

# Lichtkegelsummenregeln für die Formfaktoren des Nukleons in NLO



Dissertation  
zur Erlangung des Doktorgrades  
der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)  
der Naturwissenschaftlichen Fakultät II - Physik  
der Universität Regensburg

vorgelegt von  
**Gerhard Peters**  
aus Pentling  
Mai 2008

Promotionsgesuch eingereicht am 9.5.2008

Promotionskolloquium am 30.6.2008

Die Arbeit wurde angeleitet von Prof. Dr. V. M. Braun

Prüfungsausschuss:

Vorsitzender: Prof. Dr. Ch. Strunk

1. Gutachter: Prof. Dr. V. M. Braun

2. Gutachter: Prof. Dr. A. Schäfer

Weiterer Prüfer: Prof. Dr. M. Grifoni

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>5</b>
1.1	Die Nukleonformfaktoren . . . . .	6
1.2	In dieser Arbeit . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Definitionen</b>	<b>11</b>
2.1	Korrelationsfunktion . . . . .	11
2.2	Das Nukleonmatrixelement des 3-Quark Operators . . . . .	12
2.3	Die Twistzerlegung . . . . .	13
<b>3</b>	<b>NLO Beiträge</b>	<b>17</b>
3.1	Topologische Struktur der NLO Beiträge . . . . .	17
3.2	Farbfaktoren . . . . .	19
3.3	Dimensionale Regularisierung . . . . .	19
3.4	Die Zweideutigkeit der $\gamma_5$ -Matrix in der dimensional Regularisierung . . . . .	20
3.4.1	Allgemeine Bemerkungen – Zweideutigkeit der Spur . . . . .	20
3.4.2	Allgemeine Bemerkungen – Chisholm Identität . . . . .	21
3.4.3	Anwendung . . . . .	22
3.5	Renormierung und Faktorisierung der kollinearen Divergenzen: $\Phi_3$ . . . . .	23
3.6	Renormierung und Faktorisierung der kollinearen Divergenzen: $V_1$ und $A_1$ . . . . .	26
3.7	Allgemeine Bemerkungen zu dem Fall $M_N \neq 0$ . . . . .	31
3.8	Eichinvarianz . . . . .	35
<b>4</b>	<b>Lichtkegelsummenregeln</b>	<b>37</b>
4.1	Herleitung der Lichtkegelsummenregeln . . . . .	37
4.1.1	Nukleonformfaktoren . . . . .	37
4.1.2	Korrelationsfunktion in Termen von Formfaktoren . . . . .	38
4.1.3	Dispersionsrelation . . . . .	38
4.1.4	Boreltransformation . . . . .	39
4.1.5	Lichtkegelsummenregeln . . . . .	39
4.1.6	Lichtkegelsummenregeln für den Fall $M_N = 0$ . . . . .	39
4.1.7	NLO Resultate . . . . .	41
4.1.8	Zusammenfassung . . . . .	49
4.1.9	Boreltransformation am Beispiel des Terms $g_1(x_i, W)$ . . . . .	51

<b>5</b>	<b>Numerische Ergebnisse</b>	<b>55</b>
5.1	Nukleondistributionsamplituden . . . . .	55
5.2	Numerische Resultate . . . . .	56
5.2.1	$M_N = 0$ Fall: $F_2$ bei Twist-3 zu NLO . . . . .	57
5.2.2	Verschiedene Beiträge zu $F_1$ und $F_2$ . . . . .	60
5.2.3	Vergleich mit den experimentellen Daten . . . . .	62
<b>6</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>67</b>
<b>A</b>	<b>Feynmanregeln</b>	<b>69</b>
<b>B</b>	<b>Imaginärteile von ausgewählten Funktionen</b>	<b>71</b>
<b>C</b>	<b>Loop Integrale</b>	<b>75</b>
C.1	Definitionen und Notationen . . . . .	75
C.1.1	Zwei-Punkt Integrale . . . . .	76
C.1.2	Drei-Punkt Integrale . . . . .	77
C.1.3	Vier-Punkt Integrale mit 2 masselosen kollinearen Legs . . . . .	79
<b>D</b>	<b>LO Resultate für <math>M_N \neq 0</math></b>	<b>83</b>
<b>E</b>	<b>Nukleondistributionsamplituden</b>	<b>93</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>97</b>

# Kapitel 1

## Einleitung

Die Faszination, die von der modernen Physik ausgeht, ist die Möglichkeit, die inneren Strukturen der Teilchen entdecken zu können und mit der Hilfe von angewandten mathematischen Formalismen eine den Umständen entsprechenden angemessene Beschreibung der Natur und der damit verbundenen Kräfte zu ermöglichen. In den vorherigen Jahrtausenden wurde das Atom als der kleinste Baustein der Materie gehalten. Doch in den letzten Jahrzehnten konnten durch die rasante theoretische und auch experimentelle Entwicklung oftmals bahnbrechende Erkenntnisse gewonnen werden. In der heutigen Zeit sind die sogenannten Quarks als die kleinsten Bausteine der Materie allgemein akzeptiert. Diese sind das up (u), down(d), strange (s), charm(c), top (t) und bottom (b) Quark. Alle diese Quarks sind in verschiedener Weise miteinander verbunden und bilden wiederum andere Teilchen, die Baryonen und Mesonen. Baryonen sind aus drei Quarks aufgebaut und Mesonen aus einem Quark und Antiquark. Die bekanntesten Baryonen sind wohl das Proton und das Neutron. Die Gruppe der Leptonen umspannt 6 verschiedene Teilchen. Diese sind das Elektron, das Myon und das Tau-Lepton sowie die korrespondierenden neutralen Teilchen. Die gesamte Materie in unserer Welt besteht entweder aus Fermionen oder Bosonen. Fermionen sind Teilchen mit halbzahligem Spin, wohingegen Bosonen ganzzahligen Spin tragen. Fermionen unterliegen dem sogenannten Pauli-Prinzip und deshalb sind Fermionen nie in allen Quantenzahlen gleich. Bosonen können dies aber durchaus sein.

Es ist heute allgemein akzeptiert, dass es vier fundamentale Wechselwirkungskräfte gibt. Diese sind die starke und schwache aber auch die elektromagnetische Wechselwirkung und die Gravitation. In den nachfolgenden Tabellen 1.1 und 1.2 sind diese Wechselwirkungen nochmals tabellarisch dargestellt.

Die Wechselwirkungskräfte unterscheiden sich in der Übertragung der Wechselwirkungen. Ich möchte aber an dieser Stelle nicht näher die Eigenschaften der elektromagnetischen und schwachen Wechselwirkungen sowie der Gravitation beschreiben, da es in dieser Arbeit um die Anwendung der Quantenchromodynamik und damit um die starke Wechselwirkung geht. Die starke Wechselwirkung wird durch die sogenannten Gluonen vermittelt. Diese wirken zwischen den Quarks. Theoretisch wird diese Wechselwirkung durch die SU(3) Gruppe beschrieben. Die acht Eichbosonen dieser Gruppe vermitteln die Kraft zwischen den Quarks, diese sind die Gluonen. Ein ganz zentrales Element in der Quantenchromodynamik (QCD) ist die Kopplungskonstante  $\alpha_s$ . Für kleine Distanzen ist diese klein und umgekehrt wird sie im-

mer größer je weiter weg sich die Quarks voneinander befinden. Man nennt diese Eigenschaft asymptotische Freiheit und darauf gab es 2004 auch den Nobelpreis. Wir betrachten hier die Kopplungskonstante zu der 1-Loop-Näherung. Der zugehörige Ausdruck lautet demnach:

$$\alpha_S(Q^2) = \frac{1}{\beta_0 \ln Q^2/\Lambda^2}, \quad (1.1)$$

wobei  $\beta_0 = 1/(12\pi)(11 N_c - 2 N_f)$  und der Farbfaktor  $N_c = 3$  sowie die Anzahl der Flavours  $N_f = 3$  ist. Die Definition von  $\Lambda$  ist durch

$$\Lambda^2 = \mu^2 \exp\left[\frac{-1}{\beta_0 \alpha_S(\mu^2)}\right] \quad (1.2)$$

gegeben. Der Wert für  $\Lambda$  kann nur experimentell bestimmt werden und wird hier definiert als  $\Lambda = 0.2 \text{ GeV}$ .

Familie	1	2	3	el. Ladung
Quarks	$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}$	$\begin{matrix} 2/3 \\ -1/3 \end{matrix}$
Leptonen	$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau^- \end{pmatrix}$	$\begin{matrix} 0 \\ -1 \end{matrix}$

Tabelle 1.1: *Klassifikation der Elementarteilchen im Standardmodell*

	Eichgruppe	Eichboson
Elektromagnetische WW.	$U(1)$	Photon $\gamma$
Schwache WW.	$SU(2)$	$W^+, W^-, Z^0$
starke WW.	$SU(3)$	8 Gluonen

Tabelle 1.2: *Eichgruppen und die dazu korrespondierenden fundamentalen Wechselwirkungen des Standardmodells*

## 1.1 Die Nukleonformfaktoren

Formfaktoren spielen in der Physik eine ganz zentrale Rolle. Mit ihrer Hilfe kann man über die innere Struktur von Teilchen, insbesondere in Bezug auf die Ladungs- und Stromverteilung, Aussagen treffen.

In dieser Arbeit sind wir an den Formfaktoren des Nukleons interessiert. Das Nukleon, also das Proton oder das Neutron, trägt den Spin  $1/2$  und unterscheidet sich in der z-Komponente des Isospins. Das Proton besitzt  $I_z = 1/2$  und das Neutron  $I_z = -1/2$ . Ein typischer Prozess, um die innere Struktur des Nukleons zu untersuchen, ist die elastische Elektron-Nukleon-Streuung

$$e(k) + N(P) \rightarrow e(k') + N(P') . \quad (1.3)$$

Dabei ist  $k_\mu$  der Impuls des einlaufenden Elektrons,  $P_\mu$  der Impuls des Nukleons und  $k'_\mu$  und  $P'_\mu$  jeweils die Impulse des Elektrons und des Nukleons im Endzustand.

Die elektromagnetischen Formfaktoren sind durch

$$\langle N(P') | j_\mu^{\text{em}}(0) | N(P) \rangle = \bar{N}(P') \left[ \gamma_\mu F_1(Q^2) - i \frac{\sigma_{\mu\nu} q^\nu}{2M_N} F_2(Q^2) \right] N(P) \quad (1.4)$$

definiert. Hierbei sind die Formfaktoren  $F_1$  und  $F_2$  jeweils die Pauli- und Diracformfaktoren und  $P' = P - q$  sowie  $q^2 = -Q^2$ .

Im Experiment allerdings werden dann bestimmte Kombinationen der Formfaktoren  $F_1$  und  $F_2$  gemessen. Die Ergebnisse dazu werden dann am Ende dieser Arbeit vorgestellt.

Zur Zeit ist das Interesse an der Untersuchung der Formfaktoren des Nukleons sehr groß. Dies wurde nicht zuletzt durch die Ausweitung des experimentellen Programms am JLAB gestartet. Hierdurch wird es möglich sein, den Energiebereich der Messungen erheblich zu erweitern und so Einblicke in den Bereich für große  $Q^2$  zu gewinnen. Diese Erweiterung wird einen wichtigen Schritt zu neuen Erkenntnissen über die innere Struktur von Protonen und Neutronen darstellen.

In den letzten Jahrzehnten wurden vielfältige Versuche unternommen, harte, exklusive Prozesse mit Hilfe der Quantenchromodynamik zu beschreiben. Dieses Feld ist allerdings eine hochkomplizierte Thematik.

Am Ende der 70er Jahre haben Brodsky und Lepage [1] und davon unabhängig Efremov und Radyushkin [2] das sogenannte Faktorisierungstheorem bewiesen. Dieses beschreibt das asymptotische Verhalten der Formfaktoren für große  $Q^2$ . Da bei einem enormen Energieübertrag  $Q^2$  der transversale Abstand der Quarks im Nukleon gering ist, benötigt man nur die sogenannten Distributionsamplituden. In diesen ist das gesamte Wissen über das Nukleon enthalten und es wird die baryonische Wellenfunktion in ihrer Gesamtheit nicht mehr benötigt. Diese Distributionsamplituden sind als Wellenfunktion mit drei Valenzquarks und kleiner transversaler Separation definiert. In diesem Zusammenhang sind die Nukleonformfaktoren als Konvolution der Distributionsamplituden und einem Koeffizienten definiert, der in perturbativer Störungsrechnung berechnet werden kann.

Das Faktorisierungstheorem kann aber, wie oben erwähnt, nur für sehr große  $Q^2$  angewendet werden. Die bestehenden Beschleuniger können allerdings nicht derartig hohe Energien erreichen und deshalb sind die sogenannten “weichen” Beiträge im Bereich von einigen  $\text{GeV}^2$  in der heutigen Zeit von Bedeutung. Man kann sich diese “weichen” Beiträge als ein Überlapp der Wellenfunktionen des Nukleons im Anfangs- und Endzustand vorstellen. Diese Vorstellung beinhaltet aber auch zusätzliche Gluonen und keine Begrenzung in der transversalen Separation.

Die Berechnungen der “weichen” Beiträge werden jetzt in dieser Arbeit mit Hilfe der Lichtkegelsummenregeln (LCSR) betrachtet. Diese wurden in [3] entwickelt und stellen eine Abwandlung des klassischen Summenregelansatzes in [4] dar. Die zugrundeliegende Idee der Summenregeln ist das Berechnen einer Korrelationsfunktion durch zwei verschiedene Ausdrücke. Zum einen kann die Korrelationsfunktion durch hadronische Zustände dargestellt werden, zum anderen aber auch mit der Hilfe der perturbativen Störungstheorie. Durch das Gleichsetzen beider Darstellungsweisen können dann Informationen über die verwendeten Parameter gewonnen werden.

Ein Beispiel, das den klassischen Summenregelansatz anwendet, ist in [5] bei der Berechnung des Pionformfaktors dargestellt. Hierbei hat allerdings der Formfaktor ein völlig unphysikalisches Verhalten. Dieses Problem wurde dann in [6] durch die Einbindung der Lichtkegelsummenregeln gelöst. Das Hauptmerkmal der LCSR ist die Verwendung des Twists anstatt der Dimension in Bezug auf die Aufsummierung und Klassifikation von Beiträgen. Auch hierfür stellt [6] ein gutes Beispiel dar, indem Operatoren verschiedener Dimensionen zusammengefasst werden müssen und so ein physikalisch korrektes Verhalten des Ergebnisses erreicht wird. An dieser Stelle möchte ich auch auf meine Diplomarbeit [7] verweisen, in der am Beispiel von [6] ausführlich die Summenregeln und die Veränderungen unter Zuhilfenahme der Lichtkegelsummenregeln genau erklärt wurden.

In den letzten 20 Jahren wurden die LCSR für eine ganze Reihe von Prozessen verwendet. Zu erwähnen ist hierbei die Berechnung der Mesonformfaktoren, insbesondere die Berechnung der semileptonischen Zerfälle der B-Mesonen [8]. Die Beschreibung der Formfaktoren für Baryonen konnte aber erst dann in Angriff genommen werden, als die Distributionsamplituden für die höheren Twists zur Verfügung standen. Diese wurden in [9] im Jahr 2000 veröffentlicht. Danach folgte die erste Anwendung der LCSR auf die Berechnung der Formfaktoren des Nukleons [10]. In [11] und [12] werden die Übergangsformfaktoren des  $\Delta$ -Teilchen thematisiert oder in neuester Zeit erfolgte die Anwendung der LCSR auch auf die axialen  $N \rightarrow \Delta$  Übergangsformfaktoren in [13]. In [14] wurden die elektromagnetischen Formfaktoren des Nukleons in recht allgemeiner Weise berechnet. Dabei ist der sogenannte Ioffe Strom als ein bestimmter Sonderfall des interpolierenden Feldes des Nukleons dargestellt. Der Ioffe Strom wird auch in dieser Arbeit verwendet.

Man könnte diese Aufzählung noch erheblich erweitern aber ich möchte mich an dieser Stelle kurz fassen und wollte nur exemplarisch einige Beispiele nennen.

## 1.2 In dieser Arbeit

Das allgemeine Ziel der Bestimmung der Parameter der Nukleondistributionsamplituden ist allerdings wenig sinnvoll, falls nicht die Korrekturen in 1. Ordnung in  $\alpha_S$  berechnet werden. Erst dann kann mit guter Genauigkeit eine Aussage über die Parameter der Wellenfunktion und der Verwendung des optimalen interpolierenden Feldes getroffen werden. Man erwartet, dass diese Korrekturen sehr groß sind.

Weltweit wurden Next-to-Leading Order in  $\alpha_S$  Korrekturen für Baryonen mit dem Lichtkegelsummenformalismus (LCSR) noch nie berechnet. Diese Arbeit ist der erste Schritt in diese Richtung.

Das zentrale Element, von der die gesamte Berechnung ausgeht, ist die Korrelationsfunktion

$$T_\mu(P, q) = i \int d^4x e^{iqx} \langle 0 | T [\eta(0) j_\mu(x)] | N(P) \rangle . \quad (1.5)$$

In (1.5) bezeichnet  $T$  das Zeitordnungsprodukt,  $|P\rangle$  den Nukleonzustand,  $\eta(x)$  das verwendete interpolierende Feld des Nukleons und  $j_\mu$  den elektromagnetischen Strom. Hierbei werden



Next-to-Leading Order in  $\alpha_S$  Korrekturen zur Leading Twist Genauigkeit berechnet. In diesem Zusammenhang sind Berechnungen für den Formfaktor  $F_1$  zwar nicht möglich, aber wir können die Korrekturen zu  $F_2$  bestimmen und damit wichtige quantitative Aussagen über die Größe der Abweichungen von den Leading Order Berechnungen treffen.

Im 2. Kapitel werden die grundlegenden Definitionen, die benötigt werden, angeführt. Danach widme ich mich im 3. Kapitel der Berechnung der gesamten NLO Beiträge und im 4. Kapitel kommen wir zu den Lichtkegelsummenregeln. Daran anschließend werden die Ergebnisse durch verschiedene Plots veranschaulicht. Im Anhang werden unter anderem noch diverse Loop-Integrale vorgestellt, die explizit berechnet werden mussten und dort ausführlich dargestellt werden.

Die mit Abstand schwierigsten Teile der Arbeit sind die Herleitung der benötigten Loop-Integrale, die NLO Berechnungen und die Boreltransformation, die durchgeführt werden muss, um höhere Resonanzen des Nukleons zu unterdrücken. Diese Teile nahmen einen erheblichen Anteil der Zeit in Anspruch.

Basierend auf [15] wird in den nachfolgenden Kapiteln die in dieser Arbeit behandelte Thematik der Lichtkegelsummenregeln für die Formfaktoren des Nukleons in NLO ausführlich dargestellt.



# Kapitel 2

## Definitionen

### 2.1 Korrelationsfunktion

Das zentrale Element, von der die gesamte Berechnung ausgeht, ist die Korrelationsfunktion

$$T_\mu(P, q) = i \int d^4x e^{iqx} \langle 0 | T [\eta(0) j_\mu(x)] | N(P) \rangle , \quad (2.1)$$

wobei  $P_\mu$  den Impuls des Nukleons und  $q_\mu$  den Impulstransfer des Photons darstellt. Wir benutzen hier den elektromagnetischen Strom

$$j_\mu = e_u \bar{u}(x) \gamma_\mu u(x) + e_d \bar{d}(x) \gamma_\mu d(x) . \quad (2.2)$$

Der gesamten Rechnung legen wir einen bestimmten Strom  $\eta$ , den Ioffe Strom, zugrunde. Dieser Strom wurde in früheren Veröffentlichungen sehr erfolgreich benutzt und die Berechnung der Nukleonformfaktoren in führender Ordnung ergab damit sehr vielversprechende Ergebnisse. Deshalb wird dieses interpolierende Feld nun auch für die NLO Berechnungen verwendet. Der Strom ist allgemein definiert als:

$$\eta(x) = \varepsilon^{abc} [u^a(x) \Gamma_1 u^b(x)] \Gamma_2 d^c(x) , \quad (2.3)$$

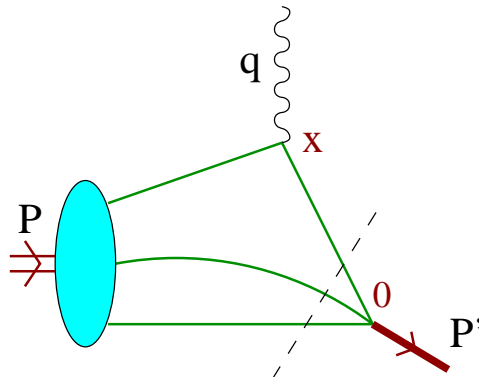


Abbildung 2.1: Schematische Struktur der Lichtkegelsummenregeln für die Nukleonformfaktoren.

mit den Farbindizes  $a, b, c$ . Für den Ioffe Strom ist definiert:

$$\Gamma_1 = C\gamma_\lambda, \quad \Gamma_2 = \gamma_5\gamma^\lambda, \quad (2.4)$$

wobei  $C$  die Ladungskonjugationsmatrix ist.

## 2.2 Das Nukleonmatrixelement des 3-Quark Operators

Die Nukleondistributionsamplituden beziehen sich auf ein Nukleon-zu-Vakuum Matrixelement von nichtlokalen Operatoren, die aus Quark- und Gluonfeldern bei  $x^2 = 0$  aufgebaut sind. In diesem Zusammenhang ist das Matrixelement

$$4 \langle 0 | \varepsilon^{abc} u_\alpha^{a'}(a_1 x) [a_1 x, a_0 x]_{a'a} u_\beta^{b'}(a_2 x) [a_2 x, a_0 x]_{b'b} d_\gamma^{c'}(a_3 x) [a_3 x, a_0 x]_{c'c} | N(P, \lambda) \rangle \quad (2.5)$$

von Interesse. Hierbei ist

$$[x, y] = \mathcal{P} \exp \left[ ig \int_0^1 dt (x - y)_\mu A^\mu(tx - (1-t)y) \right] \quad (2.6)$$

ein Eichfaktor, der in der Rechnung unterdrückt ist, während  $\alpha, \beta, \gamma$  die Diracindizes darstellen und  $M_N$  die Nukleonmasse mit  $P^2 = M_N^2$  ist.

Die allgemeine Lorentzzerlegung ist zum Beispiel in [16] sehr ausführlich beschrieben. Hier verwenden wir die abgekürzte Schreibweise:

$$4 \langle 0 | \varepsilon^{abc} u_\alpha^a(a_1 x) u_\beta^b(a_2 x) d_\gamma^c(a_3 x) | N(P, \lambda) \rangle = \sum_i \mathcal{F}^{(i)}(\{a_k\}, P \cdot x) X_{\alpha\beta}^{(i)} Y_\gamma^{(i)}, \quad (2.7)$$

wobei die  $\mathcal{F}^{(i)} \in \{\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_6, \mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_6, \mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_8\}$  invariante Funktionen von  $P \cdot x$  sind und  $X_{\alpha\beta}^{(i)}$  sowie  $Y_\gamma^{(i)}$  Diracstrukturen definieren [16]. Die Strukturen  $Y^{(i)}$  beinhalten den Nukleonspinor  $N$ . Weiterhin halten wir fest:

$$(X^{(i)})^T = \begin{cases} X^{(i)} & \text{für } \mathcal{F}^{(i)} \in \{\mathcal{V}_j, \mathcal{T}_j\} \\ -X^{(i)} & \text{für } \mathcal{F}^{(i)} \in \{\mathcal{S}_j, \mathcal{P}_j, \mathcal{A}_j\} \end{cases} \quad (2.8)$$

Als Beispiel sei an dieser Stelle der Beitrag  $\mathcal{V}_1(\not{P}C)_{\alpha\beta}(\gamma_5 N)_\gamma$  zu (2.7) genannt. Hierbei ist  $(X)_{\alpha\beta}^{(i)} = (\not{P}C)_{\alpha\beta}$  und  $Y_\gamma^{(i)} = (\gamma_5 N)_\gamma$  mit  $(\not{P}C)_{\alpha\beta} = (\not{P}C)_{\beta\alpha}$ .

Die invarianten Funktionen erfüllen die Bedingung

$$\mathcal{F}^{(i)}(a_1 P \cdot x, a_2 P \cdot x, a_3 P \cdot x) = \begin{cases} \mathcal{F}^{(i)}(a_2 P \cdot x, a_1 P \cdot x, a_3 P \cdot x) & \text{für } \mathcal{F}^{(i)} \in \{\mathcal{V}_j, \mathcal{T}_j\} \\ -\mathcal{F}^{(i)}(a_2 P \cdot x, a_1 P \cdot x, a_3 P \cdot x) & \text{für } \mathcal{F}^{(i)} \in \{\mathcal{S}_j, \mathcal{P}_j, \mathcal{A}_j\} \end{cases} \quad (2.9)$$

Zusätzlich dazu können zu (2.7) die  $\mathcal{O}(x^2)$  Korrekturen angehängt werden.

## 2.3 Die Twistzerlegung

Für die Twistklassifikation ist es vorteilhaft die Definitionen

$$q \cdot z = 0, \quad z^2 = 0 \quad (2.10)$$

und

$$p_\mu = P_\mu - \frac{1}{2} z_\mu \frac{M_N^2}{P \cdot z}, \quad p^2 = 0 \quad (2.11)$$

einzuführen. Dabei ist  $P \rightarrow p$ , falls die Nukleonmasse vernachlässigt werden kann. Der Projektor auf die Richtungen, die zu  $p$  und  $z$  orthogonal sind, ist gegeben durch:

$$g_{\mu\nu}^\perp = g_{\mu\nu} - \frac{1}{pz} (p_\mu z_\nu + p_\nu z_\mu). \quad (2.12)$$

Deshalb beschreibt allgemein  $a_\perp$  die Komponente von  $a_\mu$ , die zu  $z$  und  $p$  orthogonal ist. Beispielsweise gilt demnach:

$$q_{\perp\mu} = q_\mu - \frac{p \cdot q}{p \cdot z} z_\mu. \quad (2.13)$$

Der Impuls des Photons kann damit geschrieben werden als:

$$q_\mu = q_{\perp\mu} + z_\mu \frac{P \cdot q}{P \cdot z}. \quad (2.14)$$

Nehmen wir einmal an, dass das Nukleon in positiver  $e_z$ -Richtung fliegt. Dann sind  $p^+$  und  $z^-$ , mit  $p^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(p^0 + p^3)$  und  $z^- = \frac{1}{\sqrt{2}}(z^0 - z^3)$ , die einzigen verbleibenden Komponenten von  $p$  und  $z$ . Werden die Matrixelemente in Potenzen von  $1/p^+$  entwickelt, führt dies eine Zählung der Potenzen in  $Q$  ein. In dieser Sprache zählt damit der Twist die Unterdrückung in Potenzen von  $p^+$ .

Der Nukleonspinor  $N_\gamma(P, \lambda)$  wird in eine “große” und “kleine” Komponente zerlegt:

$$\begin{aligned} N_\gamma(P, \lambda) &= \frac{1}{2p \cdot z} (\not{p} \not{z} + \not{z} \not{p}) N_\gamma(P, \lambda) \\ &= N_\gamma^+(P, \lambda) + N_\gamma^-(P, \lambda). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Dabei haben wir zwei Projektionsoperatoren eingeführt:

$$\Lambda^+ = \frac{\not{p} \not{z}}{2p \cdot z}, \quad \Lambda^- = \frac{\not{z} \not{p}}{2p \cdot z}, \quad (2.16)$$

die auf die “Plus” und “Minus” Komponenten des Spinors projizieren. Des Weiteren definieren wir die nützlichen Beziehungen

$$\not{p} N(P) = M_N N^+(P), \quad \not{z} N(P) = \frac{2p \cdot z}{M_N} N^-(P), \quad (2.17)$$

die eine Folge der Diracgleichung  $\not{P} N(P) = M_N N(P)$  sind. Indem man den expliziten Ausdruck für  $N(P)$  nimmt, kann man leicht sehen, dass  $\Lambda^+ N = N^+ \sim \sqrt{p^+}$  und  $\Lambda^- N = N^- \sim$

$1/\sqrt{p^+}$ . Weiterhin gilt

$$\begin{aligned}\Lambda^+ \not{z} &= 0, & \not{z} \Lambda^+ &= \not{z}, \\ \Lambda^+ \not{p} &= \not{p}, & \not{p} \Lambda^+ &= 0, \\ \Lambda^- \not{z} &= \not{z}, & \not{z} \Lambda^- &= 0, \\ \Lambda^- \not{p} &= 0, & \not{p} \Lambda^- &= \not{p}\end{aligned}\tag{2.18}$$

und

$$\Lambda^+ \not{q} = \not{q}_\perp \Lambda^+.\tag{2.19}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}\Lambda^+ \not{P} N &= M_N \Lambda^+ N = M_N N^+, \\ \Lambda^+ \not{q} N &= \not{q}_\perp N^+, \end{aligned}\tag{2.20a}$$

mit

$$\Lambda^+ \not{z} N = 0.\tag{2.20b}$$

Die Twistzerlegung des Nukleon-zu-Vakuum Matrixelements kann aber auch nach definiertem Twist geschrieben werden. Deshalb führen wir an dieser Stelle die Schreibweise

$$4 \langle 0 | \varepsilon^{abc} u_\alpha^a(a_1 x) u_\beta^b(a_2 x) d_\gamma^c(a_3 x) | N(P, \lambda) \rangle = \sum_i F^{(i)}(\{a_k\}, P \cdot x) W_{\alpha\beta}^{(i)} V_\gamma^{(i)}\tag{2.21}$$

ein. Dabei repräsentieren die  $F^{(i)} \in \{S_1, S_2, P_1, P_2, V_1, \dots, V_6, A_1, \dots, A_6, T_1, \dots, T_8\}$  die Nukleondistributionsamplituden und sind auch von definiertem Twist:

$$\begin{array}{l|l} \text{Twist-3} & V_1, A_1, T_1 \\ \text{Twist-4} & S_1, P_1, V_2, V_3, A_2, A_3, T_2, T_3, T_7 \\ \text{Twist-5} & S_2, P_2, V_4, V_5, A_4, A_5, T_4, T_5, T_8 \\ \text{Twist-6} & V_6, A_6, T_6 \end{array}\tag{2.22}$$

Die Diracstrukturen können ebenfalls in [16] eingesehen werden.

Die Funktionen  $\mathcal{F}^{(i)}$  und  $F^{(i)}$  sind durch die Beziehungen

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_1 &= S_1 & 2P \cdot x \mathcal{S}_2 &= S_1 - S_2 \\ \mathcal{P}_1 &= P_1 & 2P \cdot x \mathcal{P}_2 &= P_2 - P_1 \\ \mathcal{V}_1 &= V_1 & 2P \cdot x \mathcal{V}_2 &= V_1 - V_2 - V_3 \\ 2\mathcal{V}_3 &= V_3 & \dots & \\ \dots & & & \\ \mathcal{A}_1 &= A_1 & 2P \cdot x \mathcal{A}_2 &= -A_1 + A_2 - A_3 \\ 2\mathcal{A}_3 &= A_3 & \dots & \\ \dots & & & \\ \mathcal{T}_1 &= T_1 & 2P \cdot x \mathcal{T}_2 &= T_1 + T_2 - 2T_3 \\ \dots & & & \end{aligned}\tag{2.23}$$

miteinander verbunden. Jede Distributionsamplitude  $F^{(i)} \in V_j, A_j, T_j, S_j, P_j$  kann durch

$$F^{(i)}(\{a_k\}, P \cdot x) = \int \mathcal{D}x e^{-iP \cdot x \sum_j x_j a_j} F^{(i)}(\{x_i\})\tag{2.24}$$

ausgedrückt werden, wobei die Funktionen  $F^{(i)}(x_i)$  von den dimensionslosen Variablen  $x_i$ ,  $0 < x_i < 1$ ,  $\sum_i x_i = 1$  abhängig sind. Die  $x_i$  beziehen sich auf den longitudinalen Impulsbruchteil, der von jedem Quark im Nukleon getragen wird. Die Integrationsvariable in (2.24) ist definiert als

$$\int \mathcal{D}x = \int_0^1 dx_1 dx_2 dx_3 \delta(x_1 + x_2 + x_3 - 1). \quad (2.25)$$

Zudem können die Funktionen  $F^{(i)}(\{x_k\})$  durch die Symmetrieeigenschaften aufgeteilt werden:

$$F^{(i)}(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} F^{(i)}(x_2, x_1, x_3) & \text{für } F^{(i)} \in \{V_j, T_j\} \\ -F^{(i)}(x_2, x_1, x_3) & \text{für } F^{(i)} \in \{S_j, P_j, A_j\} \end{cases} \quad (2.26)$$

Beispielsweise gilt  $A_1(x_1, x_2, x_3, \mu^2) = 120 x_1 x_2 x_3 (x_2 - x_1) \phi_3^-(\mu^2)$ . Dabei ist offensichtlich  $A_1(x_1, x_2, x_3, \mu^2) = -A_1(x_2, x_1, x_3, \mu^2)$ .

In diesem Kapitel wurde eine kurze, grundlegende Einführung in die wichtigsten Definitionen gegeben. Wir haben nach der Definition des 3-Quark Matrixelements die Twistzerlegung und die damit verbundene Twistklassifikation des 3-Quark Matrixelements dargestellt. In dieser Arbeit werden wir uns allerdings nur mit einem kleinen Ausschnitt aller Twistamplituden beschäftigen, da wir nur NLO Korrekturen zu den Leading Twist Amplituden  $V_1$  und  $A_1$  in Betracht ziehen.





# Kapitel 3

## NLO Beiträge

### 3.1 Topologische Struktur der NLO Beiträge

Die drei LO Diagramme führen zu  $3 \times 10$  NLO Diagrammen. Bei den NLO Diagrammen kommt das Gluon in allen möglichen Variationen vor. Grundsätzlich können die Diagramme in 3 verschiedene Klassen eingeteilt werden. Falls das Photon auf eine der beiden up-Quarklinien trifft, sprechen wir von einem Diagramm des Typs A oder B. Bei einer Wechselwirkung mit der down-Quarklinie definieren wir ein Diagramm des Typs C. Typische NLO Diagramme werden in Abbildung 3.1 dargelegt. Zum Beispiel haben wir für die A- Klasse der Diagramme 10 Diagramme:

$A_{11}, A_{33}, A_{44}$	(“trivial”) 2-Punkt Loop Integrale: <i>UV und IR Divergenzen</i>	
$A_{22}$	2-Punkt Loop Integral: <i>UV Divergenzen</i>	
$A_{34}$	(“trivial”) 3-Punkt Loop Integral: <i>UV und IR Divergenzen</i>	(3.1)
$A_{12}, A_{23}, A_{24}$	3-Punkt Loop Integrale: <i>UV und IR Divergenzen</i>	
$A_{13}, A_{14}$	4-Punkt Loop Integrale: <i>IR Divergenzen</i>	

und analog für die Klasse der *B* und *C* Diagramme.

Die Beiträge der  $B_{ij}$  Diagramme können durch die Symmetriebeziehungen aus den Diagrammen  $A_{ij}$  durch den gegenseitigen Austausch  $u_1 \leftrightarrow u_2$  berechnet werden. Der gleiche Grund verbindet die Diagramme  $C_{24}$  und  $C_{23}$  sowie  $C_{14}$  und  $C_{13}$ . Berücksichtigt man dies, so verbleiben 8 kompliziertere Diagramme  $A_{12}, A_{23}, A_{24}, A_{13}, A_{14}, C_{12}, C_{24}, C_{14}$  und der Rest ist entweder proportional zur LO ( $X_{11}, X_{33}, X_{44}, X_{22}, X_{34}$ ) oder kann durch Symmetrieüberlegungen erhalten werden. Die vorliegenden Berechnungen werden in der Feynman Eichung durchgeführt.

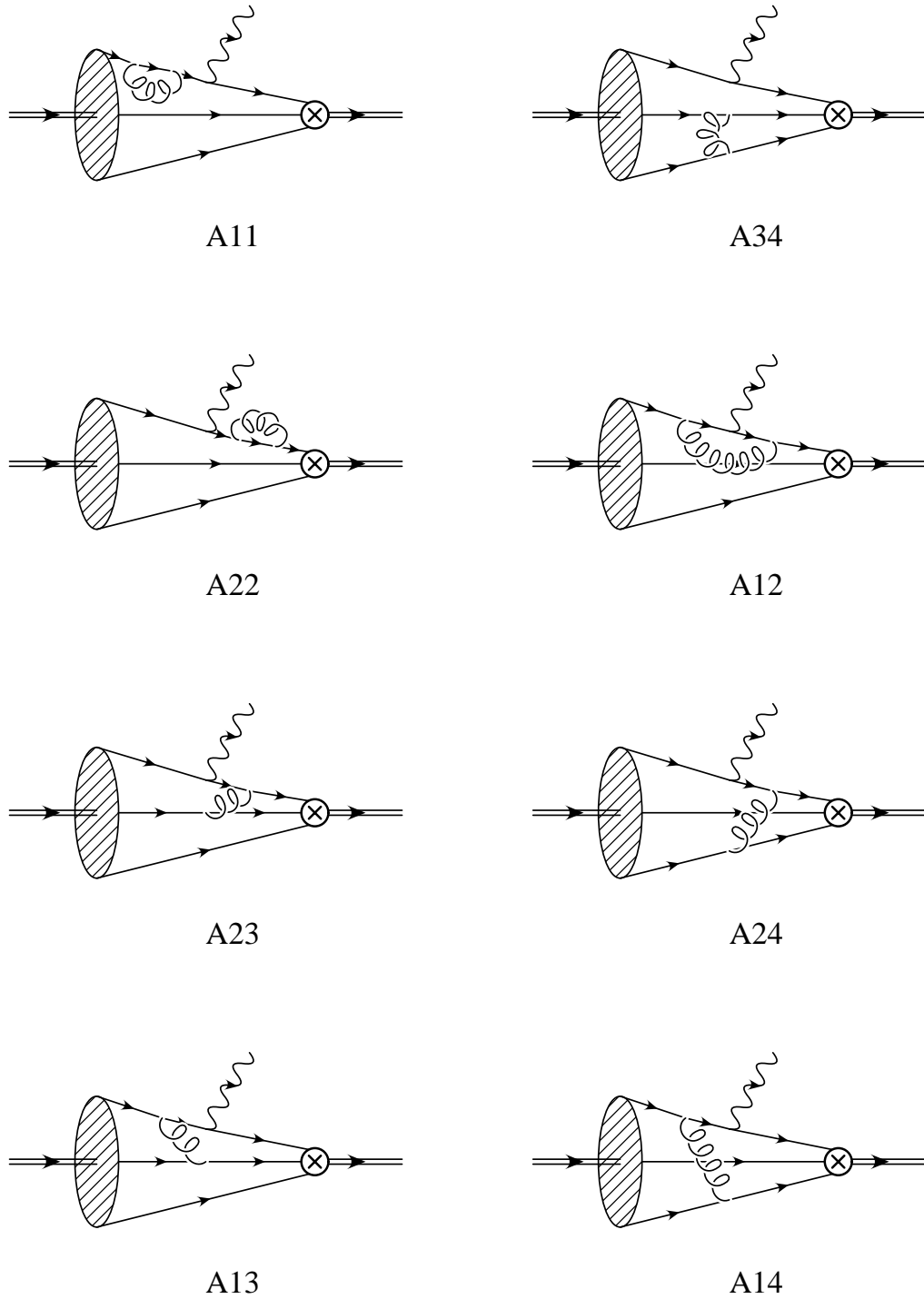


Abbildung 3.1: Typische NLO Diagramme. Die Beiträge der “Selbstenergie“-Diagramme A33 und A44 sind die gleichen wie von A11. Die Diagramme  $B_{ij}$  und  $C_{ij}$  sind den oben dargestellten ähnlich.

## 3.2 Farbfaktoren

Die Farbfaktoren werden nun durch den üblichen Gebrauch der  $SU(N_C = 3)$  Algebra berechnet:

$$\begin{array}{l|l} X_{11}, X_{33}, X_{44}, X_{22}, X_{12} & C_F = \frac{N_C^2 - 1}{2N_C} = 4/3 \quad , \\ X_{34}, X_{23}, X_{24}, X_{13}, X_{14} & -C_B = -\frac{N_C + 1}{2N_C} = -2/3 \quad . \end{array} \quad (3.2)$$

In der ersten Gruppe koppelt das Gluon zur selben Quarklinie, während in der zweiten das Gluon zwei Quarklinien verbindet.

Da wir hier Nukleonen als Farbsingulett beschreiben, ist  $N_C = 3$  zwingend erforderlich.

## 3.3 Dimensionale Regularisierung

In den folgenden Ausführungen nehmen wir

$$P^2 = M_N^2 = 0 \quad (3.3)$$

an und betrachten Diagramme mit masselosen externen Zuführungen. Deshalb kommen neben den UV Divergenzen die IR Divergenzen des kollinearen Typs vor.

In dieser Arbeit wird die dimensionale Regularisierung in

$$D = 4 - 2\epsilon$$

angewendet.

Zur Vereinfachung führen wir jetzt die Abkürzungen

$$\Gamma_{UV}(\epsilon) = \Gamma(\epsilon) \frac{\Gamma(1-\epsilon)\Gamma(1-\epsilon)}{\Gamma(1-2\epsilon)} (4\pi)^\epsilon = \frac{1}{\epsilon} - \gamma + \ln(4\pi) + O(\epsilon), \quad (3.4a)$$

$$\Gamma_{IR}(\epsilon) = \Gamma(1+\epsilon) \frac{\Gamma(-\epsilon)\Gamma(1-\epsilon)}{\Gamma(1-2\epsilon)} (4\pi)^\epsilon = \frac{1}{-\epsilon} + \gamma - \ln(4\pi) + O(\epsilon) \quad (3.4b)$$

ein.

Die erste  $\Gamma$  Funktion auf der rechten Seite von (3.4) kommt von der Loopintegration, während die Integration über die Feynman Integrale die  $\Gamma$ s in den Brüchen erzeugt. Deshalb ist die Divergenz, die in  $\Gamma(\epsilon)$  von (3.4a) enthalten ist UV divergent, wohingegen die Singularität, die in  $\Gamma(-\epsilon)$  in (3.4b) steht von infrarotem (IR) divergentem Ursprung ist. Aus  $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi/\sin \pi z$  kann man sehen, dass in allen Ordnungen von  $\epsilon$

$$\Gamma_{UV}(\epsilon) = -\Gamma_{IR}(\epsilon) \quad (3.5)$$

gilt. Trotzdem ist es sinnvoll, den Ursprung der ultravioletten und kollinearen Divergenzen deutlich zu machen und diese auch als solche auszuweisen.

In der dimensionalen Regularisierung verschwinden sowohl die “trivialen” Selbstenergiediagramme ( $X_{11}$ ,  $X_{33}$ ,  $X_{44}$ ) als auch das “triviale” 3-Punkt Diagramm ( $X_{34}$ ), falls man das Herauskürzen der UV und IR Divergenzen zulässt. Allerdings erhalten wir, wie oben erwähnt, konsistent IR und UV Divergenzen.

### 3.4 Die Zweideutigkeit der $\gamma_5$ -Matrix in der dimensional Regularisierung

Bei der Benutzung der dimensional Regularisierung trifft man auf Schwierigkeiten mit Größen, die nur in  $D = 4$  wohldefinierte Eigenschaften besitzen. Bei dem in dieser Arbeit benötigten Levi-Cevita Tensor  $\epsilon_{\mu\nu\lambda\kappa}$ , der nur in  $D = 4$  eindeutig ist, und damit der  $\gamma_5$  Dirac Matrix, treten Schwierigkeiten bei der Benutzung in  $D$  Dimensionen auf. Der Vollständigkeit halber sei an dieser Stelle erwähnt, dass evaneszente Operatoren [17] und die Definition der Fierztransformation in  $D$  Dimensionen ebenfalls mit diesem Problem zu tun haben. Wir behandeln hier diese Thematik wie in [18] und fügen noch einige zusätzliche Bemerkungen in den nächsten Unterabschnitten hinzu.

#### 3.4.1 Allgemeine Bemerkungen – Zweideutigkeit der Spur

Die Verallgemeinerung der  $\gamma_5$  Matrix in  $D$  Dimensionen ist ein Problem, da es nicht möglich ist die antikommutierende Eigenschaft und die Spureigenschaften gleichzeitig zu erhalten. In der praktischen Anwendung begegnet einem die Zweideutigkeit, falls man eine Spur, die eine  $\gamma_5$  Matrix und Paare von kontrahierten Matrizen und/oder Paare von kontrahierten Loopimpulsen besitzt, auswertet. Um mit der  $\gamma_5$  Matrix umzugehen, wurden in der Literatur mehrere Schemata besprochen.

In dem sogenannten naiven  $\gamma_5$  Schema [19] wird die antikommutierende Eigenschaft der  $\gamma_5$  Matrix

$$\{\gamma_\mu, \gamma_5\} = 0 \quad (3.6)$$

erhalten, während die Zyklizität der Spur verloren geht, so dass zum Beispiel

$$\text{Tr} [\gamma_5 \not{a} \gamma_\mu \not{b} \not{c} \not{d} \gamma^\mu] = (D - 6) \text{Tr} [\gamma_5 \not{a} \not{b} \not{c} \not{d}] , \quad (3.7a)$$

$$\text{Tr} [\gamma^\mu \gamma_5 \not{a} \gamma_\mu \not{b} \not{c} \not{d}] = (2 - D) \text{Tr} [\gamma_5 \not{a} \not{b} \not{c} \not{d}] \quad (3.7b)$$

die Problematik gut widerspiegelt. Die Spuren, die man durch zyklische Permutation der Matrizen  $\gamma_5, \not{a}, \gamma_\mu, \not{b}, \not{c}, \not{d}, \gamma^\mu$  erhält, können in zwei Klassen unterteilt werden, abhängig von dem Ort der  $\gamma_5$  Matrix in Bezug auf die kontrahierten Matrizen: jene, bei denen  $\gamma_5$  außerhalb des kontrahierten Paares in (3.7a) liegt und jene, bei denen die  $\gamma$ s mit  $\gamma_5$  wie in (3.7b) gezeigt kontrahiert werden.

Wie sehr leicht gesehen werden kann, unterscheiden sich die Resultate (3.7a) und (3.7b) durch den Faktor  $D - 4$ , indem die antikommutierende Eigenschaft (3.6) benutzt wurde bevor die Kontraktion der  $\gamma$  Matrizen ausgeführt werden konnte. Deshalb entsteht eine endliche Zweideutigkeit, falls die Spur mit einem Pol in  $D - 4$  multipliziert wird.

Eine alternative Beschreibung wurde erstmals in der Veröffentlichung von 't Hooft und Veltman [20] vorgeschlagen und dann von Breitenlohner und Maison [21] weiterentwickelt. In diesem Schema, das wir HV Schema nennen, wird die antikommutierende Eigenschaft der  $\gamma_5$  Matrix durch

$$\begin{aligned} \{\gamma_\mu, \gamma_5\} &= 0 \text{ for } \mu = 0, \dots, 4, \\ [\gamma_\mu, \gamma_5] &= 0 \text{ for } \mu = 4, \dots, D \end{aligned} \quad (3.8)$$

ersetzt. Im Gegensatz zu dem naiven  $\gamma_5$  Schema ist dieses Schema mathematisch konsistent, enthält aber trotzdem Nachteile. Die  $\gamma_5$  Matrix verletzt hierbei die Ward Identität und erzeugt “spurische” Anomalien, die die chirale Symmetrie verletzen. Um die Ward Identität zu erhalten, sollten Counterterme Ordnung für Ordnung in der perturbativen Theorie angefügt werden [22]. In diesem Schema wird die Zyklizität der Spur erhalten und die Spur ergibt sich zu

$$\begin{aligned} \text{Tr} [\gamma_5 \not{a} \not{b} \not{c} \not{d} \not{e}] &= \text{Tr} [\gamma^\mu \gamma_5 \not{a} \not{b} \not{c} \not{d} \not{e}] \\ &= (D - 6) \text{Tr} [\gamma_5 \not{a} \not{b} \not{c} \not{d} \not{e}] . \end{aligned} \quad (3.9)$$

Wie man erkennt, ist das Ergebnis in (3.9) mit dem Resultat (3.7a) identisch, bei dem das naive  $\gamma_5$  Schema angewendet wurde.

Falls die Spur eine gerade Anzahl von  $\gamma_5$  Matrizen enthält, können unter Verwendung von  $\gamma_5^2 = 1$  die  $\gamma_5$ 's in der Spur eliminiert werden und die Ward Identität wird erhalten, falls das naive  $\gamma_5$  Schema (3.6) benutzt wird [19]. Darüber hinaus ist die Zyklizität erhalten und das Ergebnis eindeutig. Auf der anderen Seite treten im HV Schema die “spurischen” Anomalien aufgrund der nicht-kommutierenden Eigenschaft der  $\gamma_5$  Matrix auf. Wie für die Spuren, die eine ungerade Anzahl von  $\gamma_5$  Matrizen enthalten, müssen wir mit den oben genannten Zweideutigkeiten im Ergebnis umgehen.

### 3.4.2 Allgemeine Bemerkungen – Chisholm Identität

Zusätzlich zu den oben beschriebenen Bemerkungen zum Levi-Civita-Tensor ist auch die Chisholm Identität

$$\gamma^\mu \varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} = i (\gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\gamma - g_{\alpha\beta} \gamma_\gamma + g_{\gamma\alpha} \gamma_\beta - g_{\beta\gamma} \gamma_\alpha) \quad (3.10)$$

nur in  $D = 4$  Dimensionen definiert. Unsere Analyse des Problems hat gezeigt, dass bei der Anwendung der Chisholm Identität auf Ausdrücke der Form

$$\gamma^\mu \gamma_\kappa \gamma^\nu \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \quad (3.11)$$

verschiedene Ergebnisse existieren, in Abhängigkeit davon, ob man zuerst den Levi-Civita Tensor mit der  $\gamma$  Matrix auf der linken oder der rechten Seite der nicht kontrahierten Matrix (in unserem Fall  $\gamma_\kappa$ ) kontrahiert. Der Unterschied ist wieder, wie erwartet, proportional zu  $D - 4$ . Zum Beispiel hat

$$\gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma_\kappa \gamma^\nu \gamma^\beta \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \quad (3.12a)$$

zwei Resultate:

$$(\gamma^\mu \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}) \gamma^\alpha \gamma_\kappa \gamma^\nu \gamma^\beta = \gamma^\mu (\gamma^\alpha \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}) \gamma_\kappa \gamma^\nu \gamma^\beta = -i(D - 4)(D - 2)(D - 1) \gamma_\kappa \gamma_5, \quad (3.12b)$$

$$\gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma_\kappa (\gamma^\nu \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}) \gamma^\beta = \gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma_\kappa \gamma^\nu (\gamma^\beta \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}) = i(D - 4)(D - 2)(D - 1) \gamma_\kappa \gamma_5. \quad (3.12c)$$

Deshalb erhalten wir bei der Benutzung der Chisholm Identität in der Form  $D = 4$  wieder die Zweideutigkeit.

### 3.4.3 Anwendung

In den Berechnungen erhalten wir die  $\gamma_5$  Zweideutigkeit, indem man die Beiträge zu den Distributionsamplituden  $A_1$  der Korrelationsfunktion  $T_\mu$  berechnet. In diesen Fällen führen die allgemeine Lorentzzerlegung des 3-Quark Matrixelements und der Ioffe Strom zu einer  $\gamma_5$  Matrix. In den NLO Berechnungen enthalten diese Spuren kontrahierte  $\gamma$  Matrizen und damit auch die  $\gamma_5$  Zweideutigkeit. Darüber hinaus ergeben sich auch mehrere Levi-Civita Tensoren, die mit zusätzlichen  $\gamma$  Matrizen kontrahiert werden. Deshalb ist auch die Zweideutigkeit in Bezug auf die Chisholm Identität vorhanden.

In dieser Arbeit benutzen wir das naive  $\gamma_5$  Schema und versuchten dem Rezept, auf das man trifft, falls man ein ähnliches Problem bei der Berechnung des Pionformfaktors [18] betrachtet, zu folgen. Es wurden zwei Annahmen gemacht. Zum einen folgen wir hinsichtlich der Zweideutigkeit der Spurberechnungen dem Rezept aus [18] über die Position der  $\gamma_5$  Matrix innerhalb der Spur. Dies bedeutet, dass die richtige Position diejenige ist, die das Gluon “korrigiert” (siehe Anhang A in [18] für ähnliche Bemerkungen und Leitfäden). Beispielsweise ist die richtige Wahl für das Diagramm A12, dass der Quark-Gluon-Quark Vertex innerhalb der Kontraktion steht, da dieses Diagramm zu den Vertexkorrekturen korrespondiert. Auf der anderen Seite sollte die Kontraktion im Diagramm A13 über  $X^{(i)}$  geschlossen werden, da dieses 4-Punkt Diagramm weder zum Quark-Photon-Quark noch zum Ioffe Strom Vertex gehört, sondern zur Korrektur des “Nukleonblobs”.

Zum anderen erinnern wir uns bei der Betrachtung der Zweideutigkeit in Verbindung mit der Chisholm Identität, dass die allgemeine Zerlegung des 3-Quark Matrixelements nicht eindeutig ist und das Benutzen der Fierztransformation zu einer Darstellung führt, die keine Spur beinhaltet und damit auch keine  $\gamma_5$  Zweideutigkeit. Deshalb werden die Probleme durch die Wahl der Lorentzzerlegung des Nukleonmatrixelements und durch die Wahl des interpolierenden Feldes erzeugt. Es wurde durchaus die Berechnung mit der Hilfe der Lorentzzerlegung der Form  $X_{\gamma\beta}^{(i)} Y_\alpha^{(i)}$  durchgeführt. Aber der Preis, der hierbei zu zahlen ist, sind sehr lange Ausdrücke. Deshalb wird dieser Weg hier nicht weiter verfolgt.

Trotzdem führte uns diese Möglichkeit zu dem richtigen Rezept des Umgangs mit Kontraktionen unter Benutzung der Chisholm Identität. Man muss der Fermionenlinie folgen und immer die Kontraktionen des Levi-Civita Tensors mit der “letzten”  $\gamma$  Matrix (mit einem offenen Index) auf der down-Quark Linie ausführen.

Beim Versuch die Eichinvarianz nachzuweisen, gelangte man zu der Erkenntnis, dass die erste Annahme nur teilweise richtig war. Das Problem, welches hier besprochen wird, unterscheidet sich von dem des Pionformfaktors, da nicht alle Fermionenlinien zur Spur beitragen. Man sollte nicht über die  $X^{(i)}$  in den Diagrammen A13 und A14 kontrahieren, sondern die Spur als einen Ausdruck schreiben, den man durch das Folgen der Fermionenlinien erhält. Die Spur startet dann immer auf dem Beginn der u-Linie und die Kontraktionen sind dann niemals über die  $X^{(i)}$  geschlossen. Nach der Anwendung dieses einfachen Rezepts – *alle Ausdrücke so zu schreiben, dass sie der Fermionenlinie folgen: entgegen der d-Linie, entlang der u-Linie, entgegen der u-Linie* – erhalten wir die eichinvarianten Resultate. Deshalb haben wir die Eichinvarianz benutzt, um die  $\gamma_5$  Zweideutigkeit zu lösen.

### 3.5 Renormierung und Faktorisierung der kollinearen Divergenzen: $\Phi_3$

In dieser Arbeit wird homogen die Nukleonmasse  $M_N = 0$  gesetzt. Für diesen Fall hat die Lorentzzerlegung des 3-Quark Matrixelements nur die Beiträge  $\mathcal{V}_1$ ,  $\mathcal{A}_1$ , und  $\mathcal{T}_1$ . Der Tensorbeitrag  $\mathcal{T}_1$  verschwindet bei der Verwendung unseres Ioffe Stroms und deshalb erhalten wir nur zwei Beiträge, die mit den Distributionsamplituden  $V_1$  und  $A_1$  konvolviert sind:

$$T_\mu|_{M_N=0} = \mathcal{M}_\mu^{V1}(u_1, u_2, u_3) \otimes V_1(u_1, u_2, u_3) + \mathcal{M}_\mu^{A1}(u_1, u_2, u_3) \otimes A_1(u_1, u_2, u_3). \quad (3.13)$$

Da die Amplituden  $V_1$  und  $A_1$  unterschiedliche Symmetrieeigenschaften haben, können sie zu einer unabhängigen Distributionsamplitude  $\Phi_3$  kombiniert werden:

$$\Phi_3(x_1, x_2, x_3) = V_1(x_1, x_2, x_3) - A_1(x_1, x_2, x_3). \quad (3.14)$$

Unter Berücksichtigung, dass die Konvolution einer symmetrischen mit einer antisymmetrischen Funktion 0 ergibt, sowie den Symmetrieeigenschaften von  $V_1$  und  $A_1$ , können wir allgemein

$$\begin{aligned} T_\mu|_{M_N=0} &= \frac{1}{2} (\mathcal{M}_\mu^{V1}(u_1, u_2, u_3) + \mathcal{M}_\mu^{V1}(u_2, u_1, u_3)) \otimes V_1(u_1, u_2, u_3) \\ &\quad + (\mathcal{M}_\mu^{A1}(u_1, u_2, u_3) - \mathcal{M}_\mu^{A1}(u_2, u_1, u_3)) \otimes A_1(u_1, u_2, u_3) \\ &= \frac{1}{2} (\mathcal{M}_\mu^{V1}(u_1, u_2, u_3) + \mathcal{M}_\mu^{V1}(u_2, u_1, u_3) - \mathcal{M}_\mu^{A1}(u_1, u_2, u_3) + \mathcal{M}_\mu^{A1}(u_1, u_2, u_3)) \\ &\quad \otimes \Phi_3(u_1, u_2, u_3) \\ &= \mathcal{M}_\mu^\Phi(u_1, u_2, u_3) \otimes \Phi_3(u_1, u_2, u_3) \end{aligned} \quad (3.15)$$

schreiben. Hier beginnen wir mit der Erläuterung der Renormierungsprozedur für (3.15). Hierbei ist  $T_\mu$  als Konvolution von nur zwei Funktionen  $\mathcal{M}_\mu^\Phi(u_1, u_2, u_3)$  und  $\Phi_3(u_1, u_2, u_3)$  zu verstehen. Wir folgen nun im Wesentlichen [18]. Die Amplitude  $\mathcal{M}_\mu^\Phi(u_1, u_2, u_3)$  ist von der allgemeinen Form

$$\mathcal{M} = Z_{\text{curr}} \left[ \mathcal{M}^{\text{LO}} + \frac{\alpha_S}{4\pi} \mathcal{M}^{\text{NLO}} + \dots \right], \quad (3.16a)$$

mit

$$\mathcal{M}^{\text{LO}} = a_0 + \epsilon a_1 + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (3.16b)$$

$$\mathcal{M}^{\text{NLO}} = \left\{ \Gamma_{UV}(\epsilon) [b_0^{UV} + \epsilon b_1^{UV} + \mathcal{O}(\epsilon^2)] + \Gamma_{IR}(\epsilon) [b_0^{IR} + \epsilon b_1^{IR} + \mathcal{O}(\epsilon^2)] \right\} \left( \frac{\mu^2}{Q^2} \right)^\epsilon. \quad (3.16c)$$

Die Kopplungskonstante  $\alpha_S$  kann in Termen der laufenden Kopplungskonstante  $\alpha_S(\mu_R^2)$  geschrieben werden:

$$\alpha_S = \alpha_S(\mu_R^2) \left( 1 - \frac{\alpha_S(\mu_R^2)}{4\pi} \beta_0 \frac{1}{\epsilon} \right) \left( \frac{\mu_R^2}{\mu^2} \right)^\epsilon [\epsilon \Gamma_{UV}(\epsilon)]^{-1}. \quad (3.17)$$

Dies bedeutet, dass die Kopplungskonstante durch die renormierte ersetzt wird und bis jetzt keine Singularitäten beseitigt worden sind.

Die Entwicklung der Amplitude  $\mathcal{M}$  kann in der Form

$$\mathcal{M} = Z_{\text{curr}} \left\{ \mathcal{M}^{\text{LO}} + \frac{\alpha_S(\mu_R^2)}{4\pi} \hat{\mathcal{M}}^{\text{NLO}} + \dots \right\}, \quad (3.18a)$$

mit

$$\mathcal{M}^{\text{LO}} = a_0 + \epsilon a_1 + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (3.18b)$$

$$\hat{\mathcal{M}}^{\text{NLO}} = \left\{ \frac{1}{\epsilon} [b_0^{UV} + \epsilon b_1^{UV} + \mathcal{O}(\epsilon^2)] + \frac{1}{-\epsilon} [b_0^{IR} + \epsilon b_1^{IR} + \mathcal{O}(\epsilon^2)] \right\} \left( \frac{\mu_R^2}{Q^2} \right)^\epsilon \quad (3.18c)$$

geschrieben werden.

In unserem Fall werden die  $1/\epsilon$  Pole, die durch UV Divergenzen erzeugt werden, d.h.  $b_0^{UV}$ , durch die Renormierung des interpolierenden Feldes des Nukleons beseitigt. Zu diesem Zweck wurde  $Z_{\text{curr}}$  eingeführt:

$$Z_{\text{curr}} = 1 - \alpha_S(\mu_{R,1}^2) \frac{C_{\text{curr}}^{(1)}}{\epsilon} + \mathcal{O}(\alpha_S^2). \quad (3.19)$$

Der Wechsel der Renormierungsskala wird durch

$$\alpha_S(\mu^2) = \left( \frac{\mu_R^2}{\mu^2} \right)^\epsilon \alpha_S(\mu_R^2) [1 + \mathcal{O}(\alpha_S)] \quad (3.20)$$

beschrieben.

Deshalb nimmt  $\mathcal{M}$  die Form an:

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}^{\text{LO}} + \frac{\alpha_S(\mu_R^2)}{4\pi} \widehat{\mathcal{M}}^{\text{NLO}} + \dots, \quad (3.21a)$$

mit

$$\mathcal{M}^{\text{LO}} = a_0 + \epsilon a_1 + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (3.21b)$$

und

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{M}}^{\text{NLO}} &= \left\{ \frac{1}{\epsilon} \left[ \left( b_0^{UV} - C_{\text{curr}}^{(1)} a_0 \left( \frac{Q^2}{\mu_{R,1}^2} \right)^\epsilon \right) + \epsilon \left( b_1^{UV} - C_{\text{curr}}^{(1)} a_1 \left( \frac{Q^2}{\mu_{R,1}^2} \right)^\epsilon \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{-\epsilon} [b_0^{IR} + \epsilon b_1^{IR} + \mathcal{O}(\epsilon^2)] \right\} \left( \frac{\mu_R^2}{Q^2} \right)^\epsilon. \end{aligned} \quad (3.21c)$$

Für

$$b_0^{UV} - C_{\text{curr}}^{(1)} a_0 = 0 \quad (3.22)$$

verschwinden die  $1/\epsilon$  Pole, die durch UV Divergenzen erzeugt werden. Als einzige Signatur der Existenz verbleiben die Logarithmen  $C_{\text{curr}}^{(1)} a_0 \ln(\mu_{R,1}^2/Q^2)$  im Endresultat. An dieser Stelle



sei bemerkt, dass im Prinzip die Kopplungskonstantenrenormierung und die Renormierung des Stromes bei verschiedenen Skalen ( $\mu_R^2$  und  $\mu_{R,1}^2$ ) durchgeführt werden können, aber meistens gleich gesetzt werden. Des Weiteren schreiben wir die  $\mathcal{M}$  als eine Expansion in  $\alpha_S(\mu_R^2)$  und unabhängig von  $\mu_R^2$ . Das Abschneiden der Entwicklung in der tatsächlichen Rechnung führt die Abhängigkeit des Ergebnisses von  $\mu_R^2$  ein.

Die verbleibenden kollinearen Divergenzen werden durch die Renormierung der Nukleondistributionsamplitude beseitigt:

$$\begin{aligned} T_\mu|_{M_N=0} &= \mathcal{M}_\mu^\Phi(u_1, u_2, u_3) \otimes \Phi_3(u_1, u_2, u_3) \\ &= \mathcal{M}_\mu^\Phi(u_1, u_2, u_3) \otimes Z_\Phi(u_1, u_2, u_3; x_1, x_2, x_3; \mu_F^2) \otimes \Phi_3(x_1, x_2, x_3; \mu_F^2) \\ &= \mathcal{M}_\mu^\Phi(x_1, x_2, x_3; \mu_F^2) \otimes \Phi_3(x_1, x_2, x_3; \mu_F^2). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Die Renormierungskonstante  $Z_\Phi$  ist definiert als

$$Z_\Phi(\{u_k\}, \{x_k\}; \mu_F^2) = \delta(u_1 - x_1)\delta(u_2 - x_2) - \alpha_S(\mu_F^2) \frac{V_\Phi^{(1)}(\{u_k\}, \{x_k\})}{-\epsilon} + \mathcal{O}(\alpha_S^2), \quad (3.24)$$

wobei  $V_\Phi^{(1)}$  der führende Term des Kernels der Evolutionsgleichung für den Twist-3 ist:

$$\mu^2 \frac{\partial}{\partial \mu^2} \Phi_3(\{u_k\}; \mu^2) = V_\Phi(\{u_k\}, \{x_k\}; \mu^2) \otimes \Phi_3(\{x_k\}; \mu^2) \quad (3.25)$$

und

$$V_\Phi(\{u_k\}; \{x_k\}; \mu^2) = \frac{\alpha_S(\mu^2)}{4\pi} V_\Phi^{(1)}(\{u_k\}; \{x_k\}) + \mathcal{O}(\alpha_S). \quad (3.26)$$

Der Kernel  $V_\Phi^{(1)}$  ist in [1] angegeben und durch die Berechnung der anomalen Dimension in [23] bestätigt worden. Hier geben wir den Kernel in der bequemen Form an:

$$\begin{aligned} &V_\Phi^{(1)}(\{u_k\}, \{x_k\}) \\ &= -\frac{3}{2}C_F\delta(u_1 - x_1)\delta(u_2 - x_2) \\ &\quad + C_F \left\{ \delta(u_3 - x_3) \left[ \frac{u_1}{x_1} \frac{1}{x_1 - u_1} \theta(x_1 - u_1) + \frac{u_2}{x_2} \frac{1}{x_2 - u_2} \theta(x_2 - u_2) \right] + \left( \begin{array}{c} 3 \leftrightarrow 1 \\ 3 \leftrightarrow 2 \end{array} \right) \right\}_+ \\ &\quad + 2C_B \left\{ \delta(u_3 - x_3) \left[ \frac{u_1}{x_1} \theta(x_1 - u_1) + \frac{u_2}{x_2} \theta(x_2 - u_2) \right] \frac{\delta_{h_1 \bar{h}_2}}{u_1 + u_2} + \left( \begin{array}{c} 3 \leftrightarrow 1 \\ 3 \leftrightarrow 2 \end{array} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (3.27)$$

mit der Helizität  $h_i = -\bar{h}_i$  des Quarks  $i$  und

$$\{F(\{u_k\}, \{x_k\})\}_+ = F(\{u_k\}, \{x_k\}) - \delta(u_1 - x_1)\delta(u_2 - x_2) \int \mathcal{D}z F(\{z_k\}, \{x_k\}). \quad (3.28)$$

An dieser Stelle sei betont, dass man  $C_F = 2C_B = 4/3$  ansetzen sollte.

Für die endliche Amplitude  $\mathcal{M}$  erhält man

$$\mathcal{M}(\{x_k\}; \mu_F^2) = \left\{ \mathcal{M}^{\text{LO}}(\{x_k\}) + \frac{\alpha_S(\mu_R^2)}{4\pi} \mathcal{M}^{\text{NLO}}(\{x_k\}; \mu_F^2, \mu_{R,1}^2) + \dots \right\}, \quad (3.29a)$$

mit

$$\mathcal{M}^{\text{LO}}(\{x_k\}) = a_0 + \epsilon a_1 + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (3.29b)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{\text{NLO}}(\{x_k\}; \mu_F^2, \mu_{R,1}^2) &= \left\{ \frac{1}{\epsilon} \left[ \left( b_0^{UV} - C_{\text{curr}}^{(1)} a_0 \left( \frac{Q^2}{\mu_{R,1}^2} \right)^\epsilon \right) + \epsilon \left( b_1^{UV} - C_{\text{curr}}^{(1)} a_1 \left( \frac{Q^2}{\mu_{R,1}^2} \right)^\epsilon \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{-\epsilon} \left[ \left( b_0^{IR} - a_0 \otimes V^{(1)} \left( \frac{Q^2}{\mu_F^2} \right)^\epsilon \right) + \epsilon \left( b_1^{IR} - a_1 \otimes V^{(1)} \left( \frac{Q^2}{\mu_F^2} \right)^\epsilon \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right] \right\} \\ &\quad \times \left( \frac{\mu_R^2}{Q^2} \right)^\epsilon, \end{aligned} \quad (3.29c)$$

wobei  $\mu_F$  die Faktorisierungsskala ist und die kollinearen Divergenzen für

$$b_0^{IR} - a_0 \otimes V^{(1)} = 0 \quad (3.30)$$

wegfallen. Da jetzt alle Divergenzen weggefallen sind, können wir den Grenzwert  $\epsilon \rightarrow 0$  nehmen und erhalten

$$\mathcal{M}(\{x_k\}; \mu_F^2) = \left\{ \mathcal{M}^{\text{LO}}(\{x_k\}) + \frac{\alpha_S(\mu_R^2)}{4\pi} \mathcal{M}^{\text{NLO}}(\{x_k\}; \mu_F^2, \mu_{R,1}^2) + \dots \right\}, \quad (3.31a)$$

mit

$$\mathcal{M}^{\text{LO}}(\{x_k\}) = a_0, \quad (3.31b)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{\text{NLO}}(\{x_k\}; \mu_F^2, \mu_{R,1}^2) &= (b_1^{UV} - C_{\text{curr}}^{(1)} a_1) - (b_1^{IR} - a_1 \otimes V^{(1)}) \\ &\quad + C_{\text{curr}}^{(1)} a_0 \ln(\mu_{R,1}^2/Q^2) - a_0 \otimes V^{(1)} \ln(\mu_F^2/Q^2). \end{aligned} \quad (3.31c)$$

Für den Ioffe Strom ist

$$C_{\text{curr}}^{(1)} = C_{\text{Ioffe}}^{(1)} = 2. \quad (3.32)$$

Weiterhin gibt es für unsere Twist-3 Ergebnisse keine  $\epsilon$  proportionalen LO Beiträge. Deshalb setzen wir

$$a_1 = 0. \quad (3.33)$$

Berücksichtigen wir dies und die Bedingungen für das Wegfallen der UV (3.22) und der kollinearen (3.30) Divergenzen, vereinfacht sich das NLO Resultat (3.31c) zu

$$\mathcal{M}^{\text{NLO}}(\{x_k\}; \mu_F^2, \mu_{R,1}^2) = b_1^{UV} - b_1^{IR} + b_0^{UV} \ln(\mu_{R,1}^2/Q^2) - b_0^{IR} \ln(\mu_F^2/Q^2). \quad (3.34)$$

### 3.6 Renormierung und Faktorisierung der kollinearen Divergenzen: $V_1$ und $A_1$

Jetzt kommen wir zu der Renormierung für  $T_\mu$  ausgedrückt durch  $V_1$  und  $A_1$ :

$$T_\mu|_{M_N=0} = \mathcal{M}_\mu^{V1}(u_1, u_2, u_3) \otimes V_1(u_1, u_2, u_3) + \mathcal{M}_\mu^{A1}(u_1, u_2, u_3) \otimes A_1(u_1, u_2, u_3).$$

### 3.6. RENORMIERUNG UND FAKTORISIERUNG DER KOLLINEAREN DIVERGENZEN: $V_1$ UND

Der entscheidende Unterschied im Vergleich zu der vorherigen Betrachtung von  $\Phi_3$  ist die Summe aus Konvolutionen anstatt einer einzigen. Wie wir im Folgenden sehen, kommt es zu einer Mischung zwischen diesen Termen. Die Vorgehensweise ist ähnlich zu derjenigen, die in [24] benutzt wurde.

Es ist sehr nützlich (3.13) in Matrixform zu schreiben:

$$T_\mu|_{M_N=0} = (\mathcal{M}_\mu^{V1}(u_1, u_2, u_3), \mathcal{M}_\mu^{A1}(u_1, u_2, u_3)) \otimes \begin{pmatrix} V_1(u_1, u_2, u_3) \\ A_1(u_1, u_2, u_3) \end{pmatrix}. \quad (3.35)$$

Sowohl  $\mathcal{M}_\mu^{V1}$  als auch  $\mathcal{M}_\mu^{A1}$  sind Expansionen der Form (3.16) und die UV Renormierung erfolgt in der selben Weise wie im vorherigen Abschnitt. Man erhält damit den in Hinblick auf die UV Divergenzen endlichen Ausdruck:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_\mu^{V1}(\{u_k\}) &= \mathcal{M}_\mu^{\text{LO}, V1}(\{u_k\}) + \frac{\alpha_S(\mu_R^2)}{4\pi} \widehat{\mathcal{M}}_\mu^{\text{NLO}, V1}(\{u_k\}) + \dots, \\ \mathcal{M}_\mu^{A1}(\{u_k\}) &= \mathcal{M}_\mu^{\text{LO}, A1}(\{u_k\}) + \frac{\alpha_S(\mu_R^2)}{4\pi} \widehat{\mathcal{M}}_\mu^{\text{NLO}, A1}(\{u_k\}) + \dots \end{aligned} \quad (3.36)$$

und die Bedingung (3.22) muss erfüllt werden:

$$\begin{aligned} b_0^{UV, V1} - C_{\text{curr}}^{(1)} a_0^{V1} &= 0, \\ b_0^{UV, A1} - C_{\text{curr}}^{(1)} a_0^{A1} &= 0. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Um die verbleibenden kollinearen Divergenzen zu eliminieren, muss man den Kernel, d. h. die Renormierungskonstanten für die Distributionsamplituden  $V_1$  und  $A_1$  kennen. Dies kann wahrscheinlich durch eine Loopberechnung bestimmt werden oder, wie es hier gemacht wird, durch das Wissen von  $V_\Phi$ . Mit der Hilfe der Symmetrieeigenschaften von  $V_1$  und  $A_1$  können wir  $V_\Phi$  schreiben als:

$$\begin{aligned} V_\Phi(\{u_k\}; \{x_k\}; \mu^2) &= V_{V1, V1}(\{u_k\}; \{x_k\}; \mu^2) + V_{V1, A1}(\{u_k\}; \{x_k\}; \mu^2) \\ &\quad + V_{A1, V1}(\{u_k\}; \{x_k\}; \mu^2) + V_{A1, A1}(\{u_k\}; \{x_k\}; \mu^2), \end{aligned} \quad (3.38a)$$

mit

$$\begin{aligned}
V_{V1,V1}(\{u_k\}; \{x_k\}; \mu^2) &= \frac{1}{4} (V_\Phi(u_1, u_2, u_3; x_1, x_2, x_3; \mu^2) + V_\Phi(u_1, u_2, u_3; x_2, x_1, x_3; \mu^2) \\
&\quad + V_\Phi(u_2, u_1, u_3; x_1, x_2, x_3; \mu^2) + V_\Phi(u_2, u_1, u_3; x_2, x_1, x_3; \mu^2)) , \\
V_{V1,A1}(\{u_k\}; \{x_k\}; \mu^2) &= \frac{1}{4} (V_\Phi(u_1, u_2, u_3; x_1, x_2, x_3; \mu^2) - V_\Phi(u_1, u_2, u_3; x_2, x_1, x_3; \mu^2) \\
&\quad + V_\Phi(u_2, u_1, u_3; x_1, x_2, x_3; \mu^2) - V_\Phi(u_2, u_1, u_3; x_2, x_1, x_3; \mu^2)) , \\
V_{A1,V1}(\{u_k\}; \{x_k\}; \mu^2) &= \frac{1}{4} (V_\Phi(u_1, u_2, u_3; x_1, x_2, x_3; \mu^2) + V_\Phi(u_1, u_2, u_3; x_2, x_1, x_3; \mu^2) \\
&\quad - V_\Phi(u_2, u_1, u_3; x_1, x_2, x_3; \mu^2) - V_\Phi(u_2, u_1, u_3; x_2, x_1, x_3; \mu^2)) , \\
V_{A1,A1}(\{u_k\}; \{x_k\}; \mu^2) &= \frac{1}{4} (V_\Phi(u_1, u_2, u_3; x_1, x_2, x_3; \mu^2) - V_\Phi(u_1, u_2, u_3; x_2, x_1, x_3; \mu^2) \\
&\quad - V_\Phi(u_2, u_1, u_3; x_1, x_2, x_3; \mu^2) + V_\Phi(u_2, u_1, u_3; x_2, x_1, x_3; \mu^2)) .
\end{aligned} \tag{3.38b}$$

Offensichtlich gilt:

$$\begin{aligned}
V_{V1,V1}(\{u_k\}; \{x_k\}; \mu^2) &| \quad \text{symmetrisch in } u_1 \leftrightarrow u_2 \text{ und symmetrisch in } x_1 \leftrightarrow x_2 \\
V_{V1,A1}(\{u_k\}; \{x_k\}; \mu^2) &| \quad \text{symmetrisch in } u_1 \leftrightarrow u_2 \text{ und antisymmetrisch in } x_1 \leftrightarrow x_2 \\
V_{A1,V1}(\{u_k\}; \{x_k\}; \mu^2) &| \quad \text{antisymmetrisch in } u_1 \leftrightarrow u_2 \text{ und symmetrisch in } x_1 \leftrightarrow x_2 \\
V_{A1,A1}(\{u_k\}; \{x_k\}; \mu^2) &| \quad \text{antisymmetrisch in } u_1 \leftrightarrow u_2 \text{ und antisymmetrisch in } x_1 \leftrightarrow x_2
\end{aligned} . \tag{3.39}$$

Wir setzen dann (3.14) und (3.38a) in die Evolutionsgleichung (3.25) ein und beachten die Symmetrieeigenschaften in Bezug auf  $x_k$ . Dann erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\mu^2 \frac{\partial}{\partial \mu^2} [V_1 - A_1] (\{u_k\}; \mu^2) &= [V_{V1,V1} + V_{V1,A1} + V_{A1,V1} + V_{A1,A1}] (\{u_k\}; \{x_k\}; \mu^2) \\
&\quad \otimes [V_1 - A_1] (\{x_k\}; \mu^2) \\
&= [V_{V1,V1} + V_{A1,V1}] (\{u_k\}; \{x_k\}; \mu^2) \otimes V_1 (\{x_k\}; \mu^2) \\
&\quad - [V_{V1,A1} + V_{A1,A1}] (\{u_k\}; \{x_k\}; \mu^2) \otimes A_1 (\{x_k\}; \mu^2) .
\end{aligned} \tag{3.40}$$

### 3.6. RENORMIERUNG UND FAKTORISIERUNG DER KOLLINEAREN DIVERGENZEN: $V_1$ UND

Des Weiteren erlauben uns jene Symmetrieeigenschaften in Bezug auf  $u_k$  die Evolutionsgleichungen für  $V_1$  und  $A_1$  durch

$$\begin{aligned}
\mu^2 \frac{\partial}{\partial \mu^2} V_1(\{u_k\}; \mu^2) &= V_{V_1, V_1}(\{u_k\}; \{x_k\}; \mu^2) \otimes V_1(\{x_k\}; \mu^2) \\
&\quad - V_{V_1, A_1}(\{u_k\}; \{x_k\}; \mu^2) \otimes A_1(\{x_k\}; \mu^2), \\
\mu^2 \frac{\partial}{\partial \mu^2} A_1(\{u_k\}; \mu^2) &= -V_{A_1, V_1}(\{u_k\}; \{x_k\}; \mu^2) \otimes V_1(\{x_k\}; \mu^2) \\
&\quad + V_{A_1, A_1}(\{u_k\}; \{x_k\}; \mu^2) \otimes A_1(\{x_k\}; \mu^2)
\end{aligned} \tag{3.41}$$

auszudrücken oder dies in Matrixform

$$\mu^2 \frac{\partial}{\partial \mu^2} \begin{pmatrix} V_1 \\ A_1 \end{pmatrix} (\{u_k\}; \mu^2) = \begin{pmatrix} V_{V_1, V_1} & -V_{V_1, A_1} \\ -V_{A_1, V_1} & V_{A_1, A_1} \end{pmatrix} (\{u_k\}; \{x_k\}; \mu^2) \otimes \begin{pmatrix} V_1 \\ A_1 \end{pmatrix} (\{x_k\}; \mu^2) \tag{3.42}$$

zu schreiben.

Die Distributionsamplituden mischen offensichtlich unter der Renormierung. Man kann deshalb schreiben:

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ A_1 \end{pmatrix} (\{u_k\}) = \mathbf{Z}(\{u_k\}; \{x_k\}; \mu^2) \otimes \begin{pmatrix} V_1 \\ A_1 \end{pmatrix} (\{x_k\}; \mu^2), \tag{3.43}$$

mit

$$\mathbf{Z}(\{u_k\}; \{x_k\}; \mu^2) = \mathbf{1} - \frac{\alpha_S(\mu^2)}{4\pi} \frac{1}{-\epsilon} \mathbf{V}^{(1)}(\{u_k\}; \{x_k\}) \tag{3.44}$$

und

$$\mathbf{V}^{(1)}(\{u_k\}; \{x_k\}) = \begin{pmatrix} V_{V_1, V_1}^{(1)} & -V_{V_1, A_1}^{(1)} \\ -V_{A_1, V_1}^{(1)} & V_{A_1, A_1}^{(1)} \end{pmatrix} (\{u_k\}; \{x_k\}). \tag{3.45}$$

Indem jetzt (3.43) in (3.35) eingesetzt wird, bekommen wir

$$\begin{aligned}
T_\mu |_{M_N=0} &= (\mathcal{M}_\mu^{V_1}, \mathcal{M}_\mu^{A_1}) (\{u_k\}) \otimes \mathbf{Z}(\{u_k\}, \{x_k\}; \mu^2) \otimes \begin{pmatrix} V_1 \\ A_1 \end{pmatrix} (\{x_k\}; \mu^2) \\
&= (\mathcal{M}_\mu^{V_1}, \mathcal{M}_\mu^{A_1}) (\{x_k\}, \mu^2) \otimes \begin{pmatrix} V_1 \\ A_1 \end{pmatrix} (\{x_k\}; \mu^2),
\end{aligned} \tag{3.46}$$

mit

$$(\mathcal{M}_\mu^{V_1}, \mathcal{M}_\mu^{A_1}) (\{x_k\}, \mu^2) = (\mathcal{M}_\mu^{V_1}, \mathcal{M}_\mu^{A_1}) (\{u_k\}) \otimes \mathbf{Z}(\{u_k\}, \{x_k\}; \mu^2) \tag{3.47}$$

und

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_\mu^{V1}(\{x_k\}, \mu^2) &= \mathcal{M}_\mu^{\text{LO}, V1}(\{x_k\}) + \frac{\alpha_S(\mu_R^2)}{4\pi} \left\{ \widehat{\mathcal{M}}_\mu^{\text{NLO}, V1}(\{x_k\}) \right. \\
&\quad - \left[ \frac{1}{-\epsilon} \mathcal{M}_\mu^{\text{LO}, V1}(\{u_k\}) \otimes V_{V1, V1}^{(1)}(\{u_k\}, \{x_k\}) \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{1}{-\epsilon} \mathcal{M}_\mu^{\text{LO}, A1}(\{u_k\}) \otimes V_{A1, V1}^{(1)}(\{u_k\}, \{x_k\}) \right] \left( \frac{\mu_R^2}{\mu_F^2} \right)^\epsilon \right\} \\
&\quad + \mathcal{O}(\alpha_S^2), \tag{3.48a}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_\mu^{A1}(\{x_k\}, \mu^2) &= \mathcal{M}_\mu^{\text{LO}, A1}(\{x_k\}) + \frac{\alpha_S(\mu_R^2)}{4\pi} \left\{ \widehat{\mathcal{M}}_\mu^{\text{NLO}, A1}(\{x_k\}) \right. \\
&\quad - \left[ -\frac{1}{-\epsilon} \mathcal{M}_\mu^{\text{LO}, V1}(\{u_k\}) \otimes V_{V1, A1}^{(1)}(\{u_k\}, \{x_k\}) \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{-\epsilon} \mathcal{M}_\mu^{\text{LO}, A1}(\{u_k\}) \otimes V_{A1, A1}^{(1)}(\{u_k\}, \{x_k\}) \right] \left( \frac{\mu_R^2}{\mu_F^2} \right)^\epsilon \right\} \\
&\quad + \mathcal{O}(\alpha_S^2). \tag{3.48b}
\end{aligned}$$

Die Bedingung für das Wegfallen der kollinearen Divergenzen (3.30) ergibt sich jetzt zu:

$$\begin{aligned}
b_0^{IR, V1} - a_0^{V1} \otimes V_{V1, V1}^{(1)} + a_0^{A1} \otimes V_{A1, V1}^{(1)} &= 0, \\
b_0^{IR, A1} + a_0^{V1} \otimes V_{V1, A1}^{(1)} - a_0^{A1} \otimes V_{A1, A1}^{(1)} &= 0. \tag{3.49}
\end{aligned}$$

Jetzt nehmen wir den Grenzwert  $\epsilon \rightarrow 0$  und erhalten:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_\mu^{V1}(\{x_k\}; \mu_F^2) &= \left\{ \mathcal{M}_\mu^{\text{LO}, V1}(\{x_k\}) + \frac{\alpha_S(\mu_R^2)}{4\pi} \mathcal{M}_\mu^{\text{NLO}, V1}(\{x_k\}; \mu_F^2, \mu_{R,1}^2) + \dots \right\}, \\
\mathcal{M}_\mu^{A1}(\{x_k\}; \mu_F^2) &= \left\{ \mathcal{M}_\mu^{\text{LO}, A1}(\{x_k\}) + \frac{\alpha_S(\mu_R^2)}{4\pi} \mathcal{M}_\mu^{\text{NLO}, A1}(\{x_k\}; \mu_F^2, \mu_{R,1}^2) + \dots \right\}, \tag{3.50a}
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_\mu^{\text{LO}, V1}(\{x_k\}) &= a_0^{V1}, \\
\mathcal{M}_\mu^{\text{LO}, A1}(\{x_k\}) &= a_0^{A1} \tag{3.50b}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_\mu^{\text{NLO},V1}(\{x_k\}; \mu_F^2, \mu_{R,1}^2) &= \left( b_1^{UV,V1} - C_{\text{curr}}^{(1)} a_1^{V1} \right) + C_{\text{curr}}^{(1)} a_0^{V1} \ln(\mu_{R,1}^2/Q^2) \\
&\quad - \left( b_1^{IR,V1} - a_1^{V1} \otimes V_{V1,V1}^{(1)} + a_1^{A1} \otimes V_{A1,V1}^{(1)} \right) \\
&\quad - \left( a_0^{V1} \otimes V_{V1,V1}^{(1)} - a_0^{A1} \otimes V_{A1,V1}^{(1)} \right) \ln(\mu_F^2/Q^2), \\
\mathcal{M}_\mu^{\text{NLO},A1}(\{x_k\}; \mu_F^2, \mu_{R,1}^2) &= \left( b_1^{UV,A1} - C_{\text{curr}}^{(1)} a_1^{A1} \right) + C_{\text{curr}}^{(1)} a_0^{A1} \ln(\mu_{R,1}^2/Q^2) \\
&\quad - \left( b_1^{IR,A1} + a_1^{V1} \otimes V_{V1,A1}^{(1)} - a_1^{A1} \otimes V_{A1,A1}^{(1)} \right) \\
&\quad - \left( -a_0^{V1} \otimes V_{V1,A1}^{(1)} + a_0^{A1} \otimes V_{A1,A1}^{(1)} \right) \ln(\mu_F^2/Q^2). \quad (3.50c)
\end{aligned}$$

In unseren Berechnungen gilt

$$a_1^{V1} = a_1^{A1} = 0. \quad (3.51)$$

Unter Berücksichtigung dieser Bedingung und den Bedingungen für das Wegfallen der UV (3.37) und kollinearen (3.49) Divergenzen vereinfacht sich das NLO Ergebnis (3.50c) zu

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_\mu^{\text{NLO},V1}(\{x_k\}; \mu_F^2, \mu_{R,1}^2) &= b_1^{UV,V1} - b_1^{IR,V1} + b_0^{UV,V1} \ln(\mu_{R,1}^2/Q^2) - b_0^{IR,V1} \ln(\mu_F^2/Q^2), \\
\mathcal{M}_\mu^{\text{NLO},A1}(\{x_k\}; \mu_F^2, \mu_{R,1}^2) &= b_1^{UV,A1} - b_1^{IR,A1} + b_0^{UV,A1} \ln(\mu_{R,1}^2/Q^2) - b_0^{IR,A1} \ln(\mu_F^2/Q^2). \quad (3.52)
\end{aligned}$$

Zum Ende dieses Kapitel sei noch erwähnt, dass man in (3.27)

$$\delta_{h_1 \bar{h}_2} = 1, \quad \delta_{h_2 \bar{h}_3} = 1, \quad \delta_{h_1 \bar{h}_3} = 0, \quad (3.53)$$

wählen muss. Damit korrespondieren die Helizitäten zu

$$u_{\uparrow(\downarrow)} u_{\downarrow(\uparrow)} d_{\uparrow(\downarrow)}, \quad (3.54)$$

was in Übereinstimmung mit [16] ist.

### 3.7 Allgemeine Bemerkungen zu dem Fall $M_N \neq 0$

Wie wir in den vorherigen Unterkapiteln gesehen haben, gibt es Probleme bei der Einbeziehung von Beiträgen höherer Twists als  $V_1$  und  $A_1$ . Bei allen Termen der Zerlegung des

3-Quark Matrixelemente, die proportional zu einem Raum-Zeit Vektor sind, ergeben sich zu diesem Zeitpunkt unlösbare Probleme bei der partiellen Integration. Deshalb bleibt unsere Diskussion auf diejenigen Amplituden beschränkt, die diese Abhängigkeit nicht haben. Im Fall von  $M_N \neq 0$  sind dies  $\mathcal{V}_1$ ,  $\mathcal{A}_1$ ,  $\mathcal{V}_3$  und  $\mathcal{A}_3$ .

Bei der Berechnung der Beiträge zu  $V_1$  und  $A_1$  fällt auf, dass die UV Divergenzen, wie im vorherigen Unterabschnitt gezeigt, sich herauskürzen. Im Gegensatz dazu fallen die kollinearen Divergenzen nicht weg, falls man nur die Beiträge der  $V_1$  und  $A_1$  Amplituden berücksichtigt. Deshalb kann eine Mischung zwischen  $V_1$  und  $A_1$  alleine diese Terme nicht beseitigen und eine Mischung zwischen den Twist-4 Distributionsamplituden  $V_3$ ,  $A_3$  und vielleicht sogar  $V_2$  und  $A_2$  im Falle von der allgemeinen Annahme  $M_N^2 = 0$  muss miteinbezogen werden. Das Problem hierbei ist, dass wir die dazu korrespondierenden Kernel nicht wissen. Diese spielen aber eine entscheidenden Rolle im Beseitigen der Singularitäten und verändern auch die endlichen Anteile.

Falls zum Beispiel nur eine Mischung zwischen  $V_1$ ,  $A_1$ ,  $V_3$  und  $A_3$  vorhanden ist, haben wir den unbekannten Kernel

$$\begin{pmatrix} \bar{V}_{V1,V1} & \bar{V}_{V1,A1} & \bar{V}_{V1,V3} & \bar{V}_{V1,A3} \\ \bar{V}_{A1,V1} & \bar{V}_{A1,A1} & \bar{V}_{A1,V3} & \bar{V}_{A1,A3} \\ \bar{V}_{V3,V1} & \bar{V}_{V3,A1} & \bar{V}_{V3,V3} & \bar{V}_{V3,A3} \\ \bar{V}_{A3,V1} & \bar{V}_{A3,A1} & \bar{V}_{A3,V3} & \bar{V}_{A3,A3} \end{pmatrix}. \quad (3.55)$$

Wir können das Wegfallen der UV Divergenzen durch

$$\begin{aligned} b_0^{UV,V1} - C_{\text{curr}}^{(1)} a_0^{V1} &= 0, \\ b_0^{UV,A1} - C_{\text{curr}}^{(1)} a_0^{A1} &= 0, \\ b_0^{UV,V3} - C_{\text{curr}}^{(1)} a_0^{V3} &= 0, \\ b_0^{UV,A3} - C_{\text{curr}}^{(1)} a_0^{A3} &= 0 \end{aligned} \quad (3.56)$$

prüfen.

Falls wir dann weiter annehmen, dass unsere Berechnungen korrekt sind und die kollinearen Divergenzen sich wegheben \*

$$\begin{aligned} b_0^{IR,V1} - a_0^{V1} \otimes \bar{V}_{V1,V1}^{(1)} - a_0^{A1} \otimes \bar{V}_{A1,V1}^{(1)} - a_0^{V3} \otimes \bar{V}_{V3,V1}^{(1)} - a_0^{A3} \otimes \bar{V}_{A3,V1}^{(1)} &= 0, \\ b_0^{IR,A1} - a_0^{V1} \otimes \bar{V}_{V1,A1}^{(1)} - a_0^{A1} \otimes \bar{V}_{A1,A1}^{(1)} - a_0^{V3} \otimes \bar{V}_{V3,A1}^{(1)} - a_0^{A3} \otimes \bar{V}_{A3,A1}^{(1)} &= 0, \\ b_0^{IR,V3} - a_0^{V1} \otimes \bar{V}_{V1,V3}^{(1)} - a_0^{A1} \otimes \bar{V}_{A1,V3}^{(1)} - a_0^{V3} \otimes \bar{V}_{V3,V3}^{(1)} - a_0^{A3} \otimes \bar{V}_{A3,V3}^{(1)} &= 0, \\ b_0^{IR,A3} - a_0^{V1} \otimes \bar{V}_{V1,A3}^{(1)} - a_0^{A1} \otimes \bar{V}_{A1,A3}^{(1)} - a_0^{V3} \otimes \bar{V}_{V3,A3}^{(1)} - a_0^{A3} \otimes \bar{V}_{A3,A3}^{(1)} &= 0. \end{aligned} \quad (3.57)$$

und falls wir noch miteinbeziehen, dass

$$a_1^{V1} = a_1^{A1} = 0 \quad (3.58)$$

---

\*Im Gegensatz zum  $M_N = 0$  Fall, kann ein Beweis der Richtigkeit dieser Gleichungen an dieser Stelle nicht gegeben werden, da wir das explizite Aussehen der Kernels nicht wissen.



ist, dann können die endlichen Resultate in der ähnlichen Form zu (3.50) dargestellt werden:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_\mu^{V1}(\{x_k\}; \mu_F^2) &= \left\{ \mathcal{M}_\mu^{\text{LO},V1}(\{x_k\}) + \frac{\alpha_S(\mu_R^2)}{4\pi} \mathcal{M}_\mu^{\text{NLO},V1}(\{x_k\}; \mu_F^2) + \dots \right\}, \\
\mathcal{M}_\mu^{A1}(\{x_k\}; \mu_F^2) &= \left\{ \mathcal{M}_\mu^{\text{LO},A1}(\{x_k\}) + \frac{\alpha_S(\mu_R^2)}{4\pi} \mathcal{M}_\mu^{\text{NLO},A1}(\{x_k\}; \mu_F^2) + \dots \right\}, \\
\mathcal{M}_\mu^{V3}(\{x_k\}; \mu_F^2) &= \left\{ \mathcal{M}_\mu^{\text{LO},V3}(\{x_k\}) + \frac{\alpha_S(\mu_R^2)}{4\pi} \mathcal{M}_\mu^{\text{NLO},V3}(\{x_k\}; \mu_F^2) + \dots \right\}, \\
\mathcal{M}_\mu^{A3}(\{x_k\}; \mu_F^2) &= \left\{ \mathcal{M}_\mu^{\text{LO},A3}(\{x_k\}) + \frac{\alpha_S(\mu_R^2)}{4\pi} \mathcal{M}_\mu^{\text{NLO},A3}(\{x_k\}; \mu_F^2) + \dots \right\},
\end{aligned} \tag{3.59}$$

mit

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_\mu^{\text{LO},V1}(\{x_k\}) &= a_0^{V1}, \\
\mathcal{M}_\mu^{\text{LO},A1}(\{x_k\}) &= a_0^{A1}, \\
\mathcal{M}_\mu^{\text{LO},V3}(\{x_k\}) &= a_0^{V3}, \\
\mathcal{M}_\mu^{\text{LO},A3}(\{x_k\}) &= a_0^{A3}
\end{aligned} \tag{3.60}$$

und

$$\begin{aligned}
&\mathcal{M}_\mu^{\text{NLO},V1}(\{x_k\}; \mu_F^2) \\
&= b_1^{UV,V1} - b_1^{IR,V1} + \left( a_1^{V3} \otimes \bar{V}_{V3,V1}^{(1)} + a_1^{A3} \otimes \bar{V}_{A3,V1}^{(1)} \right) \\
&\quad - \left( a_0^{V1} \otimes \bar{V}_{V1,V1}^{(1)} + a_0^{A1} \otimes \bar{V}_{A1,V1}^{(1)} + a_0^{V3} \otimes \bar{V}_{V3,V1}^{(1)} + a_0^{A3} \otimes \bar{V}_{A3,V1}^{(1)} \right) \ln(\mu_F^2/Q^2) \\
&\quad + C_{\text{curr}}^{(1)} a_0^{V1} \ln(\mu_{R,1}^2/Q^2),
\end{aligned} \tag{3.61a}$$

$$\begin{aligned}
&\mathcal{M}_\mu^{\text{NLO},A1}(\{x_k\}; \mu_F^2) \\
&= b_1^{UV,A1} - b_1^{IR,A1} + \left( a_1^{V3} \otimes \bar{V}_{V3,A1}^{(1)} + a_1^{A3} \otimes \bar{V}_{A3,A1}^{(1)} \right) \\
&\quad - \left( a_0^{V1} \otimes \bar{V}_{V1,A1}^{(1)} + a_0^{A1} \otimes \bar{V}_{A1,A1}^{(1)} + a_0^{V3} \otimes \bar{V}_{V3,A1}^{(1)} + a_0^{A3} \otimes \bar{V}_{A3,A1}^{(1)} \right) \ln(\mu_F^2/Q^2) \\
&\quad + C_{\text{curr}}^{(1)} a_0^{A1} \ln(\mu_{R,1}^2/Q^2),
\end{aligned} \tag{3.61b}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_\mu^{\text{NLO},V3}(\{x_k\}; \mu_F^2) &= b_1^{UV,V3} - b_1^{IR,V3} + \left( a_1^{V3} \otimes \bar{V}_{V3,V3}^{(1)} + a_1^{A3} \otimes \bar{V}_{A3,V3}^{(1)} \right) - C_{\text{curr}}^{(1)} a_1^{V3} \\
&\quad - \left( a_0^{V1} \otimes \bar{V}_{V1,V3}^{(1)} + a_0^{A1} \otimes \bar{V}_{A1,V3}^{(1)} + a_0^{V3} \otimes \bar{V}_{V3,V3}^{(1)} + a_0^{A3} \otimes \bar{V}_{A3,V3}^{(1)} \right) \ln(\mu_F^2/Q^2) \\
&\quad + C_{\text{curr}}^{(1)} a_0^{V3} \ln(\mu_{R,1}^2/Q^2), \tag{3.61c}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_\mu^{\text{NLO},A3}(\{x_k\}; \mu_F^2) &= b_1^{UV,A3} - b_1^{IR,A3} + \left( a_1^{V3} \otimes \bar{V}_{V3,A3}^{(1)} + a_1^{A3} \otimes \bar{V}_{A3,A3}^{(1)} \right) - C_{\text{curr}}^{(1)} a_1^{A3} \\
&\quad - \left( a_0^{V1} \otimes \bar{V}_{V1,A3}^{(1)} + a_0^{A1} \otimes \bar{V}_{A1,A3}^{(1)} + a_0^{V3} \otimes \bar{V}_{V3,A3}^{(1)} + a_0^{A3} \otimes \bar{V}_{A3,A3}^{(1)} \right) \ln(\mu_F^2/Q^2) \\
&\quad + C_{\text{curr}}^{(1)} a_0^{A3} \ln(\mu_{R,1}^2/Q^2). \tag{3.61d}
\end{aligned}$$

Durch die Verwendung der Bedingung für das Wegheben der UV Divergenzen (3.56) und der kollinearen Singularitäten (3.57) erhalten wir

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_\mu^{\text{NLO},V1}(\{x_k\}; \mu_F^2) &= b_1^{UV,V1} - b_1^{IR,V1} + b_0^{UV,V1} \ln(\mu_{R,1}^2/Q^2) - b_0^{IR,V1} \ln(\mu_F^2/Q^2) \\
&\quad + \left( a_1^{V3} \otimes \bar{V}_{V3,V1}^{(1)} + a_1^{A3} \otimes \bar{V}_{A3,V1}^{(1)} \right), \\
\mathcal{M}_\mu^{\text{NLO},A1}(\{x_k\}; \mu_F^2) &= b_1^{UV,A1} - b_1^{IR,A1} + b_0^{UV,A1} \ln(\mu_{R,1}^2/Q^2) - b_0^{IR,A1} \ln(\mu_F^2/Q^2) \\
&\quad + \left( a_1^{V3} \otimes \bar{V}_{V3,A1}^{(1)} + a_1^{A3} \otimes \bar{V}_{A3,A1}^{(1)} \right), \\
\mathcal{M}_\mu^{\text{NLO},V3}(\{x_k\}; \mu_F^2) &= b_1^{UV,V3} - b_1^{IR,V3} + b_0^{UV,V3} \ln(\mu_{R,1}^2/Q^2) - b_0^{IR,V3} \ln(\mu_F^2/Q^2) \\
&\quad + \left( a_1^{V3} \otimes \bar{V}_{V3,V3}^{(1)} + a_1^{A3} \otimes \bar{V}_{A3,V3}^{(1)} \right) - C_{\text{curr}}^{(1)} a_1^{V3}, \\
\mathcal{M}_\mu^{\text{NLO},A3}(\{x_k\}; \mu_F^2) &= b_1^{UV,A3} - b_1^{IR,A3} + b_0^{UV,A3} \ln(\mu_{R,1}^2/Q^2) - b_0^{IR,A3} \ln(\mu_F^2/Q^2) \\
&\quad + \left( a_1^{V3} \otimes \bar{V}_{V3,A3}^{(1)} + a_1^{A3} \otimes \bar{V}_{A3,A3}^{(1)} \right) - C_{\text{curr}}^{(1)} a_1^{A3}. \tag{3.62}
\end{aligned}$$

Allerdings wissen wir  $\bar{V}_{V3,X}^{(1)}$  und  $\bar{V}_{A3,X}^{(1)}$  nicht und können deshalb nicht die endlichen Terme

$$a_1^{V3} \otimes \bar{V}_{V3,X}^{(1)} + a_1^{A3} \otimes \bar{V}_{A3,X}^{(1)} \quad ?! \tag{3.63}$$

berechnen. Dies ist ein ganz zentrales Problem, das zukünftige Generationen von Physikern lösen müssen. Ohne dieses Wissen kann die Berechnung im Falle von  $M_N \neq 0$ ,  $M_N^2 = 0$  nicht fortgesetzt werden.

## 3.8 Eichinvarianz

Aufgrund des interpolierenden Feldes des Nukleons, nimmt die Bedingung der Eichinvarianz der Korrelationsfunktion die Form

$$q_\mu T^\mu = \langle 0 | \eta(0) | N(P) \rangle \quad (3.64)$$

an. Weiterhin haben wir für den Ioffe Strom:

$$\langle 0 | \eta(0) | N(P) \rangle = \lambda_1 M_N N(P). \quad (3.65)$$

In der  $M_N = 0$  Näherung nimmt (3.64) unter Einbeziehung von (3.65) die einfache Form

$$q_\mu T^\mu = 0 \quad (3.66)$$

an. In dieser Näherung existieren nur die Twist-3 Beiträge zu  $V_1$  und  $A_1$ , d. h.  $\Phi_3$ . Diese sind sowohl in LO als auch in NLO separat für sich eichinvariant. In unseren Berechnungen haben wir die Eichinvarianz benutzt, um unsere Ergebnisse zu überprüfen und die Zweideutigkeit der  $\gamma_5$  Matrix zu lösen.

Dieses Kapitel diente der Vorstellung und Beschreibung der grundlegenden Vorgehensweise bei der Berechnung von NLO Beiträgen. Zunächst beschrieben wir die topologische Struktur des Prozesses und stellten dann die Probleme mit der  $\gamma_5$  Matrix und deren Lösung vor. Danach folgte die explizite Veranschaulichung der Renormierung und Faktorisierung der Divergenzen für die Amplituden  $V_1$  und  $A_1$ . Anschließend kommentierten wir weitergehende Schritte in Bezug auf die Einbeziehung anderer Distributionsamplituden. Jetzt können wir daran gehen, die Lichtkegelsammenregeln aufzustellen und dann numerische Resultate vorzustellen.



# Kapitel 4

## Lichtkegelsummenregeln

### 4.1 Herleitung der Lichtkegelsummenregeln

#### 4.1.1 Nukleonformfaktoren

Die Nukleonformfaktoren sind durch das Matrixelement des elektromagnetischen Stromes

$$\langle N(P') | j_\mu^{\text{em}}(0) | N(P) \rangle = \bar{N}(P') \left[ \gamma_\mu F_1(Q^2) - i \frac{\sigma_{\mu\nu} q^\nu}{2M_N} F_2(Q^2) \right] N(P) \quad (4.1)$$

definiert. Dabei sind  $F_1$  und  $F_2$  die Dirac und Pauli Formfaktoren. In dem hier betrachteten Fall ist der Impuls des ausgehenden Nukleons

$$P' = P - q \quad (4.2)$$

und der Impuls des einlaufenden Nukleons  $P$  sowie der Impulsübertrag

$$q^2 = -Q^2. \quad (4.3)$$

Zusätzlich zu den Formfaktoren  $F_1$  und  $F_2$  benötigt man noch den elektrischen und magnetischen Formfaktor  $G_E(Q^2)$  und  $G_M(Q^2)$ :

$$\begin{aligned} G_E(Q^2) &= F_1(Q^2) - \frac{Q^2}{4M^2} F_2(Q^2), \\ G_M(Q^2) &= F_1(Q^2) + F_2(Q^2). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Die Beziehung der Formfaktoren zur Ladung des Protons und Neutrons und des anomalen magnetischen Moments ist gegeben durch

$$\begin{aligned} G_E^p(0) &= F_1^p(0) = 1, \\ G_E^n(0) &= F_1^n(0) = 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

und

$$\begin{aligned} G_M^p(0) &= \mu_p = 2.79, & F_2^p(0) &= \kappa_p = 1.79, \\ G_M^n(0) &= \mu_n = -1.91, & F_2^n(0) &= \kappa_n = -1.91. \end{aligned} \quad (4.6)$$

### 4.1.2 Korrelationsfunktion in Termen von Formfaktoren

Nach der Herleitung, die in [25] ausgeführt wurde, können wir die Korrelationsfunktion zu den Nukleonformfaktoren in Verbindung setzen. Die Korrelationsfunktion nimmt die Form

$$T_\mu(P, q) = \frac{1}{M_N^2 - P'^2} \sum_s \langle 0 | \eta(0) | N(P', s) \rangle \langle N(P', s) | j_\mu^{\text{em}}(0) | N(P) \rangle + \dots \quad (4.7)$$

an. Dabei stehen die Punkte für höhere Resonanzen des Nukleons.

Mit der Hilfe von (4.1) und des Matrixelements des Ioffe Stroms

$$\langle 0 | \eta(0) | N(P) \rangle = \lambda_1 M_N N(P),$$

der Spinsummation  $\sum_s N(P) \bar{N}(P) = \not{P} + M_N$  und der für unsere Berechnungen adäquaten Projektion erhalten wir

$$\Lambda_+ z_\mu T^\mu = \frac{\lambda_1}{M_N^2 - P'^2} \{ 2(P \cdot z) M_N F_1(Q^2) N^+(P) + (P \cdot z) F_2(Q^2) \not{q}_\perp N^+(P) \} + \dots \quad (4.8)$$

Vergleichen wir nun (4.8) und

$$z^\mu \Lambda_+ T_\mu = (P \cdot z) \{ M_N \mathcal{A} + \not{q}_\perp \mathcal{B} \} N^+(P), \quad (4.9)$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{2\lambda_1}{M_N^2 - P'^2} F_1(Q^2) &= \mathcal{A}(Q^2, P'^2), \\ \frac{\lambda_1}{M_N^2 - P'^2} F_2(Q^2) &= \mathcal{B}(Q^2, P'^2). \end{aligned} \quad (4.10)$$

### 4.1.3 Dispersionsrelation

Wie in dem vorherigen Unterkapitel erklärt wurde, können wir  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  perturbativ in Termen von Quarks und Gluonen berechnen.

Zudem können wir formal, wie zum Beispiel in [26] dargestellt, eine Dispersionsrelation schreiben:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(Q^2, P'^2) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty ds \frac{\text{Im} \mathcal{A}(Q^2, s)}{s - P'^2}, \\ \mathcal{B}(Q^2, P'^2) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty ds \frac{\text{Im} \mathcal{B}(Q^2, s)}{s - P'^2}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Setzen wir jetzt (4.10) in (4.11) ein, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{2\lambda_1}{M_N^2 - P'^2} F_1(Q^2) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{s_0} ds \frac{\text{Im} \mathcal{A}(Q^2, s)}{s - P'^2}, \\ \frac{\lambda_1}{M_N^2 - P'^2} F_2(Q^2) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{s_0} ds \frac{\text{Im} \mathcal{B}(Q^2, s)}{s - P'^2}, \end{aligned} \quad (4.12)$$

wobei  $s_0$  ein angemessener cut-off ist. In unserem Fall ist  $s_0$  die Roper Resonanz  $s_0 \approx (1.5 \text{ GeV})^2$ . Diese Wahl von  $s_0$  eliminiert die Beiträge von anderen als die des Nukleons (Kontinuumssubtraktion).

#### 4.1.4 Boreltransformation

Bei der praktischen Anwendung kann man sich vorstellen, dass eine Potenzentwicklung von (4.12) in der Variablen  $P'^2$  durchgeführt werden muss. Um die Konvergenz dieser Expansion zu verbessern, wenden wir eine Boreltransformation an. Durch diese Boreltransformation werden die höheren Resonanzen des Nukleons hinsichtlich ihrer Massen unterdrückt.

$$B_{X \rightarrow M_B^2}[F(X)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-X)^n}{\Gamma(n)} \left[ \frac{d^n}{dX^n} F(X) \right]_{|X|=nM_B^2, X \rightarrow \infty}, \quad (4.13)$$

wobei  $M_B$  die Borelmasse ist. Zur besseren grundsätzlichen Anwendung der Transformation sind in (4.14) einfache fundamentale Beispiele dargestellt:

$$\frac{F(X)}{B[F(X)]} \left| \begin{array}{c|c|c|c|c|c} C & C \ln(X/\mu^2) & X^n & 1/X^n & 1/(s-X) \\ \hline 0 & -C & 0 & 1/(\Gamma(n)M_B^{2(n-1)}) & e^{-s/M_B^2} \end{array} \right|. \quad (4.14)$$

Der letzte Eintrag in (4.14) wird für uns im Folgenden von besonderem Interesse sein. Im Zusammenhang mit der Boreltransformation wird im nächsten Kapitel ein konkretes Beispiel für einen boreltransformierten Term gegeben. An dieser Stelle sollen aber die erwähnten Zusammenhänge vorerst ausreichen.

#### 4.1.5 Lichtkegelsummenregeln

Falls man nun die rechte und linke Seite von (4.12) in der Variablen  $X = P'^2$  boreltransformiert und die Kontinuumsschwelle  $s_0$  einführt, erhält man die Summenregeln

$$\begin{aligned} F_1(Q^2) &= \frac{1}{2\lambda_1\pi} \int_0^{s_0} ds e^{(-s+M_N^2)/M_B^2} \text{Im}\mathcal{A}(Q^2, s), \\ F_2(Q^2) &= \frac{1}{\lambda_1\pi} \int_0^{s_0} ds e^{(-s+M_N^2)/M_B^2} \text{Im}\mathcal{B}(Q^2, s). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Im Anhang B werden die relevanten imaginären Anteile verschiedener Beispielfunktionen aufgelistet.

Hier in dieser Arbeit verwenden wir eine Boreltransformation, die durch den letzten Eintrag in (4.14) gegeben ist. Dies führt dann zu (4.15). Nach der Berechnung der benötigten imaginären Anteile und der Berechnung der relevanten Integrale kann gezeigt werden, dass diese Vorgehensweise zu jener in [16] gleichwertig ist.

#### 4.1.6 Lichtkegelsummenregeln für den Fall $M_N = 0$

In der Näherung  $M_N = 0$  verlieren wir die Sicht auf die Funktion  $\mathcal{A}$  (siehe (4.9)) und damit auf den Formfaktor  $F_1$ . Der Formfaktor  $F_2(Q^2)$  wird in diesem Fall durch die Funktion  $\mathcal{B}(Q^2, P'^2)$  durch die Summenregel

$$F_2(Q^2) = \frac{1}{\lambda_1\pi} \int_0^{s_0} ds e^{-s/M_B^2} \text{Im}\mathcal{B}_{M_N=0}(Q^2, s) \quad (4.16)$$

ausgedrückt. Dabei wurde die bequeme dimensionslose Abkürzung

$$W = \frac{P'^2 + Q^2}{Q^2} \quad (4.17)$$

eingeführt. Damit konnte die Funktion  $\mathcal{B}$  durch diese neue Variable ausgedrückt werden,  $\mathcal{B}(Q^2, P'^2) \rightarrow \mathcal{B}'(Q^2, W)$ . Der Vereinfachung wegen wurde der Name der Funktion  $\mathcal{B}$  beibehalten. Aus diesem Grund muss der Wechsel der Variablen  $s \rightarrow w = (s + Q^2)/Q^2$  in (4.16) vollzogen werden.

Die  $i\eta$ -Terme, die von den Feynman Regeln für die Quark- und Gluonpropagatoren stammen, werden explizit in den resultierenden Logarithmen durch die gesamte perturbative Rechnung beibehalten. Die analogen Terme in den Nennern können einfach erhalten werden, indem man  $W \rightarrow W + i\eta$  setzt. Deshalb zeigt sich, dass das Vorzeichen vor  $W$  und  $i\eta$  immer in den Logarithmen und den Nennern gleich ist. Die Imaginärteile können nun mit der Hilfe des Anhangs B berechnet werden

Aber schauen wir uns doch dies genauer an. Die Funktion  $\mathcal{B}_{M_N=0}$  kann allgemein in der Form einer Konvolution

$$\mathcal{B}_{M_N=0}(Q^2, W) = \frac{1}{Q^2} \sum_i T_{\mathcal{B}, F^{(i)}, M_N=0}(\{x_k\}, W; \mu_F^2/Q^2) \otimes F^{(i)}(\{x_k\}; \mu_F^2) \quad (4.18)$$

mit  $F^{(i)} \in \{V_1, A_1\}$ , oder  $F^{(i)} = \Phi_3$  geschrieben werden.

Die imaginären Anteile von  $T_{\mathcal{B}, F^{(i)}, M_N=0}(\{x_k\}, W; \mu_F^2/Q^2)$  bestimmen die imaginären Anteile von  $\mathcal{B}_{M_N=0}(Q^2, W)$ .

Des Weiteren kann der harte Streuanteil  $T_{\mathcal{B}, F^{(i)}, M_N=0}(\{x_k\}, W; \mu_F^2/Q^2)$  sehr bequem als eine Summe von Termen der allgemeinen Form

$$g(\{x_k\}, W) f(\{x_k\}; \mu_F^2/Q^2, \mu_{R,1}^2/Q^2, \mu_R^2) \quad (4.19)$$

geschrieben werden.

Der Imaginärteil wird dann durch den Imaginärteil der Funktion  $g(\{x_k\}, W)$  bestimmt. Mit diesen Definitionen erhält man dann die folgende Regel für einzelne Terme, die zu  $T_{\mathcal{B}}$  und damit zu  $F_2$  beitragen:

$$\begin{aligned} F_2(Q^2) &: \frac{1}{\lambda_1 \pi} \int \mathcal{D}x \int_1^{(s_0+Q^2)/Q^2} dw e^{-(w-1)Q^2/M_B^2} \\ &\times \text{Im } g(\{x_k\}, w) \\ &\times f(\{x_k\}; \mu_F^2/Q^2, \mu_{R,1}^2/Q^2, \mu_R^2) F^{(i)}(\{x_k\}; \mu_F^2) \\ &\rightarrow \frac{1}{\lambda_1} \int_{Q^2/(Q^2+s_0)}^1 dx_i \int_0^{1-x_i} dx_j e^{-(1-x_i)Q^2/(x_i M_B^2)} \\ &\times \tilde{g}(\{x_i, x_j, 1-x_i-x_j\}, Q^2, s_0, M_B^2) \\ &\times f(\{x_i, x_j, 1-x_i-x_j\}; \mu_F^2/Q^2, \mu_{R,1}^2/Q^2, \mu_R^2) \\ &\times F^{(i)}(\{x_i, x_j, 1-x_i-x_j\}; \mu_F^2). \end{aligned} \quad (4.20)$$



Die einzelnen g-Funktionen, die in der LO und NLO Berechnung vorkommen, sind in der Tabelle 4.1 zusammen mit den korrespondierenden  $\tilde{g}$  Funktionen aufgelistet.

Diese Tabelle mit (4.20) stellen die benötigten Substitutionsregeln für die Berechnung von  $F_2$  aus dem perturbativ errechneten  $\mathcal{B}$  sicher.

Der sich ergebende Nukleonformfaktor  $F_2$ , der bis zu NLO berechnet wird, nimmt damit die Form

$$F_2(Q^2, s_0, M_B^2; \mu_F^2, \mu_R^2, \mu_{R,1}^2) = F_2^{\text{LO}}(Q^2, s_0, M_B^2; \mu_F^2) + F_2^{\text{NLO}}(Q^2, s_0, M_B^2; \mu_F^2, \mu_R^2, \mu_{R,1}^2) \quad (4.21)$$

an. Hierbei ist  $F_2^{\text{NLO}}(Q^2, s_0, M_B^2; \mu_F^2, \mu_R^2, \mu_{R,1}^2)$  durch

$$\begin{aligned} F_2^{\text{NLO}}(Q^2, s_0, M_B^2; \mu_F^2, \mu_R^2, \mu_{R,1}^2) &= \frac{\alpha_s(\mu_R^2)}{4\pi} \left[ F_2^{\text{NLO,fin}}(Q^2, s_0, M_B^2) \right. \\ &\quad + F_2^{\text{NLO,UV}}(Q^2, s_0, M_B^2) \ln \frac{\mu_{R,1}^2}{Q^2} \\ &\quad \left. + F_2^{\text{NLO,IR}}(Q^2, s_0, M_B^2) \ln \frac{\mu_F^2}{Q^2} \right]. \end{aligned} \quad (4.22)$$

definiert.

### 4.1.7 NLO Resultate

Wie in dem vorherigen Unterabschnitt erklärt, können wir die Beiträge zu  $\mathcal{A}$  bei  $M_N = 0$  nicht berechnen. Deshalb beschäftigen wir uns in diesem Abschnitt mit  $\mathcal{B}$ . Die Funktion  $\mathcal{B}$  kann als Konvolution der Distributionsamplituden  $V_1$  und  $A_1$  geschrieben werden als

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{M_N=0}(Q^2, P'^2) &= T_{\mathcal{B}, V_1, M_N=0}(\{x_k\}, Q^2, P'^2; \mu_F^2) \otimes V_1(\{x_k\}; \mu_F^2) \\ &\quad + T_{\mathcal{B}, A_1, M_N=0}(\{x_k\}, Q^2, P'^2; \mu_F^2) \otimes A_1(\{x_k\}, \mu_F^2), \end{aligned} \quad (4.23)$$

oder in Termen der Twist-3 Nukleondistributionsamplitude  $\Phi_3 = V_1 - A_1$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{M_N=0}(Q^2, P'^2) &= T_{\mathcal{B}, \Phi, M_N=0}(\{x_k\}, Q^2, P'^2; \mu_F^2) \otimes \Phi_3(\{x_k\}; \mu_F^2). \end{aligned} \quad (4.24)$$

Hierbei ist  $q = -Q^2$  der Impulsübertrag des Photons und mit  $P' = P - q$  der Impuls des auslaufenden Nukleons definiert. Die Faktorisierungsskala ist durch  $\mu_F^2$  bestimmt und durch  $\{x_k\}$  sind die Impulsbruchanteile  $x_1, x_2$  und  $x_3$  der Quarks im Nukleon definiert. An dieser Stelle sei festgehalten, dass  $x_1$  und  $x_2$  die Impulsbruchanteile der beiden up-Quarks darstellen und  $x_3$  den des down-Quarks.

Jetzt ist es bequem, die dimensionslose Größe

$$W = \frac{P'^2 + Q^2}{Q^2} \quad (4.25)$$

zu benutzen. Von nun an werden wir die Funktion  $\mathcal{B}$  immer durch  $W$  anstatt von  $P'^2$  schreiben.

Allgemein haben wir in (4.18)

$$\mathcal{B}_{M_N=0}(Q^2, W) = \frac{1}{Q^2} \sum_i T_{\mathcal{B}, F^{(i)}, M_N=0}(\{x_k\}, W; \mu_F^2/Q^2) \otimes F^{(i)}(\{x_k\}; \mu_F^2), \quad (4.26)$$

definiert, wobei  $F^{(i)}$  die Nukleondistributionsamplituden sind und  $T_{\mathcal{B}, F^{(i)}, M_N=0}$  den korrespondierenden harten Streuanteil darstellt.

Die Nukleondistributionsamplituden sind ursprünglich nicht perturbative Größen. Allerdings kann ihre Entwicklung in der Skala  $\mu_F^2$  perturbativ berechnet werden. Trotzdem betrachten wir nur die LO Evolution oder vernachlässigen die Evolution ganz. Der "harte Streuanteil" wird perturbativ in NLO errechnet. Deshalb können wir die Expansion  $T_{\mathcal{B}, F^{(i)}, M_N=0}$  durch

$$\begin{aligned} & T_{\mathcal{B}, F^{(i)}, M_N=0}(\{x_k\}, W; \mu_F^2/Q^2) \\ &= \left\{ T_{\mathcal{B}, F^{(i)}, M_N=0}^{\text{LO}}(\{x_k\}, W) + \frac{\alpha_S(\mu_R^2)}{4\pi} T_{\mathcal{B}, F^{(i)}, M_N=0}^{\text{NLO}}(\{x_k\}, W; \mu_F^2/Q^2, \mu_{R,1}^2/Q^2) + \dots \right\} \end{aligned} \quad (4.27)$$

schreiben, wobei

$$\begin{aligned} T_{\mathcal{B}, F^{(i)}, M_N=0}^{\text{NLO}}(\{x_k\}, W; \mu_F^2/Q^2, \mu_{R,1}^2/Q^2) &= T_{\mathcal{B}, F^{(i)}, M_N=0}^{\text{NLO,fin}}(\{x_k\}, W) \\ &+ T_{\mathcal{B}, F^{(i)}, M_N=0}^{\text{NLO,UV}}(\{x_k\}, W) \ln(\mu_{R,1}^2/Q^2) \\ &+ T_{\mathcal{B}, F^{(i)}, M_N=0}^{\text{NLO,IR}}(\{x_k\}, W) \ln(\mu_F^2/Q^2) \end{aligned} \quad (4.28)$$

und  $\mu_R^2$  sowie  $\mu_{R,1}^2$  die Skalen der Renormierung der Kopplungskonstante und des Ioffe Stroms bezeichnen. Diese Skalen und darüber hinaus  $\mu_F^2$  werden oft in der Literatur gleichgesetzt. Im Prinzip allerdings sind die Skalen voneinander unabhängig.

An dieser Stelle sei angemerkt, dass das Resultat  $T_{\mathcal{B}, F^{(i)}, M_N=0}$  nicht von der Renormierungsskala abhängen würde, falls alle Ordnungen in der Störungstheorie berücksichtigt werden würden. Ein Abbruch der Berechnungen bei einer beliebigen Ordnung, in unserem Fall bei NLO, allerdings bedingt die residuale Abhängigkeit. Diese Abhängigkeit würde sich bei der Berechnung von höheren Ordnungen ( $\alpha_s^n$ ,  $n \geq 2$ ) abmildern. Zusätzlich dazu haben wir auch eine residuale Abhängigkeit von  $\mathcal{B}$  von der Faktorisierungsskala. (Für Details zu diesem Punkt sei auf [27] verwiesen.)

Im Folgenden werden die LO und NLO Resultate für  $T_{\mathcal{B}, F^{(i)}, M_N=0}$  ausführlich dargestellt. Diese sind entweder proportional zu  $e_u$  oder  $e_d$ . Deshalb führen wir noch einen zusätzlichen Index ein:

$$T_{\mathcal{B}, F^{(i)}, M_N=0}^{\dots}(\dots) = T_{\mathcal{B}, F^{(i)}, M_N=0}^{\dots, e_d}(\dots) + T_{\mathcal{B}, F^{(i)}, M_N=0}^{\dots, e_u}(\dots). \quad (4.29)$$

Um die Ausdrücke zu vereinfachen und für spätere Berechnungen leicht darzustellen, führen wir die folgenden Funktionen ein:

$$g_0(x_i, W) = \frac{1}{(x_i W - 1 + i\eta)},$$

$$\begin{aligned}
g_1(x_i, W) &= -\frac{\ln(1 - x_i W - i\eta)}{(1 - x_i W - i\eta)}, \\
g_2(x_i, W) &= -\frac{\ln^2(1 - x_i W - i\eta)}{(1 - x_i W - i\eta)}, \\
g_3(x_i, W) &= \frac{\ln(1 - x_i W - i\eta)}{(W + i\eta)}, \\
g_4(x_i, W) &= \frac{\ln(1 - x_i W - i\eta)}{(W + i\eta)^2}, \\
g_5(x_i, W) &= \frac{\ln^2(1 - x_i W - i\eta)}{(W + i\eta)}, \\
g_6(x_i, W) &= \frac{\ln^2(1 - x_i W - i\eta)}{(W + i\eta)^2}, \\
g_7(x_i, x_j, W) &= -\frac{\ln(1 - (x_i + x_j)W - i\eta)}{(1 - x_i W - i\eta)}, \\
g_8(x_i, x_j, W) &= -\frac{\ln^2(1 - (x_i + x_j)W - i\eta)}{(1 - x_i W - i\eta)}, \\
g_9(x_i, x_j, W) &= \frac{\ln(1 - (x_i + x_j)W - i\eta)}{(W + i\eta)}, \\
g_{10}(x_i, x_j, W) &= \frac{\ln(1 - (x_i + x_j)W - i\eta)}{(W + i\eta)^2}, \\
g_{11}(x_i, x_j, W) &= \frac{\ln^2(1 - (x_i + x_j)W - i\eta)}{(W + i\eta)}, \\
g_{12}(x_i, x_j, W) &= \frac{\ln^2(1 - (x_i + x_j)W - i\eta)}{(W + i\eta)^2}.
\end{aligned} \tag{4.30}$$

Hierbei haben wir die  $i\eta$  Terme, die von den Feynman Integralen kommen, explizit aufgeführt. Dies ermöglicht uns die richtige Bestimmung der Imaginäranteile. In dieser Notation sind die LO Beiträge zu  $T_{\mathcal{B}, V_1, M_N=0}$  und  $T_{\mathcal{B}, A_1, M_N=0}$  :

$$\begin{aligned}
T_{\mathcal{B}, V_1, M_N=0}^{\text{LO}, e_d}(\{x_k\}, W) &= -2 e_d g_0(x_3, W), \\
T_{\mathcal{B}, A_1, M_N=0}^{\text{LO}, e_d}(\{x_k\}, W) &= 0
\end{aligned} \tag{4.31}$$

und

$$\begin{aligned}
T_{\mathcal{B}, V_1, M_N=0}^{\text{LO}, e_u}(\{x_k\}, W) &= e_u [g_0(x_1, W) + g_0(x_2, W)], \\
T_{\mathcal{B}, A_1, M_N=0}^{\text{LO}, e_u}(\{x_k\}, W) &= e_u [-g_0(x_1, W) + g_0(x_2, W)].
\end{aligned} \tag{4.32}$$

Weiterhin sind die Terme der NLO Beiträge zu  $\ln(\mu_{R,1}^2/Q^2)$  von der Form:

$$\begin{aligned} T_{\mathcal{B},V_1,M_N=0}^{\text{NLO,UV},e_d}(\{x_k\}, W) &= -4 e_d g_0(x_3, W), \\ T_{\mathcal{B},A_1,M_N=0}^{\text{NLO,UV},e_d}(\{x_k\}, W) &= 0 \end{aligned} \quad (4.33)$$

und

$$\begin{aligned} T_{\mathcal{B},V_1,M_N=0}^{\text{NLO,UV},e_u}(\{x_k\}, W) &= 2e_u [g_0(x_1, W) + g_0(x_2, W)], \\ T_{\mathcal{B},A_1,M_N=0}^{\text{NLO,UV},e_u}(\{x_k\}, W) &= 2e_u [-g_0(x_1, W) + g_0(x_2, W)]. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Als nächstes kommen wir zu den NLO Beiträgen, die zu  $\ln(\mu_F^2/Q^2)$  proportional sind. Diese entstehen durch die Faktorisierung der kollinearen Divergenzen:

$$\begin{aligned} T_{\mathcal{B},V_1,M_N=0}^{\text{NLO,IR},e_d}(\{x_k\}, W) &= \frac{4}{3} e_d \left\{ 6 g_0(x_3, W) + 8 g_1(x_3, W) \right. \\ &\quad - \frac{4x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3}{x_1x_2x_3} g_3(x_3, W) + \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2x_3} g_4(x_3, W) \\ &\quad - 2 g_7(x_3, x_1, W) - 2 g_7(x_3, x_2, W) \\ &\quad - \frac{1}{x_1} g_9(x_3, x_1, W) - \frac{1}{x_2} g_9(x_3, x_2, W) \\ &\quad \left. - \frac{1}{x_1(x_1 + x_3)} g_{10}(x_3, x_1, W) - \frac{1}{x_2(x_2 + x_3)} g_{10}(x_3, x_2, W) \right\}, \\ T_{\mathcal{B},A_1,M_N=0}^{\text{NLO,IR},e_d}(\{x_k\}, W) &= \frac{4}{3} e_d \left\{ \frac{x_1 - x_2}{x_1x_2} g_3(x_3, W) - \frac{x_1 - x_2}{x_1x_2x_3} g_4(x_3, W) \right. \\ &\quad + \frac{1}{x_1} g_9(x_3, x_1, W) - \frac{1}{x_2} g_9(x_3, x_2, W) \\ &\quad \left. - \frac{1}{x_1(x_1 + x_3)} g_{10}(x_3, x_1, W) + \frac{1}{x_2(x_2 + x_3)} g_{10}(x_3, x_2, W) \right\} \end{aligned} \quad (4.35)$$

und

$$\begin{aligned} T_{\mathcal{B},V_1,M_N=0}^{\text{NLO,IR},e_u}(\{x_k\}, W) &= -\frac{4}{3} e_u \left\{ 3 g_0(x_1, W) + 3 g_0(x_2, W) \right. \\ &\quad + 4 g_1(x_1, W) + 4 g_1(x_2, W) \\ &\quad + \frac{x_1 - 2x_3}{x_1x_3} g_3(x_1, W) + \frac{x_2 - 2x_3}{x_2x_3} g_3(x_2, W) \\ &\quad \left. + \frac{1}{x_1x_2} g_4(x_1, W) + \frac{1}{x_1x_2} g_4(x_2, W) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -g_7(x_1, x_2, W) - g_7(x_2, x_1, W) \\
& -g_7(x_1, x_3, W) - g_7(x_2, x_3, W) \\
& -\frac{1}{x_3} g_9(x_1, x_3, W) - \frac{1}{x_3} g_9(x_2, x_3, W) \\
& -\frac{1}{x_1 x_2} g_{10}(x_1, x_2, W) \Big\} , \\
T_{\mathcal{B}, A_1, M_N=0}^{\text{NLO, IR}, e_u}(\{x_k\}, W) = & -\frac{4}{3} e_u \Big\{ -3 g_0(x_1, W) + 3 g_0(x_2, W) \\
& -4 g_1(x_1, W) + 4 g_1(x_2, W) \\
& -\frac{x_1 - 2x_3}{x_1 x_3} g_3(x_1, W) + \frac{x_2 - 2x_3}{x_2 x_3} g_3(x_2, W) \\
& -\frac{1}{x_1 x_2} g_4(x_1, W) + \frac{1}{x_1 x_2} g_4(x_2, W) \\
& + g_7(x_1, x_2, W) - g_7(x_2, x_1, W) \\
& + g_7(x_1, x_3, W) - g_7(x_2, x_3, W) \\
& + \frac{1}{x_3} g_9(x_1, x_3, W) - \frac{1}{x_3} g_9(x_2, x_3, W) \\
& + \frac{x_1 - x_2}{x_1 x_2 (x_1 + x_2)} g_{10}(x_1, x_2, W) \Big\} . \tag{4.36}
\end{aligned}$$

Am Schluss werden hier die "endlichen" NLO Beiträge angegeben:

$$\begin{aligned}
T_{\mathcal{B}, V_1, M_N=0}^{\text{NLO, fin}, e_d}(\{x_k\}, W) = & \frac{2}{3} e_d \Big\{ 18 g_0(x_3, W) + 12 g_1(x_3, W) - 8 g_2(x_3, W) \\
& -\frac{12}{x_3} g_3(x_3, W) + \frac{5(x_1 + x_2)}{x_1 x_2 x_3} g_4(x_3, W) \\
& + \frac{4x_1 x_2 - x_2 x_3 - x_1 x_3}{x_1 x_2 x_3} g_5(x_3, W) - \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2 x_3} g_6(x_3, W) \\
& -3 g_7(x_3, x_1, W) - 3 g_7(x_3, x_2, W) \\
& +2 g_8(x_3, x_1, W) + 2 g_8(x_3, x_2, W) \\
& -\frac{5}{x_1(x_1 + x_3)} g_{10}(x_1, x_3, W) - \frac{5}{x_2(x_2 + x_3)} g_{10}(x_2, x_3, W) \\
& + \frac{1}{x_1} g_{11}(x_1, x_3, W) + \frac{1}{x_2} g_{11}(x_2, x_3, W) \\
& + \frac{1}{x_1(x_1 + x_3)} g_{12}(x_1, x_3, W) + \frac{1}{x_2(x_2 + x_3)} g_{12}(x_2, x_3, W) \Big\} ,
\end{aligned}$$

(4.37a)

$$\begin{aligned}
T_{B,A_1,M_N=0}^{\text{NLO,fin},e_d}(\{x_k\}, W) = & \frac{2}{3}e_d \left\{ -\frac{5(x_1-x_2)}{x_1x_2x_3} g_4(x_3, W) \right. \\
& + \frac{x_2-x_1}{x_1x_2} g_5(x_3, W) + \frac{x_1-x_2}{x_1x_2x_3} g_6(x_3, W) \\
& - 3 g_7(x_3, x_1, W) + 3 g_7(x_3, x_2, W) \\
& - \frac{5}{x_1(x_1+x_3)} g_{10}(x_1, x_3, W) + \frac{5}{x_2(x_2+x_3)} g_{10}(x_2, x_3, W) \\
& - \frac{1}{x_1} g_{11}(x_1, x_3, W) + \frac{1}{x_2} g_{11}(x_2, x_3, W) \\
& \left. + \frac{1}{x_1(x_1+x_3)} g_{12}(x_1, x_3, W) - \frac{1}{x_2(x_2+x_3)} g_{12}(x_2, x_3, W) \right\}
\end{aligned} \tag{4.37b}$$

und

$$\begin{aligned}
& T_{B,V_1,M_N=0}^{\text{NLO,fin},e_u}(\{x_k\}, W) \\
= & \frac{2}{3}e_u \left\{ -\frac{19}{2} g_0(x_1, W) - \frac{19}{2} g_0(x_2, W) \right. \\
& - 6 g_1(x_1, W) - 6 g_1(x_2, W) + 4 g_2(x_1, W) + 4 g_2(x_2, W) \\
& + \frac{2x_1x_2 + 6x_2x_3 - 3x_1x_3}{x_1x_2x_3} g_3(x_1, W) + \frac{2x_1x_2 + 6x_1x_3 - 3x_2x_3}{x_1x_2x_3} g_3(x_2, W) \\
& - \frac{4}{x_1x_2} g_4(x_1, W) - \frac{4}{x_1x_2} g_4(x_2, W) \\
& + \frac{x_1-2x_3}{x_1x_3} g_5(x_1, W) + \frac{x_2-2x_3}{x_2x_3} g_5(x_2, W) \\
& + \frac{1}{x_1x_2} g_6(x_1, W) + \frac{1}{x_1x_2} g_6(x_2, W) \\
& + 3 g_7(x_1, x_2, W) + 3 g_7(x_2, x_1, W) \\
& - g_8(x_1, x_2, W) - g_8(x_2, x_1, W) - g_8(x_1, x_3, W) - g_8(x_2, x_3, W) \\
& + \frac{3(x_1+x_2)}{x_1x_2} g_9(x_1, x_2, W) - \frac{2}{x_3} g_9(x_1, x_3, W) - \frac{2}{x_3} g_9(x_2, x_3, W) \\
& + \frac{4}{x_1x_2} g_{10}(x_1, x_2, W) \\
& \left. - \frac{1}{x_3} g_{11}(x_1, x_3, W) - \frac{1}{x_3} g_{11}(x_2, x_3, W) \right\}
\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{x_1 x_2} g_{12}(x_1, x_2, W) \Big\} , \quad (4.38a)$$

$$\begin{aligned}
& T_{\mathcal{B}, A_1, M_N=0}^{\text{NLO,fin}, e_u}(\{x_k\}, W) \\
&= \frac{2}{3} e_u \Big\{ \frac{23}{2} g_0(x_1, W) - \frac{23}{2} g_0(x_2, W) \\
&\quad + 6 g_1(x_1, W) - 6 g_1(x_2, W) - 4 g_2(x_1, W) + 4 g_2(x_2, W) \\
&\quad + \frac{4x_1 x_2 - 6x_2 x_3 - 7x_1 x_3}{x_1 x_2 x_3} g_3(x_1, W) + \frac{-4x_1 x_2 + 6x_1 x_3 + 7x_2 x_3}{x_1 x_2 x_3} g_3(x_2, W) \\
&\quad - \frac{2(x_2 - 5x_3)}{x_1 x_2 x_3} g_4(x_1, W) + \frac{2(x_1 - 5x_3)}{x_1 x_2 x_3} g_4(x_2, W) \\
&\quad + \frac{2x_3 - x_1}{x_1 x_3} g_5(x_1, W) + \frac{x_2 - 2x_3}{x_2 x_3} g_5(x_2, W) \\
&\quad - \frac{1}{x_1 x_2} g_6(x_1, W) + \frac{1}{x_1 x_2} g_6(x_2, W) \\
&\quad - 3 g_7(x_1, x_2, W) + 3 g_7(x_2, x_1, W) \\
&\quad + g_8(x_1, x_2, W) - g_8(x_2, x_1, W) + g_8(x_1, x_3, W) - g_8(x_2, x_3, W) \\
&\quad + \frac{7(x_1 - x_2)}{x_1 x_2} g_9(x_1, x_2, W) - \frac{4}{x_3} g_9(x_1, x_3, W) + \frac{4}{x_3} g_9(x_2, x_3, W) \\
&\quad - \frac{10(x_1 - x_2)}{x_1 x_2 (x_1 + x_2)} g_{10}(x_1, x_2, W) \\
&\quad + \frac{2}{x_3 (x_1 + x_3)} g_{10}(x_1, x_3, W) - \frac{2}{x_3 (x_2 + x_3)} g_{10}(x_2, x_3, W) \\
&\quad + \frac{1}{x_3} g_{11}(x_1, x_3, W) - \frac{1}{x_3} g_{11}(x_2, x_3, W) \\
&\quad + \frac{x_1 - x_2}{x_1 x_2 (x_1 + x_2)} g_{12}(x_1, x_2, W) \Big\} . \quad (4.38b)
\end{aligned}$$

Jetzt listen wir auch die Beiträge zu  $T_{\mathcal{B}, \Phi, M_N=0}$  auf. Diese können aufgrund der Symmetrie von  $T_{\mathcal{B}, V_1, M_N=0}$  und  $T_{\mathcal{B}, A_1, M_N=0}$  durch

$$T_{\mathcal{B}, \Phi, M_N=0} = T_{\mathcal{B}, V_1, M_N=0} - T_{\mathcal{B}, A_1, M_N=0} \quad (4.39)$$

bestimmt werden. Die LO Beiträge sind:

$$\begin{aligned}
T_{\mathcal{B}, \Phi, M_N=0}^{\text{LO}, e_d}(\{x_k\}, W) &= -2 e_d g_0(x_3, W) , \\
T_{\mathcal{B}, \Phi, M_N=0}^{\text{LO}, e_u}(\{x_k\}, W) &= 2 e_u g_0(x_1, W) . \quad (4.40)
\end{aligned}$$

Die NLO Beiträge proportional zu  $\ln(\mu_{R,1}^2/Q^2)$  sind:

$$\begin{aligned} T_{\mathcal{B},\Phi,M_N=0}^{\text{NLO,UV},e_d}(\{x_k\}, W) &= -4 e_d g_0(x_3, W), \\ T_{\mathcal{B},\Phi,M_N=0}^{\text{NLO,UV},e_u}(\{x_k\}, W) &= 4 e_u g_0(x_1, W). \end{aligned} \quad (4.41)$$

Die NLO Beiträge proportional zu  $\ln(\mu_F^2/Q^2)$  sind:

$$\begin{aligned} T_{\mathcal{B},\Phi,M_N=0}^{\text{NLO,IR},e_d}(\{x_k\}, W) &= \frac{8}{3} e_d \left\{ 3 g_0(x_3, W) + 4 g_1(x_3, W) \right. \\ &\quad - \frac{2x_1 - x_3}{x_1 x_3} g_3(x_3, W) + \frac{1}{x_2 x_3} g_4(x_3, W) \\ &\quad - g_7(x_3, x_1, W) - g_7(x_3, x_2, W) \\ &\quad \left. - \frac{1}{x_1} g_9(x_3, x_1, W) - \frac{1}{x_2(x_2 + x_3)} g_{10}(x_3, x_2, W) \right\}, \\ T_{\mathcal{B},\Phi,M_N=0}^{\text{NLO,IR},e_u}(\{x_k\}, W) &= -\frac{8}{3} e_u \left\{ 3 g_0(x_1, W) + 4 g_1(x_1, W) \right. \\ &\quad + \frac{x_1 - 2x_3}{x_1 x_3} g_3(x_1, W) + \frac{1}{x_1 x_2} g_4(x_1, W) \\ &\quad - g_7(x_1, x_2, W) - g_7(x_1, x_3, W) \\ &\quad \left. - \frac{1}{x_3} g_9(x_1, x_3, W) - \frac{1}{x_2(x_1 + x_2)} g_{10}(x_1, x_2, W) \right\}. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Die "endlichen" NLO Beiträge sind:

$$\begin{aligned} T_{\mathcal{B},\Phi,M_N=0}^{\text{NLO,fin},e_d}(\{x_k\}, W) &= \frac{2}{3} e_d \left\{ 18 g_0(x_3, W) + 12 g_1(x_3, W) - 8 g_2(x_3, W) \right. \\ &\quad - \frac{12}{x_3} g_3(x_3, W) + \frac{10}{x_2 x_3} g_4(x_3, W) \\ &\quad + \frac{2(2x_1 - x_3)}{x_1 x_3} g_5(x_3, W) - \frac{2}{x_2 x_3} g_6(x_3, W) \\ &\quad - 6 g_7(x_3, x_2, W) \\ &\quad + 2 g_8(x_3, x_1, W) + 2 g_8(x_3, x_2, W) \\ &\quad - \frac{10}{x_2(x_2 + x_3)} g_{10}(x_2, x_3, W) \\ &\quad \left. + \frac{2}{x_1} g_{11}(x_1, x_3, W) + \frac{2}{x_2(x_2 + x_3)} g_{12}(x_2, x_3, W) \right\}, \end{aligned} \quad (4.43a)$$



$$\begin{aligned}
& T_{\mathcal{B},\Phi,M_N=0}^{\text{NLO,fin},e_u}(\{x_k\}, W) \\
&= \frac{2}{3}e_u \left\{ -21 g_0(x_1, W) + 2 g_0(x_2, W) \right. \\
&\quad -12 g_1(x_1, W) + 8 g_2(x_1, W) \\
&\quad - \frac{2(x_1x_2 - 6x_2x_3 - 2x_1x_3)}{x_1x_2x_3} g_3(x_1, W) + \frac{2(3x_1 - 5x_3)}{x_1x_3} g_3(x_2, W) \\
&\quad + \frac{2(x_2 - 7x_3)}{x_1x_2x_3} g_4(x_1, W) - \frac{2(x_1 - 3x_3)}{x_1x_2x_3} g_4(x_2, W) \\
&\quad + \frac{2(x_1 - 2x_3)}{x_1x_3} g_5(x_1, W) + \frac{2}{x_1x_2} g_6(x_1, W) \\
&\quad + 6 g_7(x_1, x_2, W) - 2 g_8(x_1, x_2, W) - 2 g_8(x_1, x_3, W) \\
&\quad - \frac{2(2x_1 - 5x_2)}{x_1x_2} g_9(x_1, x_2, W) + \frac{2}{x_3} g_9(x_1, x_3, W) - \frac{6}{x_3} g_9(x_2, x_3, W) \\
&\quad + \frac{2(7x_1 - 3x_2)}{x_1x_2(x_1 + x_2)} g_{10}(x_1, x_2, W) \\
&\quad - \frac{2}{x_3(x_1 + x_3)} g_{10}(x_1, x_3, W) + \frac{2}{x_3(x_2 + x_3)} g_{10}(x_2, x_3, W) \\
&\quad \left. - \frac{2}{x_3} g_{11}(x_1, x_3, W) - \frac{2}{x_2(x_1 + x_2)} g_{12}(x_1, x_2, W) \right\}. \tag{4.43b}
\end{aligned}$$

An dieser Stelle sollte angemerkt werden, dass die Resultate für  $T_{\mathcal{B},\Phi,M_N=0}(\{x_k\}, W)$  viel kleiner sind als für  $T_{\mathcal{B},V_1,M_N=0}(\{x_k\}, W)$  und  $T_{\mathcal{B},A_1,M_N=0}(\{x_k\}, W)$ . Da es aber nun gleichwertig ist, die Terme  $V_1$  und  $A_1$  und die dazugehörigen "harten Streuanteile" zu betrachten, oder mit der Distributionsamplitude  $\Phi_3$  und  $T_{\mathcal{B},\Phi,M_N=0}(\{x_k\}, W)$  zu arbeiten, ist es in numerischen Berechnungen einfacher in Termen von  $\Phi_3$  zu arbeiten.

#### 4.1.8 Zusammenfassung

Jetzt fassen wir die Ausdrücke zusammen, die wir in der tatsächlichen numerischen Berechnung verwendet haben. Für den  $M_N = 0$  Fall sind die Twist-3 LO Beiträge:

$$T_{\mathcal{B},\Phi,M_N=0}^{\text{LO}}(\{x_k\}, W) = \frac{4}{3} g_0(x_1, W) + \frac{2}{3} g_0(x_3, W). \tag{4.44}$$

Die NLO Beiträge proportional zu  $\ln(\mu_{R,1}^2/Q^2)$  sind:

$$T_{\mathcal{B},\Phi,M_N=0}^{\text{NLO,UV}}(\{x_k\}, W) = 4 \left[ \frac{2}{3} g_0(x_1, W) + \frac{1}{3} g_0(x_3, W) \right]. \tag{4.45}$$

Die NLO Beiträge proportional zu  $\ln(\mu_F^2/Q^2)$  sind:

$$\begin{aligned}
& T_{\mathcal{B},\Phi,M_N=0}^{\text{NLO,IR}}(\{x_k\}, W) \\
&= 4 \left[ -\frac{4}{3} g_0(x_1, W) - \frac{2}{3} g_0(x_3, W) - \frac{16}{9} g_1(x_1, W) - \frac{8}{9} g_1(x_3, W) \right. \\
&\quad + \frac{4(2x_3 - x_1)}{9x_1x_3} g_3(x_1, W) + \frac{2(2x_1 - x_3)}{9x_1x_3} g_3(x_3, W) \\
&\quad - \frac{4}{9x_1x_2} g_4(x_1, W) - \frac{2}{9x_2x_3} g_4(x_3, W) \\
&\quad + \frac{4}{9} g_7(x_1, x_2, W) + \frac{4}{9} g_7(x_1, x_3, W) + \frac{2}{9} g_7(x_3, x_1, W) + \frac{2}{9} g_7(x_3, x_2, W) \\
&\quad + \frac{2(2x_1 + x_3)}{9x_1x_3} g_9(x_1, x_3, W) \\
&\quad \left. + \frac{4}{9x_2(x_1 + x_2)} g_{10}(x_1, x_2, W) + \frac{2}{9x_2(x_2 + x_3)} g_{10}(x_2, x_3, W) \right]. \tag{4.46}
\end{aligned}$$

Die "endlichen" NLO Beiträge sind:

$$\begin{aligned}
& T_{\mathcal{B},\Phi,M_N=0}^{\text{NLO,fin}}(\{x_k\}, W) \\
&= 4 \left[ -\frac{7}{3} g_0(x_1, W) + \frac{2}{9} g_0(x_2, W) - g_0(x_3, W) \right. \\
&\quad - \frac{4}{3} g_1(x_1, W) - \frac{2}{3} g_1(x_3, W) + \frac{8}{9} g_2(x_1, W) + \frac{4}{9} g_2(x_3, W) \\
&\quad + \frac{2}{9} \left( \frac{6}{x_1} + \frac{2}{x_2} - \frac{1}{x_3} \right) g_3(x_1, W) + \frac{2}{9} \left( \frac{3}{x_3} - \frac{5}{x_1} \right) g_3(x_2, W) + \frac{2}{3x_3} g_3(x_3, W) \\
&\quad + \frac{2(x_2 - 7x_3)}{9x_1x_2x_3} g_4(x_1, W) - \frac{2(x_1 - 3x_3)}{9x_1x_2x_3} g_4(x_2, W) - \frac{5}{9x_2x_3} g_4(x_3, W) \\
&\quad + \frac{2(x_1 - 2x_3)}{9x_1x_3} g_5(x_1, W) + \frac{(x_3 - 2x_1)}{9x_1x_3} g_5(x_3, W) \\
&\quad + \frac{2}{9x_1x_2} g_6(x_1, W) + \frac{1}{9x_2x_3} g_6(x_3, W) + \frac{2}{3} g_7(x_1, x_2, W) + \frac{1}{3} g_7(x_3, x_2, W) \\
&\quad - \frac{2}{9} g_8(x_1, x_2, W) - \frac{2}{9} g_8(x_1, x_3, W) - \frac{1}{9} g_8(x_3, x_1, W) - \frac{1}{9} g_8(x_3, x_2, W) \\
&\quad + \frac{2}{9} \left( \frac{5}{x_1} - \frac{2}{x_2} \right) g_9(x_1, x_2, W) + \frac{2}{9x_3} g_9(x_1, x_3, W) - \frac{2}{3x_3} g_9(x_2, x_3, W) \\
&\quad \left. + \frac{(14x_1 - 6x_2)}{9x_1x_2(x_1 + x_2)} g_{10}(x_1, x_2, W) - \frac{2}{9x_3(x_1 + x_3)} g_{10}(x_1, x_3, W) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(2x_2 + 5x_3)}{9x_2x_3(x_2 + x_3)} g_{10}(x_2, x_3, W) - \frac{(2x_1 + x_3)}{9x_1x_3} g_{11}(x_1, x_3, W) \\
& - \frac{2}{9x_2(x_1 + x_2)} g_{12}(x_1, x_2, W) - \frac{1}{9x_2(x_2 + x_3)} g_{12}(x_2, x_3, W) \Big]. \quad (4.47)
\end{aligned}$$

#### 4.1.9 Boreltransformation am Beispiel des Terms $g_1(x_i, W)$

Da die Boreltransformation eine sehr wichtige und nicht ganz triviale Rolle in den Berechnungen einnimmt, sei nun ein Beispiel für die Anwendung der Transformation gegeben. Hierbei betrachten wir zum Beispiel die Funktion  $g_1(x_i, W)$ . Wie wir aus (4.15) sehen, müssen wir den imaginären Anteil berechnen und dann in entsprechender Weise integrieren. Die Berechnung erfolgt dann in den folgenden Schritten:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi} \text{Im} \left\{ -\frac{\ln(1 - x_i W - i\eta)}{1 - x_i W - i\eta} \right\} &= \frac{\Theta(x_i W - 1)}{1 - x_i W} - \delta(1 - x_i W) \ln(x_i W - 1) \\
&= \left\{ \frac{\Theta(x_i W - 1)}{1 - x_i W} \right\}_+ - \delta(1 - x_i W) \ln(|1 - b|). \quad (4.48)
\end{aligned}$$

In (4.48) haben wir die sogenannte  $\{\}_+$  Schreibweise benutzt. Diese wird im Anhang B ausführlich erklärt, so dass hier nicht weiter auf diese Umformung eingegangen wird. Die Variable  $b$  in (4.48) wird später bestimmt.

Jetzt müssen wir noch über  $s$  integrieren:

$$\int_0^{s_0} ds \frac{1}{s - P^2} \left\{ B(x_i) \left[ \left\{ \frac{\Theta(x_i W - 1)}{1 - x_i W} \right\}_+ - \delta(1 - x_i W) \ln(|1 - b|) \right] \otimes F^{(i)}(x_i) \right\}. \quad (4.49)$$

Führen wir jetzt die Boreltransformation durch, bekommen wir folgenden Term:

$$\begin{aligned}
& \rightarrow \int_0^{s_0} ds e^{-s/M_B^2} \left\{ \frac{\Theta(x_i W - 1)}{1 - x_i W} \right\}_+ B(x_i) \otimes F^{(i)}(x_i) \\
& - Q^2 \frac{e^{-\frac{(1-x_i)Q^2}{x_i M_B^2}}}{x_i} \ln(|1 - b|) \Theta\left(x_i - \frac{Q^2}{Q^2 + s_0}\right) B(x_i) \otimes F^{(i)}(x_i). \quad (4.50)
\end{aligned}$$

Mit der Hilfe von

$$\left\{ \frac{\Theta(x_i W - 1)}{1 - x_i W} \right\}_+ = \frac{\Theta(x_i W - 1)}{1 - x_i W} - \delta(1 - x_i W) \int_a^b dz \frac{\Theta(z - 1)}{1 - z} \quad (4.51)$$

und  $b = x_i \frac{s_0 + Q^2}{Q^2}$  ergibt sich dann

$$\int_{x_i}^{x_i \frac{(s_0 + Q^2)}{Q^2}} dt \frac{Q^2}{x_i} e^{-\frac{(t-x_i)Q^2}{x_i M_B^2}} \left[ \frac{\Theta(t - 1)}{1 - t} - \delta(1 - t) \int_{x_i}^{x_i \frac{s_0 + Q^2}{Q^2}} dz \frac{\Theta(z - 1)}{1 - z} \right] B(x_i) \otimes F^{(i)}(x_i)$$

$$\begin{aligned}
& -Q^2 \frac{e^{-\frac{(1-x_i)Q^2}{x_i M_B^2}}}{x_i} \ln \left( \left| 1 - x_i \frac{s_0 + Q^2}{Q^2} \right| \right) \Theta \left( x_i - \frac{Q^2}{Q^2 + s_0} \right) B(x_i) \otimes F^{(i)}(x_i) \\
& = Q^2 \int_{x_i}^{x_i \frac{s_0 + Q^2}{Q^2}} dt \frac{\Theta(t-1)}{(1-t)x_i} \left[ e^{-\frac{(t-x_i)Q^2}{x_i M_B^2}} - e^{-\frac{(1-x_i)Q^2}{x_i M_B^2}} \right] B(x_i) \otimes F^{(i)}(x_i) \\
& -Q^2 \frac{e^{-\frac{(1-x_i)Q^2}{x_i M_B^2}}}{x_i} \ln \left( \left| 1 - x_i \frac{s_0 + Q^2}{Q^2} \right| \right) \Theta \left( x_i - \frac{Q^2}{Q^2 + s_0} \right) B(x_i) \otimes F^{(i)}(x_i) \\
& = Q^2 \int_{\frac{Q^2}{Q^2 + s_0}}^1 dx_i \int_0^{1-x_i} dx_j \int_1^{x_i \frac{s_0 + Q^2}{Q^2}} dt \frac{e^{-\frac{(t-x_i)Q^2}{x_i M_B^2}} - e^{-\frac{(1-x_i)Q^2}{x_i M_B^2}}}{(1-t)x_i} \\
& \quad B(x_i, x_j, 1 - x_i - x_j) F(x_i, x_j, 1 - x_i - x_j) \\
& -Q^2 \int_{\frac{Q^2}{Q^2 + s_0}}^1 dx_i \int_0^{1-x_i} dx_j \frac{1}{x_i} e^{-\frac{(1-x_i)Q^2}{x_i M_B^2}} \ln \left( x_i \frac{s_0 + Q^2}{Q^2} - 1 \right) \\
& \quad B(x_i, x_j, 1 - x_i - x_j) F(x_i, x_j, 1 - x_i - x_j). \tag{4.52}
\end{aligned}$$

Das Ergebnis (4.52) stellt das Endergebnis der Boreltransformation dar. In Tabelle 4.1 sind die Ergebnisse für die Berechnungen aller g-Funktionen angegeben. Hierbei sollte erwähnt werden, dass derartige Berechnungen insgesamt sehr aufwändig waren und einen erheblichen Zeitaufwand bedeuteten. Allerdings war die ausführliche Beschäftigung mit der Boreltransformation von entscheidender Bedeutung und musste wohl durchdacht werden.

Das 4. Kapitel diente der Herleitung der Lichtkegelsummenregeln und wir haben die Berechnung der Formfaktoren und die allgemeine Darstellung der dazugehörigen Beiträge veranschaulicht. Die darauf folgende Boreltransformation und Kontinuumsabstraktion diente der Unterdrückung von höheren Resonanzen des Nukleons und stellte einen wichtigen Berechnungsschritt dar. Jetzt können wir uns der Numerik zuwenden und verschiedene interessante Plots veranschaulichen.

Tabelle 4.1: Tabelle der Substitutionsregeln für die  $g_n$  Funktionen ( $n = 0, \dots, 12$ )

$g_n(x_i, x_j, W)$	$\tilde{g}_n(x_i, x_j, Q^2, s_0, M_B^2)$
$\frac{1}{(x_i W - 1 + i\eta)}$	$-\frac{1}{x_i}$
$-\frac{\ln(1 - x_i W - i\eta)}{(1 - x_i W - i\eta)}$	$-\frac{1}{x_i} \ln \left( x_i \frac{s_0 + Q^2}{Q^2} - 1 \right)$ $+ \frac{1}{x_i} \int_1^{x_i \frac{s_0 + Q^2}{Q^2}} dt \frac{1}{(1-t)} \left[ \exp \left( \frac{(1-t)Q^2}{x_i M_B^2} \right) - 1 \right]$
$-\frac{\ln^2(1 - x_i W - i\eta)}{(1 - x_i W - i\eta)}$	$-\frac{1}{x_i} \left[ \ln^2 \left( x_i \frac{s_0 + Q^2}{Q^2} - 1 \right) - \frac{\pi^2}{3} \right]$ $+ \frac{2}{x_i} \int_1^{x_i \frac{s_0 + Q^2}{Q^2}} dt \frac{\ln(t-1)}{(1-t)} \left[ \exp \left( \frac{(1-t)Q^2}{x_i M_B^2} \right) - 1 \right]$
$\frac{\ln(1 - x_i W - i\eta)}{(W + i\eta)}$	$-\int_1^{x_i \frac{s_0 + Q^2}{Q^2}} dt \frac{1}{t} \exp \left( \frac{(1-t)Q^2}{x_i M_B^2} \right)$
$\frac{\ln(1 - x_i W - i\eta)}{(W + i\eta)^2}$	$-x_i \int_1^{x_i \frac{s_0 + Q^2}{Q^2}} dt \frac{1}{t^2} \exp \left( \frac{(1-t)Q^2}{x_i M_B^2} \right)$
$\frac{\ln^2(1 - x_i W - i\eta)}{(W + i\eta)}$	$-2 \int_1^{x_i \frac{s_0 + Q^2}{Q^2}} dt \frac{\ln(t-1)}{t} \exp \left( \frac{(1-t)Q^2}{x_i M_B^2} \right)$
$\frac{\ln^2(1 - x_i W - i\eta)}{(W + i\eta)^2}$	$-2x_i \int_1^{x_i \frac{s_0 + Q^2}{Q^2}} dt \frac{\ln(t-1)}{t^2} \exp \left( \frac{(1-t)Q^2}{x_i M_B^2} \right)$

$-\frac{\ln(1 - (x_i + x_j)W - i\eta)}{(1 - x_i W - i\eta)}$	$-\frac{1}{x_i} \left[ \ln \left( x_i \frac{s_0 + Q^2}{Q^2} - 1 \right) + \ln \left( \frac{x_i + x_j}{x_i} \right) \right] \\ + \frac{1}{x_i} \int_{\frac{x_i}{x_i + x_j}}^{x_i \frac{s_0 + Q^2}{Q^2}} dt \frac{1}{(1 - t)} \left[ \exp \left( \frac{(1 - t)Q^2}{x_i M_B^2} \right) - 1 \right]$
$-\frac{\ln^2(1 - (x_i + x_j)W - i\eta)}{(1 - x_i W - i\eta)}$	$-\frac{1}{x_i} \left[ \left( \ln \left( x_i \frac{s_0 + Q^2}{Q^2} - 1 \right) + \ln \left( \frac{x_j + x_i}{x_i} \right) \right)^2 \right. \\ \left. - \frac{\pi^2}{3} - \pi^2 (1 - \delta(x_j)) + 2 \operatorname{Li}_2 \left( \frac{x_j}{(x_i + x_j)(1 - x_i \frac{s_0 + Q^2}{Q^2})} \right) \right] \\ + \frac{2}{x_i} \int_{\frac{x_i}{x_i + x_j}}^{x_i \frac{s_0 + Q^2}{Q^2}} dt \frac{\ln \left( t(1 + \frac{x_j}{x_i}) - 1 \right)}{(1 - t)} \left[ \exp \left( \frac{(1 - t)Q^2}{x_i M_B^2} \right) - 1 \right]$
$\frac{\ln(1 - (x_i + x_j)W - i\eta)}{(W + i\eta)}$	$-\int_{\frac{x_i}{x_i + x_j}}^{x_i \frac{s_0 + Q^2}{Q^2}} dt \frac{1}{t} \exp \left( \frac{(1 - t)Q^2}{x_i M_B^2} \right)$
$\frac{\ln(1 - (x_i + x_j)W - i\eta)}{(W + i\eta)^2}$	$-x_i \int_{\frac{x_i}{x_i + x_j}}^{x_i \frac{s_0 + Q^2}{Q^2}} dt \frac{1}{t^2} \exp \left( \frac{(1 - t)Q^2}{x_i M_B^2} \right)$
$\frac{\ln^2(1 - (x_i + x_j)W - i\eta)}{(W + i\eta)}$	$-2 \int_{\frac{x_i}{x_i + x_j}}^{x_i \frac{s_0 + Q^2}{Q^2}} dt \frac{\ln \left( t(1 + \frac{x_j}{x_i}) - 1 \right)}{t} \exp \left( \frac{(1 - t)Q^2}{x_i M_B^2} \right)$
$\frac{\ln^2(1 - (x_i + x_j)W - i\eta)}{(W + i\eta)^2}$	$-2x_i \int_{\frac{x_i}{x_i + x_j}}^{x_i \frac{s_0 + Q^2}{Q^2}} dt \frac{\ln \left( t(1 + \frac{x_j}{x_i}) - 1 \right)}{t^2} \exp \left( \frac{(1 - t)Q^2}{x_i M_B^2} \right)$

Bemerkung: Wie erwartet, ist der Fall  $x_j = 0$  korrespondierend zum Ergebnis der vorherigen Seite

# Kapitel 5

## Numerische Ergebnisse

### 5.1 Nukleondistributionsamplituden

Nun können wir uns den numerischen Ergebnissen zuwenden und betrachten zuerst die Nukleondistributionsamplituden. An dieser Stelle sei für eine detaillierte Betrachtung der Nukleondistributionsamplituden auf [16] verwiesen. Hier geben wir nur die Ausdrücke an, die für unsere Berechnungen notwendig sind.

Für den  $M_N = 0$  Fall sind nur die Twist-3 DAs

$$\begin{aligned} V_1(\{x_k\}, \mu^2) &= 120 x_1 x_2 x_3 [\phi_3^0(\mu^2) + \phi_3^+(\mu^2)(1 - 3x_3)] , \\ A_1(\{x_k\}, \mu^2) &= 120 x_1 x_2 x_3 (x_2 - x_1) \phi_3^-(\mu^2) \end{aligned} \quad (5.1)$$

relevant, oder gleichwertig:

$$\begin{aligned} \Phi_3(\{x_k\}, \mu^2) &= V_1(\{x_k\}, \mu^2) - A_1(\{x_k\}, \mu^2) \\ &= 120 x_1 x_2 x_3 [\phi_3^0(\mu^2) + \phi_3^+(\mu^2)(1 - 3x_3) - \phi_3^-(\mu^2)(x_2 - x_1)] . \end{aligned} \quad (5.2)$$

Hierbei ist

$$\begin{aligned} \phi_3^0 &= f_N , \\ \phi_3^+ &= \frac{7}{2} f_N (1 - 3V_1^d) , \\ \phi_3^- &= \frac{21}{2} f_N A_1^u . \end{aligned} \quad (5.3)$$

Die Normierung, die durch die QCD Summenregeln berechnet wird [16], ist

$$f_N(\mu_0^2 = 1\text{GeV}^2) = (5.0 \pm 0.5) \cdot 10^{-3} \text{GeV}^2 . \quad (5.4)$$

Tatsächlich ist die Normierung der Twist-3, -4, -5 DAs durch drei Parameter  $f_N$ ,  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  bestimmt. Diese sind aus der QCD Summenregelliteratur wohl bekannt und korrespondieren zu den Nukleonkopplungen zu den drei verschiedenen 3-Quark Operatoren. Die numerischen Werte der anderen zwei Normierungskonstanten sind [16]:

$$\lambda_1(\mu_0^2 = 1\text{GeV}^2) = -(2.7 \pm 0.9) \cdot 10^{-2} \text{GeV}^2 \quad (5.5)$$

und  $\lambda_2(\mu_0^2 = 1\text{GeV}^2) = (5.4 \pm 1.9) \cdot 10^{-2}\text{GeV}^2$ .

Die Form der Twist-3 DAs, d. h. die Abweichung von der asymptotischen Form wird durch die dimensionslosen Parameter  $V_1^d$  und  $A_1^u$  bestimmt. Die weiteren drei Parameter  $f_1^d$ ,  $f_1^u$  und  $f_2^d$  erscheinen in Twist-4 und Twist-5. Die Werte dieser Parameter und deshalb die Form der DAs wird kontrovers diskutiert. Das ältere Bild von den QCD Summenregeln, das manchmal in der Literatur als Chernyak-Zhitnitsky-like Modell (wir nennen es im Folgenden CZ-like Modell) bezeichnet wird [16], ergibt die Werte

$$\begin{aligned} V_1^d &= 0.23 \pm 0.03, \\ A_1^u &= 0.38 \pm 0.15 \end{aligned} \quad (5.6)$$

sowie  $f_1^d = 0.40 \pm 0.05$ ,  $f_1^u = 0.07 \pm 0.05$  und  $f_2^d = 0.22 \pm 0.05$ . In [16] werden die folgenden Werte für die sogenannten BLW Parameter vorgeschlagen:

$$\begin{aligned} V_1^d &= 0.30, \\ A_1^u &= 0.13 \end{aligned} \quad (5.7)$$

sowie  $f_1^d = 0.33$ ,  $f_1^u = 0.09$  und  $f_2^d = 0.25$ . Schließlich ist die asymptotische DA definiert durch:

$$\begin{aligned} V_1^d &= 1/3, \\ A_1^u &= 0 \end{aligned} \quad (5.8)$$

sowie  $f_1^d = 3/10$ ,  $f_1^u = 1/10$  und  $f_2^d = 4/15$ . Deshalb gilt für die asymptotische Twist-3 DA:

$$\phi_3^0 = f_N, \quad \phi_3^+ = \phi_3^- = 0 \quad (5.9)$$

und dies führt zu

$$\Phi_3(\{x_k\}, \mu^2) = V_1(\{x_k\}, \mu^2) = 120 x_1 x_2 x_3 f_N(\mu^2). \quad (5.10)$$

## 5.2 Numerische Resultate

Um numerische Vorhersagen für den Nukleonformfaktor  $F_2$  (4.22), der bis zu NLO berechnet wird, zu erhalten, benutzen wir (4.40-4.43),  $\Phi_3$  von dem vorhergehenden Abschnitt und den Ausdruck (4.20) sowie Tabelle 4.1. Die zusätzlich notwendigen numerischen Werte für die Borelmasse  $M_B$  und  $s_0$  sind aus [16] entnommen:

$$\begin{aligned} s_0 &= (1.5\text{GeV})^2, \\ M_B^2 &= 2\text{GeV}^2 \end{aligned} \quad (5.11)$$

und

$$\lambda_1(\mu_0^2 = 1\text{GeV}^2) = -2.7 \cdot 10^{-2} \text{GeV}^2. \quad (5.12)$$

Alternativ kann man den modifizierten Wert für  $\lambda_1$  benutzen, indem man den Ausdruck (B10) aus [9] benutzt, bei dem  $E_3$  durch den Faktor  $(1 + 71/12\alpha_s/\pi)$  ersetzt wird [28] (Gleichung (24)):

$$\lambda_1^{\text{corr.}}(2\text{GeV}^2) = -3.3 \cdot 10^{-2} \text{GeV}^2, \quad (5.13)$$



d. h.

$$\lambda_1^{corr.}(1 - 10\text{GeV}^2) = ((-3.4) - (-3.2)) \cdot 10^{-2} \text{GeV}^2. \quad (5.14)$$

Der 1-Loop Ausdruck für  $\alpha_s$  ist

$$\alpha_s(\mu^2) = \frac{4\pi}{\beta_0 \ln \mu^2 / \Lambda^2}, \quad (5.15)$$

mit  $\beta_0 = 11 - 2/3n_f$  und  $n_f = 3$ . Für  $\Lambda$  nehmen wir den Wert  $\Lambda = 0.2 \text{ GeV}$ .

In dieser Arbeit beziehen wir die DA Evolution von  $f_N(\mu^2)$  und  $\lambda_1(\mu^2)$  nicht mit ein. Wir nehmen an, dass diese Effekte klein sind. Die LO Twist-3 und Twist-4 Ergebnisse für  $M_N \neq 0$  sind im Anhang D dargestellt. Die höheren Twist Resultate und die  $x^2$  Korrekturen wurden aus [16] entnommen. Da wir zunächst einmal die Größe der NLO Korrekturen des Nukleons und die damit verbundenen Veränderungen hinsichtlich der LO Berechnungen veranschaulichen wollen, stellen die nachfolgenden Untersuchungen bezüglich des Protons eine absolut ausreichende Quelle dar.

Es ist vorteilhaft und bequem die Resultate für  $F_2$  und  $G_M$  zum Dipolformfaktor

$$G_D = \frac{1}{(1 + Q^2/0.71\text{GeV}^2)^2} \quad (5.16)$$

zu normieren.

### 5.2.1 $M_N = 0$ Fall: $F_2$ bei Twist-3 zu NLO

In den Abbildungen 5.1a) und 5.2a) präsentieren wir die relative Größe der NLO Korrekturen (4.22) bei  $\mu_R^2 = \mu_F^2 = \mu_{R,1}^2 = Q^2$  im Vergleich zu der LO Vorhersage d.h. das Verhältnis  $F_2^{\text{NLO}}/F_2^{\text{LO}}$  in Abhängigkeit von  $Q^2$  und berechnet für die asymptotischen Twist-3 DAs (5.8). Dabei sei bemerkt, dass für diese Wahl der Skalen nur der  $F_2^{\text{NLO,fin}}$  Teil von (4.22) beiträgt. In den Abbildungen 5.1b) und 5.2b) sind die kompletten NLO Vorhersagen zu  $F_2$  normiert zu  $\mu_p G_D$  dargestellt. Wir testen die Sensitivität der Resultate bei der Wahl von  $s_0$  und  $M_B^2$ , indem wir die Resultate für den vorgegebenen Parametersatz (5.11) als auch für  $s_0 = 4 \text{ GeV}^2$ ,  $M_B^2 = 1 \text{ GeV}^2$  in Abbildung 5.1 und  $M_B^2 = 1 \text{ GeV}^2$  in Abbildung 5.2 untersuchen. Von den Abbildungen 5.1a) und 5.2a) können wir sehen, dass für die asymptotischen DAs und  $\mu_R^2 = \mu_F^2 = \mu_{R,1}^2 = Q^2$  das Verhältnis  $F_2^{\text{NLO}}/F_2^{\text{LO}}$  und deshalb die NLO Korrekturen im Vergleich zur LO Vorhersage ziemlich groß um 60-70% für  $1 < Q^2 < 10 \text{ GeV}^2$  sind und mit wachsendem  $Q^2$  ansteigen. Indem  $M_B^2$  auf  $1 \text{ GeV}^2$  fällt und/oder  $s_0$  auf  $s_0 = 4 \text{ GeV}^2$  ansteigt, kann das Verhältnis für höhere  $Q^2$  auf jeweils 60% und 45% fallen. Die Sensitivität der LO (strichpunktierte und gestrichelte Linien) und der NLO Vorhersagen (durchgezogene und lang gestrichelte Linien) für  $F_2$  in Abhängigkeit von  $M_B^2$  und  $s_0$  ist in den Abbildungen 5.1b) und 5.2b) veranschaulicht. Man kann sehen, dass dieser Effekt groß ist. Im Folgenden gebrauchen wir die festgelegte Parameterwahl (5.11), die in [16] angewendet wurde.

In der Abbildung 5.3 wird der Wechsel der Skalen  $\mu_R^2$ ,  $\mu_F^2$  und  $\mu_{R,1}^2$  untersucht. Durch den Vergleich der Abbildungen 5.2a) und 5.3a) kann durch die Wahl  $\mu_F^2 = \mu_{R,1}^2 = M_B^2$  und das Beibehalten von  $\mu_R^2 = Q^2$  das Verhältnis der NLO Korrekturen zur LO Vorhersage auf 69%

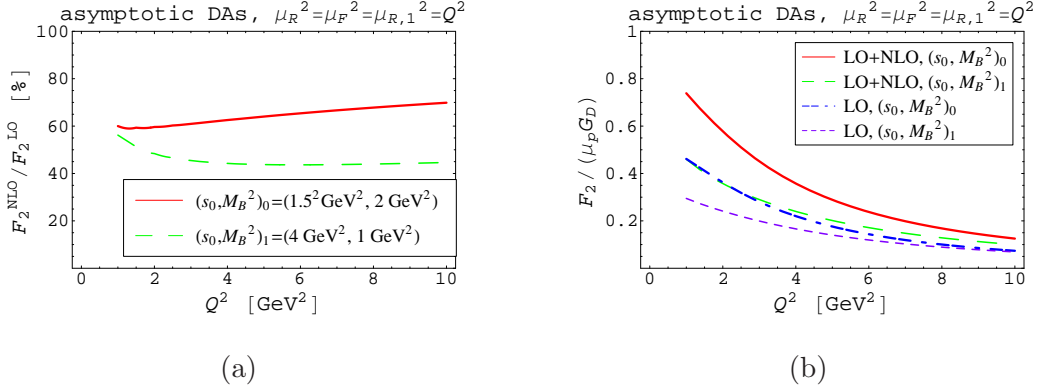


Abbildung 5.1: NLO Berechnungen der Twist-3 Beiträge zu  $F_2$  für  $M_N = 0$  mit den asymptotischen DAs und  $\mu_R^2 = Q^2$ : a) Das Verhältnis  $F_2^{\text{NLO,fin}} / F_2^{\text{LO}}$  (d. h. das Verhältnis der NLO Korrekturen berechnet bei  $\mu_F^2 = \mu_{R,1}^2 = Q^2$  zur LO Vorhersage) berechnet für die festgelegte Parameterwahl (5.11)  $s_0 = 1.5^2 \text{ GeV}^2$  und  $M_B^2 = 2 \text{ GeV}^2$  (durchgezogene Linie) und für die Testwahl  $s_0 = 4 \text{ GeV}^2$  und  $M_B^2 = 1 \text{ GeV}^2$  (gestrichelte Linie). b) Die Twist-3 Vorhersage für  $F_2$  normiert zu  $\mu_p G_D$ : NLO (dicke durchgezogene Linie) und LO (dicke strichpunktierte Linie) für (5.11), NLO (dünne lang gestrichelte Linie) und LO (dünne kurz gestrichelte Linie) für  $s_0 = 4 \text{ GeV}^2$  und  $M_B^2 = 1 \text{ GeV}^2$ .

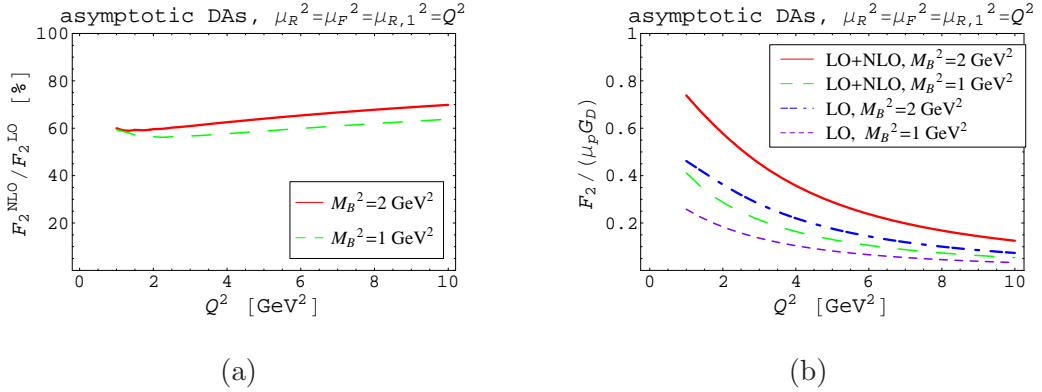


Abbildung 5.2: NLO Berechnungen der Twist-3 Beiträge zu  $F_2$  berechnet für  $M_N = 0$  mit den asymptotischen DAs und  $\mu_R^2 = Q^2$ : a) Das Verhältnis  $F_2^{\text{NLO,fin}} / F_2^{\text{LO}}$  (d. h. das Verhältnis der NLO Korrekturen, berechnet bei  $\mu_F^2 = \mu_{R,1}^2 = Q^2$  zur LO Vorhersage) berechnet für die festgelegte Parameterwahl (5.11)  $M_B^2 = 2 \text{ GeV}^2$  (durchgezogene Linie) und für die Testwahl  $M_B^2 = 1 \text{ GeV}^2$  (gestrichelte Linie). b) Die Twist-3 Vorhersage zu  $F_2$  normiert zu  $\mu_p G_D$ : NLO (dicke durchgezogene Linie) und LO (dicke strichpunktierte Linie) für  $M_B^2 = 2 \text{ GeV}^2$ , NLO (dünne lang gestrichelte Linie) und LO (dünne kurz gestrichelte Linie) für  $M_B^2 = 1 \text{ GeV}^2$ .

- 44% für den Bereich  $1 < Q^2 < 10 \text{ GeV}^2$  verringert werden. Damit verringern die Terme  $F_2^{\text{NLO,IR}}$  und  $F_2^{\text{NLO,UV}}$  aus (4.22) die Größe der NLO Korrekturen. Indem  $\mu_R^2$  zu  $M_B^2$  verändert wird, wächst das Verhältnis, da dann keine Unterdrückung durch die laufende Kopplungskonstante  $\alpha_S$  mehr vorhanden ist. Da aber die Skala der Kopplungskonstantenrenormierung  $\mu_R^2$  zur Virtualität der Quark Propagatoren, die in diesem Prozess auftauchen, korrespondieren sollte, wird im Folgenden der Wert  $\mu_R^2 = M_B^2$  angenommen. Aus der Abbildung 5.3b) sieht man darüber hinaus, dass der Wechsel der Skalen die NLO Vorhersage für den ganzen Formfaktor  $F_2$  nicht beeinflusst. Der Einfachheit halber setzen wir deshalb für die folgenden Berechnungen als vernünftige Wahl  $\mu_R^2 = \mu_F^2 = \mu_{R,1}^2 = M_B^2$  an.

Schließlich untersuchen wir in Abbildung 5.4 die Größe der NLO Korrekturen und der kompletten NLO Vorhersage in Abhängigkeit von der Wahl der DA. Wir wenden die asymptotischen DAs (5.8) (durchgezogene Linie), die BLW DAs (5.7) (strichpunktierte Linie) und die CZ-like DAs (5.6) an (gestrichelte Linie). In Abbildung 5.4b) werden die LO Vorhersagen mit dünnen Linien beschrieben, wohingegen die NLO Vorhersagen dicke Linien beschreiben. Aus Abbildung 5.4a) sieht man, dass für den Bereich  $1 < Q^2 < 10 \text{ GeV}^2$  das Verhältnis von NLO Korrekturen zur LO Vorhersage im Bereich von 58% - 73% für die asymptotischen DAs, 62% - 89% für die BLW DAs und 68% - 99% für die CZ-like DAs liegt. Sowohl die LO Vorhersage als auch die NLO Korrekturen sind für beide DAs, die von der asymptotischen abweichen, größer.

Zusammenfassend können wir damit behaupten, dass die NLO Korrekturen für  $F_2$  im Fall von  $M_N = 0$  groß sind, wobei das Verhältnis  $F_2^{\text{NLO}}/F_2^{\text{LO}}$  ungefähr 70% beträgt.

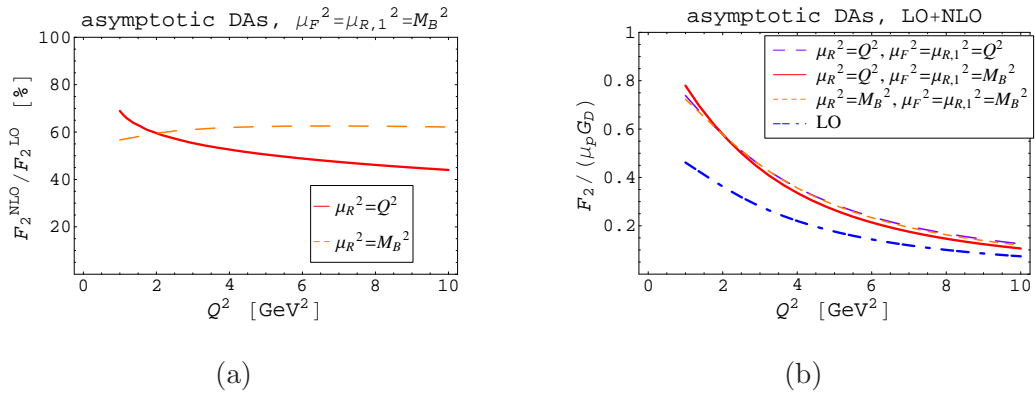


Abbildung 5.3: NLO Berechnungen der Twist-3 Beiträge zu  $F_2$  berechnet für  $M_N = 0$  und den asymptotischen DAs: a) Das Verhältnis  $F_2^{\text{NLO}}/F_2^{\text{LO}}$  (d. h. das Verhältnis der NLO Korrekturen zur LO Vorhersage) berechnet mit  $\mu_F^2 = \mu_{R,1}^2 = M_B^2$  und  $\mu_R^2 = Q^2$  (durchgezogene Linie) sowie  $\mu_R^2 = M_B^2$  (gestrichelte Linie). b) Die Twist-3 Vorhersage zu  $F_2$  normiert zu  $\mu_p G_D$ : NLO für  $\mu_F^2 = \mu_{R,1}^2 = M_B^2$  und  $\mu_R^2 = Q^2$  (dicke durchgezogene Linie), NLO für  $\mu_F^2 = \mu_{R,1}^2 = M_B^2$  und  $\mu_R^2 = M_B^2$  (dünne kurz gestrichelte Linie), NLO für  $\mu_F^2 = \mu_{R,1}^2 = Q^2$  und  $\mu_R^2 = Q^2$  (dünne lang gestrichelte Linie) und LO (dicke strichpunktierte Linie).

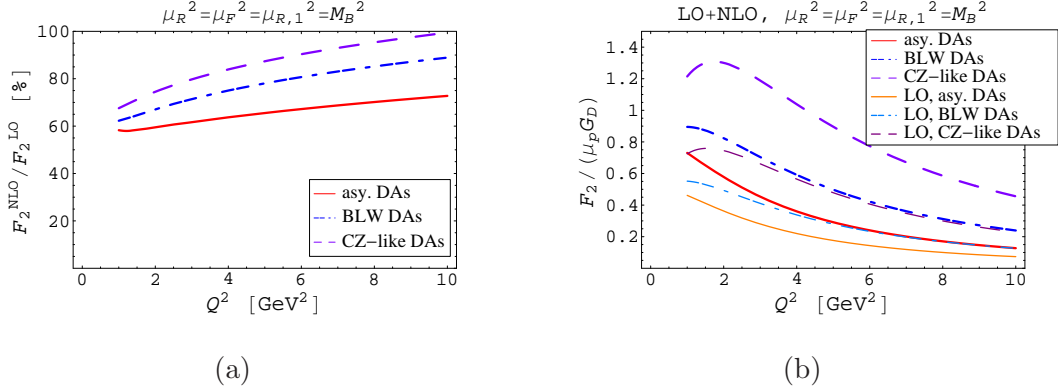


Abbildung 5.4: NLO Berechnungen der Twist-3 Beiträge zu  $F_2$  für  $M_N = 0$  mit  $\mu_R^2 = \mu_F^2 = \mu_{R,1}^2 = M_B^2$ : a) Das Verhältnis  $F_2^{\text{NLO}}/F_2^{\text{LO}}$  (d. h. das Verhältnis der NLO Korrekturen zur LO Vorhersage) berechnet mit den asymptotischen DAs (durchgezogene Linie), den BLW DAs (strichpunktierte Linie) und den CZ-like DAs (gestrichelte Linie). b) Die Twist-3 Vorhersage zu  $F_2$  normiert zu  $\mu_p G_D$ : NLO (dicke durchgezogene Linie) und LO (dünne durchgezogene Linie) für die asymptotischen DAs, NLO (dicke strichpunktierte Linie) und LO (dünne strichpunktierte Linie) für die BLW DAs, sowie NLO (dicke gestrichelte Linie) und LO (gestrichelte Linie) für die CZ-like DAs.

### 5.2.2 Verschiedene Beiträge zu $F_1$ und $F_2$

Im vorherigen Abschnitt haben wir die Größe der NLO Korrekturen für  $F_2$  zu Twist-3 berechnet und  $M_N = 0$  angenommen. Dies wurde dann mit den korrespondierenden LO Vorhersagen verglichen. In diesem Abschnitt analysieren wir die Größe dieser Korrekturen im Vergleich zu anderen Beiträgen: Masseneffekte, höhere Twists und  $x^2$  Korrekturen für LO.

#### $F_2$

Der Effekt durch das Einbeziehen von  $M_N^2$  Termen bei LO Twist-3 Beiträgen für  $F_2$  korrespondiert zur Veränderung der LO Beiträge, die man bei den asymptotischen DAs erhält, im Bereich von (-3) - 23%. Die Veränderung nimmt für wachsendes  $Q^2$  zu und man erhält ähnliche Zahlen für alle drei DAs. Aber diskutieren wir die höheren Twist Effekte genauer und beginnen wir mit Twist-4. Wir stellen an dieser Stelle fest, dass für (siehe Resultate in Anhang D)  $M_N^2 = 0$  die Twist-4 Beiträge zu  $F_2$  verschwinden (der gesamte Beitrag ist proportional zu  $M_N^2$ ). Das Verhältnis von LO Twist-4 zu LO Twist-3 Beiträgen zu  $F_2$  ist im Bereich von (-5) zu (-35)% für die asymptotischen DAs, 2 bis (-0.7)% für die BLW DAs, und 13 bis 24% für die CZ-like DAs. Dieses Verhalten ist offensichtlich sehr unterschiedlich für verschiedene DAs. Im Falle von den asymptotischen DAs und den CZ-like DAs steigt der Betrag der Verhältnisse mit wachsendem  $Q^2$  an, während für die BLW Parameter das Verhältnis abnimmt, das Vorzeichen wechselt und dann der Betrag ansteigt. Die Rolle der LO Twist-4 Beiträge ist deshalb klein im Falle der Resultate, die mit BLW DAs ermittelt wurden und etwas deutlicher im Falle der anderen zwei untersuchten DAs. Wir haben weiterhin eine deutliche Abhängigkeit der Resultate von der Wahl der beiden Parameter  $f_1^d$  und  $A_1^u$

Tabelle 5.1: Die Größe von verschiedenen Beiträgen zu  $F_2$  (normiert zu den LO Twist-3 Beiträgen für  $M_N^2 \neq 0$ ) im Bereich  $1 \leq Q^2 \leq 10 \text{ GeV}^2$ .

DAs	$\frac{F_2^{\text{LO,tw-3}} _{M_N^2=0}}{F_2^{\text{LO,tw-3}}}$	$\frac{F_2^{\text{LO,tw-4}}}{F_2^{\text{LO,tw-3}}}$	$\frac{F_2^{\text{LO,tw-5}}}{F_2^{\text{LO,tw-3}}}$	$\frac{F_2^{\text{LO},x^2\text{-corr.}}}{F_2^{\text{LO,tw-3}}}$
asy.	103 - 81%	(-5) - (-35)%	34 - 91%	(-35) - (-43)%
BLW	98 - 81%	2 - (-0.7)%	14 - 21%	(-33) - (-28)%
CZ-like	92 - 81%	13 - 24 %	(-13) - (-29)%	(-31) - (-18)%

Tabelle 5.2: Die Größe von verschiedenen Beiträgen zu  $F_1$  (normiert zu den LO Twist-4 Beiträgen für  $M_N^2 \neq 0$ ) im Bereich  $1 \leq Q^2 \leq 10 \text{ GeV}^2$ .

DAs	$\frac{F_2^{\text{NLO,tw-3}} _{M_N^2=0, \mu_R^2=\mu_F^2=\mu_{R,1}^2=Q^2}}{F_2^{\text{LO,tw-3}}}$	$\frac{F_2^{\text{NLO,tw-3}} _{M_N^2=0, \mu_R^2=\mu_F^2=\mu_{R,1}^2=M_B^2}}{F_2^{\text{LO,tw-3}}}$
asy.	62 - 57%	60 - 59%
BLW	62 - 68%	61 - 72%
CZ-like	63 - 76%	62 - 80%

bemerkt. Schließlich fassen wir unsere Ergebnisse über die Größe der verschiedenen Beiträge zu  $F_2$  in den Tabellen 5.1 und 5.2 zusammen. Man sieht, dass die Twist-3 Beiträge dominieren und positiv sind. Die  $x^2$ -Beiträge sind negativ und das Verhältnis der  $x^2$ -Beiträge zu den LO Twist-3 Beiträgen verändert sich nicht viel für verschiedene DAs. Die Twist-5 Beiträge sind deutlicher als die der Twist-4 und für beide ist das Verhältnis zu Twist-3 Beiträgen sehr sensitiv zur Form der DAs. Die NLO Beiträge sind positiv und ungefähr im Bereich von 60% für  $\mu_R^2 = \mu_F^2 = \mu_{R,1}^2 = Q^2$ , während für  $\mu_R^2 = \mu_F^2 = \mu_{R,1}^2 = M_B^2$  die Beiträge ca. 60-80% betragen. Deshalb sind die Twist-3 NLO Korrekturen durchaus messbar und wichtig.

### $F_1$

Im nächsten Abschnitt werden wir unsere Resultate mit den experimentellen Daten vergleichen und dafür benötigen wir die Beiträge zu  $F_1$ . Deshalb analysieren wir hier die LO Beiträge zu  $F_1$ . Der Effekt des Einbeziehens von  $M_N^2$  Termen in die LO Twist-3 Beiträge für  $F_1$  korrespondiert zur Veränderung der LO Beiträge, die man durch die asymptotischen DAs erreicht, im Bereich von 6-24 % für  $1 \leq Q^2 \leq 10 \text{ GeV}^2$ . Die Veränderung verkleinert sich zuerst und steigt dann mit  $Q^2$  an (Minimum bei  $Q^2 \approx 2 \text{ GeV}^2$ ) und man erhält ähnliche Zahlen für alle drei DAs. Im Fall von  $F_1$  sind die Twist-3 Beiträge negativ und im Vergleich mit den Twist-4 Beiträgen klein. Im Gegensatz zu  $F_2$  sind die Twist-4 Beiträge zu  $F_1$  nicht proportional zu  $M_N^2$  (siehe Anhang D). Das Verhältnis von Twist-3 zu Twist-4 Beiträgen bei  $F_1$  ist im Bereich von (-19)-(-7)% für die asymptotischen DAs, (-25)-(-12)% für die BLW DAs und (-46)-(-105)% für die CZ-like DAs. Deshalb sind, abgesehen von Beiträgen der CZ-like DAs, bei großen  $Q^2$  die Twist-4 Beiträge größer als die zu Twist-3. Die Ergebnisse werden für  $F_1$  in der Tabelle 5.3 zusammengefasst. Die Twist-4 Beiträge sind dominant.

Tabelle 5.3: Die Größe von verschiedenen Beiträgen zu  $F_1$  (normiert zu LO Twist-4 Beiträgen für  $M_N^2 \neq 0$ ) im Bereich  $1 \leq Q^2 \leq 10 \text{ GeV}^2$ .

DAs	$\frac{F_1^{\text{LO,tw-3}}}{F_1^{\text{LO,tw-4}}}$	$\frac{F_1^{\text{LO,tw-5}}}{F_1^{\text{LO,tw-4}}}$	$\frac{F_1^{\text{LO,tw-6}}}{F_1^{\text{LO,tw-4}}}$	$\frac{F_1^{\text{LO},x^2\text{-corr.}}}{F_1^{\text{LO,tw-4}}}$
asy.	(-19) - (-7)%	(-4) - (-5)%	3 - 2%	5 - 2%
BLW	(-25) - (-12)%	(-2)%	3 - 2%	6 - 3%
CZ-like	(-45) - (-105)%	5 - 37%	5 - 14%	10 - 22%

### 5.2.3 Vergleich mit den experimentellen Daten

In diesem Abschnitt wenden wir uns nun dem Vergleich mit den experimentellen Daten zu. In den Abbildungen 5.5, 5.6 und 5.7 zeigen wir die Resultate für  $G_M/(\mu_p G_D)$ ,  $\mu_p G_E/G_M$  und  $\sqrt{Q^2} F_2/(\kappa_p F_1)$ , die mit der Hilfe der asymptotischen DAs (durchgezogene Linie), der BLW DAs (strichpunktierte Linie) und der CZ-like DAs errechnet wurden (gestrichelte Linie). Zum Vergleich stellen wir in den Abbildungen 5.5a), 5.6a) und 5.7a) die LO Vorhersagen dar, die man auf der Basis der Resultate von [16] erhält. Dabei sind die höheren Twists (bis zu Twist-6) und die  $x^2$  Korrekturen enthalten. Der Wert von  $\lambda_1$  aus (5.12) wurde dabei benutzt. Die NLO Vorhersagen, d. h. die LO Vorhersagen auf der Basis der Resultate von [16] plus der NLO Korrekturen zu Twist-3 im  $M_N = 0$  Fall, der in dieser Arbeit berechnet wird, werden in den Abbildungen 5.5b), 5.6b) und 5.7b) dargestellt. Hierbei untersuchen wir auch die Veränderungen bei der Wahl von  $\lambda_1$ . Die NLO Resultate, die mit dem vorgegebenen Parameterwert von  $\lambda_1$  (5.12) berechnet wurden, werden, wie in den Abbildungen 5.5a), 5.6a) und 5.7a) dargestellt, durch dünne Linien beschrieben. Die dicken Linien bezeichnen die NLO Resultate, die mit dem korrigierten Wert von  $\lambda_1$  (5.14) berechnet wurden.

In der Abbildung 5.5 zeigen wir die LCSR Vorhersage für  $G_M$  normiert zu  $\mu_p G_D$ . Die experimentellen Daten  $\blacktriangle$  SLAC 1994 [29],  $\blacksquare$  SLAC 1994 [30],  $\blacklozenge$  JLab 2004 [31],  $\star$  JLab 2005 [32] wurden via Rosenbluth Separation berechnet. Die LO Ergebnisse 5.5a) geben den asymptotischen und den BLW DAs den Vorzug. Die Einbeziehung der NLO Korrekturen (vergleiche dünne Linien in den Abbildungen 5.5a) und 5.5b)) heben die Vorhersagen an. Der Wechsel von  $\lambda_1$  zum korrigierten Wert (5.14) senkt die NLO Resultate etwas (dicke Linien). Die NLO Resultate liegen für niedrige  $Q^2$  im Vergleich mit den Daten zu hoch. Für höhere  $Q^2$  sind die NLO Resultate für die asymptotischen DAs und die BLW DAs näher an den experimentellen Daten.

In der Abbildung 5.6 präsentieren wir die LCSR Vorhersage für  $\mu_p G_E/G_M$ . Wir benutzen sowohl die experimentellen Daten via Rosenbluth Separation ( $\blacksquare$  SLAC 1994 [30],  $\blacklozenge$  JLab 2004 [31],  $\star$  JLab 2005 [32],  $\blacktriangle$  SLAC 1970 (klein) [33] und Bonn 1971 (groß) [34], Daten zusammengefasst in [35]) als auch die Daten via Polarisationstransfer ( $\triangle$  JLab 2001 [36],  $\square$  JLab 1999 [37]). Die LO Resultate in Abbildung 5.6a) zeigen, dass die Resultate mit den CZ-like DAs ziemlich niedrig sind und jenseits der Daten liegen. Die Ergebnisse mit den asymptotischen DAs sind am oberen Ende der experimentellen Daten und die BLW Resultate sind in besserer Übereinstimmung mit den Daten. An dieser Stelle kann man aber keine endgültige Schlussfolgerung ziehen. Das Einbeziehen der NLO Korrekturen (vergleiche



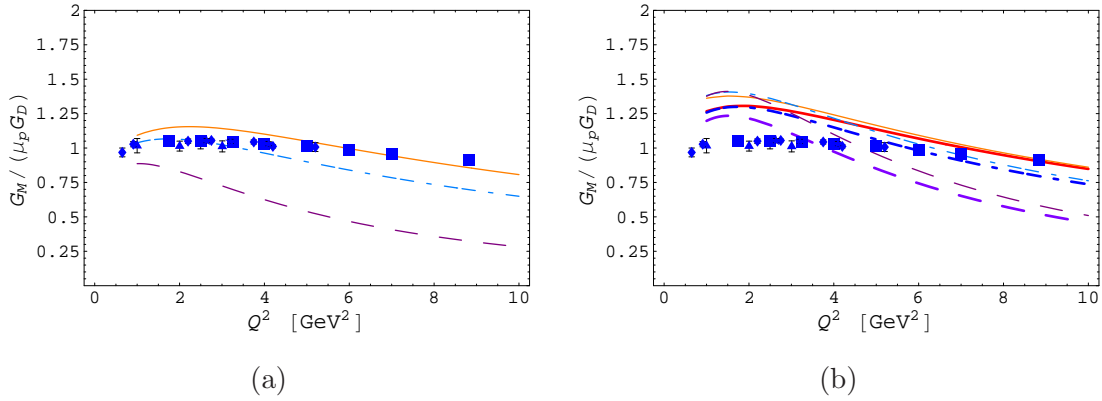


Abbildung 5.5: LCSR Vorhersage des Protons für  $G_M$  normiert zu  $\mu_p G_D$ : a) LO Vorhersage auf der Basis der Resultate von [16] (d. h. die höheren Twists bis zu Twist-6) und die  $x^2$  Korrekturen sind eingeschlossen): asymptotische DAs (durchgezogene Linie), BLW DAs (strichpunktierte Linie) und CZ-like DAs (gestrichelte Linie). b) LO Vorhersage auf der Basis der Resultate von [16] plus NLO Korrekturen zu Twist-3 im  $M_N = 0$  Fall berechnet mit  $\mu_R^2 = \mu_F^2 = \mu_{R,1}^2 = M_B^2$ . Dünne Linien: der festgelegte Parameterwert von  $\lambda_1$  (5.12). Dicke Linien: der korrigierte Wert von  $\lambda_1$  (5.14). Die veranschaulichten Resultate korrespondieren zu den asymptotischen DAs (durchgezogene Linie), den BLW DAs (strichpunktierte Linie) und den CZ-like DAs (gestrichelte Linie). Experimentelle Daten, erhalten via Rosenbluth Separation:  $\blacktriangle$  SLAC 1994 [29],  $\blacksquare$  SLAC 1994 [30],  $\blacklozenge$  JLab 2004 [31],  $\star$  JLab 2005 [32].

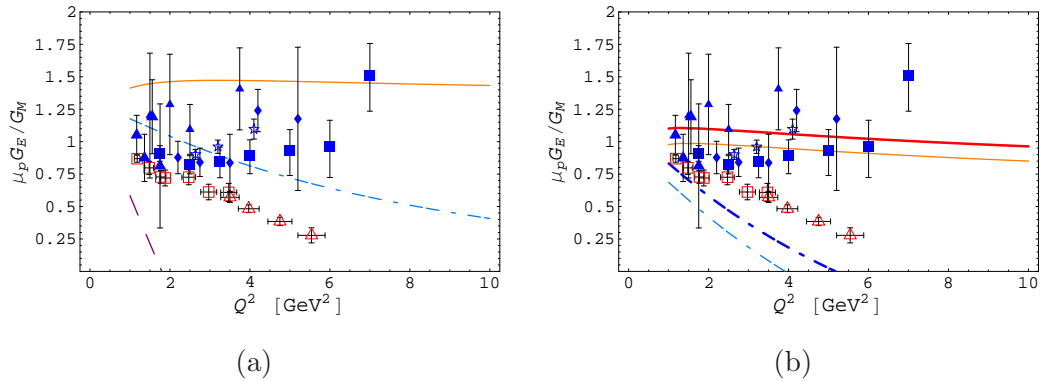


Abbildung 5.6: LCSR Vorhersage des Protons für  $\mu_p G_E / G_M$ : a) LO Vorhersage auf der Basis der Resultate von [16] (d. h. die höheren Twists bis zu Twist-6 und die  $x^2$  Korrekturen sind miteinbezogen): asymptotische DAs (durchgezogene Linie), BLW DAs (strichpunktierte Linie) und CZ-like DAs (gestrichelte Linie). b) LO Vorhersage auf der Basis der Resultate von [16] plus der NLO Korrekturen zu  $F_2$  für Twist-3  $M_N = 0$  Fall berechnet mit  $\mu_R^2 = \mu_F^2 = \mu_{R,1}^2 = M_B^2$ . Dünne Linien: der festgelegte Parameterwert von  $\lambda_1$  (5.12). Dicke Linien: der korrigierte Parameterwert von  $\lambda_1$  (5.14). Die gezeigten Resultate korrespondieren mit den asymptotischen DAs (durchgezogene Linie) und den BLW DAs (strichpunktierte Linie). Experimentelle Daten, erhalten via Rosenbluth Separation:  $\blacksquare$  SLAC 1994 [30],  $\blacklozenge$  JLab 2004 [31],  $\star$  JLab 2005 [32],  $\blacktriangle$  SLAC 1970 (klein) [33] und Bonn 1971 (groß) [34], Daten zusammengefasst in [35]. Experimentelle Daten, erhalten via Polarisationstransfer:  $\triangle$  JLab 2001 [36],  $\square$  JLab 1999 [37].

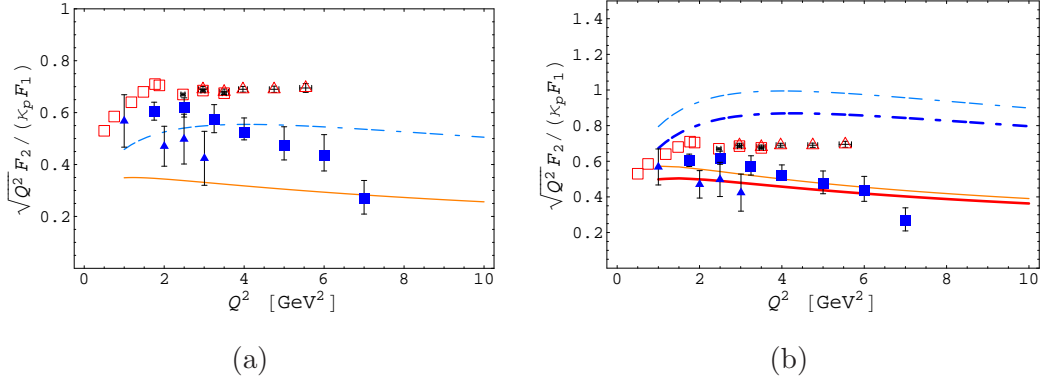


Abbildung 5.7: LCSR Vorhersage des Protons für  $\sqrt{Q^2} F_2 / (\kappa_p F_1)$ : a) LO Vorhersage auf der Basis der Resultate von [16] (d. h. die höheren Twists bis zu Twist-6 und die  $x^2$  Korrekturen sind miteinbezogen): asymptotische DAs (durchgezogene Linie) und BLW DAs (strichpunktierte Linie). b) LO Vorhersage auf der Basis der Resultate von [16] plus NLO Korrekturen zu  $F_2$  für Twist-3 im  $M_N = 0$  Fall berechnet mit  $\mu_R^2 = \mu_F^2 = \mu_{R,1}^2 = M_B^2$ . Dünne Linien: der festgelegte Parameterwert von  $\lambda_1$  (5.12). Dicke Linien: der korrigierte Wert von  $\lambda_1$  (5.14). Die gezeigten Resultate korrespondieren zu den asymptotischen DAs (durchgezogene Linie) und den BLW DAs (strichpunktierte Linie). Experimentelle Daten, erhalten via Rosenbluth Separation: ■ SLAC 1994 [30], ▲ SLAC 1994 [29]. Experimentelle Daten, erhalten via Polarisationstransfer: △ und □ wie in [16], Fig. 15 (M. Jones, private communication).

dünne Linien in den Abbildungen 5.6a) und 5.6b)) erniedrigt die Vorhersagen signifikant, während die Veränderung von  $\lambda_1$  zum korrigierten Wert (5.14) die NLO Resultate leicht anhebt (dicke Linien). Nun kann man sehen, dass die Resultate, die mit dem korrigierten Wert von  $\lambda_1$  erreicht werden, in ziemlich guter Übereinstimmung mit den Daten sind. Die Resultate mit den asymptotischen DAs scheinen die Daten via Rosenbluth Separation gut zu beschreiben, wohingegen die NLO Ergebnisse mit den BLW DAs der Krümmung der Daten via Polarisationstransfer folgen.

In der Abbildung 5.7 stellen wir die LCSR Vorhersage für  $\sqrt{Q^2} F_2 / (\kappa_p F_1)$  dar. Wir zeigen sowohl die experimentellen Daten via Rosenbluth Separation (■ SLAC 1994 [30], ▲ SLAC 1994 [29]) als auch die Daten via Polarisationstransfer (△ und □). Die LO Ergebnisse werden in Abbildung 5.7a) dargestellt. Dabei sind die Resultate, die mit den asymptotischen DAs berechnet werden, am unteren Ende der Daten und das BLW Ergebnis ist relativ nahe bei den experimentellen Daten. Das Einbeziehen der NLO Korrekturen (vergleiche dünne Linien in den Abbildungen 5.7a) 5.7b)) hebt die Vorhersagen deutlich an. Die Veränderung von  $\lambda_1$  zum korrigierten Wert (5.14) senkt die NLO Ergebnisse leicht (dicke Linien). Wie im Falle von  $\mu_p G_E / G_M$  kann man sehen, dass die NLO Resultate, besonders diejenigen mit dem korrigierten Wert von  $\lambda_1$ , in guter Übereinstimmung mit den Daten sind. Wieder scheinen die Resultate mit den asymptotischen DAs die Daten via Rosenbluth Separation gut zu beschreiben und die Ergebnisse mit den BLW DAs den Daten via Polarisationstransfer zu folgen. Zusammenfassend lässt sich also sagen, dass die Einbindung der NLO Korrekturen zu Twist-3 für  $M_N = 0$  eine deutliche Veränderung in den LCSR Vorhersagen für  $G_M / (\mu_p G_D)$ ,  $\mu_p G_E / G_M$  und  $\sqrt{Q^2} F_2 / (\kappa_p F_1)$  ergibt. Die NLO Korrekturen bringen, insbesondere bei der Benutzung



des korrigierten Wertes von  $\lambda_1$  (5.14), die Vorhersagen für  $\mu_p G_E/G_M$  und  $\sqrt{Q^2} F_2/(\kappa_p F_1)$  in besserer Übereinstimmung mit den experimentellen Daten. Für diese Größen beschreiben die Resultate mit den asymptotischen DAs die Daten via Rosenbluth Separation gut und die Resultate mit den BLW DAs folgen den Daten via Polarisationstransfer.

Die in dieser Arbeit untersuchten drei DAs sind natürlich veränderbar und die Parameter der DAs stellen keine fest vorgegebenen Werte dar. Allerdings wurden in früheren Veröffentlichungen diese drei DAs angewendet und wir wollten in dieser Arbeit die Veränderungen in Bezug auf diese DAs beschreiben. Die Parameter der DAs könnten an die experimentellen Daten gefittet werden, allerdings ist auf dieser Stufe der Untersuchungen dies kaum sinnvoll. Die Einbeziehung der Plots für das Neutron stellen in diesem Zusammenhang keinen nennenswerten Mehrwert dar, da in dieser Arbeit erst einmal geklärt werden musste, in welche Richtung die NLO Korrekturen überhaupt gehen und hierfür stellten die Daten für das Proton und der Vergleich mit der theoretischen Vorhersage eine absolut ausreichende Quelle dar. Das allgemeine Ziel der NLO Berechnungen ist einen Beitrag zur genaueren Bestimmung der Nukleondistributionsamplituden zu liefern. Die obigen Untersuchungen sind erste Schritte in diese Richtung.



# Kapitel 6

## Zusammenfassung und Ausblick

Das allgemeine Ziel dieser Arbeit war die Berechnung von NLO Korrekturen in der QCD Kopplung für die Nukleonformfaktoren.

Dafür stellten wir die notwendigen Definitionen für die Berechnungen in Kapitel 2 dar. Dort definierten wir die Korrelationsfunktion

$$T_\mu(P, q) = i \int d^4x e^{iqx} \langle 0 | T \{ \eta(0) j_\mu(x) \} | N(P) \rangle$$

und veranschaulichten das Nukleonmatrixelement des 3-Quark Operators sowie die Twistzerlegung.

Im nächsten Kapitel beschrieben wir dann direkt die Berechnung der NLO Beiträge. Wir erklärten sowohl die Anzahl der beitragenden Diagramme als auch die Vorgehensweise bei der dimensional Regularisierung und Renormierung für die Distributionsamplituden  $V_1$  und  $A_1$  im Fall  $M_N = 0$  sehr ausführlich. Danach folgten einige Bemerkungen zum Fall  $M_N \neq 0$  und zu der Eichinvarianz.

Das nachfolgende Kapitel widmeten wir der Darstellung der Lichtkegelsummenregeln (LCSR). Durch das Darstellen der Korrelationsfunktion zum einen durch hadronische Zustände und zum anderen durch perturbative Berechnungen können die Formfaktoren  $F_1$  und  $F_2$  extrahiert werden. Da wir uns in dieser Arbeit allerdings auf den Fall  $M_N = 0$  beschränken, können wir nur zu dem Formfaktor  $F_2$  NLO Korrekturen berechnen.

Nach der Darstellung der LCSR Resultate wird noch einmal ausführlich auf die Boreltransformation eingegangen. Diese wird benötigt, um höhere Resonanzen des Nukleons zu unterdrücken. Dabei wird sowohl auf der hadronischen Seite als auch auf der Seite der Lichtkegelexpansion diese Transformation durchgeführt. An dieser Stelle sei bemerkt, dass die Berechnungen um die Boreltransformation ebenfalls aufwändig waren und einen erheblichen Zeitraum in Anspruch nahmen.

Die numerischen Ergebnisse wurden dann in Kapitel 5 dargestellt. Wir plotteten dort interessante Verhältnisse und verglichen unsere Ergebnisse mit den experimentellen Daten. Hierbei zeigt sich wieder der erhebliche Beitrag von NLO Korrekturen. Die experimentelle Situation wird durch die Lichtkegelsummenregeln sehr vernünftig beschrieben. Zwar haben wir in dieser Arbeit die NLO Berechnungen für den Formfaktor  $F_1$  außer Acht gelassen, allerdings ergeben sich schon bei der Einbindung von Korrekturen zu  $F_2$  interessante Verschiebungen der theoretischen Vorhersagen im Vergleich zu den LO Berechnungen.

Im Anhang sind dann noch unter anderem die notwendigen Loopintegrale angegeben. Diese hinsichtlich der Berechnung sehr zeitaufwändigen Integrale wurden vollständig hergeleitet und bilden eine fundamentale Notwendigkeit für die NLO Betrachtungen.

Das allgemeine Ziel der Berechnungen mit den Lichtkegelsummenregeln ist die genauere Bestimmung der Parameter der Wellenfunktion des Nukleons. Da die Strahlungskorrekturen eine erhebliche Bedeutung dabei haben, ist deren Berechnung unerlässlich. Diese Arbeit stellt einen wichtigen Schritt in diese Richtung dar und die Ergebnisse werden in Kürze in [15] veröffentlicht. Für zukünftige Projekte wäre es interessant auch NLO Korrekturen zum Formfaktor  $F_1$  miteinzubeziehen oder die NLO Betrachtungen auf andere Thematiken, wie etwa den  $N\Delta\gamma$  Formfaktoren oder ähnlichen Beispielen, auszuweiten. Aus dem globalen Fit all dieser Prozesse können dann die Parameter der Wellenfunktion bestimmt werden. Man sieht also, dass dieses Forschungsgebiet noch lange nicht abgeschlossen ist und sich ein weites wissenschaftliches Feld ergibt.

# Anhang A

## Feynmanregeln

In der Berechnung von

$$-i T_\mu$$

gebrauchen wir die Feynmanregeln:

(massenloser) Quarkpropagator	$i \frac{\not{k}}{k^2 + i\eta} \delta_{ab}$	(A.1)
Gluonpropagator	$-i \frac{g_{\mu\nu}}{k^2 + i\eta} \delta_{AB}$	
Quark( $a$ )–Gluon( $A$ )–Quark( $b$ ) Vertex	$-ig\gamma^\mu \left( \frac{\lambda^A}{2} \right)_{ba}$	

wobei  $a, b \in 1, \dots, N_C$  und  $A, B \in 1, \dots, N_C^2 - 1$  die Farbindizes sind. Für die Loopintegrale muss man die gewöhnliche Integration über die Loopimpulse benutzen. \* Der Vertex, der zu dem interpolierenden Feld korrespondiert ist:

$$\text{u-Quark}(\alpha, a)\text{--u-Quark}(\beta, b)\text{--d-Quark}(\gamma, c)\text{-- Ioffe Strom} \left| (C\gamma_\lambda)_{\alpha\beta} (\gamma_5 \gamma^\lambda)_{\delta\gamma} \varepsilon^{abc} \right. , \quad (\text{A.2})$$

wobei alle Quarklinien in den Vertex gehen und die Folge der u, u und d-Quarks mit den korrespondierenden Lorentz- ( $\alpha, \beta, \gamma$ ) und Farbindizes (a, b, c) entgegen der Uhrzeigerrichtung verlaufen. Des Weiteren gilt:  $(C\gamma_\lambda)^T = C\gamma_\lambda$ , i.e.,  $(C\gamma_\lambda)_{\alpha\beta} = (C\gamma_\lambda)_{\beta\alpha}$ . Der (hereinkommende) “Nukleonprojektor” korrespondiert zu (2.7) und ist durch

$$\text{u-Quark}(u_1 P, \alpha, a)\text{--u-Quark}(u_2 P, \beta, b)\text{--d-Quark}(u_3 P, \gamma, c):$$

$$\frac{1}{4} \int \mathcal{D}u F^{(i)}(u_1, u_2, u_3) X_{\alpha\beta}^{(i)} Y_\gamma^{(i)} \frac{\varepsilon^{abc}}{6} , \quad (\text{A.3})$$

definiert. Hierbei gehen alle Quarklinien in Bezug auf den Nukleonblob nach außen und sind entgegen dem Uhrzeigersinn angeordnet. Die triviale Identität  $X_{\alpha\beta}^{(i)} = (X^{(i)})_{\beta\alpha}^T$  zusammen mit (2.8) ist in manchen Fällen nützlich. Der typische Beitrag, den man erhält, indem die

---

\*Hier wird die dimensionale Regularisierung in  $D = 4 - 2\epsilon$  benutzt und für das Integralmaß benutzen wir  $\mu^{2\epsilon} \int d^D l (2\pi)^D$  –siehe zum Beispiel Anhang C in [27].

allgemeine Lorentzzerlegung (2.7) und der Ioffe Strom (2.4) benutzt werden, hat zwei Teile. Dies ist für die  $d - d$  Quarklinie das Gehen in die entgegengesetzte Richtung der Fermionenlinie. Dadurch ergibt sich das Produkt der  $\gamma$  Matrizen mit dem Nukleonspinor. Die  $u - u$  Quarklinie schließt die Spur und man geht hierbei offensichtlich entgegen der Richtung der einen Quarklinie und in Richtung der anderen.

Der letzte Fall korrespondiert zu  $(\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\dots\gamma_{\mu_n})^T$  (wobei  $\gamma_{\mu_1}\dots\gamma_{\mu_n}$  die Reihenfolge der  $\gamma$  Matrizen entgegen der Richtung der Fermionenlinie ist). Dabei benutzt man

$$(\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\dots\gamma_{\mu_n})^T = (-1)^n C \gamma_{\mu_n}\dots\gamma_{\mu_1} C^{-1}. \quad (\text{A.4})$$

Dies ist zum Beispiel der Fall, falls man in die Richtung der Fermionenlinie geht und die  $\gamma$  Matrizen auf diese Linie zwischen  $C$  und  $C^{-1}$  setzt. Zum Schluss sollte erwähnt werden, dass bei der Berechnung der Farbfaktoren die  $SU(N_C)$  Algebra angewendet werden sollte. Da wir es hier mit einem Nukleon, bestehend aus drei Quarks zu tun haben, nehmen wir grundsätzlich  $N_C = 3$  an. Nur diese Wahl führt uns zu den invarianten Resultaten. Offensichtlich gilt

$$\varepsilon^{abc} \varepsilon^{abc} = 6. \quad (\text{A.5})$$

# Anhang B

## Imaginärteile von ausgewählten Funktionen

In diesem Unterabschnitt listen wir ausgewählte Funktion auf, die in den Rechnungen auftauchen. Wir beginnen mit dem allgemein bekannten Ergebnis für logarithmische Funktionen

$$\ln(x - x_0 \pm i\eta) = \ln(|x - x_0|) \pm i\pi \Theta(x_0 - x). \quad (\text{B.1})$$

Hierbei sind  $x$ ,  $x_0$  und  $\eta$  reell. Alle anderen Ergebnisse, die hier angegeben werden, können aus (B.1) hergeleitet werden. Es folgt offensichtlich

$$\ln^2(x - x_0 \pm i\eta) = [\ln^2(|x - x_0|) - \pi^2 \Theta(x_0 - x)] \pm 2i\pi \ln(|x - x_0|) \Theta(x_0 - x), \quad (\text{B.2})$$

und höhere Exponenten  $\ln^n(x - x_0 \pm i\eta)$ ,  $n > 2$  können in ähnlicher Weise erhalten werden. Das allgemein bekannte Ergebnis

$$\begin{aligned} \frac{1}{x - x_0 \pm i\eta} &= \mathcal{P} \frac{1}{x - x_0} \mp i\pi \delta(x - x_0) \\ &= \frac{1}{x - x_0} [\Theta(x - x_0) + \Theta(x_0 - x)] \mp i\pi \delta(x - x_0) \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

kann durch die Ableitung der Formel (B.1) in Bezug auf  $x$  berechnet werden:

$$\frac{1}{x - x_0 \pm i\eta} = \frac{d}{dx} \ln(x - x_0 \pm i\eta).$$

Weiterhin, da

$$\frac{1}{(x - x_0 \pm i\eta)^n} = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \frac{1}{x - x_0 \pm i\eta}$$

ist, kann man schnell sehen, dass für  $n \geq 2$

$$\frac{1}{(x - x_0 \pm i\eta)^n} = \frac{1}{(x - x_0)^n} [\Theta(x - x_0) + \Theta(x_0 - x)] \mp i\pi \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \delta^{(n-1)}(x - x_0) \quad (\text{B.4})$$

gilt.

Indem nun

$$\frac{\ln(X \pm i\eta)}{X \pm i\eta} = \frac{1}{2} \frac{d}{dX} \ln^2(X \pm i\eta), \quad \frac{\ln^2(X \pm i\eta)}{X \pm i\eta} = \frac{1}{3} \frac{d}{dX} \ln^3(X \pm i\eta),$$

mit  $X = x - x_0$  oder  $X = x_0 - x$  beachtet wird, bekommen wir

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \frac{\ln(x - x_0 \pm i\eta)}{x - x_0 \pm i\eta} &= \pm \left[ \frac{\Theta(x_0 - x)}{x - x_0} - \delta(x - x_0) \ln(x_0 - x) \right] \\ &= \pm \left[ \left\{ \frac{\Theta(x_0 - x)}{x - x_0} \right\}_+ - \delta(x - x_0) \ln(|a - x_0|) \right], \end{aligned} \quad (\text{B.5a})$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \frac{\ln(x_0 - x \pm i\eta)}{x_0 - x \pm i\eta} &= \pm \left[ \frac{\Theta(x - x_0)}{x_0 - x} - \delta(x - x_0) \ln(x - x_0) \right] \\ &= \pm \left[ \left\{ \frac{\Theta(x - x_0)}{x_0 - x} \right\}_+ - \delta(x - x_0) \ln(|x_0 - b|) \right] \end{aligned} \quad (\text{B.5b})$$

und

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \frac{\ln^2(x - x_0 \pm i\eta)}{x - x_0 \pm i\eta} &= \pm \left[ \Theta(x_0 - x) \frac{2 \ln(x_0 - x)}{x - x_0} + \delta(x - x_0) \left[ \frac{\pi^2}{3} - \ln^2(x_0 - x) \right] \right] \\ &= \pm \left[ \left\{ \Theta(x_0 - x) \frac{2 \ln(x_0 - x)}{x - x_0} \right\}_+ + \delta(x - x_0) \left[ \frac{\pi^2}{3} - \ln^2(|x_0 - a|) \right] \right], \end{aligned} \quad (\text{B.6a})$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \frac{\ln^2(x_0 - x \pm i\eta)}{x_0 - x \pm i\eta} &= \pm \left[ \Theta(x - x_0) \frac{2 \ln(x - x_0)}{x_0 - x} + \delta(x - x_0) \left[ \frac{\pi^2}{3} - \ln^2(x - x_0) \right] \right] \\ &= \pm \left[ \left\{ \Theta(x - x_0) \frac{2 \ln(x - x_0)}{x_0 - x} \right\}_+ + \delta(x - x_0) \left[ \frac{\pi^2}{3} - \ln^2(|x_0 - b|) \right] \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.6b})$$

An dieser Stelle sei angemerkt, dass die Ausdrücke auf der rechten Seite der ersten Zeilen in (B.5) und (B.6) aus zwei Termen bestehen, die jeder für sich für  $x \rightarrow x_0$  “aufblähen”. Die Summen sind endlich und wir benutzen die  $\{\}_+$  Beschreibung

$$\{F(x, x_0)\}_+ = F(x, x_0) - \delta(x - x_0) \int_a^b dz F(z, x_0). \quad (\text{B.7})$$

Darüber hinaus gilt offensichtlich

$$\left\{ \frac{\Theta(x_0 - x)}{x - x_0} \right\}_+ = \frac{\Theta(x_0 - x)}{x - x_0} - \delta(x_0 - x) \ln(x_0 - x_0) + \delta(x - x_0) \ln(|a - x_0|),$$



$$\left\{ \frac{\Theta(x - x_0)}{x_0 - x} \right\}_+ = \frac{\Theta(x - x_0)}{x_0 - x} - \delta(x - x_0) \ln(x_0 - x_0) + \delta(x - x_0) \ln(|x_0 - b|)$$

(B.8)

und in ganz ähnlicher Weise für  $\left\{ \Theta(x - x_0) \frac{2 \ln(x - x_0)}{x_0 - x} \right\}_+$  und  $\left\{ \Theta(x_0 - x) \frac{2 \ln(x_0 - x)}{x - x_0} \right\}_+$ .



# Anhang C

## Loop Integrale

### C.1 Definitionen und Notationen

Hier wird die dimensionale Regularisierung in

$$D = 4 - 2\epsilon$$

angewendet.\*

Wir führen hier zudem die Abkürzungen <sup>†</sup>

$$\Gamma_{UV}(\epsilon) = \Gamma(\epsilon) \frac{\Gamma(1-\epsilon)\Gamma(1-\epsilon)}{\Gamma(1-2\epsilon)} (4\pi)^\epsilon = \frac{1}{\epsilon} - \gamma + \ln(4\pi) + O(\epsilon), \quad (\text{C.1})$$

$$\Gamma_{IR}(\epsilon) = \Gamma(1+\epsilon) \frac{\Gamma(-\epsilon)\Gamma(1-\epsilon)}{\Gamma(1-2\epsilon)} (4\pi)^\epsilon = \frac{1}{-\epsilon} + \gamma - \ln(4\pi) + O(\epsilon) \quad (\text{C.2})$$

ein. Die erste  $\Gamma$  Funktion auf der rechten Seite von (C.1) und (C.2) kommt von der Loopintegration, während die Integration über die Feynmanparameter die  $\Gamma$ s entstehen lässt, die in den Brüchen vorkommen. Deshalb ist die Divergenz, die in (C.1) steht, eine UV Divergenz und diejenige in (C.2) von infrarotem Ursprung (IR), d. h. kollinear. <sup>‡</sup>

Aufgrund von  $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi/\sin \pi z$  ergibt sich in allen Ordnungen in  $\epsilon$

$$\Gamma_{UV}(\epsilon) = -\Gamma_{IR}(\epsilon). \quad (\text{C.3})$$

Trotzdem ist es sinnvoll, an den Ursprung der Divergenzen festzuhalten und die Bezeichnung UV und kollineare Divergenzen nicht zu verändern. Einige Integrale enthalten softe Divergenzen, die in der folgenden Kombination vorkommen:

$$\Gamma_{IR,2}(\epsilon) = \Gamma(1+\epsilon) \frac{\Gamma(-\epsilon)\Gamma(-\epsilon)}{\Gamma(1-2\epsilon)} (4\pi)^\epsilon$$

---

\*Die Ergebnisse wurden mit Hilfe der expliziten Berechnung der Feynman Integrale und der Feynman Parametrisierung berechnet und diese wurden teilweise in [27, 38] schon benutzt. Für eine detaillierte Sicht auf eine angemessene Berechnung und kompliziertere Integrale siehe [39, 40].

<sup>†</sup>Analog zu [27], in der  $\Gamma_{UV}^{(0)}(\epsilon) \equiv \Gamma_{UV}(\epsilon)$  und  $\Gamma_{IR}^{(0)}(\epsilon) \equiv \Gamma_{IR}(\epsilon)$  sowie  $\Gamma_{UV}^{(1)}(\epsilon)$  und  $\Gamma_{IR}^{(1)}(\epsilon)$  benutzt wurde

<sup>‡</sup>Die divergenten Integrale sind in  $D < 4$  Dimensionen endlich, während die IR divergenten in  $D > 4$  Dimensionen endlich sind. Da wir beide in  $D = 4 - 2\epsilon$  Dimensionen regularisieren, stellt  $\Gamma(\epsilon)$  eine Signatur der UV Divergenzen dar und  $\Gamma(-\epsilon)$  diejenige der IR Divergenzen.

$$= \frac{1}{(-\epsilon)^2} + \frac{1}{-\epsilon}(\gamma - \ln(4\pi)) - \frac{\pi^2}{12} + \frac{1}{2}(\gamma - \ln(4\pi))^2 + O(\epsilon). \quad (\text{C.4})$$

Die soften Singularitäten werden immer von zwei kollinearen Divergenzen begleitet und deshalb führt dies bei der dimensional Regularisierung immer zu einem doppelten Pol  $1/(-\epsilon)^2$ . Hierbei sei die Beziehung

$$\Gamma_{IR}(\epsilon) = (-\epsilon) \Gamma_{IR,2}(\epsilon) \quad (\text{C.5})$$

angemerkt.

### C.1.1 Zwei-Punkt Integrale

$$I_2^{(1,\mu,\mu\nu,\mu\mu)}(p; p^2) = \mu^{2\epsilon} \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} \frac{(1, l^\mu, l^\mu l^\nu, l^2)}{[l^2 + i\eta][(l-p)^2 + i\eta]} \quad (\text{C.6})$$

$$\boxed{p^2 \neq 0}$$

$$I_2(p; p^2) = \frac{i}{(4\pi)^2} \Gamma_{UV}(\epsilon) \left( \frac{-p^2 - i\eta}{\mu^2} \right)^{-\epsilon} \frac{1}{1 - 2\epsilon}, \quad (\text{C.7})$$

$$I_2^\mu(p; p^2) = \frac{i}{(4\pi)^2} \Gamma_{UV}(\epsilon) \left( \frac{-p^2 - i\eta}{\mu^2} \right)^{-\epsilon} \frac{1}{2(1 - 2\epsilon)} p^\mu, \quad (\text{C.8})$$

$$\begin{aligned} I_2^{\mu\nu}(p; p^2) &= \frac{i}{(4\pi)^2} \Gamma_{UV}(\epsilon) \left( \frac{-p^2 - i\eta}{\mu^2} \right)^{-\epsilon} \\ &\times \left[ g^{\mu\nu} p^2 \frac{-1}{4(1 - 2\epsilon)(3 - 2\epsilon)} + p^\mu p^\nu \frac{2 - \epsilon}{2(1 - 2\epsilon)(3 - 2\epsilon)} \right], \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

$$I_2^{\mu\mu}(p; p^2) = 0. \quad (\text{C.10})$$

$$\boxed{p^2 = 0}$$

Wir können dann formal schreiben:

$$I_2(p; p^2) = I_1^{[2]}, \quad (\text{C.11})$$

$$I_2^\mu(p; p^2) = \frac{1}{2} I_1^{[2]} p^\mu, \quad (\text{C.12})$$

$$I_2^{\mu\nu}(p; p^2) = \frac{1}{D} g^{\mu\nu} I_1^{[1]} + \frac{2}{3} p^\mu p^\nu I_1^{[2]} = \frac{2}{3} p^\mu p^\nu I_1^{[2]}, \quad (\text{C.13})$$

$$I_2^{\mu\mu}(p; p^2) = I_1^{[1]} = 0, \quad (\text{C.14})$$

mit dem Ein-Punkt Integral  $I_1^{[n]}$

$$I_1^{[n]} = \mu^{2\epsilon} \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} \frac{1}{[l^2 + i\eta]^n}, \quad (\text{C.15})$$

der in dimensionaler Regularisierung 0 ergibt. Trotzdem im Geist der Unterscheidung der UV und IR Divergenzen (wie in [27] gezeigt), nimmt  $I_1^{[n]}$  die Form

$$I_1^{[n]} = \begin{cases} \frac{i}{(4\pi)^2} \left( \frac{-q^2 - i\eta}{\mu^2} \right)^{-\epsilon} (\Gamma_{UV}(\epsilon) + \Gamma_{IR}(\epsilon)) \frac{2 - \epsilon}{2(1 - 2\epsilon)} & \text{für } n = 2 \\ 0 & \text{für } n \neq 2 \end{cases} \quad (\text{C.16})$$

an. Hierbei ist  $q^2$  eine beliebige Skala, die  $q^2 \neq 0$  erfüllt. Falls nun (C.3) miteinbezogen wird, ist im  $n = 2$  Fall der Integral 0.

### C.1.2 Drei-Punkt Integrale

$$I_3^{(1,\mu,\mu\nu,\mu\mu)}(p, k; p^2, k^2, 2pk) = \mu^{2\epsilon} \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} \frac{(1, l^\mu, l^\mu l^\nu, l^2)}{[l^2 + i\eta][(l - p)^2 + i\eta][(l - k)^2 + i\eta]} \quad (\text{C.17})$$

$$\boxed{p^2 = 0, k^2 = 0, (p - k)^2 = -2pk \neq 0}$$

$$I_3(p, k; 0, 0, 2pk) = \frac{i}{(4\pi)^2} \frac{-1}{(2pk)} \left( \frac{2pk - i\eta}{\mu^2} \right)^{-\epsilon} \Gamma_{IR,2}(\epsilon), \quad (\text{C.18})$$

$$I_3^\mu(p, k; 0, 0, 2pk) = \frac{i}{(4\pi)^2} \frac{-1}{(2pk)} \left( \frac{2pk - i\eta}{\mu^2} \right)^{-\epsilon} \Gamma_{IR}(\epsilon) \frac{1}{(1 - 2\epsilon)} (p^\mu + k^\mu), \quad (\text{C.19})$$

$$\begin{aligned} I_3^{\mu\nu}(p, k; 0, 0, 2pk) &= \frac{i}{(4\pi)^2} \left( \frac{2pk - i\eta}{\mu^2} \right)^{-\epsilon} \\ &\times \left[ g^{\mu\nu} \Gamma_{UV}(\epsilon) \frac{1}{4(1 - \epsilon)(1 - 2\epsilon)} \right. \\ &\quad - \left( \frac{p^\mu p^\nu + k^\mu k^\nu}{(2pk)} \right) \Gamma_{IR}(\epsilon) \frac{1}{2(1 - 2\epsilon)} \\ &\quad \left. + \frac{p^\mu k^\nu + p^\nu k^\mu}{(2pk)} \Gamma_{IR}(\epsilon) \frac{\epsilon}{2(1 - \epsilon)(1 - 2\epsilon)} \right], \end{aligned} \quad (\text{C.20})$$

$$I_3^{\mu\mu}(p, k; 0, 0, 2pk, ) = \frac{i}{(4\pi)^2} \left( \frac{2pk - i\eta}{\mu^2} \right)^{-\epsilon} \Gamma_{UV}(\epsilon) \frac{1}{2(1 - \epsilon)(1 - 2\epsilon)}. \quad (\text{C.21})$$

$$\boxed{p^2 = 0, k^2 \neq 0, (p - k)^2 \neq 0 \text{ und } 2pk \neq 0}$$

$$I_{v1}(k^2, 2pk) = \frac{(-1)^{-\epsilon}}{2pk \epsilon} \left[ C^{-\epsilon} - D^{-\epsilon} \right], \quad (\text{C.22})$$

$$I_{v2}(k^2, 2pk) = \frac{(-1)^{-\epsilon}}{(2pk)^2} \left[ C^{1-\epsilon} \left( \frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{1-\epsilon} \right) - \left( \frac{C}{\epsilon} + \frac{D}{1-\epsilon} \right) D^{-\epsilon} \right], \quad (\text{C.23})$$

$$I_{v3}(k^2, 2pk) = \frac{(-1)^{-\epsilon}}{(2pk)^3} \left[ C^{1-\epsilon} \left( \frac{1}{\epsilon} + \frac{2}{1-\epsilon} - \frac{1}{2-\epsilon} \right) - \left( \frac{C^2}{\epsilon} + \frac{2CD}{1-\epsilon} - \frac{D^2}{2-\epsilon} \right) D^{-\epsilon} \right], \quad (\text{C.24})$$

$$I_{v4}(k^2, 2pk) = \frac{(-1)^{-\epsilon}}{2pk} \frac{1}{1-\epsilon} \left[ C^{1-\epsilon} - D^{1-\epsilon} \right], \quad (\text{C.25})$$

mit

$$C = k^2 + i\eta, \quad D = k^2 - 2pk + i\eta. \quad (\text{C.26})$$

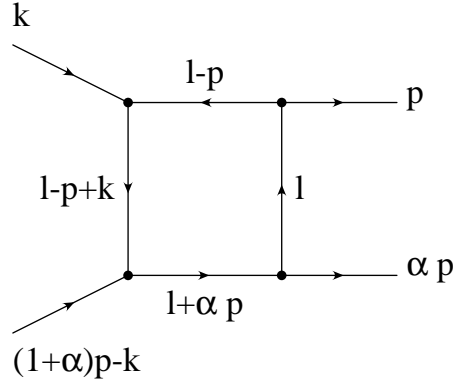
$$I_3(p, k; 0, k^2, 2pk) = \frac{-i}{(4\pi)^2} \left( \frac{1}{\mu^2} \right)^{-\epsilon} \Gamma_{IR}(\epsilon) I_{v1}(k^2, 2pk), \quad (\text{C.27})$$

$$I_3^\mu(p, k; 0, k^2, 2pk) = \frac{-i}{(4\pi)^2} \left( \frac{1}{\mu^2} \right)^{-\epsilon} \frac{1}{1-2\epsilon} \left( p^\mu (1-\epsilon) \Gamma_{IR}(\epsilon) I_{v2}(k^2, 2pk) + k^\mu \epsilon \Gamma_{UV}(\epsilon) I_{v1}(k^2, 2pk) \right), \quad (\text{C.28})$$

$$\begin{aligned} I_3^{\mu\nu}(p, k; 0, k^2, 2pk) &= \frac{-i}{(4\pi)^2} \left( \frac{1}{\mu^2} \right)^{-\epsilon} \frac{1}{2(1-2\epsilon)} \\ &\times \left[ -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \Gamma_{UV}(\epsilon) I_{v4}(k^2, 2pk) \right. \\ &+ p^\mu p^\nu (2-\epsilon) \Gamma_{IR}(\epsilon) I_{v3}(k^2, 2pk) \\ &+ k^\mu k^\nu \epsilon \Gamma_{UV}(\epsilon) I_{v1}(k^2, 2pk) \\ &\left. + (p^\mu k^\nu + p^\nu k^\mu) \epsilon \Gamma_{UV}(\epsilon) I_{v2}(k^2, 2pk) \right], \quad (\text{C.29}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_3^{\mu\mu}(p, k; 0, k^2, 2pk) &= \frac{i}{(4\pi)^2} \left( \frac{1}{\mu^2} \right)^{-\epsilon} \frac{1}{2(1-2\epsilon)} \Gamma_{UV}(\epsilon) \\ &\left( (2-\epsilon) I_{v4}(k^2, 2pk) - \epsilon k^2 I_{v1}(k^2, 2pk) - \epsilon 2pk I_{v2}(k^2, 2pk) \right). \quad (\text{C.30}) \end{aligned}$$

## C.1.3 Vier-Punkt Integrale mit 2 masselosen kollinearen Legs



$$\boxed{p^2 = 0, k^2 \neq 0, ((1 + \alpha)p - k)^2 \neq 0}$$

$$\begin{aligned} I_{4'}^{(1,\mu,\mu\nu,\mu\nu\sigma)}(\alpha, p, k; p^2, k^2, 2pk, (1 + \alpha)(2pk) - k^2) \\ = \mu^{2\epsilon} \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} \frac{(1, l^\mu, l^\mu l^\nu, l^\mu l^\nu l^\sigma)}{[l^2 + i\eta][(l - p)^2 + i\eta][(l + \alpha p)^2 + i\eta][(l - p + k)^2 + i\eta]} \end{aligned} \quad (C.31)$$

Wir führen hier die Notation

$$\begin{aligned} L_1(\alpha, k^2, 2pk) &= \frac{1}{\epsilon} \left( \frac{-2pk}{\mu^2} \right)^{-\epsilon} \left( (A - B)^{-\epsilon} + (B - 1)A^{-\epsilon} - B(A - 1)^{-\epsilon} \right), \\ L_2(\alpha, k^2, 2pk) &= \frac{1}{\epsilon} \left( \frac{-2pk}{\mu^2} \right)^{-\epsilon} \left( A^{-\epsilon} - (A - 1)^{-\epsilon} \right), \\ L_3(\alpha, k^2, 2pk) &= \left( \frac{-2pk}{\mu^2} \right)^{-\epsilon} \left( B A^{-\epsilon} - (B - 1)(A - 1)^{-\epsilon} \right), \end{aligned}$$

mit

$$A = \frac{k^2 + i\eta}{2pk}, \quad B = 1 + \alpha$$

ein. Die Funktionen in  $\epsilon$  sind endlich:

$$\begin{aligned} I_{4'}(\alpha, p, k; p^2, k^2, 2pk, (1 + \alpha)(2pk) - k^2) \\ = \frac{i}{(4\pi)^2} \Gamma_{IR}(\epsilon) \frac{1}{\alpha(\alpha + 1)} \frac{1}{(2pk)^2} \frac{2\epsilon}{1 + \epsilon} L_1(\alpha, k^2, 2pk), \end{aligned} \quad (C.32)$$

$$I_{4'}^\mu(\alpha, p, k; p^2, k^2, 2pk, (1 + \alpha)(2pk) - k^2) = p^\mu I_{4'}^p(\alpha, k^2, 2pk) + k^\mu I_{4'}^k(\alpha, k^2, 2pk), \quad (C.33)$$

$$\begin{aligned}
I_{4'}^p(\alpha, k^2, 2pk) &= \frac{i}{(4\pi)^2} \Gamma_{IR}(\epsilon) \frac{1}{\alpha(1+\alpha)} \frac{1}{(2pk)^2} \\
&\times \left\{ \left[ \frac{-2}{\epsilon(1+\epsilon)} \left( (1+\alpha) - \frac{k^2}{2pk} \right) + (1+\alpha) + \epsilon(1-\alpha) \right] L_1(\alpha, k^2, 2pk) \right. \\
&\quad \left. + \alpha(1+\alpha) L_2(\alpha, k^2, 2pk) \right\}, \tag{C.34}
\end{aligned}$$

$$I_{4'}^k(\alpha, p, k) = \frac{i}{(4\pi)^2} \Gamma_{IR}(\epsilon) \frac{-1}{\alpha(1+\alpha)(2pk)^2} L_1(\alpha, k^2, 2pk), \tag{C.35}$$

$$\begin{aligned}
I_{4'}^{\mu\nu}(\alpha, p, k; p^2, k^2, 2pk, (1+\alpha)(2pk) - k^2) \\
&= g^{\mu\nu} I_{4'}^g(\alpha, k^2, 2pk) + p^\mu p^\nu I_{4'}^{pp}(\alpha, k^2, 2pk) + k^\mu k^\nu I_{4'}^{kk}(\alpha, k^2, 2pk) \\
&\quad + (p^\mu k^\nu + k^\mu p^\nu) I_{4'}^{pk}(\alpha, k^2, 2pk), \tag{C.36}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{4'}^g(\alpha, k^2, 2pk) &= \frac{i}{(4\pi)^2} \Gamma_{IR}(\epsilon) \frac{1}{\alpha(1+\alpha)} \frac{1}{2pk} \frac{-1}{2(1-2\epsilon)} \\
&\times \left[ \frac{k^2 - 2pk(1+\alpha)}{2pk} L_1(\alpha, k^2, 2pk) + \alpha(1+\alpha) L_2(\alpha, k^2, 2pk) \right], \tag{C.37}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{4'}^{pp}(\alpha, k^2, 2pk) &= \frac{i}{(4\pi)^2} \Gamma_{IR}(\epsilon) \frac{1}{\alpha(1+\alpha)} \frac{1}{(2pk)^2} \frac{1}{(1-2\epsilon)} \\
&\times \left\{ \left[ 2\epsilon(1-2\epsilon) - (1+\alpha)(1-\epsilon) \left( 3\epsilon + \alpha(2-\epsilon) \right) \right. \right. \\
&\quad \left. - 4 \frac{k^2 - 2pk(1+\alpha)}{2pk} \left( 1 + \epsilon + \alpha(2-\epsilon) \right) \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{3}{35} \frac{(k^2 - 2pk(1+\alpha))^2}{(2pk)^2} \right] \frac{1}{1+\epsilon} L_1(\alpha, k^2, 2pk) \right. \\
&\quad \left. - 2\alpha(1+\alpha) \left[ 1 + \epsilon + \alpha(2-\epsilon) + \frac{1}{35} \frac{k^2 - 2pk(1+\alpha)}{2pk} \right] L_2(\alpha, k^2, 2pk) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{70} \alpha(1+\alpha) L_3(\alpha, k^2, 2pk) \right\}, \tag{C.38}
\end{aligned}$$

$$I_{4'}^{kk}(\alpha, k^2, 2pk) = \frac{i}{(4\pi)^2} \Gamma_{IR}(\epsilon) \frac{1}{\alpha(1+\alpha)} \frac{1}{(2pk)^2} \frac{-\epsilon}{(1-2\epsilon)} L_1(\alpha, k^2, 2pk), \tag{C.39}$$



$$\begin{aligned}
I_{4'}^{pk}(\alpha, k^2, 2pk) &= \frac{i}{(4\pi)^2} \Gamma_{IR}(\epsilon) \frac{1}{\alpha(1+\alpha)} \frac{1}{(2pk)^2} \frac{1}{(1-2\epsilon)} \\
&\times \left\{ \left[ \epsilon + \alpha(1-\epsilon) + 2 \frac{k^2 - 2pk(1+\alpha)}{2pk} \right] L_1(\alpha, k^2, 2pk) \right. \\
&\left. + \alpha(1+\alpha)(1+\epsilon) L_2(\alpha, k^2, 2pk) \right\}. \tag{C.40}
\end{aligned}$$

Die Herleitung des Integrals  $I_{4'}^{\mu\nu\sigma}(\alpha, p, k; p^2, k^2, 2pk, (1+\alpha)(2pk) - k^2)$  mit drei offenen Indizes ist vollkommen analog zu den obigen Berechnungen. Da der Rahmen dieses Anhangs gesprengt werden würde, wird auf die explizite Angabe der einzelnen Integrale an dieser Stelle verzichtet. Es sei aber erwähnt, dass sich der nachfolgende schematische Ausdruck durch das Zurückführen auf die schon berechneten Integrale darstellen lässt.

Allgemein kann  $I_{4'}^{\mu\nu\sigma}(\alpha, p, k; p^2, k^2, 2pk, (1+\alpha)(2pk) - k^2)$  durch

$$\begin{aligned}
I_{4'}^{\mu\nu\sigma}(\alpha, p, k; p^2, k^2, 2pk, (1+\alpha)(2pk) - k^2) &= (g_{\mu\nu}p_\sigma + g_{\mu\sigma}p_\nu + g_{\nu\sigma}p_\mu) I_{4'}^{gp}(\alpha, k^2, 2pk) \\
&+ (g_{\mu\nu}k_\sigma + g_{\mu\sigma}k_\nu + g_{\nu\sigma}k_\mu) I_{4'}^{gk}(\alpha, k^2, 2pk) \\
&+ p_\mu p_\nu p_\sigma I_{4'}^{ppp}(\alpha, k^2, 2pk) + k_\mu k_\nu k_\sigma I_{4'}^{kkk}(\alpha, k^2, 2pk) \\
&+ (p_\mu p_\nu k_\sigma + p_\mu p_\sigma k_\nu + p_\nu p_\sigma k_\mu) I_{4'}^{ppk}(\alpha, k^2, 2pk) \\
&+ (k_\mu k_\nu p_\sigma + k_\mu k_\sigma p_\nu + k_\nu k_\sigma p_\mu) I_{4'}^{kkp}(\alpha, k^2, 2pk) \tag{C.41}
\end{aligned}$$

ausgedrückt werden. Die einzelnen Koeffizienten zu den Lorentzstrukturen können dann, wie erwähnt, mit der Hilfe schon vorhandener Integrale berechnet werden.



# Anhang D

## LO Resultate für $M_N \neq 0$

Die vollständigen LO Beiträge zu den Amplituden  $\mathcal{M}_\mu^{\text{LO},(i)}$  lassen sich schreiben als

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_\mu^{\text{LO},(i)}(u_1, u_2, u_3) &= \mathcal{M}_\mu^{A,(i)}(u_1, u_2, u_3) + \mathcal{M}_\mu^{B,(i)}(u_1, u_2, u_3) + \mathcal{M}_\mu^{C,(i)}(u_1, u_2, u_3) \\ &= \mathcal{M}_\mu^{A,(i)}(u_1, u_2, u_3) \pm \mathcal{M}_\mu^{A,(i)}(u_2, u_1, u_3) + \mathcal{M}_\mu^{C,(i)}(u_1, u_2, u_3),\end{aligned}\tag{D.1}$$

wobei die Indizes A, B oder C die Klassifikation der LO Diagramme angeben, bei denen das Photon auf die Quarklinie trifft. Die A und B Diagramme beschreiben die Wechselwirkung zwischen dem Photon und den beiden up-Quarklinien. Die C Diagramme stellen die Wechselwirkung mit der down-Quarklinie dar. Das “+” Zeichen in der zweiten Zeile steht für die  $V_1$  und  $V_3$  Beiträge und das “−” Zeichen für die  $A_1$  und  $A_3$  Beiträge. Wir können schreiben:

$$\begin{aligned}T_\mu^{\text{LO},I} &= \sum_i T_\mu^{\text{LO},(i)} \\ &= \sum_i \mathcal{M}_\mu^{\text{LO},(i)}(u_1, u_2, u_3) \otimes F^{(i)}(u_1, u_2, u_3).\end{aligned}\tag{D.2}$$

Mit Hilfe der Symmetrie- und Antisymmetriebeziehungen der Distributionsamplituden erhalten wir

$$\begin{aligned}(\mathcal{M}_\mu^{A,(i)}(u_1, u_2, u_3) \pm \mathcal{M}_\mu^{A,(i)}(u_2, u_1, u_3)) \otimes F^{(i)}(u_1, u_2, u_3) \\ = 2 \mathcal{M}_\mu^{A,(i)}(u_1, u_2, u_3) \otimes F^{(i)}(u_1, u_2, u_3).\end{aligned}\tag{D.3}$$

Unsere LO als auch die NLO Resultate können für  $T_\mu$  in Termen von sechs invarianten Funktionen, die mit den Lorentzstrukturen  $P_\mu M_N$ ,  $P_\mu \not{q}$ ,  $q_\mu M_N$ ,  $q_\mu \not{q}$ ,  $\gamma_\mu$  und  $\gamma_\mu \not{q} M_N$  multipliziert werden, dargestellt werden. Es ist vorteilhaft die Berechnungen in der Form

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_\mu^{X,(i)}(\{u_k\}) &= C_{P_\mu M_N}^{X,(i)}(\{u_k\}) P_\mu M_N + C_{P_\mu \not{q}}^{X,(i)}(\{u_k\}) P_\mu \not{q} \\ &\quad + C_{q_\mu M_N}^{X,(i)}(\{u_k\}) q_\mu M_N + C_{q_\mu \not{q}}^{X,(i)}(\{u_k\}) q_\mu \not{q} \\ &\quad + C_{\gamma_\mu}^{X,(i)}(\{u_k\}) \gamma_\mu + C_{\gamma_\mu \not{q} M_N}^{X,(i)}(\{u_k\}) \gamma_\mu \not{q} M_N\end{aligned}$$

Tabelle D.1: LO Koeffizienten, die zu  $V_1$  und  $A_1$  DAs korrespondieren

$C_{P_\mu M_N}^{\text{LO}, V1}$	$\left( \frac{2u_1 e_u}{Q^2 + 2u_1 P \cdot q - u_1^2 M_N^2} + (u_1 \leftrightarrow u_2) \right)$
$C_{P_\mu q'}^{\text{LO}, V1}$	$\left( \frac{-e_u}{Q^2 + 2u_1 P \cdot q - u_1^2 M_N^2} + (u_1 \leftrightarrow u_2) \right) + \frac{2e_d}{Q^2 + 2u_3 P \cdot q - u_3^2 M_N^2}$
$C_{q_\mu M_N}^{\text{LO}, V1}$	$\left( \frac{-e_u}{Q^2 + 2u_1 P \cdot q - u_1^2 M_N^2} + (u_1 \leftrightarrow u_2) \right) + \frac{-2e_d}{Q^2 + 2u_3 P \cdot q - u_3^2 M_N^2}$
$C_{q_\mu q'}^{\text{LO}, V1}$	0
$C_{\gamma_\mu}^{\text{LO}, V1}$	$\left( \frac{e_u(P \cdot q - u_1 M_N^2)}{Q^2 + 2u_1 P \cdot q - u_1^2 M_N^2} + (u_1 \leftrightarrow u_2) \right) + \frac{e_d(-2P \cdot q + u_3 M_N^2)}{Q^2 + 2u_3 P \cdot q - u_3^2 M_N^2}$
$C_{\gamma_\mu q M_N}^{\text{LO}, V1}$	$\frac{e_d}{Q^2 + 2u_3 P \cdot q - u_3^2 M_N^2}$
$C_{P_\mu M_N}^{\text{LO}, A1}$	0
$C_{P_\mu q'}^{\text{LO}, A1}$	$\left( \frac{e_u}{Q^2 + 2u_1 P \cdot q - u_1^2 M_N^2} - (u_1 \leftrightarrow u_2) \right)$
$C_{q_\mu M_N}^{\text{LO}, A1}$	$\left( \frac{-e_u}{Q^2 + 2u_1 P \cdot q - u_1^2 M_N^2} - (u_1 \leftrightarrow u_2) \right)$
$C_{q_\mu q'}^{\text{LO}, A1}$	0
$C_{\gamma_\mu}^{\text{LO}, A1}$	$\left( \frac{-P \cdot q e_u}{Q^2 + 2u_1 P \cdot q - u_1^2 M_N^2} - (u_1 \leftrightarrow u_2) \right)$
$C_{\gamma_\mu q M_N}^{\text{LO}, A1}$	$\left( \frac{e_u}{Q^2 + 2u_1 P \cdot q - u_1^2 M_N^2} - (u_1 \leftrightarrow u_2) \right)$

Tabelle D.2: LO Koeffizienten, die zu  $V_3$  und  $A_3$  DAs korrespondieren

$C_{P_\mu M_N}^{\text{LO}, V3}$	$\left( \frac{-(3-\epsilon)u_1 e_u}{Q^2 + 2u_1 P \cdot q - u_1^2 M_N^2} + (u_1 \leftrightarrow u_2) \right) + \frac{-2(1-\epsilon)u_3 e_d}{Q^2 + 2u_3 P \cdot q - u_3^2 M_N^2}$
$C_{P_\mu q'}^{\text{LO}, V3}$	0
$C_{q_\mu M_N}^{\text{LO}, V3}$	$\left( \frac{(3-\epsilon)e_u}{Q^2 + 2u_1 P \cdot q - u_1^2 M_N^2} + (u_1 \leftrightarrow u_2) \right) + \frac{2(1-\epsilon)e_d}{Q^2 + 2u_3 P \cdot q - u_3^2 M_N^2}$
$C_{q_\mu q'}^{\text{LO}, V3}$	0
$C_{\gamma_\mu}^{\text{LO}, V3}$	$\left( \frac{u_1 M_N^2 e_u}{Q^2 + 2u_1 P \cdot q - u_1^2 M_N^2} + (u_1 \leftrightarrow u_2) \right) + \frac{-\epsilon u_3 M_N^2 e_d}{Q^2 + 2u_3 P \cdot q - u_3^2 M_N^2}$
$C_{\gamma_\mu q M_N}^{\text{LO}, V3}$	$\left( \frac{-e_u}{Q^2 + 2u_1 P \cdot q - u_1^2 M_N^2} + (u_1 \leftrightarrow u_2) \right) + \frac{\epsilon e_d}{Q^2 + 2u_3 P \cdot q - u_3^2 M_N^2}$
$C_{P_\mu M_N}^{\text{LO}, A3}$	$\left( \frac{u_1(1-\epsilon)e_u}{Q^2 + 2u_1 P \cdot q - u_1^2 M_N^2} - (u_1 \leftrightarrow u_2) \right)$
$C_{P_\mu q'}^{\text{LO}, A3}$	0
$C_{q_\mu M_N}^{\text{LO}, A3}$	$\left( \frac{-(1-\epsilon)e_u}{Q^2 + 2u_1 P \cdot q - u_1^2 M_N^2} - (u_1 \leftrightarrow u_2) \right)$
$C_{q_\mu q'}^{\text{LO}, A3}$	0
$C_{\gamma_\mu}^{\text{LO}, A3}$	$\left( \frac{-(1-\epsilon)u_1 M_N^2 e_u}{Q^2 + 2u_1 P \cdot q - u_1^2 M_N^2} - (u_1 \leftrightarrow u_2) \right)$
$C_{\gamma_\mu q M_N}^{\text{LO}, A3}$	$\left( \frac{(1-\epsilon)e_u}{Q^2 + 2u_1 P \cdot q - u_1^2 M_N^2} - (u_1 \leftrightarrow u_2) \right)$

(D.4)

darzustellen. Die jeweiligen Koeffizienten sind in den Tabellen D.1 und D.2 aufgeführt. Hierbei werden grundsätzlich alle Ausdrücke der Vollständigkeit halber in  $D = 4 - 2\epsilon$  berechnet. Nun präsentieren wir die Resultate für die invarianten Funktionen  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$ , indem  $T_\mu$  mit  $z^\mu \Lambda_+$  multipliziert wird:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(Q^2, (P - q)^2) &= C_{P_\mu M_N}^{\text{LO}, V1}(\{u_k\}) \otimes V_1(\{u_k\}) + C_{P_\mu M_N}^{\text{LO}, A1}(\{u_k\}) \otimes A_1(\{u_k\}) \\ &\quad + C_{P_\mu M_N}^{\text{LO}, V3}(\{u_k\}) \otimes V_3(\{u_k\}) + C_{P_\mu M_N}^{\text{LO}, A3}(\{u_k\}) \otimes A_3(\{u_k\}), \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(Q^2, (P - q)^2) &= C_{P_{\mu q'}}^{\text{LO}, V1}(\{u_k\}) \otimes V_1(\{u_k\}) + C_{P_{\mu q'}}^{\text{LO}, A1}(\{u_k\}) \otimes A_1(\{u_k\}) \\ &\quad + C_{P_{\mu q'}}^{\text{LO}, V3}(\{u_k\}) \otimes V_3(\{u_k\}) + C_{P_{\mu q'}}^{\text{LO}, A3}(\{u_k\}) \otimes A_3(\{u_k\}). \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

Die Ergebnisse sind in Übereinstimmung mit [16].

Jetzt kommen wir zu den korrespondierenden Ergebnissen für die  $\mathcal{V}_2$  und  $\mathcal{A}_2$  Amplituden. Deshalb führen wir die Kurzbezeichnungen

$$\begin{aligned} V_{123} &= V_1 - V_2 - V_3, \\ A_{123} &= -A_1 + A_2 - A_3 \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

ein. Weiterhin definieren wir

$$\tilde{F}(u_l) \equiv \int_1^{u_l} dv_l \int_0^{1-v_l} du_m F(\{v_l, u_m, 1 - v_l - u_m\}). \quad (\text{D.8})$$

Hierbei ist  $F$  die Distributionsamplitude oder eine Kombination von Distributionsamplituden, die von den drei Impulsbruchanteilen der Valenzquarks abhängen. Die Integration über einen Impulsbruchanteil wurde mit der Hilfe von  $\delta(1 - v_l - u_m - u_k)$  dabei schon ausgeführt. An dieser Stelle sei angemerkt, dass wir den Notationen aus [16] folgen. Die Kurzbezeichnung (D.8) beinhaltet drei Funktionen:

$$\begin{aligned} \tilde{F}(u_1) &\equiv \int_1^{u_1} dv_1 \int_0^{1-v_1} du_2 F(v_1, u_2, 1 - v_1 - u_2) \\ &= \int_1^{u_1} dv_1 \int_0^{1-v_1} du_3 F(v_1, 1 - v_1 - u_3, u_3), \\ \tilde{F}(u_2) &\equiv \int_1^{u_2} dv_2 \int_0^{1-v_2} du_1 F(u_1, v_2, 1 - u_1 - v_2) \\ &= \int_1^{u_2} dv_2 \int_0^{1-v_2} du_3 F(1 - v_2 - u_3, v_2, u_3), \\ \tilde{F}(u_3) &\equiv \int_1^{u_3} dv_3 \int_0^{1-v_3} du_1 F(u_1, 1 - u_1 - v_3, v_3) \end{aligned}$$

$$= \int_1^{u_3} dv_3 \int_0^{1-v_3} du_2 F(1 - u_2 - v_3, u_2, v_3). \quad (\text{D.9})$$

Dabei ist  $\tilde{F}(u_1) = \pm \tilde{F}(u_2)$  für  $F(u_1, u_2, u_3) = \pm F(u_2, u_1, u_3)$ . Aufgrund der oben dargestellten Zusammenhänge können wir jetzt die LO Twist-3 und Twist-4 Beiträge zu den  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  Funktionen basierend auf den Tabellen D.1, D.2 und D.3 ( $C_{P_\mu M_N}^{\text{LO}, F^{(i)}}$  und  $C_{P_\mu q}^{\text{LO}, F^{(i)}}$  Koeffizienten) darstellen. Dies wurde für den Fall  $M_N \neq 0$  durchgeführt. Weiterhin bestimmen wir die Beiträge zu den Formfaktoren  $F_1(Q^2)$  und  $F_2(Q^2)$ , indem (4.15) benutzt wird. Analog zu (4.30) definieren wir:

$$g_0(x_i, W, M_N^2/Q^2) = \frac{1}{(x_i W - 1 - \frac{M_N^2}{Q^2} x_i (1 - x_i) + i\eta)}. \quad (\text{D.10})$$

Dabei ist  $g_0(x_i, W)$ , das in (4.30) eingeführt wurde, hier der Sonderfall  $g_0(x_i, W, 0)$ . Das bedeutet, dass in (D.10) die Verallgemeinerung zu  $M_N^2 \neq 0$  definiert ist. Ebenfalls führen wir die Bezeichnung

$$g_0^2(x_i, W, M_N^2/Q^2) = \frac{1}{(x_i W - 1 - \frac{M_N^2}{Q^2} x_i (1 - x_i) + i\eta)^2} \quad (\text{D.11})$$

ein. Die Twist-3 und die Twist-4 Beiträge, die zu den Distributionsamplituden  $V_3$  und  $A_3$  korrespondieren, können in der Form einer Konvolution dargestellt werden:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{\text{LO}}(Q^2, W, M_N^2; \mu_F^2) &= \frac{1}{Q^2} \sum_i T_{\mathcal{A}, F^{(i)}}^{\text{LO}}(\{x_k\}, W, M_N^2/Q^2) \otimes F^{(i)}(\{x_k\}; \mu_F^2), \\ \mathcal{B}^{\text{LO}}(Q^2, W, M_N^2; \mu_F^2) &= \frac{1}{Q^2} \sum_i T_{\mathcal{B}, F^{(i)}}^{\text{LO}}(\{x_k\}, W, M_N^2/Q^2) \otimes F^{(i)}(\{x_k\}; \mu_F^2), \end{aligned} \quad (\text{D.12})$$

wobei  $F^{(i)} \in \{V_1, A_1, V_3, A_3\}$ . Die Koeffizienten  $C_{P_\mu M_N}^{\text{LO}, F^{(i)}}$  aus der Tabelle D.1 stellen die "hard-scattering" Twist-3 Beiträge zu der  $\mathcal{A}$  Funktion dar:

$$\begin{aligned} T_{\mathcal{A}, V_1}^{\text{LO}}(\{x_k\}, W, M_N^2/Q^2) &= -2e_u [x_1 g_0(x_1, W, M_N^2/Q^2) + x_2 g_0(x_2, W, M_N^2/Q^2)], \\ T_{\mathcal{A}, A_1}^{\text{LO}}(\{x_k\}, W, M_N^2/Q^2) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{D.13})$$

während die Koeffizienten  $C_{P_\mu q}^{\text{LO}, F^{(i)}}$  die "hard-scattering" Twist-3 Beiträge zu der  $\mathcal{B}$  Funktion beschreiben:

$$\begin{aligned} T_{\mathcal{B}, V_1}^{\text{LO}}(\{x_k\}, W, M_N^2/Q^2) &= e_u [g_0(x_1, W, M_N^2/Q^2) + g_0(x_2, W, M_N^2/Q^2)] \\ &\quad - 2e_d g_0(x_3, M_N^2/Q^2, W), \\ T_{\mathcal{B}, A_1}^{\text{LO}}(\{x_k\}, W, M_N^2/Q^2) &= e_u [-g_0(x_1, W, M_N^2/Q^2) + g_0(x_2, W, M_N^2/Q^2)]. \end{aligned} \quad (\text{D.14})$$

Ganz analog zur Tabelle D.2 sind die "hard-scattering" Twist-4 Beiträge zu der  $\mathcal{A}$  Funktion durch

$$T_{\mathcal{A}, V_3}^{\text{LO}}(\{x_k\}, W, M_N^2/Q^2) = 3e_u [x_1 g_0(x_1, W, M_N^2/Q^2) + x_2 g_0(x_2, W, M_N^2/Q^2)]$$

Tabelle D.3: LO Koeffizienten analog zu (D.4) und korrespondierend zu  $\tilde{V}_{123}(u_i)$  und  $\tilde{A}_{123}(u_i)$ :  $\int_0^1 du_i C_{\dots}^{\text{LO}, F_{123}}(u_i) \tilde{F}_{123}(u_i)$  für  $u_i \in \{u_1, u_2, u_3\}$ .

$\{C_{P_\mu M_N}^{\text{LO}, V_{123}}(u_i)\}$	$\left\{ \frac{e_u((2-\epsilon)Q^2 + 2(1-\epsilon)u_1 P \cdot q - (1-\epsilon)M_N^2 u_1^2)}{(Q^2 + 2u_1 P \cdot q - u_1^2 M_N^2)^2}, (u_1 \leftrightarrow u_2), \right. \\ \left. - \frac{e_d(-2\epsilon Q^2 + 4(1-\epsilon)u_3 P \cdot q + 2(\epsilon-1)u_3^2 M_N^2)}{(Q^2 + 2u_3 P \cdot q - u_3^2 M_N^2)^2} \right\}$
$\{C_{P_\mu q'}^{\text{LO}, V_{123}}(u_i)\}$	$\left\{ \frac{e_u u_1 M_N^2}{(Q^2 + 2u_1 P \cdot q - u_1^2 M_N^2)^2}, (u_1 \leftrightarrow u_2), \frac{2e_d u_3 M_N^2}{(Q^2 + 2u_3 P \cdot q - u_3^2 M_N^2)^2} \right\}$
$\{C_{q_\mu M_N}^{\text{LO}, V_{123}}(u_i)\}$	$\left\{ \frac{e_u(2P \cdot q - u_1 M_N^2)}{(Q^2 + 2u_1 P \cdot q - u_1^2 M_N^2)^2}, (u_1 \leftrightarrow u_2), \frac{e_d(4P \cdot q - 2u_3 M_N^2)}{(Q^2 + 2u_3 P \cdot q - u_3^2 M_N^2)^2} \right\}$
$\{C_{q_\mu q'}^{\text{LO}, V_{123}}(u_i)\}$	$\left\{ \frac{-e_u M_N^2}{(Q^2 + 2u_1 P \cdot q - u_1^2 M_N^2)^2}, (u_1 \leftrightarrow u_2), \frac{-2e_d M_N^2}{(Q^2 + 2u_3 P \cdot q - u_3^2 M_N^2)^2} \right\}$
$\{C_{\gamma_\mu}^{\text{LO}, V_{123}}(u_i)\}$	$\left\{ \frac{-e_u M_N^2 (Q^2 + u_1 P \cdot q)}{(Q^2 + 2u_1 P \cdot q - u_1^2 M_N^2)^2}, (u_1 \leftrightarrow u_2), \frac{-e_d \epsilon M_N^2}{Q^2 + 2u_3 P \cdot q - u_3^2 M_N^2} \right\}$
$\{C_{\gamma_\mu q M_N}^{\text{LO}, V_{123}}(u_i)\}$	$\left\{ \frac{e_u(-P \cdot q + u_1 M_N^2)}{(Q^2 + 2u_1 P \cdot q - u_1^2 M_N^2)^2}, (u_1 \leftrightarrow u_2), 0 \right\}$
$\{C_{P_\mu M_N}^{\text{LO}, A_{123}}(u_i)\}$	$\left\{ \frac{e_u(-\epsilon Q^2 + 2(1-\epsilon)u_1 P \cdot q - (1-\epsilon)u_1^2 M_N^2)}{(Q^2 + 2u_1 P \cdot q - u_1^2 M_N^2)^2}, -(u_1 \leftrightarrow u_2), 0 \right\}$
$\{C_{P_\mu q'}^{\text{LO}, A_{123}}(u_i)\}$	$\left\{ \frac{-e_u u_1 M_N^2}{(Q^2 + 2u_1 P \cdot q - u_1^2 M_N^2)^2}, -(u_1 \leftrightarrow u_2), 0 \right\}$
$\{C_{q_\mu M_N}^{\text{LO}, A_{123}}(u_i)\}$	$\left\{ \frac{e_u(-2P \cdot q + u_1 M_N^2)}{(Q^2 + 2u_1 P \cdot q - u_1^2 M_N^2)^2}, -(u_1 \leftrightarrow u_2), 0 \right\}$
$\{C_{q_\mu q'}^{\text{LO}, A_{123}}(u_i)\}$	$\left\{ \frac{e_u M_N^2}{(Q^2 + 2u_1 P \cdot q - u_1^2 M_N^2)^2}, -(u_1 \leftrightarrow u_2), 0 \right\}$
$\{C_{\gamma_\mu}^{\text{LO}, A_{123}}(u_i)\}$	$\left\{ \frac{-e_u M_N^2(-\epsilon Q^2 + (1-2\epsilon)u_1 P \cdot q - (1-\epsilon)u_1^2 M_N^2)}{(Q^2 + 2u_1 P \cdot q - u_1^2 M_N^2)^2}, -(u_1 \leftrightarrow u_2), 0 \right\}$
$\{C_{\gamma_\mu q M_N}^{\text{LO}, A_{123}}(u_i)\}$	$\left\{ \frac{e_u(P \cdot q - u_1 M_N^2)}{(Q^2 + 2u_1 P \cdot q - u_1^2 M_N^2)^2}, -(u_1 \leftrightarrow u_2), 0 \right\}$



$$\begin{aligned}
& + 2e_d x_3 g_0(x_3, W, M_N^2/Q^2) , \\
T_{\mathcal{A}, A_3}^{\text{LO}}(\{x_k\}, W, M_N^2/Q^2) &= e_u \left[ -x_1 g_0(x_1, W, M_N^2/Q^2) + x_2 g_0(x_2, W, M_N^2/Q^2) \right] \quad (\text{D.15})
\end{aligned}$$

definiert, wohingegen die Beiträge zur  $\mathcal{B}$  Funktion durch

$$\begin{aligned}
T_{\mathcal{B}, V_3}^{\text{LO}}(\{x_k\}, W, M_N^2/Q^2) &= 0 , \\
T_{\mathcal{B}, A_3}^{\text{LO}}(\{x_k\}, W, M_N^2/Q^2) &= 0 \quad (\text{D.16})
\end{aligned}$$

definiert sind. Die Beiträge aus der Tabelle D.3 tragen zu den Funktionen  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  bei:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}^{\text{LO}}(Q^2, W, M_N; \mu_F^2) &= \frac{1}{Q^2} \sum_i \sum_{k=1}^3 \int_0^1 dx_k T_{\mathcal{A}, F_{123}^{(i)}}^{\text{LO}}(x_k, W, M_N^2/Q^2) \tilde{F}_{123}^{(i)}(x_k) , \\
\mathcal{B}^{\text{LO}}(Q^2, W, M_N; \mu_F^2) &= \frac{1}{Q^2} \sum_i \sum_{k=1}^3 \int_0^1 dx_k T_{\mathcal{B}, F_{123}^{(i)}}^{\text{LO}}(x_k, W, M_N^2/Q^2) \tilde{F}_{123}^{(i)}(x_k) , \quad (\text{D.17})
\end{aligned}$$

mit  $\tilde{F}_{123}^{(i)} \in \{\tilde{V}_{123}^{(i)}, \tilde{A}_{123}^{(i)}\}$ . Die "hard-scattering" Beiträge zu der  $\mathcal{A}$  Funktion lassen sich dann schreiben als:

$$\begin{aligned}
T_{\mathcal{A}, V_{123}}^{\text{LO}}(x_1, W, M_N^2/Q^2) &= e_u \left[ g_0^2(x_1, W, M_N^2/Q^2) - g_0(x_1, W, M_N^2/Q^2) \right] , \\
T_{\mathcal{A}, V_{123}}^{\text{LO}}(x_2, W, M_N^2/Q^2) &= e_u \left[ g_0^2(x_2, W, M_N^2/Q^2) - g_0(x_2, W, M_N^2/Q^2) \right] , \\
T_{\mathcal{A}, V_{123}}^{\text{LO}}(x_3, W, M_N^2/Q^2) &= 2e_d \left[ g_0^2(x_3, W, M_N^2/Q^2) + g_0(x_3, W, M_N^2/Q^2) \right] \quad (\text{D.18})
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
T_{\mathcal{A}, A_{123}}^{\text{LO}}(x_1, W, M_N^2/Q^2) &= -e_u \left[ g_0^2(x_1, W, M_N^2/Q^2) + g_0(x_1, W, M_N^2/Q^2) \right] , \\
T_{\mathcal{A}, A_{123}}^{\text{LO}}(x_2, W, M_N^2/Q^2) &= e_u \left[ g_0^2(x_2, W, M_N^2/Q^2) + g_0(x_2, W, M_N^2/Q^2) \right] , \\
T_{\mathcal{A}, A_{123}}^{\text{LO}}(x_3, W, M_N^2/Q^2) &= 0 . \quad (\text{D.19})
\end{aligned}$$

Die "hard-scattering" Beiträge zu der  $\mathcal{B}$  Funktion sind gegeben durch:

$$\begin{aligned}
T_{\mathcal{B}, V_{123}}^{\text{LO}}(x_1, W, M_N^2/Q^2) &= e_u \frac{M_N^2}{Q^2} x_1 g_0^2(x_1, W, M_N^2/Q^2) , \\
T_{\mathcal{B}, V_{123}}^{\text{LO}}(x_2, W, M_N^2/Q^2) &= e_u \frac{M_N^2}{Q^2} x_2 g_0^2(x_2, W, M_N^2/Q^2) , \\
T_{\mathcal{B}, V_{123}}^{\text{LO}}(x_3, W, M_N^2/Q^2) &= 2e_d \frac{M_N^2}{Q^2} x_3 g_0^2(x_3, W, M_N^2/Q^2) \quad (\text{D.20})
\end{aligned}$$

und

$$T_{\mathcal{B}, A_{123}}^{\text{LO}}(x_1, W, M_N^2/Q^2) = -e_u \frac{M_N^2}{Q^2} x_1 g_0^2(x_1, W, M_N^2/Q^2) ,$$

$$\begin{aligned}
T_{B,A_{123}}^{\text{LO}}(x_2, W, M_N^2/Q^2) &= e_u \frac{M_N^2}{Q^2} x_2 g_0^2(x_2, W, M_N^2/Q^2), \\
T_{B,A_{123}}^{\text{LO}}(x_3, W, M_N^2/Q^2) &= 0.
\end{aligned} \tag{D.21}$$

Für den Fall  $M_N = 0$  gibt es keine Beiträge zu der  $\mathcal{A}$  Funktion, da in der Zerlegung der Korrelationsfunktion die  $\mathcal{A}$  Funktion mit  $M_N$  multipliziert ist. Weiterhin überleben im Limit  $M_N \rightarrow 0$  nur die Twist-3 Beiträge zu der  $\mathcal{B}$  Funktion. Diese nehmen die Form (4.31 - 4.32) an. Indem man  $M_N \neq 0$  aber  $M_N^2 = 0$  setzt, ergeben sich die gleichen Twist-3 Beiträge zu der  $\mathcal{B}$  Funktion ((D.14) mit  $M_N^2 = 0$ , d. h., (4.31 - 4.32)) und die Twist-3 und Twist-4 Beiträge zu der  $\mathcal{A}$  Funktion: (D.13), (D.15), (D.18) und (D.19), mit  $M_N^2 = 0$ . Es sei angemerkt, dass im Vergleich mit den Twist-3 Anteilen die Twist-4 Beiträge zu der  $\mathcal{B}$  Funktion mit dem Faktor  $M_N^2/Q^2$  unterdrückt sind (siehe (D.16), (D.20), (D.21)). Dies ist nicht der Fall für die  $\mathcal{A}$  Funktion (siehe (D.13), (D.15), (D.18), (D.19)). Hierbei gibt es keine zusätzliche Unterdrückung durch einen Faktor im Vergleich zwischen Twist-3 und Twist-4 Beiträgen. Für den Fall  $M_N^2 \neq 0$  tragen auch die höheren Twists bei (Twist-5, ...). Dies betrachten wir hier nicht und verweisen an dieser Stelle auf [16]. Von diesen Resultaten kann man sehen, dass sowohl Twist-4 als auch Twist-5 Beiträge zu der  $\mathcal{B}$  Funktion durch den Faktor  $M_N^2/Q^2$  im Vergleich mit Twist-3 unterdrückt sind. In Bezug auf die  $\mathcal{A}$  Funktion sind die Twist-5 und Twist-6 Beiträge durch den Faktor  $M_N^2/Q^2$  im Vergleich mit den Twist-3 und den Twist-4 Beiträgen unterdrückt. Nach (4.15) und analog zu (4.20) können wir die "Regeln" für die einzelnen Terme, die zu  $T_{\mathcal{A}}^{\text{LO}}$  und  $T_{\mathcal{B}}^{\text{LO}}$  beitragen und wiederum zu einzelnen Termen zu  $F_1$  und  $F_2$  führen, aufstellen. Die Beiträge (D.13 - D.16) können bequem durch eine Summe der Terme der allgemeinen Form

$$g_0(\{x_k\}, W, M_N^2/Q^2) f(\{x_k\}) \tag{D.22}$$

dargestellt werden. Diese ergeben dann in ganz allgemeiner Form:

$$\begin{aligned}
\left( \begin{array}{c} 2F_1^{\text{LO},\{V_1,A_1,V_3,A_3\}}(Q^2; \mu_F^2) \\ F_2^{\text{LO},\{V_1,A_1,V_3,A_3\}}(Q^2; \mu_F^2) \end{array} \right) &: \frac{1}{\lambda_1 \pi} \int \mathcal{D}x \int_1^{(s_0+Q^2)/Q^2} dw e^{-(w-1)Q^2/M_B^2 + M_N^2/M_B^2} \\
&\times \text{Im} [g_0(\{x_k\}, w, M_N^2/Q^2)] f(\{x_k\}) \\
&\times F^{(i)}(\{x_k\}; \mu_F^2) \\
\rightarrow &\frac{1}{\lambda_1} \int_{x_0}^1 dx_i \int_0^{1-x_i} dx_j e^{-(1-x_i)Q^2/(x_i M_B^2) + x_i M_N^2/M_B^2} \\
&\times \left( -\frac{1}{x_i} \right) f(\{x_i, x_j, 1-x_i-x_j\}) \\
&\times F^{(i)}(\{x_i, x_j, 1-x_i-x_j\}; \mu_F^2).
\end{aligned} \tag{D.23}$$

Hierbei ist  $F^{(i)} \in \{V_1, A_1, V_3, A_3\}$  und

$$x_0 = \frac{\sqrt{(Q^2 + s_0 - M_N^2)^2 + 4M_N^2 Q^2} - (Q^2 + s_0 - M_N^2)}{2M_N^2}. \quad (\text{D.24})$$

An dieser Stelle sei angemerkt, dass  $\lim_{M_N^2 \rightarrow 0} x_0 = Q^2/(Q^2 + s_0)$ . Die Beiträge (D.18-D.21) bestehen aus den Termen der Form

$$g_0(x_i, W, M_N^2/Q^2) f(x_i) \quad \text{und} \quad g_0^2(x_i, W, M_N^2/Q^2) f(x_i). \quad (\text{D.25})$$

Analog zu (D.23) trägt der erste Ausdruck bei mit

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{c} 2F_1^{\text{LO}, \{V_{123}, A_{123}\}}(Q^2; \mu_F^2) \\ F_2^{\text{LO}, \{V_{123}, A_{123}\}}(Q^2; \mu_F^2) \end{array} \right) &: \frac{1}{\lambda_1 \pi} \int_0^1 x_k \int_1^{(s_0+Q^2)/Q^2} dw e^{-(w-1)Q^2/M_B^2 + M_N^2/M_B^2} \\ &\times \text{Im} [g_0(x_k, w, M_N^2/Q^2)] f(x_k) \tilde{F}_{123}^{(i)}(x_k; \mu_F^2) \\ &\rightarrow \frac{1}{\lambda_1} \int_{x_0}^1 dx_k e^{-(1-x_k)Q^2/(x_k M_B^2) + x_k M_N^2/M_B^2} \\ &\times \left( -\frac{1}{x_k} \right) f(x_k) \tilde{F}_{123}^{(i)}(x_k; \mu_F^2). \end{aligned} \quad (\text{D.26})$$

Die Terme mit  $g_0^2$  nehmen eine leicht kompliziertere Form an:

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{c} 2F_1^{\text{LO}, \{V_{123}, A_{123}\}}(Q^2; \mu_F^2) \\ F_2^{\text{LO}, \{V_{123}, A_{123}\}}(Q^2; \mu_F^2) \end{array} \right) &: \frac{1}{\lambda_1 \pi} \int_0^1 dx_k \int_1^{(s_0+Q^2)/Q^2} dw e^{-(w-1)Q^2/M_B^2 + M_N^2/M_B^2} \\ &\times \text{Im} [g_0^2(x_k, w, M_N^2/Q^2)] f(x_k) \tilde{F}_{123}^{(i)}(x_k; \mu_F^2) \\ &\rightarrow \frac{1}{\lambda_1} \left[ e^{-(s_0-M_N^2)/M_B^2} \frac{Q^2}{Q^2 + x_0^2 M_N^2} f(x_0) \tilde{F}_{123}^{(i)}(x_k = x_0; \mu_F^2) \right. \\ &\quad \left. + \frac{Q^2}{M_B^2} \int_{x_0}^1 dx_k e^{-(1-x_k)Q^2/(x_k M_B^2) + x_k M_N^2/M_B^2} \right. \\ &\quad \left. \times \left( \frac{1}{x_k^2} \right) f(x_k) \tilde{F}_{123}^{(i)}(x_k; \mu_F^2) \right], \end{aligned} \quad (\text{D.27})$$

mit  $\tilde{F}_{123}^{(i)} \in \{\tilde{V}_{123}^{(i)}, \tilde{A}_{123}^{(i)}\}$ . Alle Resultate, die hier dargestellt werden, sind in Übereinstimmung mit den etwas abweichend hergeleiteten Ausdrücken von [16] (Anhang A, (A.15-A.18)).



# Anhang E

## Nukleondistributionsamplituden

Dieser Anhang ist [9] entnommen. Im Folgenden werden Distributionsamplituden von Twist-3 bis Twist-6 zusammengefasst.

### Twist-3 DAs

$$\begin{aligned} V_1(x_i, \mu) &= 120x_1x_2x_3 [\phi_3^0(\mu) + \phi_3^+(\mu)(1 - 3x_3)] , \\ A_1(x_i, \mu) &= 120x_1x_2x_3(x_2 - x_1)\phi_3^-(\mu) , \\ T_1(x_i, \mu) &= 120x_1x_2x_3 \left[ \phi_3^0(\mu) - \frac{1}{2} (\phi_3^+ - \phi_3^-)(\mu)(1 - 3x_3) \right] . \end{aligned} \quad (\text{E.1})$$

### Twist-4 DAs

$$\begin{aligned} V_2(x_i, \mu) &= 24x_1x_2 [\phi_4^0(\mu) + \phi_4^+(\mu)(1 - 5x_3)] , \\ A_2(x_i, \mu) &= 24x_1x_2(x_2 - x_1)\phi_4^-(\mu) , \\ T_2(x_i, \mu) &= 24x_1x_2 [\xi_4^0(\mu) + \xi_4^+(\mu)(1 - 5x_3)] , \\ V_3(x_i, \mu) &= 12x_3 [\psi_4^0(\mu)(1 - x_3) + \psi_4^+(\mu)(1 - x_3 - 10x_1x_2) \\ &\quad + \psi_4^-(\mu)(x_1^2 + x_2^2 - x_3(1 - x_3))] , \\ A_3(x_i, \mu) &= 12x_3(x_2 - x_1) [(\psi_4^0 + \psi_4^+)(\mu) + \psi_4^-(\mu)(1 - 2x_3)] , \\ T_3(x_i, \mu) &= 6x_3 [(\phi_4^0 + \psi_4^0 + \xi_4^0)(\mu)(1 - x_3) \\ &\quad + (\phi_4^+ + \psi_4^+ + \xi_4^+)(\mu)(1 - x_3 - 10x_1x_2) \\ &\quad + (\phi_4^- - \psi_4^- + \xi_4^-)(\mu)(x_1^2 + x_2^2 - x_3(1 - x_3))] , \\ T_7(x_i, \mu) &= 6x_3 [(\phi_4^0 + \psi_4^0 - \xi_4^0)(\mu)(1 - x_3) \\ &\quad + (\phi_4^+ + \psi_4^+ - \xi_4^+)(\mu)(1 - x_3 - 10x_1x_2) \\ &\quad + (\phi_4^- - \psi_4^- - \xi_4^-)(\mu)(x_1^2 + x_2^2 - x_3(1 - x_3))] , \\ S_1(x_i, \mu) &= 6x_3(x_2 - x_1) [(\phi_4^0 + \psi_4^0 + \xi_4^0 + \phi_4^+ + \psi_4^+ + \xi_4^+)(\mu) \\ &\quad + (\phi_4^- - \psi_4^- + \xi_4^-)(\mu)(1 - 2x_3)] , \\ P_1(x_i, \mu) &= 6x_3(x_2 - x_1) [(-\phi_4^0 - \psi_4^0 + \xi_4^0 - \phi_4^+ - \psi_4^+ + \xi_4^+)(\mu) \\ &\quad + (-\phi_4^- + \psi_4^- + \xi_4^-)(\mu)(1 - 2x_3)] . \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

**Twist-5 DAs**

$$\begin{aligned}
V_4(x_i, \mu) &= 3 \left[ \psi_5^0(\mu)(1 - x_3) + \psi_5^+(\mu)(1 - x_3 - 2(x_1^2 + x_2^2)) \right. \\
&\quad \left. + \psi_5^-(\mu)(2x_1x_2 - x_3(1 - x_3)) \right] , \\
A_4(x_i, \mu) &= 3(x_2 - x_1) \left[ -\psi_5^0(\mu) + \psi_5^+(\mu)(1 - 2x_3) + \psi_5^-(\mu)x_3 \right] , \\
T_4(x_i, \mu) &= \frac{3}{2} \left[ (\phi_5^0 + \psi_5^0 + \xi_5^0)(\mu)(1 - x_3) \right. \\
&\quad + (\phi_5^+ + \psi_5^+ + \xi_5^+)(\mu)(1 - x_3 - 2(x_1^2 + x_2^2)) \\
&\quad \left. + (\phi_5^- - \psi_5^- + \xi_5^-)(\mu)(2x_1x_2 - x_3(1 - x_3)) \right] , \\
T_8(x_i, \mu) &= \frac{3}{2} \left[ (\phi_5^0 + \psi_5^0 - \xi_5^0)(\mu)(1 - x_3) \right. \\
&\quad + (\phi_5^+ + \psi_5^+ - \xi_5^+)(\mu)(1 - x_3 - 2(x_1^2 + x_2^2)) \\
&\quad \left. + (\phi_5^- - \psi_5^- - \xi_5^-)(\mu)(2x_1x_2 - x_3(1 - x_3)) \right] , \\
V_5(x_i, \mu) &= 6x_3 \left[ \phi_5^0(\mu) + \phi_5^+(\mu)(1 - 2x_3) \right] , \\
A_5(x_i, \mu) &= 6x_3(x_2 - x_1)\phi_5^-(\mu) , \\
T_5(x_i, \mu) &= 6x_3 \left[ \xi_5^0(\mu) + \xi_5^+(\mu)(1 - 2x_3) \right] , \\
S_2(x_i, \mu) &= \frac{3}{2}(x_2 - x_1) \left[ -(\phi_5^0 + \psi_5^0 + \xi_5^0)(\mu) + (\phi_5^+ + \psi_5^+ + \xi_5^+)(\mu)(1 - 2x_3) \right. \\
&\quad \left. + (\phi_5^- - \psi_5^- + \xi_5^-)(\mu)x_3 \right] , \\
P_2(x_i, \mu) &= \frac{3}{2}(x_2 - x_1) \left[ -(-\phi_5^0 - \psi_5^0 + \xi_5^0)(\mu) + (-\phi_5^+ - \psi_5^+ + \xi_5^+)(\mu)(1 - 2x_3) \right. \\
&\quad \left. + (-\phi_5^- + \psi_5^- + \xi_5^-)(\mu)x_3 \right] , \tag{E.3}
\end{aligned}$$

**Twist-6 DAs**

$$\begin{aligned}
V_6(x_i, \mu) &= 2 \left[ \phi_6^0(\mu) + \phi_6^+(\mu)(1 - 3x_3) \right] , \\
A_6(x_i, \mu) &= 2(x_2 - x_1)\phi_6^-(\mu) , \\
T_6(x_i, \mu) &= 2 \left[ \phi_6^0(\mu) - \frac{1}{2}(\phi_6^+ - \phi_6^-)(1 - 3x_3) \right] , \tag{E.4}
\end{aligned}$$

wobei  $\mu$  die Renormierungskonstante darstellt. Die Koeffizienten in den obigen Gleichungen können durch Kombinationen der acht nicht-perturbativen Parametern  $f_N$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $f_1^u$ ,  $f_1^d$ ,  $f_2^d$ ,  $A_1^u$ ,  $V_1^d$  ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned}
\phi_3^0 &= \phi_6^0 = f_N , & \phi_4^0 &= \phi_5^0 = \frac{1}{2}(f_N + \lambda_1) , \\
\xi_4^0 &= \xi_5^0 = \frac{1}{6}\lambda_2 , & \psi_4^0 &= \psi_5^0 = \frac{1}{2}(f_N - \lambda_1) , \tag{E.5}
\end{aligned}$$

für Twist-3:

$$\phi_3^- = \frac{21}{2}f_N A_1^u , \quad \phi_3^+ = \frac{7}{2}f_N (1 - 3V_1^d), \tag{E.6}$$

für Twist-4:

$$\begin{aligned}
\phi_4^+ &= \frac{1}{4} [f_N(3 - 10V_1^d) + \lambda_1(3 - 10f_1^d)] , \\
\phi_4^- &= -\frac{5}{4} [f_N(1 - 2A_1^u) - \lambda_1(1 - 2f_1^d - 4f_1^u)] , \\
\psi_4^+ &= -\frac{1}{4} [f_N(2 + 5A_1^u - 5V_1^d) - \lambda_1(2 - 5f_1^d - 5f_1^u)] , \\
\psi_4^- &= \frac{5}{4} [f_N(2 - A_1^u - 3V_1^d) - \lambda_1(2 - 7f_1^d + f_1^u)] , \\
\xi_4^+ &= \frac{1}{16} \lambda_2(4 - 15f_2^d) , \quad \xi_4^- = \frac{5}{16} \lambda_2(4 - 15f_2^d) ,
\end{aligned} \tag{E.7}$$

für Twist-5:

$$\begin{aligned}
\phi_5^+ &= -\frac{5}{6} [f_N(3 + 4V_1^d) - \lambda_1(1 - 4f_1^d)] , \\
\phi_5^- &= -\frac{5}{3} [f_N(1 - 2A_1^u) - \lambda_1(f_1^d - f_1^u)] , \\
\psi_5^+ &= -\frac{5}{6} [f_N(5 + 2A_1^u - 2V_1^d) - \lambda_1(1 - 2f_1^d - 2f_1^u)] , \\
\psi_5^- &= \frac{5}{3} [f_N(2 - A_1^u - 3V_1^d) + \lambda_1(f_1^d - f_1^u)] , \\
\xi_5^+ &= \frac{5}{36} \lambda_2(2 - 9f_2^d) , \quad \xi_5^- = -\frac{5}{4} \lambda_2 f_2^d
\end{aligned} \tag{E.8}$$

und für Twist-6:

$$\begin{aligned}
\phi_6^+ &= \frac{1}{2} [f_N(1 - 4V_1^d) - \lambda_1(1 - 2f_1^d)] , \\
\phi_6^- &= \frac{1}{2} [f_N(1 + 4A_1^u) + \lambda_1(1 - 4f_1^d - 2f_1^u)] .
\end{aligned} \tag{E.9}$$





# Literaturverzeichnis

- [1] G. P. Lepage and S. J. Brodsky, Phys. Rev. D **22** (1980) 2157.
- [2] A. V. Efremov and A. V. Radyushkin, Phys. Lett. B **94** (1980) 245.
- [3] I. I. Balitsky, V. M. Braun and A. V. Kolesnichenko, Phys. Lett. B **242** (1990) 245 [Erratum-ibid. B **318** (1993) 648] [arXiv:hep-ph/9310316].
- [4] M. A. Shifman, A. I. Vainshtein and V. I. Zakharov, Nucl. Phys. B **147** (1979) 385.
- [5] B. L. Ioffe and A. V. Smilga, Phys. Lett. B **114** (1982) 353.
- [6] V. M. Braun, A. Khodjamirian and M. Maul, Phys. Rev. D **61** (2000) 073004 [arXiv:hep-ph/9907495].
- [7] G. Peters, *Lichtkegelsammenregeln für  $N\Delta\gamma$  Formfaktoren*, Universität Regensburg, 2005.
- [8] P. Ball and V. M. Braun, Phys. Rev. D **58** (1998) 094016 [arXiv:hep-ph/9805422].
- [9] V. Braun, R. J. Fries, N. Mahnke and E. Stein, Nucl. Phys. B **589** (2000) 381 [Erratum-ibid. B **607** (2001) 433] [arXiv:hep-ph/0007279].
- [10] V. M. Braun, A. Lenz, N. Mahnke and E. Stein, *Light-cone sum rules for the nucleon form factors*, Phys. Rev. D **65** (2002) 074011 [hep-ph/0112085].
- [11] V. M. Braun, A. Lenz, G. Peters and A. V. Radyushkin, Phys. Rev. D **73** (2006) 034020 [arXiv:hep-ph/0510237].
- [12] J. Rohrwild, Phys. Rev. D **75** (2007) 074025 [arXiv:hep-ph/0701085].
- [13] T. M. Aliev, K. Azizi and A. Ozpineci, arXiv:0707.1592 [hep-ph].
- [14] T. M. Aliev, K. Azizi, A. Ozpineci and M. Savci, arXiv:0802.3008 [hep-ph].
- [15] K. Passek-Kumerički, G. Peters, *Nucleon Form Factors to Next-to-Leading Order with Light-Cone Sum Rules*, paper in preparation.
- [16] V. M. Braun, A. Lenz and M. Wittmann, *Nucleon form factors in QCD*, Phys. Rev. D **73** (2006) 094019 [hep-ph/0604050].

- [17] M. J. Dugan and B. Grinstein, *On the vanishing of evanescent operators*, Phys. Lett. B **256** (1991) 239; S. Herrlich and U. Nierste, *Evanescent operators, scheme dependences and double insertions*, Nucl. Phys. B **455** (1995) 39 [hep-ph/9412375].
- [18] B. Melić, B. Nizić and K. Passek, *BLM scale setting for the pion transition form factor*, Phys. Rev. D **65** (2002) 053020 [hep-ph/0107295].
- [19] M. Chanowitz, M. Furman and I. Hinchliffe, *The Axial Current In Dimensional Regularization*, Nucl. Phys. **B159**, 225 (1979).
- [20] G. 't Hooft and M. Veltman, *Regularization And Renormalization Of Gauge Fields*, Nucl. Phys. **B44**, 189 (1972).
- [21] P. Breitenlohner and D. Maison, *Dimensionally Renormalized Green's Functions For Theories With Massless Particles. 1*, Commun. Math. Phys. **52**, 39 (1977).
- [22] G. Bonneau, *Preserving Canonical Ward Identities In Dimensional Regularization With A Nonanticommuting Gamma(5)*, Nucl. Phys. B **177** (1981) 523.
- [23] S. L. Nyeo, *Anomalous dimensions of nonlocal baryon operators*, Z. Phys. C **54** (1992) 615.
- [24] P. Kroll and K. Passek-Kumerički, *The two-gluon components of the eta and eta' mesons to leading-twist accuracy*, Phys. Rev. D **67** (2003) 054017 [hep-ph/0210045].
- [25] M. Wittmann, *Light-Cone Sum Rules for Nucleon Form Factors*, Diplomarbeit.
- [26] P. Colangelo and A. Khodjamirian, *QCD sum rules: A modern perspective*, [hep-ph/0010175].
- [27] B. Melic, B. Nizic and K. Passek, *A note on the factorization scale independence of the PQCD predictions for exclusive processes*, Eur. Phys. J. C **36** (2004) 453 [hep-ph/0107311].
- [28] V. A. Sadovnikova, E. G. Drukarev and M. G. Ryskin, Phys. Rev. D **72** (2005) 114015 [arXiv:hep-ph/0508240].
- [29] R. C. Walker *et al.*, Phys. Rev. D **49** (1994) 5671.
- [30] L. Andivahis *et al.*, Phys. Rev. D **50** (1994) 5491.
- [31] M. E. Christy *et al.* [E94110 Collaboration], Phys. Rev. C **70** (2004) 015206 [nucl-ex/0401030].
- [32] I. A. Qattan *et al.*, Phys. Rev. Lett. **94** (2005) 142301 [nucl-ex/0410010].
- [33] J. Litt *et al.*, Phys. Lett. B **31** (1970) 40.
- [34] C. Berger, V. Burkert, G. Knop, B. Langenbeck and K. Rith, Phys. Lett. B **35** (1971) 87.

- [35] J. Arrington, Phys. Rev. C **68** (2003) 034325 [nucl-ex/0305009].
- [36] O. Gayou *et al.* [Jefferson Lab Hall A Collaboration], Phys. Rev. Lett. **88** (2002) 092301 [nucl-ex/0111010].
- [37] M. K. Jones *et al.* [Jefferson Lab Hall A Collaboration], Phys. Rev. Lett. **84** (2000) 1398 [nucl-ex/9910005].
- [38] B. Melic, B. Nizic and K. Passek, Phys. Rev. D **60**, 074004 (1999) [hep-ph/9802204],  
P. Kroll and K. Passek-Kumericki, Phys. Rev. D **67**, 054017 (2003) [hep-ph/0210045].
- [39] G. Duplancic and B. Nizic, Eur. Phys. J. C **35**, 105 (2004) [hep-ph/0303184].
- [40] G. Duplancic and B. Nizic, Eur. Phys. J. C **20**, 357 (2001) [hep-ph/0006249], Eur. Phys.  
J. C **24**, 385 (2002) [hep-ph/0201306].