Bierweiterungen für algebraische Zykel und Poincarébündel

Dissertationsschrift zur Erlangung des Doktorgrades der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.) der NWF I - Mathematik der Universität Regensburg

vorgelegt von

Martin Seibold aus Schöllnach

-2007-

Promotionsgesuch eingereicht am: 29. Januar 2007

Die Arbeit wurde angeleitet von: Prof. Dr. Klaus Künnemann

Prüfungsausschuss:

Prof. Dr. Guido Kings (Vorsitzender)

Prof. Dr. Klaus Künnemann

Prof. Dr. Uwe Jannsen

Prof. Dr. Wolfgang Hackenbroch

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung

Seien X und S glatte, projektive k-Varietäten der Dimension d_X bzw. d_S und $\pi\colon X \to S$ ein flacher, projektiver, surjektiver Morphismus, der über einer offenen, dichten Teilmenge $S' \subset S$ glatt ist. Sind $p, q \in \mathbb{N}$ mit $p+q = d_X - d_S + 1$, so wird in dieser Arbeit für die von Bloch im glatten Fall definierte $\mathbb{G}_{\mathrm{m},S}$-Bierweiterung $\mathbb{E}$ von $\underline{\mathrm{CH}}^p_{\mathrm{hom}}(X/S) \times \underline{\mathrm{CH}}^q_{\mathrm{hom}}(X/S)$ eine neue Definition über Kozykeldaten gegeben und es werden ihre Torseure berechnet. Ist k ein algebraisch abgeschlossener Körper, so wird darüberhinaus für $S = \mathrm{Spec}(k)$ gezeigt, dass der Pullback der Poincaré-Bierweiterung $\mathbb{P}$ von $|(\mathrm{Pic}^0_{X/k})_{\mathrm{red}}| \times |\mathrm{Alb}(X)|$ und $\mathbb{E}$ kanonisch isomorph sind. Allgemeiner wird der Zusammenhang zwischen Poincaré- und Blochscher Bierweiterung auch für höhere Picardvarietäten beschrieben.

Einleitung

Im Zentrum dieser Arbeit steht die Blochsche Bierweiterung. Dieses Objekt ist interessant, da man mit ihm, wie S. Bloch in seiner Arbeit [Bl1] bemerkt die Möglichkeit hat Höhenpaarungen zu studieren und zu reinterpretieren. Man kann Bierweiterungen analog zu [SGA 7] in einem sehr allgemeinen Rahmen, wie etwa in der Sprache der Topoi studieren. In dieser Arbeit soll aber eine weit konkretere Situation betrachtet werden. Sei T ein Schema und seien $\mathcal{A}$ sowie $\mathcal{B}$ Zariski-Garben abelscher Gruppen. Eine $\mathbb{G}_{\mathrm{m},T}$-Bierweiterung über $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$ ist eine Familie $\mathbb{B} := (\mathbb{B}_{a,b})$ von $\mathbb{G}_{\mathrm{m},T}$-Torseuren über $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$ zusammen mit Gruppengesetzen

$$+^1_{a,a',b}\colon \mathbb{B}_{a,b}\times\mathbb{B}_{a',b}\to\mathbb{B}_{a+a',b} \quad \text{und} \quad +^2_{a,b,b'}\colon \mathbb{B}_{a,b}\times\mathbb{B}_{a,b'}\to\mathbb{B}_{a,b+b'}$$

über den Gruppengesetzen von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$. Dabei sollen diese Abbildungen neben der Assoziativität, der Kommutativität und der Verträglichkeit mit Restriktion auch eine gewisse kanonische Kompatibilität untereinander erfüllen.
Das für diese Arbeit wichtigste Beispiel einer $\mathbb{G}_{\mathrm{m},T}$-Bierweiterung ist die Blochsche Bierweiterung $\mathbb{E}$. Im Weiteren betrachte man folgende <u>Grundsituation</u>: Seien X und S glatte, projektive Varietäten der Dimension d_X bzw. d_S über einem Körper k. Weiter bezeichne $\pi\colon X\to S$ einen flachen, projektiven, surjektiven Morphismus, der über einer offenen, dichten Teilmenge $S'\subset S$ glatt ist. Darüberhinaus fixiere man mit $p,q\in\mathbb{N}$ natürliche Zahlen, für die $p+q=d_X-d_S+1$ gilt. Man bezeichne mit $\mathrm{CH}^*_{\mathrm{hom}}(X/S)$ die Elemente aus $\mathrm{CH}^*(X)$, die über allen Punkten von S' homologisch trivial sind und mit $\mathrm{Z}^*_{\mathrm{hom}}(X/S)$ die Zykel, deren Klassen in $\mathrm{CH}^*_{\mathrm{hom}}(X/S)$ liegen. Schließlich schreibe man $\underline{\mathrm{CH}}^*_{\mathrm{hom}}(X/S)$ für die zu $\mathrm{CH}^*_{\mathrm{hom}}(X/S)$ assoziierte Zariski-Garbe über S. Mit diesen Bezeichnungen ist $\mathbb{E}$ eine $\mathbb{G}_{\mathrm{m},S}$-Bierweiterung über $\underline{\mathrm{CH}}^p_{\mathrm{hom}}(X/S)\times\underline{\mathrm{CH}}^q_{\mathrm{hom}}(X/S)$. Sei in der zuvor beschriebenen Grundsituation π zusätzlich glatt, d. h. es gelte $S=S'$. Dann wird in [Bl1] die Blochsche Bierweiterung $\mathbb{E}$ als Pushout einer langen exakten Homologiesequenz von höheren Chowgruppen konstruiert. Sei $U\subset S$ offen und man bezeichne mit $\mathfrak{M}(U)$ die Menge aller Paare von Zykeln (W,α) mit $W\in\mathrm{Z}^p_{\mathrm{hom}}(X/S)$ und $\alpha\in\mathrm{Z}^q_{\mathrm{rat}}(X)$, so dass sich W und α eigentlich und über U gar nicht schneiden. Bei der Konstruktion von $\mathbb{E}$ in [Bl1] wird ein nicht trivialer Morphismus

$$\sigma_{U,.}(.)\colon \mathfrak{M}(U)\to\mathbb{G}_{\mathrm{m},S}(U);\quad (W,\alpha)\mapsto\sigma_{U,W}(\alpha) \tag{0.1}$$

definiert, der für $(W,\alpha)\in\mathfrak{M}(U)$ und $W\in\mathrm{Z}^p_{\mathrm{rat}}(X)$ die Eigenschaft

$$\sigma_{U,W}(\alpha)=\sigma_{U,\alpha}(W) \tag{0.2}$$

hat. Ein zentraler Punkt dieser Arbeit ist es zu zeigen, dass $\mathbb{E}$ bereits eindeutig durch die dem System von Schnitten $\sigma_{U,W}(\alpha)\in\Gamma\big(U,\,\mathbb{G}_{\mathrm{m},S}\big)$ mit $(W,\alpha)\in\mathfrak{M}(U)$ zugeordneten $\mathbb{G}_{\mathrm{m},S}$-Kozykeldaten definiert ist. Da diese Kozykeldaten in der zuvor beschriebenen Grundsituation

definiert werden, verallgemeinert dies die Konstruktion von $\mathbb{E}$ in [Bl1] auch auf den Fall, dass π nur auf einer offen, dichten Teilmenge $S' \subset S$ glatt ist.
Seien $w \in \mathrm{CH}^p_{\mathrm{hom}}(X/S)$ und $z \in \mathrm{CH}^q_{\mathrm{hom}}(X/S)$. Es bezeichne $\mathcal{L}_{w,z}$ das kanonisch mit dem $\mathbb{G}_{\mathrm{m},S}$-Torseur $\mathbb{E}_{w,z}$ korrespondierende Geradenbündel über S. Weiterhin fixiere man mit $W \in \mathrm{Z}^p_{\mathrm{hom}}(X/S)$ und $Z \in \mathrm{Z}^q_{\mathrm{hom}}(X/S)$ Repräsentanten von w bzw. z, die sich eigentlich schneiden. Gilt in der Grundsituation zusätzlich, dass π glatt ist und handelt es sich bei S um eine Kurve, so zeigt O. Meyer in [Me] folgende Gleichung in $\mathbb{Z}$:

$$\deg\bigl(\mathcal{L}_{w,z}\bigr) = \deg\bigl(W \centerdot Z\bigr) \tag{0.3}$$

Ein weiterer zentraler Punkt dieser Arbeit ist die zuvor genannte Aussage wie folgt zu verallgemeinern: In der allgemeinen Grundsituation erhält man zum zuvor fixierten Zykelpaar (W, Z), vermöge des Schnittprodukts mit Träger, einen eindeutig bestimmten Zykel $W \centerdot Z \in \mathrm{Z}^{d_X - d_S + 1}(X)$, der $w \centerdot z$ repräsentiert. Darüberhinaus zeigt man, dass das Paar (W, Z) kanonisch einen rationalen Schnitt $\{Z\}_W$ von $\mathbb{E}_{w,z}$ induziert. Mit diesen Bezeichnungen wird folgende Gleichung in $\mathrm{Div}(S)$ gezeigt:

$$\mathrm{div}\bigl(\mathbb{E}_{w,z},\, \{Z\}_W\bigr) = \pi_*\bigl(W \centerdot Z\bigr) \tag{0.4}$$

Auch erhält man mit dieser Formel den eingangs erwähnten Zusammenhang zwischen Blochschen Bierweiterungen und Höhenpaarungen.

In der Einleitung von [Bl1] schreibt Bloch, dass er in seinem Artikel die Absicht hat, *'...to show that one can construct "Poincaré biextensions" for cycles of codimension > 1.'* Explizite Formeln, die einen Bezug zwischen Blochschen und Poincaré-Bierweiterungen herstellen und damit diese Bemerkung konkretisieren, werden von Bloch aber nicht angegeben. Seien Y eine glatte, projektive Varietät über $\mathbb{C}$, $r, s \in \mathbb{N}$ Zahlen mit $r + s = d_Y + 1$ und $\mathcal{J}^r(Y)$ die r-te Griffiths intermediär Jakobische von Y. Es bezeichne $\mathbb{P}$ die Poincaré-Bierweiterung von $|\mathcal{J}^r(Y)| \times |\mathcal{J}^s(Y)|$ zu einem fixierten Poincarébündel und $\mathbb{E}$ die Blochsche Bierweiterung von $\mathrm{CH}^r_{\mathrm{hom}}(Y) \times \mathrm{CH}^s_{\mathrm{hom}}(Y)$. Weiterhin hat man mit der jeweiligen Abel-Jakobi-Abbildung einen kanonischen Morphismus von $\mathrm{CH}^r_{\mathrm{hom}}(Y)$ nach $|\mathcal{J}^r(Y)|$. Mit diesen Bezeichnungen gibt S. Müller-Stach in [MS] einen Isomorphismus der zugrundeliegenden Torseure von $\mathbb{E}$ und $\mathbb{P}$ an. Man fixiere einen Zykel $W \in \mathrm{Z}^s_{\mathrm{hom}}(Y)$ sowie dessen Bild in $|\mathcal{J}^s(Y)|$ und bezeichne mit $\mathbb{E}_W$ und $\mathbb{P}_W$ die entsprechenden Erweiterungen. Dann zeigt Müller-Stach, dass diese Torseurisomorphismen einen Isomorphismus zwischen $\mathbb{E}_W$ und dem Pullback von $\mathbb{P}_W$ entlang der Abel-Jakobi-Abbildung induzieren. Dabei ist ein entscheidender Punkt im Beweis dieser Aussage, dass die Blochsche Konstruktion von $\mathbb{E}$ über die Deligne-Kohomologie faktorisiert. Denn damit kann Müller-Stach ausnutzen, dass man die intermediär Jakobischen als Quotienten von geeigneten komplexen Kohomologiegruppen von Y erhält. Mit anderen Methoden wird in dieser Arbeit eine algebraische Version dieser Aussage bewiesen. Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und X eine glatte, projektive K-Varietät. Man bezeichne die Elemente aus $\mathrm{CH}^p(X)$, die algebraisch äquivalent zu Null sind, mit $\mathrm{A}^p(X)$ und benenne mit $\mathbb{E}^{\mathrm{A}}$ die Einschränkung der Blochschen Bierweiterung von $\mathrm{CH}^1_{\mathrm{hom}}(Y) \times \mathrm{CH}^{d_Y}_{\mathrm{hom}}(Y)$ auf $\mathrm{A}^1(Y) \times \mathrm{A}_0(Y)$. Weiterhin schreibe man

$$\theta^1 \colon \mathrm{A}^1(X) \to |(\mathrm{Pic}^0_{X/K})_{\mathrm{red}}| \quad \text{sowie} \quad \theta_0 \colon \mathrm{A}_0(X) \to |\mathrm{Alb}(X)|$$

für die beiden kanonischen Abbildungen. Bezeichnet man mit $\mathbb{P}$ die Poincaré-Bierweiterung von $|(\mathrm{Pic}^0_{X/K})_{\mathrm{red}}| \times |\mathrm{Alb}(X)|$ zu einem fixierten, rigidifizierten Poincarébündel, dann wird in dieser Arbeit gezeigt, dass $\mathbb{E}^{\mathrm{A}}$ und $(\theta^1 \times \theta_0)^*\mathbb{P}$ nicht nur in dem von Müller-Stach gezeigten, schwachen Sinne kanonisch isomorph sind, sondern bereits als Bierweiterungen. Es wird also bewiesen, dass es einen kanonischen Isomorphismus von K^*-Bierweiterungen

$$\mathbb{E}^{\mathrm{A}} \xrightarrow{\sim} (\theta^1 \times \theta_0)^*\mathbb{P} \tag{0.5}$$

gibt.
Schließlich ist ein letzter zentraler Punkt dieser Arbeit, auch für andere Kodimensionen als 1 und d_X eine algebraische Version der zuvor zitierten Aussagen von Müller-Stach zu zeigen. Dazu betrachte man mit den p-ten höheren Picardvarietäten ($p \in \{1, ..., d_X\}$) das algebraische Pendant der Griffiths intermediär Jakobischen. Diese wurden von H. Saito in [Sa] als abelsche Varietäten $\mathrm{Pic}^p_{X/K}$ zusammen mit kanonischen Morphismen $\theta^p \colon \mathrm{A}^p(X) \to |\mathrm{Pic}^p_{X/K}|$ so konstruiert, dass sie in den Fällen $p = 1$ und $p = d_X$ mit der Picard- bzw. der Albanesevarietät übereinstimmen. Seien $p, q \in \mathbb{N}$ mit $p + q = d_X + 1$. Dann existieren weiterhin als Verallgemeinerung von Poincarédivisoren Korrespondenzen $\mathfrak{P}^p_X \in \mathrm{CH}^p(\mathrm{Pic}^p_{X/K} \times X)$, die Poincarézykel genannt werden. Nach [Sa] induziert ${}^t\mathfrak{P}^p_X \colon \mathrm{A}^q(X) \to \mathrm{A}^1(\mathrm{Pic}^p_{X/K})$ eine Isogenie $\lambda^p_X \colon \mathrm{Pic}^q_{X/K} \to (\mathrm{Pic}^p_{X/K})\hat{}$. Sei nun $\mathbb{E}^{\mathrm{A}}$ die Einschränkung der Blochschen Bierweiterung von $\mathrm{CH}^p_{\mathrm{hom}}(X) \times \mathrm{CH}^q_{\mathrm{hom}}(X)$ auf $\mathrm{A}^p(X) \times \mathrm{A}^q(X)$ und $\mathbb{P}^p$ die Poincaré-Bierweiterung von $|\mathrm{Pic}^p_{X/K}| \times |(\mathrm{Pic}^p_{X/K})\hat{}|$ zu einem fixierten, rigidifizierten Poincarébündel. Dann hat man einen kanonischen Isomorphismus

$$(\mathfrak{P}^p_X \times \mathrm{id})^*\mathbb{E}^{\mathrm{A}} \to (\theta_0 \times \theta^q)^*(\mathrm{id} \times |\lambda^p_X|)^*\mathbb{P}^p \tag{0.6}$$

von K^*-Bierweiterungen auf $\mathrm{A}_0(\mathrm{Pic}^p_{X/K}) \times \mathrm{A}^q(X)$.

Diese Arbeit untergliedert sich in zehn Kapitel und ist wie folgt aufgebaut:
Sei X ein separiertes Schema von endlichem Typ über dem Spektrum eines Körpers k. Dann werden im ersten Kapitel die für diese Arbeit wesentlichen Sachverhalte aus der Schnitttheorie wiederholt. Unter Anderem wird dabei auf Zykel eingegangen, die sich eigentlich schneiden und deren Schnitt studiert.
Die Blochschen Zykelkomplexe $\mathrm{z}^*(X, .)$ und die Blochschen Chowgruppen $\mathrm{CH}^*(X, .)$ einer quasi-projektiven k-Varietät X sind die zentralen Objekte des zweiten Kapitels. Konkret werden ihre Definitionen wiederholt und es wird an wichtige Funktorialitäten und den Bezug zwischen $\mathrm{CH}^*(X, 0)$ und den gewöhnlichen Chowgruppen $\mathrm{CH}^*(X)$ erinnert. Schließlich wird der von Bloch definierte Isomorphismus

$$\iota \colon \mathrm{CH}^1(X, 1) \xrightarrow{\sim} \Gamma\big(X, \mathbb{G}_{\mathrm{m},X}\big)$$

für den Fall, dass X das Spektrum eines Körpers ist berechnet.
In Kapitel 3 liegt das Augenmerk auf dem zentralen Objekt dieser Arbeit, den $\mathbb{G}_{\mathrm{m},T}$-Bierweiterungen von $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ mit $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ (Zariski-)Garben abelscher Gruppen über einem Schema T. Konkret wird die sehr allgemeine Definition einer Bierweiterung in [SGA 7] auf die eben genannte Situation spezialisiert. Für k^*-Bierweiterungen abelscher Gruppen gibt D. Mumford in [Mu] eine Charakterisierung von Bierweiterungen über Kozykeldaten. Diese Beschreibung wird in Kapitel 3 auf den Fall einer $\mathbb{G}_{\mathrm{m},T}$-Bierweiterung über $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ verallgemeinert. Auch wird erläutert, wie man zu einem Satz von $\mathbb{G}_{\mathrm{m},T}$-Kozykeldaten über $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ eine $\mathbb{G}_{\mathrm{m},T}$-Bierweiterung von $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ erhält und umgekehrt.

Man betrachte nun die Grundsituation und die von Bloch für $W \in \mathrm{Z}^p_{\mathrm{hom}}(X/S)$ konstruierte Abbildung

$$\sigma_{U,W} \colon \mathrm{Z}^q_{(.\cap|W|)_U=\emptyset,\mathrm{rat}}(X) \to \mathbb{G}_{\mathrm{m},S}(U)$$

aus (*0.1*). In Kapitel 4 wird für das System von Schnitten $\sigma_{U,W}(\alpha) \in \mathbb{G}_{\mathrm{m},S}(U)$ ($U \subset S$ offen) eine axiomatische neue Beschreibung gegeben, in der unter anderem auch die Gleichung (*0.2*) benutzt wird. Da Bloch beim Beweis der Formel (*0.2*) nicht alle Details ausführt, werden dort auch entsprechende Punkte nachgetragen. Darüberhinaus wird für spezielle Zykel W und α eine explizite Formel für $\sigma_{U,W}(\alpha)$ angegeben, die man noch nicht in [Bl1] findet.
Bezeichnet $\mathbb{E}$ die von Bloch in [Bl1] konstruierte Blochsche Bierweiterung über der Garbe $\underline{\mathrm{CH}}^p_{\mathrm{hom}}(X/S) \times \underline{\mathrm{CH}}^q_{\mathrm{hom}}(X/S)$, dann ist die Philosophie im Folgenden, dass diese Bierweiterung bereits durch die Schnitte $\sigma_{.,.}(.)$ bestimmt ist. In Kapitel 5 und 6 wird dies wie folgt konkretisiert: Es wird zunächst mit den Schnitten $\sigma_{.,.}(.)$ ein Satz von $\mathbb{G}_{\mathrm{m},S}$-Kozykeldaten $\mathfrak{K}^{\mathrm{CH}}$ über $\underline{\mathrm{CH}}^p_{\mathrm{hom}}(X/S) \times \underline{\mathrm{CH}}^q_{\mathrm{hom}}(X/S)$ angegeben. Sei $\mathbb{E}^{\mathrm{CH}}$ die mit $\mathfrak{K}^{\mathrm{CH}}$ korrespondierende Bierweiterung. Sind $U \subset S$ offen und $W, Z \in \mathrm{Z}^*_{\mathrm{hom}}(X/S)$ geeignet gewählt, so besitzt der mit $[W]$ und $[Z]$ korrespondierende Torseur $\mathbb{E}^{\mathrm{CH}}_{[W],[Z]}$ von $\mathbb{E}^{\mathrm{CH}}$ einen kanonischen Rahmen über U, der mit $\{Z\}_{U,W}$ bezeichnet wird. Sind $W', Z' \in \mathrm{Z}^*_{\mathrm{hom}}(X/S)$ weitere geeignet gewählte Zykel, so sind die in Kapitel 5 konstruierten Kozykeldaten gerade so gegeben, dass

$$\{Z\}_{U,W} + \{Z'\}_{U,W} = \{Z + Z'\}_{U,W}, \quad \{Z\}_{U,W} + \{Z\}_{U,W'} = \{Z\}_{U,W+W'}$$

gilt. Hat man für geeignete Zykel W, W', Z', Z zusätzlich $[W]_U = [W']_U$ und $[Z]_U = [Z']_U$, so gilt weiterhin

$$\{Z\}_{U,W} = \sigma_{U,W}(Z - Z') \cdot \sigma_{U,Z'}(W - W') \cdot \{Z'\}_{U,W'}.$$

Da diese Gleichungen die Blochsche Bierweiterung charakterisieren, erhält man $\mathbb{E} = \mathbb{E}^{\mathrm{CH}}$. Um das bis hierhin erlangte Verständnis der Blochschen Bierweiterung noch weiter zu vertiefen, werden in Kapitel 6 für die Torseure von $\mathbb{E}$ kanonische, rationale Schnitte betrachtet und deren Divisoren berechnet. Seien dazu $W, Z \in \mathrm{Z}^*_{\mathrm{hom}}(X/S)$ Zykel geeigneter Kodimension, die sich eigentlich schneiden. Weiter bezeichne $\{Z\}_W$ den kanonisch mit W und Z korrespondierenden, rationalen Schnitt von $\mathbb{E}_{[W],[Z]}$. Dann wird in Kapitel 6 mit Hilfe der Beschreibung von $\sigma_{.,.}(.)$ aus Kapitel 4

$$\operatorname{div}\bigl(\mathbb{E}_{[W],[Z]}, \{Z\}_W\bigr) = \pi_*(W \centerdot Z)$$

gezeigt und damit das in (*0.3*) zitierte Resultat von Meyer verallgemeinert.
Der technische Grundstock für die letzten Kapitel wird in Kapitel 7 gelegt. Seien $n, r \in \mathbb{N}$ sowie X und Y glatte, projektive k-Varietäten, die glatt, projektiv und surjektiv über der glatten, projektiven k-Varietät S liegen. Weiterhin betrachte man $v' \in \mathrm{CH}^{n+r+1}(X \times_S Y)$ und die Korrespondenz $v \in \mathrm{CH}^{n+r+1}(X \times Y)$ mit $v = \vartheta_* v'$, wobei $\vartheta \colon X \times_S Y \to X \times Y$ die kanonische, reguläre Immersion bezeichne. Dann wird gezeigt, dass für die entsprechenden Blochschen Bierweiterungen $\mathbb{E}^X$ auf X und $\mathbb{E}^Y$ auf Y ein kanonischer Isomorphismus von $\mathbb{G}_{\mathrm{m},S}$-Torseuren über $\underline{\mathrm{CH}}^{d_X-n+1}_{\mathrm{hom}}(X) \times \underline{\mathrm{CH}}^{d_Y-r+1}_{\mathrm{hom}}(Y)$ der folgenden Art existiert:

(*0.7*) $(v \times \mathrm{id})^* \mathbb{E}^Y \to (\mathrm{id} \times {}^t v)^* \mathbb{E}^X; \quad (v \times \mathrm{id})^* \{Z\}_{U,V(W)} \mapsto (\mathrm{id} \times {}^t v)^* \{{}^t V(Z)\}_{U,W}$

Hierbei seien $U \subset S$ offen, $W \in \mathrm{Z}^*_{\mathrm{hom}}(X/S)$ bzw. $Z \in \mathrm{Z}^*_{\mathrm{hom}}(Y/S)$ Zykel und V ein Repräsentant von v, so dass $\{Z\}_{U,{}^t V(W)}$ und $\{V(Z)\}_{U,W}$ Rahmen der entsprechenden Torseure sind. Dieses Resultat findet man im Spezialfall $S = \mathrm{Spec}(\mathbb{C})$ und $r = 1$ bereits bei [MS], wobei der in dieser Arbeit benutzte Beweiszugang ein anderer ist. Die im vorliegenden Text verwendete Beweisidee basiert nämlich darauf, dass die Zuordnung $\{Z\}_{U,V(W)} \mapsto \{{}^tV(Z)\}_{U,W}$ einen von allen Wahlen unabhängigen Isomorphismus der Torseure $\mathbb{E}_{[V(W)],[Z]}$ und $\mathbb{E}_{[W],[{}^tV(Z)]}$ liefert. Für diese Unabhängigkeit sind dabei die ebenfalls in Kapitel 7 bewiesenen Gleichungen

$$\sigma_{U,Z}\big(V(\alpha)\big) = \sigma_{U,{}^tV(Z)}\big(\alpha\big) \quad \text{und} \quad \sigma_{U,Z}\big(\Lambda(W)\big) = \sigma_{U,W}\big({}^t\Lambda(Z)\big)$$

mit geeigneten Wahlen von $U \subset S$ offen, $V, \Lambda \in \mathrm{Z}^*(X \times Y)$ mit $\Lambda \sim_{\mathrm{rat}} 0$, $\alpha, W \in \mathrm{Z}^*_{\mathrm{hom}}(Y)$ mit $\alpha \sim_{\mathrm{rat}} 0$ und $Z \in \mathrm{Z}^*_{\mathrm{hom}}(X)$ entscheidend.
In Kapitel 8 werden die wesentlichen Definitionen im Zusammenhang mit Picard- und Albanesevarietäten wiederholt. Dabei wird insbesondere auch auf die Begriffe des Poincarédivisors $\mathfrak{P}$ und des Poincarébündels $\mathcal{P}_X$ einer glatten, projektiven k-Varietät X eingegangen. Es bezeichne nun X eine glatte, projektive Varietät über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K. In Kapitel 9 wird die Konstruktion der Poincaré-Bierweiterung $\mathbb{P}$ von $|(\mathrm{Pic}^0_{X/K})_{\mathrm{red}}| \times |\mathrm{Alb}(X)|$ zu einem fixierten, rigidifizierten Poincarébündel $\mathcal{P}$ wiederholt. Dabei wird gezeigt, dass für $a \in |(\mathrm{Pic}^0_{X/K})_{\mathrm{red}}|$, $b \in |\mathrm{Alb}(X)|$ und eine geeignete Wahl eines rationalen Schnitts s von $\mathcal{P}$

$$s_{a,b} := (a,b)^*s \otimes (a,0)^*s^{-1} \otimes (0,b)^*s^{-1} \otimes (0,0)^*s$$

einen Rahmen von $\mathbb{P}_{a,b}$ induziert, der ebenfalls mit $s_{a,b}$ bezeichnet werde. Man fixiere einen Punkt $\sigma \in X(K)$ und benenne die zugehörige, kanonische Abbildung mit $\psi\colon X \to \mathrm{Alb}(X)$. Für $\mathrm{w} \in \mathrm{CH}^q_{\mathrm{hom}}(X)$ und $z \in \mathrm{CH}^*_{\mathrm{hom}}(X)$ setze man $\theta^1(\mathrm{w}) = \omega$ und $\theta_0(z) = \zeta$. Sei Z ein Repräsentant von z und s ein nicht trivialer, rationaler Schnitt von $\mathcal{P}$, dessen Divisor $\mathfrak{P} := \mathrm{div}(s)$ die Zykel 0, ω, ζ und ψ_*Z geeignet schneidet. Dann ist ${}^t\mathfrak{P}\big(\psi_*Z - (\zeta) + (0)\big)$ rational äquivalent zu Null und es existiert eine eindeutig bestimmte, rationale Funktion $f^s_Z \in K\big(\mathrm{Pic}^0_{X/k})_{\mathrm{red}}\big)^*$ mit $f^s_Z(0) = 1$ und $\mathrm{div}(f^s_Z) = {}^t\mathfrak{P}\big(\psi_*Z - (\zeta) + (0)\big)$. Man betrachte $\tilde{\mathfrak{P}} := (\mathrm{id} \times \psi)^*\mathrm{div}(s)$ sowie den Repräsentanten $W := \tilde{\mathfrak{P}}\big((\omega) - (0)\big)$ von w. Dann wird in Kapitel 9 gezeigt, dass der kanonische Isomorphismus $\mathbb{E}^{\mathrm{A}} \xrightarrow{\sim} (\theta^1 \times \theta_0)^*\mathbb{P}$ aus *(0.5)* durch folgende Zuordnung induziert wird:

$$\{Z\}_W \mapsto f^s_W(\omega) \cdot (\theta^1 \times \theta_0)^* s_{\omega,\zeta}$$

In Kapitel 10 wird zunächst die Definition höherer Picardvarietäten wiederholt sowie an wesentliche Eigenschaften dieser abelschen Varietäten erinnert. Sei $\phi\colon A \to B$ eine Isogenie zwischen abelschen Varietäten und es gelte $(\hat{\phi} \times \mathrm{id})^*\mathcal{P}_A = (\mathrm{id} \times \phi)^*\mathcal{P}_B$ mit den Poincarébündeln $\mathcal{P}_A$ und $\mathcal{P}_B$. Bezeichnen $\mathbb{P}^A$ und $\mathbb{P}^B$ die entsprechenden Poincaré-Bierweiterungen, so wird als nächstes gezeigt, dass $(\phi \times \mathrm{id})^*\mathbb{P}^B$ und $(\mathrm{id} \times \hat{\phi})^*\mathbb{P}^A$ auf $|A| \times |\hat{B}|$ kanonisch isomorph sind. Schließlich wird man daraus den Isomorphismus in *(0.6)* unmittelbar erhalten, wenn man *(0.5)* und *(0.7)* benutzt.

An dieser Stelle möchte ich die Gelegenheit nutzen, mich ganz herzlich bei meinem Doktorvater Prof. Dr. K. Künnemann für die ausgesprochen gute Betreuung zu bedanken. Seine anregende Kritik war stets Ansporn, die Probleme noch genauer zu untersuchen und dadurch ein tieferes Verständnis zu erlangen. Auch möchte ich mich bei Gregor Schießl für das Korrekturlesen bedanken. Ein ganz besonderer Dank geht an meine Zimmerkollegin Stefanie Knorr, auf dass sie ihren Humor niemals verliere, mit dem sie mich durch alle Höhen und Tiefen meiner Promotion begleitet hat.

Kapitel 1

Grundlegende Definitionen und Konventionen

Es sei in der ganzen Arbeit k ein fest gewählter Körper.
In diesem Kapitel wird an einige grundlegende Definitionen erinnert. Konkret werden für Zykel die Begriffe der rationalen und homologischen Äquivalenz wiederholt. Ist X ein glattes, separiertes k-Schema von endlichem Typ, so hat man nach [Fu] ein Schnittprodukt

$$\_ \bullet \_ \colon \mathrm{CH}_*(X) \times \mathrm{CH}_*(X) \to \mathrm{CH}_*(X).$$

Weiterhin werden in diesen Kapitel mit W, $Z \in \mathrm{Z}_*(X)$ Zykel betrachtet, die sich eigentlich schneiden. Für solche Zykel wird an die wohlbekannte Aussage aus [Fu] erinnert, dass man in der Klasse $[W] \bullet [Z]$ kanonisch einen Repräsentanten $W \bullet Z$ mit Träger in $|W| \cap |Z|$ findet. Schließlich werden entsprechende Aussagen aus [Fu] noch so umformuliert, dass man eine Projektionsformel mit Träger erhält.

1.1 Definition (Varietät, abelsche Varietät)

Eine Varietät X über k ist ein integres k-Schema X, für das der Strukturmorphismus $\pi_X \colon X \to k$ separiert und von endlichem Typ (v. e. T.) ist. Weiterhin bezeichne man eine eigentliche k-Gruppenvarietät A als abelsche Varietät.
Bei einem Schema X schreibe man $\mathcal{O}_X$ für die Strukturgarbe. Ist x ein abgeschlossener Punkt von X, so benenne man das maximale Ideal des lokalen Rings $\mathcal{O}_{X,x}$ mit $\mathfrak{m}_x$ und schreibe $\kappa(x)$ für den Restklassenkörper $\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x$.
Für eine Varietät oder allgemeiner ein Schema X mit äquidimensionalen irreduziblen Komponenten fixiere man darüberhinaus folgende Notation: Die Menge der irreduziblen Komponenten von X bezeichne man mit $\mathrm{Comp}(X)$ und die Dimension mit d_X. Weiter schreibe man $X^{(r)}$ für die r-kodimensionalen Punkte von X und $|X|$ für die abgeschlossenen Punkte. Ist schließlich X irreduzibel, so benenne man den Funktionenkörper von X mit $K(X)$.

1.2 Definition (Zykel, rationale Äquivalenz und Chowgruppen)

Sei X ein separiertes k-Schema v. e. T. und sei $p \in \mathbb{N}$.

i) Man bezeichne mit $\mathrm{Z}_p(X)$ die freie abelsche Gruppe über alle p-dimensionalen, abgeschlossenen k-Untervarietäten von X mit Koeffizienten aus $\mathbb{Z}$. Die Elemente von

$\mathrm{Z}_p(X)$ heißen Zykel. Ist X äquidimensional, so setze man $\mathrm{Z}^{d_X-p}(X) := \mathrm{Z}_p(X)$. Bei einem Zykel $Z = \sum_{i=1}^n n_i Z_i \in \mathrm{Z}_p(X)$ mit $n_i \neq 0$ für $i = 1, ..., n$ nenne man $Z_1, ..., Z_n$ die Komponenten von Z und setze $\mathrm{Comp}(Z) := \{Z_1, ..., Z_n\}$. Für das Schema, bestehend aus den Komponenten von Z, versehen mit der induzierten, reduzierten Struktur, schreibe man $|Z|$.

ii) Man bezeichne mit $\mathrm{Z}_{p,\mathrm{rat}}(X) \subset \mathrm{Z}_p(X)$ die Untergruppe der Zykel, die rational äquivalent zu Null sind und setzte

$$\mathrm{CH}_p(X) := \mathrm{Z}_p(X)/\mathrm{Z}_{p,\mathrm{rat}}(X)$$

als die Chowgruppe von X zur Dimension p. Ist X äquidimensional, so setze man auch $\mathrm{CH}^{d_X-p}(X) := \mathrm{CH}_p(X)$.
<u>*Konvention:*</u> Die Klasse eines Zykels aus $\mathrm{Z}_*(X)$ in $\mathrm{CH}_*(X)$ wird mit dem entsprechenden Kleinbuchstaben oder mit [.] bezeichnet. Man schreibe weiterhin $W \in w$, wenn der Zykel W ein Repräsentant von $w \in \mathrm{CH}_p(X)$ ist.

1.3 Notation

Seien X und S zwei äquidimensionale, separierte Schemata v. e. T. über k. Weiterhin sei $f\colon X \to S$ ein flacher Morphismus, s ein Punkt von S und $W = \sum_{i=1}^n n_i \cdot W_i$ ein Zykel aus $\mathrm{Z}^*(X)$. Dann bezeichne

$$W_s := \sum_{i=1}^n n_i \cdot (W_i)_s \quad \in \ \mathrm{Z}^*(X_s)$$

den Zykel, bei dem jede Komponente von W durch deren Faser über s ersetzt wurde.

1.4 Bemerkung (Eine alternative Definition rationaler Äquivalenz)

Im Folgenden wird eine alternative Definition der rationalen Äquivalenz aus [Fu] 1.6 wiederholt. Sei dazu X ein separiertes k-Schema v. e. T. und $V \subset X \times \mathbb{P}^1_k$ bezeichne eine abgeschlossene $(n+1)$-dimensionale Untervarietät, die unter der Projektion $p\colon X \times \mathbb{P}^1_k \to \mathbb{P}^1_k$ dominant nach $\mathbb{P}^1_k$ abgebildet wird. Man betrachte die rationale Abbildung

$$f := p|_V\colon V \to \mathbb{P}^1_k.$$

Ist $P \in \mathbb{P}^1_k(k)$ ein k-rationaler Punkt von $\mathbb{P}^1_k$, so ist die schematheoretische Faser $f^{-1}(P)$ ein rein n-dimensionales Unterschema von $X \times \{P\} \cong X$, denn $p|_V$ ist dominant und damit flach. Bezeichnet $q\colon X \times \mathbb{P}^1_k \to X$ die Projektion, so setze man

$$V(P) := q_* f^{-1}(P) \in \mathrm{Z}^*(X),$$

wobei die bei [Fu] 1.6 verwendeten Klammern zum kennzeichnen des Fundamentalzykels nicht mitnotiert werden.

1.5 Proposition

Es gelte die Situation von 1.4.

i) Ein Zykel $\alpha \in \mathrm{Z}_n(X)$ ist genau dann rational äquivalent zu Null, wenn $(n+1)$-dimensionale Untervarietäten $V_1, ..., V_t$ von $X \times \mathbb{P}^1_k$ existieren, für die die Projektionen von V_i nach $\mathbb{P}^1_k$ mit $i = 1, ..., t$ dominant sind und für die gilt:

$$\alpha = \sum_{i=1}^{t} V_i(0) - V_i(\infty) \in \mathrm{Z}_n(X).$$

ii) Im Fall $\alpha = \mathrm{div}(f)$ mit $f \in K(Y)^*$ und $Y \subset X$ eine abgeschlossene Untervarietät kann man eine Untervarietät $V \subset X \times \mathbb{P}^1_k$ wie in i) direkt angeben: Sei $U_f \subset Y$ der „maximale Definitionsbereich" (vgl. [Ha] I Ex. 4.2) von f. Bezeichnet $f\colon U \to \mathbb{P}^1_k$ auch die durch f induzierte, rationale Funktion, so setze man $V_f \subset X \times \mathbb{P}^1_k$ als den Abschluss des Graphen $\Gamma_f := (\mathrm{id}, f)(U_f) \subset U_f \times \mathbb{P}^1_k$ von f in $X \times \mathbb{P}^1_k$. Dann gilt:

$$\alpha = V_f(0) - V_f(\infty).$$

Beweis:

Siehe [Fu] 1.6.

1.6 Beispiel

i) Ist C eine reguläre Kurve über k, so ist wohlbekannt, dass jede rationale Funktion $f \in K(C)$ einen eindeutig bestimmten Morphismus $f\colon C \to \mathbb{P}^1_k$ induziert. Damit besitzt jede rationale Funktion $f \in K(C)$ einen Graphen

$$\Gamma_f := (\mathrm{id}, f)(C) \subset C \times \mathbb{P}^1_k.$$

ii) Ist X ein irreduzibles Schema über k mit Dimension $d_X > 1$, so induziert eine rationale Funktion $f \in K(X)$ i. A. keinen Morphismus von X nach $\mathbb{P}^1_k$. Dazu betrachte man folgendes Standardbeispiel. Sei $X = \mathbb{A}^2_k = \mathrm{Spec}\big(k[x,y]\big)$ und $f \in K(X)$ die rationale Funktion, die auf $Y := \mathbb{A}^2_k \backslash \mathbb{A}^1_k \times \{0\}$ durch $f|_Y = \frac{x}{y}$ gegeben ist. Dann induziert f auf $\mathbb{A}^2_k \backslash |\mathrm{div}(f)|$ den Morphismus

$$\tilde{f}\colon \mathbb{A}^2_k \backslash |\mathrm{div}(f)| \to \mathbb{P}^1_k; \quad (x,y) \mapsto [\,\frac{x}{y} : 1]$$

und besitzt somit dort einen Graphen $\Gamma_{\tilde{f}}$. Bildet man nun V_f durch Abschließen von $\Gamma_{\tilde{f}}$ in $X \times \mathbb{P}^1_k$, so induziert die Projektion auf X einen Morphismus $\rho\colon V_f \to X$, der über $\mathbb{A}^2_k \backslash \{(0,0)\}$ ein Isomorphismus ist. Die Faser über dem Punkt $(0,0)$ ist aber ganz $(0,0) \times \mathbb{P}^1_k$. Damit ist ρ keinesfalls endlich. Dies zeigt insbesondere, dass f im Punkt $(0,0)$ nicht eindeutig bestimmt ist. Der Grund dafür ist, dass sich dort der Null- und Polstellendivisor von f schneiden.

Man erinnere sich an dieser Stelle auch an die wohlbekannte Aussage (vgl. [Li] 7.2.11 a)), dass eine rationale Funktion auf einer normalen Varietät überall außerhalb ihres Polstellendivisors definiert ist (Man beachte hierzu, dass ein ganz abgeschlossener Ring gerade gleich dem Durchschnitt aller seiner Lokalisierungen bei Primidealen der Höhe Eins ist). Insbesondere ist dies für jede glatte Varietät richtig (vgl. [Li] 4.2.16).

1.7 Definition (Eigentliches Schneiden)

Sei X ein äquidimensionales, separiertes Schema v. e. T. über k und seien $V, W \subset X$ zwei abgeschlossene Untervarietäten der Kodimension r bzw. s. Dann schreibe man $V \cap W$ für das abgeschlossene Unterschema, bestehend aus dem mengentheoretischen Schnitt von V und W, versehen mit der induzierten, reduzierten Struktur. Die Untervarietäten V und W schneiden sich eigentlich, wenn für jede irreduzible Komponente $C \in \mathrm{Comp}(V \cap W)$ gilt:

$$\mathrm{codim}_X(C) = r + s.$$

Ferner schneiden sich zwei Zykel $Z, Z' \in \mathrm{Z}^*(X)$ eigentlich, falls jede Komponente von Z jede Komponente von Z' eigentlich schneidet. Die Untergruppe der Zykel aus $\mathrm{Z}^p(X)$, die einen vorgegebenen Zykel $W \in \mathrm{Z}^*(X)$ eigentlich schneiden, bezeichne man mit $\mathrm{Z}^p_W(X)$. Entsprechend schreibe man $\mathrm{Z}^p_{\mathrm{rat},W}(X)$ für die Gruppe $\mathrm{Z}^p_{\mathrm{rat}}(X) \cap \mathrm{Z}^p_W(X)$.

1.8 Proposition

Ist X in der Situation von 1.7 glatt über k, so gilt stets die Ungleichung $\mathrm{codim}_X(C) \leq r+s$.

Beweis:

Man erhält $V \cap W$, auch indem man das abgeschlossene Unterschema $V \times W \subset X \times X$ mit der Diagonale $\triangle_X$ schneidet. Im glatten Fall ist $\triangle_X$ lokal von vollständigem Durchschnitt. D. h. $\triangle_X$ wird lokal stets durch $d_X = \dim(X)$ Gleichungen beschrieben. Jede dieser Gleichungen reduziert die Dimension von $V \times W$ aber höchstens um Eins. □

1.9 Bemerkung (Schnittprodukt mit Träger)

i) Ist X eine glatte Varietät über k, so existiert auf $\mathrm{CH}^*(X)$ ein kanonisches Schnittprodukt, das $\mathrm{CH}^*(X)$ mit der Struktur einer kommutativen, graduierten $\mathbb{Z}$-Algebra versieht.

ii) Für Zykel, die sich eigentlich schneiden, lässt sich dieses Schnittprodukt wie folgt verfeinern: Sind V und W Primzykel, die sich eigentlich schneiden, so wird bei [Fu] Chapter 6 bzw. 8 für die reguläre, abgeschlossene Immersion $\triangle\colon X \to X \times X$ eine verfeinerte Gysin-Abbildung

$$\triangle^!\colon \mathrm{CH}^0(V \times W) \to \mathrm{CH}^0(V \cap W)$$

definiert. Mit der abgeschlossenen Immersion $i\colon V \cap W \to X$ setze man

$$V \mathbin{\bullet} W := i_*\big(\triangle^! V \times W\big) \in \mathrm{Z}^*(X).$$

Bei Zykeln Z und Z' auf X schreibe man $Z \mathbin{\bullet} Z'$ für den Zykel, den man erhält, wenn man die eben beschriebene Konstruktion komponentenweise auf Z und Z' anwendet.

1.10 Lemma (Die Projektionsformel mit Träger)

Seien X und Y zwei glatte, separierte k-Schemata. Weiter bezeichne $f\colon X \to Y$ einen eigentlichen Morphismus und $A \subset X$ bzw. $B \subset Y$ seien abgeschlossene Untervarietäten. Man betrachte die Unterschemata $f(A) \cap B \subset Y$ bzw. $A \cap f^{-1}(B) \subset X$ und schreibe auch $f\colon A \cap f^{-1}(B) \to f(A) \cap B$ für die entsprechende Einschränkung von f. Dann ist folgendes Diagramm kartesisch

$$\begin{array}{ccc} A \cap f^{-1}(B) & \to & A \times B \\ f\downarrow & & \downarrow (f \times \mathrm{id}) \\ f(A) \cap B & \to & f(A) \times B \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \to & Y \times Y \end{array}$$

und es gilt die wohlbekannte Projektionsformel

$$f_*\big(A \,.\, f^*B\big) = f_*A \,.\, B \quad \text{in} \quad \mathrm{CH}_*\big(f(A) \cap B\big).$$

Schneiden sich $f(A)$ und B sowie A und $f^{-1}(B)$ eigentlich, dann gilt

$$f_*\big(A \,.\, f^*B\big) = f_*A \,.\, B \quad \text{in} \quad \mathrm{CH}^0\big(f(A) \cap B\big) = \mathrm{Z}^0\big(f(A) \cap B\big)$$

und damit insbesondere auch in $\mathrm{Z}_*(Y)$. Man erhält also eine Projektionsformel mit Träger. Analog gelten diese Aussagen auch in dem Fall, dass man statt der Untervarietäten A und B allgemeiner Zykel auf X bzw. Y und deren Träger betrachtet.

Beweis:

Dies folgt unmittelbar, wenn man bei [Fu] Proposition 8.1.1c) $Z = Y$, $X' = A \cap f^{-1}(B)$, $Y' = f(A) \cap B$, $g = \mathrm{id}_Y$ und $f' = f$ setzt. □

1.11 Lemma (Klassisches Movinglemma)

Sei X eine glatte, quasi-projektive k-Varietät und seien $Z, W \in \mathrm{Z}_*(X)$ Zykel auf X. Dann existiert in der rationalen Äquivalenzklasse z von Z stets ein Repräsentant Z', so dass sich W und Z' eigentlich schneiden.

Beweis:

Siehe [Fu] 11.4. □

1.12 Definition (Korrespondenz)

i) Seien X und Y zwei äquidimensionale, glatte, eigentliche k-Schemata. Dann bezeichne man jedes Element $v \in \mathrm{CH}^{n+m}(X \times Y)$ auch als Korrespondenz.

ii) Seien $p\colon X \times Y \to X$ und $q\colon X \times Y \to Y$ die beiden Projektionen. Jede Korrespondenz $v \in \mathrm{CH}^{n+m}(X \times Y)$ induziert wie folgt eine Operation auf den Chowgruppen:

$$\begin{array}{rccc} v\colon & \mathrm{CH}_n(X) & \to & \mathrm{CH}^m(Y) \\ & z & \mapsto & v(z) := q_*(v \,.\, p^*z). \end{array}$$

1.13 Bemerkung (Zykelabbildung)

Sei l eine Primzahl mit $l \neq \mathrm{char}(k)$ und X ein glattes, projektives k-Schema. Bezeichnet $\overline{k}$ einen separablen Abschluss von k, dann setze man $\overline{X} := X \times_k \overline{k}$. Nach [La] bzw. [SGA $4\frac{1}{2}$] hat man eine kanonische Abbildung, die sogenannte Zykelabbildung, vom Chowring von X in die l-adischen Kohomologiegruppen von $\overline{X}$:

$$\mathrm{cl}_l^p \colon \mathrm{CH}^p(X) \to \mathrm{H}^{2p}_{\text{ét}}\big(\overline{X}, \mathbb{Z}_l(p)\big).$$

1.14 Definition (Homologisch trivial)

i) Sei X ein glattes, projektives k-Schema und bezeichne $\overline{k}$ einen separablen Abschluss von k. Man betrachte die Abbildung cl_l^p aus 1.13 und nenne $\alpha \in \mathrm{CH}^p(X)$ kohomologisch trivial, wenn für jeden separablen Abschluss von k und für alle Primzahlen $l \neq \mathrm{char}(k)$ gilt:

$$\mathrm{cl}_l^p(\alpha) = 0.$$

ii) Seien X und S quasi-projektive Varietäten und sei $\pi \colon X \to S$ ein projektiver Morphismus, so dass der glatte Ort S' von X/S dicht in S liegt. Dann definiere man die Untergruppen $\mathrm{CH}^p_{\mathrm{hom}}(X/S) \subset \mathrm{CH}^p(X)$ und $\mathrm{Z}^p_{\mathrm{hom}}(X/S) \subset \mathrm{Z}^p(X)$ durch

$$\mathrm{CH}^p_{\mathrm{hom}}(X/S) := \left\{ z \in \mathrm{CH}^p(X) \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{für alle Punkte } s \text{ von } S' \text{ ist} \\ z_s \text{ kohomologisch tivial} \end{array} \right\}$$

und

$$\mathrm{Z}^p_{\mathrm{hom}}(X/S) := \left\{ Z \in \mathrm{Z}^p(X) \;\middle|\; z \in \mathrm{CH}^p_{\mathrm{hom}}(X/S) \right\}.$$

Kapitel 2

Blochsche höhere Chowgruppen

In diesem Kapitel wird die Definition der, von Bloch eingeführten, Blochschen höheren Chowgruppen wiederholt und es werden die grundlegenden Eigenschaften dieser Gruppen zusammengefasst. Im Fall einer glatten, quasi-projektiven k-Varietät X hat Bloch in [Bl2] gezeigt, dass es einen kanonischen Isomorphismus $\iota_X\colon \mathrm{CH}^1(X,1) \to \Gamma\big(X,\, \mathbb{G}_{\mathrm{m},X}\big)$ gibt. Am Ende dieses Kapitels wird für $X = \mathrm{Spec}(k)$ dieser Isomorphismus konkret berechnet.

2.1 Definition (Blochsche höhere Chowgruppen)

Im Folgenden wird die Definition der Blochschen höheren Chowgruppen angegeben. Dazu bezeichne man für $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\triangle^n := \mathrm{Spec}\Big(\mathbb{Z}[T_0, ..., T_n]/\big(\sum_{i=0}^{n} T_i - 1\big)\Big) \cong \mathbb{A}^n_{\mathbb{Z}}$$

den Standard-n-Simplex und schreibe kurz $\triangle^n_k$ statt $\triangle^n \otimes_{\mathbb{Z}} k$. Seien $n, m \in \mathbb{N}$ mit $m \leq n$. Eine Abbildung $\rho\colon \{0, ..., m\} \to \{0, ..., n\}$ heißt strikt ansteigend, falls $\rho(i) < \rho(i+1)$ für alle $i \in \{0, ..., m-1\}$ gilt. Für solch ein strikt ansteigendes ρ induziert

$$\xi_\rho\colon \mathbb{Z}[T_0, ..., T_n]/\big(\sum_{i=0}^{n} T_i - 1\big) \to \mathbb{Z}[T_0, ..., T_m]/\big(\sum_{i=0}^{m} T_i - 1\big); \quad T_i \mapsto \sum_{\rho(j)=i} T_j$$

eine abgeschlossene Immersion $\mathrm{Spec}(\xi_\rho)\colon \triangle^m \to \triangle^n$. Man betrachte für feste n, m mit $m < n$ alle $r = \binom{n}{m}$ strikt ansteigenden Abbildungen

$$\rho^1_{n,m}, ..., \rho^r_{n,m}\colon \{0, ..., m\} \to \{0, ..., n\}$$

und bezeichne alle so erhaltenen Bilder in $\triangle^n$ als die m-Seiten des Simplex $\triangle^n$. Die Seiten von $\triangle^n$ sind die m-Seiten, wobei m die Menge $\{0, ..., n-1\}$ durchläuft. Entsprechend erhält man für k (bzw. eine k-Varietät X) nach Basiswechsel die Seiten von $\triangle^n_k$ (bzw. $X \times \triangle^n_k$). Für eine quasi-projektive k-Varietät X definiere man die n-te Blochsche Zykelgruppe

$$\mathrm{z}^*(X, n) \subset \mathrm{Z}^*(X \times \triangle^n_k)$$

als die Untergruppe aller Zykel auf $X \times \triangle^n_k$, die die Seiten von $X \times \triangle^n_k$ eigentlich schneiden. Man benenne für $i \in \{0, ..., n\}$ mit $\rho_i\colon \{0, ..., n-1\} \to \{0, ..., n\}$ die strikt ansteigende Abbildung, die durch $\rho_i(j) = j$ für $j < i$ und $\rho_i(j) = j+1$ für $j \geq i$ gegeben ist. Damit definiere man

$$\partial^n_i\colon \mathrm{z}^*(X, n) \to \mathrm{z}^*(X, n-1)$$

im Sinne von 1.9 als den Pullback entlang $\mathrm{id} \times \mathrm{Spec}(\xi_{\rho_i})$ (d. h. als Schnitt mit der entsprechenden Seite von $\triangle^n$). Schließlich setze man

$$d_n := \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \partial_i^n : \quad \mathrm{z}^*(X,n) \to \mathrm{z}^*(X,n-1)$$

und erhalte einen Komplex $\mathrm{z}^*(X,.)$ wie folgt (vgl. [Bl2] Einleitung):

$$\ldots \to \mathrm{z}^*(X,2) \xrightarrow{d_2} \mathrm{z}^*(X,1) \xrightarrow{d_1} \mathrm{z}^*(X,0) \to 0.$$

Die Homologiegruppen $\mathrm{CH}^*(X,n) := \ker(d_n)/\mathrm{im}(d_{n+1})$ dieses Komplexes werden Blochsche höhere Chowgruppen genannt.

2.2 Bemerkung

Ist X eine quasi-projektive Varietät über dem Körper k, so gilt offenbar

$$\mathrm{z}^p(X,0) = \mathrm{Z}^p(X).$$

2.3 Definition (Die Gruppe $\mathrm{z}^p_W(X,.)$)

Sei X eine quasi-projektive Varietät über k und $T \subset X$ eine abgeschlossene Untervarietät. Man bezeichne mit

$$\mathrm{z}^p_T(X,n) \subset \mathrm{z}^p\big(X,n\big)$$

die Untergruppe aller Zykel auf $X \times \triangle^n_k$, die alle Seiten von $X \times \triangle^n_k$ und von $T \times \triangle^n_k$ eigentlich schneiden. Induziert durch die d_i aus 2.1, erhält man auf $\mathrm{z}^p_T(X,n)$ Randabbildungen d_i^T, mit denen $\mathrm{z}^p_T(X,\cdot)$ ein Komplex wird (vgl. [Bl2] §2). Sind $T_1,\ldots,T_r \subset X$ Untervarietäten, so definiere man analog dazu den Komplex $\mathrm{z}^p_{T_1,\ldots,T_r}(X,\cdot)$. Für $W = \sum_{i=1}^r n_i W_i \in \mathrm{Z}^q(X)$ schreibe man auch $\mathrm{z}^p_W(X,\cdot)$ statt $\mathrm{z}^p_{W_1,\ldots,W_r}(X,\cdot)$.

2.4 Lemma (Moving Lemma für die Blochschen Zykelgruppen)

Sei X eine quasi-projektive Varietät über k und $W \in \mathrm{Z}^q(X)$ ein Zykel. Dann ist die offensichtliche Inklusion $j\colon \mathrm{z}^p_W(X,\cdot) \to \mathrm{z}^p(X,\cdot)$ ein Quasi-Isomorphismus.

Beweis:

Siehe [Bl2] 4.2. □

2.5 Korollar (Verfeinertes Movinglemma)

Sei X eine quasi-projektive Varietät über k. Weiter seien $\gamma \in \mathrm{Z}^q(X)$ und $\alpha \in d_1\big(\mathrm{z}^p(X,1)\big)$ zwei Zykel, die sich eigentlich schneiden. Dann existiert ein Urbild $\beta \in \mathrm{z}^p(X,1)$ von α unter d_1, so dass β den Zykel $\gamma \times \triangle^1_k$ eigentlich schneidet.

Beweis:

Man betrachte den Unterkomplex $\big(\mathrm{z}^p_\gamma(X,.), d^\gamma_.\big)$ von $\big(\mathrm{z}^p(X,.), d_.\big)$ aus 2.3. Nach 2.4 ist die Inklusion $\mathrm{z}^p_\gamma(X,.) \hookrightarrow \mathrm{z}^p(X,.)$ ein Quasi-Isomorphismus, womit

$$\mathrm{im}(d^\gamma_1) = \mathrm{im}(d_1) \cap \mathrm{z}^p_\gamma(X)$$

gilt. Also ist α bereits aus $d^\gamma_1\big(\mathrm{z}^p_\gamma(X,1)\big)$. Damit existiert ein Urbild $\beta \in \mathrm{z}^p_\gamma(X,1) \subset \mathrm{z}^p(X,1)$ von α wie gefordert. □

2.6 Bemerkung (Eigenschaften der Blochschen Chowgruppen)

Es bezeichnen X und Y quasi-projektive Varietäten über dem Körper k.

i) Sei $f\colon X \to Y$ ein eigentlicher Morphismus der relativen Dimension d. Der in [Fu] 1.4 beschriebene, eigentliche Pushforward von Zykeln induziert einen Komplexmorphismus

$$f_*\colon \mathrm{z}^p(X,q) \to \mathrm{z}^{p-d}(Y,q); \quad Z \mapsto (f \times \mathrm{id}_{\triangle^q_k})_* Z$$

und somit für alle $p,q \in \mathbb{N}$ einen Homomorphismus $f_*\colon \mathrm{CH}^p(X,q) \to \mathrm{CH}^{p-d}(Y,q)$ (vgl. [Bl2] 1.3).

ii) Ist $f\colon X \to Y$ flach, dann induziert der flache Pullback aus [Fu] 1.7 einen Komplexmorphismus

$$f^*\colon \mathrm{z}^p(X,q) \to \mathrm{z}^p(Y,q); \quad Z \mapsto (f \times \mathrm{id}_{\triangle^q_k})^* Z$$

und damit für alle $p,q \in \mathbb{N}$ einen Homomorphismus $f^*\colon \mathrm{CH}^p(Y,q) \to \mathrm{CH}^p(X,q)$ (vgl. [Bl2] 1.3). Sei Y zusätzlich glatt über k und $g\colon X \to Y$ ein Morphismus. Dann findet man bei [Bl2] 4.1 die Konstruktion einer Abbildung

$$g^*\colon \mathrm{CH}^p(Y,q) \to \mathrm{CH}^p(X,q),$$

die den flachen Pullback auf die eben genannte Situation verallgemeinert.

iii) Nach [Bl2] §5 induziert das Produkt von Zykeln ein äußeres Produkt, also eine $\mathbb{Z}$-bilineare Abbildung

$$\mathrm{CH}^p(X,q) \times \mathrm{CH}^r(Y,s) \to \mathrm{CH}^{p+r}(X \times Y, q+s).$$

Ist X/k zusätzlich glatt, so wird $\mathrm{CH}^*(X,*) := \bigoplus_{p,q\in\mathbb{N}} \mathrm{CH}^p(X,q)$ vermöge des Pullbacks entlang der Diagonalen $\Delta\colon X \to X \times_k X$ ein bigraduierter Ring ([Bl2] §5).

Sind zusätzlich X und Y beide glatt über k und ist $f\colon X \to Y$ ein Morphismus, dann ist der Pullback $f^*\colon \mathrm{CH}^*(Y,*) \to \mathrm{CH}^*(X,*)$ sogar ein Ringhomomorphismus.

Im Folgenden wird der Beweis einer Aussage nachgetragen die Bloch in [Bl1] bereits implizit benutzt.

2.7 Proposition

Sei X eine glatte, quasi-projektive k-Varietät und $W \in \mathrm{Z}^q(X)$ ein Zykel. Dann induziert das verfeinerte Schnittprodukt aus 1.9 einen wohldefinierten Komplexmorphismus

$$s^r_W\colon \mathrm{z}^p_W(X,r) \to \mathrm{z}^{p+q}(X,r); \quad Z \mapsto (W \times \triangle^r_k) \centerdot Z.$$

Beweis:

1) Wohldefiniertheit:
Sei $Z \in \mathrm{z}^p_W(X,r) \subset \mathrm{Z}^q(X \times \triangle^r_k)$ und $(W \times \triangle^r_k) \cdot Z \in \mathrm{Z}^{p+q}(X \times \triangle^r_k)$ das verfeinerte Schnittprodukt von Z und $W \times \triangle^r_k$ gemäß 1.9. Um die Wohldefiniertheit von s^r_W einzusehen, muss man zunächst $(W \times \triangle^r_k) \cdot Z \in \mathrm{z}^{p+q}(X,r)$ verifizieren. Es ist also zu zeigen, dass $(W \times \triangle^r_k) \cdot Z$ alle Seiten von $X \times \triangle^r_k$ eigentlich schneidet. Sei dazu $0 \leq n \leq r$. Man hat nachzurechnen, dass jede irreduzible Komponente von $\big|(W \times \triangle^r_k) \cdot Z\big| \cap (X \times \triangle^n_k)$ die Kodimension $p+q+r-n$ hat. Offenbar genügt es für diese Aussage, die irreduziblen Komponenten von

$$\big(|W \times \triangle^r_k| \cap |Z|\big) \cap (X \times \triangle^n_k) = |W \times \triangle^n_k| \cap |Z|$$

zu betrachten. Diese haben aber nach Definition die passende Kodimension, da $Z \in \mathrm{z}^q_W(X,r)$ alle Seiten von $W \times \triangle^r_k$, also auch $W \times \triangle^n_k$ eigentlich schneidet. Dies zeigt die Wohldefiniertheit von s^r_W.
2) Komplexmorphismus:
Es ist noch zu zeigen, dass $s^{\cdot}_W$ ein Komplexmorphismus ist. Man fixiere dazu eine $(r-1)$-Seite $\triangle^{r-1,i}_X$ von $X \times \triangle^r_k$ mit $i \in \{0,...,r\}$ und beachte, dass sich die Zykel $W \times \triangle^r_k$, Z und $\triangle^{r-1,i}_X$ paarweise in $X \times \triangle^r_k$ eigentlich schneiden. Bezeichnet $\iota_i\colon \triangle^{r-1,i}_X \hookrightarrow X \times \triangle^r_k$ die entsprechende abgeschlossene Immersion, dann hat man nach Definition (bezüglich der Notation $\cdot_{\iota_i}$ vergleiche [Fu] 8.1):

$$\partial^r_i(Z) = \iota^*_i Z = Z \cdot_{\iota_i} \triangle^{r-1,i}_X.$$

Man beachte nun zunächst, dass $\triangle^{r-1,i}_X \cdot_{\iota_i} \big((W \times \triangle^r_k) \cdot_{\mathrm{id}} Z\big) = (W \times \triangle^{r-1}_k) \cdot_{\mathrm{id}} \partial^r_i(Z)$ als Gleichung in $\mathrm{Z}^{p+q}(\triangle^{r-1,i}_X)$ gilt, denn man hat:

$$\begin{aligned}
\triangle^{r-1,i}_X \cdot_{\iota_i} \big((W \times \triangle^r_k) \cdot_{\mathrm{id}} Z\big) &= \big(\triangle^{r-1,i}_X \cdot_{\iota_i} (W \times \triangle^r_k)\big) \cdot_{\iota_i} Z \qquad \text{([Fu] Prop. 8.1.1 a)}\\
&= (W \times \triangle^{r-1}_k) \cdot_{\iota_i} Z\\
&= \Delta^*(\mathrm{id} \times \iota_i)^*\big((W \times \triangle^{r-1}_k) \times Z\big)\\
&= \Delta^*\big((W \times \triangle^{r-1}_k) \times \iota^*_i Z\big)\\
&= (W \times \triangle^{r-1}_k) \cdot_{\mathrm{id}} \partial^r_i(Z).
\end{aligned}$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned}
\partial^r_i\big((W \times \triangle^r_k) \cdot_{\mathrm{id}} Z\big) &= \triangle^{r-1,i}_X \cdot_{\iota_i} \big((W \times \triangle^r_k) \cdot_{\mathrm{id}} Z\big)\\
&= (W \times \triangle^{r-1}_k) \cdot_{\mathrm{id}} \partial^r_i(Z).
\end{aligned}$$

Mit den Definitionen von 2.1 liefert dies

$$d_r\big(s^{r+1}_W(Z)\big) = s^r_W\big(d_r(Z)\big),$$

womit die Behauptung gezeigt ist. □

2.8 Bemerkung

Sei X eine glatte, quasi-projektive k-Varietät und $W \in \mathrm{Z}^q(X)$ ein Zykel. Betrachtet man beim Schnittprodukt in 2.6 iii) nur Schnitte mit der Klasse von $W \times \triangle^r_k$, so kann man zeigen, dass diese Abbildung gerade dem von $s^{\cdot}_W$ auf den höheren Blochschen Chowgruppen induzierten Morphismus entspricht.

2.9 Definition (Die Isomorphismen $\tilde{\xi}\colon \mathbb{A}^1_k \to \triangle^1_k$ und $\xi\colon \mathbb{P}^1_k\backslash\{1\} \to \triangle^1_k$)

Man benenne den durch

$$k[x,y]/(x+y-1) \to k[z]; \quad f(x,y) \mapsto f(z, 1-z)$$

induzierten Isomorphismus stets mit

$$\tilde{\xi}\colon \mathbb{A}^1_k \to \triangle^1_k.$$

Ist $\psi\colon \mathbb{P}^1_k \to \mathbb{P}^1_k$ der Automorphismus des $\mathbb{P}^1_k$, der 1 und ∞ vertauscht und 0 fest lässt, so bezeichne man weiterhin die Komposition von $\tilde{\xi}$ und ψ mit

$$\xi := \tilde{\xi} \circ \psi\colon \mathbb{P}^1_k\backslash\{1\} \to \triangle^1_k.$$

Nun wird der wohlbekannte Zusammenhang zwischen den gewöhnlichen und den 0-ten Blochschen Chowgruppen wiederholt. Da mir für diese Aussage kein Beweis bekannt ist, auf den ich verweisen könnte, wird ein solcher angegeben.

2.10 Proposition ($\mathbf{CH}^p(X,0) = \mathbf{CH}^p(X)$)

Ist X eine quasi-projektive k-Varietät, so entspricht die 0-te höhere Blochsche Chowgruppe der gewöhnlichen Chowgruppe. Es gilt also

$$\mathrm{CH}^p(X,0) = \mathrm{CH}^p(X).$$

Beweis:

Wegen 2.2 hat man lediglich $d_1\big(\mathrm{z}^*(X,1)\big) = \mathrm{Z}^*_{\mathrm{rat}}(X)$ zu zeigen.
Zu $d_1\big(\mathbf{z}^*(X,1)\big) \subset \mathbf{Z}^*_{\mathbf{rat}}(X)$:
Man betrachte hierfür einen Primzykel $Y \in \mathrm{z}^1(X,1)$ und setze $Y' = (\mathrm{id}\times\xi^{-1})(Y) \subset \mathbb{P}^1_X\backslash\{1\}$. Nach Konstruktion der Abbildung d_1 ist $d_1(Y) \in \mathrm{Z}^*(X)$ wie folgt gegeben:

$$d_1(Y) = \big((\mathrm{id}\times\tilde{\xi}^{-1})(Y)\big)(0) - \big((\mathrm{id}\times\tilde{\xi}^{-1})(Y)\big)(1) = Y'(0) - Y'(\infty).$$

Man überlegt sich, dass $d_1(Y)$ nur dann verschieden von Null ist, wenn $Y' \subset X \times \mathbb{P}^1_k\backslash\{1\}$ unter der Projektion dominant auf $\mathbb{P}^1_k$ abgebildet wird. Bezeichnet $\overline{Y}$ den Abschluss von Y' in $X\times\mathbb{P}^1_k$, so hat man:

$$d_1(Y) = \overline{Y}(0) - \overline{Y}(\infty).$$

Mit der alternativen Definition von rationaler Äquivalenz in 1.5 folgt $d_1(Y) \in \mathrm{Z}^*_{\mathrm{rat}}(X)$.
Zu $\mathbf{Z}^*_{\mathbf{rat}}(X) \subset \mathbf{im}(d_1)$:
Sei $T \subset X$ eine abgeschlossene Untervarietät und $f \in K(T)^*\backslash\{0,1\}$ eine rationale Funktion auf T. Mit der Konvention aus 1.5 setze man

$$\tilde{V}_f := (\mathrm{id}\times\xi)\big(V_f \cap X \times (\mathbb{P}^1_k\backslash\{1\})\big).$$

Dann überzeugt man sich, dass $\tilde{V}_f$ in $\mathrm{z}^*(X,1)$ liegt. Weiterhin gilt:

$$d_1\big(\tilde{V}_f\big) = V_f(0) - V_f(\infty) = \mathrm{div}(f).$$

Damit ist die Behauptung gezeigt. □

2.11 Satz (von Bloch)

Sei X eine glatte, quasi-projektive Varietät über k. Dann existiert ein kanonischer Isomorphismus wie folgt:

$$\iota_X \colon \mathrm{CH}^1(X,1) \to \mathbb{G}_{\mathrm{m},X}(X).$$

Beweis:

Siehe [Bl2] §6. □

In Lemma 2.15 wird der Morphismus ι_X für $X = \mathrm{Spec}(k)$ explizit angegeben. Dazu werden vorbereitend folgende Überlegungen angestellt: Bezeichne $\partial\triangle_k^m$ das reduzierte, abgeschlossene Unterschema, das aus allen $(m-1)$-Seiten von $\triangle_k^m$ besteht, $\mathcal{J}_m$ die zugehörige Idealgarbe und $\rho : \partial\triangle_k^m \to \triangle_k^m$ die kanonische Abbildung. Damit definiere man:

$$(1+\mathcal{J}_m)^* := \ker\big(\mathcal{O}^*_{\triangle_k^m} \to \rho_*\mathcal{O}^*_{\partial\triangle_k^m}\big).$$

Bloch erhält den Morphismus ι_X durch Komposition der im Weiteren noch näher beschriebenen Abbildungen Φ_X^m und ψ_X wie folgt:

$$\iota_X \colon \mathrm{CH}^1(X,1) \overset{\Phi_X^1}{\to} \mathrm{H}^1\big(X \times \triangle_k^1,\, (1+\mathcal{O}_X \otimes \mathcal{J}_1)^*\big) \overset{\psi_X}{\to} \Gamma(X, \mathbb{G}_{\mathrm{m},X}).$$

Um ι_K konkret zu beschreiben, werden nun im Fall $X = \mathrm{Spec}(k)$ die Abbildungen Φ_k^m und ψ_k getrennt betrachtet.

2.12 Bemerkung (Die Konstruktion von Φ_k^m)

Es wird im Folgenden die Blochsche Konstruktion der Abbildung Φ_k^m wiederholt: Zunächst betrachte man den Ring $\mathcal{O}_{\triangle_k^m,T} := \varinjlim \Gamma(U, \mathcal{O}_{\triangle_k^m})$ als den direkten Limes über alle offenen Mengen $U \subset \triangle_k^m$, die das Unterschema $\partial\triangle_k^m$ enthalten. Für diesen Ring gilt dabei: Nach 2.1 ist $\triangle_k^m$ affin. Man schreibe also $\triangle_k^m = \mathrm{Spec}(R)$ für einen geeigneten Ring R. Sind $\mathfrak{P}_1, ..., \mathfrak{P}_r$ die Primideale von R, die mit den irreduziblen Komponenten von $\partial\triangle_k^m$ korrespondieren, so überlegt man sich leicht, dass $S := R\backslash(\mathfrak{P}_1 \cup .... \cup \mathfrak{P}_r)$ multiplikativ ist und $\mathcal{O}_{\triangle_k^m,T} = R[S^{-1}]$ gilt. Man beachte bei Letzterem, dass für alle $U \subset \triangle_k^m$ offen mit $\partial\triangle_k^m \subset U$ die kanonische Abbildung $i_U \colon \Gamma(U, \mathcal{O}_{\triangle_k^m}) \to R[S^{-1}]$ injektiv ist. Weiterhin findet man für jedes $a \in R[S^{-1}]$ ein U mit $\partial\triangle_k^m \subset U \subset \triangle_k^m$, so dass a in $\mathrm{im}(i_U)$ liegt.
Es bezeichne $j \colon \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{\triangle_k^m,T}) \to \triangle_k^m$ die durch $R \to R[S^{-1}]$ induzierte Abbildung und man schreibe $\mathcal{O}_{\triangle_k^m,T}$ für die Strukturgarbe von $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{\triangle_k^m,T})$. Damit setze man

$$(1+\mathcal{J}_m \otimes j_*\mathcal{O}_{\triangle_k^m,T})^* := \ker\Big((j_*\mathcal{O}_{\triangle_k^m,T})^* \to \rho_*\mathcal{O}^*_{\partial\triangle_k^m} \otimes \big(j_*\mathcal{O}_{\triangle_k^m,T}\big)^*\Big).$$

Weiterhin überlegt man sich, dass die kanonischen Abbildungen

$$\mathcal{O}^*_{\triangle_k^m} \to (j_*\mathcal{O}_{\triangle_k^m,T})^* \quad \text{und} \quad \rho_*\mathcal{O}^*_{\partial\triangle_k^m} \to \rho_*\mathcal{O}^*_{\partial\triangle_k^m} \otimes (j_*\mathcal{O}_{\triangle_k^m,T})^*$$

injektive Garbenmorphismen sind. Also kommutiert folgendes Diagramm exakter Sequenzen, wenn $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ und $\mathcal{E}$ die entsprechenden Quotienten bezeichnen:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & (1+\mathcal{J}_m)^* & \to & j_*(1+\mathcal{J}_m \otimes j_*\mathcal{O}_{\triangle_k^m,T})^* & \to & \mathcal{C} & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \mathcal{O}^*_{\triangle_k^m} & \to & (j_*\mathcal{O}_{\triangle_k^m,T})^* & \to & \mathcal{D} & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \rho_*\mathcal{O}^*_{\partial\triangle_k^m} & \to & \rho_*\mathcal{O}^*_{\partial\triangle_k^m} \otimes (j_*\mathcal{O}_{\triangle_k^m,T})^* & \to & \mathcal{E} & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0. & &
\end{array}$$

Offenbar ist $j_*\mathcal{O}_{\triangle_k^m,T} \subset \mathcal{K}_{\triangle_k^m}$ eine Untergarbe der Garbe der rationalen Funktionen auf $\triangle_k^m$, womit wegen $\mathcal{C} \subset \mathcal{D} = (j_*\mathcal{O}_{\triangle_k^m,T})^*/\mathcal{O}^*_{\triangle_k^m}$ die Garben $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Untergarben der Garbe der Cartierdivisoren $\mathcal{K}^*_{\triangle_k^m}/\mathcal{O}^*_{\triangle_k^m}$ auf $\triangle_k^m$ sind. Nun liefert die Randabbildung aus der entsprechenden, langen, exakten Sequenz einen kanonischen Morphismus

$$\delta\colon \Gamma(\triangle_k^m, \mathcal{C}) \to \mathrm{H}^1\big(\triangle_k^m,\, (1+\mathcal{J}_m)^*\big).$$

Setzt man

$$\begin{array}{rcll}
\mathrm{Z}'\mathrm{z}^1(k,m) & := & \{Z \in \mathrm{z}^1(k,m) \mid \partial_i^m Z = 0,\ i=0,...,m-1\} & \text{und} \\
\mathrm{Z}\mathrm{z}^1(k,m) & := & \{Z \in \mathrm{Z}'\mathrm{z}^1(k,m) \mid \partial_m^m Z = 0\}, &
\end{array}$$

dann hat man gemäß Bloch eine exakte Sequenz wie folgt:

$$\mathrm{Z}'\mathrm{z}^1(k,m+1) \xrightarrow{\partial_{m+1}^{m+1}} \mathrm{Z}\mathrm{z}^1(k,m) \to \mathrm{CH}^1(k,m) \to 0.$$

Weiterhin überlegt man sich, dass $\mathrm{Z}\mathrm{z}^1(k,m)$ und $\Gamma(\triangle_k^m, \mathcal{C})$ über die Abbildung, die einem $Z \in \mathrm{Z}\mathrm{z}^1(k,m) \subset \mathrm{Z}^1(\triangle_K^m)$ den entsprechenden Cartierdivisor zuordnet isomorph sind. Ist

$$\beta\colon \mathrm{Z}\mathrm{z}^1(k,m) \xrightarrow{\cong} \Gamma(\triangle_k^m, \mathcal{C}) \xrightarrow{\delta} \mathrm{H}^1\big(\triangle_k^m,\, (1+\mathcal{J}_m)^*\big)$$

die entsprechende Komposition, so zeigt Bloch, dass

$$\mathrm{Z}'\mathrm{z}^1(k,m+1) \xrightarrow{\partial_{m+1}^{m+1}} \mathrm{Z}\mathrm{z}^1(k,m) \xrightarrow{\beta} \mathrm{H}^1\big(\triangle_k^m,\, (1+\mathcal{J}_m)^*\big)$$

die Nullabbildung ist. Damit erhält man über das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathrm{Z}'\mathrm{z}^1(k,m+1) & \xrightarrow{\partial_{m+1}^{m+1}} & \mathrm{Z}\mathrm{z}^1(k,m) & \to & \mathrm{CH}^1(k,m) & \to & 0 \\
 & {\scriptstyle 0}\searrow & {\scriptstyle\beta}\downarrow & & & & \\
 & & \mathrm{H}^1\big(\triangle_k^m,\, (1+\mathcal{J}_m)^*\big) & & & &
\end{array}$$

die folgende, kanonische Abbildung aus [Bl2] §6:

$$\Phi_k^m\colon \mathrm{CH}^1(k,m) \to \mathrm{H}^1\big(\triangle_k^m,\, (1+\mathcal{J}_m)^*\big).$$

Mit dieser Konstruktion ist klar, dass man Φ_k^m kennt, sobald man β resp. δ verstanden hat.

2.13 Proposition

Man identifiziere $\triangle_k^1$ über $\tilde{\xi}$ (2.9) mit $\mathbb{A}_k^1$ und setze $\tilde{\mathcal{J}}_1 := \tilde{\xi}^* \mathcal{J}_1$. Weiterhin schreibe man $\check{\mathrm{H}}^1(.,.)$ für die Kohomologiegruppen zum alternierenden Čechkomplex und fixiere die offene Überdeckung $\mathfrak{U} := \{D(z), D(1-z)\}$ des $\mathbb{A}_k^1 = \mathrm{Spec}(k[z])$. Man betrachte die beiden Untergruppen $\{z^n(1-z)^m \mid m,n \in \mathbb{Z}\} \subset \{cz^n(1-z)^m \mid c \in k^*, m,n \in \mathbb{Z}\}$ von $(k(z), \cdot)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \mathrm{H}^1\big(\mathbb{A}_k^1,\, (1+\tilde{\mathcal{J}}_1)^*\big) &= \check{\mathrm{H}}^1\big(\mathfrak{U},\, (1+\tilde{\mathcal{J}}_1)^*\big) \\ &= \big\{cz^n(1-z)^m \mid c \in k^*, m,n \in \mathbb{Z}\big\}/\big\{z^n(1-z)^m \mid m,n \in \mathbb{Z}\big\}. \end{aligned}$$

Beweis:

Unter $\triangle_k^1 = \tilde{\xi}(\mathbb{A}_k^1)$ entspricht $\partial\triangle_k^1$ dem affinen Schema $Y := \mathrm{Spec}\big(k[z]/(z-z^2)\big)$ und für $(1+\tilde{\mathcal{J}}_1)^*$ gilt über der standardoffenen Menge $D(f) \subset \mathbb{A}_k^1$ mit $f \in k[z]$:

$$\Gamma\big(D(f), (1+\tilde{\mathcal{J}}_1)^*\big) = \big(1 + (z-z^2)k[z]_f\big)^*.$$

Bezeichnet $\rho\colon Y = \mathrm{Spec}(k) \coprod \mathrm{Spec}(k) \to \mathbb{A}_k^1$ die Inklusion, so hat man offenbar nach Definition von $(1+\tilde{\mathcal{J}}_1)^*$ eine exakte Sequenz der Form

$$1 \to (1+\tilde{\mathcal{J}}_1)^* \to \mathcal{O}^*_{\mathbb{A}_k^1} \xrightarrow{\varsigma} \rho_*\mathcal{O}_Y^* \to 1. \qquad (2.1)$$

Um die Schnitte $\Gamma\big(D(f), (1+\tilde{\mathcal{J}}_1)^*\big)$ explizit zu berechnen, betrachte man $\mathcal{O}^*_{\mathbb{A}_k^1}$ und $\rho_*\mathcal{O}_Y^*$. Da die beiden Punkte von Y mit (z) und $(z-1)$ korrespondieren, hat man für $f \in k[z]$:

$$\Gamma\big(D(f), \rho_*\mathcal{O}_Y^*\big) = \begin{cases} k^* \times k^* & \text{für } (z),(z-1) \in D(f) \\ k^* & \text{für } \begin{matrix}\big((z) \in D(f) \wedge (z-1) \notin D(f)\big) \\ \big((z) \notin D(f) \wedge (z-1) \in D(f)\big)\end{matrix} \text{ oder} \\ 1 & \text{für } (z),(z-1) \notin D(f) \end{cases}.$$

Nun gilt $\Gamma\big(D(z), \mathcal{O}^*_{\mathbb{A}_k^1}\big) = \{cz^n | n \in \mathbb{Z}, c \in k^*\}$ und man sieht, dass für die Abbildung ς aus der Sequenz (*2.1*) mit $c \in k^*$ und $n \in \mathbb{Z}$ gilt: $\varsigma(cz^n) = c \in \Gamma\big(D(z), \rho_*\mathcal{O}_Y^*\big) = k^*$. Damit folgt

$$\Gamma\big(D(z), (1+\tilde{\mathcal{J}}_1)^*\big) = \{z^n |\, n \in \mathbb{Z}\}.$$

Analog erhält man $\Gamma\big(D(1-z), (1+\tilde{\mathcal{J}}_1)^*\big) = \{(1-z)^m |\, m \in \mathbb{Z}\}$. Da

$$\Gamma\big(D(z^2-z), \mathcal{O}^*_{\mathbb{A}_k^1}\big) = \{cz^n(z-1)^m \mid n,m \in \mathbb{Z}, c \in k^*\} \text{ und } \Gamma\big(D(z^2-z), \rho_*\mathcal{O}_Y^*\big) = \{1\}$$

ist, gilt weiterhin $\Gamma\big(D(z-z^2), (1+\tilde{\mathcal{J}}_1)^*\big) = \{cz^n(1-z)^m \mid c \in k^*,\ m,n \in \mathbb{Z}\}$.
Man bezeichne mit $\mathfrak{C}^i(\mathfrak{U},.)$ die i-ten Koketten und mit $\mathfrak{Z}^i(\mathfrak{U},.)$ die i-ten Kozykel zur Überdeckung $\mathfrak{U}$. Mit den Ausführungen von oben macht man sich leicht klar, dass der Funktor $\Gamma(U,.)$ die Exaktheit von (*2.1*) erhält, wenn für $U \subset \mathbb{A}_k^1$ offen $(z) \notin U$ oder $(1-z) \notin U$ gilt. Für solch ein U hat man aber:

$$\mathrm{H}^1\big(U,\, (1+\tilde{\mathcal{J}}_1)^*\big) \hookrightarrow \mathrm{H}^1\big(U,\, \mathcal{O}^*_{\mathbb{A}_k^1}\big) = \mathrm{Pic}(U) = \{0\}.$$

Mit [Ha] III Ex 4.11 gilt dann bereits

$$\mathrm{H}^1\big(\mathbb{A}_k^1, (1+\tilde{\mathcal{J}}_1)^*\big) = \check{\mathrm{H}}^1\big(\mathfrak{U}, (1+\tilde{\mathcal{J}}_1)^*\big).$$

Schließlich sind die 0- und 1-Koketten von der Form

$$\begin{array}{rcll} \mathfrak{C}^0\big(\mathfrak{U},(1+\tilde{\mathcal{J}}_1)^*\big) & = & \big\{z^n \bigm| n\in\mathbb{Z}\big\}\times\big\{(1-z)^m \bigm| m\in\mathbb{Z}\big\} & \text{bzw.} \\ \mathfrak{C}^1\big(\mathfrak{U},(1+\tilde{\mathcal{J}}_1)^*\big) & = & \big\{cz^n(1-z)^m \bigm| c\in k^*,\ m,n\in\mathbb{Z}\big\}. & \end{array}$$

Bezeichnet $\delta^0\colon \mathfrak{C}^0(\mathfrak{U},.)\to\mathfrak{C}^1(\mathfrak{U},.);\ \ (a,b)\mapsto \frac{a}{b}$ die Korandabbildung, so gilt wegen $|\mathfrak{U}|=2$

$$\check{\mathrm{H}}^1\big(\mathfrak{U},(1+\tilde{\mathcal{J}}_1)^*\big)=\mathfrak{C}^1\big(\mathfrak{U},(1+\tilde{\mathcal{J}}_1)^*\big)\Big/\delta^0\Big(\mathfrak{C}^0\big(\mathfrak{U},(1+\tilde{\mathcal{J}}_1)^*\big)\Big)$$

und es folgt die Behauptung. □

2.14 Bemerkung

Nach [Bl2] 6.3 sind $\mathrm{H}^1\big(\mathbb{A}^1_k,\big(1+\tilde{\mathcal{J}}_1)^*\big)$ und k^* isomorph. Offenbar ist nach 2.13 die nachfolgende, kanonische Abbildung ein Isomorphismus über den $\mathrm{H}^1\big(\mathbb{A}^1_k,\big(1+\tilde{\mathcal{J}}_1)^*\big)$ und k^* im Weiteren identifiziert werden sollen:

$$\psi_k^{-1}:=\alpha\colon k^*\to\mathrm{H}^1\big(\mathbb{A}^1_k,\big(1+\tilde{\mathcal{J}}_1)^*\big);\quad a\mapsto a.$$

2.15 Lemma

Man identifiziere erneut $\triangle^1_k$ über $\tilde{\xi}$ mit $\mathbb{A}^1_k$. Sei $P\in|\mathbb{A}^1_k|\backslash\{0,1\}$ ein abgeschlossener Punkt, $p(x)\in k[x]$ das zu P korrespondierende, irreduzible, normierte Polynom und $a\in\kappa(P)$ eine Nullstelle von $p(x)$. Bezeichnet $\mathrm{N}_{\kappa(P)/k}\colon\kappa(P)^*\to k^*$ die Norm, dann ist der Isomorphismus $\iota_k\colon\mathrm{CH}^1(k,1)\to k^*$ aus 2.11 nach linearem Fortsetzen gegeben durch

$$\iota_k\big(\tilde{\xi}(P)\big)=\mathrm{N}_{\kappa(P)/k}\left(\tfrac{a}{a-1}\right).$$

Beweis:

Es werden die Bezeichnungen von zuvor verwendet. Nach 2.12 genügt es, für die Berechnung von Φ^1_k resp. ι_k die Randabbildung $\delta\colon\Gamma\big(\mathbb{A}^1_k,\ \tilde{\xi}^*\mathcal{C}\big)\to\check{\mathrm{H}}^1\big(\mathfrak{U},(1+\tilde{\mathcal{J}}_1)^*\big)$ zu verstehen.

1) Allgemeines zur Randabbildung δ:

Man betrachte für die Randabbildung δ folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{cccccccc} & & & & & & \ker(\vartheta_{\tilde{\xi}^*\mathcal{C}}) & \\ & & & & & & \downarrow & \\ 1 & \to & \mathfrak{C}^0\big(\mathfrak{U},(1+\tilde{\mathcal{J}}_1)^*\big) & \to & \mathfrak{C}^0\big(\mathfrak{U},(1+\tilde{\mathcal{J}}_1\otimes j_*\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_k,T})^*\big) & \to & \mathfrak{C}^0\big(\mathfrak{U},\tilde{\xi}^*\mathcal{C}\big) & \to 0 \\ (2.2) & & \downarrow & & \downarrow\vartheta & & \downarrow\vartheta_{\tilde{\xi}^*\mathcal{C}} & \\ 1 & \to & \mathfrak{Z}^1\big(\mathfrak{U},(1+\tilde{\mathcal{J}}_1)^*\big) & \to & \mathfrak{Z}^1\big(\mathfrak{U},(1+\tilde{\mathcal{J}}_1\otimes j_*\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_k,T})^*\big) & \to & \mathfrak{Z}^1\big(\mathfrak{U},\tilde{\xi}^*\mathcal{C}\big) & \to 0 \\ & & \downarrow & & & & & \\ & & \check{\mathrm{H}}^1\big(\mathfrak{U},(1+\tilde{\mathcal{J}}_1)^*\big). & & & & & \end{array}$$

Offenbar ist $\ker(\vartheta_{\tilde{\xi}^*\mathcal{C}})=\Gamma(\mathbb{A}^1_k,\tilde{\xi}^*\mathcal{C})$. Nach 2.12 gilt weiterhin $\Gamma(\mathbb{A}^1_k,\tilde{\xi}^*\mathcal{C})=\tilde{\xi}^*\mathrm{Zz}^1(k,1)$ und schließlich hat man wegen $\mathrm{z}^1(k,0)=0$ definitionsgemäß noch $\mathrm{Zz}^1(k,1)=\mathrm{z}^1(k,1)$. Wie in

2.13 bemerkt, gilt wegen $|\mathfrak{U}| = 2$, dass $\mathfrak{Z}^1(\mathfrak{U},.) = \mathfrak{C}^1(\mathfrak{U},.)$ ist. Damit erhält man mit der Beschreibung der Schnitte von $(1+\tilde{\mathcal{J}}_1)^*$ und $\mathcal{O}_{\triangle^1_k,T}$ folgende Gleichungen:

$$\mathfrak{C}^0\big(\mathfrak{U},(1+\tilde{\mathcal{J}}_1\otimes j_*\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_k,T})^*\big) = \big(1+(z^2-z)k[z]_{(z-1)}\big)^* \times \big(1+(z^2-z)k[z]_{(z)}\big)^*$$

$$\mathfrak{Z}^1\big(\mathfrak{U},(1+\tilde{\mathcal{J}}_1\otimes j_*\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_k,T})^*\big) = \mathfrak{C}^1\big(\mathfrak{U},(1+\tilde{\mathcal{J}}_1\otimes j_*\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_k,T})^*\big) = \big(1+(z^2-z)k(z)\big)^* = k(z)^*.$$

2) Explizite Berechnung von $\iota_k\big(\tilde{\xi}(P)\big)$ für $P\in\mathbb{A}^1_k(k)\backslash\{0,1\}$:
Sei $P\in\mathbb{A}^1_k(k)\backslash\{0,1\}$ ein Punkt und $(z-a)\subset k[z]$ mit $a\in k\backslash\{0,1\}$ das zu P korrespondierende, maximale Ideal von $k[z]$. Zu $\tilde{\xi}(P)\in \mathrm{z}^1(k,1)$ betrachte man den Cartierdivisor $(\mathbb{A}^1_k, z-a)\in\Gamma(\mathbb{A}^1_k,\tilde{\xi}^*\mathcal{C})$ bzw. dessen Bild

$$\alpha := \big((D(z),z-a),(D(z-1),z-a)\big)\in\mathfrak{C}^0(\mathfrak{U},\tilde{\xi}^*\mathcal{C}).$$

Um ein Urbild von α unter

$$\tau=\tau_1\times\tau_2\colon \mathfrak{C}^0\big(\mathfrak{U},(1+\tilde{\mathcal{J}}_1\otimes j_*\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_k,T})^*\big)\to\mathfrak{C}^0(\mathfrak{U},\tilde{\xi}^*\mathcal{C})$$

zu erhalten, sind $n,m\in\mathbb{Z}$ und $c,c'\in k$ zu finden, so dass

$$c(z-a)z^n\in\big(1+(z^2-z)k[z]_{(z-1)}\big)^* \quad\text{bzw.}\quad c'(z-a)(z-1)^m\in\big(1+(z^2-z)k[z]_{(z)}\big)^*$$

gilt. Man betrachte hierzu

$$\tfrac{z-a}{(1-a)z} = 1+\tfrac{(z^2-z)a}{(1-a)z^2} \quad\text{und}\quad \tfrac{(1-a)z}{z-a} = 1+\tfrac{(z^2-z)a}{z(z-a)}$$

$$\text{mit}\quad \tau_1\big(\tfrac{z-a}{(1-a)z}\big) = \big(D(z),z-a\big).$$

Entsprechend hat man auf $D(z-1)$ die zueinander inversen Elemente

$$\tfrac{z-a}{a(z-1)} = 1+\tfrac{(z^2-z)(1-a)}{(z-1)^2a} \quad\text{und}\quad \tfrac{a(z-1)}{z-a} = 1+\tfrac{(z^2-z)(a-1)}{(z-1)(z-a)}$$

$$\text{mit}\quad \tau_2\big(\tfrac{z-a}{a(z-1)}\big) = \big(D(z-1),z-a\big).$$

Also gilt

$$\tau\big(\tfrac{z-a}{(1-a)z},\tfrac{z-a}{a(z-1)}\big)=\alpha.$$

Bildet man nun das Paar $\big(\tfrac{z-a}{(1-a)z},\tfrac{z-a}{a(z-1)}\big)$ mit der Abbildung

$$\vartheta\colon \mathfrak{C}^0\big(\mathfrak{U},(1+\tilde{\mathcal{J}}_1\otimes j_*\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_k,T})^*\big)\to\mathfrak{C}^1\big(\mathfrak{U},(1+\tilde{\mathcal{J}}_1\otimes j_*\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_k,T})^*\big)$$

aus dem Diagramm (*2.2*) ab, so erhält man gemäß dem Schlangenlemma

$$\vartheta\left(\big(\tfrac{z-a}{(1-a)z},\tfrac{z-a}{a(z-1)}\big)\right) = \tfrac{a(x-1)}{(1-a)x}\in\mathfrak{C}^1\big(\mathfrak{U},(1+\tilde{\mathcal{J}}_1)^*\big)\subset\mathfrak{C}^1\big(\mathfrak{U},(1+\tilde{\mathcal{J}}_1\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_k,T})^*\big).$$

Schließlich gilt noch

$$\psi_k\left(\tfrac{-a}{1-a}\cdot\tfrac{1-z}{z}\right) = \tfrac{-a}{1-a}\in k^*$$

und man erhält für den hier in 2) fixierten Punkt $P\in\mathbb{A}^1_k(k)\backslash\{0,1\}$:

$$\iota_k\big(\tilde{\xi}(P)\big) = \tfrac{-a}{1-a}.$$

3) Der Fall $P \in \mathbb{A}^1_k(L)\backslash\{0,1\}$ mit einer endlichen Körpererweiterung L/k:
Zunächst betrachte man $Z = \sum_{i=1}^n r_i \cdot \tilde{\xi}(P_i) \in \mathrm{z}^1(k,1)$ mit $P_1, ..., P_n \in \mathbb{A}^1_k(k)\backslash\{0,1\}$. Entspricht Z dem Cartierdivisor $\left(\mathbb{A}^1_k, \prod_{i=1}^n (z-a_i)^{r_i}\right)$ mit $a_i \in k$ für $i = 1, ..., n$, so erhält man analog zu den Berechnungen in 2), dass

$$\left(\prod_{i=1}^n \left(\tfrac{z-a_i}{(1-a_i)z}\right)^{r_i}, \prod_{i=1}^n \left(\tfrac{z-a_i}{a_i(z-1)}\right)^{r_i} \right) \in \mathfrak{C}^0\big(\mathfrak{U}, (1+\tilde{\mathcal{J}}_1 \otimes j_*\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_k,T})^*\big)$$

ein Urbild von $\left((D(z), \prod_{i=1}^n (z-a_i)^{r_i}), (D(z-1), \prod_{i=1}^n (z-a_i)^{r_i})\right)$ ist. Damit folgt entsprechend zu vorhin:

$$\iota_k(Z) = \prod_{i=1}^n \left(\tfrac{-a_i}{1-a_i}\right)^{r_i}.$$

Sei nun L/k eine endliche Körpererweiterung und sei P ein L-rationaler Punkt von $\mathbb{A}^1_k$. Offenbar kann man nach Übergang zur normalen Hülle ohne Einschränkung annehmen, dass L/k normal ist. Bezeichne $p(z) = \prod_{i=1}^n (z-a_i) \in k[z]$ das irreduzible Polynom, das mit P korrespondiert (also $a_1, ..., a_n \in L$). Ist L/k zusätzlich separabel, also galoissch mit Galoisgruppe G, so gilt

$$\prod_{\sigma\in G} \tfrac{z-\sigma(a)}{(1-\sigma(a))z} = \tfrac{p(z)}{p(1)z} \in k(z) \text{ bzw.}$$

$$\prod_{\sigma\in G} \tfrac{z-\sigma(a)}{\sigma(a)(z-1)} = \tfrac{p(z)}{p(0)(z-1)} \in k(z).$$

Damit ist mit der Vorüberlegung

$$\left(\tfrac{p(z)}{p(1)z}, \tfrac{p(z)}{p(0)(z-1)}\right)$$

ein Urbild von $\big((D(z), p(z)), (D(z-1), p(z))\big)$ und man erhält wie zuvor

$$\iota_k\big(\tilde{\xi}(P)\big) = \tfrac{p(0)}{p(1)} = \prod_{i=1}^n \tfrac{-a_i}{1-a_i} = \mathrm{N}_{L/k}\left(\tfrac{-a_1}{1-a_1}\right).$$

Im rein inseparablen Fall gilt $a_1 = ... = a_n =: a$ und analog zu vorhin hat man

$$\left(\tfrac{p(z)}{p(1)z}, \tfrac{p(z)}{p(0)(z-1)}\right)$$

als Urbild von $\big((D(z), p(z)), (D(z-1), p(z))\big)$. Da nach [Bo] 4.7 Satz 4 die Norm im rein inseparablen Fall dem Potenzieren mit dem Grad der Körpererweiterung entspricht und $p(z) = (z-a)^n$ gilt, erhält man

$$\iota_k\big(\tilde{\xi}(P)\big) = \tfrac{p(0)}{p(1)} = \tfrac{(-a)^n}{(1-a)^n} = \mathrm{N}_{L/k}\left(\tfrac{-a}{1-a}\right).$$

Da sich jede normale algebraische Erweiterung in eine separable und eine rein inseparable Teilerweiterung zerlegen lässt ([Bo] 3.7 Satz 5), folgt mit den beiden voranstehenden Spezialfällen die Behauptung. □

Wie das folgende Korollar zeigen wird, ist für die Aussage von 2.15 die Normierung ξ aus 2.9 besser geeignet als die Normierung $\tilde{\xi}$. Weiterhin beachte man folgendes:

i) Jeder abgeschlossene Punkt $R \in |\triangle^1_k| \subset |\mathbb{A}^2_k|$ ist von der Form $R = (P, 1-P)$ mit $P := \tilde{\xi}(R)$.

ii) Die Involution ψ aus 2.9 ist gegeben durch den Ringautomorphismus

$$\Psi \colon k[z_1, z_2] \to k[z_1, z_2] \quad \text{mit} \quad p(z_1, z_2) \mapsto p(z_1, z_1 - z_2).$$

2.16 Korollar

Korrespondiert ein Punkt $P \in |\mathbb{A}_k^1|\backslash\{0,1\}$ mit dem Polynom $p(z_1) \in k[z_1]$, so erhält man das Polynom $q(z_1) \in k[z_1]$, das mit dem Punkt $Q := \psi(P) \in |\mathbb{A}_k^1|\backslash\{0,1\}$ korrespondiert offenbar wie folgt: Man homogenisiere $p(z_1)$ mit der Variablen z_2 zu $p(z_1, z_2)$, wende den Morphismus Ψ aus Punkt ii) der Vorbemerkung auf $p(z_1, z_2)$ an und dehomogenisiere $\Psi\big(p(z_1, z_2)\big)$, indem man $z_2 = 1$ setzt. Da ψ ein Automorphismus des $\mathbb{P}_k^1$ ist, der a auf $\frac{a}{a-1}$ schickt, gilt offenbar $\kappa(P) = \kappa(Q)$. Ist $q(z_1) = z_1^n + ... + (-1)^n a_0$ und $a \in \kappa(P)$ eine Nullstelle von $q(z_1)$, so gilt:

$$\iota_k\big(\xi(Q)\big) = \iota_k\big((P, 1-P)\big) = \mathrm{N}_{\kappa(P)/k}(a) = a_0.$$

Beweis:

Dies rechnet man mit 2.15 und der Vorbemerkung unmittelbar nach. □

Kapitel 3

Grundlegendes zu Bierweiterungen

Sei S ein Schema. In diesem Abschnitt wird zunächst der Begriff eines $\mathbb{G}_{\mathrm{m},S}$-Torseurs wiederholt. Bei [SGA 7] VII findet man eine sehr allgemeine Definition einer Bierweiterung. In diesem Kapitel wird, angelehnt an [SGA 7], der Begriff einer $\mathbb{G}_{\mathrm{m},S}$-Bierweiterung von $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$ mit $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Zariski-Garben abelscher Gruppen wiederholt. In Analogie zur Beschreibung von Geradenbündeln durch klassische Kozykeldaten werden weiterhin auch Bierweiterungen über Kozykeldaten charakterisiert. Am Ende dieses Kapitels wird für eine $\mathbb{G}_{\mathrm{m},S}$-Bierweiterung $\mathbb{B}$ von $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$ und für zwei Homomorphismen abelscher Garben $\phi\colon \mathcal{F}\to\mathcal{A}$ und $\psi\colon \mathcal{G}\to\mathcal{B}$ der Pullback $(\phi\times\psi)^*\mathbb{B}$ von $\mathbb{B}$ entlang $\phi\times\psi$ definiert.

3.1 Bemerkung

Seien $\mathcal{L},\mathcal{L}'$ Zariski-Garben (von Mengen oder Gruppen) über einem Schema S. Die durch $(\mathcal{L}\times\mathcal{L}')(U) := \mathcal{L}(U)\times\mathcal{L}'(U)$ für $U\subset S$ offen definierte, mit den kanonischen Restriktionsabbildungen versehene Prägarbe ist bereits eine Garbe, die mit $\mathcal{L}\times\mathcal{L}'$ bezeichnet wird.

3.2 Definition ($\mathbb{G}_{\mathrm{m},S}$-Torseur)

Sei $\mathbb{T}$ eine Garbe von Mengen über einem Schema S, $\pi\colon \mathbb{G}_{\mathrm{m},S}\times\mathbb{T}\to\mathbb{T}$ eine $\mathbb{G}_{\mathrm{m},S}$-Operation auf $\mathbb{T}$ und $p_2\colon \mathbb{G}_{\mathrm{m},S}\times\mathbb{T}\to\mathbb{T}$ die Projektion. Man bezeichne $\mathbb{T}$ als $\mathbb{G}_{\mathrm{m},S}$-Torseur über S, falls es eine offene Überdeckung $\{U_i\}_{i\in I}$ von S gibt, so dass für alle $i\in I$ die von π induzierte Abbildung

$$(\pi|_{U_i},\, p_2|_{U_i})\colon \mathbb{G}_{\mathrm{m},U_i}\times\mathbb{T}|_{U_i}\to\mathbb{T}|_{U_i}\times\mathbb{T}|_{U_i}$$

ein Isomorphismus von Garben über U_i ist. Einen Schnitt von $\mathbb{T}$ über solch einer offenen Teilmenge U_i von S nenne man Rahmen oder Trivialisierung von $\mathbb{T}$ über U_i. Ist $\mathbb{T}'$ ein weiterer $\mathbb{G}_{\mathrm{m},S}$-Torseur, so bezeichne man einen Garbenmorphismus $f\colon \mathbb{T}\to\mathbb{T}'$ als Torseurmorphismus, wenn f mit den $\mathbb{G}_{\mathrm{m},S}$-Operationen auf beiden Seiten in der offensichtlichen Weise verträglich ist. Man schreibe $(\mathbb{G}_{\mathrm{m},S}-\mathfrak{Tor}/S)$ für die Kategorie, deren Objekte die $\mathbb{G}_{\mathrm{m},S}$-Torseure über S und deren Morphismen die Morphismen von $\mathbb{G}_{\mathrm{m},S}$-Torseuren sind.

3.3 Bemerkung

Offenbar ist jeder Morphismus von $\mathbb{G}_{\mathrm{m},S}$-Torseuren bereits ein Isomorphismus.

3.4 Definition (Produkt von $\mathbb{G}_{\mathrm{m},S}$-Torseuren)

Seien $\mathbb{T}$ und $\mathbb{T}'$ zwei $\mathbb{G}_{\mathrm{m},S}$-Torseure über S. Für $U \subset S$ offen ist die Operation

$$\mathbb{G}_{\mathrm{m},S}(U) \times \big(\mathbb{T}(U) \times \mathbb{T}'(U)\big) \to \mathbb{T}(U) \times \mathbb{T}'(U); \quad \big(g,(t,t')\big) \mapsto \big(g(t), g^{-1}(t')\big)$$

von $\mathbb{G}_{\mathrm{m},S}(U)$ auf $\mathbb{T}(U) \times \mathbb{T}'(U)$ frei. Damit definiere man

$$\big(\mathbb{T} \times^{\mathbb{G}_{\mathrm{m},S}} \mathbb{T}'\big)(U) := \mathbb{G}_{\mathrm{m},S}(U) \backslash \big(\mathbb{T}(U) \times \mathbb{T}'(U)\big)$$

als den Raum der Bahnen. Dann ist

$$\mathbb{T} \times^{\mathbb{G}_{\mathrm{m},S}} \mathbb{T}'$$

ein $\mathbb{G}_{\mathrm{m},S}$-Torseur, der als das (kontrahierte) Produkt von $\mathbb{T}$ und $\mathbb{T}'$ bezeichnet wird.

Im Folgenden sei S ein Schema und $\mathcal{A}$ sowie $\mathcal{B}$ Zariski-Garben abelscher Gruppen über S.

3.5 Definition ($\mathbb{G}_{\mathrm{m},S}$-Bierweiterung von $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$)

Eine kommutative $\mathbb{G}_{\mathrm{m},S}$-Bierweiterung $\mathbb{B}$ von $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ über S ist eine (Zariski-)Garbe von Mengen $\mathbb{B}$ zusammen mit einem surjektiven Garbenmorphismus $p\colon \mathbb{B} \to \mathcal{A} \times \mathcal{B}$, so dass die folgenden drei Punkte gelten:

1) Man hat eine $\mathbb{G}_{\mathrm{m},S}$-Operation π auf $\mathbb{B}$ derart, dass wenn man $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ mit der trivialen $\mathbb{G}_{\mathrm{m},S}$-Operation versieht, $p\colon \mathbb{B} \to \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ ein $\mathbb{G}_{\mathrm{m},S}$-äquivarianter Morphismus ist.

2) Sei $U \subset S$ offen und $a \in \Gamma\big(U, \mathcal{A}\big)$ bzw. $b \in \Gamma\big(U, \mathcal{B}\big)$ jeweils ein Schnitt. Dann definiere man eine Garbe $\mathbb{B}^U_{a,b}$ über U durch

$$\mathbb{B}^U_{a,b}(U') := \{w \in \mathbb{B}(U') \,|\, p(w) = (a|_{U'}, b|_{U'})\}$$

für $U' \subset U$ offen. Mit 1) induziert π eine $\mathbb{G}_{\mathrm{m},U}$-Operation auf $\mathbb{B}^U_{a,b}$. Vermöge dieser Operation ist $\mathbb{B}^U_{a,b}$ ein $\mathbb{G}_{\mathrm{m},U}$-Torseur. Bezeichnet 0 jeweils das neutrale Element der Gruppe $\Gamma\big(S, \mathcal{A}\big)$ bzw. $\Gamma\big(S, \mathcal{B}\big)$, so ist darüberhinaus $\mathbb{B}^S_{0,0}$ ein trivialer $\mathbb{G}_{\mathrm{m},S}$-Torseur.

3) Schließlich gibt es für alle offenen Teilmengen $U \subset S$ und alle Schnitte $a, a' \in \Gamma\big(U, \mathcal{A}\big)$ sowie $b, b' \in \Gamma\big(U, \mathcal{B}\big)$ Morphismen von $\mathbb{G}_{\mathrm{m},S}$-Torseuren (die so genannten Gruppengesetze)

$$+^1_{a,a',b}\colon \mathbb{B}^U_{a,b} \times^{\mathbb{G}_{\mathrm{m},S}} \mathbb{B}^U_{a',b} \to \mathbb{B}^U_{a+a',b} \quad \text{und} \quad +^2_{a,b,b'}\colon \mathbb{B}^U_{a,b} \times^{\mathbb{G}_{\mathrm{m},S}} \mathbb{B}^U_{a,b'} \to \mathbb{B}^U_{a,b+b'},$$

so dass folgende Punkte erfüllt sind:

i) *Assoziativität der Gruppengesetze:*

Für alle $a, a_1, a_2, a_3 \in \Gamma\big(U, \mathcal{A}\big)$ und alle $b, b_1, b_2, b_3 \in \Gamma\big(U, \mathcal{B}\big)$ gilt

$$+^1_{a_1+a_2,a_3,b} \circ (+^1_{a_1,a_2,b} \times \mathrm{id}) = +^1_{a_1,a_2+a_3,b} \circ (\mathrm{id} \times +^1_{a_2,a_3,b})$$

und

$$+^2_{a,b_1+b_2,b_3} \circ (+^2_{a,b_1,b_2} \times \mathrm{id}) = (\mathrm{id} \times +^2_{a,b_1,b_2+b_3}) \circ +^2_{a,b_2,b_3}.$$

ii) *Kommutativität der Gruppengesetze:*

Bezeichnet v_{12} jeweils das Vertauschen der beiden Faktoren in einem Produkt, so gilt

$$+^1_{a,a',b} = +^1_{a',a,b} \circ v_{12} \colon \mathbb{B}^U_{a,b} \times^{\mathbb{G}_{\mathrm{m},S}} \mathbb{B}^U_{a',b} \to \mathbb{B}^U_{a+a',b}$$

und

$$+^2_{a,b,b'} = +^2_{a,b',b} \circ v_{12} \colon \mathbb{B}^U_{a,b} \times^{\mathbb{G}_{\mathrm{m},S}} \mathbb{B}^U_{a,b'} \to \mathbb{B}^U_{a,b+b'}.$$

iii) *Verträglichkeit mit Restriktion:*

Ist $V \subset U$ eine offene Teilmenge, so gilt

$$+^1_{a,a',b}|_V = +^1_{a|_V,a'|_V,b|_V} \quad \text{und} \quad +^2_{a,b,b'}|_V = +^2_{a|_V,b|_V,b'|_V}.$$

iv) *Verträglichkeit der Gruppengesetze untereinander:*

Es bezeichne v_{23} die Abbildung

$$v_{23} \colon \mathbb{B}^U_{a,b} \times^{\mathbb{G}_{\mathrm{m},S}} \mathbb{B}^U_{a,b'} \times^{\mathbb{G}_{\mathrm{m},S}} \mathbb{B}^U_{a',b} \times^{\mathbb{G}_{\mathrm{m},S}} \mathbb{B}^U_{a',b'} \to \mathbb{B}^U_{a,b} \times^{\mathbb{G}_{\mathrm{m},S}} \mathbb{B}^U_{a',b} \times^{\mathbb{G}_{\mathrm{m},S}} \mathbb{B}^U_{a,b'} \times^{\mathbb{G}_{\mathrm{m},S}} \mathbb{B}^U_{a',b'},$$

die den zweiten und dritten Faktor vertauscht. Dann sind die beiden Abbildungen

$$+^1_{a,a',b+b'} \circ \left(+^2_{a,b,b'} \times +^2_{a',b,b'} \right) \quad \text{und} \quad +^2_{a+a',b,b'} \circ \left(+^1_{a,a',b} \times +^1_{a,a',b'} \right) \circ v_{23}$$

von $\mathbb{B}^U_{a,b} \times^{\mathbb{G}_{\mathrm{m},S}} \mathbb{B}^U_{a,b'} \times^{\mathbb{G}_{\mathrm{m},S}} \mathbb{B}^U_{a',b} \times^{\mathbb{G}_{\mathrm{m},S}} \mathbb{B}^U_{a',b'}$ nach $\mathbb{B}^U_{a+a',b+b'}$ gleich.

3.6 Definition (Isomorphismen von $\mathbb{G}_{\mathrm{m},S}$-Bierweiterungen)

Seien $\mathbb{B}$ und $\tilde{\mathbb{B}}$ zwei $\mathbb{G}_{\mathrm{m},S}$-Bierweiterungen von $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$. Ein Isomorphismus von Garben (von Mengen) $f \colon \mathbb{B} \to \tilde{\mathbb{B}}$ ist ein Isomorphismus von $\mathbb{G}_{\mathrm{m},S}$-Bierweiterungen, falls Folgendes gilt:

1) *Isomorphismus auf den Torseuren:* Der Garbenisomorphismus f ist $\mathbb{G}_{\mathrm{m},S}$-äquivariant. D. h. für alle $U \subset S$ offen und alle $a \in \Gamma(U, \mathcal{A})$, $b \in \Gamma(U, \mathcal{B})$ bildet die Einschränkung von f auf $\mathbb{B}^U_{a,b}$ einen Isomorphismus von $\mathbb{G}_{\mathrm{m},U}$-Torseuren der folgenden Art:

$$f^U_{a,b} \colon \mathbb{B}^U_{a,b} \to \tilde{\mathbb{B}}^U_{a,b}.$$

2) *Verträglichkeit mit den Gruppengesetzen:* Man bezeichne mit $+^1_{.,.,.}$ und $+^2_{.,.,.}$ die Gruppengesetze von $\mathbb{B}$ sowie mit $\tilde{+}^1_{.,.,.}$ und $\tilde{+}^2_{.,.,.}$ die von $\tilde{\mathbb{B}}$. Ist $U \subset S$ offen und sind $a, a' \in \Gamma(U, \mathcal{A})$, $b, b' \in \Gamma(U, \mathcal{B})$, so gilt

$$\tilde{+}^1_{a,a',b} \circ (f^U_{a,b} \times f^U_{a',b}) = f^U_{a+a',b} \circ +^1_{a,a',b}$$

und

$$\tilde{+}^2_{a,b,b'} \circ (f^U_{a,b} \times f^U_{a,b'}) = f^U_{a,b+b'} \circ +^2_{a,b,b'}.$$

Für den Spezialfall von k^*-Bierweiterungen werden bei [Mu] Bierweiterungen durch geeignete Kozykeldaten charakterisiert. Im Folgenden wird diese Beschreibung von Bierweiterungen auf die Situation einer $\mathbb{G}_{\mathrm{m},S}$-Bierweiterung verallgemeinert. Dabei wird die Konvention benutzt: Ist I eine Indexmenge und sind $U_i, U_j \subset S$ für $i, j \in I$ offene Teilmengen von S, so schreibe man im Folgenden stets U_{ij} für $U_i \cap U_j$. Analoges gelte ebenfalls für den Schnitt von mehr offenen Mengen. Auch werden offensichtliche Einschränkungen nicht mitnotiert.

3.7 Definition (Kozykeldaten über $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$)

Ein Satz von $\mathbb{G}_{\mathrm{m},S}$-Kozykeldaten über $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ ist ein Tupel $(I, \mathfrak{U}, \varphi_{.,.}, \lambda_{.}^{.,.}, \rho_{.}^{.,.})$, bestehend aus einer Indexmenge I, einer *zulässigen Überdeckung* $\mathfrak{U}$, *Übergangsabbildungen* $\varphi_{.,.}$ sowie *Verknüpfungsvorschriften* $\lambda_{.}^{.,.}$ und $\rho_{.}^{.,.}$, wobei diese Daten wie folgt definiert sind:

1) **Die Indexmenge I und die zulässige Überdeckung $\mathfrak{U}$:**
Man fixiere eine Indexmenge I und eine Familie von Tripeln $\mathfrak{U} := \big((V_i, a_i, b_i)\big)_{i \in I}$ mit $\emptyset \neq V_i \subset S$ offen sowie Schnitten $a_i \in \Gamma\big(V_i,\, \mathcal{A}\big)$ bzw. $b_i \in \Gamma\big(V_i,\, \mathcal{B}\big)$, für die gilt:

   i) *(Überdeckungseigenschaft)*
   Sei $U \subset S$ offen und $(a, b) \in \Gamma\big(U,\, \mathcal{A} \times \mathcal{B}\big)$ ein Schnitt von $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ über U. Dann existiert eine Teilmenge $J \subset I$, so dass $(V_j \cap U)_{j \in J}$ die Menge U überdeckt und $a_j|_{V_j \cap U} = a|_{V_j \cap U}$ sowie $b_j|_{V_j \cap U} = b|_{V_j \cap U}$ für alle $j \in J$ gilt.

   ii) *(Durchschnittsstabilität)*
   Seien $(V_i, a_i, b_i), (V_j, a_j, b_j) \in \mathfrak{U}$. Ist weiterhin $V' \subset V_{ij}$ eine offene Teilmenge, auf der $a_i|_{V'} = a_j|_{V'}$ gilt. Dann existieren $(V_k, a_k, b_k), (V_l, a_l, b_l) \in \mathfrak{U}$ mit $V_k = V_l$ und $V' \subset V_k \subset V_{ij}$ sowie $a_i = a_j = a_k = a_l$, $b_i = b_k$ und $b_j = b_l$ auf V_k.
   Gilt $b_i|_{V'} = b_j|_{V'}$, dann existieren $(V_s, a_s, b_s), (V_t, a_t, b_t) \in \mathfrak{U}$ mit $V_s = V_t$ und $V' \subset V_s \subset V_{ij}$ sowie $b_i = b_j = b_s = b_t$, $a_i = a_s$ und $a_j = a_t$ auf V_s.

   iii) *(Trivialität bei* $(0,0)$*)*
   Sei $(0, 0)$ das neutrale Element der Gruppe $\Gamma\big(S,\, \mathcal{A} \times \mathcal{B}\big)$, dann gilt $(S, 0, 0) \in \mathfrak{U}$.

   iv) *(Reichhaltigkeit der Überdeckung)*
   Seien $(V_i, a_i, b_i), (V_j, a_j, b_j) \in \mathfrak{U}$ mit $b_i|_{V_{ij}} = b_j|_{V_{ij}}$ bzw. $a_i|_{V_{ij}} = a_j|_{V_{ij}}$, so liegt auch $(V_{ij}, a_i + a_j, b_i)$ bzw. $(V_{ij}, a_i, b_i + b_j)$ in $\mathfrak{U}$.

2) **Die Übergangsabbildungen $\varphi_{.,.}$:**
Ein Indexpaar $(i, j) \in I^2$ heißt φ-zulässig, falls für $(V_i, a_i, b_i), (V_j, a_j, b_j) \in \mathfrak{U}$ auf V_{ij} die Gleichungen $a_i = a_j$ und $b_i = b_j$ gelten. Für jedes φ-zulässige Indexpaar (i, j) fixiere man jeweils einen Schnitt $\varphi_{i,j} \in \Gamma\big(V_{ij},\, \mathbb{G}_{\mathrm{m},S}\big)$, so dass die folgenden *klassischen Kozykelbedingungen* gelten:

   i) Für jedes $i \in I$ hat man:
$$\varphi_{i,i} = 1.$$

   ii) Für $i, j \in I$ so, dass (i, j) (und damit auch (j, i)) φ-zulässig ist, gilt:
$$\varphi_{i,j} = \big(\varphi_{j,i}\big)^{-1}.$$

   iii) Für $i, j, k \in I$ so, dass (i, j), (i, k) und (j, k) φ-zulässig sind, gilt auf V_{ijk}:
$$\varphi_{i,k} = \varphi_{i,j} \cdot \varphi_{j,k}.$$

3) **Die Verknüpfungsvorschriften $\lambda_{.}^{.,.}$ und $\rho_{.}^{.,.}$:**
Ein Tripel von Indizes $(i, j, k) \in I^3$ mit $(V_i, a_i, b_i), (V_j, a_j, b_j)$ und $(V_k, a_k, b_k) \in \mathfrak{U}$ heißt λ-zulässig, wenn $V_{ij} = V_k$ sowie $a_i + a_j = a_k$ und $b_i = b_j = b_k$ auf V_k gilt. Entsprechend nenne man ein Indextripel $(r, s, t) \in I^3$ mit $(V_r, a_r, b_r), (V_s, a_s, b_s)$ und $(V_t, a_t, b_t) \in \mathfrak{U}$ ρ-zulässig, wenn $V_{rs} = V_t$ sowie $a_r = a_s = a_t$ und $b_r + b_s = b_t$ auf V_t gilt. Man fixiere für jedes λ-zulässige Indextripel (i, j, k) einen Schnitt $\lambda_k^{i,j} \in \Gamma\big(V_k,\, \mathbb{G}_{\mathrm{m},S}\big)$ und für jedes ρ-zulässige Indextripel (r, s, t) einen Schnitt $\rho_t^{r,s} \in \Gamma\big(V_t,\, \mathbb{G}_{\mathrm{m},S}\big)$, so dass die folgenden Punkte erfüllt sind:

i) *(Assoziativität von $\lambda^{\cdot,\cdot}_{\cdot}$ und $\rho^{\cdot,\cdot}_{\cdot}$)*
Sind $i,j,k,l,m,n \in I$ so, dass es sich bei (i,j,l), (l,k,n), (j,k,m) und (i,m,n) um λ-zulässige Tripel handelt, dann gilt auf V_n:

$$\lambda_n^{l,k} \cdot \lambda_l^{i,j} = \lambda_n^{i,m} \cdot \lambda_m^{j,k}.$$

Sind $i,j,k,l,m,n \in I$ so, dass es sich bei (i,j,l), (l,k,n), (j,k,m) und (i,m,n) um ρ-zulässige Tripel handelt, dann gilt auf V_n:

$$\rho_n^{l,k} \cdot \rho_l^{i,j} = \rho_n^{i,m} \cdot \rho_m^{j,k}.$$

ii) *(Kommutativität von $\lambda^{\cdot,\cdot}_{\cdot}$ und $\rho^{\cdot,\cdot}_{\cdot}$)*
Ist (i,j,k) mit $i,j,k \in I$ (und damit auch (j,i,k)) ein λ-zulässiges Tripel, so gilt:

$$\lambda_k^{i,j} = \lambda_k^{j,i}.$$

Ist (i,j,k) mit $i,j,k \in I$ (und damit auch (j,i,k)) ein ρ-zulässiges Tripel, so gilt:

$$\rho_k^{i,j} = \rho_k^{j,i}.$$

iii) *(Verträglichkeit von $\lambda^{\cdot,\cdot}_{\cdot}$ und $\rho^{\cdot,\cdot}_{\cdot}$ mit den Übergangsabbildungen)*
Seien $i,j,k,r,s,t \in I$ so, dass es sich bei (i,j,k) und (r,s,t) um λ-zulässige Tripel und bei (i,r), (j,s) und (k,t) um φ-zulässige Paare handelt. Dann gilt auf V_{kt}:

$$\varphi_{t,k} \cdot \lambda_t^{r,s} = \lambda_k^{i,j} \cdot \varphi_{r,i} \cdot \varphi_{s,j}.$$

Seien $i,j,k,r,s,t \in I$ so, dass es sich bei (i,j,k) und (r,s,t) um ρ-zulässige Tripel und bei (i,r), (j,s) und (k,t) um φ-zulässige Paare handelt. Dann gilt auf V_{kt}:

$$\varphi_{t,k} \cdot \rho_t^{r,s} = \rho_k^{i,j} \cdot \varphi_{r,i} \cdot \varphi_{s,j}.$$

iv) *(Verträglichkeit von $\lambda^{\cdot,\cdot}_{\cdot}$ und $\rho^{\cdot,\cdot}_{\cdot}$ untereinander)*
Seien $i,j,k,l,m,n,r,s,t \in I$ so, dass es sich bei (i,j,n), (k,l,m) und (r,s,t) um λ-zulässige und bei (i,k,r), (j,l,s) und (n,m,t) um ρ-zulässige Tripel handelt. Dann gilt auf V_t:

$$\rho_t^{n,m} \cdot \lambda_n^{i,j} \cdot \lambda_m^{k,l} = \lambda_t^{r,s} \cdot \rho_r^{i,k} \cdot \rho_s^{j,l}.$$

3.8 Definition (Äquivalente Kozykeldaten)

Seien $(I, \mathfrak{U}, \varphi_{\cdot,\cdot}, \lambda^{\cdot,\cdot}_{\cdot}, \rho^{\cdot,\cdot}_{\cdot})$ und $(\tilde{I}, \tilde{\mathfrak{U}}, \tilde{\varphi}_{\cdot,\cdot}, \tilde{\lambda}^{\cdot,\cdot}_{\cdot}, \tilde{\rho}^{\cdot,\cdot}_{\cdot})$ zwei Sätze von Kozykeldaten über $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$. Man betrachte zu jedem $(V_i, a_i, b_i) \in \mathfrak{U}$ mit $i \in I$ und jedem $(\tilde{V}_j, \tilde{a}_j, \tilde{b}_j) \in \tilde{\mathfrak{U}}$ mit $j \in \tilde{I}$ die Tripel (V', a', b') mit $\emptyset \neq V' \subset V_i \cap \tilde{V}_j$ sowie $a' = a_i = \tilde{a}_j$ und $b' = b_i = \tilde{b}_j$ auf V'. Weiter indiziere man all diese Tupel (V', a', b') mit einer Indexmenge I' durch. Dann heißen die beiden Sätze von Kozykeldaten $(I, \mathfrak{U}, \varphi_{\cdot,\cdot}, \lambda^{\cdot,\cdot}_{\cdot}, \rho^{\cdot,\cdot}_{\cdot})$ und $(\tilde{I}, \tilde{\mathfrak{U}}, \tilde{\varphi}_{\cdot,\cdot}, \tilde{\lambda}^{\cdot,\cdot}_{\cdot}, \tilde{\rho}^{\cdot,\cdot}_{\cdot})$ äquivalent, falls man für alle Tupel (V'_r, a'_r, b'_r) mit $r \in I'$ einen Schnitt $H_r \in \Gamma\big(V'_r, \mathbb{G}_{\mathrm{m},S}\big)$ fixieren kann, so dass die folgenden Punkte gelten:

1) *(Verträglichkeit von $H_\cdot$ mit den Übergangsabbildungen)*
Seien $(i,j) \in I^2$ und $(k,l) \in \tilde{I}^2$ zwei φ-zulässige Paare. Weiter sei $\emptyset \neq V' \subset V_i \cap \tilde{V}_k$ eine offene Teilmenge, auf der $a_i = \tilde{a}_k$ und $b_i = \tilde{b}_k$ gilt, sowie $\emptyset \neq V'' \subset V_j \cap \tilde{V}_l$ eine offene Teilmenge, auf der man $a_j = \tilde{a}_l$ und $b_j = \tilde{b}_l$ hat. Bezeichnet $r \in I'$ den Index zu (V', a_i, b_i) und $s \in I'$ den zu (V'', a_l, b_l), so gilt auf $V' \cap V''$:

$$H_r \cdot \varphi_{i,j} = \tilde{\varphi}_{k,l} \cdot H_s.$$

2) *(Verträglichkeit von H. mit den Verknüpfungsvorschriften)*
Seien $(i,j,k) \in I^3$ und $(r,s,t) \in \tilde{I}^3$ zwei Tripel. Sei $\emptyset \neq V' \subset V_i \cap \tilde{V}_r$ eine offene Menge, auf der $a_i = \tilde{a}_r$ und $b_i = \tilde{b}_r$ gilt, $\emptyset \neq V'' \subset V_j \cap \tilde{V}_s$ eine offene Menge, auf der $a_j = \tilde{a}_s$ und $b_j = \tilde{b}_s$ gilt, sowie $\emptyset \neq V''' \subset V_k \cap \tilde{V}_t$ eine offene Menge, auf der $a_k = \tilde{a}_t$ und $b_k = \tilde{b}_t$ gilt. Weiter bezeichne man mit $l \in I'$ den Index von (V', a_r, b_r), mit $m \in I'$ den von (V'', a_s, b_s) und mit $n \in I'$ den von (V''', a_k, b_k).
Sind (i,j,k) und (r,s,t) zwei λ-zulässige Tripel, so gilt auf $V' \cap V'' \cap V'''$:
$$H_n \cdot \lambda_k^{i,j} = \tilde{\lambda}_t^{r,s} \cdot H_l \cdot H_m.$$
Sind (i,j,k) und (r,s,t) zwei ρ-zulässige Tripel, so gilt auf $V' \cap V'' \cap V'''$:
$$H_n \cdot \rho_k^{i,j} = \tilde{\rho}_t^{r,s} \cdot H_l \cdot H_m.$$

3.9 Satz

Man kann jedem Satz von $\mathbb{G}_{\mathrm{m},S}$-Kozykeldaten über $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$ kanonisch eine $\mathbb{G}_{\mathrm{m},S}$-Bierweiterung von $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$ zuordnen. Nach Übergang zu Äquivalenzklassen von Kozykeldaten bzw. Isomorphieklassen von Bierweiterungen induziert diese Zuordnung folgende kanonische Bijektion:

$$\frac{\left\{\begin{array}{l}\mathbb{G}_{\mathrm{m},S}\text{-Kozykeldaten}\\ \text{über } \mathcal{A}\times\mathcal{B}\end{array}\right\}}{\left\{\begin{array}{l}\text{äquivalente}\\ \text{Kozykeldaten}\end{array}\right\}} \longrightarrow \frac{\left\{\begin{array}{l}\mathbb{G}_{\mathrm{m},S}\text{-Bierweiterungen}\\ \text{von } \mathcal{A}\times\mathcal{B}\end{array}\right\}}{\left\{\begin{array}{l}\text{isomorphe}\\ \text{Bierweiterungen}\end{array}\right\}}.$$

Beweis:

Diese Aussage wird unmittelbar aus den nachfolgenden Lemmata folgen.

3.10 Lemma (Die kanonisch zu Kozykeldaten assoziierte Bierweiterung)

Sei $(I, \mathfrak{U}, \varphi_{\cdot,\cdot}, \lambda^{\cdot,\cdot}_{\cdot}, \rho^{\cdot,\cdot}_{\cdot})$ ein Satz von Kozykeldaten über $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$.

i) Sei $U \subset S$ offen und $(a,b) \in \Gamma\big(U, \mathcal{A}\times\mathcal{B}\big)$ ein Schnitt. Man bezeichne mit $J_{a,b} \subset I$ die Teilmenge der $i \in I$, für die man $a_i = a$ sowie $b_i = b$ auf $V_i \cap U$ hat. Dann bilden die auf U eingeschränkten Daten $(\mathfrak{U}, \varphi_{\cdot,\cdot})$ zur Indexmenge $J_{a,b}$ klassische Kozykeldaten für einen $\mathbb{G}_{\mathrm{m},U}$-Torseur $\mathbb{B}^U_{a,b}$ (vgl. 3.7 1i)). Nach Konstruktion besitzt $\mathbb{B}^U_{a,b}$ über $V_j \cap U$ für $(V_j, a_j, b_j) \in \mathfrak{U}$ und $j \in J_{a,b}$ einen ausgezeichneten Rahmen r_j. Ist $(V_k, a_k, b_k) \in \mathfrak{U}$ mit $k \in J_{a,b}$ ein weiteres Tupel, so gilt also auf $V_{jk} \cap U$:
$$r_j = \varphi_{j,k} \cdot r_k.$$

ii) Man definiere $\mathbb{B}$ als die Garbe über S mit
$$\mathbb{B}(U) := \coprod_{(a,b)\in\Gamma(U,\,\mathcal{A}\times\mathcal{B})} \mathbb{B}^U_{a,b}(U)$$
für $U \subset S$ offen. Offenbar ist diese Definition wegen $\mathbb{B}^U_{a,b}|_{U'} = \mathbb{B}^{U'}_{a,b}$ für $U' \subset U$ offen wohldefiniert. Weiterhin induzieren die $\mathbb{G}_{\mathrm{m},U}$-Torseure $\mathbb{B}^U_{a,b}$ eine $\mathbb{G}_{\mathrm{m},S}$-Operation π auf $\mathbb{B}$. Definiert man $p\colon \mathbb{B} \to \mathcal{A}\times\mathcal{B}$ durch $p\big(\mathbb{B}^U_{a,b}(U)\big) = (a,b)$, so ist dieser Morphismus surjektiv und äquivariant (bezüglich π und der trivialen $\mathbb{G}_{\mathrm{m},S}$-Operation auf $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$).

iii) Sei $U \subset S$ offen und seien $a, a' \in \Gamma(U, \mathcal{A})$ bzw. $b, b' \in \Gamma(U, \mathcal{B})$ Schnitte. Offenbar induzieren $(\mathfrak{U}, \varphi_{\cdot,\cdot}, \lambda_{\cdot}^{\cdot,\cdot})$ bzw. $(\mathfrak{U}, \varphi_{\cdot,\cdot}, \rho_{\cdot}^{\cdot,\cdot})$ wegen 3.7 3iii) im klassischen Sinne Morphismen von $\mathbb{G}_{\mathrm{m},U}$-Torseuren

$$+^1_{a,a',b} \colon \mathbb{B}^U_{a,b} \times^{\mathbb{G}_{\mathrm{m},U}} \mathbb{B}^U_{a',b} \to \mathbb{B}^U_{a+a',b} \quad \text{und} \quad +^2_{a,b,b'} \colon \mathbb{B}^U_{a,b} \times^{\mathbb{G}_{\mathrm{m},U}} \mathbb{B}^U_{a,b'} \to \mathbb{B}^U_{a,b+b'}.$$

D. h. sind $(V_i, a_i, b_i), (V_j, a_j, b_j), (V_k, a_k, b_k) \in \mathfrak{U}$ so, dass (i, j, k) λ- resp. ρ-zulässig ist, dann gilt auf $V_k \cap U$

$$+^1_{a_i,a_j,b_i}(r_i \cdot r_j) = \lambda_k^{i,j} \cdot r_k \quad \text{bzw.} \quad +^2_{a_i,b_i,b_j}(r_i \cdot r_j) = \rho_k^{i,j} \cdot r_k.$$

Mit diesen Definitionen ist $\mathbb{B}$ eine kanonisch zu den Kozykeldaten $(\mathfrak{U}, \varphi_{\cdot,\cdot}, \lambda_{\cdot}^{\cdot,\cdot}, \rho_{\cdot}^{\cdot,\cdot})$ assoziierte $\mathbb{G}_{\mathrm{m},S}$-Bierweiterung von $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$.

Beweis:

Die wesentlichen Punkte sind bereits aus der klassischen Theorie der Kozykeldaten bekannt. Einzig bleibt noch anhand der Definitionen 3.5 und 3.7 nachzuprüfen, ob $\mathbb{B}$ die Eigenschaften einer $\mathbb{G}_{\mathrm{m},S}$-Bierweiterung erfüllt. Dies ist aber dem Leser überlassen. □

3.11 Lemma (Zu einer Bierweiterung assoziierte Sätze von Kozykeldaten)

Sei $\mathbb{B}$ eine $\mathbb{G}_{\mathrm{m},S}$-Bierweiterung von $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$. Weiter bezeichne man im Folgenden mit $U \subset S$ eine offene Teilmenge und $a, a' \in \Gamma(U, \mathcal{A})$ bzw. $b, b' \in \Gamma(U, \mathcal{B})$ seien Schnitte von $\mathcal{A}$ bzw. $\mathcal{B}$ über U. Dann gilt:

i) Trivialisieren die $\mathbb{G}_{\mathrm{m},U}$-Torseure $\mathbb{B}^U_{a,b}$ und $\mathbb{B}^U_{a',b}$ über $V \subset U$ offen, so auch $\mathbb{B}^U_{a+a',b}$. Trivialisieren entsprechend $\mathbb{B}^U_{a,b}$ und $\mathbb{B}^U_{a,b'}$ über V, so auch $\mathbb{B}^U_{a,b+b'}$.

ii) Man definiere eine Indexmenge I wie folgt:

$$I := \left\{ (U, a, b, V, t) \;\middle|\; \begin{array}{l} U \subset S \text{ offen, } a \in \Gamma(U, \mathcal{A}),\ b \in \Gamma(V, \mathcal{B}), \emptyset \neq V \subset U \text{ offen} \\ \text{und der } \mathbb{G}_{\mathrm{m},U}\text{-Torseur } \mathbb{B}^U_{a,b} \text{ wird über } V \text{ durch } t \text{ trivialisiert} \end{array} \right\}.$$

Damit setze man

$$\mathfrak{U} := \left\{ (V_i, a_i, b_i) \mid i = (U, a, b, V, t) \in I,\ V_i = V,\ a_i = a \text{ und } b_i = b \right\}.$$

So definiert, handelt es sich bei $\mathfrak{U}$ um eine zulässige Überdeckung.

iii) Für jedes $i = (U, a, b, V, t) \in I$ setze man $U_i := U$ sowie $t_i := t$ und bezeichne für alle $\emptyset \neq U' \subset U_i$ offen mit t_i auch den durch t_i induzierten Rahmen von $\mathbb{B}^{U'}_{a_i,b_i} = \mathbb{B}^{U_i}_{a_i,b_i}|_{U'}$ über $V \cap U'$. Ist $(i, j) \in I^2$ φ-zulässig, so definiere man für $(V_i, a_i, b_i), (V_j, a_j, b_j) \in \mathfrak{U}$ Schnitte $\varphi_{i,j} \in \Gamma(V_{ij}, \mathbb{G}_{\mathrm{m},U_{ij}})$ durch folgende Gleichung in $\Gamma(V_{ij}, \mathbb{B}^{U_{ij}}_{a_i,b_i})$

$$t_i = \varphi_{i,j} \cdot t_j.$$

Als klassische Übergangsabbildungen erfüllen die $\varphi_{\cdot,\cdot}$ damit die Punkte in 3.7 2).

Ist $(i,j,k) \in I^3$ λ-zulässig, so definiere man Schnitte $\lambda_k^{i,j} \in \Gamma\big(V_k,\, \mathbb{G}_{\mathrm{m},U_k}\big)$ durch

$$+^1_{a_i,a_j,b_i}\big(t_i,\, t_j\big) = \lambda_k^{i,j} \cdot t_k.$$

Ist $(i,j,k) \in I^3$ ρ-zulässig, so definiere man Schnitte $\rho_k^{i,j} \in \Gamma\big(V_k,\, \mathbb{G}_{\mathrm{m},U_k}\big)$ durch

$$+^1_{a_i,a_j,b_i}\big(t_i,\, t_j\big) = \rho_k^{i,j} \cdot t_k.$$

Dann erfüllen die Schnitte $\lambda_{\cdot}^{\cdot,\cdot}$ und $\rho_{\cdot}^{\cdot,\cdot}$ die Eigenschaften von Verknüpfungsvorschriften aus 3.7. Damit ist das Tupel $(I, \mathfrak{U}, \varphi_{\cdot,\cdot}, \lambda_{\cdot}^{\cdot,\cdot}, \rho_{\cdot}^{\cdot,\cdot})$ ein Satz von Kozykeldaten auf $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$.

Beweis:

Zu i): Dies ist mit den Gruppengesetzen klar.
Zu ii): Ist $U \subset S$ offen und $(a,b) \in \Gamma(U, \mathcal{A}\times\mathcal{B})$, so ist $\mathbb{B}^U_{a,b}$ ein $\mathbb{G}_{\mathrm{m},U}$-Torseur und damit lokal trivial. Dies zeigt 3.7 1i). Die Eigenschaften 3.7 1ii) und iii) sind unmittelbar klar. Schließlich folgt 3.7 1iv) auch mit den Gruppengesetzen.
Zu iii): Dies folgt unmittelbar aus den Definitionen.

$\square$

3.12 Lemma

1) Sei $\mathbb{B}$ eine $\mathbb{G}_{\mathrm{m},S}$-Bierweiterung von $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$. Sei $(I, \mathfrak{U}, \varphi_{\cdot,\cdot}, \lambda_{\cdot}^{\cdot,\cdot}, \rho_{\cdot}^{\cdot,\cdot})$ ein nach 3.11 zu $\mathbb{B}$ assoziierter Satz von Kozykeldaten und $\tilde{\mathbb{B}}$ die nach 3.10 zu $(I, \mathfrak{U}, \varphi_{\cdot,\cdot}, \lambda_{\cdot}^{\cdot,\cdot}, \rho_{\cdot}^{\cdot,\cdot})$ konstruierte Bierweiterung. Dann sind die Bierweiterungen $\mathbb{B}$ und $\tilde{\mathbb{B}}$ isomorph.

2) Sei $(I, \mathfrak{U}, \varphi_{\cdot,\cdot}, \lambda_{\cdot}^{\cdot,\cdot}, \rho_{\cdot}^{\cdot,\cdot})$ ein Satz von Kozykeldaten über $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$. Weiter bezeichne $\mathbb{B}$ die gemäß 3.10 zu $(I, \mathfrak{U}, \varphi_{\cdot,\cdot}, \lambda_{\cdot}^{\cdot,\cdot}, \rho_{\cdot}^{\cdot,\cdot})$ konstruierte Bierweiterung und $(\tilde{I}, \tilde{\mathfrak{U}}, \tilde{\varphi}_{\cdot,\cdot}, \tilde{\lambda}_{\cdot}^{\cdot,\cdot}, \tilde{\rho}_{\cdot}^{\cdot,\cdot})$ sei ein nach 3.11 zu $\mathbb{B}$ assoziierter Satz von Kozykeldaten. Dann sind die Kozykeldaten $(I, \mathfrak{U}, \varphi_{\cdot,\cdot}, \lambda_{\cdot}^{\cdot,\cdot}, \rho_{\cdot}^{\cdot,\cdot})$ und $(\tilde{I}, \tilde{\mathfrak{U}}, \tilde{\varphi}_{\cdot,\cdot}, \tilde{\lambda}_{\cdot}^{\cdot,\cdot}, \tilde{\rho}_{\cdot}^{\cdot,\cdot})$ äquivalent.

3) Seien $\mathbb{B}$ und $\tilde{\mathbb{B}}$ zwei isomorphe $\mathbb{G}_{\mathrm{m},S}$-Bierweiterungen von $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ über S. Weiter bezeichne man mit $(I, \mathfrak{U}, \varphi_{\cdot,\cdot}, \lambda_{\cdot}^{\cdot,\cdot}, \rho_{\cdot}^{\cdot,\cdot})$ bzw. $(\tilde{I}, \tilde{\mathfrak{U}}, \tilde{\varphi}_{\cdot,\cdot}, \tilde{\lambda}_{\cdot}^{\cdot,\cdot}, \tilde{\rho}_{\cdot}^{\cdot,\cdot})$ die gemäß 3.11 zu $\mathbb{B}$ bzw. $\tilde{\mathbb{B}}$ assoziierten Kozykeldaten. Dann sind die Kozykeldaten $(I, \mathfrak{U}, \varphi_{\cdot,\cdot}, \lambda_{\cdot}^{\cdot,\cdot}, \rho_{\cdot}^{\cdot,\cdot})$ und $(\tilde{I}, \tilde{\mathfrak{U}}, \tilde{\varphi}_{\cdot,\cdot}, \tilde{\lambda}_{\cdot}^{\cdot,\cdot}, \tilde{\rho}_{\cdot}^{\cdot,\cdot})$ äquivalent.

4) Seien $(I, \mathfrak{U}, \varphi_{\cdot,\cdot}, \lambda_{\cdot}^{\cdot,\cdot}, \rho_{\cdot}^{\cdot,\cdot})$ und $(\tilde{I}, \tilde{\mathfrak{U}}, \tilde{\varphi}_{\cdot,\cdot}, \tilde{\lambda}_{\cdot}^{\cdot,\cdot}, \tilde{\rho}_{\cdot}^{\cdot,\cdot})$ zwei Sätze äquivalenter Kozykeldaten über $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ und bezeichnen $\mathbb{B}$ bzw. $\tilde{\mathbb{B}}$ die nach 3.10 zu $(I, \mathfrak{U}, \varphi_{\cdot,\cdot}, \lambda_{\cdot}^{\cdot,\cdot}, \rho_{\cdot}^{\cdot,\cdot})$ bzw. $(\tilde{I}, \tilde{\mathfrak{U}}, \tilde{\varphi}_{\cdot,\cdot}, \tilde{\lambda}_{\cdot}^{\cdot,\cdot}, \tilde{\rho}_{\cdot}^{\cdot,\cdot})$ konstruierten Bierweiterungen. Dann sind die Bierweiterungen $\mathbb{B}$ und $\tilde{\mathbb{B}}$ isomorph.

Beweis:

Dies folgt nach einfacher Rechnung unmittelbar aus den Definitionen. $\square$

$\square_{3.9}$

3.13 Definition (Der Pullback einer Bierweiterung)

Seien $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ (Zariski-)Garben abelscher Gruppen über einem Basisschema S und $\phi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{F}$ sowie $\psi\colon \mathcal{B} \to \mathcal{G}$ Homomorphismen. Weiter bezeichne $\mathbb{B}$ eine $\mathbb{G}_{\mathrm{m},S}$-Bierweiterung von $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$. Man definiere die Garbe $(\phi \times \psi)^*\mathbb{B}$ über das folgende kartesische Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} (\phi \times \psi)^*\mathbb{B} & \to & \mathcal{F} \times \mathcal{G} \\ \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle (\phi \times \psi)} \\ \mathbb{B} & \to & \mathcal{A} \times \mathcal{B}. \end{array}$$

Dann wird offenbar, vermöge der Projektionen, durch die Bierweiterung $\mathbb{B}$ auf $(\phi \times \psi)^*\mathbb{B}$ in eindeutiger Weise die Struktur einer $\mathbb{G}_{\mathrm{m},S}$-Bierweiterung von $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$ induziert. Man bezeichne die somit definierte Bierweiterung $(\phi \times \psi)^*\mathbb{B}$ als den Pullback von $\mathbb{B}$ entlang $(\phi \times \psi)$.

Kapitel 4

Die Abbildung $\sigma_{X,W}$

Im ganzen Kapitel wird stets folgende Grundsituation betrachtet: Seien X und S glatte, quasi-projektive k-Varietäten der Dimension d_X bzw. d_S. Weiter bezeichne η den generischen Punkt von S und $\pi\colon X \to S$ einen flachen, projektiven, surjektiven Morphismus, der über einer offenen, nicht leeren Teilmenge $S' \subset S$ glatt ist und X als S-Schema auszeichnet. Schließlich seien $p, q \in \mathbb{N}$ natürliche Zahlen mit $p + q = d_X - d_S + 1$.

Für $W \in \mathrm{Z}^p_{\mathrm{hom}}(X/S)$ und $U \subset S$ offen bezeichne man mit $\mathrm{Z}^q_{(.\cap|W|)_U=\emptyset,\mathrm{rat}}(X) \subset \mathrm{Z}^q_{\mathrm{rat}}(X)$ die Untergruppe der Zykel, die W eigentlich und über U gar nicht schneiden. In dieser Situation konstruiert Bloch in [Bl1] einen nicht trivialen Morphismus

$$\sigma_{U,W}: \mathrm{Z}^q_{(.\cap|W|)_U=\emptyset,\mathrm{rat}}(X) \to \mathbb{G}_{\mathrm{m},S}(U).$$

Sind $\alpha \in \mathrm{Z}^p_{\mathrm{rat}}(X)$ und $\beta \in \mathrm{Z}^q_{\mathrm{rat}}(X)$ Zykel mit $(|\alpha| \cap |\beta|)_U = \emptyset$, so zeigt Bloch in [Bl1], ohne jedoch auf alle Details einzugehen, dass für die Morphismen $\sigma_{U,.}$ folgende Gleichung gilt:

$$\sigma_{U,\alpha}(\beta) = \sigma_{U,\beta}(\alpha).$$

In diesem Kapitel wird für das System von Schnitten $\sigma_{U,W}(\alpha) \in \mathbb{G}_{\mathrm{m},S}(U)$ ($U \subset S$ offen) eine axiomatische Beschreibung gegeben. Dabei wird für spezielle Zykel W und α eine explizite Formel für $\sigma_{U,W}(\alpha)$ angegeben, die sich noch nicht bei Bloch findet.

4.1 Satz

Man bezeichne ein Tripel (U, W, α) mit $W \in \mathrm{Z}^p_{\mathrm{hom}}(X/S)$ und $\alpha \in \mathrm{Z}^q_{\mathrm{rat}}(X)$ als σ-zulässig, wenn sich W und α eigentlich und über U gar nicht schneiden. Dann existiert zur Menge der σ-zulässigen Tripel ein System von Schnitten $\sigma_{U,W}(\alpha) \in \mathbb{G}_{\mathrm{m},S}(U)$ mit (U, W, α) σ-zulässig, das den folgenden fünf Bedingungen genügt:

1) Ist $U' \subset U$ offen, so gilt für σ-zulässige Tripel (U, W, α) und (U', W, α):

$$\sigma_{U,W}(\alpha)\big|_{U'} = \sigma_{U',W}(\alpha).$$

2) Mit (U, W, α), (U, W, α') σ-zulässig ist auch $(U, W, \alpha + \alpha')$ σ-zulässig und es gilt:

$$\sigma_{U,W}(\alpha + \alpha') = \sigma_{U,W}(\alpha) \cdot \sigma_{U,W}(\alpha').$$

3) Mit (U, W, α), (U, W', α) σ-zulässig ist auch $(U, W + W', \alpha)$ σ-zulässig und es gilt:

$$\sigma_{U,W+W'}(\alpha) = \sigma_{U,W}(\alpha) \cdot \sigma_{U,W'}(\alpha).$$

4) Ist (U, β, α) σ-zulässig und $\beta \sim_{\mathrm{rat}} 0$, so ist auch (U, β, α) σ-zulässig und es gilt:

$$\sigma_{U,\beta}(\alpha) = \sigma_{U,\alpha}(\beta).$$

5) Sei $Y \subset X$ eine abgeschlossene Untervarietät der Kodimension $q-1$ und $g \in K(Y)^*$ eine rationale Funktion. Weiter sei $V \subset X \times \mathbb{P}^1_k$ eine q-kodimensionale abgeschlossene Untervarietät, die sich dominant nach $\mathbb{P}^1_k$ abbildet und die $\mathrm{div}(g) = V\big((0) - (\infty)\big)$ erfüllt. Sei $W \in \mathrm{Z}^p(X)$ ein Zykel für den gilt, dass er Y und $\mathrm{div}(g)$ eigentlich schneidet, und für den sich auch V und $W \times \mathbb{P}^1_k$ eigentlich schneiden. Weiter bezeichne $U \subset S$ eine offene, nicht leere Menge über der sich W und $\mathrm{div}(g)$ nicht schneiden. Es sei

$$V \centerdot (W \times \mathbb{P}^1_k) = \sum_{j=1}^{m} n_j \cdot C_j \in \mathrm{Z}_{d_S}(X \times \mathbb{P}^1_k).$$

Dann erhält man, induziert durch die beiden Projektionen $p_1 \colon X \times \mathbb{P}^1_k \to X$ und $p_2 \colon X \times \mathbb{P}^1_k \to \mathbb{P}^1_k$, für jedes $j \in \{1, ..., m\}$ Morphismen

$$f_j \colon C_j \to \mathbb{P}^1_k \quad \text{und} \quad h_j \colon C_j \to X \xrightarrow{\pi} S.$$

Dabei induziert jedes f_j mit $j \in \{1, ..., m\}$ eine rationale Funktion in $K(C_j)$, die ebenfalls mit f_j bezeichnet werde. Weiter seien $C_1, ..., C_m$ ohne Einschränkung so sortiert, dass für ein $r \in \{1, ..., m\}$ die Morphismen $h_1, ..., h_r$ dominant sind und die $h_{r+1}, ..., h_m$ nicht. Da $\dim(C_j) = \dim(S)$ und h_j dominant für $j = 1, ..., r$ ist, stellt $K(C_j)/K(S)$ eine endliche Körpererweiterung dar. Bezeichnet $\mathrm{N}_{K(C_j)/K(S)}$ in diesen Fällen die entsprechende Normabbildung, so gilt:

$$\sigma_{U,W}\big(\mathrm{div}(g)\big) = \prod_{j=1}^{r} \Big(\mathrm{N}_{K(C_j)/K(S)}(f_j)\Big)^{n_j} \in \mathbb{G}_{\mathrm{m},S}(U).$$

Schließlich ist solch ein System von Schnitten $\sigma_{U,W}(\alpha)$ mit (U, W, α) σ-zulässig durch die Eigenschaften 2) und 5) bereits eindeutig bestimmt.

Die Aussagen des Satzes werden im Laufe dieses Kapitels bewiesen.

Sei $\mathrm{Z}^*_{(.\cap W)_U=\emptyset,\mathrm{rat}}(X) \subset \mathrm{Z}^*_{\mathrm{rat}}(X)$ die Untergruppe der Zykel rational äquivalent zu Null, die einen vorgegebenen Zykel $W \in \mathrm{Z}^p_{\mathrm{hom}}(X/S)$ eigentlich und über U gar nicht schneiden. Dann wird im Folgenden zunächst die Konstruktion der von Bloch definierten Abbildung

$$\sigma_{U,W} \colon \mathrm{Z}^q_{(.\cap W)_U=\emptyset,\mathrm{rat}}(X) \to \mathbb{G}_{\mathrm{m},S}(U)$$

wiederholt. Weiter wird gezeigt, dass die Schnitte $\sigma_{U,W}(\alpha)$ mit (U, W, α) σ-zulässig die Eigenschaften 1) - 5) aus Satz 4.1 erfüllen. Dies zeigt die Existenz eines Systems von Schnitten $\sigma_{.,.}(.)$, wie in 4.1 behauptet.

4.2 Definition (Die Abbildung θ_w)

Sei $W \in \mathrm{Z}^p_{\mathrm{hom}}(X/S)$. Dann induzieren das Schneiden mit w und der Pushforward mit π wie folgt eine Abbildung (Bezüglich $\iota_S\colon \mathrm{CH}^1(S,1) \xrightarrow{\sim} \mathbb{G}_{\mathrm{m},S}(S)$ vergleiche man 2.11):

$$\theta_w := \theta_{S,w}\colon \quad \mathrm{CH}^q(X,1) \xrightarrow{\centerdot w} \mathrm{CH}^{d_X-d_S+1}(X,1) \xrightarrow{\pi_*} \mathrm{CH}^1(S,1) = \mathbb{G}_{\mathrm{m},S}(S)$$
$$z \mapsto \iota_S\big(\pi_*(z \centerdot w)\big).$$

4.3 Bemerkung:

Für alle offenen Mengen $U, U' \subset S$ mit $U' \subset U$ sind die folgenden beiden Morphismen

$$\mathbb{G}_{\mathrm{m},S}(U) \hookrightarrow \mathbb{G}_{\mathrm{m},S}(U') \quad \text{und} \quad \mathbb{G}_{\mathrm{m},S}(U) \hookrightarrow K(S)$$

injektiv. Weiß man also, dass zwei Schnitte in $\mathbb{G}_{\mathrm{m},S}(U)$ liegen und hat deren Gleichheit in $\mathbb{G}_{\mathrm{m},S}(U')$ bzw. $K(S)$ nachgerechnet, so sind die Schnitte bereits in $\mathbb{G}_{\mathrm{m},S}(U)$ gleich.

4.4 Satz

Sei $W \in \mathrm{Z}^p_{\mathrm{hom}}(X/S)$. Ist X über S glatt, so gilt bereits $\theta_w \equiv 1$.

Beweis:

Man vergleiche dazu [Bl1] Lemma 1 bzw. [Me] Abschnitt 2.2 und beachte, dass im glatten Fall W bereits im dortigen Sinne kohomologisch trivial ist. □

4.5 Korollar

Sei $W \in \mathrm{Z}^p_{\mathrm{hom}}(X/S)$. Entsprechen X und S der Grundsituation, so gilt ebenfalls $\theta_w \equiv 1$.

Beweis:

Es bezeichne $j\colon S' \hookrightarrow S$ die offene Immersion des glatten Ortes von π nach S. Da j^* mit eigentlichem Pushforward und dem Schnittprodukt in der offensichtlichen Weise vertauscht, gilt

$$j^* \circ \theta_{S,w} = \theta_{S',j^*w} \circ j^*\colon \mathrm{CH}^q(X,1) \to \mathbb{G}_{\mathrm{m},S}(S').$$

Nun ist nach 4.4 $\theta_{S',j^*w} \equiv 1$ und j^* ist injektiv. Dies liefert die Behauptung. □

4.6 Konstruktion

Sei $U \subset S$ offen und $W \in \mathrm{Z}^p_{\mathrm{hom}}(X/S)$ ein Zykel. Nach 2.7 und 2.6 i) sind

$$\begin{array}{rccc} W_U \centerdot \_\colon & \mathrm{z}^q_W(X_U,\cdot) & \to & \mathrm{z}^{d_X-d_S+1}(X_U,\cdot) \quad \text{und} \\ (\pi|_U)_*\colon & \mathrm{z}^{d_X-d_S+1}(X_U,\cdot) & \to & \mathrm{z}^1(U,\cdot) \end{array}$$

Komplexmorphismen, also gilt dies auch für ihre Komposition. Bezeichnet man diese mit θ, dann kommutiert folgendes Diagramm von Komplexen:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \to & \mathrm{z}^q_W(X_U,2) & \overset{d_2}{\to} & \mathrm{z}^q_W(X_U,1) & \overset{d_1}{\to} & \mathrm{Z}^q_W(X_U) & \to & 0 \\
 & & \downarrow \theta & & \downarrow \theta & & \downarrow \theta & & \\
\cdots & \to & \mathrm{z}^1(U,2) & \overset{d_2}{\to} & \mathrm{z}^1(U,1) & \overset{d_1}{\to} & \mathrm{Z}^1(U) & \to & 0.
\end{array}$$

Da $\mathrm{z}^*_W(X_U,\cdot) \to \mathrm{z}^*(X_U,\cdot)$ ein Quasi-Isomorphismus ist, erhält man mit dem Homomorphiesatz, dass die folgenden beiden Sequenzen exakt sind:

$$0 \to \mathrm{CH}^q(X_U,1) \to \frac{\mathrm{z}^q_W(X_U,1)}{d_2\big(\mathrm{z}^q_W(X_U,2)\big)} \to d_1\big(\mathrm{z}^q_W(X_U,1)\big) \to 0$$

$$0 \to \mathrm{CH}^q(U,1) \to \frac{\mathrm{z}^1(U,1)}{d_2\big(\mathrm{z}^1(U,2)\big)} \to d_1\big(\mathrm{z}^1(U,1)\big) \to 0.$$

Bezeichnen θ_{W_U}, $\hat{\theta}_{W_U}$ und $\tilde{\theta}_{W_U}$ die entsprechenden, durch θ induzierten Morphismen, so kommutiert folgendes Diagramm von exakten Sequenzen:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & \mathrm{CH}^q(X_U,1) & \to & \frac{\mathrm{z}^q_W(X_U,1)}{d_2\big(\mathrm{z}^q_W(X_U,2)\big)} & \to & d_1\big(\mathrm{z}^q_W(X_U,1)\big) & \to & 0 \\
 & & \downarrow \theta_{W_U} & & \downarrow \hat{\theta}_{W_U} & & \downarrow \tilde{\theta}_{W_U} & & \\
0 & \to & \mathrm{CH}^1(U,1) & \to & \frac{\mathrm{z}^1(U,1)}{d_2\big(\mathrm{z}^1(U,2)\big)} & \to & d_1\big(\mathrm{z}^1(U,1)\big) & \to & 0.
\end{array}$$

Offenbar entspricht θ_{W_U} der Abbildung $\theta_{U,w}\colon \mathrm{CH}^q(X_U,1) \to \mathrm{CH}^1(U,1)$ aus 4.2 und ist damit nach 4.5 Null. Es gilt also $\operatorname{coker}(\theta_{W_U}) = \mathrm{CH}^1(U,1)$. Somit erhält man mit dem Schlangenlemma eine Abbildung

$$\tilde{\sigma}_{U,W}\colon \ker(\tilde{\theta}_{W_U}) \to \mathrm{CH}^1(U,1) \overset{\iota_U}{\to} \mathbb{G}_{\mathrm{m},S}(U).$$

Dabei bildet $\tilde{\sigma}_{U,W}$ ein $\alpha \in \ker(\tilde{\theta}_{W_U})$ auf

$$\iota_U\Big((\pi|_{X_U})_*\big((W \times \triangle^1_{X_U}) \centerdot V_\alpha\big)\Big)$$

ab, wobei $V_\alpha \in \mathrm{z}^1_W(X,1)$ ein Urbild von α unter d_1 ist, das $W \times \triangle^1_{X_U}$ eigentlich schneidet.

4.7 Definition (Die Abbildung $\sigma_{.,W}$)

Sei $j\colon U \to S$ eine offene Immersion. Dann definiere man

$$\begin{array}{rl}
\sigma_{U,W}\colon & \mathrm{Z}^q_{(.\cap W)_U=\emptyset,\mathrm{rat}}(X) \overset{j^*}{\to} \ker(\tilde{\theta}_{W_U}) \overset{\tilde{\sigma}_{U,W}}{\to} \mathbb{G}_{\mathrm{m},S}(U) \\
 & \alpha \mapsto \tilde{\sigma}_{U,W}(j^*\alpha).
\end{array}$$

Zunächst werden nun die Punkte 1) - 3) und 5) aus 4.1 für $\sigma_{.,.}$ nachgerechnet. Dass das System der $\sigma_{.,.}$ auch dem Punkt 4.1 4) genügt, wird am Ende des Kapitels gezeigt.

4.8 Proposition

Für Schnitte $\sigma_{U,W}(\alpha)$ mit (U,W,α) σ-zulässig gelten die Eigenschaften 1)- 3) und 5) aus 4.1.

Beweis:

Da die Abbildung $\sigma_{.,.}(.)$ ein Gruppenhomomorphismus ist, gilt offenbar 2). Die Eigenschaften 1) und 3) folgen unmittelbar aus der Definition von $\sigma_{.,.}(.)$.
Zur Eigenschaft 5):
Seien wie in 4.1 5) eine abgeschlossene Untervarietät $T \subset X$ der Kodimension $q-1$, eine rationale Funktion $g \in K(T)^*$ und eine q-kodimensionale, abgeschlossene Untervarietät V von $X \times \mathbb{P}^1_k$ mit $V\big((0)-(\infty)\big) = \operatorname{div}(g)$ gegeben. Weiter sei mit $W \in \mathrm{Z}^p_{\mathrm{hom}}(X)$ ein Zykel fixiert, so dass sich $W \times \mathbb{P}^1_k$ und V, sowie W und T bzw. $\operatorname{div}(g)$ eigentlich schneiden. Sei $(W \times \mathbb{P}^1_k) \mathbin{\bullet} V = \sum_{j=1}^m n_j \cdot C_j$. Man bezeichne für $j \in \{1, ..., m\}$ mit

$$f_j \colon C_j \to \mathbb{P}^1_k \quad \text{und} \quad h_j \colon C_j \to S$$

die durch die Projektionen von $X \times \mathbb{P}^1_k$ induzierten Abbildungen. Dabei seien die C_j so sortiert, dass für ein $r \in \{1, ..., m\}$ die Morphismen $h_1, ..., h_r$ dominant sind und die $h_{r+1}, ..., h_m$ nicht. Ist $U \subset S$ offen so, dass $(|W| \cap |\operatorname{div}(g)|)_U = \emptyset$ ist, dann hat man zu zeigen:

$$\sigma_{U,W}\big(\operatorname{div}(g)\big) = \prod_{j=1}^{r} \big(\mathrm{N}_{K(C_j)/K(S)}(f_j)\big)^{n_j}.$$

Setzt man $C_j' := C_j \cap (X \times \mathbb{P}^1_k \backslash \{1\})$ für $j = 1, ..., m$, dann gilt nach Definition (Man vergleiche bezüglich $\xi \colon \mathbb{P}^1_k \backslash \{1\} \to \triangle^1_k$ 2.9)

$$\begin{aligned} \sigma_{U,W}\big(\operatorname{div}(g)\big) &= \iota_U\big((\pi \times \xi)_*(V \mathbin{\bullet} W \times \mathbb{P}^1_k \backslash \{1\})\big) \\ &= \iota_U\big((\pi \times \xi)_*(\sum_{j=1}^{m} n_j \cdot C_j')\big). \end{aligned}$$

Damit ist klar, dass für $j = r+1, ..., m$ jedes C_j' unter $(\pi \times \zeta)_*$ auf Null geht. Denn es gilt $\dim(C_j') = \dim(S)$ und h_j ist für $j \in \{r+1, ..., m\}$ nicht dominant (Man beachte dabei unter anderem: Für jede abgeschlossene Untervarietät $Y \subset S$ gilt, dass $d_2(Y \times \triangle^2_k) = Y \times \triangle^1_k$ ist, womit $Y \times \triangle^1_k$ in $\mathrm{CH}^1(S, 1)$ Null ist). Nun fixiere man einen Index $j \in \{1, ..., r\}$. Nach [Ha] II Ex. 3.7 existiert eine offene, dichte Teilmenge $U' \subset S$ so, dass $(C_j)_{U'}$ über U' endlich ist. Damit kann man mit 4.3 annehmen, dass $S = \operatorname{Spec}(A)$ und $C_j = \operatorname{Spec}(B)$ affin sind.
Zwischenbehauptung: Man setze $(C_j)_\eta := C_j \times_S K(S)$ und $X_\eta := X \times_S K(S)$. Dann gilt, dass $(C_j)_\eta$ ein $K(C_j)$-rationaler Punkt von $X_\eta \times_k \mathbb{P}^1_k = X_\eta \times_{K(S)} \mathbb{P}^1_{K(S)}$ ist, der mit P_j bezeichnet werde. Schreibt man $P_j' := (\pi_\eta \times \mathrm{id})(P_j)$ für das Bild von P_j unter

$$(\pi_\eta \times \mathrm{id}) \colon X_\eta \times_{K(S)} \mathbb{P}^1_{K(S)} \to \mathbb{P}^1_{K(S)},$$

dann ist P_j' ein $K(S)(f_j)$-rationaler Punkt von $\mathbb{P}^1_{K(S)}$, der in $K(S)[z]$ mit dem Minimalpolynom $p(z)$ von f_i korrespondiert. Weiter gilt

$$(\pi_\eta \times \mathrm{id})_* P_j = [K(C_j) : K(S)(f_j)] \cdot P_j'.$$

Beweis: Offenbar gilt wegen $B \otimes_A \operatorname{Quot}(A) = \operatorname{Quot}(B)$

$$(C_j)_\eta = \operatorname{Spec}(B \otimes_A K(S)) = \operatorname{Spec}\big(K(C_j)\big).$$

Damit ist $P_j := (C_j)_\eta$ ein $K(C_j)$-rationaler Punkt von $X_\eta \times_{K(S)} \mathbb{P}^1_{K(S)}$. Weiter korrespondiert die von der Projektion induzierte Abbildung $P_j \to P_j' \hookrightarrow \mathbb{P}^1_{K(S)}$ affin mit

$$K(S)[z] \to K(S)(f_j) \to K(C_j); \quad z \mapsto f_j,$$

womit offenbar P'_j ein $K(S)(f_i)$-rationaler Punkt von $\mathbb{P}^1_{K(S)}$ ist. Der Rest der Zwischenbehauptung ist nun klar.

Mit 2.16 erhält man nun:

$$\begin{aligned}
\Big(\sigma_{U,W}\big(\operatorname{div}(g)\big)\Big)_\eta &= \iota_{K(S)}\Big((\pi_\eta \times \xi)_*\big(\textstyle\sum_{j=1}^r n_j \cdot (C'_j)_\eta\big)\Big) \\
&= \iota_{K(S)}\big(\xi_*(\pi_\eta \times \mathrm{id})_*(\textstyle\sum_{j=1}^r n_j \cdot P_j)\big) \\
&= \iota_{K(S)}\big(\xi_* \textstyle\sum_{j=1}^r n_j \cdot [K(C_j) : \big(K(S)\big)(f_j)] \cdot P'_j\big) \\
&= \textstyle\prod_{j=1}^r \mathrm{N}_{(K(S))(f_j)/K(S)}\big(f_j\big)^{n_j \cdot [K(C_j):(K(S))(f_j)]} \qquad \text{(nach 2.16)} \\
&= \textstyle\prod_{j=1}^r \mathrm{N}_{K(C_j)/(K(S))(f_j)}\Big(\mathrm{N}_{(K(S))(f_j)/K(S)}\big(f_j\big)\Big)^{n_j} \\
&= \textstyle\prod_{j=1}^r \mathrm{N}_{K(C_j)/K(S)}\big(f_j\big)^{n_j}.
\end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. □

Als nächstes wird gezeigt, dass es genau einen Satz von $\mathbb{G}_{\mathrm{m},S}$-Schnitten gibt, der 4.1 genügt. Sei (U, W, α) ein σ-zulässiges Tripel. Dann genügt es zu zeigen, dass α eine Darstellung $\sum_{i=1}^n \operatorname{div}(f_i)$ mit $f_i \in K(T_i)^*$ und $T_1, ..., T_n$ abgeschlossene Untervarietäten besitzt, die den Voraussetzungen von 4.1 5) genügt. Hierzu wird folgende Vorüberlegung benötigt:

4.9 Lemma

Sei X eine glatte k-Varietät, X' eine glatte, eigentliche k-Varietät, $q\colon X \times X' \to X$ die Projektion und $\alpha \in \mathrm{Z}^*(X)$. Weiter sei $V \subset X \times X'$ eine abgeschlossene Untervarietät mit

$$\operatorname{codim}_{X \times X'}(V) = \operatorname{codim}_X\big(q(V)\big) - d_{X'} \tag{4.1}$$

(d. h. $\dim(V) = \dim\big(q(V)\big)$).
Dann gilt: Schneiden sich $q^*\alpha$ und V eigentlich, so auch α und $q(V)$.

Beweis:

1) Vorüberlegung:
Sei $V \subset X \times X'$ eine abgeschlossene Untervarietät, die $q^*\alpha$ eigentlich schneidet. Weiter sei mit C' eine irreduzible Komponente von $|\alpha| \cap q(V)$ fixiert. Man zeige zunächst, dass zu C' eine irreduzible Komponente C von $|q^*\alpha \,.\, V| = |q^*\alpha| \cap V$ mit $q(C) = C'$ existiert. Dazu bezeichne man mit Y das abgeschlossene Unterschema $(C' \times X') \cap V$ von $X \times X'$, versehen mit der induzierten, reduzierten Struktur. Dann gilt $q(Y) = C'$.

„$\subset$" Ist x ein Punkt von $q(Y)$, dann existiert ein Punkt y von $X \times X'$, der in $C' \times X'$ und V liegt und $q(y) = x$ erfüllt. Damit liegt $x = q(y)$ aber in $q\big(q^{-1}(C')\big)$. Letzteres ist gleich C', denn q ist surjektiv.

„$\supset$" Liegt ein Punkt x in C', so ist er insbesondere in $q(V)$. Damit existiert ein Punkt y von $X \times X'$, der in $C' \times X'$ und V liegt und für den $q(y) = x$ gilt. Also liegt y in Y und folglich x in $q(Y)$.

Da die induzierte Abbildung $q|_Y : Y \to C'$ eigentlich und surjektiv ist, findet man in Y eine irreduzible Komponente C mit $q(C) = C'$. Weiter ist offenbar $Y \subset |q^*\alpha| \cap V$ ein abgeschlossenes Unterschema der Kodimension 0, womit C bereits eine Komponente von $q^*\alpha \,\textbf{.}\, V$ ist.

2) Man zeige die behauptete Implikation:
Schneiden sich V und $q^*\alpha$ eigentlich, so findet man nach der Vorüberlegung zu jeder irreduziblen Komponente C' von $|\alpha| \cap q(V)$ eine irreduzible Komponente C von $|q^*\alpha \,\textbf{.}\, V|$ mit $q(C) = C'$. Wegen

$$\dim(C) - d_{X'} \leq \dim\big(q(C)\big) \leq \dim(C)$$

hat man offenbar folgende Abschätzung:

$$(4.2) \qquad \operatorname{codim}_{X\times X'}(C) \geq \operatorname{codim}_X(C') \geq \operatorname{codim}_{X\times X'}(C) - d_{X'}.$$

Da sich $q^*\alpha$ und V eigentlich schneiden, gilt weiterhin:

$$(4.3) \qquad \operatorname{codim}_{X\times X'}\big(C\big) = \operatorname{codim}_{X\times X'}\big(q^*\alpha\big) + \operatorname{codim}_{X\times X'}\big(V\big).$$

Aus den Gleichungen (*4.1*)-(*4.3*) folgt nun:

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{codim}_X(C') & \geq & \operatorname{codim}_{X\times X'}\big(C\big) - d_{X'} \\ & = & \operatorname{codim}_{X\times X'}\big(q^*\alpha\big) + \operatorname{codim}_{X\times X'}(V) - d_{X'} \\ & = & \operatorname{codim}_X(\alpha) + \operatorname{codim}_X\big(q(V)\big). \end{array}$$

Da X weiterhin ein glattes Schema ist, gilt nach 1.8

$$\operatorname{codim}_X(C') \leq \operatorname{codim}_X(\alpha) + \operatorname{codim}_X\big(q(V)\big)$$

und damit

$$\operatorname{codim}_X(C') = \operatorname{codim}_X(\alpha) + \operatorname{codim}_X\big(q(V)\big).$$

Dies zeigt, dass sich α und $q(V)$ eigentlich schneiden und damit die Behauptung. □

4.10 Lemma

Ein System von Schnitten wie in 4.1 ist eindeutig.

Beweis:

Sei (U, W, α) ein σ-zulässiges Tripel. Für die behauptete Eindeutigkeit genügt es, mit den Bezeichnungen von 4.1 folgendes zu zeigen: Der Zykel $\alpha \sim_{\mathrm{rat}} 0$ lässt sich schreiben als $\sum_{i=1}^n \operatorname{div}(f_i)$ mit $f_i \in K(T_i)^*$ und $T_i \subset X$ abgeschlossene Untervarietäten der Kodimension $q-1$, so dass folgendes gilt: Für $i = 1, ..., n$ ist $\big(U, W, \operatorname{div}(f_i)\big)$ ein zulässiges Tripel, und die Zykel W und T_i sowie $W \times \mathbb{P}^1_k$ und V_i schneiden sich jeweils eigentlich. Hierbei bezeichnet $V_i \subset X \times \mathbb{P}^1_k$ eine q-kodimensionale Untervarietät mit

$$V_i\big((0) - (\infty)\big) = \operatorname{div}(g_i).$$

Denn hat man eine solche Menge von Tripeln $(T_i, \operatorname{div}(f_i), V_i)$ mit $i = 1, ..., n$ gefunden, dann kann man $\sigma_{U,W}(\alpha)$ gemäß 4.1 2) und 5) berechnen.
Seien mit $\tilde{q} \colon X \times \triangle^1_k \to X$, $q \colon X \times \mathbb{P}^1_k \to X$ und $p \colon X \times \mathbb{P}^1_k \to \mathbb{P}^1_k$ die Projektionen bezeichnet. Weiter sei $\tilde{V}_\alpha \in \mathrm{z}^q_W(X, 1)$ ein Urbild von α unter d_1, das insbesondere die Seiten von W

eigentlich schneidet. Offenbar kann man annehmen, dass jede Komponente C von $\tilde{V}_\alpha$ unter der Projektion dominant nach $\triangle_k^1$ abbildet und

$$\dim(C) = \dim\big(\tilde{q}(C)\big)$$

erfüllt. Man beachte dabei, dass Komponenten, die einer der beiden voranstehenden Bedingungen nicht genügen, unter d_1 auf Null abgebildet werden. Sei $\xi\colon \mathbb{P}_k^1\backslash\{1\} \xrightarrow{\sim} \triangle_k^1$ der in 2.9 fixierte Isomorphismus. Weiterhin bezeichne $V_\alpha \in \mathrm{Z}^q(X \times \mathbb{P}_k^1)$ den Zykel, den man erhält, wenn man die Komponenten von $(\mathrm{id} \times \xi)^*\tilde{V}_\alpha \in \mathrm{Z}^q\big(X \times (\mathbb{P}_k^1\backslash\{1\})\big)$ durch deren Abschluss in $X \times \mathbb{P}_k^1$ ersetzt. Nach 2.10 gilt dann

$$\alpha = V_\alpha(0) - V_\alpha(\infty).$$

Ist $V_\alpha = \sum_{i=1}^n C_i$, so setze man $T_i := q(C_i) \subset X$ für $i = 1, ..., n$. Nach Konstruktion gilt für $i = 1, ..., n$ die Gleichung $\dim(T_i) = \dim(C_i)$. Weiterhin schneidet V_α wegen $\tilde{V}_\alpha \in \mathrm{z}_W^q(X, 1)$ den Zykel $W \times \mathbb{P}_k^1$ eigentlich, womit sich nach 4.9 dann auch $\sum_{i=1}^n T_i$ und W eigentlich schneiden. Ist $\tilde{f}_i \in K(C_i)^*$ für $i \in \{1, ..., n\}$ die, durch die Projektion auf $\mathbb{P}_k^1$ induzierte, rationale Funktion auf C_i, so definiere man eine rationale Funktion $f_i \in K(T_i)$ durch

$$f_i := \mathrm{N}_{K(C_i)/K(T_i)}(\tilde{f}_i).$$

Dann erhält man mit der Projektionsformel (1.10) angewendet auf $q_i\colon C_i \to T_i$

$$\alpha = V_\alpha(0) - V_\alpha(\infty) = \textstyle\sum_{i=1}^n (q_i)_*\mathrm{div}(\tilde{f}_i) = \sum_{i=1}^n \mathrm{div}\big(\mathrm{N}_{K(C_i)/K(T_i)}(\tilde{f}_i)\big) = \sum_{i=1}^n \mathrm{div}(f_i).$$

Da $\tilde{V}_\alpha$ die Seiten $W \times (0)$ und $W \times (1)$ von $W \times \triangle_k^1$ nach Konstruktion eigentlich schneidet, schneiden sich für $a \in \{0, \infty\}$ und $i \in \{1, ..., n\}$ auch die drei Zykel C_i, q^*W und $p^*(a)$ paarweise eigentlich, und somit auch $C_i \mathbin{\scriptscriptstyle\blacksquare} p^*(a)$ und q^*W. Mit 4.9 folgt, dass sich dann auch $C_i(a)$ und W eigentlich schneiden. Schließlich gilt

$$\mathrm{div}(f_i) = C_i\big((0) - (\infty)\big)$$

und man erhält, dass W den Zykel $\mathrm{div}(f_i)$ für $i = 1, ..., n$ eigentlich schneidet. Damit leisten die Tripel (T_i, f_i, C_i) mit $i = 1, ..., n$ das Verlangte und die in 4.1 behauptete Eindeutigkeit ist gezeigt. □

Es steht noch der Beweis dafür aus, dass $\sigma_{.,.}$ dem Punkt 4.1 4) genügt. Hierzu benötigt man zunächst noch einige Vorüberlegungen.

4.11 Definition

Es sei L ein Körper und C/L eine reguläre, eigentliche Kurve. Weiter bezeichne $f \in K(C)^*$ eine rationale Funktion und $D = \sum_{i=1}^r n_i \cdot P_i \in \mathrm{Z}_0(C)$ einen Zykel mit $|D| \cap |\mathrm{div}(f)| = \emptyset$. Ist L algebraisch abgeschlossen, dann setze man:

$$f(D) := \prod_{i=1}^r f(P_i)^{n_i} \in L^*.$$

Für einen nicht notwendig algebraisch abgeschlossenen Körper L gilt $f(P_i) \in \kappa(P_i)$, deshalb setze man in diesem Fall:

$$f(D) := \prod_{i=1}^r \mathrm{N}_{\kappa(P_i)/L}\big(f(P_i)\big)^{n_i} \in L^*.$$

4.12 Satz (Weilsches Reziprozitätsgesetz)

Sei C über k eine reguläre, eigentliche Kurve. Weiter bezeichne man mit $f, g \in K(C)^*$ rationale Funktionen auf C, für die der Schnitt $|\mathrm{div}(f)| \cap |\mathrm{div}(g)| = \emptyset$ ist. Dann gilt:

$$f\big(\mathrm{div}(g)\big) = g\big(\mathrm{div}(f)\big).$$

Beweis:

Diese wohlbekannte Aussage ([Si] II Ex. 2.11.) zu beweisen ist dem Leser überlassen. □

4.13 Proposition

Sei C/k eine reguläre, eigentliche Kurve, $f \in K(C)^*$ eine rationale Funktion und $P \in |C|$ ein abgeschlossener Punkt, der nicht im Divisor von f liegt. Weiter sei $t \in K(\mathbb{P}^1_k)^*$ die, von der Identität auf dem $\mathbb{P}^1_k$ induzierte, rationale Funktion. Bezeichnet $\Gamma_f \subset C \times \mathbb{P}^1_k$ den Graphen von f und $p\colon C \times \mathbb{P}^1_k \to \mathbb{P}^1_k$ die Projektion, so gilt:

$$f(P) = t\Big(p_*\big(\Gamma_f \centerdot (P \times \mathbb{P}^1_k)\big)\Big).$$

Beweis:

Klar! □

An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass 4.14 zu dem Trugschluss einlädt, es könne sich in der entsprechenden Situation bei den Funktionen h_i (bzw. g_i) und den Funktionen f_i aus 4.1 5) um die selben Abbildungen handeln. Dem ist aber <u>nicht</u> so. Man beachte dabei, dass dies allein schon aus Dimensionsgründen nicht möglich ist.

4.14 Proposition

Es seien für $i, j \in \{1, 2, 3\}$ mit $\tilde{p}_{ij}$ die Projektionen aus $\mathbb{P}^1_k \times X \times \mathbb{P}^1_k$ auf den i-ten und j-ten Faktor bezeichnet und mit p_{ij} die aus $\mathbb{P}^1_{K(S)} \times X_\eta \times \mathbb{P}^1_{K(S)}$. Man betrachte weiterhin abgeschlossene Untervarietäten $T, T' \subset X$ der Kodimension $p+1$ bzw. $q+1$, sowie rationale Funktionen $f \in K(T)^*$ und $f' \in K(T')^*$, so dass sich $|\mathrm{div}(f)|$ und $|\mathrm{div}(f')|$ eigentlich schneiden. Weiter seien mit $\tilde{V}$, $\tilde{V}' \subset X \times \mathbb{P}^1_k$ abgeschlossene Untervarietäten der Kodimension p bzw. q fixiert, so dass sich $\tilde{p}^*_{12}{}^t\tilde{V}$ und $\tilde{p}^*_{23}\tilde{V}'$ eigentlich schneiden und $\tilde{V}\big((0) - (\infty)\big) = \mathrm{div}(f)$ bzw. $\tilde{V}'\big((0) - (\infty)\big) = \mathrm{div}(f')$ gilt. Für $V := \tilde{V}_\eta$, $V' := \tilde{V}'_\eta \subset X_\eta \times_{K(S)} \mathbb{P}^1_{K(S)}$ gelte

$$(p_{13})_*\big(p^*_{12}{}^tV \centerdot p^*_{23}V'\big) = \sum_{i=1}^{n} n_i \cdot C_i \subset \mathrm{Z}^1(\mathbb{P}^1_{K(S)} \times_{K(S)} \mathbb{P}^1_{K(S)})$$

und für $i \in \{1, ..., n\}$ bezeichne $p_i\colon \tilde{C}_i \to C_i$ die Normalisierung von C_i. Weiterhin benenne man für $i = 1, ..., n$ die durch die beiden Projektionen von $C_i \subset \mathbb{P}^1_{K(S)} \times \mathbb{P}^1_{K(S)}$ nach $\mathbb{P}^1_{K(S)}$ induzierten Morphismen mit g_i und h_i. Man setze noch $\tilde{h}_i = h_i \circ p_i\colon \tilde{C}_i \to \mathbb{P}^1_{K(S)}$ und

$\tilde{g}_i = g \circ p_i \colon \tilde{C}_i \to \mathbb{P}^1_{K(S)}$ für $i = 1, ..., n$, dann ist $\tilde{g}_i\big(\mathrm{div}(\tilde{h}_i)\big) \in K(S)^*$ eine rationale Funktion auf S. Ist $U \subset S$ offen mit $(|\mathrm{div}(f)| \cap |\mathrm{div}(f')|)_U = \emptyset$, so gilt

$$\sigma_{U,\mathrm{div}(f)}\big(\mathrm{div}(f')\big) = \prod_{i=1}^{n} \Big(\tilde{g}_i\big(\mathrm{div}(\tilde{h}_i)\big)\Big)^{n_i} \in \mathbb{G}_{\mathrm{m},S}(U).$$

Insbesondere erhält man damit

$$\sigma_{U,\mathrm{div}(f)}\big(\mathrm{div}(f')\big) = \sigma_{U,\mathrm{div}(f')}\big(\mathrm{div}(f)\big).$$

Beweis:

Ist $\rho \colon X \times \mathbb{P}^1_k \to \mathbb{P}^1_k$ die Projektion, so gilt nach den üblichen Rechenregeln für Korrespondenzen:

$$\begin{aligned} \rho_*\Big(\tilde{V}' \mathbin{\scriptstyle\bullet} \big(\mathrm{div}(f) \times \mathbb{P}^1_k\big)\Big) &= \tilde{V}'\big(\mathrm{div}(f)\big) \\ &= \tilde{V}'\Big({}^t\tilde{V}\big((0) - (\infty)\big)\Big) \\ &= (\tilde{V}' \circ {}^t\tilde{V})\big((0) - (\infty)\big). \end{aligned}$$

Nun kommutiert offenbar folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} X \times \mathbb{P}^1_k & & \\ {\scriptstyle \pi \times \mathrm{id}}\downarrow & \searrow{\scriptstyle \rho} & \\ S \times \mathbb{P}^1_k & \longrightarrow & \mathbb{P}^1_k. \end{array}$$

Nach Basiswechsel mit $\eta \hookrightarrow S$ gilt $(\pi \times \mathrm{id})_\eta = \rho_\eta$ und man erhält

$$(\pi_\eta \times \mathrm{id})_*\Big(\tilde{V}' \mathbin{\scriptstyle\bullet} \big(\mathrm{div}(f) \times \mathbb{P}^1_k\big)\Big)_\eta = \big(\sum_{i=1}^{n} n_i \cdot C_i\big)\big((0) - (\infty)\big).$$

Bezeichnet man für $i = 1, ..., n$ mit C_i' die Einschränkung von C_i auf $\mathbb{P}^1_{K(S)} \times \mathbb{P}^1_{K(S)} \backslash \{1\}$, so gilt:

$$\begin{aligned} \Big(\sigma_{U,\mathrm{div}(f)}\big(\mathrm{div}(f')\big)\Big)_\eta &= \iota_{K(S)}\Big(\big(\pi_\eta \times \xi\big)_*\big(\tilde{V}' \mathbin{\scriptstyle\bullet} (\mathrm{div}(f) \times \mathbb{P}^1_k \backslash \{1\})\big)_\eta\Big) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \iota_{K(S)}\Big(\xi_*\big(C_i'((0) - (\infty))\big)\Big)^{n_i}. \end{aligned}$$

Für ein $i \in \{1, ..., n\}$ hat man weiter nach 1.4 (Man beachte dabei, dass $g_i \colon C_i \to \mathbb{P}^1_{K(S)}$ der Projektion entspricht):

$$\begin{aligned} C_i\big((0) - (\infty)\big) &= (g_i)_*\Big(h_i^{-1}\big((0) - (\infty)\big)\Big) \\ &= (g_i)_*\big(\mathrm{div}(h_i)\big). \end{aligned}$$

Weiterhin hat man für $i = 1, ..., n$

$$\begin{aligned} (\tilde{g}_i)_*\big(\mathrm{div}(\tilde{h}_i)\big) &= (g_i \circ p_i)_*\big(\mathrm{div}(\tilde{h}_i)\big) \\ &= (g_i)_*\Big(\mathrm{div}\big(\mathrm{N}_{K(\tilde{C}_i)/K(C_i)}(\tilde{h}_i)\big)\Big) \\ &= (g_i)_*\big(\mathrm{div}(h_i)\big). \end{aligned}$$

Bezeichnet $q\colon \mathbb{P}^1_{K(S)} \times \mathbb{P}^1_{K(S)}\backslash\{1\} \to \mathbb{P}^1_{K(S)}\backslash\{1\}$ die Projektion, so gilt:

$$\begin{aligned}\Big(\sigma_{U,\mathrm{div}(f)}\big(\mathrm{div}(f')\big)\Big)_\eta &= \prod_{i=1}^n \iota_{K(S)}\Big(\xi_*\big((\tilde g_i)_*\big(\mathrm{div}(\tilde h_i)\big)\big)_{\mathbb{P}^1_{K(S)}\backslash\{1\}}\Big)^{n_i}\\ &= \prod_{i=1}^n \iota_{K(S)}\Big(\xi_* q_*\big(\Gamma_{\tilde g_i} \mathbin{\boldsymbol{.}} \mathrm{div}(\tilde h_i) \times \mathbb{P}^1_{K(S)}\backslash\{1\}\big)\Big)^{n_i}.\end{aligned}$$

Ist $t \in K(\mathbb{P}^1_{K(S)})^*$ wie in 4.13, so gilt nach 2.16 für jeden Punkt $P \in |\mathbb{P}^1_{K(S)}\backslash\{0,1,\infty\}|$, dass man

$$t(P) = \iota_{K(S)}(\xi_* P)$$

hat. Da sich aber die Zykel $q_*\big(\Gamma_{\tilde g_i} \mathbin{\boldsymbol{.}} (\mathrm{div}(\tilde h_i) \times \mathbb{P}^1_k\backslash\{1\})\big)$ und $\Gamma_{\tilde g_i}\big(\mathrm{div}(\tilde h_i)\big) \subset \mathbb{P}^1_k$ nur um ein Vielfaches des Zykels mit Träger $1 \in \mathbb{P}^1_{K(S)}$ unterscheiden und $t(1) = 1$ ist, folgt mit 4.13

$$\begin{aligned}\Big(\sigma_{U,\mathrm{div}(f)}\big(\mathrm{div}(f')\big)\Big)_\eta &= \prod_{i=1}^n t\Big(\Gamma_{\tilde g_i}\big(\mathrm{div}(\tilde h_i)\big)\Big)^{n_i}\\ &= \prod_{i=1}^n \Big(\tilde g_i\big(\mathrm{div}(\tilde h_i)\big)\Big)^{n_i}.\end{aligned}$$

Da auf beiden Seiten Elemente aus $K(S)$ stehen und die rechte Seite bereits in $\mathbb{G}_{\mathrm{m},S}(U)$ liegt, zeigt dies die erste Behauptung. Der Zusatz folgt, wenn man nun auf jeder der normalen, projektiven Kurven $\tilde C_1, ..., \tilde C_n$ das Weilsche Reziprozitätsgesetz anwendet. □

Bevor die allgemeine Situation aus 4.1 4) auf die aus 4.14 zurückgeführt wird, sind noch Vorbereitungen nötig. Konkret wird für eine abgeschlossene Untervarietät $V \subset X \times \mathbb{P}^1_k$ ein Zykel $\Upsilon \subset X$ konstruiert, so dass sich für jedes $W \in \mathrm{Z}_\Upsilon(X)$ auch V und $W \times \mathbb{P}^1_k$ eigentlich schneiden. In der Sprache von Kapitel 7 wird damit in dieser speziellen Situation der Stratifizierungzykel von V konstruiert.

4.15 Definition (Äquidimensional)

Sei $f\colon Y' \to Y$ ein flacher Morphismus von Varietäten und $V \subset Y'$ eine q-kodimensionale, abgeschlossene Untervarietät. Dann ist für jeden a-dimensionalen Punkt y von Y die Faser $Y'_y \subset Y'$ ein äquidimensionales Schema der Dimension $d_{Y'} - a$. Man bezeichne V im Punkt y als äquidimensional über Y, wenn für jede Komponente C von $V_y \subset Y'_y$ gilt

$$\mathrm{codim}_{Y'_y}(C) \geq q.$$

Weiterhin nenne man einen Zykel $W \in \mathrm{Z}^p(Y')$ äquidimensional über Y im Punkt y, wenn jede Komponente C von W äquidimensional über Y in y ist. Der Zykel W liegt äquidimensional über Y, wenn er in jedem Punkt y äquidimensional über Y liegt.

4.16 Bemerkung

i) Mit den Bezeichnungen von 4.15 ist V offenbar genau dann äquidimensional über einem abgeschlossenen Punkt $y \in |Y|$, wenn sich V und die Faser Y'_y in Y' eigentlich schneiden.

ii) In [VS] 2.1.2 wird der Begriff eines äquidimensionalen Morphismus definiert. Mit der Notation von 4.15 überzeugt man sich leicht, dass folgendes gilt: Ist $f|_V : V \to Y$ ein äquidimensionaler Morphismus, so ist V über Y äquidimensional. Ist $\dim(V) \geq d_S$, so gilt auch: Ist V über Y äquidimensional, so ist $f|_V : V \to Y$ ein äquidimensionaler Morphismus.

4.17 Satz (Von Chevalley)

Sei $f : Y' \to Y$ ein Morphismus von Schemata, der lokal v. e. T. ist. Dann ist die Zuordnung

$$\phi \colon Y' \to \mathbb{N}; \quad y' \mapsto \dim\bigl(f^{-1}(f(y'))\bigr)$$

halbstetig von oben in Y'.

Beweis:

Siehe [EGA IV] 13.1.3. □

4.18 Bemerkung

i) In der Situation von 4.17 besteht $(f^{-1}(f(y'))$ aus endlich vielen irreduziblen Komponenten $C_1, ..., C_n$. Damit ist $\dim\bigl(f^{-1}(f(y'))\bigr)$ wie folgt zu verstehen (vgl. [EGA IV] 4.1.1):

$$\dim\bigl(f^{-1}(f(y'))\bigr) = \max\{\dim(C_1), ..., \dim(C_n)\}.$$

ii) Nach [EGA IV] 13.1.5 ist es eine direkte Folgerung aus 4.17, dass für einen abgeschlossenen Morphismus f in der Situation von 4.17 auch

$$\phi \colon Y \to \mathbb{N}; \quad y \mapsto \dim\bigl(f^{-1}(y)\bigr)$$

halbstetig von oben in Y ist.

4.19 Definition (Der äquidimensionale Ort)

Sei $f : Y' \to Y$ ein flacher Morphismus von Varietäten und $W \in \mathrm{Z}^p(Y')$ ein Zykel. Mit 4.18 ii) sind die Punkte von Y, bei denen W über Y äquidimensional ist, gerade die Punkte einer offenen Menge $U_W \subset Y$. Man bezeichne diese offene Menge U_W als den äquidimensionalen Ort von W über Y.

4.20 Proposition

Sei Y eine Varietät und $V \subset Y \times \mathbb{P}^1_k$ eine abgeschlossene Untervarietät. Weiter schreibe man $Z \subset Y$ für das Komplement des äquidimensionalen Ortes U_V von V/Y, versehen mit der induzierten, reduzierten Struktur. Bezeichnet Z auch den entsprechenden Fundamentalzykel und ist $p \colon Y \times \mathbb{P}^1_k \to Y$ die Projektion, dann schneiden sich für $W \in \mathrm{Z}^*_{Z,p(V)}(Y)$ auch V und $W \times \mathbb{P}^1_k$ eigentlich.

Beweis:

Da p eigentlich ist, ist $p(V) \subset Y$ abgeschlossen. Auch gilt $Z \subset p(V)$, denn ist für einen Punkt y von Y die Faser V_y leer, so liegt y in U_V. Da $p(V)$ als stetiges Bild von V irreduzibel ist, genügt es, die beiden Fälle $p(V) = Z$ und $\dim\bigl(p(V)\bigr) > \dim(Z)$ zu betrachten.
Im ersten Fall ist V über $Z = p(V)$ nicht äquidimensional, womit $V = Z \times \mathbb{P}^1_k$ gilt. Also schneiden sich mit W und Z auch $W \times \mathbb{P}^1_k$ und V eigentlich. Im zweiten Fall beachte man zunächst, dass sich $W \times \mathbb{P}^1_k$ und V über U_V eigentlich schneiden. Denn W und $p(V)$ schneiden sich eigentlich und die Fasern V_y mit y ein Punkt aus U_V sind entweder leer oder bestehen nur aus endlich vielen Punkten. Da sich Z und W eigentlich schneiden, kann aber aus Dimensionsgründen keine Komponente von $V \cap |W \times \mathbb{P}^1_k|$ komplett über Z liegen, sondern trifft auch $U_V \times \mathbb{P}^1_k$. Damit folgt die Behauptung. $\square$

Beweis von 4.1:

Um 4.1 vollständig zu beweisen, genügt es folgendes zu zeigen: Man kann sich bei jedem σ-zulässigen Tripel (U, α, β) mit $\alpha \sim_{\text{rat}} 0 \sim_{\text{rat}} \beta$ auf die Situation aus 4.14 zurückziehen. Zunächst findet man dazu, wie im Beweis von 4.10, eine Zerlegung von α in $\sum_{i=1}^n \operatorname{div}(f_i)$ mit $f_i \in K(T_i)$ und $T_i \subset X$ abgeschlossene Untervarietäten für $i = 1, ..., n$, so dass folgendes gilt: Für $i = 1, ..., n$ schneiden sich β und $\operatorname{div}(f_i)$ eigentlich. Zusätzlich findet man für $i = 1, ..., n$ eine abgeschlossene Untervarität $V_i \subset X \times \mathbb{P}^1_k$ mit $V_i\bigl((0) - (\infty)\bigr) = \operatorname{div}(f_i)$, so dass sich $\beta \times \mathbb{P}^1_k$ und V_i eigentlich schneiden. Seien p_{12} und p_{13} die beiden offensichtlichen Projektionen von $X \times \mathbb{P}^1_k \times \mathbb{P}^1_k$ nach $X \times \mathbb{P}^1_k$. Weiterhin bezeichne $Z \in \mathrm{Z}^*(X \times \mathbb{P}^1_k)$ den Fundamentalzykel zum Komplement des äquidimensionalen Orts von $p_{12}^* \sum_{i=1}^n V_i$ über $X \times \mathbb{P}^1_k$ bezüglich der Projektion p_{23}. Man wähle (wie im Beweis von 4.10) einen Zykel

$$V_\beta \in \mathrm{Z}^*_{Z, T_1 \times \mathbb{P}^1_k, ..., T_n \times \mathbb{P}^1_k, \operatorname{div}(f_1) \times ((0)-(\infty)), ..., \operatorname{div}(f_n) \times ((0)-(\infty))}(X \times \mathbb{P}^1_k)$$

mit dominanten Komponenten über $\mathbb{P}^1_k$ und

$$V_\beta\bigl((0) - (\infty)\bigr) = \beta.$$

Offenbar kann man wie im Beweis von 4.10 annehmen, dass keine Komponente des Zykels V_β von der Form $Y \times \mathbb{P}^1_k$ mit $Y \subset X$ ist. Dann schneiden sich nach 4.20 $p_{23}^* V_\beta$ und $p_{12}^* \sum_{i=1}^n V_i$ eigentlich. Darüberhinaus erhält man völlig analog wie im Beweis von 4.10 rationale Funktionen $f'_j \in K(T'_j)$ mit $T'_j \subset X$ abgeschlossene Untervarietäten und $j = 1, ..., m$ so, dass $\beta = \sum_{j=1}^m \operatorname{div}(f'_j)$ gilt. Weiterhin schneiden sich nach Konstruktion $\operatorname{div}(f_i)$ und $\operatorname{div}(f'_j)$ für $i = 1, ..., n$ und $j = 1, ..., m$ eigentlich. Damit leisten die Zerlegungen $\alpha = \sum_{i=1}^n \operatorname{div}(f_i)$ und $\beta = \sum_{j=1}^m \operatorname{div}(f'_j)$ sowie die $V_1, ..., V_n$ und die Komponenten von V_β das Verlangte. $\square$

$\square_{4.1}$

Im Speziellen kann man mit diesen Techniken auch eine stärkere Version die Formel in 4.1 5) beweisen.

4.21 Proposition

Sei $T \subset X$ eine abgeschlossene Untervarietät der Kodimension $q - 1$ und $f \in K(T)^*$ eine rationale Funktion. Man bezeichne mit $U_f \subset T$ den maximalen Definitionsbereich von f, mit $V_f \subset T \times \mathbb{P}^1_k$ eine Untervarietät wie in 1.5 und mit $U_V \subset X$ den äquidimensionalen Ort von V_f über X. Weiterhin schreibe man $Y := T \backslash U_f$ und $Z := T \backslash U_V$ für die entsprechenden Unterschemata, versehen mit der induzierten, reduzierten Struktur. Sei $W \in \mathrm{Z}^p_{\mathrm{hom}}(X)$ ein Zykel, der T und $\mathrm{div}(f)$ sowie die Fundamentalzykel Y und Z eigentlich schneidet. Ist

$$W \,\bullet\, T = \sum_{i=1}^{n} n_i \cdot C_i,$$

dann ist nach Konstruktion $C_i \cap U_f \neq \emptyset$ für $i = 1, ..., n$, womit $f_i := f|_{C_i \cap U_f} \in K(C_i)^*$ eine rationale Funktion auf C_i definiert. Ohne Einschränkung seien dabei die Komponenten $C_1, ..., C_n$ so sortiert, dass für ein $r \in \{1, ..., n\}$ die Komponenten $C_1, ..., C_r$ dominant und $C_{r+1}, ..., C_n$ nicht dominant über S sind. Sei $U \subset S$ offen, so dass $(|W| \cap |\mathrm{div}(f)|)_U = \emptyset$ ist. Dann gilt mit diesen Bezeichnungen in $\mathbb{G}_{\mathrm{m},S}(U)$:

$$\sigma_{U,W}\big(\mathrm{div}(f)\big) = \prod_{i=1}^{r} \big(\mathrm{N}_{K(C_i)/K(S)}(f_i)\big)^{n_i}.$$

Beweis:

Da $(V_f)_{U_f}$ durch den Graphen von $f|_{U_f}$ gegeben ist und $U_f \cap C_i \neq \emptyset$ ist für $i = 1, ..., n$, überlegt man sich (4.20!), dass

$$V_f \,\bullet\, W \times \mathbb{P}^1_k = \sum_{i=1}^{n} n_i \cdot V_{f_i}$$

gilt. Sei $i \in \{1, ..., n\}$ fixiert. Über der offenen Teilmenge $U_i := U_f \cap C_i \subset C_i$ ist V_{f_i} bereits der Graph von $f_i|_{U_i}$. Damit überlegt man sich analog zu 4.8, dass $(V_{f_i})_\eta \in \mathbb{P}^1_{K(C_i)}$ dem Punkt entspricht, der mit $(z - f_i) \subset K(C_i)[z]$ korrespondiert. Dann funktioniert der Rest des Beweises aber völlig analog zu 4.8. $\square$

Kapitel 5

Blochsche Kozykeldaten $\mathfrak{K}^{\mathrm{CH}}$

In der Grundsituation von Kapitel 4 mit der Zusatzvoraussetzung $\pi\colon X \to S$ glatt konstruiert Bloch in [Bl1] eine $\mathbb{G}_{\mathrm{m},S}$-Bierweiterung $\mathbb{E}$ der Garbe $\underline{\mathrm{CH}}^p_{\mathrm{hom}}(X/S) \times \underline{\mathrm{CH}}^q_{\mathrm{hom}}(X/S)$. Im Folgenden wird, ausgehend von den Schnitten $\sigma_{.,.}(.)$ aus Kapitel 4, ein Satz von $\mathbb{G}_{\mathrm{m},S}$-Kozykeldaten $\mathfrak{K}^{\mathrm{CH}}$ über $\underline{\mathrm{CH}}^p_{\mathrm{hom}}(X/S) \times \underline{\mathrm{CH}}^q_{\mathrm{hom}}(X/S)$ angegeben. Im weiteren Verlauf dieser Arbeit wird erläutert (6.3), dass $\mathfrak{K}^{\mathrm{CH}}$ gemäß Kapitel 3 mit der Blochschen Bierweiterung $\mathbb{E}$ korrespondiert. Erneut wird in diesem Kapitel die Grundsituation aus Kapitel 4 betrachtet.

5.1 Definition (Die Garben $\underline{\mathbf{CH}}^p(X/S)$ und $\underline{\mathbf{CH}}^p_{\mathbf{hom}}(X/S)$)

Sei $U \subset S$ offen und $X_U := \pi^{-1}(U)$. Durch die Zuordnung $U \mapsto \mathrm{CH}^p(X_U)$ wird mit den offensichtlichen Restriktionsabbildungen eine Prägarbe definiert. Man bezeichne die dazu assoziierte Zariski-Garbe mit $\underline{\mathrm{CH}}^p(X/S)$. Analog definiere man $\underline{\mathrm{CH}}^p_{\mathrm{hom}}(X/S)$ als die zu $\mathrm{CH}^p_{\mathrm{hom}}(X/S)$ assoziierte Zariski-Garbe.

5.2 Satz

Zunächst fixiere man die in diesem Kapitel oft benötigte Indexmenge

$$I := \left\{ i := (V,W,Z) \;\middle|\; \begin{array}{l} V \subset S \text{ offen und } W \in \mathrm{Z}^p_{\mathrm{hom}}(X/S) \text{ sowie } Z \in \mathrm{Z}^q_{\mathrm{hom}}(X/S) \\ \text{Zykel, die sich eigentlich und über } V \text{ gar nicht schneiden} \end{array} \right\}.$$

Um nicht ständig für $i \in I$ das Tupel $(V,W,Z) = i$ spezifizieren zu müssen, setze man für $i = (V,W,Z) \in I$ weiterhin $V_i := V$, $W_i := W$ und $Z_i := Z$. Offenbar gilt dann $i = (V_i, W_i, Z_i) \in I$. Damit definiere man die Überdeckung

$$\mathfrak{U} := \left\{ \big(V_i, [W_i], [Z_i]\big) \;\middle|\; i \in I \right\}.$$

Dann ist $\mathfrak{U}$ eine zulässige Überdeckung und es existiert ein eindeutig bestimmter Satz von $\mathbb{G}_{\mathrm{m},S}$-Kozykeldaten $(I, \mathfrak{U}, \varphi_{.,.}, \lambda^{.,.}_{.}, \rho^{.,.}_{.})$ über der Garbe $\underline{\mathrm{CH}}^p_{\mathrm{hom}}(X/S) \times \underline{\mathrm{CH}}^q_{\mathrm{hom}}(X/S)$, der den folgenden Bedingungen genügt:

1) Sei $(i,j) \in I^2$ φ-zulässig (d. h. nach 3.7 $[W_i] = [W_j]$ und $[Z_i] = [Z_j]$ auf V_{ij}). Schneiden sich zusätzlich W_i und Z_j, sowie W_j und Z_i eigentlich und über einer offenen Teilmenge $V' \subset V_{ij}$ gar nicht, so gilt

$$\varphi_{i,j}\big|_{V'} = \sigma_{V',W_i}(Z_i - Z_j) \cdot \sigma_{V',Z_j}(W_i - W_j) \in \Gamma\big(V',\, \mathbb{G}_{\mathrm{m},S}\big).$$

2) Sei (i,j,k) mit $i,j,\in I$ λ-zulässig (also $V_{ij} = V_k$, sowie $[W_i]+[W_j]=[W_k]$ und $[Z_i]=[Z_j]=[Z_k]$ auf V_k). Schneidet zusätzlich Z_k die Zykel W_i und W_j eigentlich und über einer offenen Teilmenge $V' \subset V_k$ gar nicht, so gilt

$$\lambda_k^{i,j}\big|_{V'} = \sigma_{V',W_i}(Z_i - Z_k)\cdot\sigma_{V',W_j}(Z_j - Z_k)\cdot\sigma_{V',Z_k}(W_i + W_j - W_k) \in \Gamma\big(V',\, \mathbb{G}_{\mathrm{m},S}\big).$$

3) Sei (i,j,k) mit $i,\ j,\ k \in I$ ρ-zulässig (also $V_{ij} = V_k$, sowie $[Z_i]+[Z_j]=[Z_k]$ und $[W_i]=[W_j]=[W_k]$ auf V_k). Schneidet zusätzlich W_k die Zykel Z_i und Z_j eigentlich und über einer offenen Teilmenge $V' \subset V_k$ gar nicht, so gilt

$$\rho_k^{i,j}\big|_{V'} = \sigma_{V',Z_i}(W_i - W_k)\cdot\sigma_{V',Z_j}(W_j - W_k)\cdot\sigma_{V',W_k}(Z_i + Z_j - Z_k) \in \Gamma\big(V',\, \mathbb{G}_{\mathrm{m},S}\big).$$

Dies Aussage wird im Rest dieses Kapitels bewiesen.

5.3 Definition

Man bezeichne den durch 5.2 eindeutig bestimmten Satz von Kozykeldaten als den Satz von Blochschen Kozykeldaten und schreibe dafür $\mathfrak{K}^{\mathrm{CH}}$.

5.4 Proposition

Für jede offene Teilmenge $U \subset S$ ist die kanonische Abbildung

$$\mathrm{CH}^p(X) \to \mathrm{CH}^p(X_U) \quad w \mapsto w_U$$

surjektiv, d. h. ist $s \in |S|$ und $\alpha \in \underline{\mathrm{CH}}^p(X/S)_s$ ein Schnitt aus dem Halm von $\underline{\mathrm{CH}}^p(X/S)$ bei s, so existiert ein globaler Schnitt $w \in \mathrm{CH}^p(X)$ von $\underline{\mathrm{CH}}^p(X/S)$ mit

$$w_s = \alpha.$$

Analoges gilt für die Garbe $\underline{\mathrm{CH}}^p_{\mathrm{hom}}(X/S)$.

Beweis:

Die Aussage über die Surjektivität findet man bei [Fu] Proposition 1.8. Der Rest folgt unmittelbar aus der Tatsache, dass sich die Halme einer Prägarbe beim Garbifizieren nicht verändern. □

5.5 Bemerkung

Man betrachte die Überdeckung $\mathfrak{U}$ aus 5.2. Offenbar ist diese Überdeckung *durchschnittsstabil*, denn ist $(V,w,z) \in \mathfrak{U}$, so auch jedes Tripel (V',w,z) mit $V' \subset V$ offen. Weiterhin ist die Überdeckung $\mathfrak{U}$ auch *reichhaltig* und $(S,0,0)$ liegt in $\mathfrak{U}$. Um einzusehen, dass $\mathfrak{U}$ auch die *Überdeckungseigenschaft* erfüllt und damit *zulässig* ist, genügt es mit 5.4 folgendes zu zeigen: Ist $s \in |S|$ ein abgeschlossener Punkt, und sind $w \in \mathrm{CH}^p_{\mathrm{hom}}(X/S)$ und $z \in \mathrm{CH}^q_{\mathrm{hom}}(X/S)$, dann existieren Repräsentanten W und Z von w bzw. z, die sich eigentlich und lokal bei s gar nicht schneiden. Um dies einzusehen, erinnere man sich an den Begriff des äquidimensionalen Zykels aus 4.15 und beachte folgende Verallgemeinerung von [Me] I 2.3.1:

5.6 Proposition

Sei $w \in \mathrm{CH}^p(X)$ und $s \in |S|$ ein abgeschlossener Punkt.

i) Es existiert ein Repräsentant $W \in \mathrm{Z}^p(X)$ von w und eine offene Umgebung $V \subset S$ von s, so dass W über V äquidimensional ist.

ii) Sei $z \in \mathrm{CH}^q(X)$, $V \subset S$ eine offene Umgebung von s und $W \in Z^p(X)$ ein Zykel, der über V äquidimensional ist. Dann existiert eine offene Umgebung $V' \subset V$ von s und ein über V' äquidimensionaler Repräsentant Z von z, so dass sich W und Z eigentlich und über V' gar nicht schneiden.

Beweis:

Zu i): Man wähle einen Repräsentanten W von w aus $\mathrm{Z}^p_{X_s}(X)$. Dann schneidet W die Faser X_s eigentlich und ist damit im Punkt s äquidimensional. Setzt man $V = U_W$ als den äquidimensionalen Ort von W, so folgt mit 4.19 die Behauptung.
Zu ii): Wählt man einen Repräsentanten Z von z aus $\mathrm{Z}^q_{W,X_s,W_s}(X)$, dann schneidet Z die Faser X_s eigentlich, ist also im Punkt s äquidimensional. Da W bei s äquidimensional ist, hat jede Komponente von W_s die Kodimension $d_S + p$. Aufgrund der Tatsache, dass sich W_s und Z eigentlich schneiden, hat jede Komponente von $|Z| \cap |W_s|$ die Kodimension

$$d_S + p + q = d_X + 1 > d_X.$$

Damit schneiden sich aber W und Z eigentlich und bei s gar nicht. □

5.7 Proposition

Man verwende die Notation von 5.2 und fixiere für jedes φ-zulässige Paar $(i,j) \in I^2$ (also für i,j mit $[W_i] = [W_j]$ und $[Z_i] = [Z_j]$ auf V_{ij}) einen Schnitt

$$\varphi_{i,j} \in \Gamma\big(V_{ij}, \mathbb{G}_{\mathrm{m},S}\big)$$

so, dass das System $\mathfrak{S}$ dieser Schnitte folgende Eigenschaften besitzt:

i) Sei $V \subset S$ eine offene Teilmenge und (i,j) ein φ-zulässiges Paar. Weiter seien $k,l \in I$ die Indizes mit $k = (V \cap V_i, W_i, Z_i)$ und $l = (V \cap V_j, W_j, Z_j)$. Dann gilt für die φ-zulässigen Paare (k,l) und (i,j):

$$\varphi_{i,j}\big|_{V_{kl}} = \varphi_{k,l}.$$

ii) Für $i,j,k \in I$ ist mit den Paaren (i,j) und (j,k) auch (i,k) φ-zulässig und es gilt:

$$\varphi_{i,k} = \varphi_{i,j} \cdot \varphi_{j,k}.$$

iii) Ist (i,j) ein φ-zulässiges Paar und schneiden sich zusätzlich W_i und Z_j sowie W_j und Z_i eigentlich und über V_{ij} gar nicht, dann gilt:

$$\varphi_{i,j} = \sigma_{V_{ij},Z_i}(W_i - W_j) \cdot \sigma_{V_{ij},W_j}(Z_i - Z_j).$$

Mit diesen Forderungen gilt folgendes:

1) Es existiert genau ein System $\mathfrak{S}$ von Schnitten, das den Eigenschaften i)-iii) genügt.

2) Die Schnitte des Systems $\mathfrak{S}$ erfüllen die Kozykelbedingungen in 3.7 (bezüglich der zulässigen Überdeckung $\mathfrak{U}$ aus 5.2) und die Eigenschaft 1) in 5.2.

3) Jeder Satz von Übergangsabbildungen, der 5.2 1) genügt, erfüllt die Punkte i) -iii).

Damit ist das System $\mathfrak{S}$ die einzige Möglichkeit, Übergangsabbildungen mit den in 5.2 geforderten Eigenschaften zu definieren.

Beweis:

I) Zur Existenz eines solchen Systems $\mathfrak{S}$:
Offenbar genügt es, jeden Schnitt $\varphi_{i,j}$ mit (i,j) φ-zulässig lokal zu definieren. Denn ist diese lokale Definition verträglich, so verkleben die lokalen Schnitte zu $\varphi_{i,j}$. Sei $s \in |V_{ij}|$. Man wähle Zykel $W_0 \in [W_i]$ und $Z_0 \in [Z_i]$, so dass sich für $l \in \{i, j, 0\}$ die Zykel Z_l und W_0, sowie W_l und Z_0 eigentlich und über einer offenen Umgebung $\tilde{V} \subset V$ von s gar nicht schneiden (vgl. 5.6). Damit definiere man den Schnitt $\varphi_{i,j}$ lokal über $\tilde{V}$ wie folgt:

$$\varphi_{i,j}|_{\tilde{V}} := \sigma_{\tilde{V},Z_i}(W_i - W_0) \cdot \sigma_{\tilde{V},W_0}(Z_i - Z_0) \cdot \sigma_{\tilde{V},Z_0}(W_0 - W_j) \cdot \sigma_{\tilde{V},W_j}(Z_0 - Z_j).$$

Es ist die Verträglichkeit dieser lokalen Definition zu zeigen. D. h. sind $W_1 \in [W_i]$ und $Z_1 \in [Z_i]$ Zykel, so dass sich für $t \in \{i, j, 1\}$ die Zykel Z_t und W_1, sowie W_t und Z_1 eigentlich und über einer offenen Umgebung $\tilde{V}' \subset V$ von s gar nicht schneiden, dann muss auf dem Durchschnitt $V' := \tilde{V} \cap \tilde{V}'$ gelten:

$$\begin{aligned}
&\sigma_{V',Z_i}(W_i - W_0) \cdot \sigma_{V',W_0}(Z_i - Z_0) \cdot \sigma_{V',Z_0}(W_0 - W_j) \cdot \sigma_{V',W_j}(Z_0 - Z_j) \\
&\qquad = \sigma_{V',Z_i}(W_i - W_1) \cdot \sigma_{V',W_1}(Z_i - Z_1) \cdot \sigma_{V',Z_1}(W_1 - W_j) \cdot \sigma_{V',W_j}(Z_1 - Z_j).
\end{aligned}$$

Für die Schnitte $\sigma_{.,.}(.)$ hat man nach 4.1 2) die Gleichung

$$\sigma_{V',Z_0}(W_i - W_0) \cdot \sigma_{V',Z_0}(W_0 - W_j) = \sigma_{V',Z_0}(W_i - W_j)$$

und mit 4.1 4) gilt weiterhin

$$\sigma_{V',W_i - W_j}(Z_0 - Z_1) = \sigma_{V',Z_0 - Z_1}(W_i - W_j) \quad \text{bzw.}$$
$$\sigma_{V',W_i}(Z_0 - Z_1) \cdot \sigma_{V',Z_1}(W_i - W_j) = \sigma_{V',Z_0}(W_i - W_j) \cdot \sigma_{V',W_j}(Z_0 - Z_1).$$

Mit Gleichungen dieser Form erhält man nun (Da alle Schnitte über V' leben, unterdrücke man in der Rechnung dieses Datum in der Notation und schreibe kurz $\sigma_.(.)$ statt $\sigma_{V',.}(.)$):

$$\begin{aligned}
&\sigma_{Z_i}(W_i - W_0) \cdot \sigma_{W_0}(Z_i - Z_0) \cdot \sigma_{Z_0}(W_0 - W_j) \cdot \sigma_{W_j}(Z_0 - Z_j) \\
= \;& \Big(\sigma_{Z_0}(W_i - W_0) \cdot \sigma_{W_i}(Z_i - Z_0)\Big) \cdot \sigma_{Z_0}(W_0 - W_j) \cdot \sigma_{W_j}(Z_0 - Z_j) \\
= \;& \Big(\sigma_{Z_0}(W_i - W_j) \cdot \underline{\sigma_{Z_0}(W_j - W_0)}\Big) \cdot \sigma_{W_i}(Z_i - Z_0) \cdot \underline{\sigma_{Z_0}(W_0 - W_j)} \cdot \sigma_{W_j}(Z_0 - Z_j) \\
= \;& \sigma_{Z_0}(W_i - W_j) \cdot \sigma_{W_i}(Z_i - Z_0) \cdot \Big(\sigma_{W_j}(Z_0 - Z_1) \cdot \sigma_{W_j}(Z_1 - Z_j)\Big) \\
= \;& \sigma_{Z_0}(W_i - W_j) \cdot \sigma_{W_j}(Z_0 - Z_1) \cdot \sigma_{W_i}(Z_i - Z_0) \cdot \sigma_{W_j}(Z_1 - Z_j) \\
= \;& \Big(\sigma_{Z_1}(W_i - W_j) \cdot \sigma_{W_i}(Z_0 - Z_1)\Big) \cdot \sigma_{W_i}(Z_i - Z_0) \cdot \sigma_{W_j}(Z_1 - Z_j) \\
= \;& \sigma_{Z_1}(W_i - W_j) \cdot \Big(\sigma_{W_i}(Z_i - Z_1)\Big) \cdot \Big(\sigma_{Z_1}(W_1 - W_i) \cdot \sigma_{Z_1}(W_i - W_1)\Big) \cdot \sigma_{W_j}(Z_1 - Z_j) \\
= \;& \sigma_{W_i}(Z_i - Z_1) \cdot \sigma_{Z_1}(W_i - W_1) \cdot \Big(\sigma_{Z_1}(W_1 - W_j)\Big) \cdot \sigma_{W_j}(Z_1 - Z_j) \\
= \;& \Big(\sigma_{Z_i}(W_i - W_1) \cdot \sigma_{W_1}(Z_i - Z_1)\Big) \cdot \sigma_{Z_1}(W_1 - W_j) \cdot \sigma_{W_j}(Z_1 - Z_j).
\end{aligned}$$

Dies zeigt, dass die zuvor gegebene lokale Definition des Schnittes $\varphi_{i,j}$ wohldefiniert ist. Weiterhin sind mit dieser lokalen Definition die Punkte i) und iii) für die $\varphi_{i,j}$ klar. Offenbar genügt es, ii) lokal über einer offenen Umgebung $V' \subset S$ von $s \in S$ nachzurechnen. Damit kann man annehmen, dass sich alle betrachteten Zykel eigentlich und über V' gar nicht schneiden - man ist also in der selben Situation wie eben. Setzt man in der Rechnung von eben $(W_1, Z_1) = (W_j, Z_i)$, so erhält man sinngemäß die Aussage ii) und die Existenz eines Systems $\mathfrak{S}$, wie in der Proposition behauptet, ist gezeigt.

II) Zur Eindeutigkeit eines solchen Systems $\mathfrak{S}$:

Seien $\mathfrak{S}$ und $\tilde{\mathfrak{S}}$ zwei Systeme von $\mathbb{G}_{\mathrm{m},S}$-Schnitten, die den Eigenschaften i) - iii) genügen. Mit i) genügt es, für jedes φ-zulässige Paar (i, j) und jeden abgeschlossenen Punkt $s \in |V|$ eine offene Umgebung $V' \subset V_{ij}$ von s zu finden, und dort für $\varphi_{i,j} \in \mathfrak{S}$ und $\tilde{\varphi}_{i,j} \in \tilde{\mathfrak{S}}$

$$\varphi_{i,j}|_{V'} = \tilde{\varphi}_{i,j}|_{V'}$$

zu zeigen. Dazu wähle man Zykel $W_0 \in [W_i]$ und $Z_0 \in [Z_i]$, so dass sich für $l \in \{i, j, 0\}$ die Zykel Z_l und W_0, sowie W_l und Z_0 eigentlich und über einer offenen Umgebung $V' \subset V$ von s gar nicht schneiden. Dann ist $k := (V', W_3, Z_3) \in I$, und die Paare (i, k) und (k, j) sind φ-zulässig. Mit Punkt ii) gilt dann

$$\varphi_{i,j} = \varphi_{i,k} \cdot \varphi_{k,j} \quad \text{und} \quad \tilde{\varphi}_{i,j} = \tilde{\varphi}_{i,k} \cdot \tilde{\varphi}_{k,j}$$

und nach iii) sind die beiden rechten Seiten gleich. Dies zeigt die Eindeutigkeit des Systems $\mathfrak{S}$ und damit auch Punkt 1) der Proposition.

III) Zu Punkt 2) der Proposition:

Offenbar wurden die wesentlichen Punkte hierfür bereits in I) und II) gezeigt.

IV) Zu Punkt 3) der Proposition:

Dieser einfache Vergleich ist dem Leser überlassen. □

5.8 Proposition

Man verwende die Notation von 5.2 und fixiere für jedes λ-zulässige Tupel $(i, j, k) \in I^3$ (also für i, j, k mit $V_{ij} = V_k$ sowie $[W_i] + [W_j] = [W_k]$ und $[Z_i] = [Z_j] = [Z_k]$ auf V_k) einen Schnitt

$$\lambda_k^{i,j} \in \Gamma\big(V_k, \mathbb{G}_{\mathrm{m},S}\big).$$

Weiter fixiere man für jedes ρ-zulässige Tupel $(r, s, t) \in I^3$ (also für r, s, t mit $V_{rs} = V_t$ sowie $[Z_r] + [Z_s] = [Z_t]$ und $[W_r] = [W_s] = [W_t]$ auf V_t) einen Schnitt

$$\rho_t^{r,s} \in \Gamma\big(V_t, \mathbb{G}_{\mathrm{m},S}\big)$$

so, dass das System $\mathfrak{S}$ der Schnitte $\lambda_{\cdot}^{\cdot,\cdot}$ und $\rho_{\cdot}^{\cdot,\cdot}$ folgende Eigenschaften besitzt:

i) Sei $V \subset S$ offen und (i, j, k) ein λ-zulässiges Tupel. Weiter seien $a, b, c \in I$ die Indizes mit $a = (V \cap V_i, W_i, Z_i)$, $b = (V \cap V_j, W_j, Z_j)$ und $c = (V \cap V_k, W_k, Z_k)$. Dann gilt für die λ-zulässigen Tripel (a, b, c) und (i, j, k):

$$\lambda_k^{i,j}\big|_{V_c} = \lambda_c^{a,b}.$$

Ist (i, j, k) ein ρ-zulässiges Tupel und sind $a, b, c \in I$ die Indizes mit $a = (V \cap V_i, W_i, Z_i)$, $b = (V \cap V_j, W_j, Z_j)$ und $c = (V \cap V_k, W_k, Z_k)$. Dann gilt für die ρ-zulässigen Tripel (a, b, c) und (i, j, k):

$$\rho_k^{i,j}\big|_{V_c} = \rho_c^{a,b}.$$

ii) Sei $(i,j,k) \in I^3$ ein λ-zulässiges Tupel sowie $W \in [W_k]$ ein Zykel, der Z_k eigentlich und über V_k gar nicht schneidet. Ist $l = (V_k, W, Z_k) \in I$ der entsprechende Index, so gilt für die λ-zulässigen Tripel (i,j,k) und (i,j,l) und das φ-zulässige Paar (k,l):

$$\lambda_k^{i,j} = \lambda_l^{i,j} \cdot \varphi_{l,k} = \lambda_l^{i,j} \cdot \sigma_{V_k,Z_k}(W - W_k).$$

Sei $(i,j,k) \in I^3$ ein ρ-zulässiges Tupel und $Z \in [Z_k]$ ein Zykel, der W_k eigentlich und über V_k gar nicht schneidet. Ist $l = (V_k, W_k, Z) \in I$ der entsprechende Index, so gilt für die ρ-zulässigen Tripel (i,j,k) und (i,j,l) und das φ-zulässige Paar (k,l):

$$\rho_k^{i,j} = \rho_l^{i,j} \cdot \varphi_{l,k} = \rho_l^{i,j} \cdot \sigma_{V_k,W_k}(Z - Z_k).$$

iii) Sei $(i,j,k) \in I^3$ λ-zulässig, so dass zusätzlich Z_k die Zykel W_i und W_j eigentlich und über V_k gar nicht schneidet. Dann sind $a = (V_k, W_i, Z_k)$, $b = (V_k, W_j, Z_k)$ und $c = (V_k, W_i + W_j, Z_k)$ aus I, und für die φ-zulässigen Paare (i,a), (j,b) und (k,c) gilt:

$$\begin{aligned} \lambda_k^{i,j} &= \varphi_{i,a} \cdot \varphi_{j,b} \cdot \varphi_{c,k} \\ &= \sigma_{V_k,W_i}(Z_i - Z_k) \cdot \sigma_{V_k,W_j}(Z_j - Z_k) \cdot \sigma_{V_k,Z_k}(W_i + W_j - W_k). \end{aligned}$$

Sei $(i,j,k) \in I^3$ ρ-zulässig, so dass zusätzlich W_k die Zykel Z_i und Z_j eigentlich und über V_k gar nicht schneidet. Dann sind $a = (V_k, W_k, Z_i)$, $b = (V_k, W_k, Z_j)$ und $c = (V_k, W_k, Z_i + Z_j)$ aus I, und für die φ-zulässigen Paare (i,a), (j,b) und (k,c) gilt:

$$\begin{aligned} \rho_k^{i,j} &= \varphi_{i,a} \cdot \varphi_{j,b} \cdot \varphi_{c,k} \\ &= \sigma_{V_k,Z_i}(W_i - W_k) \cdot \sigma_{V_k,Z_j}(W_j - W_k) \cdot \sigma_{V_k,W_k}(Z_i + Z_j - Z_k). \end{aligned}$$

Mit diesen Forderungen gilt folgendes:

1) Es existiert genau ein System $\mathfrak{S}$ von Schnitten $\lambda_{\cdot}^{\cdot,\cdot}$ und $\rho_{\cdot}^{\cdot,\cdot}$, das den Eigenschaften i) -iii) genügt.

2) Die Schnitte des Systems $\mathfrak{S}$ erfüllen die Eigenschaften von Verknüpfungsvorschriften in 3.7 3) bezüglich der zulässigen Überdeckung $\mathfrak{U}$ aus 5.2, sowie die Eigenschaften 2) und 3) aus 5.2.

3) Jedes System von Verknüpfungsvorschriften, das den Punkten 2) und 3) aus 5.2 genügt, erfüllt die Punkte i) -iii).

Damit ist das System $\mathfrak{S}$ der $\lambda_{\cdot}^{\cdot,\cdot}$ und $\rho_{\cdot}^{\cdot,\cdot}$ aus Punkt 1) die einzige Möglichkeit, Verknüpfungsvorschriften mit den in 5.2 geforderten Eigenschaften zu definieren.

Beweis:

I) Eindeutigkeit eines solchen Systems $\mathfrak{S}$ von Schnitten:
Dies folgt mit Punkt iii) analog zur Eindeutigkeit in 5.7. Deshalb sind die Details dem Leser überlassen.

II) Existenz eines solchen Systems $\mathfrak{S}$ von Schnitten:
Im Folgenden wird der Existenzbeweis für die Schnitte $\lambda_{\cdot}^{\cdot,\cdot}$ geführt. Für $\rho_{\cdot}^{\cdot,\cdot}$ folgt die Aussage analog und ist deshalb dem Leser überlassen. Offenbar genügt es, wie in 5.7 für jedes λ-zulässige Tripel (i,j,k) mit $i,j,k \in I$ den Schnitt $\lambda_k^{i,j}$ lokal zu definieren. Sei dazu $s \in |V_k|$.

Man wähle einen Zykel $Z \in [Z_k]$, der W_i, W_j und W_k eigentlich und über einer offenen Umgebung $\tilde{V} \subset V_k$ von s gar nicht schneidet. Bezeichnen $a = (\tilde{V}, W_i, Z)$, $b = (\tilde{V}, W_j, Z)$, $c = (\tilde{V}, W_k, Z)$ und $d = (\tilde{V}, W_i + W_j, Z)$ die entsprechenden Indizes in I, dann definiere man den Schnitt $\lambda_k^{i,j}|_{\tilde{V}}$ lokal über die φ-zulässigen Paare (i,a), (j,b), (k,c) und (c,d) wie folgt:

$$\begin{aligned} \lambda_k^{i,j}|_{\tilde{V}} &= \varphi_{i,a} \cdot \varphi_{j,b} \cdot \varphi_{c,k} \cdot \varphi_{d,c} \\ &= \sigma_{\tilde{V},W_i}(Z_i - Z) \cdot \sigma_{\tilde{V},W_j}(Z_j - Z) \cdot \sigma_{\tilde{V},W_k}(Z - Z_k) \cdot \sigma_{\tilde{V},Z}(W_i + W_j - W_k). \end{aligned}$$

Es ist die Wohldefiniertheit dieser Definition zu zeigen. Sei also $Z' \in [Z_k]$ ein Zykel, der die Zykel W_i, W_j und W_k eigentlich und über einer offenen Umgebung $\tilde{V}' \subset V_k$ von s gar nicht schneidet. Sind $r = (\tilde{V}', W_i, Z')$, $s = (\tilde{V}', W_j, Z')$ und $t = (\tilde{V}', W_i + W_j, Z')$ die entsprechenden Indizes, so muss über $\tilde{V} \cap \tilde{V}'$ gelten:

$$\varphi_{i,a} \cdot \varphi_{j,b} \cdot \varphi_{d,k} = \varphi_{i,r} \cdot \varphi_{j,s} \cdot \varphi_{t,k}.$$

Fasst man die Schnitte $\varphi_{.,.}$ entsprechend zusammen, so ist diese Aussage äquivalent zu

$$\varphi_{r,a} \cdot \varphi_{s,b} = \varphi_{t,d}.$$

In Termen der $\sigma_{V',.}(.)$ entspricht dies

$$\sigma_{V',W_i}(Z' - Z) \cdot \sigma_{V',W_j}(Z' - Z) = \sigma_{V',W_i + W_j}(Z' - Z).$$

Letzteres gilt aber nach 4.1 3) für die Schnitte $\sigma_{.,.}(.)$. Damit ist die lokale Definition der Schnitte $\lambda_{\cdot}^{\cdot,\cdot}$ verträglich. Die so definierten Schnitte $\lambda_{\cdot}^{\cdot,\cdot}$ erfüllen offenbar die Eigenschaften i) und iii). Schließlich prüft man Punkt ii) lokal direkt nach, womit Punkt 1) gezeigt ist.

III) Zu Punkt 2) - Die Verträglichkeit von $\lambda_{\cdot}^{\cdot,\cdot}$ und $\rho_{\cdot}^{\cdot,\cdot}$ mit den $\varphi_{i,j}$:

Erneut wird die Behauptung nur für $\lambda_{\cdot}^{\cdot,\cdot}$ gezeigt. Die entsprechende Aussage für $\rho_{\cdot}^{\cdot,\cdot}$ folgt analog. Seien $i,j,k,r,s,t \in I$, so dass (i,j,k) und (r,s,t) λ-zulässig, sowie (i,r), (j,s) und (k,t) φ-zulässig sind. Dann ist zu zeigen:

$$\lambda_k^{i,j} \cdot \varphi_{r,i} \cdot \varphi_{s,j} = \varphi_{t,k} \cdot \lambda_t^{r,s}.$$

Da es genügt diese Gleichung lokal nachzurechnen, kann man mit Punkt ii) annehmen, dass $V_k = V_t$ gilt, sowie dass Z_k und Z_t die Zykel W_i, W_j, W_r und W_s eigentlich und über V_k gar nicht schneiden. Bezeichnen $a = (V_k, W_i, Z_k)$, $b = (V_k, W_j, Z_k)$, $c = (V_k, W_i + W_j, Z_k)$, $l = (V_k, W_r, Z_t)$, $m = (V_k, W_s, Z_t)$ und $n = (V_k, W_r + W_s, Z_t)$ die entsprechenden Indizes, dann sind (a,l), (b,m), (c,n) φ-zulässig und auf V_k gilt:

$$\varphi_{c,n} = \sigma_{V_k,Z_k}(W_i + W_j - W_r - W_s) \cdot \sigma_{V_k,W_r+W_s}(Z_k - Z_t) = \varphi_{a,l} \cdot \varphi_{b,m}.$$

Da auch (i,a), (j,b), (k,c), (r,l), (s,m) und (t,n) φ-zulässig sind, erhält man mit iii)

$$\lambda_k^{i,j} = \varphi_{i,a} \cdot \varphi_{j,b} \cdot \varphi_{c,k} \quad \text{und} \quad \lambda_t^{r,s} = \varphi_{r,l} \cdot \varphi_{s,m} \cdot \varphi_{n,t}.$$

Die Behauptung folgt nun unmittelbar aus den entsprechenden Kompatibilitäten der $\varphi_{.,.}$.

IV) Zu Punkt 2) - Die Assoziativität von $\lambda_{\cdot}^{\cdot,\cdot}$ und $\rho_{\cdot}^{\cdot,\cdot}$:

Seien $i,j,k,l,m,n \in I$, so dass (i,j,l), (j,k,m), (l,k,n) und (i,m,n) λ-zulässige Tupel sind. Dann hat man zu zeigen:

$$\lambda_n^{l,k} \cdot \lambda_l^{i,j} = \lambda_n^{i,m} \cdot \lambda_m^{j,k}.$$

Gilt $Z := Z_i = Z_j = Z_k = Z_l = Z_m = Z_n$, $l = (V_l, W_i + W_j, Z)$, $m = (V_m, W_j + W_k, Z)$ und $n = (V_n, W_i + W_j + W_k, Z)$, so rechnet man mit iii) direkt nach, dass man

$$\lambda_n^{l,k} \cdot \lambda_l^{i,j} = 1 = \lambda_n^{i,m} \cdot \lambda_m^{j,k}$$

hat. Schließlich kann man die allgemeine Situation lokal durch mehrmaliges Anwenden von III) auf diese speziellen Voraussetzungen reduzieren. Prüft man noch, dass sich alle Übergangsabbildungen $\varphi_{\cdot,\cdot}$, die man hierbei erhält wegheben, so folgt die Behauptung für $\lambda_{\cdot}^{\cdot,\cdot}$. Die entsprechende Aussage für $\rho_{\cdot}^{\cdot,\cdot}$ folgt analog.

V) Zu Punkt 2) - Die Verträglichkeit von $\lambda_{\cdot}^{\cdot,\cdot}$ und $\rho_{\cdot}^{\cdot,\cdot}$:

Seien $i, j, k, l, m, n, r, s, t \in I$, so dass die Tupel (i, j, m), (k, l, n) und (r, s, t) λ-zulässig und (i, k, r), (j, l, s) und (m, n, t) ρ-zulässig sind. Dann ist zu zeigen

$$\rho_t^{m,n} \cdot \lambda_m^{i,j} \cdot \lambda_n^{k,l} = \lambda_t^{r,s} \cdot \rho_r^{i,k} \cdot \rho_s^{j,l}.$$

Gilt $W_i = W_k = W_r$, $W_j = W_l = W_s$, $W_i + W_j = W_m = W_t = W_n$, $Z_i = Z_j = Z_m$, $Z_k = Z_l = Z_n$ und $Z_i + Z_k = Z_s = Z_t = Z_r$, so rechnet man direkt nach, dass man

$$\rho_t^{m,n} \cdot \lambda_m^{i,j} \cdot \lambda_n^{k,l} = 1 = \lambda_t^{r,s} \cdot \rho_r^{i,k} \cdot \rho_s^{j,l}$$

hat. Verfährt man nun weiter wie in IV), so folgt die Behauptung.

VI) Zu Punkt 2) - Die Kommutativität von $\lambda_{\cdot}^{\cdot,\cdot}$ und $\rho_{\cdot}^{\cdot,\cdot}$:

Die Kommutativität von $\lambda_{\cdot}^{\cdot,\cdot}$ und $\rho_{\cdot}^{\cdot,\cdot}$ sieht man unmittelbar, sobald man die Situation lokal betrachtet.

VII) Zu Punkt 2) - Für $\lambda_{\cdot}^{\cdot,\cdot}$ und $\rho_{\cdot}^{\cdot,\cdot}$ gilt 5.2 2) bzw. 3):

Dies ist klar.

VIII) Zu Punkt 3):

Die Punkte i) und ii) gelten offenbar für jede Verknüpfungsvorschrift. Mit 5.2 2) bzw. 3) erhält man weiterhin gerade iii). Dies zeigt die Behauptung. $\square$

$\square_{5.2}$

5.9 Bemerkung

Wie man im Beweis von 5.8 sieht, gilt für die Verkünpfungsvorschriften $\lambda_{\cdot}^{\cdot,\cdot}$ und $\rho_{\cdot}^{\cdot,\cdot}$ von $\mathfrak{K}^{\mathrm{CH}}$ folgendes: Ist $V \subset S$ offen und sind $W, W' \in \mathrm{Z}^p_{\mathrm{hom}}(X/S)$ sowie $Z, Z' \in \mathrm{Z}^q_{\mathrm{hom}}(X/S)$ Zykel, so dass $a := (V, W, Z)$, $b := (V, W', Z)$, $c := (V, W', Z')$, $i := (V, W + W', Z)$ und $j := (V, W', Z + Z')$ aus der Indexmenge I sind, so gilt

$$\lambda_i^{a,b} = 1 \qquad \text{und} \qquad \rho_j^{b,c} = 1.$$

Kapitel 6

Berechnung der Torseure $\mathbb{E}_{w,z}$

Erneut betrachte man die Grundsituation aus Kapitel 4. Sei $\mathfrak{K}^{\mathrm{CH}}$ der Satz von Blochschen Kozykeldaten und $\mathbb{E}^{\mathrm{CH}}$ die dazu konstruierte $\mathbb{G}_{\mathrm{m},S}$-Bierweiterung. In diesem Kapitel wird erläutert, dass die von Bloch im Fall von $\pi\colon X \to S$ glatt in [Bl1] konstruierte $\mathbb{G}_{\mathrm{m},S}$-Bierweiterung $\mathbb{E}$ und die Bierweiterung $\mathbb{E}^{\mathrm{CH}}$ kanonisch isomorph sind. Damit verallgemeinert die hier gegebene Definition der Bierweiterung $\mathbb{E}^{\mathrm{CH}}$ den Begriff der Blochschen Bierweiterung auf die Grundsituation aus Kapitel 4.
Sei $V \subset S$ offen und seien $W \in \mathrm{Z}^p_{\mathrm{hom}}(X/S)$, und $Z \in \mathrm{Z}^q_{\mathrm{hom}}(X/S)$ Zykel, die sich eigentlich und über V gar nicht schneiden. Dann besitzt der $\mathbb{G}_{\mathrm{m},S}$-Torseur $\mathbb{E}_{w,z}$ zum Paar (W,Z) kanonisch einen rationalen Schnitt $\{Z\}_W$. Eines der Hauptergebnisse dieser Arbeit ist, dass sich der Divisor von $\{Z\}_W$ wie folgt berechnet:

$$\mathrm{div}\big(\mathbb{E}_{w,z}, \{Z\}_W\big) = \pi_*\big(W \centerdot Z\big).$$

6.1 Definition

Im Folgenden bezeichne man die $\mathbb{G}_{\mathrm{m},S}$-Bierweiterung von $\underline{\mathrm{CH}}^p_{\mathrm{hom}}(X/S) \times \underline{\mathrm{CH}}^q_{\mathrm{hom}}(X/S)$, die man zu den Blochschen Kozykeldaten $\mathfrak{K}^{\mathrm{CH}}$ aus 5.2 gemäß 3.10 konstruieren kann mit $\mathbb{E}^{\mathrm{CH}}$.
Sei $V_i \subset S$ offen und seien $W_i \in \mathrm{Z}^p_{\mathrm{hom}}(X/S)$ sowie $Z_i \in \mathrm{Z}^q_{\mathrm{hom}}(X/S)$ Zykel, die sich eigentlich und über V_i gar nicht schneiden. Dann ist $i := (V_i, W_i, Z_i) \in I$ und $(V_i, [W_i], [Z_i]) \in \mathfrak{U}$. Mit der im Beweis von 3.10 benutzten Notation besitzt $\mathbb{E}^S_{[W_i],[Z_i]}$ über V einen ausgezeichneten Rahmen r_i, der im Folgenden mit $\{Z_i\}_{V_i,W_i}$ bezeichnet werde. Nach Konstruktion gilt für ein φ-zulässiges Paar $(i,j) \in I^2$:

$$\{Z_i\}_{V_{ij},W_i} = \varphi_{i,j} \cdot \{Z_j\}_{V_{ij},W_j}.$$

Weiterhin erhält man nach 5.9, dass für ein Paar $(i,j) \in I^2$ mit $V_i = V_j$ und $Z_i = Z_j$ gilt

$$\{Z_i\}_{V_i,W_i} +^1_{w_i,w_j,z_i} \{Z_i\}_{V_i,W_j} = \{Z_i\}_{V_i,W_i+W_j}.$$

Gilt dagegen $V_i = V_j$ und $W_i = W_j$, so hat man analog für das zweite Gruppengesetz:

$$\{Z_i\}_{V_i,W_i} +^2_{w_i,z_i,z_j} \{Z_j\}_{V_i,W_i} = \{Z_i + Z_j\}_{V_i,W_i}.$$

6.2 Bemerkung

Ist in der Situation von Kapitel 4 der Morphismus $\pi\colon X \to S$ zusätzlich glatt (d. h. $S = S'$), so konstruiert Bloch in [Bl1] eine $\mathbb{G}_{\mathrm{m},S}$-Bierweiterung über $\underline{\mathrm{CH}}^p_{\mathrm{hom}}(X/S) \times \underline{\mathrm{CH}}^q_{\mathrm{hom}}(X/S)$, die im Folgenden mit $\mathbb{E}$ bezeichnet wird. Sei $V \subset S$ offen, und seien $w \in \mathrm{CH}^p_{\mathrm{hom}}(X/S)$ und $z \in \mathrm{CH}^q_{\mathrm{hom}}(X/S)$. Weiter betrachte man einen über V äquidimensionalen Zykel $W \in w$ und einen Zykel $Z \in z$, der W eigentlich und über V gar nicht schneidet. In [Bl1] auf Seite 24 konstruiert Bloch zum Paar (W, Z) direkt einen Rahmen $\{Z\}_W$ von $\mathbb{E}^S_{w,z}$ über V. Für die Wohldefiniertheit dieser Konstruktion ist dabei die Äquidimensionalität von W über V essenziell. Ist W nicht äquidimensional, so kann auch Bloch $\{Z\}_W$ nicht mehr direkt konstruieren, sondern muss $\{Z\}_W$ aus bekannten Daten zusammenkleben.

6.3 Proposition:

Unter der Zusatzbedingung, dass π glatt ist, sind in der Situation von Kapitel 4 die Blochsche Bierweiterung $\mathbb{E}$ und die in 6.1 definierte Bierweiterung $\mathbb{E}^{\mathrm{CH}}$ kanonisch isomorph.

Beweis:

Offenbar ist die Behauptung gezeigt, wenn man eingesehen hat, dass $\mathbb{E}$ die passenden Übergangsabbildungen und Gruppengesetze besitzt.
Zu den Übergangsabbildungen:
Sei $V \subset S$ offen, und seien $w \in \mathrm{CH}^p_{\mathrm{hom}}(X/S)$ und $z \in \mathrm{CH}^q_{\mathrm{hom}}(X/S)$. Weiter betrachte man zwei über V äquidimensionale Zykel $W_1, W_2 \in w$ sowie Zykel $Z_1, Z_2 \in z$, für die sich W_i und Z_j mit $i, j \in \{1, 2\}$ eigentlich und über V gar nicht schneiden. Nach [Bl1] (3.4) gilt, dass die beiden Rahmen $\{Z_1\}_{W_1}$ und $\{Z_2\}_{W_1}$ von $\mathbb{E}^S_{w,z}$ über V wie folgt ineinander übergehen:

$$\{Z_1\}_{W_1} = \sigma_{V,W_1}(Z_1 - Z_2) \cdot \{Z_2\}_{W_1}.$$

Mit [Bl1] Proposition 4 sieht man weiterhin, dass

$$\{Z_1\}_{W_1} = \sigma_{V,Z_1}(W_1 - W_2) \cdot \{Z_1\}_{W_2}$$

gilt. Zusammen folgt, dass sich die entsprechenden Rahmen von $\mathbb{E}$ gerade mit den Übergangsfunktionen von $\mathfrak{K}^{\mathrm{CH}}$ transformieren.
Zu den Gruppengesetzen:
Ein Vergleich mit 6.1 liefert unmittelbar, dass die Gruppengesetze von $\mathbb{E}^{\mathrm{CH}}$ gerade den in [Bl1] (5.2) und (5.4) angegebenen Gruppengesetzen entsprechen. □

6.4 Notation (Die Torseure $\mathbb{E}_{w,z}$)

Man nenne im Folgenden allgemein die in 6.1 definierte Bierweiterung die Blochsche Bierweiterung und bezeichne diese kurz mit $\mathbb{E}$. Sind $w \in \mathrm{CH}^p_{\mathrm{hom}}(X/S)$ und $z \in \mathrm{CH}^q_{\mathrm{hom}}(X/S)$, so schreibe man kurz $\mathbb{E}_{w,z}$ für den $\mathbb{G}_{\mathrm{m},S}$-Torseur $\mathbb{E}^S_{w,z}$.

6.5 Definition (Rationale Schnitte eines $\mathbb{G}_{\mathrm{m},S}$-Torseurs)

Man betrachte die konstante Zariski-Garbe abelscher Gruppen $K(S)^*$ auf S. Ein rationaler Schnitt eines $\mathbb{G}_{\mathrm{m},S}$-Torseurs $\mathbb{T}$ ist ein Schnitt der Garbe der rationalen Funktionen $K(S)^* \otimes \mathbb{T}$.

Ist $U \subset S$ offen und f ein rationaler Schnitt von $\mathbb{T}$, so nenne f über U regulär, wenn $f|_U$ durch einen Schnitt von $\mathbb{T}|_U$ induziert wird. Damit setze man:

$$\mathcal{R}(U, \mathbb{T}) := \{\text{rationale Schnitte von } \mathbb{T}, \text{ die über } U \text{ regulär sind}\}.$$

6.6 Definition (Der Divisor eines rationalen Schnittes)

Sei $s \in S^{(1)}$ ein 1-kodimensionaler Punkt von S. Da S glatt ist, ist $\mathcal{O}_{S,s}$ ein diskreter Bewertungsring mit Quotientenkörper $K(S)$. Man bezeichne mit

$$\nu_s \colon K(S)^* \to \mathbb{Z}$$

die korrespondierende, diskrete Bewertung von s. Sei $\mathbb{T}$ ein $\mathbb{G}_{\mathrm{m},S}$-Torseur und f ein rationaler Schnitt von $\mathbb{T}$. Weiterhin bezeichne $U \subset S$ eine offene Umgebung von s und t einen Rahmen von $\mathbb{T}$ über U. Dann existiert ein $r \in K(S)^*$, so dass $f = r \cdot t$ gilt. Damit setze man

$$\nu_s(\mathbb{T}, f) := \nu_s(r).$$

Dies ist offenbar wohldefiniert. Nun definiere man den Divisor von f wie folgt:

$$\mathrm{div}(\mathbb{T}, f) = \sum_{s \in S^{(1)}} \nu_s(\mathbb{T}, f) \cdot s.$$

6.7 Lemma

Sei $V_i \subset S$ offen, $w \in \mathrm{CH}^p_{\mathrm{hom}}(X/S)$ und $z \in \mathrm{CH}^q_{\mathrm{hom}}(X/S)$. Weiter betrachte man mit $W_i \in w$ und $Z_i \in z$ zwei Zykel, die sich eigentlich und über V_i gar nicht schneiden. Es bezeichne $\{Z_i\}_{V_i,W_i}$ den zugehörigen Rahmen von $\mathbb{E}_{w,z}$ über V_i und $\{Z_i\}_{W_i}$ den rationalen Schnitt von $\mathbb{E}_{w,z}$ mit

$$\{Z_i\}_{W_i}|_{V_i} = \{Z_i\}_{V_i,W_i}.$$

Sei weiterhin $V_j \subset S$ offen und seien $W_j \in w$ und $Z_j \in z$ zwei Zykel so, dass $\{Z_j\}_{V_j,W_j}$ ein Rahmen von $\mathbb{E}_{w,z}$ über V_j ist. Mit $i := (V_i, W_i, Z_i)$ und $j := (V_j, W_j, Z_j) \in I$ gilt auf V_j:

$$\{Z_i\}_{W_i} = \varphi_{i,j} \cdot \{Z_j\}_{V_j,W_j}.$$

Beweis:

Klar. □

In [Me] Proposition 3.4.1 wird die Grundsituation von Kapitel 4 mit den zusätzlichen Annahmen, dass S eine Kurve ist und $\pi \colon X \to S$ glatt ist betrachtet. Für zwei Zykel $W \in \mathrm{Z}^p_{\mathrm{hom}}(X/S)$ und $Z \in \mathrm{Z}^q_{\mathrm{hom}}(X/S)$, die sich eigentlich schneiden, kann man zum $\mathbb{G}_{\mathrm{m},S}$-Torseur $\mathbb{E}_{w,z}$ kanonisch ein Geradenbündel $\mathcal{L}_{w,z}$ assoziieren. Bei [Me] wird gezeigt, dass der Grad von $\mathcal{L}_{w,z}$ gleich der Schnittzahl von W und Z ist. Mit einem ähnlichen Beweisansatz wird nun folgende Verallgemeinerung dieser Aussage gezeigt.

6.8 Satz

Seien $W \in \mathrm{Z}^p_{\mathrm{hom}}(X/S)$ und $Z \in \mathrm{Z}^q_{\mathrm{hom}}(X/S)$ zwei Zykel, die sich eigentlich schneiden. Dann gilt für den rationalen Schnitt $\{Z\}_W$ von $\mathbb{E}_{w,z}$:

$$\mathrm{div}(\mathbb{E}_{w,z}, \{Z\}_W) = \pi_*(W \centerdot Z).$$

Beweis:

Offenbar genügt es, diese Aussage lokal auf S zu zeigen. Sei $s_0 \in S^{(1)}$. Dann findet man nach 5.6 Zykel $W' \in w$ und $Z' \in z$, so dass sich W' und Z, sowie Z' und W bzw. W' eigentlich und bei s_0 gar nicht schneiden. Ohne Einschränkung kann man S dabei durch eine offene Umgebung von s_0 so ersetzen, dass $|W'| \cap |Z|$, $|W| \cap |Z'|$ und $|W'| \cap |Z'|$ leer sind. Ist $V \subset S$ eine offene Teilmenge, über der $|W| \cap |Z|$ leer ist, so setze man $i := (V, W, Z)$ und $j := (S, W', Z') \in I$. Dann gilt:

$$\{Z\}_{V,W} = \varphi_{i,j} \cdot \{Z'\}_{V,W'} = \sigma_{V,W}(Z - Z') \cdot \sigma_{V,Z'}(W - W') \cdot \{Z'\}_{V,W'}.$$

Dabei ist $\sigma_{S,Z'}(W - W') \cdot \{Z'\}_{S,W'}$ nach Konstruktion bereits ein globaler Rahmen von $\mathbb{E}_{w,z}$. Es gilt also

$$\nu_{s_0}(\mathbb{E}_{w,z}, \{Z\}_W) = \nu_{s_0}\big(\sigma_{V,W}(Z - Z')\big).$$

Um die rechte Seite zu berechnen, kann man nach 4.1 bzw. 4.10 zunächst folgendes annehmen: Es existieren abgeschlossene Untervarietäten $T_1, ..., T_n \subset X$ und rationale Funktionen $g_i \in K(T_i)^*$ mit $i = 1, ..., n$ so, dass $Z - Z' = \sum_{i=1}^n \operatorname{div}(g_i)$ gilt, und W die Zykel $T_1, ..., T_n$ sowie $\operatorname{div}(g_1), ..., \operatorname{div}(g_n)$ eigentlich schneidet. Darüberhinaus existiert für $i = 1, ..., n$ jeweils eine q-kodimensionale Untervarietät $V_i \subset X \times \mathbb{P}^1_k$, die $W \times \mathbb{P}^1_k$ eigentlich schneidet und für die $V_i\big((0) - (\infty)\big) = \operatorname{div}(g_i)$ gilt. Man setze für $i = 1, ..., n$

$$V_i \,\text{.}\, W \times \mathbb{P}^1_k = \sum_{j=1}^{n_i} n_{ij} \cdot C_{i,j},$$

wobei $C_{i,1}, ..., C_{i,r_i}$ dominant über S liegen und $C_{i,r_i+1}, ..., C_{i,n_i}$ nicht. Sind für $j \in \{1, ..., r_i\}$ die Projektionen von $C_{i,j}$ nach $\mathbb{P}^1_k$ mit f_{ij} bezeichnet, so gilt nach 4.1 5)

$$\sigma_{V,W}(Z - Z') = \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{r_i} \mathrm{N}_{K(C_{i,j})/K(S)}(f_{ij})^{n_{ij}}.$$

Damit erhält man

$$\nu_{s_0}(\mathbb{E}_{w,z}, \{Z\}_W) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{r_i} \nu_{s_0}\big(\mathrm{N}_{K(C_{i,j})/K(S)}(f_{ij})^{n_{ij}}\big).$$

Es bezeichne $q\colon X \times \mathbb{P}^1_k \to X$ die Projektion. Wegen $(|Z'| \cap |W|)_S = \emptyset$ gilt also:

$$\begin{aligned}
\pi_*(Z \,\text{.}\, W) &= \pi_*\big((Z - Z') \,\text{.}\, W\big) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \pi_*\big(\operatorname{div}(g_i) \,\text{.}\, W\big) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \pi_*\Big(V_i\big((0) - (\infty)\big) \,\text{.}\, W\Big) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (\pi \circ p)_*\Big(V_i \,\text{.}\, \big(X \times \big((0) - (\infty)\big)\big) \,\text{.}\, \big(W \times \mathbb{P}^1_k\big)\Big) && \text{(mit 1.10)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} (\pi \circ p)_* \sum_{j=1}^{r_i} n_{i,j} \cdot C_{i,j} \,\text{.}\, \big(X \times \big((0) - (\infty)\big)\big) \\
&= \sum_{s \in S^{(1)}} n_s \cdot s.
\end{aligned}$$

Dabei hat man speziell

$$\begin{aligned}
n_{s_0} &= \nu_{s_0}\Big(\sum_{i=1}^{n} \pi_* \sum_{j=1}^{r_i} n_{ij} \cdot C_{i,j}\big((0)-(\infty)\big)\Big) \\
&= \nu_{s_0}\Big(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{r_i} n_{ij} \cdot \pi_* \mathrm{div}(f_{ij})\Big) && \text{(nach 1.4)} \\
&= \nu_{s_0}\Big(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{r_i} n_{ij} \cdot \mathrm{div}\big(\mathrm{N}_{K(C_{i,j})/K(S)}(f_{ij})\big)\Big) && \text{(nach [Fu] Prop. 1.4)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{r_i} \nu_{s_0}\big(\mathrm{N}_{K(C_{i,j})/K(S)}(f_{ij})^{n_{ij}}\big) \\
&= \nu_{s_0}(\mathbb{E}_{w,z}, \{Z\}_W).
\end{aligned}$$

Also gilt

$$\pi_*(Z \centerdot W) = \mathrm{div}(\mathbb{E}_{w,z},\ \{Z\}_W).$$

Dies zeigt die Behauptung. $\square$

Kapitel 7

Bierweiterungen und Korrespondenzen

Für dieses Kapitel sei folgende <u>Grundsituation</u> fixiert: Seien X, Y und S glatte, quasiprojektive k-Varietäten. Weiter bezeichnen $\pi_X\colon X \to S$ und $\pi_Y\colon Y \to S$ glatte, projektive, surjektive Morphismen, die jeweils X bzw. Y als S-Schema auszeichnen. Schließlich seien $n, m, r, s \in \mathbb{N}$ mit $d_X - d_S + 1 = m + n$ und $d_Y - d_S + 1 = r + s$.
Sei $\mathbb{E}^X$ die Blochsche Bierweiterung von $\underline{\mathrm{CH}}^m_{\mathrm{hom}}(X/S) \times \underline{\mathrm{CH}}^n_{\mathrm{hom}}(X/S)$ und $\mathbb{E}^Y$ die von $\underline{\mathrm{CH}}^r_{\mathrm{hom}}(Y/S) \times \underline{\mathrm{CH}}^s_{\mathrm{hom}}(Y/S)$. Ist $v' \in \mathrm{CH}^{n+r-1}(X \times_S Y)$ ein Zykel und $v := \vartheta_* v'$ aus $\mathrm{CH}^{n+r-1+d_S}(X \times Y)$ mit $\vartheta := (\mathrm{id} \times \mathrm{id})\colon X \times_S Y \to X \times_k Y$ eine Korrespondenz, so hat man Morphismen $v\colon \underline{\mathrm{CH}}^m_{\mathrm{hom}}(X/S) \to \underline{\mathrm{CH}}^r_{\mathrm{hom}}(Y/S)$ und ${}^t v\colon \underline{\mathrm{CH}}^s_{\mathrm{hom}}(Y/S) \to \underline{\mathrm{CH}}^n_{\mathrm{hom}}(X/S)$.
In diesem Kapitel wird gezeigt, dass man auf $\underline{\mathrm{CH}}^m_{\mathrm{hom}}(X/S) \times \underline{\mathrm{CH}}^s_{\mathrm{hom}}(Y/S)$ mit

$$(\mathrm{id} \times {}^t v)^* \mathbb{E}^X \to (v \times \mathrm{id})^* \mathbb{E}^Y$$

einen kanonischen Isomorphismus von k^*-Bierweiterungen hat. Sei $U \subset S$ offen. Sind $V \in v$, $W \in \mathrm{Z}^m_{\mathrm{hom}}(X/S)$ und $Z \in \mathrm{Z}^s_{\mathrm{hom}}(Y/S)$ Zykel, die sich in einer geeigneten Weise schneiden so, dass $\{Z\}_{U, V(W)}$ und $\{{}^t V(Z)\}_{U,W}$ Rahmen der entsprechenden Torseure sind. Dann ist dieser Isomorphismus durch folgende Zuordnung induziert:

$$\big((\mathrm{id} \times {}^t v)^* \mathbb{E}^X\big)_{w,z} \to \big((v \times \mathrm{id})^* \mathbb{E}^Y\big)_{w,z}; \quad (\mathrm{id} \times {}^t v)^* \{{}^t V(Z)\}_{U,W} \mapsto (v \times \mathrm{id})^* \{Z\}_{U, V(W)}.$$

Wesentlich für die Existenz eines solchen Isomorphismus sind die Gleichungen

$$\sigma_{U,Z}\big(\Lambda(\alpha)\big) = \sigma_{U,{}^t\Lambda(Z)}\big(\alpha\big) \qquad \text{und} \qquad \sigma_{U,Z}\big(\Lambda'(W)\big) = \sigma_{U,W}\big({}^t\Lambda'(Z)\big).$$

Hierbei seien $\alpha \in \mathrm{Z}^m_{\mathrm{rat}}(X)$, $W \in \mathrm{Z}^m_{\mathrm{hom}}(X/S)$, $\Lambda \in \mathrm{Z}^{n+r+1}(X \times Y)$, $\Lambda' \in \mathrm{Z}^{n+r+1}_{\mathrm{rat}}(X \times Y)$ und $Z \in \mathrm{Z}^s_{\mathrm{hom}}(Y/S)$ Zykel, die sich in einer geeigneten Weise eigentlich und über $U \subset S$ offen gar nicht schneiden.

7.1 Notation

Im Weiteren bezeichne man mit $p\colon X \times Y \to X$ und $q\colon X \times Y \to Y$ stets die beiden Projektionen. Weiter sei an den Ausdruck eines σ-zulässigen Tupels aus 4.1 erinnert. Sind $W, Z \in \mathrm{Z}^*(X)$ zwei Zykel, die sich eigentlich schneiden, so hat man nach 1.9 für $W \centerdot Z$ einen eindeutig bestimmten Zykel mit Träger in $|Z| \cap |W|$, der diesen Schnitt repräsentiert. Deshalb sage man auch, dass „$W \centerdot Z$ als Zykel definiert ist", um zum Ausdruck zu bringen, dass sich W und Z eigentlich schneiden.

7.2 Definition (Der Stratifizierungszykel)

Sei V eine abgeschlossene Untervarietät der Kodimension n von $X \times Y$. Man betrachte ein $a \in \mathbb{N}$ mit $n \leq a \leq d_Y$ und bezeichne mit

$$V(a) := \left\{x \in X \;\middle|\; \dim\bigl(V_x\bigr) = d_Y - a\right\}$$

das nach 4.18 lokal abgeschlossene Unterschema von X, versehen mit der induzierten, reduzierten Struktur. Weiterhin benenne man mit

$$\Upsilon[V] := \sum_{a=n}^{d_Y} \sum_{C \in \mathrm{Comp}(V(a))} \overline{C}$$

den Zykel, bestehend aus den Abschlüssen in X der einzelnen, irreduziblen Komponenten C von $V(a)$ mit $a = n, ..., d_Y$. Die $V(a)$ werden im Allgemeinen auch als Strata bezeichnet. Entsprechend nenne man in dieser Arbeit $\Upsilon[V]$ den Stratifizierungszykel von V.

7.3 Bemerkung

Man verwende die Bezeichnungen von 7.2.

i) Offenbar liegt ein abgeschlossener Punkt $x \in |X|$ bereits in $V(a)$, falls in der Faser V_x eine Komponente C mit $\mathrm{codim}_{X\times Y}(C) = d_X + a$, aber keine Komponente kleinerer Kodimension liegt.

ii) Da die Kodimension aller Komponenten von V_x in $X \times Y$ mit $x \in |X|$ nach oben durch $n + d_X$ beschränkt ist (1.8), gilt $V(n) = \emptyset$ oder $\overline{V(n)} = p(V)$. Weiter ist $V(n) \subset p(V)$ offen und entspricht der Einschränkung des äquidimensionalen Ortes U_V (4.19) auf $p(V)$.

7.4 Proposition

Sei $V \subset X \times Y$ eine abgeschlossene Untervarietät und $p\colon X \times Y \to X$ die Projektion.

i) Gilt für alle $x \in |X|$ und alle Komponenten C von V_x, dass $\mathrm{codim}_{X\times Y}(C) \geq r$ ist, so folgt $\mathrm{codim}_{X\times Y}(V) \geq r - d_X$.

ii) Ist $B \subset p(V) \subset X$ eine abgeschlossene Untervarietät mit $\dim(V_x) \geq a$ für alle $x \in |B|$, so gilt $\dim(V) \geq \dim(B) + a$.

Beweis:

Zu i): Angenommen es gilt $\mathrm{codim}_{X\times Y}(V) < r - d_X$. Dann gibt es offenbar nicht leere Fasern V_x so, dass mit 1.8 für mindestens eine Komponente C von $V_x = V \cap Y_x$ gilt:

$$\mathrm{codim}_{X\times Y}(C) \leq \mathrm{codim}_{X\times Y}(V) + \mathrm{codim}_{X\times Y}(Y_x) < r - d_X + d_X = r.$$

Dies ist ein Widerspruch.
Zu ii): Das ist klar. □

7.5 Proposition

Seien $V \subset X \times Y$ und $Z \subset X$ abgeschlossene Untervarietäten. Schneidet Z den Stratifizierungszykel $\Upsilon[V]$ eigentlich, so schneiden sich auch p^*Z und V eigentlich.

Beweis:

Sei $\mathrm{codim}_{X\times Y}(V) = n$ und $\mathrm{codim}_X(Z) = m$. Weiter sei der mengentheoretische Schnitt von V und p^*Z gegeben durch $V \cap p^*Z = \{C_1, ..., C_r\}$, wobei $C_1, ..., C_r$ die einzelnen Komponenten seien. Offenbar ist die Behauptung bewiesen, wenn man für $i = 1, ..., r$

$$\mathrm{codim}_{X\times Y}(C_i) = n + m$$

gezeigt hat. Wegen 1.8 genügt es hierfür, die Ungleichung $\mathrm{codim}_{X\times Y}(C_i) \geq n+m$ zu zeigen.
1) Vorbereitung:
Man fixiere ein $i \in \{1, ..., r\}$. Es bezeichne η_i den generischen Punkt von C_i und a sei die Zahl aus $\{n, ..., d_Y\}$, für die $\eta_i \in \overline{V(a)} \times Y$ gilt (D. h. C_i ist eine abgeschlossene Untervarietät von $\overline{V(a)} \times Y$ mit $C_i \cap (V(a) \times Y) \neq \emptyset$). Man setze weiterhin

$$\Upsilon^a := \sum_{C \in \mathrm{Comp}(V(a))} \overline{C} \in \mathrm{Z}^*(X).$$

Dann existiert eine Komponente $\alpha \in \mathrm{Comp}\big(\Upsilon^a \cap Z\big)$ mit η_i aus $\alpha \times Y \subset \overline{V(a)} \times Y$. Setzt man $\alpha^\circ := \alpha \cap V(a)$, dann ist offenbar $\eta_i \in \alpha^\circ \times Y$ und damit ist $\alpha^\circ \neq \emptyset$. Da α irreduzibel ist, muss α° nach Konstruktion dicht in α liegen. Damit gilt

$$\mathrm{codim}_X(\alpha) = \mathrm{codim}_X(\alpha^\circ).$$

2) Die Abschätzung (*7.5*):
Beachtet man, dass α° in $V(a)$ liegt, so gilt nach Definition von $V(a)$ für alle $x \in |\alpha^\circ|$ und alle $C \in \mathrm{Comp}(V_x)$ die Ungleichung

$$\mathrm{codim}_{X\times Y}(C) \geq a + d_X.$$

Mit $\mathrm{codim}_X(\alpha) = \mathrm{codim}_X(\alpha^\circ)$ ist dies äquivalent zu

$$\mathrm{codim}_{\alpha^\circ\times Y}(C) \geq a + d_X - \mathrm{codim}_X(\alpha). \tag{7.1}$$

Wegen $C_i \in \mathrm{Comp}(V \cap p^*Z)$ ist $(C_i)_x$ für jeden abgeschlossenen Punkt $x \in |X|$ ein abgeschlossenes Unterschema von V_x. Mit der Gleichung (*7.1*) gilt dann offenbar für jedes $x \in |\alpha^\circ|$ und jede Komponente C' von $(C_i)_x$

$$\mathrm{codim}_{\alpha^\circ\times Y}(C') \geq a + d_X - \mathrm{codim}_X(\alpha). \tag{7.2}$$

Indem man die Gleichung (*7.2*) benutzt erhält man mit 7.4 i):

$$\mathrm{codim}_{\alpha^\circ\times Y}\big(C_i \cap (\alpha^\circ \times Y)\big) \geq a + d_X - \mathrm{codim}_X(\alpha) - \dim(\alpha^\circ) = a. \tag{7.3}$$

Wegen $\eta_i \in \alpha \times Y$ und $\eta_i \in V(a)$ hat man

$$\mathrm{codim}_{\alpha\times Y}(C_i) = \mathrm{codim}_{\alpha^\circ\times Y}\big(C_i \cap (\alpha^\circ \times Y)\big). \tag{7.4}$$

Schließlich folgt mit den Gleichungen (*7.3*) und (*7.4*):

$$\text{(7.5)} \qquad \operatorname{codim}_{X\times Y}(C_i) \geq a + \operatorname{codim}_X(\alpha).$$

3) Die Abschätzung (*7.6*):
Sei $C \subset X$ eine Komponente von Υ^a, in der α liegt. Setzt man $C^\circ := C \cap V(a)$, so liegt C° offen und dicht in C, womit $\dim\big(C^\circ\big)$ und $\dim\big(C\big)$ gleich sind. Da $C^\circ \subset V(a)$ ist, gilt für alle $x \in |C^\circ|$ die Gleichung $\dim(V_x) = d_Y - a$. Mit 7.4 ii) folgt also

$$\dim(V) \geq \dim(C) + d_Y - a.$$

Der Übergang zur Kodimension liefert schließlich:

$$\text{(7.6)} \qquad n = \operatorname{codim}_{X\times Y}(V) \leq d_Y + d_X - \big(\dim(C) + d_Y - a\big) = a + \operatorname{codim}_X\big(C\big).$$

4) Beweis der Behauptung:
Mit $\Upsilon[V]$ schneidet Z auch Υ^a eigentlich. Damit gilt für die Komponente α von $\Upsilon^a \centerdot Z$ und jede Komponente C von Υ^a mit $\alpha \subset C$ die Gleichung $\operatorname{codim}_C(\alpha) = m$. Man erhält:

$$\begin{array}{rcll} \operatorname{codim}_{X\times Y}(C_i) & \geq & \operatorname{codim}_X(\alpha) + a & \big(\text{nach Gleichung } (7.5)\big) \\ & = & \operatorname{codim}_X\big(C\big) + \operatorname{codim}_C(\alpha) + a & \\ & \geq & n + m & \big(\text{nach Gleichung } (7.6)\big). \end{array}$$

□

Nun wird mit 7.5 die Operation von Korrespondenzen auf Zykeln definiert:

7.6 Definition (Die Operation von Korrespondenzen auf Zykeln)

Sei $\Lambda \in \mathrm{Z}^{d_X - r + s}(X \times Y)$ eine Korrespondenz mit den Komponenten $\Lambda_1, ..., \Lambda_n$. Bezeichnen $\Upsilon[\Lambda_1], ..., \Upsilon[\Lambda_n]$ die Stratifizierungszykel von $\Lambda_1, ..., \Lambda_n$, dann setze man $\Upsilon[\Lambda] = \sum_{i=1}^n \Upsilon[\Lambda_i]$ als den Stratifizierungszykel von Λ. Aus 7.5 folgt, dass sich für jedes $W \in \mathrm{Z}^r_{\Upsilon[\Lambda]}(X)$ die Zykel p^*W und Λ eigentlich schneiden. Damit definiere man die Operation der Korrespondenz Λ auf den Zykelgruppen als:

$$\begin{array}{rccc} \Lambda\colon & \mathrm{Z}^r_{\Upsilon[\Lambda]}(X) & \to & \mathrm{Z}^s(Y) \\ & W & \mapsto & \Lambda(W) := q_*(\Lambda \centerdot p^*W). \end{array}$$

7.7 Proposition

Sei $\pi_{X,Y}\colon X \times_S Y \to S$ der offensichtliche Morphismus und $\vartheta\colon X \times_S Y \to X \times_k Y$ der kanonisch, durch die Identität auf den beiden Faktoren induzierte Morphismus. Dann gilt:

i) Das folgende Diagramm ist kartesisch:

$$\begin{array}{ccc} X \times_S Y & \xrightarrow{\vartheta} & X \times_k Y \\ {\scriptstyle \pi_{X,Y}}\downarrow & & \downarrow {\scriptstyle \pi_X \times \pi_Y} \\ S & \xrightarrow{\triangle} & S \times_k S. \end{array}$$

ii) Der Morphismus ϑ ist eine reguläre Immersion.

Beweis:

Zu Punkt i) vergleiche man [EGA I] 0.1.4.8. Die zweite Aussage folgt dann, da $X \times_S Y$ nach Voraussetzung ein glattes S-Schema und S eine glatte k-Varietät ist.

7.8 Lemma

In der fixierten Grundsituation betrachte man Zykel $\alpha \in \mathrm{Z}^m_{\mathrm{rat}}(X)$ und $Z \in \mathrm{Z}^s_{\mathrm{hom}}(Y/S)$, die jeweils $\Upsilon[\vartheta(X \times_S Y)]$ eigentlich schneiden. Man beachte, dass damit $\vartheta^* p^* \alpha$ und $\vartheta^* q^* Z$ in $\mathrm{Z}^*(X \times_S Y)$ im Sinne von 1.9 als Zykel definiert sind. Sei $\Lambda' \in \mathrm{Z}^{n+r-1}(X \times_S Y)$ ein Zykel und $\Lambda := \vartheta_* \Lambda'$ sein Bild in $\mathrm{Z}^{n+r-1+d_S}(X \times Y)$. Dabei sei Λ' so gewählt, dass

$$\Lambda' \centerdot \vartheta^* q^* Z, \quad \Lambda' \centerdot \vartheta^* p^* \alpha \quad \text{und} \quad \Lambda' \centerdot \vartheta^*(p^* \alpha \centerdot q^* Z)$$

als Zykel definiert sind. Dann gilt:

i) Ist $U \subset S$ offen, dann hat man:

$$(|\Lambda(\alpha)| \cap |Z|)_U = \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad (|\alpha| \cap |{}^t\Lambda(Z)|)_U = \emptyset.$$

ii) Ist $U \subset S$ offen so gewählt, dass $(|\Lambda(\alpha)| \cap |Z|)_U = \emptyset$ ist, dann sind die Tripel $\big(U, {}^t\Lambda(Z), \alpha\big)$ und $\big(U, Z, \Lambda(\alpha)\big)$ σ-zulässig und es gilt

$$\sigma_{U, {}^t\Lambda(Z)}(\alpha) = \sigma_{U, Z}\big(\Lambda(\alpha)\big).$$

Beweis:

1) Vorüberlegung:
Man beachte zunächst: Da sich α und $\Upsilon[\vartheta(X \times_S Y)]$ eigentlich schneiden, ist $p^* \alpha \centerdot \vartheta(X \times_S Y)$ als Zykel definiert und der Träger dieses Schnitts liegt bereits in $\vartheta(X \times_S Y)$. Identifiziert man $X \times_S Y$ mit $\vartheta(X \times_S Y) \subset X \times Y$, so wird das Bild von $p^* \alpha$ unter dem Gysin-Morphismus ϑ^* offenbar kanonisch durch den Zykel $p^* \alpha \centerdot \vartheta(X \times_S Y)$, aufgefasst als Element von $\mathrm{Z}^*(X \times_S Y)$, repräsentiert. Analoges gilt für Z.
2) Mit Λ' und $\vartheta^* p^* \alpha$ schneiden sich auch Λ und $p^* \alpha$ eigentlich:
Identifiziert man $|\Lambda'| \cap |\vartheta^* p^* \alpha|$ mit seinem Bild in $\vartheta(X \times_S Y)$, so gilt

$$\vartheta\big(|\Lambda'| \cap |\vartheta^* p^* \alpha|\big) = |\vartheta(\Lambda')| \cap |p^* \alpha \centerdot \vartheta(X \times_S Y)| = |\Lambda| \cap |p^* \alpha| \cap |\vartheta(X \times_S Y)|.$$

Nun liegt $|\Lambda| \cap |p^* \alpha|$ bereits in $\vartheta(X \times_S Y)$, womit man erhält, dass $|\Lambda'| \cap |\vartheta^* p^* \alpha|$ und $|\Lambda| \cap |p^* \alpha|$ isomorph sind. Damit folgt, dass sich mit Λ' und $\vartheta^* p^* \alpha$ auch Λ und $p^* \alpha$ eigentlich schneiden. Entsprechendes gilt auch, wenn man anstatt $p^* \alpha$ den Zykel $q^* Z$ bzw. $p^* \alpha \centerdot q^* Z$ betrachtet.
3) Zu i):
Da sich die entsprechenden Zykel nach Voraussetzung alle eigentlich schneiden, liefert die Projektionsformel mit Träger (1.10)

$$\vartheta_*\big(\Lambda' \centerdot \vartheta^* p^* \alpha \centerdot \vartheta^* q^* Z\big) = \Lambda \centerdot p^* \alpha \centerdot q^* Z.$$

Offenbar sind die beiden Projektionen aus $X \times_S Y$ gerade durch $p \circ \vartheta$ und $q \circ \vartheta$ gegeben. Nun folgt die Behauptung in i), wenn man folgende Gleichung beachtet:

$$(\pi_X \circ p \circ \vartheta)\big(|\Lambda' \centerdot \vartheta^* p^* \alpha \centerdot \vartheta^* q^* Z|\big) = (\pi_Y \circ q \circ \vartheta)\big(|\Lambda' \centerdot \vartheta^* p^* \alpha \centerdot \vartheta^* q^* Z|\big).$$

4) Vorbemerkung zum Beweis von ii):
Offenbar sind α, Z und Λ' gerade so gewählt, dass sich $\Lambda(\alpha)$ und Z, sowie α und ${}^t\Lambda(Z)$ eigentlich schneiden. Um die Behauptung in ii) zu zeigen, benutze man die Blochsche Definition der Schnitte $\sigma_{.,.}(.)$ aus 4.7. Dann benötigt man zum Einen ein Urbild V_α von α unter d_1, das ${}^t\Lambda(Z) \times \triangle_k^1$ eigentlich schneidet. Zum Anderen braucht man ein Urbild $V_{\Lambda(\alpha)}$ von $\Lambda(\alpha)$ unter d_1, das $Z \times \triangle_k^1$ eigentlich schneidet. Weiter sollen V_α und $V_{\Lambda(\alpha)}$ den Zykel $\vartheta(X \times_S Y) \times \triangle_k^1$ eigentlich schneiden, um sie nach $X \times_S Y \times \triangle_k^1$ zurückziehen zu können. Man wähle diese beiden Urbilder nun wie folgt:

5) Wahl eines geeigneten Zykels V_α:
Seien $\Upsilon[\vartheta(X \times_S Y)], \Upsilon[\Lambda], \Upsilon[\Lambda \centerdot q^*Z] \in \mathrm{Z}^*(X)$ die jeweiligen Stratifizierungszykel. Man wähle V_α gemäß 2.5 als ein Urbild von α in der Gruppe $\mathrm{z}^m_{\Upsilon[\vartheta(X\times_S Y)],\Upsilon[\Lambda],\Upsilon[\Lambda\centerdot q^*Z]}(X,1)$. Offenbar gilt

$$\Upsilon[\Lambda \centerdot q^*Z] \times \triangle_k^1 = \Upsilon\big[(\Lambda \centerdot q^*Z) \times \triangle_k^1\big] \in \mathrm{Z}^*(X \times \triangle_k^1).$$

Damit schneiden sich nach 7.5 p^*V_α und $(\Lambda \centerdot q^*Z) \times \triangle_k^1$ eigentlich, und somit nach 4.9 auch V_α und $p_*\big(\Lambda \centerdot q^*Z\big) \times \triangle_k^1 = {}^t\Lambda(Z) \times \triangle_k^1$.

6) Wahl eines geeigneten Zykels $V_{\Lambda(\alpha)}$:
Nach Konstruktion schneidet V_α auch den Stratifizierungszykel $\Upsilon[\Lambda] \times \triangle_k^1$ eigentlich, womit sich auch p^*V_α und $\Lambda \times \triangle_k^1$ eigentlich schneiden. Zusammen mit 5) liefert dies, dass sich die drei Zykel

$$p^*V_\alpha, \quad \Lambda \times \triangle_k^1 \quad \text{und} \quad q^*Z \times \triangle_k^1$$

paarweise eigentlich schneiden und damit $p^*V_\alpha \centerdot (\Lambda \times \triangle_k^1) \centerdot (q^*Z \times \triangle_k^1)$ unabhängig von der Klammerung als Zykel definiert ist. Weiterhin schneiden sich nach 4.9 mit $q^*Z \times \triangle_k^1$ und $(\Lambda \times \triangle_k^1) \centerdot p^*V_\alpha$ auch die Zykel $Z \times \triangle_k^1$ und $q_*\big((\Lambda \times \triangle_k^1) \centerdot p^*V_\alpha\big)$ eigentlich. Damit folgt aus $d_1\big((\Lambda \times \triangle_k^1) \centerdot p^*V_\alpha\big) = \Lambda \centerdot p^*\alpha$ (vgl. 2.7), dass

$$d_1\Big(q_*\big((\Lambda \times \triangle_k^1) \centerdot (p^*V_\alpha)\big)\Big) = \Lambda(\alpha)$$

gilt. Dies liefert, dass $q_*\big((\Lambda \times \triangle_k^1) \centerdot (p^*V_\alpha)\big)$ ein Urbild von $\Lambda(\alpha)$ unter d_1 ist, das $Z \times \triangle_k^1$ eigentlich schneidet. Man setze also

$$V_{\Lambda(\alpha)} := q_*\big((\Lambda \times \triangle_k^1) \centerdot (p^*V_\alpha)\big) \in \mathrm{z}^r(X,1).$$

7) Beweis der Behauptung ii):
Nach Konstruktion schneiden sich p^*V_α und $\vartheta(X \times_S Y) \times \triangle_k^1$ eigentlich, womit $(\vartheta \times \mathrm{id})^* p^*V_\alpha$ als Zykel in $\mathrm{Z}^1(X \times_S Y \times \triangle_k^1)$ definiert ist. Die Projektionsformel (1.10) liefert nun:

$$p^*V_\alpha \centerdot (\Lambda \times \triangle_k^1) \centerdot (q^*Z \times \triangle_k^1) = (\vartheta \times \mathrm{id})_*\big((\vartheta \times \mathrm{id})^* p^*V_\alpha \centerdot (\Lambda' \times \triangle_k^1) \centerdot (\vartheta \times \mathrm{id})^* q^*Z \times \triangle_k^1\big).$$

Setzt man $p_X := \pi_X \circ p$ und $q_Y := \pi_Y \circ q$, so gilt $p_X \circ \vartheta = p_Y \circ \vartheta \colon X \times_S Y \to S$ und weiteres, zweimaliges Anwenden der Projektionsformel mit Träger liefert:

$$\begin{aligned}
(\pi_X)_*\Big(V_\alpha \centerdot \big({}^t\Lambda(Z) \times \triangle_k^1\big)\Big) &= (\pi_X \circ p)_*\big(p^*V_\alpha \centerdot (\Lambda \times \triangle_k^1) \centerdot (q^*Z \times \triangle_k^1)\big) \\
&= (p_X)_*(\vartheta \times \mathrm{id})_*\big((\vartheta \times \mathrm{id})^*(p^*V_\alpha \centerdot q^*Z \times \triangle_k^1) \centerdot (\Lambda' \times \triangle_k^1)\big) \\
&= (q_Y)_*(\vartheta \times \mathrm{id})_*\big((\vartheta \times \mathrm{id})^*(p^*V_\alpha \centerdot q^*Z \times \triangle_k^1) \centerdot (\Lambda' \times \triangle_k^1)\big) \\
&= (\pi_Y \circ q)_*\big(p^*V_\alpha \centerdot (\Lambda \times \triangle_k^1) \centerdot (q^*Z \times \triangle_k^1)\big) \\
&= (\pi_Y)_*\big(V_{\Lambda(\alpha)} \centerdot (Z \times \triangle_k^1)\big).
\end{aligned}$$

Nach der Definition von $\sigma_{.,.}(.)$ erhält man damit offenbar

$$\sigma_{U,\,{}^t\Lambda(Z)}(\alpha) = \sigma_{U,Z}\big(\Lambda(\alpha)\big).$$

□

7.9 Lemma

In der fixierten Grundsituation betrachte man Zykel $W \in \mathrm{Z}^m_{\mathrm{hom}}(X/S)$ und $Z \in \mathrm{Z}^s_{\mathrm{hom}}(Y/S)$, die jeweils $\Upsilon[\vartheta(X \times_S Y)]$ eigentlich schneiden. Weiterhin sei $\Lambda' \in \mathrm{Z}^{n+r-1}_{\mathrm{rat}}(X \times_S Y)$ ein Zykel und $\Lambda := \vartheta_*\Lambda'$ sein Bild in $\mathrm{Z}^{n+r-1+d_S}_{\mathrm{rat}}(X \times Y)$. Dabei sei Λ' so gewählt, dass

$$\Lambda' \mathbin{\boldsymbol{.}} \vartheta^* p^* W, \quad \Lambda' \mathbin{\boldsymbol{.}} \vartheta^* q^* Z \quad \text{ und } \quad \Lambda' \mathbin{\boldsymbol{.}} \vartheta^*(p^*W \mathbin{\boldsymbol{.}} q^*Z)$$

als Zykel definiert sind. Dann gilt:

i) Ist $U \subset S$ offen, dann hat man

$$(|\Lambda(W)| \cap |Z|)_U = \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad (|W| \cap |{}^t\Lambda(Z)|)_U = \emptyset.$$

ii) Ist $U \subset S$ offen so gewählt, dass $(|\Lambda(W)| \cap |Z|)_U = \emptyset$ ist, dann sind die Tripel $\big(U,\, W, {}^t\Lambda(Z)\big)$ und $\big(U,\, Z,\, \Lambda(W)\big)$ σ-zulässig und es gilt

$$\sigma_{U,W}({}^t\Lambda(Z)) = \sigma_{U,Z}\big(\Lambda(W)\big).$$

Beweis:

1) Zu i):
Dies folgt offenbar völlig analog wie im Beweis von 7.8.
2) Zu ii):
Offenbar ist $X \times_S Y$ ein projektives, glattes k-Schema, womit sich die einzelnen Zusammenhangskomponenten $C_1, ..., C_a$ von $X \times_S Y$ nicht schneiden und somit $C_1, ..., C_a$ glatte, projektive k-Varietäten sind. Weiterhin gilt $\mathrm{CH}^*(X \times_S Y) = \bigoplus_{i=1}^a \mathrm{CH}^*(C_i)$ (vgl. [Fu]1.3.1 b)). Damit erhält man durch Betrachten jedes einzelnen C_i mit $i = 1, ..., a$ ein "Urbild" $V_{\Lambda'}$ von Λ' unter d_1, das $\vartheta^*(p^*W \mathbin{\boldsymbol{.}} q^*Z) \times \triangle^1_k$, $\vartheta^* p^* W \times \triangle^1_k$ und $\vartheta^* q^* Z \times \triangle^1_k$ eigentlich schneidet. Weiter setze man $V_\Lambda := (\vartheta \times \mathrm{id})_* V_{\Lambda'}$ und betrachte den Zykel

$$V_{{}^t\Lambda(Z)} := p_*\big(V_\Lambda \mathbin{\boldsymbol{.}} (q^*Z \times \triangle^1_k)\big) \in \mathrm{z}^n(X, 1).$$

Wegen $d_1\big(V_\Lambda \mathbin{\boldsymbol{.}} (q^*Z \times \triangle^1_k)\big) = \Lambda \mathbin{\boldsymbol{.}} q^*Z$ gilt

$$d_1\big(V_{{}^t\Lambda(Z)}\big) = {}^t\Lambda(Z).$$

Mit 4.9 schneidet $V_{{}^t\Lambda(Z)}$ den Zykel $W \times \triangle^1_k$ eigentlich, denn nach Konstruktion schneiden sich $V_{\Lambda'} \mathbin{\boldsymbol{.}} (\vartheta^* q^* Z \times \triangle^1_k)$ und $\vartheta^* p^* W \times \triangle^1_k$ eigentlich. Damit gilt für das σ-zulässige Tripel $(U, W, {}^t\Lambda(Z))$

$$\sigma_{U,W}\big({}^t\Lambda(Z)\big) = \iota_U\Big((\pi_X)_*\big(V_{{}^t\Lambda(Z)} \mathbin{\boldsymbol{.}} (W \times \triangle^1_k)\big)\Big).$$

Analog dazu sieht man, dass $V_{\Lambda(W)} := q_*\big(V_\Lambda \mathbin{\boldsymbol{.}} (p^*W \times \triangle^1_k)\big)$ den Zykel $Z \times \triangle^1_k$ eigentlich schneidet und $d_1\big(V_{\Lambda(W)}\big) = \Lambda(W)$ erfüllt. Damit gilt

$$\sigma_{U,Z}\big(\Lambda(W)\big) = \iota_k\Big((\pi_Y)_*\big(V_{\Lambda(W)} \mathbin{\boldsymbol{.}} (Z \times \triangle^1_k)\big)\Big).$$

Mit mehrmaligem Anwenden der Projektionsformel mit Träger 1.10 folgt nun

$$\begin{aligned}(\pi_Y)_*\big(V_{\Lambda(W)} \centerdot (Z \times \triangle_k^1)\big) &= (\pi_Y \circ q)_*\Big(V_\Lambda \centerdot \big((p^*W \centerdot q^*Z) \times \triangle_k^1\big)\Big)\\ &= (\pi_Y \circ q \circ \vartheta \times \mathrm{id})_*\Big(V_{\Lambda'} \centerdot \big(\vartheta^*(p^*W \centerdot q^*Z) \times \triangle_k^1\big)\Big)\\ &= (\pi_X \circ p \circ \vartheta \times \mathrm{id})_*\Big(V_{\Lambda'} \centerdot \big(\vartheta^*(p^*W \centerdot q^*Z) \times \triangle_k^1\big)\Big)\\ &= (\pi_X \circ p)_*\Big(V_\Lambda \centerdot \big((p^*W \centerdot q^*Z) \times \triangle_k^1\big)\Big)\\ &= (\pi_X)_*\big(V_{{}^t\Lambda(Z)} \centerdot (W \times \triangle_k^1)\big)\end{aligned}$$

und damit offenbar die Behauptung. □

In [MS] wird die Situation betrachtet, dass $S = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}) = \mathrm{Spec}(k)$ gilt. Sei $T := Y$ und seien $i, m \in \mathbb{N}$, so dass $d_X + 1 = m + i$ gilt. Weiter bezeichnen $\mathbb{E}^X$ und $\mathbb{E}^T$ die Blochsche Bierweiterung von $\mathrm{CH}^i_{\mathrm{hom}}(X) \times \mathrm{CH}^m_{\mathrm{hom}}(X)$ bzw. $\mathrm{CH}^{d_T}_{\mathrm{hom}}(T) \times \mathrm{CH}^1_{\mathrm{hom}}(T)$. Schließlich sei $B \in \mathrm{CH}^m(X \times T)$ eine Korrespondenz. Dann zeigt Müller-Stach im Wesentlichen (vgl. den Beweis von 7.10), dass

$$(\mathrm{id} \times {}^tB)^*\mathbb{E}^X \to (B \times \mathrm{id})^*\mathbb{E}^T$$

ein Isomorphismus von Bierweiterungen ist. Dabei überlässt er aber viele Details dem Leser. Im nachfolgenden Satz wird diese Aussage von den, bei [MS] betrachteten Kodimensionen 1 und d_T, hin zu beliebigen Kodimensionen r und s mit $r + s = d_T - d_S + 1$ verallgemeinert. Auch muss im Folgenden S nicht Spektrum eines Körpers sein. Die Idee in Müller-Stachs Beweis ist, direkt auf die Konstruktion der Blochschen Bierweiterung in [Bl1] zurückzugreifen. Im Gegensatz dazu erfolgt der Zugang zum Beweis hier über die Schnitte $\sigma_{.,.}(.)$ (durch die die Blochsche Bierweiterung bereits komplett bestimmt ist) und unterscheidet sich damit klar von Müller-Stachs Beweis. Auch erlaubt diese Handhabe eine viel defensivere Verwendung von Chows Movinglemma.

7.10 Satz

Seien $n, m, r, s \in \mathbb{N}$ wie in der Grundsituation und sei $\mathbb{E}^X$ sowie $\mathbb{E}^Y$ die Blochsche Bierweiterung von $\underline{\mathrm{CH}}^m_{\mathrm{hom}}(X/S) \times \underline{\mathrm{CH}}^n_{\mathrm{hom}}(X/S)$ bzw. $\underline{\mathrm{CH}}^r_{\mathrm{hom}}(Y/S) \times \underline{\mathrm{CH}}^s_{\mathrm{hom}}(Y/S)$. Man betrachte ein $v' \in \mathrm{CH}^{n+r-1}(X \times_S Y)$, die Korrespondenzen $v := \vartheta_* v'$ aus $\mathrm{CH}^{n+r-1+d_S}(X \times Y)$ sowie die durch v induzierten Operationen

$$v\colon \underline{\mathrm{CH}}^m_{\mathrm{hom}}(X/S) \to \underline{\mathrm{CH}}^r_{\mathrm{hom}}(Y/S) \quad \text{und} \quad {}^tv\colon \underline{\mathrm{CH}}^s_{\mathrm{hom}}(Y/S) \to \underline{\mathrm{CH}}^n_{\mathrm{hom}}(X/S).$$

Dann sind die Pullbacks $(\mathrm{id} \times {}^tv)^*\mathbb{E}^X$ und $(v \times \mathrm{id})^*\mathbb{E}^Y$ der $\mathbb{G}_{\mathrm{m},S}$-Bierweiterungen $\mathbb{E}^X$ bzw. $\mathbb{E}^Y$ über $\underline{\mathrm{CH}}^m_{\mathrm{hom}}(X/S) \times \underline{\mathrm{CH}}^s_{\mathrm{hom}}(Y/S)$ kanonisch isomorph, es gilt also:

$$(\mathrm{id} \times {}^tv)^*\mathbb{E}^X = (v \times \mathrm{id})^*\mathbb{E}^Y.$$

Beweis:

1) Definition kanonischer Isomorphismen $\tau_v\colon \mathbb{E}^Y_{v(w),z} \to \mathbb{E}^X_{w,{}^tv(z)}$**:**
Zunächst fixiere man Elemente $w \in \mathrm{CH}^m_{\mathrm{hom}}(X/S)$ und $z \in \mathrm{CH}^s_{\mathrm{hom}}(Y/S)$. Man betrachte zu w, z und v die Menge $\mathfrak{M}$ aller Tupel (U, V', W, Z), bei denen $W \in w$ und $Z \in z$ so

gewählt sind, dass W und Z den Zykel $\Upsilon[\vartheta(X \times_S Y)]$ eigentlich schneiden. Darüberhinaus seien $U \subset S$ offen und $V' \in v'$ so gewählt, dass die Schnitte $V' \centerdot \vartheta^* p^* W$, $V' \centerdot \vartheta^* q^* Z$ und $V' \centerdot \vartheta^*(p^* W \centerdot q^* Z)$ alle als Zykel definiert und über U leer sind. Dann bilden $\{Z\}_{U, V(W)}$ und $\{{}^tV(Z)\}_{U,W}$ Rahmen der k^*-Torseure $\mathbb{E}^Y_{v(w),z}$ bzw. $\mathbb{E}^X_{w,{}^tv(z)}$. Hiermit definiere man für jedes $(U, V', W, Z) \in \mathfrak{M}$ und $V := \vartheta_* V'$ einen Torseurisomorphismus

$$\tau_V^{W,Z} \colon \mathbb{E}^Y_{v(w),z}|_U \to \mathbb{E}^X_{w,{}^tv(z)}|_U; \quad \{Z\}_{U,V(W)} \mapsto \{{}^tV(Z)\}_{U,W}.$$

Zunächst zeige man, dass für (U_1, V_1', W_1, Z_1), $(U_2, V_2', W_2, Z_2) \in \mathfrak{M}$, $V_1 := \vartheta_* V_1'$ und $V_2 := \vartheta_* V_2'$ die Gleichung $\tau_{V_1}^{W_1,Z_1} = \tau_{V_2}^{W_2,Z_2}$ über U_{12} gilt. Dazu beachte man, dass für $i := \big(U_1, W_1, {}^tV_1(Z_1)\big)$ und $j := \big(U_2, W_2, {}^tV_2(Z_2)\big)$ das Tupel (i,j) φ-zulässig ist. Mit der entsprechenden Übergangsabbildung $\varphi^X_{i,j}$ von $\mathbb{E}^X_{w,{}^tv(z)}$ gilt also

$$\tau_{V_1}^{W_1,Z_1}(\{Z_1\}_{U_{12},V(W_1)}) = \{{}^tV_1(Z_1)\}_{U_{12},W_1} = \varphi^X_{i,j} \cdot \{{}^tV_2(Z_2)\}_{U_{12},W_2}.$$

Setzt man $m := \big(U_1, V_1(W_1), Z_1\big)$ und $n := \big(U_2, V_2(W_2), Z_2\big)$, dann ist (n,m) φ-zulässig. Mit der entsprechenden Übergangsabbildung $\varphi^Y_{m,n}$ von $\mathbb{E}^Y_{v(w),z}$ gilt somit

$$\tau_{V_2}^{W_2,Z_2}\big(\{Z_1\}_{U_{12},V_1(W_1)}\big) = \tau_{V_2}^{W_2,Z_2}\big(\varphi^Y_{m,n} \cdot \{Z_2\}_{U_{12},V_2(W_2)}\big) = \varphi^Y_{m,n} \cdot \{{}^tV_2(Z_2)\}_{U_{12},W_2}.$$

Damit genügt es

$$\varphi^X_{i,j} = \varphi^Y_{m,n}$$

zu zeigen. Nach entsprechendem Lokalisieren und Übergang zu geeigneten, rational äquivalenten Zykeln kann man analog zu Kapitel 4 annehmen, dass

$$\begin{array}{llll} \big(U_{12}, W_1, {}^tV_1(Z_1 - Z_2)\big), & \big(U_{12}, V_1(W_1), Z_1 - Z_2\big), & & \big(U_{12}, {}^tV_1(Z_2), (W_1 - W_2)\big), \\ \big(U_{12}, Z_2, V_1(W_1 - W_2)\big), & \big(U_{12}, W_2, {}^t(V_1 - V_2)(Z_2)\big) & \text{und} & \big(U_{12}, Z_2, (V_1 - V_2)(W_2)\big) \end{array}$$

σ-zulässig sind. Dann hat man

$$\begin{array}{rcl} \varphi^X_{i,j} & = & \sigma_{U_{12},W_1}\big({}^tV_1(Z_1 - Z_2)\big) \cdot \sigma_{U_{12},{}^tV_1(Z_2)}\big(W_1 - W_2\big) \cdot \sigma_{U_{12},W_2}\big({}^t(V_1 - V_2)(Z_2)\big) \\ \text{und} & & \\ \varphi^Y_{m,n} & = & \sigma_{U_{12},V_1(W_1)}(Z_1 - Z_2) \cdot \sigma_{U_{12},Z_2}\big(V_1(W_1 - W_2)\big) \cdot \sigma_{U_{12},Z_2}\big((V_1 - V_2)(W_2)\big). \end{array}$$

Nach 7.8 und 7.9 gilt aber

$$\begin{array}{rcl} \sigma_{U_{12},W_1}\big({}^tV_1(Z_1 - Z_2)\big) & = & \sigma_{U_{12},V_1(W_1)}(Z_1 - Z_2), \\ \sigma_{U_{12},{}^tV_1(Z_2)}\big(W_1 - W_2\big) & = & \sigma_{U_{12},Z_2}\big(V_1(W_1 - W_2)\big) \quad \text{und} \\ \sigma_{U_{12},W_2}\big({}^t(V_1 - V_2)(Z_2)\big) & = & \sigma_{U_{12},Z_2}\big((V_1 - V_2)(W_2)\big), \end{array}$$

womit die Zwischenbehauptung gezeigt ist. Man bezeichne für v, w und z den, von Wahlen unabhängigen, kanonischen Torseurisomorphismus mit

$$\tau_v^{w,z} \colon \mathbb{E}^Y_{v(w),z} \to \mathbb{E}^X_{w,{}^tv(z)}.$$

2) Definition kanonischer Isomorphismen $t_v^{w,z} \colon \big((v \times \mathbf{id})^* \mathbb{E}^Y\big)_{w,z} \to \big((\mathbf{id} \times {}^tv)^* \mathbb{E}^X\big)_{w,z}$: Für $w \in \mathrm{CH}^m_{\mathrm{hom}}(X/S)$ und $z \in \mathrm{CH}^s_{\mathrm{hom}}(Y/S)$ induzieren die Morphismen $\tau_v^{w,z}$ vermöge der Projektionen

$$p' \colon \big((v \times \mathrm{id})^* \mathbb{E}^Y\big)_{w,z} \to \mathbb{E}^Y_{v(w),z} \quad \text{und} \quad q' \colon \big((\mathrm{id} \times {}^tv)^* \mathbb{E}^X\big)_{w,z} \to \mathbb{E}^X_{w,{}^tv(z)}$$

kanonische Torseurisomorphismen

$$t_v^{w,z}\colon \big((v\times \mathrm{id})^*\mathbb{E}^Y\big)_{w,z} \to \big((\mathrm{id}\times {}^t v)^*\mathbb{E}^X\big)_{w,z}.$$

Ist dabei $U\subset S$ offen, $W\in w$, $Z\in z$ und $V\in v$ so, dass $\{Z\}_{U,V(W)}$ und $\{{}^tV(Z)\}_{U,W}$ Rahmen von $\mathbb{E}^Y_{v(w),z}$ bzw. $\mathbb{E}^X_{w,{}^tv(z)}$ sind. Dann gilt offenbar

$$t_v^{w,z}\big((v\times \mathrm{id})^*\{Z\}_{U,V(W)}\big) = (\mathrm{id}\times {}^tv)^*\{{}^tV(Z)\}_{U,W}.$$

3) Verträglichkeit der Gruppengesetze:
Dies ist mit der expliziten Beschreibung von $t_v^{w,z}$ in 2) und der Form der Gruppengesetze einer Blochschen Bierweiterung (vgl. 6.1) unmittelbar klar. □

Kapitel 8

Picard- und Albanesevarietät

Im Folgenden sei k stets ein algebraisch abgeschlossener Körper. In diesem Abschnitt werden die wichtigsten Sachverhalte bezüglich der Picard- und Albaneseverietät wiederholt. Auch wird an die Begriffe eines (bei einem Punkt rigidifizierten) Poincarébündels und eines Poincarédivisors erinnert. Dabei sind die meisten Aussagen in diesem Abschnitt wohlbekannt und man kann sich die entsprechenden Beweise schnell selbst überlegen. Falls zur Hand, findet man diese Resultate auch in meiner Diplomarbeit wieder.

8.1 Grundsituation

Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper und X/k eine glatte, projektive Varietät. Weiter fixiere man mit $\sigma \in X(k)$ einen k-rationalen Punkt von X.

8.2 Definition (Die Picardvarietät)

Man bezeichne mit (Sch/k) die Kategorie der Schemata über k, mit (Var/k) die Kategorie der glatten, projektiven Varietäten über k und mit (Ab) die Kategorie der abelschen Gruppen. Sei $T \in (\mathrm{Sch}/k)$. Bezeichnet $q\colon X \times T \to T$ die Projektion, so wird bei [BLR] Kapitel 8 gezeigt, dass für die glatte, projektive Varietät X/k der Picardfunktor

$$\begin{array}{llcc} \mathfrak{Pic}_{X/k}\colon & \big(\mathrm{Sch}/k\big)^{\circ} & \to & \big(\mathrm{Ab}\big) \\ & \quad T & \mapsto & \mathrm{Pic}(X \times T)\big/q^{*}\mathrm{Pic}(T) \end{array}$$

darstellbar ist. Genauer wird nach [BLR] 8.2 Theorem 3 und 8.1 Theorem 1 dieser Funktor durch ein separiertes k-Schema $\mathrm{Pic}_{X/k}$ v. e. T. dargestellt. Bezeichnet $\mathrm{Pic}^1_{X/k}$ die reduzierte Zusammenhangskomponente der Null von $\mathrm{Pic}_{X/k}$, so wird in [BLR] 8.4 Satz 3 gezeigt, dass $\mathrm{Pic}^1_{X/k}$ ein eigentliches Gruppenschema ist. Darüberhinaus kann man sich überlegen, dass es sich bei $\mathrm{Pic}^1_{X/k}$ sogar um eine abelsche Varietät über k handelt. Man nenne $\mathrm{Pic}^1_{X/k}$ die Picardvarietät von X. Dabei beachte man, dass man üblicherweise $(\mathrm{Pic}^0_{X/k})_{\mathrm{red}}$ für die Picardvarietät schreibt. Die hier verwendete Bezeichnung $\mathrm{Pic}^1_{X/k}$ fügt sich aber besser in die Notation der höheren Picardvarietäten (Kapitel 10) ein. Betrachtet man folgende Einschränkung von $\mathfrak{Pic}_{X/k}$

$$\begin{array}{rccc}\mathfrak{Pic}^0_{X/k}\colon & \big(\mathrm{Var}/k\big)^\circ & \to & \big(\mathrm{Ab}\big)\\ & T & \mapsto & \left\{\mathcal{L}\in\mathrm{Pic}(X\times T)\;\middle|\; \begin{array}{l}(\sigma\times\mathrm{id})^*\mathcal{L}\cong\mathcal{O}_T \text{ und für alle}\\ \tau\in T(k) \text{ ist } (\mathrm{id}\times\tau)^*\mathcal{L}\\ \text{algebraisch äquivalent zu Null}\end{array}\right\},\end{array}$$

so kann man zeigen, dass dieser Funktor durch $\mathrm{Pic}^1_{X/k}$ dargestellt wird. Ist A/k eine abelsche Varietät, so schreibe man auch $\hat{A}$ anstatt $\mathrm{Pic}^1_{A/k}$ und nenne $\hat{A}$ die duale abelsche Varietät von A.

8.3 Definition (Das Poincarébündel)

Aufgrund der Darstellbarkeit von $\mathfrak{Pic}^0_{X/k}$ hat man eine Isomorphieklasse von Geradenbündeln $[\mathcal{P}_X]\in\mathfrak{Pic}^0_{X/k}(\mathrm{Pic}^1_{X/k})$, die mit $\mathrm{id}\in\mathrm{Hom}(\mathrm{Pic}^1_{X/k},\mathrm{Pic}^1_{X/k})$ korrespondiert. Man bezeichne jedes Geradenbündel $\mathcal{P}_X$, das in der Klasse $[\mathcal{P}_X]$ liegt, als ein bei σ rigidifizierbares Poincarébündel von X. Wird ein Isomorphismus $(\sigma\times\mathrm{id})^*\mathcal{P}_X=\mathcal{O}_{\mathrm{Pic}^1_{X/k}}$ fixiert, so bezeichnet man das entsprechende Poincarébündel als bei σ rigidifiziert. Ist $\tau\in\mathrm{Pic}^1_{X/k}(k)$ ein k-rationaler Punkt, so ist weiterhin die Klasse von $(\mathrm{id}\times\tau)^*\mathcal{P}_X$ algebraisch äquivalent zu Null. Darüberhinaus erfüllt $\mathcal{P}_X$ folgende, offensichtliche universelle Eigenschaft:
Sei $T\in(\mathrm{Var}/k)$ und sei $\mathcal{L}$ ein Geradenbündel auf $X\times T$ mit $(\sigma\times\mathrm{id})^*\mathcal{L}\cong\mathcal{O}_T$ sowie $(\mathrm{id}\times\tau)^*\mathcal{L}$ algebraisch äquivalent zu Null für alle $\tau\in T(k)$. Dann existiert ein eindeutig bestimmter Morphismus $f\colon T\to\mathrm{Pic}^1_{X/k}$, so dass auf $X\times T$ gilt:

$$(\mathrm{id}\times f)^*\mathcal{P}_X\cong\mathcal{L}.$$

8.4 Proposition

Seien $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ Geradenbündel über X. Ist $f\colon\mathcal{F}\to\mathcal{G}$ ein Isomorphismus, so ist dieser bereits eindeutig durch seine Einschränkung $f|_\sigma\colon\mathcal{F}|_\sigma\to\mathcal{G}|_\sigma$ von f auf σ bestimmt.

Beweis:

Man beachte für den Beweis dieser wohlbekannten Aussage, dass nach [HA] II Ex. 4.5 und Ex. 5.1 für die eigentliche Varietät X über dem algebraisch abgeschlossenen Körper k

$$\mathrm{Hom}\big(\mathcal{F},\,\mathcal{F}\big)=\Gamma\big(X,\,\underline{\mathit{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\,\mathcal{F})\big)=\Gamma\big(X,\,\mathcal{O}_X\big)=k$$

gilt. Ist $U\subset X$ offen und t ein Rahmen von $\mathcal{F}$ über U, so ist der mit $a\in k$ korrespondierende Garbenmorphismus gegeben durch $t\mapsto a\cdot t$. Insbesondere hat man bei σ die Zuordnung $t|_\sigma\mapsto a\cdot t|_\sigma$. Offenbar erhält man damit:

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{F},\,\mathcal{F})=\mathrm{Hom}(\mathcal{F}|_\sigma,\,\mathcal{F}|_\sigma).$$

Angenommen es existiert nun ein weiterer Isomorphismus $g\colon\mathcal{F}\to\mathcal{G}$ mit $g_\sigma=f_\sigma$. Dann folgt aber aus der Vorüberlegung dass $f^{-1}\circ g=\mathrm{id}_{\mathcal{F}}$ ist. Dies zeigt die Behauptung. $\square$

8.5 Bemerkung

Sind $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ Geradenbündel auf X, die beide bei σ rigidifiziert sind, so besagt 8.4 gerade folgendes: Es gibt höchstens einen Isomorphismus $f\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$, der mit den Rigidifizierungen auf beiden Seiten verträglich ist.

8.6 Proposition (Birigidifizierung des Poincarébündels)

Sei A eine abelsche Varietät und $\mathcal{P}_A$ ein bei $0 \in |A|$ rigidifiziertes Poincarébündel auf $A \times \hat{A}$. Dann ist $\mathcal{P}_A$ auch bei $0 \in |\hat{A}|$ rigidifizierbar. Weiter induziert die Rigidifizierung bei $0 \in |A|$ kanonisch eine Rigidifizierung von $\mathcal{P}_A$ bei $0 \in |\hat{A}|$.

Beweis:

Der erste Teil ist wohlbekannt und der Beweis ist dem Leser überlassen. Für die zweite Aussage beachte man, dass es analog zu 8.4 kanonische Isomorphismen wie folgt gibt:

$$\operatorname{Hom}\bigl(\mathcal{P}_A|_{A\times 0}, \mathcal{O}_A\bigr) = \operatorname{Hom}\bigl(\mathcal{P}_A|_{(0,0)}, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(k)}\bigr) = \operatorname{Hom}\bigl(\mathcal{P}_A|_{0\times\hat{A}}, \mathcal{O}_{\hat{A}}\bigr).$$

Nun ist mit der Rigidifizierung bei $0 \in |A|$ ein Isomorphismus in $\operatorname{Hom}\bigl(\mathcal{P}_A|_{0\times\hat{A}}, \mathcal{O}_{\hat{A}}\bigr)$ fixiert und damit auch einer in $\operatorname{Hom}\bigl(\mathcal{P}_A|_{A\times 0}, \mathcal{O}_A\bigr)$. Dieser ist aber eine Rigidifizierung für $\mathcal{P}_A$ bei $0 \in |\hat{A}|$. □

8.7 Definition (Der duale Morphismus)

Sei A/k eine abelsche Varietät und $f\colon X \to A$ ein Morphismus von Varietäten. Offenbar gilt $\bigl[(f \times \mathrm{id})^*\mathcal{P}_A\bigr] \in \mathfrak{Pic}^0_{X/k}(\hat{A})$. Damit existiert nach 8.3 ein eindeutig bestimmter Morphismus $\hat{f}\colon \hat{A} \to \operatorname{Pic}^1_{X/k}$ mit

$$(f \times \mathrm{id})^*\mathcal{P}_A \cong (\mathrm{id} \times \hat{f})^*\mathcal{P}_X.$$

Dabei nenne man $\hat{f}$ den zu f dualen Morphismus. Ist insbesondere $X = B$ ebenfalls eine abelsche Varietät, und sind $\mathcal{P}_A$ und $\mathcal{P}_B$ jeweils bei 0 rigidifizierte Poincarébündel auf $A \times \hat{A}$ bzw. $B \times \hat{B}$, so kann der voranstehende Isomorphismus kanonisch (d. h. mit den Rigidifizierungen verträglich) gewählt werden. Es gilt also

$$(f \times \mathrm{id})^*\mathcal{P}_A = (\mathrm{id} \times \hat{f})^*\mathcal{P}_B.$$

8.8 Proposition (Die Bidualitätsabbildung)

Sei A/k eine abelsche Varietät und bezeichnet $\nu\colon A \times \hat{A} \to \hat{A} \times A$ das Vertauschen der Faktoren. Ist $\mathcal{P}_A$ ein fixiertes, bei 0 rigidifizierbares Poincarébündel auf $A \times \hat{A}$, dann liegt die Klasse von $\nu^*\mathcal{P}_A$ in $\mathfrak{Pic}^0_{\hat{A}/k}(A)$. Ist $\mathcal{P}_{\hat{A}}$ ein fixiertes, bei 0 rigidifizierbares Poincarébündel auf $\hat{A} \times \hat{\hat{A}}$, so betrachte man den nach 8.3 eindeutig bestimmten Morphismus

$$b\colon A \to \hat{\hat{A}}$$

mit $(\mathrm{id} \times b)^*\mathcal{P}_{\hat{A}} = \nu^*\mathcal{P}_A$. Dann ist der Morphismus b bereits ein Isomorphismus und wird im Folgenden Bidualitätsabbildung genannt.

Beweis:

Diese Aussage ist wohlbekannt. □

8.9 Lemma

Sei $g\colon \hat{A} \to \mathrm{Pic}^1_{X/k}$ ein Homomorphismus abelscher Varietäten.

i) Es existiert ein eindeutig bestimmter Morphismus $g^b\colon X \to A$ mit $g^b(\sigma) = 0$ so, dass $(g^b)\hat{} = g$ gilt.

ii) Bezeichnet $\nu\colon \mathrm{Pic}^1_{X/k} \times X \to X \times \mathrm{Pic}^1_{X/k}$ das Vertauschen der beiden Faktoren, so liegt die Klasse von $\mathcal{L} := (g \times \mathrm{id})^* \nu^* \mathcal{P}_X$ in $\mathfrak{Pic}^0_{\hat{A}/k}(X)$. Es bezeichne $\tilde{g}\colon X \to \hat{\hat{A}}$ den eindeutig bestimmten Morphismus mit $(\mathrm{id} \times \tilde{g})^* \mathcal{P}_{\hat{A}} \cong \mathcal{L}$. Dann kann man in i) $g^b = b^{-1} \circ \tilde{g}$ setzen.

Beweis:

Im Folgenden werden kurz die wesentlichen Beweisschritte genannt. Diese auszuführen ist dann dem Leser überlassen.
Man rechnet zunächst die Aussage $\left[\mathcal{L}\right] \in \mathfrak{Pic}^0_{\hat{A}/k}(X)$ aus ii) nach. Als nächstes überlegt man sich mit der universellen Eigenschaft von $\mathcal{P}_X$, dass $(g^b)\hat{} = g$ gilt. Schließlich zeigt man mit Hilfe eines fixierten, bei 0 rigidifizierbaren Poincarébündels $\mathcal{P}_{\hat{A}}$ auf $\hat{A} \times \hat{\hat{A}}$, dass für jedes $f\colon X \to A$ mit $f(\sigma) = 0$ auch $(\hat{f})^b = f$ gilt. Hieraus folgt die Eindeutigkeit von g^b in i) und das Lemma ist gezeigt. □

8.10 Definition (Die Albanesevarietät)

Ein Paar $\big(\mathrm{Alb}(X), \psi\big)$, bestehend aus einer abelschen Varietät $\mathrm{Alb}(X)$ und einem Morphismus $\psi\colon X \to \mathrm{Alb}(X)$ mit $\psi \circ \sigma = 0\colon \mathrm{Spec}(k) \to \mathrm{Alb}(X)$, heißt Albanesevarietät von X (zum Basispunkt σ), falls folgende universelle Eigenschaft erfüllt ist: Für jede abelsche Varietät A und jeden Morphismus $\varphi\colon X \to A$ mit $\varphi \circ \sigma = 0\colon \mathrm{Spec}(k) \to A$ existiert ein eindeutig bestimmter Morphismus abelscher Varietäten $f\colon \mathrm{Alb}(X) \to A$ so, dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\psi} & \mathrm{Alb}(X) \\ & {\scriptstyle\varphi}\searrow \quad \swarrow {\scriptstyle\exists! f} & \\ & A. & \end{array}$$

8.11 Proposition (Existenz und Eindeutigkeit der Albanesevarietät)

i) Eine Albanesevarietät von X zum Basispunkt σ ist bis auf kanonische Isomorphie eindeutig bestimmt.

ii) Setzt man $\mathrm{Alb}(X) := \big(\mathrm{Pic}^1_{X/k}\big)\hat{}$ und $\psi := (\mathrm{id}_{\mathrm{Pic}^1_{X/k}})^b$, so ist das Paar $(\mathrm{Alb}(X), \psi)$ eine Albanesevarietät von X (zum Basispunkt σ).

Beweis:

Der Punkt i) ist klar und ii) rechnet man direkt nach. □

8.12 Bemerkung

Im Folgenden bezeichne man mit $\mathrm{A}^p(X) \subset \mathrm{CH}^p(X)$ die Elemente des Chowrings, die gemäß [Fu] 10.3 algebraisch äquivalent zu Null sind. Dabei hat man speziell für $p = d_X$:

$$\mathrm{A}_0(X) = \ker\big(\mathrm{CH}_0(X) \xrightarrow{\deg} \mathbb{Z}\big).$$

8.13 Bemerkung

Die Abbildung $\psi\colon X \to \mathrm{Alb}(X)$ induziert wie folgt die sogenannte Abel-Jakobi-Abbildung

$$\theta_0 = \theta^{d_X} : \mathrm{A}_0(X) = \mathrm{A}^{d_X}(X) \to \big(\mathrm{Alb}(X)\big)(k); \quad \textstyle\sum_{i=1}^n n_i Z_i \mapsto \sum_{i=1}^n n_i \cdot \psi_*(Z_i).$$

Dabei ist die rechte Summe als die Verknüpfung in $\big(\mathrm{Alb}(X)\big)(k)$ zu lesen.
Fixiert man ein Poincarébündel $\mathcal{P}_X$ auf $X \times \mathrm{Pic}^1_{X/k}$, so erhält man für jedes $p \in |\mathrm{Pic}^1_{X/k}|$ mit $(\mathrm{id} \times p)^*\mathcal{P}_X$ eine Klasse in $\mathrm{Pic}(X)$, die algebraisch äquivalent zu Null ist und damit ein Element in $\mathrm{A}^1(X)$. Diese Zuordnung ist bijektiv und induziert folgenden Isomorphismus:

$$\theta^1 : \mathrm{A}^1(X) \to |\mathrm{Pic}^1_{X/k}|.$$

8.14 Definition (Poincarédivisoren)

Sei $\mathcal{P}_X$ ein bei σ rigidifiziertes Poincarébündel und $s \neq 0$ ein rationaler Schnitt von $\mathcal{P}_X$ mit $s\big((\sigma, 0)\big) = 1$. Man bezeichne den Divisor

$$\mathfrak{P} := \mathrm{div}(s) \in \mathrm{Z}^1(X \times \mathrm{Pic}^1_{X/k})$$

als Poincarédivisor zum Poincarébündel $\mathcal{P}_X$.

8.15 Definition

Sei A eine abelsche Varietät, $\mathcal{P}_A$ ein bei 0 rigidifiziertes Poincarébündel auf $A \times \hat{A}$ und $\mathfrak{P}$ ein Poincarédivisor zu $\mathcal{P}_A$. Bezeichnen $p\colon A \times \hat{A} \to A$ und $q\colon A \times \hat{A} \to \hat{A}$ die beiden Projektionen, so nenne man $\mathfrak{P}$ bei $\alpha \in \mathrm{Z}_0(A)$ und $\beta \in \mathrm{Z}_0(\hat{A})$ definiert, wenn die Schnitte

$$\mathfrak{P} \centerdot p^*\alpha, \;\; \mathfrak{P} \centerdot q^*\beta \;\text{ und }\; \mathfrak{P} \centerdot p^*\alpha \centerdot q^*\beta$$

als Zykel definiert sind.

8.16 Definition

Sei $\mathcal{L}$ ein Geradenbündel auf X und $Z = \sum_{i=1}^n n_i \cdot P_i \in \mathrm{Z}_0(X)$ ein Zykel auf X. Bezeichnet ζ_i für $i = 1, ..., n$ den k-rationalen Punkt zu P_i, so definiere man das Geradenbündel $\mathcal{L}|_Z$ über $\mathrm{Spec}(k)$ wie folgt:

$$\mathcal{L}|_Z := \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{L}^{\otimes n_i}|_{P_i}.$$

Ist $s \neq 0$ ein rationaler Schnitt von $\mathcal{L}$ mit $|\mathrm{div}(s)| \cap |Z| = \emptyset$, so setze man weiterhin

$$s|_Z := \bigotimes_{i=1}^n \zeta_i^* s^{\otimes n_i} \in \Gamma\big(\mathrm{Spec}(k),\, \mathcal{L}|_Z\big).$$

Kapitel 9

Die Poincaré-Bierweiterung

Sei A eine abelsche Varietät über dem algebraisch abgeschlossenen Körper k. Weiter fixiere man mit $\mathcal{P}_A$ ein bei 0 rigidifiziertes Poincarébündel auf $A \times \hat{A}$. In diesem Kapitel wird zunächst die Definition der Poincaré-Bierweiterung $\mathbb{P}$ zum Poincarébündel $\mathcal{P}_A$ wiederholt. Dabei handelt es sich bei $\mathbb{P}$ um eine k^*-Bierweiterung von $|A| \times |\hat{A}|$. Sei X eine glatte, projektive Varietät und bezeichne $(i \times j)\colon \mathrm{A}^1(X) \times \mathrm{A}_0(X) \hookrightarrow \mathrm{CH}^1_{\mathrm{hom}}(X) \times \mathrm{CH}^{d_X}_{\mathrm{hom}}(X)$ die Inklusion. Man schreibe $\mathbb{E}^{\mathrm{A}}$ für den entsprechenden Pullback $(i \times j)^*\mathbb{E}$ der Blochschen Bierweiterung. Weiter betrachte man mit $\theta^1 \times \theta_0\colon \mathrm{A}^1(X) \times \mathrm{A}_0(X) \to |\mathrm{Pic}^1_{X/k}| \times |\mathrm{Alb}(X)|$ das Produkt der kanonischen Abbildungen aus Kapitel 8. Dann wird in diesem Kapitel gezeigt, dass die beiden Bierweiterungen $\mathbb{E}^{\mathrm{A}}$ und $(\theta^1 \times \theta_0)^*\mathbb{P}$ über $\mathrm{A}^1(X) \times \mathrm{A}_0(X)$ kanonisch isomorph sind. Es gilt also:

$$\mathbb{E}^{\mathrm{A}} = (\theta^1 \times \theta_0)^*\mathbb{P}.$$

9.1 Notation

In diesem Abschnitt bezeichne A eine abelsche Varietät über dem fixierten, algebraisch abgeschlossenen Körper k und X über k eine glatte, projektive Varietät mit fixiertem Punkt $\sigma \in X(k)$. Weiterhin zeichne man ein bei 0 rigidifiziertes Poincarébündel $\mathcal{P}_A$ auf $A \times \hat{A}$ aus.

9.2 Satz (Satz vom Quadrat)

Seien $b, b' \in |\hat{A}|$ abgeschlossene Punkte und $\mathcal{P}_A$ das fixierte, bei 0 rigidifizierte Poincarébündel auf $A \times \hat{A}$. Dann hat man einen kanonischen Isomorphismus rigidifizierter Geradenbündel auf A:

$$\mathcal{P}_A|_{A\times b} \otimes \mathcal{P}_A|_{A\times b'} \xrightarrow{\sim} \mathcal{P}_A|_{A\times b+b'}.$$

Entsprechend gilt für $a, a' \in |A|$:

$$\mathcal{P}_A|_{a\times \hat{A}} \otimes \mathcal{P}_A|_{a'\times \hat{A}} = \mathcal{P}_A|_{a+a'\times \hat{A}}.$$

Beweis:

Nach [Mi2] 6.7. hat man für rigidifizierbare Poincarébündel Isomorphismen

$$\mathcal{P}_A|_{A\times b} \otimes \mathcal{P}_A|_{A\times b'} \cong \mathcal{P}_A|_{A\times b+b'} \qquad \text{und} \qquad \mathcal{P}_A|_{a\times \hat{A}} \otimes \mathcal{P}_A|_{a'\times \hat{A}} \cong \mathcal{P}_A|_{a+a'\times \hat{A}}.$$

Mit der fixierten Rigidifizierung kann man gemäß 8.4 genau einen solchen Isomorphismus kanonisch fixieren, der mit den Rigidifizierungen auf beiden Seiten verträglich ist. □

9.3 Lemma ($\mathbb{G}_{\mathrm{m},S}$-Torseure und Geradenbündel)

i) Sei S ein Schema. Man bezeichne mit $(\mathfrak{GB}/S)$ die Kategorie, deren Objekte Geradenbündel über S und deren Morphismen Isomorphismen von Geradenbündeln sind. Der kovariante Funktor Φ, gegeben durch

$$\begin{array}{rccc} \Phi\colon & (\mathfrak{GB}/S) & \to & (\mathbb{G}_{\mathrm{m},S} - \mathfrak{Tor}/S) \\ & \mathcal{L} & \mapsto & \underline{\mathrm{Iso}}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{O}_S, \mathcal{L}), \end{array}$$

stellt eine Kategorienäquivalenz dar. Hierbei bezeichnet $\underline{\mathrm{Iso}}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{O}_S, \mathcal{L})$ die Garbe mit $\underline{\mathrm{Iso}}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{O}_S, \mathcal{L})(U) = \mathrm{Iso}(\mathcal{O}_S|_U, \mathcal{L}|_U)$ für $U \subset S$ offen.

ii) Unter dieser Kategorienäquivalenz entsprechen sich das Tensorprodukt von Geradenbündeln und das (kontrahierte) Produkt von Torseuren.

Beweis:

Punkt i) ist wohlbekannt und z. B. bei [Mi1] zu finden. Sich von der Gültigkeit von ii) zu überzeugen, ist dem Leser überlassen. □

9.4 Konstruktion

Im Folgenden wird die Konstruktion der Poincaré-Bierweiterung $\mathbb{P}$ von $|A| \times |\hat{A}|$ zum fixierten, bei 0 rigidifizierten Poincarébündel $\mathcal{P}_A$ über $A \times \hat{A}$ wiederholt.
Seien $a \in |A|$ und $b \in |\hat{A}|$ abgeschlossene Punkte. Man bezeichne mit $\mathbb{P}_{a,b}$ den mit dem Geradenbündel $\mathcal{P}_A|_{(a,b)}$ über $\mathrm{Spec}(k)$ korrespondierenden k^*-Torseur. Damit setze man

$$\mathbb{P} := \coprod_{(a,b) \in |A| \times |\hat{A}|} \mathbb{P}_{a,b}.$$

Offenbar ist die Abbildung $p\colon \mathbb{P} \to |A| \times |\hat{A}|$, die alle Elemente von $\mathbb{P}_{a,b}$ auf den Punkt (a,b) schickt surjektiv. Weiter hat man, induziert durch die k^*-Torseure $\mathbb{P}_{a,b}$, eine k^*-Operation auf $\mathbb{P}$, so dass p bezüglich der trivialen Operation auf $|A| \times |\hat{A}|$ äquivariant ist. Schließlich definiere man für $\mathbb{P}$ Gruppengesetze wie folgt:
Seien $a, a' \in |A|$ und $b, b' \in |\hat{A}|$ abgeschlossene Punkte. Man benutze die Rigidifizierung von $\mathcal{P}_A$ bei $A \times \{0\}$, um gemäß 9.2 einen Isomorphismus

$$\sigma_1^{a,a'}: \mathcal{P}_A|_{a \times \hat{A}} \otimes \mathcal{P}_A|_{a' \times \hat{A}} \to \mathcal{P}_A|_{a+a' \times \hat{A}}$$

kanonisch zu fixieren. Damit definiere man

$$+^1_{a,a',b}: \mathbb{P}_{a,b} \times^{k^*} \mathbb{P}_{a',b} \longrightarrow \mathbb{P}_{a+a',b}$$

als den gemäß 9.3 mit der Einschränkung von $\sigma_1^{a,a'}$ auf $(b) - (0)$ korrespondierenden Isomorphismus von k^*-Torseuren. Entsprechend setze man

$$+^2_{a,b,b'}: \mathbb{P}_{a,b} \times^{k^*} \mathbb{P}_{a,b'} \longrightarrow \mathbb{P}_{a,b+b'}$$

als den mit $\sigma_1^{b,b'}|_{(a)-(0)}: \mathcal{P}_A|_{(a,b)} \otimes \mathcal{P}_A|_{(a,b')} \to \mathcal{P}_A|_{(a,b+b')}$ korrespondierenden Torseurisomorphismus.

Der Beweis, dass diese Gruppengesetze assoziativ und kommutativ sind, ist dem Leser überlassen. Offenbar muss man lediglich noch einsehen, dass die so definierten Abbildungen $+^1_{.,.,.}$ und $+^2_{.,.,.}$ miteinander verträglich sind (3.5 3 iv)). Da man für die weiteren Berechnungen in diesem Kapitel ohnehin eine sehr genaue Beschreibung der Gruppengesetze benötigt, wird diese Verträglichkeit in den beiden folgenden Propositionen explizit gezeigt. Mit diesen Überlegungen ist dann die Poincaré-Bierweiterung komplett beschrieben.

9.5 Proposition

Sei $p\colon A \times \hat{A} \to A$ die Projektion und seien $a, a' \in |A|$ abgeschlossene Punkte. Man wähle einen rationalen Schnitt s von $\mathcal{P}_A$ mit $s\big((0,0)\big) = 1$ so, dass $\mathrm{div}(s)$ an den Stellen $\beta = 0$ und $\alpha \in \{(a)-(0), (a')-(0), (a+a')-(0)\}$ definiert ist (vgl. 8.15). Damit setze man $\mathfrak{P} := \mathrm{div}(s)$. Dann ist nach 9.2 $\mathfrak{P}\big((a) + (a') - (a+a') - (0)\big)$ ein Zykel rational äquivalent zu Null. Sei $f^s_{a,a'} \in K(A)^*$ die rationale Funktion, die durch $f^s_{a,a'}(0) = 1$ und

$$\mathfrak{P}\big((a) + (a') - (a+a') - (0)\big) = \mathrm{div}(f^s_{a,a'})$$

eindeutig bestimmt ist (Man beachte hierbei 1.6). Setzt man für $x \in |A|$

$$s_{x\times\hat{A}} := (x \times \mathrm{id})^* s \cdot (0 \times \mathrm{id})^* s^{-1},$$

dann ist der Isomorphismus $\sigma_1^{a,a'}$ wie folgt gegeben:

$$\begin{array}{cccc} \sigma_1^{a,a'}\colon & \mathcal{P}_A|_{a\times\hat{A}} \otimes \mathcal{P}_A|_{a'\times\hat{A}} & \to & \mathcal{P}_A|_{(a+a')\times\hat{A}} \\ & s_{a\times\hat{A}} \cdot s_{a'\times\hat{A}} & \mapsto & f^s_{a,a'} \cdot s_{a+a'\times\hat{A}}. \end{array}$$

Entsprechendes gilt für den Isomorphismus $\sigma_2^{b,b'}\colon \mathcal{P}_A|_{A\times b} \otimes \mathcal{P}_A|_{A\times b'} \to \mathcal{P}_A|_{A\times(b+b')}$.

Beweis:

Es bezeichne $\alpha \in \Gamma\big(A, \mathcal{P}_A|_{A\times\{0\}}\big)$ den Schnitt, der unter der Rigidifizierung dem Einsschnitt von $\mathcal{O}_A$ entspricht. Da $\mathrm{div}\big(s_{a\times\hat{A}} \cdot s_{a'\times\hat{A}}\big) = \mathrm{div}\big(f^s_{a,a'} \cdot s_{a+a'\times\hat{A}}\big)$ gilt, ist die voranstehende Definition von $\sigma_1^{a,a'}$ wohldefiniert. Damit genügt es offenbar zu prüfen, dass $\sigma_1^{a,a'}$ mit der Rigidifizierung verträglich ist. Man unterscheide dazu die beiden folgenden Fälle:
1. Fall: Für den ausgezeichneten Schnitt s gilt $s|_{A\times 0} = \alpha$:
Da sich der Einsschnitt von $\mathcal{O}_A$ bei weiterem Einschränken stets auf den Einsschnitt von $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(k)}$ abbildet, entsprechen $\alpha|_{(a)-(0)} = s_{a\times\hat{A}}|_0$, $s_{a'\times\hat{A}}|_0$ und $s_{a+a'\times\hat{A}}|_0$ jeweils dem Einsschnitt von $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(k)}$. Nach Konstruktion ist $f^{\mathfrak{P}}_{a,a'}(0) = 1$, womit offenbar in diesem Fall $\sigma_1^{a,a'}$ mit der Rigidifizierung verträglich ist.
2. Fall: Für den ausgezeichneten Schnitt s gilt $s|_{A\times 0} \neq \alpha$:
Da α ein Rahmen von $\mathcal{P}_A|_{A\times 0}$ ist, findet man eine rationale Funktion $b \in K(A)^*$, so dass $s|_{A\times 0} = b \cdot \alpha$ gilt. Mit den Berechnungen aus Fall 1 genügt es nun offenbar zu zeigen, dass

$$b(a) \cdot b(a') = b(a+a') \cdot b(0)$$

gilt (Man beachte dabei, dass nach Konstruktion die Punkte $(a, 0)$, $(a', 0)$, $(a+a', 0)$ und $(0, 0)$ nicht im Divisor von s liegen). Dazu betrachte man die Funktion

$$A \times A \to k; \quad (a, a') \mapsto \frac{b(a) \cdot b(a')}{b(a+a') \cdot b(0)}.$$

Diese ist nach dem Rigiditätssatz ([Mi2] 2.1) konstant Eins, was die Behauptung zeigt. □

9.6 Proposition

Seien $a, a' \in |\hat{A}|$, $b, b' \in |A|$ abgeschlossene Punkte und $\mathfrak{P}$ ein Poincarédivisor, der bei $\alpha \in \{(a)-(0), (a')-(0), (a+a')-(0)\}$ und $\beta \in \{(b)-(0), (b')-(0), (b+b')-(0)\}$ definiert ist (vgl. 8.15). Dann sind die Morphismen

$$\sigma_2^{b,b'}|_{(a+a')-(0)} \circ \big(\sigma_1^{a,a'}|_{(b)-(0)} \times \sigma_1^{a,a'}|_{(b')-(0)}\big) \circ v_{23}$$

und

$$\sigma_1^{a,a'}|_{(b+b')-(0)} \circ \big(\sigma_2^{b,b'}|_{(a)-(0)} \times \sigma_2^{b,b'}|_{(a')-(0)}\big)$$

von $\mathcal{P}|_{(a,b)} \otimes \mathcal{P}|_{(a,b')} \otimes \mathcal{P}|_{(a',b)} \otimes \mathcal{P}|_{(a',b')}$ nach $\mathcal{P}|_{(a+a',b+b')}$ gleich, wobei v_{23} das Vertauschen des zweiten und dritten Faktors bezeichnet.

Beweis:

Mit den Bezeichnungen von 9.5 reduziert man die Behauptung durch Einsetzen leicht darauf, die Gleichung

$$f^s_{a,a'}(b) \cdot f^s_{a,a'}(b') \cdot f^s_{b,b'}(a+a') = f^s_{b,b'}(a) \cdot f^s_{b,b'}(a') \cdot f^s_{a,a'}(b+b')$$

zu zeigen. Betrachtet man dazu die beiden Abbildungen

$$(a,a') \mapsto \frac{f^s_{b,b'}(a) \cdot f^s_{b,b'}(a)}{f^s_{b,b'}(a+a') \cdot f^s_{b,b'}(0)} \qquad \text{und} \qquad (b,b') \mapsto \frac{f^s_{a,a'}(b) \cdot f^s_{a,a'}(b')}{f^s_{a,a'}(b+b') \cdot f^s_{a,a'}(0)},$$

so sieht man mit dem Rigiditätssatz, dass diese beiden Funktionen konstant Eins sind. □

9.7 Bemerkung

Nach [SGA 7] VII 2.9.5 kann man die zu einem bei 0 rigidifizierten Poincarébündel assoziierten Torseure genau auf eine Art und Weise mit der Struktur einer Poincaré-Bierweiterung versehen. In 9.4 sieht man, wie man hierbei zu verfahren hat.

9.8 Definition (Die Bierweiterung $\mathbb{E}^{\mathrm{A}}$)

Es bezeichne $i \times j\colon \mathrm{A}^1(X) \times \mathrm{A}^{d_X}(X) \hookrightarrow \mathrm{CH}^1_{\mathrm{hom}}(X) \times \mathrm{CH}^{d_X}_{\mathrm{hom}}(X)$ die entsprechende Inklusion. Damit definiere man folgende k^*-Bierweiterung von $\mathrm{A}^1(X) \times \mathrm{A}^{d_X}(X)$:

$$\mathbb{E}^{\mathrm{A}} := (i \times j)^* \mathbb{E}.$$

Man nenne dabei $\mathbb{E}^{\mathrm{A}}$ die Einschränkung der Blochschen Bierweiterung auf $\mathrm{A}^1(X) \times \mathrm{A}^{d_X}(X)$.

9.9 Bemerkung

Im Weiteren betrachte man folgende Situation: Es sei $\mathbb{E}^{\mathrm{A}}$ die Einschränkung der Blochschen Bierweiterung auf $\mathrm{A}^1(\mathrm{Pic}^1_{X/k}) \times \mathrm{A}_0\big(\mathrm{Alb}(X)\big)$. Weiterhin bezeichne $\mathcal{P}$ ein fixiertes, bei 0 rigidifiziertes Poincarébündel auf $\mathrm{Pic}^1_{X/k} \times \mathrm{Alb}(X)$. Schließlich benenne man die durch $\mathcal{P}$ induzierte k^*-Bierweiterung über $|\mathrm{Pic}^1_{X/k}| \times |\mathrm{Alb}(X)|$ mit $\mathbb{P}$.
Ist $\psi\colon X \to \mathrm{Alb}(X)$ die kanonische Abbildung der Albanesevarietät zum fixierten Basispunkt $\sigma \in X(k)$, so überlegt man sich, dass $\widetilde{\mathcal{P}} := (\mathrm{id} \times \psi)^* \mathcal{P}$ der Pullback eines bei σ rigidifizierten Poincarébündels auf $X \times \mathrm{Pic}^1_{X/k}$ entlang $\nu\colon \mathrm{Pic}^1_{X/k} \times X \to X \times \mathrm{Pic}^1_{X/k}$ ist.

9.10 Konstruktion

Sei $(\mathrm{w}, z) \in \mathrm{A}^1(\mathrm{Pic}^1_{X/k}) \times \mathrm{A}_0\big(\mathrm{Alb}(X)\big)$. Im Folgenden werden zu geeigneten Wahlen (s. u.) eines Repräsentanten Z von z und eines rationalen Schnitts s von $\mathcal{P}$ Torseurisomorphismen $\tau_{Z,s}\colon \mathbb{E}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{w},z} \to \big((\theta^1 \times \theta_0)^*\mathbb{P}\big)_{\mathrm{w},z}$ konstruiert:
Man setze $\omega := \theta^1(\mathrm{w})$ und $\zeta := \theta_0(z)$. Weiterhin sei Z ein Repräsentant von z und $s \neq 0$ ein rationaler Schnitt von $\mathcal{P}$ so, dass $\mathfrak{P} := \mathrm{div}(s)$ bei $\alpha = (\omega) - (0)$ und $\beta \in \{(\zeta) - (0), \psi_* Z\}$ definiert ist. Da $\psi_* Z - \zeta$ in $\big(\mathrm{Alb}(X)\big)(k)$ nach Konstruktion Null ist, gilt nach dem Satz vom Quadrat

$$\mathcal{P}|_{\mathrm{Pic}^1_{X/k} \times \psi_* Z - (\zeta)} = \mathcal{P}|_{\mathrm{Pic}^1_{X/k} \times 0} = \mathcal{O}_{\mathrm{Pic}^1_{X/k}}.$$

Also ist ${}^t\mathfrak{P}\big(\psi_* Z - (\zeta) + (0)\big) = \big(\mathrm{div}(s)\big)\big(\psi_* Z - (\zeta) + (0)\big) = \mathrm{div}(s|_{\mathrm{Pic}^1_{X/k} \times \psi_* Z - (\zeta) + (0)})$ rational äquivalent zu Null. Sei $f^s_Z \in K(\mathrm{Pic}^1_{X/k})$ damit die eindeutig bestimmte, rationale Funktion mit $f^s_Z(0) = 1$ und $\mathrm{div}(f^s_Z) = {}^t\mathfrak{P}\big(\psi_* Z - (\zeta) + (0)\big)$. Entsprechend zu $\tilde{\mathcal{P}} := (\mathrm{id} \times \psi)^*\mathcal{P}$ setze man $\tilde{s} := (\mathrm{id} \times \psi)^* s$ sowie $\tilde{\mathfrak{P}} := (\mathrm{id} \times \psi)^*\mathfrak{P}$. Definiert man $W := \tilde{\mathfrak{P}}\big((\omega) - (0)\big)$, so ist $W \in \mathrm{w}$ (denn man kann sich überlegen, dass $\theta^1(W) = \omega$ ist). Bezeichnet

$$s_{\omega,\zeta} := \big((\omega) - (0), (\zeta) - (0)\big)^* s := (\omega, \zeta)^* s \cdot (0, \zeta)^* s^{-1} \cdot (\omega, 0)^* s^{-1} \cdot (0, 0)^* s$$

den durch s induzierten Rahmen von $\mathbb{P}_{\omega,\zeta}$, dann setze man:

$$\tau_{Z,s}\colon \mathbb{E}_{\mathrm{w},z} \to \big((\theta^1 \times \theta_0)^*\mathbb{P}\big)_{\mathrm{w},z}; \quad \{Z\}_W \mapsto f^s_Z(\omega) \cdot (\theta^1 \times \theta_0)^* s_{\omega,\zeta}.$$

9.11 Satz

i) Die in 9.10 konstruierten Morphismen $\tau_{Z,s}$ sind unabhängig von der Wahl des Zykels $Z \in z$ und des rationalen Schnitts s von $\mathcal{P}$. Damit hat man, induziert durch die $\tau_{Z,s}$, für alle $(\mathrm{w}, z) \in \mathrm{A}^1(A) \times \mathrm{A}_0(A)$ kanonische k^*-Torseurisomorphismen

$$\tau_{\mathrm{w},z}\colon \mathbb{E}_{\mathrm{w},z} \to \big((\theta^1 \times \theta_0)^*\mathbb{P}\big)_{\mathrm{w},z}.$$

ii) Induziert durch die Torseurisomorphismen $\tau_{\mathrm{w},z}$, erhält man einen kanonischen Isomorphismus von k^*-Bierweiterungen auf $\mathrm{A}^1(X) \times \mathrm{A}_0(X)$

$$\mathbb{E}^{\mathrm{A}} \to (\theta^1 \times \theta_0)^*\mathbb{P}.$$

Beweis:

1) Die $\tau_{Z,s}$ sind unabhängig von der Wahl von s resp. $\mathfrak{P}$:
Man verwende die Bezeichnungen von 9.10. Sei s' ein anderer rationaler Schnitt von $\mathcal{P}$, der an den Stellen $\alpha = (\omega) - (0)$ und $\beta \in \{(\zeta) - (0),\ \psi_* Z\}$ definiert ist. Setzt man $\mathfrak{P}' := \mathrm{div}(s')$, so ist $\mathfrak{P} - \mathfrak{P}'$ ein Zykel, der rational äquivalent zu Null ist. Sei also $g^s_{s'} \in K\big(\mathrm{Pic}^1_{X/k} \times \mathrm{Alb}(X)\big)^*$ die eindeutig bestimmte Funktion mit $g^s_{s'}\big((0, 0)\big) = 1$ und $\mathrm{div}(g^s_{s'}) = \mathfrak{P} - \mathfrak{P}'$. Offenbar hat man damit für $s'_{\omega,\zeta} := \big((\omega) - (0), (\zeta) - (0)\big)^* s'$

$$s_{\omega,\zeta} = g^s_{s'}\big((\omega) - (0), (\zeta) - (0)\big) \cdot s'_{\omega,\zeta}.$$

Setzt man weiterhin $W' := \tilde{\mathfrak{P}}'\big((\omega) - (0)\big)$, dann gilt (mit $f_Z^{s'}$ analog zu f_Z^s gemäß 9.10)

$$\begin{aligned}\tau_{Z,s'}\big(\{Z\}_W\big) &= f_Z^{s'}(\omega)\cdot\sigma_Z(W-W')\cdot s'_{\omega,\zeta} \quad \text{und}\\ \tau_{Z,s}\big(\{Z\}_W\big) &= g_{s'}^s\big((\omega)-(0),(\zeta)-(0)\big)\cdot f_Z^s(\omega)\cdot s'_{\omega,\zeta}.\end{aligned}$$

Damit genügt es ($f_Z^s(0) = f_Z^{s'}(0) = 1!$),

$$\sigma_Z(W-W') = \Big(g_{s'}^s\big((\zeta)-(0)\big)\cdot f_Z^s\cdot\big(f_Z^{s'}\big)^{-1}\Big)\big((\omega)-(0)\big)$$

zu zeigen. Nun gilt

$$g_{s'}^s\big((\zeta)-(0)\big)\cdot f_Z^s\cdot\big(f_Z^{s'}\big)^{-1} = g_{s'}^s(\psi_*Z).$$

Denn man hat

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\big(g_{s'}^s(\psi_*Z)\big) &= {}^t\!\big(\mathfrak{P}-\mathfrak{P}'\big)(\psi_*Z)\\ &= {}^t\!\big(\mathfrak{P}-\mathfrak{P}'\big)\big((\zeta)-(0)\big) + {}^t\mathfrak{P}\big(\psi_*Z-(\zeta)+(0)\big) - {}^t\mathfrak{P}'\big(\psi_*Z-(\zeta)+(0)\big)\\ &= \operatorname{div}\Big(g_{s'}^s\big((\zeta)-(0)\big)\cdot f_Z^s\cdot\big(f_Z^{s'}\big)^{-1}\Big).\end{aligned}$$

Hiermit können sich beide Seiten nur noch um eine Konstante unterscheiden. Nach Konstruktion gilt $f_Z^s(0) = f_Z^{s'}(0) = 1$ und der Rigiditätssatz liefert wegen $\psi_*Z = \zeta$ in $\big(\mathrm{Alb}(X)\big)(k)$:

$$\big(g_{s'}^s(\psi_*Z)\big)(0) = \Big(g_{s'}^s\big((\zeta)-(0)\big)\Big)(0).$$

Damit genügt es also, $\sigma_Z(W-W') = g_{s'}^s\big((\omega)-(0),\psi_*Z\big)$ zu zeigen. Nach [Fu] Chapter 16 gilt für $x\in \mathrm{Z}^*(X)$:

$${}^t\tilde{\mathfrak{P}}(x) = {}^t\!\big((\mathrm{id}\times\psi)^*\mathfrak{P}\big)(x) = {}^t\!\big((\mathrm{Alb}(X)\times\Gamma_\psi)\circ\mathfrak{P}\big)(x) = {}^t\mathfrak{P}\circ{}^t\Gamma_\psi(x) = {}^t\mathfrak{P}\big(\psi_*(x)\big).$$

Somit erhält man:

$$\begin{aligned}\sigma_Z(W-W') &= \sigma_Z\Big(\big(\tilde{\mathfrak{P}}-\tilde{\mathfrak{P}}'\big)\big((\omega)-(0)\big)\Big)\\ &= \sigma_{(\omega)-(0)}\big({}^t(\tilde{\mathfrak{P}}-\tilde{\mathfrak{P}}')(Z)\big) \qquad \text{(nach 7.9)}\\ &= \sigma_{(\omega)-(0)}\big({}^t(\mathfrak{P}-\mathfrak{P}')(\psi_*Z)\big)\\ &= \sigma_{(\omega)-(0)}\Big(\operatorname{div}\big(g_{s'}^s(\psi_*Z)\big)\Big)\\ &= g_{s'}^s\big((\omega)-(0),\psi_*Z\big) \qquad \text{(nach 4.21).}\end{aligned}$$

Man beachte an dieser Stelle, dass rationale Funktionen $f\in K\big(\mathrm{Pic}^1_{X/k}\times\mathrm{Alb}(X)\big)^*$ auf der glatten Varietät $\mathrm{Pic}^1_{X/k}\times\mathrm{Alb}(X)$ bereits auf ganz $\mathrm{Pic}^1_{X/k}\times\mathrm{Alb}(X)\backslash|\operatorname{div}(f)|$ definiert sind.

2) Die $\tau_{Z,s}$ sind unabhängig von der Wahl von Z:

Sei Z' ein anderer Repräsentant von z. Offenbar kann man mit 1) annehmen, dass der rationale Schnitt s von $\mathcal{P}$ so gewählt ist, dass $\mathfrak{P} := \operatorname{div}(s)$ an den Stellen $\alpha = (\omega)-(0)$ und $\beta\in\{(\zeta)-(0),\psi_*Z,\psi_*Z'\}$ definiert ist. Dann gilt

$$\{Z\}_W = \sigma_W(Z-Z')\cdot\{Z'\}_W,$$

$$\tau_{Z,s}(\{Z\}_W) = f_Z^s(\omega)\cdot s_{\omega,\zeta} \quad \text{und} \quad \tau_{Z',s}(\{Z'\}_W) = f_{Z'}^s(\omega)\cdot s_{\omega,\zeta}.$$

Damit genügt es also,

$$\sigma_W(Z-Z') = \Big(f_Z^s\cdot\big(f_Z^s\big)^{-1}\Big)(\omega)$$

zu zeigen. Hierzu beachte man:

$$\begin{aligned}
\sigma_W(Z-Z') &= \sigma_{\tilde{\mathfrak{P}}((\omega)-(0))}(Z-Z') \\
&= \sigma_{(\omega)-(0)}\Big({}^t\mathfrak{P}\big(\psi_*(Z-Z')\big)\Big) && \text{(nach 7.8)} \\
&= \sigma_{(\omega)-(0)}\Big(\operatorname{div}\big(f_Z^s\cdot(f_{Z'}^s)^{-1}\big)\Big) \\
&= \Big(f_Z^s\cdot\big(f_{Z'}^s\big)^{-1}\Big)(\omega) && \text{(nach 4.21).}
\end{aligned}$$

4) **Verträglichkeit der ersten Gruppengesetze:**
Seien $\mathrm{w}, \mathrm{w}' \in \mathrm{A}^1(X)$ und $z \in \mathrm{A}_0(X)$ mit $\theta^1(\mathrm{w}) = \omega$, $\theta^1(\mathrm{w}') = \omega'$ sowie $\theta_0(z) = \zeta$. Weiter wähle man ein $Z \in z$ und einen rationalen Schnitt s von $\mathcal{P}$, so dass $\mathfrak{P} := \operatorname{div}(s)$ bei allen Stellen $\alpha \in \{0, \omega, \omega', \omega+\omega'\}$ und $\beta \in \{(\zeta)-(0), \psi_*Z\}$ definiert ist. Schließlich setze man $W := \tilde{\mathfrak{P}}\big((\omega)-(0)\big)$, $W' := \tilde{\mathfrak{P}}\big((\omega)-(0)\big)$ und $\tilde{W} := \tilde{\mathfrak{P}}\big((\omega-\omega')-(0)\big)$. Nun gilt

$$\{Z\}_W +^1_{\mathrm{w},\mathrm{w}',z} \{Z\}_{W'} = \{Z\}_{W+W'} = \sigma_Z\Big(\mathfrak{P}\big((\omega)+(\omega')-(\omega+\omega')-(0)\big)\Big)\cdot\{Z\}_{\tilde{W}} \quad \text{und}$$
$$s_{\omega,\zeta} +^1_{\omega,\omega',\zeta} s_{\omega',\zeta} = f^s_{\omega,\omega'}(\zeta)\cdot s_{\omega+\omega',\zeta},$$

wobei $f^s_{\omega,\omega'} \in K\big(\mathrm{Alb}(X)\big)^*$ nach Definition die rationale Funktion mit $f^s_{\omega,\omega'}(0) = 1$ und $\operatorname{div}(f^s_{\omega,\omega'}) = \mathfrak{P}\big((\omega)+(\omega')-(\omega+\omega')-(0)\big)$ ist. Damit genügt es zu zeigen:

$$f^s_{\omega,\omega'}(\zeta)\cdot f_Z^s(\omega)\cdot f_Z^s(\omega') = f_Z^s(\omega+\omega')\cdot\sigma_Z\Big(\tilde{\mathfrak{P}}\big((\omega)+(\omega')-(\omega+\omega')-(0)\big)\Big).$$

Analog zu 1) zeigt man $\sigma_Z\Big(\tilde{\mathfrak{P}}\big((\omega)+(\omega')-(\omega+\omega')-(0)\big)\Big) = f^s_{\omega,\omega'}(\psi_*Z)$. Dann folgt die Behauptung aus

$$f_Z^s(\omega)\cdot f_Z^s(\omega')\cdot\big(f_Z^s(\omega+\omega')\big)^{-1} = 1 = f^s_{\omega,\omega'}(\psi_*Z)\cdot\big(f^s_{\omega,\omega'}(\zeta)\big)^{-1}.$$

Hierbei ist Letzteres wegen $\psi_*Z-\zeta = 0 = \omega+\omega'-(\omega+\omega')$ in $\big(\mathrm{Alb}(X)\big)(k)$ sowie $f_Z^s(0) = 1$ und $f^s_{\omega,\omega'}(0) = 1$ eine Konsequenz aus dem Rigiditätssatz.
5) **Verträglichkeit der zweiten Gruppengesetze:**
Seien $\mathrm{w} \in \mathrm{A}^1(X)$ und $z, z' \in \mathrm{A}_0(X)$. Man setze $\omega := \theta^1(\mathrm{w})$, $\zeta := \theta_0(z)$ und $\zeta' := \theta_0(z')$. Weiter fixiere man $Z \in z$ bzw. $Z' \in z'$ sowie einen rationalen Schnitt s von $\mathcal{P}$ für den $\mathfrak{P} := \operatorname{div}(s)$ an den Stellen $\alpha = (\omega)-(0)$ und $\beta \in \{0, \zeta, \zeta', \zeta+\zeta', \psi_*Z, \psi_*Z'\}$ definiert ist. Schließlich setze man $W := \tilde{\mathfrak{P}}\big((\omega)-(0)\big)$. Nun sind die zweiten Gruppengesetze gegeben durch

$$\{Z\}_W +^2_{\mathrm{w},z,z'} \{Z'\}_W = \{Z+Z'\}_W \quad \text{und} \quad s_{\omega,\zeta} +^2_{\omega,\zeta,\zeta'} s_{\omega,\zeta'} = f^s_{\zeta,\zeta'}(\omega)\cdot s_{\omega,\zeta+\zeta'},$$

wobei $f^s_{\zeta,\zeta'} \in K(\mathrm{Pic}^1_{X/k})^*$, die Funktion mit $\operatorname{div}(f^s_{\zeta,\zeta'}) = \mathfrak{P}\big((\zeta)+(\zeta')-(\zeta+\zeta')-(0)\big)$ und $f^s_{\zeta,\zeta'}(0) = 1$ ist. Damit genügt es,

$$\big(f_Z^s\cdot f_{Z'}^s\cdot f^s_{\zeta,\zeta'}\big)(\omega) = f^s_{Z+Z'}(\omega)$$

zu zeigen. Allgemein gilt aber, dass die beiden Funktionen nicht nur bei ω den gleichen Wert haben, sondern bereits identisch sind. Hierzu beachte man, dass der Divisor beider Funktionen gleich $\mathfrak{P}\big(\psi_*(Z+Z')-(\zeta+\zeta')+(0)\big)$ ist und beide Seiten nach Definition den Wert Eins an der Stelle 0 haben.
Damit ist gezeigt, dass $\mathbb{E}^{\mathrm{A}}$ und $(\theta^1\times\theta_0)^*\mathbb{P}$ kanonisch isomorphe k^*-Bierweiterungen über $\mathrm{A}^1(\mathrm{Pic}^1_{X/k})\times\mathrm{A}_0\big(\mathrm{Alb}(X)\big)$ sind. □

Kapitel 10

Höhere Picardvarietäten

Sei X eine glatte, projektive Varietät über k und $p \in \{1, ..., d_X\}$. In diesem Kapitel wird zunächst die Definition von p-ten höheren Picardvarietäten $\mathrm{Pic}^p_{X/k}$ wiederholt. Das Ziel dieses Abschnittes ist es, die Aussage $\mathbb{E}^{\mathrm{A}} = (\theta^1 \times \theta_0)^*\mathbb{P}$ aus 9.11 für das Paar $\big(\mathrm{Pic}^1_{X/k}, \mathrm{Alb}(X)\big)$ auf beliebige, höhere Picardvarietäten zu verallgemeinern. Hierzu betrachte man die kanonische Isogenie

$$\lambda^p_X \colon \mathrm{Pic}^{d_X+1-p}_{X/k} \to \big(\mathrm{Pic}^p_{X/k}\big)\hat{}$$

aus [Sa] sowie eine Korrespondenz $\mathfrak{P}^p_X \in \mathrm{CH}^p(\mathrm{Pic}^p_{X/k} \times X)$, die unter der kanonischen Abbildung $\mathrm{CH}^p(\mathrm{Pic}^p_{X/k} \times X) \to \mathrm{Aut}(\mathrm{Pic}^p_{X/k})$ (s.u.) auf den Erzeuger von $\mathrm{Aut}(\mathrm{Pic}^p_{X/k}) \cap \mathbb{N}$ abgebildet wird. Man hat mit $\theta^p \colon \mathrm{A}^p(X) \to |\mathrm{Pic}^p_{X/k}|$ eine kanonische Abbildung. Weiter sei $\mathbb{E}^{\mathrm{A},p}$ die Einschränkung der Blochschen Bierweiterung auf $\mathrm{A}^p(X) \times \mathrm{A}^{d_X+1-p}(X)$ und $\mathbb{P}^p$ die Poincaré-Bierweiterung von $|\mathrm{Pic}^p_{X/k}| \times |\big(\mathrm{Pic}^p_{X/k}\big)\hat{}|$ zu einem fixierten, bei 0 rigidifizierten Poincarébündel $\mathcal{P}_{\mathrm{Pic}^p_{X/k}}$. Dann werden hier $\mathbb{E}^{\mathrm{A},p}$ und $\mathbb{P}^p$ auf $\mathrm{A}_0(\mathrm{Pic}^p_{X/k}) \times \mathrm{A}^{d_X+1-p}(X)$ verglichen und es wird gezeigt:

$$(\mathfrak{P}^p_X \times \mathrm{id})^*\mathbb{E}^{\mathrm{A},p} = (\theta_0 \times \theta^{d_X+1-p})^*(\mathrm{id} \times |\lambda^p_X|)^*\mathbb{P}^p.$$

10.1 Grundsituation

Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper und sei X/k eine glatte, projektive Varietät. Weiter bezeichne $\sigma \in X(k)$ einen stets fest gewählten, k-rationalen Punkt von X. Mit $\mathcal{P}_X$ sei ein bei σ rigidifiziertes Poincarébündel auf $X \times \mathrm{Pic}^1_{X/k}$ fixiert. Darüberhinaus schreibe man $\psi \colon X \to \mathrm{Alb}(X)$ für die mit $\psi(\sigma) = 0$ normierte Abbildung aus 8.11.

10.2 Definition (Picardhomomorphismus)

Sei A/k eine abelsche Varietät. Ein Gruppenhomomorphismus $h \colon \mathrm{A}^p(X) \to |A|$ heißt Picardhomomorphismus, falls folgendes gilt: Es existieren eine glatte, projektive Varietät Y/k, eine Korrespondenz $z \in \mathrm{CH}^{d_X-p+1}(X \times Y)$ und eine abgeschlossene Immersion $i \colon A \to \mathrm{Pic}^1_{Y/k}$ so, dass mit dem durch $\mathcal{P}_X$ induzierten Isomorphismus $\theta^1 \colon \mathrm{A}^1(Y) \to |\mathrm{Pic}^1_{Y/k}|$ aus 8.13 das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{A}^p(X) & \overset{z(.)}{\rightarrow} & \mathrm{A}^1(Y) \\ h\downarrow & & \downarrow \theta^1 \\ |A| & \overset{|i|}{\hookrightarrow} & |\mathrm{Pic}^1_{Y/k}|. \end{array}$$

10.3 Beispiele (Für Picardhomomorphismen)

Man kann zeigen, dass $\theta^1\colon \mathrm{A}^1(X) \to |\mathrm{Pic}^1_{X/k}|$ und die durch $\psi\colon X \to \mathrm{Alb}(X)$ induzierte Abel-Jakobi-Abbildung $\theta_0\colon \mathrm{A}_0(X) \to |\mathrm{Alb}(X)|$ aus 8.13 Picardhomomorphismen sind.

10.4 Definition (Höhere Picardvarietäten)

Sei A/k eine abelsche Varietät und $\phi\colon \mathrm{A}^p(X) \to |A|$ ein Picardhomomorphismus. Ein Paar (A, ϕ) heißt p-te höhere Picardvarietät, falls für jede abelsche Varietät B und jeden Picardhomomorphismus $h\colon \mathrm{A}^p(X) \to |B|$ ein eindeutig bestimmter Morphismus abelscher Varietäten $f\colon A \to B$ existiert, so dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{A}^p(X) & \overset{\phi}{\rightarrow} & |A| \\ & h \searrow \quad \swarrow \exists!|f| & \\ & |B|. & \end{array}$$

10.5 Beispiele (Für höhere Picardvarietäten)

Man kann sich überlegen, dass die Paare $(\mathrm{Pic}^1_{X/k}, \theta^1)$ und $(\mathrm{Alb}(X), \theta_0)$ eine erste bzw. eine d_X-te höhere Picardvarietät sind.
Offenbar sind höhere Picardvaritäten, falls sie existieren, in jeder Kodimension p bis auf eindeutige Isomorphie eindeutig bestimmt. Deshalb spreche man auch von der höheren p-ten Picardvarietät und schreibe dafür $(\mathrm{Pic}^p_{X/k}, \theta^p)$.

10.6 Satz (Die Existenz höherer Picardvarietäten)

Für jedes $p \in \{1, ..., d_X\}$ existiert eine höhere Picardvarietät $(\mathrm{Pic}^p_{X/k}, \theta^p)$ von X über $k = \overline{k}$.

Beweis:

Siehe [Sa]. □

10.7 Bemerkung

Für die Picardvarietät $\mathrm{Pic}^1_{X/k}$ und die Albanesevarietät $\mathrm{Alb}(X)$ von X gilt

$$\mathrm{Alb}(X) = \big(\mathrm{Pic}^1_{X/k}\big)\hat{}.$$

Weiterhin hat man mit der Bidualitätsabbildung einen kanonischen Isomorphismus

$$b\colon \mathrm{Pic}^1_{X/k} \to \big(\mathrm{Pic}^1_{X/k}\big)\hat{}\hat{} = \big(\mathrm{Alb}(X)\big)\hat{}.$$

Wie in der nachfolgenden Bemerkung genauer erläutert wird, hat man auch im allgemeinen Fall für $p, q \in \mathbb{N}$ und $p + q = d_X + 1$ einen kanonischen Morphismus $\mathrm{Pic}^p_{X/k} \to \big(\mathrm{Pic}^q_{X/k}\big)\hat{}$. Allerdings handelt es sich bei diesem Morphismus im Allgemeinen um keinen Isomorphismus mehr, sondern nur noch um eine Isogenie. Dies verdeutlicht die herausragende Stellung der Picard- und Albanesevarietät unter den höheren Picardvarietäten.

10.8 Bemerkung

i) Seien $p, q \in \mathbb{N}$, Y eine glatte, projektive Varietät über k, $z \in \mathrm{CH}^{d_Y - q + p}(X \times Y)$ eine Korrespondenz, A/k eine abelsche Varietät und $h\colon \mathrm{A}^p(X) \to |A|$ ein Picardhomomorphismus. Dann kann man zeigen, dass auch $h \circ z\colon \mathrm{A}^q(Y) \to |A|$ ein Picardhomomorphismus ist. Damit induziert die Abbildung $z\colon \mathrm{A}^q(Y) \to \mathrm{A}^p(X)$ mittels $\theta^p \circ z$ gemäß der universellen Eigenschaft der höheren Picardvarität $\mathrm{Pic}^q_{Y/k}$ einen eindeutig bestimmten Morphismus $[z]^q_p\colon \mathrm{Pic}^q_{Y/k} \to \mathrm{Pic}^p_{X/k}$, so dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{A}^q(Y) & \overset{z(.)}{\to} & \mathrm{A}^p(X) \\ \theta^q \downarrow & & \downarrow \theta^p \\ \mathrm{Pic}^q_{Y/k} & \overset{|[z]^q_p|}{\to} & \mathrm{Pic}^p_{X/k}. \end{array}$$

ii) Man identifiziere im Folgenden eine abelsche Varietät ohne weitere Notation mit ihrer Albanesevarietät. Mit i) hat man insbesondere einen Morphismus

$$\phi\colon \mathrm{CH}^p(\mathrm{Pic}^p_{X/k} \times X) \to \mathrm{Aut}(\mathrm{Pic}^p_{X/k}).$$

Nach [Sa] Theorem 2.2 existiert ein $k^p_X \in \mathbb{N}\{0\}$, so dass $\mathrm{im}(\Phi) \cap \mathbb{N} =< k^p_X >\neq \emptyset$ gilt. Man bezeichne mit $\mathfrak{P}^p_X$ eine Klasse in $\mathrm{CH}^p(\mathrm{Pic}^p_{X/k} \times X)$, für die $[\mathfrak{P}^p_X]^0_p = k^p_X$ gilt. Es kommutiert also folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{A}_0(\mathrm{Pic}^p_{X/k}) & \overset{\mathfrak{P}^p_X}{\to} & \mathrm{A}^p(X) \\ \theta_0 \downarrow & & \downarrow \theta^p \\ |(\mathrm{Pic}^p_{X/k})\hat{}\,| = |\mathrm{Pic}^p_{X/k}| & \overset{|k^p_X|}{\to} & |\mathrm{Pic}^p_{X/k}|. \end{array}$$

iii) Sei $q := d_X - p + 1$. Man bezeichne die durch ${}^t\mathfrak{P}^p_X\colon \mathrm{A}^q(X) \to \mathrm{A}^1(\mathrm{Pic}^p_{X/k})$ induzierte Abbildung $[{}^t\mathfrak{P}^p_X]^q_1$ mit

$$\lambda^p_X\colon \mathrm{Pic}^q_{X/k} \to (\mathrm{Pic}^p_{X/k})\hat{}.$$

Bei [Sa] Teil 4 wird folgendes für die Abbildung λ^p_X gezeigt:

- Die Abbildung λ^p_X hängt nicht von der Wahl des Elements $\mathfrak{P}^p_X$ aus $\mathrm{CH}^p(\mathrm{Pic}^p_{X/k} \times X)$ ab, das k^p_X induziert.
- Bei λ^p_X handelt es sich um eine Isogenie.
- Für den zu λ^q_X dualen Morphismus gilt: $(\lambda^q_X \circ k^p_X)\hat{} = \lambda^p_X \circ k^q_X$.

10.9 Lemma

Seien A und B abelsche Varietäten sowie $\phi\colon A \to B$ eine Isogenie abelscher Varietäten. Weiterhin bezeichne man mit $\mathcal{P}_A$ und $\mathcal{P}_B$ jeweils ein fixiertes, bei 0 rigidifiziertes Poincarébündel auf $A \times \hat{A}$ bzw. $B \times \hat{B}$, und mit $\mathbb{P}^A$ sowie $\mathbb{P}^B$ die gemäß 9.4 dazu konstruierten Poincaré-Bierweiterungen von $|A| \times |\hat{A}|$ bzw. $|B| \times |\hat{B}|$. Dann induziert der kanonische Isomorphismus $(\phi\times\mathrm{id})^*\mathcal{P}_B = (\mathrm{id}\times\hat{\phi})^*\mathcal{P}_A$ eine kanonische Isomorphie zwischen den assoziierten k^*-Bierweiterungen derart, dass über $|A| \times |\hat{B}|$ gilt:

$$(|\phi| \times \mathrm{id})^*\mathbb{P}^B = (\mathrm{id} \times |\hat{\phi}|)^*\mathbb{P}^A.$$

Beweis:

1) Zu den Torseurisomorphismen:
Offenbar induziert der kanonische Isomorphismus $(\phi\times\mathrm{id})^*\mathcal{P}_B = (\mathrm{id}\times\hat{\phi})^*\mathcal{P}_A$ für alle $a \in |A|$ und $b \in |\hat{B}|$ einen Isomorphismus $\big((\phi \times \mathrm{id})^*\mathcal{P}_B\big)_{(a,b)} = \big((\mathrm{id} \times \hat{\phi})^*\mathcal{P}_A\big)_{(a,b)}$, und damit einen Isomorphismus zwischen den k^*-Torseuren $\mathbb{P}^B_{\phi(a),b}$ und $\mathbb{P}^A_{a,\hat{\phi}(b)}$. Da die Poincaré-Bierweiterung als Menge nur die Vereinigung aller Fasern $\mathbb{P}_{a,b}$ ist, erhält man damit insbesondere einen Garbenmorphismus $f\colon (|\phi|\times\mathrm{id})^*\mathbb{P}^B \to (\mathrm{id}\times|\hat{\phi}|)^*\mathbb{P}^A$. Es bleibt also noch die Verträglichkeit von f mit den Gruppengesetzen zu zeigen.
2) Verträglichkeit mit den Gruppengesetzen:
Man betrachte dazu zunächst f etwas genauer. Als Isogenie ist ϕ flach ([Mi2] 8.1). Sei s^A ein rationaler Schnitt von $\mathcal{P}_A$ mit $s^A\big((0,0)\big) = 1$ und s^B ein rationaler Schnitt von $\mathcal{P}_B$ mit $s^B\big((0,0)\big) = 1$. Setzt man $\mathfrak{P}_A := \mathrm{div}(s^A)$ und $\mathfrak{P}_B := \mathrm{div}(s^B)$, dann sind $(\mathrm{id} \times \hat{\phi})^*\mathfrak{P}_A$ und $(\phi\times\mathrm{id})^*\mathfrak{P}_B$ wegen $(\phi\times\mathrm{id})^*\mathcal{P}_B = (\mathrm{id}\times\hat{\phi})^*\mathcal{P}_A$ offenbar rational äquivalent. Sei $g \in K(A\times\hat{B})^*$ die eindeutig bestimmte, rationale Funktion mit $g\big((0,0)\big) = 1$ und

$$(\mathrm{id} \times \hat{\phi})^*\mathfrak{P}_A = \mathrm{div}(g) + (\phi \times \mathrm{id})^*\mathfrak{P}_B.$$

Ist $\mathfrak{P}_A$ bei $(a) - (0)$ und $\big(\hat{\phi}(b)\big) - (0)$ sowie $\mathfrak{P}_B$ bei $\big(\phi(a)\big) - (0)$ und $(b) - (0)$ definiert, dann überlegt man sich analog zu 9.5, dass der kanonische, mit den Rigidifizierungen verträgliche Isomorphismus $(\phi \times \mathrm{id})^*\mathcal{P}_B = (\mathrm{id} \times \hat{\phi})^*\mathcal{P}_A$ gegeben ist durch

$$\begin{array}{rcl} (\mathrm{id} \times \hat{\phi})^*\mathcal{P}_A & \to & (\phi \times \mathrm{id})^*\mathcal{P}_B \\ (\mathrm{id} \times \hat{\phi})^*s^A & \mapsto & g \cdot (\phi \times \mathrm{id})^*s^B. \end{array}$$

Dies liefert, dass der Torseurisomorphismus $f_{a,b}$ mit $a \in |A|$ und $b \in |\hat{B}|$ von der folgenden Form ist: Gilt

$$s^A_{a,\hat{\phi}(b)} := \big(a, \hat{\phi}(b)\big)^* s^A \cdot \Big((a,0)^* s^A \cdot \big(0, \hat{\phi}(b)\big)^* s^A\Big)^{-1}$$

und

$$s^B_{\phi(a),b} := \big(\phi(a), b\big)^* s^B \cdot \Big(\big(\phi(a), 0\big)^* s^B \cdot (0,b)^* s^B\Big)^{-1},$$

dann hat man:

$$\begin{array}{rrcl} f_{a,b}\colon & \big((\mathrm{id} \times |\hat{\phi}|)^*\mathbb{P}^A\big)_{a,b} & \to & \big((|\phi| \times \mathrm{id})^*\mathbb{P}^B\big)_{a,b} \\ & s^A_{a,\hat{\phi}(b)} & \mapsto & \frac{g(a,b)}{g(a,0)\cdot g(0,b)} \cdot s^B_{\phi(a),b} \end{array}$$

Bezeichnet $+^1_{.,.,.}$ bzw. $\tilde{+}^1_{.,.,.}$ das erste Gruppengesetz von $(\mathrm{id}\times|\hat{\phi}|)^*\mathbb{P}^A$ bzw. $(|\phi|\times\mathrm{id})^*\mathbb{P}^B$, so hat man für $a,a'\in|A|$ und $b\in|B|$ zu zeigen, dass

$$\tilde{+}^1_{a,a',b}\circ\big(f_{a,b}\times f_{a',b}\big)=f_{a+a',b}\circ+^1_{a,a',b}$$

gilt (und Entsprechendes für das zweite Gruppengesetz). Mit der expliziten Beschreibung von $f_{a,b}$ hat man im Fall, dass $\mathfrak{P}_A$ auch bei $(a')-(0)$ und $\hat{\phi}(b)-(0)$ sowie $\mathfrak{P}_B$ auch bei $\phi(a')-(0)$ und $(b)-(0)\big)$ definiert ist, offenbar folgendes zu zeigen:

$$\frac{g(a,b)}{g(a,0)\cdot g(0,b)}\cdot\frac{g(a',b)}{g(a',0)\cdot g(0,b)}=\frac{g(a+a',b)}{g(a+a',0)\cdot g(0,b)}.$$

Dies gilt aber erneut nach dem Rigiditätssatz, womit die Behauptung folgt. □

10.10 Definition

Sei $p\in\{1,...,d_X\}$ und $q:=d_X-p+1$. Im Folgenden werden oft mehrere k^*-Bierweiterungen von abelschen Varietäten bzw. von Chowgruppen gleichzeitig betrachtet. Um den Überblick nicht zu verlieren, erweitere man die in 9.4 und 9.8 eingeführte Notation wie folgt:

1) Für die Poincaré-Bierweiterung von $|\mathrm{Pic}^p_{X/k}|\times|(\mathrm{Pic}^p_{X/k})\hat{}\,|$ schreibe man $\mathbb{P}^p$.

2) Die Poincaré-Bierweiterung von $|\big(\mathrm{Pic}^q_{X/k}\big)\hat{}\,|\times|\mathrm{Pic}^q_{X/k}|$ bezeichne man mit $\hat{\mathbb{P}}^q$.

3) Für die Einschränkung der Blochschen Bierweiterung auf $\mathrm{A}^p(X)\times\mathrm{A}^q(X)$ schreibe man $\mathbb{E}^{p,q}$.

4) Schließlich bezeichne man mit $\mathbb{E}^p$ die Einschränkung der Blochschen Bierweiterung auf $\mathrm{A}_0(\mathrm{Pic}^p_{X/k})\times\mathrm{A}^1(\mathrm{Pic}^p_{X/k})$ und mit $\mathbb{E}^q$ die Einschränkung auf $\mathrm{A}^1(\mathrm{Pic}^q_{X/k})\times\mathrm{A}_0(\mathrm{Pic}^q_{X/k})$.

10.11 Bemerkung

Bei der Suche nach einer Beziehung zwischen $\mathbb{E}^{p,q}$ und $\mathbb{P}^p$ bzw. $\mathbb{P}^q$ betrachte man folgende Situation (abkürzend schreibe man dabei P^p für $\mathrm{Pic}^p_{X/k}$ und P^q für $\mathrm{Pic}^q_{X/k}$):

$$(1)\qquad \begin{array}{ccccc} \mathrm{A}_0(\mathrm{P}^p)\times\mathrm{A}^1(\mathrm{P}^p) & \xleftarrow{\mathrm{id}\times{}^t\mathfrak{P}^p_X} & \mathrm{A}_0(\mathrm{P}^p)\times\mathrm{A}^q(X) & \xleftarrow{\mathrm{id}\times\mathfrak{P}^q_X} & \mathrm{A}_0(\mathrm{P}^p)\times\mathrm{A}_0(\mathrm{P}^q) \\ {\scriptstyle\theta_0\times\theta^1}\downarrow & & {\scriptstyle\theta_0\times\theta^q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\theta_0\times\theta_0} \\ |\mathrm{P}^p|\times|(\mathrm{P}^p)\hat{}\,| & \xleftarrow{\mathrm{id}\times|\lambda^p_X|} & |\mathrm{P}^p|\times|\mathrm{P}^q| & \xleftarrow{\mathrm{id}\times|k^q_X|} & |\mathrm{P}^p|\times|\mathrm{P}^q|. \end{array}$$

Entsprechend kann man dieses Diagramm auf der rechten Seite wie folgt fortsetzen:

$$(2)\qquad \begin{array}{ccccc} \mathrm{A}_0(\mathrm{P}^p)\times\mathrm{A}_0(\mathrm{P}^q) & \xrightarrow{\mathfrak{P}^p_X\times\mathrm{id}} & \mathrm{A}^p(X)\times\mathrm{A}_0(\mathrm{P}^q) & \xrightarrow{{}^t\mathfrak{P}^q_X\times\mathrm{id}} & \mathrm{A}^1(\mathrm{P}^q)\times\mathrm{A}_0(\mathrm{P}^q) \\ {\scriptstyle\theta_0\times\theta_0}\downarrow & & {\scriptstyle\theta^p\times\theta_0}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\theta^1\times\theta_0} \\ |\mathrm{P}^p|\times|\mathrm{P}^q| & \xrightarrow{|k^p_X|\times\mathrm{id}} & |\mathrm{P}^p|\times|\mathrm{P}^q| & \xrightarrow{|\lambda^q_X|\times\mathrm{id}} & |(\mathrm{P}^q)\hat{}\,|\times|\mathrm{P}^q|. \end{array}$$

Schließlich gilt noch:

$$(3)\qquad \begin{array}{ccccc} & & \mathrm{A}^p(X)\times\mathrm{A}^q(X) & & \\ & \mathfrak{P}^p_X\times\mathrm{id}\nearrow & & \nwarrow\mathrm{id}\times\mathfrak{P}^q_X & \\ \mathrm{A}_0(\mathrm{P}^p)\times\mathrm{A}^q(X) & \xleftarrow{\mathrm{id}\times\mathfrak{P}^q_X} & \mathrm{A}_0(\mathrm{P}^p)\times\mathrm{A}_0(\mathrm{P}^q) & \xrightarrow{\mathfrak{P}^p_X\times\mathrm{id}} & \mathrm{A}^p(X)\times\mathrm{A}_0(\mathrm{P}^q). \end{array}$$

Mit 10.8 iii) und 10.9 gilt $(\mathrm{id} \times |k_X^q|)^*(\mathrm{id} \times |\lambda_X^p|)^*\mathbb{P}^p = (|k_X^p| \times \mathrm{id})^*(|\lambda_X^q| \times \mathrm{id})^*\hat{\mathbb{P}}^q$ und es macht Sinn, in (1) links unten $\mathbb{P}^p$ und in (2) rechts unten $\hat{\mathbb{P}}^q$ zu betrachten. Fügt man die beiden Seiten (1) und (2) zusammen, so passt die untere Zeile von (3) genau in die Mitte der oberen Zeile von (1) und (2). Weiter ist $\mathbb{E}^{p,q}$ eine Bierweiterung von $\mathrm{A}^p(X) \times \mathrm{A}^q(X)$, der obersten Zeile von (3), womit es Sinn macht, folgende Behauptung zu betrachten:

10.12 Satz

Mit den Bezeichnungen von oben gilt:

$$(\mathfrak{P}_X^p \times \mathrm{id})^*\mathbb{E}^{p,q} = (\theta_0 \times \theta^q)^*(\mathrm{id} \times |\lambda_X^p|)^*\mathbb{P}^p$$

und

$$(\mathrm{id} \times \mathfrak{P}_X^q)^*\mathbb{E}^{p,q} = (\theta^p \times \theta_0)^*(|\lambda_X^q| \times \mathrm{id})^*\hat{\mathbb{P}}^q.$$

Beweis:

Zunächst hat man nach 9.11 $(\theta_0 \times \theta^1)^*\mathbb{P}^p = \mathbb{E}^p$ über $\mathrm{A}_0(\mathrm{Pic}^p_{X/k}) \times \mathrm{A}^1(\mathrm{Pic}^p_{X/k})$.
Da offenbar $(\theta_0 \times \theta^1) \circ (\mathrm{id} \times {}^t\mathfrak{P}_X^p) = (\mathrm{id} \times |\lambda_X^p|) \circ (\theta_0 \times \theta^q)$ gilt, genügt es, für die Gleichung

$$(\mathfrak{P}_X^p \times \mathrm{id})^*\mathbb{E}^{p,q} = (\theta_0 \times \theta^q)^*(\mathrm{id} \times |\lambda_X^p|)^*\mathbb{P}^p$$

zu zeigen, dass

$$(\mathrm{id} \times {}^t\mathfrak{P}_X^p)^*\mathbb{E}^p = (\mathfrak{P}_X^p \times \mathrm{id})^*\mathbb{E}^{p,q}$$

gilt. Dies wurde aber bereits in 7.10 gezeigt. Damit folgt die erste Gleichung. Da man die zweite Gleichung völlig analog erhält, liefert dies die Behauptung. □

Literaturverzeichnis

[BLR] Bosch, S.; Lütkebohmert, W.; Raynaud M.; Néron Models; Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3), 21; Springer-Verlag; Berlin; 1990;

[Bl1] Bloch, S.; Cycles and biextensions; Contemporary Mathematics 83 (1989); p. 19-30;

[Bl2] Bloch, S.; Algebraic Cycles and Higher K-Theory; Advances in Mathematics 61 (1986); p. 267-304;

[Bo] Bosch, S.; Algebra 3. Auflage; Springer-Verlag; Berlin; 1999

[EGA I] Grothendieck, A.; Dieudonné, J. A.; Élements de Géométrie Algébirque I; Springer-Verlag; Berlin; 1971;

[EGA IV] Grothendieck, A.; Dieudonné, J. A.; Élements de Géométrie Algébrique IV; Publication Mathématique, No. 32; Press universitaire de France; Paris; 1960;

[Fu] Fulton, W.; Intersection Theory; Second edition; Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete; 3. Folge; A Series of Modern Surveys in Mathematics, 2; Springer-Verlag; Berlin; 1998;

[Ha] Hartshorne, R.; Algebraic geometry; Graduate Texts in Mathematics No. 52; Springer-Verlag; Berlin; 1977;

[La] Laumon, G.; Homologie Étale; Séminaire de géométrie analytique (École Norm. Sup., Paris, 1974-75); Asterisque No. 36-37; p. 163-188;

[Li] Liu, Q.; Algebraic Geometry and Arithmetic Curves; Oxford Graduate Texts in Mathematics 6; Oxford University Press; New York; 2002;

[Me] Meyer, O.; Über Biextensionen und Höhenpaarungen algebraischer Zykel; Dissertationsschrift Regensburg 2003; http://www.bibiothek.uni-regensburg.de/opus/volltexte/2003/270/;

[Mi1] Milne, J. S.; Étale Cohomology; Princeton Mathematical Series, 33; Princeton University Press; Princeton, New Jersey; 1980;

[Mi2] Milne, J. S.; Abelian Varieties; Arithmetic geometry (Storrs, Conn., 1984); p. 103-150; Springer-Verlag; New York; 1986;

[MS] Müller-Stach, S.; $\mathbb{C}^*$-Extensions of Tori, Higher Chow Groups and Applications to Incidence Equivalence Relations for Algebraic Cycles; K-Theory 9 (1995); p. 395-406;

[Mu] MUMFORD, D.; Biextensions of formal Groups; Proc. Bombay Colloquium 1968; Oxford Univ. Press; 1969; p. 307-322;

[Sa] SAITO, H.; Abelian varieties attached to cycles of intermediate dimension; Nagoya Math. J. 75 (1979); p. 95-109;

[SGA $4\frac{1}{2}$] GROTHENDIECK, A.; La classe de cohomologie associée à un cycle; Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie SGA $4\frac{1}{2}$; Lecture Notes in Mathematics 569; Springer-Verlag; Berlin; 1977;

[SGA 7] GROTHENDIECK, A.; Groupes de Monodromie en Géométrie Algébrique, Exposé VII: Biextensions de Fasceaux de Groupes; Lecture Notes in Mathematics 288; Springer-Verlag; Berlin; 1972;

[Si] SILVERMAN, H.; The Arithmetic of Elliptic Curves; Graduate Texts in Mathematics 106; Springer-Verlag; Berlin; 1986;

[VS] VOEVODSKY, V.; SUSLIN, A.; Cycles, Transfers and Motivic Homology Theories; Annals of Mathematics Studies, 143; Princeton University Press; Princeton, New Jersey; 2000;