γ mit dem Fixpunktfunktor $(-)^G$ entstehende Komplex lautet

$$A^I_{2k+1}(R): \qquad 0 \longrightarrow A_{2k+1}(R) \longrightarrow A^0(G_{\mathbb{C}}/K)^G \longrightarrow A^1(G_{\mathbb{C}}/K)^G \longrightarrow \ldots \longrightarrow A^{2k}(G_{\mathbb{C}}/K)^G,$$

und die Kohomologie dieses Komplexes

$$H_I^\bullet(G_{\mathbb{C}}/K, A_{2k+1}(R)) := H^\bullet(A^I_{2k+1}(R))$$

heißt G-**invariante Kohomologie** von $G_{\mathbb{C}}/K$ mit Koeffizienten in $A_{2k+1}(R)$.

LEMMA 3.2.9. Die Sequenz

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \to & A_{2k+1}(R) & \to & C^0(NG, A_{2k+1}(R)) & \to & C^1(NG, A_{2k+1}(R)) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \to & A^\bullet(G_{\mathbb{C}}/K)^G & \to & A^\bullet(N_0\bar{G} \times_G G_{\mathbb{C}}/K) & \to & A^\bullet(N_1\bar{G} \times_G G_{\mathbb{C}}/K) \end{array}$$

ist exakt.

Beweis. Die Exaktheit der unteren Zeile ist in Bem.2.3.15 gezeigt worden, die der oberen ist die Bar-Auflösung von $A_{2k+1}(R)$ (vgl.Bem.3.2.2). ☐

Insbesondere ist die Sequenz

$$0 \to A^I_{2k+1}(R) \to A_{2k+1}(R)_{\mathcal{D}} \tag{18}$$

von Komplexen ist exakt, d.h. nach Anwendung des globalen Schnittfunktors auf den invarianten Komplex $A^I_{2k+1}(R)$ augmentiert $A^I_{2k+1}(R)$ den Doppelkomplex $A_{2k+1}(R)_{\mathcal{D}}$.

Damit verallgemeinert sich die Spektralsequenz in Prop. 2.3.16 wie folgt:

Proposition 3.2.10. *Es gibt eine bezüglich der de Rham Filtrierung*

$$F^q A_{2k+1}(R)_{\mathcal{D}} := \bigoplus_{j \geq q} A^{i,j}_{2k+1}(R)_{\mathcal{D}}$$

funktorielle Spektralsequenz

$$E_2^{pq} := H_d^p H_\delta^q(A_{2k+1}(R)_{\mathcal{D}}) \Longrightarrow E^{p+q} = H^{p+q}(sA_{2k+1}(R)_{\mathcal{D}}),$$

mit dem Kantenmorphismus

$$E_2^{p0} = H_I^p(G_{\mathbb{C}}/K, A_{2k+1}(R)) \longrightarrow H^p(sA_{2k+1}(R)_{\mathcal{D}}).$$

Beweis. Wie in Beweis von Prop.2.3.16 verfahrend, folgt die Behauptung zusammen mit dem obigen Lemma. □

Satz 3.2.11. *Sei $(F,h) \to X$ ein hermitesches R-Bündel und sei $C_{2k+1}(F,\bar{h})$ die verfeinerte Kamber-Tondeur Form zu den Daten einer Trivialisierung $T := (\mathcal{U}, e)$ bestehend aus einer offenen guten Überdeckung $\mathcal{U} := (U_i)_{i\in I}$ zuammen mit flachen R-Rahmen $(e_i)_{i\in I}$ und R-Metriken h_i mit $h_i(e_i) = 1$. Dann gilt:*

$$(\varphi^e_{\mathcal{U}})^* C_{2k+1}(\tilde{h}) = C_{2k+1}(F,\bar{h}). \tag{19}$$

Beweis. Die Nervkonstruktion zusammen mit Theorem 1.2.4 liefert genau wie im Beweis von Satz 2.3.22 ein kombinatorisches Modell von

$$\begin{tikzcd}
(F,h) \arrow[r, "\tilde{\varphi}"] \arrow[d, "\pi"'] & (EG \times_G (G_{\mathbb{C}}/K \times \mathbb{C}^n), h^{\mathrm{kan}}) \arrow[d, "p"] \\
X \arrow[r, "\varphi"] & EG \times_G G_{\mathbb{C}}/K,
\end{tikzcd}$$

also eine simpliziale Bündelabbildung

$$\begin{tikzcd}
(NF_{\mathcal{V}}, h_{\mathcal{U}}) \arrow[r, "\tilde{\varphi}^e_{\mathcal{V}}"] \arrow[d, "\pi_{\mathcal{U}}"'] & (N\bar{G} \times_G (G_{\mathbb{C}}/K \times \mathbb{C}^n), h^{\mathrm{kan}}) \arrow[d, "Np"] \\
NX_{\mathcal{U}} \arrow[r, "\varphi^e_{\mathcal{U}}"] & N\bar{G} \times_G G_{\mathbb{C}}/K,
\end{tikzcd}$$

wobei die verfeinerte Form $C_{2k+1}(F,\bar{h})$ ihrer Definition nach bereits auf dem kombinatorischen Modell $NX_{\mathcal{U}}$ von X lebt. Für jedes $p \geq 0$ hat man genau die im Beweis von Satz 2.3.22 angegebenen horizontalen Abbildungen

$$N_p X_{\mathcal{U}} \ni U_{i_0 \dots i_p} \to G^{p+1} \times_G G_{\mathbb{C}}/K, \quad x \longmapsto [(1, g_{i_1 i_0}, \dots, g_{i_p i_0}), \tau^{-1}(h_{e_{i_0}}(x))]$$

(analog $\varphi^e_{\mathcal{V}}$). Aus der Natürlichkeit der Integration und der Kamber-Tonder Formen (vgl. Prop. 2.3.7) folgt für jedes $p \geq 0$

$$\begin{aligned}
(\varphi^p_{\mathcal{U}})^* C^{p,2k-p}_{2k+1}(\tilde{h}) &= (\varphi^p_{\mathcal{U}})^*(-1)^{p-1}\int_{\Delta^{p+1}} \omega^{2k+1}(\tilde{h}) \\
&= (-1)^{p-1}\int_{\Delta^{p+1}} (\mathrm{id}\times\varphi^p_{\mathcal{U}})^*\omega^{2k+1}(\tilde{h}) \\
&= (-1)^{p-1}\int_{\Delta^{p+1}} \omega^{2k+1}((\mathrm{id}\times\varphi^p_{\mathcal{U}})^*\tilde{h}) \\
&\overset{(*)}{=} (-1)^{p-1}\int_{\Delta^{p+1}} \omega^{2k+1}(\bar{h}) \\
&= C^{p,2k-p}_{2k+1}(F,h).
\end{aligned}$$

In der Tat ist $(\mathrm{id}\times\varphi^p_{\mathcal{U}})^*\tilde{h} = \bar{h}$. Dies folgt unmittelbar aus der Konstruktion von $\tilde{h}$ und der simplizialen Abbildung $\varphi^e_{\mathcal{U}}$. Denn: Die hermitesche Metrik $\bar{h} = \sum_{j=0}^p t_j h_{i_j} + t_{p+1}h$ hat bezüglich des Rahmens e_{i_0} die Gestalt

$$\bar{h}_{e_{i_0}} = \sum_{j=0}^{p} t_j g^*_{i_j i_0} g_{i_j i_0} + t_{p+1} h_{e_{i_0}}$$

mit den Übergangsfunktionen $g_{i_j i_0} \in G$ gegeben durch $e_{i_0} = e_{i_j} g_{i_j i_0}$ für $j = 0, ..., p$. Damit ist

$$\begin{aligned}
(\mathrm{id}\times\varphi^p_{\mathcal{U}})^*(\tilde{h})(t_0,...,t_{p+1},x) &= \tilde{h}(t_0,...,t_{p+1},1,g_{i_1 i_0},...,g_{i_p i_0},\tau^{-1}(h_{e_{i_0}}(x))) \\
&= \sum_{j=0}^{p} t_j g^*_{i_j i_0} g_{i_j i_0} + t_{p+1} h_{e_{i_0}}(x) \\
&= \bar{h}_{e_{i_0}}(t_0,...,t_{p+1},x).
\end{aligned}$$

Also gilt auch die vorletzte Gleichheit $(*)$ und also die Behauptung. □

Für die Eigenschaft "universell" auf Formenniveau muß man — wie eben gesehen — zusätzliche Daten fixieren, welche in der Kombinatorik kodiert sind. Andere Wahlen liefern andere verfeinerte Formen, jedoch dieselben verfeinerten Klassen bei festgehaltenen hermiteschen R-Bündel. Insofern folglich

Korollar 3.2.12. Jede verfeinerte Kamber-Tondeur Klasse ist Pullback der universellen verfeinerten.

Wir errinnern an die Definition der äquivarianten glatten Deligne-Kohomologie (siehe Anhänge A.6 und C): Sei A ein Unterring von $\mathbb{R}$ und X eine G-Mannigfaltigkeit. Dann heißt der Komplex von simplizialen Garben

$$A^G_{k,\mathcal{D}}: \qquad 0 \to A_{N\bar{G}\times_G X} \xrightarrow{i} A^0_{N\bar{G}\times_G X} \xrightarrow{d} A^1_{N\bar{G}\times_G X} \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} A^{k-1}_{N\bar{G}\times_G X}$$

auf $N\bar{G}\times_G X$ der G-äquivariante glatte Deligne-Komplex von X. Seine Kohomologie

$$H^\bullet_{G\mathcal{D}}(X,A) := H^\bullet_{\mathcal{D}}(N\bar{G}\times_G X, A_{2k+1}(R)) := H^\bullet(A^G_{k,\mathcal{D}})$$

heißt G-äquivariante glatte Deligne-Kohomologie von X mit Koeffizienten in A.

Theorem 3.2.13. *Die universelle verfeinerte Kamber-Tondeur Klasse C_{2k+1} von*

$$p: (EG\times_G (G_{\mathbb{C}}/K\times\mathbb{C}^n), h^{\mathrm{kan}}) \to EG\times_G G_{\mathbb{C}}/K$$

lebt in der äquivarianten Deligne-Kohomologie $H^{2k+1}_{G\mathcal{D}}(G_{\mathbb{C}}/K, A_{2k+1}(R))$.

Beweis. Setze $X := G_{\mathbb{C}}/K$. Definiere G-äquivarianten glatten Deligne-Komplex vermöge

$$A^G_{2k+1}(R)_{\mathcal{D}}: \qquad 0 \to A_{2k+1}(R)_{N\bar{G}\times_G X} \xrightarrow{i} A^0_{N\bar{G}\times_G X} \xrightarrow{d} A^1_{N\bar{G}\times_G X} \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} A^{k-1}_{N\bar{G}\times_G X} \tag{20}$$

Für $p \geq 0$ sind die globalen Schnitt der konstante Garbe $A_{2k+1}(R)_{G^{p+1}\times_G X}$ gerade die lokal konstanten Funktionen auf $G^{p+1} \times_G X \cong G^p \times X$ mit Werten in $A_{2k+1}(R)$. Da der symmetrische Raum $X = G_{\mathbb{C}}/K$ zusammenziehbar und G diskret ist, ist so eine Funktion auf den Elementen von G^p eindeutig festgelegt. Aber die Elemente $f : G^p \to A_{2k+1}(R)$ erzeugen $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}N_pG, A_{2k+1}(R)$, also $A_{2k+1}(R)_{G^{p+1}\times_G X}(G^{p+1} \times_G X) \cong C^p(NG, A_{2k+1}(R))$. Folglich liefert der globale Schnittfunktor Γ von (20) gerade den Doppelkomplex $A_{2k+1}(R)_{\mathcal{D}}$. Es verbleibt zu zeigen, daß die Kohomologie dieses Doppelkomplexes gerade die G-äquivariante Deligne-Kohomologie ergibt. Die Idee dazu geht auf die in Gomi [G05] 3.3 entwickelte explizite Čech-Beschreibung der äquivarianten Deligne-Kohomologie zurück. Definiere folgende Überdeckung von $N\bar{G} \times_G G_{\mathbb{C}}/K$: Setze $\mathcal{U} := \mathcal{U}^p$ für $p \geq 0$ mit $\mathcal{U}^p := (U^p_{g_1\dots g_p})_{(g_1,\dots,g_p)\in G^p}$, wobei $U^p_{g_1\dots g_p} := \{g_1, \dots, g_p\} \times X$. Dann gilt $\varepsilon_i(U^p_{g_1\dots g_p}) = \varepsilon_i(g_1, \dots, g_p) \times \mathrm{id}(X) = U^p_{\varepsilon_i(g_1\dots g_p)}$. Analog die Entartungsmorphismen. Weil X zusammenziehbar und G diskret ist, erhält man damit gemäß Gomi [G05] Def.3.3 eine gute offene Überdeckung von $N\bar{G} \times_G X$, mit der Eigenschaft

$$N_0\mathcal{U}^p = \prod_{(g_1,\dots,g_p)} U^p_{g_1,\dots,g_p} \quad N_q\mathcal{U}^p = \prod_{(g_1^{i_0}\dots g_p^{i_0})\dots(g_1^{i_q},\dots,g_p^{i_q})} U^p_{(g_1^{i_0}\dots g_p^{i_0})} \cap \dots \cap U^p_{(g_1^{i_q}\dots g_p^{i_q})} = \emptyset \tag{21}$$

für $q \geq 1$. Letzteres weil $G^p \times X$ Vereinigung ***disjunkter*** guter offener Teilmengen $U^p_{g_1\dots g_p}$ ist. Vermöge

$$\check{K}^{p,q,r} = \Gamma(N_q\mathcal{U}^p, A^G_{2k+1}(R)^{[r]}_{\mathcal{D}})$$

ist ein Trikomplex $(\check{K}^{p,q,r}, \delta, d, \check{\delta})$ auf $N\bar{G} \times_G X$ gegeben. Dabei ist $\check{\delta}$ das Čech-Differential und $[r]$ die r-te Komponente in $A_{2k+1}(R)_{\mathcal{D}}$. Der Totalkomplex ist definiert durch

$$\check{C}^n(\mathcal{U}, A^G_{2k+1}(R)_{\mathcal{D}}) := \bigoplus_{p+q+r=n} \check{K}^{p,q,r}.$$

Da die Überdeckung $\mathcal{U}$ gut ist, folgt mit Gomi [G05] Lemma 3.4

$$\check{H}^n(\mathcal{U}, A^G_{2k+1}(R)_{\mathcal{D}}) \cong H^n_{G\mathcal{D}}(X, A_{2k+1}(R)).$$

In der Tat gilt wegen (21) bereits $H^n(sA_{2k+1}(R)_{\mathcal{D}}) \cong H^n_{G\mathcal{D}}(X, A_{2k+1}(R))$ und dies war zu zeigen. □

Analog wie in Bem.B.0.6 sieht man den Isomorphismus

$$H^*(N\bar{G} \times_G X, \mathbb{R}/A_{2k+1}(R)) \cong H^*(sA^\bullet(N_\bullet\bar{G} \times_G X)/C^\bullet(NG, A_{2k+1}(R)),$$

und folglich ist die Sequenz

$$0 \to H^{2k}(N\bar{G} \times_G X, \mathbb{R}/A_{2k+1}(R))) \longrightarrow H^{2k+1}_{\mathcal{D}}(N\bar{G} \times_G X, A_{2k+1}(R)) \xrightarrow{d} A^{2k+1}(X)_{A_{2k+1}(R)} \to 0.$$

exakt.

3.3 Erste Beispiele

Dieser Abschnitt behandelt zwei Klassen von Beispielen, nämlich: Wir berechnen explizit die erste verfeinerte Kamber-Tondeur Klasse eines beliebigen hermiteschen R-Bündels und den Koefffizientenbereich der verfeinerten Kamber-Tondeur Klassen von Rang 2-Bündeln mit verschwindender erster Kamber-Tondeur Klasse. Letzeres führt auf die Berechnung von Volumina hyperbolischer 3-Simplizes, wofür es eine konkrete Formel von Murakami-Ushijima [Mu04] gibt.

Wie üblich sei R ein diskreter Unterring von $\mathbb{C}$, z.B. $R = \mathbb{Z}$.

3.3.1 Der Fall C_1

Für die Berechnung der ersten verfeinerten Kamber-Tondeur Klasse eines beliebigen hermiteschen R-Bündels genügt es den universellen Fall zu betrachten. Damit haben wir gleichzeitig den Koeffizienbereich *aller* ersten verfeinerten Klassen hermitescher R-Bündel bestimmt.

Proposition 3.3.1. *Sei $p : (EG \times_G (G_{\mathbb{C}}/K \times \mathbb{C}^n), h^{\mathrm{kan}}) \to EG \times_G G_{\mathbb{C}}/K$ das universelle hermitesche R-Bündel. Dann lautet die erste verfeinerte Kamber-Tondeur Klasse von p*

$$C_1 = \left(\{\ln|\det g|\}_{g\in G}, \frac{1}{2}\ln\det h^{\mathrm{kan}}\right) \qquad \in H^1_{\mathcal{D}}(N\bar{G} \times_G G_{\mathbb{C}}/K, A_1(R)) \tag{22}$$

und ihr Koeffizientenbereich

$$A_1(R) = \left\langle \{\ln|r|\}_{r\in R^*} \right\rangle_{\mathbb{Z}}. \tag{23}$$

Dabei ist $r := \det g \in R^*$ für $g \in G := GL_n(R)$.

Beweis. Nach Konstruktion der universellen verfeinerten Kamber-Tondeur Formen gilt

$$C_1^{0,0} = \left\{\frac{-1}{2}\int_{\Delta^1} \mathrm{Tr}[(t_0 g^* g + t_1 h^{\mathrm{kan}})^{-1} d(t_0 g^* g + t_1 h^{\mathrm{kan}})]\right\}_{g\in G}$$

mit $t_0 + t_1 = 1$. Für einen Punkt $p \in G_{\mathbb{C}}/K$ und festes $g \in G$ folgt

$$(C_1^{0,0})_g(p) = \frac{-1}{2}\int_0^1 \mathrm{Tr}[(tg^*g + (1-t)h^{\mathrm{kan}}(p))^{-1} d(tg^*g + (1-t)h^{\mathrm{kan}}(p)]$$

An der Stelle p lassen sich die beiden hermitesche Metriken g^*g und $h^{\mathrm{kan}}(p) = p^{-1*}p^{-1}$ simultan diagonalisieren, so daß $g^*g = 1$ und $h^{\mathrm{kan}}(p)$ Diagonalgestalt hat, mit den Eigenwerten $\lambda_1(p), \ldots, \lambda_n(p)$, $\lambda_j(p) > 0$ für alle $j = 1, .., n$ und einer unitären Basis aus Eigenvektoren. Damit

$$D(p) := t \cdot 1 + (1-t)h^{\mathrm{kan}}(p) = \begin{pmatrix} t + (1-t)\lambda_1(p) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & t + (1-t)\lambda_r(p) \end{pmatrix}$$

und

$$D^{-1}(p) = \begin{pmatrix} \frac{1}{t+(1-t)\lambda_1(p)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{t+(1-t)\lambda_r(p)}. \end{pmatrix}$$

und also

$$D^{-1}dD(p) = \begin{pmatrix} \frac{1-\lambda_1(p)}{t+(1-t)\lambda_1(p)}dt & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1-\lambda_r(p)}{t+(1-t)\lambda_r(p)}dt \end{pmatrix}.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} (C_1^{0,0})_g(p) &= \frac{-1}{2}\int_0^1 \mathrm{Tr}[D^{-1}dD(p)] \\ &= \frac{-1}{2}\sum_{j=1}^r \int_0^1 \frac{1-\lambda_j(p)}{t+(1-t)\lambda_j(p)}dt \\ &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^r \ln\lambda_j \\ &= \frac{1}{2}\ln[\lambda_1(p)\cdots\lambda_r(p)] \\ &= \frac{1}{2}\ln\det h^{\mathrm{kan}}(p). \end{aligned}$$

Da die aus der simultanen Diagonalisierung entstehende Basis unitär ist, folgt auch das letzte Gleichheitszeichen. Insofern hängt die Berechnung von C_1 nicht von der Wahl der unitären Basis ab.

Für den Koeffizientenbereich gilt nach Kor.3.1.4

$$A_1(R) = \left\langle \left\{ \frac{1}{2} \int_{\varepsilon^2 \Delta^2} \mathrm{Tr}[(t_0 g_0^* g_0 + t_1 g_1^* g_1)^{-1} d(t_0 g_0^* g_0 + t_1 g_1^* g_1)] \right\}_{g_0, g_1 \in G} \right\rangle_{\mathbb{Z}}$$

mit den hermiteschen R-Metriken $g_i^* g_i$ mit $i = 0, 1$ sowie $t_0 + t_1 = 1$. Sodann liefert dieselbe Rechnung wie oben das Behauptete. □

Korollar 3.3.2. *i)* Ist $(F, h) \to X$ ein hermitesches R-Bündel und $(\mathcal{U}, e)$ eine Trivialisierung, bestehend aus einer offenen Überdeckung $\mathcal{U} := (U_i)_{i \in I}$ und R-Rahmen $(e_i)_{i \in I}$, so lautet die erste verfeinerte Kamber-Tondeur Klasse

$$C_1(F, h) = \left(\{\ln|\det g_{ij}|\}_{i,j \in I}, \left\{ \frac{1}{2} \ln \det h_{e_i} \right\}_{i \in I} \right) \qquad \in H^1_{\mathcal{D}}(X, A_1(R)),$$

mit $r := \det g_{ij}$ wobei die g_{ij}'s die Übergangsfunktionen, gegeben durch die Trivialisierung $e_i = g_{ij} e_j$ sind.

ii) Insbesondere folgt für ein hermitesches R-Geradenbündel $(L, h) \to X$:

$$C_1(L, h) = \left(\{\ln|g_{ij}|\}_{i,j \in I}, \left\{ \frac{1}{2} \ln h_{e_i} \right\}_{i \in I} \right) \qquad \in H^1_{\mathcal{D}}(X, A_1(R))$$

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus der Konstruktion der verfeinerten Kamber-Tondeur-Klasse 3.1 und der vorstehenden Proposition. □

Die klassische universelle Kamber-Tondeur Form des universellen hermiteschen R-Bündel erhält man entweder mittels Krümmungshomomorphismus (Kor.3.2.7)

$$d : H^1_{\mathcal{D}}(N\bar{G} \times_G G_{\mathbb{C}}/K, A_1) \to A^1(G_{\mathbb{C}}/K)^G_{A_1(R)}$$

oder auch mit derselben Rechnung wie oben direkt aus der Definition

$$\tilde{c}_1 := \frac{1}{2} \mathrm{Tr}[(h^{\mathrm{kan}})^{-1} dh^{\mathrm{kan}}] = \frac{1}{2} d \ln \det h^{\mathrm{kan}}.$$

Zusamenfassend erhalten wir folgende Verfeinerungsinformationen:

1. Für ein beliebiges hermitesches R-Bündel ist der Koeffizientenbereich der ersten verfeinerten Kamber-Tondeur Klasse nicht nur reell, sondern höchstens eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ der Form (23). Aufgrund der universellen Konstruktion der verfeinerten Kamber-Tondeur Klasse hängt der Koeffizientenbereich $A_1(R)$ nur von R ab und nicht vom R-Bündel selbst.

2. Die erste klassische Kamber-Tondeur Form ist nicht nur reell und geschlossen, sondern nimmt ihre Werte in A_1 an. Also gewinnt man aus der verfeinerten Kamber-Tondeur Klasse zusätzliche Informationen über die klassische Kamber-Tondeur Klasse - wie schon in Bem.3.1.9 angesprochen.

3.3.2 Der Fall hermitescher R-Bündel vom Rang 2

Ziel dieses Abschnittes ist es den Koeffizientenbereich der verfeinerten Kamber-Tondeur Klasse hermitescher R-Bündel vom Rang 2 mit verschwindender erster Kamber-Tondeur Form zu bestimmen. Die Betrachtung solcher Bündel führt auf einen handhabbaren Fall, nämlich der Bestimmung der Volumina hyperbolischer 3-Simplizes im Hyperbolischen Raum $\mathbb{H}^3$.

Sei fortan in diesem Abschnitt $G := \mathrm{SL}_2(R)$.

Bemerkung 3.3.3. Das hermitesche R-Bündel

$$p : (EG \times_G (\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/\,\mathrm{SU}(2) \times \mathbb{C}^2), h^{\mathrm{kan}}) \to EG \times_G \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/\,\mathrm{SU}(2),$$

ist universell für alle hermiteschen R-Bündel $(F, h) \to X$ deren hermitesche Metrik h von der Form $\gamma^{-1*}\gamma^{-1}$ mit $[\gamma] \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/\,\mathrm{SU}(2)$ unter der kanonischen Identifikation $\mathrm{herm}_2^+(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})/\,\mathrm{U}(2) \supset \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/\,\mathrm{SU}(2)$. Für solche Bündel verschwindendet die erste Kamber-Tondeur Form $c_1(p)$.

Beweis. Die erste Aussage folgt aus Theorem 1.2.4. Für alle $[\gamma] \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/\,\mathrm{SU}(2)$ gilt:

$$\begin{aligned}(C_1(p))_{[\gamma]} &= \frac{1}{2} d \ln \det h^{\mathrm{kan}}([\gamma]) \\ &= \frac{1}{2} d \ln \det(\gamma^{-1*}\gamma^{-1}) \\ &= \frac{1}{2} d \ln \frac{1}{|\det \gamma|^2} \\ &= 0\end{aligned}$$

□

Insbesondere verschwindet auch die erste verfeinerte Kamber-Tondeur Klasse $C_1(p)$ und aus Dimensionsgründen auch $C_{2k+1}(p)$ mit $k > 1$. Für den Koeffizientenbereich $A_3 = A_3(p)$ von $C_3(p)$ gilt

$$A_3 = \left\langle \left\{ \int_{\Delta^3} \underbrace{\frac{1}{16\pi i} \mathrm{Tr} \left\{ \left[(t_0 g_0^* g_0 + \cdots + t_3 g_3^* g_3)^{-1} d(t_0 g_0^* g_0 + \cdots + t_3 g_3^* g_3) \right]^3 \right\}}_{=:(\omega_3)_{g_0 g_1 g_2 g_3}(t_0,..,t_3)} \right\}_{g_i \in G, i=0,\ldots,3} \right\rangle_{\mathbb{Z}}$$

mit den R-Metriken $h_i := g_i^* g_i$ und $t_0 + \cdots + t_3 = 1$.

Notation 3.3.4. Setze $\mathcal{B} := \mathrm{herm}_2^+(\mathbb{C}) \cong GL_2(\mathbb{C})/U(2)$ die Menge der hermiteschen Formen auf dem $\mathbb{C}^2$, also der Menge aller hermiteschen positiv definiten 2×2 Matrizen. Setze weiter $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}$ als die Menge aller hermiteschen positiv definiten 2×2-Matrizen mit Determinante 1.

Lemma 3.3.5. Es gilt

$$\mathcal{B}_0 \xrightarrow{\cong} \mathbb{H}^3 \xrightarrow{\cong} SL_2(\mathbb{C})/SU(2).$$

Beweis. Zunächst betrachte die Darstellung $\rho : \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \to Aut(\mathcal{B})$, definiert durch $g \mapsto (\rho_g : \mathcal{B} \to \mathcal{B}, B \mapsto g^{-1*}Bg^{-1})$. Definiere nun die reelle quadratische Form $q := -\det$ auf $\mathcal{B}$. Mit Hilfe der Polarisationsgleichung erhält man die zugehörige Bilinearform $< B, B' >:= 1/2(\det B + \det B' - \det(B + B'))$ und verifiziert leicht, zum Beispiel mit der kanonischen Basis

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad B_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

von $\mathcal{B}$, daß $< .,. >$ die Signatur $(3,1)$ hat. Der Hyperbolische 3-Raum ist definiert durch

$$\mathbb{H}^3 := \{x := (x_0, ..., x_3) \in \mathbb{R}^4 \mid << x, x >>= -1 \,\text{und}\, x_3 > 0\},$$

wobei $<< .,. >>$ die Lorentz-Metrik auf den $\mathbb{R}^4$ bezeichnet, deren Signatur bekanntlich ebenfalls $(3,1)$ ist. Vermöge $\varphi : \mathbb{R}^{(3,1)} := (\mathbb{R}^4, << .,. >>) \to (\mathcal{B}, < .,. >)$, $e_i \mapsto B_i$ ist ist eine Isometrie von quadratischen Räumen gegeben. Definiere $\mathcal{B}_0$ als den Pullback

$$\begin{tikzcd} \mathcal{B}_0 \arrow[r, tail] \arrow[d, dashed, "\Rightarrow \cong"'] & (\mathcal{B}, < .,. >) \arrow[d, "\cong"] \\ \mathbb{H}^3 \arrow[r, tail] & \mathbb{R}^{(3,1)} \end{tikzcd}$$

Aus den definierenden Eigenschaften von $\mathbb{H}^3$ und dem Diagramm folgt $\mathcal{B}_0 =$ die Menge aller positiv definiten hermiteschen 2×2-Matrizen mit Determinante 1. Sei nämlich $x \in \mathbb{R}^{(3,1)}$ und $B \in \mathcal{B}$ die hermitesche Metrix mit $\varphi(B) = x$. Dann gilt $-1 =<< x, x >>=<< \varphi(B), \varphi(B) >>=< B, B >= -\det B$. Damit $\det B = 1 \Leftrightarrow << x, x >>= -1$.. Ferner zeigt man mit Hilfe Hauptminorenverfahrens [Fi97] S.310 $x_3 > 0 \Leftrightarrow B$ positiv definit. Beides zusammengesetzt ergibt den ersten Isomorphismus im Lemma.

Die Einschränkung von ρ auf $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ liefert aufgrund der $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$-Invarianz von $< .,. >$ die Darstellung $\tilde{\rho} : \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow Aut(\mathcal{B}, < .,. >)$. Wegen $\tilde{\rho}_g \mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}_0$ induziert $\tilde{\rho}$ die Unterdarstellung $\tilde{\rho}_0 : \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to Aut(\mathcal{B}_0, < .,. >)$. Diese Operation ist transitiv und die Standgruppe am neutralen Element $E \in \mathcal{B}_0$ ist offensichtlich $\mathrm{SU}(2)$. Damit ist $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/SU(2) \cong \mathcal{B}_0$ und also folgt der zweite Isomorphismus. □

Bemerkung 3.3.6. Es ist $i : \mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}$ ein Deformationsretrakt, denn vermöge $r : \mathcal{B} \to \mathcal{B}_0$, $A \mapsto (\det A)^{-1/2} \cdot A$ ist eine Retraktion und $H : \mathcal{B} \times I \to \mathcal{B}$, $(A, s) \mapsto (\det A)^{-s/2} \cdot A$ mit $H_0 = \mathrm{id}_{\mathcal{B}}$ und $H_1 = i \circ r$ eine Deformationsretraktion gegeben. Insbesondere sind $\mathcal{B}_0$ und $\mathcal{B}$ homotopieäquivalent.

Vermöge

$$\omega_{3,\mathrm{hyp}} := \omega_{3|\mathcal{B}_0}$$

ist die Volumenform $\omega_{3,\mathrm{hyp}}$ auf dem hyperblischen Raum $\mathbb{H}^3$ gegeben. Bezeichnet Δ^3_{hyp} ein hyperbolisches 3-Simplex in $\mathbb{H}^3$, so ist

$$\int_{\Delta^3_{\mathrm{hyp}}} \omega_{\mathrm{hyp}} = \mathrm{Vol}(\Delta^3_{\mathrm{hyp}})$$

das Volumen des hyperbolischen 3-Simplex Δ^3_{hyp}. Nach einer Wahl von 4 Ecken $h_0, ..., h_3 \in \mathcal{B}_0$ ist Δ^3_{hyp} durch das folgende kommutative Diagramm definiert:

$$\begin{tikzcd} \Delta^3 \arrow[r, two heads, "\tilde{r} := r_{|\Delta^3}"] \arrow[d, tail, "i"'] & \Delta^3_{\mathrm{hyp}} \arrow[d, tail, "i"] \\ \mathcal{B} \arrow[r, two heads, "r"] & \mathcal{B}_0 \end{tikzcd}$$

Proposition 3.3.7. *Die beiden 3-Kozykel*

$$\left\{ \int_{\Delta^3} (\omega_3)_{g_1 \dots g_3} \right\}_{g_i \in G}, \qquad \left\{ \int_{\Delta^3_{\mathrm{hyp}}} (\omega_{3,\mathrm{hyp}})_{g_1 \dots g_3} \right\}_{g_i \in G} \tag{24}$$

in $C^3(NG, \mathbb{R}) := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}N_3G, \mathbb{R}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}N_3\bar{G} \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathbb{Z}, \mathbb{R})$ *unterscheiden sich um einen Korand.*

Beweis. Ihrer Konstruktion nach sind die beiden 3-Koketten G-invariante Kozykel in $C^3(N\bar{G},\mathbb{R})$ und daher in $C^3(NG,\mathbb{R})$. Ohne Berücksichtung der G-Invarianz sind sie Elemente in $H^3(\bar{G},\mathbb{R}) \cong H^3(EG,\mathbb{R})$. Weil die Kohomologie des einpunktigen Raumes in Graden größer 0 verschwindet, können sich die beiden Kozykel nur um Korand unterscheiden. Ein solcher ist unter Zuhilfenahme der Deformationsretraktion H aus Bem.3.3.6 durch

$$\int_{H(\Delta^2\times I)} (H^*\omega_3)_{g_0g_1g_2} \tag{25}$$

gegeben. Einerseits

$$\left(\delta \int_{H(\Delta^2\times I)} H^*\omega_3\right)_{g_0\cdots g_3} = \sum_{i=0}^{3}(-1)^i \int_{H(\Delta^2\times I)} (H^*\omega_3)_{g_0\ldots\hat{g}_i\ldots g_3},$$

und andererseits mittels Stokes

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{H(\Delta^3\times I)} d(H^*\omega_3)_{g_0\ldots g_3}\\
&= \int_{\partial H(\Delta^3\times I)} (H^*\omega_3)_{g_0\ldots g_3}\\
&= -\int_{\Delta^3}(\omega_3)_{g_0\cdots g_3} + \int_{\Delta^3_{\mathrm{hyp}}}(\omega_{3,\mathrm{hyp}})_{g_0\cdots g_3} + \sum_{i=0}^{3}(-1)^i\int_{H(\Delta^2\times I)}(H^*\omega_3)_{g_0\ldots\hat{g}_i\ldots g_3}.
\end{aligned}$$

Die letzte Gleichheit folgt so:

$$\begin{aligned}
(\bar{H}_s)_{g_0\ldots g_3} &:= \int_{H(\Delta^3,s)} (H^*\omega_3)_{g_0\ldots g_3}\\
&= \int_{H(\Delta^3,s)} \omega_3(\det(t_0h_0+\ldots+t_3h_3)^{-s/2}(t_0h_0+\ldots+t_3h_3))\\
&= \int_{H(\Delta^3,s)} \mathrm{Tr}\Big\{\Big[\det(t_0h_0+\ldots+t_3h_3)^{s/2}\cdot d\det(t_0h_0+\ldots+t_3h_3)^{-s/2}+\\
&\qquad +(t_0h_0+\ldots+t_3h_3)^{-1}d(t_0h_0+\ldots+t_3h_3)\Big]^3\Big\}.
\end{aligned}$$

Ersichtlich ist $(\bar{H}_0)_{g_0\cdots g_3} = \int_{\Delta^3}(\omega_3)_{g_0\cdots g_3}$ und $(\bar{H}_1)_{g_0\cdots g_3} = \int_{\Delta^3_{\mathrm{hyp}}}(\omega_{3,\mathrm{hyp}})_{g_0\cdots g_3}$. Aufgrund der G-Invarianz steigt obige Konstruktion nach $H^3(G,\mathbb{R})$ ab und also unterscheiden sich die beiden 3-Kozykel (24) um einen Korand, nämlich genau um den in (25). Dies zeigt schließlich die Behauptung. □

Die vorstehende Proposition läßt sich wie folgt verbessern:

Korollar 3.3.8. Die beiden Integrale (24) in der vorstehenden Proposition sind bis auf eine Konstante gleich.

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}
\int_{\Delta^3_{\text{hyp}}} (\omega_{3,\text{hyp}})_{g_0\dots g_3} &= \frac{1}{16\pi i}\int_{\Delta^3_{\text{Hyp}}} \operatorname{Tr}\Big\{\Big[\det(t_0h_0+\dots+t_3h_3)^{1/2}\cdot d\det(t_0h_0+\dots+t_3h_3)^{-1/2}+ \\
&\quad +(t_0h_0+\dots+t_3h_3)^{-1}d(t_0h_0+\dots+t_3h_3)\Big]^3\Big\} \\
&\overset{(*)}{=} \frac{1}{16\pi i}\int_{\Delta^3_{\text{Hyp}}} \operatorname{Tr}\Big\{\Big[d\ln\det(t_0h_0+\dots+t_3h_3)^{1/2} \\
&\quad +(t_0h_0+\dots+t_3h_3)^{-1}d(t_0h_0+\dots+t_3h_3)\Big]^3\Big\} \\
&= \int_{\Delta^3_{\text{Hyp}}} \frac{1}{16\pi i}\operatorname{Tr}\Big\{\big[(t_0h_0+\dots+t_3h_3)^{-1}d(t_0h_0+\dots+t_3h_3)\big]^3\Big\} \\
&= l\cdot\int_{\Delta^3}(\omega_3)_{g_0\dots g_3}
\end{aligned}$$

Die beim Ausmultiplizieren des Integranden $(*)$ entstehenden Mischterme sind aufgrund der Eigenschaften der Spur bzw. des Dachproduktes allsamt Null. Es folgt $\omega_{3,\text{Hyp}} = \omega_3$ und also unterscheiden sich die beiden Integrale um eine Konstante. $\square$

Damit ist man nun in der Situation die rechnerisch schwer zugänglichen Integrale für die Bestimmung von A_3 auf die Berechnung von Volumina hyperbolischer 3-Simplizes in $\mathbb{H}^3$ zuückführen zu können. Zusammenfassend haben wir

$$A_{3,\text{hyp}} = \left\langle\left\{\int_{\Delta^3_{\text{Hyp}}}(\omega_{3,\text{Hyp}})_{g_0\dots g_3}\right\}_{g_i\in G}\right\rangle_{\mathbb{Z}} \tag{26}$$

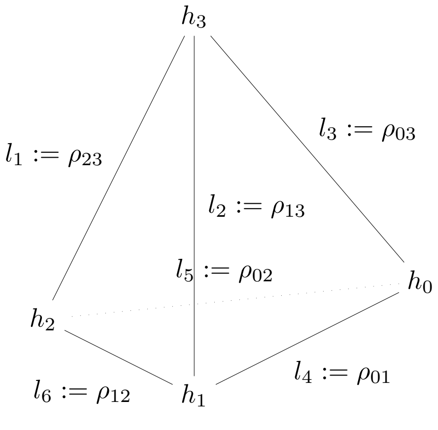
$$= \left\langle\left\{\operatorname{Vol}(\Delta^3_{\text{hyp}})_{g_0\dots g_3}\right\}_{g_i\in G}\right\rangle_{\mathbb{Z}} \tag{27}$$

$$= \left\langle\left\{l\cdot\int_{\Delta^3}(\omega_3)_{g_0\dots g_3}\right\}_{g_i\in G}\right\rangle_{\mathbb{Z}} \tag{28}$$

$$= l\cdot A_3 \tag{29}$$

mit den vier Ecken $h_i := g_i^* g_i$, $g_i \in G = SL_2(R)$, $i = 0,1,2,3$ und einer Konstanten l. Für das Volumen hyperbolischer 3-Simplizes gibt es bereits eine geschlossene Formel von Murakami und Ushijima [Mu04] Theorem 2.2 in Termen von Dilogarithmen.

Dazu:
Zu jedem 4-Tupel $g_0,\dots,g_3$ in G betrachte das hyperbolische 3-Simplex in $\mathbb{H}^3 \cong SL_2(\mathbb{C})/SU(2)$ mit den vier Ecken $h_i := g_i^* g_i$ mit $i = 0,1,2,3$:



Dabei sind die l_i's die Kantenlängen gegeben durch

$$l_1 := \rho_{23} := d(h_2, h_3) = d(e, h_2^{-1}h_3) = \ln(a_1 + \sqrt{a_1^2 - 1}) := \ln\left(\frac{\mathrm{tr}(h_2^{-1}h_3)}{2} + \sqrt{\frac{\mathrm{tr}^2(h_2^{-1}h_3)}{4} - 1}\right)$$

$$l_2 := \rho_{13} := d(h_1, h_3) = d(e, h_1^{-1}h_3) = \ln(a_2 + \sqrt{a_2^2 - 1}) := \ln\left(\frac{\mathrm{tr}(h_1^{-1}h_3)}{2} + \sqrt{\frac{\mathrm{tr}^2(h_1^{-1}h_3)}{4} - 1}\right)$$

$$l_3 := \rho_{13} := d(h_0, h_3) = d(e, h_0^{-1}h_3) = \ln(a_3 + \sqrt{a_3^2 - 1}) := \ln\left(\frac{\mathrm{tr}(h_0^{-1}h_3)}{2} + \sqrt{\frac{\mathrm{tr}^2(h_0^{-1}h_3)}{4} - 1}\right)$$

$$l_4 := \rho_{13} := d(h_0, h_1) = d(e, h_0^{-1}h_1) = \ln(a_4 + \sqrt{a_4^2 - 1}) := \ln\left(\frac{\mathrm{tr}(h_0^{-1}h_1)}{2} + \sqrt{\frac{\mathrm{tr}^2(h_0^{-1}h_1)}{4} - 1}\right)$$

$$l_5 := \rho_{13} := d(h_0, h_2) = d(e, h_0^{-1}h_2) = \ln(a_5 + \sqrt{a_5^2 - 1}) := \ln\left(\frac{\mathrm{tr}(h_0^{-1}h_2)}{2} + \sqrt{\frac{\mathrm{tr}^2(h_0^{-1}h_2)}{4} - 1}\right)$$

$$l_6 := \rho_{13} := d(h_1, h_2) = d(e, h_1^{-1}h_2) = \ln(a_6 + \sqrt{a_6^2 - 1}) := \ln\left(\frac{\mathrm{tr}(h_1^{-1}h_2)}{2} + \sqrt{\frac{\mathrm{tr}^2(h_1^{-1}h_2)}{4} - 1}\right)$$

Für komplexe Zahlen $x_1, ..., x_6, z$ definiere die komplexwertige Funktion $U = (x_1, ..., x_6, z)$ wie folgt:

$$\begin{aligned} U &:= \mathrm{Li}_2(z) + \mathrm{Li}_2(x_1x_2x_4x_5z) + \mathrm{Li}_2(x_1x_3x_4x_6z) + \mathrm{Li}_2(x_2x_3x_5x_6z) \\ &= -\mathrm{Li}_2(-x_1x_2x_3z) - \mathrm{Li}_2(-x_1x_5x_6z) - \mathrm{Li}_2(-x_2x_4x_6z) - \mathrm{Li}_2(-x_3x_4x_5z), \end{aligned}$$

wobei Li_2 der Dilogarithmus definiert durch die analytische Fortsetzung des Integrals

$$\mathrm{Li}_2(x) := -\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}dt \quad \text{für reelle Zahlen } x < 1.$$

Theorem 3.3.9. *Der Koeffizientenbereich A_3 von $C_3(p)$ lautet*

$$A_3 = 1/l \cdot \left\langle \left\{ \mathrm{Vol}(\Delta^3_{\mathrm{Hyp}})_{g_0\dots g_3} \right\}_{g_i \in G} \right\rangle_{\mathbb{Z}}$$

mit

$$\mathrm{Vol}(\Delta^3_{\mathrm{Hyp}})_{g_0\dots g_3} = V(w_4, w_5, w_6, w_1, w_2, w_3) - \sum_{i=1}^{6} l_i w_i \frac{\pi i k}{2} \ln \frac{\varphi_i(z_-)\psi_i(z_+)}{\varphi_i(z_+)\psi_i(z_-)}.$$

Dabei ist

$$V = \frac{i}{4}\left((U(w_4, w_5, w_6, w_1, w_2, w_3, z_-) - 2k_-\pi i) - (U(w_4, w_5, w_6, w_1, w_2, w_3, z_+) - 2k_+\pi i)\right),$$

mit

$$z_- = \frac{2}{q_l}\left(\sqrt{a_1^2-1}\sqrt{a_4^2-1} + \sqrt{a_2^2-1}\sqrt{a_5^2-1} + \sqrt{a_3^2-1}\sqrt{a_6^2-1} - \sqrt{\det G_l}\right)$$

$$z_+ = \frac{2}{q_l}\left(\sqrt{a_1^2-1}\sqrt{a_4^2-1} + \sqrt{a_2^2-1}\sqrt{a_5^2-1} + \sqrt{a_3^2-1}\sqrt{a_6^2-1} + \sqrt{\det G_l}\right)$$

$w_i := -a_i - \sqrt{a_i^2 - 1}$ *für* $i = 1, ..., 6$ *und* $k, k_-, k_+ \in \mathbb{Z}$

$$G_l = \begin{pmatrix} -1 & -a_4 & -a_5 & -a_3 \\ -a_4 & -1 & -a_6 & -a_2 \\ -a_5 & -a_6 & -1 & -a_1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 & -1 \end{pmatrix}$$

sowie

$$q_l \quad = \quad w_1 w_4 + w_2 w_5 + w_3 w_6 - \prod_{i=1}^{3} w_i - \prod_{i=3}^{5} w_i - w_1 w_5 w_6 - \prod_{i=1}^{3} w_{2i} + \prod_{i=1}^{6} w_i$$

$$\begin{aligned}
\varphi_1(z_j) &= (1 + z_j w_2 w_4 w_6)(1 + z_j w_3 w_4 w_6), & \psi_1(z_j) &= (1 - z_j w_1 w_2 w_4 w_5)(1 - z_j w_1 w_3 w_4 w_6) \\
\varphi_2(z_j) &= (1 + z_j w_3 w_4 w_5)(1 + z_j w_1 w_5 w_6), & \psi_2(z_j) &= (1 - z_j w_1 w_2 w_4 w_5)(1 - z_j w_2 w_3 w_5 w_6) \\
\varphi_3(z_j) &= (1 + z_j w_1 w_5 w_6)(1 + z_j w_2 w_4 w_6), & \psi_3(z_j) &= (1 - z_j w_1 w_3 w_4 w_6)(1 - z_j w_2 w_3 w_5 w_6) \\
\varphi_4(z_j) &= (1 + z_j w_1 w_2 w_3)(1 + z_j w_1 w_5 w_6), & \psi_4(z_j) &= (1 - z_j w_1 w_2 w_4 w_5)(1 - z_j w_1 w_3 w_4 w_6) \\
\varphi_5(z_j) &= (1 + z_j w_2 w_4 w_6)(1 + z_j w_1 w_2 w_3), & \psi_5(z_j) &= (1 - z_j w_1 w_2 w_4 w_5)(1 - z_j w_2 w_3 w_5 w_6) \\
\varphi_6(z_j) &= (1 + z_j w_1 w_2 w_3)(1 + z_j w_3 w_4 w_5), & \psi_6(z_j) &= (1 - z_j w_1 w_3 w_4 w_6)(1 - z_j w_2 w_3 w_5 w_6).
\end{aligned}$$

Beweis. Nach Murakami [Mu04] Thm.2.2 gilt für das Volumen eines hyperbolischen 3-Simplexes mit den Kantenlängen $l_1, ..., l_6$:

$$\mathrm{Vol}(\Delta^3_{\mathrm{hyp}}) = V_l - \sum_{i=1}^{6} li \frac{\partial V_l}{\partial li},$$

mit $V_l := V(-e^{l_4}, -e^{l_5}, -e^{l_6}, -e^{l_1}, -e^{l_2}, -e^{l_3})$. Die komplexwertige Funktion $V = V(x_1, ..., x_6)$ ist dabei definiert als

$$V = \frac{i}{4} \left\{ \left(U(x_1, ..., x_6, z_-) - z_- \left.\frac{\partial U}{\partial z}\right|_{z=z_-} \ln z_- \right) - \left(U(x_1, ..., x_6, z_+) - z_+ \left.\frac{\partial U}{\partial z}\right|_{z=z_+} \ln z_+ \right) \right\}.$$

mit

$$z_\pm = \frac{2}{q_l}(\sinh l_1 \sinh l_4 + \sinh l_2 \sinh l_5 + \sinh l_3 \sinh l_6 \pm \sqrt{\det G_l})$$

$$\begin{aligned} q_l \quad = \quad & e^{l_1+l_4} + e^{l_2+l_5} + e^{l_3+l_6} - e^{l_1+l_2+l_3} - e^{l_1+l_5+l_6} - e^{l_2+l_4+l_6} - e^{l_3+l_4+l_5} \\ & + e^{l_1+l_2+l_3+l_4+l_5+l_6} \end{aligned}$$

und der Gram-Matrix

$$G_l = \begin{pmatrix} -1 & -\cosh l_4 & -\cosh l_5 & -\cosh l_3 \\ -\cosh l_4 & -1 & -\cosh l_6 & -\cosh l_2 \\ -\cosh l_5 & -\cosh l_6 & -1 & -\cosh l_1 \\ -\cosh l_3 & -\cosh l_2 & -\cosh l_1 & -1 \end{pmatrix}$$

Die im vorstehenden Theorem angegebenen Formeln folgen zum einen aus ([Mu04] Prop.4.1)

$$z_\pm \left.\frac{\partial U}{\partial z}\right|_{z=z_\pm} \quad \equiv \quad 0 \qquad \mathrm{mod} \quad 2\pi i$$

sowie ([Mu04] Prop.4.3)

$$2\frac{\partial V_l}{\partial l_1} = \frac{i}{2} \ln \frac{\varphi_1(z_-)\psi_1(z_+)}{\varphi_1(z_+)\psi_1(z_-)} \mod 2\pi$$

und der Tatsache, daß der Abstand d zweier Punkte g, g' in $SL_2(\mathbb{C}/SU(2)) \cong \mathbb{H}^3$ gegeben ist durch

$$d(g, g') = d(e, g^{-1}g') = \ln\left(\frac{\mathrm{tr}(g^{-1}g')}{2} + \sqrt{\frac{\mathrm{tr}^2(g^{-1}g')}{4} - 1}\right)$$

(Mit anderen Worten: Murakami rechnet in

$$\mathbb{H}^3 := \{p = (p_1, ..., p_4) \in \mathbb{R}^4 \mid << p, p >>= -1 \,\mathrm{und}\, p_4 > 0\}$$

mit Abstand $\cosh(d(p,q)) = - << p, q >>$. Dabei bezeichnet $<< ., . >>$ das Lorentz-Metrik auf dem $\mathbb{R}^4$.) □

Bemerkung 3.3.10. Das Theorem besagt also, daß der Koeffizientenbereich A_3 über $\mathbb{Z}$ erzeugt wird aus Dilogarithmen, Logrithmen und Wurzeln von Elementen aus R.

A Simplizialer Formalismus

In diesem Kapitel des Anhangs erinnern wir an einige simpliziale Methoden. Ausgehend von den grundlegenden Tatsachen über simpliziale Objekte, behandeln wir im Detail jene Beispiele, wie die verschiedenen Nerv-Konstruktionen, von denen wir in der vorliegenden Arbeit ständig Gebrauch machen werden. Sodann wiederholen wir die geometrische Realisierung einer simplizialen Menge und geben grundlegende Eigenschaften hierüber an. Aus diesen Eigenschaften und der Charakterisierung universeller Bündel folgt insbesondere, daß das Bündel $EG := |N\bar{G}| \to BG := |NG|$ für diskretes G in dem selben Sinne universell ist, wie das durch die Milnor'sche Join-Konstruktion entstandene universelle Bündel. Davon ausgehend definieren im Abschnitt über kombinatorische Modelle Universalität auf rein kombinatorische Weise. Mittels dieser Methoden lassen sich geometrische Probleme o.E. kombinatorisch lösen. Aber dies wiederum macht es erforderlich Garben und deren Kohomologie auf simplizialen Räumen bzw. simplizialen Mannigfaltigkeiten zu betrachten. Hierüber stellt man beispielsweiese fest, daß die von Dupont bekannte simpliziale de Rham-Kohomologie eine garbentheoretische Beschreibung hat. Die wichtigste Anwendung der Theorie simplizialer Garben für uns liegt jedoch darin, überhaupt äquivariante glatte Deligne-Kohomologie definieren zu könnnen. Dieses Kapitel basiert vorrangig auf den Arbeiten von J.Dupont [Du76] und [Du78], G. Segal [Seg68] und [Seg74] sowie P. Deligne [D74].

A.1 Simpliziale Objekte

Sei Δ die folgende Kategorie: Die Objekte sind die endlichen total geordneten Mengen der Form $[n] := \{0, 1, ..., n\}$ mit $n \geq 0$; die Morphismen $\alpha : [n] \to [m]$ sind die ordnungserhaltenden (schwach monotonen) Abbildungen von $[n]$ nach $[m]$, d.h. für $k, l \in [n]$ mit $k \leq l$ folgt $\alpha(k) \leq \alpha(l)$. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie.

Definition A.1.1. Ein **simpliziales Objekt mit Werten in** $\mathcal{C}$ ist ein Funktor $X : \Delta^0 \to \mathcal{C}$, d.h. ein kontravarianter Funktor

$$\begin{array}{rcl} X : \Delta & \longrightarrow & \mathcal{C} \\ {[n]} & \longmapsto & X_n := X([n]) \\ \alpha : [n] \to [m] & \longmapsto & \alpha^* := X(\alpha) : X_m \to X_n. \end{array}$$

Dual dazu definiert man ein **kosimpliziales Objekt mit Werten in** $\mathcal{C}$ als einen kovarianten Funktor von Δ nach $\mathcal{C}$.

Statt von einem (ko)simplizialen Objekt mit Werten in der Kategorie $\mathcal{C}$ spricht man auch kurz von einem (ko)simplizialen Objekt in $\mathcal{C}$.

In Δ gibt es zwei ausgezeichnete Morphismen

$$\begin{array}{rclcl} d^i : [n-1] & \longrightarrow & [n], & j & \longmapsto \begin{cases} j & , j < i \\ j+1 & , i \geq j \end{cases} \\ s^i : [n+1] & \longrightarrow & [n], & j & \longmapsto \begin{cases} j & , j \leq i \\ j-1 & , i > j \end{cases} \end{array}$$

für $n \geq 1$ (bzw. $n \geq 0$) und $0 \leq i \leq n$, welche offensichtlich der Reihe nach injektiv und surjektiv sind. Anschaulich bedeutet dies

$$d^i : \begin{array}{cccccccc} \{0, & 1, & \ldots, & i-1, & i, & i+1, & \ldots, & n-1\} \\ \downarrow & \downarrow & \ldots & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \ldots & \downarrow \\ \{0, & 1, & \ldots, & i-1, & i+1, & i+2, & \ldots, & n\} \end{array}$$

bzw.

$$s^i : \begin{array}{ccccccccc} \{0, & 1, & \dots, & i-1, & i, & i+1, & \dots, & n+1\} \\ \downarrow & \downarrow & \dots & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \dots & \downarrow \\ \{0, & 1, & \dots, & i-1, & i, & i, & \dots, & n\}. \end{array}$$

Die Pfeile d_i nennt man *Korand*, die s_i's *Koentartung*. Jeder Morphismus in Δ läßt sich in eindeutiger Weise schreiben als Komposition von Koentartungen und Korändern. Genauer gilt:

Bemerkung A.1.2. Jeder Morphimus $\alpha : [n] \to [m])$ in Δ faktorisiert sich eindeutig in $\alpha = ds$ einem Epimorphismus s und einem Monomorphismus d. Dabei ist

$$\begin{array}{ll} s = s^{i_1} \cdots s^{i_k} & 0 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n, \\ d = d^{j_1} \cdots d^{j_l} & 0 \leq j_l < \cdots j_1 < j_1 \leq m \end{array}$$

mit eindeutig bestimmten $i_1, ..., i_k, j_1, ..., j_l, k, l$ in $\mathbb{N}$ und $m = n - k + l$. Insbesondere hat jeder Monomorphismus (bzw. Epimorphismus) in Δ eine eindeutige Zerlegung in Koränder (bzw. Koentartungen).

Ein (ko)simpliziales Objekt X ist also vollständig bestimmt, wenn man weiß, wohin die Objekte, Koränder und Koentartungen von Δ in $\mathcal{C}$ abgebildet werden. Im simplizialen Fall nennt man die Bilder der Koränder $\varepsilon_i := X(d^i : [n-1] \to [n]) : X_n \to X_{n-1}$ in $\mathcal{C}$ **Randmorphismen** von X und die der Koentartungen $\eta_i := X(s^i : [n+1] \to [n]) : X_n \to X_{n+1}$ **Entartungsmorphismen** von X. Da Δ ersichtlich klein ist, so ist ein simpliziales Objekt X in $\mathcal{C}$ nichts anderes als ein Diagramm der Form

$$X : \qquad \cdots \quad X_2 \underset{\eta_i}{\overset{\varepsilon_i}{\rightleftarrows}} X_1 \underset{\eta_0}{\overset{\varepsilon_i}{\rightleftarrows}} X_0$$

über Δ. Im kosimplizialen Fall spricht man von **Korandmorphismen** $\varepsilon^i := X(d^i)$ bzw. **Koentartungsmorphismen** $\eta^i := X(s^i)$ von X. Ein **Morphismus** $f : X \to Y$ von (ko)simplizialen Objekten in $\mathcal{C}$ ist eine natürliche Transformation der Funktoren X und Y. Alsdann ist die Kategorie $\Delta^0\mathcal{C}$ der simplizialen Objekte bzw. $\Delta\mathcal{C}$ der kosimplilzialen Objekte in $\mathcal{C}$ erklärt.

Sprechweise A.1.3. Ein simpliziales Objekt in der Kategorie

- $Sets$ der Mengen heißt eine simpliziale Menge. Man nennt X_n die *Menge der n-Simplizes.*
- Top der topologischen Räume heißt *simplizialer Raum.*
- $\mathcal{A}b$ der abelschen Gruppen heißt *simpliziale abelsche Gruppe.*
- $G - Sets$ der G-Mengen heißt simpliziale G-Menge.
- $Difftop$ der differenzierbaren Mannigfaltigkeiten heißt *simpliziale Mannigfaltigkeit.*

Beispiel A.1.4. *i)* (*Konstante (ko)simpliziale Objekte*)
Sei X ein Objekt in einer Kategorie $\mathcal{C}$. Ein (ko)simpliziales Objekt X in $\mathcal{C}$ heißt *konstant* oder *trivial*, falls $X_n = X$ für jedes $n \geq 0$ und die Rand- und Entartungsmorphismen sämtlich Identitäten sind.

iii)(*Ein Funktor* $\Delta^0 Set \to \Delta^0\mathcal{A}b$)
Jeder simplizialen Menge $X \in \Delta^0 Set$ läßt sich in funktorieller Weise eine simpliziale abelsche Gruppe $\mathbb{Z}X$ wie folgt zuordnen:

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{Z}X : \Delta & \longmapsto & \mathcal{A}b & \\ [p] & \longmapsto & \mathbb{Z}X_p := < X_p >_{\mathbb{Z}} := \text{die von } X_p \text{ erzeugte frei-abelsche Gruppe} & \\ d^i : [p-1] \to [p] & \longmapsto & \varepsilon_i : \mathbb{Z}X_p \to \mathbb{Z}X_{p-1} & p \geq 1 \\ s^i : [p+1] \to [p] & \longmapsto & \eta_i : \mathbb{Z}X_p \to \mathbb{Z}X_{p+1} & p \geq 0, \end{array}$$

mit $0 \leq i \leq p$. Dabei werden die Rand -und Entartungsmorphismen durch die universelle Eigenschaft der frei- abelschen Gruppen induziert. Für die Definition der Rand- und Entartungsmorphismen reicht es bekanntlich aus, sie auf den Erzeugenden, also auf den X_p's zu kennen. Ist $\varphi : X \to Y$ ein Morphismus simplizialer Mengen, so erhält man in naheliegender Weise einen Morphismus $\mathbb{Z}\varphi : \mathbb{Z}X \to \mathbb{Z}Y$ in $\Delta^0\mathcal{A}b$. Damit hat man schließlich den wohlbekannten Funktor "frei-abelsch" ereugen $Sets \to \mathcal{A}b$ auf den simplizialen Kategorien $\Delta^0 Set \to \Delta^0\mathcal{A}b$ in kanonischer Weise fortgesetzt.

iv) (*Der Standard-kosimpliziale Raum*)
Das Standard p-Simplex im $\mathbb{R}^{p+1}$ ist definiert als

$$\Delta^p := \left\{ (t_0, .., t_p) = \sum_{i=0}^{p} t_i e_i \in \mathbb{R}^{p+1} \mid \sum_{i=0}^{p} t_i = 1,\, t_i \geq 0 \quad \text{für} \quad i = 0, ..., p \right\},$$

versehen mit der Teilraumtopologie des $\mathbb{R}^{p+1}$. Es gibt einen kanonischen Funktor

$$\begin{array}{rcl} |\Delta| : \Delta & \longrightarrow & Top \\ [p] & \longmapsto & \Delta^p \\ \alpha : [p] \to [q] & \longmapsto & \begin{array}{rcl} \alpha_* : \Delta^p & \to & \Delta^q \\ (t_0, ..., t_p) & \mapsto & (s_0, ..., s_q) := \sum_{i=0}^{p} t_i e_{\alpha(i)} \end{array} \end{array}$$

genannt der *Standard-kosimpliziale Raum* $|\Delta|$. Für nicht surjektives α setzt man jene s_j in dem q-Tupel $(s_0, ..., s_q)$ in Δ^q mit $j \notin \alpha([p])$ zu Null. Die Korand- und Koentartungsabbildungen haben also die Gestalt:

$$\begin{array}{rclcl} \varepsilon^i : \Delta^{p-1} & \longrightarrow & \Delta^p, & (t_0, ..., t_{p-1}) & \longmapsto & (t_0, ..., t_{i-1}, 0, t_i, ..., t_{p-1}) \\ \eta^i : \Delta^{p+1} & \longrightarrow & \Delta^p, & (t_0, ..., t_{p+1}) & \longmapsto & (t_0, ..., t_{i-1}, t_i + t_{i+1}, ..., t_{p+1}) \end{array}$$

vi) (*Der Nerv einer kleinen Kategorie*)
Sei $\mathcal{C}$ eine kleine Kategorie. Der **Nerv** $N\mathcal{C}$ **von** $\mathcal{C}$ ist die folgende simpliziale Menge: Für jedes $n \geq 0$ definiert man die Menge der n-Simplizes von $N\mathcal{C}$ als

$$N_n\mathcal{C} := \underline{\mathrm{Hom}}([n], \mathcal{C}),$$

d.h. die Menge der Sequenzen von Morphismen

$$X_0 \xrightarrow{f_1} X_1 \xrightarrow{f_2} X_2 \xrightarrow{f_3} \dots \xrightarrow{f_n} X_n$$

in $\mathcal{C}$ der Länge n. Dabei ist $\underline{\mathrm{Hom}}([n], \mathcal{C})$ Kategorie der Funktoren von $[n]$[5] nach $\mathcal{C}$. Ist $X_0 \to \dots \to X_n$ ein n-Simplex in $N_n\mathcal{C}$, so erkärt man für $0 \leq i \leq n$

- die Randabbildung ε_i als das durch Weglassen von X_i entstehende $(n-1)$-Simplex, d.h.

$$\varepsilon_i(X_0 \to X_1 \to \dots \to X_n) := X_0 \to X_1 \to \dots X_{i-1} \xrightarrow{f_{i+1} \circ f_i} X_{i+1} \to \dots \to X_n.$$

- die Entartungsabbildung η_i als das durch Verdoppeln von X_i (also Einfügen der Identität $id : X_i \to X_i$) entstehende $(n+1)$-Simplex, d.h.

$$\eta_i(X_0 \to \dots \to X_n) := X_0 \to \dots \to X_i \xrightarrow{\mathrm{id}} X_i \to X_{i+1} \to \dots \to X_n.$$

[5]aufgefaßt in naheliegender Weise als Kategorie;

Damit ist die simpliziale Menge $N\mathcal{C}$ erklärt. Insbesondere erhält man aus dieser Nervkonstruktion die Kategorie $\mathcal{C}$ zurück, nämlich durch $Ob(\mathcal{C}) = N_0\mathcal{C}$ und $Mor(\mathcal{C}) = N_1\mathcal{C}$. Die Forderung, daß die Kategorie $\mathcal{C}$ klein ist, ist mithin auch unmittelbar klar: die Morphismen (und damit die Objekte) einer beliebigen Kategorie sind i.A. keine Mengen. Ein Funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ zwischen kleinen Kategorien induziert einen Morphismus simplizialer Mengen $N(F) : N\mathcal{C} \to N\mathcal{C}'$ in naheliegender Weise:

$$\begin{array}{rcl} N_p(F) : N_p\mathcal{C} & \longrightarrow & N_p\mathcal{C}' \\ f : [n] \to \mathcal{C} & \longmapsto & N_n(F)(f) := F \circ f \end{array}$$

Damit erhält man schließlich den *Nerv-Funktor* $N : cat \to \Delta^0 Sets$ von der Kategorie der kleinen Kategorien cat in die Kategorie der simplizialen Mengen $\Delta^0 Sets$ vermöge $\mathcal{C} \mapsto N\mathcal{C}$ und $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}' \mapsto N(F) : N\mathcal{C} \to N\mathcal{C}'$.

Die vorstehende Konstruktion läßt sich auch auf simpliziale Räume erweitern, wenn man den Begriff der topologischen Kategorie zur Hand hat. Dies kann man in den vorzüglichen Arbeiten von G.Segal [Seg68] §2 und J.Dupont [Du78] ch.5 nachlesen.

Hier reihen sich drei für diese Arbeit wichtige Beispiele ein:

1. (*Der Nerv einer Gruppe I*)
   Sei G eine Gruppe (in diskreter Topologie). Definiere die folgende (ersichtlich) kleine Kategorie $\bar{G}$: $Ob(\bar{G}) := G$ und $Mor(\bar{G}) := G \times G$. Der Nerv von $\bar{G}$ ist also die simpliziale Menge $N\bar{G} : \Delta \to Sets$ definiert durch $[p] \mapsto N_p\bar{G} := G^{p+1}$ und für $\alpha : [m] \to [n]$ ist $\alpha^* := N\bar{G}(\alpha) : N\bar{G}(n) \to N\bar{G}(m)$, $(g_0, ..., g_n) \mapsto (g_{\alpha(0)}, ..., g_{\alpha(m)})$ oder in Termen von Rand- und Entartungsabbildungen

$$\begin{array}{rclcl} \varepsilon_i : N_p\bar{G} & \to & N_{p-1}\bar{G} & (g_0, ..., g_p) & \mapsto & (g_0, ..., g_{i-1}, g_{i+1}, ..., g_p) \\ \eta_i : N_p\bar{G} & \to & N_{p+1}\bar{G} & (g_0, ..., g_p) & \mapsto & (g_0, ..., g_{i-1}, g_i, g_i, g_{i+1} ..., g_p) \end{array}$$

2. (*Der Nerv einer Gruppe II*)
   Sei wiederum G eine Gruppe wie oben. Betrachte die Kategorie G, deren Objekte aus genau einem Punkt, der mit $*$ bezeichnet sei, besteht und deren Morphismenmenge $Mor(G) = \mathrm{Hom}_G(*, *)$ gerade die Gruppe G selbst ist. Der Nerv NG von G ist die simpliziale Menge $\Delta \to Sets$ gegeben durch $[p] \mapsto N_pG := G^p$ mit den Rand - und Entartungsabbildungen

$$\begin{array}{rclcll} \varepsilon_i : N_pG & \to & N_{p-1}G & (g_1, ..., g_p) & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} (g_2, ..., g_p) & i = 0 \\ (g_1, ..., g_i g_{i+1}, ... g_p) & i = 1, ..., p-1 \\ (g_1, ..., g_{p-1} & i = p \end{array} \right. \\ \eta_i : N_pG & \to & N_{p+1}G & (g_1, ..., g_p) & \mapsto & (g_1, ..., g_{i-1}, 1, g_i, ..., g_p) \end{array}$$

3. (*Der Nerv einer Überdeckung*)
   Sei X eine Mannigfaltigkeit und $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X. Zu $\mathcal{U}$ betrachte die folgende kleine Kategorie $X_\mathcal{U}$, deren Objekte Paare (p, U_i) mit $p \in U_i$. Ist (p', U_j) ein weiteres Paar mit $p' \in U_j$, so setzt man

$$\mathrm{Hom}_{X_\mathcal{U}}((p, U_i), (p', U_j)) := \left\{ \begin{array}{cl} U_{ij} & , p = p' \in U_{ij} \\ \emptyset & , \text{sonst}, \end{array} \right.$$

   d.h. also $Ob(X_\mathcal{U}) = \coprod_{i \in I} U_i$ mit $U_i \neq \emptyset$ und $Mor(X_\mathcal{U}) = \coprod_{i,j} U_{ij}$ wobei $U_{ij} \neq \emptyset$ für alle $i, j \in I$. Der Nerv von $\mathcal{U}$ ist die simpliziale Mannigfaltigkeit $NX_\mathcal{U} : \Delta \to Difftop$ definiert durch

$$N_pX_\mathcal{U} := \coprod_{i_0 < ... < i_p} U_{i_0 ... i_p} \quad \text{mit} \quad U_{i_0 ... i_p} \neq \emptyset$$

mit den Rand -und Entartungsmorphismen

$$\begin{array}{rclcl} \varepsilon_j : N_pX_{\mathcal{U}} & \to & N_{p-1}X_{\mathcal{U}} & U_{i_0\dots i_p} & \mapsto & U_{i_0\dots i_{j-1}i_{j+1}\dots i_p} \\ \eta_j : N_pX_{\mathcal{U}} & \to & N_{p+1}X_{\mathcal{U}} & U_{i_0\dots i_p} & \mapsto & U_{i_0\dots i_j i_j\dots i_p}. \end{array}$$

Offensichtlich ist $NX_{\mathcal{U}}$ eine simpliziale Mannigfaltigkeit, denn $N_pX_{\mathcal{U}}$ ist für alle $p \geq 0$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und die Rand-und Entartungabbildungen sind differenzierbare Abbildungen.

Die beiden Nervkonstruktionen einer Gruppe G im Beispiel A.1.4 1. und 2. sind nicht unabhängig voneinander. Man gewinnt 2. aus 1. wie folgt: Es gibt einen kanonischen Funktor $\gamma : \bar{G} \to G$, welcher jedem Objekt g in $\bar{G}$ das einzige Objekt $*$ in G zuordnet und jedem Morphismus (g_0, g_1) in $\bar{G}$ den Morphismus $g_0g_1^{-1}$ in G. Dieser Funktor setzt sich zu einem Funktor, welcher wieder mit γ bezeichnet sei, auf den Nerven $\gamma : N\bar{G} \to NG$ vermöge $N_p\bar{G} \ni (g_0, ..., g_p) \mapsto (g_0g_1^{-1}, g_1g_2^{-1}, ..., g_{p-1}g_p^{-1}) \in N_{p-1}\bar{G}$ fort. Andererseits hat man ein freie Rechtsaktion von G auf $N\bar{G}$, nämlich komponentenweise $N_p\bar{G} \times G \to N_p\bar{G}$ vermöge $(g_0, ..., g_p, g) \mapsto (g_0g, ..., g_pg)$ für jedes $p \geq 0$, so daß damit $N\bar{G}$ die Struktur einer simplizialen G-Menge trägt. Der Morphismus γ ist verträglich mit der G-Aktion in folgendem Sinne: Zwei Punkte x, x' auf derselben Bahn in $\bar{G}$ werden durch γ auf dasselbe Element in NG abgebildet. Dadurch ist $\bar{\gamma} : N\bar{G}/G \to NG$ wohldefiniert und offenbar auch

$$\bar{\gamma} : N\bar{G}/G \xrightarrow{\cong} NG$$

ein Isomorphismus simplizialer Mengen. Die Rand- und Entartungsoperatoren in NG sind dabei so definiert, daß

$$\begin{tikzcd} N_p\bar{G} \arrow[r, "\varepsilon_i"] \arrow[d, "\gamma_p"'] & N_{p-1}\bar{G} \arrow[d, "\gamma_p"] \\ N_pG \arrow[r, dashed, "\varepsilon_i"] & N_{p-1}G \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} N_p\bar{G} \arrow[r, "\eta_i"] \arrow[d, "\gamma_p"'] & N_{p+1}\bar{G} \arrow[d, "\gamma_p"] \\ N_pG \arrow[r, dashed, "\eta_i"] & N_{p+1}G \end{tikzcd}$$

via γ kommutieren.

A.2 Der Realisierungsfunktor

Sei X ein simpliziale Menge. Dann definiert man die **geometrische Realisierung** oder **Milnor-Realisierung** als

$$|X| := \coprod_{n \geq 0} X_n \times \Delta^n / \sim,$$

mit $X_n \times \Delta^n \ni (x, t) \sim (x', t') \in X_m \times \Delta^m \Leftrightarrow \exists_{\alpha:[n]\to[m]} : (\alpha^*x, t) = (x', \alpha_*t)$ oder via Rand-und Entartungsabbildungen mit der durch

$$\begin{array}{rcllll} (\varepsilon^i t, x) & \sim & (t, \varepsilon_i(x)), & t \in \Delta^{p-1}, x \in X_p, & i = 0, ..., p, & n = 1, 2, ... \\ (\eta^i t, x) & \sim & (t, \eta_i(x)), & t \in \Delta^{p+1}, x \in X_p, & i = 0, ..., p, & n = 0, 1, 2, ... \end{array}$$

erzeugten Äquivalenzrelation. Dabei wurde X_n mit der diskreten Topologie versehen.

Jeder Punkt (Klasse) $\overline{(x, t)}$ in $|X|$ wird repräsentiert durch das Paar $(x, t) \in X_n \times \Delta^n$ mit minimalem n. Ist nun $f : X \to X'$ eine Morphismus simplizialer Mengen und $(x, t) \in X_p \times \Delta^p$ ein solcher Repräsentant in $|X|$, so ist durch $|f| : |X| \to |X'|$, $\overline{(x, t)} \mapsto \overline{(f(x), t)}$ eine mit Rand- und Entartungsabbildungen verträgliche stetige Abbildung auf den Realisierungen gegeben. Dies folgt sofort aus der Definition der Äquivalenzrelation mit deren Hilfe man die Kommutativität des folgenden Diagramms

$$\begin{tikzcd} X_p \times \Delta^p \arrow[r, "\varepsilon_i \times id"] \arrow[d, "f \times id"'] & X_{p-1} \times \Delta^p \arrow[d, "f \times id"] \\ X'_p \times \Delta^p \arrow[r, "\varepsilon_i \times id"] & X'_{p-1} \times \Delta^p \end{tikzcd}$$

nachrechnet. Damit erhält man die geometrische Realisierung in Gestalt des Funktors

$$\begin{array}{rcl} |\,.\,| : \Delta^0 Sets & \longrightarrow & Top \\ X & \longmapsto & |X| \\ f : X \to X' & \longmapsto & f_* : |X| \to |X'| \end{array}$$

von der Kategorie der simplizialen Mengen in die Kategorie der topologischen Räume.

Notiz A.2.1. Ist X ein simplizialer Raum, so definiert man seine geometrische Realisierung in naheliegender Weise.

Sprechweise A.2.2. Die Milnor-Realisierung $|N\mathcal{C}|$ des Nerven einer kleinen Kategorie $\mathcal{C}$ nennt man den *klassifizierenden Raum von* $\mathcal{C}$ und schreibt dafür

$$B\mathcal{C} := |N\mathcal{C}|.$$

Insbesondere $EG := |N\bar{G}|$ und $BG := |NG|$.

Satz A.2.3. *1. Die geometrische Realisierung einer simplizialen Menge X ist ein CW-Komplex, dessen n-Zellen eineindeutig den nicht entarteten Simplizes von X entsprechen. Dabei heißt ein Simplex x* entartet, *wenn es im Bild eines der Entartungsabbildungen liegt.*

2. Für EG gilt zudem, daß er zusammenziehbar ist.

3. Es ist $\gamma : EG \to BG$ ein flaches G-Prinzipalbündel, also die universelle Überlagerung von BG mit Decktransformationsgruppe G.

4. Der klassifizierende Raum BG ist zudem ein Eilenberg-MacLane-Raum vom Typ $(G, 1)$. Dieser ist eindeutig bis auf Homotopie.

5. Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $\mathcal{U} := (U_i)_{\in I}$ eine numerierbare Überdeckung von X (z.B. gut, d.h. endliche Durchschnitte der U_i's sind zusammenziehbar), dann ist die geometrische Realisierung des Nerves von $\mathcal{U}$ homotopieäquaivalent zu X (als topologischer Raum), also

$$|NX_{\mathcal{U}}| \simeq X$$

Beweis. zu 1: vgl. [GJ99] Prop.I.2.3.
zu 4: Dies folgt aus 2 und 3, denn hat ein topologischer Raum X eine zusammenziehbare universelle Überlagerung, so ist X ein Eilenberg-MacLane Raum vom Typ $(G, 1)$, wobei G die Decktransformationsgruppe ist.
zu 2 und 5: vgl.[Seg68] Prop.4.1
zu 3: Aus den funktoriellen Eigenschaften der geometrischen Realisierung erhält man eine stetige Abbildung $\gamma := |\gamma| : EG \to BG$. Die freie Rechtsaktion von G auf $N\bar{G}$ induziert eine freie Rechtsaktion auf EG. Ferner ist $|N\bar{G}/G| \cong |N\bar{G}|/G$, also $EG/G \cong BG$. Da CW-Komplexe lokal zusammenziehbar sind, ist $EG \to BG$ lokal trivial, also schließlich ein G-Prinzipalbündel.

Andere Methode: Wende das folgende allgemeinere Resultat auf EG an: □

Lemma A.2.4. Sei G eine (diskrete) Gruppe und X eine simpliziale freie G-Menge, also eine G-Menge mit freier Operation auf jedem X_p für $p \geq 0$. Dann ist die geometrische Realisierung $|X| \to |X/G|$ der kanonischen Projektion eine Überlagerung mit Decktransformationsgruppe G.

Bezeichne das universelle Bündel einer Gruppe G in diskreter Topologie, welches aus der Milnor-Konstruktion entsteht für einen Augenblick mit $p : E^M G \to B^M G$. Dann folgt mittels Theorem 1.1.8

Korollar A.2.5. Sei G eine diskrete Gruppe. Dann ist das auf simpliziale Weise konstruierte Bündel $\gamma : EG \to BG$ universell und damit homotopieäquivalent zum "Milnor-Bündel" $p : E^M G \to B^M G$.

Das Korollar sagt also, daß $\gamma : EG \to BG$ in demselben Sinne universell ist wie das "Milnor-Bündel" $E^M G \to B^M G$ zur Gruppe G. Gleichwohl bietet die simpliziale Konstruktion den Vorteil einer rein kombinatorischen Beschreibung. Zur Erinnerung: Ein G-Prinzipalbündel $E \to B$ heißt universell, wenn es zu jedem anderen G-Prinzipalbündel eine bis auf Homotopie eindeutige Bündelabbildung nach $E \to B$ gibt. Hieraus folgt, daß je zwei universelle G-Bündel homotopieäquivalent sind.

A.3 Kombinatorische Modelle

Das nächsten Ziel ist Universalität von $\gamma : EG \to BG$ kombinatorisch zu fassen, also gewissermaßen zu einem G-Prinzipalbündel $\pi : P \to X$ eine "kombinatorische" Version des folgenden kommutativen Diagramms:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\bar{\varphi}"] \arrow[d, "\pi"'] & {|N\bar{G}| = EG} \arrow[d, "\gamma"] \\ X \arrow[r, "\varphi"'] & {|NG| = BG} \end{tikzcd}$$

Dies geht wie folgt:

Definition A.3.1. Ein Morphismus $\pi : P \to X$ simplizialer Mannigfaltigkeiten heißt **simpliziales G-Prinzipalbündel**, wenn für jedes $p \geq 0$ die Abbildung $\pi_p : P_p \to X_p$ ein G-Prinzipalbündel ist und die Rechtsmultiplikation $R_g : P \to P$ für alle $g \in G$ simplizial ist. In naheliegender Weise definiert man auch Morphismen simplizialer G-Bündel und erhält so die Kategorie $\Delta^0 \mathscr{P}_G$ der simplizialen G-Bündel.

Zu jedem G-Prinzipalbündel $\pi : P \to X$ und jeder offenen Überdeckung $\mathcal{U} := (U_i)_{i \in I}$ von X liefert die Nerv-Konstruktion von $\mathcal{U}$ ein simpliziales G-Prinzipalbündel $\pi_{\mathcal{U}} : NP_{\mathcal{V}} \to NX_{\mathcal{U}}$ mit der offenen Übedeckung $\mathcal{V} := (V_i)_{i \in I}$ wobei man $V_i := \pi^{-1}(U_i)$ setzt.

Sprechweise A.3.2. *i)* Sei X ein topologischer Raum. Ein simplizialer Raum $S : \Delta^0 \to Top$ mit $|S| \to X$ heißt *kombinatorisches Modell von X*, wenn $|S| \to X$ eine Homoptopieäquivalenz ist.

ii) Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung topologischer Räume. Ein Morphismus simplizialer Räume $\varphi : S \to T$ mit

$$\begin{tikzcd} {|S|} \arrow[r, "\bar{\alpha}"] \arrow[d, "|\varphi|"'] & X \arrow[d, "f"] \\ {|T|} \arrow[r, "\alpha"'] & Y \end{tikzcd}$$

heißt ein *kombinatorisches Modell von $f : X \to Y$*, wenn $|\varphi|$ homotopieäquivalent zu f ist, d.h. genauer $(\bar{\alpha}, \alpha)$ ist eine Homotopieäquivalenz zwischen $|\varphi|$ und f. Entsprechend definiert man kombinatorische Modelle von kommutativen Diagrammen usw. ...

Beispiel A.3.3. *i*) Der Morphismus $\gamma : N\bar{G} \to NG$ von simplizialen Mengen ist ein kombinatorisches Modell des universellen Bündels $\gamma : EG := |N\bar{G}| \to BG := NG$ der diskreten Gruppe G.

ii) Das simpliziale G-Prinzipalbündel $\pi_{\mathcal{U}} : NP_{\mathcal{V}} \to NX_{\mathcal{U}}$ ist ein kombinatorisches Modell des G-Prinzipalbündels $\pi : P \to X$ für numerierbares $\mathcal{U}$.

iii) Entsprechend ist das simpliziale hermitesche R-Bündel $\pi_{\mathcal{U}} : (NF_{\mathcal{V}}, h_{\mathcal{U}}) \to NX_{\mathcal{U}}$ ein kombinatorisches Modell des hermiteschen R-Bündels $\pi : (F, h) \to X$, wobei die simpliziale hermitesche Metrik $h_{\mathcal{U}}$ durch Einschränkung von h gegeben ist.

iv) Das simpliziale hermitesche R-Bündel

$$p : (N\bar{G} \times_G (G_{\mathbb{C}}/K \times \mathbb{C}^n), h^{\text{kan}}) \to N\bar{G} \times_G G_{\mathbb{C}}/K$$

ist ein kombinatorisches Modell des universellen hermiteschen R-Bündels

$$p : (EG \times_G (G_{\mathbb{C}}/K \times \mathbb{C}^n), h^{\text{kan}}) \to EG \times_G G_{\mathbb{C}}/K,$$

konstruiert in Theorem 1.2.4, denn $|N\bar{G} \times_G G_{\mathbb{C}}/K| \cong EG \times_G G_{\mathbb{C}}/K$. Dabei wird der symmetrische Raum $G_{\mathbb{C}}/K$ als triviale simpliziale Mannigfaltigkeit betrachtet. Da die kanonische Metrik h^{kan} auf dem unviversellen Bündel nicht von Elementen aus EG abhängt, lebt sie auch auf dem kombinatorischen Modell.

Satz A.3.4. *Sei $\pi : P \to X$ ein flaches differenzierbares G-Bündel. Zu den Daten einer Trivialisierung von P, welche durch eine offene Überdeckung $\mathcal{U} := (U_i)_{i\in I}$ von X und Diffeomorphismen $e := (e_i : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times G)_{i\in I}$ gegeben ist, gibt es eine kanonische simpliziale Abbildung von dem simplizialen G-Prinzipalbündel $NP_{\mathcal{V}} \to NX_{\mathcal{U}}$ nach $\gamma : N\bar{G} \to NG$, also ein kommutatives Diagramm:*

$$\begin{tikzcd}
NP_{\mathcal{V}} \arrow[r, "\varphi^e_{\mathcal{V}}"] \arrow[d, "\pi"'] & N\bar{G} \arrow[d, "\gamma"] \\
NX_{\mathcal{U}} \arrow[r, "\varphi^e_{\mathcal{U}}"'] & NG
\end{tikzcd}$$

Insbesondere ist dies ein kombinatorisches Modell von $(P \to X) \longrightarrow (EG \to BG)$.

Beweis. Es gibt einen Funktor $\varphi^e_{\mathcal{U}} : X_{\mathcal{U}} \longrightarrow G$, der ein Objekt U_i in $X_{\mathcal{U}}$ auf das einzige Objekt $*$ in G und einen Morphismus U_{ij} auf die durch e_i und e_j bestimmte konstante Übergangsfunktion g_{ij} abbildet. Die Funktoreigenschaften sind dabei Aufgrund der Kozykel-Eigenschaft der g_{ij}'s erfüllt. Durch $V_i := \pi^{-1}(U_i)$ ist eine offene Überdeckung $\mathcal{V} := (V_i)_{i\in I}$ von P und damit die Kategorie $P_{\mathcal{V}}$ erklärt. Andererseits induziert die Trivialisierung von $E \to X$ einen Funktor $\varphi^e_{\mathcal{V}} : P_{\mathcal{V}} \longrightarrow \bar{G}$, der jedem Objekt V_i in $P_{\mathcal{V}}$ via der Komposition

$$p_2 \circ e_i : V_i \xrightarrow{\cong} U_i \times G \to G$$

das Objekt $(p_2 \circ e_i)$ in $G = Ob(\bar{G})$ und jedem Morphismus V_{ij} den Morphismus (p_2e_i, p_2e_j) in $G \times G = Mor(\bar{G})$ zuordnet. Dabei ist p_2 die kanonische Projektion auf den zweiten Faktor. Man erhält insgesamt ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
P_{\mathcal{V}} \arrow[r, "\varphi^e_{\mathcal{V}}"] \arrow[d, "\pi"'] & \bar{G} \arrow[d, "\gamma"] \\
X_{\mathcal{U}} \arrow[r, "\varphi^e_{\mathcal{U}}"'] & G
\end{tikzcd}$$

von Funktoren, wobei $\pi : P_{\mathcal{V}} \to X_{\mathcal{U}}$ die kanonische Projektion auf den ersten Faktor ist, d.h. ein Objekt $(y, V_i) \cong U_i \times G$ wird via e_i auf U_i abgebildet; analaog die Morphismen. Anwendung des Nerv-Funktors liefert schließlich die Behauptung. Man kann die Abbildungen auch explizit hinschreiben[6], nämlich wie folgt:

$$\begin{tikzcd} \coprod_{i_0,\dots,i_p} V_{i_0\dots i_p} \arrow[r, "\varphi^e_{\mathcal{V}}"] \arrow[d, "\pi"'] & G^{p+1} \arrow[d, "\gamma_p"] \\ \coprod_{i_0,\dots,i_p} U_{i_0\dots i_p} \arrow[r, "\varphi^e_{\mathcal{U}}"] & G^p \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} y \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & (1, g_{i_1 i_0}, \dots, g_{i_p i_0}) \arrow[d, mapsto] \\ x \arrow[r, mapsto] & (g_{i_1 i_0}, \dots, g_{i_p i_{p-1}}) \end{tikzcd}$$

und beachte $(p_2 e_{i_0}, \dots, p_2 e_{i_p}) = (1, g_{i_1 i_0}, \dots, g_{i_p i_0}) p_2 e_{i_0}$ mit den Übergangsfunktionen $g_{i_j i_k} = e_{i_k} e_{i_j}^{-1}$. □

Bemerkung A.3.5. Ein Objekt in $X_{\mathcal{U}}$ ist ein Paar (x, U_i) mit $x \in U_i$ und auch zu einem Morphismus U_{ij} gehört stets ein Punkt $x \in U_{ij}$ zu den Daten. Das man sich aber im obigen Beweis um die Punkte in U_i bzw. im Schnitt U_{ij} nicht kümmern braucht, liegt daran, daß das Bündel flach ist und damit die Strukturgruppe G diskret oder nach Theorem 1.1.6 äquivalent, daß die Übergangsfunktionen konstant sind.

Was passiert, wenn man eine andere Trivialisierung von $P \to X$ wählt ? Dazu betrachte zunächst das folgende

Lemma A.3.6. Sind $F_0, F_1 : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ zwei Funktoren zwischen kleinen Kategorien und gibt es eine natürliche Transformation $F : F_0 \to F_1$, so sind die induzierten Abbildungen auf den Realiserungen $BF_0, BF_1 : B\mathcal{C} = |N\mathcal{C}| \to B\mathcal{D} = |N\mathcal{D}|$ homotop.

Beweis. Die Vorgabe zweier Funktoren $F_0, F_1 : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ und einer natürlichen Transformation $F : F_1 \to F_2$ ist äquivalent zur Vorgabe des Funktors $H : \mathcal{C} \times [1] \to \mathcal{D}$, welcher definiert ist durch

$$H(A, 0) := F_0(A) \quad H(A, 1) := F_1(A) \quad H(A, 0 \to 1) := F(A) : F_0(A) \to F_1(A)$$

für jedes Objekt A in $\mathcal{C}$. Dabei ist $[1]$ die Kategorie, bestehend aus den beiden Elementen $0, 1$ und dem nichtidentischen Morphismus $0 \to 1$. Da die Realisierung $B[1] = [0, 1] = I$ gerade das Einheitsintervall ist und $B(\mathcal{C} \times [1]) \cong B\mathcal{C} \times B[1] = B\mathcal{C} \times I$, ist $BF : B\mathcal{C} \times I \to \mathcal{D}$ die gesuchte Homotopie von BF_0 nach BF_1. (Beachte I ist lokal-kompakt, $B\mathcal{C}$ ist als Realisierung einer simplizialen Menge ein CW-Komplex, also insbesondere ein k-Raum. Folglich ist $B(\mathcal{C} \times [1]) \cong B\mathcal{C} \times B[1]$ nicht nur eine stetige Bijektion, sondern ein Homöomorphismus.) □

Ist nun $(\mathcal{U}', e')$ eine andere Trivialisierung von $\pi : P \to X$, so kann man oBdA auf $\mathcal{U} = \mathcal{U}'$ annehmen, denn je zwei Überdeckungen von X haben eine gemeinsame Verfeinerung. Bekanntlich unterscheiden sich die Übergangsfunktionen zweier Trivialisierungen von $P \to X$ um Konjugation. Also sind die betreffenden Funktoren $\varphi^{e'}_{\mathcal{U}} : X_{\mathcal{U}} \to G$ und $\varphi^e_{\mathcal{U}} : X_{\mathcal{U}} \to G$ sogar äquivalent und dies trifft in kanonischer Weise auch auf Ihre Fortsetzungen $\varphi^{e'}_{\mathcal{U}} : NX_{\mathcal{U}} \to NG$ sowie $\varphi^e_{\mathcal{U}} : NX_{\mathcal{U}} \to NG$ zu. Damit faktorisieren sich je zwei Trivialsierungen von $P \to X$ über genau einen inneren Automorphismus. Analog behandle die beiden Funktoren auf den Totalräumen. Man erhält also folgende Eindeutigkeitsaussage:

Satz A.3.7. *Die simpliziale Abbildung $N\bar{G} \to NG$ ist in folgendem Sinne universell: Zu jedem G-Prinzipalbündel $\pi : P \to X$ ist das durch die Nervkonstruktion einer Trivialisierung $(\mathcal{U}, e)$ von X gegebene kombinatorische Modell eindeutig bis auf kanonische Äquivalenz, d.h. ist $(\mathcal{U}', e')$ eine andere Trivialisierung, so kommutiert das folgende Diagramm:*

[6] Das werden wir an einigen Stellen noch verwenden.

$$\begin{tikzcd}
NP_{\mathcal{V}} \arrow[rr, "\varphi^e_{\mathcal{V}}"] \arrow[dr, "\varphi^{e'}_{\mathcal{V}}"'] \arrow[dd, "\pi"'] & & N\bar{G} \arrow[dd, "\gamma"] \\
& N\bar{G} \arrow[ur, "\cong"'] \arrow[dd] & \\
NX_{\mathcal{U}} \arrow[rr, dotted, "\varphi^e_{\mathcal{U}}"] \arrow[dr, "\varphi^{e'}_{\mathcal{U}}"'] & & NG \\
& NG \arrow[ur, "\cong"'] &
\end{tikzcd}$$

Aus obigem Lemma A.3.6 folgt nun, daß die stetigen Abbildungen $\varphi^e_{\mathcal{U}}, \varphi^{e'}_{\mathcal{U}} : X \to BG$ homotop sind. Dieselben Argumente auf den Totalräumen anwendend, liefert eine Bündelhomotopie zwischen $(\varphi^e_{\mathcal{V}}, \varphi^e_{\mathcal{U}})$ und $(\varphi^{e'}_{\mathcal{V}}, \varphi^{e'}_{\mathcal{U}})$.

A.4 Simpliziale Garben

Definition A.4.1. Eine **Garbe (von Mengen)** $\mathcal{F}$ **auf einem simplizialen Raum** $X = (X_p)_{p\geq 0}$ ist eine Familie von Garben $(\mathcal{F}^p)_{p\geq 0}$ mit folgenden Eigenschaften:

1. Für jedes $p \geq 0$ ist $\mathcal{F}^p$ ist eine Garbe auf X_p.
2. Ist $\alpha \in \mathrm{Hom}_\Delta([p],[q])$ ein Morphismus in Δ, so gibt es einen Morphismus $\alpha_* := \mathcal{F}(\alpha) : \mathcal{F}^p \to f_*\mathcal{F}^q$ von Garben auf X_q, wobei die stetige Abbildung $f := X(\alpha) : X_q \to X_p$ durch α induziert ist.
3. Diese Zuordung ist funktoriell, d.h. ist $\beta \in \mathrm{Hom}([q],[r])$ ein weiterer Morphismus, so gilt

$$\mathcal{F}(\beta \circ \alpha) = \mathcal{F}(\beta) \circ \mathcal{F}(\alpha) \qquad \mathcal{F}(\mathrm{id}_{[n]}) = \mathrm{id}_{\mathcal{F}^n}.$$

Genauer hätte man $\mathcal{F}(\beta \circ \alpha) = X(\alpha)_*\mathcal{F}(\beta) \circ \mathcal{F}(\alpha)$ schreiben müssen. In P.Deligne [D74] werden simplizialen Garben ohne $\mathcal{F}(\mathrm{id}_{[n]}) = \mathrm{id}_{\mathcal{F}^n}$ definiert.

Die Eigenschaft 2 lautet in Termen von Korand und Koentartung wie folgt: Sind $d^i : [p-1] \to [p]$ bzw. $s^i : [p+1] \to [p]$ Korand und Koentartung in Δ, so induzieren $\varepsilon_i : X_p \to X_{p-1}$ bzw. $\eta_i : X_p \to X_{p+1}$ Morphismen von Garben $\mathcal{F}(d^i) : \mathcal{F}^{p-1} \to (\varepsilon_i)_*\mathcal{F}^p$ bzw. $\mathcal{F}(s^i) : \mathcal{F}^{p+1} \to (\eta_i)_*\mathcal{F}^p$ für jedes p und $0 \leq i \leq p$.

Sprechweise A.4.2. Ist X ein simplizialer Raum und $\mathcal{F}$ eine Garbe auf X, so nennt man $\mathcal{F}$ auch abkürzend eine *simpliziale Garbe* auf X. Eine abelsche Garbe auf einem simplizialen Raum X heißt auch *simpliziale abelsche Garbe* auf X.

Ein **Morphismus** $\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ **von simplizialen Garben** auf X ist eine Familie von Morphismen $\varphi^p : \mathcal{F}^p \to \mathcal{G}^p$, verträglich mit den Morphismen in Δ, d.h. für $\alpha : [p] \to [q]$ kommutiert das folgende Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}^p \arrow[r, "\varphi^p"] \arrow[d, "\mathcal{F}(\alpha)"'] & \mathcal{G}^p \arrow[d, "\mathcal{G}(\alpha)"] \\
X(\alpha)_*\mathcal{F}^q \arrow[r, "\varphi^q"'] & X(\alpha)_*\mathcal{G}^q
\end{tikzcd}$$

Insbesondere kommutieren Morphismen simplizialer Garben mit Rand-und Entartungsmorphismen. Alsdann ist die Kategorie der simplizialen abelschen Garben $\mathcal{S}_X$ auf X erklärt.

Beispiel A.4.3. *i)* Für den konstanten simplizialen Raum X ist eine simpliziale Garbe $\mathcal{F}$ auf X nichts anderes als ein kosimpliziales Objekt in der Kategorie der Garben auf dem topologischen Raum X.

ii) Sei X eine simpliziale Mannigfaltigkeit. Dann bildet für jedes $q \geq 0$ die Familie von abelschen Garben $A^q_{X_p}$ der komplexwertigen q-Formen auf X_p die simpliziale (abelsche) Garbe der komplexwertigen q-Formen
$$A^q_X = \left(A^q_{X_p}\right)_{p\geq 0}$$
auf X.

A.5 Kohomologie mit Werten in einer simplizialen Garbe

Ein **Komplex**
$$K := K^{\bullet,\bullet}: \qquad 0 \to K^{\bullet,0} \xrightarrow{d} K^{\bullet,1} \xrightarrow{d} K^{\bullet,2} \xrightarrow{d} \cdots$$
simplizialer abelscher Garben auf X ist eine Familie von Komplexen
$$K^{p,\bullet}: \qquad 0 \to K^{p,0} \xrightarrow{d} K^{p,1} \xrightarrow{d} K^{p,2} \xrightarrow{d} \cdots$$
von abelschen Garben auf X_p für jedes $p \geq 0$, verträglich mit Rand-und Entartungsmorphismen. Letzteres bedeutet gerade, daß das Differential $d : K^{\bullet,q} \to K^{\bullet,q+1}$ ein Morphismus simplizialer abelscher Garben ist. In naheliegender Weise definiert man eine **exakte Sequenz** simplizialer abelscher Garben auf X.

Definition A.5.1. Sei X ein simplizialer Raum und $\mathcal{F}$ eine abelsche Garbe auf X. Der **globale Schnittfunktor** von $\mathcal{F}$ über X ist die kosimpliziale abelsche Gruppe gegeben durch
$$\begin{aligned} \Gamma(X,\mathcal{F}) : \Delta &\longrightarrow Ab \\ [p] &\longmapsto \Gamma(X_p,\mathcal{F}^p) = \mathcal{F}^p(X_p) \\ d^i : [p-1] \to [p] &\longmapsto \varepsilon_i^* := \mathcal{F}(d^i)(X_{p-1}) : \Gamma(X_{p-1},\mathcal{F}^{p-1}) \to \Gamma(X_p,\mathcal{F}^p) \\ s^i : [p+1] \to [p] &\longmapsto \eta_i^* := \mathcal{F}(s^i)(X_{p+1}) : \Gamma(X_{p+1},\mathcal{F}^{p+1}) \to \Gamma(X_p,\mathcal{F}^p) \end{aligned}$$

Bemerkung A.5.2. Sei K ein Komplex simplizialer abelscher Garben auf X. Aus den definierenden Eigenschaften einer simplizialen abelschen Garbe auf X folgt unmittelbar, daß es im Allgemeinen nicht möglich ist, via den Korändern ein Differential $\delta : \mathcal{K}^{p,\bullet} \to \mathcal{K}^{p+1,\bullet}$ in simplizialer Richtung zu induzieren, so daß $K^{\bullet,q}$ für jedes $q \geq 0$ ein Komplex ist. Insbesondere ist K im Allgemeinen auch kein Doppelkomplex. Jedoch liefert die Anwendung des globalen Schnittfunktors den Dopplekomplex $\Gamma(X,K)$, dessen Differential in simplizialer Richtung gegeben ist durch
$$\delta : \mathcal{F}^p(X_p) \longrightarrow \mathcal{F}^{p+1}(X_{p+1}), \quad \delta := \sum_{i=0}^{p+1}(-1)^i \underbrace{\mathcal{F}(d^i)(X_p)}_{=\varepsilon_i^*}.$$

Wie üblich sieht man dabei $\delta^2 = 0$ ein. Der zum Doppelkomplex $\Gamma(X,K)$ gehörige **Totalkomplex** ist definiert durch
$$s\Gamma(X,K)^n := \bigoplus_{p+q=n} \Gamma(X_p, K^{p,q})$$
mit seinem Differential $\delta + (-1)^p d$.

Unter einer **Auflösung** einer simplizialen abelschen Garbe $\mathcal{F}$ versteht man einen Komplex K simplizialer abelscher Garben auf X zusammen mit einer Augementation $\mathcal{F} \to K$ derart, daß $0 \to \mathcal{F} \to K$ eine exakte Sequenz simplizialer abelscher Garben auf X ist. Eine Auflösung I von $\mathcal{F}$ heißt **injektiv** bzw. **welk** bzw. **azyklisch**, wenn sie es auf jeder simplizialen Komponente ist.

Beispiel A.5.3. *i)* Für den konstanten simplizialen Raum X und einen Komplex K von simplizialen Garben auf X erhält man vermöge $\delta : \mathcal{K}^{p,\bullet} \to \mathcal{K}^{p+1,\bullet}$, $\delta := \sum_{i=0}^{p+1}(-1)^i\mathcal{K}(d^i)$ ein Differential in simplizialer Richtung, wodurch K zu einem Doppelkomplex wird.

ii) Sei X eine simpliziale Mannigfaltigkeit. Für jedes $p \geq 0$ hat man den de Rham-Komplex

$$A^\bullet_{X_p} : \qquad A^0_{X_p} \xrightarrow{d} A^1_{X_p} \xrightarrow{d} A^2_{X_p} \xrightarrow{d} \dots$$

auf X_p. Die Familie $A^\bullet_X := (A^\bullet_{X_p})_{p\geq 0}$ bildet einen Komplex simplizialer abelscher Garben auf X, den sogenannten *simplizialen de Rham-Komplex* auf X. Zusammen mit der konstanten simplizialen Garbe $\mathbb{C}$ erhält man die *simpliziale de Rham-Auflösung*

$$0 \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow A^0_X \xrightarrow{d} A^1_X \xrightarrow{d} A^2_X \xrightarrow{d} \dots$$

von $\mathbb{C}$. Weil $H^n(X_p, A^q_{X_p}) = 0$ für $p, q \geq 0$ und $n > 0$, d.h. die Garben $A^q_{X_p}$ sind Γ-azyklisch, ist die obige Auflösung azyklisch. Wendet man nun den globalen Schnittfunktor auf $A^\bullet_X$ an, so erhält man den Doppelkomplex $A^{\bullet,\bullet}(X)$ definiert durch $A^{p,q}(X) := A^q(X_p)$ mit horizontalem Cartan-Differential $d : A^{p,q}(X) \to A^{p,q+1}(X)$ und dem vertikalen (d.h. in simplizialer Richtung) Differential $\delta : A^{p,q}(X) \to A^{p+1,q}(X)$. Die Elemente in $A^q(X)$ heißen *q-Formen auf der simplizialen Mannigfaltigkeit X*, oder kurz *simpliziale q-Formen auf X*.

Man beachte, daß die hier verwendete Sprechweise einer "simplizialen Form" nicht mit der von J.Dupont [Du78] Def.6.2 bzw. [Du76] Def.2.1 übereinstimmt. Seine simplizialen Formen lassen sich ihrer Definition nach als Objekte auf der geometrischen Realiserung von X auffassen. Für die Berechnung der Kohomologie simplizialer Mannigfaltigkeiten ist es jedoch egal, welchen Doppelkomplex man verwendet, da sie homotopieäquivalent sind , wie J.Dupont in [Du76] Th.2.3 gezeigt hat.

Bemerkung A.5.4. Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung topologischer Räume. Dann bildet der direkte Bildfunktor $f_* : \mathcal{S}_X \to \mathcal{S}_Y$ injektive abelsche Garben auf injektive abelsche Garben ab, d.h. ist $\mathcal{F}$ eine injektive abelsche Garbe auf X, so ist $f_*\mathcal{F}$ eine injektive abelsche Garbe auf Y.

Beweis. Sei $\mathcal{F}$ eine injektive Garbe auf X und sei $0 \to \mathcal{G}' \to \mathcal{G} \to \mathcal{G}'' \to 0$ eine kurze exakte Sequenz abelscher Garben auf Y. Da der Urbildfunktor f^* exakt ist, ist auch die Sequenz $0 \to f^*\mathcal{G}' \to f^*\mathcal{G} \to f^*\mathcal{G}'' \to 0$ exakt. Definitionsgemäß ist der kantravariante Hom-Funktor $\mathrm{Hom}(-, \mathcal{F})$ für injektive abelsche Garben $\mathcal{F}$ exakt, also ist die Sequenz

$$0 \to \mathrm{Hom}(f^*\mathcal{G}'', \mathcal{F}) \to \mathrm{Hom}(f^*\mathcal{G}, \mathcal{F}) \to \mathrm{Hom}(f^*\mathcal{G}', \mathcal{F}) \to 0$$

exakt. Wegen $\mathrm{Hom}(f^*\mathcal{G}, \mathcal{F}) \cong \mathrm{Hom}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F})$ folgt die Exaktheit der Sequenz

$$0 \to \mathrm{Hom}(\mathcal{G}'', f_*\mathcal{F}) \to \mathrm{Hom}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F}) \to \mathrm{Hom}(\mathcal{G}', f_*\mathcal{F}) \to 0$$

und also ist $f_*\mathcal{F}$ injektiv. □

Lemma A.5.5. Jede simpliziale abelsche Garbe $\mathcal{F}$ auf X hat eine injektive und damit eine azyklische Auflösung.

Beweis. Für jedes $p \geq 0$ hat man die kanonische injektive Auflösung[7] von $\mathcal{F}^p$, d.h. eine Augmentation $\mathcal{F}^p \to I^0(\mathcal{F}^p)$ zusammen mit einem Komplex

$$I^{p,\bullet} : \qquad 0 \longrightarrow I^0(\mathcal{F}^p) \xrightarrow{d} I^1(\mathcal{F}^p) \xrightarrow{d} I^2(\mathcal{F}^p) \xrightarrow{d} \dots$$

[7] Zur Konstruktion der kanonischen injektiven Auflösung einer abelschen Garbe $\mathcal{F}$ siehe [GM03] III.8.1

derart, daß

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}^p \longrightarrow I^0(\mathcal{F}^p) \xrightarrow{d} I^1(\mathcal{F}^p) \xrightarrow{d} I^2(\mathcal{F}^p) \xrightarrow{d} \dots$$

eine exakte Sequenz von abelscher Garben auf X_p ist. Es verbleibt also nur noch die Verträglichkeit mit Rand- und Entartungsmorphismen zu zeigen. Dies folgt sofort durch induktives Fortsetzen des Diagramms:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}^p \arrow[r] \arrow[d, "\mathcal{F}(d^i)"'] & I^{p,0} \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, dashed, "I^{p,0}(d^i)"] & I^{p,2} \arrow[r] & \cdots \\
X(d^i)_*\mathcal{F}^{p+1} \arrow[r] & X(d^i)_*I^{p+1,0} \arrow[r, "d_0"] & X(d^i)_*I^{p+1,2} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Da der direkte Bildfunktor injektive Garben auf injektive Garben abbildet, sind die unteren Garben $X(d^i)_*I^{p+1,\bullet}$ allsamt injektiv. Setze zur Abkürzung $g_0 := I^{p,0}(d^i)$ und $f_*I^\bullet := X(d^i)_*I^{p+1,\bullet}$. Ersichtlich gibt es ein g_0, welches mit den Augmentationen kommutiert. Ist g_n bereits konstruiert, so verschwindet die Komposition $d_{n-1}g_nd_n$ wegen $d_nd_{n-1}g_{n-1} = 0$. Daher gibt es einen Morphismus φ_n derart, daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
I^{n-1} \arrow[r, "d_{n-1}"] & I^n \arrow[r, "g_n"] \arrow[d] & f_*I^n \arrow[r, "d_n"] & f_*I^{n+1} \\
& I^n/\operatorname{im} d_{n-1} \arrow[urr, dashed, "\exists\,\varphi_n"'] & &
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Da die obere Sequenz exakt ist, folgt $I^n/\operatorname{im} d_{n-1} = I^n/\ker d_n$. Dies ist wiederum aufgrund der kurzen exakten Sequenz $0 \to \ker d_n \to I^n \to \operatorname{im} d_n = \ker d_{n+1} \to 0$ gleich $\ker d_{n+1}$. Also hat man andererseits einen Monomorphismus $I^n/\operatorname{im} d_{n-1} \hookrightarrow I^{n+1}$. Da f_*I^n injkektiv ist, setzt sich der Morphismus φ_n zu einen Morphismus $g_{n+1} : I^{n+1} \to f_*I^{n+1}$ fort mit der Eigenschaft $g_{n+1}d_n = d_ng_n$. analog die Entartungsmorphismen; □

Definition A.5.6. Sei $\mathcal{F}$ eine simpliziale abelsche Garbe auf X und I eine injektive Auflösung von $\mathcal{F}$. Die **n-te Kohomologiegruppe von X mit Werten in der simplizialen Garbe** $\mathcal{F}$ ist erklärt durch

$$H^n(X, \mathcal{F}) := H^n(s\Gamma(X, I)). \tag{30}$$

Lemma A.5.7. (i) Die vorstehende Definition ist bis auf einen kanonischen Isomorphismus unabhängig von der Wahl der injektiven Auflösung.

$ii)$ Es genügt für die Berechnung der Kohomologie eine azyklischen Auflösung von $\mathcal{F}$, d.h. ist W eine azyklische Auflösung von $\mathcal{F}$, so gibt es einen kanonischen Isomorphismus

$$H^\bullet(X, \mathcal{F}) \cong H^\bullet(s\Gamma(X, W)).$$

Beweis. Sei I eine injektive und W eine azyklische Auflösung von $\mathcal{F}$. Dann gibt es ([Br93] Prop.1.15(2) zusammen mit Lemma A.5.5) einen bis auf Homotopie eindeutigen Morphismus $\Psi : W \to I$ von Auflösungen, welcher mit den Augmentationen kommutiert, also für jedes $p \geq 0$ hat man ein mit Rand- und Entartungsoperatoren verträgliches kommutatives Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}^p \arrow[r] \arrow[d, equal] & I^{p,0} \arrow[r, "d"] & I^{p,1} \arrow[r, "d"] & I^{p,2} \arrow[r, "d"] & \cdots \\
\mathcal{F}^p \arrow[r] & W^{p,0} \arrow[r, "d"] \arrow[u, "\Psi^{p,0}"'] & W^{p,1} \arrow[r, "d"] \arrow[u, "\Psi^{p,1}"'] & W^{p,2} \arrow[r, "d"] \arrow[u, "\Psi^{p,2}"'] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Ist I' eine andere injektive Auflösung von $\mathcal{F}$, so gibt es eine bis auf Homotopie eindeutige Homotopieäquivalenz von I nach I'.

Ferner gibt es nach [D74] eine Spektralsequenz

$$E_1^{pq}(I) = H^q(\Gamma(X_p, I_{|X_p}) =: H^q(X_p, \mathcal{F}^p) \Longrightarrow E^{p+q}(I) = H^{p+q}(s\Gamma(X, I) =: H^{p+1}(X, \mathcal{F}),$$

bezüglich der Filtrierung

$$F^r\Gamma(X, I) := \bigoplus_{p \geq r} \Gamma(X_p, I^{p,q}).$$

Der Morphismus $\Psi : W \to I$ induziert den Morphismus

$$\Psi_* : (E_r^{pq}(W), E^{p+q}(W)) \longrightarrow (E_r^{pq}(I), E^{p+q}(I)) \qquad r \geq 1,$$

von Spektralsequenzen, der bekanntlich auf den Anfangstermen (also für $r = 1$) ein Isomorphismus ist. Also sind auch die Limesterme $E^{p+q}(W) \to E^{p+q}(I)$ nach [Br93] Lemma 1.2.5 isomorph, was schließlich zu zeigen war. $\square$

Beispiel A.5.8. Sei X eine simpliziale Mannigfaltigkeit. Der zum Doppelkomplex $(A^{p,q}(X))_{p,q \geq 0}$ gehörige Totalkomplex lautet

$$sA(X)^n = \bigoplus_{p+q=n} A^{p,q}(X)$$

und sein Differential $\delta + (-1)^p d$. Die Kohomologiegruppen der simplizialen Mannigfaltigkeit X mit Werten in der konstanten simplizialen Garbe $\mathbb{C}$ sind definiert als die Kohomologiegruppen des Totalkomplexes, also

$$H^*(X, \mathbb{C}) := H^*(sA(X)).$$

Sie wird ***simpliziale de Rham-Kohomologie*** von X mit Werten in $\mathbb{C}$ genannt. Nach J.Dupont [Du78] Prop.6.1 ist die Kohomologie einer simplizialen Mannigfaltigkeit isomorph zur (Standard)Kohomologie der geometrischen Realisierung von X, d.h.

$$H^*(X, \mathbb{C}) \cong H^*(|X|, \mathbb{C}).$$

A.6 Kohomologie mit Werten in einem Komplex simplizialer Garben

Sei X eine simpliziale Mannigfaltigkeit und

$$\mathcal{F}^\bullet : \quad 0 \to \mathcal{F}^0 \xrightarrow{d} \mathcal{F}^1 \xrightarrow{d} \mathcal{F}^2 \xrightarrow{d} \dots$$

ein Komplex von simplizialen abelschen Garben auf X, also eine Familie von Komplexen von abelschen Garben

$$0 \to \mathcal{F}^{p,0} \xrightarrow{d} \mathcal{F}^{p,1} \xrightarrow{d} \mathcal{F}^{p,2} \xrightarrow{d} \dots$$

auf X_p für jedes $p \geq 0$.

Unter einer **Cartan-Eilenberg-Auflösung** eines Komplexes simplizialer abelscher Garben $\mathcal{F}^\bullet$ auf X versteht man eine Familie von Cartan-Eilenberg Auflösungen[8] $I^{p,\bullet,\bullet}$ von

$$0 \to \mathcal{F}^{p,0} \xrightarrow{d} \mathcal{F}^{p,1} \xrightarrow{d} \mathcal{F}^{p,2} \xrightarrow{d} \dots$$

für jedes $p \geq 0$, also insbesondere für jeden Simplizialgrad p hat man den Doppelkomplex von abelschen Garben

[8] Zur Definition einer Cartan-Eilenberg Auflösung siehe [Weibel94] 5.7.9.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{F}^{p,0} \arrow[r, "d"] \arrow[d, "i"] & \mathcal{F}^{p,1} \arrow[r, "d"] \arrow[d, "i"] & \mathcal{F}^{p,2} \arrow[r, "d"] \arrow[d, "i"] & \cdots \\
0 \arrow[r] & I^{p,0,0} \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\partial"] & I^{p,1,0} \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\partial"] & I^{p,2,0} \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\partial"] & \cdots \\
0 \arrow[r] & I^{p,0,1} \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\partial"] & I^{p,1,1} \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\partial"] & I^{p,2,1} \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\partial"] & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

auf X_p. Analog wie in Lemma A.5.5 zeigt man die Verträglichkeit der Cartan-Eilenberg-Auflösung mit Rand- und Entartungsoperatoren. Für den Doppelkomplex bedeutet dies, daß man für jedes $p \geq 0$ das ebene Diagramm sich zu einem drei dimensionalen kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd}
& & \varepsilon_*\mathcal{F}^{p+1,0} \arrow[r] & \varepsilon_*\mathcal{F}^{p+1,1} \arrow[r] & \varepsilon_*\mathcal{F}^{p+1,2} \arrow[r] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \mathcal{F}^{p,0} \arrow[r, "d"] \arrow[d, "i"] \arrow[ur] & \mathcal{F}^{p,1} \arrow[r, "d"] \arrow[d, "i"] \arrow[ur] & \mathcal{F}^{p,2} \arrow[r, "d"] \arrow[d, "i"] \arrow[ur] & \cdots & \\
0 \arrow[r] & I^{p,0,0} \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\partial"] & I^{p,1,0} \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\partial"] & I^{p,2,0} \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\partial"] & \cdots & \\
0 \arrow[r] & I^{p,0,1} \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\partial"] & I^{p,1,1} \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\partial"] & I^{p,2,1} \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\partial"] & \cdots & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & &
\end{tikzcd}$$

mit $\varepsilon_* := X(d_i)_*$ fortsetzen kann. (Dabei ist die Fortsetzung auf den "Deckel" des "Quaders" möglich, weil definitionsgemäß $\mathcal{F}^\bullet$ ein *Komplex* simplizialer abelscher Garben ist.)

Die Anwendung des globalen Schnittfunktors $\Gamma(X, I^{\bullet,\bullet,\bullet})$ liefert den Trikomplex

$$(I^{\bullet,\bullet,\bullet}(X), \delta, d, \partial)$$

mit dem simplizialen Differential $\delta : I^{p,\bullet,\bullet}(X_p) \to I^{p+1,\bullet,\bullet}(X_{p+1})$, welches induziert ist durch $\delta : \mathcal{F}^{p,\bullet}(X_p) \to \mathcal{F}^{p+1,\bullet}(X_{p+1})$, dem Differential $d : I^{\bullet,q,\bullet}(X) \to I^{\bullet,q+1,\bullet}(X)$, welches induziert ist durch $d : \mathcal{F}^q(X) \to \mathcal{F}^{q+1}(X)$ sowie dem Differential $\partial : I^{\bullet,\bullet,r}(X) \to I^{\bullet,\bullet,r+1}(X)$ in Richtung der Auflösung, induziert durch $\partial : I^{\bullet,\bullet,r} \to I^{\bullet,\bullet,r+1}$. Der Totalkomplex $sI(X) := sI^{\bullet,\bullet,\bullet}(X)$ von $I^{\bullet,\bullet,\bullet}(X)$ und sein Differential ist definiert

$$sI^n(X) := \bigoplus_{p+q+r=n} I^{p,q,r}(X), \qquad D := \delta + (-1)^p\partial + (-1)^{p+r}d.$$

Definition A.6.1. Die n-te Kohomologie des Totalkomplexes

$$H^n(X, \mathcal{F}^\bullet) := H^n(sI^{\bullet,\bullet,\bullet}(X))$$

heißt **n-te Kohomologie von X mit Werten in dem Komplex simplizialer abelscher Garben $\mathcal{F}^\bullet$.**

Analog wie im vorangegangenen Abschnitt zeigt man, daß dies bis auf einen kanonischen Isomorphismus unhabhängig von der Wahl der Cartan-Eilenberg-Auflösung ist

Sprechweise A.6.2. Die Kohomologie von X mit Werten in einem Komplex simplizialer abelscher Garben wird — in Analogie zum nicht-simplizialen Fall — die *Hyperkohomologie von X mit Werten in $\mathcal{F}^\bullet$* genannt.

B Glatte Deligne-Kohomologie

In diesem Kapitel des Anhangs erinnern wir an die Definition der glatten Deligne-Kohomologie und beweisen im Detail einige Eigenschaften hierüber, die sich vor allem in den kurzen Sequenzen niederschlagen. Diese sind von fundamentaler Bedeutung, da aus ihnen sichtbar wird, in wie weit glatte Deligne-Kohomologie eine Verfeinerung der Standardkohomologie ist. Von besonderen Interesse ist dabei der Krümmungshomomorphimus $d : H^k_{\mathcal{D}}(X, A(k)) \twoheadrightarrow A^k(X)_{A(k)}$, dessen Bild gerade die k-Formen mit Perioden in $A(k)$ sind. Er ist der Dreh-und Angelpunkt für die Suche nach verfeinerten Koeffizientenbereichen, zum Beispiel von charakteristischen Klassen, wie es in der vorliegenden Arbeit der Fall ist. Ferner geben wir an, wie man Elemente in der glatten Deligne-Kohomologie konkret hinschreibt. Grundlage dieses Kapitels ist das Standardwerk [Br93] I.5 vom J-L. Brylinski, in dem aber der Krümmungshomomorphismus in der Weise, wie wir ihn brauchen nicht behandelt wird. Daher verwenden wir zudem die Arbeit [DuK05] von J.Dupont und F. Kamber für die Konstruktion des Krümmungshomomorphismus. Ebenfalls noch zu erwähnen ist die Arbeit von K. Gomi [G05], der wie Dupont-Kamber glatte Deligne-Kohomologie aber mit Koeffizienten $\mathbb{Z}$ betrachtet, dessen beweistechnische Besonderheiten im Hinblich auf beliebige Koeffizientenbereiche von $\mathbb{C}$ ebenfalls diskutiert werden.

Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, A ein Unterring von $\mathbb{C}$ und $k \geq 0$. Dann ist die durch das Element $(2\pi i)^k$ gegebene zyklische Untergruppe $A(k) := (2\pi i)^k \cdot A$ von $\mathbb{C}$ ein freier zyklischer A-Modul.

Definition B.0.3. Bezeichnet A^q_X die Garbe der komplexwertigen q-Formen auf X, so heißt der Komplex

$$A(k)_{\mathcal{D}}: \quad 0 \to A(k) \xrightarrow{i} A^0_X \xrightarrow{d} A^0_X \xrightarrow{d} \ldots \xrightarrow{d} A^{k-1}_X$$

von abelschen Garben auf X der (komplexe) **glatte Deligne-Komplex** mit Koeffizienten in $A(k)$. Dabei ist $A(k)$ als Konstante Garbe in Grad Null aufzufassen. Entsprechend hat A^{k-1}_X den Grad k. Die n-te Hyperkohomologiegruppe dieses Komplexes

$$H^n_{\mathcal{D}}(X, A(k)) := \mathbb{H}^k(A(k)_{\mathcal{D}})$$

heißt die n-te (komplexe) **glatte Deligne Kohomologiegruppe** von X mit Koeffizienten in $A(k)$.

Bemerkung B.0.4. Definitionsgemäß ist die Hyperkohomologie von X mit Werten in dem Komplex $A(k)_{\mathcal{D}}$ abelscher Gaben auf X die Kohomologie des Totalkomplexes einer Cartan-Eilenberg Auflösung von $A(k)_{\mathcal{D}}$. Für die konkrete Konstruktion von Repräsentanten in der glatten Deligne-Kohomologie eignen sich die Cartan-Eilenberg Auflösungen freilich nicht. Da aber auf parakompakten Räumen Garbenhyperkohomologie und Čech-Hyperkohomologie kanonisch isomorph sind, kann man in solchen Fällen auf das sehr konkrete Čech-Modell ausweichen. Dies zeigt man ganz analog wie in Lemma A.5.7: Ist nämlich $\mathcal{F}^\bullet$ ein Komplex von abelschen Garben auf einem parakompakten Raum X, so hat man die beiden Spektralsequenzen der Hyperkohomologie, $E_1^{pq}(I) = H^p(X, \mathcal{F}^q) \Longrightarrow E^{p+q}(I) = H^{p+q}(X, \mathcal{F}^\bullet)$ und $E_1^{pq}(\check{C}) = H^p(X, \mathcal{F}^q) \Longrightarrow E^{p+q}(\check{C}) = H^{p+q}(X, \mathcal{F}^\bullet)$, einmal zur Cartan-Eilenberg Auflösung I und einmal zur Čech-Auflösung von $\mathcal{F}^\bullet$. Der Morphismus von Auflösungen $\check{C} \to I$ induziert einen Morphismus der Spektralsequenzen, der bekanntlich auf den Anfangstermen ein Isomorphismus ist, also auch auf den Limestermen.

Die vorstehende Definition läßt erahnen, daß es auch eine *reelle* glatte Deligne-Kohomologie gibt: Man betrachtet Unterringe von $\mathbb{R}$ statt von $\mathbb{C}$, läßt den $(2\pi i)^k$-Twist weg und arbeitet mit reellwertigen statt komplexwertigen Differentialformen. Ist von der *reellen* Deligne-Kohomologie die Rede, so schreiben wir A_k statt $A(k)$, für den (reellen) glatten Deligne-Komplex $A_{k,\mathcal{D}}$ statt $A(k)_{\mathcal{D}}$ und für die (reelle) glatten Delgine-Kohomologie $H^\bullet_{\mathcal{D}}(X, A_k)$ statt $H^\bullet_{\mathcal{D}}(X, A(k))$. Alle nun folgenden Aussagen bleiben auch im reellen Fall richtig, mit den naheliegendenen Modifikationen.

Bemerkung B.0.5. Für $A := \mathbb{Z}$ vermittelt die Exponentialsequenz

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}(k) \longrightarrow A_X^0 \xrightarrow{\exp} (A_X^0)^* \longrightarrow 0$$

einen Quasi-Isomorphismus $\mathbb{Z}(k)_{\mathcal{D}} \to \mathbb{Z}(k)^{\mathcal{D}}[-1]$, also

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{Z}(k) \arrow[r, "i"] \arrow[d] & A_X^0 \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\exp(\frac{1}{2\pi i})"] & A_X^1 \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\cdot\frac{1}{2\pi i}"] & \cdots \arrow[r, "d"] & A_X^{k-1} \arrow[d, "\cdot\frac{1}{2\pi i}"] \\
\mathbb{Z}(k)^{\mathcal{D}} : & 1 \arrow[r] & (A_X^0)^* \arrow[r, "d\log"'] & A_X^1 \arrow[r, "d"'] & \cdots \arrow[r, "d"'] & A_X^{k-1},
\end{tikzcd}$$

mit der Garbe der invertierbaren komplexwerten Funktionen $(A_X^0)^*$. Diese Situation ermöglicht eine alternative Definition der glatten Deligne-Kohomologie via der Hyperkohomologie von $\mathbb{Z}(k)^{\mathcal{D}}$, die man ebenfalls in der Literatur antrifft (zum Beispiel in Brylinski-McLaghlin [BrMcL96] 2.(10) oder Gomi [G05] Def.2.1). Mithin

$$H^n_{\mathcal{D}}(X, \mathbb{Z}(k)) \cong \mathbb{H}^{n-1}(\mathbb{Z}(k)^{\mathcal{D}}).$$

Bemerkung B.0.6. Sei $\mathcal{U} := (U_i)_{i\in I}$ eine gute offene Überdeckung von X. Setze

$$\check{\Omega}^\bullet_{\mathbb{C}/A(k)}(\mathcal{U}) := sA^\bullet(N_\bullet X_{\mathcal{U}})/\check{C}^\bullet(\mathcal{U}, A(k)).$$

Man zeigt analog wie in Dupont [DuK05] Lemma 2.1 *ii)* die Beziehung

$$\check{H}^\bullet(X, \mathbb{C}/A(k)) \cong H^\bullet(\check{\Omega}^\bullet_{\mathbb{C}/A(k)}(\mathcal{U})).$$

(Die Behauptung folgt aus dem Čech-de Rham-Isomorphismus.)

Eine Klasse in $\check{H}^{k-1}(X, \mathbb{C}/A(k))$ wird also repräsentiert durch einen Kozykel $(\omega_0, ..., \omega_{k-1}) \in \check{\Omega}^{k-1}_{\mathbb{C}/A(k)}(\mathcal{U})$, d.h. $d\omega_p + (-1)^p\delta\omega_{p-1} = 0$ für $1 \leq p \leq k-1$ und $\delta\omega_{k-1} \equiv 0 \operatorname{mod} A(k)$ sowie $d\omega_0 = 0$.

Zu Erinnerung: Eine geschlossene k-Form $\alpha \in A^k(X)$ hat Perioden in einem Unterring A von $\mathbb{C}$, wenn die Integrationen von α über alle differenzierbaren k-Zykel mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$ nur Werte in A annehmen, d.h. also das Bild der Abbildung

$$\int_{\{-\}} \alpha : Z_k(X) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \sigma \longmapsto \int_\sigma \alpha \quad \in A.$$

ist eine Teilmenge von A.

Lemma B.0.7. Ist A ein Unterring von $\mathbb{C}$, so lassen sich die k-Formen auf X mit Perioden in A charakterisieren durch

$$A^k(X)_A = \operatorname{im}(H^k(X, A) \xrightarrow{\iota_*} H^k(X, \mathbb{C})),$$

mit der kanonischen Inklusion $\iota : A \to \mathbb{C}$.

Beweis. Betrachte

$$\begin{tikzcd}
& & H^{k+1}(X, A) & & \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Ext}(H_{k-1}(X), \mathbb{C}/A) \arrow[r] & H^k(X, \mathbb{C}/A) \arrow[r, "h"] \arrow[u, "\partial"] & \operatorname{Hom}(H_k(X), \mathbb{C}/A) \arrow[r] & 0 \\
& & H^k(X, \mathbb{C}) \arrow[u, "\pi_*"] & & \\
& & H^k(X, A) \arrow[u, "\iota_*"] & & \\
& & \vdots \arrow[u] & &
\end{tikzcd}$$

mit einer der universellen Koeffizientenformeln in der horizontalen und der durch die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\iota} \mathbb{C} \xrightarrow{\pi} \mathbb{C}/A \longrightarrow 0$$

induzierten langen exakten Sequenz in der Vertikalen. Eine k-Form $\alpha \in A^k(X)_A$ mit Perioden in A ist definitionsgemäß geschlossen, liefert damit ein Klasse $\bar{\alpha}$ in $H^k(X,\mathbb{C})$. Da ein Element in $H^k(X,\mathbb{C}/A)$ repräsentiert wird durch ein Element in $\mathrm{Hom}(C_k(X),\mathbb{C}/A)$ ist also $\pi_*(\alpha)$ a priori nicht Null. Weil α definitionsgemäß Perioden in A hat, verschwindet die Komposition $h \circ \pi_*(\alpha)$. Weil die Zeile exakt ist, kommt das Element $\pi_*(\alpha)$ von einem Element in $\mathrm{Ext}(H_{k-1}(X),\mathbb{C}/A)$. Aber $\mathbb{C}/A$ ist divisibel, also verschwindet die Ext-Gruppe. Also ist $\pi_*(\alpha)$ in $H^k(X,\mathbb{C}/A)$ doch Null. Die Exaktheit der vertikalen Sequenz liefert demnach eine Element $\tilde{\alpha}$ in $H^k(X,A)$ mit $\iota_*(\tilde{\alpha}) = \alpha$.

Liegt umgekehrt eine geschlossene k-Form α im Bild von ι_*, so ist offenbar $\pi_*(\alpha) = 0$. Wenn also $\pi_*(\alpha)$ auf allen k-Ketten $C_k(X)$ verschwindet, dann erst recht auf allen k-Zykeln $Z_k(X)$, d.h. α hat Perioden in A. Man beachte, daß $\pi_*(\alpha)$ genauer zu verstehen ist als das Kompositum

$$H^k_{\mathrm{dR}}(X,\mathbb{C}) \xrightarrow{\mathscr{I}} H^k_{\mathrm{sing}}(X,\mathbb{C}) \xrightarrow{\pi_*} H^k(X,\mathbb{C}/A), \quad \alpha \longmapsto \int_{\{-\}} \alpha \bmod A$$

aus de Rham-Isomorphismus $\mathscr{I}$ und der kanonischen Projektion π_*. □

Lemma B.0.8. Der Morphismus von Komplexen $d : A(k)_{\mathcal{D}} \to A^k_X$ induziert den Epimorphismus

$$d : H^k_{\mathcal{D}}(X, A(k)) \twoheadrightarrow A^k(X)_{A(k)}, \quad x = \overline{(a,\omega)} \longmapsto F_\omega$$

von der k-ten glatten Deligne-Kohomologiegruppe nach den geschlossenen k-Formen $A^k(X)_{A(k)}$ mit Perioden in $A(k)$.

Beweis. Sei $\mathcal{U} := (U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von X. Ein Element x in $H^k_{\mathcal{D}}(X, A(k))$ wird repräsentiert durch (a,ω) mit $a \in \check{C}^k(\mathcal{U}, A_k)$ und $\omega := (\omega_0, ..., \omega_{p-1}) \in \oplus_{i=0}^{k-1} \check{C}^i(\mathcal{U}, A_X^{k-1-i})$, so daß insbesondere $\delta\omega_0 = \pm d\omega_1$ gilt. Da das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
A^{k-2}(X) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "i"] & A^{k-1}(X) \arrow[r, dashed, "d"] \arrow[d, "i"] & A^k(X) \arrow[d, "i"] \\
\check{C}^0(\mathcal{U}, A_X^{k-2}) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\delta"] & \check{C}^0(\mathcal{U}, A_X^{k-1}) \arrow[r, dashed, "d"] \arrow[d, "\delta"] & \check{C}^0(\mathcal{U}, A_X^{k}) \arrow[d, "\delta"] \\
\check{C}^1(\mathcal{U}, A^{k-2}) \arrow[r, "d"] & \check{C}^1(\mathcal{U}, A^{k-1}) \arrow[r, dashed, "d"] & \check{C}^1(\mathcal{U}, A_X^{k})
\end{tikzcd}$$

kommutiert, gilt $\delta d\omega_0 = d\delta\omega_0 = dd\omega_1 = 0$ in $\check{C}^1(\mathcal{U}, A^k_X)$, also existiert eine globale Form $F_\omega \in A^k(X)$ mit $F_{\omega|U_i} = i^*F_\omega = d\omega_0$. Insbesondere ist F_ω d-geschlossen. Es verbleibt zu zeigen, daß F_ω unabhängig von der Wahl des Respräsentanten aus der Klasse in $H^k_{\mathcal{D}}(X, A(k))$ ist. Ist nämlich (a', ω') ein anderer Repräsentant von x, so gibt es definitionsgemäß einen $k-1$ Korand $(b,\sigma) \in H^{k-1}_{\mathcal{D}}(X, A(k))$ mit $\delta b = a' - a$ und $d\sigma^p + (-1)^p \delta\sigma^{p-1} = \omega'^p - \omega^p$ für $1 \le p \le p-2$ sowie $d\sigma_0 = \omega'_0 - \omega_0$. Damit $0 = dd\omega'_1 = \delta d\omega'_0 = \delta d(d\sigma_0 + \omega_0) = \delta d\omega_0$ und folglich $F_{\omega'} = F_\omega$. Bezeichnet $D = \delta + (-)^p d$ das Totaldifferential von $sA^\bullet(N_\bullet X_{\mathcal{U}}$, so gilt $D\omega = \delta\omega_{k-1} + (-1)^{k-1} d\omega_0 = a + (-1)^k F_\omega$. Dabei ist a via der kanonischen Abbildung $\iota : \check{C}^k(\mathcal{U}, A(k)) \to \check{C}^k(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ als reeller Kozykel in $\check{C}^k(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ aufzufassen. (Daß hierbei Torsionselemente unter ι verschwinden, spielt in diesem Fall keine Rolle, da es nur um Perioden geht.) Sodann entsprechen sich a und F_ω via dem Čech- de Rham-Isomsorphismus $\check{C}$-dR. Das bedeutet also, daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd} H^k_{\mathcal{D}}(X, A(k)) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\mathrm{pr}"] & A^k(X)_{\mathrm{cl}} \arrow[d, "\mathrm{kan}"] \\ \check{H}^k(X, A(k)) \arrow[r, "\check{C}\text{-dR}"] & H^k_{\mathrm{dR}}(X, \mathbb{C}) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \overline{(a, \omega_0, ..., \omega_{k-1})} \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & F_\omega \arrow[d, mapsto] \\ \overline{a} \arrow[r, mapsto] & \overline{F_\omega} \end{tikzcd}$$

kommtutiert und also F_ω Perioden in $A(k)$ hat.

Sei schließlich $\alpha \in A^k(X)_{A(k)}$ gegeben. Da A^k_X azyklisch ist, gibt es lokal bezüglich einer guten Überdeckung $\mathcal{U}$ eine $k-1$-Form ω_0 mit $d\omega_0 = \alpha_{|U}$. Da die $A^q_{NX_{\mathcal{U}}}$'s azyklische simpliziale Garben sind, gibt es zu $-\delta\omega_0 \in A^{k-1}(N_1 X_{\mathcal{U}})$ eine $k-2$-Form $\omega_1 \in A^{k-2}(N_1 X_{\mathcal{U}})$ mit $d\omega_1 = -\delta\omega_0$. Induktiv fortfahrend erhält man auf diese Weise zusammen mit Lemma B.0.7 einen k-Deligne-Kozykel $x := (-\delta\omega_{k-1}, \omega_0 ..., \omega_{k-1})$ mit der gewünschten Eigenschaft. Dies zeigt die Surjektivität von d. □

Sprechweise B.0.9. Man nennt die im vorstehenden Lemma angegebene Abbildung d von der Deligne-Kohomologie in die geschlossenen Formen auch *Krümmungshomomorphismus.*

Satz B.0.10. *Sei $k \geq 0$. Die glatte Deligne-Kohomologie lebt in folgenden kurzen exakten Sequenzen:*

i): Für $0 \leq p \leq k-1$ gilt

$$0 \longrightarrow \frac{H^{p-1}(X, \mathbb{C})}{H^{p-1}(X, A(k))} \longrightarrow H^p_{\mathcal{D}}(X, A(k)) \longrightarrow \mathrm{Tor} H^p(X, A(k)) \longrightarrow 0$$

und

$$H^{p-1}(X, \mathbb{C}/A(k)) \cong H^p_{\mathcal{D}}(X, A(k)).$$

ii) Für $p = k-1$ gilt

$$0 \longrightarrow H^{k-1}(X, \mathbb{C}/A(k)) \longrightarrow H^k_{\mathcal{D}}(X, A(k)) \xrightarrow{d} A^k(X)_{A(k)} \longrightarrow 0,$$

mit dem Krümmungshomomorphismus d, sowie

$$0 \longrightarrow A^{k-1}(X)/A^{k-1}(X)_{A(k)} \longrightarrow H^p_{\mathcal{D}}(X, A(k)) \longrightarrow H^p(X, A(k)) \longrightarrow 0.$$

iii) Für $p \geq k$ gilt

$$H^p_{\mathcal{D}}(X, A(k)) \cong H^p(X, A(k)).$$

Beweis. Betrachte die kurze exakte Sequenz

$$0 \to (0 \to A^0_X \to \cdots \to A^{k-1}_X) \longrightarrow A(k)_{\mathcal{D}} \longrightarrow (A(k) \to 0 \to \cdots \to 0) \to 0 \tag{31}$$

von Garben auf X. Die Hyperkohomologie der rechten Sequenz ist gegeben durch

$$\mathbb{H}^n(0 \to A^0_X \to \cdots \to A^{k-1}_X) = \begin{cases} H^n(X, \mathbb{C}) & n < k-1 \\ A^{k-1}(X)/dA^{k-2}(X) & n = k-1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{32}$$

Die zu (31) gehörige lange exakte Sequenz lautet

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] \cdots \arrow[r] & H^{p-1}(X, A(k)) \arrow[r] \arrow[dr, "\iota_{p-1}"'] & \mathbb{H}^{p-1}(0 \to A^0_X \to \cdots \to A^{k-1}_X) \arrow[r] & H^p_{\mathcal{D}}(X, A(k)) \arrow[r] & H^p(X, A(k)) \arrow[r] \arrow[d, "\iota_p"] & \cdots \\ & & H^{p-1}(X, \mathbb{C}) \arrow[u, "\rho_{p-1}"'] & & H^p(X, \mathbb{C}) & \end{tikzcd}$$

wobei $H^{p-1}(X, A(k)) \to \mathbb{H}^{p-1}(0 \to A_X^0 \to \ldots \to A_X^{k-1})$ wie angebeben sich über $H^{p-1}(X, \mathbb{C})$ faktorisiert. Für $p < k-1$ ist ρ_p ein Isomorphismus, also insebondere injektiv und daher $\ker(\iota_p) = \mathrm{Tor}(H^p(X, A(k))$. Dies zeigt die kurze exakte Sequenz in i). Eine Klasse x in $H^p_{\mathcal{D}}(X, A(k))$ mit $p < k-1$ wird repräsentiert durch einen Kozykel $(a, \omega_0, ..., \omega_{p-1})$, d.h. insbesondere $d\omega_0 = 0$ und damit gemäß Bem.B.0.6 repräsentiert $(\omega_0, .., \omega_{p-1})$ eine Klasse in $H^{p-1}(X, \mathbb{C}/A(k))$. Ist umgekehrt x in $H^{p-1}(X, \mathbb{C}/A(k))$ eine durch $\omega := (\omega_0, ..., \omega_{p-1})$ repräsentierte Klasse, so repräsentiert $(-\delta\omega_{p-1}, \omega)$ wegen $\delta\omega_{p-1} \equiv 0 \bmod A(k)$ eine Klasse in der p-ten Deligne-Kohomologie. Dies zeigt die Isomorphie i).

Wegen (32) hat die lange exakte Sequenz von (31) für $p = k-1$ die Form

$$\cdots \to H^{k-1}(X, A(k)) \stackrel{\psi_{k-1}}{\to} A^{k-1}(X)/dA^{k-2}(X) \to H^k_{\mathcal{D}}(X, A(k)) \to H^k(X, A(k)) \to 0.$$

Da das Bild von ψ_{k-1} gerade aus den geschlossenen $k-1$-Formen mit Perioden in $A(k)$ ist, also $\operatorname{im}\psi_{k-1} = A^{k-1}(X)_{A(k)}$, erhält man die zweite exakte Sequenz in ii).

Vermöge

$$\iota : H^{k-1}(X, \mathbb{C}/A(k)) \longrightarrow H^k_{\mathcal{D}}(X, A(k)), \quad \overline{\omega} := \overline{(\omega_0, ..., \omega_{k-1})} \longmapsto \overline{(-\delta\omega_{k-1}, \omega_0, ..., \omega_{k-1})}.$$

ist eine offenbar wohldefinierte und injekte Abbildung gegeben. Mit Bem.B.0.6 folgt einerseits $d \circ \iota = 0$, $d\omega_0 = 0$ ist, und andererseits $\ker d \subset \operatorname{im}\iota$, denn ist $(a, \omega_0, ..., \omega_{k-1})$ ein Repräsentant einer Klasse x in $H^k_{\mathcal{D}}(X, A(k))$ mit $dx = 0$, d.h. $d\omega_0 = 0$, so repräsentiert $\omega := (\omega_0, ..., \omega_{k-1})$ wegen $\delta\omega_{k-1} = -a$, also $\delta\omega_{k-1} \equiv 0 \bmod A_k$, eine Klasse in $\check{H}^{k-1}(\check{\Omega}^\bullet_{\mathbb{C}/A_k}(\mathcal{U}) \cong H^{k-1}(X, \mathbb{C}/A(k))$ mit $\iota(\overline{\omega}) = x$. Dies zeigt die Exaktheit der ersten Sequenz in ii). Mit (32) folgt unmittelbar iii). $\square$

Bemerkung B.0.11. Betrachtet man Deligne-Kohomologie mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$, so lassen sich einige der obigen Resultate unter Zuhilfenahme der Exponentialsequenz etwas eleganter zeigen. Man hat z.B. einen Quasi-Isomrphismus [G05][DuK05]

$$\left(\mathbb{C}/\mathbb{Z} \to 0 \to \cdots \to A_X^{k-1}\right) \to \left((A_X^0)^* \stackrel{d\log}{\to} A_X^1 \stackrel{d}{\to} \ldots \stackrel{d}{\to} A_X^{k-2} \stackrel{d}{\to} A_{X,\mathrm{cl}}^{k-1}\right)$$

und die kurze exakte Sequenz

$$0 \to \left((A_X^0)^* \to A_X^1 \to \cdots \to A_X^{k-2} \to A_{X,\mathrm{cl}}^{k-1}\right) \to \mathbb{Z}_{k,\mathcal{D}} \to (0 \to \cdots \to 0 \to A_{X,\mathrm{cl}}^k) \to 0$$

von Komplexen von Garben auf X. Dabei bezeichnet $A^k_{X,\mathrm{cl}}$ die Garbe der geschlossenen k-Formen auf X. Damit sieht man sowohl die Isomorphie in i) und die erste Sequenz von ii) des Satzes ein.

C Äquivariante glatte Deligne-Kohomologie

Eine systematische und detaillierte Behandlung der äquivarianten glatten Deligne-Kohomologie mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$ findet man in der vorzüglichen Arbeit *Equivariant smooth Deligne-Cohomology* von K.Gomi [G05]. Der dort behandelte Grad an Allgemeinheit umfaßt auch differenziebare Operationen von Lie-Gruppen auf Mannnigfaltigkeiten, während wir hier den Fall diskreter Gruppen betrachten, allerdings mit beliebigen Untergruppen von $\mathbb{R}$.

Sei also G eine diskrete Gruppe, X eine G-Mannigfaltigkeit und A eine Untergruppe on $\mathbb{R}$. Es bezeichne ferner $A_{N\bar{G}\times_G X}$ die konstante simpliziale Garbe auf $N\bar{G} \times_G X$.

Dem Abschnitt über die Kohomologie mit Werten in einem Komplex simplizialer abelscher Garben A.6 folgend betrachten wir nun die simpliziale Mannigfaltigkeit $X := N\bar{G} \times_G G_{\mathbb{C}}/K$ und den folgenden Komplex simplizialer abelscher Garben

$$A^G_{k,\mathcal{D}}: \qquad 0 \to A_{N\bar{G}\times_G X} \xrightarrow{i} A^0_{N\bar{G}\times_G X} \xrightarrow{d} A^1_{N\bar{G}\times_G X} \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} A^{k-1}_{N\bar{G}\times_G X}$$

auf $N\bar{G} \times_G G_{\mathbb{C}}/K$. Damit läßt sich nun die äquivariante Deligne-Kohomologie wie folgt definieren:

Definition C.0.12. Der Komplex von simplizialen abelschen Garben

$$A^G_{k,\mathcal{D}}: \qquad 0 \to A_{N\bar{G}\times_G X} \xrightarrow{i} A^0_{N\bar{G}\times_G X} \xrightarrow{d} A^1_{N\bar{G}\times_G X} \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} A^{k-1}_{N\bar{G}\times_G X}$$

auf $N\bar{G} \times_G X$ heißt der G-**äquivariante glatte Deligne-Komplex** von X. Seine Kohomologie

$$H^\bullet_{G,\mathcal{D}}(X, A) := H^\bullet_{\mathcal{D}}(N\bar{G} \times_G X, A) := H^\bullet(A^G_{k,\mathcal{D}})$$

heißt die G-**äquivariante glatte Deligne-Kohomologie** von X mit Koeffizienten in A.

Bemerkung C.0.13 (K.Gomi [G05]). Bekanntlich verallgemeinert die äquivariante Standard-Kohomologie die Standard-Kohomologie. Die äquivariante glatte Deligne-Kohomologie hingegen, verallgemeinert nicht nur die glatte Deligne-Kohomologie, sondern auch die Standard-äquivariante Kohomologie.

Literatur

[BL95] J-M. Bismut, J. Lott: *Flat vector bundles, direct images and higher real analytic torsion,* J. of AMS Vol. 8 Issue 2, 1995, 291-363

[BL195] J-M. Bismut, J. Lott: *Torus bundles and the group cohomology of* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$, arXiv:dg-ga/9502004 v1, 1995, 291-363

[Br93] J.-L. Brylinski: *Loop Spaces, Characteristic Classes and Geometric Quatization,* Birkhäuser, 1993

[BrMcL96] J.-L. Brylinski, D.A. McLaughlin: *Cech Cocycles for characteristic classes,* Commun. Math. Phys. 178, 225-236, 1996

[Bun03] U. Bunke: *Index theory, eta Forms and Deligne Cohomology,* arXiv:math.DG/0201112 v3, 30.12.2003

[Bu02] J. I. Burgos: *The Regulators of Beilinson and Borel,* CRM Monograph Series Vol.15, 2002

[ChS85] J. Cheeger, J. Simons: *Differential characters and geometric invariants,* Lecture Notes in Math. 1167, Springer Verlag Berlin, Heidelberg, New York, 1985, 50-80

[CS74] S-S. Chern, J. Simons: *Characteristic Forms and geometric invariants,* in Ann. of Math. (2) 99, 1974, 49-69

[D74] P. Deligne: *Théorie de Hodge III,* in Publications Mathématique de lÍ.H.É.S, tome 44, 1974, 5-77

[Do63] A. Dold: *Partitions of unity in the theroy of fibrations,* Ann. of Math. Vol.78, No 2, 1963, 223-255

[Du76] J. L. Dupont: *Simplicial de Rham cohomology and characteristic classes of flat bundles,* Topology,Vol.15, 1976, 233-245

[Du78] J. L. Dupont: *Curvature and Characteristic Classes,* LNM 640, Springer, 1978

[Du03] J. L. Dupont: *Fibre bundles and Chern-Weil Theory,* Lecture Notes, Aarhus, 2003

[DuHaZu00] J. L. Dupont, R. Hain, S. Zucker: *Regulators and characteristic classes,* CRM Procceedings and lecture notes Vol. 24, 2000

[DuK05] J. L. Dupont, F. W. Kamber: *Gerbes, Simplicial Forms and invariants for Families of Foliated Bundles,* Commun. Math. Phys. 253, 2005, 253-282

[Fi97] G. Fischer: *Lineare Algebra,* 11.Auflage, Vieweg, 1997

[GHV73] W. Greub, S. Halperin, R. Vanstone: *Connections, Curvature and Cohomology Volume II,* Academic Press New York, 1973

[GM03] S.I. Gelfand, Yu. I. Manin: *Methods of Homomological Algebra,* Second Edition, Springer, 2003

[Goe03] S. Goette: *Analytic torsion for families,* Notes from Workshop Sept 1-4, Göttingen, 2003

[GJ99] P. G. Goerss, J. F. Jardine: *Simplicial homotopy theory ,* Birkhäuser, 1999

[G05] K. Gomi: *Equivariant smooth Delgine-Cohomology,* Osaka J. Math. 42, 2005, 309-337

[Ig03] K. Igusa: *A_∞-functors and higher torsion,* Notes form Workshop Sept 1-4, Göttingen, 2003

[KT75] F. W. Kamber, Ph. Tondeur: *Foliated Bundles and Characteristic Classes*, Springer Lecture Notes in Mathematik 493, 1975

[KT68] F. W. Kamber, Ph. Tondeur: *Flat Manifolds*, Springer Lecture Notes in Mathematik 67, 1968

[Kar77] M. Karoubi: *K-Theory An Introduction,* Springer, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 226, 1977

[Kob87] S. Kobayashi: *Differential geometry of complex vectorbundles,* Princeton University Press, 1987

[Mi56] J. W. Milnor: *Construction of universal bundles II,* Ann. of Math. 63, 1956, 430-436

[Mi58] J. W. Milnor: *On the existence of a connection with curvature zero,* Comm. Math. Helv. 32, 1958, 215-223

[MiSt74] J. W. Milnor, J. D. Stasheff: *Characteristic Classes,* Princeton Univ. Press, 1974

[Mu04] J. Murakami, A. Ushijima:*A volume formula for hyperbolic tetrahedra in terms of edge lengths* arXiv:math.MG0402087, 2004

[HiNe91] J. Hilgert, H.-H. Neeb: *Lie-Gruppen und Lie-Algebren,* Viewg, 1991

[NR6163] M.S. Narasimhan, S.Ramanan: *Existence of universal connection,* in Amer. J. Math. 83 (1961), 563-572; 85 (1963), 223-231.

[Sch70] H. Schubert: *Kategorien I*, Springer-Verlag, 1970

[Seg68] G. Segal: *Classifying spaces and spectral sequences.* IHES,1968, 105-112

[Seg74] G. Segal: *Categories and cohomology theories*, Topology Vol.13, 293-312

[Sr96] V. Srinivas: *Algebraic K-Theory,* Birkhäuser, 1996

[Ta79] G. Tamme: *Einführung in die étale Kohomologie* , Regensburger Trichter 17, 1979

[Ta99] G. Tamme: *Kohomologie von Schemata,* Vorlesung vom SS 1999, Universität Regensburg

[tDk74] T. tom Dieck: *On the homotopy type of classifying spaces,* manuscripta math. 11, Springer-Verlag, 1974, 41-49

[tDk00] T. tom Dieck: *Topologie,* deGryter, 2000

[Weibel94] C. A. Weibel: *An introduction to homological algebra,* Cambridge, 1994

[We80] R. O. Wells: *Differential Analysis an Complex Manifolds,* Springer-Verlag, 1980