# Elementare Logik

Von

Franz von Kutschera
Privatdozent für Logik und Grundlagenforschung
an der Universität München

1967
Springer-Verlag
Wien · New York

Library of Congress Catalog Card Number 66-29038
Printed in Austria



Titel Nr. 9144

*Professor*

*Dr. Wilhelm Britzelmayr*

*in Dankbarkeit zu eigen*

# Vorwort

In der formalen Logik hat sich seit der zweiten Hälfte des vorigen Jahrhunderts eine tiefgreifende Entwicklung vollzogen, so daß sich die moderne *mathematische* oder *symbolische* Logik ihren Methoden wie ihrem Inhalt nach wesentlich von der traditionellen Logik unterscheidet. In ihrer modernen Gestalt hat sich die Logik eine Reihe neuer Anwendungsgebiete erschlossen, insbesondere in der mathematischen Grundlagenforschung und in der analytischen Philosophie und Wissenschaftstheorie der Gegenwart und hat so über die Grenzen ihres Fachs hinaus ein weites Interesse gefunden.

An einen weiteren Kreis von logisch Interessierten möchte sich auch diese Einführung in die Grundlehren der modernen Logik wenden. Sie nimmt daher besondere Rücksicht auf die Schwierigkeiten des mathematisch nicht vorgebildeten Lesers im Umgang mit Formalismen und entwickelt die Methode der Formalisierung in aller Ausführlichkeit. Unter diesem didaktischen Gesichtspunkt wird auch nicht so sehr Wert gelegt auf die schnelle Gewinnung von Resultaten, als auf die gründliche Einübung der Methoden, mit denen sie gewonnen werden. Daher werden gelegentlich verschiedene Beweise für das gleiche Resultat angegeben und Semantik wie Beweisbegriff der elementaren Logik werden auf verschiedenen Wegen aufgebaut. Besonderer Wert wird auch auf die semantische Deutung der Formalismen gelegt, die gleichwertig neben der Beweistechnik steht, und auf die Methoden des natürlichen Schließens, die sowohl für die Anwendungen wie auch für die Begründung der Logik wichtig sind. Einfache Übungsaufgaben am Ende der einzelnen Abschnitte sollen dem Leser die Möglichkeit geben, sein Verständnis der Darlegungen zu kontrollieren und zu vertiefen.

Das Hauptziel des Buches ist es, den Leser zu einer gründlichen Beherrschung der elementaren Logik zu führen, die das Fundament aller logischen Theorien bildet und deren Kenntnis zum Studium der meisten nicht-mathematischen Anwendungen der Logik ausreicht. Im ersten Kapitel wird die einfachste logische Theorie, die Aussagenlogik, dargestellt. Am Modellfall dieser Theorie wird durch den Übergang vom

Studium aussagenlogischer Strukturen in der Umgangssprache zu ihrer Symbolisierung und Präzisierung durch Wahrheitsfunktionen und endlich zum Aufbau eines axiomatischen Kalküls die Methode der Formalisierung schrittweise entwickelt. Im zweiten Kapitel wird die Prädikatenlogik der ersten Stufe behandelt, wobei der Ausgang wieder von umgangssprachlichen Strukturen genommen wird. Der letzte Abschnitt dieses Kapitels geht ausführlich auf die verschiedenen Möglichkeiten der Formalisierung der elementaren Logik unter dem Aspekt des natürlichen Schließens ein. Dieser Abschnitt ist im Inhalt spezieller, in der Darstellung etwas schwieriger als die übrigen Darlegungen und kann beim ersten Durchlesen des Buches ohne Nachteil für die Verständlichkeit des Folgenden überschlagen werden. Das dritte Kapitel stellt die Erweiterungen der Prädikatenlogik durch Hinzunahme der Identität, der Kennzeichnung und der Funktionsterme dar und bildet damit den Abschluß der Behandlung der elementaren Logik. Im vierten und fünften Kapitel werden die Grundzüge stärkerer Logiksysteme entworfen, der Prädikatenlogik zweiter Stufe und der für die mathematischen Anwendungen besonders wichtigen Klassenlogik. Am Beispiel der elementaren Arithmetik wird das Programm des Logizismus, der Begründung der Mathematik aus der Logik erläutert. Das sechste Kapitel endlich enthält, zusammengefaßt unter dem Gesichtspunkt der Entwicklung der formalen Logik, eine Darstellung der aristotelischen Syllogistik, der BOOLEschen Klassenlogik und der FREGEschen Definitionslehre, in der im Hinblick auf die große praktische Bedeutung der Definitionen die wichtigsten Grundsätze des Definierens besprochen werden.

München, im Herbst 1966 FRANZ v. KUTSCHERA

# Inhaltsverzeichnis

# Einleitung

Wir wollen diese Einführung in die Logik beginnen mit einer Abgrenzung ihres Gegenstandes, des Themenkreises, mit dem sie sich beschäftigt. Das empfiehlt sich schon deswegen, weil nicht nur der alltägliche Gebrauch der Worte „Logik" und „logisch" höchst uneinheitlich und vage ist, sondern auch der wissenschaftliche Gebrauch: Es gibt außer dem Namen „Philosophie" wohl keinen Namen einer Wissenschaft, der im Laufe der Geschichte so viele Bedeutungen angenommen hätte wie der Name „Logik". Als „logisch" hat man so erkenntnistheoretische, transzendentalphilosophische, spekulativ-metaphysische, ästhetische und psychologische Untersuchungen bezeichnet, bis sich bei HEGEL das Ganze der Philosophie, ja das Ganze der Wissenschaft schlechthin, unter diesen Titel ordnet.

Demgegenüber wollen wir im folgenden den heute üblichen, engeren Wortgebrauch übernehmen und unter „Logik" immer nur die *formale Logik* verstehen. Die formale Logik ist als wissenschaftliche Disziplin von ARISTOTELES begründet worden, dessen Schule späterhin auch den Namen „Logik" für diese Disziplin geprägt hat[1]. Unsere Begrenzung des Sachgebietes, für das „Logik" stehen soll, ist daher historisch wohl begründet.

Was ist nun der Gegenstand der formalen Logik? Im Anschluß an die philosophische Tradition wird diese Frage vielfach mit der Dreiteilung: die Lehre vom Begriff — die Lehre vom Urteil — die Lehre vom Schluß beantwortet. Nachdem aber die Schlußlehre eine Lehre vom Urteil und diese eine Lehre vom Begriff in gewissem Umfang voraussetzt, genügt es zunächst zu sagen: die Logik ist die Lehre vom Schluß. Diese Charakterisierung eröffnet auch den Zugang zu den zentralen Problemstellungen unserer Wissenschaft in ihrer modernen Ausprägung, so daß wir um der Deutlichkeit einer ersten Orientierung willen in Absehung von weiteren

[1] Zur Namensgeschichte der Logik vgl. [62], S. 7ff. — Die Nummern in eckigen Klammern im Text und in den Anmerkungen beziehen sich auf das Literaturverzeichnis auf S. 379ff.

Themenstellungen, die sich um diesen Problemkern gruppieren, dies festhalten können: *Logik ist als formale Logik die Wissenschaft vom Schließen.*

Was ist nun ein Schluß? Verdeutlichen wir uns das an einem Beispiel:

I) P1) Alle Menschen sind sterblich
P2) Sokrates ist ein Mensch

---

K) Sokrates ist sterblich.

Die vorstehende Figur (I) stellt einen Schluß dar, in dem aus den Sätzen „Alle Menschen sind sterblich" und „Sokrates ist ein Mensch" der Satz „Sokrates ist sterblich" erschlossen wird. Die Sätze P1 „Alle Menschen sind sterblich" und P2 „Sokrates ist ein Mensch" nennen wir die *Prämissen*, den Satz K „Sokrates ist sterblich" die *Konklusion* dieses Schlusses. Jeder Schluß enthält mindestens eine Prämisse und eine Konklusion und wir nennen ihn gültig, wenn sich aus der Annahme der Wahrheit der Prämissen die Wahrheit der Konklusion ergibt, wie das in (I) der Fall ist: Wenn alle Menschen sterblich sind und Sokrates ein Mensch ist, so muß auch Sokrates sterblich sein. In diesem Schluß wird nun weder die Wahrheit der Prämissen behauptet (also im Beispiel (I) weder, daß alle Menschen sterblich sind, noch daß Sokrates ein Mensch ist) noch die Wahrheit der Konklusion (daß Sokrates sterblich ist). Vielmehr handelt es sich um eine hypothetische Aussage: *wenn* die Prämissen wahr sind, *dann* ist auch die Konklusion wahr. Die Wahrheit der Konklusion wird also nur unter der Voraussetzung der Wahrheit der Prämissen behauptet. So kann ein Schluß auch dann gültig sein, wenn seine Konklusion falsch ist, nur muß dann mindestens eine seiner Prämissen ebenfalls falsch sein. So stellt z. B. auch die Figur

II) P1) Alle Menschen sind unsterblich
P2) Sokrates ist ein Mensch

---

K) Sokrates ist unsterblich

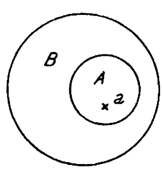
einen gültigen Schluß dar, obwohl die Prämisse P1 und die Konklusion K falsch sind.

Ferner ergibt sich in unserem Beispiel (I) die Wahrheit der Konklusion aus der Wahrheit der Prämissen ohne irgendein Tatsachenwissen, d. h. ohne ein Wissen über die biologischen Eigenschaften der Menschen oder die Kenntnis der sterblichen Lebewesen oder von Sokrates. Ersetzt man etwa in (I) das Prädikat „Mensch" durch das Prädikat „Mathematiker", das Prädikat „sterblich" durch „musikalisch", den Eigennamen „Sokrates" durch den Eigennamen „Heinrich", so erhält man den Schluß:

III) P1) Alle Mathematiker sind musikalisch
P2) Heinrich ist ein Mathematiker
---
K) Heinrich ist musikalisch

der ebenfalls gültig ist, wie man wieder ohne irgendein Tatsachenwissen erkennen kann. Durch diese Ersetzbarkeit wird deutlich, daß der Schluß (I) ein abstraktes Verhältnis zwischen Begriffsumfängen beinhaltet. Als *Umfang eines Begriffes* bezeichnen wir dabei die Menge der Gegenstände, die unter diesen Begriff fällt. Und wir sagen „ein Gegenstand $a$ fällt unter einen Begriff $A$", wenn der Gegenstand $a$ die Eigenschaft hat, die der Begriff $A$ beinhaltet. So beinhaltet der Begriff ‚rot' die Eigenschaft, rot zu sein, und ein Gegenstand $a$ fällt unter den Begriff ‚rot', wenn $a$ rot ist. Dann ist z. B. der Umfang des Begriffes ‚Mensch' die Menge aller Menschen, der Umfang des Begriffes ‚Wirbeltier' die Menge aller Wirbeltiere, usw.

Die Gültigkeit des Schlusses (I) gründet sich nun auf folgendes einfache Verhältnis zwischen Begriffsumfängen, das ganz allgemein für beliebige Begriffe gilt: Ist der Umfang eines Begriffes $A$ (im Beispiel: der Umfang des Begriffes ‚Mensch') enthalten im Umfang eines Begriffes $B$ (im Umfang des Begriffes ‚sterblich'), so fällt jeder Gegenstand $a$ (Sokrates), der unter den Begriff $A$ fällt, auch unter den Begriff $B$. Graphisch stellt man dieses Verhältnis auch so dar:




Dabei repräsentieren die Punkte im Kreis $A$ die Gegenstände, die unter den Begriff $A$ fallen, die Punkte in Kreis $B$ die Gegenstände, die unter den Begriff $B$ fallen. Da alle Punkte im Kreis $A$ auch im Kreis $B$ liegen, liegt $a$ in $B$, wenn $a$ in $A$ liegt.

Damit wird nun auch deutlich, wieso man eine Logik, die Schlüsse von der Art unseres Beispiels (I) untersucht, als „formal" charakterisiert:

Eine solche Logik sieht von den materialen Eigenschaften der Gegenstände, auf die sich die Prämissen und die Konklusion beziehen, völlig ab, und untersucht abstrakte Beziehungen zwischen Sätzen und Begriffen, die unabhängig von den konkreten und von Wissenschaftsbereich zu Wissenschaftsbereich verschiedenen Eigentümlichkeiten des Sachgebiets gelten.

Eine Untersuchung des formalen Schließens hat nun ein gewisses immanentes Interesse, das für den Logiker ausschlaggebend ist. Abgesehen davon ist ein Studium des formalen Schließens aber auch für die übrigen Wissenschaften bedeutsam. Dazu wollen wir zwei Hinweise geben:

Es ist allgemein geläufig, daß unter den wissenschaftlichen Argumenten den *Beweisen* eine ausgezeichnete Bedeutung zukommt. Ein Beweis, man denke etwa an das Paradigma eines mathematischen Beweises, ist eine Folge von Schlüssen, deren erste Prämissen bereits bewiesene Sätze sind oder zu den Voraussetzungen gehören, unter denen die Behauptung als wahr erwiesen werden soll, und deren letzte Konklusion die zu beweisende Behauptung ist. Damit ein Beweis akzeptiert wird, fordert man im allgemeinen nur, daß jeder Schritt des Beweises, jeder einzelne Schluß als richtig einleuchte. Dieses „Einleuchten“ ist aber nun kein unproblematisches Kriterium, denn es hat schon manchem etwas eingeleuchtet, was sich hinterher als falsch erwies. Wenn man den Beweisen größtmögliche Strenge sichern und die Beweismittel einer genauen Kontrolle zugänglich machen will, so wird man daher fordern, daß die im Beweis vollzogenen Schlüsse rein formal sind, d. h. daß beim Übergang von den Prämissen zu der Konklusion eines Beweisschrittes keinerlei materiale Prinzipien verwendet werden. Man wird also fordern, daß jeder Beweisschritt sich darstellt als ein rein formaler Schluß. Alle zum Beweis der Behauptung verwendeten materialen Prinzipien müssen dann im Beweis als Prämissen explizit aufgeführt werden. Eine solche Forderung, alle Beweismittel explizit anzugeben, erleichtert zugleich die Überprüfung von Beweisen und hebt Beweislücken deutlicher hervor, die durch den allgemeinen Appell an die inhaltliche Evidenz sonst leicht verdeckt werden. Will man nun allgemeine Kriterien für strenge Beweise in diesem Sinn aufstellen, so muß man sich auf eine Theorie des formalen Schließens beziehen, d. h. man muß die Logik zu Rate ziehen.

Dieses Argument für die allgemeine wissenschaftliche Bedeutung der Logik wollen wir noch von einer anderen Seite her beleuchten: Die Entwicklung einer empirischen Wissenschaft folgt, in einer hier zulässigen großzügigen Vereinfachung gesehen, etwa folgendem Schema: auf eine Phase reiner Beschreibung und Klassifizierung einzelner Phänomene folgt eine Phase der empirischen Generalisierung — Gesetzeshypothesen werden in Form induktiver Verallgemeinerungen von einzelnen Beobachtungen aufgestellt und geprüft. Diese Phase wird endlich — im Streben nach immer höherer Allgemeinheit — abgelöst durch die Phase der Theorienbildung: die einzelnen Gesetzeshypothesen der Wissenschaft werden in einen deduktiven Zusammenhang gebracht, d. h. sie werden gegliedert in Grundgesetze, welche die fundamentalen Eigenschaften des Gegenstandsbereichs der Wissenschaft beschreiben, und in Theoreme, die aus diesen Grundgesetzen hergeleitet werden können. Dabei ist es das schon von ARISTOTELES (in Weiterführung platonischer Gedanken) verkündete Idealbild einer solcherart systematisierten Wissenschaft, daß die Theoreme sich aus den Grundgesetzen rein formal erschließen lassen, d. h. ohne Zuhilfenahme materialer Schlußprinzipien, so daß also der gesamte materiale Gehalt der Theorie vollständig in den Grundgesetzen enthalten ist und sich nicht im Verlauf der Herleitung von Theoremen unbemerkte und also unkontrollierbare weitere Annahmen über die Natur des Sachgebiets einschleichen.

GOTTLOB FREGE, einer der Schöpfer der modernen Logik, hat die erkenntnistheoretische Bedeutung einer solchen deduktiven Systematisierung des Wissens hervorgehoben, wenn er sagte:

„Es liegt nahe, die zusammengesetzteren ... Urteile aus einfacheren abzuleiten, nicht um sie gewisser zu machen, was meistens unnötig wäre, sondern um die Beziehungen der Urteile zueinander hervortreten zu lassen. Es ist offenbar nicht dasselbe, ob man bloß die Gesetze kennt oder ob man auch weiß, wie die einen schon durch die anderen mitgegeben sind. Auf diese Weise gelangt man zu einer kleinen Anzahl von Gesetzen, in welchen ... der Inhalt aller, obschon unentwickelt, eingeschlossen ist. Und auch dies ist ein Nutzen der ableitenden Darstellungsweise, daß sie jenen Kern kennenlehrt. Da man bei der unübersehbaren Menge der aufstellbaren Gesetze nicht alle aufzählen kann, so ist Vollständigkeit nicht anders als durch Aufsuchung derer zu erreichen, die der Kraft nach alle in sich schließen[1]."

Um dies Ideal einer deduktiv systematisierten Wissenschaft zu erreichen, benötigt man wiederum eine strenge Schlußlehre, benötigt also die Ergebnisse der Logik.

---

[1] [14], S. 25.

Wenn man angesichts dieser Überlegungen auch die prinzipielle Bedeutung der Logik für die Wissenschaften zugestehen muß, so bleibt doch ein Bedenken offen: ist nicht die Bedeutung der Logik jedenfalls im praktischen Wissenschaftsbetrieb gering, da doch die faktisch in den Wissenschaften verwendeten Schlußformen höchst einfach und durchsichtig sind, so daß bei einiger Aufmerksamkeit ohnehin jedermann logisch richtig schließt, ohne bei den Logikern in die Schule gegangen zu sein. Ist also die Logik nicht eine triviale Wissenschaft? Diese Ansicht mag vielleicht angesichts der aristotelischen Syllogistik naheliegen und sie ist auch von einem so bedeutenden Philosophen wie KANT vertreten worden, der sagte, daß die Logik seit ARISTOTELES keinen Schritt vor noch zurück habe tun können, also offenbar geschlossen und vollendet sei[1]. Tatsächlich war aber das Ungenügen der aristotelischen Syllogistik gegenüber den strengen Anforderungen einer Theorie des Schließens ein Anstoß zur Entwicklung der modernen Logik, die dem Inhalt nach weit über die Syllogistik hinauswachsen mußte, um diesen Anforderungen gerecht zu werden. Einer der Begründer der modernen Logik, GEORGE BOOLE, hat darauf hingewiesen, daß man schon zum Beweis der Theoreme der elementaren Arithmetik nicht mit den Schlußformen der Syllogistik auskommt, und für FREGE wurde dies Ungenügen der traditionellen Logik zum Anlaß für seine geniale Neubegründung der Logik, für die das Epitheton „trivial" ebenso fehl am Platz wäre wie für die höhere Mathematik.

Der Einschnitt in der Entwicklung der Logik um die Mitte des 19. Jahrhunderts, der den Beginn der *modernen Logik* zeichnet, ist nun so scharf, daß er noch heute den Anlaß mancher philosophischer Diskussionen bildet. Wir wollen daher die Eigentümlichkeit der modernen Logik hier noch etwas näher ins Auge fassen[2].

Nachdem die Philosophie, die bis ins letzte Jahrhundert für die Logik als eine philosophische Teildisziplin zuständig war, zunächst lange von den neuen Entwicklungen auf logischem Gebiet keine Notiz genommen hatte, trat in unserem Jahrhundert das Verhältnis der neuen zur traditionellen Logik in den Widerstreit der Meinungen. Insbesondere wurde die Frage diskutiert, ob diese neue Disziplin ein Anrecht auf den

---

[1] Kritik der reinen Vernunft, Vorrede zur 2. Aufl., B VIII.

[2] Auf die geschichtlichen Zusammenhänge werden wir im Verlauf der späteren Darlegungen, insbesondere im 6. Kapitel, noch etwas näher eingehen.

Titel „Logik" habe. Die polemische Phase dieser Diskussionen ist — von wenigen Nachzüglern abgesehen — heute abgeschlossen. Das Verdienst daran gebührt vor allem den unwidersprechlich gründlichen historischen und systematischen Untersuchungen von JAN ŁUKASIEWICZ, HEINRICH SCHOLZ und J. M. BOCHEŃSKI[1], in denen gezeigt wurde, daß der Gegenstand der modernen Logik mit dem Gegenstand der aristotelischen formalen Logik zusammenfällt, so daß der modernen Disziplin das Anrecht auf den Titel „Logik" nicht streitig zu machen ist. Diese Autoren haben ferner auch deutlich gemacht, daß die Ergebnisse der traditionellen Logik in den Lehren der modernen Logik mit enthalten sind, daß diese aber dem Inhalt nach wesentlich über den Gehalt der traditionellen Logik hinausgeht. Die Entwicklung der Logik ist also heute weit über die traditionelle Syllogistik hinausgewachsen, die damit nur mehr historisches Interesse beanspruchen kann. Demnach wäre also zu sagen, daß sich die moderne Logik zur aristotelischen Syllogistik, die den wesentlichen Grundstock der sogenannten *traditionellen Logik* ausmacht, ähnlich verhält wie die moderne Mathematik zur Mathematik des Hellenismus.

Diese fruchtbare Entwicklung der modernen Logik gründet sich vor allem auf die Verwendung neuer methodischer Prinzipien.

An erster Stelle ist hier die *Methode der Formalisierung* zu nennen, durch die sich die moderne von der traditionellen Logik am greifbarsten unterscheidet. Ein genaueres Verständnis dieser Methode werden erst die folgenden systematischen Darlegungen erwecken können. Hier genüge der folgende Hinweis:

Die Formalisierung einer Theorie vollzieht sich in zwei Schritten:

Im ersten Schritt wird eine Symbol- oder Kunstsprache aufgebaut, in deren Ausdrucksmitteln die Sätze der Theorie formuliert werden können. Die entscheidenden Gesichtspunkte für die Ersetzung der Alltagssprache, in unserem Fall also der deutschen Sprache, durch eine solche Kunstsprache sind folgende:

a) Die Alltagssprache dient vielen, ganz heterogenen Zwecken, zu Mitteilungen im täglichen Leben, zur Dichtung, zur Formulierung der Ergebnisse verschiedener Wissenschaften usw. Diesen Zwecken kann sie nur durch eine gewisse Biegsamkeit gerecht werden, die sich bei der Benützung für bestimmte Zwecke dann in Form von Vagheiten und Vieldeutigkeiten der Worte hinderlich bemerkbar machen kann. Es

[1] Vgl. dazu [49], [50], [62], [5].

steht von vornherein zu erwarten, daß man speziellen Zwecken durch eine auf diese Zwecke besonders zugeschnittene Spezialsprache besser gerecht werden kann. Tatsächlich verwendet man ja auch in den einzelnen Wissenschaften eine besondere Terminologie, die sich aus dem umgangssprachlichen Wortgebrauch durch Präzisierung der Wortbedeutungen, Wortneuschöpfungen usw. ergibt. Beim Aufbau einer Kunstsprache geht man nun in Richtung auf die angestrebte *Präzisionssprache* noch einen entscheidenden Schritt weiter, indem man keinerlei umgangssprachliche Ausdrücke sondern nur Kunstworte verwendet, die so definiert werden, daß jeder Name genau eine fest umrissene Bedeutung hat.

b) Die Kunstsprache wird als *lingua characteristica* nach der Idee von LEIBNIZ aufgebaut, d. h. als Sprache, in der die syntaktische Struktur der Ausdrücke die ontologisch-kategoriale Struktur ihrer Bedeutungen widerspiegelt. Jedem Ausdruck des Systems sieht man an seiner syntaktischen Gestalt also an, ob er eine Aussage, einen Begriff oder einen Gegenstand bezeichnet, weiterhin auch, welcher Kategorie der bezeichnete Begriff angehört, ob und gegebenenfalls wie die bezeichnete Aussage zusammengesetzt ist usw. — In der Umgangssprache kann von einer Erfüllung dieser Bedingungen nicht die Rede sein. Die Verfassung einer *lingua characteristica* ist aber nun Voraussetzung dafür, daß man auch mit sehr komplexen Bezeichnungen — kompliziert verschachtelten Sätzen, zusammengesetzten Prädikaten — zielstrebig und korrekt operieren kann, deren Bedeutung zu realisieren höchst mühsam wäre. Man hat nämlich nur auf ihre syntaktische Gestalt zu blicken, die wesentlich leichter zu erfassen ist, und beherrscht damit kraft der Korrespondenz dieser Gestalt zum ontologischen Bereich auch die Bedeutungen der Ausdrücke. H. SCHOLZ sagt dazu:

„Dies ist, wenn es planmäßig ausgeübt und von den einfachen Fällen auf beliebig verwickelte Fälle übertragen wird, eine ungemeine Entlastung; denn es erspart uns auf eine höchst sinnreiche Art das Denken an Stellen, an denen es ein für allemal erspart werden kann. — Nun ist das Denken in jedem Fall eine mehr oder weniger zeitraubende Anstrengung. Durch diese sinnreiche Art der planmäßigen Ersparung von Denkprozessen gewinnen wir also Zeit. Diese Zeit kann verwendet werden für die Bezwingung von Aufgaben, an die wir sonst überhaupt nicht herankommen würden. Andererseits hat dieses Verfahren auch in den elementarsten Fällen einen sehr wesentlichen Effekt. Es sichert uns ein für allemal gegen Irrtümer, die wir in diesen elementarsten Fällen ganz besonders zu fürchten haben, wenn wir uns dem inhaltlichen Denken überlassen[1]."

Der zweite Schritt der Formalisierung einer Theorie besteht dann darin, daß man ihre Theoreme oder Lehrsätze auf rein *syntaktischem* Wege auszeichnet, d. h. durch ihre Ausdrucksgestalt, nicht durch ihre Bedeutung bestimmt. Das geschieht etwa dadurch, daß man eine syntaktisch wohldefinierte Klasse von Sätzen der Kunstsprache als Klasse von *Axiomen* angibt und bestimmte syntaktische Regeln festlegt, mit denen aus vorgegebenen Sätzen neue Sätze gewonnen werden können. Diese Regeln sind also syntaktisch formulierte Schlußregeln, die man nun rein mechanisch anwenden kann, ohne auf die Bedeutung der Sätze zu achten. Der Gedanke der Axiomatisierung von Theorien geht, wie oben erwähnt, auf ARISTOTELES zurück, die rein syntaktische Fassung der Axiomatik aber ist eine Leistung der modernen Logik, die, ähnlich wie die Verwendung von Kunstsprachen, zwei Vorzüge hat: der Horizont des schlußfolgernden Denkens wird durch die Entlastung vom inhaltlichen Vollzug der Beweisketten wesentlich erweitert und der syntaktisch gefaßte Beweisbegriff ermöglicht eine wesentlich schärfere kritische Überprüfung vorgelegter Beweise auf ihre Validität hin. FREGE sagt dazu:

„Das Schließen geht nun in meiner Begriffsschrift nach einer Art Rechnung vor sich. Ich meine dies nicht in dem engen Sinn, als ob dabei ein Algorithmus herrsche, gleich oder ähnlich dem des gewöhnlichen Addierens oder Multiplizierens, sondern in dem Sinne, daß überhaupt ein Algorithmus da ist, d. h. ein Ganzes von Regeln, die den Übergang von einem Satze oder von zweien zu einem neuen beherrschen, so daß nichts geschieht, was nicht diesen Regeln gemäß wäre. Meine Absicht ist also auf lückenlose Strenge der Beweisführung und größte logische Genauigkeit gerichtet, daneben auf Übersichtlichkeit und Kürze[2]."

Diese Methode der Formalisierung hat zum erheblichen Teil die großen Erfolge der modernen logischen Forschung ermöglicht. Das ist für den Außenstehenden auf den ersten Blick überraschend, da nicht offenbar ist, wieso nur durch die Verwendung von Formalismen für die Logik schon etwas Wesentliches gewonnen sein soll. Diese Überraschung wird sich aber vielleicht verlieren, wenn man auf den Erfolg der gleichen

---

[1] H. SCHOLZ: Was ist Philosophie? Der erste und letzte Schritt zu ihrer Selbstbestimmung (1940), abgedruckt in [63], S. 372.

[2] [20], S. 364f.

Methode in der Mathematik blickt: dort sind uns Symbolgebrauch und syntaktische Algorithmen bereits so selbstverständlich, daß wir auf ihre Leistung kaum mehr achten. Wenn man aber etwa bedenkt, daß noch im Mittelalter die Division großer ganzer Zahlen ein so schwieriges Problem war, daß seine Lösung im Raum der Universitäten behandelt wurde, während heute — dank der Existenz eines syntaktischen Algorithmus zur Lösung dieser Aufgaben — das gleiche Problem in den ersten Volksschulklassen behandelt wird, dann wird die eminente praktische Bedeutung des Formalismus deutlicher werden.

Auch in der traditionellen Logik finden sich erste Ansätze zur Methode der Formalisierung. Der Gebrauch der Variablen in der Darstellung der aristotelischen Syllogistik, die Verwendung kanonischer Formen aussagenlogisch komponierter Sätze in der stoischen Logik und die Abstraktion einer kompakten logischen Terminologie aus der lateinischen Sprache in der scholastischen Logik sind solche Ansätze. Es war aber erst LEIBNIZ, der den Gedanken der Formalisierung in seiner vollen Tragweite konzipiert hat, und BOOLE, der diese Konzeption dann erstmals in die Tat umsetzte. Die Mathematik war das große Vorbild, daher der Titel der epochemachenden Hauptschrift von BOOLE „The mathematical analysis of logic" (1847), daher auch die Bezeichnung der neuen formalisierten Logik als „mathematische Logik". Bei FREGE finden wir dann den ersten Aufbau eines im modernen Sinn wirklich präzisen Formalismus und in ihm die geniale Darstellung einer Logik mit neuen Erkenntnishorizonten.

Die durch die Formalisierung bedingte Ähnlichkeit der modernen Logik zur Mathematik hat nun zur Vorstellung Anlaß gegeben, diese Logik sei eine mathematische Teildisziplin, die als solche von der philosophischen traditionellen Logik dem Gegenstand nach verschieden sein müsse. Oder man hat die Verwendung des Formalismus und die gründlichen Analysen der Methode der Formalisierung in der Logik in eine ausschließliche Beschäftigung mit Formalismen umgedeutet.

Diesen Mißdeutungen wurde weiterhin durch die Tatsache Vorschub geleistet, daß viele Vertreter der modernen Logik von der Mathematik herkamen und daß die Erweiterung des Horizonts der neuen Logik nun auch mathematische Grundlagenfragen in ihren Themenkreis einbezog. Es läßt sich aber sehr einfach zeigen, daß die sogenannten höheren Logiksysteme, insbesondere die Klassenlogik, in deren Rahmen sich die mathematischen Begründungsprobleme aufwerfen lassen, rein logische Systeme sind im Sinne der formalen Logik nach der aristotelischen Wissenschaftsidee[1].

Endlich hat man der modernen Logik auch vorgeworfen, daß sie sich im praktischen Wissenschaftsbetrieb aus dem Gesamtverband der Philosophie herausgelöst habe und heute das Dasein einer Spezialwissenschaft führe. Diese Entwicklung läßt aber nicht auf eine Verschiedenheit des Gegenstandes von moderner und traditioneller Logik schließen, sie erklärt sich vielmehr einfach daraus, daß jede ihren Methoden wie ihrem Inhalt nach sich hinlänglich weit entwickelnde Wissenschaft die Arbeitskraft des Forschers in immer ausschließlicherem Maße fordert und immer weniger allgemeinverständlich wird. Jede inhaltlich reiche Wissenschaft mit geschlossenem Sachgebiet wird Spezialwissenschaft. Die Logik konnte nur so lange das Dasein einer philosophischen Teildisziplin führen, als sich ihre Lehren im wesentlichen auf den Umkreis der aristotelischen Syllogistik beschränkten.

Die vorstehenden Bemerkungen zur Einordnung der modernen Logik sollen rechtfertigen, daß wir uns im folgenden mit der Logik nur in ihrer modernen Gestalt befassen. Der Titel „Logik" steht also für uns im folgenden immer für die moderne formale Logik.

Diese Hinweise mögen zur vorläufigen Abgrenzung des Gegenstandes der Logik und ihrer Methode genügen. Sie haben den Rahmen für die folgenden Untersuchungen vorgezeichnet, den wir nun mit konkretem Inhalt erfüllen wollen, indem wir vom Theoretisieren über die Logik zum Studium ihrer Lehren übergehen. Erst wenn wir logische Theorien kennengelernt haben, werden diese einleitenden Behauptungen über die Logik greifbaren Gehalt annehmen, denn es gibt keine Wissenschaft, deren Problemkreis und Methoden sich gewissermaßen von außen her fixieren ließen: ein genaues Verständnis ihrer Eigenart hat immer ein eingehendes Studium der Sache zur Voraussetzung.

[1] Vgl. dazu den Abschnitt 5.1.

# 1 Aussagenlogik

Die elementarste logische Theorie ist die *Aussagenlogik.* Ihr wollen wir uns zunächst zuwenden. Da die Aussagenlogik eine in sich geschlossene logische Theorie ist, können wir an ihr unsere einleitende Charakterisierung der modernen formalen Logik exemplifizieren. Wir können insbesondere an diesem Modellfall die Methode der Formalisierung kennenlernen und so bereits ein Verständnis für Inhalt und Methode der modernen Logik begründen.

Wenn sich die Logik allgemein mit formalen Schlüssen befaßt, so untersucht die Aussagenlogik eine spezielle Klasse solcher Schlüsse, nämlich diejenigen Schlüsse, die als gültig ausgezeichnet sind nur auf Grund der Satzstruktur von Prämissen und Konklusion. Unter *Satzstruktur* soll dabei die Struktur verstanden werden, kraft derer sich aus einem Satz vollständige Teilsätze herausheben lassen, nicht aber die Subjekt-Prädikat-Struktur der Sätze. So enthält z. B. der Satz „Die Sonne scheint und es ist warm“ die vollständigen Teilsätze „Die Sonne scheint“ und „Es ist warm“, die durch die Konjunktion „und“ verbunden sind. Hingegen bleibt die Zergliederung der Teilsätze „Die Sonne scheint“ und „Es ist warm“ in Subjekt und Prädikat für die aussagenlogischen Untersuchungen außer Betracht. Da wir nun die Satzverbindungen durch „und“ so verstehen, daß ein „und“-Satz nur dann wahr ist, wenn die beiden in ihm durch „und“ verbundenen Teilsätze wahr sind, so können wir aus der Wahrheit des Satzes „Die Sonne scheint und es ist warm“ auf die Wahrheit des Satzes „Die Sonne scheint“ schließen und haben also in der Figur:

P1) Die Sonne scheint und es ist warm

---

K) Die Sonne scheint

einen einfachen aussagenlogischen Schluß vor uns.

Die Worte „Aussagenlogik“ und „aussagenlogisch“ werden im folgenden immer durch „A.L.“ und „a.l.“ abgekürzt.

## 1.1 Aussagenlogische Strukturen der Umgangssprache

### 1.1.1 Sätze

Das Material einer Sprache bilden ihre Ausdrücke und diese Ausdrücke sind Folgen von Grundzeichen der Sprache. So sind die Grundzeichen der gesprochenen Sprache die Laute, ihre Ausdrücke oder Wörter Lautfolgen. Im folgenden werden wir uns immer nur für die geschriebene Sprache interessieren, deren Äußerungen vor denen der gesprochenen Sprache den Vorteil der Dauer haben und so für wissenschaftliche Zwecke wesentlich besser geeignet sind. Die Grundzeichen der Schriftsprache sind die graphischen Zeichen, die im Alphabet aufgeführt werden, nebst den Interpunktionszeichen. Aus ihnen setzen sich die Ausdrücke oder Wörter der geschriebenen Sprache zusammen. Aus den Wörtern kann man dann wiederum Wortfolgen bilden, wie im Satz, der aus mehreren Wörtern besteht. Wenn wir im folgenden von *Ausdrücken* sprechen, so wollen wir der Kürze wegen auch immer Ausdrucksfolgen darunter befassen.

Aus den Grundzeichen lassen sich sinnlose Ausdrücke bilden, wie „kitsrplk", „mopkrcc", „korryliert", „Phedat", „Der Phedat korryliert zyklisch" usw., und sinnvolle Ausdrücke, wie „Haus", „Friedrich", „rot", „Friedrich hat rote Haare" usw. Sinnvolle Ausdrücke nennt man auch *Namen*. Sie bezeichnen etwas, drücken etwas aus, haben eine *Bedeutung*. Es ist nun für die folgenden Darlegungen von grundsätzlicher Wichtigkeit, den Unterschied zwischen den Namen und ihren Bedeutungen klar vor Augen zu haben, und so nicht etwa den Ausdruck „München" als Namen mit seiner Bedeutung, der Stadt München, zu verwechseln, das Wort „rot" mit der Eigenschaft, rot zu sein, oder den Satz „Wien ist größer als München" mit der Tatsache, daß Wien größer ist als München. Um auch im Text klar hervorzuheben, ob von der Bedeutung eines Namens die Rede ist, oder von dem Namen selbst, setzen wir einen Ausdruck in Anführungszeichen „...", wenn von ihm selbst und nicht von seiner Bedeutung die Rede sein soll. Wir sagen also z. B.:

1) *München ist die bayerische Landeshauptstadt,* aber
2) *„München" ist ein zweisilbiges Wort,* und
3) *„München" bezeichnet München.*

Falsch wäre es hingegen, zu sagen:

1') *„München" ist die bayerische Landeshauptstadt* — denn „München" ist ein Ausdruck und keine Stadt, 2′) *München ist ein zweisilbiges Wort,* oder

3′) *München bezeichnet München* — denn München ist eine Stadt und kein Wort oder Name.

Diese Unterscheidung zwischen einem Namen und seiner Bedeutung fällt leicht, wenn die Bedeutung nicht selbst wiederum ein Wort ist. Hingegen macht sie erfahrungsgemäß zunächst Schwierigkeiten, wenn von Namen von Namen und dgl. die Rede ist. Dazu zwei weitere Beispiele:

4) In dem Satz „München ist die bayerische Landeshauptstadt" kommt das Wort „München", nicht aber München vor.

5) In dem Satz „„München" ist ein zweisilbiges Wort" kommt das Wort „„München"" als Name für „München", d. h. als Name für einen Namen, vor. Der Name „München" kommt aber nicht im Satz vor, da in ihm von dem Wort „München", nicht aber von der Stadt München die Rede ist.

Wir wollen uns im folgenden immer an diese Konvention über den Gebrauch der Anführungszeichen halten, wenn nicht der Kontext oder eine Hervorhebung des Ausdrucks im Kontext schon deutlich macht, daß von diesem Ausdruck selbst die Rede ist und sich so die Setzung von Anführungszeichen erübrigt.

Untersuchungen, die sich auf sprachliche Ausdrücke beziehen und sich in Absehung von deren Bedeutung nur auf ihre graphische Gestalt beschränken, nennt man *syntaktische* Untersuchungen. Wird hingegen neben der Zeichenstruktur der Ausdrücke auch ihre Bedeutung betrachtet, so spricht man von *semantischen* Untersuchungen. Daß der Ausdruck „Sokrates ist ein Philosoph" vier Wörter mit zusammen acht Silben enthält, ist also z. B. eine syntaktische Behauptung. Daß dieser Ausdruck dasselbe bedeutet wie der Ausdruck „Socrates is a philosopher" ist eine semantische Behauptung.

Nach diesen Unterscheidungen können wir nun den Grundbegriff der A.L., den Begriff des Satzes oder der Aussage, wie folgt erklären:

**1.1.1.1** Ein *Satz* ist ein sprachlicher Ausdruck, der entweder wahr oder falsch ist.

Sätze sind Ausdrücke, schriftsprachliche Sätze also Folgen graphischer Zeichen oder Zeichengruppen und nicht etwas, das diese Zeichengruppen bedeuten. Sätze sind ferner nur solche Ausdrücke einer Sprache, die wahr oder falsch sind. Damit ein Ausdruck wahr oder falsch sein kann, muß er zunächst einmal sinnvoll sein. Die Ausdrücke „Der Phedat korryliert zyklisch" und „Rot bohrt neun" sind also keine Sätze. Aber auch nicht alle sinnvollen Ausdrücke sind Sätze. So sind z. B. die Prädikate „rot" und „Haus" sowie die Eigennamen „Friedrich" und „Wien" sicher sinnvoll, bezeichnen sie doch Eigenschaften bzw. Gegenstände, aber sie lassen sich weder als wahr noch als falsch ansprechen. Wahr oder falsch sind nur solche Ausdrücke, die Sachverhalte bedeuten, wie „Die Erde ist rund", „$7 + 9$ ist 16", „Wien hat mehr Einwohner als Innsbruck", „Es gibt 19 Planeten", „Linz liegt in Pommern" oder „$2 \cdot 2$ ist 5". Ob ein solcher Ausdruck wahr ist oder ob er falsch ist, läßt sich nicht allein durch die Kenntnis der Sprache entscheiden, in der er formuliert ist. Um festzustellen, ob der Satz „Die Entfernung zwischen New York und Chicago beträgt 1100 Kilometer" wahr ist, genügt es nicht, diesen Satz zu verstehen, sondern man muß dazu Messungen vornehmen; und um festzustellen, ob der Satz „$37\,529 + 63\,717$ ist $439\,238$" wahr ist, muß man die Addition der Zahlen 37 529 und 63 717 ausführen. Um aber festzustellen, ob diese Ausdrücke sinnvoll sind und ob sie Sachverhalte ausdrücken — gleich ob diese Sachverhalte tatsächlich bestehen oder nicht —, dazu bedarf es nur der Kenntnis der deutschen Sprache.

Der Satzbegriff ist nach der Erklärung 1.1.1.1 ein semantischer Begriff, denn ob ein Ausdruck ein Satz ist, hängt danach nicht nur von seiner Zeichengestalt ab, sondern auch von seiner Bedeutung. Als Satzbedeutungen bezeichnen wir Sachverhalte oder *Propositionen*. Sätze als Namen und Propositionen als Bedeutungen sind also streng zu unterscheiden. Der Satz „Die Fische sind Wirbeltiere" bezeichnet den Sachverhalt, daß Fische Wirbeltiere sind. Sachverhalte lassen sich aber nicht wie Sätze auf Papier schreiben, sind also keine Ausdrücke.

Die Redeweise, in der wir einen Satz als wahr oder falsch bezeichnen, nimmt sich vielleicht auf den ersten Blick etwas ungewöhnlich aus. Es läge näher, die Wahrheit und Falschheit von Propositionen auszusagen anstatt von Sätzen und so etwa die Formulierung zu wählen „Es ist wahr, daß die Erde rund ist" anstelle von „Der Satz „Die Erde ist rund" ist wahr". Aber man kann ja unter Bezugnahme auf einen solchen Wahrheitsbegriff für Propositionen festlegen:

**1.1.1.2** Ein Satz ist wahr genau dann, wenn die Proposition wahr ist, die er ausdrückt.

Nach dieser Erklärung kann man dann auch in unserem Sinn von der Wahrheit und Falschheit von Sätzen sprechen.

Der Wahrheitsbegriff ist ferner mit einer Reihe von philosophischen Problemstellungen belastet, von denen wir hier aber gänzlich absehen können. Uns genügt das alltägliche Verständnis der Worte „wahr" und „falsch" in Anwendung auf Sätze. Tatsächlich verstehen wir ja den Ausdruck „Der Satz „Köln liegt am Rhein" ist wahr" ebenso gut wie den Satz „Köln liegt am Rhein", denn er besagt nichts anderes als dieser.

Danach würde es nun scheinen, als sei das Prädikat „wahr" — und damit auch „falsch" als gleichbedeutend mit „nicht wahr" — überflüssig, da wir immer den Inhalt eines Satzes „Der Satz „..." ist wahr" durch den Satz „..." selbst wiedergeben könnten. Tatsächlich liegt auch die behauptende Kraft eines Satzes nicht in der Hinzufügung des Wortes „wahr", sondern in der Struktur und dem Gebrauch des Satzes selbst. Trotzdem ist die Verwendung der Wörter „wahr" und „falsch", wie wir im folgenden sehen werden, in vielen Zusammenhängen praktisch.

Als Postulat der *Wahrheitsdefinitheit* der Sätze bezeichnet man die Forderung:

**1.1.1.3** Jeder Satz ist wahr oder falsch — eine dritte Möglichkeit gibt es nicht.

Diese Forderung des *tertium non datur* ist nach der Erklärung **1.1.1.1** trivialerweise erfüllt, nach der wir einen Ausdruck eben nur dann als Satz ansprechen, wenn er wahr oder falsch ist. Das Postulat gewinnt denn auch seine Bedeutung erst dann, wenn man den Satzbegriff auf andere Weise erklärt, etwa indem man Sätze als Ausdrücke einführt, die Propositionen bezeichnen, sinnvolle Gedanken ausdrücken oder ähnliches. Wie immer man den Satzbegriff aber einführt, so enthält **1.1.1.3** das wichtigste Extrakt, das man von diesem Begriff in den folgenden Darlegungen benötigt[1].

### 1.1.2 Satzstrukturen und Schlüsse

Wir wollen nun die Satzstrukturen, auf deren Betrachtung sich die Lehre von den a.l. Schlüssen stützt, zunächst in der Umgangssprache — das ist für uns also die deutsche Sprache — studieren und die Bildung von komplexen Sätzen mit Hilfe solcher Wörter wie „nicht", „und", „oder" untersuchen.

---

[1] Zur Präzisierung des hier verwendeten Wahrheitsbegriffes vgl. [73] sowie die ausführliche Darstellung und Diskussion in [70]. Zum Begriff der Proposition oder, wie FREGE sagt, des Gedankens vgl. die klaren und scharfsinnigen Ausführungen FREGES in [22].

**1.1.2.1** *Die Negation.* Wenn man einen Satz verneint oder ***negiert,*** d. h. an geeigneter Stelle das Wort „nicht" einschiebt, so erhält man wiederum einen Satz, den wir als *Negation* des ursprünglichen Satzes bezeichnen wollen. Aus dem Satz „Es regnet" entsteht so der Satz „Es regnet nicht", aus „Hans ist blond" entsteht „Hans ist nicht blond". Wir gebrauchen nun das Wort „nicht" so, daß der negierte Satz falsch ist, wenn der unnegierte Satz (der aus dem negierten Satz durch Fortlassung des „nicht" entstehende Satz) wahr ist und umgekehrt: Nach 1.1.1.3 ist jeder Satz, der nicht wahr ist, falsch, so daß wir auch sagen können: „Hans ist nicht blond" ist wahr genau dann, wenn „Hans ist blond" falsch ist. Formulieren wir das als Prinzip der Negation:

**1.1.2.1.1** Der negierte Satz ist wahr genau dann, wenn der unnegierte Satz falsch ist.

Die doppelte Verneinung eines Satzes ergibt demnach einen Satz, der genau dann wahr ist, wenn der ursprüngliche Satz wahr ist. Das ist der Inhalt des Prinzips *duplex negatio est affirmatio.* Es gilt also der Schluß:

$$\text{I)}\quad \frac{\text{Hans ist nicht nicht blond}}{\text{Hans ist blond.}}$$

Denn wenn „Hans ist nicht nicht blond" wahr ist, so ist „Hans ist nicht blond" nach 1.1.2.1.1 falsch, also ist „Hans ist blond" nach 1.1.2.1.1 wahr. Die Wahrheit der Prämisse „Hans ist nicht nicht blond" hat also die Wahrheit der Konklusion „Hans ist blond" zur Folge und das ist das Merkmal des gültigen Schlusses.

Ebenso kann man mit 1.1.2.1.1 auch den Schluß

$$\text{II)}\quad \frac{\text{Hans ist blond}}{\text{Hans ist nicht nicht blond}}$$

rechtfertigen.

(I) und (II) sind einfache Beispiele aussagenlogischer Schlüsse.

Nun stoßen wir bei der Untersuchung von Negationen in der Umgangssprache auf eine gewisse Schwierigkeit dadurch, daß sich keine einfachen syntaktischen Kriterien für die Bildung negierter Sätze angeben lassen: Wir bilden die Negation von Sätzen nicht nur durch Einschieben des Wortes „nicht", sondern in recht verschiedener Weise, wie die folgenden Beispiele zeigen:

„Alle Mathematiker sind musikalisch", Negation: „Es gibt unmusikalische Mathematiker". — „Hans hat Fritz ein Buch gegeben", Negation: „Hans hat Fritz kein Buch gegeben".

Ferner stößt die Bildung mehrfacher Negationen auf stilistische Schwierigkeiten, wie schon das Beispiel „Hans ist nicht nicht blond" zeigt. An diesen Schwierigkeiten wollen wir uns aber im Moment nicht einhängen, beim Übergang zur Verwendung einer Symbolsprache werden sie ohnehin verschwinden[1].

**1.1.2.2** *Die Konjunktion.* Aus zwei Sätzen kann man durch Zwischenfügung des Wortes „und" einen neuen Satz bilden, den wir als *Konjunktion* der beiden ursprünglichen Sätze bezeichnen. Aus „Es regnet" und „Es ist kalt" entsteht so der Satz „Es regnet und es ist kalt". Das Wort „und" wird dabei so gebraucht, daß die Konjunktion wahr ist, wenn ihre Teilsätze, die *Konjunktionsglieder*, beide wahr sind; falsch, wenn mindestens eines der Konjunktionsglieder falsch ist. D. h. es gilt als Prinzip der Konjunktion:

**1.1.2.2.1** Eine Konjunktion ist genau dann wahr, wenn beide Konjunktionsglieder wahr sind.

Daher folgt aus der Wahrheit der Konjunktion die Wahrheit der beiden Konjunktionsglieder:

$$\text{III)}\quad \frac{\text{Es regnet und es ist kalt}}{\text{Es regnet}}$$

$$\text{IV)}\quad \frac{\text{Es regnet und es ist kalt}}{\text{Es ist kalt.}}$$

Nach 1.1.2.1.1 und 1.1.2.2.1 ist ferner der Satz:

V) „Die Sonne scheint und die Sonne scheint nicht" falsch.

Denn nach 1.1.1.3 ist der Satz „Die Sonne scheint" entweder wahr oder falsch. Ist es wahr, so ist seine Negation „Die Sonne scheint nicht"

[1] Für eine detaillierte Analyse der umgangssprachlichen Verneinung vgl. [23]. Frege diskutiert dort auch die älteren philosophischen Thesen, nach denen es zwei Arten von Urteilen gibt, bejahende und verneinende, oder nach denen das Wesen der Verneinung in der Auflösung der Aussage besteht. Diese Diskussionen sind vor allem deswegen interessant, weil sie deutlich machten, welchen Schwierigkeiten eine Präzisierung selbst der einfachsten logischen Begriffe begegnete.

falsch, also ist ein Konjunktionsglied des Satzes und damit der Satz selbst falsch. Ist der Satz „Die Sonne scheint" aber falsch, so ist wiederum ein Konjunktionsglied falsch und damit auch die gesamte Konjunktion. Unabhängig davon, ob die Sonne scheint oder nicht, wissen wir also, daß der Satz (V) falsch ist aus rein logischen Gründen.

Da (V) falsch ist, ist

VI) „Nicht: die Sonne scheint und die Sonne scheint nicht" wahr.

Dieser Satz ist eine Anwendung des allgemeinen *Prinzips vom ausgeschlossenen Widerspruch*, das besagt: es ist nicht möglich, daß das Gleiche (d. h. der gleiche Satz) zugleich gilt und nicht gilt.

Auch die Bildung umgangssprachlicher Konjunktionen folgt keinen einfachen Gesetzen, wie das Beispiel: „Hans ist blond und groß" anstelle von „Hans ist blond und Hans ist groß" zeigt. Hier steht das „und" nicht zwischen vollständigen Sätzen, sondern zwischen Prädikaten[1].

**1.1.2.3** *Die Disjunktion.* Wie durch Zwischenfügen von „und" entsteht auch durch Einfügung von „oder" aus zwei Sätzen ein neuer Satz, den wir als *Disjunktion* bezeichnen. Die durch „oder" verknüpften Sätze nennen wir *Disjunktionsglieder.* Aus „Die Sonne scheint" und „Es regnet" entsteht so der Satz „Die Sonne scheint oder es regnet". Wenn wir nun in Analogie zu 1.1.2.1.1 und 1.1.2.2.1 nach einem Prinzip suchen, das den Gebrauch des Wortes „oder" regelt, so finden wir, daß dieses Wort in zwei verschiedenen Weisen gebraucht wird, im Sinn des ausschließenden und des nichtausschließenden „oder". — Wenn wir etwa sagen:

VII) Hans hat für seine Tat eine Geldstrafe oder eine Haftstrafe zu erwarten,

so wollen wir damit ausschließen, daß Hans zugleich mit einer Geld- und Haftstrafe belegt wird. Wir sagen dann auch: Hans hat entweder mit einer Geld- oder mit einer Haftstrafe zu rechnen". Der Gebrauch dieses *ausschließenden* „oder" wird durch folgendes Prinzip geregelt:

**1.1.2.3.1** Eine ausschließende Disjunktion ist wahr dann und nur dann, wenn genau eines der beiden Disjunktionsglieder wahr ist.

Der Satz

VIII) Die Sonne scheint oder die Sonne scheint nicht

[1] Zu einer Analyse der umgangssprachlichen Konjunktion vgl. auch [24].

ist also bei einer Deutung des „oder" im ausschließenden Sinne nach 1.1.2.3.1 immer wahr, gleichgültig, ob die Sonne scheint oder nicht.

Wenn wir hingegen sagen:

IX) Wer einbricht oder stiehlt wird bestraft,

so wollen wir denjenigen, der zugleich Einbruch und Diebstahl begeht, damit nicht von Strafe ausnehmen. Wenn aber jemand Einbruch und Diebstahl begangen hat, so wäre er bei Deutung des „oder" in (IX) nach dieser Regel straffrei. In (IX) gebrauchen wir also das „oder" offenbar im *nichtausschließenden* Sinn, der dem Prinzip genügt:

**1.1.2.3.2** Eine nicht ausschließende Disjunktion ist wahr genau dann, wenn (mindestens) eines der beiden Disjunktionsglieder wahr ist.

Während also eine Disjunktion nach 1.1.2.3.2 nur dann falsch ist, wenn beide Disjunktionsglieder falsch sind, ist sie nach 1.1.2.3.1 darüber hinaus auch dann falsch, wenn beide Disjunktionsglieder wahr sind.

Der Satz (VIII) ist auch nach 1.1.2.3.2 wahr, denn wenn das erste Disjunktionsglied wahr ist, so ist die Disjunktion wahr; ist das erste Disjunktionsglied falsch, so ist nach 1.1.2.1.1 das zweite Disjunktionsglied wahr, so daß wiederum die Disjunktion wahr wird. Der Satz (VIII) ist in dieser Deutung eine Anwendung des allgemeinen Prinzips *tertium non datur*, das besagt, jeder Satz ist wahr oder falsch — eine dritte Möglichkeit gibt es nicht.

Wir wollen nun im folgenden das „oder" immer im Sinne von 1.1.2.3.2 verstehen, also im Sinn des nichtausschließenden „oder"! Andernfalls wollen wir ein „entweder — oder" setzen. Zwei weitere einfache Schlüsse sind nach 1.1.2.3.2 auch

$$\text{X)}\quad \frac{\text{Die Sonne scheint}}{\text{Die Sonne scheint oder es regnet}}$$

$$\text{XI)}\quad \frac{\text{Es regnet}}{\text{Die Sonne scheint oder es regnet}}.$$

## 1.2 Theorie der Wahrheitsfunktionen

### 1.2.1 Symbolisierung aussagenlogischer Verknüpfungen

Wir haben oben einige einfache Beispiele aussagenlogischer Satzverknüpfungen angegeben und gezeigt, wie sich aus den Prinzipien, die den Gebrauch solcher Verknüpfungen regeln, einfache Schlüsse rechtfertigen lassen. Wir sind dabei aber schon auf zwei Schwierigkeiten gestoßen:

1. Die untersuchten Satzstrukturen gehorchen in der Umgangssprache keinen einfachen syntaktischen Regeln, man kann nicht eine einheitliche Gestaltung von Negationen, von Konjunktionen oder von Disjunktionen angeben. Die Bildung mehrfacher Verknüpfungen, etwa die Bildung der Negation einer Disjunktion zweier Konjunktionen macht Schwierigkeiten. Die Struktur solcher komplexer Sätze wird sehr schnell unübersichtlich, wie folgendes Beispiel zeigt: „Nicht Ferdinand liebt Maria und Maria liebt Kurt oder Kurt liebt Maria und Maria liebt Ferdinand".

Soll das soviel besagen wie:

„Ferdinand liebt Maria nicht. Und: Maria liebt Kurt oder Kurt liebt Maria. Und Maria liebt Ferdinand." — oder: „Nicht: Ferdinand liebt Maria und Maria liebt Kurt. Oder: Kurt liebt Maria und Maria liebt Ferdinand" — oder wie ist das Zusammenwirken der Verknüpfungen in diesem Satz sonst zu verstehen?

2. Das gleiche Wort, wie z. B. das Wort „oder" wird umgangssprachlich in ganz verschiedenen Bedeutungen gebraucht. Um herauszufinden, in welchem Sinn solche Worte gebraucht werden, muß man also den Kontext analysieren, in dem das Wort vorkommt. Es ist aber nicht gesagt, daß der Kontext immer eine eindeutige Interpretation des Wortsinns erlaubt.

Einen weiteren wesentlichen Punkt haben wir bisher noch gar nicht erwähnt:

3. Die logisch gültigen Schlüsse sind formal gültig, d. h. sie sind unabhängig vom materialen Gehalt der Sätze gültig. Daher eignet ihnen eine Allgemeinheit, die wir umgangssprachlich nur auf komplizierten Umwegen wiedergeben können. So kann man nur solche Aussagen machen wie etwa: Eine Disjunktion, deren zweites Glied die Negation des ersten Gliedes ist, ist immer wahr (das ist das Prinzip *tertium non datur*). Aber für komplexere Sätze wird das recht umständlich. Ähnliche Gründe haben in der Mathematik dazu geführt, daß man nicht schreibt:

„Die Summe zweier Brüche, subtrahiert von dem Produkt der Quadrate ihrer Nenner", sondern, unter Verwendung einer geeigneten Symbolik, kurz und übersichtlich „$x^2 \cdot y^2 - \left(\frac{u}{x} + \frac{v}{y}\right)$".

Eine solche einfache und übersichtliche Symbolik wollen wir uns jetzt auch für die Darstellung der a.l. Verknüpfungen verschaffen. Dazu repräsentieren wir die Sätze der Umgangssprache durch die Buchstaben $p, q, r, s, t$ und auch durch solche Buchstaben mit angehängten Ziffernindices, also durch $p_1, q_3, s_{97}$ usf., damit wir einen hinreichend großen Vorrat solcher Satzsymbole haben. Diese Symbole bezeichnen wir als *Satzvariable* (kurz SV). Für die Wörter „nicht", „und" und für das nichtausschließende „oder" setzen wir die Symbole „$\neg$", „$\wedge$" und „$\vee$" und schreiben nun „$\neg$– – –" statt „Nicht – – –", „– – – $\wedge$ ..." statt „– – – und ..." und „– – – $\vee$ ..." statt „– – – oder ...". Steht etwa $p$ für den Satz „Schmid kandidiert bei der Wahl des Vereinsvorstandes" und $q$ für „Schulze kandidiert bei der Wahl des Kassenwartes", so steht nun $\neg p$ für „Schmid kandidiert nicht bei der Wahl des Vereinsvorstandes", $p \wedge q$ für „Schmid kandidiert bei der Wahl des Vereinsvorstandes und Schulze kandidiert bei der Wahl des Kassenwartes" und $p \vee q$ für „Schmid kandidiert bei der Wahl des Vereinsvorstandes oder Schulze kandidiert bei der Wahl des Kassenwartes". Die Symbole $\neg$, $\wedge$ und $\vee$ nennt man auch a.l. *Operatoren.*

Aus den SV als a.l. einfachen Sätzen können wir also mit den a.l. Operatoren zusammengesetzte Sätze bilden. Aus diesen zusammengesetzten Sätzen können wir dann mit Hilfe der a.l. Operatoren neue Sätze bilden, usf. Dabei müssen wir nun eine Regelung treffen, wie solche mehrfach zusammengesetzten Formeln zu verstehen sind. Für den gleichen Zweck verwendet man in der Mathematik Klammerzeichen. So bedeutet etwa „$7 \cdot (8 + 3)$" das Produkt aus 7 und der Summe $8 + 3$. Hingegen bedeutet „$(7 \cdot 8) + 3$" die Summe aus dem Produkt $7 \cdot 8$ und der Zahl 3. Da der erstere Ausdruck 77, der letztere 59 bedeutet, so kann man nicht einfach beidesmal „$7 \cdot 8 + 3$" schreiben, wenn man Mehrdeutigkeiten vermeiden will, wie das die Aufgabe jeder brauchbaren Symbolik ist.

Es liegt also nahe, auch in der a.l. Symbolik Klammerzeichen zu verwenden und festzulegen, daß ein Satz unserer a.l. Symbolik, der durch Klammern eingeschlossen ist, als Einheit gilt bzgl. der a.l. Operatoren, die unmittelbar vor oder hinter ihm stehen. So ist $(p \wedge q) \vee r$ eine Disjunktion, deren erstes Glied $p \wedge q$ ist, $p \wedge (q \vee r)$ ist hingegen eine Konjunktion, deren zweites Glied $q \vee r$ ist. $\neg(p \wedge q)$ ist eine Negation, in der die Konjunktion $p \wedge q$ verneint wird, hingegen ist $(\neg p) \wedge q$ eine Konjunktion, deren erstes Glied $\neg p$ ist.

Damit man nun nach dieser Grundregel nicht zu viele Klammern setzen muß und die Formeln durch ein Klammerdickicht unüberschaubar werden, führt man besondere Regeln ein, die Klammereinsparungen erlauben. Ebenso wie man in der Mathematik durch die Festsetzung, daß das Zeichen „$\cdot$" stärker bindet als das Zeichen „$+$" die Klammer im Ausdruck „$(7 \cdot 8) + 3$" einsparen kann und dafür „$7 \cdot 8 + 3$" schreibt, so kann man durch die Festsetzung, daß $\neg$ stärker bindet als $\wedge$ und $\vee$, und $\wedge$ stärker als $\vee$, Klammern einsparen. Man kann dann z. B. statt $(\neg p) \wedge q$ auch $\neg p \wedge q$ schreiben, statt $(\neg p) \vee q$ auch $\neg p \vee q$, und statt $(p \wedge q) \vee r$ auch $p \wedge q \vee r$. Nicht entbehrlich sind hingegen die Klammern in den Sätzen $\neg(p \wedge q)$, $\neg(p \vee q)$ und $(p \vee q) \wedge r$.

Ausgehend von den SV können wir in unserer Symbolsprache durch a.l. Verknüpfungen etwa folgende Sätze bilden:

$$
\begin{array}{ll}
p & \\
\neg p & r,\ p \\
\neg p \wedge q, & r \vee p \\
(\neg p \wedge q) \wedge (r \vee p) & \\
\neg((\neg p \wedge q) \wedge (r \vee p)), & \text{usf.}
\end{array}
$$

Im folgenden verwenden wir auch die Buchstaben A, B, C, D, ..., um nicht näher spezifizierte Formeln unserer Symbolsprache anzudeuten, im gleichen Sinn, in dem wir oben Striche „— — —" und Punkte „..." verwendet haben, um Sätze anzudeuten, deren syntaktische Gestalt offen blieb. Wir können dann z. B. sagen: eine Negation hat in unserer Symbolsprache die Gestalt $\neg$A, eine Konjunktion die Gestalt A $\wedge$ B, eine Disjunktion die Gestalt A $\vee$ B. A $\wedge$ B deutet also einen Ausdruck an, der besteht aus einer Formel A, gefolgt von dem Zeichen $\wedge$, gefolgt von einer Formel B. Steht A z.B. in einem bestimmten Kontext für die Formel $p \vee \neg q$, B für $q \wedge \neg\neg r$, so steht A $\wedge$ B für $(p \vee \neg q) \wedge (q \wedge \neg\neg r)$. Man beachte dabei, daß die Formeln A und B bzgl. der Konjunktion in A $\wedge$ B eine Einheit bilden, so daß man wie im Beispiel ev. neue Klammern setzen muß, um diese Einheit hervorzuheben. Man darf also im Beispiel die Konjunktion A $\wedge$ B nicht als $p \vee \neg q \wedge q \wedge \neg\neg r$ schreiben, was ja nach den Klammerregeln wie $p \vee (\neg q \wedge (q \wedge \neg\neg r))$, d. h. als Disjunktion zu lesen wäre.

Da die Buchstaben A und B im allgemeinen für unspezifizierte Formeln stehen, versteht sich eine Aussage etwa über die Konjunktion A $\wedge$ B im Sinn der Behauptung: Sind A und B *irgendwelche* Sätze der Symbolsprache, so gilt die Aussage über A $\wedge$ B für die Konjunktion dieser Sätze. $A \wedge B$ ist also im allgemeinen ein *Satzschema*, nicht ein bestimmter Satz.

Durch die Verwendung der a.l. Symbolik sind wir nun der Mängel der Umgangssprache enthoben, die wir eingangs hervorgehoben hatten:

1. Die Satzverknüpfungen gehorchen einfachen syntaktischen Gesetzen. Jeder negierte Satz hat die Gestalt $\neg A$, jede Konjunktion die Gestalt $A \wedge B$ und jede Disjunktion die Gestalt $A \vee B$. Die Klammerregeln legen die a.l. Struktur jedes Satzes eindeutig fest, so daß keine Mehrdeutigkeiten auftreten können. Jedem Satz läßt sich also sofort ansehen, ob er eine Negation, Konjunktion oder Disjunktion ist, welche Struktur seine Teilsätze haben, usf. Gehen wir auf den Satz zurück

a) „Nicht Ferdinand liebt Maria und Maria liebt Kurt oder Kurt liebt Maria und Maria liebt Ferdinand",

so können wir die Intention dieses mehrdeutigen Satzes nun durch die Übersetzung in unsere Symbolik genau fixieren. Setzen wir die Buchstaben $p$, $q$, $r$, $s$ für die Sätze „Ferdinand liebt Maria", „Maria liebt Kurt", „Kurt liebt Maria", „Maria liebt Ferdinand" in dieser Reihenfolge, so erhalten wir folgende Übersetzungsmöglichkeiten:

$$\begin{array}{lll} \neg(p \wedge q \vee r \wedge s), & \neg(p \wedge (q \vee r \wedge s)), & \neg(p \wedge ((q \vee r) \wedge s)), \\ \neg(p \wedge q \vee r) \wedge s, & \neg(p \wedge (q \vee r)) \wedge s, & \neg(p \wedge q) \vee r \wedge s, \\ \neg p \wedge q \vee r \wedge s, & \neg p \wedge ((q \vee r) \wedge s), & ((\neg p \wedge q) \vee r) \wedge s. \end{array}$$

Die Vielzahl dieser möglichen Aufgliederungen der Satzstruktur von (a) zeigt deutlich die Überlegenheit der Symbolsprache vor der Umgangssprache.

2. Auch die Vieldeutigkeiten der a.l. Verknüpfungswörter der Umgangssprache wird in der Symbolsprache vermieden. Die a.l. Operatoren gehören ja der Umgangssprache nicht an und sind zunächst bedeutungslose Zeichen. Ihnen wird dann kraft Festsetzung nur eine bestimmte Bedeutungsfunktion zugeordnet und nur in dieser einen Bedeutung werden sie dann verwendet. So wird das Zeichen $\vee$ nur in der Bedeutung des nichtausschließenden „oder" verwendet, die durch das Prinzip 1.1.2.3.2 festgelegt ist, nimmt also an der Mehrdeutigkeit des umgangssprachlichen „oder" nicht teil.

3. In der Mathematik stehen Variable in manchen Kontexten für bestimmte Zahlen. Ebenso repräsentieren die SV in gewissen Kon-

texten, in denen bestimmte Interpretationen dieser SV durch umgangssprachliche Sätze zugrunde gelegt werden, Sätze eines bestimmten Inhalts. Die Variablen werden in der Mathematik vor allem aber auch dazu verwendet, die Allgemeingültigkeit eines Satzes auszudrücken. So besagt z. B. die Gleichung:

b) $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$, daß diese Identität gilt, gleich welche Zahlen die Variablen „$x$" und „$y$" repräsentieren mögen, d. h. daß die Identität für *alle* Zahlen $x$ und $y$ gilt. Ebenso können wir durch die Verwendung von Satzvariablen eine Allgemeingültigkeit ausdrücken. Dann besagt der Satz $p \vee \neg p$, daß $p \vee \neg p$ wahr ist, gleich welche speziellen Sätze $p$ repräsentieren möge, d. h. $p \vee \neg p$ besagt, daß für alle Sätze das *tertium non datur* gilt. Tatsächlich geht es ja in der Logik vor allem um die Formulierung formal gültiger Sätze, so daß die Deutung der SV, außer im Kontext von Beispielen, immer offen bleibt und die SV damit in erster Linie dem Ausdruck der Allgemeingültigkeit dienen.

Die Gleichung (b) geht kraft ihrer Allgemeingültigkeit immer wieder in eine wahre Aussage über, wenn man für die Variablen „$x$" und „$y$" spezielle Zahlnamen einsetzt. So gilt z. B. auch $(1 + 3)^2 = 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot 3 + 3^2$ und $(17 + 198)^2 = 17^2 + 2 \cdot 17 \cdot 198 + 198^2$. Ferner können wir auch für die Variablen Ausdrücke einsetzen, die selbst wieder Variablen enthalten, wie z. B. „$z + 7$" für „$x$" und „$3u^2$" für „$y$". Wir erhalten dann $((z + 7) + 3u^2)^2 = (z + 7)^2 + 2(z + 7)3u^2 + (3u^2)^2$. Alle so aus (b) entstehenden Gleichungen müssen richtig sein, wenn (b) allgemeingültig ist. Ebenso erhalten wir aus dem allgemeingültigen Satz $p \vee \neg p$ durch Einsetzung von Sätzen für die Variable $p$ immer wieder wahre Sätze. Setzt man z. B. $q$ für $p$ ein, so erhält man $q \vee \neg q$, setzt man $q \vee r$ für $p$ ein, so erhält man $(q \vee r) \vee \neg(q \vee r)$, usw. Man beachte, daß bei solchen Einsetzungen, wie im letzten Beispiel, wieder die nötigen Klammerzeichen einzufügen sind, damit die Satzgestalt $\mathrm{A} \vee \neg \mathrm{A}$ erhalten bleibt. Aus der Allgemeingültigkeit von $p \vee \neg p$ folgt also die Wahrheit aller Sätze der Gestalt $\mathrm{A} \vee \neg \mathrm{A}$. Umgekehrt folgt aus der Wahrheit all dieser Sätze natürlich auch die Wahrheit von $p \vee \neg p$, da ja A speziell für $p$ stehen kann, so daß wir also zum Ausdruck der Allgemeingültigkeit neben dem Satz $p \vee \neg p$ auch das Satzschema $\mathrm{A} \vee \neg \mathrm{A}$ verwenden können.

Zur Darstellung der Schlüsse führen wir nun das Symbol „$\rightarrow$" ein. Es ist dann der Ausdruck „$\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_m \rightarrow \mathrm{B}$" zu lesen wie „Aus den

Sätzen $A_1, \ldots, A_m$ folgt der Satz B". In dem Schluß $A_1, \ldots, A_m \rightarrow B$ sind also $A_1, \ldots, A_m$ die Prämissen und B ist die Konklusion. Die einfachen a.l. Schlüsse aus 1.1.2 lassen sich dann wie folgt darstellen:

I) $\neg\neg p \rightarrow p$, oder $\neg\neg A \rightarrow A$
II) $p \rightarrow \neg\neg p$, oder $A \rightarrow \neg\neg A$
III) $p \wedge q \rightarrow p$, oder $A \wedge B \rightarrow A$
IV) $p \wedge q \rightarrow q$, oder $A \wedge B \rightarrow B$.

Die Verwendung der Satzvariablen $p$ und $q$, bzw. der Buchstaben A und B drückt dabei die Allgemeingültigkeit dieser Schlüsse aus.

*Übungsaufgaben:*

1. Zur Einübung der in diesem Abschnitt entwickelten Symbolik übersetze man die folgenden Sätze in die Symbolsprache. Dabei kürze man die nicht mit „nicht", „und" oder „oder" zusammengesetzten Teilsätze durch SV ab, so daß immer verschiedene SV für verschiedene Teilsätze stehen. Die umgangssprachlichen Sätze sind dabei, wo nötig, zuerst so umzuformen, daß die Wörter „nicht", „und", „oder" sich auf vollständige Teilsätze beziehen. Sind die Sätze mehrdeutig, so gebe man die verschiedenen möglichen Übersetzungen an.

a) Fritz studiert Chemie und Hans studiert nicht Physik.
b) Fritz studiert Chemie oder Physik und Philosophie.
c) Hans und Fritz studieren Chemie oder Physik.
d) Fritz fährt nach Florenz und Pisa oder nach Florenz und Siena und nicht nach Pisa.
e) Fritz fährt nach Florenz, Pisa oder Siena und nach Rom oder Neapel.
f) Fritz fährt nicht nach Florenz oder Pisa, aber nach Siena und Rom[1].

2. Bilde aus folgenden Ausdrücken durch Einfügung von Klammerzeichen alle möglichen symbolsprachlichen Sätze:

a) $\neg p \vee \neg q \wedge r \vee s \vee t$,
b) $\neg p \wedge q \vee \neg r \wedge s \vee t$,
c) $p \wedge q \vee \neg r \vee s \wedge t$.

[1] Zur Kontrolle geben wir die Übersetzungen an: a) $p \wedge \neg q$, b) $(p \vee q) \wedge r$ oder $p \vee q \wedge r$, c) $(p \vee q) \wedge (r \vee s)$ oder $p \wedge r \vee q \wedge s$, d) $p \wedge q \vee (r \wedge s) \wedge \neg q$, e) $(p \vee q \vee r) \wedge (s \vee t)$, f) $\neg(p \vee q) \wedge (r \wedge s)$.

3. Welche Formeln entstehen aus

a) $p \wedge \neg q$,

b) $(p \vee q) \wedge \neg p$,

c) $\neg(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$,

d) $p \wedge (q \vee \neg p)$

durch Einsetzung von

(1) $r \vee \neg s$ für $p$, (2) $\neg(r \vee q) \wedge \neg q$ für $p$, (3) $\neg(\neg p \wedge r)$ für $p$ und von $\neg p$ für $q$, (4) $\neg(r \vee p) \wedge (s \vee \neg t)$ für $p$ und von $(r \vee \neg q)$ für $q$?

### 1.2.2 Wahrheitstabellen

Nachdem wir nun eine einfache Symbolik zur Darstellung von a.l. Schlüssen aufgebaut haben, wollen wir eine Systematisierung der Gebrauchsprinzipien für aussagenlogische Verknüpfungen vornehmen, wie wir sie in 1.1.2.1.1, 1.1.2.2.1, 1.1.2.3.1 und 1.1.2.3.2 angegeben haben.

Diese Prinzipien haben folgende Eigentümlichkeit: Nach ihnen hängt die Wahrheit oder Falschheit des Satzkompositums ausschließlich von der Wahrheit bzw. Falschheit der komponierten Sätze ab, nicht hingegen von deren materialem Gehalt. So ist ein Satz ¬A falsch immer dann, wenn A wahr ist, und ¬A ist wahr immer dann, wenn A falsch ist — gleichgültig, worüber der Satz A im einzelnen Fall sprechen mag.

Daß nicht alle Satzbildungen von dieser Art sind, zeigt etwa die Bildung eines Satzes durch Voranstellen von „Hans glaubt, daß...“. Denn wenn Hans nicht genau die wahren Sätze für wahr, oder genau die falschen Sätze für wahr hält, so besagt die Wahrheit bzw. Falschheit eines Satzes A allein nocht nichts darüber, ob der Satz „Hans glaubt, daß A“ wahr ist.

Es liegt nun nahe, diese an Negation, Konjunktion und Disjunktion beobachtete Eigentümlichkeit ins Zentrum der Aufmerksamkeit der A.L. zu stellen und den Gegenstand der A.L., den wir am Eingang dieses Kapitels durch den Hinweis auf Satzstrukturen gekennzeichnet haben, deren nähere Bestimmung noch etwas im Vagen blieb, nun genauer zu umreißen und festzulegen:

**1.2.2.1** Die A.L. beschränkt sich auf das Studium solcher Satzstrukturen, für die der Wahrheitswert (d. h. die Wahrheit oder Falschheit) des Kompositums ausschließlich von den Wahrheitswerten der komponierten Sätze abhängt.

Solche Satzstrukturen wollen wir nun als *aussagenlogische* Satzstrukturen bezeichnen. Die Wörter bzw. Symbole (wie $\neg$, $\wedge$, $\vee$) mit denen diese Satzverbindungen dargestellt werden, nennen wir dann allgemein *aussagenlogische Operatoren.*

Der semantische Gebrauch dieser a.l. Operatoren läßt sich nun übersichtlich angeben in Form von Tabellen, in denen wir den Wahrheitswert des Kompositums aufzeichnen in Abhängigkeit von den Wahrheitswerten der Teilsätze. So erhalten wir folgende Tabellen:

**N)** *Negation*

| A | ¬A |
|---|---|
| 𝔴 | 𝔣 |
| 𝔣 | 𝔴 |

Dabei stehe „𝔴" für „wahr", „𝔣" für „falsch". Die Tabelle ist zu lesen: Wenn ein Satz A wahr ist, so ist ¬A falsch (1. Zeile). Und wenn A falsch ist, so ist ¬A wahr (2. Zeile). Nach unserer Voraussetzung der Wahrheitsdefinitheit 1.1.1.3 ist damit der Satz ¬A für alle Fälle definiert, da A nur die Werte 𝔴 und 𝔣 annehmen kann.

**K)** *Konjunktion*

| A | B | A ∧ B |
|---|---|---|
| 𝔴 | 𝔴 | 𝔴 |
| 𝔴 | 𝔣 | 𝔣 |
| 𝔣 | 𝔴 | 𝔣 |
| 𝔣 | 𝔣 | 𝔣 |

Hier hängt der Wahrheitswert eines Satzes der Gestalt A ∧ B von zwei Argumenten ab, von dem Wahrheitswert von A und dem Wahrheitswert von B.

**D)** *Disjunktion*

| A | B | A ∨ B |
|---|---|---|
| 𝔴 | 𝔴 | 𝔴 |
| 𝔴 | 𝔣 | 𝔴 |
| 𝔣 | 𝔴 | 𝔴 |
| 𝔣 | 𝔣 | 𝔣 |

Der Gebrauch des ausschließenden „entweder-oder", das wir durch den Operator „$\succ\!\!\prec$" symbolisieren und als *Kontravalenz* bezeichnen, läßt sich durch die Tabelle charakterisieren

**J)** *Kontravalenz* = Alternative

| A | B | A $\succ\!\!\prec$ B |
|---|---|---|
| $\mathfrak{w}$ | $\mathfrak{w}$ | $\mathfrak{f}$ |
| $\mathfrak{w}$ | $\mathfrak{f}$ | $\mathfrak{w}$ |
| $\mathfrak{f}$ | $\mathfrak{w}$ | $\mathfrak{w}$ |
| $\mathfrak{f}$ | $\mathfrak{f}$ | $\mathfrak{f}$ |

Wir sagen nun, daß durch solche Wahrheitstabellen Wahrheitsfunktionen dargestellt werden.

Eine *Funktion* ist eine Zuordnung von Elementen einer Menge **M** (dem Wertebereich der Funktion) zu den Elementen einer Menge **N** (des *Definitionsbereiches* der Funktion), so daß jedem Element von **N** genau ein Element von **M** zugeordnet ist. Dieser Funktionsbegriff ist aus der elementaren Mathematik geläufig. $x^2$ ist z. B. eine Funktion, deren Definitionsbereich und deren Wertebereich Zahlen sind. Sie ordnet jeder Zahl das Quadrat dieser Zahl zu. Die Elemente von **N** nennt man auch *Argumente* der Funktion, das zugehörige Element von **M** den *Funktionswert* für dieses Argument. Für das Argument *4* nimmt die Funktion $x^2$ also den Wert *16* an. Die Menge der Werte, welche die Funktion annimmt, wenn ihre Argumente den Definitionsbereich durchlaufen, nennt man den *Wertevorrat* der Funktion. Der Wertbereich einer Funktion braucht sich mit ihrem Wertevorrat nicht zu decken, da nicht alle Elemente des Wertevorrats von der Funktion als Funktionswerte angenommen werden müssen. Im Beispiel ist der Wertevorrat der Funktion $x^2$ die Menge der Quadratzahlen. Die Menge der Quadratzahlen deckt sich, wenn wir an die natürlichen Zahlen *0, 1, 2, 3,...* denken, nicht mit der Menge der natürlichen Zahlen, dem Wertebereich der Funktion.

Neben einstelligen Funktionen betrachtet man auch mehrstellige Funktionen, wie z. B. die Funktion $(x + y)^2$. Hier hängt der Funktionswert von zwei Argumenten ab, die unabhängig voneinander variieren können. Die Stellenzahl einer Funktion wird symbolisch repräsentiert durch die Anzahl der verschiedenen Variablen, die in einem Ausdruck für diese Funktion vorkommen. Jeder Variablen ist ein eigener Definitionsbereich zugeordnet. Fallen die Definitionsbereiche einer mehrstelligen Funktion zusammen, so sprechen wir auch bei mehrstelligen Funktionen von *dem* Definitionsbereich der Funktion.

**1.2.2.2** Eine *Wahrheitsfunktion* ist nun eine Funktion, deren Definitions- und Wertebereich die Menge der beiden Wahrheitswerte ist.

Da eine Wahrheitstabelle die Zuordnung der Wahrheitswerte des Satzkompositums zu den Wahrheitswerten der Argumente (der Teilsätze) festlegt, definiert sie eine solche Wahrheitsfunktion. Wir können demnach die A.L. gemäß der Präzisierung ihres Gegenstandes nach 1.2.2.1 auch als Theorie der Wahrheitsfunktionen aufbauen.

Mit dieser Betrachtungsweise haben wir uns von der Analyse umgangssprachlicher Satzverknüpfungen schon recht weit entfernt und haben uns auf eine abstraktere Betrachtungsebene begeben, die uns nun neue Freiheitsgrade eröffnet: Wir brauchen nicht mehr den verschlungenen und unübersichtlichen Wegen der Umgangssprache zu folgen und ihren historisch gewordenen Eigenarten nachspüren, sondern wir können eine Untersuchung der Wahrheitsfunktionen in abstracto vornehmen und haben damit nicht nur einen präzise abgegrenzten, sondern auch einen, wie sich zeigen wird, systematisch leicht faßbaren Gegenstand.

Verlieren wir aber, indem wir den Leitfaden der Umgangssprache so preisgeben, nicht die Anwendungsmöglichkeiten für unsere Logik? Sicherlich nicht: Die Erfahrung hat gezeigt, daß der Schritt von der Umgangssprache als Maßstab der Logik zur Logik als Maßstab der Umgangssprache (was ihren wissenschaftlichen Gebrauch angeht) sehr fruchtbar ist. Die moderne Logik hat im Gegensatz zur traditionellen Logik diesen Schritt ganz bewußt vollzogen. FREGE formulierte die neue Einstellung so:

„Es kann nicht die Aufgabe der Logik sein, der Sprache nachzugehen und zu ermitteln, was in den sprachlichen Ausdrücken liege. Jemand, der aus der Sprache Logik lernen will, ist wie ein Erwachsener, der von einem Kinde denken lernen will. Als die Menschen die Sprache bildeten, befanden sie sich in einem Zustand des kindlichen bildhaften Denkens. Die Sprachen sind nicht nach dem logischen Lineale gemacht. Auch das Logische in der Sprache erscheint unter Bildern versteckt, die nicht immer zutreffen. Die Hauptaufgabe des Logikers besteht in einer Befreiung von der Sprache und in einer Vereinfachung[1].“

Wenn wir uns nun mit einer Theorie der aussagenlogischen Operatoren im allgemeinen beschäftigen wollen, so können wir auch davon

---

[1] FREGE im Brief an HUSSERL vom 1. November 1906, unveröffentlicht.

absehen, welche a.l. Operatoren in der Umgangssprache gebräuchlich sind. Und wir können insbesondere durch Wahrheitswerttabellen auch neue a.l. Operatoren definieren.

Geben wir zuerst eine zweistellige aussagenlogische Verknüpfung an, die wir als *Implikation* bezeichnen und durch den Operator „$\supset$" symbolisieren wollen! Einen Satz A $\supset$ B lesen wir als „A impliziert B".

Den semantischen Gebrauch dieses neuen Operators definieren wir durch folgende Wahrheitstabelle:

I) *Implikation*

| A | B | A $\supset$ B |
|---|---|---|
| w | w | w |
| w | f | f |
| f | w | w |
| f | f | w |

Damit ist die Satzverknüpfung durch $\supset$ vollständig und präzise definiert. Gibt es nun für diese Verknüpfung in der Umgangssprache ein Äquivalent? In gewisser Entsprechung zur Implikation verwenden wir umgangssprachlich das „wenn — dann". Auch diese umgangssprachliche Verknüpfung besagt, daß der „dann"-Satz, der dem Hinterglied B der Implikation A $\supset$ B entspricht, immer dann wahr ist, wenn der „wenn"-Satz, der dem Vorderglied A der Implikation entspricht, wahr ist, wie das auch durch die ersten beiden Zeilen unserer Tabelle gefordert ist. Denn wenn A wahr ist, so ist die ganze Implikation nur dann wahr, wenn auch B wahr ist. Damit ist die Entsprechung aber auch schon am Ende. Denn das umgangssprachliche „wenn — dann" dient zum Ausdruck einer im einzelnen nicht immer scharf präzisierten inhaltlichen Folgebeziehung zwischen „wenn"-Satz und „dann"-Satz, während davon bezüglich der Implikation, wie wir sie definiert haben, keine Rede sein kann. So ist nach den letzten beiden Zeilen unserer Tabelle jede Implikation wahr, deren Vorderglied falsch ist, also sind z. B. die Sätze

„Der Mond ist viereckig impliziert $2 \cdot 2 = 4$"

und

„Der Mond ist viereckig impliziert $2 \cdot 2 = 5$"

wahr, obwohl wir nicht geneigt wären zu sagen, daß die Sätze

„Wenn der Mond viereckig ist, dann ist $2 \cdot 2 = 4$",

„Wenn der Mond viereckig ist, dann ist $2 \cdot 2 = 5$"

wahr seien. Und auch bei einer wahren Implikation mit wahrem Vorderglied besteht zwischen Vorderglied und Hinterglied nicht notwendig ein materiales Begründungsverhältnis, wie das Beispiel zeigt: „Goethe wurde 1749 geboren impliziert Rom hat den ersten Punischen Krieg gewonnen". Das ist nach unserer Tabelle eine wahre Implikation, hingegen würde man den Satz „Wenn Goethe 1749 geboren wurde, dann hat Rom den ersten Punischen Krieg gewonnen" nicht als wahren Satz ansehen, da hier offenbar jedes Begründungsverhältnis fehlt.

Die Entsprechung zwischen Implikation und umgangssprachlichen „wenn — dann" ist also nur lose. Immerhin kann man einen gewissen Gebrauch des „wenn — dann" durch die Implikation darstellen und präzisieren und dieser Gebrauch ist so häufig, daß durch diese Präzisierung etwas Wichtiges geleistet wird.

Wir wollen noch zwei weitere a.l. Operatoren definieren, die wir durch die Symbole „$\equiv$" und „$|$" darstellen und als *Äquivalenz* bzw. als *Exklusion* bezeichnen. Sätze der Gestalt $A \equiv B$ bzw. $A|B$ lesen wir dann als „A ist äquivalent mit B" bzw. als „A schließt B aus".

**Ä)** *Äquivalenz*

| A | B | $A \equiv B$ |
|---|---|---|
| w | w | w |
| w | f | f |
| f | w | f |
| f | f | w |

**E)** *Exklusion*

| A | B | $A|B$ |
|---|---|---|
| w | w | f |
| w | f | w |
| f | w | w |
| f | f | w |

Für die Exklusion gibt es in der Umgangssprache kein direktes Äquivalent. Der Äquivalenz entspricht, mit analogen Einschränkungen, wie wir sie für die Implikation geltend gemacht haben, das „genau dann, wenn". Denn die Wahrheit des einen Teilsatzes soll auch hier die Wahrheit des anderen zur Folge haben, und die Falschheit des einen Teilsatzes die Falschheit des anderen. Die folgenden Beispiele wahrer Äquivalenzen zeigen aber wiederum, daß dies wechselseitige Folgeverhältnis kein Verhältnis einer materialen Begründung ist, wie man anhand einer Übersetzung des „äquivalent" in ein „genau dann, wenn" sofort einsieht.

„$2 + 2 = 5$ äquivalent der Mond ist viereckig",

„$2 + 2 = 4$ äquivalent der Mond ist rund".

Im Hinblick auf unsere Klammerregeln wollen wir nun festsetzen, daß in der Reihe $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\supset$, $\equiv$, $|$ alle links von einem Operator stehenden Operatoren stärker als dieser binden. Demnach können wir z. B. statt $(p \wedge q) \supset ((\neg p) \equiv r)$ schreiben $p \wedge q \supset (\neg p \equiv r)$ und $p \vee q \equiv \neg p \supset q$ statt $(p \vee q) \equiv ((\neg p) \supset q)$.

Beispiele einfacher Schlüsse, in denen die Operatoren $\supset$, $\equiv$ und $|$ vorkommen, sind folgende:

1) $\neg p \vee q \rightarrow p \supset q$,
2) $(p \supset q) \wedge (q \supset p) \rightarrow p \equiv q$,
3) $p|q \rightarrow \neg(p \wedge q)$,
4) $p \supset q \rightarrow \neg q \supset \neg p$.

Diese Schlüsse sind gültig. Hingegen gilt nicht:

5) $p \supset q \rightarrow \neg p \supset \neg q$,
6) $(p \supset q) \supset q \rightarrow p$.

Das erkennt man wie folgt:

Zu (1): Die Zeilen der ersten beiden Spalten der folgenden Tabelle enthalten die möglichen *Wahrheitsannahmen* für die Satzvariablen $p$ und $q$. Aus der 1. Spalte ergibt sich mit der Tabelle N die 3. Spalte, aus der 3. und 2. Spalte ergibt sich mit der Tabelle D die 4. Spalte.

| $p$ | $q$ | $\neg p$ | $\neg p \vee q$ |
|---|---|---|---|
| w | w | f | w |
| w | f | f | f |
| f | w | w | w |
| f | f | w | w |

Die letzte Spalte stimmt nun mit der Wahrheitstabelle I überein, d. h. $p \supset q$ ist immer dann wahr, wenn $\neg p \vee q$ wahr ist. M. a. W.: Aus der Wahrheit des Satzes $\neg p \vee q$ folgt die Wahrheit des Satzes $p \supset q$, gleich welche Wahrheitswerte die Sätze $p$ und $q$ haben mögen, gleich also für welche Sätze $p$ und $q$ stehen mögen.

Zu (2):

| $p$ | $q$ | $p \supset q$ | $q \supset p$ | $(p \supset q) \wedge (q \supset p)$ |
|---|---|---|---|---|
| w | w | w | w | w |
| w | f | f | w | f |
| f | w | w | f | f |
| f | f | w | w | w |

Diese Tabelle ist in analoger Weise zu verstehen: die Zeilen der ersten beiden Spalten enthalten die möglichen Wahrheitsannahmen über $p$ und $q$. Daraus ergeben sich die Spalten 3 und 4 nach Tabelle I. Die 5. Spalte ergibt sich aus den Spalten 3 und 4 nach Tabelle K. Da die letzte Spalte mit der Wahrheitswertverteilung für $p \equiv q$ nach Tabelle Ä übereinstimmt, macht also jede Wahrheitsannahme über $p$ und $q$, die $(p \supset q) \wedge (q \supset p)$ wahr macht, auch $p \equiv q$ wahr und somit ist die formale Gültigkeit des Schlusses (2) bewiesen.

Zu (3): Nach Tabelle E ist $p|q$ wahr, wenn $p$ oder $q$ falsch ist. In diesen Fällen ist aber nach K $p \wedge q$ falsch, also nach N $\neg(p \wedge q)$ wahr.

Zu (4): Nach I ist $p \supset q$ wahr, wenn $p$ falsch ist oder $q$ wahr. Ist $p$ falsch, so ist $\neg p$ wahr, also ist nach I auch $\neg q \supset \neg p$ wahr. Ist $q$ wahr, so ist $\neg q$ falsch, also ist wiederum nach I $\neg q \supset \neg p$ wahr.

Zu (5): Daß dieser Schluß ungültig ist, zeigt der Fall, daß $p$ falsch und $q$ wahr ist. Dann ist nämlich nach I $p \supset q$ wahr. Nach N ist hingegen

$\neg p$ wahr und $\neg q$ falsch, so daß nach I $\neg p \supset \neg q$ falsch ist. Es gibt also eine Wahrheitsannahme für die SV $p$ und $q$, welche die Prämisse des Schlusses (5) wahr und seine Konklusion falsch macht. Der Schluß ist also nicht für alle Wahrheitsannahmen gültig, d. h. er ist nicht formal gültig.

Fehlschlüsse nach diesem Schema findet man häufiger. Der Schluß:

Wenn es regnet, ist die Straße naß — also: Wenn es nicht regnet, ist die Straße nicht naß.

mag auf den ersten Blick einleuchten.

Es kann aber bei Sonnenschein ein Spritzwagen die Straße entlangfahren, so daß es nicht regnet und die Straße trotzdem naß ist.

Zu (6): Ein Gegenbeispiel für die Annahme der Gültigkeit dieses Schlusses ist der Fall, daß $p$ falsch ist und $q$ wahr. Dann ist nach I $p \supset q$ wahr und ebenso $(p \supset q) \supset q$. Hingegen ist die Konklusion $p$ von (6) nach Voraussetzung falsch. Die Konstruktion einer Wahrheitstabelle sieht in diesem Fall so aus:

| $p$ | $q$ | $p \supset q$ | $(p \supset q) \supset q$ |
|---|---|---|---|
| w | w | w | w |
| w | f | f | w |
| f | w | w | w |
| f | f | w | f |

Der Vergleich der 1. und 4. Spalte zeigt, daß in der 3. Zeile ein Fall auftritt, in dem $(p \supset q) \supset q$ wahr und $p$ falsch ist.

Diese Beispiele zeigen nun schon, daß man durch systematisches Zurückgreifen auf die Wahrheitstabellen eine Entscheidung darüber erzielen kann, ob ein vorgegebener Schluß gültig ist oder nicht. Bevor wir diese Methode aber in Allgemeinheit angeben, wollen wir den Begriff des formal gültigen Schlusses in einer Definition festhalten, den wir in den Beispielen (1) bis (6) bereits implizit verwendet haben:

**1.2.2.3** a) Einen Schluß der Gestalt $A_1, \ldots, A_m \rightarrow B$ (es sei $m \geqslant 1$)[1]

[1] Wir verwenden die übliche Symbolik $m \geqslant 1$, um auszudrücken, daß die Zahl m größer als 1 oder gleich 1 ist. Das Zeichen „$\geqslant$“ bedeutet also „größer oder gleich“, während „$>$“ das Zeichen für „größer“ ist. Entsprechenderweise steht das Zeichen „$\leqslant$“ für „kleiner oder gleich“ und „$<$“ für „kleiner“.

nennen wir *a.l. gültig*, wenn jede Wahrheitsannahme über die in den Sätzen $A_1, \ldots, A_m$, B vorkommenden Satzvariablen, die (aufgrund der semantischen Festsetzungen über die a.l. Operatoren, die wir in Form der Wahrheitstabellen angegeben haben) alle Sätze $A_1, \ldots, A_m$ wahr macht, auch den Satz B wahr macht.

Es erweist sich als praktisch, in Erweiterung des bisher verwendeten Schlußbegriffes auch Schlüsse zu betrachten, die entweder keine Prämissen oder keine Konklusion enthalten. Im Hinblick auf 1.2.2.3 a) definiert man die Gültigkeit solcher Schlüsse wie folgt:

b) Einen Schluß der Gestalt $\rightarrow$ B (d. h. einen Schluß ohne Prämissen) nennen wir a.l. gültig, wenn jede Wahrheitsannahme über die in B vorkommenden Satzvariablen B wahr macht.

c) Einen Schluß der Gestalt $A_1, \ldots, A_m \rightarrow$ (es sei wieder $m \geqslant 1$) nennen wir a.l. gültig, wenn jede Wahrheitsannahme über die in $A_1, \ldots, A_m$ vorkommenden Satzvariablen mindestens einen der Sätze $A_1, \ldots, A_m$ falsch macht.

Demnach sind also z. B. die Schlüsse

7) $\rightarrow p \vee \neg p$ und
8) $p \wedge \neg p \rightarrow$ a.l. gültig. Die Schlüsse
9) $\rightarrow p \vee q \supset q$ und
10) $p \vee q, p \wedge \neg q \rightarrow$ sind hingegen nicht a.l. gültig. Das zeigen

folgende Tabellen:

(7)

| $p$ | $\neg p$ | $p \vee \neg p$ |
|---|---|---|
| w | f | w |
| f | w | w |

(8)

| $p$ | $\neg p$ | $p \wedge \neg p$ |
|---|---|---|
| w | f | f |
| f | w | f |

(9)

| $p$ | $q$ | $p \vee q$ | $p \vee q \supset q$ |
|---|---|---|---|
| w | w | w | w |
| w | f | w | f |
| f | w | w | w |
| f | f | f | w |

(10)

| $p$ | $q$ | $p \vee q$ | $\neg q$ | $p \wedge \neg q$ |
|---|---|---|---|---|
| w | w | w | f | f |
| w | f | w | w | w |
| f | w | w | f | f |
| f | f | f | w | f |

In der Tabelle (9) zeigt die 2. Zeile der 4. Spalte, daß für die Wahrheitsannahme: $p$ wahr und $q$ falsch der Satz $p \vee q \supset q$ falsch ist. Dieser Satz ist also nicht für jede Wahrheitsannahme wahr. In der Tabelle (10) zeigt die 2. Zeile in der 3. und 5. Spalte, daß für die Wahrheitsannahme $p$ wahr und $q$ falsch beide Sätze $p \vee q$ und $p \wedge \neg q$ wahr sind. Es gilt also nicht für jede Wahrheitsannahme, daß sie mindestens einen dieser beiden Sätze falsch macht.

Man verwendet auch folgende Terminologie:

**1.2.2.4** a) Ein Satz A ist *a.l. wahr*, wenn jede Wahrheitsannahme über die in A vorkommenden SV A wahr macht.

b) Ein Satz A ist *a.l. falsch*, wenn jede Wahrheitsannahme über die in A vorkommenden SV den Satz A falsch macht.

c) Ein Satz A ist *a.l. indeterminiert*, wenn es Wahrheitsannahmen gibt, die A wahr, und solche die A falsch machen.

Es gilt demnach: A ist a.l. wahr genau dann, wenn der Schluß $\rightarrow$ A a.l. gültig ist. A ist a.l. falsch genau dann, wenn der Schluß A $\rightarrow$ a.l. gültig ist. Und A ist a.l. indeterminiert genau dann, wenn A weder a.l. wahr, noch a.l. falsch ist. Die Einteilung in a.l. wahre, a.l. falsche und a.l. indeterminierte Sätze ist also eine vollständige Einteilung aller Sätze: Jeder Satz unserer Symbolsprache ist entweder a.l. wahr oder a.l. falsch oder a.l. indeterminiert.

Beispiele a.l. wahrer, a.l. falscher und a.l. indeterminierter Sätze sind nach den Beispielen (7), (8) und (9) $p \vee \neg p$, $p \wedge \neg p$, $p \vee q \supset q$. A.l. wahre Sätze nennt man auch a.l. *Tautologien*, a.l. falsche Sätze a.l. *Kontradiktionen*, wie man allgemein logisch wahre Sätze als Tautologien und logisch falsche Sätze als Kontradiktionen bezeichnet.

Im nächsten Abschnitt wollen wir uns nun einen Überblick über die Mannigfaltigkeit der Wahrheitsfunktionen verschaffen, um dann im Abschnitt 1.2.4 auf das oben angedeutete Entscheidungsverfahren für die a.l. Gültigkeit von Schlüssen zurückzukommen.

*Übungsaufgaben:*

Welche der folgenden Schlüsse sind a.l. gültig?

1. $p \equiv q \to p \supset q$,
2. $\neg(p \wedge q) \to p \supset q$,
3. $\to (p \equiv q) \supset (\neg p \equiv \neg q)$,
4. $(p \supset q) \wedge p \to p \equiv q$,
5. $p \supset (q \supset r) \to q \supset (p \supset r)$,
6. $(p \supset q) \supset p \to p$,
7. $\to p \wedge q \supset p \vee q$,
8. $p \wedge q \equiv (\neg p \vee \neg q) \to$,
9. $\to (p \supset q) \equiv (\neg p \supset \neg q)$
10. $p \wedge q \supset \neg(\neg p \vee \neg q) \to$.

### 1.2.3 Vollständige Systeme von Wahrheitsfunktionen

Bisher haben wir nur einige ein- und zweistellige Wahrheitsfunktionen betrachtet. Wir wollen uns nun einen Überblick über alle ein- und zweistelligen Wahrheitsfunktionen verschaffen und allgemein einen Überblick über alle möglichen Wahrheitsfunktionen beliebig hoher Stellenzahl gewinnen.

Betrachten wir zunächst die einstelligen, oder *monadischen* Wahrheitsfunktionen. Da das Funktionsargument nur die beiden Werte $\mathfrak{w}$ und $\mathfrak{f}$ annehmen kann, erhalten wir vier mögliche Verteilungen der Werte $\mathfrak{w}$, $\mathfrak{f}$ auf diese Argumente, die durch folgende Tabelle dargestellt werden. Dabei seien „$\boxed{1}$", „$\boxed{2}$", „$\boxed{3}$", „$\boxed{4}$" Operatorensymbole.

| A | $\boxed{1}$ A | $\boxed{2}$ A | $\boxed{3}$ A | $\boxed{4}$ A |
|---|---|---|---|---|
| $\mathfrak{w}$ | $\mathfrak{w}$ | $\mathfrak{w}$ | $\mathfrak{f}$ | $\mathfrak{f}$ |
| $\mathfrak{f}$ | $\mathfrak{w}$ | $\mathfrak{f}$ | $\mathfrak{w}$ | $\mathfrak{f}$ |
| Deutung | Tautologie | A | $\neg$A | Kontradiktion |

Die Funktion $\boxed{1}$ transformiert A in eine Tautologie, $\boxed{4}$ transformiert A in eine Kontradiktion. $\boxed{2}$ läßt den Wahrheitswert von A unverändert, $\boxed{3}$ endlich stellt die Negation dar, wie der Vergleich mit Tabelle N aus 1.2.2 lehrt.

Gehen wir nun zu den zweistelligen oder *dyadischen* Wahrheitswertfunktionen über, so erhalten wir bereits eine wesentlich größere Mannigfaltigkeit von Funktionen. Wie folgende Tabelle zeigt, gibt es 16 zweistellige Wahrheitswertfunktionen. Dabei seien „①",..., „⑯" wieder Operatorensymbole:

| A | B | A ① B | A ② B | A ③ B | A ④ B | A ⑤ B | A ⑥ B | A ⑦ B | A ⑧ B |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 𝔴 | 𝔴 | 𝔴 | 𝔴 | 𝔴 | 𝔴 | 𝔣 | 𝔴 | 𝔴 | 𝔴 |
| 𝔴 | 𝔣 | 𝔴 | 𝔴 | 𝔴 | 𝔣 | 𝔴 | 𝔴 | 𝔣 | 𝔣 |
| 𝔣 | 𝔴 | 𝔴 | 𝔴 | 𝔣 | 𝔴 | 𝔴 | 𝔣 | 𝔴 | 𝔣 |
| 𝔣 | 𝔣 | 𝔴 | 𝔣 | 𝔴 | 𝔴 | 𝔴 | 𝔣 | 𝔣 | 𝔴 |
| Deutung | | Tautologie | A ∨ B | B ⊃ A | A ⊃ B | A\|B | A | B | A ≡ B |

| A | B | A ⑨ B | A ⑩ B | A ⑪ B | A ⑫ B | A ⑬ B | A ⑭ B | A ⑮ B | A ⑯ B |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 𝔴 | 𝔴 | 𝔣 | 𝔣 | 𝔣 | 𝔴 | 𝔣 | 𝔣 | 𝔣 | 𝔣 |
| 𝔴 | 𝔣 | 𝔴 | 𝔴 | 𝔣 | 𝔣 | 𝔴 | 𝔣 | 𝔣 | 𝔣 |
| 𝔣 | 𝔴 | 𝔴 | 𝔣 | 𝔴 | 𝔣 | 𝔣 | 𝔴 | 𝔣 | 𝔣 |
| 𝔣 | 𝔣 | 𝔣 | 𝔴 | 𝔴 | 𝔣 | 𝔣 | 𝔣 | 𝔴 | 𝔣 |
| Deutung | | A ≻≺ B | ¬B | ¬A | A ∧ B | A ∧ ¬B | ¬A ∧ B | ¬A ∧ ¬B | Kontradiktion |

Rejektion

A ① B stellt wieder eine Tautologie, A ⑯ B eine Kontradiktion dar, die Funktionen ②, ④, ⑤, ⑧, ⑨, ⑫ sind uns schon bekannt, sie stellen in dieser Reihenfolge Disjunktion, Implikation, Exklusion, Äquivalenz, Kontravalenz und Konjunktion dar, wie der Vergleich mit den Tabellen aus 1.2.2 lehrt. A ③ B ist mit B ⊃ A gleichwertig, A ⑥ B mit A, A ⑦ B mit B, A ⑩ B mit ¬B, A ⑪ B mit ¬A, A ⑬ B mit A ∧ ¬B, A ⑭ B mit ¬A ∧ B, A ⑮ B mit ¬A ∧ ¬B. Dabei besagt diese Gleichwertigkeit, daß gilt: A ③ B ist wahr genau für die Wahrheitsannahmen für die B ⊃ A wahr ist, usw.

Die Zahl der Wahrheitswertfunktionen wächst nun rasch mit ihrer Stellenzahl an. Wie die Kombinatorik lehrt, gibt es $2^n$ Anordnungen der zwei Wahrheitswerte 𝔴, 𝔣 in einer Reihe mit $n$ Gliedern, d. h. es gibt $2^n$ verschiedene Argumente für eine $n$-stellige Wahrheitswertfunktion. Für $n = 1$ gab es $2^1 = \boxed{1}$ Argumente, für $n = 2$ gab es $2^2 = 4$ ? Argumente. Allgemein gibt es $n^k$ Anordnungen von $n$ Elementen in einer Reihe mit $k$ Gliedern. Das beweist man durch Induktion nach der Zahl $k$. Wie geht ein *Beweis durch Induktion* vor sich? Darauf wollen wir in Form eines kurzen Exkurses eingehen, da wir später noch viele solche Induktionsbeweise zu führen haben werden.

Die zu beweisende Behauptung sei, daß eine Eigenschaft $E$ allen natürlichen Zahlen $1, 2, \ldots$ zukommt. Man zeigt nun erstens:

I) Die Zahl $1$ hat die Eigenschaft $E$.

Der Beweis von (I) bildet die sog. *Induktionsbasis.* — Zweitens weist man nach, daß für eine beliebige natürliche Zahl $k$ gilt:

II a) Wenn die Zahl $k$ die Eigenschaft $E$ hat, so hat auch die Zahl $k + 1$ die Eigenschaft $E$.

oder:

II b) Wenn alle natürlichen Zahlen $m$, die kleiner oder gleich $k$ sind die Eigenschaft $E$ haben, so hat auch die Zahl $k + 1$ die Eigenschaft $E$.

Den Beweis von (II a), bzw. (II b) nennt man den *Induktionsschritt,* den „wenn"-Satz von (II a), bzw. (II b) nennt man die *Induktionsannahme.* Verwendet man die Induktionsannahme nach (II b), so spricht man auch von einer *Wertverlaufsinduktion.*

Es ist nun intuitiv klar, daß Induktionsbasis und Induktionsschritt zum Beweis der Behauptung ausreichen. Denn (I) besagt, daß $1$ die Eigenschaft $E$ hat. Also hat nach (II) auch $1 + 1 = 2$ die Eigenschaft $E$. Also hat nach (II) auch $2 + 1 = 3$ die Eigenschaft $E$, usf. Für jede natürliche Zahl $k$ kann man also in $k$ Schritten vermittels (I) und (II) zeigen, daß $k$ die Eigenschaft $E$ hat. Also haben alle natürlichen Zahlen die Eigenschaft $E$, was zu beweisen war.

Diese Erläuterung des Induktionsbeweises mag hier genügen. Eine strenge Rechtfertigung findet diese Beweismethode im Rahmen der elementaren Arithmetik[1].

Gehen wir nun auf unsere Behauptung zurück, daß es $n^k$ Anordnungen von $n$ Elementen zu je $k$ Gliedern gibt. Die Behauptung der Induktionsbasis (I) lautet in diesem Fall: Es gibt $n^1 = n$ Anordnungen zu je einem Glied. Das ist aber offensichtlich, denn diese Anordnungen bestehen jeweils aus einem der $n$ Elemente. Die Behauptung (II a) des Induktionschrittes lautet: Wenn es $n^k$ Anordnungen der $n$ Elemente zu $k$ Gliedern gibt ($k$ sei irgendeine feste Zahl), so gibt es $n^{k+1}$ Anordnungen zu $k + 1$ Gliedern. Nun gelangen wir zu den Anordnungen mit $k + 1$ Gliedern, indem wir jede Anordnung mit $k$ Gliedern um ein Glied er-

[1] Vgl. dazu 5.4.

weitern. Aus jeder Anordnung mit $k$ Gliedern entstehen so $n$ Anordnungen mit $k+1$ Gliedern, d. h. wir erhalten $n^k \cdot n = n^{k+1}$ Anordnungen zu $k+1$ Gliedern. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Nun besteht die Angabe einer Wahrheitsfunktion in der Angabe einer Verteilung der beiden Wahrheitswerte auf die Argumente. Es gibt also $2^{2^n}$ solche Verteilungen, also $2^{2^n}$ $n$-stellige Wahrheitsfunktionen. Es gab $2^{2^1} = 2^2 = 4$ einstellige und $2^{2^2} = 2^4 = 16$ zweistellige Wahrheitsfunktionen.

Wir haben uns damit einen Überblick über die Anzahl der Wahrheitsfunktionen einer bestimmten Stellenzahl verschafft. Insgesamt gibt es unendlich viele Wahrheitsfunktionen. Müßte man nun in der Aussagenlogik jeder dieser Wahrheitsfunktionen eine eigene Untersuchung widmen, so käme man nie zu einem Ende. Tatsächlich läßt sich aber ein Teil der Wahrheitsfunktionen durch Definition auf andere zurückführen. Wir verwenden dabei folgendes einfache Schema für Definitionen:

Eine Definition, genauer: eine *Explizitdefinition* ist eine Festsetzung über die Bedeutung und die syntaktische Verwendung eines Ausdrucks, dem bisher noch keine Bedeutung zugeordnet war. Die Bedeutung dieses zu definierenden Ausdrucks, des *Definiendums*, wird in der Definition gleichgesetzt mit der Bedeutung eines anderen Ausdrucks, der als definierender Ausdruck oder *Definiens* also bereits eine feste und wohldefinierte Bedeutung haben muß, die ihn unabhängig von der betrachteten Definition zugeordnet ist. Wir schreiben Explizitdefinitionen in der Gestalt $A := B$, wobei das Definiendum $A$ links von dem Zeichen „:=" und das Definiens $B$ rechts davon steht. Das Zeichen „:=" ist zu lesen als „ist definitorisch gleich"[1]. Dann besagt also die Definition $A := B$ zunächst soviel wie „der Ausdruck $A$ soll gleichbedeutend (synonym) sein mit dem Ausdruck $B$". Das ist wohlgemerkt eine *Festsetzung* und keine Aussage, die wahr oder falsch sein könnte. Es gibt keine wahren oder falschen Definitionen, sondern nur korrekte oder inkorrekte Definitionen, wobei die Korrektheit einer Definition allein daran zu messen ist, ob durch sie dem Definiendum eine wohlbestimmte Bedeutung zugeordnet wird[2].

Demnach legt die Definition

1) „$h$" := „Heinrich"

---

[1] Anstelle von „:=" schreibt man auch oft „$=_{\mathrm{Df}}$".

[2] Vgl. dazu den Abschnitt 6.3!

fest, daß „*h*" ein Eigenname ist, der dasselbe bedeutet wie der Name „Heinrich", also den Menschen Heinrich. Aufgrund der Definition ist es dann sinnvoll zu sagen „*h* ist blond", „*h* studiert Medizin", usw.

Ebenso erklärt die Definition

2) „Primzahl" := „Zahl, die nicht durch eine von *1* verschiedene kleinere Zahl ohne Rest teilbar ist"

den Ausdruck „Primzahl" als Prädikat und legt fest, daß z. B. die Zahlen *11* und *17*, nicht aber die Zahlen *6* und *15* als Primzahlen anzusprechen sind.

Die Definition

3) „*P*" := „Die Erde ist größer als der Mond"

endlich erklärt den Buchstaben „*P*" als Satz und legt z. B. fest, daß dieser Satz wahr ist.

Wegen der völligen Bedeutungsgleichheit zwischen Definiendum und Definiens kann man das Definiens in allen Kontexten durch das Definiendum ersetzen. Aus der semantischen Festlegung der Definition ergibt sich also die Ersetzbarkeit als syntaktische Folge. Diese Ersetzbarkeit erlaubt es, das Definiendum als Abkürzung für das Definiens aufzufassen und in dieser Abkürzung liegt auch der Zweck der Explizitdefinitionen.

Wenn man nun z. B. den a.l. Operator ⑬ definiert durch

4) $\mathrm{A} ⑬ \mathrm{B} := \mathrm{A} \wedge \neg\mathrm{B}$,

so besagt diese Festsetzung nicht nur etwas über die Bedeutung eines bestimmten Satzes der Gestalt A ⑬ B, sondern sie legt fest, daß *jeder* Satz der Gestalt A ⑬ B dasselbe bedeuten soll wie der Satz $\mathrm{A} \wedge \neg\mathrm{B}$, gleich für welche speziellen Sätze die Buchstaben A und B stehen. Wir bezeichnen eine solche Festsetzung auch als *Definitionsschema*, ebenso wie wir $\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}$ als Satzschema bezeichnet haben und wie wir $\mathrm{A} \wedge \mathrm{B} \rightarrow \mathrm{A}$ als *Schlußschema* bezeichnen könnten. Der Kürze des Ausdrucks wegen wollen wir aber nicht immer streng zwischen Satz-, Schluß- oder Definitionsschema und Sätzen, Schlüssen oder Definitionen unterscheiden.

Kommen wir nun auf unser Thema zurück; die definitorische Rückführbarkeit einer Wahrheitsfunktion auf andere! Wir haben schon bei der Besprechung der dyadischen Wahrheitswertfunktionen gesehen, daß gewisse Wahrheitsfunktionen sich durch andere darstellen lassen. So legen z. B. die Definitionen:

A ③ B := B ⊃ A
A ⑬ B := A ∧ ¬B
A ⑮ B := ¬A ∧ ¬B

für die Ausdrücke der Gestalt A ③ B, A ⑬ B, A ⑮ B die gleichen Wahrheitsbedingungen fest, wie sie durch die Wahrheitstabelle bestimmt sind. Wir sagen also: die Funktion ③ ist definierbar durch die Implikation, die Funktionen ⑬ und ⑮ sind durch Negation und Konjunktion definierbar.

Ferner finden wir, daß die Definitionen:

**d1:** $A \succ\!\prec B := \neg(A \equiv B)$
**d2:** $A \equiv B := (A \supset B) \wedge (B \supset A)$
**d3:** $A \supset B := \neg A \vee B$
**d4:** $A \vee B := \neg(\neg A \wedge \neg B)$

folgendes leisten:

1. Durch diese Definitionen werden die Operatoren $\succ\!\prec$, $\equiv$, $\supset$ und $\vee$ auf die Operatoren $\neg$ und $\wedge$ definitorisch zurückgeführt. Denn wenn ein Satz C unserer Symbolsprache gegeben ist, der nur die Operatoren $\succ\!\prec$, $\equiv$, $\supset$, $\vee$, $\neg$, $\wedge$ enthält, so können wir zunächst nach d1 alle Vorkommnisse des Operators $\succ\!\prec$ in C ersetzen durch Negation und Äquivalenz und erhalten so einen Satz C′, der nur mehr die Operatoren $\equiv$, $\supset$, $\vee$, $\neg$, $\wedge$ enthält. Dann ersetzen wir alle Vorkommnisse von $\equiv$ in C′ nach d2 und erhalten dadurch einen Ausdruck C″, der nur mehr die Operatoren $\supset$, $\vee$, $\neg$, $\wedge$ enthält. Ersetzen wir in C″ alle Vorkommnisse von $\supset$ nach d3, so erhalten wir einen Ausdruck C‴, der nur mehr die Operatoren $\vee$, $\neg$, $\wedge$ enthält, und daraus durch Ersetzung aller Vorkommnisse von $\vee$ nach d4 einen Ausdruck C⁗ der nur mehr die Operatoren $\neg$ und $\wedge$ enthält. Man nennt Ausdrücke, die durch Ersetzung definitorisch gleicher Teilausdrücke auseinander hervorgehen *definitorisch äquivalent*. Insbesondere sind also C⁗ und C definitorisch äquivalent.

Dazu ein Beispiel: C sei der Satz $\neg(p \succ\!\prec q) \supset p \vee q$. Durch definitorische Ersetzung erhalten wir daraus:

C′: $\neg\neg(p \equiv q) \supset p \vee q$
C″: $\neg\neg((p \supset q) \wedge (q \supset p)) \supset p \vee q$
$\neg\neg((\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)) \supset p \vee q$

C''': $\neg\neg\neg((\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)) \vee (p \vee q)$

$\neg\neg\neg(\neg(\neg\neg p \wedge \neg q) \wedge \neg(\neg\neg q \wedge \neg p)) \vee \neg(\neg p \wedge \neg q)$

C'''': $\neg(\neg\neg\neg\neg(\neg(\neg\neg p \wedge \neg q) \wedge \neg(\neg\neg q \wedge \neg p)) \wedge \neg\neg(\neg p \wedge \neg q))$.

2. Durch die angegebenen Definitionen werden für die definierten Operatoren die gleichen Wahrheitsbedingungen festgelegt, wie durch die Wahrheitstabellen, durch die wir sie ursprünglich eingeführt hatten. Dazu zwei Beispiele:

a) $A \rightarrowtail\!\!\!\leftarrow B$ ist nach Tabelle J aus 1.2.2 wahr genau dann, wenn entweder A oder B (aber nicht beide zugleich) wahr sind. $A \equiv B$ ist nach Tabelle Ä wahr genau dann, wenn A und B wahr oder A und B falsch sind. $\neg(A \equiv B)$ ist also wahr genau dann, wenn A und B weder beide wahr, noch beide falsch sind, d. h. wenn einer von beiden Sätzen wahr, und der andere falsch ist. Das veranschaulicht die folgende Tabelle:

| A | B | $A \rightarrowtail\!\!\!\leftarrow B$ | $A \equiv B$ | $\neg(A \equiv B)$ |
|---|---|---|---|---|
| w | w | f | w | f |
| w | f | w | f | w |
| f | w | w | f | w |
| f | f | f | w | f |

Die Tabelle zeigt in der Übereinstimmung von 3. und 5. Spalte, daß $A \rightarrowtail\!\!\!\leftarrow B$ und $\neg(A \equiv B)$ für alle Wahrheitsannahmen über A und B die gleichen Wahrheitswerte annehmen.

b) $A \equiv B$ ist nach Tabelle Ä wahr genau dann, wenn A und B beide wahr oder beide falsch sind. $A \supset B$ ist nach I wahr, wenn A falsch ist oder B wahr. $B \supset A$ ist wahr, wenn B falsch ist oder A wahr. Nach K ist dann $(A \supset B) \wedge (B \supset A)$ wahr, wenn A und B beide falsch sind oder beide wahr. Das veranschaulicht folgende Tabelle:

| A | B | $A \equiv B$ | $A \supset B$ | $B \supset A$ | $(A \supset B) \wedge (B \supset A)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| w | w | w | w | w | w |
| w | f | f | f | w | f |
| f | w | f | w | f | f |
| f | f | w | w | w | w |

Die Tabelle zeigt in der Übereinstimmung von 3. und 6. Spalte, daß sich für jede Wahrheitsannahme über A und B für die Sätze $(A \supset B) \wedge (B \supset A)$ und $A \equiv B$ der gleiche Wahrheitswert ergibt.

In gleicher Weise kann man die Behauptung für d3 und d4 beweisen.

Ferner lassen sich Negation und Disjunktion durch die Exklusion definieren:

**d5:** $\neg A := A|A$
**d6:** $A \wedge B := \neg(A|B)$

Denn für $A|A$ erhalten wir aus der Tabelle E aus 1.2.2 die Tabelle

| A | A\|A |
|---|---|
| w | f |
| f | w |

die mit N übereinstimmt. Und die Tabelle

| A | B | A\|B | ¬(A\|B) |
|---|---|---|---|
| w | w | f | w |
| w | f | w | f |
| f | w | w | f |
| f | f | w | f |

ergibt die gleichen Wahrheitsbedingungen für Sätze der Gestalt $\neg(A|B)$, wie die Wahrheitstabelle K.

Es erhebt sich die Frage, ob sich eine endliche Menge von Wahrheitsfunktionen angeben läßt, durch die sich alle übrigen Wahrheitsfunktionen, gleich welcher Stellenzahl, definieren lassen. Wir wollen eine solche Menge von Wahrheitsfunktionen *komplett* nennen.

Es gilt nun der wichtige Satz:

**1.2.3.1** Negation und Konjunktion bilden eine komplette Menge von Wahrheitsfunktionen.

Beweis: Es sei $F(p_1, \ldots, p_n)$ eine beliebige $n$-stellige Wahrheitsfunktion. Es gibt dann, wie wir oben gesehen haben, $2^n$ verschiedene

Einsetzungen von Wahrheitswerten für die Variablen $p_1, \ldots, p_n$ (z. B. $F(\mathfrak{w}, \ldots, \mathfrak{w})$, $F(\mathfrak{f}, \mathfrak{w}, \ldots, \mathfrak{w})$, usw.). Diese Einsetzungen denken wir uns in irgendeiner Weise numeriert von $1$ bis $2^n$. $A_{ik}$ sei die Wahrheitsfunktion $p_k$, bzw. $\neg p_k$, je nachdem ob für die Variable $p_k$ $(k = 1, \ldots, n)$ bei der $i$-ten Einsetzung $(i = 1, \ldots, 2^n)$ „$\mathfrak{w}$" oder „$\mathfrak{f}$" gesetzt wird. $A_{ik}$ ist also bei der $i$-ten Einsetzung wahr. $B_i$ sei die Wahrheitsfunktion $A_{i1} \wedge \ldots \wedge A_{in}$. Dann ist $B_i$ bei der $i$-ten Einsetzung wahr, bei allen anderen Einsetzungen falsch. Die erstere Behauptung folgt unmittelbar aus dem über $A_{ik}$ Gesagten und der Tabelle K. Die zweite ergibt sich auf folgende Weise: Mindestens eine Funktion $A_{ik}$ erhält bei einer Einsetzung mit der Nummer $l$, die von $k$ verschieden ist, ein Argument, das von dem Wahrheitswert verschieden ist, der bei der Einsetzung Nummer $i$ für $p_k$ gesetzt wird, d. h. die Funktion $A_{ik}$ nimmt den Wert $\mathfrak{f}$ an und damit wird die gesamte Konjunktion $A_{i1} \wedge \ldots \wedge A_{in}$ falsch. Für den Fall, daß $F(p_1, \ldots, p_n)$ für alle $2^n$ Einsetzungen den Wert $\mathfrak{w}$ annimmt, können wir setzen „$F(p_1, \ldots, p_n)$" $:=$ „$\neg(p_1 \wedge \neg p_1) \wedge \ldots \wedge \neg(p_n \wedge \neg p_n)$". Denn das Definiens ist offenbar ebenfalls ein a.l. wahrer Satz. Für diesen Fall haben wir also $F(p_1, \ldots, p_n)$ durch Negation und Konjunktion definiert. Andernfalls seien $i_1, \ldots, i_m$ die Nummern derjenigen Einsetzungen, für die $F(p_1, \ldots, p_n)$ den Wert $\mathfrak{f}$ annimmt. $C$ sei dann die Wahrheitsfunktion $\neg B_{i_1} \wedge \ldots \wedge \neg B_{i_m}$. $C$ wird nun genau dann falsch, wenn ein $B_{i_r}$ $(r = 1, \ldots, m)$ wahr ist, d. h. für eine Einsetzung mit der Nummer $i_r$, für die auch $F(p_1, \ldots, p_n)$ falsch wird. Wir können dann also „$F(p_1, \ldots, p_n)$" $:=$ „$C$" setzen und haben wiederum $F(p_1, \ldots, p_n)$ durch Negation und Konjunktion definiert. Damit ist der Satz 1.2.3.1 bewiesen.

Da wir die Konjunktion auch durch Negation und Disjunktion, bzw. durch Negation und Implikation definieren können:

**d7:** $A \wedge B := \neg(\neg A \vee \neg B)$, bzw.

**d8:** $A \wedge B := \neg(A \supset \neg B)$

bilden auch Negation und Disjunktion, bzw. Negation und Implikation eine komplette Menge von Wahrheitsfunktionen. Die Definitionen d5 und d6 zeigen ferner, daß auch die Exklusion allein eine komplette Menge von Wahrheitsfunktionen bildet.

Wie man alle Wahrheitsfunktionen nur durch die Exklusion definieren kann, so kann man sie auch durch die Funktion A ⑮ B definieren, die man als *Rejektion* bezeichnet und durch den Operator † symbolisiert.

Das zeigen die beiden Definitionen:

**d9:** $\neg A := A \dagger A$

**d10:** $A \vee B := \neg(A \dagger B)$,

durch die Negation und Disjunktion auf die Rejektion zurückgeführt werden. Da Negation und Disjunktion aber ausreichen, um alle Wahrheitsfunktionen zu definieren, so reicht demnach auch die Rejektion dazu aus.

Diese Resultate sind nun sehr stark und auf den ersten Blick verblüffend, ermöglichen sie es doch, die unendlich vielen Wahrheitsfunktionen beliebiger Stellenzahl z. B. allein durch die Exklusion zu definieren und somit die Theorie aller Wahrheitsfunktionen durch die Theorie der Exklusion zu beherrschen. Damit haben wir die Möglichkeit gewonnen, alle a.l. gültigen Schlüsse darzustellen nur durch Verwendung der Exklusion[1].

Wenn es also prinzipiell genügt, die Exklusion als einzigen a.l. Operator zu verwenden, so vereinfacht doch der Gebrauch weiterer Operatoren die Schreibweise der Sätze unserer Symbolsprache ganz erheblich. Wegen der umgangssprachlichen Äquivalente zu diesen Operatoren verwendet man praktisch immer die Operatoren $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\supset$ und $\equiv$. Wir wollen uns im folgenden auch auf diese Operatoren beschränken.

Zum Abschluß dieses Abschnittes soll noch darauf hingewiesen werden, daß der Symbolgebrauch in der modernen logischen Literatur keineswegs einheitlich ist. Die folgende Tabelle bringt eine Übersicht über die wichtigsten Symbole, die sich in einigen Standardwerken der modernen Logik finden[2], und soll damit das Literaturstudium erleichtern.

---

[1] Schon C. S. Peirce kannte die Möglichkeit, alle Wahrheitsfunktionen auf eine einzige zurückzuführen. Das geht aus einem Manuskript hervor, das erst **1933** veröffentlicht wurde (Vgl. *Collected Papers*, Bd. IV, S. **13**—**18**, **215**f.). Das Resultat wurde zuerst von H. M. Sheffer veröffentlicht (vgl. Transactions of the American Math. Soc. **14** (**1913**), S. **481**—**488**), der sowohl die Rückführung auf die Exklusion (der Operator „|" wird auch Sheffer-Strich genannt) angab, wie auch die Rückführung auf die Rejektion. Vgl. dazu auch [9], S. 133f.

[2] Vgl. [78], [38], [51], [33].

| Bezeichnung | Hier | PEANO RUSSELL | HILBERT | ŁUKASIEWICZ | HERMES |
|---|---|---|---|---|---|
| Negation | $\neg p$ | $\sim p$ | $\overline{p}$ | $Np$ | $\neg p$ |
| Konjunktion | $p \wedge q$ | $p \cdot q$ | $p \,\&\, q$ | $Kpq$ | $p \wedge q$ |
| Disjunktion | $p \vee q$ | $p \vee q$ | $p \vee q$ | $Apq$ | $p \vee q$ |
| Implikation | $p \supset q$ | $p \supset q$ | $p \rightarrow q$ | $Cpq$ | $p \rightarrow q$ |
| Äquivalenz | $p \equiv q$ | $p \equiv q$ | $p \sim q$ | $Epq$ | $p \leftrightarrow q$ |
| Exklusion | $p \mid q$ | $p \mid q$ | $p \mid q$ | $Dpq$ | $p \mid q$ |

Auf die Besonderheiten der Klammersetzung ist jeweils zu achten!

Die Symbolik von ŁUKASIEWICZ hat den Vorteil, daß ihre Verwendung Klammerzeichen überflüssig macht. So schreibt sich z. B. die Formel

$$((p \supset q) \supset p) \supset p \quad \text{als} \quad CCCpqpp$$

und die Formel

$$(\neg(p \wedge q) \supset q) \vee p \quad \text{als} \quad ACNKpqqp.$$

FREGE hat eine zweidimensionale Schreibweise verwendet, die er für besonders übersichtlich und handlich hielt. Sie hat sich aber nicht durchgesetzt. Er schrieb $\top\!\!\!\!-A$ statt $\neg A$ und $\begin{array}{l}\text{—}\,B\\ \text{|—}\,A\end{array}$ statt $A \supset B$[1].

*Übungsaufgaben:*

1. Beweise, daß die Definitionen d3 und d4 bzgl. der Tabellen I und D aus 1.2.2 adäquat sind, wie das für d1 und d2 auf S. 44f gezeigt wurde.

2. Übersetze folgende Formeln in unsere Symbolik:

$$\sim(p \cdot q) \vee \sim q$$
$$\overline{\overline{p} \,\&\, q} \rightarrow (q \sim \overline{p})$$
$$\overline{\overline{p} \,\&\, \overline{q}} \sim (p \vee q).$$

### 1.2.4 Wahrheitsentwicklungen

Wir kommen nun auf unsere Bemerkung am Ende des Abschnittes 1.2.2 zurück, daß sich die a.l. Gültigkeit von Schlüssen durch ein syste-

[1] Vgl. [14] und FREGES Verteidigung seiner Symbolik in [20].

matisches Rückgreifen auf die Wahrheitstabellen entscheiden läßt. Diese Behauptung wollen wir nun beweisen, indem wir ein Entscheidungsverfahren für die a.l. Gültigkeit von Schlüssen explizit angeben.

Man sagt allgemein, daß für eine Menge von Aufgaben ein *Lösungsverfahren* vorliegt, wenn eine Regel angegeben wird, die bis in alle Einzelheiten eindeutig bestimmt ist, und durch deren Befolgung allein man jede Aufgabe dieser Menge in endlich vielen Schritten lösen kann. Die Regel muß dabei rein mechanisch anwendbar sein, d. h. sie muß eine Vorschrift sein, der man ohne spezielle Fähigkeiten und Kenntnisse nachkommen kann, deren Durchführung man also prinzipiell auch einer geeignet konstruierten Maschine überlassen könnte[1]. Beispiele solcher Lösungsverfahren sind etwa die Division ganzer Zahlen und die Berechnung der Potenzen einer natürlichen Zahl. Bestehen die Aufgaben nun darin, eine bestimmte Frage von Fall zu Fall mit „ja" oder „nein" zu beantworten, so nennt man ein Lösungsverfahren dafür auch ein *Entscheidungsverfahren*. So ein Entscheidungsverfahren wollen wir also für die Beantwortung der Frage angeben, ob ein vorgelegter Schluß unserer Symbolsprache a.l. gültig ist oder nicht.

Es genügt nun, ein Entscheidungsverfahren für die Frage anzugeben, ob ein vorgelegter Satz a.l. wahr ist oder nicht, denn es gilt:

**1.2.4.1** a) Ein Schluß der Form $A_1, \ldots, A_m \rightarrow B$ ist a.l. gültig genau dann, wenn der Satz $A_1 \wedge \ldots \wedge A_m \supset B$ a.l. wahr ist.

b) Ein Schluß der Form $\rightarrow B$ ist a.l. gültig, wenn der Satz B a.l. wahr ist.

c) Ein Schluß der Form $A_1, \ldots, A_m \rightarrow$ ist a.l. gültig genau dann, wenn der Satz $\neg(A_1 \wedge \ldots \wedge A_m)$ a.l. wahr ist.

Beweis: (a) Wenn $A_1, \ldots, A_m \rightarrow B$ a.l. gültig ist, so wird nach 1.2.2.3 B bei jeder Wahrheitsannahme wahr, welche die Sätze $A_1, \ldots, A_m$ sämtlich wahr macht, d. h. die den Satz $A_1 \wedge \ldots \wedge A_m$ wahr macht (vgl. Tabelle K aus 1.2.2). Das Hinterglied der Implikation $A_1 \wedge \ldots \wedge A_m \supset B$ wird also bei jeder Wahrheitsannahme wahr, die das Vorderglied wahr macht, d. h. die Implikation wird bei jeder Wahr-

[1] Man kann den Begriff des Lösungsverfahrens mathematisch präzisieren und zeigen, daß sich zu jedem Lösungsverfahren eine Maschine konstruieren läßt, der man die Anwendung dieses Verfahrens übertragen kann. Vgl. dazu [32].

heitsannahme wahr (vgl. Tabelle I). Ist umgekehrt diese Implikation a.l. wahr, so nimmt das Hinterglied den Wert $\mathfrak{w}$ an für alle Wahrheitsannahmen, die das Vorderglied und damit alle Konjunktionsglieder des Vordergliedes wahr machen. Also ist der Schluß $A_1, \ldots, A_m \rightarrow B$ a.l. gültig.

(b) Die Behauptung wurde schon unter 1.2.2.4 bewiesen.

(c) Wenn jede Wahrheitsannahme einen der Sätze $A_1, \ldots, A_m$ falsch macht, so macht jede Wahrheitsannahme die Konjunktion $A_1 \wedge \ldots \wedge A_m$ falsch, also ihre Negation wahr (vgl. Tabelle N aus 1.2.2). — Macht umgekehrt jede Wahrheitsannahme den Satz $\neg(A_1 \wedge \ldots \wedge A_m)$ wahr, so machen alle Wahrheitsannahmen $A_1 \wedge \ldots \wedge A_m$ falsch, also machen sie jeweils mindestens einen der Sätze $A_1, \ldots, A_m$ falsch. Also ist $A_1, \ldots, A_m \rightarrow$ nach 1.2.2.3 a.l. gültig.

Wenn wir nun ein Entscheidungsverfahren für die a.l. Wahrheit von Sätzen haben, so können wir vermittels 1.2.4.1 auch die a.l. Gültigkeit von Schlüssen entscheiden, indem wir von $A_1, \ldots, A_m \rightarrow B$ zu $A_1 \wedge \ldots \wedge A_m \supset B$ übergehen, von $\rightarrow B$ zu B und von $A_1, \ldots, A_m \rightarrow$ zu $\neg(A_1 \wedge \ldots \wedge A_m)$, und die a.l. Wahrheit dieser Sätze untersuchen. Sind diese Sätze a.l. wahr, so sind auch die entsprechenden Schlüsse a.l. gültig, sind sie nicht a.l. wahr, so sind auch die entsprechenden Schlüsse nicht a.l. gültig.

Wir geben nun ein Entscheidungsverfahren für die a.l. Wahrheit eines Satzes A an und erläutern es gleich anhand des Beispiels $p \supset q \equiv \neg p \vee q$.

1. Man bildet die Liste der SV, die in A vorkommt (im Beispiel: $p$, $q$). Ihre Zahl sei $n$ (im Beispiel ist $n = 2$). Dann bildet man die $2^n$ möglichen Einsetzungen von Wahrheitswerten für diese Variablen (vgl. 1.2.3) und numeriert sie von *1* bis $2^n$. Im Beispiel erhalten wir die Einsetzungen:

*1*) $\mathfrak{w}$ für $p$ und $\mathfrak{w}$ für $q$,
*2*) $\mathfrak{w}$ für $p$ und $\mathfrak{f}$ für $q$,
*3*) $\mathfrak{f}$ für $p$ und $\mathfrak{w}$ für $q$,
*4*) $\mathfrak{f}$ für $p$ und $\mathfrak{f}$ für $q$.

2. Man nimmt in A für die SV die Einsetzung Nr. *1* vor (im Beispiel erhält man so $\mathfrak{w} \supset \mathfrak{w} \equiv \neg \mathfrak{w} \vee \mathfrak{w}$). Dann ersetzt man in diesem Ausdruck schrittweise die Ausdrücke für die einfachen Wahrheitswert-

komposita wie $\neg\mathfrak{w}$, $\mathfrak{f} \wedge \mathfrak{w}$, $\mathfrak{f} \supset \mathfrak{f}$ nach Maßgabe der Wahrheitstabellen N, K, D, I, Ä aus 1.2.2 durch $\mathfrak{w}$ bzw. $\mathfrak{f}$. Die Reihenfolge dieser Ersetzungen ist, bis auf unwesentliche Einzelheiten, durch unsere Regeln über die Setzung und Einsparung von Klammern festgelegt. Nach endlich vielen Schritten erhält man so einen Wahrheitswert als Resultat der Einsetzung Nr. *1*. Im Beispiel erhalten wir:

| | | |
|---|---|---|
| *1*) | $\mathfrak{w} \supset \mathfrak{w} \equiv \neg\mathfrak{w} \vee \mathfrak{w}$ | |
| | $\mathfrak{w} \supset \mathfrak{w} \equiv \mathfrak{f} \vee \mathfrak{w}$ | nach Tabelle N |
| | $\mathfrak{w} \supset \mathfrak{w} \equiv \mathfrak{w}$ | nach Tabelle D |
| | $\mathfrak{w} \equiv \mathfrak{w}$ | nach Tabelle I |
| | $\mathfrak{w}$ | nach Tabelle Ä. |

3. Erhält man als Resultat der $m$-ten Einsetzung ($m = 1, \ldots, 2^n$) $\mathfrak{f}$, so ist der Satz A nicht a.l. wahr und wir sind fertig. Erhält man als Resultat der $m$-ten Einsetzung hingegen $\mathfrak{w}$, so ermittelt man, falls nicht $m = 2^n$ ist, das Resultat der $(m + 1)$-ten Einsetzung auf die gleiche Weise. Ist $\mathfrak{w}$ das Resultat aller Einsetzungen, so ist A a.l. wahr[1]. Im Beispiel hat man also wie folgt fortzufahren:

*2*) $\mathfrak{w} \supset \mathfrak{f} \equiv \neg\mathfrak{w} \vee \mathfrak{f}$
$\mathfrak{w} \supset \mathfrak{f} \equiv \mathfrak{f} \vee \mathfrak{f}$
$\mathfrak{w} \supset \mathfrak{f} \equiv \mathfrak{f}$
$\mathfrak{f} \equiv \mathfrak{f}$
$\mathfrak{w}$

*3*) $\mathfrak{f} \supset \mathfrak{w} \equiv \neg\mathfrak{f} \vee \mathfrak{w}$
$\mathfrak{f} \supset \mathfrak{w} \equiv \mathfrak{w} \vee \mathfrak{w}$
$\mathfrak{f} \supset \mathfrak{w} \equiv \mathfrak{w}$
$\mathfrak{w} \equiv \mathfrak{w}$
$\mathfrak{w}$

*4*) $\mathfrak{f} \supset \mathfrak{f} \equiv \neg\mathfrak{f} \vee \mathfrak{f}$
$\mathfrak{f} \supset \mathfrak{f} \equiv \mathfrak{w} \vee \mathfrak{f}$
$\mathfrak{f} \supset \mathfrak{f} \equiv \mathfrak{w}$
$\mathfrak{w} \equiv \mathfrak{w}$
$\mathfrak{w}$

[1] Ein solches Entscheidungsverfahren hat zuerst FREGE in [14] angewendet, ohne es aber in Allgemeinheit zu formulieren. PEIRCE hat 1885 das Verfahren in voller Allgemeinheit angegeben.

Der Satz $p \supset q \equiv \neg p \vee q$ ist also nach Maßgabe des Entscheidungsverfahrens a.l. wahr.

Es ist nun zu zeigen, daß die nach dem Verfahren 1.2.4.2 als a.l. wahr ausgezeichneten Sätze auch tatsächlich genau die a.l. wahren Sätze sind. Dieser Nachweis ist aber sehr einfach:

1. Ist der Satz A durch das Entscheidungsverfahren ausgezeichnet, so ist er wahr für jede Wahrheitsannahme über die in ihm vorkommenden Satzvariablen nach Maßgabe der Wahrheitstabellen aus 1.2.2. Er ist dann nach 1.2.2.4 auch a.l. wahr.

2. Ist der Satz A a.l. wahr, so nimmt er den Wert $\mathfrak{w}$ an für jede Wahrheitsannahme über die in ihm vorkommenden Satzvariablen. Jede Einsetzung von Wahrheitswerten für diese Variablen und die Bestimmung ihres Resultats nach den Wahrheitstabellen muß also den Wert $\mathfrak{w}$ ergeben. Dann ist aber A auch durch das Entscheidungsverfahren ausgezeichnet.

Zur Erleichterung der Einübung des Entscheidungsverfahrens wenden wir es noch auf ein zweites Beispiel an:

Ist der Satz $(p \supset q) \supset (p \vee r \supset q \vee \neg r)$ a.l. wahr? Der Satz enthält die Satzvariablen $p, q, r$, für die folgende $2^3 = 8$ Einsetzungen möglich sind:

| | $p$ | $q$ | $r$ |
|---|---|---|---|
| *1* | $\mathfrak{w}$ | $\mathfrak{w}$ | $\mathfrak{w}$ |
| *2* | $\mathfrak{w}$ | $\mathfrak{w}$ | $\mathfrak{f}$ |
| *3* | $\mathfrak{w}$ | $\mathfrak{f}$ | $\mathfrak{w}$ |
| *4* | $\mathfrak{w}$ | $\mathfrak{f}$ | $\mathfrak{f}$ |
| *5* | $\mathfrak{f}$ | $\mathfrak{w}$ | $\mathfrak{w}$ |
| *6* | $\mathfrak{f}$ | $\mathfrak{w}$ | $\mathfrak{f}$ |
| *7* | $\mathfrak{f}$ | $\mathfrak{f}$ | $\mathfrak{w}$ |
| *8* | $\mathfrak{f}$ | $\mathfrak{f}$ | $\mathfrak{f}$ |

Wir finden für diese Einsetzungen:

*1*) $(\mathfrak{w} \supset \mathfrak{w}) \supset (\mathfrak{w} \vee \mathfrak{w} \supset \mathfrak{w} \vee \neg \mathfrak{w})$

$\mathfrak{w} \supset (\mathfrak{w} \vee \mathfrak{w} \supset \mathfrak{w} \vee \neg \mathfrak{w})$ nach Tabelle I

$\mathfrak{w} \supset (\mathfrak{w} \supset \mathfrak{w} \vee \neg \mathfrak{w})$ nach Tabelle D

$\mathfrak{w} \supset (\mathfrak{w} \supset \mathfrak{w} \vee \mathfrak{f})$ nach Tabelle N

$\mathfrak{w} \supset (\mathfrak{w} \supset \mathfrak{w})$ nach Tabelle D

$\mathfrak{w} \supset \mathfrak{w}$ nach Tabelle I
$\mathfrak{w}$ nach Tabelle I.

2) $(\mathfrak{w} \supset \mathfrak{w}) \supset (\mathfrak{w} \vee \mathfrak{f} \supset \mathfrak{w} \vee \neg \mathfrak{f})$
$\mathfrak{w} \supset (\mathfrak{w} \vee \mathfrak{f} \supset \mathfrak{w} \vee \neg \mathfrak{f})$
$\mathfrak{w} \supset (\mathfrak{w} \supset \mathfrak{w} \vee \neg \mathfrak{f})$
$\mathfrak{w} \supset (\mathfrak{w} \supset \mathfrak{w} \vee \mathfrak{w})$
$\mathfrak{w} \supset (\mathfrak{w} \supset \mathfrak{w})$
$\mathfrak{w} \supset \mathfrak{w}$
$\mathfrak{w}$

3) $(\mathfrak{w} \supset \mathfrak{f}) \supset (\mathfrak{w} \vee \mathfrak{w} \supset \mathfrak{f} \vee \neg \mathfrak{w})$
$\mathfrak{f} \supset (\mathfrak{w} \vee \mathfrak{w} \supset \mathfrak{f} \vee \neg \mathfrak{w})$
$\mathfrak{f} \supset (\mathfrak{w} \supset \mathfrak{f} \vee \neg \mathfrak{w})$
$\mathfrak{f} \supset (\mathfrak{w} \supset \mathfrak{f} \vee \mathfrak{f})$
$\mathfrak{f} \supset (\mathfrak{w} \supset \mathfrak{f})$
$\mathfrak{f} \supset \mathfrak{f}$
$\mathfrak{w}$

4) $(\mathfrak{w} \supset \mathfrak{f}) \supset (\mathfrak{w} \vee \mathfrak{f} \supset \mathfrak{f} \vee \neg \mathfrak{f})$
$\mathfrak{f} \supset (\mathfrak{w} \vee \mathfrak{f} \supset \mathfrak{f} \vee \neg \mathfrak{f})$
$\mathfrak{f} \supset (\mathfrak{w} \supset \mathfrak{f} \vee \neg \mathfrak{f})$
$\mathfrak{f} \supset (\mathfrak{w} \supset \mathfrak{f} \vee \mathfrak{w})$
$\mathfrak{f} \supset (\mathfrak{w} \supset \mathfrak{w})$
$\mathfrak{f} \supset \mathfrak{w}$
$\mathfrak{w}$

5) $(\mathfrak{f} \supset \mathfrak{w}) \supset (\mathfrak{f} \vee \mathfrak{w} \supset \mathfrak{w} \vee \neg \mathfrak{w})$
$\mathfrak{w} \supset (\mathfrak{f} \vee \mathfrak{w} \supset \mathfrak{w} \vee \neg \mathfrak{w})$
$\mathfrak{w} \supset (\mathfrak{w} \supset \mathfrak{w} \vee \neg \mathfrak{w})$
$\mathfrak{w} \supset (\mathfrak{w} \supset \mathfrak{w} \vee \mathfrak{f})$
$\mathfrak{w} \supset (\mathfrak{w} \supset \mathfrak{w})$
$\mathfrak{w} \supset \mathfrak{w}$
$\mathfrak{w}$

6) $(\mathfrak{f} \supset \mathfrak{w}) \supset (\mathfrak{f} \vee \mathfrak{f} \supset \mathfrak{w} \vee \neg \mathfrak{f})$
$\mathfrak{w} \supset (\mathfrak{f} \vee \mathfrak{f} \supset \mathfrak{w} \vee \neg \mathfrak{f})$
$\mathfrak{w} \supset (\mathfrak{f} \supset \mathfrak{w} \vee \neg \mathfrak{f})$
$\mathfrak{w} \supset (\mathfrak{f} \supset \mathfrak{w} \vee \mathfrak{w})$
$\mathfrak{w} \supset (\mathfrak{f} \supset \mathfrak{w})$
$\mathfrak{w} \supset \mathfrak{w}$
$\mathfrak{w}$

7) $(\mathfrak{f} \supset \mathfrak{f}) \supset (\mathfrak{f} \vee \mathfrak{w} \supset \mathfrak{f} \vee \neg\mathfrak{w})$
$\mathfrak{w} \supset (\mathfrak{f} \vee \mathfrak{w} \supset \mathfrak{f} \vee \neg\mathfrak{w})$
$\mathfrak{w} \supset (\mathfrak{w} \supset \mathfrak{f} \vee \neg\mathfrak{w})$
$\mathfrak{w} \supset (\mathfrak{w} \supset \mathfrak{f} \vee \mathfrak{f})$
$\mathfrak{w} \supset (\mathfrak{w} \supset \mathfrak{f})$
$\mathfrak{w} \supset \mathfrak{f}$
$\mathfrak{f}$

Der Satz $(p \supset q) \supset (p \vee r \supset q \vee \neg r)$ ist also nicht a.l. wahr: die Wahrheitsannahme (7) macht ihn falsch.

Die weitere Einübung des Verfahrens muß dem Leser selbst überlassen werden. Angesichts der Bedeutung des Entscheidungsverfahrens ist dringend zu empfehlen, daß eine Reihe von weiteren Beispielen im einzelnen durchgerechnet wird. Abschließend sei noch erwähnt, daß man das Entscheidungsverfahren auch zur Beantwortung der Frage verwenden kann, ob ein Satz a.l. falsch oder a.l. indeterminiert ist: er ist a.l. falsch, wenn alle Einsetzungen den Wert $\mathfrak{f}$ ergeben, a.l. indeterminiert, wenn einige Einsetzungen den Wert $\mathfrak{w}$ und andere den Wert $\mathfrak{f}$ ergeben.

*Übungsaufgaben:*

1. Beweise diese unsere letzte Behauptung!

2. Man stelle für die folgenden Sätze fest, ob sie a.l. wahr, a.l. falsch oder a.l. indeterminiert sind:

a) $(p \equiv q) \equiv (p \supset q) \supset (q \supset p)$
b) $(p \supset q) \supset (p \vee r \supset q \vee r)$
c) $((p \supset q) \supset p) \supset q$
d) $((p \supset q) \supset p) \supset p$
e) $(p \supset q) \wedge (q \supset r) \wedge (p \wedge \neg r)$
f) $p \supset q \equiv \neg p \supset \neg q$
g) $(p \supset q) \supset ((q \supset r) \supset (p \supset r))$
h) $((p \vee q) \vee (r \supset p)) \supset (p \vee \neg p \supset r \wedge \neg p \wedge \neg q)$.

### 1.2.5 Fundamentale Theoreme der Aussagenlogik

Wir wollen im folgenden eine Auswahl der wichtigsten a.l. gültigen Schlüsse angeben. Der Beweis für die a.l. Gültigkeit der aufgeführten Schlüsse ist jeweils durch eine Anwendung unseres Entscheidungsverfahrens zu erbringen. Nachdem es sich dabei um ein rein mechanisch anzuwendendes Verfahren handelt, das im vorigen Abschnitt eingeübt worden ist, führen wir diese Beweise nicht an. Dem Leser sei aber empfohlen, in einer Reihe von Fällen die Beweise tatsächlich durchzuführen.

Zur Abkürzung verwenden wir im folgenden das Zeichen „$\leftrightarrow$“ im Kontext A $\leftrightarrow$ B für die Behauptung, daß sowohl der Schluß A $\rightarrow$ B, wie auch der Schluß B $\rightarrow$ A a.l. gültig ist. Die Behauptung eines Schlusses ist im folgenden immer als Behauptung seiner a.l. Gültigkeit zu verstehen.

*Gesetze der Negation:*

| | |
|---|---|
| $\neg\neg p \leftrightarrow p$ | Prinzip der doppelten Negation |
| $\neg\neg\neg p \leftrightarrow \neg p$ | Prinzip der dreifachen Negation. |

*Gesetze der Konjunktion:*

| | |
|---|---|
| $p \wedge p \leftrightarrow p$ | Idempotenz der Konjunktion |
| $p \wedge q \leftrightarrow q \wedge p$ | Kommutativität der Konjunktion |
| $p \wedge (q \wedge r) \leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$ | Assoziativität der Konjunktion |
| $p \wedge (q \vee r) \leftrightarrow p \wedge q \vee p \wedge r$ | Distributivität der Konjunktion |
| $p \wedge (p \vee q) \leftrightarrow p$ | Absorptionsgesetz der Konjunktion |
| $p \wedge (p \wedge q) \leftrightarrow p \wedge q$ | Absorptionsgesetz der Konjunktion |
| $p \wedge (q \vee \neg q) \leftrightarrow p$ | Absorptionsgesetz der Konjunktion |
| $p, q \rightarrow p \wedge q$ | Gesetz der Konjunktionseinführung |
| $p \wedge q \rightarrow p$ | Abschwächung der Konjunktion |
| $p \wedge q \rightarrow q$ | Abschwächung der Konjunktion |
| $p \wedge q \rightarrow p \vee q$ | Abschwächung der Konjunktion |
| $p \wedge q \rightarrow p \supset q$ | Abschwächung der Konjunktion |
| $p \wedge q \rightarrow p \equiv q$ | Abschwächung der Konjunktion |
| $p \wedge q \leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q)$ | Gesetz von De Morgan (d7) |
| $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow \neg p \vee \neg q$ | Gesetz von De Morgan |
| $p \wedge q \leftrightarrow \neg(p \supset \neg q)$ | Gesetz von De Morgan (d8) |
| $p \wedge \neg p \rightarrow$ | Prinzip vom ausgeschlossenen Widerspruch. |

*Gesetze der Disjunktion:*

| | |
|---|---|
| $p \vee p \leftrightarrow p$ | Idempotenz der Disjunktion |
| $p \vee q \leftrightarrow q \vee p$ | Kommutativität der Disjunktion |
| $p \vee (q \vee r) \leftrightarrow (p \vee q) \vee r$ | Assoziativität der Disjunktion |
| $p \vee (q \wedge r) \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ | Distributivität der Disjunktion |

| | |
|---|---|
| $p \vee (p \vee q) \leftrightarrow p \vee q$ | Absorptionsgesetz der Disjunktion |
| $p \vee (p \wedge q) \leftrightarrow p$ | Absorptionsgesetz der Disjunktion |
| $p \vee (q \wedge \neg q) \leftrightarrow p$ | Absorptionsgesetz der Disjunktion |
| $p \rightarrow p \vee q$ | Gesetz der Disjunktionseinführung |
| $q \rightarrow p \vee q$ | Gesetz der Disjunktionseinführung |
| $p \vee q \leftrightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q)$ | Gesetz von De Morgan (d4) |
| $\neg(p \vee q) \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$ | Gesetz von De Morgan |
| $\rightarrow p \vee \neg p$ | Prinzip vom ausgeschlossenen Dritten. |

*Gesetze der Implikation:*

| | |
|---|---|
| $\rightarrow p \supset p$ | Reflexivität der Implikation |
| $p \supset q, q \supset r \rightarrow p \supset r$ | Transitivität der Implikation |
| $p \supset (q \supset r) \leftrightarrow p \wedge q \supset r$ | Gesetz der Im-, bzw. Exportation |
| $p \supset (q \supset r) \leftrightarrow q \supset (p \supset r)$ | Gesetz der Prämissenvertauschung |
| $p \supset (p \supset q) \leftrightarrow p \supset q$ | Absorptionsgesetz der Implikation |
| $p \supset (q \supset r) \leftrightarrow (p \supset q) \supset (p \supset r)$ | Selbstdistributivität der Implikation |
| $p \supset q \leftrightarrow \neg p \vee q$ | Definition der Implikation (d3) |
| $p \supset q \leftrightarrow \neg q \supset \neg p$ | Gesetz der Kontraposition |
| $\neg p \supset q \leftrightarrow \neg q \supset p$ | Gesetz der Kontraposition |
| $p \supset \neg q \leftrightarrow q \supset \neg p$ | Gesetz der Kontraposition |
| $p \rightarrow q \supset p$ | Paradox der Implikation |
| $p \rightarrow \neg p \supset q$ | ex falso quodlibet |
| $\neg p \rightarrow p \supset q$ | Paradox der Implikation |
| $p \supset q \rightarrow p \wedge r \supset q$ | Abschwächung der Implikation |
| $p \supset q \rightarrow (r \supset p) \supset (r \supset q)$ | Abschwächung der Implikation |
| $p \supset q \rightarrow (q \supset r) \supset (p \supset r)$ | Abschwächung der Implikation |
| $p \supset q \rightarrow p \vee r \supset q \vee r$ | Abschwächung der Implikation |
| $p \supset q \rightarrow p \wedge r \supset q \wedge r$ | Gesetz der Prämissenverstärkung |
| $p, p \supset q \rightarrow q$ | Modus ponens |
| $p \rightarrow (p \supset q) \supset q$ | Modus ponendo ponens |
| $p \rightarrow (q \supset \neg p) \supset \neg q$ | 1. Modus tollendo tollens |
| $p \supset q, \neg q \rightarrow \neg p$ | 2. Modus tollendo tollens |
| $p \supset q, r \supset q \rightarrow p \vee r \supset q$ | Koppelungsgesetz der Implikation |
| $p \supset q, p \supset r \rightarrow p \supset q \wedge r$ | Koppelungsgesetz der Implikation |
| $p \supset q, r \supset s \rightarrow p \wedge r \supset q \wedge s$ | Koppelungsgesetz der Implikation |
| $p \supset q, \neg p \supset q \rightarrow q$ | Konstruktives Dilemma |
| $p \supset \neg p \rightarrow \neg p$ | reductio ad absurdum |
| $\neg p \supset p \rightarrow p$ | reductio ad absurdum |
| $p \supset q, p \supset \neg q \rightarrow \neg p$ | reductio ad absurdum |

| | |
|---|---|
| $\neg(p \supset q) \leftrightarrow p \wedge \neg q$ | Widerlegung der Implikation |
| $(p \supset q) \supset p \rightarrow p$ | Gesetz von PEIRCE. |

*Gesetze der Äquivalenz:*

| | |
|---|---|
| $\rightarrow p \equiv p$ | Reflexivität der Äquivalenz |
| $p \equiv q, q \equiv r \rightarrow p \equiv r$ | Transitivität der Äquivalenz |
| $p \equiv q \leftrightarrow q \equiv p$ | Kommutativität der Äquivalenz |
| $p \equiv (q \equiv r) \leftrightarrow (p \equiv q) \equiv r$ | Assoziativität der Äquivalenz |
| $p \equiv q \leftrightarrow \neg p \equiv \neg q$ | Inversion der Äquivalenz |
| $\neg p \equiv q \leftrightarrow p \equiv \neg q$ | Kontraposition der Äquivalenz |
| $p \equiv q \leftrightarrow (p \supset q) \wedge (q \supset p)$ | Definition der Äquivalenz (d2) |
| $p \equiv q \leftrightarrow p \wedge q \vee \neg p \wedge \neg q$ | Wahrheitsbedingungen der Äquivalenz |
| $p \equiv q \rightarrow p \supset q$ | Abschwächung der Äquivalenz |
| $p \equiv q \rightarrow q \supset p$ | Abschwächung der Äquivalenz |
| $\neg(p \equiv q) \leftrightarrow \neg p \equiv q$ | Widerlegung der Äquivalenz. |

Im Hinblick auf die Assoziativität der Konjunktion und die der Disjunktion können wir nun auch die Klammern in den Formeln A ∨ (B ∨ C), (A ∨ B) ∨ C und in den Formeln A ∧ (B ∧ C), (A ∧ B) ∧ C weglassen. Denn der Wahrheitswert bleibt der gleiche, ob man die Formel A ∨ B ∨ C im Sinne von A ∨ (B ∨ C) oder von (A ∨ B) ∨ C deutet, bzw. ob man A ∧ B ∧ C im Sinne von A ∧ (B ∧ C) oder von (A ∧ B) ∧ C deutet.

### 1.2.6 Metatheoreme zur Aussagenlogik

Das Entscheidungsverfahren ermöglicht es uns, für jeden vorgelegten Schluß bzw. Satz festzustellen, ob er a.l. gültig bzw. a.l. wahr ist oder nicht. Es umgrenzt so die Menge der *Theoreme* der A.L. als Menge der a.l. gültigen Schlüsse oder auch als Menge der a.l. wahren Sätze.

Die direkte Auszeichnung eines Theorems durch eine Anwendung des Entscheidungsverfahrens ist aber nicht die einzige Möglichkeit Theoreme zu gewinnen. In vielen Fällen ist es einfacher, aus vorgegebenen Theoremen neue Theoreme zu erschließen vermittels solcher Sätze wie „Wenn die Schlüsse $\Sigma$ und $\Sigma'$ a.l. gültig sind, so ist auch der Schluß $\Sigma''$ a.l. gültig". Das sind nun keine Sätze, auf die sich unser Entscheidungsverfahren anwenden ließe. Es sind daher auch keine Theoreme der A.L., sondern Sätze über unsere Theorie der A.L. oder Metatheoreme. Allgemein bezeichnet man als *Metatheorem* einer Theorie

$T$ einen Satz über $T$, der nicht mit den Mitteln von $T$ selbst, sondern nur mit intuitiven Mitteln bewiesen werden kann. Ein solches Metatheorem ist z. B. der Satz **1.2.4.1**. Wir wollen nun einige Metatheoreme der A.L. angeben und damit u. a. Wege aufzeigen, wie sich aus Schlüssen, die bereits als a.l. gültig erkannt sind — z. B. durch eine Anwendung des Entscheidungsverfahrens — neue a.l. Schlüsse gewinnen lassen.

Wir haben in 1.2.1 SV eingeführt, um formale Schlüsse in ihrer Allgemeingültigkeit darzustellen. Ein Schluß ist a.l. gültig, wenn für alle Wahrheitsannahmen über die SV, d. h. für alle Interpretationen der SV durch bestimmte Sätze, aus der Wahrheit der Prämissen die Wahrheit der Konklusion folgt. Man kann also für die SV in den Sätzen eines a.l. gültigen Schlusses bestimmte Sätze einsetzen, und erhält dabei immer gültige Schlüsse. Diesen Sachverhalt drückt das *Einsetzungstheorem* aus. Um es kürzer formulieren zu können, verwenden wir folgende Schreibweise: Ist p eine SV, so schreiben wir statt „A" auch „A[p]", um anzudeuten, daß die Formel A die SV p enthalten kann[1]. A[p/B] soll dann diejenige Formel sein, die aus A[p] entsteht, wenn man alle Vorkommnisse von p in A[p] durch die in Klammern eingeschlossene Formel $\mathfrak{B}$ ersetzt. Überflüssige Klammern können dann nach unseren Klammerregeln in A[p/B] wieder fortgelassen werden. Enthält A[p] die SV p nicht, so ist A[p/B] mit der Formel A[p] identisch.

Ist A[p] z. B. die Formel $p \wedge q \supset p$, ist p die SV $p$ und ist B die Formel $\neg r \equiv s$, so ist A[p/B] die Formel $(\neg r \equiv s) \wedge q \supset (\neg r \equiv s)$.

Ebenso kann man durch die Schreibweise „A[$\mathrm{p}_1, \ldots, \mathrm{p}_n$]" anstelle von „A" andeuten, daß die Formel A die SV $\mathrm{p}_1, \ldots, \mathrm{p}_n$ enthalten kann. Dann ist A[$\mathrm{p}_1/\mathrm{B}_1, \ldots, \mathrm{p}_n/\mathrm{B}_n$] die Formel, die aus A[$\mathrm{p}_1, \ldots, \mathrm{p}_n$] durch simultane Ersetzung alle Vorkommnisse von $\mathrm{p}_1$ in A[$\mathrm{p}_1, \ldots, \mathrm{p}_n$] durch ($\mathrm{B}_1$) und ... und von allen Vorkommnissen von $\mathrm{p}_n$ in A[$\mathrm{p}_1, \ldots, \mathrm{p}_n$] durch ($\mathrm{B}_n$) entsteht.

Ist A[p, q] also z. B. die Formel $p \wedge q \supset p$, sind p und q die SV $p$ und $q$, ist B die Formel $\neg r \equiv q$ und C die Formel $r \wedge \neg t$, so ist A[p/B, q/C] die Formel $(\neg r \equiv q) \wedge r \wedge \neg t \supset (\neg r \equiv q)$, nicht aber die Formel $(\neg r \equiv r \wedge \neg t) \wedge r \wedge \neg t \supset (\neg r \equiv r \wedge \neg t)$, da C nicht für die Vorkommnisse von q in A[p/B, q], sondern für die Vorkommnisse von q in A[p, q] einzusetzen ist.

---

[1] Man beachte, daß der Buchstabe p nicht wie $p$ eine bestimmte SV unserer Symbolsprache ist, sondern für unspezifizierte SV steht, ähnlich wie der Buchstabe A keine bestimmte Formel ist, sondern für unspezifizierte Formeln steht.

Das Einsetzungstheorem lautet nun:

**Mt1:** Ist der Schluß $A_1[p], \ldots, A_m[p] \rightarrow B[p]$ a.l. gültig, so auch der Schluß $A_1[p/C], \ldots, A_m[p/C] \rightarrow B[p/C]$, für beliebige Formeln C.

Beweis: Kommt die SV p in C vor, so können wir p in den Formeln des ersten Schlusses durch eine GV q ersetzen, die weder in diesen Formeln, noch in C vorkommt. Dadurch ändert sich offenbar nichts an der a.l. Gültigkeit des ersten oder an der Gestalt des zweiten Schlusses — es ist ja nun C für q einzusetzen. Wir können also annehmen, daß p nicht in C vorkommt. Unter dieser Voraussetzung gilt, daß zwei Formeln $A[p]$ und $A[p/C]$ die gleichen Wahrheitswerte annehmen, wenn p und C die gleichen Wahrheitswerte annehmen. $A[p]$ ist ja eine Wahrheitsfunktion $F(p, q_1, \ldots, q_n)$ von p und den übrigen SV $q_1, \ldots, q_n$ von $A[p]$. $A[p/C]$ ist dann die Wahrheitsfunktion $F(C, q_1, \ldots, q_n)$, die für gleiche Werte von p und C die gleichen Werte annimmt wie $F(p, q_1, \ldots, q_n)$. Ist nun $\mathfrak{W}$ eine Wahrheitsannahme über die SV, die in den Formeln des zweiten Schlusses vorkommen, die alle Prämissen dieses Schlusses wahr macht, so macht sie auch alle Prämissen des ersten Schlusses wahr, wenn wir zusätzlich p denselben Wahrheitswert wie C zuordnen. Ist der erste Schluß aber a.l. gültig, so ist dann auch seine Konklusion $B[p]$, und damit auch $B[p/C]$ wahr.

Mit **Mt1** gewinnen wir z. B. aus dem Theorem $p \wedge q \rightarrow p$, die Theoreme $r \wedge s \rightarrow t$, $\neg p \wedge p \rightarrow \neg p$, $(s \supset t) \wedge (t \vee r) \rightarrow s \supset t$, usw., also alle Theoreme der Gestalt $A \wedge B \rightarrow A$. Allgemein kann man nach **Mt1** die SV $p, q, r, s$ in den a.l. Theoremen von 1.2.5 nun durch Zeichen für unbestimmt gelassene Formeln A, B, C, D ersetzen und erhält so aus den Schlüssen die entsprechenden Schlußschemata. So wird aus $p \supset q, q \supset r \rightarrow p \supset r$ $A \supset B, B \supset C \rightarrow A \supset C$, aus $p \supset q \rightarrow p \wedge r \supset q$ wird $A \supset B \rightarrow A \wedge C \supset B$, usf.

**Mt2:** Wenn der Schluß $A_1, \ldots, A_m \rightarrow B$ a.l. gültig ist, so auch der Schluß $A_1, \ldots, A_{m-1} \rightarrow A_m \supset B$ (für $m \geqslant 1$), kurz: Aus $A_1, \ldots, A_m \rightarrow B$ folgt $A_1, \ldots, A_{m-1} \rightarrow A_m \supset B$ (*Importationsprinzip*).

Beweis: Wenn alle Wahrheitsannahmen, die $A_1, \ldots, A_m$ wahr machen, auch B wahr machen, so macht keine Wahrheitsannahme, die $A_1, \ldots, A_{m-1}$ wahr macht, $A_m \supset B$ falsch — sie müßte ja sonst $A_m$ wahr und B falsch machen.

Mit Mt2 gewinnen wir aus $p \rightarrow \neg\neg p$ das Theorem $\rightarrow p \supset \neg\neg p$, aus $p \rightarrow p \vee q$ das Theorem $\rightarrow p \supset p \vee q$, usw.

**Mt3:** Aus $A_1, \ldots, A_m \rightarrow B$ folgt $A_1, \ldots, A_m, C \rightarrow B$ (Prinzip der *Prämissenverdünnung*).

Jede Wahrheitsannahme, die $A_1, \ldots, A_m$, C wahr macht, macht auch $A_1, \ldots, A_m$ wahr. Wenn also jede Wahrheitsannahme, die $A_1, \ldots, A_m$ wahr macht, auch B wahr macht, so macht jede Wahrheitsannahme, die $A_1, \ldots, A_m$, C wahr macht, B wahr.

Mit Mt3 erhalten wir z. B. aus $\rightarrow p \supset p$ das Theorem $q \rightarrow p \supset p$.

**Mt4:** Aus $A_1, \ldots, A_m \rightarrow$ folgt $A_1, \ldots, A_m \rightarrow B$. (Prinzip *ex falso quodlibet*).

Wenn für jede Wahrheitsannahme $\mathfrak{W}$ gilt: $\mathfrak{W}$ macht einen der Sätze $A_1, \ldots, A_m$ falsch, so gilt auch für jede Wahrheitsannahme $\mathfrak{W}$: wenn $\mathfrak{W}$ alle Sätze $A_1, \ldots, A_m$ wahr macht, dann macht $\mathfrak{W}$ auch B wahr. Denn da der „wenn"-Satz für jedes $\mathfrak{W}$ falsch ist, ist der „wenn — dann"-Satz (bei Auffassung des „wenn — dann" im Sinne der Implikation) wahr.

Mit Mt4 erhalten wir aus $p \wedge \neg p \rightarrow$ das Theorem $p \wedge \neg p \rightarrow q$.

**Mt5:** Aus $A_1, \ldots, A_m \rightarrow B$ und $A_1, \ldots, A_m, B \rightarrow C$ folgt $A_1, \ldots, A_m \rightarrow C$ (verallgemeinertes *Transitivitätsprinzip*).

Beweis: Alle Wahrheitsannahmen, die $A_1, \ldots, A_m$, B wahr machen, machen auch C wahr. Nun machen aber alle Wahrheitsannahmen, die $A_1, \ldots, A_m$ wahr machen, auch B wahr. Also machen sie auch C wahr.

Es gilt auch folgende Verallgemeinerung von Mt5: Wenn die Schlüsse $A_1, \ldots, A_m \rightarrow B$ und $D_1, \ldots, D_n, B \rightarrow C$ a.l. gültig sind, so ist auch der Schluß $A_1, \ldots, A_m, D_1, \ldots, D_n \rightarrow C$ a.l. gültig. Denn aus $A_1, \ldots, A_m \rightarrow B$ ergibt sich nach Mt3 $A_1, \ldots, A_m, D_1, \ldots, D_n \rightarrow B$, und aus $D_1, \ldots, D_n, B \rightarrow C$ ergibt sich $A_1, \ldots, A_m, D_1, \ldots, D_n, B \rightarrow C$ und daraus mit Mt5 unsere Behauptung.

Nach Mt5 gilt also auch: Aus $\rightarrow A \supset B$ folgt $A \rightarrow B$. Denn aus dem Schlußschema $A, A \supset B \rightarrow B$, das sich aus $p, p \supset q \rightarrow q$ mit Mt1 ergibt, erhalten wir zusammen mit $\rightarrow A \supset B$ den Schluß $A \rightarrow B$. Dieses Prinzip bezeichnet man auch als *Exportationsprinzip*.

Ein Spezialfall von Mt5 ist die Behauptung: Aus $A \rightarrow B$ und $\rightarrow A$ folgt $\rightarrow B$. Ein weiterer Spezialfall von Mt5 ist die Transitivität der Folgebeziehung: Aus $A \rightarrow B$ und $B \rightarrow C$ folgt $A \rightarrow C$.

**1.2.6.1** Wir sagen, eine Formel A sei *Teilformel* einer Formel B, wenn gilt: A ist mit B identisch, oder B hat die Gestalt $\neg$C und A ist Teilformel von C, oder B hat die Gestalt C $\wedge$ D, C $\vee$ D, C $\supset$ D oder C $\equiv$ D und A ist Teilformel von C oder D.

Demnach sind z. B. $p \wedge q \vee r \supset p$, $p \wedge q \vee r$, $p$, $p \wedge q$, $r$, $p$ und $q$ die Teilformeln von $p \wedge q \vee r \supset p$. Die Formeln $q \vee r$, $r \supset p$, $q \vee r \supset p$ sind hingegen nicht Teilformeln dieser Formel, da nach unseren Klammerregeln $p \wedge q$ und nicht $q$ das erste Disjunktionsglied von $p \wedge q \vee r$ ist und da $p \wedge q \vee r$ und nicht $r$ oder $q \vee r$ das Vorderglied der Implikation $p \wedge q \vee r \supset p$ ist.

Ist A Teilformel von B, so schreiben wir auch „B[[A]]" statt „B". B[[C]] soll dann eine Formel sein, die aus B[[A]] durch Ersetzung eines oder mehrerer Vorkommen von A in B[[A]] durch C entsteht.

Ist B[[A]] z. B. die Formel $p \wedge r \vee s \supset p \wedge r$, A die Formel $p \wedge r$, und C die Formel $s \supset \neg p$, so sind $(s \supset \neg p) \vee s \supset p \wedge r$, $p \wedge r \vee s \supset (s \supset \neg p)$ und $(s \supset \neg p) \vee s \supset (s \supset \neg p)$ solche Formeln B[[C]].

Unter Verwendung dieser Symbolik können wir nun das wichtige *Ersetzungstheorem* formulieren:

**Mt6:** B $\equiv$ C $\rightarrow$ A[[B]] $\equiv$ A[[C]].

Beweis: Es genügt, den Fall zu betrachten, in dem A[[C]] aus A[[B]] durch Ersetzung nur eines Vorkommnisses von B in A[[B]] hervorgeht, denn durch mehrfache Ersetzung jeweils eines Vorkommnisses von B durch C und Anwendung von Mt5 kann man dann die Behauptung auch für die Ersetzung mehrerer Vorkommen von B durch C beweisen. Es unterscheide sich also A[[B]] von A[[C]] nur dadurch, daß in A[[C]] ein Vorkommen von B durch C ersetzt ist. Dann nehmen die Formeln A[[B]] und A[[C]] als Wahrheitsfunktionen $F(\mathrm{B}, \mathrm{q}_1, \ldots, \mathrm{q}_n)$ und $F(\mathrm{C}, \mathrm{q}_1, \ldots, \mathrm{q}_n)$ — $q_1, \ldots, \mathrm{q}_n$ seien die SV von A[[B]], die nicht nur in dem durch C zu ersetzenden Vorkommen von B in A[[B]] stehen — für gleiche Wahrheitswerte von B und C gleiche Werte an. Ist aber A $\equiv$ B bei einer Wahrheitsannahme $\mathfrak{W}$ wahr, so ordnet $\mathfrak{W}$ A und B die gleichen Werte zu, also auch A[[B]] und A[[C]], und macht demnach auch den Satz A[[B]] $\equiv$ A[[C]] wahr.

Die Metatheoreme Mt1 bis Mt6 reichen aus, um aus den Theoremen von 1.2.5 auf einfache Weise die wichtigsten Theoreme der A.L. zu gewinnen.

Zur Einübung dieser Metatheoreme leiten wir aus ihnen noch das folgende Metatheorem her:

**Mt7:** $A \leftrightarrow B$ ist a.l. gültig genau dann, wenn $\rightarrow A \equiv B$ a.l. gültig ist.

Beweis: Aus $A \leftrightarrow B$ erhalten wir
$A \rightarrow B$ und
$B \rightarrow A$. Mit Mt2 also
$\rightarrow A \supset B$ und
$\rightarrow B \supset A$. Aus dem Theorem
$p, q \rightarrow p \wedge q$ erhalten wir mit Mt1 und Mt5 daraus
$\rightarrow (A \supset B) \wedge (B \supset A)$, also mit d2
$\rightarrow A \equiv B$.

Umgekehrt erhalten wir aus

$\rightarrow A \equiv B$ mit d2
$\rightarrow (A \supset B) \wedge (B \supset A)$. Aus den Theoremen
$p \wedge q \rightarrow p$ und
$p \wedge q \rightarrow q$ erhalten wir mit Mt1 und Mt5 daraus
$\rightarrow A \supset B$ und
$\rightarrow B \supset A$, mit Mt5 also
$A \rightarrow B$ und
$B \rightarrow A$, also
$A \leftrightarrow B$.

Für manche Zwecke erweist sich die Darstellung von Sätzen in einer bestimmten Gestalt, in einer sogenannten *Normalform* als nützlich. Wir wollen zwei solche Normalformen angeben:

**1.2.6.2** Wir sagen, ein Satz A habe *konjunktive Normalform*, wenn A die Gestalt einer Konjunktion $A_1 \wedge \ldots \wedge A_m$ $(m \geqslant 1)$ hat, wobei die Konjunktionsglieder $A_i$ $(i = 1, \ldots, m)$ die Gestalt einer Disjunktion $B_{i1} \vee \ldots \vee B_{in_i}$ $(n_i \geqslant 1)$ haben, deren Disjunktionsglieder SV oder einfache Negationen von SV sind[1].

Es gilt:

**Mt8:** Jeder Satz A läßt sich so in einen Satz $A_N$ in konjunktiver Normalform umformen, daß gilt $\rightarrow A \equiv A_N$.

---

[1] Für $m = 1$ kann man natürlich nur in übertragenem Sinn von einer Konjunktion reden, da es dann nur ein Konjunktionsglied $A_1$ gibt. Das gleiche gilt für den Fall $n_i = 1$ für die Disjunktionen.

Beweis: Das Umformungsverfahren vollzieht sich in folgenden Schritten:

1. Man ersetzt zunächst ev. in A vorkommende Operatoren $\equiv$ und $\supset$ nach den Definitionen d2 und d3 aus 1.2.3 durch die Operatoren $\neg$, $\wedge$ und $\vee$. Dadurch erhält man einen Satz A', der nur mehr die Operatoren $\neg$, $\wedge$ und $\vee$ enthält und für den gilt $\rightarrow A \equiv A'$.

So gewinnt man z. B. aus dem Satz

A: $(p \supset \neg q) \equiv r$ mit d2
$((p \supset \neg q) \supset r) \wedge (r \supset (p \supset \neg q))$ und d3 den Satz
A': $(\neg(\neg p \vee \neg q) \vee r) \wedge (\neg r \vee \neg p \vee \neg q)$.

2. In A' werden dann sukzessive alle Teilformeln der Gestalt $\neg(A \wedge B)$ und $\neg(A \vee B)$ durch $\neg A \vee \neg B$, bzw. $\neg A \wedge \neg B$ ersetzt. Dadurch entstehe die Formel A'', die dann keine Teilformeln $\neg(A \wedge B)$ und $\neg(A \vee B)$ mehr enthält. Aus den Theoremen $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow \neg p \vee \neg q$ und $\neg(p \vee q) \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$ erhält man mit Mt7, Mt6 und Mt5 dann $\rightarrow A' \equiv A''$.

Im Beispiel erhält man aus A' so die Formel

A'': $(\neg\neg p \wedge \neg\neg q \vee r) \wedge (\neg r \vee \neg p \vee \neg q)$.

3. In A'' werden dann sukzessive alle Teilformeln der Gestalt $\neg\neg A$ durch A ersetzt, bis endlich keine doppelten Negationen mehr auftreten. Die so entstehende Formel sei A'''. Aus dem Theorem $\neg\neg p \leftrightarrow p$ erhalten wir mit Mt7, Mt6 und Mt5 dann $\rightarrow A'' \equiv A'''$.

Im Beispiel wird so aus A'' die Formel

A''': $(p \wedge q \vee r) \wedge (\neg r \vee \neg p \vee \neg q)$.

4. In A''' werden endlich sukzessive alle Teilformeln der Gestalt $A \vee (B \wedge C)$, bzw. $(B \wedge C) \vee A$ durch $(A \vee B) \wedge (A \vee C)$, bzw. $(B \vee A) \wedge (C \vee A)$ ersetzt. Dadurch entstehe die Formel A''''. Aus den Theoremen $p \vee (q \wedge r) \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$, und $(q \wedge r) \vee p \leftrightarrow (q \vee p) \wedge (r \vee p)$ erhält man dann wieder mit Mt7, Mt6 und Mt5 $\rightarrow A''' \equiv A''''$.

Im Beispiel erhalten wir so aus A''' die Formel

A'''': $(p \vee r) \wedge (q \vee r) \wedge (\neg r \vee \neg p \vee \neg q)$.

$A''''$ ist nun die gesuchte Formel $A_N$ in konjunktiver Normalform. Denn in $A''''$ treten nach (2) und (3) Negationszeichen nur vor SV auf und Disjunktionszeichen treten nach (4) nur zwischen SV und negierten SV auf. Wegen der Transitivität der Äquivalenz gilt aber $\rightarrow A \equiv A_N$, was zu beweisen war.

Man kann die Formel $A_N$ auch noch weiter vereinfachen, wenn man in den Konjunktionsgliedern unter Benutzung der Kommutativität und der Idempotenz der Disjunktion gleiche Glieder zusammenfaßt und ggf. auch von den Idempotenz- und Absorptionsgesetzen der Konjunktion Gebrauch macht. So erhält man z. B. aus dem Satz $(p \vee \neg q \vee p) \wedge p \wedge p$ die Sätze $(p \vee p \vee \neg q) \wedge p \wedge p$, $(p \vee \neg q) \wedge p$ und endlich $p$. Diese Sätze sind untereinander äquivalent.

Es gilt nun:

**Mt9:** Ein Satz in konjunktiver Normalform ist genau dann a.l. wahr, wenn in jedem Konjunktionsglied eine SV zugleich negiert und unnegiert vorkommt.

Das einfachste Beispiel eines solchen Satzes ist $p \vee \neg p$.

Beweis: Wenn A ein Satz der in Mt9 angegebenen Gestalt ist, so ist er a.l. wahr. Denn jede Wahrheitsannahme macht alle Sätze der Gestalt $A \vee \neg A$ wahr, macht also ein Disjunktionsglied jedes Konjunktionsgliedes von A und damit jedes Konjunktionsglied von A, also auch A selbst wahr. Sei A hingegen ein Satz in konjunktiver Normalform, der nicht die angegebene Form hat, so gibt es ein Konjunktionsglied B von A, in dem keine SV zugleich negiert und unnegiert vorkommt. Wenn man nun annimmt, alle unnegierten Variablen von B hätten den Wert $\mathfrak{f}$, alle negierten Variablen von B den Wert $\mathfrak{w}$, so wird B als Disjunktion von falschen Sätzen falsch und also A als Konjunktion mit einem falschen Glied falsch. Diese Wahrheitsannahme zeigt also, daß A nicht a.l. wahr ist.

Da nun die Überführung eines beliebigen Satzes A in konjunktive Normalform einer allgemeinen und mechanisch anwendbaren Vorschrift folgt, und da die Überprüfung, ob jedes Konjunktionsglied der Normalform eine SV zugleich negiert und unnegiert enthält, sich ebenso schematisch vollziehen läßt, so haben wir durch das Metatheorem Mt9 ein neues Entscheidungsverfahren für die a.l. Wahrheit von Sätzen gefunden. Dies Entscheidungsverfahren führt in manchen Fällen schneller zu einem Ergebnis als die Wahrheitsentwicklung.

**1.2.6.3** Wir sagen, ein Satz A habe *ausgezeichnete konjunktive Normalform*, wenn er konjunktive Normalform hat und wenn jede SV von A in jedem Konjunktionsglied negiert oder unnegiert auftritt.

**Mt10:** Zu jedem Satz A gibt es einen Satz $A_N^+$ in ausgezeichneter konjunktiver Normalform, so daß gilt $\twoheadrightarrow A \equiv A_N^+$.

Beweis: Zu A läßt sich nach Mt8 ein Satz $A_N$ in konjunktiver Normalform finden. Enthält ein Konjunktionsglied B von $A_N$ die SV p von A nicht, so ersetzen wir B durch $B \vee (p \wedge \neg p)$ und $B \vee (p \wedge \neg p)$ durch $(B \vee p) \wedge (B \vee \neg p)$. Der so aus $A_N$ entstehende Satz hat dann ausgezeichnete konjunktive Normalform, ist also der gesuchte Satz $A_N^+$. Aus den Theoremen $p \leftrightarrow p \vee (q \wedge \neg q)$ und $p \vee (r \wedge s) \leftrightarrow (p \vee r) \wedge (p \vee s)$ erhält man aber mit Mt7, Mt6 und Mt5 $\twoheadrightarrow A_N \equiv A_N^+$, also mit Mt8 auch $\twoheadrightarrow A \equiv A_N^+$.

So erhalten wir aus $A_N$ im obigen Beispiel

$(p \vee r \vee (q \wedge \neg q)) \wedge (q \vee r \vee (p \wedge \neg p)) \wedge (\neg r \vee \neg p \vee \neg q)$ und
$A_N^+$: $(p \vee r \vee q) \wedge (p \vee r \vee \neg q) \wedge (q \vee r \vee p) \wedge (q \vee r \vee \neg p) \wedge (\neg r \vee \neg p \vee \neg q)$.

Die Konjunktionsglieder der ausgezeichneten konjunktiven Normalform, die keine SV zugleich negiert und unnegiert enthalten, beinhalten nun offenbar alle Folgerungen über die Wahrheit und Falschheit der SV, die sich aus dem Satz ziehen lassen. Im Beispiel erhalten wir so aus $A_N^+$ die Folgerungen: Wenn $A_N^+$ wahr ist, so muß $r$ wahr sein, oder $p$ und $q$. Denn wenn $A_N^+$ wahr ist, so müssen alle Konjunktionsglieder wahr sein. Die ersten vier Konjunktionsglieder sind aber nur dann wahr, wenn $r$ wahr ist oder $p$ und $q$, wie man sich leicht klar macht. Aus dem letzten Konjunktionsglied aber folgt, daß eine der drei SV den Wert f annehmen muß. Also ist $A_N^+$ wahr nur unter einer der folgenden vier Bedingungen:

| $p$ | $q$ | $r$ |
|---|---|---|
| w | w | f |
| w | f | w |
| f | w | w |
| f | f | w |

Wenn die konjunktive Normalform die Feststellung erlaubt, ob ein Satz a.l. wahr ist, so erlaubt die disjunktive Normalform die Feststellung ob ein Satz a.l. falsch ist.

**1.2.6.4** Wir sagen, ein Satz A habe *disjunktive Normalform*, wenn gilt: A hat die Gestalt einer Disjunktion $A_1 \vee \ldots \vee A_m$ ($m \geqslant 1$), wobei die Disjunktionsglieder $A_i$ ($i = 1, \ldots, m$) die Gestalt einer Konjunktion $B_{i1} \wedge \ldots \wedge B_{in_i}$ ($n_i \geqslant 1$) haben, deren Glieder SV oder einfache Negationen solcher SV sind. Es gilt nun:

**Mt11:** Jeder Satz A läßt sich so in einen Satz $A_n$ in disjunktiver Normalform umformen, daß gilt: $\rightarrow A \equiv A_n$.

Das Umformungsverfahren verläuft in den ersten drei Schritten wie das Verfahren zur Erzeugung der konjunktiven Normalform. Aus A entstehe so wieder die Formel A‴. Im vierten Schritt werden dann sukzessive alle Teilformeln der Gestalt $A \wedge (B \vee C)$, bzw. $(B \vee C) \wedge A$ durch $A \wedge B \vee A \wedge C$, bzw. $B \wedge A \vee C \wedge A$ ersetzt. Dadurch entsteht die gesuchte Formel $A_n$ in disjunktiver Normalform. Aus den Theoremen $p \wedge (q \vee r) \leftrightarrow p \wedge q \vee p \wedge r$ und $(q \vee r) \wedge p \leftrightarrow q \wedge p \vee r \wedge p$ erhält man mit Mt7, Mt6 und Mt5 dann $\rightarrow A''' \equiv A_n$, mit der Transitivität der Äquivalenz also $\rightarrow A \equiv A_n$.

In dem früheren Beispiel erhalten wir so aus der Formel

$$
\begin{array}{ll}
A''': & (p \wedge q \vee r) \wedge (\neg r \vee \neg p \vee \neg q) \\
 & p \wedge q \wedge (\neg r \vee \neg p \vee \neg q) \vee r \wedge (\neg r \vee \neg p \vee \neg q) \text{ und daraus} \\
A_n: & p \wedge q \wedge \neg r \vee p \wedge q \wedge \neg p \vee p \wedge q \wedge \neg q \vee r \wedge \neg r \vee r \wedge \neg p \vee r \wedge \neg q.
\end{array}
$$

Die Formel $A_n$ kann man dann ev. weiter vereinfachen, indem man in den Disjunktionsgliedern unter Benützung der Kommutativität und Idempotenz der Konjunktion gleiche Glieder zusammenfaßt und ggf. auch von den Idempotenz- und Absorptionsgesetzen der Disjunktion Gebrauch macht. So erhält man z. B. aus dem Satz $(p \wedge \neg q \wedge p) \vee p \vee p$ die Sätze $(p \wedge p \wedge \neg q) \vee p \vee p$, $(p \wedge \neg q) \vee p$ und endlich $p$. Diese Sätze sind untereinander äquivalent.

**Mt12:** Ein Satz in disjunktiver Normalform ist genau dann a.l. falsch, wenn in jedem Disjunktionsglied eine SV zugleich negiert und unnegiert auftritt.

Das einfachste Beispiel eines solchen Satzes ist $p \wedge \neg p$.

Hat ein Satz A die in Mt12 verlangte Gestalt, so ist er a.l. falsch. Denn jede Wahrheitsannahme macht alle Sätze der Gestalt $B \wedge \neg B$ falsch, macht also alle Disjunktionsglieder von A (als Konjunktionen mit einem falschen Glied) falsch, und daher auch A selbst. Ist A hingegen in disjunktiver Normalform, enthält aber ein Disjunktionsglied

B, in dem keine Variable zugleich negiert und unnegiert vorkommt, so macht die Annahme, daß die unnegierten SV von B sämtlich wahr, die negierten SV von B sämtlich falsch sind, B und damit auch A wahr. Dann kann aber A nicht a.l. falsch sein.

**1.2.6.5** Wir sagen, ein Satz A habe *ausgezeichnete disjunktive Normalform*, wenn A disjunktive Normalform hat und wenn jede SV von A in jedem Disjunktionsglied von A negiert oder unnegiert vorkommt.

**Mt13:** Zu jedem Satz A gibt es einen Satz $A_n^+$ in ausgezeichneter disjunktiver Normalform, so daß gilt $\rightarrow A \equiv A_n^+$.

Beweis: Wir entwickeln A nach **Mt11** in disjunktive Normalform $A_n$. Wenn ein Disjunktionsglied B von $A_n$ eine SV p von A nicht enthält, so ersetzen wir B durch $B \wedge (p \vee \neg p)$ und $B \wedge (p \vee \neg p)$ durch $B \wedge p \vee B \wedge \neg p$. Der so aus $A_n$ entstehende Satz hat dann ausgezeichnete disjunktive Normalform, ist also der gesuchte Satz $A_n^+$. Aus den Theoremen $p \leftrightarrow p \wedge (q \vee \neg q)$ und $p \wedge (r \vee s) \leftrightarrow p \wedge r \vee p \wedge s$ erhält man aber mit Mt7, Mt6 und Mt5 $\rightarrow A_n \equiv A_n^+$, also mit **Mt11** auch $\rightarrow A \equiv A_n^+$.

Im Beispiel gewinnen wir so aus $A_n$:

$$p \wedge q \wedge \neg r \vee p \wedge q \wedge \neg p \wedge (r \vee \neg r) \vee p \wedge q \wedge \neg q \wedge (r \vee \neg r) \vee r \wedge \neg r \wedge (p \vee \neg p) \wedge (q \vee \neg q) \vee r \wedge \neg p \wedge (q \vee \neg q) \vee r \wedge \neg q \wedge (p \vee \neg p)$$

und daraus

$$A_n^+ : \; p \wedge q \wedge \neg r \vee p \wedge q \wedge \neg p \wedge r \vee p \wedge q \wedge \neg p \wedge \neg r \vee p \wedge q \wedge \neg q \wedge r \vee p \wedge q \wedge \neg q \wedge \neg r \vee r \wedge \neg r \wedge p \wedge q \vee r \wedge \neg r \wedge p \wedge \neg q \vee r \wedge \neg r \wedge \neg p \wedge q \vee r \wedge \neg r \wedge \neg p \wedge \neg q \vee r \wedge \neg p \wedge q \vee r \wedge \neg p \wedge \neg q \vee r \wedge \neg q \wedge p \vee r \wedge \neg q \wedge \neg p.$$

Die Disjunktionsglieder der ausgezeichneten disjunktiven Normalform die keine SV zugleich negiert und unnegiert enthalten, ergeben nun offenbar die Wahrheitsannahmen, die den Satz A wahr machen. Im Fall unseres Beispiels sind das die Annahmen:

| $p$ | $q$ | $r$ |
|---|---|---|
| w | w | f |
| w | f | w |
| f | w | w |
| f | f | w |

die wir auch schon oben aus der konjunktiven Normalform des gleichen Satzes gewonnen hatten. Dort konnten wir aus der Wahrheit dieses Satzes darauf schließen, daß eine dieser Wahrheitsannahmen gemacht worden ist, jetzt können wir aus jeder dieser Wahrheitsannahmen auf die Wahrheit des Satzes schließen.

*Übungsaufgaben:*

1. Entwickle folgende Sätze in konjunktive und disjunktive Normalform:

a) $p \supset (q \supset p)$
b) $\neg(r \supset q) \supset \neg p \equiv p \wedge r \supset q$
c) $p \wedge q \equiv \neg p \vee \neg q$
d) $\neg(p \wedge q) \equiv (p \equiv \neg q)$.

2. Beweise die Äquivalenz dieser Sätze mit ihren konjunktiven und disjunktiven Normalformen im Detail unter Benützung der Theoreme und Metatheoreme, die in den Abschnitten **1.2.5** und **1.2.6** angegeben wurden, nach den Ausführungen im Beweis für **Mt8** und **Mt11**!

3. Stelle nach **Mt9** und **Mt12** anhand der konjunktiven und disjunktiven Normalformen der Sätze (a) bis (d) fest, ob diese Sätze a.l. wahr oder a.l. falsch oder a.l. indeterminiert sind.

4. Entwickle die Sätze (a) bis (d) in ausgezeichnete konjunktive und ausgezeichnete disjunktive Normalform!

### 1.2.7 Rückblick

Werfen wir einen Blick zurück auf den bisherigen Gang unserer Untersuchungen zur A.L.! Wir haben diese Untersuchungen damit begonnen, daß wir einige Satzstrukturen der Umgangssprache und ihre semantischen Eigenschaften analysiert und daraus die Gültigkeit einiger einfacher Schlüsse abgeleitet haben. Dadurch sind wir zu einer ersten Bekanntschaft mit dem Gegenstand der A.L. gekommen. Die Grenzen und Schwierigkeiten dieses Vorgehens wurden aber schon bald deutlich. Wir können sie in dreifacher Weise aufzeigen:

1. Syntaktische Schwierigkeiten ergeben sich daraus, daß den betrachteten Satzstrukturen umgangssprachlich keine einheitlichen und einfachen Formulierungen zugeordnet sind. Die gleiche Satzstruktur kann auf verschiedene Weisen ausgedrückt werden, für deren Auswahl

neben den syntaktisch-grammatikalischen Regeln auch die nur schwer präzisierbaren Regeln des Stils maßgebend sind. Ferner macht der Ausdruck zusammengesetzter, komplexer Strukturen mangels grammatikalischer Regeln, die den Klammerregeln entsprechen, erhebliche Schwierigkeiten und Mehrdeutigkeiten der Zusammensetzung sind nicht auszuschalten. Endlich fehlen Variablen zur Angabe der allgemeinen oder formalen Gültigkeit von Schlüssen.

2. Semantische Schwierigkeiten ergaben sich dadurch, daß in der Umgangssprache kein Kreis von Satzstrukturen ausgezeichnet ist, die kraft einheitlicher Grundeigenschaften eine einheitliche semantische Behandlung ermöglichen würden. Daher kann man aus der Umgangssprache nur einzelne Satzstrukturen hervorheben und ihren semantischen Gebrauch von Fall zu Fall charakterisieren, ohne daß die Grundlage für allgemeine Resultate, für eine logische Theorie deutlich würde.

3. Syntaktische und semantische Schwierigkeiten bewirken endlich auch Schwierigkeiten für den Aufbau eines Beweisverfahrens für die Auszeichnung gültiger Schlüsse. Denn wo die syntaktischen Strukturen der Sätze nicht einheitlichen Regeln genügen, kann ein solches Beweisverfahren kein syntaktisches Verfahren sein, das sich eben auf solche Einheitlichkeiten der Formulierung stützen müßte. Und wo die Semantik der Satzstrukturen sich nicht in wohlbestimmten und generellen Regeln fassen läßt, kann ein Nachweis dafür, daß ein solches Beweisverfahren genau die logisch wahren Sätze auszeichnet, nicht erbracht werden, der ja immer auf eine präzise semantische Theorie Bezug nehmen muß.

Diese Schwierigkeiten haben es nahegelegt, daß wir aus der Umgangssprache gewisse syntaktische und semantische Charakteristica herausgehoben und diese Eigenschaften dem Aufbau einer Kunstsprache zugrunde gelegt haben. Dadurch ergaben sich folgende Vorteile:

1. Wir haben nun eine Symbolsprache, die nach einfachen und einheitlichen syntaktischen Regeln aufgebaut ist. Diese Symbolsprache ist eine Präzisionssprache: Mit den logischen Symbolen, die wir hier verwenden, verbindet sich im Gegensatz zur Umgangssprache — man denke etwa an die verschiedenen Verwendungen des „oder" — ein eindeutig bestimmter und wohldefinierter Sinn. Unsere Kunstsprache ist ferner eine *lingua characteristica*, da die syntaktische Struktur ihrer Sätze eindeutig und in übersichtlicher Weise ihre Bedeutungsstruktur,

die Abhängigkeit ihrer Wahrheitswerte von den Wahrheitswerten der einfachen Sätze, d. h. der SV ausdrückt.

2. Wir haben durch die Beschränkung der A.L. auf die Untersuchung wahrheitsfunktioneller Satzkompositionen die Grundlage einer einfachen und durchsichtigen semantischen Theorie gewonnen. Dadurch war es möglich, die einheitliche Definitionsweise für a.l. Operatoren durch Wahrheitstabellen einzuführen, einen Überblick über die möglichen Wahrheitsfunktionen zu gewinnen und endlich den Begriff des a.l. gültigen Schlusses zu präzisieren.

3. Die Präzisierung der Syntax und der Semantik der A.L. ermöglichten dann die Angabe eines einfachen Entscheidungsverfahrens für die a.l. Wahrheit von Sätzen und damit auch für die a.l. Gültigkeit von Schlüssen. Dieses Entscheidungsverfahren bildet den Abschluß der A.L., wie wir sie bisher entwickelt haben, da mit ihm das Ziel der A.L., die Auszeichnung der a.l. gültigen Schlüsse erreicht ist.

In diesem Zusammenhang erinnern wir uns an die Behauptung, die Logik sei eine triviale Wissenschaft, der „gesunde Menschenverstand" sei für die Entscheidung logischer Probleme völlig ausreichend. Die A.L. ist die elementarste logische Theorie und im Hinblick auf die Existenz eines Entscheidungsverfahrens für die Lösung ihrer Probleme kann man sie auch als triviale Theorie bezeichnen. Wie weit diese Art von Trivialität aber von der Selbstverständlichkeit für den „gesunden Menschenverstand" entfernt ist, zeigt schon der Versuch, einmal mit dessen Mitteln einen Beweis für die in 1.2.5 angegebenen Schlüsse zu finden. Dort haben wir aber nur die einfachsten a.l. gültigen Schlüsse angegeben. Man kann sich leicht überlegen, daß kompliziertere a.l. Strukturen in der Umgangssprache intuitiv schon sehr bald nicht mehr zu überblicken sind. Denken wir uns etwa einen Satz, der in symbolischer Schreibweise eine Buchseite füllt. In umgangssprachliche Formulierung übersetzt erhalten wir daraus ein sprachliches Ungeheuer, das sich über mehrere Seiten ausdehnen wird. Von diesem Gebilde läßt sich dann nur noch schwer feststellen, ob es überhaupt ein grammatikalisch wohlgebildeter Satz ist. Ein genauer Sinn läßt sich aber damit nicht mehr verbinden, weil die Formulierung in Ermangelung eines umgangssprachlichen Äquivalents zur Klammersetzung mehrdeutig wird, und solche komplexen Satzstrukturen außerdem unser intuitives logisches Vermögen bei weitem überfordern. Festzustellen, ob ein solcher umgangssprachlicher Satz a.l. wahr, falsch oder indeterminiert ist, kann daher dem „gesunden Menschenverstand" nicht gelingen. Das mechanische Entscheidungsverfahren ermöglicht uns diese Feststellung aber auch für beliebig komplizierte symbolsprachliche Sätze, da wir bei seiner Anwendung nicht darauf angewiesen sind, den Sinn dieser Sätze zu erfassen, sondern rein mechanisch vorgehen können.

Wenn man dagegen einwenden wollte, solche komplizierten Sätze kämen praktisch nie vor, so ist das zwar für den alltäglichen Sprachgebrauch richtig, aber die Logik ist auch nicht für den alltäglichen, sondern für den wissenschaftlichen Sprachgebrauch zugeschnitten, in dem tatsächlich so komplizierte Fälle vorkommen.

All diese Vorteile rechtfertigen also die Methode der Formalisierung der a.l. Strukturen. Eine so weitreichende Entwicklung der A.L., wie sie bisher dargestellt worden ist, hat es ohne Formalisierung der Sprachstrukturen nie gegeben und sie ist auch ohne eine solche Formalisierung nicht denkbar.

Nach unseren Ausführungen könnte es nun scheinen, als sei mit der angegebenen Formalisierung eine in allen Teilen befriedigende Durchführung der A.L. erreicht. Tatsächlich haben wir aber über eine Reihe von Schwierigkeiten hinweggesehen, die zunächst vielleicht nur unerheblich scheinen, die aber doch genauere Beachtung verdienen. Dazu einige Beispiele:

1. Im Beweis des Ersetzungstheorems Mt6 haben wir so argumentiert: Den Formeln $A[\![B]\!]$ und $A[\![C]\!]$ ist die gleiche Wahrheitsfunktion zugeordnet, so daß diese Formeln den gleichen Wahrheitswert annehmen, wenn B und C den gleichen Wahrheitswert annehmen. Das ist zwar intuitiv recht einleuchtend, da sich ja $A[\![C]\!]$ auf die gleiche Weise mit Hilfe von SV und a.l. Operatoren aus C aufbaut, wie sich $A[\![B]\!]$ aus B aufbaut, so daß sich für die Einsetzung gleicher Wahrheitswerte für B und C ceteris paribus für $A[\![B]\!]$ und $A[\![C]\!]$ nach der Methode der Wahrheitsentwicklung immer der gleiche Wahrheitswert ergibt. Trotzdem möchte man das aber noch genauer einsehen. Dazu ist es nötig, eine Induktion nach dem Aufbau der Formel $A[\![B]\!]$ aus B vorzunehmen und so etwa zu sagen: Wenn $A[\![B]\!]$ mit B identisch ist, dann gilt die Behauptung des Ersetzungstheorems trivialerweise, denn dann lautet sie $B \equiv C \rightarrow B \equiv C$. Wenn $A[\![B]\!]$ mit $\neg B$ identisch ist, so gilt die Behauptung wegen $B \equiv C \rightarrow \neg B \equiv \neg C$. Wenn $A[\![B]\!]$ mit $B \wedge D$ identisch ist, so gilt die Behauptung wegen $B \equiv C \rightarrow B \wedge D \equiv$

$C \wedge D$, usf. Dazu benötigt man aber exaktere Formregeln für die Sätze der Symbolsprache, als wir sie in 1.2.1 angegeben haben.

2. Wir haben häufig von *dem* Wahrheitswert eines komplexen Satzes für eine gewisse Wahrheitsannahme über seine SV gesprochen. Wir haben aber nicht bewiesen, daß auch jeder Satz der Symbolsprache für jede Wahrheitsannahme über seine SV tatsächlich genau einen Wahrheitswert annimmt. Auch das leuchtet zwar ein, ist aber doch nicht so selbstverständlich, daß es nicht bewiesen werden müßte. Zu einem solchen Beweis benötigt man aber wiederum genaue Formregeln für die Sätze und außerdem eine genaue Definition des Begriffs der Wahrheitsannahme, d. h. eine genaue Festlegung der a.l. Semantik.

3. Das Zeichen „$\rightarrow$" für Schlüsse ist kein a.l. Operator, die Ausdrücke für Schlüsse, die dieses Zeichen enthalten, sind also keine Sätze der Symbolsprache. Welchen sprachlichen Status haben nun diese Ausdrücke? Und welchen sprachlichen Status haben die Buchstaben A, B, C, ..., bzw. die Buchstaben p, q, r, ..., die nicht Formeln bzw. SV der Symbolsprache sind, sondern Variable für solche Formeln bzw. SV?

Diese drei Beispiele zeigen, daß wir uns mit dem bisher Erreichten noch nicht zufrieden geben können, sondern auf eine weitere Präzisierung des a.l. Formalismus dringen müssen. Neue a.l. Theoreme werden dabei freilich nicht zutage kommen, da das Entscheidungsverfahren ja schon alle diese Theoreme auszeichnet. Trotzdem ist eine weitere Präzisierung nicht unfruchtbar, da sie ein noch tieferes und genaueres Verständnis der A.L. erwecken wird.

Den Gehalt der A.L. und die Grundgedanken ihrer Formalisierung hat der Leser schon vor Augen, der den bisherigen Ausführungen gefolgt ist. So wird das Verständnis der folgenden Ausführungen leicht fallen, in denen wir nun auf einem höheren Präzisionsniveau die Formalisierung der A.L. noch einmal durchsprechen wollen.

## 1.3 Eine Axiomatisierung der Aussagenlogik

Wir wollen nun eine strenge Formalisierung der A.L. in Gestalt des Systems $\mathfrak{A}1$ angeben. Dieses System werden wir in drei Schritten entwickeln: der Abschnitt 1.3.1 stellt die Sprache $\mathfrak{A}$ dar, die wir dem System zugrunde legen, der Abschnitt 1.3.2 die semantische Deutung dieser Sprache und im Abschnitt 1.3.3 wird der Beweisbegriff für das System $\mathfrak{A}$ definiert.

### 1.3.1 Die Syntax der Sprache $\mathfrak{A}$

#### 1.3.1.1 *Vorbereitende Unterscheidungen*

*Objekt- und Metasprache.* Wie die bisher verwendete Symbolsprache bauen wir die Sprache $\mathfrak{A}$ als Kunstsprache auf. Wir bezeichnen sie auch als *Objektsprache* im Gegensatz zur Umgangssprache. Wenn wir über eine Objektsprache reden, über ihre Symbole, ihre Sätze, usf., so bedienen wir uns dabei einer von dieser Objektsprache verschiedenen Sprache, die wir auch als *Metasprache* bezeichnen. Die Metasprache, in der wir über die Objektsprache $\mathfrak{A}$ sprechen, ist die deutsche Umgangssprache. Allgemein ließe sich dazu aber auch jede beliebige schon interpretierte Sprache verwenden, deren Ausdrucksmittel ausreichen zur Bezeichnung der objektsprachlichen Symbole und Symbolverbindungen. Insbesondere kann man sich vorstellen, daß man als eine solche Metasprache wiederum eine (von der Objektsprache natürlich verschiedene) Symbolsprache benützt. *In* dieser Metasprache reden wir über die Objektsprache, *über* die Metasprache reden wir in einer anderen Sprache, die dann als Metasprache zu dieser Metasprache, oder als *Metametasprache* zur ursprünglichen Objektsprache zu bezeichnen ist. Diese Betrachtung kann man fortsetzen und kommt so zu immer höheren Metasprachen. Wichtig ist aber im folgenden vor allem die Unterscheidung von Objekt- und Metasprache, die Unterscheidung der Sprache, über die man spricht, und der Sprache, in der man spricht. Als Metasprache dient uns immer die deutsche Umgangssprache, erweitert um einige Symbole, wie z. B. die Zeichen „$:=$" und „$\rightarrow$", die wir früher schon verwendet haben.

Daß wir diese Symbole oben als metasprachliche Zeichen verwendet haben, geht daraus hervor, daß z. B. „„$p \supset q$" $:=$ „$\neg p \vee q$"" eine Abkürzung ist für „Der Satz „$p \supset q$" soll dasselbe bedeuten wie der Satz „$\neg p \vee q$"", und daß „$p \rightarrow p \vee q$" eine Abkürzung ist für „Aus dem Satz „$p$" folgt der Satz „$p \vee q$"". Hier wird mit Hilfe der Zeichen „$:=$" und „$\rightarrow$" über Sätze der Objektsprache gesprochen. Wir können also jetzt die Frage nach dem sprachlichen Status des Zeichens „$\rightarrow$", die wir in 1.2.7 gestellt hatten, dahingehend beantworten, daß dieses Zeichen der Metasprache zugehört.

*Die Konkatenationsfunktion*

Wir haben früher die Variablen „A", „B", „C",... für Formeln der Objektsprache verwendet, um allgemeine Aussagen über die Struktur von objektsprachlichen Sätzen machen zu können. So haben wir z. B. gesagt „Alle Konjunktionen haben die Gestalt $A \wedge B$" oder „Alle Schlüsse der Gestalt $A \rightarrow A$ sind a.l. gültig". Auch diese Variablen gehören der Metasprache an. Würde man statt dessen objektsprachliche SV verwenden, so erhielte man z. B. die Aussagen „Alle Konjunktionen haben die Gestalt $p \wedge q$" oder „Alle Schlüsse der Gestalt $p \rightarrow p$ sind a.l. gültig". Die erste Aussage ist aber falsch, da der Satz $p \wedge q$ nur eine ganz bestimmte Konjunktion ist, von der z. B. die Konjunktion $q \wedge p$ schon verschieden ist. Und auch die zweite Aussage verfehlt den intendierten Sinn, denn $p \rightarrow p$ ist ein ganz bestimmter Schluß und kein Schlußschema.

Wie sind nun solche Satzschemata zu verstehen? Wir haben das oben anhand eines Beispiels erklärt, indem wir sagten: $A \wedge B$ ist der Ausdruck, der entsteht, wenn man den Ausdruck A anschreibt, dahinter das Zeichen „$\wedge$" gefolgt von B. Um die Funktion solcher Satzschemata allgemein und präzise festzulegen, führt man folgende Funktion ein: Es sei $K(A, B)$ eine zweistellige Funktion, welche die Ausdrücke A und B der Objektsprache abbildet auf den Ausdruck der Objektsprache, der entsteht, wenn man diese Ausdrücke in der angegebenen Reihenfolge hintereinander anschreibt. Es ist also $K(„p", „q") = „pq"$, $K(„p \wedge", „q \supset r") = „p \wedge q \supset r"$, usw.

Die Funktion $K(A, B)$ bezeichnet man als *Konkatenations-* oder *Verkettungsfunktion.*

Wir können nun statt „$K(A_1, K(A_2, A_3))$" auch „$K(A_1, A_2, A_3)$" schreiben, statt „$K(A_1, A_2, K(A_3, A_4))$" auch „$K(A_1, A_2, A_3, A_4)$", usf. Ferner lassen wir die Anführungszeichen um objektsprachliche Ausdrücke fort und schreiben so z. B. „$K(p, q)$" statt „$K(„p", „q")$", da im Kontext der Konkatenationsfunktion ohnehin nur von den Ausdrücken und nicht von ihren Bedeutungen die Rede ist.

Die Konkatenation ist nun offenbar assoziativ, d. h. es gilt: $K(A_1, K(A_2, A_3)) = K(K(A_1, A_2), A_3)$. Daher ist es unnötig, die Argumente der Funktion durch Kommata zu trennen, und man kann z. B. statt „$K(A \wedge, B)$" auch „$K(A \wedge B)$" schreiben. Denn es ist $K(A \wedge, B) = K(A, \wedge B)$.

Endlich können wir die Verabredung treffen, daß Ausdrücke, die zugleich meta- und objektsprachliche Ausdrücke enthalten, immer als

Argumente der Konkatenationsfunktion aufzufassen sind. Dann können wir „A $\wedge$ B" statt „$K$(A $\wedge$ B)" schreiben und sind wieder bei unserer alten Schreibweise für Satzschemata angelangt, für die wir jetzt aber eine präzise Deutung gewonnen haben.

Satzschemata bezeichnet man auch oft als *Quasianführungen*. Ihre Verwendung wurde zuerst von W. V. QUINE präzisiert, der für „$K$(A)" die Schreibweise „$\ulcorner$A$\urcorner$" eingeführt hat[1].

*Zeichentyp und Zeichenvorkommnis*

Wenn man von Zeichen oder Ausdrücken spricht, so muß man bei genauerem Zusehen unterscheiden zwischen dem Zeichen als einem materiellen Objekt, wie es etwa ein Aufdruck von Druckerschwärze auf Papier ist, und zwischen dem Zeichen als einer Gestalt, die verschiedene solche materielle Zeichen gemeinsam haben können. Das materielle Zeichen nennt man *Zeichenvorkommnis* oder *Inschrift*, die Zeichengestalt *Zeichentyp*. Demnach kann man also sagen, daß der Satz „$p \wedge q \supset q \wedge p \vee p$" drei Vorkommnisse des Zeichentyps „$p$" und zwei Vorkommnisse des Zeichentyps „$q$" enthält.

Von dieser Unterscheidung haben wir z. B. Gebrauch gemacht, als wir bei der Formulierung des Einsetzungstheorems Mt1 davon sprachen, daß alle Vorkommnisse eines Zeichentyps durch Vorkommnisse eines anderen Zeichentyps ersetzt werden. Terminologisch hält man diese Unterscheidung aber nicht immer streng aufrecht, und das ist in der Tat auch überflüssig, wenn der Kontext jeweils festlegt, ob von Zeichenvorkommnissen oder von Zeichentypen die Rede ist. Wir werden im folgenden statt „Zeichentyp" auch immer „Zeichen" sagen.

**1.3.1.2** *Formregeln.* Nach diesen vorbereitenden Bemerkungen legen wir nun die Syntax der Sprache $\mathfrak{A}$ fest.

Das *Alphabet* der Sprache $\mathfrak{A}$ enthält:

1. Die Satzvariablen „$p$", „$q$", „$r$", „$s$", „$t$",

2. die logischen Symbole „$\neg$", „$\wedge$", „$\vee$", „$\supset$" und „$\equiv$".

3. Als Hilfszeichen verwenden wir die Klammerzeichen „(", „)" und Ziffern.

---

[1] Vgl. [58], S. 33ff.

Um einen hinreichend großen Vorrat von SV zu haben, legen wir fest, daß auch der Ausdruck $p_z$ eine SV von $\mathfrak{A}$ ist, wenn p eine SV von $\mathfrak{A}$ und z eine Folge von Ziffern ist.

Jedes Grundzeichen des Alphabets von $\mathfrak{A}$ ist nun ein Ausdruck von $\mathfrak{A}$. Und wenn A und B Ausdrücke von $\mathfrak{A}$ sind, so ist auch $K$(A, B) ein Ausdruck von $\mathfrak{A}$.

Unter den Ausdrücken von $\mathfrak{A}$ zeichnen wir nun die *Sätze* oder Formeln von $\mathfrak{A}$ durch folgende *Formregeln* aus:

a) Jede SV von $\mathfrak{A}$ ist ein (Atom-)Satz von $\mathfrak{A}$.

b) Wenn A und B Sätze von $\mathfrak{A}$ sind, so sind auch die Ausdrücke $\neg$(A), (A) $\wedge$ (B), (A) $\vee$ (B), (A) $\supset$ (B) und (A) $\equiv$ (B) Sätze von $\mathfrak{A}$.

c) Sätze von $\mathfrak{A}$ sind nur die nach (a) und (b) bestimmten Ausdrücke.

Durch diese Regeln wird der Formelbegriff induktiv definiert: Bezeichnet man die Zahl der Vorkommnisse von logischen Operatoren in einem Ausdruck als *Grad* dieses Ausdrucks, so legt die Bestimmung (a) fest, welche Ausdrücke vom Grad *0* Formeln sind, und die Regel (b) bestimmt, ob ein Ausdruck vom Grad $n+1$ eine Formel ist, wenn schon bekannt ist, welche Ausdrücke vom Grad $\leqslant n$ Formeln sind.

Gemäß unseren früheren Festsetzungen über die Einsparung von Klammern[1] wollen wir im folgenden Ausdrücke mit reduzierten Klammergruppen als Abkürzungen für die Ausdrücke nach (a) und (b) auffassen.

*Übungsaufgaben:*

1. Man beweise, daß jeder Satz von $\mathfrak{A}$ ein Ausdruck von $\mathfrak{A}$ ist!

2. Man gebe ein Entscheidungsverfahren für den Begriff ‚Satz von $\mathfrak{A}$' an, also eine Methode, nach der sich für jeden Ausdruck von $\mathfrak{A}$ feststellen läßt, ob er ein Satz von $\mathfrak{A}$ ist oder nicht!

### 1.3.2 Die Semantik der Sprache $\mathfrak{A}$

Der Semantik der Sprache $\mathfrak{A}$ wollen wir den Begriff der Bewertung zugrunde legen:

---

[1] Vgl. S. 23., 33, 57.

**1.3.2.1** Als *Bewertung* bezeichnen wir eine einstellige Funktion $\mathfrak{W}$, die auf der Menge der Sätze von $\mathfrak{A}$ definiert ist, die jedem ihrer Argumente genau einen der beiden Wahrheitswerte $\mathfrak{w}$ oder $\mathfrak{f}$ zuordnet, und für die gilt:

a) $\mathfrak{W}(\neg A) = \mathfrak{w}$ genau dann, wenn $\mathfrak{W}(A) = \mathfrak{f}$.
b) $\mathfrak{W}(A \wedge B) = \mathfrak{w}$ genau dann, wenn $\mathfrak{W}(A) = \mathfrak{w}$ und $\mathfrak{W}(B) = \mathfrak{w}$.
c) $\mathfrak{W}(A \vee B) = \mathfrak{w}$ genau dann, wenn $\mathfrak{W}(A) = \mathfrak{w}$ oder $\mathfrak{W}(B) = \mathfrak{w}$.
d) $\mathfrak{W}(A \supset B) = \mathfrak{w}$ genau dann, wenn $\mathfrak{W}(A) = \mathfrak{f}$ oder $\mathfrak{W}(B) = \mathfrak{w}$.
e) $\mathfrak{W}(A \equiv B) = \mathfrak{w}$ genau dann, wenn $\mathfrak{W}(A) = \mathfrak{W}(B)$.

Wenn gilt $\mathfrak{W}(A) = \mathfrak{w}$, so sagen wir, die Bewertung $\mathfrak{W}$ *erfülle* den Satz A.

Es gilt nun der Satz:

**1.3.2.2** Wenn eine Bewertung definiert ist für alle Atomsätze von $\mathfrak{A}$, so ist sie für alle Sätze von $\mathfrak{A}$ überhaupt definiert.

Wir führen den Beweis für diesen Satz durch Induktion nach dem Grad der Sätze.

Die Induktionsbasis ist schon in der Voraussetzung des Satzes enthalten und bedarf daher keines eigenen Beweises. Denn die Sätze vom Grad *0* sind eben die Atomsätze, von denen im Satz verlangt wird, daß für sie die Bewertung $\mathfrak{W}$ definiert ist, d. h. daß $\mathfrak{W}$ ihnen genau einen Wahrheitswert zuordnet[1]. Es bleibt der Induktionsschritt:

Wenn $\mathfrak{W}$ allen Sätzen vom Grad $\leqslant n$ genau einen Wahrheitswert zuordnet, so ordnet $\mathfrak{W}$ auch allen Sätzen vom Grad $n + 1$ genau einen Wahrheitswert zu. (Hier handelt es sich also um eine Wertverlaufsinduktion.)

Nun hat jeder Satz vom Grad $n + 1$ eine der Gestalten $\neg A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \supset B$, oder $A \equiv B$. Die Sätze A und B sind dann offenbar vom Grad $\leqslant n$. Ihnen ordnet $\mathfrak{W}$ also nach Induktionsvoraussetzung genau einen Wahrheitswert zu. Wenn man aber dann die Bedingungen (a) bis (e) von **1.3.2.1** ansieht, so erkennt man, daß sie auch den angegebenen Sätzen vom Grad $n + 1$ für alle möglichen Verteilungen von

---

[1] Für den Aufbau eines Induktionsbeweises vgl. 1.2.3. Es spielt offenbar keine Rolle, ob man einem Induktionsbeweis die Zahlenreihe *1, 2,* ... oder die Zahlenreihe *0, 1, 2,* ... zugrunde legt. Im letzteren Fall ist die Induktionsbasis gegenüber 1.2.3 wie im Beweis für 1.3.2.2 abzuändern.

Wahrheitswerten auf die Sätze A und B genau einen Wahrheitswert zuordnen. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Als Wahrheitsannahme für gewisse SV haben wir früher eine Verteilung von Wahrheitswerten auf diese SV bezeichnet. Eine Bewertung ist demnach eine Wahrheitsannahme für alle SV von $\mathfrak{A}$. Da die Bedingungen 1.3.2.1 die Festsetzungen der Wahrheitstabellen für die Operatoren $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\supset$ und $\equiv$ wiedergeben, so kann man wie den Satz 1.3.2.2 auch die Behauptung beweisen, daß jede Wahrheitsannahme einem Satz A genau einen Wert zuordnet, wenn sie für alle SV von A erklärt ist — ein Resultat, das wir schon früher benutzt, aber nicht bewiesen hatten (vgl. 1.2.7).

In Entsprechung zu 1.2.2.3 und 1.2.2.4 können wir nun sagen:

**1.3.2.3** Wir nennen einen Satz von $\mathfrak{A}$ *a.l. wahr*, wenn jede a.l. Bewertung ihn erfüllt, *a.l. falsch*, wenn keine a.l. Bewertung ihn erfüllt. Sätze von $\mathfrak{A}$, die weder a.l. wahr noch a.l. falsch sind, nennen wir *a.l. indeterminiert*.

**1.3.2.4** Wir nennen einen Schluß $A_1, \ldots, A_m \rightarrow B$ *a.l. gültig*, wenn jede a.l. Bewertung, die alle Sätze $A_1, \ldots, A_m$ erfüllt, auch B erfüllt.

Danach erhalten wir wieder: Ein Schluß $\rightarrow B$ ist a.l. gültig, wenn alle Bewertungen B erfüllen, d. h. wenn B a.l. wahr ist, und ein Schluß $A_1, \ldots, A_m \rightarrow$ ist a.l. gültig, wenn jede Bewertung mindestens eine der Prämissen nicht erfüllt.

Es gilt dann der Satz:

**1.3.2.5** Ein Schluß der Gestalt $A_1, \ldots, A_m \rightarrow B$ ist a.l. gültig genau dann, wenn der Satz $A_1 \wedge \ldots \wedge A_m \supset B$ a.l. wahr ist. Und ein Schluß der Form $A_1, \ldots, A_m \rightarrow$ ist a.l. gültig genau dann, wenn der Satz $A_1 \wedge \ldots \wedge A_m$ a.l. falsch ist.

Das ergibt sich direkt aus den Definitionen 1.3.2.3 und 1.3.2.4 sowie den Bedingungen (b) und (d) von 1.3.2.1.

Mit Hilfe der semantischen Regeln 1.3.2.1 können wir nun auch einen detaillierten Beweis für das Ersetzungstheorem.

**1.3.2.6** $A \equiv B \rightarrow C[\![A]\!] \equiv C[\![B]\!]$

angeben[1]. Es genügt dabei, den Fall zu betrachten, daß $C[\![B]\!]$ aus

[1] Vgl. Mt6 aus 1.2.6 und die Bemerkung zum Beweis für Mt6 in 1.2.7.

C⟦A⟧ durch Ersetzung nur eines Vorkommens von A durch B entsteht, da man durch mehrfache Anwendung dieses Ergebnisses den allgemeinen Fall 1.3.2.6 sofort erhält. Für diesen Spezialfall beweisen wir die Behauptung durch Induktion nach der Zahl $n$, dem Grad von C⟦A⟧ minus dem Grad von A. Für den Fall $n = 0$ ist die Behauptung trivial, da dann C⟦A⟧ mit A zusammenfällt. Sei die Behauptung für alle $n \leqslant r$ bereits bewiesen und sei nun $n = r + 1$, dann läßt sich C⟦A⟧ darstellen in der Form C⟦A′⟧, wo C $\neq$ A′ ist[1] und A′ = A′⟦A⟧ das fragliche Vorkommnis von A enthält bzw. mit ihm identisch ist. Es ist dann C⟦B⟧ = C⟦A′⟦B⟧⟧ und nach Induktionsvoraussetzung gilt bei der Annahme A $\equiv$ B auch A′⟦A⟧ $\equiv$ A′⟦B⟧, da der Grad von A′ minus dem Grad von A $\leqslant r$ ist. C⟦A′⟧ hat nun eine der folgenden Gestalten: $\neg$A′, A′ $\wedge$ D, D $\wedge$ A′, A′ $\vee$ D, D $\vee$ A′, A′ $\supset$ D, D $\supset$ A′, A′ $\equiv$ D, D $\equiv$ A′. Wir greifen nur einen Fall heraus: C⟦A′⟧ = A′ $\supset$ D. Nach 1.3.2.1—d gilt dann wegen der Induktionsvoraussetzung A′⟦A⟧ $\equiv$ A′⟦B⟧ auch A′⟦A⟧ $\supset$ D $\equiv$ A′⟦B⟧ $\supset$ D. Denn wenn A′⟦A⟧ $\equiv$ A′⟦B⟧ wahr ist, so haben A′⟦A⟧ und A′⟦B⟧ nach 1.3.2.1—e den gleichen Wahrheitswert und dann haben auch A′⟦A⟧ $\supset$ D und A′⟦B⟧ $\supset$ D den gleichen Wahrheitswert, der sich nach 1.3.2.1—d bestimmt, und dann gilt wegen 1.3.2.1—e auch A′⟦A⟧ $\supset$ D $\equiv$ A′⟦B⟧ $\supset$ D. Die übrigen Fälle erledigen sich ebenso einfach.

Wenn man zeigen will, daß aufgrund der Regeln 1.3.2.1 z. B. A $\vee$ B durch $\neg(\neg$A $\wedge$ $\neg$B) definiert werden kann, so muß gezeigt werden: A $\vee$ B läßt sich in allen Kontexten durch $\neg(\neg$A $\wedge$ $\neg$B) ersetzen, ohne daß sich der Wahrheitswert der Kontexte ändert. Nach dem Ersetzungstheorem genügt es dafür, zu zeigen, daß gilt A $\vee$ B $\equiv$ $\neg(\neg$A $\wedge$ $\neg$B).

Da Negation und Implikation eine komplette Menge von Wahrheitsfunktionen bilden, genügt es auch, die Operatoren $\neg$ und $\supset$ als einzige logische Grundsymbole von $\mathfrak{A}$ anzunehmen und die übrigen Operatoren durch Definitionen auf Negation und Implikation zurückzuführen. Aus diesen Definitionen kann man dann mit den Bedingungen 1.3.2.1—a, d die Bedingungen 1.3.2.1—b, c, e beweisen.

*Übungsaufgaben:*

1. Beweise durch Induktion nach dem Formelgrad den Satz: Wenn zwei Bewertungen den SV einer Menge $M$ die gleichen Wahrheitswerte

[1] Das Zeichen $\neq$ bedeutet soviel wie „ungleich“. „C $\neq$ A′“ besagt also, daß die Ausdrücke C und A′ verschieden sind.

zuordnen, so ordnen sie allen Sätzen die gleichen Wahrheitswerte zu, die nur SV aus $M$ enthalten!

2. Beweise die Gültigkeit der Bedingungen 1.3.2.1—b, c, e aus den Bedingungen 1.3.2.1—a, d und den Definitionen d2, d7 und $A \vee B := \neg A \supset B$!

3. Leite mit diesen Definitionen die Formregeln für die Ausdrücke $A \wedge B$, $A \vee B$ und $A \equiv B$ aus den Formregeln für $\neg A$ und $A \supset B$ her!

### 1.3.3 Der Kalkül 𝔄1

In diesem Abschnitt soll nun ein Kalkül angegeben werden, in dem die a.l. wahren Sätze von 𝔄 bewiesen werden können. Diesen Kalkül wollen wir 𝔄1 nennen.

Als *Kalkül* bezeichnet man allgemein ein rein syntaktisches Verfahren zur Auszeichnung gewisser Ausdrücke, das durch ein System von Regeln definiert ist, durch deren Anwendung sich die fraglichen Ausdrücke erzeugen lassen. Einen solchen Kalkül bilden z. B. die Formregeln für 𝔄, durch die gewisse Ausdrücke von 𝔄 als Formeln ausgezeichnet werden.

Obwohl es in der A.L. nach unseren früheren Festlegungen primär um die Auszeichnung der a.l. gültigen Schlüsse geht, genügt es, einen Kalkül für die Auszeichnung der a.l. wahren Sätze anzugeben, denn aus diesen Sätzen kann man mit Hilfe des Theorems 1.3.2.5 auch die a.l. gültigen Schlüsse gewinnen.

Angesichts der Vorzüge des im Abschnitt 1.2.4 dargestellten Entscheidungsverfahrens läge es nun nahe, den Kalkül als Präzisierung dieses Entscheidungsverfahrens aufzubauen. Da eine solche Präzisierung aber keine neuen Gesichtspunkte ergäbe, wollen wir hier einen anderen Weg einschlagen und den Kalkül 𝔄1 als *axiomatischen Kalkül* aufbauen. Der Typ des axiomatischen Kalküls veranschaulicht auch in exemplarischer Weise die Anforderungen, die an ein strenges und rein syntaktisches Beweisverfahren gestellt werden müssen, und ihm kommt zugleich eine so große wissenschaftstheoretische Bedeutung zu, daß wir ihn hier ausführlich besprechen wollen.

Durch die Angabe eines axiomatischen Systems soll eine Menge von Sätzen ausgezeichnet werden. Die Menge dieser Sätze, der Theoreme des Systems wird induktiv definiert

1. durch die Angabe von bestimmten Sätzen, die als *Axiome* ausgezeichnet werden, und

2. durch die Angabe von rein syntaktisch formulierten *Deduktions-* oder *Ableitungsregeln*, die festlegen, wie aus bereits gewonnenen Theoremen neue Theoreme erzeugt werden können.

**1.3.3.1** Als *Axiome* von $\mathfrak{A}1$ wählen wir alle Sätze der Form:

**A1:** $A \supset (B \supset A)$
**A2:** $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
**A3:** $(\neg A \supset \neg B) \supset (B \supset A)$[1].

Als *Deduktionsregel* von $\mathfrak{A}1$ wählen wir die Regel:

**R1:** Aus den Sätzen A und $A \supset B$ kann man in $\mathfrak{A}1$ den Satz B gewinnen.

Diese Regel bezeichnet man auch als *Abtrennungsregel* oder Regel des *modus ponens*. Die Sätze A und $A \supset B$ sind die Prämissen, B ist die Konklusion dieser Regel.

Sind die Axiome und Deduktionsregeln eines Kalküls $\mathfrak{K}$ gegeben, so definiert man den Begriff, ‚beweisbar in $\mathfrak{K}$' allgemein durch folgende Bedingungen:

**1.3.3.2** a) Alle Axiome von $\mathfrak{K}$ sind in $\mathfrak{K}$ beweisbar.

b) Wenn die Prämissen einer Deduktionsregel von $\mathfrak{K}$ in $\mathfrak{K}$ beweisbar sind, so ist auch deren Konklusion in $\mathfrak{K}$ beweisbar.

c) In $\mathfrak{K}$ sind nur die durch die Bedingungen (a) und (b) erfaßten Sätze beweisbar.

Ein Beweis für einen Satz A in $\mathfrak{K}$ läßt sich demnach z. B. als endliche Folge von Sätzen anschreiben, so daß A das letzte Glied dieser Folge ist und für alle Glieder der Folge gilt: sie sind Axiome von $\mathfrak{K}$ oder sie entstehen aus vorangehenden Gliedern der Folge durch einmalige Anwendung einer der Deduktionsregeln von $\mathfrak{K}$.

Ein Beweis für den Satz $p \supset p$ in $\mathfrak{A}1$ läßt sich so wie folgt anschreiben:

1) $p \supset ((q \supset p) \supset p)$ A1
2) $(p \supset ((q \supset p) \supset p)) \supset ((p \supset (q \supset p)) \supset (p \supset p))$ A2

[1] Dieses Axiomensystem wurde von Łukasiewicz in [51] als Vereinfachung des Systems von Frege aus [14] angegeben.

| | | |
|---|---|---|
| 3) | $(p \supset (q \supset p)) \supset (p \supset p)$ | R1(1, 2) |
| 4) | $p \supset (q \supset p)$ | A1 |
| 5) | $p \supset p$ | R1(3, 4). |

Dabei numerieren die Ziffern links die Sätze der Folge und die Zusätze rechts erläutern den Beweisgang. So besagt der Zusatz „A1" in der ersten Zeile, daß der Satz dieser Zeile ein Axiom nach A1 ist, und der Zusatz „R1(1, 2)" in der dritten Zeile besagt, daß der Satz in dieser Zeile durch eine Anwendung der Regel R1 auf die Sätze in der ersten und zweiten Zeile gewonnen wurde.

Es empfiehlt sich nun zum Zweck der Abkürzung der Sätze folgende Definitionen zu $\mathfrak{A}1$ hinzuzunehmen:

**D1:** $A \vee B := \neg A \supset B$
**D2:** $A \wedge B := \neg(\neg A \vee \neg B)$
**D3:** $A \equiv B := (A \supset B) \wedge (B \supset A)$[1].

Diese Definitionen sind hier als rein syntaktische Festsetzungen zu verstehen, nach denen das Definiendum eine Abkürzung für das Definiens ist. Demnach gilt:

Wenn ein Satz $C[\![A]\!]$ in $\mathfrak{A}1$ beweisbar ist, der das Definiens, bzw. das Definiendum A einer dieser Definitionen enthält, so ist auch der Satz $C[\![B]\!]$ in $\mathfrak{A}1$ beweisbar, wo B das zu A gehörige Definiendum, bzw. Definiens ist[2].

Aus dem angegebenen Beweis für $p \supset p$ erhalten wir also einen Beweis für $\neg p \vee p$, indem wir folgende Zeile hinzufügen:

6) $\neg p \vee p$ D1.

Wir fassen also im folgenden die Operatoren $\neg$ und $\supset$ als Grundoperatoren von $\mathfrak{A}$ auf und denken uns die Operatoren $\wedge$, $\vee$ und $\equiv$ immer durch die Definitionen D1 bis D3 eingeführt.

Es erweist sich als zweckmäßig, neben dem Beweisbegriff auch den allgemeineren Ableitungsbegriff einzuführen:

---

[1] Vgl. die Definitionen d2 und d7 aus **1.2.3.** Man beweist unter Benützung der Wahrheitsbedingungen **1.3.2.1** leicht die Äquivalenz $A \vee B \equiv \neg A \supset B$, so daß wegen **1.3.2.6** auch die Definition D1 semantisch zulässig ist.

[2] Für die Symbolik $C[\![A]\!]$ vgl. **1.2.6.**

**1.3.3.3** Wir sagen, eine Formel B sei in einem Kalkül $\mathfrak{K}$ aus den Formeln $A_1, \ldots, A_m$ ($m \geqslant 0$) *ableitbar* (oder herleitbar), — symbolisch $A_1, \ldots, A_m \vdash_{\mathfrak{K}} B$ — wenn es eine Folge von Sätzen gibt, deren letztes Glied B ist und für deren sämtliche Glieder C gilt: C ist ein Axiom von $\mathfrak{K}$, oder C ist eine der *Annahmeformeln* (kurz AF) oder Prämissen $A_1, \ldots, A_m$, oder C geht durch einmalige Anwendung einer der Deduktionsregeln von $\mathfrak{K}$ auf vorhergehende Glieder der Folge hervor.

Ein Spezialfall der Ableitbarkeit ist die Beweisbarkeit: A ist in $\mathfrak{K}$ beweisbar, wenn A in $\mathfrak{K}$ aus der leeren Prämissenmenge, d. h. ohne Annahmeformeln ableitbar ist — symbolisch $\vdash_{\mathfrak{K}} A$.

Ein einfaches Beispiel für eine Ableitung in $\mathfrak{A}1$ ist folgendes:

| | | |
|---|---|---|
| 1) | $\neg p$ | AF |
| 2) | $\neg p \supset (\neg q \supset \neg p)$ | A1 |
| 3) | $\neg q \supset \neg p$ | R1(1, 2) |
| 4) | $(\neg q \supset \neg p) \supset (p \supset q)$ | A3 |
| 5) | $p \supset q$ | R1(3, 4). |

Es gilt also $\neg p \vdash_{\mathfrak{A}1} p \supset q$.

Wo aus dem Kontext ersichtlich ist, um welchen Kalkül es sich handelt, lassen wir auch das Subskript bei dem Ableitbarkeitssymbol $\vdash$ fort.

Der Definition des Ableitungsbegriffes für $\mathfrak{A}1$ wollen wir noch zwei Bemerkungen anfügen:

1. Unter **1.3.3.1** haben wir nicht Sätze von $\mathfrak{A}$ als Axiome, sondern Satzschemata aufgeführt. Aus diesen Axiomenschemata erhält man unendlich viele Axiome, indem man für die metasprachlichen Variablen „A", „B", „C" Namen für Sätze von $\mathfrak{A}$ einsetzt. Statt solcher Axiomenschemata hätte man natürlich auch Axiome, eine endliche Zahl bestimmter Sätze von $\mathfrak{A}$ angeben können, etwa die Sätze:

**A1*:** $p \supset (q \supset p)$
**A2*:** $(p \supset (q \supset r)) \supset ((p \supset q) \supset (p \supset r))$
**A3*:** $(\neg p \supset \neg q) \supset (q \supset p)$.

Dann sind die Sätze $q \supset (p \supset q)$ und $(\neg r \supset \neg(q \supset p)) \supset ((q \supset p) \supset r)$, die nach A1 und A3 Axiome waren, offenbar keine Axiome mehr. Um den gleichen Effekt zu erreichen, wie mit dem System $\mathfrak{A}1$, müßte man dann neben R1 eine zweite Deduktionsregel verwenden:

**SR1:** Wenn ein Satz A[p] beweisbar ist und p ist eine SV, so ist auch der Satz A[p/B] beweisbar für beliebige Formeln B von $\mathfrak{A}$[1]. Den so entstehenden Kalkül wollen wir $\mathfrak{A}1^*$ nennen. In $\mathfrak{A}1^*$ nimmt unser Beweis für den Satz $p \supset p$ dann folgende Gestalt an:

| | | |
|---|---|---|
| 1) | $p \supset (q \supset p)$ | A1* |
| 2) | $p \supset ((q \supset p) \supset p)$ | SR1$(q/q \supset p)$ |
| 3) | $(p \supset (q \supset r)) \supset ((p \supset q) \supset (p \supset r))$ | A2* |
| 4) | $(p \supset ((q \supset p) \supset r)) \supset ((p \supset (q \supset p)) \supset (p \supset r))$ | SR1$(q/q \supset p)$ |
| 5) | $(p \supset ((q \supset p) \supset p)) \supset ((p \supset (q \supset p)) \supset (p \supset p))$ | SR1$(r/p)$ |
| 6) | $(p \supset (q \supset p)) \supset (p \supset p)$ | R1(2, 5) |
| 7) | $p \supset p$ | R1(1, 6). |

Dabei besagt der Zusatz „SR1$(q/q \supset p)$" in der zweiten Zeile, daß der Satz in dieser Zeile aus dem der ersten Zeile durch Einsetzung von $q \supset p$ für $q$ entsteht.

Die Verwendung von Axiomenschemata macht die Substitutionsregel SR1 überflüssig und vereinfacht so das Beweisverfahren. Man kann sich nun leicht überlegen, daß tatsächlich gilt: $\vdash_{\mathfrak{A}1}$ A genau dann, wenn $\vdash_{\mathfrak{A}1^*}$ A. Denn wenn $\mathfrak{H}$ ein Beweis für A in $\mathfrak{A}1$ ist, so lassen sich die Axiome in $\mathfrak{H}$ mit SR1 aus den Axiomen von $\mathfrak{A}1^*$ gewinnen. Stellt man also den Axiomen in $\mathfrak{H}$ ihren Beweis in $\mathfrak{A}1^*$ voran, so geht $\mathfrak{H}$ in einen Beweis für A in $\mathfrak{A}1^*$ über. Ist umgekehrt $\mathfrak{H}'$ ein Beweis für A in $\mathfrak{A}1^*$, so läßt sich $\mathfrak{H}'$ so in einen Beweis $\mathfrak{H}''$ für A umformen, daß die Regel SR1 nur auf Axiome angewendet wird, und auf Sätze, die aus Axiomen durch Anwendungen von SR1 hervorgehen. M. a. W.: die Anwendungen von SR1 lassen sich vor die Anwendungen von R1 ziehen. Denn wir können einen Beweis der Gestalt

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ⋮ | | | ⋮ | |
| A[p] | | umformen in | A[p] | |
| A[p] ⊃ B[p] | | | A[p/C] | SR1 |
| B[p] | R1 | | A[p] ⊃ B[p] | |
| B[p/C] | SR1 | | A[p/C] ⊃ B[p/C] | SR1 |
| | | | B[p/C] | R1 |
| ⋮ | | | ⋮ | |

Durch solche Umformungen kann man also $\mathfrak{H}''$ aus $\mathfrak{H}'$ erzeugen.

---

[1] Zur Symbolik A[p/B] vgl. **1.2.6**.

Die Axiome in $\mathfrak{H}''$ und die Sätze in $\mathfrak{H}''$, die durch Anwendungen von SR1 auf diese Axiome hervorgehen, sind nun Axiome von $\mathfrak{A}1$. Also läßt sich $\mathfrak{H}''$ durch Streichung der Sätze, auf die SR1 angewendet wird, in einen Beweis für A in $\mathfrak{A}1$ umformen.

Die Theoreme von $\mathfrak{A}1^*$ sind also genau die Theoreme von $\mathfrak{A}1$. Wie wir unten sehen werden gilt hingegen nicht: $A_1, \ldots, A_m \vdash_{\mathfrak{A}1} B$ genau dann, wenn $A_1, \ldots, A_m \vdash_{\mathfrak{A}1^*} B$.

2. Die Definition der Theoreme von $\mathfrak{A}1$ nach 1.3.3.1 und 1.3.3.2 legt für den Theorembegriff kein Entscheidungsverfahren fest. Wir haben zwar früher ein Entscheidungsverfahren für a.l. wahre Sätze angegeben, aber solange wir nicht bewiesen haben, daß die Theoreme von $\mathfrak{A}1$ genau die a.l. wahren Sätze sind, läßt sich dies Verfahren nicht verwenden zu einer Entscheidung darüber, ob ein vorgelegter Satz Theorem von $\mathfrak{A}1$, d. h. beweisbar in $\mathfrak{A}1$, ist. Wir können also nur von Fall zu Fall beweisen, daß ein Satz A Theorem von $\mathfrak{A}1$ ist, indem wir einen Beweis für A in $\mathfrak{A}1$ angeben. Einen solchen Beweis zu finden, ist Sache der Übung und Geschicklichkeit. Man muß sich dazu etwas einfallen //Hao Wang! lassen, mechanische Regeln zur Auffindung eines Beweises für eine vorgegebene Formel haben wir zunächst nicht.

Entscheidbar ist hingegen der Beweisbegriff: Von einer vorgelegten Satzfolge $\mathfrak{H}$ läßt sich aufgrund von 1.3.3.1 und 1.3.3.2 sofort entscheiden, ob sie ein Beweis in $\mathfrak{A}1$ ist, und ob sie ein Beweis für einen vorgegebenen Satz A ist. Denn von jedem Glied der Folge $\mathfrak{H}$ läßt sich feststellen, ob es ein Axiom von $\mathfrak{A}1$ ist: man sieht es den Sätzen kraft ihrer syntaktischen Struktur sofort an, ob sie die Gestalt eines der drei Axiomenschemata haben oder nicht. Ist nun ein Satz B von $\mathfrak{H}$ kein Axiom, so hat man zu untersuchen, ob er aus voraufgehenden Sätzen von $\mathfrak{H}$ durch einmalige Anwendung von R1 hervorgeht. Da dem Satz B nur endliche viele Sätze in der endlichen Folge $\mathfrak{H}$ vorhergehen, so kann man das durch bloßes Probieren feststellen. Untersucht man in dieser Weise fortlaufend alle Sätze von $\mathfrak{H}$, indem man mit dem ersten Glied der Folge beginnt, so findet man entweder einen Satz, der weder Axiom ist, noch aus voraufgehenden Sätzen vermittels R1 folgt — und dann ist $\mathfrak{H}$ kein Beweis in $\mathfrak{A}1$ — oder man findet keinen solchen Satz und stellt so fest, daß $\mathfrak{H}$ ein Beweis in $\mathfrak{A}1$ ist. $\mathfrak{H}$ ist dann ein Beweis für A, wenn A der letzte Satz von $\mathfrak{H}$ ist. Ebenso erweist sich auch der allgemeinere Ableitungsbegriff als entscheidbar.

Die Angabe eines Beweises für A beantwortet also immer in definitiver Weise die Frage, ob A ein Theorem ist. Das Problem, ob ein vorgelegter Beweis für A auch wirklich ein Beweis für A in $\mathfrak{A}1$ ist, kann nicht ernstlich auftreten, da es mit einfachsten Mitteln rein mechanisch entscheidbar ist. Darin besteht die Stärke unseres formalen Beweisbegriffes gegenüber einem intuitiven Beweisbegriff, der, weil die zugelassenen Beweismittel nicht exakt abgegrenzt sind, naturgemäß nicht entscheidbar sein kann und also prinzipiell immer die Frage offen läßt, ob ein vorgelegter Beweis tatsächlich ein Beweis ist, und ob ein Beweis dafür, daß etwas ein Beweis ist, selbst ein Beweis ist, usf.

### 1.3.4 Theoreme und Metatheoreme von $\mathfrak{A}1$

Zur Einübung des Systems $\mathfrak{A}1$ und zur Vorbereitung des Beweises, daß in $\mathfrak{A}1$ genau die a.l. wahren Sätze beweisbar sind, wollen wir in diesem Abschnitt einige Theoreme beweisen. Da wir das System $\mathfrak{A}1$ aus Gründen der theoretischen Einfachheit und Durchsichtigkeit mit nur wenigen Axiomenschemata und Deduktionsregeln aufgebaut haben, macht das Beweisen zunächst einige Mühe. Der theoretische Vorteil geht auf Kosten der praktischen Handlichkeit des Systems, denn je mehr Axiome und Deduktionsregeln man zur Verfügung hat, desto kürzer und einfacher werden die Beweise[1].

Wir können uns aber die Arbeit dadurch wesentlich erleichtern, daß wir neben Theoremen der Gestalt $\vdash$ A auch Theoreme der Gestalt $A_1, \ldots, A_m \vdash B$ beweisen, d. h. neben Sätzen auch Ableitbarkeitsbeziehungen. Denn solche Ableitbarkeitsbeziehungen lassen sich dann neben der Regel R1 wie Deduktionsregeln verwenden.

Wir werden ferner auch Theoreme beweisen, in denen A, bzw. $A_1, \ldots, A_m$, B nicht Sätze, sondern Satzschemata sind. Die Beweise für solche Theoreme lesen sich dann wie Beweisschemata, aus denen

---

[1] Man kann auch Axiomensysteme mit nur einem Axiom angeben, wie das zuerst J. G. P. Nicod (1917) getan hat. Er verwendete als Grundoperator die Exklusion, als einziges Axiom den Satz

$$(p|(q|r))|((s|(s|s))|((t|q)|((p|t)|(p|t))))$$

und als Deduktionsregeln die Einsetzungsregel SR1 und die Regel: wenn A|(B|C) und A beweisbar sind, so ist auch C beweisbar. Anstelle des Axioms von Nicod kann man auch den Satz

$$(p|(q|r))|(((p|(r|p))|((s|q)|((p|s)|(p|s))))$$

verwenden. Vgl. dazu auch [9], S. 159.

Beweise hervorgehen durch Ersetzung von metasprachlichen Satzvariablen durch Sätze von $\mathfrak{A}$ im gesamten Beweis. Dabei ist zu beachten, daß neben $A \supset (B \supset A)$ auch $B \supset (A \supset B)$ oder $(A \supset C) \supset (A \supset (A \supset C))$ Schemata sind für Axiome, die unter das Schema A1 fallen usf. Wir erhalten aus dem oben angegebenen Beweis für den Satz $p \supset p$ z. B. ein Beweisschema für $A \supset A$, indem wir „$p$" überall durch „A" ersetzen.

Neben den Theoremen werden wir endlich auch Metatheoreme über den Kalkül $\mathfrak{A}1$ beweisen. Während Theoreme sich beweisen lassen mit den Mitteln des Systems $\mathfrak{A}1$ selbst, sind Metatheoreme Behauptungen, die sich nicht mit den Mitteln von $\mathfrak{A}1$ beweisen lassen, sondern die Anwendung intuitiver metatheoretischer Beweismittel erfordern.

Ein Beispiel eines solchen Metatheorems ist etwa das folgende:

**MT1:** Wenn gilt $A_1[p], \ldots, A_m[p] \vdash B[p]$, so gilt auch $A_1[p/C], \ldots, A_m[p/C] \vdash B[p/C]$. (Einsetzungstheorem)[1].

Beweis: Man ersetze in der vorliegenden Ableitung $\mathfrak{H}$ von $B[p]$ aus $A_1[p], \ldots, A_m[p]$ p überall durch C. Dann gehen die Axiome in $\mathfrak{H}$ wieder in Axiome über, die AF $A_1[p], \ldots, A_m[p]$ gehen in die Formeln $A_1[p/C], \ldots, A_m[p/C]$ über und die Anwendungen von R1 bleiben als Anwendungen dieser Regel erhalten. Wir erhalten also eine Ableitung von $B[p/C]$ aus $A_1[p/C], \ldots, A_m[p/C]$.

**T1:** $\vdash A \supset A$.

Zum Beweis s. oben!

**MT2:** Wenn gilt $A_1, \ldots, A_m \vdash B$, so gilt auch $A_1, \ldots, A_{m-1} \vdash A_m \supset B$ (Deduktionstheorem).

Beweis: Es liege eine Ableitung $\mathfrak{H}$ von B aus $A_1, \ldots, A_m$ vor als Folge von Formeln $C_1, \ldots, C_n$, so daß also $C_n = B$ ist. Wir formen $\mathfrak{H}$ in eine Ableitung von $A_m \supset B$ aus $A_1, \ldots, A_{m-1}$ um, indem wir die Formeln $C_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ ersetzen durch $A_m \supset C_i$ und weitere Formeln in diese Satzfolge einschieben in folgender Weise:

a) Ist $C_i = A_m$, so ersetzen wir die Zeile $A_m \supset C_i$ durch den oben angegebenen Beweis für $A_m \supset A_m$.

---

[1] Vgl. Mt1 in 1.2.6. Man beachte, daß der folgende Beweis für MT1 auf rein syntaktischem Weg geführt wird, während Mt1 auf semantischem Weg begründet wurde.

b) Ist $C_i = A_k$ für $k \neq m$, so ersetzen wir die Zeile $A_m \supset C_i$ durch

$A_k \supset (A_m \supset A_k)$ A1
$A_k$ AF
$A_m \supset A_k$ R1.

c) Ist $C_i$ ein Axiom, so ersetzen wir die Zeile $A_m \supset C_i$ durch

$C_i \supset (A_m \supset C_i)$ A1
$C_i$ Axiom
$A_m \supset C_i$ R1.

d) Ergibt sich $C_i$ in $\mathfrak{H}$ aus einer Anwendung von R1 auf die Formeln $C_k$, $C_k \supset C_i$, so treten nun vor der Zeile $A_m \supset C_i$ die Formeln $A_m \supset C_k$ und $A_m \supset (C_k \supset C_i)$ auf. Wir ersetzen die Zeile $A_m \supset C_i$ dann durch

$(A_m \supset (C_k \supset C_i)) \supset ((A_m \supset C_k) \supset (A_m \supset C_i))$ A2
$(A_m \supset C_k) \supset (A_m \supset C_i)$ R1
$A_m \supset C_i$ R1.

Dadurch erhalten wir eine Ableitung von $A_m \supset B$ aus den Formeln $A_1, \ldots, A_{m-1}$.

Das Deduktionstheorem gilt in $\mathfrak{A}1^*$ nicht allgemein. Das wird an folgendem Beispiel deutlich:

$p$ AF
$q$ SR1$(p/q)$, also $p \vdash_{\mathfrak{A}1^*} q$.

Die Konstruktion für einen Beweis von $p \supset q$ nach MT2 versagt, da $p \supset q$ nicht durch Einsetzung von $q$ für $p$ aus $p \supset p$ hervorgeht. Hier wird deutlich, was wir oben erwähnten, daß man aus $A_1, \ldots, A_m \vdash_{\mathfrak{A}1^*} B$ nicht auf $A_1, \ldots, A_m \vdash_{\mathfrak{A}1} B$ schließen kann. Andernfalls erhielte man $p \vdash_{\mathfrak{A}1} q$ aus $p \vdash_{\mathfrak{A}1^*} q$, mit MT2 also $\vdash p \supset q$, also mit MT1 $\vdash (B \supset B) \supset A$, also mit T1 und R1 $\vdash A$, d. h. in $\mathfrak{A}1$ wäre jede beliebige Formel beweisbar. Wir werden aber später zeigen, daß nicht jede Formel in $\mathfrak{A}1$ beweisbar ist.

**T2:** $\vdash \neg A \supset (A \supset B)$.

Den Beweis für $\neg p \vdash p \supset q$ haben wir bereits oben geführt. Daraus erhält man sofort den Beweis für $\neg A \vdash A \supset B$ und mit MT2 dann T2.

Obwohl hier das Metatheorem MT2 angewendet wurde, das nur mit Hilfe metatheoretischer Beweismittel gewonnen werden konnte, ist dieser Beweis für T2 natürlich nicht als metatheoretischer Beweis anzusehen. Denn der Beweis für MT2 gibt ein allgemeines Verfahren an, nach dem nun im speziellen Fall eine Ableitung von $A \supset B$ aus $\neg A$ umgeformt werden kann in einen Beweis für $\neg A \supset (A \supset B)$, mit dem also der Beweis für $\neg A \supset (A \supset B)$ mit den Mitteln von $\mathfrak{A}1$ tatsächlich erbracht werden kann. Zur Illustration des Verfahrens wollen wir die Umformung in diesem Fall explizit angeben: Die Herleitung von $A \supset B$ aus $\neg A$ hatte die Gestalt:

| | |
|---|---|
| $\neg A$ | AF |
| $\neg A \supset (\neg B \supset \neg A)$ | A1 |
| $\neg B \supset \neg A$ | R1 |
| $(\neg B \supset \neg A) \supset (A \supset B)$ | A3 |
| $A \supset B$ | R1. |

Daraus bildet man im Sinne von MT2 die Satzfolge:

1) $\neg A \supset \neg A$
2) $\neg A \supset (\neg A \supset (\neg B \supset \neg A))$
3) $\neg A \supset (\neg B \supset \neg A)$
4) $\neg A \supset (\neg B \supset \neg A) \supset (A \supset B))$
5) $\neg A \supset (A \supset B)$.

Durch die Einschiebungen nach MT2 erhält man dann

| | | |
|---|---|---|
| 1) | $\neg A \supset \neg A$ | T1 |
| 2a) | $(\neg A \supset (\neg B \supset \neg A)) \supset (\neg A \supset (\neg A \supset (\neg B \supset \neg A)))$ | A1 |
| 2b) | $\neg A \supset (\neg B \supset \neg A)$ | A1 |
| 2) | $\neg A \supset (\neg A \supset (\neg B \supset \neg A))$ | R1 |
| 3a) | $(\neg A \supset (\neg A \supset (\neg B \supset \neg A))) \supset ((\neg A \supset \neg A)$ $\supset (\neg A \supset (\neg B \supset \neg A)))$ | A2 |
| 3b) | $(\neg A \supset \neg A) \supset (\neg A \supset (\neg B \supset \neg A))$ | R1 |
| 3) | $\neg A \supset (\neg B \supset \neg A)$ | R1 |
| 4a) | $((\neg B \supset \neg A) \supset (A \supset B)) \supset (\neg A \supset ((\neg B \supset \neg A) \supset (A \supset B)))$ | A1 |
| 4b) | $(\neg B \supset \neg A) \supset (A \supset B)$ | A3 |
| 4) | $\neg A \supset ((\neg B \supset \neg A) \supset (A \supset B))$ | R1 |
| 5a) | $(\neg A \supset ((\neg B \supset \neg A) \supset (A \supset B)) \supset ((\neg A \supset (\neg B \supset \neg A))$ $\supset (\neg A \supset (A \supset B)))$ | A2 |
| 5b) | $(\neg A \supset (\neg B \supset \neg A)) \supset (\neg A \supset (A \supset B))$ | R1 |
| 5) | $\neg A \supset (A \supset B)$ | R1. |

Die Einschiebung der Zeilen 3a, 3b wäre hier entbehrlich, da in der Zeile 3 ein Axiom nach A1 steht.

Allgemein besteht die Bedeutung der syntaktischen Metatheoreme darin, daß sie die Existenz einer Ableitung sicherstellen, ohne daß diese Ableitung noch explizit angegeben werden müßte. Wie diese Ableitung im Einzelfall zu konstruieren wäre, geht aus dem Beweis des Metatheorems hervor.

**T3:** $\vdash \neg\neg A \supset A$.

Beweis:

| | |
|---|---|
| $\neg\neg A \supset (\neg A \supset \neg\neg\neg A)$ | T2 |
| $\neg A \supset \neg\neg\neg A$ | R1 |
| $(\neg A \supset \neg\neg\neg A) \supset (\neg\neg A \supset A)$ | A3 |
| $\neg\neg A \supset A$ | R1. |

**T4:** $\vdash A \supset \neg\neg A$.

Beweis:

| | |
|---|---|
| $\neg\neg\neg A \supset \neg A$ | T3 |
| $(\neg\neg\neg A \supset \neg A) \supset (A \supset \neg\neg A)$ | A3 |
| $A \supset \neg\neg A$ | R1. |

**T5:** $A \supset B, B \supset C \vdash A \supset C$.

Beweis:

| | |
|---|---|
| $A$ | AF |
| $A \supset B$ | AF |
| $B$ | R1 |
| $B \supset C$ | AF |
| $C$ | R1 |

also $A \supset B, B \supset C, A \vdash C$, mit MT2 $A \supset B, B \supset C \vdash A \supset C$.

**T6a:** $A \supset B \vdash \neg B \supset \neg A$.

Beweis:

| | |
|---|---|
| $\neg\neg A \supset A$ | T3 |
| $A \supset B$ | AF |

| | |
|---|---|
| $\neg\neg A \supset B$ | T5 |
| $B \supset \neg\neg B$ | T4 |
| $\neg\neg A \supset \neg\neg B$ | T5 |
| $\neg B \supset \neg A$ | A3, R1. |

Hier haben wir zur Abkürzung der Beweisdarstellung im letzten Schritt zwei Regelanwendungen zusammengezogen, wie wir das im folgenden öfter tun werden. Vor der letzten Zeile wäre also bei genauer Darstellung noch die Formel $(\neg\neg A \supset \neg\neg B) \supset (\neg B \supset \neg A)$ einzufügen.

**T6b:** $\neg A \supset \neg B \vdash B \supset A$.

Das gewinnt man aus A3 mit R1.

**T6c:** $A \supset \neg B \vdash B \supset \neg A$.

Beweis:

| | |
|---|---|
| $A \supset \neg B$ | AF |
| $\neg\neg B \supset \neg A$ | T6a |
| $B \supset \neg\neg B$ | T4 |
| $B \supset \neg A$ | T5. |

**T6d:** $\neg A \supset B \vdash \neg B \supset A$.

Beweis:

| | |
|---|---|
| $\neg A \supset B$ | AF |
| $\neg B \supset \neg\neg A$ | T6a |
| $\neg\neg A \supset A$ | T3 |
| $\neg B \supset A$ | T5. |

Die Theoreme T6a bis T6d bezeichnen wir wieder als Kontrapositionsgesetze.

**T7:** $A \vdash \neg A \supset B$.

Beweis:

| | |
|---|---|
| $A$ | AF |
| $A \supset (\neg B \supset A)$ | A1 |
| $\neg B \supset A$ | R1 |
| $\neg A \supset B$ | T6. |

**T8:** $A \supset (A \supset B) \vdash A \supset B.$

Beweis:

| | |
|---|---|
| $A$ | AF |
| $A \supset (A \supset B)$ | AF |
| $A \supset B$ | |
| $B$ | |

also $A \supset (A \supset B), A \vdash B$, mit MT2 also $A \supset (A \supset B) \vdash A \supset B$.

**T9:** $A \supset (B \supset C) \vdash B \supset (A \supset C).$

Beweis:

| | |
|---|---|
| $A \supset (B \supset C)$ | AF |
| $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$ | A2 |
| $(A \supset B) \supset (A \supset C)$ | R1 |
| $B$ | AF |
| $A \supset B$ | A1, R1 |
| $A \supset C$ | R1 |

also $A \supset (B \supset C), B \vdash A \supset C$, mit MT2 also $A \supset (B \supset C) \vdash B \supset (A \supset C)$.

**T10:** $A \supset \neg A \vdash \neg A.$

Beweis:

| | |
|---|---|
| $A \supset (\neg A \supset \neg(B \supset B))$ | T7, MT2 |
| $(A \supset (\neg A \supset \neg(B \supset B))) \supset ((A \supset \neg A) \supset (A \supset \neg(B \supset B)))$ | A2 |
| $(A \supset \neg A) \supset (A \supset \neg(B \supset B))$ | R1 |
| $A \supset \neg A$ | AF |
| $A \supset \neg(B \supset B)$ | R1 |
| $(B \supset B) \supset \neg A$ | T6 |
| $B \supset B$ | T1 |
| $\neg A$ | R1. |

**T11:** $\neg A \supset A \vdash A.$

Beweis:

| | |
|---|---|
| $\neg A \supset (A \supset \neg(B \supset B))$ | T2 |
| $\neg A \supset (A \supset \neg(B \supset B)) \supset ((\neg A \supset A) \supset (\neg A \supset \neg(B \supset B)))$ | A2 |
| $(\neg A \supset A) \supset (\neg A \supset \neg(B \supset B))$ | R1 |

| | |
|---|---|
| $\neg A \supset A$ | AF |
| $\neg A \supset \neg(B \supset B)$ | R1 |
| $(B \supset B) \supset A$ | T6 |
| $B \supset B$ | T1 |
| $A$ | R1. |

**T12:** $A \vee A \vdash A$. Aus T11 mit D1.

**T13:** $A \vdash A \vee B$. Aus T7 mit D1.

**T14:** $B \vdash A \vee B$. Aus A1 mit D1 und R1.

**T15:** $A \vee B \vdash B \vee A$.

Beweis:

| | |
|---|---|
| $A \vee B$ | AF |
| $\neg A \supset B$ | D1 |
| $\neg B \supset A$ | T6 |
| $B \vee A$ | D1. |

**T16:** $A \supset B \vdash C \vee A \supset C \vee B$.

Beweis:

| | |
|---|---|
| $A \supset B$ | AF |
| $\neg C \supset (A \supset B)$ | A1, R1 |
| $(\neg C \supset A) \supset (\neg C \supset B)$ | A2, R1 |
| $C \vee A \supset C \vee B$ | D1. |

**T17:** $A \supset C, B \supset C \vdash A \vee B \supset C$.

Beweis:

| | |
|---|---|
| $A \vee B$ | AF |
| $B \vee A$ | T15 |
| $A \supset C$ | AF |
| $B \vee A \supset B \vee C$ | T16 |
| $B \vee C$ | R1 |
| $C \vee B$ | T15 |
| $B \supset C$ | AF |
| $C \vee B \supset C \vee C$ | T16 |
| $C \vee C$ | R1 |
| $C$ | T12 |

also $A \supset C, B \supset C, A \vee B \vdash C$ mit MT2 also $A \supset C, B \supset C \vdash A \vee B \supset C$.

**T18:** $A \vee (B \vee C) \vdash B \vee (A \vee C)$.

Beweis:

| | |
|---|---|
| $A \vee (B \vee C)$ | AF |
| $\neg A \supset (\neg B \supset C)$ | D1 |
| $\neg B \supset (\neg A \supset C)$ | T9 |
| $B \vee (A \vee C)$ | D1. |

**T19:** $A \vee (B \vee C) \vdash (A \vee B) \vee C$.

Beweis:

| | |
|---|---|
| $A \vee (B \vee C)$ | AF |
| $\neg A \supset B \vee C$ | D1 |
| $B \vee C \supset C \vee B$ | T15, MT2 |
| $\neg A \supset C \vee B$ | T5 |
| $A \vee (C \vee B)$ | D1 |
| $C \vee (A \vee B)$ | T18 |
| $(A \vee B) \vee C$ | T15. |

**T20:** $(A \vee B) \vee C \vdash A \vee (B \vee C)$.

Beweis:

| | |
|---|---|
| $(A \vee B) \vee C$ | AF |
| $C \vee (A \vee B)$ | T15 |
| $A \vee (C \vee B)$ | T18 |
| $\neg A \supset C \vee B$ | D1 |
| $C \vee B \supset B \vee C$ | T15, MT2 |
| $\neg A \supset B \vee C$ | T5 |
| $A \vee (B \vee C)$ | D1. |

**T21:** $A \wedge B \vdash A$.

Beweis:

| | |
|---|---|
| $A \wedge B$ | AF |
| $\neg(\neg A \vee \neg B)$ | D2 |
| $\neg A \supset (\neg A \vee \neg B)$ | T13, MT2 |
| $\neg(\neg A \vee \neg B) \supset \neg\neg A$ | T6 |

| | |
|---|---|
| $\neg\neg A$ | R1 |
| $A$ | T3, R1. |

**T22:** $A \wedge B \vdash B$.

Der Beweis verläuft ebenso, wenn man T14 statt T13 verwendet.

**T23:** $A, B \vdash A \wedge B$.

Beweis:

| | |
|---|---|
| $\neg(\neg A \vee \neg B) \supset \neg(\neg A \vee \neg B)$ | T1 |
| $(\neg A \vee \neg B) \vee \neg(\neg A \vee \neg B)$ | D1, T4 |
| $\neg A \vee (\neg B \vee \neg(\neg A \vee \neg B))$ | T20 |
| $A \supset (B \supset A \wedge B)$ | D1, D2 |
| $A$ | AF |
| $B \supset A \wedge B$ | R1 |
| $B$ | AF |
| $A \wedge B$ | R1. |

**T24:** $\vdash A \equiv \neg\neg A$.

Beweis:

| | |
|---|---|
| $A \supset \neg\neg A$ | T4 |
| $\neg\neg A \supset A$ | T3 |
| $(A \supset \neg\neg A) \wedge (\neg\neg A \supset A)$ | T23 |
| $A \equiv \neg\neg A$ | D3. |

**T25:** $A \equiv B \vdash \neg A \equiv \neg B$.

Beweis:

| | |
|---|---|
| $A \equiv B$ | AF |
| $A \supset B$ | D3, T21 |
| $\neg B \supset \neg A$ | T6 |
| $B \supset A$ | D3, T22 |
| $\neg A \supset \neg B$ | T6 |
| $(\neg A \supset \neg B) \wedge (\neg B \supset \neg A)$ | T23 |
| $\neg A \equiv \neg B$ | D3. |

**T26:** $A \equiv B, B \equiv C \vdash A \equiv C$.

Beweis:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1) | $A \equiv B$ | AF | |
| 2) | $A \supset B$ | D3, T21 | (1) |
| 3) | $B \equiv C$ | AF | |
| 4) | $B \supset C$ | D3, T21 | (3) |
| 5) | $A \supset C$ | T5 | (2,4) |
| 6) | $B \supset A$ | D3, T22 | (1) |
| 7) | $C \supset B$ | D3, T22 | (3) |
| 8) | $C \supset A$ | T5 | (7,6) |
| 9) | $A \equiv C$ | T23, D3 | (5,8). |

Wir kommen nun zu dem wichtigen Ersetzungstheorem:

**MT3:** $A \equiv B \vdash C[\![A]\!] \equiv C[\![B]\!]$.

Hätten wir die a.l. Vollständigkeit des Systems $\mathfrak{A}$l bereits bewiesen, so könnten wir dieses Theorem aus dem semantischen Ersetzungstheorem 1.3.2.6 gewinnen. Wir geben hier aber einen rein syntaktischen Beweis an, da wir das Metatheorem zum Vollständigkeitsbeweis benötigen werden. Der Vergleich des semantischen mit dem folgenden syntaktischen Beweis für das Ersetzungstheorem macht noch einmal den Unterschied zwischen semantischer und syntaktischer Argumentationsweise deutlich.

Obwohl MT3 äußerlich die Gestalt eines Theorems hat, ist es doch als Metatheorem anzusehen, da sein Beweis eine Induktion nach dem Aufbau der Formel $C[\![A]\!]$ erfordert. Wie in 1.3.2.5 können wir uns auf den Fall beschränken, daß $C[\![B]\!]$ aus $C[\![A]\!]$ durch Ersetzung nur eines Vorkommnisses von A in $C[\![A]\!]$ durch B entsteht. Wie dort nehmen wir auch hier wieder eine Induktion nach der Zahl $n$, dem Grad von $C[\![A]\!]$ minus dem Grad von A vor. Ist $n = 0$, so nimmt die Behauptung die Form $A \equiv B \vdash A \equiv B$ an und ist also trivialerweise richtig. Sei die Behauptung für alle $n \geqslant r$ bewiesen und sei nun $n = r + 1$. Dann läßt sich $C[\![A]\!]$ darstellen in der Form $C[\![A']\!]$, wo $C[\![A']\!]$ von $A'$ verschieden ist und $A' = A'[\![A]\!]$ das fragliche Vorkommnis von A enthält, bzw. mit ihm identisch ist. $A'$ kommt also eine Zahl $n \leqslant r$ zu. Es ist dann nach der Induktionsvoraussetzung aus der Annahme $A \equiv B$ die Formel $A'[\![A]\!] \equiv A'[\![B]\!]$ ableitbar.

a) $C[\![A]\!]$ habe die Gestalt $\neg A'[\![A]\!]$. $C[\![B]\!]$ hat dann die Gestalt $\neg A'[\![B]\!]$ und es gilt $A \equiv B \vdash \neg A'[\![A]\!] \equiv \neg A'[\![B]\!]$ nach der Induktionsvoraussetzung und T25.

b) $C[\![A]\!]$ habe die Gestalt $A'[\![A]\!] \supset D$. Dann gilt

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1) | $A'[\![A]\!] \equiv A'[\![B]\!]$ | AF | |
| 2) | $A'[\![A]\!] \supset A'[\![B]\!]$ | D3, T21 | (1) |
| 3) | $A'[\![B]\!] \supset A'[\![A]\!]$ | D3, T22 | (1) |
| 4) | $(A'[\![A]\!] \supset D) \supset (A'[\![B]\!] \supset D)$ | T5, MT2 | (3) |
| 5) | $(A'[\![B]\!] \supset D) \supset (A'[\![A]\!] \supset D)$ | T5, MT2 | (2) |
| 6) | $A'[\![A]\!] \supset D \equiv A'[\![B]\!] \supset D$ | T23, D3 | (4,5). |

Nach Induktionsvoraussetzung gilt also $A \equiv B \vdash A'[\![A]\!] \supset D \equiv A'[\![B]\!] \supset D$.

c) $C[\![A]\!]$ habe die Gestalt $D \supset A'[\![A]\!]$. Dann erhalten wir aus (1) bis (3):

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4') | $(D \supset A'[\![A]\!]) \supset (D \supset A'[\![B]\!])$ | T5, MT2 | (2) |
| 5') | $(D \supset A'[\![B]\!]) \supset (D \supset A'[\![A]\!])$ | T5, MT2 | (3) |
| 6') | $D \supset A'[\![A]\!] \equiv D \supset A'[\![B]\!]$ | T23, D3 | (4', 5'). |

Nach Induktionsvoraussetzung gilt also $A \equiv B \vdash D \supset A'[\![A]\!] \equiv D \supset A'[\![B]\!]$. Damit ist das Ersetzungstheorem bewiesen.

**T27:** $\vdash \neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$.

Beweis:

| | |
|---|---|
| $\neg(A \wedge B) \supset \neg(A \wedge B)$ | T1 |
| $\neg(A \wedge B) \supset \neg\neg(\neg A \vee \neg B)$ | D2 |
| $\neg(A \wedge B) \supset \neg A \vee \neg B$ | T24, MT3 |
| $\neg A \vee \neg B \supset \neg\neg(\neg A \vee \neg B)$ | T4 |
| $\neg A \vee \neg B \supset \neg(A \wedge B)$ | D2 |
| $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$ | T23, D3. |

**T28:** $\vdash \neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$.

Beweis:

| | |
|---|---|
| $\neg(A \vee B) \supset \neg(A \vee B)$ | T1 |
| $\neg(A \vee B) \supset \neg(\neg\neg A \vee \neg\neg B)$ | T24, MT3 |
| $\neg(A \vee B) \supset \neg A \wedge \neg B$ | D2 |
| $\neg A \wedge \neg B \supset \neg A \wedge \neg B$ | T1 |
| $\neg A \wedge \neg B \supset \neg(\neg\neg A \vee \neg\neg B)$ | D2 |
| $\neg A \wedge \neg B \supset \neg(A \vee B)$ | T24, MT3 |
| $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$ | T23, D3. |

**T29:** $\vdash \neg(A \supset B) \equiv A \wedge \neg B$.

Beweis:

| | |
|---|---|
| $\neg(A \supset B) \equiv \neg(\neg A \vee B)$ | T24, MT3, D1 |
| $\neg(\neg A \vee B) \equiv \neg\neg A \wedge \neg B$ | T28 |
| $\neg\neg A \wedge \neg B \equiv A \wedge \neg B$ | T24, MT3 |
| $\neg(A \supset B) \equiv A \wedge \neg B$ | T26. |

**T30:** $A \wedge B \vdash B \wedge A$.

Beweis:

| | |
|---|---|
| $A \wedge B$ | AF |
| $A$ | T21 |
| $B$ | T22 |
| $B \wedge A$ | T23. |

**T31:** $\vdash A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$.

Beweis:

| | | |
|---|---|---|
| $(A \wedge B) \wedge C$ | AF | |
| $A \wedge B$ | T21 | |
| $A$ | T21 | |
| $B$ | T22 | |
| $C$ | T22 | |
| $B \wedge C$ | T23 | |
| $A \wedge (B \wedge C)$ | T23 | also mit MT2 $\vdash (A \wedge B) \wedge C \supset A \wedge (B \wedge C)$. |

Ebenso erhält man $\vdash A \wedge (B \wedge C) \supset (A \wedge B) \wedge C$, also mit T23 und D3 $\vdash A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$.

**T32:** $A \vee B \supset C \vdash (A \supset C) \wedge (B \supset C)$.

Beweis:

| | |
|---|---|
| $A \vee B \supset C$ | AF |
| $\neg C \supset \neg(A \vee B)$ | T6 |
| $\neg C \supset \neg A \wedge \neg B$ | T28, MT3 |
| $\neg A \wedge \neg B \supset \neg A$ | T21 |
| $\neg C \supset \neg A$ | T5 |
| $A \supset C$ | T6 |

| | |
|---|---|
| $\neg A \wedge \neg B \supset \neg B$ | T22 |
| $\neg C \supset \neg B$ | T5 |
| $B \supset C$ | T6 |
| $(A \supset C) \wedge (B \supset C)$ | T23. |

**T33:** $\vdash A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$.

Beweis:

| | |
|---|---|
| $A \vee (B \wedge C)$ | AF |
| $A \vee \neg(\neg B \vee \neg C)$ | D2 |
| $\neg B \vee \neg C \supset A$ | T15, D2 |
| $\neg B \supset A$ | T32, T21 |
| $\neg C \supset A$ | T32, T22 |
| $B \vee A$ | D1 |
| $A \vee B$ | T15 |
| $C \vee A$ | D1 |
| $A \vee C$ | T15 |
| $(A \vee B) \wedge (A \vee C)$ | T23. |

Aus dieser Ableitung erhalten wir mit MT2 $\vdash A \vee (B \wedge C) \supset (A \vee B) \wedge (A \vee C)$. Verwendet man T17 statt T32, so kann man die Ableitung von unten nach oben als Ableitung von $A \vee (B \wedge C)$ aus $(A \vee B) \wedge (A \vee C)$ lesen und erhält dann mit MT2, T23 und D3 die Behauptung von T33.

**T34:** $\vdash A \wedge (B \vee C) \equiv A \wedge B \vee A \wedge C$.

Beweis:

| | |
|---|---|
| $A \wedge (B \vee C)$ | AF |
| $\neg(\neg A \vee \neg(B \vee C))$ | D2 |
| $\neg(\neg A \vee (\neg B \wedge \neg C))$ | T28, MT3 |
| $\neg((\neg A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee \neg C))$ | T33, MT3 |
| $\neg(\neg A \vee \neg B) \vee \neg(\neg A \vee \neg C)$ | T27 |
| $A \wedge B \vee A \wedge C$ | D2. |

Mit MT2 erhält man also $\vdash A \wedge (B \vee C) \supset A \wedge B \vee A \wedge C$. Die angegebene Ableitung kann man von unten nach oben auch als Ableitung von $A \wedge (B \vee C)$ aus $A \wedge B \vee A \wedge C$ lesen und erhält so mit MT2, T23 und D3 die Behauptung des Theorems.

**T35:** $\vdash A \vee \neg A$. Der Beweis ergibt sich aus T1 mit D1.

**T36:** $\vdash \neg(A \wedge \neg A)$.

Beweis:

| | |
|---|---|
| $A \vee \neg A$ | T35 |
| $\neg A \vee A$ | T15 |
| $\neg\neg(\neg A \vee \neg\neg A)$ | T24, MT3 |
| $\neg(A \wedge \neg A)$ | D2. |

**T37:** $\vdash A \supset (B \supset C) \equiv A \wedge B \supset C$.

Beweis:

| | |
|---|---|
| $A \supset (B \supset C)$ | AF |
| $A \wedge B$ | AF |
| $A$ | T21 |
| $B$ | T22 |
| $B \supset C$ | R1 |
| $C$ | R1. |

Aus dieser Ableitung erhalten wir mit MT2 $(A \supset (B \supset C)) \supset (A \wedge B \supset C)$.

| | |
|---|---|
| $A \wedge B \supset C$ | AF |
| $A$ | AF |
| $B$ | AF |
| $A \wedge B$ | T23 |
| $C$ | R1. |

Also gilt: $A \wedge B \supset C, A, B \vdash C$. Daraus erhält man durch zweimalige Anwendung von MT2 $A \wedge B \supset C \vdash A \supset (B \supset C)$. Mit T23 und D3 erhält man dann endlich die Behauptung des Theorems.

Wenn der Leser die Reihe der vorstehenden Beweise genau studiert hat, so wird er eine ganz konkrete Vorstellung gewonnen haben von der Technik des Beweisens in einem formalisierten System, vom Aufbau rein syntaktischer Beweise und von ihrer Strenge.

Wir haben in diesem Abschnitt von der semantischen Deutung der Sprache $\mathfrak{A}$ völlig abgesehen und nur die Syntax von $\mathfrak{A}$ nach 1.3.1 und die Festlegungen über den Beweisbegriff von $\mathfrak{A}1$ nach 1.3.3 benützt. Wir haben in diesem Sinn das System $\mathfrak{A}1$ als einen bloßen Kalkül betrachtet, d. h. als ein System von Regeln zur Erzeugung von Objekten einer bestimmten Art. Ein Kalkül in diesem weiten Sinn ist auch ein

Spiel, wie z. B. das Schachspiel: die Objekte sind dort die möglichen Positionen der Figuren auf dem Brett, die nach den Spielregeln aus der Anfangsposition erzeugt werden können. Ebensowenig wie das Schachspiel hat nun zunächst das Beweisen im System $\mathfrak{Al}$ etwas mit logischem Schließen zu tun. Der Zusammenhang zwischen der A.L. und dem System $\mathfrak{Al}$, zwischen a.l. wahren Sätzen und den Theoremen von $\mathfrak{Al}$, zwischen a.l. gültigen Schlüssen und den Ableitungsbeziehungen in $\mathfrak{Al}$ muß erst noch hergestellt werden. Dieser Aufgabe wollen wir uns im nächsten Abschnitt zuwenden.

*Übungsaufgaben:*

1. Beweise die Theoreme:

a) $A \supset B, C \supset D \vdash A \wedge C \supset B \wedge D$
b) $\vdash ((A \supset B) \supset A) \supset A$
c) $A \wedge B \supset C, A \wedge B \supset \neg C \vdash A \supset \neg B$
d) $A \wedge B \vee A \wedge \neg B \vdash A$
e) $A \equiv B \vdash A \wedge B \vee \neg A \wedge \neg B$.

2. Beweise mit Hilfe der Definition $A|B := \neg(A \wedge B)$ die Theoreme:

f) $(A|(B|C))|(((A|(C|A))|((D|B)|((A|D)|(A|D)))))$
g) $A, A|(B|C) \vdash C$[1].

### 1.3.5 Die Adäquatheit von $\mathfrak{Al}$ vgl. [illegible]

Wir wollen nun zeigen, daß das System $\mathfrak{Al}$ eine adäquate Formalisierung der A.L. darstellt, d. h. daß in $\mathfrak{Al}$ genau die a.l. wahren Sätze beweisbar sind.

Betrachten wir zunächst die Widerspruchsfreiheit von $\mathfrak{Al}$!

**1.3.5.1** Wir nennen einen Kalkül $\mathfrak{K}$ a.l. *widerspruchsfrei*, wenn in $\mathfrak{K}$ nur a.l. wahre Sätze beweisbar sind.

**1.3.5.2** $\mathfrak{Al}$ ist a.l. widerspruchsfrei.

Beweis: Nach 1.3.2 läßt sich das Entscheidungsverfahren 1.2.4 für die Bestimmung der a.l. Wahrheit der Sätze aus $\mathfrak{A}$ verwenden. Nach diesem Verfahren sind nun alle Axiome von $\mathfrak{Al}$ a.l. wahre Sätze. Und

[1] Vgl. die Anmerkung zu S. 86.

wenn A und A $\supset$ B a.l. wahre Sätze sind, so ist nach 1.3.2.1—d auch B ein a.l. wahrer Satz, d. h. eine Anwendung der Deduktionsregel R1 von $\mathfrak{A}1$ erzeugt aus a.l. wahren Sätzen immer nur a.l. wahre Sätze. Danach enthält jeder Beweis in $\mathfrak{A}1$ nur a.l. wahre Sätze und also ist jeder in $\mathfrak{A}1$ beweisbare Satz als Endglied eines solchen Beweises ein a.l. wahrer Satz.

Ein stärkerer Begriff der a.l. Widerspruchsfreiheit wäre der folgende.

**1.3.5.3** Wir nennen einen Kalkül $\mathfrak{K}$ a.l. widerspruchsfrei i. e. S., wenn aus $A_1, \ldots, A_m \vdash_{\mathfrak{K}} B$ die a.l. Gültigkeit des Schlusses $A_1, \ldots, A_m \rightarrow B$ folgt.

**1.3.5.4** $\mathfrak{A}1$ ist a.l. widerspruchsfrei i. e. S.

Mit MT2 erhält man aus $A_1, \ldots, A_m \vdash B$ $\vdash A_1 \supset (A_2 \supset \ldots (A_m \supset B) \ldots)$ und mit T37 $\vdash A_1 \wedge \ldots \wedge A_m \supset B$. Nach 1.3.5.2 ist dann dieser Satz a.l. wahr, also ist nach 1.3.2.5 der Schluß $A_1, \ldots, A_m \rightarrow B$ a.l. gültig. — Will man direkt argumentieren, so überlegt man sich, daß jede Bewertung die Axiome von $\mathfrak{A}1$ erfüllt und auch den Satz B, sofern sie die Sätze A und A $\supset$ B erfüllt. Liege dann eine Ableitung von B aus $A_1, \ldots, A_m$ vor, so erfüllt also jede Bewertung, die die AF $A_1, \ldots, A_m$ erfüllt, alle Formeln der Ableitung, insbesondere also B, d. h. aber der Schluß $A_1, \ldots, A_m \rightarrow B$ ist a.l. gültig.

Neben einer solchen semantischen Widerspruchsfreiheit untersucht man auch oft die syntaktische Widerspruchsfreiheit von Kalkülen.

**1.3.5.5** Wir nennen einen Kalkül $\mathfrak{K}$ *syntaktisch widerspruchsfrei*, wenn in $\mathfrak{K}$ nicht alle Sätze der $\mathfrak{K}$ zugrunde liegenden Sprache beweisbar sind[1].

Betrachten wir für den Augenblick unser Entscheidungsverfahren aus 1.2.4 als ein rein syntaktisches Auszeichnungsverfahren, so können wir einen syntaktischen Widerspruchsfreiheitsbeweis für $\mathfrak{A}1$ erbringen, indem wir wie oben zeigen, daß in $\mathfrak{A}1$ nur Sätze beweisbar sind, die nach diesem Verfahren ausgezeichnet sind. Nun ist aber z. B. $p$ nach diesem Verfahren nicht ausgezeichnet, also ist $\mathfrak{A}1$ syntaktisch wider-

[1] Nach einer anderen Fassung des Begriffs der syntaktischen Widerspruchsfreiheit wäre $\mathfrak{K}$ widerspruchsfrei, wenn in $\mathfrak{K}$ ein bestimmter Satz, z. B. $p$ oder $p \wedge \neg p$ nicht beweisbar ist. Für $\mathfrak{A}1$ gilt aber: wenn $p$ beweisbar ist, so nach MT1 auch jeder Satz A. Und wenn $p \wedge \neg p$ beweisbar ist, so nach T21 auch $p$, also wiederum jeder Satz A. Diese drei Fassungen des Begriffs der syntaktischen Widerspruchsfreiheit sind also für $\mathfrak{A}1$ äquivalent.

spruchsfrei. Allgemein folgt die syntaktische Widerspruchsfreiheit eines Kalküls aus der a.l. Widerspruchsfreiheit.

Wir haben früher bemerkt, daß in $\mathfrak{A}1^*$ genau die Sätze beweisbar sind, die auch in $\mathfrak{A}1$ beweisbar sind. Daher ist auch $\mathfrak{A}1^*$ a.l. und syntaktisch widerspruchsfrei. $\mathfrak{A}1^*$ ist hingegen nicht a.l. widerspruchsfrei i. e. S., denn es gilt zwar, daß durch Anwendungen der Regel SR1 a.l. wahre Sätze wieder in a.l. wahre Sätze überführt werden, es gilt aber, wie das Beispiel der Ableitung von $q$ aus $p$ mit SR1 zeigt, nicht, daß jede Bewertung, die die Prämisse der Regel SR1 erfüllt, auch deren Konklusion erfüllt.

Betrachten wir nun die Vollständigkeit des Kalküls $\mathfrak{A}1$!

**1.3.5.6** Wir nennen einen Kalkül $\mathfrak{K}$ a.l. *vollständig*, wenn in $\mathfrak{K}$ alle a.l. wahren Sätze beweisbar sind. Wir nennen $\mathfrak{K}$ a.l. vollständig i. e. S. (oder a.l. *abgeschlossen*), wenn aus der a.l. Gültigkeit des Schlusses $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_m \rightarrow \mathrm{B}$ folgt $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_m \vdash_{\mathfrak{K}} \mathrm{B}$.

Offenbar folgt aus der a.l. Abgeschlossenheit die a.l. Vollständigkeit, so daß wir gleich zum Beweis des folgenden Satzes übergehen:

**1.3.5.7** $\mathfrak{A}1$ ist a.l. abgeschlossen.

Zum Beweis dieses Theorems benötigen wir zwei Hilfssätze.

**1.3.5.8** Wir nennen eine Menge $M$ von Formeln *konsistent*, wenn es keine Formel B gibt, so daß gilt $M \vdash \mathrm{B}$ und $M \vdash \neg\mathrm{B}$. Dabei bedeute $M \vdash \mathrm{B}$: es gibt endlich viele Formeln $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_m$ aus $M$, so daß $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_m \vdash \mathrm{B}$. Wir nennen eine Formel A mit $M$ *verträglich*, wenn die Menge $M \cup \{\mathrm{A}\}$, die aus $M$ durch Hinzunahme des Elementes A entsteht, konsistent ist.

Der erste Hilfssatz lautet nun:

**1.3.5.9** Zu jeder konsistenten Menge von Formeln $M$ gibt es eine maximale konsistente Menge $M^+$, d. h. eine konsistente Menge $M^+$, die alle Elemente von $M$ enthält und für die gilt: jede Formel, die mit $M^+$ verträglich ist, ist in $M^+$ enthalten.

Beweis: Da die Sprache $\mathfrak{A}$ abzählbar viele Formeln enthält, kann man eine Abzählung der Formeln angeben. $\mathrm{A}_n$ sei die $n$-te Formel in dieser Abzählung. Wir setzen dann $M_1 = M$ und $M_{n+1} = M_n$, wenn

$A_n$ nicht mit $M_n$ verträglich ist, andernfalls setzen wir $M_{n+1} = M_n \cup \{A_n\}$. $M^+$ sei dann die Vereinigung aller dieser Formelmengen $M_n$ für $n = 1, 2, \ldots$, d. h. die Menge, die genau diejenigen Formeln enthält, die in mindestens einer der Mengen $M_n$ enthalten sind. $M^+$ ist dann konsistent: Wäre $M^+$ nicht konsistent, so gäbe es Formeln $A_{i_1}, \ldots, A_{i_r}$ aus $M^+$ und eine Formel B, so daß $A_{i_1}, \ldots, A_{i_r} \vdash B$ und $A_{i_1}, \ldots, A_{i_r} \vdash \neg B$. Ist dann $l$ die kleinste Zahl, so daß die Formeln $A_{i_1}, \ldots, A_{i_r}$ der Menge $M_l$ angehören, so wäre also auch $M_l$ inkonsistent. Nun sind aber alle Mengen $M_n$ konsistent, denn $M_1 = M$ ist nach Voraussetzung konsistent, und ist $M_n$ konsistent, so nach Definition von $M_{n+1}$ auch diese Menge[1]. $M^+$ ist ferner maximal: Denn ist $A_n$ verträglich mit $M^+$, so auch mit $M_n$, also ist $A_n$ in $M_{n+1}$ und also in $M^+$ enthalten.

**1.3.5.10** Jede konsistente Formelmenge $M$ ist simultan erfüllbar, d. h. es gibt eine Bewertung, die alle Formeln aus $M$ erfüllt.

Der Beweis dieses zweiten Hilfssatzes ergibt sich wie folgt: Zu $M$ gibt es nach 1.3.5.9 eine maximale konsistente Menge $M^+$. Wir definieren eine Bewertung $\mathfrak{W}$, indem wir setzen $\mathfrak{W}(A) = \mathfrak{w}$ für alle Atomformeln A aus $M^+$ und $\mathfrak{W}(A) = \mathfrak{f}$ für alle Atomformeln A, die nicht zu $M^+$ gehören. Wir zeigen durch Induktion nach dem Formelgrad $n$ von A, daß für diese Bewertung gilt: $\mathfrak{W}(A) = \mathfrak{w}$ genau dann, wenn A in $M^+$ ist, für alle Formeln A. Für $n = 0$ ergibt sich die Behauptung aus der Definition von $\mathfrak{W}$. Sei nun die Behauptung bewiesen für alle $n \geqslant r$ und sei der Grad von A $r + 1$:

a) A habe die Gestalt $\neg B$. Dann ist $r$ der Grad von B. Ist $\neg B$ in $M^+$, so ist B nicht in $M^+$, da $M^+$ konsistent ist. Dann ist $\mathfrak{W}(B) = \mathfrak{f}$, also $\mathfrak{W}(\neg B) = \mathfrak{w}$. Ist $\neg B$ nicht in $M^+$, so ist B mit $M^+$ verträglich, also in $M^+$. Andernfalls hätten wir $M^+, B \vdash C$ und $M^+, B \vdash \neg C$, also $M^+, B \vdash C \wedge \neg C$ nach T23, also nach MT2 $M^+ \vdash B \supset (C \wedge \neg C)$, mit T6 $M^+ \vdash \neg(C \wedge \neg C) \supset \neg B$, also $M^+, \neg(C \wedge \neg C) \vdash \neg B$, wegen T36 also $M^+ \vdash \neg B$. Es wäre dann also $\neg B$ mit $M^+$ verträglich und also in $M^+$ im Widerspruch zur Annahme. Ist nun aber B in $M^+$, so ist nach Induktionsvoraussetzung $\mathfrak{W}(B) = \mathfrak{w}$, also $\mathfrak{W}(\neg B) = \mathfrak{f}$.

---

[1] Die hier verwendete Argumentationsweise ist die des *indirekten Beweises*: Im indirekten Beweis wird ein Satz A dadurch bewiesen, daß aus der Annahme $\neg A$ ein Widerspruch abgeleitet wird. Folgt aber aus $\neg A$ ein Widerspruch, so kann $\neg A$ nicht gelten, es muß also A gelten. Dieses Beweisprinzip drückt sich aus in dem Schluß $\neg A \supset B \wedge \neg B \rightarrow A$.

b) A habe die Gestalt $B \supset C$. Ist $B \supset C$ in $M^+$, so ist B nicht in $M^+$, oder C ist in $M^+$; denn ist B in $M^+$, so nach R1 auch C. Nach Induktionsvoraussetzung gilt also $\mathfrak{W}(B) = \mathfrak{f}$ oder $\mathfrak{W}(C) = \mathfrak{w}$, d. h. $\mathfrak{W}(B \supset C) = \mathfrak{w}$. Ist $B \supset C$ nicht in $M^+$, so finden wir wie oben $M^+ \vdash \neg(B \supset C)$, mit T29 also $M^+ \vdash B \wedge \neg C$, mit T21 und T22 also $M^+ \vdash B$ und $M^+ \vdash \neg C$. Es ist also B in $M^+$ und C nicht in $M^+$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt dann $\mathfrak{W}(B) = \mathfrak{w}$ und $\mathfrak{W}(C) = \mathfrak{f}$, also $\mathfrak{W}(B \supset C) = \mathfrak{f}$.

$\mathfrak{W}$ erfüllt also alle Formeln aus $M^+$ und damit auch alle Formeln aus $M$, was zu beweisen war.

Wir können nun zum Beweis des Satzes 1.3.5.7 übergehen: Gilt die Ableitungsbeziehung $A_1, \ldots, A_m \vdash B$ nicht in $\mathfrak{A}1$, so ist die Menge der Formeln $A_1, \ldots, A_m, \neg B$ nach unseren obigen Überlegungen konsistent und es gibt nach 1.3.5.10 eine Bewertung $\mathfrak{W}$, die diese Menge simultan erfüllt. $\mathfrak{W}$ erfüllt also die Formeln $A_1, \ldots, A_m$, aber nicht B. Also ist der Schluß $A_1, \ldots, A_m \rightarrow B$ nicht gültig. Wir können also aus der Gültigkeit dieses Schlusses auf die Gültigkeit der Ableitungsbeziehung $A_1, \ldots, A_m \vdash B$ schließen, was zu beweisen war[1].

Aus der a.l. Abgeschlossenheit von $\mathfrak{A}1$ folgt sofort die a.l. Vollständigkeit von $\mathfrak{A}1^*$, wenn man Schlüsse ohne Prämissen betrachtet, und, aufgrund unserer früheren Überlegungen über das Verhältnis der Kalküle $\mathfrak{A}1$ und $\mathfrak{A}1^*$, auch die a.l. Abgeschlossenheit von $\mathfrak{A}1^*$.

Neben der a.l. Vollständigkeit kann man auch eine syntaktische Vollständigkeitseigenschaft von Kalkülen betrachten:

**1.3.5.11** Wir nennen einen Kalkül $\mathfrak{K}$ *syntaktisch vollständig*, wenn für jeden Satz A der $\mathfrak{K}$ zugrunde liegenden Sprache gilt: A ist in $\mathfrak{K}$ beweisbar oder $\mathfrak{K}$ wird durch Hinzunahme von A zu den Axiomen von $\mathfrak{K}$ zu einem syntaktisch widerspruchsvollen Kalkül[2].

Das System $\mathfrak{A}1$ ist syntaktisch unvollständig. Wäre $\mathfrak{A}1$ nämlich syntaktisch vollständig, so würde gelten: wenn aus der Beweisbarkeit

---

[1] Der Gedanke dieses Vollständigkeitsbeweises ist von L. HENKIN in [30] angegeben worden.

[2] Daneben gibt es auch noch andere syntaktische Vollständigkeitsbegriffe, die aber im Zusammenhang mit $\mathfrak{A}1$ nicht von Interesse sind. Ist $\mathfrak{M}$ z. B. eine Teilmenge der Formeln von $\mathfrak{A}$, so kann man den Kalkül $\mathfrak{K}$ $\mathfrak{M}$-vollständig nennen, wenn jeder Satz A von $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{K}$ entweder beweisbar oder widerlegbar ist, d. h. wenn gilt $\vdash_{\mathfrak{K}} A$ oder $\vdash_{\mathfrak{K}} \neg A$ für A aus $\mathfrak{M}$.

von A die Beweisbarkeit von B folgt, so gilt $A \vdash B$. Denn ist A unbeweisbar, so folgt aus der syntaktischen Vollständigkeit, daß aus A beliebige Formeln, insbesondere also B, ableitbar sind. Ist A aber beweisbar, so nach Voraussetzung auch B und wir erhalten eine Herleitung von B aus A, wenn wir in den Beweis von B noch die Formel A einschieben. Nun gilt zwar: wenn $p$ beweisbar ist, so auch $q$ (MT1), es gilt aber nicht $p \vdash q$, wie die Ungültigkeit des Schlusses $p \rightarrow q$ und die a.l. Widerspruchsfreiheit i. e. S. von $\mathfrak{A}1$ zeigen. Also ist $\mathfrak{A}1$ syntaktisch unvollständig.

Das System $\mathfrak{A}1^*$ hingegen ist syntaktisch vollständig: Ist der Satz A nicht in $\mathfrak{A}1^*$ beweisbar, so ist auch seine konjunktive Normalform $A_N$ nicht beweisbar. Das ergibt sich aus der a.l. Adäquatheit von $\mathfrak{A}1^*$ und MT8 aus 1.2.6. Nach MT9 enthält dann $A_N$ ein Konjunktionsglied B, in dem keine Satzvariable zugleich negiert und unnegiert vorkommt. Nimmt man nun A zu den Axiomen von $\mathfrak{A}1^*$ hinzu, so wird $A_N$ beweisbar und wegen T21 und T22 auch B. Setzt man für alle unnegierten Satzvariablen von B $p$ ein, für alle negierten Satzvariablen $\neg p$, so kann man aus B mit SR1 und T24 in Verbindung mit MT3 eine Formel der Gestalt $p \wedge \ldots \wedge p$ ableiten, aus der man mit T21 $p$ erhält. $p$ ist also in dem um das Axiom A erweiterten Kalkül $\mathfrak{A}1^*$ beweisbar, dieser Kalkül ist also syntaktisch widerspruchsvoll, was zu beweisen war.

Abschließend wollen wir noch auf die Frage nach der Unabhängigkeit der Axiomenschemata von $\mathfrak{A}1$ bzw. der Axiome von $\mathfrak{A}1^*$ eingehen.

Aus Gründen der Einfachheit und Durchsichtigkeit axiomatischer Systeme fordert man oft die Unabhängigkeit der Axiome:

**1.3.5.12** Wir nennen die Axiome eines Kalküls $\mathfrak{K}$ voneinander *unabhängig*, wenn kein Axiom A von $\mathfrak{K}$ in dem Kalkül $\mathfrak{K}'$ beweisbar ist, der aus $\mathfrak{K}$ durch Streichung des Axioms A hervorgeht.

Sind die Axiome eines Kalküls nicht voneinander unabhängig, so erhält man durch Streichung eines Axioms ein gleich starkes System, die Auszeichnung dieses Satzes als Axiom ist also überflüssig.

Es gilt nun:

**1.3.5.13** Die Axiome von $\mathfrak{A}1^*$ sind voneinander unabhängig.

Zum Beweis dieses Satzes gehen wir ähnlich vor, wie oben beim Beweis der syntaktischen Widerspruchsfreiheit von $\mathfrak{A}1$: Sei A das Axiom, dessen Unabhängigkeit von den übrigen bewiesen werden soll, so geben wir eine Eigenschaft $E$ an — oben war $E$ die Eigenschaft, durch das

Entscheidungsverfahren von 1.2.4 ausgezeichnet zu sein —, die den von A verschiedenen Axiomen zukommt und die bei Anwendung der Deduktionsregeln erhalten bleibt. Wäre A abhängig, so müßte auch A diese Eigenschaft $E$ haben. Wird also gezeigt, daß A nicht diese Eigenschaft hat, so ist damit die Unabhängigkeit von A bewiesen.

Wir geben nun Belegungen der Formeln nicht mit den beiden Wahrheitswerten 𝔴, 𝔣 an, sondern Belegungen mit den Zahlen *0*, *1*, *2*. Eine solche Belegung ist definiert, wenn sie erklärt ist für die Satzvariablen und wenn allgemein festgelegt ist, wie sich der Wert eines komplexen Satzes aus den Werten der Teilsätze errechnet. Die Eigenschaft $E$ sei die Eigenschaft einer Formel, bei jeder Belegung den Wert *0* anzunehmen.

Wir charakterisieren die Belegungen für die Untersuchungen der drei Axiome wie folgt:

| A | 1<br>$\neg$A | 2<br>$\neg$A | 3<br>$\neg$A |
|---|---|---|---|
| *0* | *1* | *2* | *2* |
| *1* | *1* | *1* | *0* |
| *2* | *1* | *0* | *0* |

| A | B | 1<br>A $\supset$ B | 2<br>A $\supset$ B | 3<br>A $\supset$ B |
|---|---|---|---|---|
| *0* | *0* | *0* | *0* | *0* |
| *0* | *1* | *2* | *1* | *1* |
| *0* | *2* | *2* | *2* | *2* |
| *1* | *0* | *2* | *0* | *0* |
| *1* | *1* | *2* | *0* | *0* |
| *1* | *2* | *0* | *1* | *2* |
| *2* | *0* | *0* | *0* | *0* |
| *2* | *1* | *0* | *0* | *0* |
| *2* | *2* | *0* | *0* | *0* |

Nimmt die Prämisse einer Anwendung der Regel SR1 für alle Belegungen den Wert *0* an, so offenbar auch die Konklusion, da die eingesetzte Formel höchstens denselben Wertevorrat hat, wie eine Satzvariable. Aus der Tabelle für die Implikation geht außerdem hervor, daß immer, wenn die Formeln A und A $\supset$ B den Wert *0* annehmen, auch B den Wert *0* annimmt. Betrachten wir nun die drei Axiome:

1) A1* ist unabhängig. Man verifiziert leicht, daß die Axiome A2* und A3* nach Maßgabe der Spalten Nr. 1 in den beiden obigen Tabellen für alle Belegungen den Wert *0* annehmen. Also nehmen auch alle Formeln, die nur mit Hilfe dieser beiden Axiome und der Deduktionsregeln R1 und SR1 beweisbar sind, bei allen Belegungen den Wert *0* an. Die Einsetzung *0* für $p$, *1* für $q$ ergibt aber für A1* den Wert *2*:

$0 \supset (1 \supset 0)$
$0 \supset 2$
$2.$

Also nimmt A1* nicht bei allen Belegungen den Wert *0* an, also ist A1* nicht abhängig von A2* und A3*.

2) A2* ist unabhängig. Man verifiziert wieder leicht, daß die Axiome A1* und A3* nach Maßgabe der Spalten Nr. 2 für alle Belegungen den Wert *0* annehmen. Die Einsetzung von *1* für $p$, *1* für $q$ und *2* für $r$ in A2 ergibt aber den Wert *1* und zeigt so die Unabhängigkeit von A2*.

3) A3* ist unabhängig. Die Axiome A1* und A2* ergeben nach Maßgabe der Spalten Nr. 3 bei allen Belegungen den Wert *0*. Setzt man in A3* für $p$ *1* und für $q$ *2* ein, so erhält man den Wert *2* und damit die Unabhängigkeit von A3*.

Aus diesem Ergebnis für $\mathfrak{A}1^*$ können wir schließen, daß auch die Axiomenschemata von $\mathfrak{A}1$ voneinander unabhängig sind. Die Axiome von $\mathfrak{A}1$ sind hingegen nicht voneinander unabhängig. Wir haben früher den Satz $p \supset p$ ohne Verwendung des Schemas A3 bewiesen. Nach A1 gilt nun $p \supset p \supset ((\neg p \supset \neg p) \supset (p \supset p))$, also mit $p \supset p$ und R1 $(\neg p \supset \neg p) \supset (p \supset p)$. Dieser Satz ist ein Axiom nach dem Schema A3, den wir so auch ohne Verwendung von A3 beweisen können.

Man kann auch die Deduktionsregeln in die Unabhängigkeitsuntersuchungen einbeziehen, indem man sagt: eine Deduktionsregel eines Kalküls $\mathfrak{K}$ ist unabhängig von dem Restsystem, wenn es Theoreme von $\mathfrak{K}$ gibt, die nur mit Hilfe von Anwendungen dieser Regel bewiesen werden können. Diese Problemstellung ist jedoch für die Kalküle $\mathfrak{A}1$ und $\mathfrak{A}1^*$ uninteressant, denn $\mathfrak{A}1$ enthält nur eine Deduktionsregel, ohne die also nur die Axiome beweisbar sind. Und in $\mathfrak{A}1^*$ sind ohne Verwendung der Regel SR1 nur Sätze beweisbar, die nur die Satzvariablen $p$, $q$ und $r$ enthalten, also nur ein Teil der Theoreme von $\mathfrak{A}1^*$[1].

*Übungsaufgaben:*

1. Man beweise, daß aus $A_1, \ldots, A_m \vdash_{\mathfrak{A}1^*} B$ nicht folgt $A_1, \ldots, A_m \rightarrow B$! (Warum ist der Herleitungsbegriff von $\mathfrak{A}1^*$ stärker als der von $\mathfrak{A}1$?)

2. FREGES Kalkül der A.L. in [14] enthält neben den Deduktionsregeln R1 und SR1 und den Axiomen A1* und A2* die Axiome:

a) $(p \supset (q \supset r)) \supset (q \supset (p \supset r))$
b) $(p \supset q) \supset (\neg q \supset \neg p)$
c) $\neg\neg p \supset p$
d) $p \supset \neg\neg p$.

Man beweise die Widerspruchsfreiheit dieses Systems. Man beweise seine Vollständigkeit durch Ableitung von A3* in diesem System über die Vollständigkeit von $\mathfrak{A}1^*$. Und man zeige die Abhängigkeit des Axioms (a) durch Ableitung dieses Axioms aus A1* und A2*. (Das letztere Resultat wurde von ŁUKASIEWICZ in [49] angegeben.)

### 1.3.6 Die Grenzen der Aussagenlogik

Mit der Präzisierung des Systems $\mathfrak{A}1$ beschließen wir nun die Darstellung der A.L. Mit ihr haben wir eine Theorie der modernen Logik kennengelernt, die zwar ihren Grundlagen nach sehr einfach, aber dennoch von grundlegender Bedeutung ist, bildet sie doch die Basis für die Entwicklung der anderen logischen Theorien. Zugleich läßt sich an dieser Theorie der Aufbau eines formalisierten Systems ablesen, die Methode der Formalisierung und ihre Leistung. Einleitend konnten wir diese Methode mangels konkreten Anschauungsmaterials nur in großen Zügen umreißen, jetzt vermögen wir den dort abgesteckten Rahmen mit festerem Inhalt zu erfüllen und haben so ein genaues Verständnis von dem erworben, womit sich die Logik und insbesondere die moderne Logik beschäftigt.

---

[1] Der Grundgedanke für solche Unabhängigkeitsbeweise geht auf P. BERNAYS zurück. E. V. HUNTINGTON hat diesen Gedanken dann auf die Unabhängigkeitsbeweise für Deduktionsregeln übertragen. Vgl. dazu auch [9], S. 163.

Blicken wir nun aber auf die Leistungsfähigkeit der A.L., auf die Menge der Schlüsse, die sie als gültig auszuzeichnen vermag, so erkennen wir anhand der folgenden Beispiele, daß ihr enge Grenzen gesteckt sind.

I) Alle Menschen sind sterblich.
Sokrates ist ein Mensch.
―――――――――――――――
Sokrates ist sterblich.

II) Alle Huftiere sind Säugetiere.
Alle Säugetiere sind Wirbeltiere.
―――――――――――――――
Alle Huftiere sind Wirbeltiere.

III) Kein Fisch ist ein Säugetier.
Alle Huftiere sind Säugetiere.
―――――――――――――――
Kein Huftier ist ein Fisch.

Wir finden, daß diese einfachen Schlüsse zwar alle logisch gültig sind, daß aber keiner von ihnen a.l. gültig ist. Denn da die Prämissen und Konklusionen sämtlich keine a.l. Operatoren enthalten, und da keine Konklusion mit einer der Prämissen identisch ist, haben diese Schlüsse a.l. die Gestalt $A, B \rightarrow C$. Unsere a.l. Analyse der Sätze genügt also nicht, um diese Schlüsse zu rechtfertigen. Will man sie als logisch gültig ausweisen, so muß man vielmehr auf die Subjekt-Prädikat-Struktur der Prämissen und Konklusionen eingehen und damit die Grenze der A.L. überschreiten, und eine neue logische Theorie entwickeln, die Prädikatenlogik, deren Darstellung das nächste Kapitel gewidmet sein soll.

Material für ein weiterführendes Studium der A.L. findet sich in [9], [61] und [64], Kap. I.

# 2 Prädikatenlogik

In der Prädikatenlogik untersucht man eine weitere Klasse von formalen Schlüssen als in der Aussagenlogik. Die Prädikatenlogik ist also eine Erweiterung der Aussagenlogik. Wie diese auf der Analyse der sprachlichen Funktion der aussagenlogischen Operatoren wie „nicht" „und", „oder" usf. aufbaut, so gründet sich ihre Erweiterung auf die Theorie der sogenannten prädikatenlogischen Operatoren „alle" und „einige". Um die sprachliche Funktion dieser Worte zu analysieren, müssen wir zunächst die Subjekt-Prädikat-Struktur der Sätze untersuchen, die wir in der Aussagenlogik vernachlässigt haben. Unsere nächste Aufgabe wird also sein, die Subjekt-Prädikat-Struktur und die prädikatenlogischen Operatoren in der Umgangssprache zu studieren. Die dabei gewonnenen Ergebnisse sollen dann in den folgenden Abschnitten in einem formalisierten System der Prädikatenlogik präzisiert werden. Die Worte „Prädikatenlogik" und „prädikatenlogisch" wollen wir im folgenden immer durch „P.L." und „p.l." abkürzen.

## 2.1 Prädikatenlogische Strukturen in der Umgangssprache

### 2.1.1 Eigennamen und Prädikate

Die Subjekt-Prädikat-Struktur der Sätze wollen wir nicht im gleichen Sinne beschreiben, wie das die Grammatik tut, da es uns hier nicht auf sprachliche Eigentümlichkeiten, sondern auf logische Unterscheidungen ankommt. Wir gehen aus von einfachen Sätzen, die keine Teilsätze enthalten (weder Nebensätze, noch mehrere Hauptsätze). Solche einfachen Sätze sind z. B.

1) „Hans raucht".
2) „Die Zugspitze ist ein Berg".
3) „Die Erde ist größer als der Mond".
4) „Richard liebt Maria".

Als *Eigennamen* bezeichnen wir einen sprachlichen Ausdruck, der einen Gegenstand bezeichnet, sei dieser konkret oder abstrakt. In unseren Beispielsätzen kommen folgende Eigennamen vor: „Hans“, „die Zugspitze“, „die Erde“, „der Mond“, „Richard“ und „Maria“. Hingegen sind Begriffswörter wie „Berg“, die keine Gegenstände bezeichnen sondern Eigenschaften von Gegenständen, keine Eigennamen.

Wenn wir nun einen oder mehrere Eigennamen in einem Satz streichen, so entsteht ein Ausdruck, den wir als *Prädikat* bezeichnen. Jeder Satz, der einen Eigennamen enthält, läßt sich also, ev. in verschiedener Weise, in Eigennamen und ein Prädikat zerlegen. Aus unseren Beispielsätzen erhalten wir so die Prädikate:

1′) „ raucht“.
2′) „ ist ein Berg“.
3′) „ ist größer als der Mond“.
3″) „Die Erde ist größer als “.
3‴) „ ist größer als “.
4′) „ liebt Maria“.
4″) „Richard liebt “.
4‴) „ liebt “.

Wir wollen nun die Leerstellen in diesen Prädikaten, die in den zugehörigen Sätzen (1) bis (4) durch Eigennamen ausgefüllt waren, genauer kennzeichnen und damit einen ersten Schritt zur Symbolisierung der Subjekt-Prädikat-Struktur tun. Dazu können wir Variable verwenden, d. h. Buchstaben wie z. B. „$x$“, „$y$“, „$z$“,..., die wir auch als *Gegenstandsvariablen* (kurz GV) bezeichnen. Die Wahl der GV soll dabei keine Rolle spielen, es sollen nur Leerstellen, die durch Streichung verschiedener Eigennamen im gleichen Satz entstanden sind, auch durch verschiedene GV ausgefüllt werden. Im folgenden wollen wir immer Prädikate mit Variablen schreiben, also statt (1′) bis (4‴) etwa:

1′) „$x$ raucht“.
2′) „$x$ ist ein Berg“.
3‴) „$y$ ist größer als $z$“.
4‴) „$x$ liebt $y$“ usf.

Diese Schreibweise legt es nahe, Prädikate verschiedener Stellenzahl zu unterscheiden: als *Stellenzahl* eines Prädikates bezeichnen wir die Zahl der in ihm vorkommenden (untereinander verschiedenen) GV.

So sind (1′) und (2′) einstellige, (3‴) und (4‴) zweistellige Prädikate. Das Prädikat „$x$ liebt $x$“ ist ein einstelliges Prädikat, denn die beiden Vorkommnisse der GV „$x$“ sind Vorkommnisse derselben GV.

Prädikate bezeichnet man auch als *Satzformen,* denn aus ihnen entstehen Sätze, wenn man für alle Variablen Eigennamen einsetzt. Eine solche Einsetzung, bei der für alle Vorkommnisse der gleichen GV im Prädikat immer der gleiche Eigenname einzusetzen ist, nennen wir auch *Substitution.* Werden für alle Variablen eines Prädikates Eigennamen eingesetzt, so bezeichnen wir das Resultat dieser Einsetzung als *Instanz* des Prädikates. Es bedeutet nun für die Zwecke der Logik eine wesentliche Vereinfachung, wenn man fordert, daß alle Instanzen der Prädikate Sätze sind. Diese Forderung bezeichnen wir auch als *Totalitätsforderung* für Prädikate. Sie ist in der Umgangssprache nicht erfüllt. Man wird solche Ausdrücke wie „17 raucht“ oder „München liebt den Mond“ nicht als Sätze ansehen, weil die Prädikate „raucht“ und „liebt“ nur für Menschen erklärt sind, so daß man aus (1′) und (4‴) nur dann Sätze erhält, wenn man für „$x$“ und „$y$“ Namen von Menschen einsetzt. Aber man kann aus solchen unvollständig erklärten Prädikaten immer auf einfache Weise total definierte Prädikate gewinnen, indem man festsetzt, daß alle ursprünglich bedeutungslosen Instanzen des Prädikates nun falsche Sätze sein sollen. „17 raucht“ und „München liebt den Mond“ sind danach also als falsche Sätze anzusehen.

Wir haben bisher die Prädikate nur insoweit semantisch charakterisiert, als wir sagten, daß ihre Instanzen Sätze sind. Man kann aber den Prädikaten auch eine selbständige Bedeutung zuordnen, wie das dem üblichen Verständnis der Umgangssprache entspricht. Man wird dann sagen: Prädikate bezeichnen Begriffe. Näherhin sagt man: einstellige Prädikate bezeichnen Eigenschaften: „$x$ ist rot“ bezeichnet die Eigenschaft, rot zu sein, „$x$ ist ein Berg“ bezeichnet die Eigenschaft, ein Berg zu sein. Mit Verben drücken wir momentane Eigenschaften aus: „$x$ raucht“ bezeichnet die Eigenschaft, zu einem bestimmten Zeitpunkt (in dem die Aussage gemacht wird) zu rauchen (ein Rauchender zu sein), usw. Mehrstellige Prädikate bezeichnen Beziehungen zwischen Gegenständen, „$x$ ist größer als $y$“ bezeichnet die Beziehung, die zwischen einem ersten und einem zweiten Gegenstand besteht, wenn der erste größer ist als der zweite, die Beziehung des Größerseins also, „$x$ liebt $y$“ bezeichnet die Beziehung der Liebe. Eigenschaften und Beziehungen fassen wir zusammen unter dem Terminus „Begriff“ und unterscheiden so einstellige Begriffe (Eigenschaften) und mehrstellige Begriffe (Beziehungen).

Wie sich ein Satz zusammensetzt aus Prädikat und Eigennamen, so wollen wir auch sagen, daß sich die Proposition zusammensetzt aus einem Begriff und Gegenständen: genauer: die durch einen Satz bezeichnete Proposition setzt sich zusammen aus dem durch das Satzprädikat bezeichneten Begriff und den durch die Eigennamen im Satz bezeichneten Gegenstände. Die Satzbedeutung wird also determiniert durch die Bedeutung seiner Bestandteile.

Wie für die Aussagenlogik nur die Charakterisierung der Sätze als wahr oder falsch von Interesse war, nicht hingegen der Satzinhalt, die Proposition, so ist, wie wir später noch sehen werden, für die Prädikatenlogik nur der *Umfang* der durch die Prädikate bezeichneten Begriffe, nicht deren *Inhalt* von Interesse. Den Unterschied zwischen Inhalt und Umfang eines Begriffes können wir am Beispiel der beiden Prädikate „$x$ ist ein Lebewesen mit Herz" und „$x$ ist ein Lebewesen mit Niere" veranschaulichen: Diese beiden Prädikate bezeichnen Begriffe verschiedenen Inhalts: die Eigenschaft, ein Lebewesen mit Herz zu sein, ist verschieden von der Eigenschaft, ein Lebewesen mit Niere zu sein. Wenn die Erfahrung aber zeigt, daß alle Lebewesen, die ein Herz haben, auch eine Niere haben und umgekehrt, so fallen unter beide Begriffe die gleichen Gegenstände, ihr Umfang ist daher gleich.

Den Umfang des bezeichneten Begriffes nennt man auch *Extension* des Prädikates, seinen Inhalt bzw. den Begriff selbst die *Intension* des Prädikates.

Mit der Verwendung von GV zum Ausdruck der Prädikate haben wir oben schon einen ersten Schritt zur Einführung eines prädikatenlogischen Symbolismus getan. Der Nutzen dieses Schrittes zeigte sich bei der Unterscheidung von Prädikaten verschiedener Stellenzahl insbesondere dort, wo verschiedene Prädikate mit dem gleichen Verbum oder Attribut gebildet sind, wie bei der Unterscheidung der Prädikate „$x$ liebt $y$" und „$x$ liebt $x$". Würde man hier die Variablen weglassen, so erhielte man beidesmal den Ausdruck „liebt", dem man nicht ansieht, ob er eine Eigenschaft oder eine Beziehung ausdrückt. Nach dem Gedanken der *lingua characteristica* müssen aber solche Unterschiede in der Bedeutung syntaktisch deutlich gemacht werden.

Wir wollen nun auch den Teil des Prädikates durch ein Symbol wiedergeben, der von den Variablen verschieden ist. Dazu verwenden wir die Buchstaben „$F$", „$G$", „$H$",..., die wir auch als *Prädikat-*

*konstanten* (kurz PK) bezeichnen. In jedem Kontext ordnen wir einer solchen PK eine Stellenzahl zu: soll z. B. „$F$" ein umgangssprachliches Prädikat symbolisieren, in dem bei Ersetzung aller Eigennamen durch verschiedene GV $n$ Vorkommnisse von GV enthalten sind, so nennen wir „$F$" eine $n$-stellige PK. Wir bilden dann mit „$F$" ein Prädikat unserer Symbolsprache, indem wir hinter den Buchstaben „$F$" in Klammern und durch Kommata getrennt $n$ GV anschreiben, also z. B. „$F(x_1, \ldots, x_n)$". So können wir „$x$ raucht" symbolisieren durch „$G(x)$", wo „$G$" dann eine einstellige PK ist, „$x$ liebt $y$" durch „$H(x, y)$", wo „$H$" eine zweistellige PK ist. Das Prädikat „$x$ liebt $x$" ist dann durch „$H(x, x)$" zu symbolisieren. Auch hier ist „$H$" eine zweistellige PK, aber „$H(x, x)$" ist ein einstelliges Prädikat. Wenn wir nun Eigennamen durch die Buchstaben „$a$", „$b$", „$c$",... abkürzen, so stellen sich die einfachen Sätze unserer Symbolsprache wie folgt dar: „$F(a_1, \ldots, a_n)$", „$G(c)$", „$H(b, c)$", usw. Die Buchstaben „$a$", „$b$", „$c$",... nennen wir *Gegenstandskonstanten* (kurz GK). Sätze dieser Gestalt sind nun unsere Atomsätze. Aus ihnen können wir mit Hilfe der aussagenlogischen Verknüpfungen komplexe Sätze bilden wie z. B. „$\neg G(a)$", „$H(a, b) \wedge H(b, c) \supset H(a, c) \vee F(c)$" usw. Wenn wir in solchen Sätzen nun GK durch GV ersetzen, so erhalten wir auch komplexe Prädikate, wie z. B. „$H(a, x) \wedge H(x, y) \supset H(a, y) \vee F(y)$" oder „$H(z, x) \wedge H(x, y) \supset H(z, y) \vee F(y)$", „$H(a, b) \wedge H(x, y) \supset H(a, y) \vee F(c)$" usw. Aus vorgegebenen Grundprädikaten können wir also mit Hilfe der a.l. Verknüpfungen komplexe Prädikate erzeugen. Ihre Bedeutung ergibt sich aus der Bedeutung der Grundprädikate: bedeute „$F(x)$" die Eigenschaft, rot zu sein, „$G(x)$" die Eigenschaft, rund zu sein, so bedeutet „$\neg F(x)$" die Eigenschaft, nicht rot zu sein, „$F(x) \wedge G(x)$" die Eigenschaft rot und rund zu sein.

### 2.1.2 All- und Existenzsätze

Wie sich die A.L. auf die Theorie der a.l. Operatoren wie „nicht" „und", „oder" usf. aufbaut, so gründet sich die Prädikatenlogik auf die Theorie der sogenannten p.l. Operatoren, die wir umgangssprachlich durch Wörter wie „alle" oder „jedes" und „einige" oder „es gibt ein" ausdrücken. Wir wollen zunächst die Funktion dieser Wörter in der Umgangssprache untersuchen.

Die Aussage: I) „Alle Dinge sind rot oder nicht rot" steht ihrer grammatischen Gestalt nach in enger Analogie zu der Aussage: II)

„Diese Rose ist rot oder nicht rot". Danach liegt es zunächst nahe zu sagen: Der Ausdruck „alle Dinge" verhält sich zum Satz I ebenso wie der Ausdruck „diese Rose" zum Satz II, er ist also ein Eigenname, der einen Gegenstand bedeutet, von dem ausgesagt wird, er sei rot oder nicht rot. Diese Deutung erweist sich aber als undurchführbar. Zunächst kann „alle Dinge" kein Eigenname sein, da dieser Ausdruck keinen bestimmten Gegenstand, kein einzelnes Ding bezeichnet. Man kann auch nicht sagen, daß er die Gesamtheit aller Dinge, die Klasse aller Dinge bezeichnet, denn der Satz I besagt nichts über diese Klasse, sondern etwas über die Gegenstände, die ihr zugehören. Ferner läßt sich der Inhalt des Satzes II auch wiedergeben durch den Satz: II') „Diese Rose ist rot oder diese Rose ist nicht rot", II läßt sich ja als Kurzform dieses Satzes auffassen. Hingegen ist der zu II' analoge Satz: I') „Alle Dinge sind rot oder alle Dinge sind nicht rot" mit I nicht gleichbedeutend, da I wahr, I' aber falsch ist.

Ebensowenig läßt sich auch der Ausdruck „einige Dinge" z. B. in dem Satz III) „Einige Dinge sind rot und nicht rot" als Eigenname auffassen. Denn „einige Dinge" bezeichnet keinen bestimmten Gegenstand und die Sätze III und: III') „Einige Dinge sind rot und einige Dinge sind nicht rot" sind nicht inhaltsgleich, da III falsch, III' aber wahr ist.

Wenn nun die Wörter „alle" und „einige" keine Eigennamen sind, worin besteht dann ihre sprachliche Funktion? Um uns zu diesem Punkt einfacher ausdrücken zu können, wollen wir die verschiedenen umgangssprachlichen Formulierungen der Sätze, die Ausdrücke wie „alle", „jedes" bzw. „einige" oder „es gibt ein" enthalten, immer in eine feste Form umschreiben, für die wir die beiden Formulierungen: IV) „Für jedes Ding gilt: ..." und V) „Es gibt ein Ding, für das gilt: ..." wählen. Dann nehmen z. B. die Sätze „Alle Dinge sind rot" und „Einige Dinge sind rot" die Form an: „Für jedes Ding gilt: es ist rot" und „Es gibt ein Ding, für das gilt: es ist rot".

Haben wir nun ein einstelliges Prädikat, so können wir daraus durch Voranstellen der Ausdrücke IV und V Sätze bilden, wenn wir die GV des Prädikates durch das Wort „es" ersetzen. Wir können also sagen: die Ausdrücke IV und V sind Operatoren, mit denen wir aus einstelligen Prädikaten Sätze bilden können. Wir wollen diese Operatoren als *All-* bzw. *Existenzoperatoren* bezeichnen, die mit ihnen gebildeten Sätze als *All-* bzw. *Existenzsätze* oder auch als *Generalisierungen* bzw. *Partikularisierungen* der zugehörigen Prädikate.

Neben der syntaktischen Funktion dieser Operatoren müssen wir auch ihre semantische Funktion betrachten. Diese Funktion läßt sich charakterisieren durch folgende beiden Prinzipien:

**2.1.2.1** Ein Allsatz ist wahr genau dann, wenn der durch das generalisierte Prädikat bezeichnete Begriff auf alle Gegenstände zutrifft, – er ist falsch, wenn es mindestens einen Gegenstand gibt, auf den dieser Begriff nicht zutrifft.

**2.1.2.2** Ein Existenzsatz ist wahr, wenn es mindestens einen Gegenstand gibt, auf den der durch das partikularisierte Prädikat bezeichnete Begriff zutrifft, – er ist falsch, wenn dieser Begriff auf keinen Gegenstand zutrifft.

Diese Prinzipien spiegeln den umgangssprachlichen Gebrauch der Wörter „jedes" und „es gibt ein" wider, denn wir sagen, der Satz „Für jedes Ding gilt: es ist rot" sei wahr, genau dann, wenn alle Gegenstände die Eigenschaft ‚rot' haben, und wir sagen, der Satz „Es gibt ein Ding, für das gilt: es ist rot" sei wahr, genau dann, wenn es mindestens einen Gegenstand gibt, der die Eigenschaft ‚rot' hat.

Wir haben zunächst nur die Zusammensetzung der Wörter „jedes" und „es gibt ein" mit dem Prädikat „Ding" betrachtet. Wie steht es nun mit solchen Zusammensetzungen wie „jeder Mensch" oder „es gibt einen Philosophen" bzw. den Sätzen der Gestalt „Für jeden Menschen gilt: ..." oder „Es gibt einen Philosophen, für den gilt: ———"? Sind solche Zusammensetzungen von „jeder" und „es gibt ein" mit anderen Begriffsworten neue Operatoren, für die eigene semantische Prinzipien aufzustellen wären? Die Antwort darauf ergibt sich aus der Möglichkeit, solche All- und Existenzsätze auf die oben betrachteten zurückzuführen: Wir können etwa den Satz „Für jeden Menschen gilt: er ist sterblich" übersetzen in den Satz „Für jedes Ding gilt: wenn es ein Mensch ist, dann ist es sterblich". Und wir können den Satz „Es gibt einen Philosophen, für den gilt: er ist Existentialist" übersetzen in den Satz „Es gibt ein Ding, für das gilt: es ist ein Philosoph und es ist Existentialist". Daher kommen wir also mit den Operatoren IV und V aus.

Bisher haben wir nur Zusammensetzungen der prädikatenlogischen Operatoren mit einstelligen Prädikaten betrachtet und gesehen, daß diese Zusammensetzungen Sätze ergeben. Man kann die Operatoren aber auch auf mehrstellige Prädikate anwenden, wie folgende Beispiele zeigen: Aus dem zweistelligen Prädikat „$x$ ist mit $y$ identisch oder $x$

ist nicht mit $y$ identisch" erhalten wir durch Voranstellen des Alloperators das einstellige Prädikat: VI) „Für jedes Ding gilt: es ist mit $y$ identisch oder es ist nicht mit $y$ identisch". Und aus dem dreistelligen Prädikat „$x$ liegt zwischen $y$ und $z$" erhalten wir durch Partikularisierung das zweistellige Prädikat: VII) „Es gibt ein Ding, für das gilt: es liegt zwischen $y$ und $z$".

Wir sehen also, daß die p.l. Operatoren auch auf mehrstellige Prädikate angewendet werden können und daß sie aus $n$-stelligen Prädikaten für $n > 1$ $(n-1)$-stellige Prädikate erzeugen. Auf diese $(n-1)$-stelligen Prädikate müssen sich dann wieder p.l. Operatoren anwenden lassen. Aber der sprachliche Ausdruck solcher mehrfacher Generalisierungen und Partikularisierungen macht in vielen Fällen Schwierigkeiten und folgt in der Umgangssprache keinen einfachen Gesetzen. Aus VI erhalten wir z. B. VIII) „Es gibt ein Ding, für das gilt: für jedes Ding gilt: es ist mit ihm identisch oder es ist mit ihm nicht identisch". Hier ist der Bezug des Pronomens „ihm" auf „ein Ding" und von „es" auf „jedes Ding" noch deutlich. Aber wenn wir aus VII den Satz bilden: IX) „Es gibt ein Ding, für das gilt: es gibt ein Ding, für das gilt: es gibt ein Ding, für das gilt: es liegt zwischen ihm und ihm" so bleibt der Bezug der Pronomina völlig im Dunkeln, und damit auch der Sinn dieses Satzes. Um ihren Bezug auf die verschiedenen Operatoren deutlich werden zu lassen, empfiehlt es sich daher, ihn symbolisch hervorzuheben. Das kann z. B. durch die Verwendung von Variablen geschehen: wir verwenden GV statt der Pronomina und fügen die gleichen Variablen in die Operatoren ein. Wir schreiben also statt „Für jedes Ding gilt:" „Für jedes Ding $x$ gilt:", wo $x$ eine GV ist. Und statt „Es gibt ein Ding, für das gilt:" schreiben wir „Es gibt ein Ding $x$, für das gilt:". Dann wird aus dem Satz „Für jedes Ding gilt: es ist rot" also „Für jedes Ding $x$ gilt: $x$ ist rot" und aus VIII und IX entstehen die Sätze: „Es gibt ein Ding $x$, für das gilt: für jedes Ding $y$ gilt: $x$ ist mit $y$ identisch oder $x$ ist nicht mit $y$ identisch", und „Es gibt ein Ding $x$, für das gilt: es gibt ein Ding $y$, für das gilt: es gibt ein Ding $z$, für das gilt: $x$ liegt zwischen $y$ und $z$".

Damit haben wir den ersten Schritt zur Symbolisierung der All- und Existenzsätze getan. Wir wollen diese Symbolisierung nun vervollständigen:

Zum Ausdruck der Generalisierung verwenden wir das Symbol „$\Lambda$" und schreiben für „Für jedes Ding $x$ gilt: ..." kurz „$\Lambda x(\ldots)$" und lesen diesen Ausdruck kurz „Für alle $x$ gilt: ...". Zum Ausdruck der Partikularisierung verwenden wir das Symbol „$\vee$" und schreiben für „Es gibt ein Ding $x$, für das gilt: ..." kurz „$\vee x(\ldots)$", wobei wir diesen Ausdruck lesen als „es gibt ein $x$, für das gilt: ...". Die Symbole „$\wedge$" und „$\vee$" nennen wir *All-* und *Existenzoperator*, die Ausdrücke $\wedge x$ und $\vee x$ nennen wir *All-* und *Existenzquantor*.

Wenn wir nun die im vorausgehenden Abschnitt besprochene Symbolik für Prädikate verwenden, so haben wir eine einfache und übersichtliche Symbolik zum Ausdruck p.l. Sätze, in der All- bzw. Existenzsätze gebildet werden durch Voranstellen eines Quantors vor das in Klammern gesetzte Prädikat. Es steht also „$\wedge x(F(x))$" für „alle $x$ haben die Eigenschaft $F$", „$\vee x(\neg\wedge y(H(x, y)))$" für „Es gibt ein $x$, so daß nicht alle $y$ zu $x$ in der Beziehung $H$ stehen" usw.

Daß man ein besonderes Zeichen für die Allgemeinheit braucht und nicht einfach die GV zum Ausdruck der Allgemeinheit verwenden kann, wie z. B. in der Formulierung der Gleichung „$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$" für den All-satz „Für alle Zahlen $x$ und $y$ gilt: $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$" ergibt sich schon aus der Notwendigkeit der Unterscheidung zwischen einer Verneinung der Allgemeinheit und der Allgemeinheit der Verneinung. In dem Satz „Alle Dinge haben die Eigenschaft nicht-$F$" wird etwas anderes ausgesagt als in dem Satz „Nicht alle Dinge haben die Eigenschaft $F$", und beide können so verschiedene Wahrheitswerte haben. Wenn man aber die Allgemeinheit nur durch die Variable „$x$" ausdrücken wollte, so wären beide Sätze symbolisch als „$\neg F(x)$" zu schreiben, so daß ihr Bedeutungsunterschied verwischt würde.

Da wir bereits oben für den Fall der Quantifizierung, d. h. der Generalisierung oder der Partikularisierung mehrstelliger Prädikate, die Notwendigkeit hervorgehoben haben, nicht nur Operatoren, sondern Quantoren zu verwenden zur Kennzeichnung derjenigen Leerstellen eines Prädikates, auf die sich die All-, bzw. Existenzbehauptung bezieht, so ist damit die Zweckmäßigkeit unserer Symbolik hinreichend erwiesen. Der weitere Umgang mit dieser Symbolik wird den Blick für die Einfachheit und die Leistungsfähigkeit dieser Symbolik noch schärfen[1].

Die Verwendung von GV zum Ausdruck der Quantifizierung macht nun eine Unterscheidung notwendig: In dem Satz $\wedge x(F(x))$ dient die Variable $x$ zur Andeutung der Allgemeinheit, nicht aber, wie in dem Prädikat $F(x)$, zur Hervorhebung der Leerstelle eines Prädikates und

[1] Die Quantorensymbolik wurde zuerst von FREGE in [14] eingeführt. Sie ermöglichte ihm den präzisen Aufbau eines Logiksystems, das alle älteren Systeme an Leistungsfähigkeit weit übertraf. Vgl. dazu auch das 6. Kapitel.

zur Andeutung der Möglichkeit, in diese Leerstelle GK einzusetzen. Wir sagen auch: die Variable $x$ ist in $\wedge x(F(x))$ *nicht frei* für Einsetzungen, oder $x$ ist in diesem Ausdruck *gebunden*. GV können in unseren p.l. Formeln also frei oder gebunden vorkommen, je nachdem ob sie eine Substituierbarkeit andeuten oder eine Quantifizierung näher bestimmen. Eine GV kann auch in ein und derselben Formel frei und gebunden vorkommen, wie das Beispiel $F(x) \wedge \wedge x(G(x))$ zeigt: das erste Vorkommnis von $x$ dient hier, um eine Ersetzbarkeit durch GK anzudeuten, das zweite und dritte Vorkommnis drückt eine Allgemeinheit aus, ist also gebunden. Wir können sagen: ein Vorkommnis einer GV in einer Formel ist frei, wenn es weder Bestandteil eines Quantors ist, noch im Bereich eines Quantors vorkommt, sonst gebunden. Dabei nennen wir den auf einen Quantor unmittelbar folgenden und in Klammern eingeschlossenen Ausdruck den *Bereich* dieses Quantors.

Wenn wir die Stellenzahl eines Prädikates bestimmen wollen, das Quantoren enthält, so sind dabei also nur die freien Vorkommnisse von GV zu rechnen, so daß etwa $F(x) \wedge \wedge x(\vee y(G(x, y)))$ ein einstelliges Prädikat ist.

Zur Einsparung von Klammerzeichen setzen wir noch fest: Enthält das zu quantifizierende Prädikat keine a.l. Operatoren oder hat es die Gestalt $\neg$A, $\wedge$xA oder $\vee$xA, wobei sich der Operator $\neg$, $\wedge$ oder $\vee$ auf die ganze Formel A bezieht, so kann man die Klammer weglassen und so z. B. statt $\wedge x(F(x))$ schreiben $\wedge xF(x)$, $\wedge x \neg F(x)$ statt $\wedge x(\neg F(x))$ und $\wedge x \vee y F(x, y)$ statt $\wedge x(\vee y F(x, y))$.

Wir wollen nun diese p.l. Symbolik anhand einiger Übersetzungsaufgaben einüben:

A) Übersetzungen von Formeln in umgangssprachliche Sätze:

$\wedge xF(x)$ — Für jedes Ding $x$ gilt: $x$ hat die Eigenschaft $F$, oder kurz: Alle $x$ haben die Eigenschaft $F$.

$\vee xF(x)$ — Es gibt ein Ding $x$, für das gilt: $x$ hat die Eigenschaft $F$, oder kurz: Es gibt ein $x$ mit der Eigenschaft $F$.

$\wedge x \neg F(x)$ — Alle $x$ haben die Eigenschaft nicht-$F$, oder: Alle $x$ haben nicht die Eigenschaft $F$, oder: Kein $x$ hat die Eigenschaft $F$.

$\neg \wedge xF(x)$ — Nicht alle $x$ haben die Eigenschaft $F$, d. h. einige $x$ haben die Eigenschaft nicht-$F$.

$\neg\wedge x\neg F(x)$ — Nicht alle $x$ haben die Eigenschaft nicht-$F$, d. h. einige $x$ haben die Eigenschaft $F$.

Da die Aussagen $\neg\wedge x\neg F(x)$ und $\vee xF(x)$ also gleichbedeutend sind, können wir den Existenzoperator auch durch den Alloperator definieren und setzen:

$\vee xF(x) := \neg\wedge x\neg F(x)$.

$\neg\vee x\neg F(x)$ — Es gibt nicht ein $x$ mit der Eigenschaft nicht-$F$, d. h. alle $x$ haben die Eigenschaft $F$.

Es sind also die Aussagen $\neg\vee x\neg F(x)$ und $\wedge xF(x)$ gleichbedeutend, so daß wir umgekehrt auch den Alloperator durch den Existenzoperator definieren könnten, indem wir setzen:

$\wedge xF(x) := \neg\vee x\neg F(x)$.

$\wedge x(F(x) \supset G(x))$ — Für alle $x$ gilt: wenn $x$ die Eigenschaft $F$ hat, dann hat $x$ auch die Eigenschaft $G$, oder: alle $x$ der Eigenschaft $F$ haben auch die Eigenschaft $G$, oder: alle $F$ sind $G$.

Ein solches Urteil nennt man in der traditionellen Logik auch ein *allgemein bejahendes Urteil.* Es besagt, daß der Umfang des Begriffes $F$ (die Menge der unter den Begriff $F$ fallenden Gegenstände) im Umfang des Begriffes $G$ enthalten ist. Veranschaulicht man den Umfang eines Begriffes durch einen Kreis, die unter diesen Begriff fallenden Gegenstände durch die Punkte in diesem Kreis, so kann man sich dies Verhältnis der Begriffsumfänge $F$ und $G$ durch folgende Figur veranschaulichen:

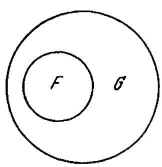



Fig. 1

$\wedge x(F(x) \supset \neg G(x))$ — Alle $x$ der Eigenschaft $F$ haben nicht die Eigenschaft $G$, oder: alle $F$ sind nicht-$G$, oder: kein $F$ ist $G$.

Ein solches Urteil nennt man auch ein *allgemein verneinendes* Urteil. Es besagt, daß kein Gegenstand sowohl dem Umfang von $F$ wie dem von $G$ angehört. Dies Verhältnis veranschaulicht die folgende Figur:

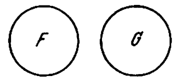



Fig. 2

$\bigvee x(F(x) \wedge G(x))$ — Einige $x$ haben die Eigenschaft $F$ und die Eigenschaft $G$, oder: einige $F$ sind $G$.

Ein solches Urteil nennt man *partikulär bejahend*. Es besagt, daß es Gegenstände gibt, die sowohl dem Umfang von $F$ wie dem von $G$ angehören. Diese Gegenstände gehören der senkrecht schraffierten Fläche der folgenden Figur an:

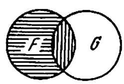



Fig. 3

$\bigvee x(F(x) \wedge \neg G(x))$ — Einige $x$ mit der Eigenschaft $F$ haben nicht die Eigenschaft $G$, oder: einige $F$ sind nicht-$G$.

Ein solches Urteil nennt man *partikulär verneinend*. Es besagt, daß es Gegenstände gibt, die dem Umfang von $F$ angehören, nicht aber dem von $G$. Diese Gegenstände werden in der Figur 3 durch die Punkte der waagrecht schraffierten Fläche angedeutet.

Umgekehrt besagt die Figur 3: einige $F$ sind $G$ und einige $F$ sind nicht $G$, symbolisch: $\bigvee x(F(x) \wedge G(x)) \wedge \bigvee y(F(y) \wedge \neg G(y))$. Die Aussage, daß es einige $F$ gibt, die $G$ sind, aber keine $F$, die nicht $G$ sind, besagt soviel wie: Es gibt ein $F$ und alle $F$ sind $G$, und wird durch Figur 1 wiedergegeben. Die Aussage, daß einige $F$ nicht-$G$ sind und kein $F$ ein $G$ ist, besagt soviel wie: Es gibt ein $F$ und kein $F$ ist $G$ und wird daher durch Figur 2 wiedergegeben. Die Figuren 1, 2 und 3 stellen also die möglichen Verhältnisse zwischen zwei Begriffsumfängen dar und diese Verhältnisse lassen sich in unserer Symbolik in einfacher und übersichtlicher Weise darstellen.

$\bigvee x \bigwedge y F(x, y)$ — Es gibt ein $x$, so daß alle $y$ zu $x$ in der Beziehung $F$ stehen.

$\bigwedge x(F(x) \supset \bigvee y G(x, y))$ — Zu jedem $x$ mit der Eigenschaft $F$ gibt es ein $y$, das zu $x$ in der Beziehung $G$ steht.

$\bigwedge x F(x) \vee \bigwedge x G(x)$ — alle $x$ haben die Eigenschaft $F$ oder alle $x$ haben die Eigenschaft $G$.

$\bigwedge x(F(x) \vee G(x))$ — alle $x$ haben die Eigenschaft $F$-oder-$G$, d. h. alle $x$ haben die Eigenschaft $F$ oder die Eigenschaft $G$.

Das Beispiel der letzten beiden Formeln zeigt noch einmal die Bedeutung des Allquantors, mit dessen Hilfe wir den Bedeutungsunterschied zwischen beiden Sätzen symbolisch wiedergeben können.

B) Übersetzungen umgangssprachlicher Sätze in Formeln.

In der Umgangssprache werden Quantifikationen durch eine Vielfalt von Formulierungen wiedergegeben. Die Übersetzung dieser Formulierungen in unsere Symbolik erfordert eine gewisse Einübung, zu der die folgenden Beispiele eine Anleitung geben sollen:

*Alles ist vergänglich* — $\bigwedge x F(x)$, wo „$F(x)$“ steht für „$x$ ist vergänglich“.

*Nichts ist unvergänglich* — $\neg \bigvee x \neg F(x)$.

*Alles Schöne ist vergänglich* — $\bigwedge x(G(x) \supset F(x))$, wo „$G(x)$“ steht für „$x$ ist schön“.

*Keine Regel ohne Ausnahme* — $\neg \bigvee x(F(x) \wedge \neg \bigvee y G(x, y))$, wo „$F(x)$“ steht für „$x$ ist eine Regel“ und „$G(x, y)$“ für „$y$ ist eine Ausnahme von $x$“.

*Jeder Vogel hat ein Nest* — $\bigwedge x(F(x) \supset \bigvee y G(x, y))$, wo „$F(x)$“ steht für „$x$ ist ein Vogel“, „$G(x, y)$“ für „$y$ ist ein Nest von $x$“.

*Niemand ist unfehlbar* — $\neg \bigvee x \neg F(x)$, wo „$F(x)$“ steht für „$x$ macht Fehler“.

*Nicht alles, was glänzt, ist Gold* — $\neg \bigwedge x(F(x) \supset G(x))$, wo „$F(x)$“ steht für „$x$ glänzt“ und „$G(x)$“ für „$x$ ist Gold“.

*Alles, was glänzt, ist nicht Gold* — $\bigwedge x(F(x) \supset \neg G(x))$.

Diese beiden Formulierungen zeigen, wie nahe in der Umgangssprache die Gefahr einer ungenauen Formulierung liegt: findet man doch oft die letztere Formulierung, wo der Inhalt der ersten ausgedrückt werden soll. Der erste Satz ist im Beispiel aber wahr, der zweite falsch.

*Jemand hat ein Buch geliehen und es nicht zurückgegeben* — $\bigvee x \bigvee y(F(x, y) \wedge H(y) \wedge \neg G(x, y))$, wo „$F(x, y)$" steht für „$x$ hat $y$ geliehen", „$H(y)$" für „$y$ ist ein Buch" und „$G(x, y)$" für „$x$ hat $y$ zurückgegeben".

*Nur wer sich selbst erkennt, erkennt andere* — $\neg\bigvee x(\neg F(x, x) \wedge \bigvee y(\neg G(x, y) \wedge F(x, y)))$, wo „$F(x, y)$" steht für „$x$ erkennt $y$", „$G(x, y)$" für „$x$ ist mit $y$ identisch".

*Wer stiehlt, wird bestraft* — $\bigwedge x(F(x) \supset G(x))$, wo „$F(x)$" steht für „$x$ stiehlt", „$G(x)$" für „$x$ wird bestraft".

*Hans war in München, solange er studierte* — $\bigwedge x(F(x, a) \supset G(x, a))$", wo „$a$" steht für „Hans", „$F(x, y)$" für „$y$ studiert zum Zeitpunkt $x$", „$G(x, y)$" für „$y$ ist zum Zeitpunkt $x$ in München".

*Es gibt keinen Gott außer Gott* — $\neg\bigvee x(F(x) \wedge \neg G(x, a))$", wo „$F(x)$" steht für „$x$ ist ein Gott", „$G(x, y)$" für „$x$ ist mit $y$ identisch" und „$a$" für „Gott". Man beachte hier, daß in dem umgangssprachlichen Satz das Wort „Gott" einmal als Prädikat („$x$ ist ein Gott"), einmal als Eigennamen für ein bestimmtes Wesen verwendet wird. Denn mit dem Satz ist nicht gemeint: Es gibt keine Götter, die nicht Götter sind ($\neg\bigvee x(F(x) \wedge \neg F(x))$), sondern: es gibt kein göttliches Wesen außer dem einen, das wir „Gott" nennen.

*Menschen sind sterblich* — $\bigwedge x(F(x) \supset G(x))$, wo „$F(x)$" steht für „$x$ ist ein Mensch", „$G(x)$" für „$x$ ist sterblich".

*Der Löwe ist ein Wüstentier* — hier gibt es zwei Möglichkeiten der Auffassung dieses Satzes: entweder es ist von einem bestimmten Löwen die Rede (dieser Löwe ist ein Wüstentier), dann ist der Satz wiederzugeben als $F(a)$, wo „$a$" ein Name für diesen Löwen ist, und „$F(x)$" steht für „$x$ ist ein Wüstentier" — oder es ist gemeint: alle Löwen sind Wüstentiere, dann erhalten wir als Übersetzung $\bigwedge x(G(x) \supset F(x))$, wo „$G(x)$" steht für „$x$ ist ein Löwe".

*Gott ist* — dieser Satz ist wiederzugeben als $F(a)$, wo „$a$" steht für „Gott", „$F(x)$" für „$x$ ist" oder „$x$ existiert". Falsch wäre hingegen die Übersetzung $\bigvee x(G(x))$, wo „$G(x)$" steht für „$x$ ist ein Gott". Denn der umgangssprachliche Satz besagt nicht allgemein etwas über die Existenz göttlicher Wesen, sondern etwas über die Existenz eines bestimmten Wesens, das wir „Gott" nennen.

Das umgangssprachliche Wort „ist" hat, wie dies Beispiel zeigt, verschiedene Verwendungsweisen, die vom logischen Standpunkt aus genau unterschieden werden müssen:

1) In dem Satz „Hans ist blond" ist das Wort „ist" als Kopula Bestandteil des Prädikates „$x$ ist blond" und deutet das Fallen eines Gegenstandes (des Hans) unter einen Begriff (blond) an, ein *Subsumptionsverhältnis*, wie man auch sagt.

2) In dem Satz „Der Löwe ist ein Wüstentier" (in der zweiten der beiden oben angegebenen Deutungen) drückt das „ist" nicht eine Subsumption aus, sondern ein Verhältnis zwischen zwei Begriffen, den *Einschluß* des einen Begriffsumfanges im anderen, oder die *Inklusion*.

3) In dem Satz „*3 + 2* ist *5*" drückt das Wort „ist" eine Beziehung aus, die Beziehung der *Identität* zwischen Gegenständen.

4) Im Satz „Gott ist" drückt „ist" einen Begriff aus, die Eigenschaft eines Gegenstandes, zu *existieren*.

5) In Formulierungen wie „Es ist ein Gott" im Sinne von „Es gibt einen Gott" kann „ist" auch zum Ausdruck der *Partikularisierung* dienen.

Diese fünf Verwendungsweisen von „ist" wollen wir genau unterscheiden. Die Bedeutungsvielfalt des Wortes „ist" bzw. des griechischen „ἐστιν" hat zu teilweise erheblichen gedanklichen Schwierigkeiten geführt, deren Spuren sich besonders in den platonischen Dialogen *Parmenides*, *Sophistes* und *Theätet* gut verfolgen lassen, wo Platon in den frühesten logischen Untersuchungen, die uns bekannt sind, diese Schwierigkeiten aufzulösen sucht. Die erste der dort diskutierten Paradoxien entsteht, wenn man die Urteile der Form $a$ ist $F$ (symbolisch $F(a)$) als Identitätsurteile auffaßt: $a$ ist mit $F$ identisch, wenn man also nicht zwischen Identität und Subsumption unterscheidet. Betrachtet man z. B. den Begriff ‚Gegenstand', so fällt jeder Gegenstand unter diesen Begriff, ist also nach dieser Deutung mit ihm identisch. Sind aber zwei Dinge mit einem dritten identisch, so sind sie auch untereinander identisch, d. h. man gelangt dann zu der Folgerung: es gibt nur einen Gegenstand, oder: Alles ist Eins.

Eine zweite Paradoxie entsteht, wenn man das Wort „nichts" nicht als Ausdruck einer Quantifikation auffaßt, sondern als Eigennamen, wie das seine syntaktische Funktion nahelegt, etwa in dem Satz „Nichts ist rot und nicht rot". Dann postuliert man einen Gegenstand als Bedeutung dieses Eigennamens, das *Nichts*, von dem dann gilt, daß es zugleich rot und nicht rot ist. Wenn man ferner auch jedes Urteil der Form „$a$ ist $F$" als Existenzurteil auffaßt, indem man nicht zwischen Subsumption und Existenz unterscheidet und aus „$a$ ist $F$" folgert „$a$ ist", d. h. „$a$ existiert", so kann man aus der Aussage „Das Nichts ist nichtexistent" die Aussage „Das Nichts ist" folgern.

Wir wollen nun einige p.l. Schlüsse formulieren, deren Gültigkeit sich vermittels der Prinzipien 2.1.2.1 und 2.1.2.2 leicht einsehen läßt. Dazu verwenden wir wie im ersten Kapitel das Zeichen „$\rightarrow$" zum Ausdruck der logischen Folge.

1) $\Lambda x F(x) \rightarrow F(a)$.

Wenn der Satz $\Lambda x F(x)$ wahr ist, so haben nach 2.1.2.1 alle Gegenstände die (durch das Prädikat „$F(x)$" bezeichnete) Eigenschaft $F$, also hat auch (der durch den Eigennamen „$a$" bezeichnete Gegenstand) $a$ die Eigenschaft $F$.

2) $F(a) \rightarrow \mathsf{V} x F(x)$.

Wenn der Satz $F(a)$ wahr ist, so hat $a$ die Eigenschaft $F$, also gibt es einen Gegenstand mit dieser Eigenschaft.

3) $\Lambda x F(x) \rightarrow \mathsf{V} x F(x)$.

Das gilt wegen (1) und (2) und der Transitivität der Folgebeziehung[1].

4) $\Lambda x F(x) \rightarrow \neg \mathsf{V} x \neg F(x)$
5) $\mathsf{V} x F(x) \rightarrow \neg \Lambda x \neg F(x)$.

Diese beiden Schlüsse und ihre Umkehrungen gelten wegen der Beziehungen zwischen Generalisierung und Partikularisierung, die wir

[1] Vgl. 1.2.6, Mt5.

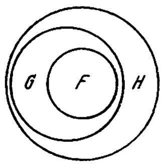
in 2.1.2.3 und 2.1.2.4 formuliert haben. Ebenso gilt wegen dieser Beziehungen

6) $\bigwedge x \neg F(x) \rightarrow \neg \bigvee x F(x)$ und
7) $\neg \bigwedge x F(x) \rightarrow \bigvee x \neg F(x)$.

Ferner gilt

8) $\bigwedge x(F(x) \supset G(x)),\ \bigwedge x(G(x) \supset H(x)) \rightarrow \bigwedge x(F(x) \supset H(x))$.

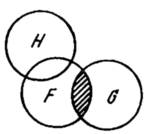
Denn wenn alle Dinge mit der Eigenschaft $F$ auch die Eigenschaft $G$ haben, und alle Dinge mit der Eigenschaft $G$ auch die Eigenschaft $H$, so haben auch alle Dinge mit der Eigenschaft $F$ die Eigenschaft $H$. Dieses Verhältnis zwischen den Begriffen $F$, $G$ und $H$ wird durch folgende Figur veranschaulicht:




Beispiel: Wenn alle Katzen Säugetiere sind und alle Säugetiere sind Wirbeltiere, so sind alle Katzen Wirbeltiere.

9) $\bigvee x(F(x) \wedge G(x)),\ \bigwedge x(G(x) \supset \neg H(x)) \rightarrow \bigvee x(F(x) \wedge \neg H(x))$.

Wenn einige Dinge mit der Eigenschaft $F$ auch die Eigenschaft $G$ haben und wenn alle Dinge mit der Eigenschaft $G$ nicht die Eigenschaft $H$ haben, so haben einige Dinge mit der Eigenschaft $F$ nicht die Eigenschaft $H$. Dieses Verhältnis zwischen den Begriffen $F$, $G$ und $H$ wird durch folgende Figur dargestellt:

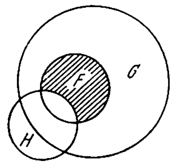



Die schraffierte Fläche stellt die $F$ dar, die als $G$ nicht $H$ sind.

Beispiel: Wenn einige Haustiere Hunde sind und alle Hunde sind nicht Katzen, so sind einige Haustiere nicht Katzen.

10) $\bigwedge x(F(x) \supset G(x)),\ \bigvee x(F(x) \wedge \neg H(x)) \rightarrow \bigvee x(G(x) \wedge \neg H(x))$.

Wenn alle Dinge mit der Eigenschaft $F$ auch die Eigenschaft $G$ haben und einige Dinge mit der Eigenschaft $F$ nicht die Eigenschaft $H$ haben, so haben einige Dinge mit der Eigenschaft $G$ nicht die Eigenschaft $H$.




Die schraffierte Fläche stellt wieder die $G$ dar, die als $F$ nicht $H$ sind.

Beispiel: Wenn alle geraden Zahlen durch *2* teilbar sind und einige gerade Zahlen sind nicht Primzahlen, so sind einige durch *2* teilbare Zahlen nicht Primzahlen.

11) $\bigwedge xF(x) \vee \bigwedge xG(x) \rightarrow \bigwedge x(F(x) \vee G(x))$.

Denn wenn alle $x$ die Eigenschaft $F$ haben oder alle $x$ haben die Eigenschaft $G$, so haben auch alle $x$ die Eigenschaft $F$ oder $G$. Die Umkehrung dieses Schlusses gilt aber nicht wie das Beispiel zeigt: Alle Dinge sind rot oder nicht rot, aber es gilt nicht: alle Dinge sind rot oder alle Dinge sind nicht rot.

12) $\bigvee x \bigwedge yF(x,y) \rightarrow \bigwedge y \bigvee xF(x,y)$.

Denn wenn es ein $x$ gibt, zu dem jedes $y$ in der Beziehung $F$ steht, so gibt es zu jedem $y$ ein $x$, zu dem es in der Beziehung $F$ steht.

Ein Beispiel: Wenn es einen Menschen gibt, der alle Menschen liebt, so gibt es zu jedem Menschen einen, der ihn liebt. Die Umkehrung des Schlusses gilt aber nicht, denn wenn es zu jedem Menschen einen gibt, der ihn liebt, so folgt daraus nicht, daß es einen Menschen gibt, der alle Menschen liebt. Es könnte jeder nur sich selbst [illegible]

Wir haben in diesem Abschnitt die Grundlagen der Prädikatenlogik in einer intuitiven und an die umgangssprachlichen Strukturen sich anlehnenden Weise dargelegt. Wir sind dabei über die Umgangssprache nur insoweit hinausgegangen, als wir eine Symbolik zur Darstellung der p.l. Strukturen eingeführt haben, die den Zweck hat, die Vielfalt der umgangssprachlichen Formulierungen zu vereinheitlichen, komplizierte Ausdrucksweisen zu vereinfachen und übersichtlicher zu machen. Diese Symbolik ermöglicht es uns nun, auch komplizierte p.l. Strukturen nach syntaktischen Regeln umzuformen und aufzulösen. Damit haben wir auch für die P.L. die Vorteile einer *lingua characteristica* erreicht.

Es fehlt uns aber bisher noch ein präziser Deduktionsbegriff, mit dessen Hilfe wir auch kompliziertere Schlüsse begründen können. Der Aufbau eines solchen Deduktionsbegriffes und seine Rechtfertigung setzt aber eine präzisere Fassung der Syntax und der Semantik der P.L. voraus, als wir sie bisher gegeben haben. Diese Voraussetzungen wollen wir uns nun in den nächsten Abschnitten verschaffen.

Zum Abschluß dieses Abschnittes geben wir noch eine kurze Übersicht über die verschiedenen Symbolisierungen der Quantoren in der Literatur, die ein Studium der einschlägigen Schriften erleichtern soll[1]:

| Bezeichnung | Hier | PEANO, RUSSELL | CHURCH | ŁUKASIEWICZ | HERMES |
|---|---|---|---|---|---|
| Allquantor | $\wedge x$ | $(x)$ | $\forall x$ | $\Pi x$ | $\bigwedge_x$ |
| Existenzquantor | $\vee x$ | $(\mathrm{E}x)$ | $\exists x$ | $\Sigma x$ | $\bigvee_x$ |

# 2.2 Die Sprache der Prädikatenlogik

## 2.2.1 Die Syntax der Sprache $\mathfrak{P}$

Wir wollen nun die Sprache der P.L., die wir durch „$\mathfrak{P}$" bezeichnen, syntaktisch und semantisch genau beschreiben. Die intuitive Begründung für die Symbolik von $\mathfrak{P}$ haben wir schon oben im Abschnitt 2.1 angegeben. Die Gegenstandskonstanten, die wir dort zur Verdeutlichung des Unterschieds zwischen Prädikaten und Sätzen verwendet haben, wollen wir nun aus Gründen der Einfachheit fortlassen. Ihre semantische Funktion wird sich auf die freien Gegenstandsvariablen übertragen. Ebenso wollen wir anstelle der Prädikatkonstanten Prädikatvariablen verwenden.

[1] Vgl. [78], [9], [51] und [33].

Das *Alphabet* der Sprache $\mathfrak{P}$ besteht aus folgenden Zeichen:

1. Hilfszeichen: „(“, „)“, „,“ und Ziffern.

2. Gegenstandsvariablen (GV): „$x$“, „$y$“, „$z$“, „$u$“, „$v$“, „$w$“.

3. Prädikatvariablen (PV): „$f$“, „$g$“, „$h$“.

4. Logische Symbole: „$\neg$“, „$\wedge$“, „$\vee$“, „$\supset$“, „$\equiv$“, „$\bigwedge$“ und „$\bigvee$“.

Um einen hinreichend großen Vorrat von Variablen zu haben, legen wir fest, daß auch der Ausdruck $A_Z$ eine GV (PV) von $\mathfrak{P}$ ist, wenn A eine GV (PV) von $\mathfrak{P}$ ist und Z eine Folge von Ziffern. Auch „$x_1$“, „$y_{23}$“, „$w_{346}$“ sind also GV von $\mathfrak{P}$ und „$f_{17}$“, „$g_3$“ sind PV von $\mathfrak{P}$.

Wir denken uns ferner jeder PV von $\mathfrak{P}$ eine Stellenzahl zugeordnet (die man durch oben angehängte Ziffernindices andeuten könnte), so daß wir auch von den $n$-stelligen PV von $\mathfrak{P}$ sprechen können für jede Zahl $n \geqslant 1$.

Unter den Ausdrücken von $\mathfrak{P}$, den endlichen Folgen von Grundzeichen von $\mathfrak{P}$, zeichnen wir nun die Sätze oder Formeln von $\mathfrak{P}$ aus durch folgende *Formregeln*:

a) Wenn $x_1, \ldots, x_n$ GV von $\mathfrak{P}$ sind, und f ist eine n-stellige PV von $\mathfrak{P}$, so ist $f(x_1, \ldots, x_n)$ eine (Atom-)Formel von $\mathfrak{P}$.

b) Wenn A und B Formeln von $\mathfrak{P}$ sind, so sind auch $\neg(A)$, $(A) \wedge (B)$, $(A) \vee (B)$, $(A) \supset (B)$ und $(A) \equiv (B)$ Formeln von $\mathfrak{P}$.

c) Wenn A eine Formel von $\mathfrak{P}$ ist und x ist eine GV von $\mathfrak{P}$, so sind auch $\bigwedge x(A)$ und $\bigvee x(A)$ Formeln von $\mathfrak{P}$.

Zur Einsparung von Klammern, die nach diesen Formregeln zu setzen wären, verwenden wir die a.l. Klammerregeln (vgl. S. 23, 33, 57) und behandeln die Quantoren $\bigwedge x$ und $\bigvee x$ bzgl. der Klammersetzung wie den Operator $\neg$. So schreiben wir $\bigwedge xA \wedge B$ statt $(\bigwedge xA) \wedge B$, $\bigwedge x \neg A$ statt $\bigwedge x(\neg A)$, $\bigwedge x \bigvee yA$ statt $\bigwedge x(\bigvee yA)$, usf. Ferner schreiben wir zur Abkürzung auch $\bigwedge x_1 \ldots x_n A$ statt $\bigwedge x_1 \bigwedge x_2 \ldots \bigwedge x_n A$ und $\bigvee x_1 \ldots x_n A$ statt $\bigvee x_1 \bigvee x_2 \ldots \bigvee x_n A$.

Die Ausdrücke mit derart reduzierten Klammer- und Quantorengruppen fassen wir als Abkürzungen der entsprechenden Formeln mit unreduzierten Klammer- und Quantorengruppen auf, die im Einklang mit den Formregeln von $\mathfrak{P}$ gebildet sind.

Auf die Notwendigkeit der Unterscheidung zwischen freien und gebundenen Vorkommnissen einer GV haben wir schon früher hingewiesen. Wir wollen sie hier noch einmal präzisieren und einige weitere Unterscheidungen anfügen, die im Zusammenhang damit von Interesse sind.

Als *Bereich* (eines Vorkommnisses) eines Quantors $\wedge$x oder $\vee$x in einer Formel A bezeichnen wir den in Klammern eingeschlossenen Ausdruck, der bei nicht reduzierter Klammerschreibweise in A unmittelbar auf ihn folgt. So ist in der Formel $g(z, x) \supset \wedge x(f(x) \supset g(x, y)) \vee \wedge y(\vee z\, g(y, z) \supset f(y)) \wedge g(z, y)$ die Formel $f(x) \supset g(x, y)$ der Bereich von $\wedge x$, $\vee z g(y, z) \supset f(y)$ ist der Bereich von $\wedge y$ und $g(y, z)$ der Bereich von $\vee z$.

Man nennt ein Vorkommnis einer GV x in einem Satz A *gebunden*, wenn dieses Vorkommnis Teil eines Quantors ist (x ist Teil von $\wedge$x und $\vee$x) oder wenn es im Bereich eines gleichnamigen Quantors (d. h. eines Quantors $\wedge$x oder $\vee$x) steht. Andernfalls nennt man das Vorkommnis von x *frei* in A.

Wir sagen, eine GV x *komme* in einem Satz A *frei vor*, wenn A ein freies Vorkommnis von x enthält. Ferner sagen wir, ein Vorkommnis einer GV x werde in einem Satz A *durch ein Vorkommnis eines Quantors* Q gebunden, wenn x Teil von Q ist oder wenn Q mit x gleichnamig ist und das Vorkommnis von x im Bereich B von Q steht und in B frei ist.

Dazu zwei Beispiele:

1) Der Satz $\wedge x(f(x) \vee \wedge y \vee x h(x, y))$ enthält nur gebundene Vorkommnisse von GV. Dabei ist das 1. und 2. Vorkommnis von $x$ durch den Quantor $\wedge x$, das 3. und 4. Vorkommnis von $x$ durch den Quantor $\vee x$ gebunden.

2) In dem Satz $\wedge x(f(x) \supset g(x, y)) \vee \vee y(f(x) \wedge g(x, y))$ ist das 4. und 5. Vorkommnis von $x$ und das 1. Vorkommnis von $y$ frei. In diesem Satz kommen also $x$ und $y$ frei vor.

Wir sagen, eine GV x sei in einem Satz A *frei für* (eine Ersetzung durch) die GV y, wenn kein freies Vorkommnis von x in A zum Bereich eines mit y gleichnamigen Quantors gehört. Enthält A x nicht frei, so ist also x in A frei für jede GV y. Und enthält A die GV y nicht, so ist jede GV von A frei für y in A[1].

[1] Die Terminologie ist nicht einheitlich. Statt zu sagen „x ist in A frei für y" sagt man auch oft im gleichen Sinn „y ist frei für x in A" (vgl. z. B. [42], S. 79). Die hier verwendete Redeweise scheint uns aber suggestiver zu sein.

Wir sagen, ein Satz A′ gehe aus einem Satz A durch *freie Einsetzung* von y für x hervor, wenn x in A frei ist für y und A′ aus A entsteht durch Ersetzung aller freien Vorkommnisse von x in A durch y. Schreiben wir A[x] für A um anzudeuten, daß A die GV x frei enthalten kann, so schreiben wir für diesen Fall der freien Einsetzung auch A[x/y] für A′. Um den Formelbestandteil nach links abzugrenzen, in dem die Ersetzung von x durch y vorgenommen werden soll, verwenden wir einen Punkt. Durch die Schreibweise .A ∧ B[x/y] wird also eine Ersetzung von x durch y in A ∧ B angedeutet, durch A ∧.B[x/y] eine Ersetzung nur in B. Bezieht sich die Ersetzung auf die kleinste Teilformel, die unmittelbar vor den eckigen Klammern steht, bzw. auf die Formel, die durch eine unmittelbar vor diesen Klammern stehende metasprachliche Variable bezeichnet wird, so lassen wir den Punkt auch fort, schreiben also $f(x) \wedge g(x)[x/y]$ statt $f(x) \wedge .g(x)[x/y]$ und ⋀yA[x/y] statt ⋀y.A[x/y]. Enthält A[x] die GV x nicht frei, so ist also A[x/y] mit A[x] identisch. Allgemein soll die Schreibweise $A[x_1, \ldots, x_n]$ für A andeuten, daß die Formel A die GV $x_1, \ldots, x_n$ frei enthalten kann. Und wenn $x_1$ frei für $y_1$ und ... und $x_n$ frei für $y_n$ in A ist, so soll $A[x_1/y_1, \ldots, x_n/y_n]$ der Ausdruck sein, der aus $A[x_1, \ldots, x_n]$ durch *simultane* Ersetzung aller freien Vorkommnisse von $x_1$ durch $y_1$ und ... und aller freien Vorkommnisse von $x_n$ durch $y_n$ entsteht. Eine solche simultane Einsetzung ergibt den gleichen Ausdruck wie die sukzessive Einsetzung von $y_1$ für $x_1$ und ... und $y_n$ für $x_n$, wenn kein $y_i$ mit einem $x_k$ für $i, k = 1, \ldots, n$ und $i < k$ identisch ist. Andernfalls können wir n untereinander verschiedene GV $z_1, \ldots, z_n$ wählen, die untereinander und von allen $y_1, \ldots, y_n$ verschieden sind und in $A[x_1, \ldots, x_n]$ nicht vorkommen und durch sukzessive Einsetzung von $z_1$ für $x_1$ und...und $z_n$ für $x_n$ zunächst aus $A[x_1, \ldots, x_n]$ den Ausdruck $A'[z_1, \ldots, z_n]$ bilden. Durch sukzessive Einsetzung von $y_1$ für $z_1$ und...und $y_n$ für $z_n$ in $A'[z_1, \ldots, z_n]$ entsteht dann der Ausdruck, den wir mit $A[x_1/y_1, \ldots, x_n/y_n]$ bezeichnet haben. Damit ist die simultane Einsetzung von GV erklärt. Daß die Unterscheidung der simultanen von der sukkzessiven Einsetzung mehrerer GV notwendig ist, zeigt folgendes Beispiel: Aus $f(x, y)$ entsteht durch sukzessives Einsetzen von $y$ für $x$ und $x$ für $y$ über $f(y, y)$ der Ausdruck $f(x, x)$. Durch sukzessives Einsetzen in der umgekehrten Reihenfolge entsteht über $f(x, x)$ der Ausdruck $f(y, y)$. Man muß also bei sukzessiven Einsetzungen die Reihenfolge festlegen, in der sie vorgenommen werden sollen, damit das Ergebnis eindeutig festgelegt ist. Durch simultane Einsetzung von $y$ für $x$ und $x$ für $y$ entsteht aus $f(x, y)$ hingegen der

Ausdruck $f(y, x)$, den man durch sukzessives Einsetzen von $u$ für $x$ und $v$ für $y$ (in beliebiger Reihenfolge) über den Ausdruck $f(u, v)$ durch sukzessives Einsetzen von $y$ für $u$ und von $x$ für $v$ (wieder in beliebiger Reihenfolge) erhält.

Wir sagen, ein Satz $\wedge$xA'[x] bzw. $\vee$xA'[x] entstehe aus dem Satz $\wedge$yA[y] bzw. $\vee$yA[y] durch *freie Umbenennung* der gebundenen Variablen y in x, wenn y frei für x ist, x nicht frei in A[y] vorkommt und A'[x] der Ausdruck A[y/x] ist. Und entsteht A' aus A durch freie Umbenennung gebundener Variablen in einem oder mehreren Teilausdrücken von A, so sagen wir auch, A' entstehe aus A durch freie Umbenennung gebundener Variablen. Ist nun die GV x in einem Satz A[x] nicht frei für die GV y, so kann man aus A[x] durch freie Umbenennung gebundener GV immer einen Ausdruck A'[x] erzeugen, in dem x frei für y ist. Dazu ersetzt man simultan alle Formelteile von A[x] der Gestalt $\wedge$yB[y] bzw. $\vee$yB[y], in denen x frei vorkommt, durch Formeln $\wedge$zB[y/z] bzw. $\vee$zB[y/z], wobei die GV z so gewählt werden, daß sie untereinander und von y verschieden sind und in A[x] nicht vorkommen[1].

Bisher war die Schreibweise A[x/y] nur für den Fall erklärt worden, daß x in A[x] frei für y ist. Ist x nicht frei für y, so wollen wir jetzt unter A[x/y] den Ausdruck A'[x/y] verstehen, wo A'[x] irgendein Ausdruck ist, der aus A[x] durch freie Umbenennung gebundener GV hervorgeht, und in dem x frei ist für y.

In entsprechender Weise wollen wir auch die Symbolik A$[x_1/y_1, \ldots, x_n/y_n]$ für den Fall verstehen, daß ein $x_i$ nicht frei für $y_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ ist in A$[x_1, \ldots, x_n]$.

Dazu ein Beispiel: Sei A der Satz $\vee y(h(x, y) \supset \wedge y(f(x) \supset g(y)))$, so ist $x$ nicht frei für $y$ in A. Durch freie Umbenennung von $y$ in $\wedge y(f(x) \supset g(y))$ in $z$ erhalten wir $\vee y(h(x, y) \supset \wedge z(f(x) \supset g(z)))$. Indem wir in diesem Ausdruck $y$ in $u$ frei umbenennen, erhalten wir den Satz A'[x]:

[1] Man kann den Ausdruck A'[x] auch eindeutig festlegen, indem man z. B. eine alphabetische Reihenfolge der GV von $\mathfrak{P}$ festlegt, für die GV z, in die eine gebundene GV von A umbenannt wird, immer die alphabetisch erste GV wählt, welche die angegebenen Bedingungen erfüllt, und die umzubenennenden GV in der Reihenfolge ihres Vorkommens in A[x] in dieser Weise ersetzt. Wo es im folgenden auf die eindeutige Festlegung der Formel A'[x] ankommt, wollen wir sie uns in dieser Weise gebildet denken.

$\bigvee u(h(x, u) \supset \bigwedge z(f(x) \supset g(z)))$, in dem nun $x$ frei ist für $y$. $A[x/y]$ ist dann die Formel $A'[x/y]$, also $\bigvee u(h(y, u) \supset \bigwedge z(f(y) \supset g(z)))$.

Die Auszeichnung der freien Einsetzung von GV ist im Hinblick auf die Deutung der Sätze von $\mathfrak{P}$ wichtig. Durch Einsetzung von $y$ für $x$ in eine Aussage $A[x]$ soll eine Aussage entstehen, die über $y$ dasselbe besagt, wie $A[x]$ über $x$. Beschränkt man sich nicht auf freie Einsetzungen, so ist das nicht der Fall: Der Satz $\bigvee y$($x$ *ist kleiner als* $y$) besagt z. B. daß es zu $x$ ein größeres Element gibt. Der Satz $\bigvee y$($y$ *ist kleiner als* $y$) besagt hingegen, daß es ein Element gibt, das kleiner ist als es selbst, ist also falsch. Will man hier $y$ für $x$ einsetzen, so muß man zunächst die gebundene GV $y$ frei umbenennen, z. B. in $z$, um eine freie Einsetzung zu ermöglichen. $\bigvee z$($y$ *ist kleiner als* $z$) besagt nun, daß es zu $y$ ein größeres Element gibt, ist also das gewünschte Substitutionsergebnis.

Einsetzungen für PV werden wir im folgenden nur gelegentlich benötigen. Zur Einübung des syntaktischen Apparats wollen wir sie aber schon an dieser Stelle definieren.

Ist f eine n-stellige PV, so deuten wir durch die Schreibweise A[f] statt A an, daß der Satz A die PV f enthalten kann. Wir sagen, f sei in A *frei für* (eine Ersetzung durch) die Formel $B[x_1, \ldots, x_n]$, die mindestens n verschiedene GV $x_1, \ldots, x_n$ frei enthält, wenn gilt: Steht f in A im Bereich eines Quantors, der mit der GV z gleichnamig ist, so enthält B kein freies Vorkommnis von z, das von $x_1, \ldots, x_n$ verschieden ist[1].

Ist f frei für $B[x_1, \ldots, x_n]$, so sei $A[f/B[x_1, \ldots, x_n]]$ der Ausdruck, der aus A durch simultane Ersetzung aller Ausdrücke der Form $f(y_1, \ldots, y_n)$ durch $B[x_1/y_1, \ldots, x_n/y_n]$ entsteht. Durch freie Umbenennung gebundener GV in A läßt sich aus A immer eine Formel A′ erzeugen, in der f frei ist für $B[x_1, \ldots, x_n]$. Allgemein wollen wir dann unter $A[f/B[x_1, \ldots, x_n]]$ immer den Ausdruck $A'[f/B[x_1, \ldots, x_n]]$ für eine solche Formel A′ verstehen.

Dazu ein Beispiel: A sei der Ausdruck $\bigwedge x \bigvee y f(x,y) \wedge \bigvee z(f(y,x) \supset g(z,y))$. B sei der Ausdruck $\bigwedge z(g(x, z) \wedge f(x, y)) \supset \bigvee y g(y, z)$. Dann ist $f$ in A

[1] Man beachte, daß die Spezifizierung der n freien GV $x_1, \ldots, x_n$ in B wesentlich ist für die Beantwortung der Frage, ob f in A frei ist für B. Einsetzungen von Formeln B für f, die nicht mindestens n verschiedene freie GV enthalten, werden im folgenden nicht erklärt.

nicht frei für $B[x, y]$, da $f$ in A im Bereich von $\vee z$ vorkommt und B $z$ frei enthält. Wir benennen daher in A $z$ frei um in $u$ und erhalten den Ausdruck A': $\wedge x \vee y f(x, y) \wedge \vee u(f(y, x) \supset g(u, y))$. Hier ist nun $f$ frei für $B[x, y]$ und wir erhalten als $A[f/B[x, y]] = A'[f/B[x, y]]$ die Formel C: $\wedge x \vee y(\wedge z(g(x, z) \wedge f(x, y)) \supset \vee y g(y, z)) \wedge \vee u((\wedge z(g(y, z) \wedge f(y, x)) \supset \vee y g(y, z)) \supset g(u, y))$.

Man beachte, daß die Forderung der simultanen Ersetzung der Ausdrücke $f(v, w)$ durch die Ausdrücke $B[x/v, y/w]$ hier wesentlich ist, da man bei sukzessiver Einsetzung auch in den eingesetzten B-Ausdrücken für $f$ noch einmal einzusetzen hätte, so daß man nie zu einem Ende käme, da jede neue Einsetzung von B neue Vorkommnisse von $f$ liefert.

In A ist $f$ auch nicht frei für $B[x, z]$, da $f$ im Bereich des Quantors $\vee y$ vorkommt und B $y$ frei enthält. Daher ist $y$ frei in $u$ umzubenennen und wir erhalten $\wedge x \vee u f(x, u) \wedge \vee z(f(y, x) \supset g(z, y))$ und daraus durch Einsetzung von $B[x, z]$ die Formel

$$\wedge x \vee u(\wedge z(g(x, z) \wedge f(x, y)) \supset \vee y g(y, u)) \wedge \vee z((\wedge z g(y, z) \wedge f(y, y)) \supset \vee y g(y, x)) \supset g(z, y)).$$

Es soll nun noch gesagt werden, was unter den *Teilformeln* eines Satzes von $\mathfrak{P}$ zu verstehen ist. Für die Sätze von $\mathfrak{A}$ haben wir den Begriff der Teilformel schon früher festgelegt (vgl. S. 61) durch die Bestimmungen:

a) A ist Teilformel von A.

b) Die Teilformeln von A sind auch Teilformeln von $\neg$A.

c) Die Teilformeln von A und die von B sind auch Teilformeln von $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \supset B$ und $A \equiv B$.

Wir fügen jetzt hinzu:

d) Die Teilformeln von $A[x/y]$ für beliebige GV y sind auch Teilformeln von $\wedge x A[x]$ und $\vee x A[x]$.

Danach sind z. B. die Formeln

1) $g(x, y) \vee f(x) \supset \wedge y(h(y) \wedge g(z, y))$ und
$g(x, y) \vee f(x)$, $\wedge y(h(y) \wedge g(z, y))$, $h(\mathrm{u}) \wedge g(z, \mathrm{u})$, $g(x, y)$, $f(x)$, $h(\mathrm{u})$, $g(z, \mathrm{u})$

für alle GV u Teilformeln der Formel (1).

*Übungsaufgaben:*

1. Man formuliere ein Entscheidungsverfahren für die Formeleigenschaft der Ausdrücke von $\mathfrak{P}$!

2. Welche Vorkommnisse der GV in den folgenden Formeln sind frei, welche gebunden? Was sind die Bereiche der Vorkommnisse von Quantoren? Welche Vorkommnisse von GV werden durch welche Vorkommnisse von Quantoren gebunden? Welche GV in diesen Formeln sind frei für $x$, für $y$, für $z$?

a) $\bigvee z(g(z, x) \lor f(y, z)) \supset \bigvee y(f(y, z) \land g(x, z))$.
b) $\bigwedge x(f(x, x) \supset \bigvee x f(x, y))$.
c) $\bigwedge x \bigvee y(f(x, y) \land g(z, y) \land \bigvee x(h(z, x) \land g(x, z)))$.
d) $g(x, z) \supset \bigvee y(f(y, x) \land f(x, z) \lor \bigwedge x \bigvee x(f(x, z) \supset g(z, x)))$.
e) $\bigwedge x(\bigvee y(f(x, z) \lor f(y, z)) \supset h(z)) \supset \bigvee z(f(x, y) \land h(z))$.

3. Man gebe das Resultat einer freien Umbenennung der gebundenen GV $x$ und $y$ in diesen Formeln an, die Resultate der freien Einsetzungen von $y$ für $x$, von $x$ für $y$ und von $x$ für $z$, und das Resultat dieser Einsetzungen, wenn sie simultan vorgenommen werden!

4. Welches sind die Teilformeln der angegebenen Formeln?

5. Was sind die Resultate der freien Einsetzungen von

a) $\bigvee z(g(z, x) \supset h(z, z)) \lor \bigvee x h(x, y)$ und

b) $\bigwedge z(g(x, z) \supset \neg g(y, z)) \land \bigvee y g(z, y)$ (als Prädikat in $x$ und $y$), für $f$ in die Formeln

c) $\bigvee y(f(y, y) \supset \bigwedge x f(x, y))$,

d) $\bigwedge z(f(z, x) \supset f(z, x)) \land \neg \bigvee x(f(x, y) \lor \neg f(y, x))$ und

e) $\bigwedge x \bigvee y(f(x, y) \supset f(y, x)) \supset \bigvee z(h(z) \land \neg f(z, x))$?

### 2.2.2 Interpretationen

Wie der a.l. Semantik der Begriff der Bewertung zugrunde liegt, so baut die semantische Deutung der p.l. Sprache auf den Begriff der Interpretation auf. Bei der Definition dieses Begriffes wollen wir folgende Redeweise verwenden:

Der Umfang eines einstelligen Begriffes ist die Menge der Gegenstände, die unter diesen Begriff fallen. Als Umfang eines $n$-stelligen Begriffes bezeichnen wir die Menge der $n$-tupel von Gegenständen, die unter den Begriff fallen. Der Umfang der Beziehung ‚$a$ ist kleiner als $b$' für den Bereich der natürlichen Zahlen ist z. B. die Menge der Paare $0, 1; 0, 2; \ldots; 1, 2; 1, 3; \ldots$, auf die dieser Begriff zutrifft. Man sieht dabei, daß es auf die Reihenfolge der Glieder eines solchen Paares ankommt: da gilt ‚$0$ ist kleiner als $1$', aber nicht ‚$1$ ist kleiner als $0$', fällt das Paar $0, 1$ unter den Begriff, nicht aber das Paar $1, 0$, so daß man zwischen diesen Paaren unterscheiden muß. Ebenso kommt es bei einem $n$-tupel auf die Reihenfolge der Glieder an, so daß wir ein $n$-tupel auch als $n$-gliedrige Folge auffassen können. Ist nun $F$ der Umfang eines $n$-stelligen Begriffes, so schreiben wir $a_1, \ldots, a_n \varepsilon F$, wenn das $n$-tupel $a_1, \ldots, a_n$ dem Umfang $F$ angehört, d. h. wenn gilt $F(a_1, \ldots, a_n)$.

Um die folgenden Darlegungen abzukürzen, wollen wir annehmen, daß nur die Operatoren $\neg$ und $\supset$ a.l. Grundoperatoren unserer Sprache $\mathfrak{P}$ sind, während die Operatoren $\vee$, $\wedge$ und $\equiv$ durch die Definitionen $D_1$, $D_2$ und $D_3$ eingeführt sind.

**2.2.2.1** Als eine *Interpretation* $\mathfrak{B}$ über dem (nichtleeren) Objektbereich $\gamma$ bezeichnen wir eine Folge von einstelligen Funktionen $\mathfrak{B}^1$, $\mathfrak{B}^2$, $\mathfrak{B}^{3 \cdot n}$ (für $n = 1, 2, \ldots$), für die gilt:

a) $\mathfrak{B}^2$ bildet die Menge $\Gamma$ der GV von $\mathfrak{P}$ ab in $\gamma$.

b) $\mathfrak{B}^{3 \cdot n}$ bildet die Menge $\Pi^n$ der $n$-stelligen PV von $\mathfrak{P}$ ab in die Menge der Umfänge von $n$-stelligen Begriffen über $\gamma$[1].

---

[1] Bezeichnet man die Menge aller $n$-tupel $a_1, \ldots, a_n$, für die $a_1, \ldots, a_n$ Objekte aus $\gamma$ sind mit $\gamma^n$ ($\gamma^n$ ist dann die sog. $n$-te Cartesische Potenz von $\gamma$) und bezeichnet man die Menge aller Teilmengen von $\gamma^n$ (die Potenzmenge von $\gamma^n$) mit $P(\gamma^n)$, so bildet also $\mathfrak{B}^{3 \cdot n}$ die Menge der $n$-stelligen PV $\Pi^n$ von $\mathfrak{P}$ in die Menge $P(\gamma^n)$ ab. Vgl. dazu die Abschnitte 5.3 und 5.5.

Als *Abbildung* einer Menge $M$ *in* eine Menge $N$ bezeichnet man eine Funktion $F$, deren Definitionsbereich $M$ ist und deren Wertevorrat eine Teilmenge von $N$ ist, deren Werte für alle Argumente aus $M$ also Elemente von $N$ sind. Ist jedes Element von $N$ auch Wert der Funktion $F$ für ein Argument aus $M$, so nennt man $F$ eine Abbildung von $M$ *auf* $N$.

c) $\mathfrak{B}^1$ bildet die Menge der Sätze von $\mathfrak{P}$ so in die Menge der Wahrheitswerte $\{\mathfrak{w}, \mathfrak{f}\}$ ab, daß gilt:

c1) $\mathfrak{B}^1(\mathrm{f}(\mathrm{x}_1,\ldots,\mathrm{x}_n)) = \mathfrak{w}$ genau dann, wenn $\mathfrak{B}^2(\mathrm{x}_1),\ldots,\mathfrak{B}^2(\mathrm{x}_n)\,\varepsilon\,\mathfrak{B}^{3\cdot n}(\mathrm{f})$.

c2) $\mathfrak{B}^1(\neg \mathrm{A}) = \mathfrak{w}$ genau dann, wenn $\mathfrak{B}^1(\mathrm{A}) = \mathfrak{f}$.

c3) $\mathfrak{B}^1(\mathrm{A} \supset \mathrm{B}) = \mathfrak{w}$ genau dann, wenn $\mathfrak{B}^1(\mathrm{A}) = \mathfrak{f}$ oder $\mathfrak{B}^1(\mathrm{B}) = \mathfrak{w}$.

c4) $\mathfrak{B}^1(\wedge \mathrm{x}\mathrm{A}) = \mathfrak{w}$ genau dann, wenn für alle Interpretationen $\overline{\mathfrak{B}}$ gilt: wenn $\overline{\mathfrak{B}} \underset{\mathrm{x}}{=} \mathfrak{B}$, dann $\overline{\mathfrak{B}}^1(\mathrm{A}) = \mathfrak{w}$.

c5) $\mathfrak{B}^1(\vee \mathrm{x}\mathrm{A}) = \mathfrak{w}$ genau dann, wenn es eine Interpretation $\overline{\mathfrak{B}}$ gibt, für die gilt $\overline{\mathfrak{B}} \underset{\mathrm{x}}{=} \mathfrak{B}$ und $\overline{\mathfrak{B}}^1(\mathrm{A}) = \mathfrak{w}$.

Dabei bedeute $\overline{\mathfrak{B}} \underset{\mathrm{x}}{=} \mathfrak{B}$, daß $\overline{\mathfrak{B}}$ eine Interpretation über dem gleichen Objektbereich ist wie $\mathfrak{B}$, daß gilt $\overline{\mathfrak{B}}^{3\cdot n} = \mathfrak{B}^{3\cdot n}$ für alle $n \geqslant 1$ und daß gilt $\overline{\mathfrak{B}}^2(\mathrm{y}) = \mathfrak{B}^2(\mathrm{y})$ für alle GV y, die von x verschieden sind. D. h. $\overline{\mathfrak{B}} \underset{\mathrm{x}}{=} \mathfrak{B}$ besagt, daß die Interpretationen $\overline{\mathfrak{B}}$ und $\mathfrak{B}$ übereinstimmen bis auf höchstens die Werte $\overline{\mathfrak{B}}^2(\mathrm{x})$ und $\mathfrak{B}^2(\mathrm{x})$.

Gilt $\mathfrak{B}^1(\mathrm{A}) = \mathfrak{w}$, so sagt man auch, die Interpretation $\mathfrak{B}$ *erfülle* die Formel A oder sei ein *Modell* von A.

Da in der A.L. die Sätze nicht ihrer Subjekt-Prädikatstruktur nach analysiert wurden, hatten die Bewertungen nur die Sätze zu deuten. In der P.L. hingegen ordnet eine Interpretation $\mathfrak{B}$ vermittels der Funktion $\mathfrak{B}^2$ den GV Gegenstände als Bedeutungen zu und vermittels der Funktionen $\mathfrak{B}^{3\cdot n}$ ordnet sie den $n$-stelligen PV $n$-stellige Begriffe zu, genauer Umfänge von $n$-stelligen Begriffen, wie das vom Standpunkt der Extensionalität der P.L. her nahe gelegt ist[1].

[1] Durch $\mathfrak{B}^{3\cdot n}$ werden zunächst nur den PV, also den Grundprädikaten von $\mathfrak{P}$, Bedeutungen zugeordnet. Eine explizite Deutung auch der zusammengesetzten Prädikate erweist sich als unnötig. Tatsächlich haben wir ja auch wegen der Deutung der GV als Eigennamen keine Ausdrücke für solche Prädikate in $\mathfrak{P}$. Enthält eine Formel $\mathrm{A}[\mathrm{x}_1,\ldots,\mathrm{x}_n]$ die $n$ verschiedenen GV $\mathrm{x}_1,\ldots,\mathrm{x}_n$ frei, so kann man aber den Ausdruck $\mathrm{A}[\hat{\mathrm{x}}_1,\ldots,\hat{\mathrm{x}}_n]$ als Prädikat auffassen (wobei das Symbol „$\hat{\ }$" über alle freien Vorkommnisse von $\mathrm{x}_1,\ldots,\mathrm{x}_n$ in $\mathrm{A}[\mathrm{x}_1,\ldots,\mathrm{x}_n]$ gesetzt wird) und die Funktion $\mathfrak{B}^{3\cdot n}$ so erweitern, daß gilt $\mathfrak{B}^{3\cdot n}(\mathrm{A}[\hat{\mathrm{x}}_1,\ldots,\hat{\mathrm{x}}_n])$ ist die Klasse aller $n$-tupel $a_1,\ldots,a_n$ aus $\gamma$, für die es eine Interpretation $\overline{\mathfrak{B}}$ gibt, so daß gilt: $\overline{\mathfrak{B}} \underset{\mathrm{x}_1,\ldots,\mathrm{x}_n}{=} \mathfrak{B}$

$\mathfrak{V}^1$ ordnet dann aufgrund der Deutungen der Prädikate und Eigennamen den Sätzen Wahrheitswerte zu.

Die Bedingung c1 besagt, daß der Satz $f(x_1, \ldots, x_n)$ genau dann wahr ist, wenn die GV $x_1, \ldots, x_n$ nach $\mathfrak{V}^2$ Objekte aus $\gamma$ bezeichnen, die zum Begriffsumfang gehören, den $\mathfrak{V}^{3 \cdot n}$ der PV f zuordnet, d. h. wenn die durch $x_1, \ldots, x_n$ bezeichneten Objekte unter den durch f bezeichneten Begriff fallen.

Die Bedingung c4 ist mit der Bedingung 2.1.2.1 äquivalent. Denn wenn z. B. der Satz $\Lambda x f(x)$ nach 2.1.2.1 wahr ist, so fallen alle Gegenstände aus $\gamma$ unter den Begriffsumfang $\mathfrak{V}^{3 \cdot 1}(f)$. Dann ist $\mathfrak{V}^1(f(x)) = \mathfrak{w}$, unabhängig von dem Wert $\mathfrak{V}^2(x)$, d. h. für alle Interpretationen $\overline{\mathfrak{V}}$ mit der Eigenschaft $\overline{\mathfrak{V}} \underset{x}{=} \mathfrak{V}$ gilt $\overline{\mathfrak{V}}^1(f(x)) = \mathfrak{w}$. Ist umgekehrt diese letztere Bedingung erfüllt, so fallen auch alle Gegenstände aus $\gamma$ unter $\mathfrak{V}^{3 \cdot 1}(f)$. Denn wenn es einen Gegenstand $a$ aus $\gamma$ gäbe, der nicht unter $\mathfrak{V}^{3 \cdot 1}(f)$ fiele, so gäbe es auch eine Interpretation $\overline{\mathfrak{V}}$, die mit $\mathfrak{V}$ bis auf höchstens die Werte $\mathfrak{V}^2(x)$, $\overline{\mathfrak{V}}^2(x)$ übereinstimmt und die der GV x den Gegenstand $a$ zuordnet, für die also gilt $\overline{\mathfrak{V}}^1(f(x)) = \mathfrak{f}$. In entsprechender Weise erkennt man die Äquivalenz der Bedingungen c5 und 2.1.2.2.

Durch Induktion nach dem Formelgrad von A erkennt man wieder in einfacher Weise, daß die Funktion $\mathfrak{V}^1$ nach 2.2.2.1 für alle Sätze A von $\mathfrak{P}$ definiert ist, wenn $\mathfrak{V}^2$ und $\mathfrak{V}^{3 \cdot n}$ für alle $n \geqslant 1$ vorgegeben sind.

Wir lassen im folgenden auch die oberen Indices in den Funktionsausdrücken „$\mathfrak{V}^1$", „$\mathfrak{V}^2$", „$\mathfrak{V}^{3 \cdot n}$" fort, wenn aus dem Kontext ersichtlich ist, welche der Funktionen aus $\mathfrak{V}$ gemeint ist.

**2.2.2.2** Wir nennen zwei Interpretationen $\mathfrak{V}_1$ und $\mathfrak{V}_2$ $\Gamma^*$-*äquivalent* — $\Gamma^*$ sei eine Menge von GV aus $\Gamma$ — wenn gilt $\mathfrak{V}_1(A) = \mathfrak{V}_2(A)$ für alle Sätze A, die freie GV nur aus $\Gamma^*$ enthalten.

($\overline{\mathfrak{V}}$ stimmt mit $\mathfrak{V}$ überein bis auf höchstens die Werte für $x_1, \ldots, x_n$) und $\overline{\mathfrak{V}}^1(A[x_1, \ldots, x_n]) = \mathfrak{w}$ und $\mathfrak{V}^2(x_1) = a_1$ und ... und $\mathfrak{V}^2(x_n) = a_n$.
Man kann dann beweisen:

1) Ist f eine $n$-stellige PV, so gilt $\mathfrak{V}^{3 \cdot n}(f) = \mathfrak{V}^{3 \cdot n}(f(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n))$, und durch Induktion nach dem Grad der Formel $A[x_1, \ldots, x_n]$:

2) $\mathfrak{V}^1(A[x_1/y_1, \ldots, x_n/y_n]) = \mathfrak{w}$ genau dann, wenn $\mathfrak{V}^2(y_1), \ldots, \mathfrak{V}^2(y_n)$ $\varepsilon$ $\mathfrak{V}^{3 \cdot n}(A[\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n])$.

Vgl. dazu den Abschnitt 5.5.

**2.2.2.3** Sind die Interpretationen $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$ über dem gleichen Objektbereich definiert und gilt $\mathfrak{B}_1(x) = \mathfrak{B}_2(x)$ für alle GV x aus $\Gamma^*$ und $\mathfrak{B}_1^{3 \cdot n} = \mathfrak{B}_2^{3 \cdot n}$ für alle $n \geqslant 1$, so sind $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ $\Gamma^*$-äquivalent.

Den Beweis für diesen Satz führen wir durch Induktion nach dem Grad $m$ von A. Die Basis für $m = 0$ ist trivial, da nach Voraussetzung über A, $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ die beiden Interpretationen allen Variablen in A die gleichen Werte zuordnen. Sei nun die Behauptung bewiesen für alle Formeln A der angegebenen Art vom Grad $\leqslant r$ und sei A vom Grad $r + 1$. Die a.l. Fälle (A hat die Gestalt $\neg$B oder B $\supset$ C) erledigen sich wieder auf einfache Weise. Habe nun A die Gestalt $\wedge$xB[x], so finden wir: aus $\mathfrak{B}_1(\wedge x B[x]) = \mathfrak{f}$ folgt nach c4 die Existenz einer Interpretation $\overline{\mathfrak{B}}_1$, für die gilt: $\overline{\mathfrak{B}}_1 \underset{x}{=} \mathfrak{B}_1$ und $\overline{\mathfrak{B}}_1(B[x]) = \mathfrak{f}$. Zu diesem $\overline{\mathfrak{B}}_1$ definieren wir nun ein $\overline{\mathfrak{B}}_2$, für das gilt $\overline{\mathfrak{B}}_2 \underset{x}{=} \mathfrak{B}_2$ und $\overline{\mathfrak{B}}_2(x) = \overline{\mathfrak{B}}_1(x)$ (1). Dann gilt $\overline{\mathfrak{B}}_2 \underset{x}{=} \mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{B}_2 \underset{\Gamma - \Gamma^*}{=} \mathfrak{B}_1$ (d. h. $\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{B}_1$ stimmen überein bis auf höchstens die Werte für die GV aus $\Gamma$, die nicht in $\Gamma^*$ enthalten sind), $\mathfrak{B}_1 \underset{x}{=} \overline{\mathfrak{B}}_1$, also $\overline{\mathfrak{B}}_2 \underset{\Gamma - \Gamma^*, x}{=} \overline{\mathfrak{B}}_1$, wegen (1) also $\overline{\mathfrak{B}}_2 \underset{\Gamma - \Gamma^*}{=} \overline{\mathfrak{B}}_1$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt also $\overline{\mathfrak{B}}_2(B[x]) = \overline{\mathfrak{B}}_1(B[x]) = \mathfrak{f}$, d. h. es gilt auch $\mathfrak{B}_2(\wedge x B[x]) = \mathfrak{f}$. Ebenso erhält man aus $\mathfrak{B}_2(\wedge x B[x]) = \mathfrak{f}$ auch $\mathfrak{B}_1(\wedge x B[x]) = \mathfrak{f}$.

Aus dem Satz 2.2.2.3 ergibt sich nun unmittelbar, daß der Wert $\mathfrak{B}(A)$ einer Interpretation $\mathfrak{B}$ für einen Satz A nur abhängt von dem Objektbereich von $\mathfrak{B}$ und den Werten von $\mathfrak{B}$ für die freien Variablen in A. Insbesondere gilt also $\mathfrak{B}(A) = \mathfrak{B}(A')$, wenn A' aus A durch freie Umbenennung gebundener GV hervorgeht. Das ist ein Resultat, das wir im folgenden oft benutzen werden.

**2.2.2.4** Aus $\mathfrak{B}_1 \underset{x_1, \ldots, x_n}{=} \mathfrak{B}_2$ und $\mathfrak{B}_1(x_i) = \mathfrak{B}_2(y_i)$ für $i = 1, \ldots, n$ folgt $\mathfrak{B}_1(A[x_1, \ldots, x_n]) = \mathfrak{B}_2(A[x_1/y_1, \ldots, x_n/y_n])$.

Auch den Beweis dieses Satzes führt man durch Induktion nach dem Grad $m$ von $A[x_1, \ldots, x_n]$. Ist $m = 0$, so hat $A[x_1, \ldots, x_n]$ z. B. die Gestalt $f(x_1, \ldots, x_n, z)$ und es gilt: $\mathfrak{B}_1(f(x_1, \ldots, x_n, z)) = \mathfrak{w}$ genau dann, wenn $\mathfrak{B}_1(x_1), \ldots, \mathfrak{B}_1(x_n), \mathfrak{B}_1(z) \varepsilon \mathfrak{B}_1(f)$, wegen $\mathfrak{B}_2(y_i) = \mathfrak{B}_1(x_i)$, $\mathfrak{B}_2(z) = \mathfrak{B}_1(z)$ und $\mathfrak{B}_2(f) = \mathfrak{B}_1(f)$ also genau dann, wenn $\mathfrak{B}_2(y_1), \ldots, \mathfrak{B}_2(y_n), \mathfrak{B}_2(z) \varepsilon \mathfrak{B}_2(f)$, also genau dann, wenn gilt $\mathfrak{B}_2(f(y_1, \ldots, y_n, z)) = \mathfrak{w}$. Im Induktionsschritt greifen wir nur den Fall heraus, daß $A[x_1, \ldots, x_n]$ die Gestalt $\wedge z B[z, x_1, \ldots, x_n]$ hat, wobei wir z als von $x_1, \ldots, x_n$ verschieden annehmen können. Ist nun $\mathfrak{B}_1(\wedge z B[z, x_1, \ldots, x_n]) = \mathfrak{f}$, so gibt es ein $\overline{\mathfrak{B}}_1$ mit $\overline{\mathfrak{B}}_1 \underset{z}{=} \mathfrak{B}_1$ und $\overline{\mathfrak{B}}_1(B[z, x_1, \ldots, x_n]) = \mathfrak{f}$. Ist z von $y_1, \ldots, y_n$

verschieden, so setzen wir $\overline{\mathfrak{B}}_2 \underset{z}{=} \mathfrak{B}_2$ und $\overline{\mathfrak{B}}_2(z) = \overline{\mathfrak{B}}_1(z)$. Es gilt dann: $\overline{\mathfrak{B}}_2 \underset{y_1,\ldots,y_n}{=} \overline{\mathfrak{B}}_1$ und $\overline{\mathfrak{B}}_2(y_i) = \overline{\mathfrak{B}}_1(x_i)$, nach Induktionsvoraussetzung also $\overline{\mathfrak{B}}_2(B[z, x_1/y_1,\ldots, x_n/y_n]) = \overline{\mathfrak{B}}_1(B[z, x_1,\ldots, x_n]) = \mathfrak{f}$, wegen $\overline{\mathfrak{B}}_2 \underset{z}{=} \mathfrak{B}_2$ also $\mathfrak{B}_2(\bigwedge zB[z, x_1/y_1,\ldots, x_n/y_n]) = \mathfrak{f}$. Ist z mit einer GV $y_1,\ldots, y_n$ identisch, so ist $A[x_1/y_1,\ldots, x_n/y_n]$ eine Formel $\bigwedge z'B[z/z', x_1/y_1,\ldots, x_n/y_n]$, wobei z' eine bisher nicht vorgekommene GV ist. Wir setzen dann $\overline{\mathfrak{B}}_2 \underset{y_1,\ldots,y_n,z'}{=} \overline{\mathfrak{B}}_1$, $\overline{\mathfrak{B}}_2(y_i) = \overline{\mathfrak{B}}_1(x_i)$ und $\overline{\mathfrak{B}}_2(z') = \overline{\mathfrak{B}}_1(z)$. Es gilt dann nach Induktionsvoraussetzung $\overline{\mathfrak{B}}_2(B[z/z', x_1/y_1,\ldots, x_n/y_n]) = \overline{\mathfrak{B}}_1(B[z, x_1,\ldots, x_n]) = \mathfrak{f}$, also wegen $\overline{\mathfrak{B}}_2 \underset{z'}{=} \mathfrak{B}_2$ auch $\mathfrak{B}_2(\bigwedge z'B[z/z', x_1/y_1,\ldots, x_n/y_n]) = \mathfrak{f}$. Umgekehrt schließt man in entsprechender Weise von $\mathfrak{B}_2(\bigwedge z'B[z/z', x_1/y_1,\ldots, x_n/y_n]) = \mathfrak{f}$ auf $\mathfrak{B}_1(\bigwedge zB[z, x_1,\ldots, x_n]) = \mathfrak{f}$.

Wir definieren nun in Analogie zu **1.3.2.3** und **1.3.2.4**:

**2.2.2.5** Wir nennen einen Satz A *prädikatenlogisch wahr*, wenn jede Interpretation A erfüllt (d. h. A den Wert $\mathfrak{w}$ zuordnet), *prädikatenlogisch falsch*, wenn jede Interpretation A den Wert $\mathfrak{f}$ zuordnet, *prädikatenlogisch indeterminiert*, wenn A weder p.l. wahr, noch p.l. falsch ist.

In der Definition der p.l. Schlüsse nehmen wir im Hinblick auf den später zu erklärenden Deduktionsbegriff der Kalküle $\mathfrak{P}2$ und $\mathfrak{P}3$ eine Erweiterung gegenüber **1.3.2.4** vor, indem wir nun auch Schlüsse mit mehreren Konklusionen betrachten:

**2.2.2.6** Wir nennen einen Schluß $A_1,\ldots, A_m \rightarrow B_1,\ldots, B_n (m + n \geqslant 1)$ *prädikatenlogisch gültig*, wenn jede Interpretation, die alle Prämissen $A_1,\ldots, A_m$ erfüllt, auch mindestens eine der Konklusionen $B_1,\ldots, B_n$ erfüllt.

Dementsprechend werden wir einen Schluß $\rightarrow B_1,\ldots, B_n$ als p.l. gültig bezeichnen, wenn jede Interpretation mindestens einen der Sätze $B_1,\ldots, B_n$ erfüllt. Ein Schluß der Form $A_1,\ldots, A_m \rightarrow$ hingegen ist p.l. gültig, wenn jede Interpretation mindestens einen der Sätze $A_1,\ldots, A_m$ nicht erfüllt. Es gilt dann in Entsprechung zu **1.3.2.5** der Satz:

**2.2.2.7** Ein Schluß $A_1,\ldots,A_m \rightarrow B_1,\ldots,B_n$ ist p.l. gültig genau dann, wenn der Satz $A_1 \land \ldots \land A_m \supset B_1 \lor \ldots \lor B_n$ p.l. wahr ist.

Das ergibt sich wieder direkt aus 2.2.2.6 und den Regeln für die Operatoren $\land$, $\lor$, $\supset$ nach 2.2.2.1 und D1, D2.

Nach dieser Definition gelten z. B. die folgenden beiden Theoreme:

**2.2.2.8** Der Schluß $\wedge x A[x] \rightarrow A[x/y]$ ist p.l. gültig für alle GV y.

Denn gilt $\mathfrak{B}(A[x/y]) = \mathfrak{f}$, so erhält man für $\overline{\mathfrak{B}} \underset{x}{=} \mathfrak{B}$ und $\overline{\mathfrak{B}}(x) = \mathfrak{B}(y)$ nach 2.2.2.4 $\overline{\mathfrak{B}}(A[x]) = \mathfrak{f}$, also nach 2.2.2.1—c4 $\mathfrak{B}(\wedge x A[x]) = \mathfrak{f}$.

**2.2.2.9** Ist $A \rightarrow B[x]$ ein p.l. gültiger Schluß und enthält A die GV x nicht frei, so ist auch $A \rightarrow \wedge x B[x]$ ein p.l. gültiger Schluß.

Wir führen den Beweis indirekt und nehmen an, es gäbe eine Interpretation $\mathfrak{B}$, die A erfüllt, aber nicht $\wedge x B[x]$. Dann gibt es eine Interpretation $\overline{\mathfrak{B}}$, so daß gilt $\overline{\mathfrak{B}} \underset{x}{=} \mathfrak{B}$ und $\overline{\mathfrak{B}}(B[x]) = \mathfrak{f}$. Da x nicht frei in A vorkommt gilt aber auch $\overline{\mathfrak{B}}(A) = \mathfrak{B}(A) = \mathfrak{w}$ nach 2.2.2.3, so daß $\overline{\mathfrak{B}}$ ein Gegenbeispiel für die Annahme der p.l. Gültigkeit des Schlusses $A \rightarrow B[x]$ ist.

Zur Vorbereitung des Ersetzungstheorems beweisen wir noch den Satz:

**2.2.2.10** Der Schluß $\wedge x(A[x] \equiv B[x]) \rightarrow \wedge x A[x] \equiv \wedge x B[x]$ ist p.l. gültig.

Ist $\mathfrak{B}(\wedge x A[x] \equiv \wedge x B[x]) = \mathfrak{f}$, so können wir annehmen, daß z. B. $\mathfrak{B}(\wedge x A[x]) = \mathfrak{w}$ und $\mathfrak{B}(\wedge x B[x]) = \mathfrak{f}$ ist. Es gibt dann aber ein $\overline{\mathfrak{B}}$, so daß gilt $\overline{\mathfrak{B}} \underset{x}{=} \mathfrak{B}$ und $\overline{\mathfrak{B}}(B[x]) = \mathfrak{f}$, aber $\overline{\mathfrak{B}}(A[x]) = \mathfrak{w}$, d. h. $\overline{\mathfrak{B}}(A[x] \equiv B[x]) = \mathfrak{f}$, also $\mathfrak{B}(\wedge x(A[x] \equiv B[x]) = \mathfrak{f}$.

Wir wollen nun das Ersetzungstheorem für die P.L. beweisen. Zu seiner Formulierung verwenden wir wieder die in 1.2.6 erklärte Symbolik $C[\![A]\!]$.

**2.2.2.11** Wenn $x_1, \ldots, x_n$ die freien Vorkommnisse von GV von $A \equiv B$ sind, die in $C[\![A]\!] \equiv C[\![B]\!]$ gebunden sind, so gilt: $\wedge x_1 \ldots x_n(A \equiv B) \rightarrow C[\![A]\!] \equiv C[\![B]\!]$.

Der Beweis verläuft nach dem gleichen Gedanken wie der Beweis für das a.l. Ersetzungstheorem 1.3.2.6. Die Induktionsbasis und die a.l. Fälle im Induktionsschritt erledigen sich wie dort. Habe nun $C[\![A]\!]$ die Gestalt $\wedge z A'[\![A]\!]$. Dann gilt nach Induktionsvoraussetzung $\wedge x_1 \ldots x_n(A \equiv B) \rightarrow A'[\![A]\!] \equiv A'[\![B]\!]$ und da z eine der GV $x_1, \ldots, x_n$ ist und somit in $\wedge x_1 \ldots x_n(A \equiv B)$ nicht frei vorkommt, nach 2.2.2.9 $\wedge x_1 \ldots x_n(A \equiv B) \rightarrow \wedge z(A'[\![A]\!] \equiv A'[\![B]\!])$. Wegen 2.2.2.10 und wegen der Transitivität der Folgebeziehung gilt also $\wedge x_1 \ldots x_n(A \equiv B) \rightarrow \wedge z A'[\![A]\!] \equiv \wedge z A'[\![B]\!]$.

In entsprechender Weise argumentiert man für den Fall, daß A'⟦A⟧ die Gestalt VzA'⟦A⟧ hat. Damit ist das Ersetzungstheorem für die P.L. bewiesen.

Mit Hilfe des Ersetzungstheorems und mit dem Beweis von $\rightarrow \bigvee x A \equiv \neg \bigwedge x \neg A$, der sich unmittelbar aus den Regeln 2.2.2.1 ergibt, können wir nun die Definition $\bigvee x A := \neg \bigwedge x \neg A$ rechtfertigen. Wir können also den Operator $\bigwedge$ als einzigen p.l. Grundoperator auffassen und in der P.L. so mit dem Operatorensystem $\{\neg, \supset, \bigwedge\}$ auskommen. In diesem Sinn verfahren wir im folgenden und fassen so 2.2.2.1—c5 als abgeleitete Wahrheitsbedingung auf.

Für einige weitere semantische Theoreme erweist sich der folgende Hilfssatz als nützlich:

**2.2.2.12** Wir nennen eine Interpretation $\mathfrak{V}$ *normal*, wenn für alle Formeln der Gestalt $\bigwedge x A[x]$ gilt: wenn $\mathfrak{V}(\bigwedge x A[x]) = \mathfrak{f}$, so gibt es eine GV y, so daß $\mathfrak{V}(A[x/y]) = \mathfrak{f}$.

**2.2.2.13** Zu jeder Menge $\Gamma^*$ von GV, die unendlich viele GV aus $\Gamma$ nicht enthält, und zu jeder Interpretation $\mathfrak{V}$ gibt es eine $\Gamma^*$-äquivalente normale Interpretation $\mathfrak{V}^+$.

Beweis: Wir definieren $\mathfrak{V}^+$ über dem gleichen Individuenbereich wie $\mathfrak{V}$ und fordern

1) $\mathfrak{V}^+ \underset{\Gamma - \Gamma^*}{=} \mathfrak{V}$. Damit ist erreicht, daß $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{V}^+$ $\Gamma^*$-äquivalent sind (vgl. 2.2.2.3). Um zu erreichen, daß $\mathfrak{V}^+$ normal ist, definieren wir $\mathfrak{V}^+$ für die GV aus $\Gamma - \Gamma^*$ in folgender Weise: Wir zerlegen die Menge $\Gamma - \Gamma^*$ in unendlich viele unendliche Mengen $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$, so daß jede GV aus $\Gamma - \Gamma^*$ in genau einer dieser Mengen enthalten ist[1].

[1] Die Möglichkeit einer solchen Zerlegung der Menge $\Gamma - \Gamma^*$ kann man wie folgt einsehen: Liege eine Abzählung der Elemente dieser Menge vor, so daß jedem Element genau eine natürliche Zahl zugeordnet ist und jeder natürlichen Zahl ein Element der Menge, so definieren wir die Menge $\Gamma_1$ so, daß sie die Elemente mit zugeordneten ungeraden Zahlen (1, 3, 5, 7, . . .) enthält, $\Gamma_2$ so, daß diese Menge die Elemente enthält, die Zahlen zugeordnet sind, die durch 2, aber nicht durch $2^2$ teilbar sind (2, 6, 10, . . .), allgemein $\Gamma_n$ so daß diese Menge die Elemente von $\Gamma - \Gamma^*$ enthält, die Zahlen zugeordnet sind, die durch $2^{n-1}$, aber nicht durch $2^n$ teilbar sind. Jede dieser Mengen enthält dann unendlich viele Elemente und kein Element ist in zwei verschiedenen Mengen enthalten.

Die GV $z_k^i$ sollen für $i = 1, 2, \ldots$ die Elemente von $\Gamma_k$ durchlaufen.

Es seien $\wedge x_1^i A_1^i[x_1^i]$ genau die Allformeln, die freie GV nur aus $\Gamma^*$ enthalten, und denen $\mathfrak{B}^+$ (nach der Bestimmung (1)) den Wert $\mathfrak{f}$ zuordnet. Wir bilden daraus durch freie Umbenennung die Sätze $\wedge z_1^i A_1^i[x_1^i/z_1^i]$, denen $\mathfrak{B}^+$ nach 2.2.2.3 dann ebenfalls den Wert $\mathfrak{f}$ zuordnet. Nach 2.2.2.1—c4 gibt es dann zu jedem dieser Sätze eine Interpretation $\mathfrak{B}_1^i$, für die gilt: $\mathfrak{B}_1^i \underset{z_1^i}{=} \mathfrak{B}^+$ und $\mathfrak{B}_1^i(A_1^i[x_1^i/z_1^i]) = \mathfrak{f}$. Wir setzen dann

2) $\mathfrak{B}^+(z_1^i) = \mathfrak{B}_1^i(z_1^i)$ für alle $i = 1, 2, \ldots$. Damit ist $\mathfrak{B}^+$ für die GV aus $\Gamma_1$ definiert.

So schreiten wir fort und betrachten im k-ten Schritt $(k > 1)$ die Allformeln $\wedge x_k^i A_k^i[x_k^i]$, die nur freie GV aus den Mengen $\Gamma^*, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_{k-1}$ enthalten und mindestens eine freie GV aus $\Gamma_{k-1}$, und denen $\mathfrak{B}^+$ (nach den Festsetzungen (1) bis $(k-1)$) den Wert $\mathfrak{f}$ zuordnet. Wir bilden daraus durch freie Umbenennung die Sätze $\wedge z_k^i A_k^i[x_k^i/z_k^i]$. Nach 2.2.2.3 und 2.2.2.1—c4 gibt es dann zu jedem dieser Sätze eine Interpretation $\mathfrak{B}_k^i$, für die gilt: $\mathfrak{B}_k^i \underset{z_k^i}{=} \mathfrak{B}^+$ und $\mathfrak{B}_k^i(A_k^i[x_k^i/z_k^i]) = \mathfrak{f}$. Wir setzen dann

$k+1$) $\mathfrak{B}^+(z_k^i) = \mathfrak{B}_k^i(z_k^i)$ für alle $i = 1, 2, \ldots$.

Nach dieser Konstruktion ist $\mathfrak{B}^+$ nun für alle GV aus $\Gamma - \Gamma^*$ definiert. Denn zu jeder GV x gibt es unendlich viele falsche Allformeln, die x frei enthalten, z. B. $\wedge y(f(y) \wedge \neg f(y) \wedge f(x))$, $\wedge y(f(y) \wedge \neg f(y) \wedge f(x) \wedge f(x))$, usf. So werden tatsächlich alle GV der Mengen $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$ aufgebraucht. $\mathfrak{B}^+$ ist nun normal. Denn sei $\mathfrak{B}^+(\wedge x A[x]) = \mathfrak{f}$, so gibt es eine Zahl k, so daß $\wedge x A[x]$ nur freie GV aus den Mengen $\Gamma^*, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_{k-1}$ enthält und mindestens eine freie GV aus $\Gamma_{k-1}$. Dann ist $\wedge x A[x]$ eine Formel $\wedge x_k^i A_k^i[x_k^i]$ für ein bestimmtes i und es gilt $\mathfrak{B}^+(A_k^i[x_k^i/z_k^i]) = \mathfrak{B}_k^i(A_k^i[x_k^i/z_k^i]) = \mathfrak{f}$, wegen der Festsetzung $(k+1)$, 2.2.2.3 und 2.2.2.4.

Für beliebige Interpretationen $\mathfrak{B}$ folgt nach 2.2.2.8 aus $\mathfrak{B}(\wedge x A[x]) = \mathfrak{w}$ $\mathfrak{B}(A[x/y]) = \mathfrak{w}$ für alle GV y. Die Umkehrung gilt hingegen nicht allgemein. Denn wenn z. B. der Objektbereich $\gamma$ von $\mathfrak{B}$ rote und nichtrote Dinge enthält, wenn $\mathfrak{B}^2$ $\Gamma$ in die Menge der roten Dinge aus $\gamma$ abbildet und wenn $\mathfrak{B}^{3.1}(f)$ die Menge der roten Dinge aus $\gamma$ ist, so gilt für alle GV y zwar $\mathfrak{B}(y) \varepsilon \mathfrak{B}(f)$, also $\mathfrak{B}(f(y)) = \mathfrak{w}$, aber nicht $\mathfrak{B}(\wedge x f(x)) = \mathfrak{w}$. Für normale Interpretationen $\mathfrak{B}$ gilt hingegen nach 2.2.2.12 auch

$\mathfrak{B}(\wedge x A[x]) = \mathfrak{w}$, wenn für alle GV y gilt $\mathfrak{B}(A[x/y]) = \mathfrak{w}$. Aufgrund des Satzes 2.2.2.13 gilt nun, daß man sich für die Auszeichnung der p.l. gültigen Schlüsse auf normale Interpretationen beschränken und also sagen kann: I) Ein Schluß $A_1, \ldots, A_m \rightarrow B_1, \ldots, B_n$ $(m + n \geqslant 1)$ ist p.l. gültig genau dann, wenn jede normale Interpretation, die alle Formeln $A_1, \ldots, A_m$ erfüllt, auch mindestens eine der Formeln $B_1, \ldots, B_n$ erfüllt. Denn ist der Schluß nach 2.2.2.6 ungültig, so gibt es eine Interpretation $\mathfrak{B}$, die alle Formeln $A_1, \ldots, A_m$, aber keine der Formeln $B_1, \ldots, B_n$ erfüllt. Da aber in den endlich vielen Sätzen $A_1, \ldots, B_n$ unendlich viele GV nicht vorkommen, gibt es nach 2.2.2.13 zu $\mathfrak{B}$ eine normale Interpretation $\mathfrak{B}^+$, die das Gleiche leistet, die also zeigt, daß der Schluß auch nach der Bestimmung I ungültig ist. Ist aber der Schluß nach I ungültig, so trivialerweise auch nach 2.2.2.6.

Da nun bei Beschränkung auf normale Interpretationen die Wahrheitsbedingungen für komplexe Sätze nur von den Wahrheitsbedingungen für Teilsätze abhängen, kann man auch eine p.l. Semantik aufbauen, indem man den Begriff der Bewertung nach 1.3.2.1 erweitert durch die Bedingung: $\mathfrak{W}(\wedge x A[x]) = \mathfrak{w}$ genau dann, wenn für alle GV y gilt $\mathfrak{W}(A[x/y]) = \mathfrak{w}$. Dann kann man auch in der P.L. auf eine explizite Deutung der GV und der PV verzichten und sich auf eine Zuordnung von Wahrheitswerten zu den Formeln beschränken. Eine solche p.l. Semantik zeichnet dann die gleichen Schlüsse als gültig aus wie die Interpretationssemantik und sie ist in mancher Hinsicht einfacher als diese. Da aber ihre intuitive Berechtigung, d. h. ihre Verträglichkeit mit der Festsetzung 2.1.2.1 einen besonderen Nachweis erfordert, so ist die Interpretationssemantik, die sich als direkte Präzisierung dieser intuitiven Festlegung darstellt, doch als primär anzusehen[1].

Zum Abschluß dieses Abschnittes wollen wir noch einige wichtige Resultate der Interpretationssemantik angeben.

**2.2.2.14** Wenn ein Satz A erfüllbar ist, so ist er erfüllbar in einem abzählbaren Objektbereich (Satz von LÖWENHEIM[2]).

---

[1] Für die Äquivalenz der p.l. Bewertungssemantik mit einer Semantik, die sich auf normale Interpretationen stützt, vgl. auch die Übungsaufgabe Nr. 3 auf S. 149.

[2] Vgl. [48]. Der Satz wird auch in der Formulierung ausgesprochen: Wenn A gültig ist in allen abzählbaren Bereichen, so ist A allgemeingültig. Für die Äquivalenz der beiden Formulierungen vgl. 2.2.2.18.

Zum Beweis dieses Satzes nehmen wir an, $\mathfrak{B}$ erfülle A und $\mathfrak{B}^+$ sei eine $\Gamma^*$-äquivalente normale Interpretation zu $\mathfrak{B}$, wo $\Gamma^*$ die Menge der GV sei, die in A frei vorkommen. Wir definieren dann zu $\mathfrak{B}^+$ eine Interpretation $\mathfrak{B}'$ über dem Wertevorrat $\gamma'$ der Funktion $\mathfrak{B}^{+1}$ (dieser Wertevorrat ist höchstens abzählbar unendlich, da der Definitionsbereich $\Gamma$ der Funktion abzählbar unendlich ist). Wir setzen $\mathfrak{B}'(x) = \mathfrak{B}^+(x)$ für alle GV x, und $\mathfrak{B}'^{3\cdot n}(f) =$ Menge jener $n$-tupel aus $\mathfrak{B}^{+3\cdot n}(f)$, die nur Glieder aus $\gamma'$ enthalten. Dann zeigen wir durch Induktion nach dem Formelgrad $m$ von A, daß gilt $\mathfrak{B}'(A) = \mathfrak{B}^+(A)$ für alle Sätze A. Ist $m = 0$, so gilt $\mathfrak{B}'(f(x_1, \ldots, x_n)) = \mathfrak{w}$ genau dann, wenn $\mathfrak{B}'(x_1), \ldots, \mathfrak{B}'(x_n) \varepsilon \mathfrak{B}'(f)$, also genau dann, wenn $\mathfrak{B}^+(x_1), \ldots, \mathfrak{B}^+(x_n) \varepsilon \mathfrak{B}^+(f)$ gilt, wegen $\mathfrak{B}^+(x_i) = \mathfrak{B}'(x_i)$ für $i = 1, \ldots, n$ und da die Objekte $\mathfrak{B}^+(x_i)$ aus $\gamma'$ sind. Im Induktionsschritt greifen wir nur den Fall heraus, daß A die Gestalt $\wedge x B[x]$ hat. Ist $\mathfrak{B}^+(\wedge x B[x]) = \mathfrak{f}$, so gibt es wegen der Normalität von $\mathfrak{B}^+$ eine GV y, für die gilt $\mathfrak{B}^+(B[x/y]) = \mathfrak{f}$, also nach Induktionsvoraussetzung auch $\mathfrak{B}'(B[x/y]) = \mathfrak{f}$, also nach 2.2.2.8 $\mathfrak{B}'(\wedge x B[x]) = \mathfrak{f}$. Ist umgekehrt $\mathfrak{B}'(\wedge x B[x]) = \mathfrak{f}$, so gibt es ein $\overline{\mathfrak{B}}'$ mit $\overline{\mathfrak{B}}' \underset{x}{=} \mathfrak{B}'$ und $\overline{\mathfrak{B}}'(B[x]) = \mathfrak{f}$. Wir setzen dann $\overline{\mathfrak{B}}^+ \underset{x}{=} \mathfrak{B}^+$ und $\overline{\mathfrak{B}}^+(x) = \overline{\mathfrak{B}}'(x)$. Dann sind für $\overline{\mathfrak{B}}^+$ und $\overline{\mathfrak{B}}'$ die Voraussetzungen erfüllt, die wir oben für $\mathfrak{B}^+$ und $\mathfrak{B}'$ gemacht haben, so daß wir nach Induktionsvoraussetzung erhalten $\overline{\mathfrak{B}}^+(B[x]) = \overline{\mathfrak{B}}'(B[x]) = \mathfrak{f}$, also $\mathfrak{B}^+(\wedge x B[x]) = \mathfrak{f}$.

**2.2.2.15** Wenn eine Menge $M$ von Sätzen simultan erfüllbar ist, d. h. wenn es eine Interpretation $\mathfrak{B}$ gibt, die alle Sätze aus $M$ erfüllt, so ist $M$ simultan erfüllbar über einem abzählbaren Individuenbereich (Verallgemeinerung des Satzes von LÖWENHEIM nach SKOLEM[1]).

Beweis:

1) Gibt es eine unendliche Menge von GV, die nicht frei in den Formeln von $M$ vorkommen, so argumentiert man wie im Fall des Satzes 2.2.2.14. 2) Andernfalls wählt man eine eineindeutige Abbildung $\varphi$ von $\Gamma$ in einen Teilbereich $\Gamma^*$ von $\Gamma$, so daß $\Gamma - \Gamma^*$ unendlich ist, und bildet zu $M$ die Satzmenge $M'$, die zu jedem Satz $A[x_1, \ldots, x_n]$ mit genau den freien GV $x_1, \ldots, x_n$ aus $M$ den Satz $A[x_1/\varphi(x_1), \ldots, x_n/\varphi(x_n)]$ enthält. Sind nun $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}'$ zwei Interpretationen über dem gleichen Individuenbereich, für die gilt: 3) $\mathfrak{B}'(\varphi(x)) = \mathfrak{B}(x)$ für alle GV x, und $\mathfrak{B}'^{3\cdot n} = \mathfrak{B}^{3\cdot n}$, so gilt nach 2.2.2.4 $\mathfrak{B}'(A[x_1/\varphi(x_1), \ldots, x_n/\varphi(x_n)]) = \mathfrak{B}(A[x_1,$

[1] Der Satz wurde von SKOLEM in [65] bewiesen.

$\ldots, x_n]$). $\mathfrak{B}'$ erfüllt also die Sätze aus $M'$ genau dann, wenn $\mathfrak{B}$ die Sätze aus $M$ erfüllt. Erfülle nun $\mathfrak{B}$ die Sätze aus $M$, so definieren wir ein $\mathfrak{B}'$ nach (3), das dann die Sätze aus $M'$ erfüllt. Nach (1) gibt es dann zu $\mathfrak{B}'$ ein $\mathfrak{B}^{+\prime}$ über einem abzählbaren Objektbereich, das die Sätze aus $M'$ erfüllt. Definiert man zu $\mathfrak{B}^{+\prime}$ nach (3) ein $\mathfrak{B}^{+}$, so ist $\mathfrak{B}^{+}$ die gesuchte Interpretation über einem abzählbaren Bereich, die alle Sätze aus $M$ erfüllt.

**2.2.2.16** Wir nennen einen Satz A *k-erfüllbar*, wenn es eine Interpretation über einem $k$-zahligen Individuenbereich gibt, die A erfüllt — *k-gültig*, wenn alle Interpretationen über $k$-zahligen Individuenbereichen A erfüllen. Dabei sei $k$ eine Kardinalzahl $\geqslant 1$[1].

Ein Satz ist also p.l. wahr oder allgemeingültig, wenn er $k$-gültig ist für alle Kardinalzahlen $k \geqslant 1$.

**2.2.2.17** Ist ein Satz A $k$-erfüllbar, so ist er auch $k'$-erfüllbar, wo $k \leqslant k'$ ist.

Beweis: $\gamma_1$ sei ein $k$-zahliger Bereich, über dem eine Interpretation $\mathfrak{B}_1$ definiert ist, für die gilt $\mathfrak{B}_1(\mathrm{A}) = \mathfrak{w}$. $\gamma_2$ sei ein $k'$-zahliger Bereich, über dem wir eine Interpretation $\mathfrak{B}_2$ erklären durch die Festsetzungen: $\mathfrak{B}_2(x) = \bar{\varphi}(\mathfrak{B}_1(x))$ für alle GV x, und $\mathfrak{B}_2^{3 \cdot n}(f) =$ Menge aller $n$-tupel $a_1, \ldots, a_n$ aus $\gamma_2$, für die gilt $\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n) \varepsilon \mathfrak{B}_1^{3 \cdot n}(f)$. Dabei sei $\varphi$ eine Abbildung von $\gamma_2$ auf $\gamma_1$ und $\bar{\varphi}$ sei eine Abbildung von $\gamma_1$ in $\gamma_2$, so daß $\bar{\varphi}(a) = b$ nur dann, wenn $\varphi(b) = a$. Werden also mehrere Gegenstände von $\gamma_2$ durch $\varphi$ auf denselben Gegenstand $a$ von $\gamma_1$ abgebildet, so ist $\bar{\varphi}(a)$ einer dieser Gegenstände[2]. Es gilt also $\varphi(\bar{\varphi}(a)) = a$. Es gilt nun $\mathfrak{B}_2(\mathrm{B}) = \mathfrak{B}_1(\mathrm{B})$ für alle Sätze B. Wegen $\mathfrak{B}_1(\mathrm{A}) = \mathfrak{w}$ gilt dann auch $\mathfrak{B}_2(\mathrm{A}) = \mathfrak{w}$, was zu beweisen ist. Für die Behauptung der Äquivalenz von $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ führen wir einen Induktionsbeweis nach dem Grad von B, aus dem wir nur zwei Fälle herausgreifen: 1) Es sei B eine Atomformel. Dann gilt $\mathfrak{B}_2(f(x_1, \ldots, x_n)) = \mathfrak{w}$ genau dann, wenn $\mathfrak{B}_2(x_1), \ldots, \mathfrak{B}_2(x_n) \varepsilon \mathfrak{B}_2(f)$. Das gilt nach Definition von $\mathfrak{B}_2$ genau dann, wenn $\bar{\varphi}(\mathfrak{B}_1(x_1)), \ldots, \bar{\varphi}(\mathfrak{B}_1(x_n))$

[1] Kardinalzahlen charakterisieren die Anzahl der Elemente einer Menge. Die Zahlen $0, 1, 2, \ldots$ sind endliche Kardinalzahlen, die kleinste nichtendliche Kardinalzahl ist die Kardinalzahl der Menge der natürlichen Zahlen. Kardinalzahlen sind so definiert, daß zwei Mengen die gleiche Kardinalzahl haben, wenn es eine eineindeutige Abbildung der einen Menge auf die andere gibt.

[2] Die Existenz einer solchen Abbildung $\bar{\varphi}$ beweist man in der Mengenlehre mit Hilfe des Auswahlprinzips, vgl. 5.1.

$\varepsilon\mathfrak{B}_2(\mathfrak{f})$, also genau dann, wenn $\varphi(\bar{\varphi}(\mathfrak{B}_1(x_1))),\ldots,\varphi(\bar{\varphi}(\mathfrak{B}_1(x_n)))\varepsilon\mathfrak{B}_1(\mathfrak{f})$. Wegen $\varphi(\bar{\varphi}(a)) = a$ gilt $\mathfrak{B}_2(f(x_1,\ldots,x_n)) = \mathfrak{w}$ also genau dann, wenn $\mathfrak{B}_1(f(x_1,\ldots,x_n)) = \mathfrak{w}$. Zugleich bemerken wir, daß für jede Interpretation $\mathfrak{B}_2'$, für die gilt: $\mathfrak{B}_2' \underset{x_1,\ldots,x_n}{=} \mathfrak{B}_2$ und $\mathfrak{B}_2'(x_i) = \bar{\varphi}(\varphi(\mathfrak{B}_2(x_i))$ $(i = 1,\ldots, n)$, auch $\mathfrak{B}_2'(f(x_1,\ldots,x_n)) = \mathfrak{B}_2(f(x_1,\ldots,x_n))$ gilt. Diese Behauptung führen wir im Induktionsbeweis allgemein für Formeln $A[x_1,\ldots,x_n]$ mit. 2) Im Induktionsschritt betrachten wir den Fall, daß B die Gestalt $\Lambda x C[x]$ hat. Gilt $\mathfrak{B}_1(\Lambda x C[x]) = \mathfrak{f}$, so gibt es ein $\overline{\mathfrak{B}}_1$, so daß $\overline{\mathfrak{B}}_1 \underset{x}{=} \mathfrak{B}_1$ und $\overline{\mathfrak{B}}_1(C[x]) = \mathfrak{f}$. Wir setzen dann $\overline{\mathfrak{B}}_2 \underset{x}{=} \mathfrak{B}_2$ und $\overline{\mathfrak{B}}_2(x) = \bar{\varphi}(\overline{\mathfrak{B}}_1(x))$ und erhalten nach Induktionsvoraussetzung dann $\overline{\mathfrak{B}}_2(C[x]) = \mathfrak{f}$, also $\mathfrak{B}_2(\Lambda x C[x]) = \mathfrak{f}$. Gilt $\mathfrak{B}_2(\Lambda x\, C[x]) = \mathfrak{f}$, so gibt es ein $\overline{\mathfrak{B}}_2$, so daß $\overline{\mathfrak{B}}_2 \underset{x}{=} \mathfrak{B}_2$ und $\overline{\mathfrak{B}}_2(C[x]) = \mathfrak{f}$. Ist $\overline{\mathfrak{B}}_2' \underset{x}{=} \overline{\mathfrak{B}}_2$ und $\overline{\mathfrak{B}}_2'(x) = \bar{\varphi}(\varphi(\overline{\mathfrak{B}}_2(x)))$, so gilt nach Induktionsvoraussetzung auch $\overline{\mathfrak{B}}_2'(C[x]) = \mathfrak{f}$. Wir setzen dann $\overline{\mathfrak{B}}_1 \underset{x}{=} \mathfrak{B}_1$ und $\overline{\mathfrak{B}}_1(x) = \varphi(\overline{\mathfrak{B}}_2'(x))$, so daß gilt $\overline{\mathfrak{B}}_2'(x) = \bar{\varphi}(\overline{\mathfrak{B}}_1(x))$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt dann auch $\overline{\mathfrak{B}}_1(C[x]) = \mathfrak{f}$, also $\mathfrak{B}_1(\Lambda x C[x]) = \mathfrak{f}$.

Aus dem Satz 2.2.2.17 folgt insbesondere, daß ein Satz in jedem $k$-zahligen Bereich erfüllbar ist, wenn er in einem $k$-zahligen Bereich erfüllbar ist. Mit 2.2.2.15 erhalten wir ferner: Wenn eine Menge $M$ von Sätzen simultan erfüllbar ist, so ist sie simultan erfüllbar über einem abzählbar unendlichen Bereich[1].

**2.2.2.18** Ist ein Satz $k$-gültig, so ist er auch $k'$-gültig, wenn $k \geqslant k'$ ist.

Denn wäre ein Satz A nicht $k'$-gültig, so gäbe es eine Interpretation, die ihn falsch macht und daher $\neg A$ erfüllt. Dann wäre nach 2.2.2.17 $\neg A$ aber auch in einem $k$-zahligen Bereich erfüllbar und es gäbe somit eine Interpretation über einem $k$-zahligen Bereich, die A nicht erfüllt.

Mit diesem Satz gewinnen wir aus 2.2.2.14 eine andere Version des Löwenheimschen Theorems: Wenn ein Satz gültig ist über abzählbar unendlichen Bereichen, so ist er allgemeingültig, d. h. p.l. wahr.

Denn wäre ein Satz A nicht allgemeingültig, so wäre $\neg A$ erfüllbar. Nach 2.2.2.14 und 2.2.2.17 wäre $\neg A$ dann auch in einem abzählbar unendlichen Bereich erfüllbar und A wäre daher nicht gültig über solchen Bereichen.

---

[1] Abzählbar sind alle endlichen Bereiche und die Bereiche, die sich eindeutig auf die Menge der natürlichen Zahlen abbilden lassen. Abzählbar unendlich sind nur die letzteren Bereiche.

Ist ein Satz A gültig in allen endlichen Bereichen, so folgt daraus nicht, daß A auch allgemeingültig ist. Denn es gibt Sätze, die nur in unendlichen Bereichen erfüllbar sind, deren Negation also in allen endlichen Bereichen gültig ist. Beispiel eines solchen Satzes ist die Formel $\wedge x \neg f(x, x) \wedge \wedge x \vee y f(x, y) \wedge \wedge xyz(f(x, y) \wedge f(y, z) \supset f(x, z))$, die wir durch U abkürzen wollen. $U_1$, $U_2$, $U_3$ seien die drei Konjunktionsglieder von U. Ist $\mathfrak{B}$ eine Interpretation, die U erfüllt, $\gamma$ ihr Objektbereich, so ist $\gamma$ nicht leer, enthält also ein Element $a_1$. Wegen $U_2$ muß es nun ein $a_2$ in $\gamma$ geben, so daß gilt $f(a_1, a_2)$. Wegen $U_1$ ist $a_2$ von $a_1$ verschieden, $\gamma$ muß also mindestens zwei Elemente enthalten. Wegen $U_2$ muß es nun zu $a_2$ ein $a_3$ geben, so daß gilt $f(a_2, a_3)$. Wegen $U_1$ muß $a_3$ von $a_2$ verschieden sein. Wegen $U_3$ und $U_1$ muß $a_3$ aber auch von $a_1$ verschieden sein, denn aus $a_3 = a_1$ würde man mit $U_3$ aus $f(a_1, a_2)$ und $f(a_2, a_3)$ erhalten $f(a_3, a_3)$. $\gamma$ muß also mindestens drei Elemente enthalten. Sei nun schon gezeigt, daß $\gamma$ mindestens $k$ Elemente enthält, so weist man auf die gleiche Weise nach, daß $\gamma$ mindestens $k + 1$ Elemente enthalten muß. Also muß $\gamma$ mindestens abzählbar unendlich sein, d. h. U ist über endlichen Bereichen nicht erfüllbar. Wählt man als Objektbereich die Menge der natürlichen Zahlen, und interpretiert die PV $f$ durch die Beziehung des Kleinerseins in diesem Bereich, so erhält man eine Interpretation, die U erfüllt, denn U besagt in dieser Interpretation soviel wie: keine Zahl ist kleiner als sie selbst und zu jeder Zahl gibt es eine größere und ist eine Zahl kleiner als eine zweite und diese kleiner als eine dritte, so ist auch die erste kleiner als die dritte.

*Übungsaufgaben:*

1. Beweise, daß jeder a.l. gültige Schluß auch p.l. gültig ist!

2. Leite mit Hilfe der Definition $\vee x A := \neg \wedge x \neg A$ die Bedingung 2.2.2.1—c5 aus den Bedingungen 2.2.2.1—c1, c4 her!

3. Präzisiere die Äquivalenz zwischen der p.l. Bewertungssemantik, wie sie oben auf S. **145** skizziert wurde, mit der Interpretationssemantik durch den Beweis des Satzes: Ein Schluß $A_1, \ldots, A_m \rightarrow B_1, \ldots, B_n$ ist p.l. gültig nach 2.2.2.6 genau dann, wenn er gültig ist im Sinn der Bewertungssemantik, d. h. wenn jede p.l. Bewertung, die alle Sätze $A_1, \ldots, A_m$ erfüllt, auch mindestens einen der Sätze $B_1, \ldots, B_n$ erfüllt. (Anleitung: Nach den Bemerkungen auf S. **145** ist nur mehr zu zeigen: Gibt es eine normale Interpretation $\mathfrak{B}$, die alle Formeln $A_1, \ldots, A_m$

erfüllt, aber keine der Formeln $B_1, \ldots, B_n$, so gibt es eine Bewertung $\mathfrak{W}$, die das gleiche leistet. Das folgt aber aus dem Satz: Zu jeder normalen Interpretation $\mathfrak{B}$ gibt es eine äquivalente Bewertung $\mathfrak{W}$, d. h. eine Bewertung, die allen Formeln die gleichen Wahrheitswerte zuordnet, und umgekehrt. Diesen Satz beweist man wie folgt: Ist $\mathfrak{B}$ vorgegeben, so definiert man $\mathfrak{W}$ durch die Festsetzung $\mathfrak{W}(A) = \mathfrak{B}(A)$ für alle Atomformeln A und zeigt durch Induktion nach dem Formelgrad von B, daß dann für beliebige Formeln B gilt: $\mathfrak{W}(B) = \mathfrak{B}(B)$. — Ist $\mathfrak{W}$ vorgegeben, so definiert man $\mathfrak{B}$ über einem abzählbar unendlichen Objektbereich $\gamma$, so, daß $\mathfrak{B}^2$ eine umkehrbar eindeutige Abbildung von $\Gamma$ auf $\gamma$ ist (so daß also gilt $x = y$ für $\mathfrak{B}(x) = \mathfrak{B}(y)$) und $\mathfrak{B}^{3 \cdot n}(f) =$ Menge aller n-tupel $a_1, \ldots, a_n$ ist, für die es GV $x_1, \ldots, x_n$ gibt, so daß gilt $\mathfrak{B}(x_1) = a_1, \ldots, \mathfrak{B}(x_n) = a_n$ und $\mathfrak{W}(f(x_1, \ldots, x_n)) = \mathfrak{w}$. Dann zeigt man durch Induktion nach dem Formelgrad von B wieder, daß für alle Formeln B gilt $\mathfrak{B}(B) = \mathfrak{W}(B)$.)

## 2.3 Der Kalkül $\mathfrak{P}1$

In diesem Abschnitt soll die Formalisierung der P.L. zu Ende geführt werden, die wir in 2.2 begonnen hatten, indem wir nun die p.l. Theoreme, d. h. die p.l. wahren Sätze auszeichnen durch Angabe eines formalen Kalküls, in dem genau diese Sätze beweisbar sind. Dieser Kalkül $\mathfrak{P}1$ stellt sich dar als eine Erweiterung des a.l. Kalküls $\mathfrak{A}1$ aus 1.3.3.

### 2.3.1 Axiome und Deduktionsregeln

Als *Axiome* von $\mathfrak{P}1$ wählen wir die Axiome von $\mathfrak{A}1$:

**A1)** $A \supset (B \supset A)$
**A2)** $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
**A3)** $(\neg A \supset \neg B) \supset (B \supset A)$, sowie das p.l. Axiom
**A4)** $\wedge x A[x] \supset A[x/y]$, wobei die GV x frei sein soll für die GV y in $A[x]$.

Als *Deduktionsregeln* von $\mathfrak{P}1$ wählen wir die Abtrennungsregel **R1** von $\mathfrak{A}1$ und die p.l. Regel

**R2)** Aus einem Satz $A \supset B[x]$ kann man in $\mathfrak{P}1$ den Satz $A \supset \wedge x B[x]$ gewinnen, wenn die GV x in A nicht frei vorkommt.

Damit ist nun nach **1.3.3.4** der Begriff ‚ableitbar in 𝔓1' festgelegt und als Spezialisierung dieses Begriffes auch ‚beweisbar in 𝔓1'.

Zu den a.l. Definitionen von 𝔄1

**D1)** $A \vee B := \neg A \supset B$
**D2)** $A \wedge B := \neg(\neg A \vee \neg B)$
**D3)** $A \equiv B := (A \supset B) \wedge (B \supset A)$ nehmen wir noch die Definition
**D4)** $\bigvee x A := \neg \bigwedge x \neg A$ hinzu.

Der Kalkül 𝔓1 benützt wie 𝔄1 Axiomenschemata. Dem Kalkül 𝔄1* mit endlich vielen Axiomen würde hier der Kalkül 𝔓1* entsprechen, den wir in folgender Weise charakterisieren:

Wir nehmen zur Sprache 𝔓 als Grundzeichen auch die Satzvariablen von 𝔄 hinzu, die Atomformeln sein sollen. Die Axiome von 𝔓1* sind die drei Axiome A1*, A2* und A3* von 𝔄1* und das Axiom

**A4*)** $\bigwedge x f(x) \supset f(y)$.

Die Deduktionsregeln von 𝔓1* sind die Regeln R1 und SR1 (Substitutionsregeln für SV), sowie die folgenden beiden Substitutionsregeln für GV und PV:

**SR2:** Wenn ein Satz $A[x]$ in 𝔓1* beweisbar ist, so auch der Satz $A[x/y]$.

**SR3:** Wenn ein Satz $A[f]$ in 𝔓1* beweisbar ist, der die n-stellige PV f enthält und $B[x_1, \ldots, x_n]$ ist eine Formel, die n verschiedene GV $x_1, \ldots, x_n$ frei enthält, so ist auch der Satz $A[f/B[x_1, \ldots, x_n]]$ in 𝔓1* beweisbar.

Zwischen 𝔓1 und 𝔓1* besteht ein analoges Verhältnis, wie zwischen 𝔄1 und 𝔄1*. Insbesondere sind in 𝔓1* die gleichen Formeln beweisbar, die auch in 𝔓1 beweisbar sind, wenn man auch in der Formulierung von 𝔓1 SV zuläßt. Da uns der Kalkül 𝔓1* im folgenden nicht interessiert, wollen wir auf einen Beweis dieser Behauptung verzichten und ihn dem Leser als Übungsaufgabe überlassen. (Vgl. dazu auch MT7.)

### 2.3.2 Theoreme und Metatheoreme von 𝔓1

Die Theoreme von 𝔄1 gelten auch in 𝔓1, da die Axiome und Deduktionsregeln von 𝔄1 auch solche von 𝔓1 sind. Wir werden daher diese Theoreme mit ihren Nummern aus **1.3.4** im folgenden anziehen. Die

Metatheoreme, wie das Deduktionstheorem und das Ersetzungstheorem müssen hingegen für $\mathfrak{P}1$ neu bewiesen werden, denn ihr Beweis erfordert eine Induktion über den Formelaufbau, der für unsere p.l. Sprache $\mathfrak{P}$ nun anders geartet ist, wie für die a.l. Sprache $\mathfrak{A}$.

Wir beginnen mit der Neuformulierung des Deduktionstheorems für $\mathfrak{P}1$. Dies Theorem gilt für $\mathfrak{P}1$ nur unter einer Beschränkung, zu deren Formulierung wir zunächst zwei Hilfsbegriffe einführen:

Sei die Satzfolge $C_1, \ldots, C_n$ eine Herleitung $\mathfrak{H}$ der Formel B aus den Annahmeformeln (AF) $A_1, \ldots, A_m$ in $\mathfrak{P}1$, dann sagen wir: $C_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ *hängt ab von* $A_k$ $(k = 1, \ldots, m)$ in $\mathfrak{H}$, wenn gilt: $C_i = A_k$ oder $C_i$ ist Konklusion einer Anwendung von R1 oder R2 mit Prämissen, von denen eine von $A_k$ abhängt in $\mathfrak{H}$.

Wir sagen ferner: eine GV x wird *eingefangen* in $\mathfrak{H}$ für eine AF $A_k$, wenn gilt: x kommt in $A_k$ frei vor und $\mathfrak{H}$ enthält eine Anwendung von R2 auf eine Formel $C_i$, die von $A_k$ abhängt, bei der die GV x gebunden wird.

Wird die GV x für eine AF eingefangen, so schreiben wir auch $A_1, \ldots, A_m \vdash_x B$. Wird in der angegebenen Ableitung keine GV für $A_1, \ldots, A_m$ eingefangen — man sagt auch, die freien GV in $A_1, \ldots, A_m$ werden in der Ableitung *festgehalten* —, so schreiben wir auch $A_1, \ldots, A_m \vdash_0 B$.

Das Deduktionstheorem für $\mathfrak{P}1$ lautet nun:

**MT4:** Wenn gilt $A_1, \ldots, A_m \vdash B$, wobei in der vorliegenden Ableitung keine GV für die AF $A_m$ eingefangen wird, so gilt auch $A_1, \ldots, A_{m-1} \vdash A_m \supset B$.

Zum Beweis knüpfen wir an MT2 an und fügen zu dem dort angegebenen Beweis folgenden Fall (e) hinzu:

e) Ergibt sich $C_i$ in $\mathfrak{H}$ aus einer Anwendung von R2 auf die Formel $C_k = D \supset E[x]$, so daß $C_i$ die Formel $D \supset \Lambda x E[x]$ ist und x nicht frei in D vorkommt, so ersetzen wir die Zeile $C_i$

| | | |
|---|---|---|
| α) durch | $A_m \supset (D \supset E[x])$ | $C_k$ |
| | $A_m \wedge D \supset E[x]$ | T37 (mit D3, T22, R1) |
| | $A_m \wedge D \supset \Lambda x E[x]$ | R2 |
| | $A_m \supset (D \supset \Lambda x E[x])$ | T37, |

wenn $A_m$ x nicht frei enthält.

$\beta$) durch

$$
\begin{array}{ll}
\mathfrak{H}' & \\
D \supset E[x] & \\
D \supset \wedge x E[x] & \text{R2} \\
(D \supset \wedge x E[x]) \supset (A_m \supset (D \supset \wedge x E[x])) & \text{A1} \\
A_m \supset (D \supset \wedge x E[x]) & \text{R1},
\end{array}
$$

wenn $A_m$ x frei enthält. Dann hängt nämlich nach der Voraussetzung von MT4 $D \supset E[x]$ nicht von $A_m$ ab, es gibt also eine Ableitung $\mathfrak{H}'$ von $D \supset E[x]$ aus den Formeln $A_1, \ldots, A_{m-1}$.

In der folgenden Ableitung von $\wedge x A[x]$ aus $A[x]$ wird die GV x für $A[x]$ eingefangen:

$$
\begin{array}{ll}
A[x] & \text{AF} \\
(B \supset B) \supset A[x] & \text{A1, R1} \\
(B \supset B) \supset \wedge x A[x] & \text{R2 (B enthalte x nicht frei!)} \\
B \supset B & \text{T1} \\
\wedge x A[x] & \text{R1.}
\end{array}
$$

Es gilt also $A[x] \vdash_x \wedge x A[x]$, aber mit MT4 läßt sich daraus nicht folgern $\vdash A[x] \supset \wedge x A[x]$. An diesem Beispiel läßt sich die Notwendigkeit der Restriktion in MT4 intuitiv leicht einsehen: Die Ableitungsbeziehungen in $\mathfrak{P}1$ spiegeln nicht die p.l. gültigen Schlüsse wieder, $A[x] \rightarrow \wedge x A[x]$ ist kein p.l. gültiger Schluß. Das liegt daran, daß der Satz $A[x]$ in $\mathfrak{P}1$ wegen $A[x] \vdash \wedge x A[x]$ und $\wedge x A[x] \vdash A[x]$ (A4, R1) ebenso stark ist wie $\wedge x A[x]$. Semantisch gesehen deuten also die freien GV in den Sätzen von $\mathfrak{P}1$ eine Allgemeinheit an. Die Ableitungsbeziehung $A[x] \vdash \wedge x A[x]$ ist daher wie der Schluß $\wedge x A[x] \rightarrow \wedge x A[x]$ zu interpretieren. Daraus kann man aber nicht auf den Satz $A[x] \supset \wedge x A[x]$ schließen, der bei dieser Auffassung semantisch dasselbe besagt wie $\wedge x(A[x] \supset \wedge x A[x])$. Entsprechendes galt für den Kalkül $\mathfrak{A}1^*$, wo die Satzvariablen semantisch gesehen generelle Aussagen andeuteten. Daher galt auch dort das Deduktionstheorem nicht unbeschränkt. Für $\mathfrak{A}1^*$ und entsprechend für $\mathfrak{P}1^*$ müßte man vielmehr eine Restriktion in Analogie zu der in MT4 formulieren, wobei Variablen auch durch Einsetzungen als eingefangen gelten.

**T38:** $A[x] \vdash_x \wedge x A[x]$, zum Beweis s. oben!

**T39:** $A[x] \supset B[x] \vdash_x \wedge x A[x] \supset \wedge x B[x]$.

Beweis:

| | |
|---|---|
| $A[x] \supset B[x]$ | AF |
| $\wedge x A[x]$ | AF |
| $A[x]$ | A4, R1 |
| $B[x]$ | R1 |
| $\wedge x B[x]$ | T38, |

also $A[x] \supset B[x], \wedge x A[x] \vdash_x \wedge x B[x]$. Daraus erhalten wir mit MT4 (x wird nicht für $\wedge x A[x]$ eingefangen!) die zu beweisende Behauptung. Aus T39 erhalten wir mit D3, T21, T22, T23 sofort:

**T40:** $A[x] \equiv B[x] \vdash_x \wedge x A[x] \equiv \wedge x B[x]$.

Wir können nun das Ersetzungstheorem für $\mathfrak{P}1$ beweisen[1]:

**MT5:** $A \equiv B \vdash_{x_1,\dots,x_n} C[\![A]\!] \equiv C[\![B]\!]$. Dabei seien $x_1, \dots, x_n$ die freien Vorkommnisse von GV in $A \equiv B$, die in $C[\![A]\!] \equiv C[\![B]\!]$ gebunden sind.

Wir verwenden wieder die Symbolik aus 1.2.6 und knüpfen an den Beweis des a.l. Ersetzungstheorems MT3 an, dem wir im Induktionsschritt nur folgenden Fall hinzufügen müssen:

4) $C[\![A^+]\!]$ habe die Gestalt $\wedge y A'[\![A]\!]$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt $A \equiv B \vdash A'[\![A]\!] \equiv A'[\![B]\!]$, also nach T40 $A \equiv B \vdash_y \wedge y A'[\![A]\!] \equiv \wedge y A'[\![B]\!]$.

**T41:** $\vdash \wedge x A[x] \equiv \wedge y A[x/y]$, wo x frei für y in $A[x]$ ist und y nicht frei in $\wedge x A[x]$ vorkommt.

Beweis:

| | |
|---|---|
| $\wedge x A[x] \supset A[x/y]$ | A4 |
| $\wedge x A[x] \supset \wedge y A[x/y]$ | R2. |

In $A[x/y]$ ist y frei für x: die freien Vorkommnisse von y stehen nicht im Bereich eines mit x gleichnamigen Quantors, da y in $A[x]$ nur an jenen Stellen für x eingesetzt wurde bei der Erzeugung der Formel $A[x/y]$, an denen x frei war. Da y nicht frei in $\wedge x A[x]$ vorkommen sollte, kommt y in $A[x/y]$ ferner nur an jenen Stellen frei vor, wo in $A[x]$ x

[1] Vgl. 2.2.2.11.

frei vorkommt. Also ergibt die freie Einsetzung von x für y in A[x/y] die Formel A[x]. Daher gilt:

$\wedge$yA[x/y] $\supset$ A[x] A4
$\wedge$yA[x/y] $\supset$ $\wedge$xA[x] R2.

Mit T23 und D3 erhält man endlich T41.

**MT6:** Wenn A′ aus A durch freie Umbenennungen gebundener GV hervorgeht, so gilt $\vdash$ A′ $\equiv$ A.

Wir führen den Beweis durch Induktion nach der Zahl *n* von Quantorenvorkommnissen in A. Für *n = 0* ist A mit A′ identisch. Habe nun im Induktionsschritt A die Gestalt $\wedge$xB[x] und komme die GV y nicht frei in $\wedge$xB[x] vor. Nach Induktionsvoraussetzung gilt B[x] $\equiv$ B′[x], wo B′ durch freie Umbenennungen von gebundenen GV aus B hervorgehen möge und x frei für y in B′[x] sei. Nach T40 gilt dann

$\wedge$xB[x] $\equiv$ $\wedge$xB′[x]
$\wedge$xB′[x] $\equiv$ $\wedge$yB′[x/y] T41
$\wedge$xB[x] $\equiv$ $\wedge$yB′[x/y] T26.

Für $\wedge$yB′[x/y] kann man dann auch $\wedge$yB[x/y] schreiben.

**T42:** $\vdash$ $\wedge$xA[x] $\supset$ A[x/y].

Beweis: T42 ist ein Axiom nach A4, wenn x frei ist für y in A[x]. Andernfalls gehe A′[x] aus A[x] hervor durch freie Umbenennungen gebundener GV und x sei frei für y in A′[x]. Dann gilt:

$\wedge$xA[x] $\supset$ $\wedge$xA′[x] MT6, D3, T21
$\wedge$xA′[x] $\supset$ A′[x/y] A4
$\wedge$xA[x] $\supset$ A[x/y] T5, da man für A′[x/y] wieder A[x/y] schreiben kann.

**T43:** $\vdash$ A[x/y] $\supset$ $\vee$xA[x].

Beweis:

$\wedge$x $\neg$A[x] $\supset$ $\neg$A[x/y] T42
A[x/y] $\supset$ $\neg\wedge$x $\neg$A[x] T6
A[x/y] $\supset$ $\vee$xA[x] D4.

**T44:** $A[x] \supset B \vdash_x \bigvee x A[x] \supset B$, wo B die GV x nicht frei enthält.

Beweis:

| | |
|---|---|
| $A[x] \supset B$ | AF |
| $\neg B \supset \neg A[x]$ | T6 |
| $\neg B \supset \bigwedge x \neg A[x]$ | R2 |
| $\neg \bigwedge x \neg A[x] \supset B$ | T6 |
| $\bigvee x A[x] \supset B$ | D4. |

**T45:** $\vdash \bigwedge x A \supset \bigvee x A$.

Beweis:

| | |
|---|---|
| $\bigwedge x A \supset A$ | A4 |
| $A \supset \bigvee x A$ | T43 |
| $\bigwedge x A \supset \bigvee x A$ | T5. |

**T46** a: $\vdash \bigwedge x A \equiv \neg \bigvee x \neg A$
b: $\vdash \bigwedge x \neg A \equiv \neg \bigvee x A$
c: $\vdash \neg \bigwedge x A \equiv \bigvee x \neg A$
d: $\vdash \neg \bigwedge x \neg A \equiv \bigvee x A$.

Die Beweise ergeben sich in einfacher Weise aus D4, T24 und MT5.

**T47:** $\vdash \bigwedge x(A \supset B) \equiv A \supset \bigwedge x B$, wo A die GV x nicht frei enthält.

Beweis:

| | |
|---|---|
| $\bigwedge x(A \supset B)$ | AF |
| $A \supset B$ | A4, R1 |
| $A \supset \bigwedge x B$ | R2. |

Daraus mit MT4 $\vdash \bigwedge x(A \supset B) \supset (A \supset \bigwedge x B)$. Ferner

| | |
|---|---|
| $A \supset \bigwedge x B$ | AF |
| $\bigwedge x B \supset B$ | A4 |
| $A \supset B$ | T5 |
| $\bigwedge x(A \supset B)$ | T38 |

also mit MT4 $\vdash (A \supset \bigwedge x B) \supset \bigwedge x(A \supset B)$. Mit T23 und D3 erhält man endlich die Behauptung des Theorems.

**T48:** $\vdash \bigwedge x(B \supset A) \equiv \bigvee x B \supset A$, wo A die GV x nicht frei enthält.

Beweis:

| | |
|---|---|
| $\wedge x(B \supset A)$ | AF |
| $B \supset A$ | A4, R1 |
| $\vee xB \supset A$ | T44. |

Und

| | |
|---|---|
| $\vee xB \supset A$ | AF |
| $\neg \wedge x \neg B \supset A$ | D4 |
| $\neg A \supset \wedge x \neg B$ | T6 |
| $\wedge x(\neg A \supset \neg B)$ | T47, D3, T21 |
| $\wedge x(B \supset A)$ | T6, MT5. |

Mit MT4, T23 und D3 erhält man daraus die Behauptung des Theorems.

**T49:** $\vdash \wedge x(A \wedge B) \equiv \wedge xA \wedge \wedge xB$.

Beweis:

| | |
|---|---|
| $\wedge x(A \wedge B)$ | AF |
| $A \wedge B$ | A4, R1 |
| $A$ | T21 |
| $B$ | T22 |
| $\wedge xA$ | T38 |
| $\wedge xB$ | T38 |
| $\wedge xA \wedge \wedge xB$ | T23. |

Und

| | |
|---|---|
| $\wedge xA \wedge \wedge xB$ | AF |
| $\wedge xA$ | T21 |
| $A$ | A4, R1 |
| $\wedge xB$ | T22 |
| $B$ | A4, R1 |
| $A \wedge B$ | T23 |
| $\wedge x(A \wedge B)$ | T38. |

Auf diese beiden Ergebnisse hat man dann wieder MT4, T23 und D3 anzuwenden.

**T50:** $\vdash \vee x(A \supset B) \equiv A \supset \vee xB$, wo A die GV x nicht frei enthält.

Beweis:

| | |
|---|---|
| $\bigwedge x \neg(A \supset B) \equiv \bigwedge x(A \wedge \neg B)$ | T29, MT5 |
| $\bigwedge x(A \wedge \neg B) \equiv A \wedge \bigwedge x \neg B$ | T49 (da A x nicht frei enthält gilt $A \equiv \bigwedge xA$) |
| $\bigwedge x \neg(A \supset B) \equiv A \wedge \bigwedge x \neg B$ | T26 |
| $\neg\bigwedge x \neg(A \supset B) \equiv \neg(A \wedge \bigwedge x \neg B)$ | T25 |
| $\neg(A \wedge \bigwedge x \neg B) \equiv \neg A \vee \neg\bigwedge x \neg B$ | T27 |
| $\bigvee x(A \supset B) \equiv A \supset \bigvee xB$ | T26, D4, D1. |

**T51:** $\vdash \bigvee x(B \supset A) \equiv \bigwedge xB \supset A$, wo A die GV x nicht frei enthält.

Beweis:

| | |
|---|---|
| $\bigwedge x \neg(B \supset A) \equiv \bigwedge x(B \wedge \neg A)$ | T29, MT5 |
| $\bigwedge x(B \wedge \neg A) \equiv \bigwedge xB \wedge \neg A$ | T49 |
| $\neg\bigwedge x \neg(B \supset A) \equiv \neg(\bigwedge xB \wedge \neg A)$ | T26 |
| $\neg(\bigwedge xB \wedge \neg A) \equiv \neg\bigwedge xB \vee A$ | T27 |
| $\bigvee x(B \supset A) \equiv \bigwedge xB \supset A$ | T26, D4, D1. |

**T52:** $\vdash \bigvee x(A \vee B) \equiv \bigvee xA \vee \bigvee xB$.

Beweis:

| | |
|---|---|
| $\bigvee x(A \vee B) \equiv \neg\bigwedge x \neg(A \vee B)$ | D4 |
| $\neg\bigwedge x \neg(A \vee B) \equiv \neg\bigwedge x(\neg A \wedge \neg B)$ | T28 |
| $\neg\bigwedge x(\neg A \wedge \neg B) \equiv \neg(\bigwedge x \neg A \wedge \bigwedge x \neg B)$ | T49 |
| $\neg(\bigwedge x \neg A \wedge \bigwedge x \neg B) \equiv \neg(\neg\bigvee xA \wedge \neg\bigvee xB)$ | T46, MT5 |
| $\neg(\neg\bigvee xA \wedge \neg\bigvee x B) \equiv \bigvee xA \vee \bigvee xB$ | T27, T24, MT5. |

**T53** a: $\vdash \bigwedge xyA \equiv \bigwedge yxA$.

Beweis:

| | |
|---|---|
| $\bigwedge xyA$ | AF |
| $\bigwedge yA$ | A1, R1 |
| $A$ | A1, R1 |
| $\bigwedge xA$ | T38 |
| $\bigwedge yxA$ | T38. |

Daraus erhält man mit MT4 die Behauptung. Aus (a) folgt mit D4 und T25 sofort

b: $\vdash \bigvee xyA \equiv \bigvee yxA$.

**T54:** $\vee x \wedge y A \vdash \wedge y \vee x A$.

Beweis:

| | |
|---|---|
| $\wedge yA$ | AF |
| $A$ | A4, R1 |
| $\vee xA$ | T43, R1 |
| $\wedge y \vee xA$ | T38, |

also $\wedge yA \vdash \wedge y \vee xA$, wobei x für $\wedge yA$ nicht eingefangen wird. Mit MT4 erhalten wir also $\vdash \wedge yA \supset \wedge y \vee xA$ und daraus mit T44 und R1 $\vee x \wedge yA \vdash \wedge y \vee xA$, da $\wedge y \vee xA$ die GV x nicht frei enthält.

Die Umkehrung von T54 gilt aber nicht.

Wir beweisen nun das folgende Substitutionstheorem:

**MT7:** a) Aus $\vdash A[x]$ folgt $\vdash A[x/y]$ für beliebige GV y.

b) Aus $\vdash A[f]$ folgt $\vdash A[f/B[x_1, \ldots, x_n]]$, wo f eine n-stellige PV ist und die n verschiedenen GV $x_1, \ldots, x_n$ frei in B vorkommen.

Beweis: a) Mit T38 erhalten wir $A[x] \vdash \wedge xA[x]$, mit T42 $\wedge xA[x] \vdash A[x/y]$, also $A[x] \vdash A[x/y]$. Ist also $A[x]$ beweisbar, so auch $A[x/y]$.

b) Es liege ein Beweis $\mathfrak{H}$ für $A[f]$ vor. Dann ersetzen wir in $\mathfrak{H}$ alle Formeln $C[f]$, welche die PV f enthalten, durch $C[f/B[x_1, \ldots, x_n]]$. Dadurch bleibt der Charakter der Axiome von $\mathfrak{H}$ erhalten. Die Anwendungen der Regel R1 in $\mathfrak{H}$ gehen nach ev. Anwendungen von MT6, D3 und R1 für die freie Umbenennung gebundener GV in Anwendungen der gleichen Regel über. Und die Anwendungen von R2 gehen ebenfalls in Anwendungen der gleichen Regel über, wenn man MT6, D3, R1 für ev. notwendige freie Umbenennungen gebundener GV benützt und wenn man, falls die Variablenbedingung für R2 nach der Einsetzung von $B[x_1, \ldots, x_n]$ für f verletzt ist, die fragliche GV nach MT7a frei umbenennt.

Zum Abschluß beweisen wir noch ein Metatheorem über eine Normalformdarstellung der p.l. Formeln.

**2.3.2.1** Wir sagen, eine Formel A habe *pränexe Normalform,* wenn A die Gestalt $Q_1x_1 \ldots Q_nx_nB$ hat, wo $Q_1x_1, \ldots, Q_nx_n$ Quantoren sind und B eine Formel ist, die keinen Quantor enthält. Wir nennen dann auch $Q_1x_1 \ldots Q_nx_n$ das *Präfix* und B den *Kern* (oder die *Matrix*) der Formel A.

Es gilt nun der Satz:

**MT8:** Zu jeder Formel A gibt es eine Formel $A_N$ in pränexer Normalform, so daß gilt $\vdash A \equiv A_N$.

Zum Beweis geben wir ein Konstruktionsverfahren für $A_N$ an, das aus einer Reihe von äquivalenten Umformungen besteht. Die Formel A denken wir uns dabei geschrieben in den Operatoren $\neg$, $\supset$, $\wedge$, $\vee$. Wir betrachten in jedem Schritt das erste Vorkommnis eines Quantors von links, das 1. nicht am Anfang der Gesamtformel steht und die gesamte auf ihn folgende Formel zum Bereich hat, und dem 2. nicht nur Quantoren voraufgehen, sondern Teilformeln, logische Symbole oder Klammern (in der nach den Klammerregeln reduzierten Schreibweise). Wenn dieses Vorkommnis in einer Teilformel steht

a) der Form $\neg\wedge xB$, so ist diese zu ersetzen durch $\vee x\neg B$
b) der Form $\neg\vee xB$, so ist diese zu ersetzen durch $\wedge x\neg B$
c) der Form $\wedge xB[x]\supset C$, so ist diese zu ersetzen durch $\vee y(B[x/y]\supset C)$
d) der Form $\vee xB[x]\supset C$, so ist diese zu ersetzen durch $\wedge y(B[x/y]\supset C)$
e) der Form $C\supset\wedge xB[x]$, so ist diese zu ersetzen durch $\wedge y(C\supset B[x/y])$
f) der Form $C\supset\vee xB[x]$, so ist diese zu ersetzen durch $\vee y(C\supset B[x/y])$.

In (c) bis (f) sei y eine GV, die in C nicht frei vorkommt und die, falls sie von x verschieden ist, nicht frei in B[x] vorkommt. In endlich vielen Schritten läßt sich so aus A eine Formel $A_N$ in pränexer Normalform erzeugen. Die Umformungen nach (a) bis (f) führen die Formeln nach T46, T51, T48, T47, T50 in äquivalente Formeln über, so daß nach T26 gilt $\vdash A \equiv A_N$.

Dies Konstruktionsverfahren für $A_N$ wollen wir an folgendem Beispiel erläutern: A sei die Formel

$$\vee x\neg\vee z(f(x)\supset g(y,z))\supset\wedge y(f(y)\supset\neg\wedge xg(x,z)).$$

Dann erhalten wir:

$\wedge x(\neg\vee z(f(x)\supset g(y,z))\supset\wedge y(f(y)\supset\neg\wedge xg(x,z)))$ (d) ($x$ kommt nicht frei in $\wedge y(f(y)\supset\neg\wedge xg(x,z))$ vor)

$\wedge x(\wedge z\neg(f(x)\supset g(y,z))\supset\wedge y(f(y)\supset\neg\wedge xg(x,z)))$ (b)

$\wedge x \vee z_1(\neg(f(x) \supset g(y, z_1)) \supset \wedge y(f(y) \supset \neg \wedge x g(x, z)))$ (c) ($z$ kommt frei in $\wedge y(f(y) \supset \neg \wedge x g(x, z))$ vor)

$\wedge x \vee z_1 \wedge y_1(\neg(f(x) \supset g(y, z_1)) \supset (f(y_1) \supset \neg \wedge x g(x, z)))$ (e) ($y$ kommt frei in $\neg(f(x) \supset g(y, z_1))$ vor)

$\wedge x \vee z_1 \wedge y_1(\neg(f(x) \supset g(y, z_1)) \supset (f(y_1) \supset \vee x \neg g(x, z)))$ (a)

$\wedge x \vee z_1 \wedge y_1(\neg(f(x) \supset g(y, z_1)) \supset \vee x(f(y_1) \supset \neg g(x, z)))$ (f) ($x$ kommt nicht frei in $f(y_1)$ vor)

$\wedge x \vee z_1 \wedge y_1 \vee x_1(\neg(f(x) \supset g(y, z_1)) \supset (f(y_1) \supset \neg g(x_1, z)))$ (f) ($x$ kommt frei in $\neg(f(x) \supset g(y, z_1))$ vor).

Im letzten Schritt wurde die pränexe Normalform $A_N$ von A gewonnen. Dabei bildet der Ausdruck $\wedge x \vee z_1 \wedge y_1 \vee x_1$ das Präfix, der Ausdruck $\neg(f(x) \supset g(y, z_1)) \supset (f(y_1) \supset \neg g(x_1, z))$ den Kern der Normalform[1].

*Übungsaufgaben:*

1. Beweise folgende Theoreme:

a) $\wedge x(A \supset B) \vdash \wedge xA \supset \wedge xB$,
b) $\wedge x(A \supset B) \vdash \vee xA \supset \vee xB$,
c) $\vdash \wedge x(A \vee B) \equiv \wedge xA \vee B$, wo B die GV x nicht frei enthält,
d) $\vdash \vee x(A \wedge B) \equiv \vee xA \wedge B$, wo B die GV x nicht frei enthält,
e) $\wedge xy(f(x, y) \supset f(y, x)), \wedge xyz(f(x, y) \wedge f(y, z) \supset f(x, z)) \vdash \wedge x(\vee y f(x, y) \supset f(x, x))$.

2. Forme folgende Sätze in pränexe Normalform um:

a) $\neg \wedge x(\vee y f(x, y) \supset g(x, z)) \supset \vee z(f(x, z) \wedge \neg \wedge y g(y, x))$,
b) $\vee x(\vee x g(x, y) \vee f(x)) \supset \wedge x(g(x, y) \wedge \vee x g(y, x)) \vee f(y) \wedge \neg f(x)$,
c) $\wedge x(\vee y g(x, y) \supset f(x)) \equiv \neg \vee x(f(x) \vee \neg \wedge y g(y, x))$.

Dabei sind zunächst die von $\neg$, $\supset$, $\wedge$ und $\vee$ verschiedenen Operatoren vermittels der Definitionen D1 bis D3 zu eliminieren, bevor das oben angegebene Umformungsverfahren angewendet werden kann.

[1] Man beachte, daß die pränexe Normalform einer Formel nach unserem Konstruktionsverfahren nur bis auf freie Umbenennungen gebundener GV eindeutig festgelegt ist. Pränexe Normalformen lassen sich auch auf anderen Wegen als durch das oben angegebene Konstruktionsverfahren erzeugen, wobei man zu Formeln gelangt, die sich nicht nur durch freie Umbenennungen gebundener GV voneinander unterscheiden.

### 2.3.3 Die Adäquatheit des Kalküls $\mathfrak{P}1$

Wir wollen uns nun überzeugen, daß der Kalkül $\mathfrak{P}1$ eine adäquate Formalisierung der P.L. darstellt, d. h. daß in $\mathfrak{P}1$ genau die p.l. wahren Sätze beweisbar sind. Die Überlegungen, die wir dazu anstellen, entsprechen den Überlegungen zur a.l. Adäquatheit des Kalküls $\mathfrak{A}1$, die wir in **1.3.5** formuliert haben. Daher empfiehlt es sich, diese Darlegungen zunächst noch einmal ins Gedächtnis zurückzurufen.

Zuerst untersuchen wir die Widerspruchsfreiheit von $\mathfrak{P}1$.

**2.3.3.1** Wir nennen einen Kalkül $\mathfrak{K}$ *p.l. widerspruchsfrei*, wenn in $\mathfrak{K}$ nur p.l. wahre Sätze beweisbar sind.

**2.3.3.2** Der Kalkül $\mathfrak{P}1$ ist p.l. widerspruchsfrei.

Beweis: Die Axiome nach A1 bis A3 haben wir bereits als a.l. wahre Sätze erkannt. Sie sind also auch p.l. wahre Sätze, da ja die semantischen Festsetzungen der A.L. nach **1.3.2.1** in den Festsetzungen 2.2.2.1—c enthalten sind. Das Axiomenschema A4 liefert auch nur p.l. wahre Sätze, denn nach 2.2.2.8 gilt: wenn eine Interpretation den Satz $\wedge x A[x]$ erfüllt, so erfüllt sie auch alle Sätze $A[x/y]$. Nach 2.2.2.1—c3 erfüllt also jede Interpretation den Satz $\wedge x A[x] \supset A[x/y]$. Die Regel R1 erzeugt nach unseren früheren Überlegungen aus p.l. wahren Sätzen immer nur p.l. wahre Sätze und dasselbe gilt auch für die Regel R2 nach 2.2.2.9 und 2.2.2.1—c3.

Demnach enthalten alle Beweise in $\mathfrak{P}1$ nur p.l. wahre Sätze, so daß alle in $\mathfrak{P}1$ beweisbaren Formeln p.l. wahr sind.

Aus der p.l. Widerspruchsfreiheit folgt dann auch die syntaktische Widerspruchsfreiheit von $\mathfrak{P}1$ im Sinne von **1.3.5.5**, da z. B. die Sätze der Gestalt $A \wedge \neg A$ nicht p.l. wahr und also in $\mathfrak{P}1$ nicht beweisbar sind.

Wir nennen einen Kalkül $\mathfrak{K}$ *p.l. widerspruchsfrei i.e.S.*, wenn aus dem Bestehen einer Ableitbarkeitsbeziehung $A_1, \ldots, A_m \vdash_{\mathfrak{K}} B$ die p.l. Gültigkeit des Schlusses $A_1, \ldots, A_m \rightarrow B$ folgt. Wir haben oben am Beispiel der Beziehung $A[x] \vdash \wedge x A[x]$ (vgl. **2.4.2** MT4) schon gesehen, daß $\mathfrak{P}1$ nicht p.l. widerspruchsfrei i.e.S. ist. Es gilt aber: Aus dem Bestehen der Beziehung $A_1, \ldots, A_m \vdash_0 B$ folgt die p.l. Gültigkeit des Schlusses $A_1, \ldots, A_m \rightarrow B$. Denn aus $A_1, \ldots, A_m \vdash_0 B$ erhalten wir mit MT4 $\vdash A_1 \supset (A_2 \supset \ldots \supset (A_m \supset B) \ldots)$ und mit T37 $\vdash A_1 \wedge \ldots \wedge A_m \supset B$. Dieser Satz ist also nach 2.3.3.2 p.l. wahr, und damit ist der Schluß $A_1, \ldots, A_m \rightarrow B$ nach 2.2.2.7 p.l. gültig.

Untersuchen wir nun die Vollständigkeit von $\mathfrak{P}1$!

**2.3.3.3** Wir nennen einen Kalkül $\mathfrak{K}$ p.l. *vollständig*, wenn alle p.l. wahren Sätze in $\mathfrak{K}$ beweisbar sind — p.l. vollständig i.e.S. (oder p.l. *abgeschlossen*), wenn aus der p.l. Gültigkeit des Schlusses $A_1, \ldots, A_m \rightarrow B$ das Bestehen der Ableitungsbeziehung $A_1, \ldots, A_m \vdash_{\mathfrak{K}} B$ folgt.

Da aus der p.l. Abgeschlossenheit die p.l. Vollständigkeit folgt, so genügt es zu zeigen:

**2.3.3.4** Der Kalkül $\mathfrak{P}1$ ist p.l. abgeschlossen.

Wenn wir zum Beweis dieses Satzes die Methode nach **1.3.5.7** verwenden wollen, so empfiehlt es sich zunächst, den Begriff der Konsistenz einer Formelmenge (vgl. 1.3.5.8) unter Bezugnahme auf die Ableitungsbeziehung $\vdash_0$ statt $\vdash$ zu definieren und so zu sagen: Eine Formelmenge $M$ ist konsistent, wenn es keine Formel B gibt, so daß gilt $M \vdash_0 B$ und $M \vdash_0 \neg B$.

Ferner tritt beim Beweis des Hilfssatzes 1.3.5.10 dadurch eine Schwierigkeit auf, daß wir nicht für beliebige maximal konsistente Mengen $M^+$ aus der Tatsache, daß ein Satz $\wedge x A[x]$ nicht in $M^+$ enthalten ist, darauf schließen können, daß auch ein Satz der Form $A[x/y]$ nicht in $M^+$ enthalten ist. Wir müssen uns also auf solche maximal konsistente Mengen stützen, für die dieser Schluß erlaubt ist. Wir wollen sie ***normale*** maximal konsistente Mengen nennen. Wir zeigen:

**2.3.3.5** Zu jeder endlichen konsistenten Formelmenge $M$ gibt es eine normale maximal konsistente Menge $M^+$.

Zum Beweis dieses Satzes folgen wir einem Gedanken von L. HENKIN[1]: $A_1, A_2, \ldots$ sei eine Abzählung der Formeln von $\mathfrak{P}$, $x_1, x_2, \ldots$ sei eine Folge aller GV aus $\mathfrak{P}$. Wir setzen $M_0 = M$ und $M_{n+1} = M_n \cup \{B[x/y] \supset \wedge x B[x]\}$[2], wenn die Formel $A_{n+1}$ die Gestalt $\wedge x B[x]$ hat. y sei dann die erste GV der Folge $x_1, x_2, \ldots$, die weder in $A_{n+1}$, noch in den Formeln aus $M_n$ frei vorkommt. Hat $A_{n+1}$ nicht die Gestalt $\wedge x B[x]$, so setzen wir $M_{n+1} = M_n$. $M'$ sei die Vereinigung der

---

[1] Vgl. auch die Darstellung in [9], S. **311f**, sowie die verwandten Beweisgedanken in [4] und [29].

[2] $M_{n+1}$ entsteht also aus $M_n$ durch Hinzunahme der Formel $B[x/y] \supset \wedge x B[x]$.

Mengen $M_n$ ($n \geqslant 0$), d. h. $M'$ enthalte genau die Sätze, die in mindestens einer der Mengen $M_n$ vorkommen. $M^+$ sei endlich die maximal konsistente Menge zu $M'$, die nach 1.3.5.9 existiert, wenn $M'$ konsistent ist. Wir zeigen:

a) $M'$ ist konsistent. Ist eine Menge $M_{n+1}$ inkonsistent, so auch $M_n$. Denn entweder ist $M_{n+1}$ mit $M_n$ identisch, oder $M_{n+1}$ enthält eine zusätzliche Formel $B[x/y] \supset \wedge x B[x]$. In diesem Fall erhalten wir aus

| | |
|---|---|
| $M_n, B[x/y] \supset \wedge x B[x] \vdash_0 C \wedge \neg C$ | |
| $M_n \vdash_0 (B[x/y] \supset \wedge x B[x]) \supset C \wedge \neg C$ | MT4 |
| $M_n \vdash_0 \wedge y((B[x/y] \supset \wedge x B[x]) \supset C \wedge \neg C)$ | T38 (y kommt nicht in $M_n$ frei vor) |
| $M_n \vdash_0 \vee y(B[x/y] \supset \wedge x B[x]) \supset C \wedge \neg C$ | T48 (y soll in C nicht frei vorkommen) |
| $M_n \vdash_0 (\wedge y B[x/y] \supset \wedge x B[x]) \supset C \wedge \neg C$ | T51 (y kommt in $\wedge x B[x]$ nicht frei vor) |
| $M_n \vdash_0 (\wedge x B[x] \supset \wedge x B[x]) \supset C \wedge \neg C$ | MT6, MT5 |
| $M_n \vdash_0 C \wedge \neg C$ | T1, R1. |

$M_0 = M$ ist aber nach der Voraussetzung von 2.3.3.5 konsistent, also sind alle $M_n$ konsistent. Daraus folgt dann die Konsistenz von $M'$ wie unter 1.3.5.9.

b) $M^+$ ist normal. Ist $\wedge x B[x]$ nicht in $M^+$, so ist $\neg \wedge x B[x]$ in $M^+$, da $M^+$ maximal ist. Es ist aber $B[x/y] \supset \wedge x B[x]$ in $M^+$ für eine GV y, also auch $\neg \wedge x B[x] \supset \neg B[x/y]$, also auch $\neg B[x/y]$. $B[x/y]$ ist dann also nicht in $M^+$ enthalten, da $M^+$ konsistent ist.

Damit ist der Satz 2.3.3.5 bewiesen. Wir legen nun den Beweis von 1.3.5.10 zugrunde, wobei wir $M^+$ als normale maximal konsistente Menge ansehen können und $\mathfrak{W}$ als p.l. Bewertung, und fügen im Induktionsschritt noch folgenden Fall hinzu:

c) A habe die Gestalt $\wedge x B[x]$. Ist $\wedge x B[x]$ in $M^+$, so sind wegen T42 und R1 alle Formeln $B[x/y]$ mit $M^+$ verträglich und also in $M^+$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt dann $\mathfrak{W}(B[x/y]) = \mathfrak{w}$, also auch $\mathfrak{W}(\wedge x B[x]) = \mathfrak{w}$. Ist $\wedge x B[x]$ nicht in $M^+$, so ist wegen der Normalität von $M^+$ auch eine Formel $B[x/y]$ nicht in $M^+$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt dann $\mathfrak{W}(B[x/y]) = \mathfrak{f}$, also $\mathfrak{W}(\wedge x B[x]) = \mathfrak{f}$.

Es ist also jede endliche konsistente Formelmenge $M$ simultan erfüllbar durch eine p.l. Bewertung $\mathfrak{W}$ und nach den Überlegungen in 2.2.2 (vgl. insbesondere die Übungsaufgabe Nr. 3 dieses Abschnitts) also auch durch eine Interpretation $\mathfrak{B}$. Aus diesem Resultat erhält man wie im Beweis von 1.3.5.7 sofort den Satz 2.3.3.4, wenn man beachtet, daß aus dem Nichtbestehen der Ableitungsbeziehung $A_1, \ldots, A_m \vdash B$ auch das Nichtbestehen der Ableitungsbeziehung $A_1, \ldots, A_m \vdash_0 B$ folgt[1].

Will man im Beweis des Satzes 2.3.3.4 nicht die p.l. Bewertungssemantik benützen, so kann man auch direkt eine Interpretation angeben, die $M^+$ und also $M$ simultan erfüllt. Dazu definiert man $\mathfrak{B}$ über der Menge der natürlichen Zahlen, ordnet vermittels $\mathfrak{B}^2$ der $n$-ten GV die Zahl $n$ zu und setzt für $\mathfrak{B}^{3 \cdot n}(\mathrm{f})$ die Menge der $n$-tupel von natürlichen Zahlen $m_1, \ldots, m_n$, für die die Formel $\mathrm{f}(x_{m_1}, \ldots, x_{m_n})$ in $M^+$ ist. Es gilt dann für alle Formeln A: $\mathfrak{B}(\mathrm{A}) = \mathfrak{w}$ genau dann, wenn A in $M^+$ ist. Für die Atomformeln folgt das direkt aus der Definition von $\mathfrak{B}$. Und ist die Behauptung bereits bewiesen für alle Formeln vom Grad $\leqslant m$, so gilt sie auch für alle Formeln A vom Grad $m+1$. Dabei erledigen sich die a.l. Fälle wie unter 1.3.5.7. Hat aber A die Gestalt $\wedge x B[x]$, so gilt: Ist $\mathfrak{B}(\wedge x B[x]) = \mathfrak{w}$, so gilt nach 2.2.2.8 $\mathfrak{B}(B[x/y]) = \mathfrak{w}$ für alle GV y, also sind nach Induktionsvoraussetzungen alle Formeln $B[x/y]$ in $M^+$, also ist wegen der Normalität von $M^+$ auch $\wedge x B[x]$ in $M^+$. Ist aber $\mathfrak{B}(\wedge x B[x]) = \mathfrak{f}$, so gibt es ein $\overline{\mathfrak{B}}$ mit $\overline{\mathfrak{B}} \underset{x}{=} \mathfrak{B}$ und $\overline{\mathfrak{B}}(B[x]) = \mathfrak{f}$. Nach Definition von $\mathfrak{B}^2$ gibt es dann eine GV y, für die gilt $\mathfrak{B}(y) = \overline{\mathfrak{B}}(x)$, nach 2.2.2.4 also $\mathfrak{B}(B[x/y]) = \mathfrak{f}$. Nach Induktionsvoraussetzung ist dann $B[x/y]$ nicht in $M^+$ und da $M^+$ maximal ist, ist also auch $\wedge x B[x]$ nicht in $M^+$. — Damit ist gezeigt, daß $\mathfrak{B}$ alle Formeln aus $M^+$ und also alle Formeln aus $M$ erfüllt.

Wie für den Kalkül $\mathfrak{A}1$ sieht man auch sofort ein, daß der Kalkül $\mathfrak{P}1$ nicht syntaktisch vollständig ist.

Die Frage der Unabhängigkeit der Axiome und Deduktionsregeln von $\mathfrak{P}1$ ist nach dem Ergebnis 1.3.5.13 sehr einfach zu beantworten.

---

[1] Der erste vollständige Kalkül der P.L. wurde von FREGE in [14] formuliert. Dieser Kalkül enthält neben den in den Übungen zu 1.3.5 angegebenen a.l. Axiomen und Regeln das Axiom A4* und die Regeln R2, SR2 und SR3. Eine exakte Formulierung der Einsetzungsregeln wurde freilich erst später in [38] gefunden. Vgl. dazu [9], S. 289f. Der erste Vollständigkeitsbeweis für einen p.l. Kalkül wurde von K. GÖDEL in [26] angegeben.

Wir deuten hier nur einen Unabhängigkeitsbeweis für R2 und das Schema A4 an und überlassen die restlichen Diskussion dem Leser als Übungsaufgabe.

Belegen wir die Formeln mit den Werten $\mathfrak{w}$ und $\mathfrak{f}$ im Sinne der A.L., wobei wir allen Formeln der Gestalt $\wedge x A$ den Wert $\mathfrak{f}$ zuordnen, so erhalten die Axiome von $\mathfrak{P}1$ bei allen Belegungen den Wert $\mathfrak{w}$ und R1 erzeugt aus Sätzen mit dem Wert $\mathfrak{w}$ nur wiederum Sätze mit dem Wert $\mathfrak{w}$. Für R2 gilt das hingegen nicht, wie das Beispiel der Prämisse $(A \supset A) \supset (B \supset B)$ und der Konklusion $(A \supset A) \supset \wedge x(B \supset B)$ zeigt. R2 ist also unabhängig.

Belegen wir umgekehrt die Formeln der Gestalt $\wedge x A$ mit dem Wert $\mathfrak{w}$, so erzeugt R2 aus Sätzen mit dem Wert $\mathfrak{w}$ immer nur Sätze mit dem Wert $\mathfrak{w}$, während nicht alle Sätze nach dem Schema A4 bei allen Belegungen den Wert $\mathfrak{w}$ annehmen, wie das Beispiel $\wedge x(A \wedge \neg A) \supset A \wedge \neg A$ zeigt.

*Übungsaufgabe:*

Diskutiere die Frage der Unabhängigkeit der Axiomenschemata und der Deduktionsregeln von $\mathfrak{P}1$ im Detail!

## 2.4 Formalisierungen des natürlichen Schließens

Nachdem wir im letzten Abschnitt mit dem Kalkül $\mathfrak{P}1$ bereits einen allen Ansprüchen der Präzision genügenden Kalkül der P.L. aufgebaut haben, bedarf es einer Begründung, wenn wir in diesem Abschnitt noch weitere Formalisierungen der P.L. zur Darstellung bringen.

Wir haben den Kalkül $\mathfrak{P}1$ vorangestellt, weil er die gebräuchlichste Gestalt eines axiomatischen Kalküls hat, eine Gestalt, die sich wegen ihrer Einfachheit auch didaktisch zur Einführung in die Formalisierung der P.L. empfiehlt. Der Kalkül $\mathfrak{P}1$ bleibt aber in einem Punkt unbefriedigend: Wenn man von der Definition der P.L., der Abgrenzung ihrer Theoreme und Schlüsse durch die semantischen Festlegungen nach 2.2 ausgeht, so ist der Übergang zum Kalkül $\mathfrak{P}1$ mit gerade diesen Axiomen und diesen Deduktionsregeln alles andere als zwingend. Tatsächlich kann man sich ja neben $\mathfrak{P}1$ auch beliebig viele p.l. Kalküle mit anderen Axiomen und Deduktionsregeln einfallen lassen. In jedem Fall ist die Adäquatheit eines solchen Kalküls nachzuweisen, bevor man ihn als Formalisierung der P.L. ansprechen kann. Ein solcher Adäquatheitsbeweis ist in keinem Fall eine triviale Angelegenheit. So ist denn auch erst gut 50 Jahre nach der Aufstellung eines axiomatischen Systems der P.L. von FREGE in [14] der erste p.l. Vollständigkeitsbeweis von GÖDEL in [26] geführt worden. Die Schwierigkeiten solcher Vollständigkeitsbeweise rühren nun u. a. auch daher, daß zwischen den semantischen Regeln und den Axiomen und Deduktionsregeln des Kalküls keine einfache und unmittelbare Beziehung besteht. Daher liegt der Gedanke nahe, einmal den Versuch zu machen, die semantischen Regeln direkt zu formalisieren und in die Gestalt eines Kalküls zu bringen, so daß der Übergang von der Semantik zum Kalkül zwingend und der Vollständigkeitsbeweis vereinfacht wird.

Die Kalküle, die wir in diesem Abschnitt angeben wollen, lassen sich als solche direkten Formalisierungen der Semantik auffassen. Sie stellen so die theoretisch befriedigendste Kalkülisierung der P.L. dar.

Unter dem Gesichtspunkt der Wiedergabe der semantischen Festsetzungen durch Kalkülregeln kann man diese Systeme der P.L. auch als Formalisierungen des *natürlichen Schließens* ansprechen. Mit dieser Bezeichnung meint man zunächst das Schließen, wie es im Alltag und in den Wissenschaften angewendet wird vor seiner wissenschaftlich-logischen Systematisierung. Wenn man die Methode dieses Schließens allgemein charakterisieren will, so wird man nicht davon ausgehen können, daß gewisse Schlußmethoden besonders natürlich und evident sind, sondern man kann sagen: das natürliche Schließen gründet sich darauf, daß die Gültigkeit von Schlüssen aus der logischen Struktur der Prämissen und Konklusionen und den semantischen Festlegungen über die logischen Operatoren gewonnen wird. Tatsächlich kann ja die Gültigkeit eines Schlusses nur von dem eingesehen werden, der die Sprache versteht, in der die im Schluß verbundenen Sätze formuliert sind — der Gebrauch der semantischen Festsetzungen ist also notwendig für das natürliche Schließen. Und die semantischen Regeln sind in Abwesenheit logischer Kalküle auch die einzigen logischen Gegebenheiten, auf die sich ein Gültigkeitsbeweis stützen kann. Das natürliche Schließen orientiert sich also direkt an den semantischen Festsetzungen und eine Formalisierung des natürlichen Schließens muß daher die Gestalt einer Formalisierung der Semantik annehmen.

Für die A.L. spiegelt sich das Verfahren des natürlichen Schließens etwa in der Methode der Wahrheitsentwicklung der Sätze nach 1.2.4 wider. Diese Methode schließt sich direkt an die Bedeutungsfestlegungen für die a.l. Operatoren durch die Wahrheitstabellen an und erscheint so intuitiv besonders durchsichtig und natürlich. Für die P.L. hat zuerst

Gerhard Gentzen in [25] Kalküle des natürlichen Schließens aufgestellt. Die p.l. Regeln seiner Kalküle NJ und NK sind dann insbesondere von W. V. Quine in [56] und [59] der Idee des natürlichen Schließens noch besser angepaßt worden. Die eleganteste Form nehmen diese Kalküle jedoch an, wenn man zur Sequenzen-Schreibweise übergeht, wie das Gentzen vorgezeichnet hat. Eine zweite Entwicklungsreihe der Formalisierungen des natürlichen Schließens geht von der Methode der semantischen Tafeln von E. W. Beth in [4] aus. Auch die Grundgedanken dieser Formalisierung lassen sich am besten in der Form eines Sequenzenkalküls zum Ausdruck bringen.

Im folgenden wollen wir bei der Darstellung der Kalküle des natürlichen Schließens aber nicht diesen historischen Entwicklungslinien folgen, sondern mit der Formalisierung der Bethschen Gedanken im Sequenzenkalkül $\mathfrak{P}2$ beginnen, der die Idee des natürlichen Schließens, wie wir sie oben formuliert haben, besonders klar zum Ausdruck bringt. Auf die Methode der semantischen Tafeln geht dann der Abschnitt 2.4.1.4 ein. Im Abschnitt 2.4.2 gewinnen wir aus $\mathfrak{P}2$ direkt den Gentzenschen Sequenzenkalkül $\mathfrak{P}3$, für den eine eigene semantische Begründung angegeben wird, die eine kurze Charakterisierung auch der intuitionistischen Logik ermöglichen soll. Auf den Kalkül NK von Gentzen und seine Modifikation nach Quine endlich kommen wir im Abschnitt 2.4.2.5 zu sprechen. Im Zentrum unserer Aufmerksamkeit sollen aber vor allem die Sequenzenkalküle $\mathfrak{P}2$ und $\mathfrak{P}3$ stehen, ihre semantische Begründung und die Analyse ihres Beweisbegriffes. Wenn der Umgang mit solchen Sequenzenkalkülen auf den ersten Blick vielleicht komplizierter erscheinen mag, als der Umgang mit Systemen wie $\mathfrak{P}1$, so hoffen wir doch, daß der Leser an dieser Stelle schon die Scheu vor neuen Symbolismen verloren hat und sich der Mühe der Einarbeitung in eine ungewohnte Ausdrucksform im Hinblick auf die theoretische und praktische Bedeutung solcher Sequenzenkalküle unterziehen wird.

### 2.4.1 Der Kalkül $\mathfrak{P}2$

**2.4.1.1** *Der Aufbau des Kalküls* $\mathfrak{P}2$. Dem Kalkül $\mathfrak{P}2$, den wir als eine erste Formalisierung des natürlichen Schließens zur Darstellung bringen wollen, liegt folgender Gedanke zugrunde: Bei der a.l. Methode der Wahrheitsentwicklung geht man aus von den möglichen Wahrheitsannahmen für die atomaren Bestandteile eines Satzes A, dessen a.l. Wahrheit geprüft werden soll, und sucht zu zeigen, daß A für jede dieser Annahmen auf Grund der Bewertungsregeln den Wert $\mathfrak{w}$ annimmt.

Ebenso hätte man ein indirektes Verfahren zur Anwendung bringen können, bei dem man versucht, eine Bewertung zu konstruieren, die dem Satz A den Wert $\mathfrak{f}$ zuordnet. Dann wird man von der Wahrheitsannahme $\mathfrak{f}$ für A ausgehen und vermittels der Bewertungsregeln auf die Wahrheitswerte der Teilsätze von A zurückschließen und so eine Wahrheitswertverteilung für die Atomsätze von A aufsuchen, die A den Wert $\mathfrak{f}$ zuordnet und so zeigt, daß A nicht von allen Bewertungen erfüllt wird, also nicht a.l. wahr ist. Scheitert man bei diesem Versuch, eine Bewertung zu konstruieren, die A nicht erfüllt, so weiß man, daß es keine solche Bewertung gibt, daß also alle Bewertungen A erfüllen, und hat damit einen Beweis für die a.l. Wahrheit von A.

Dazu einige Beispiele:

I) Wir untersuchen die Formel $p \vee \neg p$ auf ihre a.l. Wahrheit und gehen also von der Annahme aus, es sei $\mathfrak{W}(p \vee \neg p) = \mathfrak{f}$ für eine Bewertung $\mathfrak{W}$. Dann muß nach 1.3.2.1—c gelten $\mathfrak{W}(p) = \mathfrak{f}$ und $\mathfrak{W}(\neg p) = \mathfrak{f}$, nach 1.3.2.1—a also $\mathfrak{W}(p) = \mathfrak{w}$. Nun gibt es aber keine Bewertung $\mathfrak{W}$, die einer Formel zugleich die Werte $\mathfrak{w}$ und $\mathfrak{f}$ zuordnet — eine Bewertung sollte ja eine Funktion sein und eine Funktion nimmt für jedes Argument nur einen Wert an. Es kann also nicht gelten $\mathfrak{W}(p) = \mathfrak{w}$ und $\mathfrak{W}(p) = \mathfrak{f}$, also ist die Formel $p \vee \neg p$ logisch wahr.

II) Wir untersuchen die Formel $((p \supset q) \supset p) \supset q$ und gehen von der Annahme aus, es sei $\mathfrak{W}(((p \supset q) \supset p) \supset q) = \mathfrak{f}$. Dann finden wir nach 1.3.2.1—d: a) $\mathfrak{W}((p \supset q) \supset p) = \mathfrak{w}$ und b) $\mathfrak{W}(q) = \mathfrak{f}$. Aus (a) folgt: c) $\mathfrak{W}(p \supset q) = \mathfrak{f}$ oder d) $\mathfrak{W}(p) = \mathfrak{w}$. Aus (c) folgt aber $\mathfrak{W}(p) = \mathfrak{w}$ und $\mathfrak{W}(q) = \mathfrak{f}$. Eine Bewertung $\mathfrak{W}$, für die gilt $\mathfrak{W}(p) = \mathfrak{w}$ und $\mathfrak{W}(q) = \mathfrak{f}$ erfüllt also die Formel $((p \supset q) \supset p) \supset q$ nicht, d. h. diese Formel ist nicht a.l. wahr.

III) Wir untersuchen nun die p.l. Formel $\bigvee x \bigwedge y f(x, y) \supset \bigwedge y \bigvee x f(x,y)$ und nehmen an, es sei $\mathfrak{W}(\bigvee x \bigwedge y f(x, y) \supset \bigwedge y \bigvee x f(x, y)) = \mathfrak{f}$, wobei $\mathfrak{W}$ nun eine p.l. Bewertung sei. Dann gilt $\mathfrak{W}(\bigvee x \bigwedge y f(x, y)) = \mathfrak{w}$ und $\mathfrak{W}(\bigwedge y \bigvee x f(x, y)) = \mathfrak{f}$. Daraus folgt, daß es GV $u$ und $v$ gibt, so daß gilt $\mathfrak{W}(\bigwedge y f(u, y)) = \mathfrak{w}$ und $\mathfrak{W}(\bigvee x f(x, v)) = \mathfrak{f}$. Insbesondere muß dann auch gelten $\mathfrak{W}(f(u, u)) = \mathfrak{W}(f(u, v)) = \mathfrak{w}$ und $\mathfrak{W}(f(u, v)) = \mathfrak{W}(f(v, v)) = \mathfrak{f}$. Nun gibt es aber keine Bewertung $\mathfrak{W}$, für die gelten könnte $\mathfrak{W}(f(u, v)) = \mathfrak{w}$ und $\mathfrak{W}(f(u, v)) = \mathfrak{f}$, und daher gibt es auch keine Bewertung, für die gilt $\mathfrak{W}(\bigvee x \bigwedge y f(x, y) \supset \bigwedge y \bigvee x f(x, y)) = \mathfrak{f}$.

Dieses Verfahren ist auch dann anwendbar, wenn gezeigt werden soll, daß eine Formel A logisch falsch ist — dann hat man von der Annahme $\mathfrak{W}(A) = \mathfrak{w}$ auszugehen — oder allgemein, wenn gezeigt werden soll, daß ein Schluß $A_1, \ldots, A_m \rightarrow B_1, \ldots, B_n$ logisch gültig ist — dann hat man von der Annahme $\mathfrak{W}(A_1) = \ldots = \mathfrak{W}(A_m) = \mathfrak{w}$ und $\mathfrak{W}(B_1) = \ldots = \mathfrak{W}(B_n) = \mathfrak{f}$ auszugehen.

Das bisher nur lose angedeutete Verfahren soll nun zu einem formalen Beweisverfahren präzisiert werden im Kalkül $\mathfrak{P}2$. Dabei legen wir im folgenden die in 2.2.2 dargestellte p.l. Bewertungssemantik zugrunde, für welche die Gedanken der Formalisierung etwas durchsichtiger werden. Aus der Äquivalenz von Bewertungs- und Interpretationssemantik ergibt sich aber sofort auch die Übertragung der nachstehenden Überlegungen in die Interpretationssemantik.

$\Delta$ und $\Gamma$ seien im folgenden immer Reihen von Formeln, die durch Kommata getrennt sind. Diese Reihen können evtl. nur eine Formel enthalten oder auch gar keine. Ist $\langle\Delta;\Gamma\rangle$ das geordnete Paar von Formelmengen, dessen erstes Glied die Menge der Formeln aus $\Delta$, dessen zweites Glied die Menge der Formeln aus $\Gamma$ ist, so können wir durch $\langle\Delta;\Gamma\rangle$ eine Wahrheitsannahme $\mathfrak{W}$ charakterisieren, die alle Formeln aus $\Delta$ erfüllt, aber keine der Formeln aus $\Gamma$.

Die Schritte unseres Beweisverfahrens bestehen nun in der Erzeugung von Wahrheitsannahmen aus Wahrheitsannahmen, also von Paaren $\langle\Delta;\Gamma\rangle$ aus Paaren $\langle\Delta';\Gamma'\rangle$. Eine Formalisierung dieses Verfahrens muß aber ein syntaktisches Verfahren ergeben, in dem Ausdrücke aus Ausdrücken erzeugt werden. Daher wollen wir die Paare $\langle\Delta;\Gamma\rangle$ durch Ausdrücke repräsentieren.

**2.4.1.1.1** Als *Sequenz* (kurz SQ) bezeichnen wir einen Ausdruck der Gestalt $A_1, \ldots, A_m \Rightarrow B_1, \ldots, B_n$, wo $A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_n$ Formeln von $\mathfrak{P}$ sind. Die Formeln $A_1, \ldots, A_m$ bezeichnen wir auch als *Vorderformeln* (kurz VF), die Formeln $B_1, \ldots, B_n$ als *Hinterformeln* (kurz HF) der SQ. Wir lassen zu, daß entweder die Menge der VF oder die Menge der HF einer SQ leer ist. Auch die Ausdrücke $\Rightarrow B_1, \ldots, B_n$ und $A_1, \ldots, A_m \Rightarrow$, nicht aber das Zeichen $\Rightarrow$ sind also SQ.

**2.4.1.1.2** Wir sagen, eine SQ $\Delta \Rightarrow \Gamma$ *repräsentiere* eine Wahrheitsannahme $\langle\Delta';\Gamma'\rangle$, wenn $\Delta$ mit $\Delta'$ und $\Gamma$ mit $\Gamma'$ identisch ist. Und wir sagen, eine Bewertung $\mathfrak{W}$ *erfülle* eine SQ $\Sigma$, wenn $\mathfrak{W}$ alle VF von $\Sigma$, aber keine HF von $\Sigma$ erfüllt.

Welcher Sprache gehören nun die SQ als Ausdrücke an? Die SQ-Formeln, d. h. die VF und HF, gehören der Sprache $\mathfrak{P}$ an, nicht hingegen das Zeichen $\Rightarrow$. Also sind die SQ keine Ausdrücke von $\mathfrak{P}$. Wir können aber zu $\mathfrak{P}$ eine Sprache $\mathfrak{P}'$ bilden, deren Formeln gerade die SQ sind. $\mathfrak{P}'$ ist dann die Objektsprache, auf die wir uns beziehen, wenn wir über SQ reden und SQ-Kalküle formulieren.

Die Reihenfolge und die Häufigkeit, mit der man die Elemente einer Menge nennt, spielt für die Abgrenzung dieser Menge keine Rolle. Daher gilt: $\langle\Delta, A, B, \Delta'; \Gamma\rangle = \langle\Delta, B, A, \Delta'; \Gamma\rangle$, $\langle\Delta; \Gamma, A, B, \Gamma'\rangle = \langle\Delta; \Gamma, B, A, \Gamma'\rangle$, $\langle\Delta, A, A; \Gamma\rangle = \langle\Delta, A; \Gamma\rangle$ und $\langle\Delta; A, A, \Gamma\rangle = \langle\Delta; A, \Gamma\rangle$. Hingegen bewirkt eine Veränderung der Reihenfolge oder der Häufigkeit des Vorkommens der Bestandteile eines Ausdrucks eine Veränderung des Ausdrucks selbst: so ist z. B. *baabb* ein anderer Ausdruck als *ab*. Daher gelten die analogen Identitäten für SQ nicht. Im Hinblick auf unsere Absicht, durch SQ Wahrheitsannahmen zu repräsentieren, werden wir demnach unter die Deduktionsregeln von $\mathfrak{P}2$ folgende Regeln aufnehmen, die diese Diskrepanz zwischen Paaren von Formelmengen und SQ wieder aufheben:

| | | |
|---|---|---|
| **VT:** | $\Delta, A, B, \Delta' \Rightarrow \Gamma \vdash \Delta, B, A, \Delta' \Rightarrow \Gamma$ | (Regel der vorderen Vertauschung) |
| **HT:** | $\Delta \Rightarrow \Gamma, A, B, \Gamma' \vdash \Delta \Rightarrow \Gamma, B, A, \Gamma'$ | (Regel der hinteren Vertauschung) |
| **VR:** | $\Delta, A, A \Rightarrow \Gamma \vdash \Delta, A \Rightarrow \Gamma$ | (Regel der vorderen Kontraktion) |
| **HR:** | $\Delta \Rightarrow A, A, \Gamma \vdash \Delta \Rightarrow A, \Gamma$ | (Regel der hinteren Kontraktion)[1]. |

Diese Regeln bezeichnen wir auch als *Strukturregeln*. Wenn man Anwendungen der Strukturregeln nicht explizit hervorhebt, wie wir das im folgenden oft tun werden, so behandelt man SQ praktisch wie geordnete Paare von Formelmengen. Dadurch können keine Unklarheiten entstehen. Wichtig ist es nur, im Auge zu behalten, daß in formalen SQ-Kalkülen die SQ prinzipiell als Ausdrücke angesehen werden müssen.

Wenn wir uns der Kürze wegen zunächst auf die Grundoperatoren beschränken, so erhalten wir aus den Bewertungsbedingungen in 1.3.2 und 2.2.2 folgende Beziehungen:

**2.4.1.1.3**

a) Wenn $\mathfrak{W}$ die SQ $\Delta, \neg A \Rightarrow \Gamma$ erfüllt, so auch die SQ $\Delta \Rightarrow A, \Gamma$.

[1] „$\vdash$" ist nun das Ableitbarkeitssymbol für $\mathfrak{P}2$, das zwischen SQ steht.

b) Wenn $\mathfrak{W}$ die SQ $\Delta \Rightarrow \neg A, \Gamma$ erfüllt, so auch die SQ $\Delta, A \Rightarrow \Gamma$.

c) Wenn $\mathfrak{W}$ die SQ $\Delta, A \supset B \Rightarrow \Gamma$ erfüllt, so auch die SQ $\Delta \Rightarrow A, \Gamma$ oder $\Delta, B \Rightarrow \Gamma$.

d) Wenn $\mathfrak{W}$ die SQ $\Delta \Rightarrow A \supset B, \Gamma$ erfüllt, so auch die SQ $\Delta, A \Rightarrow B, \Gamma$.

e) Wenn $\mathfrak{W}$ die SQ $\Delta, \Lambda x A[x] \Rightarrow \Gamma$ erfüllt, so auch die SQ $\Delta, A[x/y] \Rightarrow \Gamma$ für eine beliebige GV y.

f) Wenn die SQ $\Delta \Rightarrow \Lambda x A[x], \Gamma$ erfüllbar ist, so auch die SQ $\Delta \Rightarrow A[x/y], \Gamma$, wobei y eine GV ist, die in den Formeln aus $\Delta, \Gamma$ und in $\Lambda x A[x]$ nicht frei vorkommt.

Anstelle der letzten Beziehung erhält man zunächst die Bedingung: Wenn $\mathfrak{W}_1$ die SQ $\Delta \Rightarrow \Lambda x A[x], \Gamma$ erfüllt, so gibt es eine GV z, so daß $\mathfrak{W}_1$ die SQ $\Delta \Rightarrow A[x/z], \Gamma$ erfüllt. Ist $z = y$, so gilt also auch (f). Ist $z \neq y$, so sei $\varphi$ eine eineindeutige Abbildung der Menge $\Gamma$ der GV von $\mathfrak{P}$ auf sich selbst, so daß gilt $\varphi(x) = x$ für alle GV x, die frei in den Formeln $\Delta, \Gamma, \Lambda x A[x]$ vorkommen, und $\varphi(y) = z$. Wir definieren dann eine Bewertung $\mathfrak{W}_2$ durch $\mathfrak{W}_2(f(x_1, \ldots, x_n)) = \mathfrak{W}_1(f(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n)))$ für alle Atomformeln $f(x_1, \ldots, x_n)$. Durch Induktion nach dem Grad der Formeln $A[x_1, \ldots, x_n]$, in denen $x_1, \ldots, x_n$ jeweils die einzigen frei vorkommenden GV seien, sieht man dann sofort ein, daß allgemein gilt $\mathfrak{W}_2(A[x_1, \ldots, x_n]) = \mathfrak{W}_1(A[x_1/\varphi(x_1), \ldots, x_n/\varphi(x_n)])$. Es gilt in unserem Fall also insbesondere $\mathfrak{W}_2(A) = \mathfrak{W}_1(A)$ für alle Formeln A aus $\Delta, \Gamma$ und $\mathfrak{W}_2(A[x/y]) = \mathfrak{W}_1(A[x/z]) = \mathfrak{f}$. $\mathfrak{W}_2$ erfüllt also die SQ $\Delta \Rightarrow A[x/y], \Gamma$[1].

Die Bedingungen 2.4.1.1.3 sollen nun in Deduktionsregeln unseres Kalküls $\mathfrak{P}2$ übersetzt werden. Im Fall der Bedingung (c) treten dabei zu einer Prämisse zwei Konklusionen auf. Eine Beweiskonstruktion kann daher in $\mathfrak{P}2$ etwa folgende Gestalt annehmen:

---

[1] Im Rahmen der Interpretationssemantik hätte man hier so zu argumentieren: Gilt $\mathfrak{B}_1(\Lambda x A[x]) = \mathfrak{f}$, so gibt es eine Interpretation $\overline{\mathfrak{B}}_1$ mit $\overline{\mathfrak{B}}_1 \underset{x}{=} \mathfrak{B}_1$ und $\overline{\mathfrak{B}}_1(A[x]) = \mathfrak{f}$. Ist y mit x identisch, so erfüllt also $\overline{\mathfrak{B}}_1$ die SQ $\Delta \Rightarrow A[x/y], \Gamma$. Andernfalls wählen wir eine Interpretation $\mathfrak{B}_2$ mit $\mathfrak{B}_2 \underset{y}{=} \mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2(y) = \overline{\mathfrak{B}}_1(x)$, so daß nach 2.2.2.4 gilt $\mathfrak{B}_2(A[x/y]) = \mathfrak{f}$. $\mathfrak{B}_2$ erfüllt in diesem Fall also die SQ $\Delta \Rightarrow A[x/y], \Gamma$.

A)
$$\begin{array}{ll}
\Rightarrow (A \supset \neg A) \supset \neg A & \\ \hline
A \supset \neg A \Rightarrow \neg A & \text{d} \\ \hline
\Rightarrow A, \neg A \qquad \neg A \Rightarrow \neg A & \text{c} \\ \hline
\Rightarrow \neg A, A & \text{HT} \\ \hline
A \Rightarrow A & \text{b}
\end{array}$$

oder als Schema B)
$$\begin{array}{ccc}
\Sigma_1 & & \\ \hline
\Sigma_{11} & & \\ \hline
\Sigma_{111} & \Sigma_{112} & \\ \hline
\Sigma_{1111} & \Sigma_{1121} & \Sigma_{1122} \\ \hline
\vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

Wir erhalten also eine Figur von der Gestalt eines auf dem Kopf stehenden Baumes mit der Wurzel $\Sigma_1$. Als *Ast* eines solchen Baumes bezeichnet man eine Folge von SQ, die mit $\Sigma_1$ beginnt und deren $(n+1)$-tes Glied $\Sigma_{\varrho 1}$ oder $\Sigma_{\varrho 2}$ ist, wenn $\Sigma_\varrho$ das n-te Glied der Folge ist. $\varrho$ stehe dabei für eine Folge der Ziffern „1“ und „2“.

Da eine exakte Beschreibung solcher Beweisfiguren nicht ganz unkompliziert ist, erweist es sich für theoretische Zwecke als günstig, die Beweise in $\mathfrak{P}2$ nicht als Bäume, sondern als lineare Folgen von Zeilen anzuschreiben, die jeweils eine oder mehrere, dann durch „;“ getrennte SQ enthalten. Unsere Beispiele sind demnach umzuschreiben in die Form:

A')
$$\begin{array}{rl}
& \Rightarrow (A \supset \neg A) \supset \neg A \\
A \supset \neg A & \Rightarrow \neg A \\
& \Rightarrow A, \neg A; \neg A \Rightarrow \neg A \\
& \Rightarrow \neg A, A; \neg A \Rightarrow \neg A \\
A & \Rightarrow A \quad ; \neg A \Rightarrow \neg A
\end{array}$$

B')
$$\begin{array}{l}
\Sigma_1 \\
\Sigma_{11} \\
\Sigma_{111} ; \Sigma_{112} \\
\Sigma_{1111} ; \Sigma_{112} \\
\Sigma_{1111} ; \Sigma_{1121} ; \Sigma_{1122} \\
\quad\vdots
\end{array}$$

**2.4.1.1.4** Eine oder mehrere, dann durch das Zeichen „;“ getrennte SQ bezeichnen wir als *Sequenzen-Satz* (kurz SS). Die SQ, aus denen ein SS besteht, bezeichnen wir als seine *Konstituenten*. Wir lassen auch leere SS zu, d. h. SS, die keine Konstituenten enthalten. Auch die SS können wir als Ausdrücke der Objektsprache $\mathfrak{P}'$ auffassen, wenn wir zu den Grundzeichen dieser Sprache das Symbol „;“ hinzunehmen.

SS repräsentieren dann mehrere alternative Wahrheitsannahmen — vgl. die Bedingung 2.4.1.1.3—c — und wir sagen daher:

**2.4.1.1.5** Eine Bewertung *erfüllt* einen SS, wenn sie mindestens einen seiner Konstituenten erfüllt.

Beweise in $\mathfrak{P}2$ nehmen also die Form von linearen Folgen von SS an. Für manche Zwecke erweist es sich auch als günstig, die in den

Bedingungen 2.4.1.1.3 jeweils in den Konklusionen eliminierten Formeln der Prämissen, die sog. *Hauptformeln*, auch in den Konklusionen mitzuführen. Im Fall der Bedingung (e) ist das für die Vollständigkeit des Kalküls sogar notwendig. Offenbar gelten die Bedingungen 2.4.1.1.3 auch in dieser Formulierung. Dann nehmen die Regeln von $\mathfrak{P}2$ folgende Gestalt an:

**2.4.1.1.6**

**VT:** $\Sigma; \Delta, A, B, \Delta' \Rightarrow \Gamma; \Sigma' \vdash \Sigma; \Delta, B, A, \Delta' \Rightarrow \Gamma; \Sigma'$

Dabei sind $\Sigma$ und $\Sigma'$ (evtl. leere) SS, in denen gewisse Konstituenten der Prämisse wie in den Beispielen (A′) und (B′) unverändert mitgeführt werden. Die näher spezifizierte SQ der Prämisse nennen wir *Haupt*-SQ, die näher spezifizierten SQ der Konklusion *Neben*-SQ der Regelanwendung.

**HT:** $\Sigma; \Delta \Rightarrow \Gamma, A, B, \Gamma'; \Sigma' \vdash \Sigma; \Delta \Rightarrow \Gamma, B, A, \Gamma'; \Sigma'$
**VR:** $\Sigma; \Delta, A, A \Rightarrow \Gamma; \Sigma' \vdash \Sigma; \Delta, A \Rightarrow \Gamma; \Sigma'$
**HR:** $\Sigma; \Delta \Rightarrow A, A, \Gamma; \Sigma' \vdash \Sigma; \Delta \Rightarrow A, \Gamma; \Sigma'$
**VN:** $\Sigma; \Delta, \neg A \Rightarrow \Gamma; \Sigma' \vdash \Sigma; \Delta, \neg A \Rightarrow A, \Gamma; \Sigma'$
(Regel der vorderen Negationsbeseitigung)

Die näher spezifizierte Formel der Haupt-SQ bezeichnen wir hier und in den folgenden anderen logischen Regeln, im Gegensatz zu den Strukturregeln, als *Hauptformel*, die näher spezifizierten Formeln der Neben-SQ, die von der Hauptformel verschieden sind, als *Nebenformeln*.

**HN:** $\Sigma; \Delta \Rightarrow \neg A, \Gamma; \Sigma' \vdash \Sigma; \Delta, A \Rightarrow \neg A, \Gamma; \Sigma'$
(Regel der hinteren Negationsbeseitigung)
**VI:** $\Sigma; \Delta, A \supset B \Rightarrow \Gamma; \Sigma' \vdash \Sigma; \Delta, A \supset B \Rightarrow A, \Gamma; \Delta, A \supset B, B \Rightarrow \Gamma; \Sigma'$
(Regel der vorderen Implikationsbeseitigung)
**HI:** $\Sigma; \Delta \Rightarrow A \supset B, \Gamma; \Sigma' \vdash \Sigma; \Delta, A \Rightarrow B, A \supset B, \Gamma; \Sigma'$
(Regel der hinteren Implikationsbeseitigung)
**VA:** $\Sigma; \Delta, \wedge x A[x] \Rightarrow \Gamma; \Sigma' \vdash \Sigma; \Delta, \wedge x A[x], A[x/y] \Rightarrow \Gamma; \Sigma'$,
wo y eine beliebige GV ist. (Regel der vorderen Allbeseitigung)
**HA:** $\Sigma; \Delta \Rightarrow \wedge x A[x], \Gamma; \Sigma' \vdash \Sigma; \Delta \Rightarrow A[x/y], \wedge x A[x], \Gamma; \Sigma'$,
wo y eine GV ist, die in den Formeln der Haupt-SQ nicht frei vorkommt (Regel der hinteren Allbeseitigung).

Der Beweisbegriff für $\mathfrak{P}2$ ist dann wie folgt zu formulieren:

**2.4.1.1.7** Als *Herleitung* aus einer SQ $\Sigma$ in $\mathfrak{P}2$ bezeichnen wir eine Folge von SS, deren erstes Glied $\Sigma$ ist und deren sämtliche übrigen Glieder aus dem ihnen unmittelbar vorhergehenden Glied der Folge durch einmalige Anwendung einer der Deduktionsregeln von $\mathfrak{P}2$ hervorgehen.

**2.4.1.1.8** Wir nennen eine SQ *geschlossen*, wenn eine ihrer VF auch als HF auftritt, d. h. wenn sie die Gestalt $\Delta, A, \Delta' \Rightarrow \Gamma, A, \Gamma'$ hat. Einen SS nennen wir geschlossen, wenn alle seine Konstituenten geschlossen sind.

**2.4.1.1.9** Als *Beweis* einer SQ $\Sigma$ in $\mathfrak{P}2$ bezeichnen wir eine Herleitung aus $\Sigma$ in $\mathfrak{P}2$, die einen geschlossenen SS enthält. Ist eine SQ $\Sigma$ in $\mathfrak{P}2$ beweisbar, so schreiben wir auch $\vdash \Sigma$. Ist die SQ $\Delta \Rightarrow \Gamma$ in $\mathfrak{P}2$ beweisbar, so nennen wir auch den Schluß $\Delta \rightarrow \Gamma$, den sie repräsentiert, beweisbar in $\mathfrak{P}2$[1].

Die Herleitung (A′) ergibt so z. B. einen Beweis in $\mathfrak{P}2$, wenn man die Hauptformeln in den Konklusionen mitführt. $\mathfrak{P}2$ ist also ein Kalkül, der keine Axiome enthält, sondern nur Deduktionsregeln. Ein Beweis in $\mathfrak{P}2$ beginnt im Gegensatz zu den axiomatischen Kalkülen mit dem zu beweisenden Ausdruck und endet mit gewissen ausgezeichneten Ausdrücken, den geschlossenen SQ, die in axiomatischen Kalkülen als Axiome anzusprechen wären und dort an der Spitze der Beweise stünden.

Das Beweisverfahren im Kalkül $\mathfrak{P}2$ wollen wir später einüben, wenn wir auch Regeln für die übrigen logischen Operatoren zur Verfügung haben. Jetzt wenden wir uns dem Adäquatheitsbeweis für $\mathfrak{P}2$ zu.

**2.4.1.2** *Die Adäquatheit des Kalküls* $\mathfrak{P}2$. Wir gehen von folgenden Sätzen aus:

**2.4.1.2.1** Ein Schluß $\Delta \rightarrow \Gamma$ ist p.l. gültig genau dann, wenn die SQ $\Delta \Rightarrow \Gamma$ nicht erfüllbar ist.

---

[1] Aus der Beweisbarkeit eines Schlusses $\Sigma$ in $\mathfrak{P}2$ folgt auch die Beweisbarkeit aller SQ, die $\Sigma$ repräsentieren, denn diese lassen sich ja vermittels der Strukturregeln aus einer beliebigen SQ gewinnen, die $\Sigma$ repräsentiert.

Das folgt unmittelbar aus den Definitionen 2.2.2.7 und 2.4.1.1.2, sowie dem Satz über die Äquivalenz von Bewertungs- und Interpretationssemantik in 2.2.2.

**2.4.1.2.2** Ein geschlossener SS ist nicht erfüllbar.

Das ergibt sich sofort aus 2.4.1.1.8, 2.4.1.1.2 und der schon oben benützten Tatsache, daß keine Bewertung ein und derselben Formel die Werte $\mathfrak{w}$ und $\mathfrak{f}$ zuordnen kann.

**2.4.1.2.3** Ist die Prämisse einer der Deduktionsregeln von $\mathfrak{P}2$ erfüllbar, so auch deren Konklusion.

Da die von der Haupt-SQ verschiedenen SQ der Prämisse in der Konklusion unverändert auftreten, muß man sich nur überlegen, daß aus der Erfüllbarkeit der Haupt-SQ die Erfüllbarkeit einer der Neben-SQ folgt. Das ist aber für die Strukturregeln trivial und für die logischen Regeln folgt es direkt aus den Bedingungen 2.4.1.1.3.

**2.4.1.2.4** Der Kalkül $\mathfrak{P}2$ ist p.l. widerspruchsfrei i. e. S.

Beweis: Ist ein Schluß $\Delta \rightarrow \Gamma$ und damit die SQ $\Delta \Rightarrow \Gamma$ in $\mathfrak{P}2$ beweisbar, so gibt es nach 2.4.1.1.9 eine Herleitung aus $\Delta \Rightarrow \Gamma$, die einen geschlossenen SS $\Sigma$ enthält. $\Sigma$ ist nach 2.4.1.2.2 nicht erfüllbar, also ist nach 2.4.1.2.3 auch $\Delta \Rightarrow \Gamma$ nicht erfüllbar und somit ist $\Delta \rightarrow \Gamma$ nach 2.4.1.2.1 p.l. gültig.

Für den Beweis der p.l. Vollständigkeit von $\mathfrak{P}2$ müssen wir uns auf die Existenz von Herleitungen mit einer gewissen Vollständigkeitseigenschaft stützen:

**2.4.1.2.5** Ist $\mathfrak{H}$ eine Herleitung aus einer SQ $\Sigma_1$ in $\mathfrak{P}2$, so nennen wir eine Folge $\mathfrak{F}$ von SQ, die aus jedem SS von $\mathfrak{H}$ genau einen Konstituenten enthält, einen *Ast* von $\mathfrak{H}$, wenn gilt: das $(n + 1)$-te Glied $\Sigma_{n+1}$ von $\mathfrak{F}$ $(n \geqslant 1)$ ist mit dem $n$-ten Glied $\Sigma_n$ von $\mathfrak{F}$ identisch oder es ist eine Neben-SQ von $\Sigma_n$.

**2.4.1.2.6** Wir nennen eine Herleitung $\mathfrak{H}$ aus $\Sigma$ *vollständig*, wenn für jeden Ast $\mathfrak{F}$ von $\mathfrak{H}$, der keine geschlossene SQ enthält, gilt: Jede nichtatomare VF bzw. HF (einer SQ) von $\mathfrak{F}$ tritt in (einer SQ von) $\mathfrak{F}$ als vordere bzw. hintere Hauptformel auf, und zu jeder GV y, die frei in einer Formel von $\mathfrak{F}$ vorkommt und zu jeder VF von $\mathfrak{F}$ der Gestalt $\land$xA[x], tritt in $\mathfrak{F}$ die VF A[x/y] auf.

**2.4.1.2.7** Zu jeder SQ $\Sigma$ gibt es eine vollständige Herleitung aus $\Sigma$ in $\mathfrak{P}2$.

Der Beweis dieses Satzes soll später in anderem Zusammenhang nachgeholt werden. Zunächst wollen wir ihn benützen, um die Vollständigkeit von $\mathfrak{P}2$ nachzuweisen.

**2.4.1.2.8** Der Kalkül $\mathfrak{P}2$ ist p.l. vollständig i. e. S.

Wir zeigen: Ist der Schluß $\Delta \rightarrow \Gamma$ nicht in $\mathfrak{P}2$ beweisbar, so ist $\Delta \rightarrow \Gamma$ nicht p.l. gültig. Daraus folgt durch Kontraposition die Behauptung. Ist $\Delta \rightarrow \Gamma$ nicht in $\mathfrak{P}2$ beweisbar, so gibt es nach 2.4.1.2.7 eine vollständige Herleitung $\mathfrak{H}$ aus $\Delta \Rightarrow \Gamma$, die keinen geschlossenen SS enthält. Also gibt es einen Ast $\mathfrak{F}$ von $\mathfrak{H}$, der keine geschlossene SQ enthält. Da alle Formeln einer Haupt-SQ auch in den zugehörigen Neben-SQ auftreten, sind ja alle in einem Ast auf eine geschlossene SQ folgenden SQ geschlossen. Gäbe es also in jedem Ast $\mathfrak{F}_i$ von $\mathfrak{H}$ eine geschlossene SQ in der Zeile $n_i$, so enthielte der SS von $\mathfrak{H}$ mit der größten dieser Zeilennummern einen geschlossenen SS. Wir definieren nun bzgl. $\mathfrak{F}$ eine Bewertung $\mathfrak{W}$, von der gezeigt werden soll, daß sie die SQ $\Delta \Rightarrow \Gamma$ erfüllt. $\Gamma^*$ sei die Menge der GV, die in den Atomformeln von $\mathfrak{F}$ vorkommen. Die Funktion $\varphi$ bilde die Menge $\Gamma$ aller GV von $\mathfrak{P}$ auf $\Gamma^*$ ab, so daß $\Gamma^*$ identisch auf $\Gamma^*$ abgebildet wird (d. h. es gilt $\varphi(x) = x$ für alle x aus $\Gamma^*$). Wir setzen dann:

$\mathfrak{W}(A) = \mathfrak{w}$, wenn A eine atomare VF von $\mathfrak{F}$ ist,

$\mathfrak{W}(A) = \mathfrak{f}$, wenn A eine atomare HF von $\mathfrak{F}$ ist,

$\mathfrak{W}(A)$ erhält einen beliebigen Wahrheitswert, wenn A eine Atomformel mit GV nur aus $\Gamma^*$ ist, die in $\mathfrak{F}$ nicht vorkommt, und

$\mathfrak{W}(f(x_1, \ldots, x_n)) = \mathfrak{W}(f(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n)))$ für alle n-stelligen PV f und alle GV $x_1, \ldots, x_n$ aus $\Gamma$.

Diese Definition von $\mathfrak{W}$ ist korrekt, da eine Atomformel A von $\mathfrak{F}$ nicht zugleich als VF und als HF in $\mathfrak{F}$ auftreten kann. Käme A in einer SQ von $\mathfrak{F}$ als VF, in einer anderen SQ von $\mathfrak{F}$ als HF vor, so wäre ja die spätere dieser beiden SQ bzgl. A geschlossen, da die spätere SQ alle Formeln der früheren enthält. Das steht aber im Widerspruch zur Annahme über $\mathfrak{F}$.

Durch Induktion nach dem Formelgrad von A findet man sofort, daß für alle Formeln A gilt: 1) $\mathfrak{W}(A[x]) = \mathfrak{W}(A[\varphi(x)])$.

Wir zeigen nun durch Induktion nach dem Formelgrad, daß $\mathfrak{W}$ alle VF von $\mathfrak{F}$ erfüllt, aber keine HF von $\mathfrak{F}$. Nach Definition von $\mathfrak{W}$ gilt das sicher für alle Atomformeln von $\mathfrak{F}$. Sei nun die Behauptung schon bewiesen für alle Formeln vom Grad $\leqslant m$ von $\mathfrak{F}$ und sei die Formel A von $\mathfrak{F}$ vom Grad $m+1$. Dann finden wir: Hat A die Gestalt $\neg B$ und ist A VF von $\mathfrak{F}$, so tritt $\neg B$ wegen der Vollständigkeit von $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{F}$ als Hauptformel auf und B tritt dann als zugehörige Nebenformel in $\mathfrak{F}$ gemäß der Regel VN als HF auf. Nach Induktionsvoraussetzung gilt dann $\mathfrak{W}(B) = \mathfrak{f}$, also $\mathfrak{W}(\neg B) = \mathfrak{w}$. Analog argumentiert man, wenn $\neg B$ HF von $\mathfrak{F}$ ist. Sei nun A von der Gestalt $B \supset C$ und sei A VF von $\mathfrak{F}$. Wegen der Vollständigkeit von $\mathfrak{H}$ und nach VI tritt dann in $\mathfrak{F}$ B als HF oder C als VF auf. Nach Induktionsvoraussetzung gilt also $\mathfrak{W}(B) = \mathfrak{f}$ oder $\mathfrak{W}(C) = \mathfrak{w}$, also $\mathfrak{W}(B \supset C) = \mathfrak{w}$. Ist $B \supset C$ HF von $\mathfrak{F}$, so tritt wegen der Vollständigkeit von $\mathfrak{F}$ B als VF und C als HF in $\mathfrak{F}$ auf, so daß nach Induktionsvoraussetzung gilt $\mathfrak{W}(B) = \mathfrak{w}$ und $\mathfrak{W}(C) = \mathfrak{f}$, also $\mathfrak{W}(B \supset C) = \mathfrak{f}$. Ist A eine VF von $\mathfrak{F}$ der Gestalt $\wedge x B[x]$, so treten wegen der Vollständigkeit von $\mathfrak{H}$ alle Formeln $B[x/y]$ mit einer GV y aus $\Gamma^*$ als VF von $\mathfrak{F}$ auf, so daß nach Induktionsvoraussetzung gilt $\mathfrak{W}(B[x/y]) = \mathfrak{w}$ für alle GV y aus $\Gamma^*$. Nach (1) gilt dann aber $\mathfrak{W}(B[x/z]) = \mathfrak{w}$ für alle GV z, also $\mathfrak{W}(\wedge x B[x]) = \mathfrak{w}$. Ist A eine HF von $\mathfrak{F}$ der Gestalt $\wedge x B[x]$, so tritt wegen der Vollständigkeit von $\mathfrak{H}$ und HA die Formel $B[x/y]$ für eine GV y als HF in $\mathfrak{F}$ auf, so daß nach Induktionsvoraussetzung gilt $\mathfrak{W}(B[x/y]) = \mathfrak{f}$, also $\mathfrak{W}(\wedge x B[x]) = \mathfrak{f}$.

$\mathfrak{W}$ erfüllt also alle VF von $\mathfrak{F}$, aber keine der HF von $\mathfrak{F}$. $\mathfrak{W}$ erfüllt demnach auch die SQ $\Delta \twoheadrightarrow \Gamma$, so daß der Schluß $\Delta \rightarrow \Gamma$ nach 2.4.1.2.1 nicht p.l. gültig ist, was zu beweisen war[1].

**2.4.1.3** *Normale Herleitungen.* Wir wollen nun den Beweis des Satzes 2.4.1.2.7 nachholen und anschließend einige Bemerkungen über die praktischen Aspekte des Beweisverfahrens in $\mathfrak{P}2$ machen.

---

[1] Bei Zugrundelegung der Interpretationssemantik würde man hier wie folgt argumentieren: Ist $\Gamma^*$ $k$-zahlig, so sei $\mathfrak{B}$ eine Interpretation über einem $k$-zahligen Bereich $\gamma$ und $\mathfrak{B}^2$ bilde $\Gamma^*$ auf $\gamma$ ab. $\mathfrak{B}^{3\cdot n}(f)$ sei für eine $n$-stellige PV f die Klasse aller $n$-tupel $a_1, \ldots, a_n$ aus $\gamma$, zu denen es GV $x_1, \ldots, x_n$ mit $\mathfrak{B}(x_1) = a_1$ und ... und $\mathfrak{B}(x_n) = a_n$ gibt, so daß $f(x_1, \ldots, x_n)$ VF von $\mathfrak{F}$ ist. Dann gilt $\mathfrak{B}(A) = \mathfrak{w}$ für alle VF A von $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{B}(A) = \mathfrak{f}$ für alle HF A von $\mathfrak{F}$, wie man durch Induktion nach dem Grad der Formeln A leicht beweist.

**2.4.1.3.1** Wir nennen eine Herleitung $\mathfrak{H}$ *normal*, wenn sie folgenden Bedingungen genügt:

1. Anstelle der Regeln VA und HA werden in $\mathfrak{H}$ folgende Regeln angewendet:

**VA⁺**: $\Sigma; \Delta, \wedge x A[x] \Rightarrow \Gamma; \Sigma' \vdash \Sigma; \Delta, \wedge x A[x], A[x/y_1], \ldots, A[x/y_n] \Rightarrow \Gamma; \Sigma'$

Dabei seien $y_1, \ldots, y_n$ genau die GV, die in den Formeln der Haupt-SQ frei vorkommen. Kommt dort keine GV frei vor, so ist $n = 1$ und $y_1$ beliebig zu wählen.

**HA⁺**: $\Sigma; \Delta \Rightarrow \wedge x A[x], \Gamma; \Sigma' \vdash \Sigma; \Delta, B_1[x_1/y], \ldots, B_s[x_s/y] \Rightarrow A[x/y], \wedge x A[x], \Gamma; \Sigma'$

Dabei sei y eine GV, die in den Formeln der Haupt-SQ nicht frei vorkommt, und $B_i[x_i/y]$ ($i = 1, \ldots, s$) sollen solchen Formeln $\wedge x_i B_i[x_i]$ aus $\Delta$ entsprechen, die in dem Herleitungsast bereits als Hauptformeln aufgetreten sind, dem die Haupt-SQ angehört.

Eine Anwendung der Regel $VA^+$ läuft auf eine n-fache Anwendung der Regel VA und Anwendungen von VT hinaus. Eine Anwendung von $HA^+$ läuft auf eine Anwendung von HA mit nachfolgender s-maliger Anwendung von VA (bzw. $VA^+$) und Anwendungen der Strukturregeln hinaus. Die Forderung (1) besagt also: wenn in $\mathfrak{H}$ die Regel VA bzw. HA angewendet wird, so in der Weise und mit solchen nachfolgenden Regelanwendungen, daß sich die Konklusion von $VA^+$ bzw. $HA^+$ ergibt.

2. Die $B_i[x_i/y]$-Formeln in der Konklusion von $HA^+$ nennen wir nicht Nebenformeln, sondern *Sekundärformeln* (kurz SF) der zugehörigen Hauptformel von $HA^+$. Ist A SF von B, so nennen wir auch die Nebenformeln von A, sowie deren Nebenformeln usw. SF von B. Ist A keine SF einer anderen Formel, so sagen wir, A sei SF vom *Rang 0*. Ist A SF einer SF vom Rang *n*, so nennen wir A SF vom Rang *n + 1*[1]. Die zweite Forderung an eine normale Herleitung $\mathfrak{H}$ beinhaltet nun, daß bei der Konstruktion von $\mathfrak{H}$ Deduktionsregeln auf SF vom Rang *n* nur dann angewendet werden, wenn Deduktionsregeln auf SF vom Rang $< n$ nicht mehr angewendet werden können.

---

[1] Die Aussage, daß eine Formel (genauer: ein Formelvorkommnis) A SF vom Rang *n* ist, oder SF einer Formel B ist, bezieht sich also immer auf das Vorkommnis von A in einer bestimmten SQ einer bestimmten Herleitung.

Zum Zeichen für diese Restriktion kann man auch die $B_i[x_i/y]$-Formeln der Konklusion von $HA^+$ in eckige Klammern setzen und diese Klammern erst dann fortlassen, wenn Deduktionsregeln auf nicht eingeklammerte Formeln nicht mehr angewendet werden können. Deduktionsregeln sollen dann auf eingeklammerte Formeln nicht angewendet werden.

3. Man kann sagen, ein Vorkommnis $\mathfrak{A}$ einer Formel A in einer SQ $\Sigma$ des Herleitungsastes $\mathfrak{F}$ sei dasselbe Vorkommnis wie ein Vorkommnis $\mathfrak{A}'$ von A in einer SQ $\Sigma'$ von $\mathfrak{F}$, wenn $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ zusammenfallen, sofern man $\Sigma$ gemäß den in $\mathfrak{F}$ zwischen $\Sigma$ und $\Sigma'$ liegenden Deduktionsschritten in $\Sigma'$ abändert. Dann besagt die dritte Forderung an normale Herleitungen $\mathfrak{H}$, daß in einem Faden von $\mathfrak{H}$ dasselbe Formelvorkommnis nicht zweimal als Hauptformel auftreten soll. Zum Zeichen dafür können wir die Hauptformeln in den Konklusionen der Deduktionsregeln unterstreichen und festsetzen, daß auf unterstrichene Formeln Deduktionsregeln nicht mehr angewendet werden sollen.

Die Gründe, die zu einer Spezialisierung auf normale Herleitungen führen, sollen weiter unten an Hand von Beispielen anschaulich gemacht werden. Die leitende Absicht ist jedenfalls, eine Strategie für den Aufbau von Herleitungen anzugeben, die immer zu einem Beweis führen, wenn die Anfangs-SQ überhaupt beweisbar ist. Daß in den definierenden Bedingungen für normale Herleitungen eine solche Strategie zum Ausdruck kommt, zeigen die folgenden drei Sätze.

**2.4.1.3.2** Jede normale Herleitung, deren Äste nur mit solchen SQ enden, die geschlossen sind, oder die nur atomare und unterstrichene Formeln enthalten, ist vollständig.

Aus jeder SQ kann man eine normale Herleitung konstruieren. Der Satz besagt nun, daß man damit immer eine vollständige Herleitung erhält, sofern man die normale Herleitung nur hinreichend lang macht. „Hinreichend lang“ kann dabei u. U. auch heißen, daß man die normale Herleitung unendlich lang machen muß. Eine solche unendlich lange Herleitung kann man natürlich nicht anschreiben, das spielt aber für unsere Zwecke keine Rolle, da wir Herleitungen nicht als graphische Figuren, sondern als abstrakte SS-Folgen charakterisiert haben. Aus 2.4.1.3.2 folgt dann sofort der Satz 2.4.1.2.7, den wir zum Beweis der Vollständigkeit von $\mathfrak{P}2$ verwendet haben.

Zum Beweis von 2.4.1.3.2 zeigen wir:

1. Der Abschnitt einer normalen Herleitung $\mathfrak{H}$ von der ersten Regelanwendung auf eine SF vom Rang $n$ ($n \geqslant 0$) bis zur ersten Regelanwendung auf eine SF vom Rang $n + 1$ ist endlich. Sei $\Sigma$ der SS von $\mathfrak{H}$, in dessen Konstituenten nur mehr SF vom Rang $n$ zur Regelanwendung offenstehen. $\Sigma'$ sei ein Konstituent von $\Sigma$. Dann ist die Summe der Grade der nichtunterstrichenen Formeln von $\Sigma'$, die SF vom Grad $< n$ sind, gleich $0$. Ist $s$ die Summe der Grade der nichtunterstrichenen SF vom Rang $n$, so erniedrigt sich $s$ bei Konstruktion einer normalen Herleitung aus $\Sigma'$ in jedem Schritt außer bei Anwendung von VA$^+$. Da nur endlich viele vordere Allformeln als SF vom Rang $n$ auftreten können und da die Anzahl der in der Herleitung aus $\Sigma'$ auftretenden freien GV endlich sein muß, wird $s$ nach endlich vielen Schritten gleich $0$, d. h. nach endlich vielen Schritten erhält man aus $\Sigma'$ einen SS, in dem nur noch SF vom Rang $n + 1$ zur Regelanwendung offenstehen. Die Herleitung aus $\Sigma'$, in der Deduktionsregeln nur auf SF vom Rang $n$ angewendet werden, ist also endlich. Das gleiche gilt für die übrigen Konstituenten von $\Sigma$, so daß die Behauptung (1) bewiesen ist.

2. Sei $\mathfrak{F}$ ein Ast von $\mathfrak{H}$, der keine geschlossene SQ enthält. Dann gibt es zu jeder Formel A von $\mathfrak{F}$ eine Zahl $n$, so daß A SF vom Rang $n$ ist. A tritt dann nach den Voraussetzungen des Satzes über $\mathfrak{H}$ und (1) nach endlich vielen Deduktionsschritten als Hauptformel auf. Hat A die Gestalt $\Lambda$xB[x] und ist A VF von $\mathfrak{F}$, so tritt wegen der Verwendung der Regeln VA$^+$ und HA$^+$ anstelle von VA und HA zu jeder GV y, die in den Formeln von $\mathfrak{F}$ frei vorkommt, die Formel B[x/y] als VF von $\mathfrak{F}$ auf, sei es als Nebenformel von VA$^+$ oder als SF von HA$^+$. $\mathfrak{H}$ ist also vollständig nach der Definition 2.4.1.2.6.

Damit ist auch der Adäquatheitsbeweis für $\mathfrak{P}$2 vollständig erbracht. Aus der Adäquatheit ergeben sich aber sofort die Sätze:

**2.4.1.3.3** Wenn die SQ $\Sigma$ in $\mathfrak{P}$2 beweisbar ist, so ist jede vollständige Herleitung aus $\Sigma$ ein Beweis für $\Sigma$.

Enthielte eine vollständige Herleitung aus $\Sigma$ keinen geschlossenen SS, so wäre $\Sigma$ nach 2.4.1.2.8 erfüllbar, also nach 2.4.1.2.4 nicht beweisbar. Durch Kontraposition erhält man aus 2.4.1.3.3

**2.4.1.3.4** Ist eine vollständige Herleitung aus $\Sigma$ kein Beweis für $\Sigma$, so ist $\Sigma$ nicht beweisbar.

Nach diesen Sätzen kommt es bei der Konstruktion von Beweisen auf die Reihenfolge der Deduktionsschritte nicht an, sofern man nur vollständige Herleitungen erzeugt. Bleibt man im Rahmen der normalen Herleitungen, so kann man also für jeden p.l. gültigen Schluß $\Delta \rightarrow \Gamma$ auf rein mechanischem Wege einen Beweis finden, indem man einfach eine hinreichend lange Herleitung aus $\Delta \Rightarrow \Gamma$ erzeugt. Das ist nun ein praktisch sehr wichtiger Vorteil des Kalküls $\mathfrak{P}2$ gegenüber dem Kalkül $\mathfrak{P}1$, in dem man beim Beweisen von Geschicklichkeit und Intuition abhängig ist.

Nun ist es zwar so, daß sich zu jedem formalen Kalkül ein rein mechanisches Beweisverfahren angeben läßt, aber diese Verfahren sind im allgemeinen für praktische Zwecke unbrauchbar. So kann man z. B. in $\mathfrak{P}1$ die Beweise ihrer Länge nach und bei gleicher Länge in irgendeiner Weise alphabetisch ordnen und hat dann, um einen Beweis für eine in $\mathfrak{P}1$ beweisbare Formel A zu finden, nur die Reihe dieser Beweise zu durchlaufen. Die Beweise von $\mathfrak{P}1$ lassen sich ja rein mechanisch erzeugen und man kann auch entscheiden, ob die Endformel eines vorgelegten Beweises die Formel A ist. Dies Verfahren ist aber höchst unhandlich und umständlich. Hingegen ist das mechanische Beweisverfahren in $\mathfrak{P}2$ recht einfach und daher auch für praktische Zwecke gut geeignet.

Für solche praktische Zwecke empfiehlt es sich nun, das Beweisverfahren, dessen Formulierung zunächst auf theoretische Zwecke zugeschnitten war, etwas zu vereinfachen. Wir geben dazu einige Hinweise:

1. Im Hinblick auf die Sätze 2.4.1.3.2 bis 2.4.1.3.4 beschränken wir uns auf die Konstruktion normaler Herleitungen. Wir verwenden also die Formelunterstreichung, um anzudeuten, daß auf ein Formelvorkommnis keine Deduktionsregeln mehr angewendet werden sollen, und die Formeleinklammerung, um anzudeuten, daß Deduktionsregeln auf ein Formelvorkommnis nicht angewendet werden sollen, solange noch nichteingeklammerte Formeln zur Regelanwendung offenstehen. Und wir verwenden die Regeln $VA^+$ und $HA^+$ anstelle von VA und HA. Der Vorteil dieses Verfahrens läßt sich an folgenden Beispielen ablesen:

a)

$\Delta, A \supset B \Rightarrow \Gamma$

$\Delta, A \supset B \Rightarrow A, \Gamma; \quad \Delta, A \supset B, B \Rightarrow \Gamma$

$\Delta, A \supset B \Rightarrow A, A, \Gamma; \Delta, A \supset B, B \Rightarrow A, \Gamma; \Delta, A \supset B, B \Rightarrow \Gamma$

$\Delta, A \supset B \Rightarrow A, A, \Gamma; \Delta, A \supset B, B \Rightarrow A, \Gamma; \Delta, A \supset B, B \Rightarrow A, \Gamma; \Delta, A \supset B, B, B \Rightarrow \Gamma$

Hier haben wir auf dasselbe Formelvorkommnis zweimal die Regel VI angewendet, wie das durch die Formelunterstreichung verboten wird. Der Erfolg ist, daß wir einen SS gewonnen haben, der alle Konstituenten des SS der 2. Zeile enthält und aus dem man daher nur dann einen Beweis gewinnen kann, wenn man einen Beweis aus dem SS der 2. Zeile gewinnen kann. Allgemein ist eine Regelanwendung unfruchtbar, wenn sie einen SS ergibt, der (bis auf Anwendungen der Strukturregeln) alle Konstituenten eines SS enthält, der ihm in der Herleitung voraufgeht. Solche unfruchtbare Regelanwendungen muß man vermeiden, wenn man Herleitungen ausschalten will, die unnötigerweise unendlich lang sind, und das ist ja gerade das Ziel einer vernünftigen Beweisstrategie. Die Formelunterstreichung dient nun dazu, dies Ziel zu erreichen. Man kann sich das sehr leicht auch für den Fall der Regeln VN, HN und HI klarmachen.

Will man allgemein die Hauptformeln in den Konklusionen unterstreichen, so muß man offenbar im Fall der Regel VA besondere Vorsicht walten lassen, damit man aus einer VF $\Lambda x A[x]$ auch tatsächlich alle VF $A[x/y]$ gewinnen kann, die man zur Beweiskonstruktion benötigt. Man kann nun auf rein syntaktischem Wege zeigen — dem Leser sei das als Übungsaufgabe empfohlen — daß eine Anwendung der Regel VA mit einer GV y in der Nebenformel $A[x/y]$ nur dann einen Beweis ergibt, wenn auch die Wahl einer GV z anstelle von y einen Beweis ergibt, die in den Formeln der Haupt-SQ frei vorkommt[1]. Daher kann man die Hauptformel $\Lambda x A[x]$ in der Konklusion unterstreichen, wenn man alle Formeln $A[x/y_1], \ldots, A[x/y_n]$ als Nebenformeln einsetzt für die GV $y_1, \ldots, y_n$, die in den Formeln der Haupt-SQ frei vorkommen — wir erhalten somit die Regel $VA^+$ — und wenn man sicherstellt, daß bei Einführung einer neuen GV z als freier GV der Formeln eines Herleitungsastes, die VF $A[x/z]$ nachgetragen wird. Eine freie GV tritt aber neu nur nach Anwendung der Regel HA auf. Ersetzt man also HA durch die Regel $HA^+$, so ist die Unterstreichung der Formel $\Lambda x A[x]$ in der Konklusion von $VA^+$ gerechtfertigt.

Damit ist auch die Verwendung der Regeln $VA^+$ und $HA^+$ intuitiv plausibel geworden. Das folgende Beispiel illustriert die Sachlage noch einmal:

---

[1] Wir können uns hier für dieses Ergebnis auf die Sätze 2.4.1.2.8 und 2.4.1.3.2 stützen.

$$
\begin{array}{lll}
\text{b)} & \neg\Lambda x A[x],\ \Lambda x A[x] \Rightarrow & \\
 & \neg\Lambda x A[x],\ \underline{\Lambda x A[x]},\ A[x/y_1] \Rightarrow & \mathrm{VA}^+ \\
 & \underline{\Lambda x A[x]},\ A[x/y_1],\ \neg\Lambda x A[x] \Rightarrow & \mathrm{VT} \\
 & \underline{\Lambda x A[x]},\ A[x/y_1],\ \underline{\neg\Lambda x A[x]} \Rightarrow \Lambda x A[x] & \mathrm{VN} \\
 & \underline{\Lambda x A[x]},\ A[x/y_1],\ \underline{\neg\Lambda x A[x]},\ A[x/y_2] \Rightarrow A[x/y_2],\ \underline{\Lambda x A[x]} & \mathrm{HA}^+.
\end{array}
$$

Hätte man im letzten Schritt die Regel HA anstelle von $\mathrm{HA}^+$ angewendet, so würde man (sofern $A[x]$ etwa eine Atomformel ist) nicht zu einem Beweis gelangen.

Die Bedeutung der Formeleinklammerung wird durch folgende Beispiele verdeutlicht, wobei wir zur Abkürzung die Anwendung der Strukturregeln nicht explizit hervorheben und die unterstrichenen Formeln nicht anschreiben:

$$
\begin{array}{lrcl}
\text{c1)} & & \Rightarrow & \neg\Lambda x\, \neg\Lambda y(f(y) \supset f(x)) \\
 & \Lambda x\, \neg\Lambda y(f(y) \supset f(x)) & \Rightarrow & \\
 & \neg\Lambda y(f(y) \supset f(z_1)) & \Rightarrow & \\
 & & \Rightarrow & \Lambda y(f(y) \supset f(z_1)) \\
 & [\neg\Lambda y(f(y) \supset f(z_2))] & \Rightarrow & f(z_2) \supset f(z_1) \\
 & [\neg\Lambda y(f(y) \supset f(z_2))],\ f(z_2) & \Rightarrow & f(z_1) \\
 & f(z_2) & \Rightarrow & f(z_1),\ \Lambda y(f(y) \supset f(z_2)) \\
 & [\neg\Lambda y(f(y) \supset f(z_3)],\ f(z_2) & \Rightarrow & f(z_1),\ f(z_3) \supset f(z_2) \\
 & [\neg\Lambda y(f(y) \supset f(z_3)],\ f(z_2),\ f(z_3) & \Rightarrow & f(z_1),\ f(z_2)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lrcl}
\text{c2)} & & \Rightarrow & \neg\Lambda x\, \neg\Lambda y(f(y) \supset f(x)) \\
 & \Lambda x\, \neg\Lambda y(f(y) \supset f(x)) & \Rightarrow & \\
 & \neg\Lambda y(f(y) \supset f(z_1)) & \Rightarrow & \\
 & & \Rightarrow & \Lambda y(f(y) \supset f(z_1)) \\
 & [\neg\Lambda y(f(y) \supset f(z_2))] & \Rightarrow & f(z_2) \supset f(z_1) \\
 & & \Rightarrow & f(z_2) \supset f(z_1),\ \Lambda y(f(y) \supset f(z_2)) \\
 & [\neg\Lambda y(f(y) \supset f(z_3))] & \Rightarrow & f(z_2) \supset f(z_1),\ f(z_3) \supset f(z_2) \\
 & & \vdots &
\end{array}
$$

Dabei soll im weiteren Verlauf der Herleitung c2 nie die Regel HI angewendet werden unter Verletzung der Regel über die Formeleinklammerung. Während (c1) ein Beweis ist, ergibt (c2) auch bei beliebig langer Fortsetzung keinen Beweis. Die Herleitung (c2) entspricht also nicht einer vernünftigen Beweisstrategie. Um solche Herleitungen wie (c2) zu vermeiden, erweist sich die Regel über die Formeleinklammerung als hinreichend, wie die Sätze 2.4.1.3.2 bis 2.4.1.3.4 zeigen.

Damit ist die Auszeichnung normaler Herleitungen auch intuitiv durchsichtig geworden.

2. Zur Vereinfachung des Beweisverfahrens in $\mathfrak{P}2$ empfiehlt es sich ferner, eine Anwendung der Strukturregeln nicht explizit hervorzuheben und die SQ praktisch wie geordnete Paare von Formelmengen zu behandeln. Insbesondere ist es günstig, die Kontraktion so oft wie möglich anzuwenden. Man erreicht dadurch einen ähnlichen Vorteil, wie er oben für die Formelunterstreichung geltend gemacht wurde. Die Kontraktion von Formeln [A] und A ergibt dabei A.

Man kann zur Abkürzung der SQ auch die unterstrichenen Formeln weglassen. Dann muß man die Variablenbedingungen für die Regeln $VA^+$ und $HA^+$ offenbar wie folgt umformulieren:

Für $VA^+$: Dabei seien $y_1, \ldots, y_n$ genau die GV, die in den Formeln des Herleitungsastes frei vorkommen, dem die Haupt-SQ angehört. Kommt dort keine GV frei vor, so ist $n = 1$ und $y_1$ beliebig zu wählen.

Für $HA^+$: Dabei sei y eine GV, die in den Formeln des Herleitungsastes $\mathfrak{F}$ nicht frei vorkommt, dem die Haupt-SQ angehört. Und die Formeln $B_i[x_i/y]$ $(i = 1, \ldots, s)$ sollen solchen Formeln $\wedge x_i B_i[x_i]$ entsprechen, die in $\mathfrak{F}$ als Hauptformeln der Regel $VA^+$ aufgetreten sind.

Der Vollständigkeits- und der Widerspruchsfreiheitsbeweis für $\mathfrak{P}2$ überträgt sich bei Verwendung der Regeln $VA^+$ und $HA^+$ in der neuen Form sofort auf den Fall der Regeln, in denen die Hauptformeln in den Konklusionen weggelassen werden. Bei diesen Beweisen haben wir ja von der Mitführung der Hauptformeln nicht wesentlich Gebrauch gemacht. Daher ist die neue Formulierung des Kalküls $\mathfrak{P}2$ — nennen wir sie $\mathfrak{P}2^*$ — mit der ursprünglichen Fassung äquivalent. Diesem semantischen Äquivalenzbeweis läßt sich auch ein syntaktischer gegenüberstellen:

Ist $\mathfrak{H}$ ein Beweis für die SQ $\Sigma$ in $\mathfrak{P}2^*$, so erhält man daraus durch Hinzufügung der unterstrichenen Hauptformeln in den Konklusionen einen Beweis für $\Sigma$ in $\mathfrak{P}2$. Ferner gilt: Aus einer SQ, die bzgl. einer Formel C vom Grad $n$ $(n > 0)$ geschlossen ist, läßt sich ein SS herleiten, dessen sämtliche Konstituenten bzgl. Formeln vom Grad $< n$ geschlossen sind:

$$\Delta, \neg A \Rightarrow \neg A, \Gamma \qquad\qquad \Delta, A \supset B \Rightarrow A \supset B, \Gamma$$

$$\Delta, \underline{\neg A} \Rightarrow A, \neg A, \Gamma \qquad\qquad \Delta, A \supset B, A \Rightarrow B, \underline{A \supset B}, \Gamma$$

$\Delta, \underline{\neg A}, A \Rightarrow A, \underline{\neg A}, \Gamma \qquad \Delta, \underline{A \supset B}, A \Rightarrow A, B, A \supset B, \Gamma;$

$\Delta, \underline{A \supset B}, A, B \Rightarrow B, \underline{A \supset B}, \Gamma$

$\Delta, \bigwedge x A[x] \Rightarrow \bigwedge x A[x], \Gamma$

$\Delta, \bigwedge x A[x] \Rightarrow A[x/y_n], \underline{\bigwedge x A[x]}, \Gamma$

$\Delta, \underline{\bigwedge x A[x]}, A[x/y_1], \ldots, A[x/y_n] \Rightarrow A[x/y_n], \underline{\bigwedge x A[x]}, \Gamma$

Ist C als VF oder als HF unterstrichen, so erhält man das gleiche Ergebnis, wenn man beachtet, daß in der Anfangs-SQ dann auch die entsprechenden Nebenformeln zu C auftreten.

Gibt es also einen Beweis $\mathfrak{H}$ für $\Sigma$ in $\mathfrak{P}2$, so läßt sich $\mathfrak{H}$ zu einem Beweis verlängern, der einen SS enthält, dessen sämtliche Konstituenten bzgl. Atomformeln geschlossen sind. Läßt man in diesem Beweis nun die unterstrichenen Formeln weg, so erhält man einen Beweis für $\Sigma$ in $\mathfrak{P}2^*$.

3. Es empfiehlt sich für praktische Zwecke endlich auch, die Beweise in Baumform zu schreiben, nicht als Folgen von SS — dadurch vereinfacht man sich die Schreibarbeit — und auch für die übrigen logischen Operatoren Deduktionsregeln anzugeben. Wir geben diese Regeln gleich für $\mathfrak{P}2^*$ in der Form an, wie man sie beim Aufbau von Beweisen in Baumform verwendet und wo also die Prämisse nur aus der Haupt-SQ besteht:

**VK:** $\Delta, A \wedge B \Rightarrow \Gamma \vdash \Delta, A, B \Rightarrow \Gamma$
**HK:** $\Delta \Rightarrow A \wedge B, \Gamma \vdash \Delta \Rightarrow A, \Gamma; \quad \Delta \Rightarrow B, \Gamma$
**VD:** $\Delta, A \vee B \Rightarrow \Gamma \vdash \Delta, A \Rightarrow \Gamma; \quad \Delta, B \Rightarrow \Gamma$
**HD:** $\Delta \Rightarrow A \vee B, \Gamma \vdash \Delta \Rightarrow A, B, \Gamma$
**VQ:** $\Delta, A \equiv B \Rightarrow \Gamma \vdash \Delta, A, B \Rightarrow \Gamma; \quad \Delta \Rightarrow A, B, \Gamma$
**HQ:** $\Delta \Rightarrow A \equiv B, \Gamma \vdash \Delta, A \Rightarrow B, \Gamma; \quad \Delta, B \Rightarrow A, \Gamma$
**HE:** $\Delta \Rightarrow \bigvee x A[x], \Gamma \vdash \Delta \Rightarrow A[x/y_1], \ldots, A[x/y_n], \Gamma.$
Die Variablenbedingung für diese Regel ist die gleiche wie für $VA^+$ in $\mathfrak{P}2^*$.
**VE:** $\Delta, \bigvee x A[x] \Rightarrow \Gamma \vdash \Delta, [B_1[x_1/y]], \ldots, [B_s[x_s/y]], A[x/y] \Rightarrow [C_1[z_1/y]], \ldots, [C_t[z_t/y]], \Gamma$

Dabei seien die GV y und die Formeln $B_i[x_i/y]$ ($i = 1, \ldots, s$) wie für die Regel $HA^+$ in $\mathfrak{P}2^*$ gewählt. Auch die Formeln $C_k[z_k/y]$ ($k = 1, \ldots, t$) bezeichnen wir als SF von $\bigvee x A[x]$. Sie sollen den Formeln $\bigvee z_k C_k[z_k]$ entsprechen, die in dem Herleitungsast, dem die Haupt-SQ angehört, bereits als Hauptformeln von HE aufgetreten sind.

Verwendet man den Existenzoperator als Grundoperator, so ist die Regel $\mathrm{HA}^+$ im Hinblick auf die Regel HE wie folgt abzuändern:

$\mathrm{HA}^{+*}$: $\Delta \Rightarrow \wedge x A[x], \Gamma \vdash \Delta, [B_1[x_1/y]], \ldots, [B_s[x_s/y]] \Rightarrow A[x/y], [C_1[z_1/y]], \ldots, [C_t[z_t/y]], \Gamma$

mit einer Zusatzbedingung wie für VE.

Die Ableitungsbeziehungen, die diese Regeln beinhalten, gewinnt man aus den Grundregeln von $\mathfrak{P}2^*$ mit den Definitionen D1 bis D4 aus 2.3.1. Dazu drei Beispiele:

VD:

| | |
|---|---|
| $\Delta, A \vee B \Rightarrow \Gamma$ | |
| $\Delta, \neg A \supset B \Rightarrow \Gamma$ | D1 |
| $\Delta \Rightarrow \neg A, \Gamma \qquad \Delta, B \Rightarrow \Gamma$ | VI |
| $\Delta, A \Rightarrow \Gamma$ | HN |

HE:

| | |
|---|---|
| $\Delta \Rightarrow \vee x A[x], \Gamma$ | |
| $\Delta \Rightarrow \neg \wedge x \neg A[x], \Gamma$ | D4 |
| $\Delta, \wedge x \neg A[x] \Rightarrow \Gamma$ | HN |
| $\Delta, \neg A[x/y_1], \ldots, \neg A[x/y_n] \Rightarrow \Gamma$ | $\mathrm{VA}^+$ |
| $\Delta \Rightarrow A[x/y_1], \ldots, A[x/y_n], \Gamma$ | VN n mal. |

VE:

| | |
|---|---|
| $\Delta, \vee x A[x] \Rightarrow \Gamma$ | |
| $\Delta, \neg \wedge x \neg A[x] \Rightarrow \Gamma$ | D4 |
| $\Delta \Rightarrow \wedge x \neg A[x], \Gamma$ | VN |
| $\Delta, [B_1[x_1/y]], \ldots, [B_s[x_s/y]], [\neg C_1[z_1/y]], \ldots, [\neg C_t[z_t/y]] \Rightarrow \neg A[x/y], \Gamma.$ | $\mathrm{HA}^+$ |

(Die Formeln $\neg C_k[z_k/y]$ verstehen sich daraus, daß eine Anwendung von HE auf $\vee z_k C_k[z_k]$ einer Anwendung von $\mathrm{VA}^+$ auf $\wedge z_k \neg C_k[z_k]$ entspricht.)

$\Delta, [B_1[x_1/y]], \ldots, [B_s[x_s/y]] \Rightarrow \neg A[x/y], [C_1[z_1/y]], \ldots, [C_t[z_t/y]], \Gamma$ VN t mal

$\Delta, [B_1[x_1/y]], \ldots, [B_s[x_s/y]], A[x/y] \Rightarrow [C_1[z_1/y]], \ldots, [C_t[z_t/y]], \Gamma$ HN

Wir wollen nun unter Verwendung des nach (1) bis (3) abgekürzten Beweisverfahrens einige Beweise und Widerlegungen der p.l. Gültigkeit von Schlüssen angeben. Wir beginnen mit den drei Beispielen von S. 169, an denen wir eingangs den Grundgedanken für den Aufbau des Beweisbegriffes von $\mathfrak{P}2$ illustriert haben. Diese Beispiele sollen noch einmal klar machen, daß sich der Kalkül $\mathfrak{P}2$ als direkte Formalisierung dieses Gedankens darstellt.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| I) | $\Rightarrow p \vee \neg p$ | | III) | $\Rightarrow \bigvee x \bigwedge y f(x, y) \supset \bigwedge y \bigvee x f(x, y)$ | |
| | $\Rightarrow p, \neg p$ | HD | | $\bigvee x \bigwedge y f(x, y) \Rightarrow \bigwedge y \bigvee x f(x, y)$ | HI |
| | $p \Rightarrow p$ | HN | | $\bigwedge y f(z_1, y) \Rightarrow \bigwedge y \bigvee x f(x, y)$ | VE |
| II) | $\Rightarrow ((p \supset q) \supset p) \supset q$ | | | $\bigwedge y f(z_1, y) \Rightarrow \bigvee x f(x, z_2)$ | HA |
| | $(p \supset q) \supset p \Rightarrow q$ | HI | | $f(z_1, z_1), f(z_1, z_2) \Rightarrow \bigvee x f(x, z_2)$ | VA |
| | $\Rightarrow p \supset q, q;\ p \Rightarrow q$ | VI | | $f(z_1, z_1), f(z_1, z_2) \Rightarrow f(z_1, z_2), f(z_2, z_2)$ | HE |

Da der Herleitungsast, der im Beispiel (II) mit der SQ $p \Rightarrow q$ endet, keine geschlossene SQ enthält und da auf diese SQ weitere Deduktionsregeln nicht anwendbar sind, ist also die Anfangs-SQ $\Rightarrow ((p \supset q) \supset p) \supset q$ nicht beweisbar und wir können eine Bewertung angeben, die diese SQ erfüllt, nämlich irgendeine Bewertung, die $p$ erfüllt und $q$ nicht erfüllt. Allgemein läßt sich im Fall einer vollständigen Herleitung, die endlich ist und die kein Beweis ist, nach dem Gedanken des Vollständigkeitsbeweises für $\mathfrak{P}2$ immer eine Bewertung effektiv angeben, welche die Anfangs-SQ erfüllt und so ein Gegenbeispiel für die Annahme der p.l. Gültigkeit des Schlusses ist, den sie repräsentiert. Das Beweisverfahren von $\mathfrak{P}2$ erlaubt also im Fall endlicher vollständiger Herleitungen immer eine Entscheidung darüber, ob die Anfangs-SQ p.l. gültig ist oder nicht. Für den Fall der A.L. bildet so die Konstruktion einer vollständigen Herleitung immer die Anwendung eines Entscheidungsverfahrens. Denn wenn die Formeln der Anfangs-SQ $\Sigma$ nur a.l. Operatoren enthalten, so ist jede Herleitung aus $\Sigma$ offenbar endlich, da jede Anwendung einer Deduktionsregel die Summe der Formelgrade in den SS um 1 erniedrigt.

Auch im Fall unendlicher vollständiger Herleitungen kann man oft aus der Struktur eines vorliegenden Anfangsstückes der Herleitung auf das Entwicklungsgesetz der Gesamtherleitung schließen und damit zeigen, daß die Herleitung auch bei beliebig langer Fortsetzung keinen Beweis ergibt. Auch in solchen Fällen kann man also vermittels des Beweisverfahrens in $\mathfrak{P}2$ zu einer Widerlegung der p.l. Gültigkeit eines Schlusses gelangen. Dazu ein einfaches Beispiel:

d) $\bigwedge x \bigvee y f(x, y) \Rightarrow$

$\bigvee y f(z_1, y) \Rightarrow$

$f(z_1, z_2), \bigvee y f(z_2, y) \Rightarrow$

$f(z_1, z_2), f(z_2, z_3), \bigvee y f(z_3, y) \Rightarrow$

$\vdots$

(n + 1)-te Zeile $f(z_1, z_2), \ldots, f(z_{n-1}, z_n), \bigvee y f(z_n, y) \Rightarrow$

$\vdots$

Hier sieht man unmittelbar, daß sich eine unendliche Herleitung ergeben muß, d. h. daß auch eine beliebig lange Fortsetzung der Herleitungskonstruktion keinen Beweis ergeben kann. Aufgrund des Entwicklungsgesetzes der Herleitung kann man wieder eine Bewertung effektiv angeben, welche die Anfangs-SQ erfüllt.

Obwohl so das Beweisverfahren in $\mathfrak{P}2$ ein recht starkes Hilfsmittel für die Feststellung der p.l. Gültigkeit von Schlüssen ist, hat es doch nicht den Charakter eines allgemeinen Entscheidungsverfahrens. Denn wenn die Konstruktion einer normalen Herleitung aus einer SQ $\Delta \twoheadrightarrow \Gamma$ nicht nach endlich vielen Schritten eine vollständige Herleitung ergibt, so haben wir keine allgemeinen und mechanisch anwendbaren Kriterien dafür, ob die weitere Fortsetzung der Herleitung zu einem Beweis für den Schluß $\Delta \rightarrow \Gamma$ führen wird oder nicht. Nur in gewissen Fällen läßt sich mit metatheoretischen Mitteln, die von Fall zu Fall verschieden sein können, aus der Struktur des vorliegenden Anfangsstückes der Herleitung ermitteln, ob seine weitere Entwicklung einen Beweis ergibt oder nicht.

Da die P.L. das Fundament für die Formalisierung von Theorien der verschiedensten Gegenstandsbereiche bildet, ist nun die Frage nach der Existenz eines allgemeinen Entscheidungsverfahrens für die P.L. von größter Bedeutung. Diese Frage ist abschließend von A. Church in [8] beantwortet worden, dem es gelang zu zeigen, daß ein solches Entscheidungsverfahren nicht existieren kann. Eine Darstellung dieses Beweises für die Unlösbarkeit des Entscheidungsproblems können wir hier nicht bringen, da die Entwicklung der erforderlichen Beweismittel den Rahmen dieses Buches bei weitem überschreiten würde. Wir müssen daher den Leser auf die einschlägige Literatur hinweisen[1]. Hier sei nur angemerkt, daß eine formale Präzisierung des von uns früher nur intuitiv charakterisierten Entscheidungsbegriffes eine wesentliche Vorbedingung für einen solchen Beweis ist. Die Adäquatheit einer derartigen Präzisierung läßt sich naturgemäß nicht in Strenge beweisen, tatsächlich haben sich aber alle heute vorliegenden Präzisierungsvorschläge als untereinander äquivalent erwiesen, obwohl sie von ganz verschiedenen Ansatzpunkten ausgehen. Die Adäquatheit der Präzisierungen des Entscheidungsbegriffes und damit die Tragweite des Resultats von Church ist also gut gesichert[2].

---

[1] Vgl. dazu [8], [32] und [42].

[2] Vgl. dazu insbesondere [32].

Die philosophische Bedeutung des Satzes von der Unlösbarkeit des Entscheidungsproblems liegt darin, daß er die Nichttrivialität der elementaren Logik beinhaltet. Man wird ja einen Problemkreis — hier die Frage nach der p.l. Gültigkeit von Schlüssen — nur dann als trivial ansprechen können, wenn ein mechanisches Entscheidungsverfahren zur Lösung der Probleme vorliegt, oder, was damit gleichbedeutend ist, wenn sich die Probleme prinzipiell auch durch eine Maschine lösen lassen. Während KANT die formale Logik seiner Zeit, die aristotelische Syllogistik, mit Recht als eine triviale Wissenschaft bezeichnen konnte, deren Entwicklung ein für allemal abgeschlossen sei, gilt das für die wesentlich reichere moderne Logik nicht mehr. Die Ingenuität des Logikers bleibt für ihre weitere Entwicklung unentbehrlich.

Man kann in zwei Richtungen nach Teillösungen des Entscheidungsproblems suchen: Einmal kann man das allgemeine Entscheidungsproblem auf speziellere Entscheidungsprobleme für gewisse Formelklassen $\mathfrak{K}$ reduzieren, indem man zeigt, daß eine Lösung des Problems, zu entscheiden, ob eine Formel der Klasse $\mathfrak{K}$ p.l. wahr ist oder nicht, eine Lösung auch des allgemeinen Entscheidungsproblems nach sich ziehen würde. Über solche Resultate berichtet J. SURÁNYI in [72]. Im Hinblick auf das Resultat von CHURCH sind diese Reduktionen vor allem insofern von Interesse, als sie gestatten, aus der Unlösbarkeit des allgemeinen Entscheidungsproblems auf die Unlösbarkeit des Entscheidungsproblems für spezielle Formelklassen $\mathfrak{K}$ zu schließen. Andere Untersuchungen haben sich damit befaßt, eine positive Lösung von Entscheidungsproblemen für spezielle Formelklassen zu finden. Über einschlägige Resultate berichtet W. ACKERMANN in [1].

Wir wollen hier auf diese Fragen nicht näher eingehen. Es genügt uns, festzuhalten, daß das Beweisverfahren in $\mathfrak{P}2$ in vielen Fällen eine Entscheidung über die p.l. Gültigkeit eines Schlusses ermöglicht, so z. B. immer im Fall a.l. Schlüsse und im Fall von Schlüssen der Form $\rightarrow A$, wo $A$ eine Formel in pränexer Normalform ist, in deren Präfix alle Allquantoren allen Existenzquantoren voraufgehen. Auf die Entscheidbarkeit der monadischen P.L., deren Formeln nur einstellige PV enthalten, werden wir in anderem Zusammenhang noch zu sprechen kommen[1].

**2.4.1.4** *Der Tableaux-Kalkül von Beth.* Wir wollen die Darstellung des Kalküls $\mathfrak{P}2$ abschließen mit einem Hinweis auf eine andere For-

[1] Vgl. den Abschnitt 6.2.

mulierung dieses Kalküls, die auf E. W. BETH zurückgeht[1]. Geht man von der ursprünglichen Fassung des Kalküls $\mathfrak{P}2$ aus mit den Regeln nach 2.4.1.1.6, so entstehen die SQ eines Herleitungsastes aus den ihnen vorhergehenden SQ durch Einsetzung der Nebenformeln. Wir können nun die SQ eines solchen Astes auch in Form zweispaltiger Tafeln (tableaux) schreiben, in die wir links die VF, rechts die HF eintragen. Jeder SQ des Astes entspricht dann ein Entwicklungszustand der Tafel, jeder Anwendung einer Deduktionsregel entspricht die Erweiterung der Tafel durch Eintragung der Nebenformeln. Eine Tafel nennen wir geschlossen, wenn die ihr entsprechende SQ geschlossen ist, d. h. wenn eine Formel in beiden Spalten der Tafel auftritt. Wie die SQ repräsentieren, auch die Tafeln Wahrheitsannahmen, nach denen die Formeln in der linken Spalte wahr, die in der rechten Spalte falsch sein sollen.

Wir können so z. B. die Herleitung

$$\begin{array}{rl} & \Rightarrow A \wedge B \supset (A \supset B) \\ A \wedge B & \Rightarrow A \supset B \\ A \wedge B, A & \Rightarrow B \\ A, B, A & \Rightarrow B \end{array}$$

in der Tafel

| $\mathfrak{w}$ | $\mathfrak{f}$ |
|---|---|
| $A \wedge B$ | $A \wedge B \supset (A \supset B)$ |
| | $A \supset B$ |
| $A$ | $B$ |
| $A$ | |
| $B$ | |

wiedergeben.

Spaltet ein Herleitungsast auf, so sollen auch die Tafeln in Untertafeln (subtableaux) aufspalten, die mit den zugehörigen Obertafeln zusammen eine Tafel bilden:

---

[1] E. W. BETH und K. J. J. HINTIKKA haben zuerst eine Formalisierung des Beweisgedankens angegeben, den wir dem Kalkül $\mathfrak{P}2$ zugrunde gelegt haben, vgl. dazu [3], [4], [39], [40] und [41].

Aus

$$\begin{array}{rl} & \Rightarrow ((A \supset B) \supset A) \supset A \\ (A \supset B) \supset A & \Rightarrow A \\ & \Rightarrow A \supset B, A;\ A \Rightarrow A \\ A & \Rightarrow B, A \end{array}$$

erhalten wir so

| $\mathfrak{w}$ | | $\mathfrak{f}$ | |
|---|---|---|---|
| $(A \supset B) \supset A$ | | $((A \supset B) \supset A) \supset A$<br>$A$ | |
| $A$ | $A$ | $A \supset B$<br>$B$ | |
| (1a) | (1b) | (2a) | (2b) |

Die Formel $(A \supset B) \supset A$ gehört sowohl zur Spalte 1a wie zu 1b, die Formeln $((A \supset B) \supset A) \supset A$ und A gehören sowohl zu den Spalten 2a wie zu 2b. Die Spalten 1a und 2a, bzw. 1b und 2b bilden zusammen eine Tafel, der ein Beweisast entspricht.

Spaltet eine Herleitung in viele Äste auf, so wird die Darstellung mit den semantischen Tafeln unübersichtlich. In allen anderen Fällen bringt aber das BETHsche Beweisverfahren den Grundgedanken des Kalküls $\mathfrak{P}2$ besonders klar zur Anschauung, da die Schritte zur Entwicklung der Tafeln unmittelbar den Rückschluß von dem Wahrheitswert eines komplexen Satzes auf die Wahrheitswerte seiner Teilsätze nach den Bewertungsregeln widerspiegeln.

Das Beweisverfahren mit solchen semantischen Tafeln läßt sich ohne Rückgriff auf den Kalkül $\mathfrak{P}2$ wie folgt charakterisieren:

1. Wenn der Schluß $\Delta \rightarrow \Gamma$ auf seine p.l. Gültigkeit hin untersucht werden soll, so trägt man die Formeln aus $\Delta$ in die $\mathfrak{w}$-Spalte, die Formeln aus $\Gamma$ in die $\mathfrak{f}$-Spalte einer Tafel ein.

2. Die Regeln zur Entwicklung einer Tafel lassen sich graphisch wie folgt andeuten:

**VN:** Aus der (Unter-)Tafel $\begin{array}{c|c} \vdots & \vdots \\ \neg A & \vdots \\ \vdots & \vdots \end{array}$ kann man die (Unter-)Tafel $\begin{array}{c|c} \vdots & \vdots \\ \neg A & \vdots \\ \vdots & A \end{array}$ erzeugen.

(Ist $\neg A$ wahr, so ist A falsch.)

**HN:** Aus der (Unter-)Tafel $\begin{array}{c|c} \vdots & \vdots \\ \vdots & \neg A \\ \vdots & \vdots \end{array}$ kann man die (Unter-)Tafel $\begin{array}{c|c} \vdots & \vdots \\ \vdots & \neg A \\ A & \vdots \end{array}$ erzeugen.

(Ist $\neg A$ falsch, so ist A wahr.)

**VI:** Aus der (Unter-)Tafel $\begin{array}{c|c} \vdots & \vdots \\ A \supset B & \vdots \\ \vdots & \vdots \end{array}$ kann man die (Unter-)Tafel $\begin{array}{c|c} \vdots & \vdots \\ A \supset B & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ B & A \end{array}$ erzeugen.

(Ist $A \supset B$ wahr, so ist A falsch oder B wahr.)

**HI:** Aus der (Unter-)Tafel $\begin{array}{c|c} \vdots & \vdots \\ \vdots & A \supset B \\ \vdots & \vdots \end{array}$ kann man die (Unter-)Tafel $\begin{array}{c|c} \vdots & \vdots \\ \vdots & A \supset B \\ \vdots & \vdots \\ A & B \end{array}$ erzeugen.

(Ist $A \supset B$ falsch, so ist A wahr und B falsch.)

**VA:** Aus der (Unter-)Tafel $\begin{array}{c|c} \vdots & \vdots \\ \land x A[x] & \vdots \\ \vdots & \vdots \end{array}$ kann man die (Unter-)Tafel $\begin{array}{c|c} \vdots & \vdots \\ \land x A[x] & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ A[x/y] & \vdots \end{array}$ erzeugen.

(Ist $\land x A[x]$ wahr, so ist $A[x/y]$ für jede GV y wahr.)

**HA:** Aus der (Unter-Tafel) $\begin{array}{c|c} \vdots & \vdots \\ \vdots & \land x A[x] \\ \vdots & \vdots \end{array}$ kann man die (Unter-)Tafel $\begin{array}{c|c} \vdots & \vdots \\ \vdots & \land x A[x] \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & A[x/y] \end{array}$ erzeugen.

Dabei sei y eine GV, die in den Formeln der ersten Tafel nicht frei vorkommt.

(Wie für die Bedingung 2.4.1.1.3—f zeigt man hier: wenn es eine Bewertung gibt, die im Einklang mit der ersten semantischen Tafel steht, so gibt es auch eine Bewertung, die im Einklang mit der zweiten Tafel steht.)

Die Regeln für die übrigen logischen Operatoren kann der Leser ohne Schwierigkeit selbst formulieren.

3. Eine Tafel ist ein Beweis für den Schluß, dessen Prämissen und Konklusionen als Anfangsformeln in die $\mathfrak{w}$- und $\mathfrak{f}$-Spalte eingetragen wurden, wenn alle ihre Untertafeln geschlossen sind.

Der Bethsche Kalkül ist offensichtlich mit $\mathfrak{P}2$ äquivalent. Zur Verdeutlichung des neuen Beweisverfahrens geben wir noch zwei Beispiele an, zu denen der Leser die entsprechenden Herleitungen in $\mathfrak{P}2$ konstruieren möge.

e) Der Schluß $\rightarrow (\bigwedge x f(x) \equiv \bigwedge x g(x)) \supset \bigwedge x(f(x) \equiv g(x))$ ist nicht p.l. gültig:

<table>
<tr><th colspan="4">$\mathfrak{w}$</th><th colspan="4">$\mathfrak{f}$</th></tr>
<tr><td colspan="4">$\bigwedge x f(x) \equiv \bigwedge x g(x)$</td><td colspan="4">$(\bigwedge x f(x) \equiv \bigwedge x g(x)) \supset \bigwedge x(f(x) \equiv g(x))$<br>$\bigwedge x(f(x) \equiv g(x))$<br>$f(z) \equiv g(z)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">(1a)</td><td colspan="2">(1b)</td><td colspan="2">(2a)</td><td colspan="2">(2b)</td></tr>
<tr><td colspan="2">$f(z)$</td><td colspan="2">$g(z)$</td><td colspan="2">$f(z) \supset g(z)$<br>$g(z)$</td><td colspan="2">$g(z) \supset f(z)$<br>$f(z)$</td></tr>
<tr><td>(1aa)</td><td>(1ab)</td><td>(1ba)</td><td>(1bb)</td><td>(2aa)</td><td>(2ab)</td><td>(2ba)</td><td>(2bb)</td></tr>
<tr><td>$\bigwedge x f(x)$<br>$\bigwedge x g(x)$<br>$f(z)$<br>$g(z)$</td><td></td><td>$\bigwedge x f(x)$<br>$\bigwedge x g(x)$<br>$f(z)$<br>$g(z)$</td><td></td><td></td><td>$\bigwedge x f(x)$<br>$\bigwedge x g(x)$<br>$f(z')$<br>$g(z')$</td><td></td><td>$\bigwedge x f(x)$<br>$\bigwedge x g(x)$<br>$f(z')$<br>$g(z')$</td></tr>
</table>

Die beiden Untertafeln mit den Spalten 1ab, 2ab und 1bb, 2bb sind nicht geschlossen. Eine weitere Regelanwendung ergibt offenbar nichts Neues (der Gesamttafel entspricht eine vollständige Herleitung in $\mathfrak{P}2$, in derem letzten SS alle nichtatomaren Formeln unterstrichen sind), so daß wir aufgrund der vorliegenden Tafel sagen können: Eine Bewertung, die z. B. die Formel $f(z)$ wahr, und die Formeln $g(z)$, $f(z')$ und $g(z')$ falsch macht (Untertafel 1ab, 2ab), bildet ein Gegenbeispiel für die Annahme der p.l. Gültigkeit des Schlusses (e).

f) Der Schluß $\rightarrow \bigwedge x(f(x) \supset g(y)) \supset (\bigvee x f(x) \supset g(y))$ ist p.l. gültig:

| $\mathfrak{w}$ | $\mathfrak{f}$ |
|---|---|
| | $\bigwedge x(f(x) \supset g(y)) \supset (\bigvee x f(x) \supset g(y))$ |
| $\bigwedge x(f(x) \supset g(y))$ | $\bigvee x f(x) \supset g(y)$ |
| $\bigvee x f(x)$ | $g(y)$ |
| $f(z)$ | |
| $f(z) \supset g(y)$ | |
| $g(y)$ | $f(z)$ |

### 2.4.2 Der Kalkül $\mathfrak{P}3$

**2.4.2.1** *Der Aufbau des Kalküls* $\mathfrak{P}3$. Ausgehend von $\mathfrak{P}2$ soll nun ein SQ-Kalkül $\mathfrak{P}3$ aufgebaut werden, der sich ebenfalls als Formalisierung des natürlichen Schließens ansprechen läßt. Wir wollen diesen Kalkül zunächst syntaktisch definieren und anschließend auf die semantische Deutung des Beweisbegriffes eingehen.

Wir charakterisieren den Kalkül $\mathfrak{P}3$ dadurch, daß wir festlegen: Ein Beweis für eine SQ $\Sigma$ in $\mathfrak{P}3$ ist ein Beweis für $\Sigma$ in $\mathfrak{P}2$, angeschrieben in Baumform, der von unten nach oben gelesen wird. Dann werden die geschlossenen SQ Axiome von $\mathfrak{P}3$ und die Deduktionsregeln von $\mathfrak{P}2$ gehen in Deduktionsregeln von $\mathfrak{P}3$ über, wenn man sie so umkehrt, daß die Prämisse zur Konklusion wird. Diese Umkehrung läßt die Regeln VT und HT unverändert. Die Umkehrungen der Regeln VR und HR wollen wir nicht als Regeln in $\mathfrak{P}3$ aufnehmen. Tatsächlich sind diese Regeln in $\mathfrak{P}2$ ja auch überflüssig, denn ein Beweis in $\mathfrak{P}2$ bleibt ein solcher, wenn man evtl. Anwendungen dieser Regeln unterdrückt und die ursprünglich durch Kontraktion eliminierten Formelvorkommnisse unverändert in den folgenden SQ mitführt. Wir hatten die Kontraktionsregeln in $\mathfrak{P}2$ nur aufgenommen im Hinblick auf unsere Absicht, Wahrheitsannahmen durch SQ zu repräsentieren. Eine ähnliche Repräsentationsabsicht führt uns jetzt dazu, anstelle ihrer Umkehrungen die Regeln VR und HR selbst auch in 𝔓3 aufzunehmen.

Wir erhalten demnach für 𝔓3 folgende Axiome und Regeln:

**2.4.2.1.1** *Axiome* von 𝔓3 sind alle SQ der Form $\Delta, A \Rightarrow A, \Gamma$. Die *Deduktionsregeln* von 𝔓3 sind neben den Strukturregeln VT bis HR die Regeln:

**vN:** $\Delta, \neg A \Rightarrow A, \Gamma \vdash \Delta, \neg A \Rightarrow \Gamma$
**hN:** $\Delta, A \Rightarrow \neg A, \Gamma \vdash \Delta \Rightarrow \neg A, \Gamma$
**vI:** $\Delta, A \supset B \Rightarrow A, \Gamma; \Delta, A \supset B, B \Rightarrow \Gamma \vdash \Delta, A \supset B \Rightarrow \Gamma$
**hI:** $\Delta, A \Rightarrow B, A \supset B \vdash \Delta \Rightarrow A \supset B, \Gamma$
**vA:** $\Delta, \wedge x A[x], A[x/y] \Rightarrow \Gamma \vdash \Delta, \wedge x A[x] \Rightarrow \Gamma$, wo y eine beliebige GV ist.
**hA:** $\Delta \Rightarrow A[x/y], \wedge x A[x], \Gamma \vdash \Delta \Rightarrow \wedge x A[x], \Gamma$, wo y eine GV ist, die in den Formeln der Konklusion nicht frei vorkommt.

Diese Regeln bezeichnen wir sinngemäß als *Einführungsregeln* für die logischen Operatoren, nicht wie in 𝔓2 als Beseitigungsregeln. Wir sprechen auch bzgl. dieser Regeln im gleichen Sinn wie für die Regeln von 𝔓2 von Haupt- und Nebenformeln.

**2.4.2.1.2** Die Kalküle 𝔓3 und 𝔓2 sind äquivalent, d. h. jede in 𝔓3 beweisbare SQ ist auch in 𝔓2 beweisbar und umgekehrt.

Das ergibt sich direkt aus der Konstruktion von 𝔓3. Danach läßt sich ja jeder Beweis in 𝔓2 ohne Anwendungen von VR und HR von unten nach oben als Beweis in 𝔓3 lesen. Nach unseren obigen Bemerkungen bleibt aber der Beweischarakter eines Beweises in 𝔓2 erhalten, wenn wir alle Anwendungen von VR und HR unterdrücken. Und jeder Beweis in 𝔓3 läßt sich von unten nach oben als Beweis in 𝔓2 lesen, wenn man für evtl. Anwendungen von VR und HR in 𝔓3 beachtet, daß in 𝔓2 trivialerweise gilt: ist die SQ $A, \Delta \Rightarrow \Gamma$ bzw. $\Delta \Rightarrow \Gamma, A$ beweisbar, so auch die SQ $A, A, \Delta \Rightarrow \Gamma$ bzw. $\Delta \Rightarrow \Gamma, A, A$.

Da 𝔓2 eine adäquate Formalisierung der P.L. ist, so gilt demnach dasselbe auch für 𝔓3.

**2.4.2.2** *Die Äquivalenz der Kalküle* 𝔓1 *und* 𝔓3. Wir wollen nun einige wichtige Metatheoreme für 𝔓3 beweisen, die es uns erlauben werden, 𝔓3 in einen SQ-Kalkül vom Typ des Kalküls LK von GENTZEN in [25] umzuformen.

Zunächst bemerken wir, daß des genügt, in $\mathfrak{P}3$ als Axiome nur solche SQ zu wählen, die bzgl. einer Atomformel geschlossen sind. Denn SQ, die bzgl. einer Formel vom Grad $n$ geschlossen sind, lassen sich in $\mathfrak{P}3$ mit Axiomen beweisen, die bzgl. einer Formel vom Grad $< n$ geschlossen sind. So erhält man:

$\Delta, \neg A \Rightarrow \neg A, \Gamma$ aus $\Delta, \neg A, A \Rightarrow A, \neg A, \Gamma$ mit vN und hN,
$\Delta, A \supset B \Rightarrow A \supset B, \Gamma$ aus $\Delta, A \supset B, A \Rightarrow A, A \supset B, \Gamma$ und $\Delta, A \supset B, B \Rightarrow B, A \supset B, \Gamma$ mit vI und hI, und
$\Delta, \bigwedge x A[x] \Rightarrow \bigwedge x A[x], \Gamma$ aus $\Delta, \bigwedge x A[x], A[x/y] \Rightarrow A[x/y], \bigwedge x A[x], \Gamma$ mit vA und hA.

Für $\mathfrak{P}3$ mit einem so beschränkten Axiomenschema gilt dann der Satz:

**2.4.2.2.1** Jeder Beweis einer SQ $\Sigma$ läßt sich in einen Beweis gleicher Länge für eine SQ $\Sigma'$ umformen, die aus $\Sigma$ durch freie Umbenennung einer gebundenen GV hervorgeht. Dabei bezeichnen wir die Anzahl der SQ des längsten Astes eines Beweises als dessen *Länge*.

Wir beweisen den Satz durch Induktion nach der Länge $l$ des Beweises $\mathfrak{H}$ für $\Sigma$. Für $l = 1$ ist $\Sigma$ ein Axiom und die Behauptung ist trivial wegen der speziellen Gestalt der Axiome von $\mathfrak{P}3$, die wir hier voraussetzen. Ist die Behauptung bewiesen für alle $l \leqslant m$ und ist nun $l = m + 1$, so läßt sich die Umbenennung nach Induktionsvoraussetzung auch in solchen Formeln A von $\Sigma$ vornehmen, die nicht Hauptformel der letzten Regelanwendung sind. Ist A aber Hauptformel, so unterscheiden wir 6 Fälle, je nach der Regel, deren Konklusion $\Sigma$ in $\mathfrak{H}$ ist. Wir greifen nur den Fall der Regel vA heraus: $\Sigma$ habe die Gestalt $\Delta, \bigwedge x A[x] \Rightarrow \Gamma$, die Prämisse habe die Gestalt 1) $\Delta, \bigwedge x A[x], A[x/y] \Rightarrow \Gamma$ und es solle die GV z in einer Teilformel $\bigwedge z B[z]$ von $\bigwedge x A[x]$ frei in eine GV z' umbenannt werden. Ist $\bigwedge z B[z]$ die Formel $\bigwedge x A[x]$ selbst, so erhalten wir aus (1) nach der Induktionsvoraussetzung die SQ $\Delta, \bigwedge z' B[z/z'], B[z/y] \Rightarrow \Gamma$ und daraus mit vA die SQ $\Sigma'$: $\Delta, \bigwedge z' B[z/z'] \Rightarrow \Gamma$. Ist $\bigwedge z B[z]$ von $\bigwedge x A[x]$ verschieden und ist y von z' verschieden, so können wir nach Induktionsvoraussetzung z in $\bigwedge x A[x]$ und in $A[x/y]$ frei in z' umbenennen (falls nicht z mit Rücksicht auf die freie Einsetzung von y in der letzteren Formel schon in eine GV z'' umbenannt worden ist, für die man dann wieder z' setzen kann) und erhalten dann mit vA die SQ $\Sigma'$. Ist aber y mit z' identisch, so erhält man $\Sigma'$ aus (1) nach Umbenennung von z in z' in $\bigwedge x A[x]$ mit vA. — Entsprechend argumentiert man für die Regel hA. Für die übrigen Regeln ergibt sich aber die Behauptung in einfacher Weise aus der Induktionsvoraussetzung.

**2.4.2.2.2** Geht die SQ $\Sigma[x_1/y_1, \ldots, x_n/y_n]$ (kurz $\Sigma[x_i/y_i]$) aus der SQ $\Sigma[x_1, \ldots, x_n]$ (kurz $\Sigma[x_i]$) durch freie Einsetzung der GV $y_i$ für die freien Vorkommnisse der GV $x_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ in den Formeln von $\Sigma[x_i]$ hervor, so läßt sich ein Beweis für $\Sigma[x_i]$ in einen Beweis gleicher Länge für $\Sigma[x_i/y_i]$ umformen.

Es sei $\mathfrak{H}$ der vorliegende Beweis für $\Sigma[x_i]$. Wir beweisen den Satz wieder durch Induktion nach der Länge $l$ von $\mathfrak{H}$. Ist $l = 1$, so ist $\Sigma[x_i]$ ein Axiom und also auch $\Sigma[x_i/y_i]$. Sei nun die Behauptung für alle $l \leqslant m$ bewiesen und habe $\mathfrak{H}$ die Länge $m + 1$. Dann unterscheiden wir 10 Fälle, je nachdem welche Regel $\mathfrak{R}$ als letzte bei der Konstruktion von $\mathfrak{H}$ angewendet wurde. Wir greifen aus diesen Fällen die folgenden beiden heraus:

a) $\mathfrak{R}$ sei vA. Dann hat die End-SQ von $\mathfrak{H}$ die Gestalt $\Delta[x_i]$, $\Lambda z A[z, x_i] \Rightarrow \Gamma[x_i]$ und die ihr vorhergehende SQ hat die Gestalt $\Delta[x_i], \Lambda z A[z, x_i], A[z/z', x_i] \Rightarrow \Gamma[x_i]$. Der in $\mathfrak{H}$ enthaltene Beweis $\mathfrak{H}'$ für diese SQ hat die Länge $m$ und läßt sich also nach Induktionsvoraussetzung umformen in einen Beweis für die SQ $\Delta[x_i/y_i], .\Lambda z A[z, x_i/y_i]$, $A'[x_i/y_i] \Rightarrow \Gamma[x_i/y_i]$. Dabei sei $A'[x_i/y_i]$ die Formel $A[z/z', x_i/y_i]$, wenn $z'$ von den GV $x_i$ verschieden ist, sonst die Formel, die aus $A[z/z', x_i]$ durch freie Einsetzung der GV $y_i$ für die GV $x_i$ hervorgeht. Aus der letzteren SQ erhalten wir aber mit vA die SQ $\Delta[x_i/y_i], .\Lambda z A[z, x_i/y_i] \Rightarrow$ $\Gamma[x_i/y_i]$, bzw. eine SQ, aus der diese SQ nach 2.4.2.2.1 durch freie Umbenennungen gebundener GV hervorgeht.

b) $\mathfrak{R}$ sei hA. Dann hat die End-SQ von $\mathfrak{H}$ die Gestalt $\Delta[x_i] \Rightarrow \Lambda z A[z, x_i]$, $\Gamma[x_i]$ und die ihr vorausgehende SQ hat die Gestalt $\Delta[x_i] \Rightarrow A[z', x_i]$, $\Lambda z A[z, x_i], \Gamma[x_i]$, wo $z'$ nicht frei in den Formeln der End-SQ vorkommt — es ist also insbesondere $z'$ von den GV $x_i$ verschieden — und $A[z', x_i] = A[z/z', x_i]$ sei. $\mathfrak{H}$ enthält einen Beweis $\mathfrak{H}'$ für diese SQ von der Länge $m$, der sich nach Induktionsvoraussetzung umformen läßt in einen Beweis für die SQ $\Delta[x_i/y_i] \Rightarrow A[z'/z'', x_i/y_i], .\Lambda z A[z, x_i/y_i]$, $\Gamma[x_i/y_i]$, wobei $z''$ eine GV sei, die in den Formeln von $\mathfrak{H}$ nicht vorkommt und von den GV $y_i$ verschieden ist. Aus dieser SQ erhält man aber mit hA die SQ $\Delta[x_i/y_i] \Rightarrow .\Lambda z A[z, x_i/y_i], \Gamma[x_i/y_i]$, bzw. eine SQ, aus der diese SQ nach 2.4.2.2.1 durch freie Umbenennungen gebundener GV hervorgeht.

**2.4.2.2.3** Die Regeln der vorderen und hinteren Verdünnung

**VV:** $\Delta \Rightarrow \Gamma \vdash \Delta, A \Rightarrow \Gamma$ und **HV:** $\Delta \Rightarrow \Gamma \vdash \Delta \Rightarrow A, \Gamma$

sind in $\mathfrak{P}3$ zulässig, d. h. jede SQ, die sich mit Hilfe dieser Regeln in $\mathfrak{P}3$ beweisen läßt, läßt sich auch ohne Verwendung dieser Regeln beweisen.

Es liege ein Beweis $\mathfrak{H}$ für $\Delta \Rightarrow \Gamma$ vor. Wir erhalten daraus einen Beweis für $\Delta, A \Rightarrow \Gamma$ bzw. für $\Delta \Rightarrow A, \Gamma$, indem wir in allen SQ von $\mathfrak{H}$ A als VF bzw. als HF einfügen. Wenn dadurch die Variablenbedingung für die GV y bei einer Anwendung von hA verletzt wird, da A die GV y frei enthält, so können wir unter Benutzung von 2.4.2.2.2 vor Hinzufügung der Formel A in der Prämisse die GV y frei in eine GV y' umbenennen, die in den Formeln des Beweises nicht vorkommt. Aus $\mathfrak{H}$ läßt sich also ein Beweis $\mathfrak{H}'$ gewinnen, der bei Hinzufügung der Formel A zu den SQ seinen Beweischarakter behält: jede Anwendung einer Deduktionsregel bleibt nach Hinzufügung von A eine korrekte Anwendung der gleichen Deduktionsregel und alle Axiome bleiben nach Hinzufügung von A Axiome. Der Effekt der Regeln VV und HV läßt sich also auch ohne eine Anwendung dieser Regeln in $\mathfrak{P}3$ erreichen.

Unter Benutzung dieses Satzes können wir nun die Formulierung der Regeln von $\mathfrak{P}3$ etwas vereinfachen, indem wir die Hauptformeln in den Prämissen fortlassen:

**2.4.2.2.4**

**vN:** $\Delta \Rightarrow A, \Gamma \vdash \Delta, \neg A \Rightarrow \Gamma$ **hN:** $\Delta, A \Rightarrow \Gamma \vdash \Delta \Rightarrow \neg A, \Gamma$
**vI:** $\Delta \Rightarrow A, \Gamma; \Delta, B \Rightarrow \Gamma \vdash \Delta, A \supset B \Rightarrow \Gamma$ **hI:** $\Delta, A \Rightarrow B, \Gamma \vdash \Delta \Rightarrow A \supset B, \Gamma$
**vA:** $\Delta, A[x/y] \Rightarrow \Gamma \vdash \Delta, \Lambda x A[x] \Rightarrow \Gamma$ **hA:** $\Delta \Rightarrow A[x/y], \Gamma \vdash \Delta \Rightarrow \Lambda x A[x], \Gamma$

Dabei soll für hA y wieder eine GV sein, die in den Formeln der Konklusion nicht frei vorkommt.

Aus den Prämissen dieser Regeln erhält man mit VV bzw. HV die Prämissen der ursprünglichen Form dieser Regeln, die zu den gleichen Konklusionen führen. Aus den Prämissen der ursprünglichen Regeln erhält man mit den neuen Regeln und anschließender Kontraktion bzgl. der Hauptformeln ebenfalls die Konklusionen. Die Regeln nach 2.4.2.2.4 sind also mit den Regeln nach 2.4.2.1.1 äquivalent und wir können uns im folgenden immer auf die Formulierung der Deduktionsregeln von $\mathfrak{P}3$ nach 2.4.2.2.4 beziehen.

Würde man die Regeln VV und HV zu den Grundregeln von $\mathfrak{P}3$ hinzunehmen, so könnte man natürlich auch das Axiomenschema $\Delta, A \Rightarrow A, \Gamma$ durch das Schema $A \Rightarrow A$ ersetzen.

**2.4.2.2.5** Die Regel **TR:** $\Delta \Rightarrow A, \Gamma; \Delta', A \Rightarrow \Gamma' \vdash \Delta, \Delta' \Rightarrow \Gamma, \Gamma'$ ist zulässig in $\mathfrak{P}3$.

Die Regel TR bezeichnet man auch als *Schnittregel*, die Formel A als *Schnittformel*.

Beweis: Wir zeigen zunächst, daß die Regel **TR′:** $\Delta \Rightarrow A, \Gamma; \Delta', A \Rightarrow \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'_A \Rightarrow \Gamma_A, \Gamma'$ in $\mathfrak{P}3$ zulässig ist, wo $\Delta'_A$ und $\Gamma_A$ aus $\Delta'$ und $\Gamma$ durch Streichung aller Vorkommnisse der Formel A entstehen. Aus der Zulässigkeit von TR′ folgt dann wegen der Zulässigkeit von VV und HV sofort die Zulässigkeit von TR.

Es liege ein Beweis $\mathfrak{H}$ für eine SQ $\Sigma$ vor mit Anwendungen von TR′. Wir wollen zeigen, daß sich die erste Anwendung von TR′ in $\mathfrak{H}$ eliminieren läßt durch Umformung von $\mathfrak{H}$ in einen Beweis $\mathfrak{H}'$. Daraus folgt dann, daß sich in $\mathfrak{H}$ sukzessive alle Anwendungen von TR′ eliminieren lassen. Die fragliche erste Anwendung von TR′ habe die Prämissen $\Sigma_1$ und $\Sigma_2$ und die Konklusion $\Sigma_3$. Die in $\mathfrak{H}$ enthaltenen Beweise $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$ für $\Sigma_1$ und $\Sigma_2$ enthalten also keine Anwendungen von TR′. Wir definieren als *Rang* $a_1$ ($a_2$) von $\Sigma_1$ ($\Sigma_2$) die maximale Zahl der Glieder des Aststückes von $\mathfrak{H}_1$ ($\mathfrak{H}_2$), das mit $\Sigma_1$ ($\Sigma_2$) endet und dessen sämtliche SQ die Schnittformel A als HF (VF) enthalten. Als *Rang* r der ersten Anwendung von TR′ bezeichnen wir die Zahl $r = a_1 + a_2$.

Wir führen den Beweis für unsere Behauptung durch Induktion nach dem Grad g der Schnittformel A und nehmen in Basis und Induktionsschritt dieses Beweises je eine Induktion nach dem Rang r vor. Anwendungen der Regeln VT und HT wollen wir nicht explizit hervorheben.

1. *Basis:* $g = 0$.

1a) $r = 2$, d. h. $a_1 = a_2 = 1$. Dann sind wegen $g = 0$ $\Sigma_1$ und $\Sigma_2$ Axiome und $\Delta$ und $\Gamma'$ enthalten die Formel A, so daß $\Sigma_3$ aus $\Sigma_1$ oder $\Sigma_2$ durch Anwendungen von VV und HV hervorgeht. Diese Regeln sind aber nach 2.4.2.2.3 in $\mathfrak{P}3$ zulässig.

1b) Die Behauptung sei bewiesen für $g = 0$ und alle $r \leqslant m$. Es sei nun $r = m + 1$.

1ba) $a_1 \geqslant 2$. Ist $\Sigma_1$ Konklusion einer Ein-Prämissen-Regel $\mathfrak{R}$, so gehen wir von der Herleitung aus

$$\mathrm{TR}'\;\dfrac{\mathfrak{R}\;\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \Sigma_1'\end{matrix}}{\Sigma_1} \qquad \begin{matrix}\vdots\\ \vdots\\ \Sigma_2\end{matrix}}{\Sigma_3}$$

wo $\Sigma_1'$ A als HF enthält. Wir können diese Herleitung umformen in eine Herleitung

$$\mathrm{TR}'\;\dfrac{\mathfrak{R}\;\dfrac{\mathrm{TR}'\;\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \Sigma_1'\end{matrix} \quad \begin{matrix}\vdots\\ \Sigma_2\end{matrix}}{\Sigma'}}{\Sigma''} \quad \begin{matrix}\vdots\\ \Sigma_2\end{matrix}}{\Sigma_3} \qquad \text{bzw.} \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \Sigma_1'\end{matrix} \quad \begin{matrix}\vdots\\ \Sigma_2\end{matrix}}{\Sigma'}\;\mathrm{TR}'}{\Sigma_3}\;\mathfrak{R}$$

je nachdem, ob die Hauptformel von $\mathfrak{R}$ ein Vorkommnis der Schnittformel als HF ist oder nicht. Diese Herleitungen lassen sich ihrerseits nach Induktionsvoraussetzung umformen in Herleitungen für $\Sigma_3$ ohne Anwendung von TR'. Denn im ersteren Fall ist auch für die zweite TR'-Anwendung $r \leqslant m$ wegen $a_1 = 1$. Ist $\mathfrak{R}$ die Regel HR, angewandt auf A, so ist $\Sigma' = \Sigma_3$. Ist ein Vorkommnis von A als HF von $\Sigma_1'$ Nebenformel von $\mathfrak{R}$, so ist auf $\Sigma'$ zunächst die Regel HV und dann $\mathfrak{R}$ anzuwenden. Ist $\mathfrak{R}$ die Regel hA, so muß man ggf. vom Satz 2.4.2.2.2 Gebrauch machen, um die Variablenbedingung für diese Regel zu erhalten. Der Beweis dieses Satzes, wie des darin verwendeten Satzes 2.4.2.2.1 ergibt, daß die freie Einsetzung von GV den Rang des Beweises nicht erhöht, wenn man insbesondere von Beweisen $\mathfrak{H}$ ausgeht, deren Axiome bzgl. Atomformeln geschlossen sind. — Entsprechende Bemerkungen gelten für die restlichen Fälle unter (1ba).

Ist $\Sigma_1$ Konklusion einer Zwei-Prämissen-Regel $\mathfrak{R}$, so gehen wir von der Herleitung aus

$$\mathrm{TR}'\;\dfrac{\mathfrak{R}\;\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \Sigma_1'\end{matrix} \quad \begin{matrix}\vdots\\ \Sigma_1''\end{matrix}}{\Sigma_1} \qquad \begin{matrix}\vdots\\ \vdots\\ \Sigma_2\end{matrix}}{\Sigma_3}$$

wo $\Sigma_1'$ oder $\Sigma_1''$ A als HF enthält. Enthält nur $\Sigma_1'$ A als HF, so formen wir diese Herleitung wie folgt um:

$$\dfrac{\dfrac{\mathrm{TR}'\,\dfrac{\Sigma_1' \quad \Sigma_2}{\Sigma'} \quad \Sigma_1''}{\Sigma''}\,\mathfrak{R} \quad \Sigma_2}{\Sigma_3}\,\mathrm{TR}' \qquad \text{bzw.} \qquad \dfrac{\mathrm{TR}'\,\dfrac{\Sigma_1' \quad \Sigma_2}{\Sigma'} \quad \Sigma_1''}{\Sigma_3}\,\mathfrak{R}$$

Diese Herleitungen können wir ihrerseits nach Induktionsvoraussetzung umformen in Herleitungen von $\Sigma_3$, die keine Anwendungen von TR′ enthalten. In entsprechender Weise formt man $\mathfrak{H}$ um, wenn nur $\Sigma_1''$ die HF A enthält.

Enthalten $\Sigma_1'$ und $\Sigma_1''$ A als HF, so geht man zunächst zu den Herleitungen

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Sigma_1' \quad \Sigma_2}{\Sigma'}\,\mathrm{TR}' \quad \dfrac{\Sigma_1'' \quad \Sigma_2}{\Sigma''}}{\Sigma'''}\,\mathfrak{R} \quad \Sigma_2}{\Sigma_3}\,\mathrm{TR}' \qquad \text{bzw.} \qquad \dfrac{\dfrac{\Sigma_1' \quad \Sigma_2}{\Sigma'} \quad \dfrac{\Sigma_1'' \quad \Sigma_2}{\Sigma''}\,\mathrm{TR}'}{\Sigma_3}\,\mathfrak{R}$$

über, die sich nach Induktionsvoraussetzung in Herleitungen ohne Anwendungen von TR′ umformen lassen.

1bb) Für den Fall $a_2 \geqslant 2$ argumentiert man in gleicher Weise.

2. *Induktionsschritt*: Unsere Behauptung sei bewiesen für alle $g \leqslant n$ und beliebige r. Es sei nun $g = n + 1$.

2a) $r = 2$. Ist $\Sigma_1$ oder $\Sigma_2$ ein Axiom, so argumentiert man wie unter (1a). Andernfalls entstehen $\Sigma_1$ und $\Sigma_2$ durch Anwendungen logischer Regeln (vN bis hA) mit A als Hauptformel. Dann finden wir für

$A = \neg B$: Aus

$$\dfrac{\begin{matrix} \Delta, B \Rightarrow \Gamma & \Delta' \Rightarrow B, \Gamma \\ \Delta' \Rightarrow \neg B, \Gamma & \Delta', \neg B \Rightarrow \Gamma \end{matrix}}{\Delta, \Delta'_{\neg B} \Rightarrow \Gamma_{\neg B}, \Gamma'}\,\mathrm{TR}'$$

gewinnt man den Beweis

$$\dfrac{\dfrac{\Delta' \Rightarrow B, \Gamma' \quad \Delta, B \Rightarrow \Gamma}{\Delta_B, \Delta' \Rightarrow \Gamma, \Gamma'_B}\,\mathrm{TR}'}{\Delta, \Delta' \Rightarrow \Gamma, \Gamma'}\,\mathrm{VV, HV},$$

der sich nach Induktionsvoraussetzung in einen Beweis für $\Sigma_3$ ohne Anwendungen von TR′ umformen läßt. Wegen $r = 2$ enthalten $\Delta$ und $\Gamma'$ die Formel $\neg B$ nicht, so daß gilt $\Delta'_{\neg B} = \Delta'$ und $\Gamma_{\neg B} = \Gamma$. Entsprechendes ist in den beiden folgenden Fällen zu beachten.

$A = B \supset C$: Aus

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \Delta, B \Rightarrow C, \Gamma\end{matrix}}{\Delta \Rightarrow B \supset C, \Gamma} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \Delta' \Rightarrow B, \Gamma'\end{matrix} \quad \begin{matrix}\vdots\\ \Delta', C \Rightarrow \Gamma'\end{matrix}}{\Delta', B \supset C \Rightarrow \Gamma'}\,\mathrm{vI}}{\Delta, \Delta' \Rightarrow \Gamma, \Gamma'}\,\mathrm{TR'}$$

erhält man den Beweis

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \Delta' \Rightarrow B, \Gamma'\end{matrix} \quad \begin{matrix}\vdots\\ \Delta, B \Rightarrow C, \Gamma\end{matrix}}{\Delta_B, \Delta' \Rightarrow C, \Gamma, \Gamma'_B}\,\mathrm{TR'}}{\Delta, \Delta' \Rightarrow C, \Gamma, \Gamma'}\,\mathrm{VV, HV,}$$

der sich nach Induktionsvoraussetzung in einen Beweis für $\Delta, \Delta' \Rightarrow C, \Gamma, \Gamma'$ umformen läßt, der keine Anwendungen von TR′ enthält. Damit erhalten wir dann den Beweis

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \Delta, \Delta' \Rightarrow C, \Gamma, \Gamma'\end{matrix} \quad \begin{matrix}\vdots\\ \Delta', C \Rightarrow \Gamma'\end{matrix}}{\Delta, \Delta', \Delta'_C \Rightarrow \Gamma_C, \Gamma'_C, \Gamma'}\,\mathrm{TR'}}{\Delta, \Delta' \Rightarrow \Gamma_C, \Gamma'}\,\mathrm{VK, HK}}{\Delta, \Delta' \Rightarrow \Gamma, \Gamma'}\,\mathrm{HV,}$$

aus dem sich bei nochmaliger Anwendung der Induktionsvoraussetzung ein Beweis für $\Sigma_3$ gewinnen läßt, der keine Anwendungen von TR′ enthält.

$A = \bigwedge x B[x]$: Aus

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \Delta \Rightarrow A[x/y], \Gamma\\ \Delta \Rightarrow \bigwedge x A[x], \Gamma\end{matrix} \quad \begin{matrix}\vdots\\ \Delta', A[x/z] \Rightarrow \Gamma'\\ \Delta', \bigwedge x A[x] \Rightarrow \Gamma'\end{matrix}}{\Delta, \Delta' \Rightarrow \Gamma, \Gamma'}\,\mathrm{TR'}$$

erhalten wir unter Benützung von 2.4.2.2.2 und ggf. 2.4.2.2.1 einen Beweis

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \Delta \Rightarrow A[x/z], \Gamma\end{matrix} \quad \begin{matrix}\vdots\\ \Delta', A[x/z] \Rightarrow \Gamma'\end{matrix}}{\Delta, \Delta'_{A[x/z]} \Rightarrow \Gamma_{A[x/z]}, \Gamma'}\,\mathrm{TR'}}{\Delta, \Delta' \Rightarrow \Gamma, \Gamma'}\,\mathrm{VV, HV,}$$

den wir nach Induktionsvoraussetzung in einen Beweis für $\Sigma_3$ ohne Anwendungen von TR′ umformen können.

2b) Die Behauptung sei für alle $g = n + 1$ und alle $r \leqslant m$ bewiesen. Ist nun $r = m + 1$, so argumentiert man wie unter (1b).

Damit ist die Zulässigkeit der Regel TR′, und also auch die Zulässigkeit der Regel TR bewiesen[1].

Den Satz 2.4.2.2.5 bezeichnet man auch als GENTZEN*schen Hauptsatz* oder als *Eliminationstheorem*. Er wurde zuerst von G. GENTZEN in [25] bewiesen. Dieser Beweis hat die Form, daß man zeigt: die Regel TR kann in einem um diese Regel erweiterten Kalkül $\mathfrak{P}3$ eliminiert werden, ohne daß dadurch die Beweiskraft des Systems eingeschränkt wird. Diese Formulierung des Satzes ist mit unserer Fassung natürlich äquivalent.

Das Eliminationstheorem ist von außerordentlich großem Wert, insbesondere bei beweistheoretischen Untersuchungen. Wir wollen diesen Satz nun verwenden, um die Äquivalenz der Kalküle $\mathfrak{P}1$ und $\mathfrak{P}3$ auf syntaktischem Wege nachzuweisen[2].

Da wir dazu auch Einführungsregeln für die Disjunktion benötigen, geben wir für $\mathfrak{P}3$ auch Regeln für die übrigen logischen Operatoren an, die sich wie im Fall des Kalküls $\mathfrak{P}2^*$ direkt aus den Definitionen D1 bis D4 von 2.3.1 ergeben:

**vD:** $\Delta, A \Rightarrow \Gamma; \Delta, B \Rightarrow \Gamma \vdash \Delta, A \vee B \Rightarrow \Gamma$
**hD:** $\Delta \Rightarrow A, \Gamma \vdash \Delta \Rightarrow A \vee B, \Gamma$
$\Delta \Rightarrow B, \Gamma \vdash \Delta \Rightarrow A \vee B, \Gamma$
**vK:** $\Delta, A \Rightarrow \Gamma \vdash \Delta, A \wedge B \Rightarrow \Gamma$
$\Delta, B \Rightarrow \Gamma \vdash \Delta, A \wedge B \Rightarrow \Gamma$

---

[1] Im Hinblick auf die Zulässigkeit der Regeln VV und HV in $\mathfrak{P}3$, kann man der Schnittregel TR auch die äquivalente Formulierung

**TR⁺:** $\Delta \Rightarrow A, \Gamma; \Delta, A \Rightarrow \Gamma \vdash \Delta \Rightarrow \Gamma$ geben. Denn $TR^+$ ist ein Spezialfall von TR und aus $\Delta \Rightarrow A, \Gamma$ und $\Delta', A \Rightarrow \Gamma'$ erhält man mit VV und HV die SQ $\Delta, \Delta' \Rightarrow A, \Gamma, \Gamma'$ und $\Delta, \Delta', A \Rightarrow \Gamma, \Gamma'$, aus denen sich die SQ $\Delta, \Delta' \Rightarrow \Gamma, \Gamma'$ mit $TR^+$ gewinnen läßt.

[2] Auf semantischem Weg haben wir die Äquivalenz dieser Kalküle schon gewonnen, indem wir die Adäquatheit von $\mathfrak{P}1$ und von $\mathfrak{P}2$, sowie die Äquivalenz von $\mathfrak{P}2$ und $\mathfrak{P}3$ bewiesen haben. Wir geben den folgenden syntaktischen Äquivalenzbeweis an, um die syntaktischen Methoden einzuüben und um zu zeigen, wie sich z. B. der einfache Adäquatheitsbeweis für $\mathfrak{P}2$ zum Beweis der Adäquatheit von $\mathfrak{P}1$ verwenden läßt.

**hK:** $\Delta \Rightarrow A, \Gamma; \Delta \Rightarrow B, \Gamma \vdash \Delta \Rightarrow A \wedge B, \Gamma$
**vQ:** $\Delta \Rightarrow A, \Gamma; \Delta, B \Rightarrow \Gamma \vdash \Delta, A \equiv B \Rightarrow \Gamma$
$\Delta, A \Rightarrow \Gamma; \Delta \Rightarrow B, \Gamma \vdash \Delta, A \equiv B \Rightarrow \Gamma$
**hQ:** $\Delta, A \Rightarrow B, \Gamma; \Delta, B \Rightarrow A, \Gamma \vdash \Delta \Rightarrow A \equiv B, \Gamma$
**vE:** $\Delta, A[x/y] \Rightarrow \Gamma \vdash \Delta, \bigvee x A[x] \Rightarrow \Gamma$
**hE:** $\Delta \Rightarrow A[x/y], \Gamma \vdash \Delta \Rightarrow \bigvee x A[x/y], \Gamma$

Dabei ist y im Fall der Regel hE eine beliebige GV, im Fall der Regel vE eine GV, die in den Formeln der Konklusion nicht frei vorkommt. Die Regeln vK und hD könnte man auch durch die Regeln

**vK':** $\Delta, A, B \Rightarrow \Gamma \vdash \Delta, A \wedge B \Rightarrow \Gamma$ und **hD':** $\Delta \Rightarrow A, B, \Gamma \vdash \Delta \Rightarrow A \vee B, \Gamma$ ersetzen. Denn es gilt:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\Delta, A, B \Rightarrow \Gamma$ | | und $\Delta, A \Rightarrow \Gamma$ | | und $\Delta, B \Rightarrow \Gamma$ | |
| $\Delta, A \wedge B, B \Rightarrow \Gamma$ | vK | $\Delta, A, B \Rightarrow \Gamma$ | VV | $\Delta, A, B \Rightarrow \Gamma$ | VV |
| $\Delta, A \wedge B, A \wedge B \Rightarrow \Gamma$ | vK | $\Delta, A \wedge B \Rightarrow \Gamma$ | vK' | $\Delta, A \wedge B \Rightarrow \Gamma$ | vK' |
| $\Delta, A \wedge B \Rightarrow \Gamma$ | VR | | | | |

Ebenso zeigt man, daß sich die Regeln hD und hD' durch einander ersetzen lassen.

Ist $\Gamma$ die Formelreihe $A_1, \ldots, A_m$, so setzen wir $\overline{\Gamma}$ für die Formel $A_1 \vee \ldots \vee A_m$. Ist $\vdash$ die Ableitungsbeziehung für $\mathfrak{P}1$, so verstehen wir die Aussage $\Delta \vdash$ im Sinne von $\Delta \vdash A \wedge \neg A$, wo man für A eine feste, z. B. atomare Formel wählen kann. Es gilt dann der Satz:

**2.4.2.2.6** Eine SQ $\Delta \Rightarrow \Gamma$ ist in $\mathfrak{P}3$ genau dann beweisbar, wenn die Ableitungsbeziehung $\Delta \vdash_0 \overline{\Gamma}$ in $\mathfrak{P}1$ besteht.

Beweis: 1. Ist $\Delta \Rightarrow \Gamma$ in $\mathfrak{P}3$ beweisbar, so gilt $\Delta \vdash_0 \overline{\Gamma}$ in $\mathfrak{P}1$.

1a) Wir bemerken zunächst, daß nach der allgemeinen Definition der Ableitungsbeziehung **1.3.3.4** für beliebige Kalküle $\mathfrak{K}$ folgende drei Prinzipien gelten: I) $A \vdash A$, II) Aus $\Delta \vdash A$ folgt $\Delta, B \vdash A$, III) Aus $\Delta \vdash A$ und $\Delta, A \vdash B$ folgt $\Delta \vdash B$. Nach **1.3.3.4** erhält man eine Ableitung von A aus A, wenn man nur die Formel A anschreibt. Liegt eine Ableitung von A aus den AF aus $\Delta$ vor, so erhält man daraus eine Ableitung aus $\Delta$, B, wenn man die AF B an irgendeiner Stelle vor A einschiebt. Hat man endlich eine Ableitung von B aus AF $\Delta$, A und eine Ableitung von A aus den AF $\Delta$, so erhält man aus der ersten Ableitung eine Ableitung von B aus $\Delta$, wenn man die Zeile, welche die AF A enthält durch die Ableitung von A aus $\Delta$ ersetzt[1].

1b) Ist $\Delta \Rightarrow \Gamma$ ein Axiom von $\mathfrak{P}3$, so hat diese SQ die Gestalt $\Delta', A \Rightarrow A, \Gamma'$. In $\mathfrak{P}1$ gilt nach (1a) $\Delta', A \vdash A$ (vgl. (I) und (II)) und daraus erhält man mit T13 $\Delta, A \vdash A \vee \overline{\Gamma}'$.

1c) Wir zeigen nun: Geht aus $\Delta \Rightarrow \Gamma$ (und $\Delta' \Rightarrow \Gamma'$) die SQ $\Delta'' \Rightarrow \Gamma''$ durch einmalige Anwendung einer der Deduktionsregeln von $\mathfrak{P}3$ hervor, so folgt aus der Gültigkeit von $\Delta \vdash_0 \overline{\Gamma}$ (und $\Delta' \vdash_0 \overline{\Gamma}'$) die Gültigkeit von $\Delta'' \vdash_0 \overline{\Gamma}''$. Für VR und VT ist das trivial, da für die Gültigkeit der Beziehung $\Delta \vdash A$ $\Delta$ als Formelmenge, nicht als Ausdruck betrachtet wird.

HT: Aus $\Delta \vdash_0 \overline{\Gamma} \vee A \vee B \vee \overline{\Gamma}'$ folgt $\Delta \vdash_0 \overline{\Gamma} \vee B \vee A \vee \overline{\Gamma}'$ nach T15 und MT5.

HR: Aus $\Delta \vdash_0 A \vee A \vee \overline{\Gamma}$ folgt $\Delta \vdash_0 A \vee \overline{\Gamma}$ nach T12, T13 und MT5.

vN: Aus $\Delta \vdash_0 B \vee \overline{\Gamma}$ folgt mit D1 $\Delta \vdash_0 \neg B \supset \overline{\Gamma}$ und mit R1 $\Delta, \neg B \vdash_0 \overline{\Gamma}$.

hN: Aus $\Delta, B \vdash_0 \overline{\Gamma}$ folgt mit MT4 $\Delta \vdash_0 B \supset \overline{\Gamma}$ also mit D1 $\Delta \vdash_0 \neg B \vee \overline{\Gamma}$.

vI: Aus $\Delta \vdash_0 A \vee \overline{\Gamma}$ folgt mit T15, D1 und R1 $\Delta, \neg\overline{\Gamma} \vdash_0 A$, mit R1 also $\Delta, \neg\overline{\Gamma}, A \supset B \vdash_0 B$, mit $\Delta, B \vdash_0 \overline{\Gamma}$ also $\Delta, \neg\overline{\Gamma}, A \supset B \vdash_0 \overline{\Gamma}$, mit Mt4 $\Delta, A \supset B \vdash_0 \neg\overline{\Gamma} \supset \overline{\Gamma}$, mit T11 also $\Delta, A \supset B \vdash_0 \overline{\Gamma}$.

---

[1] Umgekehrt hätten wir auch die Ableitungsbeziehung nach 1.3.3.4 induktiv durch die Prinzipien (I) bis (III) definieren können mit den Zusätzen IV) Ist A ein Axiom von $\mathfrak{K}$, so gilt $\vdash A$, V) Läßt sich A durch einmalige Anwendung einer der Deduktionsregeln von $\mathfrak{K}$ auf die Formeln aus $\Delta$ gewinnen, so gilt $\Delta \vdash A$. Denn gilt $\Delta \vdash A$ nach 1.3.3.4, so gilt $\Delta \vdash A$ auch nach dieser induktiven Definition: Es liege eine Ableitung $\mathfrak{H}$ von A aus $\Delta$ nach 1.3.3.4 vor. Wir nehmen eine Induktion nach der Anzahl $n$ der Anwendungen von Deduktionsregeln bei der Konstruktion von $\mathfrak{H}$ vor. Ist $n = 0$, so ist A Axiom, dann gilt $\Delta \vdash A$ nach (IV) und (II), oder A ist eine der AF aus $\Delta$, dann gilt $\Delta \vdash A$ nach (I) und (II). Sei die Behauptung bewiesen für alle $n \leqslant m$ und sei nun $n = m+1$. Ist A AF oder Axiom, so argumentiert man wie oben. Ist A durch Anwendung einer Deduktionsregel auf die Formeln $B_1, \ldots, B_s$ gewonnen worden, so sind die Formeln $B_i$ ($i = 1, \ldots, s$) durch eine Zahl von Anwendungen von Deduktionsregeln gewonnen, die $\leqslant m$ ist, so daß nach Induktionsvoraussetzung gilt $\Delta \vdash B_i$. Ferner gilt nach (V) $B_1, \ldots, B_s \vdash A$, also nach (II) $\Delta, B_1, \ldots, B_s \vdash A$. Aus $\Delta \vdash B_1$ erhalten wir mit (II) $\Delta, B_2, \ldots, B_s \vdash B_1$, also mit (III) $\Delta, B_2, \ldots, B_s \vdash A$. Aus $\Delta \vdash B_2$ erhalten wir mit (II) $\Delta, B_3, \ldots, B_s \vdash B_2$, also mit (III) $\Delta, B_3, \ldots, B_s \vdash A$. In dieser Weise erhalten wir endlich auch $\Delta \vdash A$.

hI: Aus $\Delta, A \vdash_0 B \vee \overline{\Gamma}$ erhalten wir wieder $\Delta, \neg\overline{\Gamma}, A \vdash_0 B$, mit MT4 also $\Delta, \neg\overline{\Gamma} \vdash_0 A \supset B$ und mit MT4, D1 und T15 endlich $\Delta \vdash_0 (A \supset B) \vee \overline{\Gamma}$.

vA: Wegen T42 folgt aus $\Delta, A[x/y] \vdash_0 \overline{\Gamma}$ auch $\Delta, \wedge x A[x] \vdash_0 \overline{\Gamma}$.

hA: Aus $\Delta \vdash_0 A[x/y] \vee \overline{\Gamma}$ folgt mit D1 und T6 $\Delta \vdash_0 \neg\overline{\Gamma} \supset A[x/y]$. Wenn die GV y nicht frei in den Formeln aus $\Delta$, $\Gamma$, $\wedge x A[x]$ vorkommt, so erhalten wir daraus mit R2 $\Delta \vdash_0 \neg\overline{\Gamma} \supset \wedge y A[x/y]$ und also mit T41 und MT5 $\Delta \vdash_0 \neg\overline{\Gamma} \supset \wedge x A[x]$. Mit T6 und D1 erhalten wir endlich $\Delta \vdash_0 \wedge x A[x] \vee \overline{\Gamma}$.

Mit (1b) und (1c) ist nun gezeigt, daß alle SQ eines Beweises in $\mathfrak{P}3$, insbesondere also die End-SQ in $\mathfrak{P}1$, beweisbar sind.

2. Gilt $\Delta \vdash_0 A$, so ist die SQ $\Delta \Rightarrow A$ in $\mathfrak{P}3$ beweisbar. Daraus folgt dann: Wenn in $\mathfrak{P}1$ gilt $\Delta \vdash \overline{\Gamma}$, so ist $\Delta \Rightarrow \Gamma$ in $\mathfrak{P}3$ beweisbar. Denn sei $\Gamma$ die Formelreihe $A_1, \ldots, A_m$, so finden wir

$$\cfrac{\cfrac{A_1 \Rightarrow A_1, \ldots, A_m \quad \ldots \quad A_m \Rightarrow A_1, \ldots, A_m}{A_1 \vee \ldots \vee A_m \Rightarrow A_1, \ldots, A_m}\,\text{vD} \qquad \Delta \Rightarrow A_1 \vee \ldots \vee A_m}{\Delta \Rightarrow A_1, \ldots, A_m}\,\text{TR}$$

Es gilt also in $\mathfrak{P}3$ $\Delta \rightarrow A_1 \vee \ldots \vee A_m \vdash \Delta \rightarrow A_1, \ldots, A_m$.

2a) Ist A eine der Formeln aus $\Delta$, so ist $\Delta \Rightarrow A$ ein Axiom von $\mathfrak{P}3$.

2b) Ist A ein Axiom von $\mathfrak{P}1$, so finden wir:

A ist Axiom nach A1:

$$\begin{array}{rll} A, B & \Rightarrow A & \\ A & \Rightarrow B \supset A & \text{hI} \\ & \Rightarrow A \supset (B \supset A) & \text{hI} \\ \Delta & \Rightarrow A \supset (B \supset A) & \text{VV} \end{array}$$

A ist Axiom nach A2:

$$\cfrac{\cfrac{A, B \Rightarrow A, C \qquad \cfrac{A, B \Rightarrow B, C \qquad A, B, C \Rightarrow C}{A, B \supset C, B \Rightarrow C}\,\text{vI}}{A \supset (B \supset C), A, B \Rightarrow C}\,\text{vI} \qquad A \supset (B \supset C), A \Rightarrow A, C}{A \supset (B \supset C), A \supset B, A \Rightarrow C}\,\text{vI}$$

$$\begin{array}{ll} A \supset (B \supset C), A \supset B \Rightarrow A \supset C & \text{hI} \\ A \supset (B \supset C) \Rightarrow (A \supset B) \supset (A \supset C) & \text{hI} \\ \Rightarrow (A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C)) & \text{hI} \\ \Delta \Rightarrow (A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C)) & \text{VV} \end{array}$$

A ist Axiom nach A3:

$$
\begin{array}{lll}
 & \begin{array}{cc} B, A \Rightarrow A & B \Rightarrow B, A \\ \text{hN} \quad B \Rightarrow \neg A, A & B, \neg B \Rightarrow A \quad \text{vN} \end{array} & \\
\hline
 & \neg A \supset \neg B, B \Rightarrow A & \text{vI} \\
 & \neg A \supset \neg B \Rightarrow B \supset A & \text{hI} \\
 & \Rightarrow (\neg A \supset \neg B) \supset (B \supset A) & \text{hI} \\
 & \Delta \Rightarrow (\neg A \supset \neg B) \supset (B \supset A) & \text{VV}
\end{array}
$$

A ist Axiom nach A4:

$$
\begin{array}{rll}
A[x/y] \Rightarrow & A[x/y] & \\
\Lambda x A[x] \Rightarrow & A[x/y] & \text{vA} \\
\Rightarrow & \Lambda x A[x] \supset A[x/y] & \text{hI} \\
\Delta \Rightarrow & \Lambda x A[x] \supset A[x/y] & \text{VV}
\end{array}
$$

2c) Wir nehmen nun an, die Behauptung (2) sei bereits für alle Ableitungen $\mathfrak{H}$ von A aus Δ bewiesen, die nur $n \leqslant m$ Anwendungen der Deduktionsregeln R1 und R2 von $\mathfrak{P}1$ enthalten — die Induktionsbasis $n = 0$ ist bereits durch (2a) und (2b) erledigt — und es enthalte $\mathfrak{H}$ nun $m + 1$ Regelanwendungen.

R1: Geht A aus den Formeln B und B ⊃ A mit R1 hervor, so sind nach Induktionsvoraussetzung die SQ $\Delta \Rightarrow B$ und $\Delta \Rightarrow B \supset A$ in $\mathfrak{P}3$ beweisbar und wir erhalten:

$$
\dfrac{\Delta \Rightarrow B \qquad \dfrac{\Delta \Rightarrow B \supset A \qquad \dfrac{B \Rightarrow B, A \qquad B, A \Rightarrow A}{B, B \supset A \Rightarrow A}\,\text{vI}}{\Delta, B \Rightarrow A}\,\text{TR}}{\Delta \Rightarrow A}\,\text{TR}
$$

R2: Geht A aus der Formel B ⊃ C[x] mit R2 hervor, wo die GV x nicht frei in den Formeln aus Δ, B vorkommt, so ist nach Induktionsvoraussetzung die SQ $\Delta \Rightarrow B \supset C[x]$ in $\mathfrak{P}3$ beweisbar und wir finden:

$$
\begin{array}{ll}
\dfrac{\Delta \Rightarrow B \supset C[x] \qquad \dfrac{B \Rightarrow B, C[x] \qquad B, C[x] \Rightarrow C[x]}{B, B \supset C[x] \Rightarrow C[x]}\,\text{vI}}{\Delta, B \Rightarrow C[x]} & \text{TR} \\
\Delta, B \Rightarrow \Lambda x C[x] & \text{hA} \\
\Delta \Rightarrow B \supset \Lambda x C[x] & \text{hI}
\end{array}
$$

Damit ist auch die Behauptung (2) bewiesen.

In den Kalkülen $\mathfrak{P}1$, $\mathfrak{P}2$ und $\mathfrak{P}3$ haben wir also drei untereinander äquivalente und adäquate Formalisierungen der P.L. vor uns.

Aus dem Beweis des Satzes 2.4.2.2.6 geht auch hervor, daß man die p.l. Regeln vA und hA durch die Forderung einschränken kann, daß x in A[x] frei sein soll für y, wenn man TR als Grundregel von 𝔓3 auffaßt. Denn das Axiom A4 und die Regel R2 von 𝔓1 erhält man auch mit den so beschränkten p.l. Regeln. Erklärt man auch die Regeln VV und HV zu Grundregeln von 𝔓3, so kann man, wie oben erwähnt, das Axiomenschema $\Delta, A \Rightarrow A, \Gamma$ durch das Schema $A \Rightarrow A$ ersetzen und erhält so aus 𝔓3 einen Kalkül, der dem GENTZENschen SQ-Kalkül LK in der Formulierung G1 von KLEENE entspricht[1]. In diesem Kalkül ist dann jedoch die Regel TR nur eliminierbar in Beweisen für solche SQ, in deren Formeln keine GV zugleich frei und gebunden vorkommt[2].

**2.4.2.3** 𝔓3 *als Kalkül des natürlichen Schließens.* Es soll nun eine Deutung des Beweisbegriffes von 𝔓3 angegeben werden, nach der sich auch dieser Kalkül als eine Formalisierung des natürlichen Schließens ansprechen läßt.

Der entscheidende Begriff, über den die Theoremmenge der P.L. semantisch abgegrenzt wird, ist der des p.l. gültigen Schlusses. Diesen Begriff hatten wir in 2.2.2.7 definiert unter Bezugnahme auf den Interpretationsbegriff. Man kann aber auch einen Aufbau der Semantik angeben, in dem der Begriff des Schlusses als Grundbegriff fungiert.

In der Interpretationssemantik nach 2.2.2 wurden primär die GV (im Sinne von Eigennamen) und die PV (im Sinne von Prädikaten) gedeutet. Die Deutung der Formeln (im Sinne von Sätzen) ergab sich daraus. In der Bewertungssemantik hingegen wurden nur Formeln gedeutet, eine Deutung der einzelnen GV und PV wurde nicht vorgenommen, sie erhielten eine Bedeutung nur mehr im Kontext von Formeln. Wir treiben den Abstraktionsgrad der semantischen Deutung nun noch einen Schritt weiter, wenn wir nicht mehr die einzelnen Formeln für sich deuten, sondern nur Schlüsse als gültig oder ungültig auszeichnen, so daß die Sätze nur im Kontext von Schlüssen Bedeutung haben. Dieser semantische Ansatz liegt nahe, wenn man sich auf die Betrachtung von Theorien beschränkt, in denen ja ebenfalls nicht primär die Wahrheit und Falschheit eines Satzes von Interesse ist, sondern seine Beweisbarkeit oder Widerlegbarkeit sowie das Bestehen oder Nichtbestehen deduktiver Zusammenhänge zwischen den Sätzen der Theorie[3].

---

[1] Vgl. [42], S. 442.

[2] Vgl. [42], S. 450.

[3] Vgl. für das folgende auch [10] und [45].

Einen Schluß können wir charakterisieren als ein geordnetes Paar von Formelmengen $\langle \Delta, \Gamma \rangle$. Ist $S$ eine Menge von Schlüssen, so definiert $S$ eine Beziehung zwischen Formelmengen $\Delta$ und $\Gamma$, die wir ausdrücken durch $\Delta \underset{S}{\rightarrow} \Gamma$. Wo Unklarheiten nicht entstehen können, lassen wir den Index „$S$", der auf das Bezugssystem hinweist, auch fort. Eine Menge $S$ definiert nun eine *Folgebeziehung* im üblichen Sinn, wenn die Schlüsse aus $S$ alle genau eine HF enthalten und wenn gilt:

**rf:** A $\rightarrow$ A für alle Formeln A

**vv:** Aus $\Delta \rightarrow$ A folgt $\Delta$, B $\rightarrow$ A

**tr:** Aus $\Delta \rightarrow$ A und $\Delta'$, A $\rightarrow$ B folgt $\Delta, \Delta' \rightarrow$ B.

Diese drei Prinzipien bezeichnen wir wieder als Reflexivität, vordere Verdünnung und Transitivität. Statt „Folgebeziehung" werden wir auch oft *Schluß-System* sagen.

Die Bedingungen (rf) bis (tr) drückt man auch oft so aus, daß man sagt:

rf) Die Sätze einer Menge $M$ gehören zur Konsequenzmenge von $M$, d. h. zur Menge der Sätze, die aus den Sätzen von $M$ folgen.

vv) Ist $M_1$ in $M_2$ enthalten, so ist die Konsequenzmenge von $M_1$ in der Konsequenzmenge von $M_2$ enthalten.

tr) Die Konsequenzmenge der Konsequenzmenge von $M$ ist in der Konsequenzmenge von $M$ enthalten.

Diesen Bedingungen genügt z. B. die Ableitungsbeziehung formaler Kalküle[1] ebenso wie die p.l. Folgebeziehung nach 2.2.2.7, wenn man sich dort auf Schlüsse mit genau einer Konklusion beschränkt.

Wir haben in der P.L. auch Folgebeziehungen betrachtet, die Schlüsse ohne Konklusion enthalten. Solche Folgebeziehungen lassen sich dadurch einführen, daß man eine Formel F postuliert, für die gilt F $\rightarrow$ A für alle Formeln A. Aus F sollen also beliebige Sätze folgen, F repräsentiert daher das Falsche. Dann kann man für $\Delta \rightarrow$ F auch schreiben $\Delta \rightarrow$ und im Hinblick auf (tr) das Prinzip F $\rightarrow$ A ersetzen durch das Prinzip der hinteren Verdünnung:

**hv:** Aus $\Delta \rightarrow$ folgt $\Delta \rightarrow$ A.

---

[1] Vgl. die Anmerkung zu S. 206.

Geht man in einem zweiten Schritt von Schlüssen mit höchstens einer HF zu Schlüssen mit mehreren HF über, indem man festlegt, daß $\Delta \rightarrow A_1, \ldots, A_m$ gelten soll genau dann wenn gilt $\Delta \rightarrow A_1$ oder ... oder $\Delta \rightarrow A_m$, dann kann man dem Prinzip (hv) auch die allgemeine Form geben

**hv:** Aus $\Delta \rightarrow \Gamma$ folgt $\Delta \rightarrow A, \Gamma$.

Die Prinzipien (vv) und (tr) lassen sich dann in der allgemeinen Form gewinnen:

**vv:** Aus $\Delta \rightarrow \Gamma$ folgt $\Delta, A \rightarrow \Gamma$
**tr:** Aus $\Delta \rightarrow A, \Gamma$ und $\Delta', A \rightarrow \Gamma'$ folgt $\Delta, \Delta' \rightarrow \Gamma, \Gamma'$.

Wir nennen ein Schluß-System $S$ *vollständig*, wenn gilt $\rightarrow A$ oder $A \rightarrow$ für alle Formeln A. Wir nennen $S$ *widerspruchsfrei*, wenn es keine Formel A gibt, für die gilt $\rightarrow A$ und $A \rightarrow$.

Nennt man ein Schluß-System *atomar*, wenn die Schlüsse aus $S$ als VF und als HF nur Atomformeln enthalten, so besteht der Grundgedanke zum Aufbau der Schlußsemantik darin, daß man zu jedem Atom-System $S$ eine Erweiterung definiert durch Gültigkeitsbedingungen für Schlüsse, die komplexe Formeln enthalten. Die Gültigkeit eines Schlusses, der eine komplexe Formel A enthält, soll danach abhängen von der Gültigkeit von Schlüssen, die Teilformeln von A enthalten. Dies Vorgehen entspricht dem Verfahren in der Bewertungssemantik, in der wir von der Definition einer Funktion $\mathfrak{W}$ für Atomformeln ausgehend die Funktionswerte für komplexe Formeln in Abhängigkeit von denen für ihre Teilformeln festgelegt haben.

**2.4.2.3.1** Ist $S$ ein atomares Schluß-System, so sei die semantische Erweiterung $S^+$ von $S$ durch folgende Bedingungen definiert:

**vn:** Aus $\Delta \rightarrow A, \Gamma$ folgt $\Delta, \neg A \rightarrow \Gamma$.
**hn:** Aus $\Delta, A \rightarrow \Gamma$ folgt $\Delta \rightarrow \neg A, \Gamma$.
**vi:** Aus $\Delta \rightarrow A, \Gamma$ und $\Delta, B \rightarrow \Gamma$ folgt $\Delta, A \supset B \rightarrow \Gamma$.
**hi:** Aus $\Delta, A \rightarrow B, \Gamma$ folgt $\Delta \rightarrow A \supset B, \Gamma$.
**va:** Aus $\Delta, A[x/y] \rightarrow \Gamma$ folgt $\Delta, \Lambda x A[x] \rightarrow \Gamma$ für beliebige GV y.
**ha:** Gilt $\Delta \rightarrow A[x/y], \Gamma$ für alle GV y, so gilt auch $\Delta \rightarrow \Lambda x A[x], \Gamma$.

Die intuitive Rechtfertigung dieser Bedingungen ergibt sich aus folgenden Überlegungen:

hn) $A \rightarrow$ besagt, daß aus A beliebige Sätze folgen. Man kann die Negation über das Prinzip *ex falso quodlibet* definieren, und erhält damit: aus $A \rightarrow$ folgt $\rightarrow \neg A$. Die Bedingung aus $\Delta, A \rightarrow$ folgt $\Delta \rightarrow \neg A$ stellt sich dann dar als eine naheliegende Verallgemeinerung dieses Prinzips, die besagt: wenn A mit den Formeln aus $\Delta$ unverträglich ist, so folgt $\neg A$ aus $\Delta$.

Ist der Schluß $\Delta, A \rightarrow \Gamma$ gültig, so gilt nach unserer Festsetzung über Schlüsse mit mehreren HF $\Delta, A \rightarrow C$, wo C eine Formel aus $\Gamma$ ist. Ist das System $S^+$ nun vollständig, so gilt entweder $A \rightarrow$ — dann erhalten wir also $\rightarrow \neg A$, mit (vv) und (hv) also $\Delta \rightarrow \neg A, \Gamma$ — oder es gilt $\rightarrow A$, dann erhalten wir aus $\Delta, A \rightarrow C$ mit (tr) $\Delta \rightarrow C$, also mit (hv) $\Delta \rightarrow \neg A, \Gamma$.

vn) Während (hn) eine Bedingung angibt, die besagt, unter welchen Voraussetzungen eine Formel $\neg A$ erschlossen werden kann, formuliert (vn) eine Bedingung, unter der man aus einer Formel $\neg A$ auf andere Formeln schließen kann. Es hätte vielleicht näher gelegen, anstelle von (vn) die Umkehrung ($\overline{\text{hn}}$) der Bedingung (hn) anzugeben: aus $\Delta \rightarrow \neg A, \Gamma$ folgt $\Delta, A \rightarrow \Gamma$. Aber eine solche Bedingung fügt sich nicht so gut in den Gedanken einer induktiven Definition der Erweiterung $S^+$ ein. Daher haben wir die Formulierung (vn) gewählt, die sich als äquivalent mit ($\overline{\text{hn}}$) erweist: Denn aus ($\overline{\text{hn}}$) erhalten wir mit $\neg A \rightarrow \neg A$ (rf) $\neg A, A \rightarrow$, mit $\Delta \rightarrow A, \Gamma$ und (tr) also $\Delta, \neg A \rightarrow \Gamma$. Und aus (vn) erhalten wir mit $A \rightarrow A$ (rf) $\neg A, A \rightarrow$, also mit $\Delta \rightarrow \neg A, \Gamma$ und (tr) $\Delta, A \rightarrow \Gamma$.

hi) Eine Implikation $A \supset B$ soll gelten, wenn B aus A folgt: aus $A \rightarrow B$ erhält man $\rightarrow A \supset B$ — allgemein: aus $\Delta, A \rightarrow B$ erhält man $\Delta \rightarrow A \supset B$. Gilt nun $\Delta, A \rightarrow B, \Gamma$, so gilt entweder $\Delta, A \rightarrow B$ — dann erhält man also $\Delta \rightarrow A \supset B$ und mit (hv) $\Delta \rightarrow A \supset B, \Gamma$ — oder es gilt $\Delta, A \rightarrow C$, wo C eine Formel aus $\Gamma$ ist. Dann kann man im Fall vollständiger Systeme $S^+$ benützen, daß entweder $\rightarrow A$ gilt, also mit (tr) $\Delta \rightarrow C$, also mit (hv) $\Delta \rightarrow A \supset B, \Gamma$ — oder $A \rightarrow$, also mit (hv) $A \rightarrow B$, also $\rightarrow A \supset B$, also mit (vv) und (hv) $\Delta \rightarrow A \supset B, \Gamma$.

vi) Diese Regel ist wieder mit der Umkehrung ($\overline{\text{hi}}$) von (hi) äquivalent. Denn aus (vi) und aus ($\overline{\text{hi}}$) erhält man jeweils $A \supset B, A \rightarrow B$. Mit $\Delta \rightarrow A \supset B, \Gamma$ und (tr) gewinnt man daraus $\Delta, A \rightarrow B, \Gamma$ und mit $\Delta \rightarrow A, \Gamma$ erhält man $\Delta, A \supset B \rightarrow B, \Gamma$, mit $\Delta, B \rightarrow \Gamma$ und (tr) also $\Delta, A \supset B \rightarrow \Gamma$.

ha) Die Bedingung besagt, daß eine Formel $\wedge x A[x]$ aus Formeln $\Delta$ folgt, wenn alle Instanzen $A[x/y]$ aus $\Delta$ folgen. Gilt $\Delta \rightarrow A[x/y], \Gamma$ für alle GV y und gilt für eine GV z nicht $\Delta \rightarrow A[x/z]$, so gilt $\Delta \rightarrow C$ für eine Formel C aus $\Gamma$ und wir erhalten mit (hv) wiederum $\Delta \rightarrow \wedge x A[x], \Gamma$.

va) Man erhält diese Bedingung wieder als Umkehrung von (ha). Danach folgt aus $\Delta \rightarrow \wedge x A[x], \Gamma$ die Gültigkeit von $\Delta \rightarrow A[x/y], \Gamma$ für alle GV y. Daraus und aus (va) erhält man jeweils $\wedge x A[x] \rightarrow A[x/y]$ für beliebige GV y. Mit (tr) und $\Delta, A[x/y] \rightarrow \Gamma$ erhält man also $\Delta, \wedge x A[x] \rightarrow \Gamma$. Aus $\Delta \rightarrow \wedge x A[x], \Gamma$ erhält man umgekehrt mit (va) und (tr) auch $\Delta \rightarrow A[x/y], \Gamma$ für alle GV y.

Bei der Rechtfertigung der semantischen Bedingungen **2.4.2.3.1** haben wir nun vorausgesetzt, daß die Systeme $S^+$ vollständig sind. Es genügt auch vorauszusetzen, daß die atomaren Systeme $S$, deren Erweiterungen wir betrachten, vollständig sind. Denn wenn $S^+$ vollständig ist bzgl. aller Formeln vom Grad $\leqslant n$ $(n \geqslant 0)$, so ist $S^+$ auch vollständig bzgl. aller Formeln vom Grad $n+1$: Gilt $\rightarrow A$ oder $A \rightarrow$, so gilt nach (vn) und (hn) auch $\neg A \rightarrow$ oder $\rightarrow \neg A$. Gilt $\rightarrow B$ oder $A \rightarrow$, so gilt auch $A \rightarrow B$ (vv, hv), also $\rightarrow A \supset B$. Gilt aber $\rightarrow A$ und $B \rightarrow$, so gilt nach (vi) auch $A \supset B \rightarrow$. Gilt für eine GV y $A[x/y] \rightarrow$, so gilt nach (va) $\wedge x A[x] \rightarrow$, gilt für alle GV y $\rightarrow A[x/y]$, so gilt nach (ha) auch $\rightarrow \wedge x A[x]$.

Im Fall unvollständiger Atomsysteme $S$ haben wir keinen unmittelbaren intuitiven Zugang zu den semantischen Bedingungen **2.4.2.3.1**, insbesondere erweist sich dann auch diese Semantik als unverträglich mit dem Gedanken, Schlüsse $\Delta \rightarrow A_1, \ldots, A_m$ mit mehreren HF so zu deuten, daß aus ihrer Gültigkeit die Gültigkeit eines Schlusses $\Delta \rightarrow A_i$ $(i = 1, \ldots, m)$ folgt. Denn aus (rf) erhalten wir für beliebige Formeln $A \rightarrow A$, also mit (hn) $\rightarrow \neg A, A$, obwohl für unvollständige Systeme eben nicht für alle A gilt $\rightarrow A$ oder $\rightarrow \neg A$ bzw. $A \rightarrow$.

Die einzelnen vollständigen Systeme $S^+$ entsprechen nun den einzelnen Interpretationen. Wie wir die logisch wahren Sätze in 2.2.2 unter Bezugnahme auf alle Interpretationen definiert haben, so definieren wir nun den p.l. gültigen Schluß als Schluß, der in allen Erweiterungen $S^+$ vollständiger Atom-Systeme $S$ gültig ist. Es erweist sich nun, daß ein Schluß p.l. gültig ist in diesem Sinn genau dann, wenn er allgemeingültig ist, d. h. gültig in den Erweiterungen aller Atomsysteme $S$, nicht nur der vollständigen Atomsysteme. Daraus ergibt sich zunächst die intuitive Berechtigung dafür, daß wir auch unvollständige Atomsysteme in unsere Betrachtung einbeziehen.

Es sei $M$ das minimale Atomsystem, dessen Schlüsse sämtlich die Gestalt $\Delta, \mathrm{A} \rightarrow \mathrm{A}, \Gamma$ haben. Dies System ist minimal, da jedes System nach den Prinzipien (rf) bis (hv) diese Schlüsse enthalten muß. $M$ ist ferner ein System, da sich aus Schlüssen der Form (rf) mit den Bedingungen (vv), (hv) und (tr) immer nur Schlüsse dieser Gestalt gewinnen lassen. Ist nun ein Schluß allgemeingültig, so ist er trivialerweise auch gültig in der Erweiterung $M^+$ von $M$. Ist ein Schluß umgekehrt $M^+$-gültig, so ist er auch allgemeingültig, da $M^+$ Teilsystem aller Erweiterungen $S^+$ ist. Aus der $M^+$-Gültigkeit eines Schlusses $\Sigma$ folgt also insbesondere auch, daß $\Sigma$ gültig ist in den Erweiterungen aller vollständigen Atomsysteme $S$. $M^+$ enthält also nur p.l. gültige Schlüsse. Ist $\Sigma$ umgekehrt p.l. gültig, so ist $\Sigma$ auch $M^+$-gültig, so daß $M^+$ auch alle p.l. gültigen Schlüsse enthält. Denn wenn der Schluß $\Delta \rightarrow \Gamma$ gültig ist in allen vollständigen Erweiterungen, so kann die Gültigkeit dieses Schlusses nicht abhängen von speziellen Annahmen $\rightarrow \mathrm{A}$ oder $\mathrm{A} \rightarrow$ über eine Atomformel A, d. h. $\Delta \rightarrow \Gamma$ muß mit den Mitteln von $M^+$ beweisbar sein.

In $M^+$ läßt sich nun die Bedingung (ha) durch die Bedingung ersetzen

**ha⁺:** Aus $\Delta \rightarrow \mathrm{A}[\mathrm{x}/\mathrm{y}], \Gamma$ folgt $\Delta \rightarrow \Lambda \mathrm{x}\mathrm{A}[\mathrm{x}], \Gamma$, wenn y eine GV ist, die in den Formeln $\Delta, \Lambda \mathrm{x}\mathrm{A}[\mathrm{x}], \Gamma$ nicht frei vorkommt.

Denn da in $M^+$ keine GV ausgezeichnet sind, folgt aus der Gültigkeit eines Schlusses $\Sigma$ die Gültigkeit jedes Schlusses, der aus $\Sigma$ durch freie Einsetzung von GV in die Formeln von $\Sigma$ hervorgeht. Ist so die Prämisse von (ha$^+$) gültig, so sind auch die Schlüsse $\Delta \rightarrow \mathrm{A}[\mathrm{x}/\mathrm{z}], \Gamma$ für alle GV z gültig. Die Umkehrung, in der man (ha) aus (ha$^+$) gewinnt, ist aber trivial.

Wenn wir nun die P.L. in ihrer Abgrenzung durch die hier zugrunde gelegte Schluß-Semantik formalisieren wollen, so müssen wir das System aller p.l. gültigen Schlüsse, d. h. das System $M^+$ formalisieren. Dazu ist nur nötig, daß wir die Schlüsse durch SQ repräsentieren und somit die Strukturregeln benützen, daß wir ferner die Schlüsse von $M$ als Axiome verwenden und die Bedingungen (vv) bis (tr) und (vn) bis (ha$^+$) in Deduktionsregeln eines SQ-Kalküls übersetzen. Damit erhalten wir aber den Kalkül $\mathfrak{P}3$, wobei zunächst die Regeln VV, HV und TR als Grundregeln auftreten, die sich aber nach den Sätzen 2.4.2.2.3 und 2.4.2.2.5 eliminieren lassen.

𝔓3 stellt sich also als eine direkte Formalisierung der Schlußsemantik dar und in diesem Sinn als ein Kalkül des natürlichen Schließens.

Da in 𝔓3 genau die bzgl. der Schlußsemantik allgemeingültigen Schlüsse beweisbar sind und ferner, wie wir im Satz 2.4.2.1.2 sahen, auch genau die p.l. Schlüsse im Sinne von 2.2.2.7, so ergibt sich die Äquivalenz von Schluß- und Interpretationssemantik. Diese Äquivalenz erhält man auch direkt, indem man zeigt:

**2.4.2.3.2** Ein Schluß ist p.l. gültig im Sinne von 2.2.2.7 genau dann, wenn er allgemeingültig ist im Sinne der Schlußsemantik.

Beweis: 1) Jeder allgemeingültige Schluß, d. h. jeder $M^+$-gültige Schluß ist p.l. gültig. Denn die Schlüsse A $\Rightarrow$ A nach (rf) sind p.l. gültig und sind die Prämissen der Bedingungen (vv) bis (hv) und (vn) bis (ha$^+$) p.l. gültig, so auch ihre Konklusionen, wie man leicht einsieht. — 2) Jeder p.l. gültige Schluß $\Sigma$ ist $M^+$-gültig. Andernfalls gäbe es ja ein vollständiges System $S^+$, in dem $\Sigma$ nicht gilt. Dann ließe sich aber eine Bewertung 𝔚 definieren durch die Forderung: 𝔚(A) = 𝔴 für $\underset{S+}{\rightarrow}$ A und 𝔚(A) = 𝔣 für A $\underset{S+}{\rightarrow}$ für alle Atomformeln A. Durch Induktion nach dem Grad von A erhielte man dann diese Bedingung auch für beliebige Formeln A. Hat $\Sigma$ nun die Gestalt $A_1, \ldots, A_m \rightarrow B_1, \ldots, B_n$, so müßte also gelten $\underset{S+}{\rightarrow} A_1, \ldots, \underset{S+}{\rightarrow} A_m$ und $B_1 \underset{S+}{\rightarrow}, \ldots, B_n \underset{S+}{\rightarrow}$, da andernfalls wegen (vv) und (hv) $\Sigma$ in $S^+$ gültig wäre. Es würde dann also auch gelten 𝔚($A_1$) = … = 𝔚($A_m$) = 𝔴 und 𝔚($B_1$) = … = 𝔚($B_n$) = 𝔣, d. h. es gäbe eine Bewertung und also nach 2.2.2 auch eine Interpretation, die ein Gegenbeispiel für die Annahme der p.l. Gültigkeit von $\Sigma$ liefern würde.

Ein Vorzug der Schluß-Semantik ist darin zu sehen, daß man sich für die Abgrenzung der p.l. gültigen Schlüsse nur auf das induktiv definierte System $M^+$ beziehen muß und nicht, wie in der Bewertungs-Semantik auf eine nicht abzählbare Gesamtheit von Funktionen. Seine eigentliche Bedeutung gewinnt dieser Ansatz freilich erst im Rahmen einer konstruktiven Semantik, in der man nur von induktiv definierten Schluß-Systemen ausgeht, die sich als Ableitungsbeziehungen in formalen Kalkülen auffassen lassen[1]. Hier soll uns die Schlußsemantik

---

[1] Vgl. dazu [10] und [45].

vor allem dazu dienen, im nächsten Abschnitt eine Beziehung zwischen positiver, intuitionistischer und klassischer Logik herzustellen.

**2.4.2.4** *Positive und intuitionistische Logik.* Wenn wir auf die Begründung der Schluß-Semantik für das klassische System 𝔓3 zurückblicken, so sehen wir, daß dabei von einer zweifachen Verallgemeinerung des intuitiven Begriffs der Folgebeziehung Gebrauch gemacht wurde: im Übergang nämlich von Schlüssen mit genau einer HF zu Schlüssen mit höchstens einer HF und von diesen zu Schlüssen mit beliebig vielen HF. Wir wollen nun überlegen, zu welchen Logiksystemen man kommt, wenn man diese Verallgemeinerungen des Schluß-Begriffes nicht vornimmt.

Beschränkt man sich auf Schlüsse mit genau einer HF, so führt uns der oben dargestellte Weg zur Begründung des Kalküls 𝔓3 auf einen Kalkül 𝔓𝔏, der sich aus 𝔓3 ergibt, wenn man die Axiome und Deduktionsregeln von 𝔓3 spezialisiert auf den Fall von SQ mit genau einer HF. Dabei fallen die Regeln HT, HR, HV, vN, hN fort, für die eine solche Spezialisierung nicht möglich ist. Die Regeln für die Operatoren $\vee$, $\wedge$ und $\bigvee$ von 𝔓3 fassen wir jetzt als Grundregeln von 𝔓𝔏 auf, da in Abwesenheit der Negationsregeln diese Regeln nicht mehr aus den Definitionen D1, D2 und D4 zu gewinnen sind. Dagegen sei der Operator $\equiv$ weiterhin durch D3 definiert. Die Regel vI können wir für 𝔓3 auch in der Form

**vI*:** $\Delta \Rightarrow A, \Gamma; \Delta, B \Rightarrow \Gamma' \vdash \Delta, A \supset B \Rightarrow \Gamma, \Gamma'$

ansetzen, die mit vI äquivalent ist. Denn vI ist eine Spezialisierung von vI* und aus $\Delta \Rightarrow A, \Gamma$ und $\Delta, B \Rightarrow \Gamma'$ erhalten wir mit HV $\Delta \Rightarrow A, \Gamma, \Gamma'$ und $\Delta, B \Rightarrow \Gamma, \Gamma'$ und daraus mit vI $\Delta, A \supset B \Rightarrow \Gamma, \Gamma'$.

Bei der Spezialisierung der Regel der vorderen Implikationseinführung für 𝔓𝔏 wollen wir uns nun auf vI* beziehen.

Betrachtet man Schlüsse mit höchstens einer HF oder führt man, was damit nach unseren früheren Ausführungen gleichwertig ist, eine Formel F ein, für die gilt $F \rightarrow A$ für alle Formeln A, so kommt man durch eine Spezialisierung der Axiome und Deduktionsregeln von 𝔓3 auf SQ mit höchstens einer HF zu einem Kalkül 𝔍𝔏, dessen Axiome und Regeln wir nun explizit angeben wollen:

**2.4.2.4.1** *Axiome* von 𝔍𝔏 sind alle SQ der Form $A \Rightarrow A$.

Die *Deduktionsregeln* von $\mathfrak{J}\mathfrak{L}$ sind:

**VT:** $\Delta, A, B, \Delta' \Rightarrow \Omega \vdash \Delta, B, A, \Delta' \Rightarrow \Omega$.

Hier wie im folgenden sei $\Omega$ immer eine Formelreihe, die höchstens eine Formel enthält.

**VR:** $\Delta, A, A \Rightarrow \Omega \vdash \Delta, A \Rightarrow \Omega$
**VV:** $\Delta \Rightarrow \Omega \vdash \Delta, A \Rightarrow \Omega$
**HV:** $\Delta \Rightarrow \ \vdash \Delta \Rightarrow A$
**TR:** $\Delta \Rightarrow A; \Delta', A \Rightarrow \Omega \vdash \Delta, \Delta' \Rightarrow \Omega$
**vN:** $\Delta \Rightarrow A \vdash \Delta, \neg A \Rightarrow$
**hN:** $\Delta, A \Rightarrow \ \vdash \Delta \Rightarrow \neg A$
**vD:** $\Delta, A \Rightarrow \Omega; \Delta, B \Rightarrow \Omega \vdash \Delta, A \vee B \Rightarrow \Omega$
**hD:** $\Delta \Rightarrow A \vdash \Delta \Rightarrow A \vee B$
$\Delta \Rightarrow B \vdash \Delta \Rightarrow A \vee B$
**vK:** $\Delta, A \Rightarrow \Omega \vdash \Delta, A \wedge B \Rightarrow \Omega$
$\Delta, B \Rightarrow \Omega \vdash \Delta, A \wedge B \Rightarrow \Omega$
**hK:** $\Delta \Rightarrow A; \Delta \Rightarrow B \vdash \Delta \Rightarrow A \wedge B$
**vI*:** $\Delta \Rightarrow A; \Delta, B \Rightarrow \Omega \vdash \Delta, A \supset B \Rightarrow \Omega$
**hI:** $\Delta, A \Rightarrow B \vdash \Delta \Rightarrow A \supset B$
**vA:** $\Delta, A[x/y] \Rightarrow \Omega \vdash \Delta, \bigwedge x A[x] \Rightarrow \Omega$, wo y eine beliebige GV ist.
**hA:** $\Delta \Rightarrow A[x/y] \vdash \Delta \Rightarrow \bigwedge x A[x]$, wo y nicht frei in den Formeln $\Delta, \bigwedge x A[x]$ vorkommt.
**vE:** $\Delta, A[x/y] \Rightarrow \Omega \vdash \Delta, \bigvee x A[x] \Rightarrow \Omega$, wo y nicht frei in den Formeln $\Delta, \Omega, \bigvee x A[x]$ vorkommt.
**hE:** $\Delta \Rightarrow A[x/y] \vdash \Delta \Rightarrow \bigvee x A[x]$, wo y eine beliebige GV ist.

Den Kalkül $\mathfrak{P}\mathfrak{L}$ erhält man aus $\mathfrak{J}\mathfrak{L}$, wenn man die Regeln HV, vN und hN fortläßt und für $\Omega$ immer eine Formel C setzt. Den a.l. Teil des Kalküls $\mathfrak{P}\mathfrak{L}$ bezeichnet man als *positive Logik*. Einen Kalkül der positiven Logik haben zuerst D. Hilbert und P. Bernays in [38] angegeben. Er ist äquivalent mit folgendem Kalkül $\mathfrak{S}$:

Die *Axiome* von $\mathfrak{S}$ sind:

**B1:** $A \supset (B \supset A)$
**B2:** $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$
**B3:** $A \wedge B \supset A$
**B4:** $A \wedge B \supset B$
**B5:** $A \supset (B \supset A \wedge B)$
**B6:** $A \supset A \vee B$

**B7:** $B \supset A \vee B$
**B8:** $(A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset (A \vee B \supset C))$

Als *Deduktionsregel* von $\mathfrak{S}$ wählen wir die Regel R1 des modus ponens $A \supset B, A \vdash B$.

In der positiven Logik sind nur solche Formeln von $\mathfrak{A}1$ beweisbar, die kein Negationszeichen wesentlich enthalten. Am Beispiel des Peirceschen Gesetzes $((A \supset B) \supset A) \supset A$ werden wir unten sehen, daß in $\mathfrak{S}$ aber keineswegs alle Theoreme von $\mathfrak{A}1$ beweisbar sind, die kein Negationszeichen enthalten. Hingegen gilt, daß in $\mathfrak{S}$ genau die a.l. Theoreme beweisbar sind, die in der *intuitionistischen Logik* gelten und die kein Negationszeichen wesentlich enthalten. Die intuitionistische Logik ist von L. E. J. Brouwer begründet worden. A. Heyting hat zuerst eine Formalisierung der intuitionistischen P.L. angegeben, die mit dem Kalkül $\mathfrak{J}$ äquivalent ist, den man erhält, wenn man den Kalkül $\mathfrak{S}$ um folgende Regeln und Axiome erweitert:

**B9:** $\neg A \supset (A \supset B)$
**B10:** $(A \supset B) \supset ((A \supset \neg B) \supset \neg A)$
**B11:** $\wedge x A[x] \supset A[x/y]$
**B12:** $A[x/y] \supset \vee x A[x]$.
Für B11 und B12 sei x frei für y in $A[x]$.

Als neue Schlußregeln verwendet man die Regel R2 $A \supset B[x] \vdash A \supset \wedge x B[x]$ (wo die GV x nicht frei in A vorkommt) und die Regel R3 $A[x] \supset B \vdash \vee x A[x] \supset B$ (wo die GV x nicht frei in B vorkommt).

Die intuitionistische Logik spielt in der modernen logischen Grundlagendiskussion eine wichtige Rolle. Wir müssen uns im Rahmen dieses Buches, das ganz auf die klassische Logik zugeschnitten ist, ein näheres Eingehen auf die Geschichte und auf die Argumente zur Auszeichnung der intuitionistischen Logik versagen und den interessierten Leser auf die reichlich vorhandene Literatur zu diesem Thema verweisen[1].

Wir beweisen nun den Satz

**2.4.2.4.2** Der Kalkül $\mathfrak{P}\mathfrak{L}$ ohne die p.l. Regeln vA bis hE ist mit dem Kalkül $\mathfrak{S}$ äquivalent und $\mathfrak{J}\mathfrak{L}$ ist mit dem Kalkül $\mathfrak{J}$ äquivalent.

Der Beweis verläuft nach demselben Gedanken wie der Beweis des Satzes 2.4.2.2.6, in dem wir die Äquivalenz der Kalküle $\mathfrak{P}3$ und $\mathfrak{P}1$

[1] Vgl. [4] und [36].

nachgewiesen haben. Wir können uns auf den Äquivalenzbeweis für $\mathfrak{J}\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{J}$ beschränken, aus dem sich die Äquivalenz von $\mathfrak{P}\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{S}$ sofort ergibt. Wir setzen wieder $F := C \wedge \neg C$ für eine feste Formel C und schreiben auch $\Delta \vdash$ für $\Delta \vdash F$. Es ist zu zeigen: Die SQ $\Delta \Rightarrow \Omega$ ist in $\mathfrak{J}\mathfrak{L}$ genau dann beweisbar, wenn für $\mathfrak{J}$ die Ableitungsbeziehung $\Delta \vdash_0 \Omega$ besteht, die wie für $\mathfrak{P}1$ definiert sei, wobei in der Definition des Ausdrucks „die GV x wird eingefangen" auf S. 152 nun statt „eine Anwendung von R2" zu setzen ist „eine Anwendung von R2 oder R3". Wir wollen für $\mathfrak{J}$ die Gültigkeit des Deduktionstheorems MT4 und des Theorems T41 voraussetzen. Dem Leser sei empfohlen, diese Theoreme für $\mathfrak{J}$ auf dem gleichen Wege wie für $\mathfrak{P}1$ zu beweisen[1].

1) Ist $\mathfrak{H}$ eine Ableitung aus AF $\Delta$ in $\mathfrak{J}$, in der keine GV für die AF eingefangen wird, so zeigen wir für alle Formeln A von $\mathfrak{H}$, daß die SQ $\Delta \Rightarrow A$ in $\mathfrak{J}\mathfrak{L}$ beweisbar ist.

Ist A eine der AF aus $\Delta$, so ist $\Delta \Rightarrow A$ ein Axiom von $\mathfrak{J}\mathfrak{L}$, bzw. geht aus einem Axiom mit VV hervor. Ist A ein Axiom von $\mathfrak{J}$, so findet man leicht, daß $\Rightarrow A$ in $\mathfrak{J}\mathfrak{L}$ beweisbar ist. Man braucht dazu nur im Sinne des Beweisverfahrens in $\mathfrak{P}2$ von der zu beweisenden SQ ausgehen und mit der Umkehrung der Deduktionsregeln von $\mathfrak{J}\mathfrak{L}$ den gesuchten Beweis aufbauen. So erhalten wir z. B.

B2)

$$\dfrac{(\mathrm{vI})\ \dfrac{A, B \Rightarrow A \qquad \dfrac{A, B \Rightarrow B \qquad A, B, C \Rightarrow C}{A, B, B \supset C \Rightarrow C}\ (\mathrm{vI})}{A \supset (B \supset C), B, A \Rightarrow C} \qquad A \supset (B \supset C), A \Rightarrow A}{A \supset (B \supset C), A \supset B, A \Rightarrow C}\ (\mathrm{vI})$$

$$\Rightarrow (A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C)) \quad (\mathrm{hI}),\ 3\ \mathrm{mal}$$

B9)

$$\begin{array}{ll} A \Rightarrow A & \\ \neg A, A \Rightarrow B & (\mathrm{vN}, \mathrm{HV}) \\ \Rightarrow \neg A \supset (A \supset B) & (\mathrm{hI}),\ 2\ \mathrm{mal} \end{array}$$

---

[1] Vgl. dazu auch [42], S. 97, Theorem 1 und S. 153 Lemma 15b. Das System $\mathfrak{K}$ von KLEENE [42], S. 82 unterscheidet sich von $\mathfrak{J}$ nur dadurch, daß die beiden Vorderglieder von B2 vertauscht sind. Im Hinblick auf MT4 und R1 sind aber beide Formulierungen von B2 äquivalent. Vgl. auch dort den Äquivalenzbeweis für $\mathfrak{K}$ und das System G1, das $\mathfrak{J}\mathfrak{L}$ entspricht, S. 445 ff.

B10)

$$\dfrac{A, A \supset \neg B \Rightarrow A \qquad \dfrac{A, B \Rightarrow A \qquad \begin{matrix} A, B \Rightarrow B \\ A, B, \neg B \Rightarrow \end{matrix}}{A, A \supset \neg B, B \Rightarrow}}{\begin{matrix} A \supset B, A \supset \neg B, A \Rightarrow \\ A \supset B, A \supset \neg B \Rightarrow \neg A \\ \Rightarrow (A \supset B) \supset ((A \supset \neg B) \supset \neg A) \end{matrix}}$$

Wird A in $\mathfrak{H}$ endlich mit Hilfe der Regeln R1, R2 oder R3 von $\mathfrak{J}$ gewonnen, so erhalten wir die Beweisbarkeit von $\Delta \Rightarrow A$ in $\mathfrak{JL}$ wie folgt: Wegen

$$\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A \qquad A, B \Rightarrow B}{A, A \supset B \Rightarrow B} \qquad \Delta \Rightarrow A \supset B}{\Delta, A \Rightarrow B}$$

gilt: I) $\Delta \Rightarrow A \supset B \vdash \Delta, A \Rightarrow B$. Es gilt also auch

$\Delta \Rightarrow A; \Delta \Rightarrow A \supset B \vdash \Delta \Rightarrow B$ (I, TR),
$\Delta \Rightarrow A \supset B[x] \vdash \Delta \Rightarrow A \supset \bigwedge x B[x]$, wenn x nicht frei in A vorkommt (I, hA, hI),
$\Delta \Rightarrow A[x] \supset B \vdash \Delta \Rightarrow \bigvee x A[x] \supset B$, wenn x nicht frei in B vorkommt (I, vE, hI).

2) Ist die SQ $\Delta \Rightarrow \Omega$ in $\mathfrak{JL}$ beweisbar, so gilt $\Delta \vdash_0 \Omega$ in $\mathfrak{J}$. Ist $\Delta \Rightarrow \Omega$ ein Axiom von $\mathfrak{JL}$, so gilt $\Delta \vdash_0 \Omega$ trivialer Weise. Gilt die Behauptung für die Prämissen einer Deduktionsregel von $\mathfrak{JL}$, so gilt sie auch für deren Konklusion:

vN: Aus $\Delta \vdash_0 A$ folgt mit B9 und R1 $\Delta, \neg A \vdash_0 C \wedge \neg C$.
hN: Aus B1 und B2 folgt wie in $\mathfrak{P}1 \vdash A \supset A$. Aus $\Delta, A \vdash_0 F$ folgt $\Delta, A \vdash_0 \neg A$, mit MT4 $\Delta \vdash_0 A \supset \neg A$, mit B10 und $A \supset A$ erhält man daraus $\Delta \vdash_0 \neg A$.
vD: Aus $\Delta, A \vdash_0 C$ und $\Delta, B \vdash_0 C$ erhält man mit MT4 $\Delta \vdash_0 A \supset C$ und $\Delta \vdash_0 B \supset C$ mit B8 und R1 also $\Delta, A \vee B \vdash_0 C$.
hD: Aus $\Delta \vdash_0 A$ erhält man mit B6 und R1 $\Delta \vdash_0 A \vee B$. Aus $\Delta \vdash_0 B$ erhält man mit B7 und R1 $\Delta \vdash_0 A \vee B$.
vK: Aus $\Delta, A \vdash_0 C$ erhält man mit B3 und R1 $\Delta, A \wedge B \vdash_0 C$. Aus $\Delta, B \vdash_0 C$ erhält man mit B4 und R1 $\Delta, A \wedge B \vdash_0 C$.
hK: Aus $\Delta \vdash_0 A$ und $\Delta \vdash_0 B$ folgt mit B5 und R1 $\Delta \vdash_0 A \wedge B$.
vI: Aus $\Delta \vdash_0 A$ und $\Delta, B \vdash_0 C$ folgt mit R1 $\Delta, A \supset B \vdash_0 C$.
hI: Aus $\Delta, A \vdash_0 B$ folgt mit MT4 $\Delta \vdash_0 A \supset B$.

HV: Aus $\Delta \vdash_0 C \wedge \neg C$ erhält man mit B3, B4, B9 und R1 $\Delta \vdash_0 A$ für beliebige Formeln A.

Die Regeln VV, TR, VT, VR erledigen sich wieder in einfacher Weise.

vA: Ist x frei für y in $A[x]$, so folgt aus $\Delta, A[x/y] \vdash_0 C$ mit B11 und R1 $\Delta, \Lambda x A[x] \vdash_0 C$. Andernfalls erhält man statt $\Lambda x A[x]$ zunächst eine Formel, aus der $\Lambda x A[x]$ mit T41 hervorgeht.

hA: Aus $\Delta \vdash_0 A[x/y]$ folgt $\Delta \vdash_0 (C \supset C) \supset A[x/y]$, mit R2 (wo y nicht frei in C vorkomme) also $\Delta \vdash_0 (C \supset C) \supset \Lambda y A[x/y]$, da y nicht frei in den Formeln aus $\Delta$ vorkommt, und mit $\vdash C \supset C$ daraus $\Delta \vdash_0 \Lambda y A[x/y]$. Mit T41 erhalten wir daraus $\Delta \vdash_0 \Lambda x A[x]$, da y nicht frei in $\Lambda x A[x]$ vorkommt.

vE: Aus $\Delta, A[x/y] \vdash_0 C$ erhalten wir mit MT4 $\Delta \vdash_0 A[x/y] \supset C$, da y nicht frei in den Formeln aus $\Delta$ vorkommt, mit R3 und R1 also $\Delta, \mathrm{V} y A[x/y] \vdash_0 C$, da y nicht frei in C vorkommt. Mit T41 erhalten wir endlich $\Delta, \mathrm{V} x A[x] \vdash_0 C$.

hE: Ist x frei für y in $A[x]$, so erhalten wir aus $\Delta \vdash_0 A[x/y]$ mit B12 und R1 $\Delta \vdash_0 \mathrm{V} x A[x]$. Andernfalls erhält man statt $\mathrm{V} x A[x]$ zunächst eine Formel, aus der $\mathrm{V} x A[x]$ mit T41 hervorgeht.

Aufgrund dieses Äquivalenzbeweises sind wir nun berechtigt, den a.l. Teil von $\mathfrak{PL}$ als System der positiven Logik anzusprechen und $\mathfrak{IL}$ als System der intuitionistischen Logik. Die Unterscheidung der dem Aufbau der Schluß-Semantik zugrunde gelegten Folgebeziehungen in solche mit genau einer HF, mit höchstens einer HF und mit beliebig vielen HF hat also eine Unterscheidung der damit begründeten Logiksysteme in Systeme der positiven, der intuitionistischen und der klassischen Logik zur Folge. Während es bzgl. der Bewertungs- oder Interpretationssemantik nicht möglich ist, diese Logiksysteme unmittelbar zu vergleichen, bildet also die Schluß-Semantik einen hinreichend weiten Rahmen für die Begründung und den Vergleich verschiedener Logiksysteme. Neben der positiven, intuitionistischen und klassischen Logik lassen sich mit diesem Ansatz auch noch andere Systeme gewinnen, auf die wir hier aber nicht eingehen wollen, da diese Systeme in der gegenwärtigen Diskussion kaum eine Rolle spielen.

Wir wollen in diesem Abschnitt noch einen Zusammenhang zwischen der Zulassung mehrerer HF und der Forderung der Vollständigkeit der Schluß-Systeme herstellen, um so ein noch besseres Verständnis für das Verhältnis von klassischer und intuitionistischer Logik zu gewinnen. Zuvor sind aber noch einige Bemerkungen zum System $\mathfrak{JL}$ nachzuholen.

Es wurde schon erwähnt, daß sich die Eliminierbarkeit der Regel TR auch für das System $\mathfrak{JL}$ beweisen läßt. Da wir den Gedankengang eines solchen Beweises schon oben für den Kalkül $\mathfrak{P}3$ dargestellt haben, wollen wir hier nicht näher darauf eingehen. Oben wurde gesagt, in der positiven Logik seien genau diejenigen Formeln beweisbar, die in der intuitionistischen A.L. beweisbar seien und kein Negationszeichen wesentlich enthielten. Dabei sagen wir, eine Formel A enthält kein Negationszeichen wesentlich, wenn alle negierten Teilformeln von A sich durch Atomformeln ersetzen lassen, ohne daß sich dadurch etwas an der Beweisbarkeit von A ändert. Läßt man in $\mathfrak{JL}$ die Negationsregeln fort, so erhält man den Kalkül $\mathfrak{PL}$. Wenn also in $\mathfrak{PL}$ eine SQ beweisbar ist, so auch in $\mathfrak{JL}$. Ist umgekehrt eine SQ $\Sigma$ beweisbar in $\mathfrak{JL}$, deren Formeln kein Negationszeichen wesentlich enthalten, so läßt sich ein Beweis für die SQ $\Sigma'$ angeben, in der gegenüber $\Sigma$ in allen Formeln alle negierten Teilformeln durch Atomformeln ersetzt sind. Die Formeln von $\Sigma'$ enthalten also keine Negationszeichen mehr. Im Hinblick auf die Eliminierbarkeit von TR gilt aber für $\mathfrak{JL}$, daß alle in SQ eines Beweises $\mathfrak{H}$ für $\Sigma'$ vorkommenden Formeln Teilformeln der Formeln von $\Sigma'$ sind. Also kann $\mathfrak{H}$ keine Anwendungen der Regeln vN und hN enthalten, also ist $\mathfrak{H}$ auch ein Beweis für $\Sigma'$ in $\mathfrak{PL}$.

Wir hatten ferner erwähnt, daß die SQ $\Rightarrow ((A \supset B) \supset A) \supset A$ nicht in $\mathfrak{PL}$, also auch nicht in $\mathfrak{JL}$ beweisbar sei. Das zeigt folgender Versuch einer Beweiskonstruktion (wir nehmen dabei an, A und B seien Atomformeln):

$$\dfrac{\begin{array}{l} A \Rightarrow B \\ \quad \Rightarrow A \supset B \qquad A \Rightarrow A \end{array}}{\begin{array}{l} (A \supset B) \supset A \Rightarrow A \\ \qquad\qquad\quad \Rightarrow ((A \supset B) \supset A) \supset A \end{array}}$$

Ein wesentlich anderes Beweisschema als das angegebene kann es wegen der Eliminierbarkeit von TR offenbar nicht geben und das führt nicht zum Ziel, sofern A und B verschiedene Atomformeln sind. Auf dem gleichen

Wege kann man zeigen, daß in der intuitionistischen Logik folgende SQ nicht beweisbar sind:

1) Das *tertium non datur*

$$\begin{array}{c} A \Rightarrow \\ \Rightarrow A \text{ oder } \Rightarrow \neg A \\ \Rightarrow A \vee \neg A \end{array}$$

2)

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Rightarrow A\\ \neg A \Rightarrow\end{array} \quad B \Rightarrow A}{\neg A \supset B \Rightarrow A} \text{ oder } \dfrac{\begin{array}{c}A \Rightarrow\\ \Rightarrow \neg A\end{array} \quad B \Rightarrow B}{\neg A \supset B \Rightarrow B} \text{ oder } \begin{array}{c}A \Rightarrow \quad B \Rightarrow B\\ \Rightarrow \neg A \quad B \Rightarrow A \supset B\end{array}}{\neg A \supset B \Rightarrow A \vee B}$$

$$\Rightarrow (\neg A \supset B) \supset A \vee B$$

3)

$$\dfrac{\begin{array}{c}A \Rightarrow\\ \Rightarrow \neg A\end{array} \text{ oder } \begin{array}{c}B \Rightarrow\\ \Rightarrow \neg B\end{array}}{\Rightarrow \neg A \vee \neg B}$$

$$\dfrac{\overbrace{\begin{array}{c}\Rightarrow \neg A \vee \neg B\\ \neg(\neg A \vee \neg B) \Rightarrow A\end{array} \quad \begin{array}{c}\Rightarrow \neg A \vee \neg B\\ \neg(\neg A \vee \neg B) \Rightarrow B\end{array} \text{ oder } \Rightarrow \neg A \vee \neg B}}{\neg(\neg A \vee \neg B) \Rightarrow A \wedge B}$$

$$\Rightarrow \neg(\neg A \vee \neg B) \supset A \wedge B$$

4)

$$\dfrac{\begin{array}{c}A[x/y] \Rightarrow\\ \Rightarrow \neg A[x/y]\\ \Rightarrow \bigwedge x \neg A[x]\end{array} \text{ oder } \begin{array}{c}A[x/y] \Rightarrow\\ \Rightarrow \neg A[x/y]\\ \Rightarrow \bigwedge x \neg A[x]\\ \neg \bigwedge x \neg A[x] \Rightarrow A[x/z]\end{array}}{\neg \bigwedge x \neg A[x] \Rightarrow \bigvee x A[x]}$$

$$\Rightarrow \neg \bigwedge x \neg A[x] \supset \bigvee x A[x]$$

Diese Beispiele zeigen, daß man wie für $\mathfrak{P}3$ (in Gestalt des Kalküls $\mathfrak{P}2$) auch für $\mathfrak{IL}$ ein mechanisches Beweisverfahren konstruieren kann. Sie zeigen aber auch, daß dieses Verfahren schon im a.l. Fall, wo es wieder zu einem Entscheidungsverfahren führt, erheblich komplizierter ist als im klassischen Fall wegen der alternativen Beweismöglichkeiten, die wir oben durch „oder" angedeutet haben. Hinzu kommt, daß wir in den Beispielen der Übersichtlichkeit wegen noch die Möglichkeit außer acht gelassen haben, daß die Konklusion durch die Regel VR gewonnen wird. Es sei dem Leser empfohlen, auch diese Möglichkeit in den Beispielen zu berücksichtigen[1].

Aus den Beispielen (2) bis (4) geht nun hervor, daß für die intuitionistische Logik nicht gilt $A \vee B \equiv \neg A \supset B$, $A \wedge B \equiv \neg(\neg A \vee \neg B)$ und $\bigvee x A \equiv \neg \bigwedge x \neg A$. Daher kann man auch die Definitionen D1, D2 und D4 nicht verwenden und muß die Disjunktions-, Konjunktions- und Existenzregeln als Grundregeln von $\mathfrak{J}\mathfrak{L}$ ansprechen.

Kommen wir nun zur klassischen Logik zurück! Aus dem System $\mathfrak{J}$ erhalten wir durch Hinzunahme des Axioms

**B13:** $A \vee \neg A$

ein System der klassischen Logik, das mit $\mathfrak{P}1$ äquivalent ist: Mit den in 2.3.2 und 1.3.4 gewonnenen Mitteln beweist man sofort, daß alle Axiome B1 bis B13 sowie die Ableitbarkeitsbeziehung nach R3 in $\mathfrak{P}1$ beweisbar sind. Umgekehrt sind die Axiome und Deduktionsregeln von $\mathfrak{P}1$ bis auf A3 auch Axiome und Deduktionsregeln von $\mathfrak{J}$. In $\mathfrak{J}$ kann man aber mit B13 A3 beweisen (wir setzen wieder die Gültigkeit des Deduktionstheorems MT4 für $\mathfrak{J}$ voraus):

| | | |
|---|---|---|
| 1) | $\neg A \supset \neg B$ | AF |
| 2) | $B$ | AF |
| 3) | $\neg A \supset B$ | B1, R1 |
| 4) | $\neg\neg A$ | B10, R1 (1, 3) |
| 5) | $A \supset (\neg\neg A \supset A)$ | B1 |
| 6) | $\neg A$ | AF |
| 7) | $A$ | B9, R1 (4, 6) |
| 8) | $\neg\neg A \supset A$ | B1, R1 (7) |
| 9) | $\neg A \supset (\neg\neg A \supset A)$ | MT4 (6) (Damit haben wir uns von der AF (6) befreit.) |
| 10) | $A \vee \neg A \supset (\neg\neg A \supset A)$ | B8, R1 (5, 6) |
| 11) | $A \vee \neg A$ | B13 |
| 12) | $\neg\neg A \supset A$ | R1 |
| 13) | $A$ | R1 (4, 12) |

[1] Die Entscheidbarkeit der intuitionistischen A.L. ist zuerst von G. GENTZEN in [25] bewiesen worden vermittels eines Verfahrens, wie es hier angedeutet wurde. Vgl. dazu auch [42], S. 482 ff.

14) $B \supset A$ MT4 (2)
15) $(\neg A \supset \neg B) \supset (B \supset A)$ MT4 (1) (Damit haben wir uns von den AF (2) und (1) befreit.)

In entsprechender Weise erhält man aus $\mathfrak{J}\mathfrak{L}$ durch Hinzunahme des Axiomenschemas $\Rightarrow A \vee \neg A$ ein System der klassischen Logik. Dieses Axiomenschema läßt sich auch durch die Regel

**VS:** $\Delta, A \Rightarrow \Omega; \Delta, \neg A \Rightarrow \Omega \vdash \Delta \Rightarrow \Omega$

ersetzen. Denn aus $\Delta, A \Rightarrow \Omega$ und $\Delta, \neg A \Rightarrow \Omega$ erhält man mit vD $\Delta, A \vee \neg A \Rightarrow \Omega$ mit $\Rightarrow A \vee \neg A$ und TR also $\Delta \Rightarrow \Omega$. Umgekehrt findet man

$$\frac{\begin{array}{cc} A \Rightarrow A & \neg A \Rightarrow \neg A \\ A \Rightarrow A \vee \neg A & \neg A \Rightarrow A \vee \neg A \end{array}}{\Rightarrow A \vee \neg A}\ \text{VS}$$

Den Kalkül, der aus $\mathfrak{J}\mathfrak{L}$ durch Hinzunahme der Regel VS entsteht, wollen wir $\mathfrak{P}4$ nennen. Das Axiomenschema $\Rightarrow A \vee \neg A$ und ebenso die Regel VS drücken die Vollständigkeitseigenschaft der in der Schluß-Semantik betrachteten Systeme $S^+$ aus. Denn wenn für jede Formel A gilt: $\rightarrow A$ oder $A \rightarrow$, so gilt auch: $\rightarrow A$ oder $\rightarrow \neg A$, also $\rightarrow A \vee \neg A$. Und wenn $\rightarrow A \vee \neg A$ für alle Formeln A gilt, so muß nach hD auch gelten $\rightarrow A$ oder $\rightarrow \neg A$, d. h. $\rightarrow A$ oder $A \rightarrow$. Die Forderung der Vollständigkeit zeichnet also im Rahmen der Schluß-Semantik, in der Schlüsse mit höchstens einer HF betrachtet werden, d. h. im Rahmen der intuitionistischen Logik die klassische Logik aus. Wir beweisen dazu den Satz

**2.4.2.4.3** In $\mathfrak{P}4$ sind genau diejenigen SQ beweisbar, die höchstens eine HF enthalten und in $\mathfrak{P}3$ beweisbar sind.

1) Ist eine SQ $\Delta \Rightarrow \Omega$ in $\mathfrak{P}4$ beweisbar, so ist sie auch in $\mathfrak{P}3$ beweisbar, da die Axiome und Deduktionsregeln von $\mathfrak{P}4$ bis auf VS Spezialisierungen der Axiome und Deduktionsregeln von $\mathfrak{P}3$ sind. Nach unseren früheren Bemerkungen können wir ja in $\mathfrak{P}3$ die Regel vI durch die Regel vI* ersetzen. In $\mathfrak{P}3$ ist ferner für alle Formeln A die SQ $\Rightarrow A \vee \neg A$ beweisbar, so daß auch die Ableitungsbeziehung nach VS gilt:

$$\begin{array}{c} A \Rightarrow A \\ \Rightarrow A, \neg A \end{array}$$

$$\Rightarrow A \vee \neg A, \neg A$$
$$\Rightarrow A \vee \neg A, A \vee \neg A$$
$$\Rightarrow A \vee \neg A$$

2) Ist die SQ $\Delta \Rightarrow \Omega$ in $\mathfrak{P}3$ beweisbar, so auch in $\mathfrak{P}4$. Denn jeder Beweis $\mathfrak{H}$ für eine SQ $\Delta \Rightarrow \Omega$ in $\mathfrak{P}3$ läßt sich in einen Beweis $\mathfrak{H}'$ für $\Delta \Rightarrow \Omega$ mit zusätzlichen Anwendungen von VS umformen, der nur SQ mit höchstens einer HF enthält. Zunächst kann man die Axiome $\Delta, A \Rightarrow A, \Gamma$ von $\mathfrak{H}$ durch die Axiome $\Delta, \neg\Gamma, A \Rightarrow A$ ersetzen, wobei $\neg\Gamma$ die Formelreihe $\neg B_1, \ldots, \neg B_n$ sei, wenn $\Gamma$ die Formelreihe $B_1, \ldots, B_n$ ist. Ferner gilt die Beziehung I) $\Delta, \neg A \Rightarrow \Omega \vdash \Delta, \neg\Omega \Rightarrow A$, wie folgende Ableitung zeigt:

$$\begin{array}{c}
\Delta, \neg A \Rightarrow \Omega \\
\Delta, \neg A, \neg\Omega \Rightarrow \\
\dfrac{\Delta, \neg A, \neg\Omega \Rightarrow A \qquad \Delta, \neg\Omega, A \Rightarrow A}{\Delta, \neg\Omega \Rightarrow A}\ \mathrm{VS}
\end{array}$$

Die Regel VS wurde aber schon als zulässig in $\mathfrak{P}3$ erkannt. Danach kann man nun bei allen Regelanwendungen in $\mathfrak{H}$ die jeweils überflüssigen, d. h. nicht als Nebenformeln benötigten HF als negierte VF mitführen und sie bei Bedarf mit (I) als HF zurückgewinnen. Der so entstehende Beweis $\mathfrak{H}'$ ist auch ein Beweis in $\mathfrak{P}4$, da die Axiome und Deduktionsregeln von $\mathfrak{P}3$ bei Spezialisierung auf den Fall höchstens einer HF in Axiome und Deduktionsregeln von $\mathfrak{P}4$ übergehen.

Im Kalkül $\mathfrak{P}4$ haben wir nun eine Formulierung der klassischen P.L. vor uns, die SQ mit höchstens einer HF verwendet. Der Rahmen eines solchen Sequenzen-Kalküls ist der intuitionistischen Logik am angemessensten. Die klassische Logik muß durch eine explizit zu formulierende Vollständigkeitsforderung ausgezeichnet werden — oben in Form der Regel VS. Im Kalkül $\mathfrak{P}3$ hingegen, in dem auch SQ mit mehreren HF zugelassen sind, ist eine solche explizite Hervorhebung der Vollständigkeitsforderung nicht notwendig. Sie drückt sich aus in der Form, die man den semantischen Regeln bei der Verwendung von SQ mit mehreren HF geben kann. Wir haben oben bei der intuitiven Begründung der Bedingung (hn) in 2.4.2.3.1 die Vollständigkeit der betrachteten Schluß-Systeme verwenden müssen. Umgekehrt folgt aus $A \rightarrow A$ mit (hn) $\rightarrow A, \neg A$, also wegen der Umkehrbarkeit von (hn) und der Deutung, die wir den SQ mit mehreren HF für die einzelnen Schluß-Systeme gegeben haben, $\rightarrow A$ oder $A \rightarrow$.

Zu der Deutung der Schlüsse mit mehreren HF für die einzelnen Schluß-Systeme im Sinn der Definition von $\Delta \rightarrow A_1, \ldots, A_m$ durch $\Delta \rightarrow A_1$ oder ... oder $\Delta \rightarrow A_m$ ist noch zu bemerken, daß aus der Allgemeingültigkeit von $\Delta \rightarrow A_1, \ldots, A_m$ natürlich nicht auf die Allgemeingültigkeit von $\Delta \rightarrow A_1$ oder ... oder auf die Allgemeingültigkeit von $\Delta \rightarrow A_m$ geschlossen werden darf. So folgt aus der Allgemeingültigkeit von $\rightarrow A, \neg A$ nicht die Allgemeingültigkeit von $\rightarrow A$ oder die von $\rightarrow \neg A$, sondern es folgt nur, daß für jedes System gilt: $\rightarrow A$ oder $\rightarrow \neg A$. Aus der Allgemeingültigkeit von $\Delta \rightarrow A_1, \ldots, A_m$ folgt aber die Allgemeingültigkeit von $\Delta \rightarrow A_1 \vee \ldots \vee A_m$ mit (hD). Umgekehrt erhält man aus $A_1 \rightarrow A_1, \ldots, A_m$ und ... und $A_m \rightarrow A_1, \ldots, A_m$ mit $(m - 1)$-maliger Anwendung von vD $A_1 \vee \ldots \vee A_m \rightarrow A_1, \ldots, A_m$, also aus $\Delta \rightarrow A_1 \vee \ldots \vee A_m$ mit TR $\Delta \rightarrow A_1, \ldots, A_m$. Da die Beweisbarkeit eines Schlusses in $\mathfrak{P}4$ mit seiner Allgemeingültigkeit zusammenfällt, kann man also festsetzen, daß eine SQ $\Delta \Rightarrow A_1, \ldots, A_m$ genau dann in $\mathfrak{P}4$ beweisbar sein soll, wenn $\Delta \Rightarrow A_1 \vee \ldots \vee A_m$ in $\mathfrak{P}4$ beweisbar ist. Mit dieser Erweiterung des Beweisbegriffes von $\mathfrak{P}4$ erweisen sich dann alle in $\mathfrak{P}3$ beweisbaren SQ als beweisbar in $\mathfrak{P}4$.

**2.4.2.5** *Die Methode des natürlichen Schließens nach Gentzen und Quine.* Zum Abschluß unseres Überblicks über die verschiedenen Möglichkeiten einer Formalisierung des natürlichen Schließens wollen wir noch einen Kalkültyp darstellen, der von G. GENTZEN in [25] angegeben worden ist und oft als Kalkültyp des natürlichen Schließens schlechthin angesprochen wird.

Wenn wir vom Kalkül $\mathfrak{P}4$ ausgehen, so werden wir durch folgende einfache Modifikationen auf den Kalkül NK von GENTZEN geführt:

1. Durch Einführung der Formel F mit dem Axiomenschema $F \Rightarrow A$ sorgen wir dafür, daß jede SQ genau eine HF enthält.

2. Wir ersetzen die Regeln $\mathfrak{P}4$ zur vorderen Einführung der Operatoren (vN) bis (vE) durch die — wie man leicht erkennt — äquivalenten Regeln zur hinteren Beseitigung:

**BN:** $\Delta \Rightarrow A; \Delta \Rightarrow \neg A \vdash \Delta \Rightarrow F$
**BD:** $\Delta, A \Rightarrow C; \Delta, B \Rightarrow C; \Delta \Rightarrow A \vee B \vdash \Delta \Rightarrow C$
**BK:** $\Delta \Rightarrow A \wedge B \vdash \Delta \Rightarrow A$ und $\Delta \Rightarrow A \wedge B \vdash \Delta \Rightarrow B$
**BI:** $\Delta \Rightarrow A; \Delta \Rightarrow A \supset B \vdash \Delta \Rightarrow B$
**BA:** $\Delta \Rightarrow \Lambda x A[x] \vdash \Delta \Rightarrow A[x/y]$, wobei y eine beliebige GV ist,

**BE:** $\Delta, A[x/y] \Rightarrow C; \Delta \Rightarrow \bigvee x A[x] \vdash \Delta \Rightarrow C$, wobei y nicht frei vorkomme in den Formeln $\Delta, C, \bigvee x A[x]$.

Ferner lassen wir in Mehr-Prämissenregeln nun zu, daß die Deduktionsparameter $\Delta$ verschieden sind in den verschiedenen Prämissen, so daß z. B. aus BD die Regel $\Delta, A \Rightarrow C; \Delta', B \Rightarrow C; \Delta'' \Rightarrow A \vee B \vdash \Delta, \Delta', \Delta'' \Rightarrow C$ entsteht, die im Hinblick auf die Regeln VV und VR mit BD äquivalent ist. Bei dieser Formulierung der Regeln wird nun die Regel VV überflüssig, denn es gilt die Ableitungsbeziehung

$$\begin{array}{ll} \underline{\Delta \Rightarrow B \quad A \Rightarrow A} & \\ \Delta, A \Rightarrow A \wedge B & \text{hK} \\ \Delta, A \Rightarrow B & \text{BK,} \end{array}$$

so daß man die Ableitungsbeziehung $\Delta \Rightarrow B \vdash \Delta, A \Rightarrow B$ gemäß der Regel VV beweisen kann. Ferner ersetzen wir die Regel VS durch das Axiomenschema $\Rightarrow A \vee \neg A$.

3. Die Beweise im SQ-Kalkül, die bisher in Baumform geschrieben wurden, werden nun als lineare Folgen von SQ angeschrieben. Ein Beweis für eine SQ $\Sigma$ ist dann eine Folge von SQ, deren letztes Glied $\Sigma$ ist und deren sämtliche Glieder Axiome sind oder durch einmalige Anwendung einer der Deduktionsregeln auf frühere SQ der Folge hervorgehen.

4. Wir ordnen einem solchen Beweis $\mathfrak{H}$ eine Folge $\mathfrak{F}$ von Sätzen zu, so daß in der $n$-ten Zeile dieser Folge die HF der $n$-ten SQ $\Sigma_n$ von $\mathfrak{H}$ steht. Die Sätze von $\mathfrak{F}$ numerieren wir fortlaufend und setzen hinter jede Nummer $n$ in Klammern die Nummern solcher Sätze von $\mathfrak{F}$, die in $\Sigma_n$ als VF auftreten. Da es auf die Reihenfolge und die Häufigkeit in der Aufführung der Nummern in diesen Klammern nicht ankommen soll, werden nun Anwendungen der Regeln VT und VR überflüssig. Hat eine Zeile von $\mathfrak{F}$ die Gestalt $n(n_1, \ldots, n_m)A$, so sagen wir auch, die Formel A hänge in der $n$-ten Zeile von $\mathfrak{F}$ von den Formeln in den Zeilen von $\mathfrak{F}$ mit den Nummern $n_1, \ldots, n_m$ ab.

Durch diese Modifikationen von $\mathfrak{P}4$ entsteht nun, bis auf unwesentliche Details, der Kalkül NK, den Gentzen in [25] angegeben hat und der sich also wie folgt beschreiben läßt:

Eine *Ableitungsfigur* in NK ist eine endliche Folge fortlaufend numerierter Zeilen, die jeweils eine Formel enthalten und die Zeilen nach TND oder AF sind, oder durch einmalige Anwendung einer der Deduktionsregeln von NK aus früheren Zeilen der Folge hervorgehen:

**TND:** $n$ A ∨ ¬A (Axiomenschema: ein Axiom hängt von keiner Formel ab)

**AF:** $n(n)$ A (Annahmeeinführung: jede Annahmeformel hängt von sich selbst ab).

Bei den folgenden Deduktionsregeln verstehen sich die Abhängigkeiten wie folgt: Die Konklusion unter dem Strich hängt von jeder Formel ab, von der eine der über dem Strich stehenden Prämissen abhängt — ausgenommen solche Formeln, die über die Prämissen, die evtl. von ihnen abhängen, in eckige Klammer gesetzt sind.

**HV:** $\dfrac{\mathrm{F}}{\mathrm{A}}$ für alle Formeln A

**EN:** $\dfrac{\begin{matrix}[\mathrm{A}]\\ \mathrm{F}\end{matrix}}{\neg\mathrm{A}}$ **BN:** $\dfrac{\mathrm{A} \quad \neg\mathrm{A}}{\mathrm{F}}$

**EK:** $\dfrac{\mathrm{A} \quad \mathrm{B}}{\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}}$ **BK:** $\dfrac{\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}}{\mathrm{A}}$ und $\dfrac{\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}}{\mathrm{B}}$

**ED:** $\dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{A} \vee \mathrm{B}}$ und $\dfrac{\mathrm{B}}{\mathrm{A} \vee \mathrm{B}}$ **BD:** $\dfrac{\mathrm{A} \vee \mathrm{B} \quad \begin{matrix}[\mathrm{A}]\\ \mathrm{C}\end{matrix} \quad \begin{matrix}[\mathrm{B}]\\ \mathrm{C}\end{matrix}}{\mathrm{C}}$

**EI:** $\dfrac{\begin{matrix}[\mathrm{A}]\\ \mathrm{B}\end{matrix}}{\mathrm{A} \supset \mathrm{B}}$ **BI:** $\dfrac{\mathrm{A} \quad \mathrm{A} \supset \mathrm{B}}{\mathrm{B}}$

**EA:** $\dfrac{\mathrm{A}[\mathrm{x}/\mathrm{y}]}{\bigwedge \mathrm{x}\mathrm{A}[\mathrm{x}]}$ **BA:** $\dfrac{\bigwedge \mathrm{x}\mathrm{A}[\mathrm{x}]}{\mathrm{A}[\mathrm{x}/\mathrm{y}]}$

**EE:** $\dfrac{\mathrm{A}[\mathrm{x}/\mathrm{y}]}{\bigvee \mathrm{x}\mathrm{A}[\mathrm{x}]}$ **BE:** $\dfrac{\bigvee \mathrm{x}\mathrm{A}[\mathrm{x}] \quad \begin{matrix}[\mathrm{A}[\mathrm{x}/\mathrm{y}]]\\ \mathrm{C}\end{matrix}}{\mathrm{C}}$

Dabei ist y in BA und EE eine beliebige GV. In EA soll y hingegen nicht frei vorkommen in ⋀xA[x] und den Formeln, von denen A[x/y] abhängt. In BE soll y nicht frei vorkommen in den Formeln ⋁xA[x], C und den von A[x/y] verschiedenen Formeln, von denen die Prämisse C abhängt.

Eine Ableitungsfigur, deren letzte Zeile die Formel A enthält und in der A in dieser Zeile abhängt von Formeln Δ, nennen wir eine *Ableitung* von A aus den Formeln Δ in NK.

In NK fehlt nun noch das Gegenstück zur Regel TR von 𝔓4, d. h. eine Regel

$$\frac{A \quad \begin{matrix}[A]\\ B\end{matrix}}{B}.$$

Diese Regel ist aber zulässig in NK, wie man leicht beweist. Da NK demnach durch äquivalente Umformungen aus dem Kalkül 𝔓4 entsteht, so ist auch NK eine adäquate Formalisierung der P.L. wie wir das oben für 𝔓4 nachgewiesen haben. Und der Kalkül NJ, der aus NK durch Streichung des Axiomenschemas TND entsteht, ist demnach mit dem Kalkül 𝔍𝔏 äquivalent, also eine Formalisierung der intuitionistischen Logik.

Zur Veranschaulichung der Ableitungskonstruktionen in NK geben wir drei Beispiele an:

| | | | |
|---|---|---|---|
| I) | 1(1) | $\wedge y f(x, y)$ | AF |
| | 2(1) | $f(x, y)$ | BA |
| | 3(1) | $\vee x f(x, y)$ | EE |
| | 4(1) | $\wedge y \vee x f(x, y)$ | EA |
| | 5(5) | $\vee x \wedge y f(x, y)$ | AF |
| | 6(5) | $\wedge y \vee x f(x, y)$ | BE (5,4) |
| | 7 | $\vee x \wedge y f(x, y) \supset \wedge y \vee x f(x, y)$ | EI. |

Die letzte Formel hängt nicht mehr von anderen Formeln ab, so daß die angegebene Ableitung ein Beweis für diese Formel in NK ist.

| | | | |
|---|---|---|---|
| II) | 1(1) | $f(x)$ | AF |
| | 2(1) | $\vee x f(x)$ | EE |
| | 3(3) | $\neg \vee x f(x)$ | AF |
| | 4(1, 3) | F | HV |
| | 5(3) | $\neg f(x)$ | EN |
| | 6(3) | $\wedge y \neg f(y)$ | EA |
| | 7 | $\neg \vee x f(x) \supset \wedge y \neg f(y)$ | EI |

Auch hier liegt ein Beweis für die letzte Formel vor.

| | | | |
|---|---|---|---|
| III) | 1(1) | $\wedge xy(f(x, y) \supset f(y, x))$ | AF |
| | 2(1) | $\wedge y(f(z, y) \supset f(y, z))$ | BA |

| | | |
|---|---|---|
| 3(1) | $f(z, y) \supset f(y, z)$ | BA |
| 4(4) | $f(z, y)$ | AF |
| 5(1, 4) | $f(y, z)$ | BI |
| 6(1, 4) | $f(z, y) \wedge f(y, z)$ | EK |
| 7(1, 4) | $\vee y(f(z, y) \wedge f(y, z))$ | EE |
| 8(8) | $\wedge x \vee y f(x, y)$ | AF |
| 9(8) | $\vee y f(x, y)$ | BA |
| 10(1, 8) | $\vee y(f(z, y) \wedge f(y, z))$ | BE (9, 7) |
| 11(1, 8) | $\wedge x \vee y(f(x, y) \wedge f(y, x))$ | EA |

Hier liegt eine Ableitung der letzten Formel aus den Formeln $\wedge xy(f(x, y) \supset f(y, x))$ und $\wedge x \vee y f(x, y)$ vor.

Man kann NK nun als einen Kalkül des natürlichen Schließens ansprechen, insofern einige seiner Deduktionsregeln, wie z. B. die Regeln EK und BK einfache semantische Festlegungen widerspiegeln. Bei anderen Regeln hingegen, wie bei BD und BE, ist der entsprechende semantische Sachverhalt komplexer. W. V. QUINE hat in [56] und [59] Modifikationen der „kritischen" p.l. Regeln EA und BE angegeben, die der Idee des natürlichen Schließens näherkommen. Er ersetzt diese Regeln durch

**EA*:** $\dfrac{\mathrm{A}[\mathrm{x}/\mathrm{y}]}{\wedge \mathrm{x}\mathrm{A}[\mathrm{x}]}$ wo y eine GV sei, die nicht frei in $\wedge \mathrm{x}\mathrm{A}[\mathrm{x}]$ vorkommt.
(Was für ein beliebiges x gilt, gilt für alle x.)

**BE*:** $\dfrac{\vee \mathrm{x}\mathrm{A}[\mathrm{x}]}{\mathrm{A}[\mathrm{x}/\mathrm{y}]}$ wo y eine GV sei, die nicht frei in $\vee \mathrm{x}\mathrm{A}[\mathrm{x}]$ vorkommt.
(Es gibt ein x, für das gilt A[x] — y sei ein solches).

Dadurch entstehe aus dem Kalkül NK der Kalkül QG. In QG kann nun offenbar nicht mehr jede Ableitungsfigur als Ableitung der Formel in der letzten Zeile aus den Formeln, von denen sie abhängt, verstanden werden. Vielmehr wird nun neben jeder Konklusion einer kritischen Regel EA und BE die dabei eliminierte bzw. eingeführte GV y markiert in Abhängigkeit von den GV $\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_\mathrm{n}$, die frei in der Konklusion bzw. der Prämisse vorkommen -- wir schreiben die Markierung in der Form $\mathrm{y}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_\mathrm{n})$ — und es wird festgelegt, daß eine Ableitungsfigur $\mathfrak{H}$ mit der letzten Zeile $n(n_1, \ldots, n_m)$ A nur dann eine Ableitung von A aus den Formeln $\mathrm{B}_1, \ldots \mathrm{B}_m$, die in den Zeilen mit den Nummern $n_1, \ldots, n_m$ stehen, in QG ist, wenn gilt: a) in $\mathfrak{H}$ ist keine GV mehrfach markiert, b) in den Formeln $B_1, \ldots, B_m$, A kommt keine der in $\mathfrak{H}$ markierten GV frei vor und c) die markierten GV von $\mathfrak{H}$ lassen sich so ordnen, daß keine bzgl. dieser Ordnung früher markierte GV von einer bzgl. ihr später markierten GV abhängt (eine solche Ordnung bezeichnet man auch als eine *normierte* Ordnung der markierten GV)[1].

Die letzteren Restriktionen für den Beweisbegriff von QG wirken zunächst recht ungewöhnlich, da nach ihnen eine Fortsetzung eines Beweises vermittels Anwendung einer Deduktionsregel nicht immer wieder einen Beweis ergibt. Diese Restriktionen sind aber wesentlich angesichts der Formulierung der p.l. Regeln. Ohne diese Restriktionen könnte man in QG z. B. folgende Ableitungsbeziehungen beweisen, denen keine p.l. gültigen Schlüsse entsprechen.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1(1) | $\bigvee x f(x)$ | | AF |
| 2(1) | $f(x)$ | $x$ | BE* |

Die Endformel enthält hier die markierten GV $x$ frei.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1(1) | $\bigvee x f(x)$ | | AF |
| 2(1) | $f(x)$ | $x$ | BE* |
| 3(1) | $\bigwedge x f(x)$ | $x$ | EA* |

Die GV $x$ ist hier zweimal markiert worden.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1(1) | $\bigwedge x \bigvee y f(x, y)$ | | AF |
| 2(1) | $\bigvee y f(x, y)$ | | BA |
| 3(1) | $f(x, y)$ | $y(x)$ | BE* |
| 4(1) | $\bigwedge x f(x, y)$ | $x(y)$ | EA* |
| 5(1) | $\bigvee y \bigwedge x f(x, y)$ | | EE |

Es gibt keine normierte Ordnung der markierten GV $x$ und $y$.

Einen genaueren Einblick in die Wirkungsweise dieser Restriktionen wird der folgende Äquivalenzbeweis für die Kalküle NK und QG liefern.

**2.4.2.5.1** Die Kalküle NK und QG sind äquivalent.

Beweis: a) Ist die Formel A in NK aus Formeln $\Delta$ ableitbar, so auch in QG. Um schneller ans Ziel zu kommen, beweisen wir hierzu nicht, daß sich jede Ableitung in NK in eine Ableitung in QG umformen läßt, sondern zeigen: a') In QG sind alle Sätze beweisbar, die in $\mathfrak{P}1$

[1] Die Formulierung dieser Restriktionen entnehmen wir aus [35].

beweisbar sind. Wegen EI und BI genügt es ja zum Beweis der Behauptung (a) zu zeigen, daß jede in NK beweisbare Formel auch in QG beweisbar ist. Wegen der oben nachgewiesenen Adäquatheit von NK sind aber in NK nur die in $\mathfrak{P}1$ beweisbaren Formeln beweisbar. Die Behauptung (a') beweisen wir nun durch Induktion nach der Länge $l$ eines Beweises für eine Formel A in $\mathfrak{P}1$. Ist $l = 1$, so ist A Axiom von $\mathfrak{P}1$. In QG sind aber wie in NK die a.l. Axiome A1, A2, A3 beweisbar und A4 erhält man mit:

| | | |
|---|---|---|
| 1(1) | $\wedge x A[x]$ | AF |
| 2(1) | $A[x/y]$ | BA |
| 3 | $\wedge x A[x] \supset A[x/y]$ | EI. |

Es sei nun die Behauptung für alle $l \leqslant n$ bewiesen und $l$ sei $n + 1$. Ist A ein Axiom von $\mathfrak{P}1$, so argumentiert man wie oben. Ist A Konklusion einer Anwendung der Regel R1 oder R2 von $\mathfrak{P}1$, so gibt es nach Induktionsvoraussetzung Beweise $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$ bzw. einen Beweis $\mathfrak{H}$ in QG für die Prämissen bzw. die Prämisse von A. Durch evtl. Umbenennung solcher GV, die zugleich in $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$ markiert sind und Anwendung von BI kann man dann aus $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$ einen Beweis für A gewinnen, wenn A Konklusion von R1 ist. Im Fall der Regel R2 hat A die Gestalt $B \supset C[x]$, wo x nicht frei in B vorkommt. $z_1, \ldots, z_n$ sei eine normierte Ordnung der in $\mathfrak{H}$ markierten GV, von denen also keine frei in $B \supset C[x]$ vorkommt und die somit alle von x verschieden sind. Wir verlängern dann $\mathfrak{H}$ wie folgt zu einem Beweis für $B \supset \wedge x C[x]$ in QG:

| | | |
|---|---|---|
| $\vdots$ | | |
| $B \supset C[x]$ | | $\mathfrak{H}$ |
| $B$ | | AF |
| $C[x]$ | | BI |
| $\wedge x C[x]$ | x | EA* |
| $B \supset \wedge x C[x]$ | | EI. |

Hier ist keine GV mehrfach markiert, da x von $z_1, \ldots, z_n$ verschieden ist, keine der markierten GV kommt in der Endformel frei vor, da $z_1, \ldots, z_n$ nicht frei in $B \supset C[x]$ und also auch nicht frei in $B \supset \wedge x C[x]$ vorkommen und x in dieser Formel gebunden ist, und $x, z_1, \ldots, z_n$ ist eine normierte Ordnung der markierten GV, da x nicht von den GV $z_1, \ldots, z_n$ abhängt, die ja in $\wedge x C[x]$ nicht frei vorkommen.

b) Ist die Formel A in QG aus Formeln $\Delta$ ableitbar, so auch in NK. Wir zeigen durch Induktion nach der Zahl $k$ von Anwendungen kritischer p.l. Regeln in $\mathfrak{H}$, daß sich eine Ableitung $\mathfrak{H}$ von A aus $\Delta$ in QG in eine Ableitung von A aus $\Delta$ in NK umformen läßt. Für $k = 0$ ist die Behauptung trivial, da die Axiome und nichtkritischen Regeln von QG auch Axiome und Regeln von NK sind. Sei die Behauptung bereits bewiesen für $k = n$ und sei nun $k = n + 1$. Es sei $y_1, \ldots, y_{n+1}$ eine normierte Ordnung der in $\mathfrak{H}$ markierten GV, und es sei $y_1$ markiert bei einer Anwendung von

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| EA*: | $m$ | $B[x/y_1]$ | | bzw. | BE*: | $m$ | $\vee x B[x]$ | |
| | $m+1$ | $\wedge x B[x]$ | $y_1$ | | | $m+1$ | $B[x/y_1]$ | $y_1$. |

Wir setzen dann in $\mathfrak{H}$ vor die Zeile $m$ eine Zeile $B[x/y_1] \supset \wedge x B[x]$ bzw. $\vee x B[x] \supset B[x/y_1]$ ein, aus der sich dann die Formel $\wedge x B[x]$ bzw. $B[x/y_1]$ mit der Formel $B[x/y_1]$ bzw. $\vee x B[x]$ und einer Anwendung von BI ergibt. So entstehe aus $\mathfrak{H}$ eine Ableitung $\mathfrak{H}'$ von A aus $\Delta$, $B[x/y_1] \supset \wedge x B[x]$ bzw. aus $\Delta$, $\vee x B[x] \supset B[x/y_1]$, in der nun die GV $y_1$ nicht mehr markiert ist, und die nur mehr $n$ Anwendungen kritischer Regeln enthält. Daß $\mathfrak{H}'$ den Bedingungen für Ableitungen in QG genügt, ergibt sich daraus, daß $\mathfrak{H}$ diesen Bedingungen genügen sollte, so daß in $\mathfrak{H}'$ keine GV mehrfach markiert ist und in den Formeln A, $\Delta$ die GV $y_1, \ldots, y_{n+1}$ nicht frei vorkommen. In $B[x/y_1] \supset \wedge x B[x]$ bzw. $\vee x B[x] \supset B[x/y_1]$ kommt aber keine der GV $y_2, \ldots, y_{n+1}$ frei vor, da $y_1$ sonst von einer dieser GV abhängen würde und also die Folge $y_1, \ldots, y_{n+1}$ keine normierte Ordnung für $\mathfrak{H}$ wäre. Endlich ist $y_2, \ldots, y_{n+1}$ eine normierte Ordnung der in $\mathfrak{H}'$ markierten GV. — Nach Induktionsvoraussetzung gibt es nun eine Ableitung von A aus den Formeln $\Delta, B[x/y_1] \supset \wedge x B[x]$ bzw. $\Delta, \vee x B[x] \supset B[x/y_1]$ in NK, aus der man mit der Annahmeformel $\vee y_1(B[x/y_1] \supset \wedge x B[x])$ bzw. $\vee y_1(\vee x B[x] \supset B[x/y_1])$ und BE eine Ableitung von A aus den Formeln $\Delta$, $\vee y_1(B[x/y_1] \supset \wedge x B[x])$ bzw. $\Delta$, $\vee y_1(\vee x B[x] \supset B[x/y_1])$ erhält und also eine Ableitung von A aus $\Delta$, da die Formeln $\vee y_1(B[x/y_1] \supset \wedge x B[x])$ und $\vee y_1(\vee x B[x] \supset B[x/y_1])$ in NK beweisbar sind:

| | | | |
|---|---|---|---|
| A) | 1(1) | $\vee x B[x]$ | AF |
| | 2(2) | $\neg \vee x B[x]$ | AF |
| | 3(1, 2) | F | BN |
| | 4(1, 2) | $B[x/y_1]$ | HV |
| | 5(2) | $\vee x B[x] \supset B[x/y_1]$ | EI |
| | 6(2) | $\vee y_1(\vee x B[x] \supset B[x/y_1])$ | EE |
| | 7(7) | $B[x/y_1]$ | AF |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 8(7) | $\bigvee x B[x] \supset B[x/y_1]$ | EI |
| | 9(7) | $\bigvee y_1(\bigvee x B[x] \supset B[x/y_1])$ | EE |
| | 10(1) | $\bigvee y_1(\bigvee x B[x] \supset B[x/y_1])$ | BE (9, 1) |
| | 11 | $\bigvee x B[x] \vee \neg \bigvee x B[x]$ | TND |
| | 12 | $\bigvee y_1(\bigvee x B[x] \supset B[x/y_1])$ | BD (6, 10) |
| B) | 1(1) | $\neg B[x/y_1]$ | AF |
| | 2(2) | $B[x/y_1]$ | AF |
| | 3(1, 2) | F | BN |
| | 4(1, 2) | $\bigwedge x B[x]$ | HV |
| | 5(1) | $B[x/y_1] \supset \bigwedge x B[x]$ | EI |
| | 6(1) | $\bigvee y_1(B[x/y_1] \supset \bigwedge x B[x])$ | EE |
| | 7(7) | $\bigvee x \neg B[x]$ | AF |
| | 8(7) | $\bigvee y_1(B[x/y_1] \supset \bigwedge x B[x])$ | BE |
| | 9(9) | $\neg \bigvee x \neg B[x]$ | AF |
| | 10(1) | $\bigvee x \neg B[x]$ | EE |
| | 11(1, 9) | F | BN |
| | 12(9) | $\neg\neg B[x/y_1]$ | EN |
| | 13(9, 1) | F | BN |
| | 14(9, 1) | $B[x/y_1]$ | HV |
| | 15 | $B[x/y_1] \vee \neg B[x/y_1]$ | TND |
| | 16(9) | $B[x/y_1]$ | BD (2, 14) |
| | 17(9) | $\bigwedge x B[x]$ | EA |
| | 18(9) | $B[x/y_1] \supset \bigwedge x B[x]$ | EI |
| | 19(9) | $\bigvee y_1(B[x/y_1] \supset \bigwedge x B[x])$ | EE |
| | 20 | $\bigvee x \neg B[x] \vee \neg \bigvee x \neg B[x]$ | TND |
| | 21 | $\bigvee y_1(B[x/y_1] \supset \bigwedge x B[x])$ | BD (8, 19) |

Damit ist die Äquivalenz der Kalküle QG und NK bewiesen[1].

Zur Verdeutlichung der Deduktionstechnik in QG geben wir noch drei Beispiele für Ableitungen an:

| | | | |
|---|---|---|---|
| IV) | 1(1) | $\bigvee x f(x)$ | AF |
| | 2(1) | $f(y)$ | $y$ BE* |

[1] Beim Beweis der Teilbehauptung (b) mußten wir in NK das Axiom TND verwenden, unabhängig davon, ob in der Ableitung $\mathfrak{H}$ von A aus in QG dieses Axiom verwendet wurde oder nicht. Daher kann man nun nicht mehr sagen, daß aus QG durch Streichung des Axioms TND ein intuitionistischer Kalkül entstünde. Das erste und dritte der folgenden Beispiele zeigen vielmehr, wie in QG auch ohne eine Verwendung von TND Formeln bewiesen werden können, die nur klassisch gültig sind.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 3 | $\bigvee x f(x) \supset f(y)$ | | EI |
| | 4 | $\bigvee y(\bigvee x f(x) \supset f(y))$ | | EE |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| V) | 1(1) | $\bigvee x \bigwedge y f(x, y)$ | | AF |
| | 2(1) | $\bigwedge y f(x, y)$ | $x$ | BE* |
| | 3(1) | $f(x, y)$ | | BA |
| | 4(1) | $\bigvee x f(x, y)$ | | EE |
| | 5(1) | $\bigwedge y \bigvee x f(x, y)$ | $y$ | EA* |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| VI) | 1(1) | $f(x, y)$ | | AF |
| | 2(1) | $\bigwedge x f(x, y)$ | $x(y)$ | EA* |
| | 3(3) | $\neg \bigwedge x f(x, y)$ | | AF |
| | 4(1, 3) | F | | BN |
| | 5(3) | $\neg f(x, y)$ | | EN |
| | 6(3) | $\bigvee z \neg f(z, y)$ | | EE |
| | 7 | $\neg \bigwedge x f(x, y) \supset \bigvee z \neg f(z, y)$ | | EI |

Mit der Darstellung des Kalküls QG wollen wir unseren Überblick über die verschiedenen Möglichkeiten der Formalisierung des natürlichen Schließens beenden. Durch die Behandlung der Kalküle $\mathfrak{P}1$ bis $\mathfrak{P}4$, sowie NK und QG, ihrer Äquivalenz und Adäquatheit und der verschiedenen semantischen Ansätze in 2.2.2 und 2.4.2.3 haben wir einen hinreichend tiefen Einblick in die Strukturen der P.L. gewonnen, so daß wir nun die engere P.L. verlassen können, um uns im nächsten Kapitel der Aufgabe einer Erweiterung der Ausdrucksmittel der elementaren Logik zuzuwenden.

Material für ein weiterführendes Studium der P.L. findet sich in [9]. Zum Thema des Abschnittes 2.4 findet man weiteres Material in [10], [42] und [55].

*Übungsaufgaben:*

1. Man beweise die folgenden Ableitungsbeziehungen bzw. die ihnen entsprechenden SQ in den Kalkülen $\mathfrak{P}2$, $\mathfrak{P}3$, $\mathfrak{P}4$, NK und QG:

a) $\bigvee xA[x] \supset B \vdash \bigwedge x(A[x] \supset B)$, wo B die GV x nicht frei enthält,
b) $\bigwedge x(A[x] \supset B[x]) \vdash \bigvee xA[x] \supset \bigvee xB[x]$
c) $\vdash \bigvee xA[x] \equiv \neg \bigwedge x \neg A[x]$
d) $\vdash \bigwedge xA[x] \equiv \bigwedge yA[x/y]$, wo x frei ist für y und y nicht frei in $\bigwedge xA[x]$ vorkommt,
e) $\bigwedge x \bigvee y f(x, y), \bigwedge xy(f(x, y) \supset f(y, x)) \vdash \bigwedge x \bigvee y f(y, x)$.

2. Man gebe einen direkten syntaktischen Äquivalenzbeweis für die Kalküle $\mathfrak{P}3$ und $\mathfrak{P}2^*$ an, ohne auf die Äquivalenz von $\mathfrak{P}3$ und $\mathfrak{P}2$ und von $\mathfrak{P}2$ und $\mathfrak{P}2^*$ zurückzugreifen!

3. Man beweise die Zulässigkeit der Regel TR in NK und in QG!

4. Man beweise die Äquivalenz der Kalküle $\mathfrak{P}1$ und NK direkt durch Induktion nach der Länge der Ableitungen!

5. Man beweise durch Induktion nach der Zahl $k$ von Anwendungen von kritischen p.l. Regeln in $\mathfrak{H}$, daß sich jede Ableitung $\mathfrak{H}$ einer Formel A aus Formeln $\Delta$ in NK in eine Ableitung von A aus $\Delta$ in QG umformen läßt!

# 3 Erweiterungen und Anwendungen der Prädikatenlogik

## 3.1 Die Identität

In diesem Kapitel wollen wir zwei Erweiterungen der Ausdrucksmöglichkeiten der elementaren Logik angeben, die für die Formalisierbarkeit von Theorien in dieser Logik eine wichtige Rolle spielen. Die erste dieser Erweiterungen soll darin bestehen, daß wir in die Sprache $\mathfrak{P}$ ein Zeichen für die Identität aufnehmen, mit dem wir eine Aussage formulieren können, die besagt, daß zwei Dinge identisch sind. Als Zeichen für die Identität wählen wir das aus der Mathematik gebräuchliche Symbol „="[1]. Dies Zeichen nehmen wir als zweistellige Prädikatkonstante (kurz PK) zu den Grundzeichen der Sprache $\mathfrak{P}$ hinzu und fügen in der Formregel 2.2.1—a den Zusatz hinzu: Sind x und y GV von $\mathfrak{P}$, so ist $\mathrm{x} = \mathrm{y}$ eine Atomformel von $\mathfrak{P}$.

Die so erweiterte Sprache $\mathfrak{P}$ bezeichnen wir auch als $\mathfrak{P}^+$.

Die folgenden Beispiele sollen auf die Ausdrucksmöglichkeiten hinweisen, die uns durch die Einführung der Identität erschlossen werden:

1) Wir übersetzen den Satz „Hans ist der größte Mensch in diesem Raum" in unsere Symbolsprache. Stehe „$x$" für „Hans", „$f(y)$" für „$y$ ist ein Mensch in diesem Raum" und „$g(y, z)$" für „$y$ ist größer als $z$", so erhalten wir die Formel $f(x) \wedge \bigwedge y(f(y) \wedge \neg y = x \supset g(x, y))$. Würden wir hier das Konjunktionsglied $\neg y = x$ fortlassen, so erhielten wir eine falsche Aussage, da aus $f(x)$ folgt $g(x, x)$, so daß wir eine Aussage erhielten, die besagte, daß Hans größer ist als er selbst.

Die Übersetzung der Aussage „Abgesehen von Karl ($y$) und Fritz ($z$) ist Hans der größte Mensch in diesem Raum" würde entsprechender Weise lauten $f(x) \wedge \bigwedge u(f(u) \wedge \neg u = x \wedge \neg u = y \wedge \neg u = z \supset g(x, u))$.

---

[1] Dieses Symbol haben wir auch als metasprachliches Zeichen verwendet. Wir können aber auf eine graphische Unterscheidung von objekt- und metasprachlichem Identitätszeichen verzichten, da im folgenden aus dem Kontext immer klar hervorgeht, welche Sprachebene gemeint ist.

2) Steht „$x$" für „Hans", „$f(y)$" für „$y$ ist ein Mädchen" und „$g(y, z)$" für „$y$ liebt $z$", so besagt die Formel $\bigwedge yz(f(y) \wedge f(z) \wedge g(x, y) \wedge g(x, z) \supset y = z)$", daß Hans nur ein Mädchen liebt.

3) Steht „$f(x)$" für „$x$ ist ein Häuptling der Kuwumbu", so besagt der Satz $\bigvee x \bigwedge y(f(y) \equiv y = x)$, daß es genau einen Häuptling der Kuwumbu gibt. Denn aus diesem Satz folgen die Sätze $\bigvee x(f(x) \equiv x = x)$, $\bigvee x(x = x \supset f(x))$ und wegen $x = x$ also $\bigvee x f(x)$, d. h. der Satz impliziert, daß es einen solchen Häuptling gibt. Die Annahme, daß es zwei Häuptlinge gibt, ist aber mit dem Satz unverträglich. Denn aus $f(u)$ und $f(v)$ ergibt sich nach dem Satz $\bigvee x(u = x \wedge v = x)$, also $u = v$.

Weitere Beispiele für die Bedeutung der Identität bei der Formalisierung von umgangssprachlichen oder mathematischen Aussagen werden wir später noch kennenlernen.

Zur semantischen Deutung des Identitätssymbols gehen wir von der Interpretationssemantik nach 2.2.2 aus und nehmen zu der Bestimmung 2.2.2.1—b die Festsetzung hinzu:

**3.1.1** $\mathfrak{B}^{3 \cdot 2}$ soll die PK „=" abbilden auf die Menge der geordneten Paare $\langle a, a \rangle$ von Objekten $a$ aus dem Grundbereich $\gamma$.

Dann gilt nach 2.2.2.1—c1 $\mathfrak{B}^1(\mathrm{x} = \mathrm{y}) = \mathfrak{w}$ genau dann, wenn $\mathfrak{B}^2(\mathrm{x})$ mit $\mathfrak{B}^2(\mathrm{y})$ identisch ist, d. h. wenn $\mathfrak{B}^2$ den GV x und y das gleiche Objekt aus $\gamma$ zuordnet.

Die Gültigkeit der Sätze 2.2.2.3, 2.2.2.13, 2.2.2.14 und 2.2.2.15 wird durch die Zusatzforderung 3.1.1 an die Interpretationen nicht berührt, wie man durch Überprüfung der Beweise für diese Sätze leicht feststellen kann. Der Satz 2.2.2.17 hingegen gilt nicht mehr. Denn im Beweis dieses Satzes hatten wir eine Interpretation $\mathfrak{B}_2$ über einem Bereich $\gamma_2$ definiert bzgl. einer Bewertung $\mathfrak{B}_1$ über dem Bereich $\gamma_1$ durch die Festsetzung: $\mathfrak{B}_2^{3 \cdot n}(\mathrm{f})$ ist die Menge aller $n$-tupel $a_1, \ldots, a_n$ aus $\gamma_2$, für die gilt $\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n) \varepsilon \mathfrak{B}_1^{3 \cdot n}(\mathrm{f})$. Durch $\varphi$ können aber verschiedene Objekte $a$ und $b$ aus $\gamma_2$ auf denselben Gegenstand $c$ aus $\gamma_1$ abgebildet werden. Die Festsetzung bewirkt dann, daß gilt $a, b \varepsilon \mathfrak{B}_2(=)$ (also $\mathfrak{B}_2(a = b) = \mathfrak{w}$), da $c, c \varepsilon \mathfrak{B}_1(=)$, also $\varphi(a), \varphi(b) \varepsilon \mathfrak{B}_1(=)$. Die Festsetzung ist also mit der Bedingung 3.1.1 nicht im Einklang. Tatsächlich kann man unter Benützung der Identität auch z. B. den Satz $\bigwedge xyz(x = y \vee y = z \vee z = x)$ formulieren, der besagt, daß es höchstens zwei Individuen gibt. Dieser Satz ist in einem zweizahligen Bereich erfüllbar, aber nicht in einem

Bereich mit mehr als zwei Individuen. Er bildet also ein Gegenbeispiel für die Behauptung des Satzes 2.2.2.17.

Mit 2.2.2.17 fällt auch der Satz 2.2.2.18 dahin, aus dem ja 2.2.2.17 folgt.

Wir wollen nun einen Identitätskalkül $\mathfrak{P}1^+$ angeben. Dazu nehmen wir zum Kalkül $\mathfrak{P}1$ die Axiome

**A5:** $\wedge x(x = x)$

**A6:** $\wedge xy(x = y \supset (A[x] \supset A[x/y]))$ — x sei frei für y in A[x] —

hinzu. A6 ist ein Axiomenschema, in das man für A[x] beliebige Formeln der erweiterten Sprache $\mathfrak{P}^+$ einsetzen kann.

In $\mathfrak{P}1^+$ gelten offenbar alle in 1.3.4 und 2.3.2 bewiesenen Theoreme und Metatheoreme, insbesondere auch MT4 und MT5, da der Beweis dieser Metatheoreme nicht auf die spezifische Gestalt der Atomformeln Bezug nimmt.

A5 besagt, daß die Identitätsbeziehung reflexiv ist. Wir wollen nun auch die Symmetrie und die Transitivität dieser Beziehung beweisen:

**T55:** $\vdash x = y \supset y = x$ (Symmetrie)

Beweis:

| | | |
|---|---|---|
| $x = y \supset (x = x \supset y = x)$ | A6 | (wir setzen z = x für A[z]) |
| $x = x \supset (x = y \supset y = x)$ | T9 | |
| $x = y \supset y = x$ | R1, A5 | |

**T56:** $\vdash x = y \wedge y = z \supset x = z$ (Transitivität)

Beweis:

| | | |
|---|---|---|
| $y = z \supset (x = y \supset x = z)$ | A6 | (wir setzen x = u für A[u]) |
| $x = y \wedge y = z \supset x = z$ | T9, T37 | |

Wir zeigen nun, daß die Formalisierung der Identität in $\mathfrak{P}1^+$ adäquat ist:

**3.1.2** In $\mathfrak{P}1^+$ sind genau diejenigen Sätze beweisbar, die durch alle Interpretationen erfüllt werden, die 3.1.1 genügen.

1) $\mathfrak{P}1^+$ ist semantisch widerspruchsfrei. Alle p.l. Interpretationen erfüllen nach 2.3.3.2 die Axiome A1 bis A4. Also erfüllen auch

alle solche Interpretationen, die zusätzlich der Bedingung **3.1.1** genügen, diese Axiome. Diese Interpretationen erfüllen A5 trivialerweise und sie erfüllen auch A6. Denn aus $\mathfrak{B}(x = y) = \mathfrak{w}$ folgt $\mathfrak{B}(x) = \mathfrak{B}(y)$ und daraus erhalten wir mit **2.2.2.3** $\mathfrak{B}(A[x]) = \mathfrak{B}(A[x/y])$, also folgt aus $\mathfrak{B}(A[x]) = \mathfrak{w}$ auch $\mathfrak{B}(A[x/y]) = \mathfrak{w}$. Ferner gilt: wenn alle Interpretationen, die **3.1.1** genügen, die Prämissen einer der Deduktionsregeln von $\mathfrak{P}1^+$ (R1, R2) erfüllen, so erfüllen sie auch deren Konklusion. Das ergibt sich wie unter **2.3.3.2**, da die Zusatzforderung **3.1.1** auf die dortige Überlegung keinen Einfluß hat.

2) $\mathfrak{P}1^+$ ist semantisch vollständig. A sei eine Formel mit den PV $f_1, \ldots, f_m$ und A sei erfüllt von allen Interpretationen, die **3.1.1** genügen. $C_1, \ldots, C_n$ ($n \geqslant m$) seien diejenigen Formeln, die man aus dem Schema A6 erhalten kann wenn man $A[x]$ auf Atomformeln spezialisiert, die mit den PV $f_1, \ldots, f_m$ und der PK $=$ gebildet sind. Für eine einstellige PV $f$ erhalten wir aus A6 so die Formel $\wedge xy(x = y \supset (f(x) \supset f(y)))$, für eine zweistellige PV $g$ erhalten wir aus A6 die beiden Formeln $\wedge xy(x = y \supset (g(x, z) \supset g(y, z)))$ und $\wedge xy(x = y \supset (g(z, x) \supset g(z, y)))$, usf. C sei die Formel $\wedge x(x = x) \wedge C_1 \wedge \ldots \wedge C_n$. Wir behaupten nun, daß alle p.l. Interpretationen (unabhängig davon, ob sie **3.1.1** genügen oder nicht) die Formel $C \supset A$ erfüllen, so daß wir wegen R1 mit **2.3.3.4** erhalten $C \vdash A$ in $\mathfrak{P}1$, also mit T23 $\vdash A$ in $\mathfrak{P}1^+$.

Ist $\mathfrak{B}_1$ eine Interpretation über dem Bereich $\gamma_1$, die C erfüllt, so ist $\mathfrak{B}_1(=)$ nach (1) eine zweistellige Relation $\varrho$, die reflexiv, symmetrisch und transitiv ist in $\gamma_1$. Denn aus C gewinnt man mit T21 und T22 A6, T55 und T56. Es gilt also $\varrho(a, a)$, aus $\varrho(a, b)$ folgt $\varrho(b, a)$, aus $\varrho(a, b)$ und $\varrho(b, c)$ folgt $\varrho(a, c)$. Wir zerlegen nun den Bereich $\gamma_1$ in Teilklassen $\gamma_a$, indem wir zu jedem Element $a$ von $\gamma_1$ die Menge derjenigen Elemente $b$ von $\gamma_1$ bilden, für die gilt $\varrho(a, b)$. Wegen $\varrho(a, a)$ ist keine dieser Mengen $\gamma_a$ leer. Ferner enthalten zwei verschiedene Klassen $\gamma_a$ und $\gamma_b$ kein gemeinsames Element $c$. Denn ist $c$ in $\gamma_a$ und in $\gamma_b$, so gilt $\varrho(a, c)$ und $\varrho(b, c)$. Die Symmetrie von $\varrho$ liefert dann $\varrho(c, b)$ und die Transitivität $\varrho(a, b)$. Daraus folgt aber, daß alle Elemente $d$ von $\gamma_b$ in $\gamma_a$ enthalten sind: aus $\varrho(b, d)$ folgt mit der Transitivität von $\varrho$ $\varrho(a, d)$. Umgekehrt findet man ebenso, daß alle Elemente von $\gamma_a$ in $\gamma_b$ enthalten sind, so daß die Mengen $\gamma_a$ und $\gamma_b$ identisch sind, sofern sie ein gemeinsames Element enthalten. Wir greifen nun aus jeder Menge $\gamma_a$ ein Element $a^*$ heraus und vereinigen diese ausgewählten Elemente zur Menge $\gamma_2$. $\varphi$ sei die Funktion, die $\gamma_1$ so auf $\gamma_2$ abbildet, daß allen Elementen einer Menge $\gamma_a$ das Element $a^*$ zugeordnet wird. Wir definieren nun über $\gamma_2$ eine Interpretation $\mathfrak{B}_2$, indem wir setzen: $\mathfrak{B}_2(\mathrm{x}) = \varphi(\mathfrak{B}_1(\mathrm{x}))$ für alle GV x, und $\mathfrak{B}_2^{3 \cdot n}(\mathrm{f})$ ist die Menge aller $n$-tupel $a_1, \ldots, a_n$ aus $\gamma_2$, für die gilt $a_1, \ldots, a_n \varepsilon \mathfrak{B}_1^{3 \cdot n}(\mathrm{f})$.

Dann ist $\mathfrak{B}_2$ eine Interpretation, die der Forderung 3.1.1 genügt. Denn aus $a, b \varepsilon \mathfrak{B}_2(=)$ folgt $a, b \varepsilon \mathfrak{B}_1(=)$, also $\varrho(a, b)$ und daher $\varphi(a) = \varphi(b)$. Da aber $a$ und $b$ aus $\gamma_2$ sind, gilt $\varphi(a) = a$ und $\varphi(b) = b$, also $a = b$. Gilt umgekehrt $a = b$, so gilt auch $\varrho(a, b)$, also $a, b \varepsilon \mathfrak{B}_1(=)$. Sind $a$ und $b$ aus $\gamma_2$, so gilt daher auch $a, b \varepsilon \mathfrak{B}_2(=)$. Nach unserer Annahme über die Formel A, die von jeder Interpretation erfüllt werden sollte, die 3.1.1 genügt, erfüllt also $\mathfrak{B}_2$ die Formel A. Wir zeigen nun: I) $\mathfrak{B}_1(\mathrm{B}) = \mathfrak{B}_2(\mathrm{B})$ für alle Formeln B, die nur PV aus A enthalten. Daraus folgt dann sofort unsere frühere Behauptung, daß $\mathfrak{B}_1$ die Formel A erfüllt.

Zum Beweis von (I) benötigen wir zunächst die Beziehung II) Aus $\varrho(a_1, b_1)$ und ... und $\varrho(a_n, b_n)$ und $a_1, \ldots, a_n \varepsilon \mathfrak{B}_1(\mathrm{f})$ folgt $b_1, \ldots, b_n \varepsilon \mathfrak{B}_1(\mathrm{f})$. Da $\mathfrak{B}_1$ die Formel C erfüllt, gilt aber für jede $n$-stellige PV f aus A und alle $n$-tupel $a_1, \ldots, a_n$ und $b_1, \ldots, b_n$ aus $\gamma_1$:

Aus $\varrho(a_1, b_1)$ folgt: wenn $a_1, \ldots, a_n \varepsilon \mathfrak{B}_1(\mathrm{f})$, dann $b_1, a_2, \ldots, a_n \varepsilon \mathfrak{B}_1(\mathrm{f})$.

Aus $\varrho(a_2, b_2)$ folgt: wenn $b_1, a_2, \ldots, a_n \varepsilon \mathfrak{B}_1(\mathrm{f})$, dann $b_1, b_2, a_3, \ldots, a_n \varepsilon \mathfrak{B}_1(\mathrm{f})$.

. . . . . .

Aus $\varrho(a_n, b_n)$ folgt: wenn $b_1, \ldots, b_{n-1}, a_n \varepsilon \mathfrak{B}_1(\mathrm{f})$, dann $b_1, \ldots, b_n \varepsilon \mathfrak{B}_1(\mathrm{f})$.

Daraus erhält man aber unter Benützung der Transitivität der Implikation sofort die Behauptung (II).

Wir beweisen nun die Behauptung (I) durch Induktion nach dem Grad $n$ der Formel B.

$n = 0$: Aus $\mathfrak{B}_1(\mathrm{x} = \mathrm{y}) = \mathfrak{w}$ folgt $\varrho(\mathfrak{B}_1(\mathrm{x}), \mathfrak{B}_1(\mathrm{y}))$, daraus $\varphi(\mathfrak{B}_1(\mathrm{x})) = \varphi(\mathfrak{B}_1(\mathrm{y}))$, daraus $\mathfrak{B}_2(\mathrm{x}) = \mathfrak{B}_2(\mathrm{y})$ und also $\mathfrak{B}_2(\mathrm{x} = \mathrm{y}) = \mathfrak{w}$, da $\mathfrak{B}_2$ der Bedingung 3.1.1 genügt. Die Umkehrung dieser Schlußkette ergibt, daß aus $\mathfrak{B}_2(\mathrm{x} = \mathrm{y}) = \mathfrak{w}$ auch $\mathfrak{B}_1(\mathrm{x} = \mathrm{y}) = \mathfrak{w}$ folgt. Sei f eine $n$-stellige PV aus A, sei $\mathfrak{B}_1(\mathrm{x}_i) = a_i$, $\mathfrak{B}_2(\mathrm{x}_i) = b_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, so gilt $\varphi(a_i) = b_i$ und $\varrho(a_i, b_i)$. Aus $\mathfrak{B}_1(\mathrm{f}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n)) = \mathfrak{w}$ folgt $a_1, \ldots, a_n \varepsilon \mathfrak{B}_1(\mathrm{f})$, wegen (II) also $\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n) \varepsilon \mathfrak{B}_1(\mathrm{f})$, also $b_1, \ldots, b_n \varepsilon \mathfrak{B}_2(\mathrm{f})$, also $\mathfrak{B}_2(\mathrm{f}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n)) = \mathfrak{w}$. Aus $\mathfrak{B}_2(\mathrm{f}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n)) = \mathfrak{w}$ folgt umgekehrt auch $\mathfrak{B}_1(\mathrm{f}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n)) = \mathfrak{w}$ durch Umkehrung dieser Schlüsse.

Für den Induktionsschritt nehmen wir an, die Behauptung (I) sei bereits bewiesen für alle Formeln vom Grad $\leqslant n$ und B sei vom Grad $n + 1$. Die a.l. Fälle, in denen B die Gestalt $\neg C$ oder $C \supset D$ hat, erledigen sich in einfacher Weise. Wenn B die Gestalt $\wedge x C[x]$ hat, so folgt aus $\mathfrak{B}_1(\wedge x C[x]) = \mathfrak{f}$ die Existenz einer Interpretation $\overline{\mathfrak{B}}_1$, für die gilt $\overline{\mathfrak{B}}_1 \mathrel{\overline{\overline{\phantom{=}}}}_{x} \mathfrak{B}_1$ und $\overline{\mathfrak{B}}_1(C[x]) = \mathfrak{f}$. Wir definieren eine Interpretation $\overline{\mathfrak{B}}_2$ durch $\overline{\mathfrak{B}}_2 \mathrel{\overline{\overline{\phantom{=}}}}_{x} \mathfrak{B}_2$ und $\overline{\mathfrak{B}}_2(x) = \varphi(\overline{\mathfrak{B}}_1(x))$. Aus der Induktionsvoraussetzung erhalten wir dann $\overline{\mathfrak{B}}_2(C[x]) = \overline{\mathfrak{B}}_1(C[x]) = \mathfrak{f}$, also $\mathfrak{B}_2(\wedge x C[x]) = \mathfrak{f}$. Die Umkehrung dieser Überlegung, bei der man $\overline{\mathfrak{B}}_1(x) = \overline{\mathfrak{B}}_2(x)$ setzt, ergibt dann, daß aus $\mathfrak{B}_2(\wedge x C[x]) = \mathfrak{f}$ auch $\mathfrak{B}_1(\wedge x C[x]) = \mathfrak{f}$ folgt.

Damit ist die Behauptung (I) und also auch der Satz 3.1.2 bewiesen.

Wir haben oben schon hervorgehoben, daß sich in der Sprache $\mathfrak{P}^+$ Anzahlaussagen formulieren lassen. Wir wollen die Formulierung solcher Anzahlaussagen nun genauer untersuchen.

1) Die Aussage „Es gibt höchstens $n$ Dinge" läßt sich in unserem Formalismus ausdrücken, wenn wir sagen „Von je $n + 1$ Dingen sind mindestens zwei identisch": $\wedge x_1 \ldots x_{n+1}(x_1 = x_2 \vee \ldots \vee x_n = x_{n+1})$, wobei für je zwei verschiedene i und k aus $1 \ldots n$ ein Disjunktionsglied $x_i = x_k$ auftritt.

So besagt die Formel $\wedge xy(x = y)$, daß es höchstens ein Ding gibt, $\wedge xyz(x = y \vee x = z \vee y = z)$ besagt, daß es höchstens zwei Dinge gibt, usf. Eine Aussage des Inhalts, daß es höchstens abzählbar unendlich viele Dinge gibt, läßt sich hingegen in $\mathfrak{P}^+$ nicht ausdrücken. Denn aus dem Satz 2.2.2.14 von LÖWENHEIM folgt, daß jeder in abzählbar unendlichen Bereichen gültige Satz in allen unendlichen Bereichen gültig ist. Die fragliche Aussage wäre aber in abzählbaren Bereichen gültig, nicht hingegen in überabzählbaren Bereichen.

2) Die Aussage „Der Begriff $f$ trifft auf höchstens $n$ Dinge zu" ist entsprechenderweise durch die Formel $\wedge x_1 \ldots x_{n+1}(f(x_1) \wedge \ldots \wedge f(x_{n+1}) \supset x_1 = x_2 \vee \ldots \vee x_n = x_{n+1})$ wiederzugeben, wobei wieder alle Formeln $x_i = x_k$ für $i \neq k$ als Disjunktionsglieder auftreten. Die Formel $\wedge xyz(f(x) \wedge f(y) \wedge f(z) \supset x = y \vee x = z \vee y = z)$ besagt so, daß von je drei Dingen, auf die der Begriff $f$ zutrifft, zwei identisch sind, daß also $f$ höchstens auf zwei Dinge zutrifft.

3) Die Aussage „Es gibt mindestens $n$ Dinge" läßt sich durch die Formel $\vee x_1 \ldots x_n(x_1 \neq x_2 \wedge \ldots \wedge x_{n-1} \neq x_n)$ ausdrücken, wobei wir definieren:

**D5:** $x \neq y := \neg x = y$.

Als Konjunktionsglied soll dabei für jedes i und k aus $1, \ldots, n$ mit $i \neq k$ die Formel $x_i \neq x_k$ auftreten. So besagt der Satz $\bigvee xy(x \neq y)$, daß es mindestens zwei Dinge gibt, $\bigvee xyz(x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z)$, daß es mindestens drei Dinge gibt usf. In der Formel $\bigwedge x \neg f(x, x) \wedge \bigwedge x \bigvee y f(x, y) \wedge \bigwedge xyz(f(x, y) \wedge f(y, z) \supset f(x, z))$ hatten wir schon früher einen Satz kennen gelernt, der besagt, daß es mindestens abzählbar unendlich viele Dinge gibt[1].

4) Die Aussage „Der Begriff *f* trifft auf mindestens *n* Dinge zu" läßt sich dann durch die Formel $\bigvee x_1 \ldots x_n(x_1 \neq x_2 \wedge \ldots \wedge x_{n-1} \neq x_n \wedge f(x_1) \wedge \ldots \wedge f(x_n))$ wiedergeben. Der Satz $\bigvee xyz(x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z \wedge f(x) \wedge f(y) \wedge f(z))$ besagt so, daß der Begriff *f* auf mindestens drei Dinge zutrifft.

5) Die Aussagen „Es gibt genau *n* Dinge" bzw. „Der Begriff *f* trifft auf genau *n* Dinge zu" läßt sich dann als Konjunktion der Behauptungen „Es gibt höchstens *n* Dinge" und „Es gibt mindestens *n* Dinge" bzw. der Behauptungen „Der Begriff *f* trifft auf höchstens *n* Dinge zu" und „Der Begriff *f* trifft auf mindestens *n* Dinge zu" wiedergeben. Einen kürzeren Ausdruck dieser Behauptungen haben wir in den Formeln $\bigvee x_1 \ldots x_n(x_1 \neq x_2 \wedge \ldots \wedge x_{n-1} \neq x_n \wedge \bigwedge y(y = x_1 \vee \ldots \vee y = x_n))$ bzw. $\bigvee x_1 \ldots x_n(x_1 \neq x_2 \wedge \ldots \wedge x_{n-1} \neq x_n \wedge f(x_1) \wedge \ldots \wedge f(x_n) \wedge \bigwedge y(f(y) \supset y = x_1 \vee \ldots \vee y = x_n))$ vor uns, wobei wieder die Formeln $x_i \neq x_k$ als Konjunktionsglieder auftreten für $i \neq k$ und i, k aus $1, \ldots, n$.

Von Wichtigkeit für das Folgende ist insbesondere die Formalisierung der Aussage, daß ein Begriff, der durch die Formel $A[x]$ ausgedrückt werden möge, genau auf einen Gegenstand zutrifft. Wir erhalten dafür die Formel $\bigvee x(A[x] \wedge \bigwedge y(A[x/y] \supset y = x))$, für die wir auch folgende Abkürzung benützen:

**D6:** $\bigvee !xA[x] := \bigvee x(A[x] \wedge \bigwedge y(A[x/y] \supset y = x))$. Dabei soll y nicht frei in $A[x]$ vorkommen.

Die Formel $\bigvee !xA[x]$ ist also zu lesen als „das Prädikat $A[x]$ trifft auf genau einen Gegenstand zu".

Mit dem Definiens von D6 ist auch die kürzere Formel $\bigvee x \bigwedge y(A[y] \equiv y = x)$ äquivalent. Denn es gilt $\bigvee x(A[x] \wedge \bigwedge y(A[x/y] \supset y = x)) \equiv$

[1] Vgl. S. 149.

$\vee x \wedge y(A[x] \wedge (A[x/y] \supset y = x))$ nach T49. Es gilt nun $A[x] \equiv y = x \supset A[x/y]$, mit D3 und MT5 erhalten wir also $\vee x \wedge y(A[x] \wedge (A[x/y] \supset y = x)) \equiv \vee x \wedge y(A[x/y] \equiv y = x)$, mit T26 also die behauptete Äquivalenz.

Wir beweisen noch folgende Theoreme

**T57:** $\vee !x A[x] \vdash \vee x A[x]$

Beweis:

| | |
|---|---|
| $A[x] \wedge \wedge y(A[x/y] \supset y = x)$ | AF |
| $A[x]$ | T21 |
| $\vee x A[x]$ | T43, mit MT4, T44 und R1 also |
| $\vee x(A[x] \wedge \wedge y(A[x/y] \supset y = x)) \vdash \vee x A[x]$ | und daraus mit D6 die Behauptung. |

**T58:** $\vee !x A[x] \vdash \wedge yz(A[x/y] \wedge A[x/z] \supset y = z)$

Beweis:

| | |
|---|---|
| $A[x] \wedge \wedge y(A[x/y] \supset y = x)$ | AF |
| $\wedge y(A[x/y] \supset y = x)$ | T22 |
| $A[x/y] \supset y = x$ | A4, R1 |
| $A[x/z] \supset z = x$ | A4, R1 |
| $A[x/y] \wedge A[x/z]$ | AF |
| $y = x$ | T21, R1 |
| $z = x$ | T22, R1 |
| $x = z$ | T55, R1 |
| $y = x \wedge x = z$ | T23 |
| $y = z$ | T56, R1, mit MT4 und T38 also |
| $A[x] \wedge \wedge y(A[x/y] \supset y = x) \vdash \wedge yz(A[x/y] \wedge A[x/z] \supset y = z)$ | mit MT4, T44, R1 also |
| $\vee x(A[x] \wedge \wedge y(A[x/y] \supset y = x)) \vdash \wedge yz(A[x/y] \wedge A[x/z] \supset y = z)$, | mit D6 also die Behauptung. |

**T59:** $\vee !x A[x] \vdash \vee x(A[x] \wedge B[x]) \equiv \wedge x(A[x] \supset B[x])$

Beweis:

| | |
|---|---|
| $A[x] \wedge B[x]$ | 1. AF |
| $A[x]$ | T21 |

| | |
|---|---|
| $\quad A[x/y]$ | 2. AF |
| $\quad A[x] \land A[x/y]$ | T23 |
| $\bigvee! x A[x]$ | 3. AF |
| $\quad x = y$ | T58 |
| $\quad B[x] \supset B[x/y]$ | A6, R1 |
| $\quad B[x]$ | T22 |
| $\quad B[x/y]$ | R1 |
| $\quad A[x/y] \supset B[x/y]$ | MT4 (Befreiung von der 2. AF) |
| $\bigwedge x(A[x] \supset B[x])$ | T38 |
| $\bigvee x(A[x] \land B[x]) \supset \bigwedge x(A[x] \supset B[x])$ | MT4, T44 (Befreiung von der 1. AF) |
| $\bigwedge x(A[x] \supset B[x])$ | 4. AF |
| $\quad A[x] \supset B[x]$ | A6, R1 |
| $\quad A[x]$ | 5. AF |
| $\quad B[x]$ | R1 |
| $\quad A[x] \land B[x]$ | T23 |
| $\bigvee x(A[x] \land B[x])$ | T43, R1 |
| $\bigvee x A[x] \vdash \bigwedge x(A[x] \supset B[x]) \supset \bigvee x(A[x] \land B[x])$ | mit MT4, T44, R1 (Befreiung von der 4. und 5. AF), also mit T57 und T23, D3 |
| $\bigvee x(A[x] \land B[x]) \equiv \bigwedge x(A[x] \supset B[x])$ | |

*Übungsaufgaben:*

1) Man beweise, daß man in A6 die Einsetzungen für die Formel A[x] auf Atomformeln beschränken kann, ohne dadurch die Menge der in $\mathfrak{P}1^+$ beweisbaren Sätze einzuschränken. Der Beweis ist sowohl semantisch wie syntaktisch zu führen. (Anleitung: Für den semantischen Beweis gehe man von dem Vollständigkeitsbeweis für $\mathfrak{P}1^+$ aus und untersuche die dort benötigten Einsetzungen für A[x]. Im syntaktischen Beweis ist durch Induktion nach dem Grad der Formel A[x] zu zeigen, daß man aus den auf Atomformeln spezialisierten Axiomen nach A6 die allgemeinen Axiome nach A6 erhält.)

2) Gibt es eine Formel, die besagt, daß es genau abzählbar unendlich viele Dinge gibt?

3) Beweise folgende Theoreme:

a) $\vdash \bigwedge x(x = y \supset f(x)) \equiv f(y)$

b) $\vdash \bigwedge x(f(x) \supset x = y) \equiv \neg \bigvee x f(x) \lor \bigvee! x f(x) \land f(y)$

## 3.2 Kennzeichnungs- und Funktionsterme

Ausdrücke wie „der Autor des „Faust" ", „der Präsident der USA" oder „das Buch, das auf meinem Schreibtisch liegt" nennt man *Kennzeichnungsterme* oder *deskriptive Ausdrücke*, weil sie einen Gegenstand bezeichnen durch Angabe einer Eigenschaft, die ihm zukommt. Anstelle von „der Autor des „Faust" " können wir auch sagen „derjenige Mensch, der Autor des „Faust" ist", anstelle von „der Präsident der USA" auch „derjenige Mensch, der Präsident der USA ist", usf. In dieser Formulierung wird die Struktur der Bezeichnung durch die Hervorhebung der beschreibenden Eigenschaft noch deutlicher.

Eine solche Kennzeichnung eines Dinges durch Angabe einer Eigenschaft $F$ ist zunächst offenbar nur dann sinnvoll, wenn $F$ genau einem Ding zukommt. Nur dann zeichnet $F$ ja dieses Ding eindeutig aus. Wenn wir von *dem* deutschen König des Jahres 936 sprechen, so ist das korrekt, weil es 936 einen und nur einen deutschen König gab (Otto I.). Von *dem* deutschen König des Jahres 1078 oder des Jahres 1257 zu sprechen, wäre hingegen sinnlos, da es 1078 zwei deutsche Könige (Heinrich IV. und den Gegenkönig Rudolf von Schwaben), im Jahre 1257 (Interregnum) aber keinen deutschen König gab. Wenn also die beschreibende Eigenschaft $F$ auf kein Ding zutrifft, oder wenn sie auf mehrere Dinge zutrifft, so werden wir den Kennzeichnungsterm „dasjenige $x$, für das $F(x)$ gilt" als sinnlos ansehen und damit auch die Sätze, in denen dieser Term vorkommt. So ist z. B. der Satz „Der deutsche König des Jahres 1257 trug einen roten Bart" ebensowenig als wahr wie als falsch anzusehen.

Wir wollen nun Kennzeichnungsterme auch in unsere Sprache $\mathfrak{P}^+$ aufnehmen. Sie sollen dort die Gestalt $\iota x\mathrm{A}[x]$ erhalten. Dieser Ausdruck ist also zu lesen wie „dasjenige x, für das A[x] gilt". Das Symbol „$\iota$" nennen wir *Kennzeichnungsoperator*. Mit der Einführung solcher Kennzeichnungsausdrücke gewinnen wir neben den GV eine neue Gruppe von Ausdrücken, die bei der semantischen Deutung als Eigennamen fungieren. Daher wollen wir GV und Kennzeichnungsausdrücke zu einer eigenen Gruppe von wohlgeformten Ausdrücken der Sprache $\mathfrak{P}^+$, der Gruppe der *Terme* zusammenfassen. Die Formregel für Atomformeln ist dann wie folgt abzuändern: Wenn $\mathrm{t}_1, \ldots, \mathrm{t}_n$ Terme sind und f ist eine n-stellige PV, so ist $\mathrm{f}(\mathrm{t}_1, \ldots, \mathrm{t}_n)$ eine Formel. Sind s und t Terme, so ist auch $\mathrm{s} = \mathrm{t}$ eine Formel.

Danach können nun auch Formeln wie $f(\iota xg(x, y), z)$ oder $\bigwedge yh(\iota zf(\iota xg(x, y), z))$ in der Sprache $\mathfrak{P}^+$ auftreten.

Wenn man nun einen Kennzeichnungsterm $\iota x A[x]$ nur dann zulassen will, wenn das Prädikat $A[x]$ genau auf einen Gegenstand zutrifft, wenn also gilt $\bigvee !x A[x]$, so erhält man eine bedingte Termregel, die besagt: Wenn $A[x]$ eine Formel ist, in der die GV x frei vorkommt und wenn der Satz $\bigvee !x A[x]$ logisch wahr ist, so ist $\iota x A[x]$ ein Term. Die Bildbarkeit des Terms $\iota x A[x]$ ist dann abhängig von der semantischen Feststellung, daß $\bigvee !x A[x]$ logisch wahr ist, so daß die Unabhängigkeit der Syntax der Sprache $\mathfrak{P}^+$ von ihrer Semantik verloren geht. Im Hinblick auf die Adäquatheit des Kalküls $\mathfrak{P}1^+$ kann man in der Termregel die Forderung der logischen Wahrheit von $\bigvee !x A[x]$ auch durch die Forderung der Beweisbarkeit von $\bigvee !x A[x]$ in $\mathfrak{P}1^+$ ersetzen. Man hat dann den Vorteil einer formalen Beweisbarkeit der Termeigenschaft, aber den Nachteil einer Abhängigkeit der Syntax vom Beweisbegriff. Eine solche Einführung der Kennzeichnungsterme ist von D. HILBERT und P. BERNAYS in [38] angegeben worden.

Da die Benützung einer bedingten Termregel den Nachteil hat, daß die Term- und Formeleigenschaft der Ausdrücke von $\mathfrak{P}^+$ nicht mehr entscheidbar ist[1] und da man außerdem die Trennung von Syntax und Semantik bzw. von Syntax und Deduktionsbegriff als theoretisch befriedigender empfinden wird, liegt es nahe, in der Termregel für Kennzeichnungsausdrücke die Bedingung der logischen Wahrheit bzw. der Beweisbarkeit von $\bigvee !x A[x]$ aufzugeben. Man muß dann aber eine Konvention treffen über den Wahrheitswert von Sätzen, die den Term $\iota x A[x]$ enthalten, für den Fall, daß $\bigvee !x A[x]$ nicht gilt. Einen Vorschlag in dieser Richtung hat B. RUSSELL in [60] gemacht. Er setzt fest, daß ein Satz $B[\iota x A[x]]$ falsch sein soll, wenn $\bigvee !x A[x]$ nicht gilt. Der Satz „Der deutsche König des Jahres 1257 trug einen roten Bart" wäre demnach nicht mehr als sinnlos, sondern als falsch anzusehen. Dieser Gedanke führt zu folgender Festsetzung:

I) $B[y/\iota x A[x]] := \bigvee x(A[x] \wedge \bigwedge z(A[x/z] \supset z = x) \wedge B[y/x])$. Dabei sei z nicht frei in $A[x]$.

---

[1] Wir haben früher bemerkt, daß die Term- und Formeleigenschaft der Ausdrücke von $\mathfrak{P}$ nach 2.2.1 entscheidbar ist. Nach der bedingten Termregel für Kennzeichnungsausdrücke wäre nun die Term- und damit auch die Formeleigenschaft der Ausdrücke der erweiterten Sprache $\mathfrak{P}^+$ nur dann entscheidbar, wenn der Kalkül $\mathfrak{P}1^+$ entscheidbar wäre. Da $\mathfrak{P}1$ aber unentscheidbar ist, muß auch $\mathfrak{P}1^+$ unentscheidbar sein, da man sonst in $\mathfrak{P}1^+$ auch die Formeln ohne Identitätszeichen, also die Formeln von $\mathfrak{P}1$ entscheiden könnte.

Eine solche Definition nennt man *Kontextdefinition*, da das Definiendum neben dem neu einzuführenden Zeichen „$\iota$“ auch andere, bereits definierte Zeichen enthält. So kann man ja in das Definitionsschema I für B Formeln einsetzen, die mit den Operatoren $\neg$, $\supset$ und $\wedge$ gebildet sind. Eine Kontextdefinition trifft somit nicht nur eine Festsetzung über das neu eingeführte Symbol, sondern auch Festsetzungen über bereits definierte Symbole. Daher muß bewiesen werden, daß durch die Kontextdefinition nicht Festsetzungen über bereits definierte Symbole getroffen werden, die ihren ursprünglichen Definitionen widerstreiten[1]. Es zeigt sich nun, daß die Definition I tatsächlich zu solchen Schwierigkeiten Anlaß gibt:

a) Der Ausdruck $\neg B[y/\iota x A[x]]$ muß nach I mit den beiden Sätzen $\neg \vee x(A[x] \wedge \wedge z(A[x/z] \supset z = x) \wedge B[y/x])$ und $\vee x(A[x] \wedge \wedge z(A[x/z] \supset z = x) \wedge \neg B[y/x])$ äquivalent sein, von denen der erste entsteht, wenn man die Ersetzung nach I für den Ausdruck $B[y/\iota x A[x]]$ vornimmt und dann auf beiden Seiten negiert, der zweite, wenn man die Ersetzung nach I für $\neg B[y/\iota x A[x]]$ vornimmt. Nach T26 müßte dann auch die Äquivalenz zwischen diesen beiden Sätzen bestehen. Wenn aber z. B. gilt $\wedge x \neg A[x]$, so wird der zweite Satz falsch, der erste Satz, der mit $\wedge x(A[x] \wedge \wedge z(A[x/z] \supset z = x) \supset \neg B[y/x])$ äquivalent ist, wird hingegen wahr. Dieser Schwierigkeit könnte man begegnen, wenn man das Definitionsschema nur für Atomformeln B verwendet. Dann bliebe aber immer noch folgende Schwierigkeit bestehen:

b) Nach T42 gilt für alle GV z $\wedge y B[y] \supset B[y/z]$. Da nun auch Kennzeichnungsterme als Eigennamen fungieren, wird man fordern, daß auch für alle Terme t gilt $\wedge y B[y] \supset B[y/t]$. Es müßte also auch gelten $\wedge y B[y] \supset B[y/\iota x A[x]]$. Wenn aber $\vee ! x A[x]$ nicht gilt, so wird das Hinterglied dieser Implikation falsch, obwohl das Vorderglied wahr sein kann. Entsprechender Weise gilt auch nicht allgemein $B[y/\iota x A[x]] \supset \vee y B[y]$.

Wenn man überhaupt eine Definition für Kennzeichnungsterme angeben will, so kann es sich nur um eine Kontextdefinition handeln, denn in einer Explizitdefinition für solche Terme müßte ja als Definiens wieder ein Term auftreten. Da man aber in der Sprache $\mathfrak{P}^+$ als Terme zunächst nur GV hat, fehlen dazu die notwendigen Ausdrucksmittel.

[1] Vgl. dazu auch den Abschnitt 6.3.

Man wird also am Gedanken einer Kontextdefinition festhalten, aber eine andere Konvention über den Wahrheitswert der Sätze $B[y/\iota xA[x]]$ für den Fall $\neg\bigvee!xA[x]$ treffen müssen. Eine solche Festsetzung hat zuerst G. FREGE in [18] angegeben, der dem Term $\iota xA[x]$ für den Fall $\neg\bigvee!xA[x]$ den Umfang des durch $A[x]$ bezeichneten Begriffes als Bedeutung zuordnete. Dieser Weg ist für die elementare Logik nicht gangbar, da wir dort nicht über Klassenterme verfügen. R. CARNAP hat aber in [6][1] eine Modifikation des FREGEschen Gedankens angegeben, die wir hier übernehmen wollen. Nach CARNAP hat man die Definition I durch folgendes Definitionsschema zu ersetzen:

**D7:** $B[y/\iota xA[x]] := \bigvee!xA[x] \wedge \bigvee x(A[x] \wedge B[y/x]) \vee \neg\bigvee!xA[x] \wedge B[y/u]$.

Dabei sei u eine im folgenden festgehaltene GV von $\mathfrak{P}^+$. Diese Festsetzung besagt: Wenn das Prädikat $A[x]$ auf genau ein Ding $x$ zutrifft, so soll $B[y/\iota xA[x]]$ wahr sein, wenn $B[y]$ auf $x$ zutrifft und wenn das Prädikat $A[x]$ nicht auf genau ein Ding zutrifft, so soll $B[y/\iota xA[x]]$ wahr sein, wenn $B[y]$ auf das durch die GV u bezeichnete Ding zutrifft. $\iota xA[x]$ steht also für dasjenige Objekt, auf das $A[x]$ zutrifft, wenn es genau ein solches Objekt gibt, andernfalls steht $\iota xA[x]$ für u.

Wir geben nun zunächst die Formregeln für die um Kennzeichnungsterme erweiterte Sprache $\mathfrak{P}^+$ — wir nennen sie $\mathfrak{P}^{++}$ — an und beweisen dann die Korrektheit der Definition D7.

### 3.2.1 Die Sprache $\mathfrak{P}^{++}$:

Das Alphabet von $\mathfrak{P}^{++}$ enthalte neben den Grundzeichen von $\mathfrak{P}^+$ den Kennzeichnungsoperator „$\iota$“. In $\mathfrak{P}^{++}$ unterscheiden wir zwei Klassen von wohlgeformten Ausdrücken, Terme und Formeln, die durch folgende Formregeln definiert werden:

a) Die GV von $\mathfrak{P}^{++}$ sind Terme von $\mathfrak{P}^{++}$.

b) Sind s und t Terme von $\mathfrak{P}^{++}$, so ist $s = t$ eine (Atom-) Formel von $\mathfrak{P}^{++}$. Ist f eine n-stellige PV von $\mathfrak{P}^{++}$ und sind $t_1, \ldots, t_n$ Terme von $\mathfrak{P}^{++}$, so ist $f(t_1, \ldots, t_n)$ eine Formel von $\mathfrak{P}^{++}$.

[1] Vgl. auch [7], S. 143 ff.

c) und d) stimmen mit den Formregeln (b) und (c) von 2.2.1 für $\mathfrak{P}$ überein, wobei „$\mathfrak{P}$" überall durch „$\mathfrak{P}^{++}$" zu ersetzen ist.

e) Wenn A[x] eine Formel von $\mathfrak{P}^{++}$ ist, in der die GV x frei vorkommt, so ist ⁊x(A[x]) ein Term von $\mathfrak{P}^{++}$.

Nach der Formregel (e) werden hier Terme in Abhängigkeit von Formeln definiert. Zur Bestimmung der Formeleigenschaft muß man nach (a) aber auch schon wissen, welche Ausdrücke Terme sind. Die Begriffe Formel und Term werden also durch eine sogenannte *simultane Rekursion* definiert. Daß diese Definition korrekt ist und keinen Zirkel enthält (so daß man etwa schon wissen müßte, ob ein Ausdruck A ein Term ist, um mit den Formregeln feststellen zu können, ob A ein Term ist) geht daraus hervor, daß man mit den Regeln aus wohlgeformten Ausdrücken immer nur wohlgeformte Ausdrücke von größerer Länge erzeugen kann. Die Eigenschaft eines Ausdrucks A, Term oder Formel zu sein, hängt also nach den Regeln immer nur von den Term- oder Formeleigenschaften kürzerer Ausdrücke ab.

Man macht sich auch leicht klar, daß die Formel- bzw. Termeigenschaft nach 3.2.1 entscheidbar ist. Als neue Klammerregel setzen wir fest, daß wir anstelle des Ausdrucks ⁊x(A[x]) auch ⁊xA[x] schreiben können, wenn wir anstelle von ∧x(A[x]) nach den Klammerregeln in 2.2.1 auch ∧xA[x] schreiben können.

Beispiele von Termen und Formeln von $\mathfrak{P}^{++}$ sind folgende Ausdrücke:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $y, z$ | und | $x, y$ | sind Terme (a), |
| also sind | $g(y, z)$ | und | $f(x, y)$ | Formeln (b). |
| Daher sind | $\iota y g(y, z)$ | und | $\iota y f(x, y)$ | Terme (e) |
| und | $f(x, \iota y g(y, z))$ | und | $g(z, \iota y f(x, y))$ | sind Formeln (b). |
| Also ist auch | $\iota x f(x, \iota y g(y, z))$ | | | ein Term (e) |
| und | $h(\iota y f(x,y), \iota x f(x, \iota y g(y,z)))$ | | | eine Formel (b), |

daher sind auch $h(\iota y f(x, y), \iota x f(x, \iota y g(y, z))) \wedge g(z, \iota y f(x, y))$ (c)
und $\wedge z \vee x(h(\iota y f(x, y), \iota x f(x, \iota y g(y, z))) \wedge g(z, \iota y f(x, y)))$ Formeln (d).

Wir wollen auch einen Ausdruck ⁊x als *Quantor* (im weiteren Sinn) bezeichnen, wenn x eine GV ist. Dann ist durch die Festsetzungen in 2.2.1 auch der Bereich eines Quantors ⁊x definiert, das Gebundensein einer GV durch einen solchen Quantor, die freie Umbenennung einer GV x in der Formel ⁊xA[x] und die freie Einsetzung einer GV in Formeln mit solchen Quantoren. Wir legen darüber hinaus noch fest: Eine GV y ist in einer Formel B[y] frei für einen Term ⁊xA[x], wenn kein freies Vorkommnis von y in B[y] im Bereich eines Quantors steht, der gleichnamig ist mit einer GV, die in $\imath$xA[x] frei vorkommt. Die freie Einsetzung von Termen $\imath$xA[x] in Formeln B[y] ist dann bestimmt als Resultat der Ersetzung aller freien Vorkommnisse von y in B[y] durch $\imath$xA[x], wenn y in B[y] frei ist für $\imath$xA[x], und als Resultat der Ersetzung aller freien Vorkommnisse von y in B'[y] durch $\imath$xA[x], wenn y in B[y] nicht frei ist für $\imath$xA[x], wobei dann B'[y] aus B[y] durch freie Umbenennungen von gebundenen GV so zu konstruieren ist, daß y in B'[y] frei ist für $\imath$xA[x].

Dazu ein Beispiel: Die GV $y$ ist in $\wedge z f(z, y)$ nicht frei für $\imath x g(x, z)$. Daher ist nicht $\wedge z f(z, \imath x g(x, z))$, sondern z. B. $\wedge z_1 f(z_1, \imath x g(x, z))$ als Resultat der freien Einsetzung von $\imath x g(x, z)$ für $y$ in $\wedge z f(z, y)$ anzusehen. Im übrigen verläuft diese Begriffsbildung und ihre Motivation wie in 2.2.1.

Damit ist die syntaktische Funktion der Kennzeichnungsausdrücke bestimmt. Ihre semantische und deduktive Funktion ergibt sich aus dem Definitionsschema D7. Wir wollen nun zeigen, daß dieses Schema korrekt ist. Dazu beschränken wir D7 zunächst auf Einsetzungen für Atomformeln für B[y] und beweisen dann durch Induktion nach dem Grad der Formel B[y], daß die Äquivalenz nach D7 für alle Formeln B[y] gilt. Damit ist gezeigt, daß die Schwierigkeiten, die wir für die RUSSELLsche Definition I unter (a) hervorgehoben hatten, für die CARNAPsche Definition nicht auftreten.

Die Basis unseres Induktionsbeweises ist durch die Festlegung D7 für Atomformeln gegeben. Sei nun die Behauptung der Äquivalenz nach D7 schon für alle Formeln vom Grad $\leqslant n$ bewiesen und sei B[y] vom Grad $n + 1$.

a) B[y] habe die Gestalt ¬C[y]. Dann ist C[y] vom Grad $n$ und es gilt nach Induktionsvoraussetzung C[y/$\imath$xA[x]] ≡ V!xA[x] ∧ Vx(A[x] ∧ C[y/x]) ∨ ¬V!xA[x] ∧ C[y/u]. Daraus folgt nach T25, T28, T27, T24 und T34: B[y/$\imath$xA[x]] ≡ ¬C[y/$\imath$xA[x]] ≡ ¬(V!xA[x] ∧ Vx(A[x] ∧ C[y/x]) ∨ ¬V!xA[x] ∧ C[y/u]) ≡ ¬(V!xA[x] ∧ Vx(A[x] ∧ C[y/x])) ∧ ¬(¬V!xA[x] ∧ C[y/u]) ≡ (¬V!xA[x] ∨ ¬Vx(A[x] ∧ C[y/x])) ∧ (V!xA[x] ∨ ¬C[y/u]) ≡ V!xA[x] ∧ ¬V!xA[x] ∨ V!xA[x] ∧ ¬Vx(A[x] ∧ C[y/x]) ∨ ¬V!xA[x] ∧ ¬C[y/u] ∨ ¬Vx(A[x] ∧ C[y/x]) ∧ ¬C[y/u]. (1)

Nach T36 gilt nun ¬(V!xA[x] ∧ ¬V!xA[x]) und nach T35 und T36 gilt ¬Vx(A[x] ∧ C[y/x]) ∧ ¬C[y/u] ≡ ¬Vx(A[x] ∧ C[y/x]) ∧ ¬C[y/u] ∧

$(\vee!xA[x] \vee \neg\vee!xA[x]) \equiv \vee!xA[x] \wedge \neg\vee x(A[x] \wedge C[y/x]) \wedge \neg C[y/u] \vee \neg\vee!xA[x] \wedge \neg C[y/u] \wedge \neg\vee x(A[x] \wedge C[y/x])$.

Aus dem ersten bzw. zweiten Disjunktionsglied folgt mit T21 das zweite bzw. dritte Disjunktionsglied von (1). Daher gilt nach T13, T17 (1) $\equiv \vee!xA[x] \wedge \neg\vee x(A[x] \wedge C[y/x]) \vee \neg\vee!xA[x] \wedge \neg C[y/u]$. Nach T46, T27 und T59 gilt aber unter der Voraussetzung $\vee!xA[x]$ auch $\neg\vee x(A[x] \wedge C[y/x]) \equiv \wedge x(A[x] \supset \neg C[y/x]) \equiv \vee x(A[x] \wedge \neg C[y/x])$, so daß wir mit T26 endlich erhalten $B[y/\iota xA[x]] \equiv \vee!xA[x] \wedge \vee x(A[x] \wedge B[y/x]) \vee \neg\vee!xA[x] \wedge B[y/u]$, was zu beweisen war.

b) $B[y]$ habe die Gestalt $C[y] \supset D[y]$. Dann gilt nach Induktionsvoraussetzung $B[y/\iota xA[x]] \equiv \vee!xA[x] \wedge \vee x(A[x] \wedge C[y/x]) \vee \neg\vee!xA[x] \wedge C[y/u] \supset \vee!xA[x] \wedge \vee x(A[x] \wedge D[y/x]) \vee \neg\vee!xA[x] \wedge D[y/u]$ (2). Es ist zu zeigen, daß (2) äquivalent ist mit (3) $\vee!xA[x] \wedge \vee x(A[x] \wedge (C[y/x] \supset D[y/x])) \vee \neg\vee!xA[x] \wedge (C[y/u] \supset D[y/u])$. Wir nehmen an, es gelte (2) und $\vee!xA[x]$. Dann erhalten wir $\vee x(A[x] \wedge C[y/x]) \supset \vee x(A[x] \wedge D[y/x])$. Mit T58 folgt daraus $\vee x(A[x] \wedge (C[y/x] \supset D[y/x]))$ und daraus (3). Gilt (2) und $\neg\vee!xA[x]$, so erhalten wir $C[y/u] \supset D[y/u]$, also wiederum (3). Aus $\vee!xA[x] \vee \neg\vee!xA[x]$ und T17 ergibt sich also, daß (2) den Satz (3) impliziert. Gilt nun (3) und $\vee!xA[x]$, so gilt auch $\vee x(A[x] \wedge (C[y/x] \supset D[y/x]))$, wegen T59 also $\wedge x(A[x] \supset (C[y/x] \supset D[y/x]))$, daher $\wedge x((A[x] \supset C[y/x]) \supset (A[x] \supset D[y/x]))$ und $\wedge x(A[x] \supset C[y/x]) \supset \wedge x(A[x] \supset D[y/x])$, wegen T59 also wiederum $\vee x(A[x] \wedge C[y/x]) \supset \vee x(A[x] \wedge D[y/x])$ und daher (2). Gilt endlich (3) und $\neg\vee!xA[x]$, so gilt auch $C[y/u] \supset D[y/u]$, also (2). (3) impliziert also auch (2), so daß (2) und (3), wie behauptet, äquivalent sind.

c) $B[y]$ habe die Gestalt $\wedge zC[z,y]$. Dann gilt nach Induktionsvoraussetzung $B[y/\iota xA[x]] \equiv \wedge z(\vee!xA[x] \wedge \vee x(A[x] \wedge C[z,y/x]) \vee \neg\vee!xA[x] \wedge C[z,y/u])$ (4) und es ist zu zeigen, daß (4) mit dem Satz (5): $\vee!xA[x] \wedge \vee x(A[x] \wedge \wedge zC[z,y/x]) \vee \neg\vee!xA[x] \wedge \wedge zC[z,y/u]$ äquivalent ist. Wir können annehmen, daß z nicht frei in $A[x]$ vorkommt. Es gilt nun allgemein $\wedge z(A \wedge D[z] \vee \neg A \wedge E[z]) \equiv \wedge z(A \wedge D[z]) \vee \wedge z(\neg A \wedge E[z])$, wenn A z nicht frei enthält, wie man leicht verifiziert. Mit T49 erhält man dann aber sofort die Behauptung.

Damit ist nun bewiesen, daß man das Definitionsschema D7 auch auf komplexe Formeln B anwenden kann, ohne dadurch in Widerspruch zu den Festsetzungen über die logischen Operatoren zu kommen. Wir zeigen nun, daß auch die für die Kontextdefinition I unter (b) aufgeführten Schwierigkeiten bei Benützung des CARNAPschen Definitionsschemas wegfallen:

**T60:** $\vdash \wedge xA[x] \supset A[x/t]$ für beliebige Terme t von $\mathfrak{P}^{++}$.

Beweis: Ist t eine GV, so ergibt sich die Behauptung aus T42. Ist t ein Kennzeichnungsterm $\iota yB[y]$, so erhalten wir mit T42 und T38 $\wedge xA[x] \supset \wedge y(B[y] \supset A[x/y])$ und $\wedge xA[x] \supset A[x/u]$, also mit T59 $\wedge xA[x] \supset \vee!yB[y] \wedge \vee y(B[y] \wedge A[x/y]) \vee \neg\vee!yB[y] \wedge A[x/u]$. Nach D7 ist das aber mit $\wedge xA[x] \supset A[x/\iota yB[y]]$ äquivalent.

**T61:** $\vdash A[x/t] \supset \vee xA[x]$ für beliebige Terme t von $\mathfrak{P}^{++}$.

Ist t eine GV, so ergibt sich die Behauptung aus T43. Ist t ein Kennzeichnungsterm, so beweist man das Theorem mit T60 wie T43 mit T42.

Es sollen nun noch einige weitere Theoreme über Kennzeichnungen angeführt werden:

**T62:** $\vee!xA[x] \vdash A[x/\iota xA[x]]$

Beweis: Aus $\vee!xA[x]$ folgt nach T57 $\vee xA[x]$, also $\vee x(A[x] \wedge A[x])$. Daraus folgt aber nach D7 $A[x/\iota xA[x]]$.

**T63:** $\vdash \wedge x(A[x] \equiv x = y) \supset y = \iota xA[x]$

Beweis: Aus $\wedge x(A[x] \equiv x = y)$ folgt $A[x/y]$, $\vee!xA[x]$ und $\vee y(A[x/y] \wedge y = y)$. Daraus folgt nach D7 aber $y = \iota xA[x]$.

**T64:** $\neg\vee!xA[x] \vdash \iota xA[x] = u$

Beweis: Aus $\neg\vee!xA[x]$ folgt wegen A5 $\neg\vee!xA[x] \wedge u = u$ und daraus nach D7 $\iota xA[x] = u$.

**T65:** $\vee!xA[x] \vdash B[y/\iota xA[x]] \equiv \vee x(A[x] \wedge B[y/x])$

Der Beweis ergibt sich auf Grund von D7 durch einfache a.l. Umformungen.

In vielen Fällen der Anwendung der P.L. erweist es sich als praktisch, auch *Funktionsterme* als Ausdrücke für Funktionswerte in die p.l. Sprache aufzunehmen, wie etwa die Terme „$x + y$“ und „$x \cdot y$“ in der Formalisierung der Arithmetik. Als einstellige Funktion über dem Grundbereich $\gamma$ bezeichnen wir eine Abbildung von $\gamma$ in $\gamma$, die jedem Element von $\gamma$ genau ein Element von $\gamma$ zuordnet. Eine einstellige Funktion $f^*(x)$ ist also eine zweistellige Relation $f(x, y)$, für die gilt:

1) $\land xyz(f(x,y) \supset (f(x,z) \supset z = y))$ — $f$ ist nacheindeutig, d. h. $f$ ordnet jedem Element von $\gamma$ höchstens ein Element von $\gamma$ zu — und

2) $\land x \lor y f(x, y)$ — $f$ ordnet jedem Element von $\gamma$ mindestens ein Element von $\gamma$ zu.

Aus (1) und (2) erhalten wir mit D6 sofort

3) $\land x \lor ! y f(x, y)$. Ebenso folgt aus (3) mit T57 und T58 (1) und (2). Eine solche Abbildung $f$ stellt die Funktion $f^*$ genau dann dar, wenn gilt

4) $\land xz(f^*(x) = z \equiv f(x, z))$. Wir können also setzen

5) $f^*(x) = \iota y f(x, y)$. Denn aus (3) folgt mit T62 $f(x, \iota y f(x, y))$, mit T58 also $f(x, z) \supset z = \iota y f(x, y)$. Und aus $z = \iota y f(x, y)$ folgt mit (3), T62 und A6 $f(x, z)$. Wir können daher einstellige Funktionsterme $f^*(x)$ als Kennzeichnungsterme $\iota y f(x, y)$ einführen.

Allgemein können wir in entsprechender Weise eine $n$-stellige Funktion $f^*(x_1, \ldots, x_n)$ als eine $(n + 1)$-stellige Relation $f(x_1, \ldots, x_n, y)$ auffassen, für die gilt $\land x_1 \ldots x_n \lor ! y f(x_1, \ldots, x_n, y)$ und können dann setzen $f^*(x_1, \ldots, x_n) = \iota y f(x_1, \ldots, x_n, y)$.

Prinzipiell ist also die Einführung besonderer Funktionsterme in unsere Sprache $\mathfrak{P}^{++}$ überflüssig, da wir sie durch die entsprechenden Kennzeichnungsterme ausdrücken können. Aus Gründen der Einfachheit des Ausdrucks wollen wir aber auch eigene Symbole für Funktionsvariable (kurz FV) in unsere Sprache $\mathfrak{P}^{++}$ aufnehmen und damit zu einer abermals erweiterten Sprache $\mathfrak{P}^{+++}$ übergehen. Wir geben uns dazu eine Menge $\Pi$ von PV aus $\mathfrak{P}^{++}$ vor, so daß zu jedem $n$ ($n > 1$) in $\Pi$ unendlich viele $n$-stellige PV von $\mathfrak{P}^{++}$ enthalten sind, und daß unendlich viele $n$-stellige PV von $\mathfrak{P}^{++}$ nicht in $\Pi$ enthalten sind. $\mathfrak{P}^{+++}$ sei dann aufgebaut wie $\mathfrak{P}^{++}$ mit folgenden zusätzlichen Bestimmungen:

1. Ist f eine $n$-stellige PV aus $\Pi$, so ist f* eine $(n - 1)$-stellige FV von $\mathfrak{P}^{+++}$.

2. Sind $t_1, \ldots, t_n$ Terme und ist $f^*$ eine $n$-stellige FV von $\mathfrak{P}^{+++}$, so ist auch $f^*(t_1, \ldots, t_n)$ ein Term von $\mathfrak{P}^{+++}$. Wir führen also in $\mathfrak{P}^{+++}$ Funktionsterme nur bzgl. atomarer Relationen ein.

Der der Sprache $\mathfrak{P}^{+++}$ zugeordnete Kalkül $\mathfrak{P}1^{+++}$ soll aus $\mathfrak{P}1^{++}$ durch Hinzunahme der Axiome nach den Schemata

**A7:** $\wedge x_1 \ldots x_n \vee !y f(x_1, \ldots, x_n, y)$
**A8:** $\wedge x_1 \ldots x_n f(x_1, \ldots, x_n, f^*(x_1, \ldots, x_n))$ für alle f aus $\Pi$ entstehen.

Zur Ableitung eines Satzes A mit den FV $f_1^*, \ldots, f_m^*$ benützt man dann diejenigen Axiome nach A7 und A8, die sich durch Einsetzung von $f_i^*$ für $f^*$ ergeben $(i = 1, \ldots, m)$.

Aus A7 und A8 erhalten wir mit T58 und T62 $f^*(x_1, \ldots, x_n) = \iota y f(x_1, \ldots, x_n, y)$. Wir brauchen aber auf diese Identität und die Definition D7 bei der Ableitung von Aussagen mit Funktionstermen in $\mathfrak{P}^{+++}$ nicht mehr zurückgreifen. Denn D7 nimmt wegen A7 und T65 nun die Gestalt an $B[x/\iota y f(x_1, \ldots, x_n, y)] \equiv \vee z(f(x_1, \ldots, x_n, z) \wedge B[x/z])$. Diese Äquivalenz erhalten wir aber auch, wenn wir aus A7 und A8 mit T58 und A6 auf $f^*(x_1, \ldots, x_n) = z \equiv f(x_1, \ldots, x_n, z)$ schließen und kraft dieser Äquivalenz $f(x_1, \ldots, x_n, z)$ für $f^*(x_1, \ldots, x_n) = z$ in die Formel $B[x/f^*(x_1, \ldots, x_n)] \equiv \vee z(f^*(x_1, \ldots, x_n) = z \wedge B[x/z])$ einsetzen, die man leicht beweisen kann.

Wir beweisen nun noch folgendes Theorem:

**T66:** $\vdash x = y \supset f^*(x) = f^*(y)$

Beweis:

| | |
|---|---|
| $x = y$ | AF |
| $f(x, z) \supset f(y, z)$ | A6 |
| $f(x, f^*(x))$ | A8 |
| $f(y, f^*(x))$ | R1 |
| $f(y, f^*(y))$ | A8 |
| $f^*(x) = f^*(y)$ | T58 |

Daraus erhält man mit MT4 die Behauptung.

Im Zusammenhang mit der Einführung von FV wollen wir auch noch auf die Möglichkeit hinweisen, Allquantoren durch FV zu ersetzen. Ist der Satz $\vee x_1 \ldots x_n \wedge y C[x_1, \ldots, x_n, y]$ logisch wahr, so ist auch der Satz $\vee x_1 \ldots x_n C[x_1, \ldots, x_n, f^*(x_1, \ldots, x_n)]$ logisch wahr, wo die FV $f^*$ nicht in $C[x_1, \ldots, x_n, y]$ vorkommt. Denn ist $\mathfrak{B}$ eine Interpretation über dem Objektbereich $\gamma$, die dem Prädikat $C[x_1, \ldots, x_n, y]$ den Begriff $\mathsf{A}$ zuordnet, so besagt die Gültigkeit von $\vee x_1 \ldots x_n \wedge y\, C[x_1, \ldots, x_n, y]$, daß es Objekte $a_1, \ldots, a_n$ gibt, so daß für alle Objekte $b$ aus $\gamma$ gilt $\mathsf{A}(a_1, \ldots, a_n, b)$. Dann gilt aber auch für alle möglichen Funktionen $f^*$ über $\gamma$ $\mathsf{A}(a_1, \ldots, a_n, f^*(a_1, \ldots, a_n))$. Gilt umgekehrt $\mathsf{A}(a_1, \ldots, a_n, f^*(a_1, \ldots, a_n))$ für alle Funktionen über $\gamma$, so muß auch $\mathsf{A}(a_1, \ldots, a_n, b)$ für alle $b$ aus $\gamma$ gelten, da $f^*(a_1, \ldots, a_n)$ alle Objekte aus $\gamma$ als Werte annimmt, wenn man für $f^*$ alle möglichen Funktionen einsetzt.

Wenn man nun die FV $f^*$ wieder eliminiert, so erhält man die Formel $\vee x_1 \ldots x_n(\vee!y f(x_1, \ldots, x_n, y) \supset \vee y(f(x_1, \ldots, x_n, y) \wedge C[x_1, \ldots, x_n, y]))$. Anstelle von $\vee!y f(x_1, \ldots, x_n, y)$ kann man nun offenbar auch $\vee y f(x_1, \ldots, x_n, y)$ setzen, ohne die logische Wahrheit oder Falschheit des Satzes zu verändern. Durch p.l. Umformungen erhält man aus dieser Formel den Satz $\vee x_1 \ldots x_n(\wedge y(C[x_1, \ldots, x_n, y] \supset \neg f(x_1, \ldots, x_n, y)) \supset \wedge y \neg f(x_1, \ldots, x_n, y))$. Hier kann man endlich noch $\neg f(x_1, \ldots, x_n, y)$ durch $f(x_1, \ldots, x_n, y)$ ersetzen.

Diese Umformung kann man ausnutzen für die Konstruktion der Normalform von SKOLEM:

**3.2.2** Wir sagen, ein Satz A habe die SKOLEMsche *Normalform*, wenn A pränexe Normalform hat, keine freien GV enthält und wenn im Präfix von A alle Existenzquantoren allen Allquantoren voraufgehen.

Es gilt:

**MT9:** Jeder Satz A läßt sich in einen Satz B in SKOLEMscher Normalform umformen, so daß gilt $\vdash$ A genau dann, wenn $\vdash$ B.

Die Konstruktion von B vollzieht sich in folgenden Schritten:

1) A wird in pränexe Normalform gebracht und alle freien GV werden in der so entstehenden Formel durch vorgestellte Allquantoren gebunden. Hat das Resultat dieser Umformungen die Gestalt $\wedge x C[x]$, so ersetzt man es durch die Formel $\vee y \wedge x((f(y) \supset f(y)) \supset C[x])$. Deren pränexe Normalform sei $A_1$.

2) Hat $A_1$ bereits die gewünschte Normalform, so ist B mit $A_1$ identisch.

3) Andernfalls hat $A_1$ die Gestalt $\bigvee x_1 \ldots x_n \bigwedge y C[x_1, \ldots, x_n, y]$. Wir ersetzen dann $A_1$ nach der vorstehenden Überlegung durch die Formel $A_2$: $\bigvee x_1 \ldots x_n(\bigwedge y(C[x_1, \ldots, x_n, y] \supset f(x_1, \ldots, x_n, y)) \supset \bigwedge y f(x_1, \ldots, x_n, y))$, wo f eine PV ist, die in $A_1$ nicht vorkommt. $A_3$ sei dann die pränexe Normalform dieser Formel. $A_3$ hat also die Gestalt

$$\bigvee x_1 \ldots x_n \bigvee y \; Q \bigwedge y'((C'[x_1, \ldots, x_n, y] \supset f(x_1, \ldots, x_n, y)) \supset f(x_1, \ldots, x_n, y')),$$

wenn Q das Präfix und $C'[x_1, \ldots, x_n, y]$ der Kern von $C[x_1, \ldots, x_n, y]$ ist.

4) Hat $A_3$ bereits die gewünschte Normalform, so ist B mit $A_3$ identisch, andernfalls wird der dritte Schritt noch einmal angewendet, usw.

Man sieht, daß die Zahl der Allquantoren, die Existenzquantoren vorhergehen, in $A_3$ um eins niedriger ist als in $A_1$. Durch endlichmalige Anwendung des dritten Schrittes kommt man also auf eine Formel B mit den gewünschten Eigenschaften.

Für die Umformungen nach (1) gilt $\vdash A$ genau dann, wenn $\vdash A_1$ nach MT8, T1, T38, T51. Für die Umformung nach (3) erhalten wir nach unserer intuitiven Überlegung $\vdash A_1$ genau dann, wenn $\vdash A_3$. Formal argumentiert man wie folgt:

$$\bigwedge y C[x_1, \ldots, x_n, y] \vdash (C[x_1, \ldots, x_n, y] \supset f(x_1, \ldots, x_n, y)) \supset f(x_1, \ldots, x_n, y)$$

wegen T42, R1, MT4. Mit T39 erhalten wir daraus

$$\bigwedge y C[x_1, \ldots, x_n, y] \vdash \bigwedge y(C[x_1, \ldots, x_n, y] \supset f(x_1, \ldots, x_n, y)) \supset \bigwedge y f(x_1, \ldots, x_n, y)$$

und daraus $A_1 \vdash A_2$. MT8 liefert aber $A_2 \vdash A_3$. Ist also $A_1$ beweisbar, so auch $A_3$. Ist umgekehrt $A_3$ beweisbar, so nach MT8 auch $A_2$. Ist aber $A_2$ beweisbar, so nach MT7 auch

$$\bigvee x_1 \ldots x_n(\bigwedge y(C[x_1, \ldots, x_n, y] \supset C[x_1, \ldots, x_n, y]) \supset \bigwedge y C[x_1, \ldots, x_n, y]),$$

mit T1 und T38 erhält man daraus aber $A_1$. Damit ist das Metatheorem MT9 bewiesen.

Zur Illustration des Konstruktionsverfahrens für die SKOLEMsche Normalform wenden wir dies Verfahren auf die Formel A: $\bigwedge y \bigvee z g(x, y, z)$ an. A hat pränexe Normalform. Durch Generalisierung von $x$ nach (1) erhalten wir $\bigwedge xy \bigvee z g(x, y, z)$. $A_1$ ist dann die Formel

$$\bigvee u \bigwedge xy \bigvee z((f(u) \supset f(u)) \supset g(x, y, z)).$$

$A_2$ ist dann die Formel

$$\vee u(\wedge x(\wedge y \vee z((f(u) \supset f(u)) \supset g(x, y, z)) \supset h_1(u, x)) \supset \wedge x h_1(u, x)).$$

$A_3$ ist also die Formel

$$\vee u x \wedge y \vee z \wedge x'((((f(u) \supset f(u)) \supset g(x, y, z)) \supset h_1(u, x)) \supset h_1(u, x')).$$

Da diese Formel noch nicht die gewünschte Form hat, müssen wir den Schritt (3) noch einmal anwenden und erhalten

$$\vee u x(\wedge y(\vee z \wedge x'((((f(u) \supset f(u)) \supset g(x, y, z)) \supset h_1(u, x)) \supset h_1(u, x')) \supset h_2(u, x, y))$$
$$\supset \wedge y h_2(u, x, y))$$

und daraus

$$\vee u x y z \wedge x' y'((((((fu) \supset f(u)) \supset g(x, y, z)) \supset h_1(u, x)) \supset h_1(u, x')) \supset h_2(u, x, y))$$
$$\supset h_2(u, x, y')).$$

Diese letzte Formel ist nun die gesuchte SKOLEMsche Normalform von A.

Eine zusätzliche Erweiterung der p.l. Sprache erhält man, wenn man neben den Variablen auch *Konstanten* als Grundzeichen einführt. Semantisch und bzgl. der Formregeln fungieren solche Konstanten wie die freien Variablen vom entsprechenden Typ. Gegenstandskonstanten (kurz GK) fungieren also wie freie GV, $n$-stellige PK wie $n$-stellige PV und $n$-stellige Funktionskonstanten (kurz FK) wie $n$-stellige FV. Daher bringt eine solche Erweiterung der Sprache auch keine echte Erweiterung ihrer Ausdrucksmöglichkeiten mit sich. Die Verwendung von Konstanten macht aber in vielen Fällen den Symbolismus übersichtlicher. So hätte man anstelle der PK „=" auch eine beliebige zweistellige PV $f$ verwenden und anstelle der Axiome A5 und A6 die Axiome $\wedge x f(x, x)$ und $\wedge x y(f(x, y) \supset (A[x] \supset A[x/y]))$ ansetzen können. Wegen der besonderen Rolle der Identität empfiehlt es sich aber, eine eigene PK einzuführen, durch deren Verwendung die Formeln durchsichtiger werden. Ebenso werden wir bei der Formalisierung der Arithmetik die GK „*0*" für die Zahl *0* einführen, die einstellige PK „*N*" für die Eigenschaft, eine natürliche Zahl zu sein und die FK „+" für die Addition.

Während man eine P.L. ohne nichtlogische Konstanten auch als *reine* P.L. bezeichnet, nennt man eine P.L. mit außerlogischen Konstanten *angewandte* P.L. Der Übergang von der reinen zur angewandten

P.L. besteht also einfach in der Hinzunahme von Konstanten zu den Grundzeichen der Sprache, deren Funktion ebenso auch von freien Variablen übernommen werden könnte.

Auf eine weitere Möglichkeit zur Erweiterung der elementaren Logik, die Hinzunahme des HILBERTschen *Auswahloperators* $\varepsilon x A[x]$ wollen wir hier nicht mehr eingehen, da seine praktische Bedeutung im Rahmen der hier behandelten Logik nur gering ist. Eine ausführliche Behandlung dieses Auswahloperators findet sich in [38] und [34].

Bei den in den Abschnitten 3.1 und 3.2 diskutierten Erweiterungen der Sprache $\mathfrak{P}$ und des Kalküls $\mathfrak{P}1$ handelt es sich insgesamt um keine echte Erweiterung der Ausdrucksfähigkeit oder der Deduktionsmöglichkeiten von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}1$, wie wir sie etwa später in Kapitel 4 und 5 behandeln werden. Denn die Konstanten lassen sich durch Variable ersetzen und die Kontextdefinition D7 ermöglicht es uns, die Kennzeichnungs- und damit auch die Funktionsterme aus allen Kontexten zu eliminieren. Die Theoreme A von $\mathfrak{P}1^+$ lassen sich aber in der Gestalt $C \supset A$ in $\mathfrak{P}1$ beweisen, wo C wie im Beweis der Vollständigkeit von $\mathfrak{P}1^+$ die Konjunktion der für A relevanten Einsetzungen in A5 und A6 ist. Daher werden wir im folgenden auch die verschiedenen Varianten $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}^+$, $\mathfrak{P}^{++}$, $\mathfrak{P}^{+++}$ bzw. $\mathfrak{P}1$, $\mathfrak{P}1^+$, $\mathfrak{P}1^{++}$ und $\mathfrak{P}1^{+++}$ der P.L. nicht streng unterscheiden, sondern meist nur von *der* p.l. Sprache $\mathfrak{P}$ und *dem* p.l. Kalkül $\mathfrak{P}1$ sprechen. Aus dem Kontext ist dann jeweils ersichtlich, um welche Form der P.L. es sich handelt.

*Übungsaufgaben:*

1. Beweise folgende Theoreme

$$\vdash \iota x(x = y) = y$$
$$\vdash \iota x(x \neq x) = u$$
$$\vdash \iota x A[x] = z \equiv \bigvee! x A[x] \wedge A[x/z] \vee \neg \bigvee! A[x] \wedge z = u$$
$$\vdash \iota x A[x] = u \equiv \neg \bigvee! x A[x] \vee A[x/u]$$
$$\bigwedge x(A[x] \equiv B[x]) \vdash \iota x A[x] = \iota x B[x]$$
$$\bigvee! x A[x], \bigvee! x B[x] \vdash \iota x A[x] = \iota x B[x] \supset \bigwedge x(A[x] \equiv B[x])$$
$$\vdash_{\mathfrak{P}1^{+++}} \bigwedge x_1 \ldots x_n(f^*(x_1, \ldots, x_n) = g^*(x_1, \ldots, x_n)) \equiv$$
$$\bigwedge x_1 \ldots x_n y(f(x_1, \ldots, x_n, y) \equiv g(x_1, \ldots, x_n, y)).$$

2. Beweise, daß man die Definition D7 ersetzen kann durch die Definition $\iota x A[x] = y := \bigvee! x A[x] \wedge A[x/y] \vee \neg \bigvee! x A[x] \wedge y = u$, wo y nicht frei in $\iota x A[x]$ vorkommt! Man weise die Korrektheit dieser Kontextdefinition nach, wie das oben für D7 geschehen ist!

3. Man bringe folgende Formeln auf SKOLEMsche Normalform:

a) $\bigvee x f(x, y) \supset \bigvee y f(y, x)$,

b) $\bigwedge x \bigvee y g(x, y) \wedge \neg \bigvee y \bigwedge x g(x, y)$,

c) $\bigwedge xy(\bigvee z g(x, z) \supset \bigwedge z h(y, z))$.

## 3.3 Elementare Systeme

Der Gehalt einer Theorie, sei sie logisch, mathematisch oder empirisch, ist charakterisiert durch die Menge ihrer Theoreme, d. h. durch die Menge der Sätze, die sie als wahr auszeichnet. Zwei Theorien, welche die gleiche Theoremmenge haben, nennen wir *äquivalent.* So haben wir z. B. oben die p.l. Theorien $\mathfrak{P}1$ und $\mathfrak{P}2$ als äquivalente Theorien erkannt, indem wir zeigten, daß jeder Satz, der in $\mathfrak{P}1$ beweisbar ist, auch in $\mathfrak{P}2$ beweisbar ist und umgekehrt. Äquivalente Theorien unterscheiden sich also nur durch die Art und Weise, wie sie die gemeinsame Theoremmenge festlegen.

Als wissenschaftliche Idealform einer Theorie $T$ gilt seit ARISTOTELES ihre axiomatische Formulierung, in der die Theoremmenge von $T$ definiert wird durch Angabe endlich oder auch unendlich vieler Axiome — die Eigenschaft, Axiom von $T$ zu sein, soll auch im Falle unendlich vieler Axiome entscheidbar sein — aus denen alle Theoreme auf rein logischem Weg abgeleitet werden können. Bei der Gewinnung der Theoreme dürfen also keine außerlogischen Prinzipien verwendet werden und keine materialen Voraussetzungen über die Gegenstände der Theorie, die nicht in Gestalt der Axiome explizit angegeben wurden. Da die logischen Deduktionsmittel scharf umgrenzt sind, wird dadurch vermieden, daß sich im Verlauf eines Beweises unbemerkt zusätzliche materiale Voraussetzungen einschleichen. So wird eine strenge Kontrolle der Beweise in der Theorie möglich und die materialen Annahmen, auf denen die Sätze von $T$ beruhen, werden in Gestalt der Axiome scharf abgegrenzt.

Dieses Ideal einer axiomatischen Theorie konnte im wesentlichen erst in der modernen Logik erreicht werden, in der deduktive Systeme aufgebaut wurden, die für die Zwecke der Formalisierung von Theorien insbesondere der Mathematik hinreichend leistungsfähig sind. Schon die elementare Logik erweist sich als ausreichend für die axiomatische Darstellung vieler Theorien. Lassen sich die Sätze einer

Theorie $T$ in der p.l. Sprache $\mathfrak{P}$ ausdrücken und ist $M_T$ die Menge der Axiome von $T$, so läßt sich $T$ im Rahmen der elementaren Logik formalisieren in Gestalt eines Kalküls $\mathfrak{T}$, der aus $\mathfrak{P}1$ dadurch entsteht, daß man zu den Axiomen von $\mathfrak{P}1$ die Axiome von $M_T$ hinzunimmt. A ist dann ein Theorem von $\mathfrak{T}$ genau dann, wenn gilt $M_T \vdash_{\mathrm{p1}} \mathrm{A}$[1]. Solche Theorien nennt man auch *elementare Systeme.*

Als Beispiel eines solchen elementaren Systems kann uns die Theorie der Identität aus 3.1 dienen, für die $M_T$ die Menge der Axiome nach A5 und A6 ist. Im folgenden sollen nun drei weitere Beispiele elementarer Systeme angegeben werden, die einen Eindruck vermitteln sollen von den Anwendungsmöglichkeiten der elementaren Logik. Wenn wir uns dabei auf Anwendungen aus dem Bereich der Mathematik beschränken, so deswegen, weil die Zahl der vorliegenden axiomatischen Theorien aus anderen Gegenstandsgebieten verhältnismäßig gering ist und diese Theorien, sofern sie nicht deduktiv trivial sind, einen recht komplizierten Aufbau haben[2].

### 3.3.1 Ein Axiomensystem der Gruppentheorie

Als *Gruppe* bezeichnet man eine Menge $X$, auf der eine zweistellige Funktion $a \circ b$ definiert ist, so daß gilt: 1. Für beliebige Elemente $a$ und $b$ aus $X$ liegt $a \circ b$ wieder in $X$. 2. Die Funktion $\circ$ ist assoziativ, d. h. es ist $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$. 3. Es gibt ein Einselement $e$ in $X$, so daß für alle Elemente $a$ aus $X$ gilt $a \circ e = a$ und $e \circ a = a$. 4. Zu jedem Element $a$ von $X$ gibt es ein inverses Element $a^{-1}$, so daß gilt $a \circ a^{-1} = e$ und $a^{-1} \circ a = e$.

Diese definierenden Eigenschaften der Gruppe kann man als Axiome formulieren:

**a1:** $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$

**a2:** $x \circ e = x$

**a3:** $e \circ x = x$

**a4:** $\wedge x \vee y(x \circ y = e \wedge y \circ x = e)$[3].

[1] Ist die Menge $M_T$ unendlich, so beachte man die Definition der Ableitungsbeziehung $M_T \vdash \mathrm{A}$ unter 1.3.5.8.

[2] Beispiele für axiomatische Theorien empirischer Wissenschaften bringt R. Carnap in [7], S. 198 ff.

[3] Anstelle des Terms $\mathrm{x} \circ \mathrm{y}$ müßte man streng genommen in $\mathfrak{P}$ einen Term $\mathrm{F}^*(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ verwenden, in dem $\mathrm{F}^*$ eine FK von $\mathfrak{P}$ ist. Wir können aber hier und ähnlich in folgenden gleichartigen Fällen den Term $\mathrm{x} \circ \mathrm{y}$ als Abkürzung für $\mathrm{F}^*(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ ansehen.

Jeder Satz, der für beliebige Gruppen gilt, läßt sich dann aus a1 bis a4 ableiten. Und wenn ein Satz aus a1 bis a4 ableitbar ist, so gilt er für alle Gruppen. Denn ist A ein Satz, der für beliebige Gruppen gilt, so wird A erfüllt von allen Interpretationen über Mengen $X$, die bzgl. der Funktion, die der zweistelligen FK $\circ$ zugeordnet wird, eine Gruppe bilden. Jede Interpretation $\mathfrak{B}$, die a1 bis a4 erfüllt, ist eine Interpretation über einer Menge $X$, die bzgl. der Funktion, die $\mathfrak{B}$ der FK $\circ$ zuordnet, eine Gruppe ist. Also ist der Schluß a1, ..., a4 $\rightarrow$ A dann p.l. gültig. Wegen der Vollständigkeit von $\mathfrak{P}1$ gilt dann aber auch a1, ..., a4 $\vdash$ A. Gilt umgekehrt a1, ..., a4 $\vdash$ A, so erfüllen wegen der Widerspruchsfreiheit von $\mathfrak{P}1$ alle Interpretationen, die a1, ..., a4 erfüllen, deren Objektbereich also Gruppen sind bzgl. der Funktion, die sie der FK $\circ$ zuordnen, auch den Satz A. Aus der Tatsache, daß a1 bis a4 die definierenden Gruppeneigenschaften ausdrücken und erfüllbar sind und daß $\mathfrak{P}1$ p.l. adäquat ist, kann man also auf die Vollständigkeit und Widerspruchsfreiheit des durch a1 bis a4 festgelegten Gruppenkalküls schließen.

Zur Einübung dieser Axiomatisierung beweisen wir nun einige Theoreme über Gruppen.

**t1:** $\bigvee z(x \circ z = y)$ (Existenz des rechten Quotienten)

Beweis: $x^{-1} \circ y$ ist ein solches $z$, denn es gilt $x \circ (x^{-1} \circ y) = (x \circ x^{-1}) \circ y$ nach a1 und nach a4 ($x^{-1}$ sei ein $y$, dessen Existenz dort ausgesagt wird) $(x \circ x^{-1}) \circ y = e \circ y$. Mit a3 erhalten wir dann $e \circ y = y$, und mit T56 also $x \circ (x^{-1} \circ y) = y$.

Indem man für $z$ setzt $y \circ x^{-1}$, beweist man ebenso

**t2:** $\bigvee z(z \circ x = y)$ (Existenz des linken Quotienten)

E. V. Huntington hat gezeigt, daß man die Axiome a2 bis a4 auch durch t1 und t2 ersetzen kann. Denn aus a1, t2 und t3 folgt a2, a3 und a4:

**t3:** $x \circ z = y \wedge x \circ z_1 = y \supset z = z_1$ (Eindeutigkeit des rechten Quotienten)

Beweis:

| | | |
|---|---|---|
| | $x \circ z = y \wedge x \circ z_1 = y$ | AF |
| 1) | $x \circ z = x \circ z_1$ | T55, T56 |
| 2) | $u \circ z = z$ | AF |
| 3) | $v \circ x = u$ | AF |

| | |
|---|---|
| 4) $z \circ w = z_1$ | AF. Mit T56 und T66 erhalten wir nun |
| $z = u \circ z$ | (2), T55 |
| $z = (v \circ x) \circ z$ | (3) |
| $z = v \circ (x \circ z)$ | a1 |
| $z = v \circ (x \circ z_1)$ | (1) |
| $z = (v \circ x) \circ z_1$ | a1 |
| $z = u \circ z_1$ | (3) |
| $z = u \circ (z \circ w)$ | (4) |
| $z = (u \circ z) \circ w$ | a1 |
| $z = z \circ w$ | (2) |
| $z = z_1$ | (4), also mit MT4 (Befreiung von den AF (2), (3), (4)) |
| $u \circ z = z \supset (v \circ x = u \supset (z \circ w = z_1 \supset z = z_1))$ | also mit T44 und T9 |
| $\bigvee u(u \circ z = z) \supset (\bigvee v(v \circ x = u) \supset (\bigvee w(z \circ w = z_1) \supset z = z_1))$ | also mit t1, t2, R1 und MT4 |
| $x \circ z = y \wedge x \circ z_1 = y \supset z = z_1.$ | |

Ebenso findet man

**t4:** $z \circ x = y \wedge z_1 \circ x = y \supset z = z_1$ (Eindeutigkeit des linken Quotienten)

**t5:** $\bigvee z \bigwedge x(x \circ z = x)$ (Existenz der Rechtseinheit)

Beweis:

| | |
|---|---|
| 1) $y \circ z = y$ | AF |
| 2) $x \circ z_1 = x$ | AF |
| 3) $u \circ y = x$ | AF |
| $u \circ (y \circ z) = u \circ y$ | (1) |
| $(u \circ y) \circ z = u \circ y$ | a1 |
| $x \circ z = x$ | (3) |
| $x \circ z_1 = x \supset (u \circ y = x \supset x \circ z = x)$ | MT4 (Befreiung von (2), (3)) |
| $\bigvee z_1(x \circ z_1 = x) \supset (\bigvee u(u \circ y = x) \supset x \circ z = x))$ | T44, T9 |
| $\bigwedge x \bigvee z_1(x \circ z_1 = x), \bigwedge x \bigvee u(u \circ y = x) \vdash y \circ z = y \supset \bigvee z \bigwedge x(x \circ z = x)$ | R1, A4, T38, T43 und MT4 (Befreiung von (1)) |

| | |
|---|---|
| $\bigvee z(y \circ z = y) \supset \bigvee z \bigwedge x(x \circ z = x)$ | t1, t2, T44 |
| $\bigvee z \bigwedge x(x \circ z = x)$ | t1, R1. |

Ebenso findet man

**t6:** $\bigvee z \bigwedge x(z \circ x = x)$ (Existent der Linkseinheit)

Wegen t3 und t4 gibt es auch höchstens eine Rechtseinheit und höchstens eine Linkseinheit. Wir zeigen nun, daß Rechts- und Linkseinheit identisch sind:

**t7:** $x \circ z = x \wedge z_1 \circ x = x \supset z = z_1$

Beweis:

| | |
|---|---|
| $x \circ z = x$ | AF |
| $z_1 \circ z = z_1$ | t5 |
| $z_1 \circ x = x$ | AF |
| $z_1 \circ z = z$ | **t6** |
| $z = z_1$ | T56 |

Daraus erhält man sofort die Behauptung und daraus a2 und a3. Bezeichnen wir Rechts- und Linkseinheit mit $e$ — wir können definieren $e := \iota z \bigwedge x(x \circ z = x)$ und erhalten daraus $x \circ e = x$ und $e \circ x = x$ für alle $x$ — so gilt endlich

**t8:** $\bigwedge x \bigvee y(x \circ y = e \wedge y \circ x = e)$ (a4)

Beweis:

| | |
|---|---|
| $x \circ y = e$ | AF |
| $y_1 \circ x = e$ | AF |
| $y = e \circ y$ | |
| $y = (y_1 \circ x) \circ y$ | |
| $y = y_1 \circ (x \circ y)$ | a1 |
| $y = y_1 \circ e$ | |
| $y = y_1$ | |
| $y \circ x = e$ | |
| $\bigvee y(x \circ y = e \wedge y \circ x = e)$ | T43 |
| $x \circ y = e \supset (y_1 \circ x = e \supset \bigvee y(x \circ y = e \wedge y \circ x = e)$ | MT4 |
| $\bigvee y(x \circ y = e) \supset (\bigvee y_1(y_1 \circ x = e) \supset \bigvee y(x \circ y = e$ <br> $\wedge\, y \circ x = e)$ | T44, T9 |
| $\bigwedge x \bigvee y(x \circ y = e \wedge y \circ x = e)$ | t1, t2, R1, T38. |

Wir können wegen t1 und t3 definieren $x^{-1} := \imath y(x \circ y = e)$. $x^{-1}$ ist dann das inverse Element zu $x$ und es gilt $x \circ x^{-1} = e$ und $x^{-1} \circ x = e$.

In gleicher Weise lassen sich aus a1 bis a4 oder aus a1, t1, t2 alle Theoreme über Gruppen auf rein logischem Weg, d. h. nur unter Verwendung des elementar-logischen Deduktionsbegriffes, wie er in $\mathfrak{P}1$ oder einem der übrigen oben behandelten Kalküle der P.L. formuliert ist, ableiten.

### 3.3.2 Ein Axiomensystem der elementaren Arithmetik

R. DEDEKIND hat 1888 in [11] eine axiomatische Charakterisierung der natürlichen Zahlen angegeben, die auf einem Gedanken beruht, mit dessen Hilfe schon LEIBNIZ eine Festlegung der Reihe der natürlichen Zahlen versucht hatte. Danach kann man die Menge $N$ der natürlichen Zahlen bestimmen, indem man fordert:

1) Die Null ist eine natürliche Zahl.

2) Zu jeder natürlichen Zahl $n$ gibt es in $N$ genau einen Nachfolger, den wir mit $n'$ bezeichnen.

Damit nun immer neue Elemente von $N$ als Nachfolgerzahlen auftreten und $N$ somit als unendliche Menge bestimmt wird, muß man fordern, daß die Reihe der Nachfolgerzahlen nicht in sich selbst zurückläuft. Dazu verlangt man:

3) Die Null ist keine Nachfolgerzahl, d. h. es gibt keine natürliche Zahl, deren Nachfolger die Null wäre.

4) Wenn zwei Nachfolgerzahlen $n'$ und $m'$ identisch sind, so sind auch $n$ und $m$ identisch.

Wenn die Reihe der Nachfolgerzahlen in sich selbst zurückliefe, so müßte ja entweder die Null eine Nachfolgerzahl sein, was durch (3) ausgeschlossen wird, oder eine von Null verschiedene Zahl $n$, die somit Nachfolger einer Zahl $m$ ist, müßte Nachfolger einer größeren Zahl oder Nachfolger von sich selbst sein, so daß es eine von $m$ verschiedene Zahl $r$ gäbe, mit $n = m' = r'$. Das wird aber durch (4) ausgeschlossen.

$N$ enthält nach (1) und (2) alle aus der Null durch endlichmalige Anwendung der Nachfolgeroperation entstehende Zahlen. Um auszuschließen, daß $N$ daneben noch andere Elemente enthält, forderte DEDEKIND:

5) Jedes Element von $N$ läßt sich durch wiederholte Anwendung der Nachfolgeroperation aus der Null gewinnen.

Danach ist also $N$ die kleinste Menge, die den Forderungen (1) und (2) genügt, und die Elemente von $N$ sind in allen Mengen enthalten, die den Bedingungen (1) und (2) genügen.

G. PEANO hat dieser 5. Forderung die Gestalt des Induktionsprinzips gegeben:

5′) Für alle Eigenschaften $F$ gilt: Wenn $F$ auf die Null zutrifft und wenn aus der Tatsache, daß $F$ auf irgendeine Zahl $n$ zutrifft, folgt, daß $F$ auch auf deren Nachfolger $n'$ zutrifft, so trifft $F$ auf alle natürlichen Zahlen zu.

Wenn $F$ auf die Null zutrifft und wenn aus der Tatsache, daß $F$ auf irgendeine Zahl $n$ zutrifft, folgt, daß $F$ auch auf deren Nachfolger $n'$ zutrifft, so ist der Umfang des Begriffes $F$ eine Klasse, die den Bedingungen (1) und (2) genügt. Mit (5′) fordert man also dasselbe wie mit (5), daß nämlich die Elemente von $N$ in allen solchen Klassen enthalten sind.

Wenn man nun die Null durch die GK „$0$" symbolisiert und die Nachfolgerfunktion durch „′"[1], so kann man die Forderungen (1) bis (5′) in folgender Weise in elementare Axiome übersetzen:

**a1:** $\neg \mathrm{x}' = 0$

**a2:** $\mathrm{x}' = \mathrm{y}' \supset \mathrm{x} = \mathrm{y}$

**a3:** $\mathrm{A}[0] \wedge \bigwedge \mathrm{x}(\mathrm{A}[\mathrm{x}] \supset \mathrm{A}[\mathrm{x}']) \supset \bigwedge \mathrm{x}\mathrm{A}[\mathrm{x}]$

Der Grundbereich einer Interpretation, die diese Axiome erfüllt, soll die Menge der natürlichen Zahlen repräsentieren. Die Forderung (1) ist also dadurch erfüllt, daß jede solche Interpretation dem Term „$0$" ein Objekt des Grundbereiches zuordnet. Der Forderung (2) wird genügt durch die für Funktionen generell geforderte Existenz genau eines Funktionswertes für alle Argumente des Grundbereiches.

---

[1] Anstelle von „$0$", „′" und den unten eingeführten FK „+" und „·" könnte man natürlich wieder eine ausgezeichnete GV bzw. GK von $\mathfrak{P}$ sowie eine einstellige und zwei zweistellige FV oder FK von $\mathfrak{P}$ wählen. Es ist aber praktischer, sich an den in der Mathematik üblichen Symbolgebrauch anzuschließen und „$0$", „x′", „x+y" und „x · y" als Abkürzungen für solche $\mathfrak{P}$-Terme aufzufassen.

Die Forderung (5′) wird durch a3 nicht vollständig wiedergegeben, denn (5′) enthält ja eine Behauptung über alle zahlentheoretischen Begriffe $F$, während aus a3 diese Behauptung nur für diejenigen Begriffe gewonnen werden kann, die sich in $\mathfrak{P}$ durch Prädikate ausdrücken lassen. Nun gibt es überabzählbar viele zahlentheoretische Begriffe, aber nur abzählbar viele Prädikate in $\mathfrak{P}$, so daß (5′) eine stärkere Forderung ist als a3. In der elementaren Logik, wo wir keine Allbehauptungen über Begriffe formulieren können, läßt sich (5′) nicht adäquat wiedergeben. Wir werden erst im nächsten Kapitel eine Sprache kennenlernen, in der sich (5′) vollständig ausdrücken läßt und wollen dort dann noch einmal auf die Formalisierung der Arithmetik zurückkommen.

Addition und Multiplikation lassen sich durch die Bedingungen

6) $\mathrm{x} + \mathit{0} = \mathrm{x}$
$\mathrm{x} + \mathrm{y}' = (\mathrm{x} + \mathrm{y})'$

7) $\mathrm{x} \cdot \mathit{0} = \mathit{0}$
$\mathrm{x} \cdot \mathrm{y}' = \mathrm{x} \cdot \mathrm{y} + \mathrm{x}$

definieren. In stärkeren Logiksystemen kann man die Existenz von Funktionen, die solchen rekursiven Definitionen genügen, generell nachweisen[1]. Für die elementare Logik gilt das hingegen nicht. Daher wird man die Existenz solcher Funktionen axiomatisch fordern:

**a4:** $\mathrm{x} + \mathit{0} = \mathrm{x}$
**a5:** $\mathrm{x} + \mathrm{y}' = (\mathrm{x} + \mathrm{y})'$
**a6:** $\mathrm{x} \cdot \mathit{0} = \mathit{0}$
**a7:** $\mathrm{x} \cdot \mathrm{y}' = \mathrm{x} \cdot \mathrm{y} + \mathrm{x}$

Es läßt sich zeigen, daß sich alle primitiv rekursiven Funktionen durch die Funktionen $\mathrm{x}'$, $\mathrm{x} + \mathrm{y}$, $\mathrm{x} \cdot \mathrm{y}$ definieren lassen[2]. Nachdem es sich dabei um die wichtigsten zahlentheoretischen Funktionen handelt, könnte man erwarten, daß das System $\mathsf{A}$ der Axiome a1 bis a7 hinreicht zur vollständigen Charakterisierung der Reihe der natürlichen Zahlen und zum Aufbau einer vollständigen Theorie der Arithmetik. Während wir später sehen werden, daß die Forderungen (1) bis (5′) zur Charakterisierung der natürlichen Zahlen ausreichen, zeigt sich aber, daß das

---

[1] Vgl. dazu den Beweis des Rekursionstheorems, z. B. in [28], sowie den Abschnitt 4.5.

[2] Vgl. dazu [42], S. 241 ff.

System A weder zur vollständigen Charakterisierung der natürlichen Zahlen hinreicht, noch zum Aufbau eines vollständigen Systems der Arithmetik.

Um die Frage nach der Charakterisierbarkeit der natürlichen Zahlen durch das System A genauer diskutieren zu können, treffen wir zunächst folgende Verabredung:

**3.3.2.1** Wir nennen zwei Interpretationen $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ *isomorph*, wenn es eine umkehrbar eindeutige Abbildung $\varphi$ des Grundbereiches $\gamma_1$ von $\mathfrak{B}_1$ auf den Grundbereich $\gamma_2$ von $\mathfrak{B}_2$ gibt, so daß gilt:

a) $\varphi(\mathfrak{B}_1(\mathrm{x})) = \mathfrak{B}_2(\mathrm{x})$ für alle GV und GK x von $\mathfrak{P}$,

b) $a_1, \ldots, a_n \varepsilon \mathfrak{B}_1(\mathrm{f})$ genau dann, wenn $\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n) \varepsilon \mathfrak{B}_2(\mathrm{f})$ für alle $n$-stelligen PV und PK von $\mathfrak{P}$.

Für alle $n$-stelligen FV und FK aus $\mathfrak{P}$ gilt dann $\varphi(\mathfrak{B}_1(\mathrm{f}^*)\{a_1, \ldots, a_n\}) = \mathfrak{B}_2(\mathrm{f}^*)\{\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n)\}$, wie man nach den Ausführungen in 3.2 leicht beweist[1].

Ist $\Pi^*$ eine Menge von Konstanten, so nennen wir zwei Interpretationen $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ *$\Pi^*$-isomorph*, wenn sie die Bedingungen der Definition 3.3.2.1 bei Ersetzung von „$\mathfrak{P}$" durch „$\Pi^*$" erfüllen.

Es gilt der Satz:

**3.3.2.2** Sind $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ $\Pi^*$-isomorphe Interpretationen, so gilt $\mathfrak{B}_1(\mathrm{B}) = \mathfrak{B}_2(\mathrm{B})$ für alle Formeln B, die nur Konstanten aus $\Pi^*$ enthalten, aber keine freien Variablen.

Man führt den Beweis durch Induktion nach dem Grad der Formeln B:

1. B sei atomar. Es gilt $\mathfrak{B}_1(\mathrm{f}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n)) = \mathfrak{w}$ genau dann, wenn $\mathfrak{B}_1(\mathrm{x}_1), \ldots, \mathfrak{B}_1(\mathrm{x}_n) \varepsilon \mathfrak{B}_1(\mathrm{f})$, also nach (b) genau dann, wenn $\varphi(\mathfrak{B}_1(\mathrm{x}_1)), \ldots, \varphi(\mathfrak{B}_1(\mathrm{x}_n)) \varepsilon \mathfrak{B}_2(\mathrm{f})$, also nach (a) genau dann, wenn $\mathfrak{B}_2(\mathrm{x}_1), \ldots, \mathfrak{B}_2(\mathrm{x}_n) \varepsilon \mathfrak{B}_2(\mathrm{f})$, also genau dann, wenn $\mathfrak{B}_2(\mathrm{f}(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n)) = \mathfrak{w}$.

2. Die Behauptung des Satzes sei bewiesen für alle Formeln vom Grad $\leqslant n$. B sei nun vom Grad $n + 1$. Die Fälle, in denen B die Ge-

[1] Der Ausdruck „$\mathfrak{B}_1(\mathrm{f}^*)\ \{a_1, \ldots, a_n\}$" bedeutet den Wert der Funktion, die $\mathfrak{B}_1$ der FV f* zuordnet für die Argumente $a_1, \ldots, a_n$.

stalt $\neg C$ oder $C \supset D$ hat, erledigen sich in einfacher Weise. Hat B die Gestalt $\wedge x C[x]$, so finden wir: Ist $\mathfrak{B}_1(\wedge x C[x]) = \mathfrak{f}$, so gibt es ein $\overline{\mathfrak{B}}_1$, so daß $\overline{\mathfrak{B}}_1 \underset{x}{=} \mathfrak{B}_1$ und $\overline{\mathfrak{B}}_1(C[x]) = \mathfrak{f}$. Wir setzen $\overline{\mathfrak{B}}_2 \underset{x}{=} \mathfrak{B}_2$ und $\overline{\mathfrak{B}}_2(x) = \varphi(\overline{\mathfrak{B}}_1(x))$ und erhalten dann aus der Induktionsvoraussetzung — $\overline{\mathfrak{B}}_1$ und $\overline{\mathfrak{B}}_2$ sind isomorph bzgl. der Menge $\Pi^*$, vergrößert um die GV x — $\overline{\mathfrak{B}}_2(C[x]) = \mathfrak{f}$, also $\mathfrak{B}_2(\wedge x C[x]) = \mathfrak{f}$. Ist umgekehrt $\mathfrak{B}_2(\wedge x C[x]) = \mathfrak{f}$, so gibt es ein $\overline{\mathfrak{B}}_2$, so daß $\overline{\mathfrak{B}}_2 \underset{x}{=} \mathfrak{B}_2$ und $\overline{\mathfrak{B}}_2(C[x]) = \mathfrak{f}$ und wir setzen $\overline{\mathfrak{B}}_1 \underset{x}{=} \mathfrak{B}_1$ und $\overline{\mathfrak{B}}_1(x) = \varphi^{-1}(\overline{\mathfrak{B}}_2(x))$ — $\varphi^{-1}$ sei die Umkehrung der Abbildung $\varphi$, so daß gilt $\varphi(\varphi^{-1}(a)) = a$. Die Induktionsvoraussetzung ergibt dann wieder $\overline{\mathfrak{B}}_1(C[x]) = \mathfrak{f}$ und also $\mathfrak{B}_1(\wedge x C[x]) = \mathfrak{f}$.

Als Übungsaufgabe beweise man $\varphi(\mathfrak{B}_1(t)) = \mathfrak{B}_2(t)$ für alle Terme t, die nur Konstanten aus $\Pi^*$ und keine freien GV enthalten.

Ist $M_T$ die Menge der Axiome eines elementaren Systems $T$, so ist es praktisch, alle wesentlich freien Variablen der Sätze aus $M_T$, d. h. alle freien PV und FV und alle diejenigen freien GV, die nicht durch vorangestellte Allquantoren gebunden werden können, durch Konstanten zu ersetzen, die wir dann als *Grundkonstanten* von $M_T$ bezeichnen. Diese Grundkonstanten stehen dann für die Grundbegriffe bzw. die Grundobjekte der Theorie $T$. Die Grundkonstanten von A sind also „$0$", „$'$", „$+$" und „$\cdot$".

**3.3.2.3** Man nennt ein axiomatisches System $T$ mit den Grundkonstanten der Menge $\Pi^*$ *kategorisch* oder *monomorph*, wenn alle Interpretationen, welche die Axiome von $T$ erfüllen, $\Pi^*$-isomorph sind.

Ein einfaches Beispiel für ein kategorisches System ist das folgende:

**b1:** $\wedge x F(x)$
**b2:** $\wedge xy(x = y)$.

Die Grundkonstante ist „$F$" und zwei Interpretationen $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$, die b1 und b2 erfüllen, sind Interpretationen über einzahligen Individuenbereichen $\gamma_1$ und $\gamma_2$. Es gibt also eine Abbildung $\varphi$ der in **3.3.2.1** verlangten Art, denn nach b1 gilt $\mathfrak{B}_1(F) = \gamma_1$ und $\mathfrak{B}_2(F) = \gamma_2$, also $a \varepsilon \mathfrak{B}_1(F)$ genau dann, wenn $\varphi(a) \varepsilon \mathfrak{B}_2(F)$.

Das Axiomensystem

**c1:** $\vee xy(x \neq y)$
**c2:** $\wedge xyz(x = y \vee y = z \vee x = z)$

c3: $\bigwedge x F(x, x)$
c4: $\bigwedge xy(F(x, y) \supset F(y, x))$

ist hingegen nicht kategorisch. Es seien $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ Interpretationen über den zweizahligen Bereichen $\{a, b\}$ und $\{c, d\}$ und es gelte: $a, a \varepsilon \mathfrak{B}_1(F)$, $b, b \varepsilon \mathfrak{B}_1(F)$, nicht $a, b \varepsilon \mathfrak{B}_1(F)$ und nicht $b, a \varepsilon \mathfrak{B}_1(F)$, und $\mathfrak{B}_2(F)$ enthalte die Menge aller vier Paare, die sich aus $\{c, d\}$ bilden lassen. Dann erfüllen $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ die vier Axiome. $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ sind aber nicht $\{F\}$-isomorph, denn es gibt nur zwei mögliche Abbildungen $\varphi_1$ und $\varphi_2$ von $\{a, b\}$ auf $\{c, d\}$, die durch die Bedingungen $\varphi_1(a) = c$, $\varphi_1(b) = d$ und $\varphi_2(a) = d$ und $\varphi_2(b) = c$ bestimmt sind. Bestünde die fragliche Isomorphie, so müßte also gelten: $a, b \varepsilon \mathfrak{B}_1(F)$ genau dann, wenn $\varphi_1(a), \varphi_1(b) \varepsilon \mathfrak{B}_2(F)$, oder: $a, b \varepsilon \mathfrak{B}_1(F)$ genau dann, wenn $\varphi_2(a), \varphi_2(b) \varepsilon \mathfrak{B}_2(F)$. Das ist aber offensichtlich nicht der Fall, da $a, b \varepsilon \mathfrak{B}_1(F)$ falsch, $c, d \varepsilon \mathfrak{B}_2(F)$ und $d, c \varepsilon \mathfrak{B}_2(F)$ aber wahr ist.

Man wird nun sagen, daß das Axiomensystem A die Reihe der natürlichen Zahlen vollständig charakterisiert, wenn A kategorisch ist, wenn also alle Modelle von A $\{0, ', +, \cdot\}$-isomorph sind. Denn einmal kommt es für die Charakterisierung der natürlichen Zahlen durch A nur auf den Grundbereich der Modelle an und auf die Grundbegriffe, die sie den Grundkonstanten zuordnen, zum anderen kann man aber mit den Mitteln der P.L. nicht zwischen isomorphen Interpretationen unterscheiden, so daß sie als gleichberechtigt anzusehen sind.

Es ist nun zu zeigen, daß das System A nicht kategorisch ist. Ein Beweis dieses Satzes wurde zuerst von Th. Skolem in [67] angegeben. Wir folgen hier dem Beweis von H. Hermes in [33], S. 154f.

$\mathfrak{B}_1$ sei ein „natürliches“ Modell von A, dessen Grundbereich die Menge der natürlichen Zahlen ist. Es gilt dann $\mathfrak{B}_1(t_n) = n$ $(n \geqslant 0)$, wo $t_n$ der Term $0'^{\cdots\prime}$ (eine Null mit $n$ Akzenten) ist. $U$ sei die Menge der Sätze $\{u \neq t_0, u \neq t_1, u \neq t_2, \ldots\}$, wo $u$ eine feste GV sei. $\Pi^*$ sei die Menge der Grundkonstanten „$0$“, „$'$“, „$+$“, „$\cdot$“. Es gilt dann:

1) Keine der Interpretationen $\mathfrak{B}_1$ erfüllt $U$.

2) Es gibt eine Interpretation $\mathfrak{B}_2$, die alle Sätze aus A und $U$ erfüllt.

Aus (1) und (2) folgt der Satz von Skolem. Denn $\mathfrak{B}_2$ erfüllt nach (2) die Satzmenge A, ist aber nicht mit $\mathfrak{B}_1$ $\Pi^*$-isomorph. Wären nämlich $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ $\Pi^*$-isomorph, so gäbe es eine Abbildung $\varphi$, wie sie in 3.3.2.1 verlangt wird und wir könnten dann ein $\mathfrak{B}_1$ so wählen, daß gilt $\mathfrak{B}_1(u) = \varphi^{-1}(\mathfrak{B}_2(u))$, so daß $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ isomorph wären bzgl. der Menge $\Pi^*$, vergrößert um die GV $u$. Dann würde aber nach **3.3.2.2** gelten, daß auch $\mathfrak{B}_{7}$ $U$ erfüllt, im Widerspruch zu (1).

Die Behauptung (1) ergibt sich wie folgt: Ist $\mathfrak{B}_{7}(u) = n$, so gilt $\mathfrak{B}_{7}(u = t_{n}) = \mathfrak{w}$, also $\mathfrak{B}_{7}(u \neq t_{n}) = \mathfrak{f}$, d. h. $\mathfrak{B}_{7}$ erfüllt einen Satz von $U$ nicht.

Die Behauptung (2) ergibt sich aus der Widerspruchsfreiheit und der Vollständigkeit von $\mathfrak{P}1$ (vgl. dazu den Beweis des Satzes 2.3.3.4) wie folgt: Die Menge A $\cup$ $U$ der Sätze aus A und $U$ ist erfüllbar genau dann, wenn sie konsistent ist, also genau dann, wenn es keinen Satz C gibt, so daß gilt A $\cup$ $U \vdash$ C $\wedge \neg$C, also genau dann, wenn es keine endliche Teilmenge $M$ von A $\cup$ $U$ gibt, so daß gilt $M \vdash$ C $\wedge \neg$C, also genau dann, wenn alle endlichen Teilmengen $M$ von A $\cup$ $U$ erfüllbar sind. Es ist aber jede solche Teilmenge $M$ erfüllbar. Denn ist $t_{n}$ ein Term, für den der Satz $u \neq t_{n}$ nicht in $M$ enthalten ist, so können wir ein $\mathfrak{B}_{7}$ mit $\mathfrak{B}_{7}(u) = n$ wählen, das dann $M$ erfüllt, da jedes $\mathfrak{B}_{7}$ A erfüllt und da gilt $\mathfrak{B}_{7}(u \neq t_{m}) = \mathfrak{w}$ für alle $m \neq n$, so daß $\mathfrak{B}_{7}$ auch alle Sätze aus $U$ erfüllt, die in $M$ enthalten sind.

Damit ist also gezeigt, daß das System A die Reihe der natürlichen Zahlen nicht vollständig charakterisiert. Wäre nun A kategorisch, so wäre A auch ein vollständiges System der elementaren Arithmetik in dem Sinn, daß für jeden Satz B, der nur die Grundkonstanten von A, aber keine freien Variablen enthält, A $\vdash$ B oder A $\vdash \neg$B in $\mathfrak{P}1$ beweisbar wäre. Denn nach 3.3.2.2 würde dann gelten, daß die Modelle von A sämtlich den Satz B oder sämtlich den Satz $\neg$B erfüllen. Es wäre also A $\rightarrow$ B oder A $\rightarrow \neg$B ein p.l. gültiger Schluß und wegen der Vollständigkeit von $\mathfrak{P}1$ wäre dann auch A $\vdash$ B oder A $\vdash \neg$B beweisbar.

Daraus, daß A nicht kategorisch ist, kann man nun zwar nicht darauf schließen, daß das axiomatische System unvollständig ist, man kann dies Resultat aber auf anderem Wege gewinnen, wie K. Gödel in [27] gezeigt hat. Da eine Darstellung des Beweises für die Unvollständigkeit der Arithmetik ebenso wie die des Beweises für die Unentscheidbarkeit der P.L. den Rahmen dieses Buches überschreiten würde, sei der Leser auf die Darstellungen in [42] und [71] verwiesen. Da man aus der Kategorizität von A auf die Vollständigkeit von A schließen kann, folgt aus der Unvollständigkeit der Arithmetik wieder der Satz von Skolem. Im Beweis der Unvollständigkeit von A wird ein Satz B effektiv angegeben, für den weder A $\vdash$ B noch A $\vdash \neg$B gilt. Dieser Satz wird also von einigen Modellen von A erfüllt, von anderen nicht. Diese Modelle sind also nicht $\Pi^{*}$-isomorph.

### 3.3.3 Ein Axiomensystem der reellen Zahlen

A. TARSKI hat in [74] eine besonders einfache Axiomatisierung der Theorie der reellen Zahlen angegeben in den Grundbegriffen $<, +, 1$, die wir elementar-logisch wie folgt formulieren können:

**a1:** $x \neq y \supset x < y \vee y < x$
**a2:** $x < y \supset \neg y < x$
**a3:** $x < y \supset \bigvee z(x < z \wedge z < y)$
**a4:** $\bigwedge xy(A[x] \wedge B[y] \supset x < y) \supset \bigvee z \bigwedge xy(A[x] \wedge x \neq z \wedge B[y] \wedge y \neq z \supset x < z \wedge z < y)$
**a5:** $x + (y + z) = (x + z) + y$
**a6:** $\bigvee z(x = y + z)$
**a7:** $x + z < y + t \supset x < y \vee z < t$
**a8:** $1 < 1 + 1$

Wir wollen hier auf eine Diskussion des Inhalts dieser Axiome verzichten, da sie einige Kenntnisse aus der Theorie der reellen Zahlen erfordern würde, wie wir sie hier nicht voraussetzen können. Wir wollen auch nicht auf die Ableitung der Grundgesetze der reellen Zahlen aus diesem Axiomensystem eingehen[1], sondern anhand dieses Axiomensystems auf das Paradoxon von SKOLEM hinweisen[2]. Als „natürliche" Interpretation der Axiome von TARSKI wird man eine Interpretation über dem Bereich der reellen Zahlen ansehen, die der GK „1" die Zahl 1 zuordnet, der zweistelligen PK „<" die Kleinerbeziehung und der zweistelligen FK „+" die Additionsfunktion. Da die Menge der reellen Zahlen überabzählbar unendlich ist, hat eine solche natürliche Interpretation einen überabzählbaren Objektbereich. Nach dem Satz 2.2.2.15 von SKOLEM ist das Axiomensystem aber auch über abzählbar unendlichen Individuenbereichen, z. B. über dem Bereich der rationalen Zahlen erfüllbar. Das Paradoxon besteht also darin, daß die Postulate, durch die man die Menge der reellen Zahlen kennzeichnet, auch in dem Bereich der rationalen (oder auch der ganzen) Zahlen erfüllbar sind, der eine wesentlich andere Struktur hat als der Bereich der reellen Zahlen. Das gilt allgemein für elementare Systeme, z. B. auch für solche der Mengenlehre, deren natürliche Interpretationen über nicht-abzähl-

[1] Vgl. dazu [74], S. 191 ff. Das Axiomensystem ist bei TARSKI im Rahmen der stärkeren mengentheoretischen Logik formuliert. Auch in dieser Formulierung tritt aber das SKOLEMsche Paradoxon auf.

[2] Vgl. dazu [66] und [68].

baren Bereichen definiert sind. Diese Systeme sind also nicht nur nicht kategorisch, sondern sie haben solche paradoxe abzählbare Modelle.

Diesen Sachverhalt kann man sich daraus erklären, daß der wichtige Existenzsatz a4 für reelle Zahlen — die übrigen Axiome gelten auch für rationale Zahlen — nur für solche Begriffspaare reelle Zahlen liefert, die sich durch Prädikate A[x] und B[y] in $\mathfrak{P}$ ausdrücken lassen. Während es aber überabzählbar viele solche Begriffspaare gibt, gibt es nur abzählbar viele Prädikatenpaare in $\mathfrak{P}$. a4 liefert also nur abzählbar viele reelle Zahlen. Andererseits ist es nicht so, daß sich die Menge der im formalen System angebbaren reellen Zahlen auch mit den Mitteln des Systems selbst abzählen ließe — sonst hätte ja das System kein natürliches Modell —, da aus der Existenz einer solchen abzählenden Beziehung nicht ihre Darstellbarkeit in $\mathfrak{P}$ folgt. Es kann also die Menge der reellen Zahlen, die sich im System beschreiben lassen, abzählbar sein, ohne daß sie im System abzählbar ist.

Die Konzeptionen der überabzählbaren Menge, der Menge aller zahlentheoretischen Funktionen und Begriffe, sind also Konzeptionen, die sich im Rahmen der elementaren Logik nicht adäquat charakterisieren lassen.

Mit diesen Hinweisen auf die Anwendungs- und Ausdrucksmöglichkeiten der elementaren Logik und ihre Grenzen wollen wir nun unsere Behandlung der engeren P.L. abschließen, um in den nächsten beiden Kapiteln noch einen kurzen Blick auf höhere Logiksysteme zu werfen.

*Übungsaufgabe:*

Welche der folgenden drei Axiomensysteme sind kategorisch? Welches ist die Anzahl ihrer nicht $\{F, G\}$-isomorphen Modelle?

1) $\bigwedge xyz(x = y \lor y = z \lor x = z)$
$\bigvee xy(x \neq y \land F(x) \land \neg F(y))$

2) $\bigwedge xyzu(x = y \lor y = z \lor x = z \lor z = u \lor x = u \lor y = u)$
$\bigvee xy(x \neq y \land F(x) \land \neg F(y))$

3) $\bigwedge x \neg F(x, x) \land \bigwedge x \bigvee y F(x, y) \land \bigwedge xyz(F(x, y) \land F(y, z) \supset F(x, z))$
$\bigvee x \bigwedge y(G(x) \land (x \neq y \supset G(y))$.

# 4 Die Prädikatenlogik der zweiten Stufe

In diesem und dem folgenden Kapitel wollen wir sog. höhere Logiksysteme betrachten, die noch leistungsfähiger sind als die elementare Logik. Da die elementare Logik den eigentlichen Gegenstand dieses Buches bildet, werden wir das Thema dieser beiden Kapitel nicht mehr in der gleichen Ausführlichkeit entwickeln, mit der die elementare Logik in den ersten beiden Kapitel behandelt wurde. Es geht uns im folgenden nur darum, einen Ausblick auf den Inhalt weiterreichender Logiksysteme zu geben, und dazu wird es genügen, einige wichtige Begriffsbildungen und Sätze hervorzuheben.

In diesem Kapitel wenden wir uns einem System der höheren Prädikatenlogik zu, indem wir von der elementaren Prädikatenlogik oder Prädikatenlogik der 1. Stufe übergehen zur Prädikatenlogik der 2. Stufe. Aus dieser Prädikatenlogik kann man als Teilsystem die *engere* Prädikatenlogik 2. Stufe herausheben. Da dieses Teilsystem besonders einfach ist und bereits die wesentlichen Merkmale der P.L. 2. Stufe hat und die wesentlichen Unterschiede der P.L. 2. Stufe zur elementaren P.L. aufweist, wollen wir seine Diskussion im folgenden in den Vordergrund stellen.

Die engere P.L. 2. Stufe unterscheidet sich von der P.L. 1. Stufe dadurch, daß auch die Quantifizierung von PV zugelassen wird. Man kann also aus einer Formel A von $\mathfrak{P}$ die Formeln $\Lambda fA$ und $\bigvee fA$ bilden, die besagen: die Aussage A gilt für alle Begriffe bzw. es gibt einen Begriff, für den A gilt. Im Abschnitt 2.1.2 wurde hervorgehoben, daß die Verwendung von Quantoren für GV die Ausdrucksmöglichkeiten einer Sprache mit GV wesentlich erweitert, da die Deutung freier GV im Sinne der Allgemeinheit eine Unterscheidung z. B. zwischen der Allgemeinheit der Negation und der Negation der Allgemeinheit noch nicht ermöglicht. Ganz entsprechendes gilt für die Einführung von Quantoren für PV. Die folgenden Aussagen sind Beispiele für die erweiterten Ausdrucksmöglichkeiten der P.L. 2. Stufe gegenüber der Sprache $\mathfrak{P}$:

$\wedge f \vee g \wedge x(g(x) \equiv \neg f(x))$ — zu jedem Begriff $f$ gibt es einen Begriff $g$, der genau auf diejenigen Dinge zutrifft, auf die $f$ nicht zutrifft.

$\vee f \wedge g \wedge x(g(x) \supset f(x))$ — es gibt einen Begriff mit maximalem Umfang.

$\wedge x \vee f \wedge y(f(y) \equiv y = x)$ — zu jedem Ding gibt es einen Begriff, der nur auf dieses Ding zutrifft.

$\wedge g(\wedge x \vee y g(x, y) \supset \vee f(\wedge x \vee y(f(x, y) \wedge g(x, y)) \wedge \wedge xyz(f(x, y) \wedge f(x, z) \supset y = z)))$ — Zu jeder Beziehung $g$, für die gilt: zu jedem Objekt $x$ gibt es eine nichtleere Klasse $K(x)$ von Objekten $y$, die zu $x$ in der $g$-Beziehung stehen, gibt es eine Funktion $f$ (wegen $\wedge x \vee y f(x, y)$ und $\wedge xyz(f(x, y) \wedge f(x, z) \supset y = z)$ ist $f$ eine Funktion), die jedem Objekt $x$ ein Element der Klasse $K(x)$ zuordnet. Das ist eine Formulierung des *Auswahlprinzips*. Wir könnten bei Verwendung der FV $f^*$ dies Prinzip auch so formulieren: $\wedge g(\wedge x \vee y g(x, y) \supset \vee f^* \wedge x g(x, f^*(x)))$. In entsprechender Weise ist die folgende Aussage zu verstehen:

$\wedge x \vee f A[x, f] \supset \vee g \wedge x A[x, f/g(y_1, \ldots, y_n, x)]$, wo $f$ eine $n$-stellige PV sei. Wenn es zu jedem Ding $x$ einen Begriff $f_x(y_1, \ldots, y_n)$ gibt, der zu $x$ in der A-Beziehung steht, so gibt es einen Begriff $g(y_1, \ldots, y_n, x)$, der für alle $x$ zu $x$ in der A-Beziehung steht. Setzt man $g(y_1, \ldots, y_n, x) = f_x(y_1, \ldots, y_n)$, so leuchtet die Richtigkeit dieser Behauptung ein.

Ferner läßt sich im Rahmen der P.L. 2. Stufe das Induktionsprinzip der Arithmetik (vgl. 3.3.2) in der Gestalt $\wedge f(f(0) \wedge \wedge x(f(x) \supset f(x')) \supset \wedge x f(x))$ formulieren und das Axiom a4 der reellen Zahlen aus 3.3.3 läßt sich in der Form $\wedge fg(\wedge xy(f(x) \wedge g(y) \supset x < y) \supset \vee z \wedge xy(f(x) \wedge x \neq z \wedge g(y) \wedge y \neq z \supset x < z \wedge z < y))$ angeben. Wir haben früher schon hervorgehoben, daß diese Formulierungen stärker sind als die entsprechenden elementarlogischen Axiome.

Aus der engeren P.L. 2. Stufe entsteht die volle P.L. 2. Stufe, wenn man auch PV für *Prädikatenprädikate* einführt. Neben den Eigenschaften von Objekten kann man auch Eigenschaften solcher Eigenschaften betrachten. Man nennt Begriffe, deren sämtliche Argumente Objekte (Individuen) sind, *Begriffe 1. Stufe*, Begriffe, unter deren Argumenten auch Begriffe 1. Stufe vorkommen, nennt man *Begriffe 2. Stufe*. So ist die Eigenschaft einer körperlichen oder geistigen Eigenschaft (also eines Begriffes 1. Stufe) in einer Familie erblich zu sein, eine Eigenschaft 2. Stufe. Ebenso ist die Eigenschaft einer Beziehung $f$ 1. Stufe, transitiv zu sein, die wir durch die Formel $\wedge xyz(f(x, y) \wedge f(y, z) \supset f(x, z))$

ausdrücken, eine Eigenschaft 2. Stufe. Ebenso können wir die Erfüllbarkeit eines Begriffes $f$, die sich in der Formel $\vee x f(x)$ ausdrückt, oder seine Allgemeingültigkeit ($\wedge x f(x)$) als Eigenschaften 2. Stufe auffassen. Beziehungen 2. Stufe können zwischen Begriffen 1. Stufe stattfinden, wie z. B. die Beziehung $f$ ist Oberbegriff von $g$: $\wedge x(g(x) \supset f(x))$, oder zwischen Begriffen 1. Stufe und Objekten, wie z. B. die Beziehung des Zutreffens einer Eigenschaft 1. Stufe $f$ auf einen Gegenstand $x$: $f(x)$. Die Ausdrücke solcher Begriffe 2. Stufe nennt man Prädikatenprädikate.

Wegen des kategorialen und formalen Unterschiedes einerseits zwischen Objekten und Begriffen 1. Stufe, andererseits zwischen Begriffen 1. Stufe verschiedener Stellenzahl wird man fordern, daß ein Begriff 2. Stufe bzgl. einer Argumentstelle immer nur für Argumente vom gleichen kategorialen Typ erklärt ist. Es ist ja z. B. sinnlos, den Erfüllbarkeitsbegriff $\vee x f(x)$ auf Objekte anzuwenden oder auf mehrstellige Begriffe, denn $\vee x g(x, y)$ besagt ja nicht, daß die Beziehung $g$ erfüllbar ist. Das wäre vielmehr durch die Formel $\vee xy g(x, y)$ auszudrücken.

Quantoren für PV 2. Stufe, die für Prädikatenprädikate stehen, werden in der P.L. 2. Stufe nicht betrachtet. Führt man solche Quantoren ein, so gelangt man zur P.L. 3. Stufe. So kann man zu beliebig hohen p.l. Systemen aufsteigen. Da die Grundgedanken zum Aufbau höherer p.l. Systeme schon in der P.L. 2. Stufe deutlich werden, wollen wir uns im folgenden auf diese Logik beschränken.

## 4.1 Die Sprache der Prädikatenlogik der zweiten Stufe

### 4.1.1 Die Syntax der Sprachen $\mathfrak{P}_{20}$ und $\mathfrak{P}_2$

Es sollen nun Symbolsprachen $\mathfrak{P}_{20}$ und $\mathfrak{P}_2$ für die engere und die volle P.L. syntaktisch festgelegt werden. Die Grundzeichen der Sprache $\mathfrak{P}_{20}$ sind die gleichen wie die der Sprache $\mathfrak{P}$. Zu den Formregeln von $\mathfrak{P}$ (vgl. 2.2.1), in deren Formulierung wir nun „$\mathfrak{P}$“ durch „$\mathfrak{P}_{20}$“ ersetzen, nehmen wir noch folgende Bestimmung hinzu:

d) Ist A eine Formel und ist f eine PV von $\mathfrak{P}_{20}$, so sind auch $\wedge$fA und $\vee$fA Formeln von $\mathfrak{P}_{20}$.

Der Bereich von Prädikatquantoren, das freie und gebundene Vorkommen einer PV in einer Formel, und das Gebundensein durch ein bestimmtes Quantorvorkommnis werden ganz entsprechend wie in 2.2.1 definiert. Dort wurde auch schon gesagt, wann eine PV in einer Formel ohne Prädikatquantoren frei ist für eine andere Formel. Diese Definition müssen wir nun für Formeln von $\mathfrak{P}_{20}$ erweitern. Wir sagen, eine $n$-stellige PV f sei frei in einer Formel A[f] für (eine Ersetzung durch) die Formel $B[x_1, \ldots, x_n]$, die mindestens $n$ verschiedene freie GV $x_1, \ldots, x_n$ enthalten soll, wenn gilt: Kommt f in A[f] im Bereich eines Quantors, der mit der GV z gleichnamig ist, frei vor, so enthält B kein freies Vorkommnis von z, das von $x_1, \ldots, x_n$ verschieden ist. Kommt f in A[f] im Bereich eines Quantors frei vor, der mit der PV g gleichnamig ist, so enthält B kein freies Vorkommnis von g.

Die freie Umbenennung gebundener PV ist wie die freie Umbenennung gebundener GV zu definieren und läßt sich immer so vollziehen, daß eine freie PV f in einer Formel A[f] frei wird für eine beliebige vorgegebene Formel $B[x_1, \ldots, x_n]$. Die freie Einsetzung von $B[x_1, \ldots, x_n]$ für f in A[f] wird dann wie in 2.2.1 definiert, nur daß nun in A[f] nicht alle, sondern nur die freien Vorkommnisse von f durch B ersetzt werden. Das Resultat der Einsetzung bezeichnen wir wieder durch $A[f/B[x_1, \ldots, x_n]]$.

Die Klammerregeln für Prädikatquantoren legen wir in Analogie zu denen für Termquantoren in $\mathfrak{P}$ fest.

Zu den Grundzeichen von $\mathfrak{P}_{20}$ nehmen wir zum Aufbau der Sprache $\mathfrak{P}_2$ noch das Symbol „$\kappa$" hinzu, sowie die PV 2. Stufe „$A$", „$B$", „$C$", ...

Wie wir die Begriffe 1. Stufe nach der Zahl ihrer Argumente unterschieden haben, so müssen wir auch die Begriffe 2. Stufe nach ihrer Stellenzahl unterscheiden. Wir müssen diese Begriffe aber auch nach dem kategorialen Typ ihrer Argumente unterscheiden. Die entsprechenden Unterscheidungen sind auch für die PV 2. Stufe zu machen. Dazu ordnen wir diesen PV *Typen* zu: Als Typ einer GV oder *0*-Typ bezeichnen wir die Ziffer „*0*". Als Typ eines Prädikates 1. Stufe oder *1*-Typ bezeichnen wir einen Ausdruck „$(0, \ldots, 0)$", wo zwischen den Klammerzeichen $n$ Nullen stehen mögen ($n \geqslant 1$). Die Zahl $n$ soll die Stellenzahl des Prädikates 1. Stufe ausdrücken. Als Typ einer PV 2. Stufe oder *2*-Typ bezeichnen wir dann einen Ausdruck $(\tau_1, \ldots, \tau_n)$, wo $\tau_1, \ldots, \tau_n$ *1*- oder *2*-Typen sind, unter denen mindestens ein *2*-Typ vorkommt. Die Zahl $n$ deutet dann wieder die Stellenzahl der PV 2. Stufe an.

Demnach ist „$((0, 0), (0), 0)$" der Typ einer PV 2. Stufe, die einen Begriff 2. Stufe symbolisiert, dessen Argumente zweistellige Begriffe

1. Stufe, einstellige Begriffe 1. Stufe und Individuen sind. Zu jedem *2*-Typ soll es in $\mathfrak{P}_2$ unendlich viele PV 2. Stufe dieses Typs geben, die wir auch durch angehängte Ziffernindices unterscheiden können.

Zu den Formregeln von $\mathfrak{P}_{20}$, in denen wir nur „$\mathfrak{P}_{20}$" durch „$\mathfrak{P}_2$" ersetzen, nehmen wir noch folgende Regel für $\mathfrak{P}_2$ hinzu:

e) Ist F eine PV 2. Stufe von $\mathfrak{P}_2$ mit dem Typ $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n)$, sind $\tau_{i_1}, \ldots, \tau_{i_m}$ $(1 \leqslant m \leqslant n)$ die *1*-Typen aus $\tau_1, \ldots, \tau_n$ mit den Stellenzahlen $s_{i_l}$ $(l = 1, \ldots, m)$ und sind $\mathrm{A}_{i_l}$ Formeln von $\mathfrak{P}_2$ mit mindestens $s_{i_l}$ freien GV $\mathrm{x}_{i_l 1}, \ldots, \mathrm{x}_{i_l s_{i_l}}$, so ist $\mathrm{F}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ eine Formel von $\mathfrak{P}_2$, wenn für $k = 1, \ldots, n$ gilt: $\alpha_k$ ist eine GV von $\mathfrak{P}_2$, wenn $\tau_k$ ein *0*-Typ ist, und $\alpha_k$ ist der Ausdruck $\kappa \mathrm{x}_{i_l 1} \ldots \mathrm{x}_{i_l s_{i_l}} \mathrm{A}_{i_l}$, wenn $\tau_k = \tau_{i_l}$ ist.

Die Ausdrücke $\kappa \mathrm{x}_1 \ldots \mathrm{x}_n$ fassen wir dabei als Kurzformen der Ausdrücke $\kappa \mathrm{x}_1 \, \kappa \mathrm{x}_2 \ldots \kappa \mathrm{x}_n$ auf, ebenso wie $\Lambda \mathrm{x}_1 \ldots \mathrm{x}_n$ eine Kurzform von $\Lambda \mathrm{x}_1 \Lambda \mathrm{x}_2 \ldots \Lambda \mathrm{x}_n$ ist. Wir bezeichnen einen Ausdruck $\kappa \mathrm{x}$ als *Quantor* im weiteren Sinn, durch den die Vorkommnisse der GV x, die im Bereich dieses Quantors frei sind, gebunden werden. Der Bereich eines solchen Quantors ist dabei zu definieren wie der Bereich des Quantors $\Lambda \mathrm{x}$ und mit der Klammersetzung hinter den Quantoren $\kappa \mathrm{x}$ wollen wir es so halten wie mit der Klammersetzung hinter $\Lambda \mathrm{x}$.

Zu der $\kappa$-Symbolik ist folgendes zu sagen: Eine Eigenschaft 2. Stufe ist eine Eigenschaft von Begriffen, nicht eine Eigenschaft von den Wahrheitswerten eines Begriffes für gewisse Argumente. So ist z. B. die Erfüllbarkeit eines einstelligen Begriffes $f$ 1. Stufe symbolisch so darzustellen, daß der Ausdruck für $f$ als Argument des Erfüllungsprädikats keine freie GV enthält, ebenso wie $\mathrm{V} x f(x)$ keine freie GV enthält. Man könnte nun denken, es sei einfacher $F(f)$ zu schreiben anstelle von $F(\kappa x f(x))$ und in $F(f)$ die nicht freie GV $x$ von $f(x)$ einfach wegzulassen. Wenn man aber nun die Erfüllbarkeit eines zweistelligen Prädikates $g(x, y)$ für ein festes Argument $y$ aussagen will, so kann man nicht einfach $F(g)$ schreiben, ähnlich wie man wohl $\mathrm{V} f$ statt $\mathrm{V} x f(x)$ schreiben könnte, aber nicht $\mathrm{V} g$ statt $\mathrm{V} x g(x, y)$, weil in dieser Schreibweise die Bedeutungsunterschiede zwischen $\mathrm{V} x g(x, y)$, $\mathrm{V} y g(x, y)$ und $\mathrm{V} x g(x, x)$ verwischt würden. Daher empfiehlt es sich, die GV des Arguments $f(x)$ im Ausdruck für die Erfüllbarkeit von $f(x)$ mitzuführen und sie durch einen besonderen Quantor zu binden. Anstelle von $F(\kappa x f(x))$ schreibt man auch oft $F(f(\hat{x}))$, wobei das Zeichen „$\hat{\ }$" dann die Rolle des Quantors übernimmt. Unsere Schreibweise hat aber den Vorteil, daß wir alle früheren Bestimmungen über Quantoren, freie und gebundene GV, sowie freie Einsetzungen und Umbenennungen direkt auf die Ausdrücke $\kappa x A[x]$ übertragen können. Wenn $\mathfrak{B}$ eine Interpretation ist, so bedeutet $\kappa x A[x]$ in dieser Interpretation also den gleichen Begriff wie $\mathfrak{B}(A[\hat{x}])$, vgl. die Anmerkung zu S. 138.

### 4.1.2 Die Semantik der Sprachen $\mathfrak{P}_{20}$ und $\mathfrak{P}_2$

Aus einer Interpretation $\mathfrak{B}$ der P.L. 1. Stufe entsteht eine Interpretation von $\mathfrak{P}_{20}$, wenn wir zu 2.2.2.1 die Bedingung hinzunehmen:

c5) $\mathfrak{B}^1(\wedge f A) = \mathfrak{w}$ genau dann, wenn für alle Interpretationen $\overline{\mathfrak{B}}$ gilt: wenn $\overline{\mathfrak{B}} \mathrel{\overline{\overline{\scriptstyle f}}} \mathfrak{B}$, dann $\overline{\mathfrak{B}}^1(A) = \mathfrak{w}$.

Dabei bedeutet „$\overline{\mathfrak{B}} \mathrel{\overline{\overline{\scriptstyle f}}} \mathfrak{B}$" in Entsprechung zu „$\overline{\mathfrak{B}} \mathrel{\overline{\overline{\scriptstyle x}}} \mathfrak{B}$", daß die Interpretationen $\overline{\mathfrak{B}}$ und $\mathfrak{B}$ bis auf höchstens die Werte $\overline{\mathfrak{B}}(f)$ und $\mathfrak{B}(f)$ übereinstimmen.

Man kann nun die Semantik für $\mathfrak{P}_{20}$ in enger Entsprechung zu der Semantik für $\mathfrak{P}$ in 2.2.2 aufbauen. In der Definition 2.2.2.2 hat man so etwa „GV" durch „GV und PV" zu ersetzen und kann dann in Entsprechung zu 2.2.2.3 den Satz beweisen:

**4.1.2.1** Haben die Interpretationen $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ den gleichen Objektbereich und gilt $\mathfrak{B}_1(\alpha) = \mathfrak{B}_2(\alpha)$ für alle Variablen $\alpha$ aus $\Gamma^*$, so sind $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ $\Gamma^*$-äquivalent.

Daraus folgt wieder, daß der Wert $\mathfrak{B}(A)$ einer Interpretation $\mathfrak{B}$ für eine Formel A nur vom Objektbereich von $\mathfrak{B}$ und den Werten von $\mathfrak{B}$ für die freien Variablen in A abhängt. Insbesondere gilt also wieder $\mathfrak{B}(A) = \mathfrak{B}(A')$, wenn $A'$ aus A durch freie Umbenennung gebundener Variablen hervorgeht.

Die Gültigkeit eines Schlusses $A_1, \ldots, A_m \rightarrow B_1, \ldots, B_n$ in der engeren P.L. 2. Stufe kann man wörtlich wie in 2.2.2.6 definieren, wobei man auf Interpretationen Bezug nimmt, die auch der Bedingung (c5) genügen. Man kann ferner normale Interpretationen wie in 2.2.2.12 definieren, wobei man nun für die Normalität zusätzlich fordert: wenn gilt $\mathfrak{B}(\wedge f A[f]) = \mathfrak{f}$, wo f eine $n$-stellige PV ist, so gibt es eine $n$-stellige PV g, für die gilt $\mathfrak{B}(A[f/g(x_1, \ldots, x_n)]) = \mathfrak{f}$. Dann kann man einen Satz, der aus 2.2.2.13 entsteht durch Ersetzung von „GV" durch „GV und $n$-stellige PV ($n = 1, 2, \ldots$)" nach der gleichen Methode beweisen wie diesen Satz.

Mit Hilfe dieses Theorems kann man wiederum die Sätze von LÖWENHEIM 2.2.2.14 und SKOLEM 2.2.2.15 beweisen. Es sei dem Leser als Übungsaufgabe empfohlen, diese einfachen Analogiebetrachtungen im Detail durchzuführen.

Wie in 2.2.2 (vgl. die Anmerkung zu S. 138) können wir auch eine Zuordnung von $n$-stelligen Prädikaten zu $n$-stelligen Begriffen über dem Objektbereich $\gamma$ einer Interpretation $\mathfrak{B}$ definieren, so daß gilt: $\mathfrak{B}(y_1), \ldots, \mathfrak{B}(y_n) \varepsilon \mathfrak{B}(A[\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n])$ genau dann, wenn $\mathfrak{B}(A[x_1/y_1, \ldots, x_n/y_n]) = \mathfrak{w}$. Diese Zuordnung benützen wir, um folgenden Satz zu beweisen:

**4.1.2.2** Ist f eine $n$-stellige PV, sind $x_1, \ldots, x_n$ verschiedene GV und gilt $\mathfrak{B}_2 \underset{\mathrm{f}}{=} \mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2(\mathrm{f}) = \mathfrak{B}_1(A[\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n])$, so gilt auch $\mathfrak{B}_1(B[\mathrm{f}/A[x_1, \ldots, x_n]]) = \mathfrak{B}_2(B[\mathrm{f}])$, wenn f in B[f] frei ist für $A[x_1, \ldots, x_n]$.

Dieser Satz ergänzt das Theorem 2.2.2.4 für die P.L. 2. Stufe. Wir führen den Beweis durch Induktion nach dem Grad der Formel B[f].

a) B[f] sei eine Atomformel. Dann hat B[f] die Gestalt $\mathrm{f}(y_1, \ldots, y_n)$ und $B[\mathrm{f}/A[x_1, \ldots, x_n]]$ hat die Gestalt $A[x_1/y_1, \ldots, x_n/y_n]$. Es gilt dann $\mathfrak{B}_1(A[x_1/y_1, \ldots, x_n/y_n]) = \mathfrak{w}$ genau dann, wenn $\mathfrak{B}_1(y_1), \ldots, \mathfrak{B}_1(y_n) \varepsilon \mathfrak{B}_1(A[\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n])$, also genau dann, wenn $\mathfrak{B}_1(y_1), \ldots, \mathfrak{B}_1(y_n) \varepsilon \mathfrak{B}_2(\mathrm{f})$, also genau dann, wenn $\mathfrak{B}_2(\mathrm{f}(y_1, \ldots, y_n)) = \mathfrak{w}$.

b) Die Behauptung sei bewiesen für alle Formeln B[f] vom Grad $\leqslant n$. B[f] sei nun vom Grad $n + 1$. Die a.l. Fälle, in denen B[f] die Gestalt $\neg C[\mathrm{f}]$ bzw. $C[\mathrm{f}] \supset D[\mathrm{f}]$ hat, erledigen sich in einfacher Weise. Der Fall, daß B[f] die Form $\bigwedge y C[y, \mathrm{f}]$ hat, erledigt sich wie der folgende Fall, wenn man beachtet, daß y nach der Voraussetzung des Satzes, daß f in B[f] frei ist für $A[x_1, \ldots, x_n]$, nicht frei in $A[x_1, \ldots, x_n]$ vorkommt, sofern y von $x_1, \ldots, x_n$ verschieden ist. Habe nun B[f] die Gestalt $\bigwedge \mathrm{g} C[\mathrm{g}, \mathrm{f}]$. Dann ist g von f verschieden, da sonst f nicht frei in B[f] vorkäme, und g kommt nach der genannten Voraussetzung nicht frei in $A[x_1, \ldots, x_n]$ vor. Wir finden: Ist $\mathfrak{B}_1(\bigwedge \mathrm{g} C[\mathrm{g}, \mathrm{f}/A[x_1, \ldots, x_n]])$ $= \mathfrak{f}$, so gibt es ein $\overline{\mathfrak{B}}_1$, so daß $\overline{\mathfrak{B}}_1 \underset{\mathrm{g}}{=} \mathfrak{B}_1$ und $\overline{\mathfrak{B}}_1(C[\mathrm{g}, \mathrm{f}/A[x_1, \ldots, x_n]]) = \mathfrak{f}$. Wählen wir $\overline{\mathfrak{B}}_2$, so daß $\overline{\mathfrak{B}}_2 \underset{\mathrm{g}}{=} \mathfrak{B}_2$ ist und $\overline{\mathfrak{B}}_2(\mathrm{g}) = \overline{\mathfrak{B}}_1(\mathrm{g})$, so ist die Bedingung des Satzes für $\overline{\mathfrak{B}}_1, \overline{\mathfrak{B}}_2$ erfüllt, da g von f verschieden ist und in $A[x_1, \ldots, x_n]$ nicht vorkommt, und wir erhalten nach Induktionsvoraussetzung $\overline{\mathfrak{B}}_2(C[\mathrm{g}, \mathrm{f}]) = \overline{\mathfrak{B}}_1(C[\mathrm{g}, \mathrm{f}/A[x_1, \ldots, x_n]]) = \mathfrak{f}$, also $\mathfrak{B}_2(\bigwedge \mathrm{g} C[\mathrm{g}, \mathrm{f}])$ $= \mathfrak{f}$. Umgekehrt schließt man ebenso.

Wenn man den Satz **4.1.2.1** benützt, kann man die Bedingung, daß f in B[f] frei sein soll für $A[x_1, \ldots, x_n]$ auch in **4.1.2.2** fortlassen. Man erhält dann den Satz

**4.1.2.3** Der Schluß $\wedge f B[f] \rightarrow B[f/A[x_1, \ldots, x_n]]$ ist gültig in der P.L. 2. Stufe, wenn f eine $n$-stellige PV ist und $x_1, \ldots, x_n$ $n$ verschiedene GV sind.

Denn wäre $\mathfrak{B}_1(B[f/A[x_1, \ldots, x_n]]) = \mathfrak{f}$, so wäre nach 4.1.2.2 $\mathfrak{B}_2(B[f]) = \mathfrak{f}$, also $\mathfrak{B}_1(\wedge f B[f]) = \mathfrak{f}$.

Aus diesem Satz folgt unter Benützung der Definition

**D8:** $\vee f A := \neg \wedge f \neg A$

auch die Allgemeingültigkeit des Schlusses $B[f/A[x_1, \ldots, x_n]] \rightarrow \vee f B[f]$.

In der Sprache $\mathfrak{P}_{20}$ kann man die Identität definieren durch

**D9:** $x = y := \wedge f(f(x) \equiv f(y))$.

Das Prinzip $x = y \supset \wedge f(f(x) \equiv f(y))$ besagt dabei die Substituierbarkeit des Identischen, die wir auch im Axiom A5 gefordert haben. Die Umkehrung $\wedge f(f(x) \equiv f(y)) \supset x = y$ drückt das LEIBNIZsche Prinzip der Identität des Ununterscheidbaren aus, das besagt: Wenn es keine Eigenschaft gibt, die einem Ding *a* zukommt, aber nicht dem Ding *b*, und keine Eigenschaft, die *b* zukommt, aber nicht *a*, wenn also *a* und *b* alle Eigenschaften gemeinsam haben, so sind *a* und *b* identisch. LEIBNIZ hat dies Prinzip so ausgedrückt: *eadem sunt, quorum unum potest substitui alteri salva veritate.* Dies Prinzip hat im Rahmen der modernen Logik zuerst C. S. PEIRCE zur Definition der Identität verwendet.

Die Adäquatheit der Definition D9 kann man nur dann beweisen, wenn man neben dem Prinzip der Substituierbarkeit des Identischen, das wir immer schon verwendet haben, auch die Gültigkeit des Leibnizprinzips für die Metatheorie voraussetzt. Die Gültigkeit dieses Prinzips läßt sich nur in einer sehr trivialen Weise formal beweisen, wenn man die Eigenschaft, mit sich selbst identisch zu sein, bereits unter die Menge der Eigenschaften aufnimmt, welche nach dem Leibnizprinzip die Identität von $x$ und $y$ bestimmen sollen: Aus $\wedge f(f(x) \equiv f(y))$ folgt dann $x = x \equiv x = y$, mit $x = x$ also $x = y$.

Aus D9 folgen die Eigenschaften der Identität, wie wir sie in A5 und A6 gefordert haben: Aus $\rightarrow \wedge f(f(x) \equiv f(x))$ folgt $\rightarrow x = x$, also $\rightarrow \wedge x(x = x)$. Und aus **4.1.2.3** folgt $\wedge f(f(x) \equiv f(y)) \rightarrow A[x] \equiv A[x/y]$, also $x = y \rightarrow A[x] \equiv A[x/y]$, also $\rightarrow x = y \supset (A[x] \supset A[x/y])$ für alle Formeln $A[x]$.

Wegen der Definierbarkeit der Identität in $\mathfrak{P}_{20}$ lassen sich in $\mathfrak{P}_{20}$ auch die Anzahlaussagen aus 3.1 formulieren, so daß wie für die Sprache $\mathfrak{P}^+$ die Entsprechungen zu den Sätzen 2.2.2.17 und 2.2.2.18 nicht gelten.

Eine Semantik der Sprache $\mathfrak{P}_2$ erhält man, wenn man zu den Funktionen $\mathfrak{B}^1, \mathfrak{B}^2, \mathfrak{B}^{3 \cdot n}$, die eine Interpretation $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{P}_{20}$ definieren, zu jedem 2-Typ $\tau$ noch die Funktion $\mathfrak{B}^\tau$ hinzunimmt, welche die Menge $\Pi^\tau$ der PV 2. Stufe vom Typ $\tau$ abbildet in die Menge der Begriffe 2. Stufe vom gleichen Typ über dem Grundbereich $\gamma$ von $\mathfrak{B}$. Wir setzen $\mathfrak{B}(\kappa x_1 \ldots x_n A[x_1, \ldots, x_n]) = \mathfrak{B}(A[\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n])$ und nehmen zu den Bedingungen für $\mathfrak{B}^1$ noch die Forderung hinzu:

c6) $\mathfrak{B}^1(F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)) = \mathfrak{w}$ genau dann, wenn $\mathfrak{B}(\alpha_1), \ldots, \mathfrak{B}(\alpha_n) \varepsilon \mathfrak{B}(F)$. Dabei sei F eine PV 2. Stufe vom Typ mit $n$ Stellen und $F(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ sei eine Formel von $\mathfrak{P}_2$ nach der Formregel (e) aus 4.1.1.

Bzgl. der oben besprochenen Sätze weist die Semantik von $\mathfrak{P}_2$ keine wesentlichen Unterschiede gegenüber der Semantik von $\mathfrak{P}_{20}$ auf.

*Übungsaufgaben:*

1. Man überprüfe die Allgemeingültigkeit folgender Sätze:

$\land xyz \lor f(f(x) \land f(y) \land \neg f(z))$,
$\land f \lor x f(x)$,
$\lor f \land g(\land x g(x) \supset f(y))$,
$\land f x \lor g \land y(f(x, y) \equiv g(x))$,
$\land f x \lor g \land y(f(x, y) \supset g(x))$,
$\land f(\land x f(x) \supset g(x))$,
$\land f g \lor h \land x(h(x) \equiv f(x) \lor g(x))$.

2. Man formuliere die Anzahlaussagen aus 3.1 in der Sprache $\mathfrak{P}_{20}$.

## 4.2 Die Unvollständigkeit der Prädikatenlogik der zweiten Stufe

Wir wollen nun einen Kalkül der P.L. 2. Stufe aufbauen, den wir $\mathfrak{P}_2 1$ nennen. Die semantischen Analogien zwischen der elementaren P.L. und der P.L. 2. Stufe legen es nahe, den Kalkül $\mathfrak{P}1$ zum Kalkül $\mathfrak{P}_2 1$ in analoger Weise zu erweitern, wie wir den a.l. Kalkül $\mathfrak{A}1$ zum Kalkül $\mathfrak{P}1$ erweitert haben. Wir wollen also neben den Axiomen von $\mathfrak{P}1$ das Axiom

**A9:** $\wedge f B[f] \supset B[f/A[x_1, \ldots, x_n]]$

verwenden, wobei f eine *n*-stellige PV sei, die in $B[f]$ frei ist für die Formel $A[x_1, \ldots, x_n]$, die *n* verschiedene GV $x_1, \ldots, x_n$ frei enthalten möge.

Zu den Deduktionsregeln von $\mathfrak{P}1$ nehmen wir in $\mathfrak{P}_2 1$ noch die Regel hinzu:

**R3:** Aus $A \supset B[f]$ ist $A \supset \wedge f B[f]$ ableitbar, wenn die PV f nicht frei in A vorkommt.

Bzgl. $\mathfrak{P}_2 1$ definiert man den Begriff ‚die PV f wird in einer Ableitung festgehalten' in genauer Entsprechung zum Begriff ‚die GV x wird in einer Ableitung festgehalten', den wir in 2.2.1 eingeführt haben. Man kann dann entsprechende Theoreme und Metatheoreme wie für $\mathfrak{P}1$ auch für $\mathfrak{P}_2 1$ beweisen. Es sei dem Leser als Übungsaufgabe empfohlen, einige solcher Beweise durchzuführen.

Der Kalkül $\mathfrak{P}_2 1$ ist widerspruchsfrei. Denn der Kalkül $\mathfrak{P}1$ ist nach der Definition der Semantik von $\mathfrak{P}_{20}$ bzw. $\mathfrak{P}_2$ widerspruchsfrei und die Allgemeingültigkeit der Sätze A9 wurde in 4.1.2.3 bereits bewiesen. Daß endlich die Regel R3 aus logisch wahren Sätzen immer wieder logisch wahre Sätze erzeugt, ergibt sich wie für R2 nach 2.2.2.9.

Der Kalkül $\mathfrak{P}_2 1$ ist aber nicht vollständig, ja es läßt sich zeigen, daß auch jede Verstärkung von $\mathfrak{P}_2 1$ durch Hinzunahme weiterer Axiome, wie etwa des oben angeführten Auswahlprinzips, und weiterer Deduktionsregeln keinen vollständigen Kalkül der P.L. 2. Stufe ergibt, daß es also m. a. W. keinen vollständigen formalen Kalkül der P.L. 2. Stufe gibt.

Nach einem Gedanken von G. HASENJÄGER kann man diese Unvollständigkeit der P.L. 2. Stufe aus der Unentscheidbarkeit der elementaren P.L. erschließen[1]. Dazu stellen wir folgende Überlegungen an:

1) Ist A eine Formel von $\mathfrak{P}$ mit genau den freien GV und PV $x_1, \ldots, x_m$ und $f_1, \ldots, f_n$, so nennen wir die Formel $\vee x_1, \ldots, x_m \vee f_1, \ldots, f_n A$, die wir durch $\vee A$ abkürzen, die *Partikularisierung* von A. $\vee A$ ist dann eine Formel von $\mathfrak{P}_{20}$, die keine freien Variablen enthält. Und für jede Formel B von $\mathfrak{P}_{20}$ läßt sich entscheiden, ob B die Partikularisierung einer Formel A von $\mathfrak{P}$ ist, und wenn dies der Fall ist, läßt sich A aus B eindeutig gewinnen, indem man alle Quantoren am Anfang von B wegläßt bis einschließlich bis zum letzten Prädikatenquantor.

---

[1] Vgl. die Darstellung in [32], S. 172 ff.

2) Die Formel $\mathrm{U} = \bigvee f(\bigwedge x \neg f(x, x) \wedge \bigwedge x \bigvee y f(x, y) \wedge \bigwedge xyz(f(x, y) \wedge f(y, z) \supset f(x, z)))$ ist eine Formel von $\mathfrak{P}_{20}$ ohne freie Variable, die nur über unendlichen Bereichen erfüllbar ist, wie wir schon früher einsahen[1]. U ist erfüllbar über dem Bereich der natürlichen Zahlen.

3) Nach dem Satz 4.1.2.1 wird jede Formel von $\mathfrak{P}_{20}$ ohne freie Variable entweder von allen Interpretationen über einem vorgegebenen Objektbereich erfüllt, oder sie wird von keiner solchen Interpretation erfüllt.

4) Schreiben wir $\underset{1}{\rightarrow}$ A, wenn A logisch wahr ist bzgl. der P.L. 1. Stufe, $\underset{2}{\rightarrow}$ A, wenn A logisch wahr ist bzgl. der engeren P.L. 2. Stufe, so gilt: nicht $\underset{1}{\rightarrow}$ A genau dann, wenn $\underset{2}{\rightarrow}$ $\mathrm{U} \supset \bigvee \neg \mathrm{A}$. Zum Beweis dieser Behauptung zeigen wir: a) Gilt $\underset{2}{\rightarrow}$ $\mathrm{U} \supset \bigvee \neg \mathrm{A}$, so gilt $\mathfrak{B}(\mathrm{U} \supset \bigvee \neg \mathrm{A}) = \mathfrak{w}$ für jede Interpretation $\mathfrak{B}$, also insbesondere für jede Interpretation $\mathfrak{B}$ über dem Bereich der natürlichen Zahlen. Wegen (2) gilt also $\mathfrak{B}(\bigvee \neg \mathrm{A}) = \mathfrak{w}$. Ist $\Gamma^*$ die Menge der freien Variablen von A, so gibt es also eine Interpretation $\overline{\mathfrak{B}}$, so daß $\overline{\mathfrak{B}} \underset{\Gamma^*}{=} \mathfrak{B}$ und $\overline{\mathfrak{B}}(\neg \mathrm{A}) = \mathfrak{w}$, also $\overline{\mathfrak{B}}(\mathrm{A}) = \mathfrak{f}$. Es gilt also nicht $\underset{1}{\rightarrow}$ A. b) Gilt $\underset{2}{\rightarrow}$ $\mathrm{U} \supset \bigvee \neg \mathrm{A}$ nicht, so gibt es eine Interpretation $\mathfrak{B}$ für die gilt $\mathfrak{B}(\mathrm{U}) = \mathfrak{w}$ und $\mathfrak{B}(\bigvee \neg \mathrm{A}) = \mathfrak{f}$. $\mathfrak{B}$ ist also eine Interpretation über einem unendlichen Objektbereich $\gamma$ (vgl. (2)). Da $\bigvee \neg \mathrm{A}$ keine freien Variablen enthält, gilt wegen (3) $\mathfrak{B}(\neg \bigvee \neg \mathrm{A}) = \mathfrak{B}(\bigwedge \mathrm{A}) = \mathfrak{w}$ für alle Interpretationen $\mathfrak{B}$ über $\gamma$. Also gilt $\mathfrak{B}(\mathrm{A}) = \mathfrak{w}$ für alle Interpretationen über $\gamma$, so daß wir mit 2.2.2.18 erhalten $\underset{1}{\rightarrow}$ A.

Gäbe es nun einen vollständigen Kalkül $\mathfrak{K}$ der engeren P.L. 2. Stufe, so ließen sich die Theoreme von $\mathfrak{K}$, also die gültigen Sätze der engeren P.L. 2. Stufe mechanisch aufzählen. Um eine solche Aufzählung zu gewinnen, könnte man z. B. die Beweise in $\mathfrak{K}$ ihrer Länge nach, und bei gleicher Länge in irgendeiner Weise alphabetisch ordnen. Mit einer solchen Aufzählung der Beweise hätte man dann auch eine Aufzählung ihrer Endformeln, also der Theoreme von $\mathfrak{K}$[2]. Von jedem Theorem könnte man dann nach (1) feststellen, ob es die Gestalt $\mathrm{U} \supset \bigvee \neg \mathrm{A}$ hat, und die Formel A von $\mathfrak{P}$ ließe sich ggf. daraus erzeugen. Man käme

[1] Vgl. 2.2.2, S. 149 f.

[2] Es ist dabei unerheblich, ob ein Theorem nach diesem Verfahren mehrfach aufgezählt wird.

also wegen (4) auch zu einer Aufzählung der Sätze von $\mathfrak{P}$, die nicht elementar-logisch wahr sind. Da es vollständige Kalküle der P.L. 1. Stufe gibt, sind auch die p.l. wahren Sätze aufzählbar. Wäre aber sowohl die Menge der p.l. nicht wahren, wie die Menge der p.l. wahren Sätze aufzählbar, so wäre die P.L. 1. Stufe entscheidbar. Denn zur Entscheidung eines beliebig vorgegebenen Satzes A von $\mathfrak{P}$ bräuchte man nur die beiden Aufzählungsverfahren simultan laufen lassen und die Sätze beobachten, die sie liefern. Da der Satz A nach endlich vielen Schritten von einem der beiden Verfahren aufgeführt werden muß, so erhielten wir nach endlicher Zeit also darüber Auskunft, ob A p.l. wahr ist oder nicht. Aus der Unentscheidbarkeit der P.L. 1. Stufe folgt also, daß unsere Annahme falsch sein muß, d. h. daß es keinen vollständigen Kalkül $\mathfrak{K}$ der engeren P.L. 2. Stufe geben kann.

Mit der engeren P.L. 2. Stufe ist dann auch die volle P.L. unvollständig, die jene als Teilsystem enthält.

## 4.3 Der Vollständigkeitssatz von Henkin

Im vorigen Abschnitt haben wir gesehen, daß die P.L. 2. Stufe unvollständig ist. Man kann aber, wie L. Henkin in [31] gezeigt hat, Kalküle der P.L. 2. Stufe, insbesondere den Kalkül $\mathfrak{P}_2 1$, als vollständig erweisen, wenn man von einer weiteren Klasse von Interpretationen ausgeht, als wir sie in 4.1.2 betrachtet haben. Solche Interpretationen nennen wir *beschränkte* Interpretationen.

**4.3.1** Eine beschränkte Interpretation $\mathfrak{B}$ über einem nichtleeren Objektbereich $\gamma$ und nichtleeren Mengen $\pi^n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ von $n$-stelligen Begriffen über $\gamma$ ist eine Folge von Funktionen $\mathfrak{B}^1$, $\mathfrak{B}^2$, $\mathfrak{B}^{3 \cdot n}$, so daß gilt:

a) $\mathfrak{B}^2$ bildet die Menge der GV von $\mathfrak{P}_{20}$ ab in die Menge $\gamma$,

b) $\mathfrak{B}^{3 \cdot n}$ bildet die Menge der $n$-stelligen PV von $\mathfrak{P}_{20}$ ab in die Menge $\pi^n$,

c) $\mathfrak{B}^1$ erfüllt die Bedingungen (c1) bis (c5) aus 2.2.2.1 und 4.1.2.

Die Aussage $\Lambda f A$ hat also bei der Deutung mit einer beschränkten Interpretation $\mathfrak{B}$ nicht mehr die Bedeutung, daß A für alle $n$-stelligen Begriffe über dem Objektbereich $\gamma$ von $\mathfrak{B}$ gilt, sondern die evtl. schwächere Bedeutung, daß A für alle Begriffe aus $\pi^n$ gilt, wenn f eine $n$-stellige

PV ist. Die Interpretationen nach 4.1.2 sind Spezialfälle beschränkter Interpretationen, für die $\pi^n$ die Menge aller $n$-stelligen Begriffe über $\gamma$ ist.

Die Menge der beschränkten Interpretationen ist also umfangreicher als die Menge der Interpretationen und daher wird es weniger Sätze geben, die allgemeingültig bzgl. beschränkter Interpretationen sind, als es Sätze gibt, die nach 4.1.2 allgemeingültig sind. So sind z. B. nicht alle Sätze, die unter das Axiomenschema A9 fallen, bei allen beschränkten Interpretationen wahr. Ist etwa f eine einstellige PV und enthält die Menge $\pi^1$ für eine beschränkte Interpretation $\mathfrak{B}$ nur den allgemeingültigen Begriff, d. h. die Klasse $\gamma$, so gilt $\mathfrak{B}(\Lambda f \Lambda x f(x)) = \mathfrak{w}$, aber $\mathfrak{B}(\Lambda x \neg f(x)) = \mathfrak{f}$. Die Menge aller beschränkten Interpretationen zeichnet also eine so enge Theoremmenge aus, daß der Kalkül $\mathfrak{P}_2 1$ nicht mehr widerspruchsfrei ist[1]. Daher wollen wir im folgenden nicht die Menge aller beschränkten Interpretationen betrachten, sondern nur die Menge der ausgezeichneten beschränkten Interpretationen. Wir wollen dabei eine beschränkte Interpretation $\mathfrak{B}$ *ausgezeichnet* nennen, wenn sie die Sätze nach A9 erfüllt. Der Beweis für den Satz 4.1.2.3 zeigt dann, daß $\mathfrak{B}$ ausgezeichnet ist genau dann, wenn die Begriffe $\mathfrak{B}(A[\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n])$ in $\pi^n$ liegen für alle Formeln $A[x_1, \ldots, x_n]$ mit $n$ verschiedenen freien GV $x_1, \ldots, x_n$, die sich in $\mathfrak{P}_{20}$ bilden lassen. Die Beschränkung auf ausgezeichnete beschränkte Interpretationen erscheint also vernünftig, da man Allaussagen über Begriffe zumindest so stark verstehen möchte, daß sie alle Begriffe erfassen, die sich in der Sprache $\mathfrak{P}_{20}$ ausdrücken lassen.

Es gilt nun der Satz:

---

[1] Auch für beschränkte Interpretationen läßt sich die Existenz normaler Interpretationen beweisen. Wenn man dann in Analogie zu 2.2.2 Bewertungen der Formeln von $\mathfrak{P}_2$ definiert, indem man setzt: $\mathfrak{W}(\Lambda f A[f]) = \mathfrak{w}$ genau dann, wenn für alle mit f gleichstelligen PV g gilt $\mathfrak{W}(A[f/g]) = \mathfrak{w}$, so kann man wie in 2.2.2 eine Beziehung zwischen Bewertungen und beschränkten Interpretationen herstellen. Daraus folgt, daß die Bewertungssemantik für die P.L. 2.Stufe bei Zugrundelegung einer engeren Menge von Interpretationen wie nach 4.1.2 nicht adäquat ist. – Man kann auch in genauer Analogie zu $\mathfrak{P}2$ einen Kalkül der P.L. 2. Stufe aufbauen, der sich mit der gleichen Methode als vollständig bzgl. der Bewertungssemantik erweisen läßt, wie wir sie im Beweis für 2.4.1.2.8 angewendet haben. Da aber dieser Kalkül zu schwach ist, wollen wir auf diese Fragen hier nicht näher eingehen.

**4.3.2** Ist der Schluß $A_1, \ldots, A_m \rightarrow B$ gültig bzgl. aller ausgezeichneten beschränkten Interpretationen, so gilt in $\mathfrak{P}_2 1$ $A_1, \ldots, A_m \vdash_0 B$.

Den Beweis für diesen Satz führt man nach dem gleichen Gedanken, den wir schon im Beweis für 1.3.5.7 und 2.3.3.4 zur Anwendung gebracht haben. Zunächst existiert zu jeder konsistenten Formelmenge $M$ von Formeln von $\mathfrak{P}_{20}$ wieder eine maximal konsistente Formelmenge (vgl. 1.3.5.9). Als *normale* maximal konsistente Formelmenge zu einer konsistenten Formelmenge $M$ bezeichnen wir nun eine Satzmenge $M^+$, für die gilt: ist eine Formel der Gestalt $\wedge x A[x]$ nicht in $M^+$, so gibt es eine GV y, so daß auch der Satz $A[x/y]$ nicht in $M^+$ ist. Und ist eine Formel der Gestalt $\wedge f A[f]$ nicht in $M^+$, so gibt es eine mit f gleichstellige PV g, so daß auch der Satz $A[f/g]$ nicht in $M^+$ ist[1]. Man beweist dann die Entsprechung zu Satz 2.3.3.5 für solche normalen Mengen in ganz analoger Weise. Neben der Folge der GV $x_1, x_2, \ldots$ betrachtet man dabei auch Folgen $f_1^n, f_2^n, \ldots$ der $n$-stelligen PV von $\mathfrak{P}_{20}$ und setzt $M_{n+1} = M_n \cup \{B[x/y] \supset \wedge x B[x]\}$, wenn die $(n+1)$-te Formel von $\mathfrak{P}_{20}$ in der zugrunde gelegten Abzählung die Gestalt $\wedge x B[x]$ hat, wobei dann y wieder die erste GV der Folge $x_1, x_2, \ldots$ ist, die nicht frei in $\wedge x B[x]$ oder den Formeln aus $M_n$ vorkommt. Hat die $(n+1)$-te Formel die Gestalt $\wedge f B[f]$, wo f eine $n$-stellige PV ist, so setzt man $M_{n+1} = M_n \cup \{B[f/g] \supset \wedge f B[f]\}$, wo g die erste PV der Folge $f_1^n, f_2^n, \ldots$ ist, die nicht frei in $\wedge f B[f]$ oder den Formeln aus $M_n$ vorkommt. Andernfalls setzt man wieder $M_{n+1} = M_n$.

Es ist nun zu zeigen, daß es eine ausgezeichnete beschränkte Interpretation $\mathfrak{B}$ gibt, die alle Sätze einer normalen maximal konsistenten Menge $M^+$ erfüllt. Wir definieren dazu wieder eine Interpretation $\mathfrak{B}$ über der Menge der natürlichen Zahlen, so daß $\mathfrak{B}^2$ der $n$-ten GV $x_n$ die Zahl $n$ zuordnet, und setzen für $\mathfrak{B}^{3 \cdot n}(f)$ die Menge der $n$-tupel von natürlichen Zahlen $m_1, \ldots, m_n$, für welche die Formel $f(x_{m_1}, \ldots, x_{m_n})$ in $M^+$ ist. $\pi^n$ sei der Wertevorrat von $\mathfrak{B}^{3 \cdot n}$.

Durch Induktion nach dem Grad der Formel A zeigt man dann wieder, daß gilt: $\mathfrak{B}(A) = \mathfrak{w}$ genau dann, wenn A in $M^+$ enthalten ist. Für den unter 2.3.3.5 noch nicht behandelten Fall im Induktionsschritt nehmen wir an, A habe die Gestalt $\wedge f B[f]$ und f sei eine $n$-stellige PV.

---

[1] Dabei sei „$A[f/g]$" eine Abkürzung für „$A[f/g(x_1, \ldots, x_n)]$", wo f und g $n$-stellige PV und $x_1, \ldots, x_n$ $n$ verschiedene GV sind.

Ist $\wedge f B[f]$ in $M^+$, so sind wegen A9 alle Formeln $B[f/g]$ mit $M^+$ verträglich, also in $M^+$, da $M^+$ maximal ist. Nach Induktionsvoraussetzung gilt daher $\mathfrak{B}(B[f/g]) = \mathfrak{w}$ für alle $n$-stelligen PV g. Da $\mathfrak{B}$ die Menge der $n$-stelligen PV $\Pi^n$ auf die Menge $\pi^n$ abbildet, gilt für alle Interpretationen $\overline{\mathfrak{B}}$: wenn $\overline{\mathfrak{B}} \underset{g}{=} \mathfrak{B}$ so $\overline{\mathfrak{B}}(B[f]) = \mathfrak{w}$, also $\mathfrak{B}(\wedge f B[f]) = \mathfrak{w}$[1]. Ist $\wedge f B[f]$ nicht in $M^+$, so gibt es eine $n$-stellige PV g, so daß $B[f/g]$ nicht in $M^+$ ist, da $M^+$ normal ist. Nach Induktionsvoraussetzung ist also $\mathfrak{B}(B[f/g]) = \mathfrak{f}$, also gibt es eine Interpretation $\overline{\mathfrak{B}}$ mit $\overline{\mathfrak{B}} \underset{f}{=} \mathfrak{B}$ und $\overline{\mathfrak{B}}(f) = \mathfrak{B}(g)$, so daß $\overline{\mathfrak{B}}(B[f]) = \mathfrak{B}(B[f/g]) = \mathfrak{f}$ ist, also $\mathfrak{B}(\wedge f B[f]) = \mathfrak{f}$.

Endlich ist $\mathfrak{B}$ eine ausgezeichnete beschränkte Interpretation, denn gilt $\mathfrak{B}(\wedge f B[f]) = \mathfrak{w}$, so ist $\wedge f B[f]$ in $M^+$, also sind wegen A9 auch alle Formeln $B[f/A[x_1,\ldots,x_n]]$ in $M^+$ enthalten, wo f frei ist für $A[x_1,\ldots,x_n]$, so daß auch gilt $\mathfrak{B}(B[f/A[x_1,\ldots,x_n]]) = \mathfrak{w}$.

Wir finden also: Gilt die Ableitungsbeziehung $A_1,\ldots,A_m \vdash_0 B$ in $\mathfrak{P}_2 1$ nicht, so daß die Formelmenge $\{A_1,\ldots,A_m, \neg B\}$ konsistent ist, so gibt es eine ausgezeichnete beschränkte Interpretation $\mathfrak{B}$, die diese Sätze erfüllt, so daß der Schluß $A_1,\ldots,A_m \rightarrow B$ nicht allgemeingültig ist für ausgezeichnete beschränkte Interpretationen. Durch Kontraposition erhält man dann den Satz 4.3.2.

Wegen der engen Analogie zum Beweis für 2.3.3.4 haben wir im vorstehenden Beweis nur die wichtigsten Punkte hervorgehoben. Der Leser möge den Beweis als Übungsaufgabe im Detail durchführen.

Wenn man die Menge der betrachteten beschränkten Interpretationen noch stärker eingrenzt, kann man entsprechende Vollständigkeitseigenschaften auch für stärkere Kalküle der P.L. 2. Stufe nachweisen, insbesondere auch für Kalküle, die Auswahlprinzipien enthalten[2].

## 4.4 Relationsprodukte und Relationsketten

### 4.4.1 Relationsprodukte und Relationspotenzen

Es sollen nun einige wichtige logische Begriffsbildungen dargestellt werden, die sich im Rahmen der P.L. 2. Stufe definieren lassen und die Anwendungsmöglichkeiten dieser Logik aufzeigen.

---

[1] Der Satz 4.1.2.2 gilt auch für beschränkte Interpretationen, wie man sich leicht klar macht.

[2] Vgl. dazu [31].

Wir beschränken uns im folgenden der Einfachheit wegen auf die Formulierung der Definitionen und Sätze für PV und verwenden für Prädikate 2. Stufe die abgekürzte Schreibweise F(f) anstelle von F($\kappa$xf(x)), wenn dadurch keine Mehrdeutigkeiten entstehen. Es sei dem Leser als Übungsaufgabe überlassen, die Definitionen und Sätze für beliebige komplexe Prädikate und in der genaueren $\kappa$-Symbolik darzustellen.

Sind f und g zweistellige PV, so bezeichnet man die Relation

**D10:** $\mathrm{f} \circ \mathrm{g}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) := \bigvee \mathrm{z}(\mathrm{f}(\mathrm{x}, \mathrm{z}) \wedge \mathrm{g}(\mathrm{z}, \mathrm{y}))$ [1]

als *Produkt* der Relationen f und g. Steht $f(x, y)$ für ‚$x$ ist ein Bruder von $y$‘ und $g(x, y)$ für ‚$x$ ist Vater von $y$‘, so steht $f \circ g(x, y)$ also für ‚$x$ ist ein Bruder des Vaters von $y$‘, d.h. für ‚$x$ ist ein Onkel von $y$‘. Und steht $f(x, y)$ für ‚$x$ ist Freund von $y$‘ und $g(x, y)$ für ‚$x$ ist Vetter von $y$‘, so steht $f \circ g(x, y)$ für ‚$x$ ist Freund eines Vetters von $y$‘.

Es gilt nun offenbar nicht das kommutative Gesetz $f \circ g(x, y) \equiv g \circ f(x, y)$, denn wenn z. B. $x$ ein Freund eines Vetters von $y$ ist, so ist nicht auch $x$ Vetter eines Freundes von $y$. Es gilt aber das assoziative Gesetz

**T67:** $(\mathrm{f} \circ \mathrm{g}) \circ \mathrm{h}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \equiv \mathrm{f} \circ (\mathrm{g} \circ \mathrm{h})\,(\mathrm{x}, \mathrm{y})$

Denn es gilt:

$$\begin{aligned}
(\mathrm{f} \circ \mathrm{g}) \circ \mathrm{h}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) &\equiv \bigvee \mathrm{u}(\mathrm{f} \circ \mathrm{g}(\mathrm{x}, \mathrm{u}) \wedge \mathrm{h}(\mathrm{u}, \mathrm{y})) \\
&\equiv \bigvee \mathrm{u}(\bigvee \mathrm{v}(\mathrm{f}(\mathrm{x}, \mathrm{v}) \wedge \mathrm{g}(\mathrm{v}, \mathrm{u})) \wedge \mathrm{h}(\mathrm{u}, \mathrm{y})) \\
&\equiv \bigvee \mathrm{uv}((\mathrm{f}(\mathrm{x}, \mathrm{v}) \wedge \mathrm{g}(\mathrm{v}, \mathrm{u})) \wedge \mathrm{h}(\mathrm{u}, \mathrm{y})) \\
&\equiv \bigvee \mathrm{vu}(\mathrm{f}(\mathrm{x}, \mathrm{v}) \wedge (\mathrm{g}(\mathrm{v}, \mathrm{u}) \wedge \mathrm{h}(\mathrm{u}, \mathrm{y}))) \\
&\equiv \bigvee \mathrm{v}(\mathrm{f}(\mathrm{x}, \mathrm{v}) \wedge \bigvee \mathrm{u}(\mathrm{g}(\mathrm{v}, \mathrm{u} \wedge \mathrm{h}(\mathrm{u}, \mathrm{y}))) \\
&\equiv \bigvee \mathrm{v}(\mathrm{f}(\mathrm{x}, \mathrm{v}) \wedge \mathrm{g} \circ \mathrm{h}(\mathrm{v}, \mathrm{y})) \\
&\equiv \mathrm{f} \circ (\mathrm{g} \circ \mathrm{h})\,(\mathrm{x}, \mathrm{y}).
\end{aligned}$$

Gilt $\bigwedge \mathrm{x} \bigvee ! \mathrm{yf}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ und $\bigwedge \mathrm{x} \bigvee ! \mathrm{yg}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$, so gilt offenbar auch $\bigwedge \mathrm{x} \bigvee ! \mathrm{yf} \circ \mathrm{g}\,(\mathrm{x}, \mathrm{y})$. Wir können dann die FV f* und g* einführen und können setzen $(\mathrm{f} \circ \mathrm{g})^*\,(\mathrm{x}) = \iota \mathrm{yf} \circ \mathrm{g}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$. Es gilt dann $(\mathrm{f} \circ \mathrm{g})^*\,(\mathrm{x}) = \iota \mathrm{yf} \circ \mathrm{g}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \iota \mathrm{y} \bigvee \mathrm{z}(\mathrm{f}(\mathrm{x}, \mathrm{z}) \wedge \mathrm{g}(\mathrm{z}, \mathrm{y})) = \iota \mathrm{yg}(\mathrm{f}^*(\mathrm{x}), \mathrm{y}) = \mathrm{g}^*(\mathrm{f}^*(\mathrm{x}))$. Für Funktionen $f$ und $g$ stellt also das Relationsprodukt $f \circ g(x, y)$ die zusammengesetzte Funktion $g^*(f^*(x))$ dar.

---

[1] Eine ausführliche Schreibweise für diese Definition würde lauten $\mathrm{P}(\kappa \mathrm{uvA}[\mathrm{u}, \mathrm{v}], \kappa \mathrm{uvB}[\mathrm{u}, \mathrm{v}], \mathrm{x}, \mathrm{y}) := \bigvee \mathrm{z}(\mathrm{A}[\mathrm{u}/\mathrm{x}, \mathrm{v}/\mathrm{z}] \wedge \mathrm{B}[\mathrm{u}/\mathrm{z}, \mathrm{v}/\mathrm{y}])$.

Setzt man in D10 f für g ein, so erhält man das Produkt von f mit sich selbst. Wir setzen zur Abkürzung

**D11:** $f^2(x, y) := f \circ f(x, y)$
$f^{n+1}(x, y) := f^n \circ f(x, y)$.

Man bezeichnet diese Relationen als *Potenzen* von f. Definiert man die nullte und die erste Potenz von f durch

$$f^0(x, y) := x = y$$
$$f^1(x, y) := f(x, y),$$

so sind die Potenzen $f^n$ für alle $n \geqslant 0$ erklärt. Setzt man weiterhin

$$f^{-1}(x, y) := f(y, x) \quad \text{und}$$
$$f^{-n}(x, y) := (f^n)^{-1}(x, y),$$

so hat man die Potenzen auch für negative ganze Exponenten erklärt.

Dazu einige Beispiele: Steht $f(x, y)$ für ‚$x$ ist Vater von $y$', so steht $f^2(x, y)$ für ‚$x$ ist Vater des Vaters von $y$' also für ‚$x$ ist Großvater von $y$'. $f^3(x, y)$ steht dann für ‚$x$ ist Urgroßvater von $y$', $f^{-1}(x, y)$ für ‚$x$ ist Kind von $y$', $f^{-2}(x, y)$ für ‚$x$ ist Enkelkind von $y$', usf.

Für Relationspotenzen gelten folgende Gesetze:

**T68:** $g \circ f^0(x, y) \equiv f^0 \circ g(x, y) \equiv g(x, y)$

**T69:** $(f^{-1})^{-1}(x, y) \equiv f(x, y)$

**T70:** $(f \circ g)^{-1}(x, y) \equiv g^{-1} \circ f^{-1}(x, y)$

Beweis:
$$\begin{aligned}(f \circ g)^{-1}(x, y) &\equiv \vee z(f(y, z) \wedge g(z, x)) \\ &\equiv \vee z(g(z, x) \wedge f(y, z)) \\ &\equiv \vee z(g^{-1}(x, z) \wedge f^{-1}(z, y)) \\ &\equiv g^{-1} \circ f^{-1}(x, y).\end{aligned}$$

**T71:** $f^m \circ f^n(x, y) \equiv f^{m+n}(x, y)$, wo $m, n \geqslant 0$

**T72:** $(f^m)^n(x, y) \equiv f^{m \cdot n}(x, y)$, wo $m, n \geqslant 0$

Beweis:
$$\begin{aligned}(f^m)^n(x, y) &\equiv \vee u_1 \ldots u_{n-1}(f^m(x, u_1) \wedge \ldots \wedge f^m(u_{n-1}, y)) \\ &\equiv \vee u_1 \ldots u_{n-1}(\vee z_1^1 \ldots z_{m-1}^1(f(x, z_1^1) \wedge \ldots \\ &\quad \wedge f(z_{m-1}^1, u_1)) \wedge \ldots \\ &\quad \wedge \vee z_1^n \ldots z_{m-1}^n(f(u_{n-1}, z_1^n) \wedge \ldots \wedge f(z_{m-1}^n, y)))\end{aligned}$$

$$\equiv \mathrm{V} u_1 \ldots u_{n-1} z_1^1 \ldots z_{m-1}^1 \ldots z_1^n \ldots$$
$$z_{m-1}^n(f(x, z_1^1) \wedge \ldots \wedge f(z_{m-1}^n, y))$$
$$\equiv f^{m \cdot n}(x, y).$$

Denn der Existenzquantor reicht über $(n - 1) + n \cdot (m - 1) = n \cdot m - 1$ GV.

*Übungsaufgaben:*

1. Für welche Verwandtschaftsbeziehungen stehen die folgenden Prädikate, wenn $f(x, y)$ steht für ‚$x$ ist Vater von $y$', $g(x, y)$ für ‚$x$ ist Mutter von $y$', $h(x, y)$ für ‚$x$ ist Sohn von $y$', $s(x, y)$ für ‚$x$ ist mit $y$ verheiratet' und $r(x, y)$ für ‚$x$ ist Tochter von $y$':

| | |
|---|---|
| $f^2 \circ g(x, y)$ | $h \circ f(x, y)$ |
| $g^2 \circ f(x, y)$ | $r \circ g(x, y)$ |
| $h^{-1}(x, y)$ | $f \circ s \circ f(x, y)$ |
| $h^{-2} \circ s(x, y)$ | $s \circ h(x, y)$ |

2. Beweise, daß für eineindeutige Relationen f und beliebige $m$, $n$ gilt:

$$f^m \circ f^n(x, y) \supset f^{m+n}(x, y)$$
$$(f^m)^n(x, y) \equiv f^{m \cdot n}(x, y).$$

3. Beweise, daß für eineindeutige Relationen f für beliebige $m$, $n$ gilt:

$$\Lambda xy(f(x, y) \supset \mathrm{V} uv(f(u, x) \wedge f(y, v))) \supset (f^m \circ f^n(x, y) \equiv f^{m+n}(x, y))$$[1].

### 4.4.2 Relationsketten

Man nennt eine Eigenschaft $f$ *erblich*, wenn sie sich von den Eltern auf die Kinder überträgt. Steht $g(x, y)$ für ‚$x$ ist ein Elternteil von $y$', so ist $f$ also erblich, wenn gilt $\Lambda xy(f(x) \wedge g(x, y) \supset f(y))$. Diese Beziehung zwischen einem einstelligen Begriff und einer zweistelligen Relation überträgt man nun auf beliebige Relationen und definiert:

**D12:** $E(f, g) := \Lambda xy(f(x) \wedge g(x, y) \supset f(y))$ [2].

$E(f, g)$ ist also ein Prädikat 2. Stufe, mit einer Argumentstelle für einstellige Prädikate und einer Argumentstelle für zweistellige Prädikate

[1] Vgl. auch die Übungen und Beispiele in [7], S. **114** ff.

[2] Die ausführliche Schreibweise würde lauten:
$E(\kappa u A[u], \kappa uv B[u, v]) := \Lambda xy(A[u/x] \wedge B[u/x, v/y] \supset A[u/y])$.

1. Stufe. Wir lesen $E(f, g)$ als „die Eigenschaft $f$ ist erblich in der $g$-Reihe".

Mit Hilfe dieser Beziehung soll nun eine Relation definiert werden, die besagt, daß es eine Zahl $n \geqslant 0$ gibt, so daß gilt $g^n(x, y)$. Wir setzen:

**D13:** $\mathrm{g}^{\geqslant 0}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) := \bigwedge \mathrm{f}(E(\mathrm{f}, \mathrm{g}) \wedge \mathrm{f}(\mathrm{x}) \supset \mathrm{f}(\mathrm{y}))$.

Wir wollen uns nun überzeugen, daß durch diese Definition die fragliche Relation tatsächlich erfaßt wird: Gibt es ein $n \geqslant 0$, so daß gilt $g^n(x, y)$, so erhält man aus $E(f, g)$ und $f(x)$ mit $n$-maliger Anwendung der Definition D12 den Satz $f(y)$. $g^n(x, y)$ ist ja äquivalent mit $\bigvee z_1 \ldots z_{n-1}(g(x, z_1) \wedge g(z_1, z_2) \wedge \ldots \wedge g(z_{n-1}, y))$. Aus $g(x, z_1)$ und $f(x)$ und $E(f, g)$ erhalten wir aber mit D12 $f(z_1)$, mit $g(z_1, z_2)$ also $f(z_2)$, usf. Im $n$-ten Schritt erhalten wir also aus $f(z_{n-1})$ und $g(z_{n-1}, y)$ $f(y)$. Gibt es also ein $n \geqslant 0$ mit $g^n(x, y)$, so gilt auch $\bigwedge f(E(f, g) \wedge f(x) \supset f(y))$. Es gelte nun umgekehrt $\bigwedge f(E(f, g) \wedge f(x) \supset f(y))$. Die Eigenschaft ‚es gibt ein $n \geqslant 0$ mit $g^n(x, z)$' ist für ein festes $x$ offenbar erblich in der $g$-Reihe, denn es gilt $g^n(x, z) \wedge g(z, y) \supset g^{n+1}(x, y)$. Wegen $g^0(x, x)$ hat $x$ diese Eigenschaft, also hat nach unserer Annahme dann auch $y$ diese Eigenschaft, d. h. es gilt: es gibt ein $n \geqslant 0$ mit $g^n(x, y)$. Aus $\bigwedge f(E(f, g) \wedge f(x) \supset f(y))$ folgt also auch, daß es ein $n \geqslant 0$ gibt mit $g^n(x, y)$. Damit ist die Adäquatheit der Definition D13 nachgewiesen.

Wir setzen ferner:

**D14:** $\mathrm{g}^{>0}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) := \mathrm{g} \circ \mathrm{g}^{\geqslant 0}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$

und nennen $\mathrm{g}^{\geqslant 0}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ die *Relationskette 1. Art,* $\mathrm{g}^{>0}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ die *Relationskette* 2. Art zu $\mathrm{g}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$. Steht $g(x, y)$ wieder für ‚$x$ ist ein Elternteil von $y$', so steht $g^{>0}(x, y)$ für ‚$x$ ist ein Vorfahre von $y$'. Denn wenn $x$ Vorfahre von $y$ ist, so ist $x$ Elternteil von $y$, d.h. es gilt $g^1(x, y)$, oder $x$ ist Großelternteil von $y$, d.h. es gilt $g^2(x, y)$, oder $x$ ist Urgroßelternteil von $y$, d.h. es gilt $g^3(x, y)$, usf. $x$ ist also Vorfahre von $y$ genau dann, wenn es eine Zahl $n > 0$ gibt mit $g^n(x, y)$. Da aber $g^{\geqslant 0}(x, y)$ gilt genau dann, wenn es ein $m \geqslant 0$ mit $g^m(x, y)$ gibt, so gilt $\mathrm{g}^{>0}(x, y)$ nach D13 genau dann, wenn es ein $n > 0$ mit $g^n(x, y)$ gibt. $g^{>0}(x, y)$ drückt also die Vorfahrenbeziehung aus und $g^{\geqslant 0}(x, y)$ besagt, daß $x$ Vorfahre von $y$ oder mit $y$ identisch ist.

Für Relationsketten gelten folgende Sätze:

**T73:** $\mathrm{g}^n(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \supset \mathrm{g}^{>0}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ für $n > 0$

**T74:** $\mathrm{g}^{>0}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \supset \mathrm{g}^{\geqslant 0}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$

**T75:** $g^{>0}(x, y) \wedge g^{>0}(y, z) \supset g^{>0}(x, z)$
**T76:** $g^{\geqslant 0}(x, y) \wedge g^{\geqslant 0}(y, z) \supset g^{\geqslant 0}(x, z)$

Beweis:

$$\begin{aligned} g^{\geqslant 0}(x, y) \wedge g^{\geqslant 0}(y, z) &\supset \Lambda f(E(f, g) \wedge f(x) \supset f(y)) \wedge \Lambda f(E(f, g) \wedge f(y) \supset f(z)) \\ &\supset \Lambda f(E(f, g) \supset ((f(x) \supset f(y)) \wedge (f(y) \supset f(z)))) \\ &\supset \Lambda f(E(f, g) \supset (f(x) \supset f(z))) \\ &\supset \Lambda f(E(f, g) \wedge f(x) \supset f(z)) \\ &\supset g^{\geqslant 0}(x, z). \end{aligned}$$

**T77:** $g^{>0}(x, y) \equiv \Lambda f(E(f, g) \wedge \Lambda z(g(x, z) \supset f(z)) \supset f(y))$.

Beweis: Aus $g^{>0}(x, y)$ folgt nach D13 $\mathrm{V}u(g(x, u) \wedge \Lambda f(E(f, g) \wedge f(u) \supset f(y))$. Gilt nun $E(f, g)$ und $\Lambda z(g(x, z) \supset f(z))$, so gilt wegen $g(x, u)$ auch $f(u)$, also $f(y)$. Wir erhalten also $g^{>0}(x, y) \supset \Lambda f(E(f, g) \wedge \Lambda z(g(x, z) \supset f(z)) \supset f(y))$. Aus $\Lambda f(E(f, g) \wedge \Lambda z(g(x, z) \supset f(z)) \supset f(y))$ erhalten wir umgekehrt durch Einsetzung $E(\kappa y g^{>0}(x, y), g) \wedge \Lambda z(g(x, z) \supset g^{>0}(x, z)) \supset g^{>0}(x, y)$[1]. Mit T73 und T75 erhalten wir $g^{>0}(x, y) \wedge g(y, z) \supset g^{>0}(x, z)$, also nach D11 $E(\kappa y g^{>0}(x, y), g)$. Und nach T73 gilt auch $\Lambda z(g(x, z) \supset g^{>0}(x, z))$, so daß wir erhalten $g^{>0}(x, y)$.

Der Begriff der Relationskette wurde zuerst von Frege in [14] eingeführt und von ihm in [16] zur Definition der natürlichen Zahlen verwendet. Hat man die Null definiert und eine Nachfolgerbeziehung $g(x, y)$ (für $x' = y$), so kann man ja den Begriff ‚$x$ ist eine natürliche Zahl‘ definieren durch ‚$x$ folgt in der Nachfolgerreihe auf die Null‘, also durch $g^{\geqslant 0}(0, x)$.

Zur Anwendung der Begriffsbildungen in diesem Abschnitt soll hier das Axiomensystem für biologische Verwandtschaftsbeziehungen angeführt werden, das R. Carnap in [7], S. 221ff angegeben hat:

Es stehe $G(x, y)$ für ‚$x$ ist ein Elternteil von $y$‘, $F(x)$ für ‚$x$ ist männlich‘. Der Grundbereich der betrachteten Interpretationen sei die Menge der Menschen. Wir definieren:

$V(x, y) := G(x, y) \wedge F(x)$ — x ist Vater von y
$M(x, y) := G(x, y) \wedge \neg F(x)$ — x ist Mutter von y
$A(x, y) := G^{>0}(x, y)$ — x ist Vorfahre von y.

[1] Im Fall dieser Einsetzung zeigt sich der Mangel der abgekürzten Schreibweise $E(f, g)$.

Die Axiome lauten:

**a1:** $V(\mathrm{x}, \mathrm{z}) \wedge V(\mathrm{y}, \mathrm{z}) \supset \mathrm{x} = \mathrm{y}$
**a2:** $M(\mathrm{x}, \mathrm{z}) \wedge M(\mathrm{y}, \mathrm{z}) \supset \mathrm{x} = \mathrm{y}$
**a3:** $\neg A(\mathrm{x}, \mathrm{x})$
**a4:** $\bigwedge \mathrm{x} \bigvee \mathrm{y}(G(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \vee G(\mathrm{y}, \mathrm{x}))$.

Es gelten dann z. B. folgende Theoreme, deren Beweis dem Leser überlassen sei:

1) $G(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \equiv V(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \vee M(\mathrm{x}, \mathrm{y})$
2) $\neg G(\mathrm{x}, \mathrm{x})$
3) $G(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \supset \neg G(\mathrm{y}, \mathrm{x})$.

*Übungsaufgaben:*

Beweise folgende Sätze:

$\mathrm{g}^{\geqslant 0}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \equiv \mathrm{g}^{>0}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \vee \mathrm{g}^{0}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$
$\mathrm{g}^{>0}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \equiv \mathrm{g}^{\geqslant 0} \circ \mathrm{g}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$
$\mathrm{g}^{>0}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \wedge \mathrm{g}^{\geqslant 0}(\mathrm{y}, \mathrm{z}) \supset \mathrm{g}^{>0}(\mathrm{x}, \mathrm{z})$.

## 4.5 Die Kategorizität der Peanoaxiome

Wir wollen nun noch einmal auf die Peanoaxiome für die Arithmetik zurückkommen, die wir im Abschnitt 3.3.2 angegeben und in Form der Axiomenschemata a1 bis a3 in die Sprache der elementaren Logik übersetzt hatten. Wir hatten dort nachgewiesen, daß diese Axiome nicht kategorisch sind und daher die Reihe der natürlichen Zahlen nicht vollständig charakterisieren. In der Sprache der engeren P.L. 2. Stufe können wir nun das Axiomenschema a3 durch das Axiom

**a3*:** $\bigwedge f(f(0) \wedge \bigwedge x(f(x) \supset f(x')) \supset \bigwedge x f(x))$

ersetzen, das den Inhalt des PEANOschen Induktionsprinzips (5′) aus 3.3.2 vollständig wiedergibt. Es soll jetzt gezeigt werden, daß das System der Axiome a1, a2, a3* kategorisch ist, d. h. daß zwei Modelle $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ dieser Axiome bzgl. der Grundbegriffe $0$, $'$ isomorph sind.

Sind $\gamma_1$ und $\gamma_2$ die Grundbereiche von $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ und gilt $\mathfrak{B}_1(0) = a_1$ und $\mathfrak{B}_2(0) = a_2$, $\mathfrak{B}_1(') = f_1$ und $\mathfrak{B}_2(') = f_2$ so ist zu zeigen: es gibt eine umkehrbar eindeutige Abbildung $\varphi$ von $\gamma_1$ auf $\gamma_2$, für die gilt:

1) $\varphi(a_1) = a_2$
2) $\varphi(f_1(b)) = f_2(\varphi(b))$ für alle Elemente $b$ von $\gamma_1$.

Wir zeigen:

I) Es gibt eine Abbildung $\varphi$ von $\gamma_1$ auf $\gamma_2$, die den Bedingungen (1) und (2) genügt. Wir können $\varphi$ durch die Bedingungen (1) und (2) definieren, denn es gilt:

a) $\varphi$ ist nach (1) und (2) für alle Elemente von $\gamma_1$ definiert. Nach (1) ist $\varphi(a_1)$ erklärt und ist $\varphi(b)$ erklärt, so nach (2) auch $\varphi(f_1(b))$. Nun ist aber $\mathfrak{B}_1$ ein Modell der Peanoaxiome und erfüllt daher insbesondere den Satz a3*, so daß das Induktionsprinzip für alle Begriffe über $\gamma_1$ anwendbar ist. Wir können daher aus der Tatsache, daß $\varphi$ für $a_1$ erklärt ist und daß $\varphi$ für $f_1(b)$ erklärt ist, wenn $\varphi$ für $b$ erklärt ist, folgern, daß $\varphi$ für alle Elemente $b$ von $\gamma_1$ erklärt ist[1].

b) $\varphi$ ordnet jedem Element von $\gamma_1$ nur einen Wert zu, d.h. die Definition von $\varphi$ nach (1) und (2) ist korrekt. Denn $a_1$ läßt sich nicht in der Form $f_1(b)$ darstellen, da $\mathfrak{B}_1$ a1 erfüllt, so daß $\varphi(a_1)$ nur durch die Bestimmung (1) festgelegt ist. Und hat $\varphi(b)$ nur einen Wert, so hat nach (2) auch $\varphi(f_1(b))$ nur einen Wert, da aus $f_1(b) = f_1(c)$ folgt $b = c$, da $\mathfrak{B}_1$ Modell von a2 ist. Nach dem Induktionsprinzip nimmt die Funktion $\varphi$ also für alle Argumente nur einen Wert an.

c) $\varphi$ ist eine Abbildung von $\gamma_1$ auf $\gamma_2$. Für alle Elemente $b_2$ von $\gamma_2$ gibt es also ein $b_1$ aus $\gamma_1$, für das gilt $\varphi(b_1) = b_2$. Das gilt für $b_2 = a_2$ nach (1). Und gibt es zu $b_2$ ein $b_1$ mit $\varphi(b_1) = b_2$, so gibt es auch zu $f_2(b_2)$ ein $b_3$ mit $\varphi(b_3) = f_2(b_2)$. Setzt man nämlich $b_3 = f_1(b_1)$, so gilt $\varphi(f_1(b_1)) = f_2(\varphi(b_1)) = f_2(b_2)$ wegen $\varphi(b_1) = b_2$. Da auch $\mathfrak{B}_2$ a3* erfüllt, ist damit die Behauptung (c) bewiesen.

II) Die Abbildung $\varphi$ ist eineindeutig, d. h. aus $\varphi(b) = \varphi(c)$ folgt $b = c$. Ist $b = a_1$, so ist $\varphi(b) = a_2$. Ist $\varphi(c)$ nach (1) festgelegt, so ist auch $c = a_1$. Ist $\varphi(c)$ nicht nach (1) festgelegt, so hat $c$ die Gestalt $f_1(d)$ und es ist $\varphi(c) = f_2(\varphi(d))$. Da $\mathfrak{B}_2$ a1 erfüllt, ist also $\varphi(c) \neq a_2$ und also $\varphi(c) \neq \varphi(b)$. Es gilt also für alle $c$: $\varphi(a_1) = \varphi(c)$ impliziert $c = a_1$. Gilt nun für alle $c$: $\varphi(b) = \varphi(c)$ impliziert $c = b$, so gilt auch für alle $c$:

[1] An diesem Punkt wird die Stärke des Axioms a3* gegenüber a3 deutlich, da man aus a3 nicht die generelle Gültigkeit des Induktionsprinzips für alle Begriffe über $\gamma_1$ erschließen kann.

$\varphi(f_1(b)) = \varphi(c)$ impliziert $c = f_1(b)$. Ist nämlich $\varphi(f_1(b)) = \varphi(c)$, so ist $\varphi(c) \neq a_2$, d. h. $\varphi(c)$ ist nach (2) festgelegt und $c$ läßt sich in der Form $f_1(d)$ darstellen. Es ist dann $f_2(\varphi(b)) = f_2(\varphi(d))$, und da $\mathfrak{B}_2$ a2 erfüllt, $\varphi(b) = \varphi(d)$. Aus unserer Voraussetzung erhalten wir also $d = b$, also $c = f_1(d) = f_1(b)$. Da $\mathfrak{B}_2$ a3* erfüllt, ist damit auch die Behauptung (II) bewiesen. Damit ist der Beweis beendet[1].

Aus der Kategorizität der Peanoaxiome würde nun zusammen mit der Vollständigkeit der engeren P.L. 2. Stufe die Vollständigkeit des Axiomensystems a1, a2, a3* folgen. Da die engere P.L. 2. Stufe aber unvollständig ist, kann man daraus nicht auf die Vollständigkeit dieses Axiomensystems schließen, sondern man kann umgekehrt aus der von K. Gödel in [27] bewiesenen Unvollständigkeit der Arithmetik die Unvollständigkeit der engeren P.L. 2. Stufe erschließen.

Wir wollen nun noch beweisen, daß bei Verwendung der Axiome a1, a2, a3* die Axiome a4 bis a7, durch welche die Existenz von Addition und Multiplikation gefordert wurde, überflüssig sind, da sich die Eindeutigkeit und Existenz der Funktionen + und · beweisen läßt, die den Bedingungen a4 bis a7 genügen. Wir führen den Beweis dieser Behauptung nur für die Addition, die Übertragung des Beweisgedankens auf den Fall der Multiplikation sei dem Leser als Übungsaufgabe überlassen.

Wenden wir uns zunächst der Eindeutigkeitsfrage zu!

Es seien $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}^*$ Modelle der Axiome a1, a2, a3*, a4, a5 über dem Objektbereich $\gamma$. Die Werte $\mathfrak{B}(0)$, $\mathfrak{B}(')$, $\mathfrak{B}(+)$ bezeichnen wir der Einfachheit wegen wieder durch $0$, $'$, $+$. Es sei $\mathfrak{B}^*$ eine Interpretation, für die gilt $\mathfrak{B}^* \underset{+}{=} \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}^*(+) = \dot{+}$. Es ist zu zeigen, daß für alle Objekte $a$ und $b$ aus $\gamma$ gilt: $a + b = a \dot{+} b$. Wir setzen $f(a, b) = (a + b = a \dot{+} b)$. Dann gilt nach a4 $f(a, 0)$ wegen $a + 0 = a = a \dot{+} 0$. Gilt $f(a, b)$, so gilt auch $f(a, b')$, da wir aus a5 erhalten $a + b' = (a + b)' = (a \dot{+} b)' = a \dot{+} b'$. Da $\mathfrak{B}$ ein Modell von a3* ist, gilt demnach für alle $b$ aus $\gamma$ $f(a, b)$, und daher für alle $a$ und $b$ $f(a, b)$, also $a + b = a \dot{+} b$.

---

[1] Es ist formal eleganter, die Relation $\varphi$ als Durchschnitt aller Relationen zu konstruieren, die den Bedingungen (1) und (2) genügen, vgl. z. B. [33], S. 149 f. Da wir beim Leser aber noch keine Vertrautheit mit mengentheoretischen Begriffen voraussetzen können, haben wir hier einen einfacheren Beweisgedanken gewählt.

Zum Nachweis der Existenz der Funktion $+$ können wir diese Funktion nicht über eine Relation $F(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}) := \mathrm{y} = 0 \wedge \mathrm{z} = \mathrm{x} \vee \bigvee \mathrm{uv}(\mathrm{u}' = \mathrm{y} \wedge F(\mathrm{x}, \mathrm{u}, \mathrm{v}) \wedge \mathrm{z} = \mathrm{v}')$ definieren, da hier im Definiens das Definiendum selbst vorkommt. Im Rahmen der P.L. 2. Stufe können wir aber nun setzen:

$$N(\mathrm{f}) := \bigwedge \mathrm{xyuv}(\mathrm{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{u}) \wedge \mathrm{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{v}) \supset \mathrm{u} = \mathrm{v}),$$
$$R(\mathrm{f}) := N(\mathrm{f}) \wedge \bigwedge \mathrm{xyz}(\mathrm{f}(\mathrm{x}, 0, \mathrm{x}) \wedge (\mathrm{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}) \supset \mathrm{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y}', \mathrm{z}'))) \text{ und}$$
$$F(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}) := \bigwedge \mathrm{f}(R(\mathrm{f}) \supset \mathrm{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})).$$

Wir zeigen nun:

a) $\bigwedge \mathrm{xyuv}(F(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{u}) \wedge F(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{v}) \supset \mathrm{u} = \mathrm{v})$. Aus $F(\mathrm{x}, 0, \mathrm{u})$ erhalten wir $\bigwedge \mathrm{f}(R(\mathrm{f}) \supset \mathrm{f}(\mathrm{x}, 0, \mathrm{u}))$. Aus $R(\mathrm{f})$ folgt $N(\mathrm{f})$ und $\mathrm{f}(\mathrm{x}, 0, \mathrm{x})$, also $\mathrm{x} = \mathrm{u}$. Ebenso erhält man aus $F(\mathrm{x}, 0, \mathrm{v})$ $\mathrm{v} = \mathrm{x}$, also $\mathrm{u} = \mathrm{v}$. Es gilt also $\bigwedge \mathrm{uv}(F(\mathrm{x}, 0, \mathrm{u}) \wedge F(\mathrm{x}, 0, \mathrm{v}) \supset \mathrm{u} = \mathrm{v})$. Gilt $F(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})$, so gilt $\bigwedge \mathrm{f}(R(\mathrm{f}) \supset \mathrm{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}))$. Aus $R(\mathrm{f})$ folgt aber $N(\mathrm{f})$ und mit $\mathrm{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})$ auch $\mathrm{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y}', \mathrm{z}')$. Es gilt also $F(\mathrm{x}, \mathrm{y}', \mathrm{z}')$. Gilt also $\bigwedge \mathrm{uv}(F(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{u}) \wedge F(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{v}) \supset \mathrm{u} = \mathrm{v})$, so gilt auch $\bigwedge \mathrm{uv}(F(\mathrm{x}, \mathrm{y}', \mathrm{u}) \wedge F(\mathrm{x}, \mathrm{y}', \mathrm{v}) \supset \mathrm{u} = \mathrm{v})$. Daraus erhalten wir mit a3* $\bigwedge \mathrm{yuv}(F(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{u}) \wedge F(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{v}) \supset \mathrm{u} = \mathrm{v})$, also $\bigwedge \mathrm{xyuv}(F(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{u}) \wedge F(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{v}) \supset \mathrm{u} = \mathrm{v})$.

b) $\bigwedge \mathrm{xy} \bigvee \mathrm{z} F(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})$. Es gilt $F(\mathrm{x}, 0, \mathrm{x})$, also $\bigvee \mathrm{z} F(\mathrm{x}, 0, \mathrm{z})$. Gilt $F(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})$, so gilt, wie wir unter (a) gesehen haben, $F(\mathrm{x}, \mathrm{y}', \mathrm{z}')$. Es gilt also $\bigvee \mathrm{z} F(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}) \supset \bigvee \mathrm{z} F(\mathrm{x}, \mathrm{y}', \mathrm{z})$. Mit a3* erhalten wir also $\bigwedge \mathrm{xy} \bigvee \mathrm{z} F(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})$.

Nach (a) und (b) ist $F(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})$ also eine Funktion und wir können setzen $\mathrm{x} + \mathrm{y} := F^*(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \iota \mathrm{z} F(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})$. Wir finden dann

$$\mathrm{x} + 0 = F^*(\mathrm{x}, 0) = \iota \mathrm{z} F(\mathrm{x}, 0, \mathrm{z}) = \mathrm{x}, \text{ und}$$
$$\mathrm{x} + \mathrm{y}' = \iota \mathrm{z} F(\mathrm{x}, \mathrm{y}', \mathrm{z}) = (\iota \mathrm{z} F(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}))' = (F^*(\mathrm{x}, \mathrm{y}))' = (\mathrm{x} + \mathrm{y})'.$$

Die Funktion $F^*(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ genügt also den Bedingungen a4 und a5 und damit ist die Existenz der Addition nachgewiesen.

# 5 Klassenlogik

Für die Leistungsfähigkeit der modernen gegenüber der traditionellen Logik ist vielleicht das Programm des *Logizismus*, der Begründung der Mathematik aus der Logik, besonders charakteristisch. Dieses Programm konnte erst auf dem Hintergrund von Systemen der Klassenlogik entstehen, die noch stärker sind als die bisher besprochenen Systeme der P.L. Wir wollen in diesem Kapitel nun einen Blick auf ein solches Logiksystem werfen und das Programm des Logizismus am Beispiel der logischen Begründung der Arithmetik erläutern.

Im folgenden werden wir die klassische Version der Klassenlogik darstellen. Diese Version ist, wie der Abschnitt 5.6 zeigen wird, nicht widerspruchsfrei. Da die klassische Mengenlehre aber den intuitiven Hintergrund bildet, von dem her auch die korrigierten Systeme der axiomatischen Mengenlehre zu verstehen sind, da sich die fundamentalen Begriffsbildungen der klassischen Mengenlehre, die wir hier behandeln wollen, auch in andere klassenlogische Systeme übertragen lassen und da endlich die klassische Version die einfachste und durchsichtigste Version der Mengenlogik ist, scheint es uns für einen ersten Einblick in die klassenlogischen Begriffsbildungen angebracht, trotz seiner Mängel auf den klassischen Rahmen zurückzugreifen.

## 5.1 Begriffe und Klassen

Von Klassen haben wir im Zusammenhang mit der p.l. Semantik schon früher gesprochen. Als *Klasse* oder *Menge* bezeichnen wir den Umfang eines einstelligen Begriffes. Klassen werden also durch Begriffe definiert. Wir sagen ferner, ein Gegenstand $a$ sei *Element* einer Klasse $k$, wenn $a$ unter den Begriff fällt, der $k$ definiert, dessen Umfang $k$ also ist.

Ist $f$ ein einstelliger Begriff, so wollen wir seinen Umfang, die durch $f$ definierte Klasse, durch den Ausdruck $\lambda x f(x)$ symbolisieren. Ist ein Gegenstand $a$ Element einer Klasse $k$, so wollen wir das durch die Schreibweise $a \varepsilon k$ andeuten. Dann gilt das *Abstraktionsprinzip:*

A) $y \varepsilon \lambda x f(x) \equiv f(y)$.

Ein Gegenstand $y$ ist Element der durch $f$ definierten Klasse (des Umfangs von $f$) genau dann, wenn $y$ unter den Begriff $f$ fällt.

Der Umfang eines Begriffes $f$ ist nun nur dadurch bestimmt, welche Gegenstände ihm als Element angehören. Wenn also zwei Begriffsumfänge oder Klassen $k_1$ und $k_2$ genau dieselben Elemente enthalten, so sehen wir sie als identisch an. Es gilt daher das *Extensionalitätsprinzip*:

E) $\wedge x(x \varepsilon k_1 \equiv x \varepsilon k_2) \supset k_1 = k_2$.

Da wir auch die Begriffe immer im extensionalen Sinn verstanden haben, so daß zwei Begriffe, die auf genau dieselben Gegenstände zutreffen, identisch sind, so haben wir durch die Klassenbildung eine umkehrbar eindeutige Zuordnung von Begriffen und Klassen: Zu jedem einstelligen Begriff gehört genau eine Klasse als Umfang dieses Begriffs und zu jeder Klasse gehört genau ein Begriff, der genau auf diejenigen Gegenstände zutrifft, die Elemente der Klasse sind.

Trifft ein Begriff auf keinen Gegenstand zu, wie z. B. der Begriff $x \neq x$, so definiert er eine Klasse, die keine Elemente enthält. Nach (E) gibt es nur eine solche Klasse, die wir als *Nullklasse* oder *leere Menge* bezeichnen und durch $\Lambda$ symbolisieren. Wir können also definieren:

**D15:** $\Lambda := \lambda x(x \neq x)$.

Daraus erhalten wir sofort den Satz $\wedge x(\neg x \varepsilon \Lambda)$.

Wir können ferner einen Begriff bilden, der auf alle Gegenstände zutrifft, z. B. den Begriff $x = x$, der dann eine Klasse definiert, die alle Gegenstände als Elemente enthält. Nach (E) gibt es wiederum nur eine solche Klasse, die wir als *Allklasse* bezeichnen und durch das Zeichen V symbolisieren.

**D16:** $\mathrm{V} := \lambda x(x = x)$.

Daraus erhält man sofort $\wedge x(x \varepsilon \mathrm{V})$.

Man kann auch zu jedem Objekt $x$ einen Begriff angeben, der genau auf $x$ zutrifft, nämlich den Begriff $y = x$. Den Umfang dieses Begriffes nennt man die *Einermenge* von $x$ und schreibt dafür $\{x\}$.

**D17:** $\{\mathrm{t}\} := \lambda \mathrm{y}(\mathrm{y} = \mathrm{t})$.

Mit (A) folgt daraus sofort der Satz $y\varepsilon\{x\} \equiv y = x$, d. h. $y$ gehört der Einermenge aus $x$ an genau dann, wenn $y$ mit $x$ identisch ist.

Zur weiteren Erläuterung des Klassenbegriffs wollen wir noch auf die Unterschiede zwischen Klassen und Kollektionen hinweisen, wie sie FREGE in einem Brief an B. RUSSELL hervorgehoben hat[1].

Als *Kollektion* bezeichnet man ein Ding, das aus ein oder mehreren Dingen als aus seinen Teilen besteht, wie eine Steinmauer aus den Steinen besteht, ein Wald aus den Bäumen, eine Division aus den Regimentern und diese wieder aus den Kompanien. Eine Kollektion ist also als Ganzes zusammengesetzt aus ihren Teilen. Zwischen Klassen und Kollektionen bestehen nun folgende grundlegenden Unterschiede:

1) Da eine Kollektion aus ihren Teilen besteht, gibt es keine Kollektion, wenn es keine Teile gibt. Wenn man die Steine einer Mauer entfernt, verschwindet auch die Mauer. Es gibt also keine leere Kollektion, es gibt hingegen eine leere Klasse. Eine Klasse besteht nicht aus ihren Elementen, sondern sie existiert, wenn immer ein definierender Begriff existiert. Daher gibt es eine Klasse der Venusmonde, obwohl es keinen Venusmond gibt, es gibt hingegen keine Kollektion der Venusmonde.

2) Eine Kollektion, die nur aus einem Teil besteht, ist mit diesem Teil identisch. Eine Mauer, die nur aus einem Stein besteht, ist nichts anderes als eben dieser Stein, und die Kollektion der Erdmonde ist nichts anderes als der Mond. Hingegen sind Einerklassen nicht mit ihren Elementen identisch. Die Klasse der Erdmonde ist als Klasse, also als Abstraktum vom Mond als physischem Objekt verschieden.

3) Die Teil-Ganzes-Beziehung ist transitiv: Die Teile der Steine einer Mauer sind auch Teile der Mauer, die Kompanien sind als Teile der Regimenter auch Teile der Division. Daher ist auch durch die Angabe einer Kollektion noch nicht festgelegt, welche Teile dieser Kollektion gerade ins Auge gefaßt werden. Wenn man fragt: Wieviele Teile hat eine Division? so läßt sich darauf nicht eindeutig eine Antwort geben, da man nicht weiß, ob die Regimenter, die Kompanien oder die einzelnen Soldaten gezählt werden sollen. Die Elementschaftsrelation ist hingegen nicht transitiv. Der Mond als Element der Klasse

[1] Der unveröffentlichte Brief datiert vom 28. Juli 1902.

der Erdmonde ist nicht auch Element der Klasse der Klassen von Planetenmonden. Durch die Angabe einer Klasse ist auch festgelegt, welche Gegenstände als Elemente anzusprechen sind, und somit ist auch die Zahl dieser Elemente eindeutig festgelegt. Die Klasse der Soldaten einer Division ist von der Klasse ihrer Kompanien und der ihrer Regimenter verschieden. Die Soldaten sind nicht Elemente der Klasse der Kompanien und die Kompanien nicht Elemente der Klasse der Regimenter.

Durch einen ähnlichen Abstraktionsvorgang, wie er von einstelligen Begriffen zu Klassen führt, gelangt man von mehrstelligen Begriffen zu Umfängen solcher Begriffe, die man auch als *Relationen* bezeichnet. Da man diesen Terminus auch im Sinne von „Beziehungen" für die Begriffe selbst verwendet, sei besonders hervorgehoben, daß wir ihn im folgenden immer für Begriffsumfänge, also Gegenstände verwenden[1]. Den Umfang eines $n$-stelligen Begriffes $f$ bezeichnen wir durch $\lambda x_1 \ldots x_n f(x_1, \ldots, x_n)$. Wir sagen dann, die Gegenstände $y_1, \ldots, y_n$ (in dieser Reihenfolge) seien Elemente der durch $f$ definierten Relation, wenn sie unter den Begriff $f$ fallen, wenn also gilt $f(y_1, \ldots, y_n)$. Symbolisiert man die Elementschaftsrelation wieder durch das Zeichen „$\varepsilon$", so erhält man das verallgemeinerte Abstraktionsprinzip:

$$\text{A}') \quad y_1, \ldots, y_n \varepsilon \lambda x_1 \ldots x_n f(x_1, \ldots, x_n) \equiv f(y_1, \ldots, y_n).$$

Das verallgemeinerte Extensionalitätsprinzip lautet:

$$\text{E}') \quad \wedge x_1 \ldots x_n (x_1, \ldots, x_n \varepsilon k_1 \equiv x_1, \ldots, x_n \varepsilon k_2) \supset k_1 = k_2.$$

Man beachte, daß es in dem Ausdruck $x_1, \ldots, x_n \varepsilon k$ auf die Reihenfolge der $x_1, \ldots, x_n$ ankommt. Aus $x, y \,\varepsilon\, \lambda uv f(u, v)$ folgt nicht $y, x \,\varepsilon\, \lambda uv f(u, v)$, sonst müßte wegen (A') gelten $\wedge xy(f(x, y) \equiv f(y, x))$. Setzt man aber für $f(x, y)$ eine nichtsymmetrische Beziehung ein, wie z. B. die Beziehung ‚$x$ ist Vater von $y$', so gilt diese Äquivalenz nicht.

Im Abschnitt 5.3 wird sich zeigen, daß man Relationen durch Klassen definieren kann. Daher können wir uns beim Aufbau eines Klassenkalküls, dem wir uns nun zuwenden wollen, auf Klassen beschränken.

---

[1] FREGE verwendet allgemein den Terminus „Wertverlauf einer Funktion". Da für ihn Begriffe spezielle Funktionen sind, sind Klassen und Relationen spezielle Wertverläufe.

### 5.1.1 Die Syntax der Sprache $\mathfrak{K}$

Es soll nun eine Sprache $\mathfrak{K}$ angegeben werden, in der sich die mengentheoretischen Begriffsbildungen ausdrücken lassen. Dazu gehen wir von der p.l. Sprache $\mathfrak{P}$ in der Version $\mathfrak{P}^+$ aus und nehmen zu ihren Grundzeichen für $\mathfrak{K}$ noch die Symbole „$\lambda$“ und „$\varepsilon$“ hinzu. Da wir nun Ausdrücke der Form $f(x)$ bzw. $f(x_1, \ldots, x_n)$ durch Ausdrücke der Gestalt $x \varepsilon y$ bzw. $x_1, \ldots, x_n \varepsilon y$ ersetzen können, wobei $y$ für $\lambda z f(z)$ bzw. $\lambda z_1 \ldots z_n f(z_1, \ldots, z_n)$ steht, und da weiterhin die Ausdrücke $x_1, \ldots, x_n \varepsilon y$ für $n > 1$ definierbar sind, so können wir in $\mathfrak{K}$ auf PV ganz verzichten und mit „$=$“ und „$\varepsilon$“ als einzigen PK auskommen. $\mathfrak{K}$ enthält also als Grundzeichen nur die GV von $\mathfrak{P}$, die logischen Symbole $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\supset$, $\equiv$, $\Lambda$, $V$, $\lambda$, $\varepsilon$ und $=$, sowie als Hilfszeichen Klammerzeichen, Kommata und Ziffern zur Unterscheidung der GV.

Die *Formregeln* von $\mathfrak{K}$ lauten:

a) GV von $\mathfrak{K}$ sind *Terme* von $\mathfrak{K}$.

b) Sind s und t Terme von $\mathfrak{K}$, so sind $s \varepsilon t$ und $s = t$ *Formeln* von $\mathfrak{K}$.

c) Sind A und B Formeln von $\mathfrak{K}$, so sind auch $\neg A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \supset B$ und $A \equiv B$ *Formeln* von $\mathfrak{K}$.

d) Ist A eine Formel von $\mathfrak{K}$, so sind auch $\Lambda x A$ und $V x A$ *Formeln* von $\mathfrak{K}$, wenn x eine GV von $\mathfrak{K}$ ist.

e) Ist $A[x]$ eine Formel von $\mathfrak{K}$, in der die GV x frei vorkommt, so ist $\lambda x A[x]$ ein *Term* von $\mathfrak{K}$.

Hier liegt, wie in 3.2.1, eine Definition der Begriffe ‚Term‘ und ‚Formel‘ durch sog. simultane Rekursion vor. Man überzeugt sich wie dort leicht, daß durch diese Definition die Term- und Formeleigenschaft für die Ausdrücke von $\mathfrak{K}$ zirkelfrei definiert ist, da die Formregeln so gefaßt sind, daß wohlgeformte Ausdrücke, d. h. Terme und Formeln, nach diesen Regeln nur aus wohlgeformten Ausdrücken kleinerer Länge erzeugt werden. Als Übungsaufgabe beweise man, daß nach den Regeln die Term- und Formeleigenschaft für alle Ausdrücke von $\mathfrak{K}$ entscheidbar sind.

Die Klammerregeln übernehmen wir aus $\mathfrak{P}$ und legen für Ausdrücke der Form $\lambda x A[x]$ Klammerregeln wie für $\Lambda x A[x]$ fest. Die Ausdrücke $\lambda x$ bezeichnen wir wieder als *Quantoren* i.w.S. Danach können wir die

Bereiche solcher Quantoren, das freie und gebundene Vorkommen von GV in ihren Bereichen, die freie Umbenennung und Einsetzung wie für $\mathfrak{P}$ festlegen.

Die Semantik für die Sprache $\mathfrak{K}$ wollen wir nicht genauer präzisieren, da sich im Abschnitt 5.6 zeigen wird, daß eine Semantik für $\mathfrak{K}$ in Entsprechung zu den oben entwickelten intuitiven Vorstellungen nicht widerspruchsfrei angegeben werden kann. Wir wollen uns daher damit begnügen, daß wir den Formeln von $\mathfrak{K}$ aufgrund der einleitenden intuitiven Erläuterungen einen mehr oder minder präzisen Sinn zuordnen können.

### 5.1.2 Der Kalkül $\mathfrak{K}1$

Man erhält einen Kalkül der Klassenlogik $\mathfrak{K}1$, wenn man zu den Axiomen A1 bis A4 von $\mathfrak{P}1$ — wobei nun A4 in der Formulierung $\wedge xA[x] \supset A[x/t]$ zu verwenden ist, wo t ein beliebiger Term von $\mathfrak{K}$ ist[1] — die folgenden Axiomenschemata hinzunimmt, die das Abstraktions- und das Extensionalitätsprinzip ausdrücken:

**A10:** $t\varepsilon\lambda yA[y] \equiv A[yt]$
**A11:** $\wedge x(x\varepsilon s \equiv x\varepsilon t) \supset s = t$.

Aus A11 folgt sofort das Axiom A5, das wir also in $\mathfrak{K}1$ entbehren können. Für die Identität benötigen wir also nur das Axiom A6.

Wenn man das Extensionalitätsprinzip in der Gestalt A11 formuliert, so muß man aus den betrachteten Grundbereichen der Interpretationen Individuen ausschließen. Als *Individuen* bezeichnen wir dabei Objekte, die keine Elemente enthalten, wie konkrete physische Gegenstände, die aber von der Nullklasse verschieden sind. Alle solche Individuen wären ja nach A11 untereinander und mit der Nullklasse identisch.

Man könnte das Axiom A10 auch durch das Komprehensionsprinzip

K) $\vee y\wedge x(x\varepsilon y \equiv A[x])$ (die GV y soll nicht frei in A[x] vorkommen)

ersetzen, das besagt: zu jedem (durch ein Prädikat in $\mathfrak{K}$ darstellbaren) Begriff gibt es eine Klasse, die genau diejenigen Elemente enthält, die unter diesen Begriff fallen.

[1] Zur Symbolik [A, x/t] vgl. die Festsetzungen auf S. 251f.

Mit A11 erhält man aus (K) sofort $\mathrm{V!y\Lambda x(x\varepsilon y \equiv A[x])}$ und man kann dann definieren:

$\lambda\mathrm{xA[x]} := \text{ɿ}\mathrm{y\Lambda x(x\varepsilon y \equiv A[x])}$.

Dann läßt sich A10 beweisen:

$$\begin{array}{ll}
\mathrm{t\varepsilon\lambda yA[y] \supset t\varepsilon\text{ɿ}z\Lambda x(x\varepsilon z \equiv A[y/x])} & \\
\quad \mathrm{\supset Vz(\Lambda x(x\varepsilon z \equiv A[y/x]) \wedge t\varepsilon z)} & \mathrm{T65} \\
\quad \mathrm{\supset A[y/t]}. &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
\mathrm{\Lambda x(x\varepsilon z \equiv A[y/x])} & \mathrm{AF} \\
\mathrm{A[y/t] \supset \Lambda x(x\varepsilon z \equiv A[y/x]) \wedge t\varepsilon z)} & \mathrm{A4, T23} \\
\quad \mathrm{\supset Vz(\Lambda x(x\varepsilon z \equiv A[y/x]) \wedge t\varepsilon z)} & \mathrm{T43} \\
\quad \mathrm{\supset t\varepsilon\text{ɿ}z(\Lambda x(x\varepsilon z \equiv A[y/x])} & \mathrm{T65} \\
\quad \mathrm{\supset t\varepsilon\lambda yA[y]}\,. &
\end{array}$$

Mit MT4, T44 und (K) können wir uns dann von der AF $\mathrm{\Lambda x(x\varepsilon z \equiv A[y/x])}$ befreien und erhalten mit T23 und D3 $\mathrm{t\varepsilon\lambda yA[y] \equiv A[y/t]}$.

Umgekehrt folgt aus A10 durch Partikularisierung sofort (K).

Ferner könnte man die Identität auch definieren durch

L) $\mathrm{s = t := \Lambda x(s\varepsilon x \equiv t\varepsilon x)}$.

Diese Definition ist inhaltsgleich mit der Leibnizdefinition D9. Wir erhalten daraus wieder A5 und A6:

$$\begin{array}{ll}
\mathrm{s = t \supset \Lambda x(s\varepsilon x \equiv t\varepsilon x)} & \\
\quad \mathrm{\supset s\varepsilon\lambda xA[x] \equiv t\varepsilon\lambda xA[x]} & \mathrm{A4} \\
\quad \mathrm{\supset A[x/s] \equiv A[x/t]} & \mathrm{A10} \\
\quad \mathrm{\supset A[x/s] \supset A[x/t]}. &
\end{array}$$

Umgekehrt kann man aus A5 und A6 auch (L) gewinnen:

$$\begin{array}{ll}
\mathrm{s = t \supset (s\varepsilon z \supset t\varepsilon z)} & \mathrm{A6} \\
\mathrm{s = t \supset t = s} & \mathrm{T55} \\
\mathrm{t = s \supset (t\varepsilon z \supset s\varepsilon z)} & \mathrm{A6} \\
\mathrm{s = t \supset (s\varepsilon z \equiv t\varepsilon z)} & \mathrm{D3} \\
\mathrm{s = t \supset \Lambda z(s\varepsilon z \equiv t\varepsilon z)} & \mathrm{R2}.
\end{array}$$

Die Umkehrung erhält man wie folgt:

$$\begin{array}{lll} \wedge z(s\varepsilon z \equiv t\varepsilon z) \supset (s\varepsilon\{s\} \equiv t\varepsilon\{s\}) & & \text{A4} \\ \qquad\qquad\qquad\quad \supset t\varepsilon\{s\} & & \text{A5, D17, A10} \\ \qquad\qquad\qquad\quad \supset t = s & & \text{D17, A10} \\ \qquad\qquad\qquad\quad \supset s = t & & \text{T55.} \end{array}$$

(L) ist also mit A5 und A6 äquivalent. Weder aus A5 und A6 noch aus (L) ist aber A11 ableitbar. Man könnte endlich auch $s = t$ durch $\wedge x(x\varepsilon s \equiv x\varepsilon t)$ definieren. Dann wären A11 und A5 beweisbar, aber nicht A6 bzw. (L).

Endlich wollen wir zu den Axiomen von $\mathfrak{K}1$ noch das *Auswahlprinzip* hinzunehmen in folgender Fassung:

**A12:** $\wedge xy(x\varepsilon t \wedge y\varepsilon t \supset \vee z(z\varepsilon x) \wedge \neg\vee z(z\varepsilon x \wedge z\varepsilon y)) \supset \vee u \wedge x(x\varepsilon t \supset \vee!z(z\varepsilon u \wedge z\varepsilon x))$.

Das Auswahlprinzip besagt also: zu jeder Menge *t* von Mengen, die nicht leer sind und die keine gemeinsamen Elemente enthalten, gibt es eine Auswahlmenge *u*, die mit jedem Element von *t* genau ein Element gemeinsam hat. Die Menge *u* ist also dadurch gebildet, daß man aus jedem Element von *t* genau ein Element „auswählt". Diese Auswahl ist freilich nicht als ein in irgendeiner Weise konstruktiver Prozeß zu denken, nach dem man die Menge *u* tatsächlich angeben kann. A12 behauptet nur die Existenz einer solchen Menge.

Das Auswahlprinzip wurde zuerst 1904 von E. ZERMELO explizit formuliert, nachdem es früher, z. B. von CANTOR schon implizit in Beweisen verwendet worden war[1]. Es stellt neben dem Komprehensionsprinzip ein weiteres starkes Existenzpostulat für Klassen dar. Hätte man das Komprehensionsaxiom in der Fassung $\wedge f \vee y \wedge x(x\varepsilon y \equiv f(x))$ zugrunde gelegt, so wäre dies Prinzip im Hinblick auf entsprechende p.l. Auswahlprinzipien überflüssig[2]. In der Formulierung (K) sichert aber das Komprehensionsprinzip die Existenz von Klassen nur für Begriffe, die sich durch Prädikate in $\mathfrak{K}$ ausdrücken lassen.

Der Kalkül $\mathfrak{K}1$ soll also die acht Axiome A1, A2, A3, A4, A6, A10, A11 und A12 enthalten, sowie die Deduktionsregeln R1 und R2.

Da $\mathfrak{P}1$ Teilkalkül von $\mathfrak{K}1$ ist, können wir alle Theoreme von $\mathfrak{P}1$ im folgenden verwenden. Man macht sich leicht klar, daß aufgrund der hier angenommenen Fassung von A4: $\wedge x A[x] \supset A[x/t]$ die Theoreme von $\mathfrak{P}1$ auch gelten, wenn wir für freie GV Terme von $\mathfrak{K}$ einsetzen.

---

[1] Zum Auswahlprinzip vgl. auch [13], S. 44 ff.

[2] Vgl. S. 276.

*Übungsaufgaben:*

1. Man untersuche die Gültigkeit folgender Formeln und beweise die gültigen Formeln in $\mathfrak{K}1$:

$\Lambda x \mathrm{V} y \Lambda z(z \varepsilon y \equiv z = x)$
$\Lambda uv \mathrm{V} y \Lambda z(z \varepsilon y \equiv z = u \vee z = v)$
$\Lambda x \mathrm{V} y(x \varepsilon y)$
$\Lambda x \mathrm{V} y(y \varepsilon x)$
$\Lambda xy(x \varepsilon y \supset \neg y \varepsilon x)$
$\lambda x(x \varepsilon y) = y.$

2. Beweise das Metatheorem MT5 für $\mathfrak{K}1$.

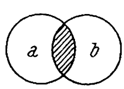
## 5.2 Die elementare Klassenalgebra

In diesem und im folgenden Abschnitt wollen wir einige einfache Definitionen und Sätze aus der Fülle der mengentheoretischen Begriffsbildungen herausheben.

Zu zwei Klassen *a* und *b* kann man eine Klasse *c* bilden, die genau diejenigen Elemente enthält, die sowohl in *a* wie in *b* enthalten sind. Diese Menge bezeichnet man als *Durchschnitt* der Klassen *a* und *b* — symbolisch $a \cap b$. Wir definieren also:

**D18:** $t \cap s := \lambda z(z \varepsilon s \wedge z \varepsilon t)$.

Veranschaulicht man eine Klasse graphisch durch eine umgrenzte Fläche, ihre Elemente durch die Punkte dieser Fläche, so erhält man für den Klassendurchschnitt folgendes Diagramm:



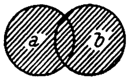

Dabei deutet die schraffierte Fläche den Durchschnitt $a \cap b$ an.

Ist *a* der Umfang des Begriffes *f*, *b* der Umfang des Begriffes *g*, so ist $a \cap b$ also der Umfang des Begriffes $f \wedge g$. Ist *a* die Klasse der Einwohner Münchens, *b* die Klasse der Kleingärtner, so ist $a \cap b$ die Klasse der Münchner Kleingärtner. Ist *a* die Klasse der Hundebesitzer, *b* die Klasse der Katzenbesitzer, so ist $a \cap b$ die Klasse derjenigen Menschen, die sowohl Hunde wie Katzen besitzen.

Zu zwei Klassen *a* und *b* kann man auch die Klasse *c* derjenigen Elemente bilden, die in *a* oder *b* enthalten sind. Diese Klasse *c* nennt man die *Vereinigung* der Mengen *a* und *b* — symbolisch $a \cup b$:

**D19:** $s \cup t := \lambda z(z\varepsilon s \vee z\varepsilon t)$.

Das Diagramm für die Vereinigungsmenge hat folgende Gestalt:

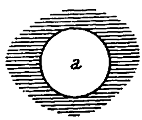



Dabei deutet die schraffierte Fläche die Vereinigung $a \cup b$ an. Ist *a* der Umfang von *f*, *b* der Umfang von *g*, so ist danach $a \cup b$ der Umfang des Begriffes $f \vee g$. In den oben angeführten beiden Beispielen für die Klassen *a* und *b* ist $a \cup b$ nun die Klasse der Menschen, die in München wohnen oder einen Kleingarten betreiben, bzw. die Klasse der Hunde- oder Katzenbesitzer.

Zu einer Klasse *a* kann man endlich auch die *Komplementärklasse* — symbolisch $\overline{a}$ — bilden, die genau diejenigen Elemente enthält, die nicht in *a* enthalten sind:

**D20:** $\overline{s} := \lambda z \neg z\varepsilon s$.

Im Diagramm stellt sich diese Menge so dar:




Dabei soll die schraffierte Fläche alle Punkte enthalten, die nicht in *a* liegen.

Ist *a* der Umfang des Begriffes *f*, so ist demnach $\overline{a}$ der Umfang des Begriffes $\neg f$. Ist *a* die Menge der Akademiker, so ist $\overline{a}$ die Menge der Nicht-Akademiker, ist *a* die Menge der Raucher, so ist $\overline{a}$ die Menge der Nichtraucher, usf.

Mit den Operatoren $\cap$, $\cup$ und $\overline{\phantom{a}}$ können wir nun aus Termen neue Terme erzeugen. Zur Einsparung von Klammer setzen wir dabei fest, daß der Operator $\overline{\phantom{a}}$ stärker als $\cap$ und $\cup$, der Operator $\cap$ stärker als $\cup$ binden soll. Die Aussagen der elementaren Klassenalgebra sind dann Gleichungen zwischen Termen, die aus Klassenvariablen (GV) sowie den Konstanten $\Lambda$ und $V$, die wir in 5.1 definiert hatten, mit

Hilfe der Operatoren $\cap$, $\cup$ und $\overline{\phantom{x}}$ aufgebaut sind. Solche Gleichungen sind etwa folgende Theoreme:

| | | |
|---|---|---|
| **T78:** | $s \cup t = t \cup s$ | (Kommutativität der Vereinigung) |
| **T79:** | $s \cap t = t \cap s$ | (Kommutativität des Durchschnitts) |
| **T80:** | $(s \cup t) \cup r = s \cup (t \cup r)$ | (Assoziativität der Vereinigung) |
| **T81:** | $(s \cap t) \cap r = s \cap (t \cap r)$ | (Assoziativität des Durchschnitts) |
| **T82:** | $s \cup (s \cap t) = s$ | (Absorptionsgesetze) |
| **T83:** | $s \cap (s \cup t) = s$ | |
| **T84:** | $s \cup \overline{s} = V$ | |
| **T85:** | $s \cap \overline{s} = \Lambda$ | |
| **T86:** | $s \cup (t \cap r) = (s \cup t) \cap (s \cup r)$ | (Distributive Gesetze) |
| **T87:** | $s \cap (t \cup r) = s \cap t \cup s \cap r$ | |

Da man diese Theoreme mit Hilfe der Definitionen D15, D16, D18, D19 und D20 und einfacher a.l. Gesetze beweisen kann, führen wir hier nur einen Beweis vor. Man erhält z. B. T80 wie folgt:

$$\begin{aligned}
(s \cup t) \cup r &= \lambda z(z\varepsilon s \cup t \vee z\varepsilon r) && \text{D18}\\
&= \lambda z((z\varepsilon s \vee z\varepsilon t) \vee z\varepsilon r) && \text{D18}\\
&= \lambda z(z\varepsilon s \vee (z\varepsilon t \vee z\varepsilon r)) && \text{T18}\\
&= \lambda z(z\varepsilon s \vee z\varepsilon t \cup r) && \text{D18}\\
&= s \cup (t \cup r) && \text{D18}
\end{aligned}$$

Als Postulate für die Operationen $\cap$, $\cup$ und $\overline{\phantom{x}}$ über einem Grundbereich $K$ von Klassen definieren die Theoreme T78 bis T87 in Verbindung mit der Theorie der Identität eine algebraische Struktur, die man als *komplementären, distributiven Verband* bezeichnet: die Theoreme T78 bis T83 besagen, daß die Operationen $\cap$, $\cup$ auf $K$ einen Verband bilden, T84 und T85, daß dieser Verband komplementär ist, und T86, T87, daß er distributiv ist. Solche Verbände nennt man auch BOOLE*sche Verbände* oder BOOLE*sche Algebren.*

Den Kalkül mit den Axiomen T78 bis T87 und A5 sowie den Deduktionsregeln $s = t \vdash t = s$ und $s = t \vdash f[s] = f[t]$, wo $f[s]$ ein Term ist, aufgebaut aus GV mit $\Lambda$, $V$, $\cap$, $\cup$ und $\overline{\phantom{x}}$ und $f[s]$ durch Ersetzung von s durch t an einigen Stellen in $f[s]$ entsteht, wollen wir $\mathfrak{B}$ nennen. Wir geben einige einfache Beweise in $\mathfrak{B}$ an. Die Theoreme von $\mathfrak{B}$ sind dann auch Theoreme von $\mathfrak{Kl}$, da die Axiome von $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{Kl}$ beweisbar sind und die Deduktionsregeln beweisbare Ableitungsbeziehungen darstellen (vgl. R1, T55, T66).

**T88:** $s \cup \Lambda = s$

| | | |
|---|---|---|
| Beweis: | $s \cup (s \cap \overline{s}) = s$ | T82 |
| | $s \cup \Lambda = s$ | T85 |

**T89:** $s \cap V = s$

| | | |
|---|---|---|
| Beweis: | $s \cap (s \cup \overline{s}) = s$ | T83 |
| | $s \cap V = s$ | T84 |

**T90:** $s \cup s = s$

| | | |
|---|---|---|
| Beweis: | $s \cup (s \cap V) = s$ | T82 |
| | $s \cup s = s$ | T89 |

**T91:** $s \cap s = s$

| | | |
|---|---|---|
| Beweis: | $s \cap (s \cup \Lambda) = s$ | T83 |
| | $s \cap s = s$ | T88 |

**T92:** $s \cup V = V$

| | | |
|---|---|---|
| Beweis: | $s \cup (s \cap s) = s$ | T82 |
| | $\overline{s} \cup (s \cup (s \cap s)) = \overline{s} \cup s$ | |
| | $(\overline{s} \cup s) \cup (s \cap s) = V$ | T80, T84, T78 |
| | $V \cup s = V$ | T84, T91, T78 |
| | $s \cup V = V$ | T78 |

**T93:** $s \cap \Lambda = \Lambda$

| | | |
|---|---|---|
| Beweis: | $s \cap (s \cup s) = s$ | T83 |
| | $\overline{s} \cap (s \cap (s \cup s)) = \overline{s} \cap s$ | |
| | $(\overline{s} \cap s) \cap (s \cup s) = \Lambda$ | T81, T79, T85 |
| | $\Lambda \cap s = \Lambda$ | T79, T85, T90 |
| | $s \cap \Lambda = \Lambda$ | T79 |

**T94:** $s = t \vdash (\overline{s} \cup t) \cap (\overline{t} \cup s) = V$

| | | |
|---|---|---|
| Beweis: | $s = t$ | |
| | $\overline{s} \cup t = V$ | T84, T78 |
| | $t = s$ | |
| | $\overline{t} \cup s = V$ | T84, T78 |
| | $(\overline{s} \cup t) \cap (\overline{t} \cup s) = V \cup V = V$ | T90 |

**T95:** $(\overline{s} \cup t) \cap (\overline{t} \cup s) = V \vdash s = t$

Beweis:

$$\begin{array}{rll} (\overline{s} \cup t) \cap (\overline{t} \cup s) &= V & \\ (\overline{s} \cup t) \cap (\overline{t} \cup s) \cap t &= t & \text{T89} \\ (\overline{s} \cup t) \cap (\overline{t} \cap t \cup s \cap t) &= t & \text{T87, T79} \\ (\overline{s} \cup t) \cap (s \cap t) &= t & \text{T79, T85, T88} \\ (\overline{s} \cap s) \cap t \cup s \cap (t \cap t) &= t & \text{T87, T79, T81} \\ \Lambda \cap t \cup s \cap t &= t & \text{T85, T79, T91} \\ s \cap t &= t & \text{T93, T88} \end{array}$$

Ebenso erhält man $s \cap t = s$ und daher

$$s = t.$$

Zwischen den Theoremen der Klassenalgebra und den Theoremen der A.L. besteht nun eine enge Beziehung. Um diese Beziehung herauszuarbeiten, ordnen wir zunächst den Termen der Klassenalgebra Formeln der A.L. zu: Ein Term der Klassenalgebra ist aus GV und den Konstanten $\Lambda$, $V$ mit den Operatoren $\cap$, $\cup$ und $\overline{\phantom{x}}$ zusammengesetzt. Da wir die Konstanten $V$ und $\Lambda$ nach T84 und T85 eliminieren können, genügt es im folgenden Terme zu betrachten, die keine solchen Konstanten enthalten. Einem solchen Term t ordnen wir nun die Formel $A_t$ der A.L. zu, die aus t entsteht durch Ersetzung der Operatoren $\cap$, $\cup$, $\overline{\phantom{x}}$ durch die Operatoren $\wedge$, $\vee$ und $\neg$, und durch Deutung der GV von t als Satzvariablen. Da sich umgekehrt jede a.l. Formel in den Operatoren $\wedge$, $\vee$, $\neg$ darstellen läßt, ist auch jeder a.l. Formel ein Term zugeordnet, der durch Ersetzung von $\wedge$, $\vee$, $\neg$ durch $\cap$, $\cup$, $\overline{\phantom{x}}$ entsteht. Diese Zuordnung ist eineindeutig.

Nach T94 und T95 kann man jede Aussage der Klassenalgebra $s = r$ äquivalent in eine Aussage der Gestalt $t = V$ umformen. Es genügt also, Aussagen dieser Form zu betrachten. Es gilt dann der Satz

**5.2.1** Eine Aussage $t = V$ ist ein Theorem der Klassenalgebra genau dann, wenn $A_t$ ein Theorem der A.L. ist.

Beweis: Ist $t = V$ eine Formel der Klassenalgebra, so kann man die GV $x_1, \ldots, x_n$ in t ersetzen durch die Terme $\lambda z(z \varepsilon x_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$, wo z eine feste GV sei. Wegen $x_i = \lambda z(z \varepsilon x_i)$ entsteht dadurch eine äquivalente Formel. Ersetzt man weiterhin $\lambda zA \cap \lambda zB$ durch $\lambda z(A \wedge B)$, $\lambda zA \cup \lambda zB$ durch $\lambda z(A \vee B)$ und $\overline{\lambda zA}$ durch $\lambda z \neg A$, so entsteht wegen D18 bis D20 aus t ein Term der Gestalt $\lambda zC[z]$, so daß gilt: $t = \lambda zC[z]$

und $C[z]$ ist mit Hilfe der a.l. Operatoren aus atomaren Bestandteilen der Form $z\varepsilon x_i$ zusammengesetzt. Es gilt also: $\lambda z C[z] = V$, und somit wegen A11 und D16 $\bigwedge z C[z]$, ist mit $t = V$ äquivalent. $\bigwedge z C[z]$ ist aber genau dann ein Theorem, wenn $C[z]$ ein Theorem der A.L. ist, und $C[z]$ ist ein solches Theorem genau dann, wenn die Formel C gleicher Struktur, die aus $C[z]$ durch Ersetzung der atomaren Bestandteile $z\varepsilon x_i$ durch $x_i$ hervorgeht, ein a.l. Theorem ist. C ist aber mit $A_t$ identisch.

Da der Term $t = (\overline{s} \cup r) \cap (\overline{r} \cup s)$ in die Formel $A_t = (\neg A_s \vee A_r) \wedge (\neg A_r \vee A_s)$ übergeht, die mit $(A_s \supset A_r) \wedge (A_r \supset A_s)$, also mit $A_s \equiv A_r$ äquivalent ist, so gilt auch: $s = r$ ist ein Theorem der Klassenalgebra genau dann, wenn $A_s \equiv A_r$ ein a.l. Theorem ist.

Damit können wir nun das a.l. Entscheidungsverfahren aus 1.2.4 zur Bestimmung der Gültigkeit von Theoremen der Klassenalgebra verwenden und können a.l. Theoreme direkt in Theoreme der Klassenalgebra übersetzen. Wir erhalten z.B. aus T24, T27, T28 so die Theoreme:

**T96:** $s = \overline{\overline{s}}$

**T97:** $\overline{s \cap t} = \overline{s} \cup \overline{t}$

**T98:** $\overline{s \cup t} = \overline{s} \cap \overline{t}$.

Und aus T82, T83 und T93 erhalten wir umgekehrt die a.l. Theoreme $A \vee (A \wedge B) \equiv A$, $A \wedge (A \vee B) \equiv A$, $A \wedge (B \wedge \neg B) \equiv B \wedge \neg B$.

Nach diesem Übersetzungsverfahren kann man aus $\mathfrak{B}$ auch einen Kalkül der A.L. erhalten, den man als äquivalent mit $\mathfrak{A}$1 erweisen kann. Es sei dem Leser als Übungsaufgabe empfohlen, diesen Äquivalenzbeweis durchzuführen. Klassenalgebra und A.L. haben also die gleiche algebraische Struktur, die Struktur eines BOOLEschen Verbandes. Diese Bezeichnung geht auf G. BOOLE zurück, einen der Begründer der modernen Logik, der zuerst einen Kalkül angegeben hat, den er sowohl im Sinne der Klassenalgebra wie auch im Sinne der A.L. deutete[1].

Im Rahmen der Klassenalgebra lassen sich auch zwei weitere wichtige Begriffe definieren, *Inklusion* und *Differenz*:

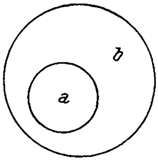
Die Beziehung eines Begriffes $f$ zu einem Begriff $g$, die besteht, wenn $g$ Oberbegriff von $f$ ist, d. h. wenn alle Dinge, die unter den Begriff $f$ fallen, auch unter $g$ fallen, kann man durch die Formel $\bigwedge x(f(x) \supset g(x))$ ausdrücken. Geht man von den Begriffen zu ihren Um-

[1] Vgl. dazu 6.2.

fängen über, so besagt die entsprechende Beziehung $\Lambda z(z\varepsilon a \supset z\varepsilon b)$, daß die Klasse *a* in der Klasse *b* enthalten ist, oder daß *a* *Teilmenge* von *b* ist. Diese Beziehung nennt man auch *Klasseneinschlußbeziehung* oder *Inklusion* und symbolisiert sie durch $\mathrm{a} \subset \mathrm{b}$. Wir definieren:

**D21:** $\mathrm{s} \subset \mathrm{t} := \Lambda \mathrm{z}(\mathrm{z}\varepsilon\mathrm{s} \supset \mathrm{z}\varepsilon\mathrm{t})$.

Diese Beziehung stellt sich im Diagramm wie folgt dar:




Es gilt nun der Satz:

**T99:** $\mathrm{s} \subset \mathrm{t} \equiv \overline{\mathrm{s}} \cup \mathrm{t} = \mathrm{V}$.

Beweis: $\mathrm{s} \subset \mathrm{t} \equiv \Lambda \mathrm{z}(\mathrm{z}\varepsilon\mathrm{s} \supset \mathrm{z}\varepsilon\mathrm{t})$
$\equiv \Lambda \mathrm{z}(\neg \mathrm{z}\varepsilon\mathrm{s} \vee \mathrm{z}\varepsilon\mathrm{t})$
$\equiv \lambda \mathrm{z}(\neg \mathrm{z}\varepsilon\mathrm{s} \vee \mathrm{z}\varepsilon\mathrm{t}) = \mathrm{V}$
$\equiv \overline{\mathrm{s}} \cup \mathrm{t} = \mathrm{V}$.

Danach könnte man die Inklusion auch durch $\mathrm{s} \subset \mathrm{t} := \overline{\mathrm{s}} \cup \mathrm{t} = \mathrm{V}$ definieren. Ihr entspricht in der a.l. Übersetzung die Implikation, d.h. es gilt nach T99 und 5.2.1: $\mathrm{s} \subset \mathrm{t}$ ist äquivalent mit $\mathrm{A_s} \supset \mathrm{A_t}$. Wir erhalten daher aus T1, T5 und D3 sofort die Theoreme:

**T100:** $\mathrm{s} \subset \mathrm{s}$ (Reflexivität)
**T101:** $\mathrm{s} \subset \mathrm{t} \wedge \mathrm{t} \subset \mathrm{r} \supset \mathrm{s} \subset \mathrm{r}$ (Transitivität)
**T102:** $\mathrm{s} \subset \mathrm{t} \wedge \mathrm{t} \subset \mathrm{s} \supset \mathrm{s} = \mathrm{t}$ (Antisymmetrie).

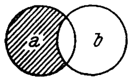
Da nach T100 jede Menge Teilmenge von sich selbst ist, so gebraucht man für manche Zwecke auch eine engere Inklusionsbeziehung, die besagt: *a* ist *echte Teilmenge* von *b* — symbolisch $\mathrm{a} \subsetneq \mathrm{b}$:

**D22:** $\mathrm{s} \subsetneq \mathrm{t} := \mathrm{s} \subset \mathrm{t} \wedge \mathrm{s} \neq \mathrm{t}$.

Als *Differenz* zweier Mengen *a* und *b* — symbolisch *a*—*b* — bezeichnet man die Menge der Elemente aus *a*, die nicht in *b* enthalten sind:

**D23:** $\mathrm{s} - \mathrm{t} := \lambda \mathrm{z}(\mathrm{z}\varepsilon\mathrm{s} \wedge \neg \mathrm{z}\varepsilon\mathrm{t})$.

Im Diagramm stellt sich diese Menge als schraffierte Fläche so dar:




Nach D23 gilt offenbar:

**T103:** $s - t = s \cap \overline{t}$.

Danach kann man die Differenz $s - t$ im Rahmen der Klassenalgebra auch durch $s \cup \overline{t}$ definieren.

Zum Abschluß wollen wir noch auf eine Verallgemeinerung der Durchschnittsbildung hinweisen, die nicht mehr in den Rahmen der elementaren Klassenalgebra gehört: Ist *a* eine Menge von Mengen, so können wir die Menge *b* bilden, die genau diejenigen Elemente enthält, die in allen Elementen von *a* enthalten sind, also den Durchschnitt aller Elemente von *a*. Diese Menge *b* nennt man den *Durchschnitt* von *a* — symbolisch $\bigcap a$.

**D24:** $\bigcap s := \lambda z \Lambda y(y \varepsilon s \supset z \varepsilon y)$.

In entsprechender Weise bezeichnet man die Menge *c* der Elemente, die in mindestens einem Element von *a* enthalten sind, also die Vereinigung der Elemente von *a*, als *Vereinigung* von *a* — symbolisch $\bigcup a$.

**D25:** $\bigcup s := \lambda z \mathrm{V} y(y \varepsilon s \wedge z \varepsilon y)$.

Es gelten dann die Theoreme

**T104:** $\Lambda y(y \varepsilon s \supset \bigcap s \subset y)$.

| | | |
|---|---|---|
| Beweis: | $y \varepsilon s$ | AF |
| | $z \varepsilon \bigcap s$ | AF |
| | $\Lambda u(u \varepsilon s \supset z \varepsilon u)$ | D24, A10 |
| | $y \varepsilon s \supset z \varepsilon y$ | T42 |
| | $z \varepsilon y$ | R1 |
| | $y \varepsilon s \supset (z \varepsilon \bigcap s \supset z \varepsilon y)$ | MT4 |
| | $y \varepsilon s \supset \Lambda z(z \varepsilon \bigcap s \supset z \varepsilon y)$ | R2 |
| | $\Lambda y(y \varepsilon s \supset \bigcap s \subset y)$ | T38, D21 |

**T105:** $\Lambda y(y \varepsilon s \supset y \subset \bigcup s)$

| | | |
|---|---|---|
| Beweis: | $y \varepsilon s$ | AF |
| | $z \varepsilon y$ | AF |
| | $\vee y(y \varepsilon s \wedge z \varepsilon y)$ | T23, T43 |
| | $z \varepsilon \bigcup s$ | D25, A10 |
| | $y \varepsilon s \supset (z \varepsilon y \supset z \varepsilon \bigcup s)$ | MT4 |
| | $y \varepsilon s \supset \wedge z(z \varepsilon y \supset z \varepsilon \bigcup s)$ | R2 |
| | $\wedge y(y \varepsilon s \supset y \subset \bigcup s)$ | T38, D21 |

*Übungsaufgaben:*

1. Beweise folgende Sätze:

$\Lambda \subset s$

$s \subset V$

$s \cap t \subset s$

$s \subset s \cup t$

$s - (s - t) = s \cap t$

$s \cap (t - r) = (s \cap t) - (s \cap r)$

$s = \Lambda \supset \bigcap s = V$

$s = V \supset \bigcap s = \Lambda$

$s \subset (t \cap r) \equiv s \subset t \wedge s \subset r$

$s \cup t \subset r \equiv s \subset r \wedge t \subset r$

$s \subset t \equiv s \cup t = t$

$s \subset t \equiv s \cap t = s$

$s \subset t \equiv \overline{t} \subset \overline{s}$

$s \subset t \supset s - t = \Lambda$

2. Beweise die Äquivalenz von $\mathfrak{A}1$ mit dem Kalkül, der aus der oben angegebenen Übersetzung von $\mathfrak{B}$ in die Sprache der A.L. entsteht!

## 5.3 Relationen und Funktionen

Wir wollen nun auf die Definierbarkeit der Relationen im Rahmen der Sprache $\mathfrak{K}$ eingehen, die wir im Abschnitt 5.1 angekündigt hatten. Dazu setzen wir in Verallgemeinerung der Definition D17 zunächst die Definition an:

**D26:** $\{s_1, \ldots, s_n\} := \lambda z(z = s_1 \vee \ldots \vee z = s_n)$.

$\{a_1, \ldots, a_n\}$ ist demnach die Menge, die genau die Elemente $a_1, \ldots, a_n$ enthält.

Es soll nun das geordnete Paar $\langle a, b \rangle$ der Mengen $a$, $b$ definiert werden. Dafür können wir nicht setzen $\{a, b\}$, denn wegen T15 gilt $\{a, b\} = \{b, a\}$. Nach Wiener und Kuratowski kann man das geordnete Paar aber wie folgt einführen:

**D27:** $\langle s, t \rangle := \{\{s\}, \{s, t\}\}$.

Damit diese Definition adäquat ist, muß gelten:

**T106:** $\langle s, t\rangle = \langle s', t'\rangle \equiv s = s' \wedge t = t'$.

Beweis:

| | | |
|---|---|---|
| 1) | $\langle s, t\rangle = \langle s', t'\rangle$ | AF |
| 2) | $s = t$ | AF |
| | $\{s, t\} = \{s\}$ | D17 |
| | $\langle s, t\rangle = \{\{s\}\}$ | D27 |
| | $\bigwedge z(z\varepsilon\{\{s\}\} \equiv z\varepsilon\{\{s'\}, \{s', t'\}\})$ | A11, (1) |
| | $\{s\} = \{s'\} = \{s', t'\}$ | |
| | $s = s' = t'$ | |
| | $s = s' \wedge t = t'$ | |
| 3) | $s = t \supset s = s' \wedge t = t'$ | MT4, (2) |
| 4) | $s \neq t$ | AF |
| 5) | $\bigwedge z(z\varepsilon\{\{s\}, \{s, t\}\} \equiv z\varepsilon\{\{s'\}, \{s', t'\}\})$ | D27, (1), A11 |
| | $\{s\}\varepsilon\{\{s'\}, \{s', t'\}\}$ | |
| | $\{s\} = \{s'\} \vee \{s\} = \{s', t'\}$ | |
| | $s = s' \vee (s = s' \wedge s = t')$ | D26 |
| 6) | $s = s'$ | |
| | $\{s, t\}\varepsilon\{\{s'\}, \{s', t'\}\}$ | (5) |
| | $\{s, t\} = \{s'\} \vee \{s, t\} = \{s', t'\}$ | |
| | $(s = s' \wedge t = s') \vee (s = s' \wedge t = t') \vee (s = t' \wedge t = s')$ | |
| | $(s = s' \wedge t = t') \vee (s = t' \wedge t = s')$ | (4) |
| | $s = s' \wedge t = t'$ | (6), (4) |
| | $s \neq t \supset s = s' \wedge t = t'$ | MT4, (4) |
| | $s = t \vee s \neq t \supset s = s \wedge t = t'$ | (3) |
| | $s = s' \wedge t = t'$ | |
| | $\langle s, t\rangle = \langle s', t'\rangle \supset s = s' \wedge t = t'$ | MT4, (1) |
| | $s = s' \wedge t = t' \supset \langle s, t\rangle = \langle s', t'\rangle$ | T66 |
| | $\langle s, t\rangle = \langle s', t'\rangle \equiv s = s' \wedge t = t'$ | |

Man kann dann die geordneten $n$-tupel für $n > 2$ induktiv definieren durch

**D28:** $\langle s_1, \ldots, s_{n+1}\rangle := \langle\langle s_1, \ldots, s_n\rangle, s_{n+1}\rangle$.

Daraus erhält man dann wieder den Satz $\langle s_1, \ldots, s_n\rangle = \langle t_1, \ldots, t_n\rangle \equiv s_1 = t_1 \wedge \ldots \wedge s_n = t_n$. Der Beweis sei dem Leser als Übungsaufgabe überlassen.

$C^n$ sei die Klasse aller $n$-tupel:

**D29:** $C^n := \lambda x \bigvee y_1 \ldots y_n(x = \langle y_1, \ldots, y_n \rangle)$.

Als $n$-stellige Relation bezeichnen wir dann eine Menge von $n$-tupeln:

**D30:** $R^n(r) := r \subset C^n$.

Für $\langle s_1, \ldots, s_n \rangle \varepsilon r$ schreiben wir auch $r(s_1, \ldots, s_n)$:

**D31:** $r(s_1, \ldots, s_n) := \langle s_1, \ldots, s_n \rangle \varepsilon r$.

Damit ist nun die Definierbarkeit der Relationen durch Klassen nachgewiesen: Ist $f(x_1, \ldots, x_n)$ eine $n$-stellige Beziehung, so ist $\lambda y \bigvee x_1 \ldots x_n(f(x_1, \ldots, x_n) \wedge y = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle)$ die zugehörige Relation, die wir in 5.1 als $\lambda x_1 \ldots x_n f(x_1, \ldots, x_n)$ geschrieben haben, und die Beziehung $x_1, \ldots, x_n \varepsilon f$ wird nun durch $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \varepsilon f$ ausgedrückt. Die Ausdrücke $\lambda x_1 \ldots x_n f(x_1, \ldots, x_n)$ und $x_1, \ldots, x_n \varepsilon f$ können wir dann als Abkürzungen der entsprechenden Ausdrücke von $\mathfrak{K}$ auffassen.

Es seien nun noch die Definitionen einiger weiterer mengentheoretischer Begriffe angegeben, die wir früher zur Präzisierung der Semantik verwendet hatten.

Als *Cartesisches Produkt* $a \times b$ zweier Mengen $a$ und $b$ bezeichnet man die Menge aller geordneten Paare, deren erstes Glied Element von $a$, deren zweites Glied Element von $b$ ist:

$$s \times t := \lambda z \bigvee xy(x \varepsilon s \wedge y \varepsilon t \wedge z = \langle x, y \rangle).$$

Das Cartesische Produkt der Mengen $\{a, b\}$ und $\{c, d\}$ ist demnach die Menge $\{\langle a, c \rangle, \langle a, d \rangle, \langle b, c \rangle, \langle b, d \rangle\}$.

Als $n$-te *Cartesische Potenz* einer Menge $a$ bezeichnet man dann das Produkt $a \times a \ldots \times a$ mit $n$ gleichen Faktoren. Es gilt also $C^2 = \mathsf{V} \times \mathsf{V}$.

Als *Potenzmenge* $P(a)$ einer Menge $a$ bezeichnet man die Menge aller Teilmengen von $a$:

$$P(s) := \lambda z(z \subset s).$$

Es gilt dann $\lambda z R^2(z) = P(\mathsf{V} \times \mathsf{V}) = P(C^2)$. Die Potenzmenge der Menge $\{a, b, c\}$ ist die Menge $\{\Lambda, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$.

Als *Vorbereich* einer zweistelligen Relation $r$ bezeichnet man die Menge der Erstglieder von Elementen von $r$, als *Nachbereich* die Menge der Zweitglieder von Elementen von $r$:

$D_1(\mathrm{r}) := \lambda x \bigvee y\, \mathrm{r}(x, y)$
$D_2(\mathrm{r}) := \lambda y \bigvee x\, \mathrm{r}(x, y)$.

Als *Feld* der Relation *r* bezeichnet man die Vereinigung ihres Vor- und Nachbereichs:

$F(\mathrm{r}) := D_1(\mathrm{r}) \cup D_2(\mathrm{r})$.

Der Vorbereich der Relation ‚*x* ist Elternteil von *y*' ist demnach die Menge der Eltern, der Nachbereich ist die Menge der Kinder und das Feld ist die Menge aller Menschen.

Zur Anwendung dieser Begriffe sollen nun noch einige einfache Eigenschaften zweistelliger Relationen betrachtet werden. Wir definieren:

$\mathit{Refl}(\mathrm{r}) := \bigwedge x(x \varepsilon F(\mathrm{r}) \supset \mathrm{r}(x, x))$ — r ist *reflexiv*
$\mathit{Trans}(\mathrm{r}) := \bigwedge xyz(\mathrm{r}(x, y) \wedge \mathrm{r}(y, z) \supset \mathrm{r}(x, z))$ — r ist *transitiv*.
$\mathit{Sym}(\mathrm{r}) := \bigwedge xy(\mathrm{r}(x, y) \supset \mathrm{r}(y, x))$ — r ist *symmetrisch*.

Es gilt dann:

$\mathit{Trans}(\mathrm{r}) \wedge \mathit{Sym}(\mathrm{r}) \supset \mathit{Refl}(\mathrm{r})$.

Beweis: Ist r symmetrisch, so gilt offenbar $D_1(\mathrm{r}) = D_2(\mathrm{r}) = F(\mathrm{r})$. Aus $x \varepsilon F(\mathrm{r})$ erhalten wir also: es gibt ein y, so daß r(x, y). Also gilt auch r(y, x), und wegen der Transitivität von r: $\mathrm{r}(x, y) \wedge \mathrm{r}(y, x) \supset \mathrm{r}(x, x)$, also r(x, x).

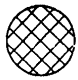
Eine transitive und symmetrische Relation nennt man eine *Äquivalenzrelation*:

$\mathit{Eq}(\mathrm{r}) := \mathit{Sym}(\mathrm{r}) \wedge \mathit{Trans}(\mathrm{r})$.

Als *Äquivalenzklassen* von *r* bezeichnet man Klassen solcher Elemente, die zueinander in der Beziehung *r* stehen. Ist *r* z. B. die Beziehung ‚gleichfarbig', so sind die Äquivalenzklassen von *r* die Klassen gleichfarbiger Dinge, also die Klasse der roten, die der grünen, die der blauen Dinge usw. Als Äquivalenzklasse des Objekts *a* bzgl. *r* bezeichnet man die Klasse der Dinge, die zu *a* in der *r*-Beziehung stehen:

$\mathit{Eqk}(\mathrm{s}, \mathrm{r}) := \lambda z\, \mathrm{r}(\mathrm{s}, z)$.

Wir sagen ferner, eine Menge $a$ von nichtleeren Mengen $a_i$ sei eine *Teilung* der Menge $b$ (in disjunkte Teilmengen), wenn jedes Element von $b$ in genau einer der Mengen $a_i$ enthalten ist. Im Diagramm sieht das so aus:



Dabei repräsentieren die Rauten und Rautenteile die Mengen $a_i$. Definiert man:

$$T(\mathrm{s}, \mathrm{t}) := \bigcup \mathrm{s} = \mathrm{t} \wedge \bigwedge \mathrm{x}(\mathrm{x}\varepsilon \mathrm{s} \supset \mathrm{x} \neq \Lambda) \wedge \bigwedge \mathrm{xy}(\mathrm{x}\varepsilon \mathrm{s} \wedge \mathrm{y}\varepsilon \mathrm{s} \wedge \mathrm{x} \neq \mathrm{y} \supset \mathrm{x} \cap \mathrm{y} = \Lambda),$$

so gilt der Satz, daß die Menge der Äquivalenzklassen von $r$ das Feld von $r$ teilt:

$$Eq(\mathrm{r}) \supset T(\lambda \mathrm{z} \bigvee \mathrm{x}(\mathrm{x}\varepsilon F(\mathrm{r}) \wedge \mathrm{z} = Eqk(\mathrm{x}, \mathrm{r})), F(\mathrm{r})).$$

Beweis: Wir setzen $\mathrm{c} := \lambda \mathrm{z} \bigvee \mathrm{x}(\mathrm{x}\varepsilon F(\mathrm{r}) \wedge \mathrm{z} = Eqk(\mathrm{x}, \mathrm{r}))$ und finden:

1) $\bigcup \mathrm{c} = F(\mathrm{r})$:

$$\begin{aligned} \mathrm{y}\varepsilon \bigcup \mathrm{c} &\equiv \bigvee \mathrm{z}(\mathrm{z}\varepsilon \mathrm{c} \wedge \mathrm{y}\varepsilon \mathrm{z}) \\ &\equiv \bigvee \mathrm{z}(\bigvee \mathrm{x}(\mathrm{x}\varepsilon F(\mathrm{r}) \wedge \mathrm{z} = Eqk(\mathrm{x}, \mathrm{r})) \wedge \mathrm{y}\varepsilon \mathrm{z}) \\ &\equiv \bigvee \mathrm{x}(\mathrm{x}\varepsilon F(\mathrm{r}) \wedge \mathrm{y}\varepsilon \lambda \mathrm{z}\mathrm{r}(\mathrm{x}, \mathrm{z})) \\ &\equiv \bigvee \mathrm{x}(\mathrm{x}\varepsilon F(\mathrm{r}) \wedge \mathrm{r}(\mathrm{x}, \mathrm{y})) \\ &\equiv \mathrm{y}\varepsilon D_2(\mathrm{r}) \\ &\equiv \mathrm{y}\varepsilon F(\mathrm{r}). \end{aligned}$$

Denn aus $Eq(\mathrm{r})$ folgt $Sym(\mathrm{r})$ und daraus $D_1(\mathrm{r}) = D_2(\mathrm{r}) = F(\mathrm{r})$. Mit A11 erhalten wir also $\bigcup \mathrm{c} = F(\mathrm{r})$.

2) $\mathrm{y}\varepsilon \mathrm{c} \supset \mathrm{y} \neq \Lambda$:

| | |
|---|---|
| $\mathrm{y}\varepsilon \mathrm{c}$ | |
| $\bigvee \mathrm{x}(\mathrm{x}\varepsilon F(\mathrm{r}) \wedge \mathrm{y} = Eqk(\mathrm{x}, \mathrm{r}))$. | Aus $Eq(\mathrm{r})$ folgt $Refl(\mathrm{r})$, also |
| $\bigwedge \mathrm{x}(\mathrm{x}\varepsilon F(\mathrm{r}) \supset \mathrm{r}(\mathrm{x}, \mathrm{x}))$, | also |
| $\bigvee \mathrm{x}(\mathrm{x}\varepsilon \mathrm{y})$ | und |
| $\mathrm{y} \neq \Lambda$. | |

3) $\mathrm{u}\varepsilon \mathrm{c} \wedge \mathrm{v}\varepsilon \mathrm{c} \wedge \mathrm{u} \neq \mathrm{v} \supset \mathrm{u} \cap \mathrm{v} = \Lambda$:

Aus

| | |
|---|---|
| $\mathrm{u}\varepsilon \mathrm{c} \wedge \mathrm{v}\varepsilon \mathrm{c} \wedge \mathrm{u} \neq \mathrm{v}$ | folgt: es gibt ein x und ein y mit $\mathrm{x} \neq \mathrm{y}$ und |
| $\mathrm{u} = Eqk(\mathrm{x}, \mathrm{r})$ | und |
| $\mathrm{v} = Eqk(\mathrm{y}, \mathrm{r})$. | |

Aus der Annahme

| | |
|---|---|
| 1) $u \cap v \neq \Lambda$ | folgt: es gibt ein z, so daß |
| $z \varepsilon u \land z \varepsilon v$, | also |
| $r(x, z) \land r(y, z)$, | wegen *Sym*(r) also |
| $r(x, z) \land r(z, y)$ | und mit *Trans*(r) |
| $r(x, y)$. | Damit gewinnen wir |

$z \varepsilon v \supset r(x, y) \land r(y, z) \supset r(x, z) \supset z \varepsilon u$ und

$z \varepsilon u \supset r(x, z) \supset r(z, x) \land r(x, y) \supset r(z, y) \supset r(y, z) \supset z \varepsilon v$, also

$z \varepsilon v \equiv z \varepsilon u$ und daher

$v = u$

im Widerspruch zur Annahme $u \neq v$. Die Annahme (1) muß also falsch sein. Es muß also gelten $u \cap v = \Lambda$, was zu beweisen war.

Als *Funktionen* bezeichnen wir wieder nacheindeutige Relationen. Wir definieren:

$N(r) := \Lambda xyz(r(x, y) \land r(x, z) \supset y = z)$ — r ist *nacheindeutig*

$\vec{r} := R^2(r) \land N(r)$ — r ist eine einstellige *Funktion.*

Der *Definitionsbereich* der Funktion r ist dann $D_1(r)$, der *Wertevorrat* $D_2(r)$. Setzen wir

$r^{-1} := \lambda x \mathsf{V} yz(x = \langle z, y\rangle \land r(y, z))$,

so besagt $N(r^{-1})$, daß r voreindeutig ist. Eine umkehrbar eindeutige Funktion wird also definiert durch

$\overleftrightarrow{r} := \vec{r} \land N(r^{-1})$.

Weitere Grundbegriffe zur Charakterisierung von Funktionen lassen sich dann wie folgt definieren:

$s\vec{r} := \vec{r} \land D_1(r) = s$ — r ist eine Funktion auf der Menge s.

$s\vec{r}t := s\vec{r} \land D_2(r) \subset t$ — r bildet die Menge s in die Menge t ab.

$s\overset{\to+}{r}t := s\vec{r} \land D_2(r) = t$ — r bildet die Menge s auf die Menge t ab.

$s\overleftrightarrow{r}t := \overleftrightarrow{r} \land s\overset{\to+}{r}t$ — r ist eine umkehrbar eindeutige Abbildung der Menge s auf die Menge t.

$r(s) := \iota x(\langle s, x\rangle \varepsilon r)$ — der Wert der Funktion r für das Argument s.

Man kann ferner die Begriffsbildungen aus 4.4 auf Relationen übertragen in der hier zugrunde gelegten Charakterisierung. Es geht dann die Definition D10 des Relationsprodukts über in

$$\mathrm{r} \circ \mathrm{f} := \lambda \mathrm{z} \vee \mathrm{xyu}(\mathrm{z} = \langle \mathrm{x}, \mathrm{y} \rangle \wedge \mathrm{r}(\mathrm{x}, \mathrm{u}) \wedge \mathrm{f}(\mathrm{u}, \mathrm{y})).$$

Und die Definition der Relationskette erster Art D13 geht über in

$$\mathrm{r}^{\geqslant 0} := \lambda \mathrm{z}' \vee \mathrm{xy}(\mathrm{z}' = \langle \mathrm{x}, \mathrm{y} \rangle \wedge \mathrm{x}\varepsilon \mathrm{F}(\mathrm{r}) \wedge \Lambda \mathrm{z}(\Lambda \mathrm{uv}(\mathrm{u}\varepsilon\mathrm{z} \wedge \mathrm{r}(\mathrm{u}, \mathrm{v}) \supset \mathrm{v}\varepsilon\mathrm{z}) \wedge \mathrm{x}\varepsilon\mathrm{z} \supset \mathrm{y}\varepsilon\mathrm{z})).$$

Allgemein lassen sich die Aussagen der P.L. 2. Stufe bei Ersetzung von Begriffen 1. Stufe durch ihre Umfänge übersetzen in Aussagen von $\mathfrak{K}$. Aus Aussagen über das Zutreffen eines Begriffes auf einen Gegenstand werden dabei Aussagen über die Zugehörigkeit eines Elements zu einer Klasse, aus Aussagen über alle Begriffe werden Aussagen über alle Klassen. Da Klassen Gegenstände sind, entfällt in dieser Übersetzung der kategoriale Unterschied zwischen Begriffen 1. Stufe und Objekten. Damit entfällt dann auch der Unterschied zwischen Begriffen 2. und 1. Stufe und allgemein der Unterschied zwischen Begriffen verschiedener Stufe.

In diesem Sinn enthält die Sprache $\mathfrak{K}$ die Ausdrucksmöglichkeiten der p.l. Sprachen. Sie enthält aber zusätzlich weitere Ausdrucksmöglichkeiten, da man in einem Allsatz Aussagen über beliebige Klassen, d. h. über Begriffe beliebiger Stellen- und Stufenzahl, machen kann. Insbesondere kann man auch vom Zutreffen oder Nichtzutreffen eines Begriffes auf sich selbst sprechen, denn $x \varepsilon x$ ist eine Formel von $\mathfrak{K}$, während $f(f)$ keine Formel der P.L. ist.

Die klassenlogischen Systeme sind die stärksten Logiksysteme. Wegen ihrer Anwendung zur Grundlegung der Mathematik rechnet man sie oft nicht mehr der Logik, sondern der Mathematik zu. Von traditionellen wie von systematischen Gesichtspunkten ist es aber wohl besser gerechtfertigt, die Theorie der Begriffsumfänge wie die Theorie der Begriffe selbst der Logik zuzurechnen.

*Übungsaufgaben:*

1. Beweise den Satz

$$T(\mathrm{s}, \mathrm{t}) \wedge \Lambda \mathrm{xy}(\mathrm{r}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \equiv \vee \mathrm{z}(\mathrm{z}\varepsilon\mathrm{s} \wedge \mathrm{x}\varepsilon\mathrm{z} \wedge \mathrm{y}\varepsilon\mathrm{z})) \supset Eq(\mathrm{r}) \wedge F(\mathrm{r}) = \mathrm{t}.$$

(Eine Teilung s der Menge t induziert auf t eine Äquivalenzrelation)

2. Beweise bei Zugrundelegung der angegebenen Definition für Relationsketten 1. Art $r^{\geqslant 0}$ im klassenlogischen Rahmen mit der Definition $r^{>0} := r \circ r^{\geqslant 0}$ die Theoreme T74, T75, T76 und T77!

## 5.4 Ein logisches Modell der Peanoaxiome

Als *Logizismus* bezeichnet man die Auffassung, nach der alle mathematischen Begriffe durch logische Begriffe definiert und alle mathematischen Sätze mit Hilfe dieser Definitionen als logische Theoreme bewiesen werden können. Danach besteht also kein wesentlicher Unterschied zwischen Logik und Mathematik, sondern nur ein praktischer Unterschied im Wissenschaftsbetrieb, insofern sich die Logiker vorwiegend mit Grundlagenfragen, die Mathematiker vorwiegend mit dem Aufbau komplexerer Theorien auf diesen Grundlagen beschäftigen. Im Gegensatz zur Auffassung KANTS haben in dieser Auffassung die Sätze der Mathematik nicht synthetischen sondern analytischen Charakter und man hat für die Mathematik kein eigenes Erkenntnisvermögen und keine eigenen synthetischen Grundprinzipien anzunehmen.

Diese These ist schon von LEIBNIZ vertreten worden. Es war aber FREGE, der sie zuerst genau formulierte[1] und der zuerst ein System der Klassenlogik aufbaute, das hinreichend stark war zu einer Umsetzung des logizistischen Programms in die Tat. Schon in seiner ersten logischen Arbeit, der *Begriffsschrift* zielte er auf die Begründung der Arithmetik ab, als er im Anhang den Grundbegriff der Reihenlehre, den Begriff der Relationskette einführte. In den *Grundlagen der Arithmetik* von 1884 und ausführlicher noch in den *Grundgesetzen der Arithmetik* von 1893 hat er dann eine exakte logische Begründung der Arithmetik angegeben. Unabhängig von ihm hat auch DEDEKIND 1887, allerdings ohne auf ein präzisiertes klassenlogisches System Bezug zu nehmen, auf ähnlichem Weg eine logische Definition der natürlichen Zahlen formuliert.

Da das Programm des Logizismus für die moderne gegenüber der traditionellen Logik charakteristisch ist — im Rahmen der Syllogistik, einem Teilsystem der elementaren P.L., kann man, wie BOOLE bemerkt hat, nicht einmal die logischen Schlußweisen darstellen, die in der Arithmetik gebraucht werden, geschweige denn die arithmetischen Grundbegriffe definieren — wollen wir hier dieses Programm am Beispiel der logischen Begründung der Arithmetik erläutern.

[1] Vgl. [17].

Wir haben im Abschnitt 4.5 gesehen, daß die Peanoaxiome die Reihe der natürlichen Zahlen vollständig charakterisieren. Die Aufgabe einer logischen Begründung der Arithmetik besteht also darin, für die Grundbegriffe dieser Axiome, für die Null, die Nachfolgerfunktion und für die Klasse der natürlichen Zahlen logische Definitionen, also Definitionen im Rahmen der klassenlogischen Sprache $\mathfrak{K}$ anzugeben und mit Hilfe dieser Definitionen die Peanoaxiome in **$\mathfrak{K}$1** zu beweisen.

Wenn wir früher die Peanoaxiome in der Sprache der P.L. formuliert haben, so müssen wir sie jetzt in die Sprache $\mathfrak{K}$ übersetzen. Da es nun auch darauf ankommt, die Klasse der natürlichen Zahlen selbst zu definieren, müssen wir eine Konstante, wir wählen „$N$", für diese Menge in die Axiome selbst einführen. Sie nehmen dann folgende Gestalt an:

**a1:** $0 \varepsilon N$
**a2:** $\bigwedge x(x\varepsilon N \supset x'\varepsilon N)$
**a3:** $\bigwedge xy(x\varepsilon N \wedge y\varepsilon N \wedge x' = y' \supset x = y)$
**a4:** $\bigwedge x(x\varepsilon N \supset x' \neq 0)$
**a5:** $\bigwedge z(0\varepsilon z \wedge \bigwedge x(x\varepsilon N \wedge x\varepsilon z \supset x'\varepsilon z) \supset \bigwedge x(x\varepsilon N \supset x\varepsilon z))$.

Der Einfachheit wegen geben wir nicht die Definitionen FREGES oder DEDEKINDS an, sondern die Definitionen, die auf J. v. NEUMANN zurückgehen. Danach setzt man:

1) $0 := \Lambda$
2) $s' := s \cup \{s\}$
3) $I(s) := 0\varepsilon s \wedge \bigwedge x(x\varepsilon s \supset x'\varepsilon s)$ (s ist eine *induktive Klasse*)
4) $N := \bigcap \lambda x I(x)$.

Man erhält dann folgende Zahlenreihe:

$0 = \Lambda$,
$1 := 0' = \Lambda \cup \{\Lambda\} = \{\Lambda\} = \{0\}$,
$2 := 1' = \{\Lambda\} \cup \{\{\Lambda\}\} = \{\Lambda, \{\Lambda\}\} = \{0, 1\}$,
$3 := 2' = \{\Lambda, \{\Lambda\}\} \cup \{\{\Lambda, \{\Lambda\}\}\} = \{\Lambda, \{\Lambda\}, \{\Lambda, \{\Lambda\}\}\} = \{0, 1, 2\}$, usf.

Wir beweisen nun die Peanoaxiome:

| | | |
|---|---|---|
| a1) | $\bigwedge x(I(x) \supset 0\varepsilon x)$ | (3) |
| | $0\varepsilon\lambda z \bigwedge x(I(x) \supset z\varepsilon x)$ | A10 |
| | $0\varepsilon N$ | (4), D24 |

| | | |
|---|---|---|
| a2) | $x\varepsilon N$ | AF |
| | $\wedge y(I(y) \supset x\varepsilon y)$ | (4), D24 |
| | $\wedge y(I(y) \supset (x\varepsilon y \supset x'\varepsilon y))$ | (3) |
| | $\wedge y(I(y) \supset x'\varepsilon y)$ | |
| | $x'\varepsilon N$ | (4), D24. |

Daraus erhält man mit MT4 und T38 a2.

| | | |
|---|---|---|
| a4) | $x\varepsilon\{x\}$ | D17 |
| | $x\varepsilon x \cup \{x\}$ | D19 |
| | $x\varepsilon x'$ | (2) |
| | $x' \neq \Lambda$ | D15 |
| | $x\varepsilon N \supset x' \neq \Lambda.$ | A1 |

Daraus erhält man a4 mit T38 und (1).

Die Beweise für a3 und a5 führen wir über die Hilfssätze:

HS1: $\wedge z(0\varepsilon z \wedge \wedge x(x\varepsilon z \supset x'\varepsilon z) \supset \wedge x(x\varepsilon N \supset x\varepsilon z))$.

(Dieser Satz enthält das sog. *schwache* Induktionsprinzip.)

Beweis:

| | |
|---|---|
| $0\varepsilon z \wedge \wedge x(x\varepsilon z \supset x'\varepsilon z)$ | AF |
| $I(z)$ | (3) |
| $x\varepsilon N \supset x\varepsilon z$ | T104, (4) |

Daraus erhält man mit T38 und MT4 die Behauptung.

HS2: $\wedge xy(x\varepsilon N \wedge y\varepsilon x \supset y \subset x)$.

Beweis: Wir setzen $a = \lambda x \wedge y(y\varepsilon x \supset y \subset x)$ und erhalten

α) $0\varepsilon a$: Denn $\wedge y(y\varepsilon\Lambda \supset y \subset \Lambda)$ folgt aus $\wedge y(\neg y\varepsilon\Lambda)$.

β) $\wedge x(x\varepsilon a \supset x'\varepsilon a)$:

| | |
|---|---|
| $x\varepsilon a$ | AF |
| $\wedge y(y\varepsilon x \supset y \subset x)$ | |
| $y\varepsilon x'$ | AF($\gamma$) |
| $y\varepsilon x \vee y = x$ | (2) |
| $y \subset x \vee y = x$ | |
| $y \subset x$ | |
| $y \subset x \cup \{x\}$ | |

| | |
|---|---|
| $y \subset x'$ | |
| $\bigwedge y(y\varepsilon x' \supset y \subset x')$ | MT4, $(\gamma)$, T38 |
| $x'\varepsilon a$. | |

Daraus erhält man mit MT4 und T38 die Behauptung $(\beta)$.

| | |
|---|---|
| $\bigwedge x(x\varepsilon N \supset x\varepsilon a)$ | $(\alpha)$, $(\beta)$, HS1 |
| $\bigwedge x(x\varepsilon N \supset \bigwedge y(y\varepsilon x \supset y \subset x))$ | |
| $\bigwedge xy(x\varepsilon N \wedge y\varepsilon x \supset y \subset x)$. | |

| | |
|---|---|
| a3) $x\varepsilon N \wedge y\varepsilon N \wedge x' = y'$ | AF$(\alpha)$ |
| $x\varepsilon x'$ | (2) |
| $x\varepsilon y'$ | $(\alpha)$, A11 |
| $x\varepsilon y \cup \{y\}$ | (2) |
| $x\varepsilon y \vee x = y$ | |
| $x \subset y$ | HS2, $(\alpha)$ |

Ebenso erhält man $y \subset x$ aus $y\varepsilon y'$, also

| | |
|---|---|
| $x \subset y \wedge y \subset x$ | also |
| $x = y$ | T102. |

Mit MT4 und T38 erhält man daraus a3.

a5) $0\varepsilon z \wedge \bigwedge x(x\varepsilon N \wedge x\varepsilon z \supset x'\varepsilon z)$ AF$(\gamma)$

Wir setzen $z^* := \lambda y(y\varepsilon N \wedge y\varepsilon z)$ und finden dann:

$\alpha$) $0\varepsilon z^*$: wegen $0\varepsilon N$ und $(\gamma)$.

$\beta$) $\bigwedge x(x\varepsilon z^* \supset x'\varepsilon z^*)$:

| | |
|---|---|
| $x\varepsilon z^*$ | AF |
| $x\varepsilon z \wedge x\varepsilon N$ | |
| $x'\varepsilon z$ | $(\gamma)$ |
| $x'\varepsilon N$ | a2 |
| $x'\varepsilon z^*$. | |

Mit MT4 und T38 erhält man daraus $(\beta)$.
Aus $(\gamma)$ folgt also wegen $(\alpha)$ und $(\beta)$ mit HS1

$\bigwedge x(x\varepsilon N \supset x\varepsilon z^*)$
$\bigwedge x(x\varepsilon N \supset x\varepsilon N \wedge x\varepsilon z)$
$\bigwedge x(x\varepsilon N \supset x\varepsilon z)$.

Mit MT4 und T38 erhält man daraus dann a5.

Damit sind die Peanoaxiome bewiesen und es ist gezeigt, daß sich die Arithmetik im Rahmen des Systems 𝔎1 begründen läßt. Insbesondere ist also nach den Definitionen (1) bis (4) das Induktionsprinzip, das oft als typisch mathematisches Prinzip angesehen wird, ein logisches Theorem.

Damit man mit den hier definierten Zahlen auch endliche Mengen zählen kann, wird man definieren: Die Anzahl einer Menge $a$ ist die natürliche Zahl $n$, wenn es eine ein eindeutige Abbildung von $a$ auf $n$ gibt, d. h. wenn gilt $\mathsf{V}r(a \overset{\leftrightarrow}{r} n)$.

Hat man einmal die natürlichen Zahlen definiert, so kann man, wie das aus der Mathematik geläufig ist, die ganzen, die rationalen, die reellen und die komplexen Zahlen im Rahmen der Klassenlogik definieren[1]. Tatsächlich kann man sagen, daß sich alle Begriffsbildungen der Mathematik im Rahmen des Systems 𝔎1 nachzeichnen lassen, daß 𝔎1 also eine ausreichende Basis für die logische Begründung der Mathematik liefert.

## 5.5 Das Problem der Geschlossenheit des Aufbaus der Logik

Im Zusammenhang mit den in den voraufgehenden Abschnitten entwickelten mengentheoretischen Begriffsbildungen und der Begründung des Induktionsprinzips wollen wir noch kurz auf einen Punkt eingehen, der von Bedeutung ist für die systematische Beurteilung des Aufbaus der Logik.

Wenn man die Sprache eines Logiksystems syntaktisch und semantisch aufbaut und einen Kalkül in dieser Sprache angibt, so muß man dazu eine bereits vorhandene Sprache, die Metasprache verwenden. Man benötigt aber nicht nur diese Sprache, sondern auch logische Hilfsmittel, wie etwa das Induktionsprinzip zum Beweis syntaktischer Metatheoreme und mengentheoretische Hilfsmittel beim Aufbau der Semantik. Es erhebt sich so die Frage, ob man, um eine präzise Logik aufbauen zu können, nicht immer schon eine präzise Logik voraussetzen muß.

[1] Vgl. dazu [46].

Tatsächlich ist aber die metatheoretisch verwendete Logik von der formalisierten Logik nicht gänzlich verschieden. Vielmehr wollen wir ja in formalisierten Systemen gerade die intuitive Logik, die wir auch metatheoretisch verwenden, präzisieren und die Präzisierung bleibt nicht ohne Rückwirkung auf die metatheoretisch verwendeten Schlußweisen. So kann man z.B. die p.l. Schlußweisen, die in der Semantik von $\mathfrak{P}$ verwendet werden, im Kalkül $\mathfrak{P}1$ auf ihre Gültigkeit hin prüfen und man wird nur solche Schlußweisen zulassen, die sich auch im Kalkül rechtfertigen lassen.

In dieser Hinsicht wäre ein Logiksystem $\mathfrak{N}$ besonders befriedigend, in dessen Metatheorie man nur solche logischen Hilfsmittel benützen müßte, die in $\mathfrak{N}$ selbst präzisiert sind, ein System also, in dem man seine eigene Metatheorie formalisieren könnte. Wir wollen nun den Aufbau eines Logiksystems $\mathfrak{N}$ *geschlossen* nennen, wenn sich die Metatheorie von $\mathfrak{N}$ im Rahmen von $\mathfrak{N}$ formalisieren läßt. Dabei wären naturgemäß die Sprachschichten weiterhin zu unterscheiden und zusätzliche Konstanten einzuführen, als Namen z. B. für die Grundzeichen der Sprache von $\mathfrak{N}$ (der Objektsprache) und für die Konkatenationsfunktion. Man könnte dann nachträglich die metatheoretischen Schlußweisen, die man beim Aufbau von $\mathfrak{N}$ verwendet hat, überprüfen und im Rahmen der objektsprachlich präzisierten Logik rechtfertigen und sich damit überzeugen, daß man beim Aufbau von $\mathfrak{N}$ nichts vorausgesetzt hat, was man nicht in $\mathfrak{N}$ selbst präzisiert hat. Damit wäre dann in einer exemplarischen Weise der Einwand beseitigt, die in $\mathfrak{N}$ formalisierte Logik hätte Voraussetzungen, die sie selbst nicht kontrollieren und präzisieren kann.

Man könnte etwa daran denken, $\mathfrak{K}1$ als einen solchen Logikkalkül anzusehen, dessen Aufbau in sich geschlossen ist. Ein solches Resultat wäre aber wegen der Inkonsistenz dieses Kalküls, auf die wir unten zu sprechen kommen, ohne Wert.

Im allgemeinen werden nicht alle Begriffsbildungen und Schlußweisen der Metatheorie eines Kalküls $\mathfrak{N}$ sich in $\mathfrak{N}$ selbst nachvollziehen lassen. So haben wir in der Metatheorie der A.L. und der P.L. vom Induktionsprinzip und von mengentheoretischen Begriffen Gebrauch gemacht, die sich p.l. nicht rechtfertigen lassen. Und es gibt metamathematische Resultate, wie etwa das zweite GÖDELsche Theorem in [27], welche die Vermutung nahelegen, daß generell die metalogischen Hilfsmittel, wie sie etwa in Vollständigkeits-, Entscheidbarkeits- und Widerspruchsfreiheitsbeweisen für einen Kalkül $\mathfrak{N}$

benötigt werden, stärker sein müssen, als die in $\mathfrak{N}$ zur Verfügung stehenden logischen Hilfsmittel. Auch bei einer solchen Sachlage kann man aber von einem Zirkel oder einem unendlichen Regreß im Aufbau der Logik nicht sprechen. Denn es ist eine Erfahrung, die sich auch für die Kalküle $\mathfrak{A}1$ und $\mathfrak{P}1$ bestätigt, daß man für den Aufbau eines Logiksystems $\mathfrak{N}$ keinesfalls eine volle Präzisierung der metatheoretischen Hilfsmittel benötigt, wie sie sich etwa nur durch ihre Formalisierung erreichen ließe, sondern daß ein gewisses intuitives Verständnis dieser Mittel ausreicht. Prinzipiell ist eine Vertiefung dieses intuitiven Verständnisses durch eine Formalisierung der Metatheorie auch immer möglich, jedoch ist diese Formalisierung keine Voraussetzung zum Verständnis der Formalisierung von $\mathfrak{N}$[1].

Eine Präzisierung der mengentheoretischen Hilfsmittel der p.l. Semantik ist so etwa im Rahmen des klassentheoretischen Systems $\mathfrak{K}1$ möglich. Als Beispiel dafür wollen wir nun den Beweis der Sätze (1) und (2) der Anmerkung 1 zu S. 138 angeben. Dabei verwenden wir in der Metasprache die objektsprachliche logische Symbolik, ohne freilich eine volle Formalisierung anzustreben, die ja u. a. eine genaue formale Definition der syntaktischen Begriffe, wie der Begriffe ‚Formel', ‚freie Einsetzung', usw. voraussetzen würde[2]. Das Beispiel wird aber zeigen, wie hilfreich eine solche partielle Formalisierung für komplexere semantische Begriffsbildungen bereits ist.

Verwenden wir $a$, $b$ als metasprachliche Variable für Objekte des Grundbereichs der Interpretation $\mathfrak{B}$, so lautet die in der fraglichen Anmerkung angegebene Definition

---

[1] Daß in der Begründung der Logik kein Zirkel vorliegt, hat auch Frege hervorgehoben:

„Unmöglich, sagt man, kann durch eine Begriffsschrift die Wissenschaft gefördert werden; denn die Erfindung der ersteren setzt die Vollendung der letzteren schon voraus. Ganz dieselbe Scheinschwierigkeit erhebt sich schon bei der Sprache. Diese soll die Entwicklung der Vernunft möglich gemacht haben; aber wie konnte der Mensch die Sprache schaffen ohne Vernunft? Zur Erforschung der Naturgesetze dienen die physikalischen Apparate; diese können nur durch eine fortgeschrittene Technik hervorgebracht werden, welche wieder auf der Kenntnis der Naturgesetze fußt. Der Kreis löst sich in allen Fällen auf die gleiche Weise. Ein Fortschritt in der Physik hat einen solchen in der Technik zur Folge, und dieser macht es möglich, neue Apparate zu bauen, mittels deren wieder die Physik gefördert wird. Die Anwendung auf unseren Fall ergibt sich von selbst." ([15], S. 55).

[2] Zur Definition solcher syntaktischer Begriffe vgl. [58] und [42].

$\mathfrak{B}(A[\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_n]) = \lambda a_1\ldots a_n \bigvee \overline{\mathfrak{B}}(\overline{\mathfrak{B}} \underset{x_1,\ldots,x_n}{=} \mathfrak{B} \wedge \overline{\mathfrak{B}}(x_1) = a_1 \wedge \ldots \wedge$
$\overline{\mathfrak{B}}(x_n) = a_n \wedge \overline{\mathfrak{B}}(A[x_1,\ldots,x_n]) = \mathfrak{w})$.

Diese Klasse ist identisch mit

$\lambda a_1\ldots a_n \bigwedge \overline{\mathfrak{B}}(\overline{\mathfrak{B}} \underset{x_1,\ldots,x_n}{=} \mathfrak{B} \wedge \overline{\mathfrak{B}}(x_1) = a_1 \wedge \ldots \wedge \overline{\mathfrak{B}}(x_n) = a_n \supset \overline{\mathfrak{B}}(A[x_1,\ldots,x_n])$
$= \mathfrak{w})$,

denn zu einer vorgegebenen Interpretation $\mathfrak{B}$ und vorgegebenen $a_1,\ldots,a_n$ gibt es genau eine Interpretation $\overline{\mathfrak{B}}$, für die gilt: $\overline{\mathfrak{B}} \underset{x_1,\ldots,x_n}{=} \mathfrak{B} \wedge \overline{\mathfrak{B}}(x_1) = a_1 \wedge \ldots \wedge \overline{\mathfrak{B}}(x_n) = a_n$, so daß man das Theorem T59 anwenden kann. Den Satz, der die Identität der beiden Klassen ausspricht, wollen wir durch (I) bezeichnen.

Wir beweisen nun den Satz (1): Ist f eine $n$-stellige PV, so gilt $\mathfrak{B}(f) = \mathfrak{B}(f(\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_n))$.

Beweis:

$\mathfrak{B}(f(\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_n)) = \lambda a_1\ldots a_n \bigvee \overline{\mathfrak{B}}(\overline{\mathfrak{B}} \underset{x_1,\ldots,x_n}{=} \mathfrak{B} \wedge \overline{\mathfrak{B}}(x_1) = a_1 \wedge \ldots \wedge \overline{\mathfrak{B}}(x_n) = a_n$
$\wedge\ \overline{\mathfrak{B}}(f(x_1,\ldots,x_n)) = \mathfrak{w}) = \lambda a_1\ldots a_n \bigvee \overline{\mathfrak{B}}(\overline{\mathfrak{B}} \underset{x_1,\ldots,x_n}{=} \mathfrak{B} \wedge \overline{\mathfrak{B}}(x_1) = a_1 \wedge \ldots \wedge$
$\overline{\mathfrak{B}}(x_n) = a_n \wedge \overline{\mathfrak{B}}(x_1),\ldots,\overline{\mathfrak{B}}(x_n)\varepsilon\mathfrak{B}(f)) = \lambda a_1\ldots a_n(a_1,\ldots,a_n\varepsilon\mathfrak{B}(f)) = \mathfrak{B}(f)$.

Wir kommen nun zum Beweis des Satzes

(2): $\mathfrak{B}(A[x_1/y_1,\ldots,x_n/y_n]) = \mathfrak{w} \equiv \mathfrak{B}(y_1),\ldots,\mathfrak{B}(y_n)\varepsilon\mathfrak{B}(A[\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_n])$.

Der Beweis geschieht durch Induktion nach dem Grad $g$ der Formel A.

a) $g = 0$: $\mathfrak{B}(f(y_1,\ldots,y_n)) = \mathfrak{w} \equiv \mathfrak{B}(y_1),\ldots,\mathfrak{B}(y_n)\varepsilon\mathfrak{B}(f)$
$\equiv \mathfrak{B}(y_1),\ldots,\mathfrak{B}(y_n)\varepsilon\mathfrak{B}(f(\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_n))$,

nach (1).

b) Die Behauptung (2) sei für alle $g \leqslant m$ bewiesen. Die Formel A sei nun vom Grad $g = m + 1$.

b1) A habe die Gestalt $\neg B[x_1,\ldots,x_n]$. Dann gilt:

$\mathfrak{B}(\neg B[x_1/y_1,\ldots,x_n/y_n]) = \mathfrak{w} \equiv \mathfrak{B}(B[x_1/y_1,\ldots,x_n/y_n]) = \mathfrak{f}$
$\equiv \neg\mathfrak{B}(y_1),\ldots,\mathfrak{B}(y_n)\varepsilon\mathfrak{B}(B[\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_n])$ nach Induktionsvoraussetzung
$\equiv \neg\mathfrak{B}(y_1),\ldots,\mathfrak{B}(y_n)\varepsilon\lambda a_1\ldots a_n \bigvee \overline{\mathfrak{B}}(\overline{\mathfrak{B}} \underset{x_1,\ldots,x_n}{=} \mathfrak{B} \wedge \overline{\mathfrak{B}}(x_1) = a_1 \wedge \ldots \wedge$
$\overline{\mathfrak{B}}(x_n) = a_n \wedge \overline{\mathfrak{B}}(B[x_1,\ldots,x_n]) = \mathfrak{w})$

$$
\begin{aligned}
&\equiv \mathfrak{B}(y_1),\ldots,\mathfrak{B}(y_n)\varepsilon\lambda a_1\ldots a_n \bigwedge\overline{\mathfrak{B}}(\overline{\mathfrak{B}} \underset{x_1,\ldots,x_n}{=} \mathfrak{B} \wedge \overline{\mathfrak{B}}(x_1) = a_1 \wedge \ldots \wedge \\
&\quad \overline{\mathfrak{B}}(x_n) = a_n \supset \neg\overline{\mathfrak{B}}(B[x_1,\ldots,x_n]) = \mathfrak{w}) \\
&\equiv \mathfrak{B}(y_1),\ldots,\mathfrak{B}(y_n)\varepsilon\lambda a_1\ldots a_n \bigwedge\overline{\mathfrak{B}}(\overline{\mathfrak{B}} \underset{x_1,\ldots,x_n}{=} \mathfrak{B} \wedge \overline{\mathfrak{B}}(x_1) = a_1 \wedge \ldots \wedge \\
&\quad \overline{\mathfrak{B}}(x_n) = a_n \supset \overline{\mathfrak{B}}(\neg B[x_1,\ldots,x_n]) = \mathfrak{w}) \\
&\equiv \mathfrak{B}(y_1),\ldots,\mathfrak{B}(y_n)\varepsilon\mathfrak{B}(\neg B[\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_n]), \quad \text{wegen (I).}
\end{aligned}
$$

b2) A habe die Gestalt $B[x_1,\ldots,x_n] \wedge C[x_1,\ldots,x_n]$. Da neben $\{\neg, \supset\}$ auch $\{\neg, \wedge\}$ ein komplettes a.l. Operatorensystem ist[1], können wir auch diesen Fall anstelle von $A = B[x_1,\ldots,x_n] \supset C[x_1,\ldots,x_n]$ betrachten.

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{B}(B[x_1/y_1,\ldots,x_n/y_n] \wedge C[x_1/y_1,\ldots,x_n/y_n]) = \mathfrak{w} \\
&\equiv \mathfrak{B}(B[x_1/y_1,\ldots,x_n/y_n]) = \mathfrak{w} \wedge \mathfrak{B}(C[x_1/y_1,\ldots,x_n/y_n]) = \mathfrak{w} \\
&\equiv \mathfrak{B}(y_1),\ldots,\mathfrak{B}(y_n)\varepsilon\mathfrak{B}(B[\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_n]) \cap \mathfrak{B}(C[\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}]) \text{ nach Induktions-} \\
&\quad \text{voraussetzung} \\
&\equiv \mathfrak{B}(y_1),\ldots,\mathfrak{B}(y_n)\varepsilon\lambda a_1\ldots a_n \bigvee\overline{\mathfrak{B}}(\overline{\mathfrak{B}} \underset{x_1,\ldots,x_n}{=} \mathfrak{B} \wedge \overline{\mathfrak{B}}(x_1) = a_1 \wedge \ldots \wedge \\
&\quad \overline{\mathfrak{B}}(x_n) = a_n \wedge \overline{\mathfrak{B}}(B(x_1,\ldots,x_n]) = \mathfrak{w} \wedge \overline{\mathfrak{B}}(C[x_1,\ldots,x_n]) = \mathfrak{w}) \\
&\equiv \mathfrak{B}(y_1),\ldots,\mathfrak{B}(y_n)\varepsilon\lambda a_1\ldots a_n \bigvee\overline{\mathfrak{B}}(\overline{\mathfrak{B}} \underset{x_1,\ldots,x_n}{=} \mathfrak{B} \wedge \overline{\mathfrak{B}}(x_1) = a_1 \wedge \ldots \wedge \\
&\quad \overline{\mathfrak{B}}(x_n) = a_n \wedge \overline{\mathfrak{B}}(B[x_1,\ldots,x_n] \wedge C[x_1,\ldots,x_n]) = \mathfrak{w}) \\
&\equiv \mathfrak{B}(y_1),\ldots,\mathfrak{B}(y_n)\varepsilon\mathfrak{B}(B[\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_n] \wedge C[\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_n]).
\end{aligned}
$$

b3) A habe die Gestalt $\bigwedge z B[z, x_1,\ldots,x_n]$. Dabei sei z von $x_1,\ldots,x_n$ und von $y_1,\ldots,y_n$ verschieden.

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{B}(\bigwedge z B[z, x_1/y_1,\ldots,x_n/y_n]) = \mathfrak{w} \equiv \bigwedge\mathfrak{B}'(\mathfrak{B}' \underset{z}{=} \mathfrak{B} \supset \mathfrak{B}'(B[z, x_1/y_1,\ldots,x_n/y_n]) \\
&\quad = \mathfrak{w}) \\
&\equiv \bigwedge\mathfrak{B}'(\mathfrak{B}' \underset{z}{=} \mathfrak{B} \supset \mathfrak{B}'(y_1),\ldots,\mathfrak{B}'(y_n)\varepsilon\mathfrak{B}'(B[z, \hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_n])) \text{ nach Induktions-} \\
&\quad \text{voraussetzung} \\
&\equiv \bigwedge\mathfrak{B}'(\mathfrak{B}' \underset{z}{=} \mathfrak{B} \supset \bigwedge\overline{\mathfrak{B}}(\overline{\mathfrak{B}} \underset{x_1,\ldots,x_n}{=} \mathfrak{B}' \wedge \overline{\mathfrak{B}}(x_1) = \mathfrak{B}'(y_1) \wedge \ldots \wedge \overline{\mathfrak{B}}(x_n) = \mathfrak{B}'(y_n) \\
&\quad \supset \overline{\mathfrak{B}}(B[z, x_1,\ldots,x_n]) = \mathfrak{w})) \text{ nach (I)} \\
&\equiv \bigwedge\mathfrak{B}'\overline{\mathfrak{B}}(\overline{\mathfrak{B}} \underset{x_1,\ldots,x_n}{=} \mathfrak{B}' \wedge \overline{\mathfrak{B}}(x_1) = \mathfrak{B}(y_1) \wedge \ldots \wedge \overline{\mathfrak{B}}(x_n) = \mathfrak{B}(y_n) \wedge \mathfrak{B}' \underset{z}{=} \mathfrak{B} \supset \\
&\quad \overline{\mathfrak{B}}(B[z, x_1,\ldots,x_n]) = \mathfrak{w}) \\
&\equiv \bigwedge\mathfrak{B}''\overline{\mathfrak{B}}(\mathfrak{B}'' \underset{x_1,\ldots,x_n}{=} \mathfrak{B} \wedge \mathfrak{B}''(x_1) = \mathfrak{B}(y_1) \wedge \ldots \wedge \mathfrak{B}''(x_n) = \mathfrak{B}(y_n) \wedge \overline{\mathfrak{B}} \underset{z}{=} \mathfrak{B}'' \\
&\quad \supset \overline{\mathfrak{B}}(B[z, x_1,\ldots,x_n]) = \mathfrak{w}).
\end{aligned}
$$

---

[1] Vgl. 1.2.3.

Nennt man den vorletzten Satz ($\alpha$), den letzten ($\beta$), so sieht man diese Äquivalenz wie folgt ein: Ist ($\alpha$) falsch, so gibt es ein $\mathfrak{B}'$ und ein $\overline{\mathfrak{B}}$, so daß $\overline{\mathfrak{B}} \underset{x_1,\ldots,x_n}{=} \mathfrak{B}' \wedge \overline{\mathfrak{B}}(x_1) = \mathfrak{B}(y_1) \wedge \ldots \wedge \overline{\mathfrak{B}}(x_n) = \mathfrak{B}(y_n) \wedge \mathfrak{B}' \underset{z}{=} \mathfrak{B} \wedge \overline{\mathfrak{B}}(B[z, x_1, \ldots, x_n]) = \mathfrak{f}$. Setzt man nun $\mathfrak{B}'' \underset{z}{=} \overline{\mathfrak{B}}$ und $\mathfrak{B}''(z) = \mathfrak{B}(z)$, so erhält man $\mathfrak{B}'' \underset{x_1,\ldots,x_n}{=} \mathfrak{B}$ aus $\mathfrak{B}'' \underset{z}{=} \overline{\mathfrak{B}}$, $\overline{\mathfrak{B}} \underset{x_1,\ldots,x_n}{=} \mathfrak{B}'$, $\mathfrak{B}' \underset{z}{=} \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}''(z) = \mathfrak{B}(z)$; ferner $\mathfrak{B}''(x_i) = \mathfrak{B}(y_i)$ für $i = 1, \ldots, n$ aus $\mathfrak{B}'' \underset{z}{=} \overline{\mathfrak{B}}$, $\overline{\mathfrak{B}}(x_i) = \mathfrak{B}(y_i)$ und $z \neq x_i$; und endlich $\mathfrak{B} \underset{z}{=} \mathfrak{B}''$ nach Definition von $\mathfrak{B}''$. Es gilt dann also $\mathfrak{B}'' \underset{x_1,\ldots,x_n}{=} \mathfrak{B} \wedge \mathfrak{B}''(x_1) = \mathfrak{B}(y_1) \wedge \ldots \wedge \mathfrak{B}''(x_n) = \mathfrak{B}(y_n) \wedge \overline{\mathfrak{B}} \underset{z}{=} \mathfrak{B}'' \wedge \overline{\mathfrak{B}}(B[z, x_1, \ldots, x_n]) = \mathfrak{f}$, und daher ist auch ($\beta$) falsch.

Ist umgekehrt ($\beta$) falsch, so gibt es ein $\overline{\mathfrak{B}}$ und ein $\mathfrak{B}''$, so daß gilt: $\mathfrak{B}'' \underset{x_1,\ldots,x_n}{=} \mathfrak{B} \wedge \mathfrak{B}''(x_1) = \mathfrak{B}(y_1) \wedge \ldots \wedge \mathfrak{B}''(x_n) = \mathfrak{B}(y_n) \wedge \overline{\mathfrak{B}} \underset{z}{=} \mathfrak{B}'' \wedge \overline{\mathfrak{B}}(B[z, x_1, \ldots, x_n]) = \mathfrak{f}$. Setzt man nun $\mathfrak{B}' \underset{z}{=} \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}'(z) = \overline{\mathfrak{B}}(z)$, so erhält man $\overline{\mathfrak{B}} \underset{x_1,\ldots,x_n}{=} \mathfrak{B}'$ aus $\overline{\mathfrak{B}} \underset{z}{=} \mathfrak{B}''$, $\mathfrak{B}'' \underset{x_1,\ldots,x_n}{=} \mathfrak{B}$, $\mathfrak{B} \underset{z}{=} \mathfrak{B}'$ und $\overline{\mathfrak{B}}(z) = \mathfrak{B}'(z)$; ferner $\overline{\mathfrak{B}}(x_i) = \mathfrak{B}(y_i)$ aus $\overline{\mathfrak{B}} \underset{z}{=} \mathfrak{B}''$, $\mathfrak{B}''(x_i) = \mathfrak{B}(y_i)$ und $x_i \neq z$; und endlich $\mathfrak{B}' \underset{z}{=} \mathfrak{B}$ nach Definition von $\mathfrak{B}'$. Es gilt dann also $\overline{\mathfrak{B}} \underset{x_1,\ldots,x_n}{=} \mathfrak{B}' \wedge \overline{\mathfrak{B}}(x_1) = \mathfrak{B}(y_1) \wedge \ldots \wedge \overline{\mathfrak{B}}(x_n) = \mathfrak{B}(y_n) \wedge \mathfrak{B}' \underset{z}{=} \mathfrak{B} \wedge \overline{\mathfrak{B}}(B[z, x_1, \ldots, x_n]) = \mathfrak{f}$, und daher ist auch ($\alpha$) falsch.

Es gilt nun weiterhin:

$$
\begin{aligned}
(\beta) \equiv\ & \Lambda\mathfrak{B}''(\mathfrak{B}'' \underset{x_1,\ldots,x_n}{=} \mathfrak{B} \wedge \mathfrak{B}''(x_1) = \mathfrak{B}(y_1) \wedge \ldots \wedge \mathfrak{B}''(x_n) = \mathfrak{B}(y_n) \\
& \supset \Lambda\overline{\mathfrak{B}}(\overline{\mathfrak{B}} \underset{z}{=} \mathfrak{B}'' \supset \overline{\mathfrak{B}}(B[z, x_1, \ldots, x_n]) = \mathfrak{w})) \\
\equiv\ & \Lambda\mathfrak{B}''(\mathfrak{B}'' \underset{x_1,\ldots,x_n}{=} \mathfrak{B} \wedge \mathfrak{B}''(x_1) = \mathfrak{B}(y_1) \wedge \ldots \wedge \mathfrak{B}''(x_n) = \mathfrak{B}(y_n) \\
& \supset \mathfrak{B}''(\Lambda z B[z, x_1, \ldots, x_n]) = \mathfrak{w}) \\
\equiv\ & \mathfrak{B}(y_1), \ldots, \mathfrak{B}(y_n) \varepsilon \lambda a_1 \ldots a_n \mathrm{V}\mathfrak{B}''(\mathfrak{B}'' \underset{x_1,\ldots,x_n}{=} \mathfrak{B} \wedge \mathfrak{B}''(x_1) = a_1 \\
& \wedge \ldots \wedge \mathfrak{B}''(x_n) = a_n \wedge \mathfrak{B}''(\Lambda z B[z, x_1, \ldots, x_n]) = \mathfrak{w}) \text{ nach (I)} \\
\equiv\ & \mathfrak{B}(y_1), \ldots, \mathfrak{B}(y_n) \varepsilon \mathfrak{B}(\Lambda z B[z, \hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n]).
\end{aligned}
$$

Damit ist der Beweis für Satz (2) erbracht.

## 5.6 Die logischen Antinomien

Der Aufbau der Logik, wie wir ihn in diesem Buch dargestellt haben, ist in wesentlichen Punkten eine Leistung FREGES. Er hat in der *Begriffsschrift* zuerst ein vollständiges System der elementaren P.L. angegeben und ein System der P.L. 2. Stufe, das mit $\mathfrak{P}_2 1$ gleichwertig ist. Er hat in den *Grundgesetzen der Arithmetik* auch das erste System der Klassenlogik formuliert, das über den Rahmen der Klassenalgebra hinausgeht. Er hat in diesem System endlich die Grundlagen der Arithmetik und der Analysis entwickelt und damit die entscheidenden Schritte zur Verwirklichung des logizistischen Programms getan. Dabei ist FREGES Logiksystem, das er in abschließender Form im 1. Band der *Grundgesetze* dargestellt hat, durch eingehende, scharfsinnige inhaltlich-logische Untersuchungen fundiert und der syntaktische und deduktive Apparat ist in einer bis dahin ungeahnten Präzision entwickelt worden. Nur in der Präzisierung der Semantik ist die spätere Entwicklung der klassischen Logik wesentlich über FREGE hinausgegangen.

Wenn man sich diese große schöpferische Tat FREGES vor Augen hält und die Leistungsfähigkeit seiner Logik, auf deren Grundlage sich die gesamte Mathematik entwickeln läßt, so erscheint es als nur zu berechtigt, wenn FREGE in der Einleitung zum 1. Band der *Grundgesetze* sagt:

„Es ist von vornherein unwahrscheinlich, daß ein solcher Bau sich auf einem unsicheren, fehlerhaften Grunde aufführen lassen sollte... Und nur das würde ich als Widerlegung anerkennen können, wenn jemand durch die Tat zeigte, daß auf anderen Grundüberzeugungen ein besseres, haltbareres Gebäude errichtet werden könnte, oder wenn jemand mir nachwiese, daß meine Grundsätze zu offenbar falschen Folgesätzen führten. Aber das wird keinem gelingen[1]."

Und doch lesen wir schon im Anhang zum 2. Band des gleichen Werkes die Sätze:

„Einem wissenschaftlichen Schriftsteller kann kaum etwas Unerwünschteres begegnen, als daß ihm nach Vollendung einer Arbeit eine der Grundlagen seines Baues erschüttert wird. In diese Lage wurde ich durch einen Brief des Herrn BERTRAND RUSSELL versetzt, als der Druck dieses Bandes sich seinem Ende näherte[2]."

Dieser Brief RUSSELLS an FREGE — datiert vom 16. 6. 1902 — enthält die Konstruktion der Antinomie, die als RUSSELL*sche Antinomie* in die Literatur eingegangen ist.

Man betrachtet die Menge $a$ aller Mengen, die nicht Element von sich selbst sind. Solche Mengen gibt es sicherlich und tatsächlich

---

[1] [18], Bd. I, S. XXVI.

[2] [18], Bd. II, S. 253.

scheinen die meisten Mengen von dieser Art zu sein, wie z. B. die Nullmenge, die Einermenge der Nullmenge, die Menge der natürlichen Zahlen, usf. Es gibt aber auch Mengen, wie die Allmenge, die sich selbst als Element enthalten. Man fragt nun: ist die Menge $a$ Element von sich selbst oder nicht? Ist $a$ Element von sich selbst, so ist $a$ nach der Definition dieser Menge eine Menge, die sich selbst nicht als Element enthält. Es gilt also: Ist $a$ Element von $a$, so ist $a$ nicht Element von $a$. Also ist $a$ nicht Element von $a$ (vgl. T10). Ist nun aber $a$ nicht Element von $a$, so ist $a$ nach der Definition dieser Menge keine Menge, die sich selbst nicht enthält, d. h. $a$ enthält sich selbst als Element (T11). Wir erhalten also den Widerspruch: $a$ ist Element von $a$ und $a$ ist nicht Element von $a$.

Formal nimmt diese Konstruktion in $\mathfrak{K}1$ folgende Gestalt an: $\neg x\varepsilon x$ ist eine Formel von $\mathfrak{K}$, also ist $\lambda x(\neg x\varepsilon x)$ ein Term von $\mathfrak{K}$, also ist $\lambda x(\neg x\varepsilon x)\varepsilon\lambda x(\neg x\varepsilon x)$ eine Formel von $\mathfrak{K}$ und wir finden mit A10: $\lambda x(\neg x\varepsilon x)\varepsilon\lambda x(\neg x\varepsilon x) \equiv \neg\lambda x(\neg x\varepsilon x)\varepsilon\lambda x(\neg x\varepsilon x)$. Wir können also in $\mathfrak{K}1$ eine Formel der Gestalt $\mathrm{A} \equiv \neg\mathrm{A}$ beweisen. Nun gilt aber in $\mathfrak{K}1$ $\mathrm{A} \equiv \neg\mathrm{A} \vdash \mathrm{B}$ für beliebige Formeln B. Denn es gilt:

| | |
|---|---|
| $\mathrm{A} \equiv \neg\mathrm{A}$ | AF |
| $\mathrm{A} \supset \neg\mathrm{A}$ | D3, T21 |
| $\neg\mathrm{A}$ | T10 |
| $\neg\mathrm{A} \supset \mathrm{A}$ | D3, T22 |
| $\mathrm{A}$ | T11 |
| $\neg\mathrm{A} \supset (\mathrm{A} \supset \mathrm{B})$ | T2 |
| $\mathrm{B}$ | R1 |

Damit ist also in $\mathfrak{K}1$ jede Formel von $\mathfrak{K}$ beweisbar, sei sie wahr oder falsch. $\mathfrak{K}1$ ist also widerspruchsvoll im denkbar schärfsten Sinne und ist zur Auszeichnung der wahren Sätze der Klassenlogik nicht brauchbar.

Das ist nun aber keine spezielle Eigenschaft des Kalküls $\mathfrak{K}1$. Denn bei der Ableitung des Widerspruchs haben wir weder A11 noch A12 verwendet, sondern als einziges nichtelementares Axiom A10, das mit dem Komprehensionsprinzip gleichwertig ist[1]. Dieses Prinzip ist aber

[1] Mit dem Komprehensionsprinzip (K) erhält man den Widerspruch so:

$\bigvee y \bigwedge x(x\varepsilon y \equiv \neg x\varepsilon x)$
$\bigvee y(y\varepsilon y \equiv \neg y\varepsilon y)$
$\bigvee y(y\varepsilon y \wedge \neg y\varepsilon y)$.

bei der Auffassung der Klassen als Begriffsumfänge sicherlich gültig. Die Antinomie erweist also nicht nur einen speziellen Kalkül der Klassenlogik als widerspruchsvoll, sondern sie zeigt, daß die Grundlagen der klassischen Logik selbst nicht haltbar sind. Daher bewirkte die Entdeckung der Antinomie von RUSSELL eine tiefgreifende Grundlagenkrise dieser Logik, und damit auch eine Krise der auf den gleichen Grundlagen aufbauenden Mathematik.

So wird es verständlich, wenn FREGE in seinem Antwortbrief an RUSSELL vom 22. 6. 1902 schreibt:

„Ihre Entdeckung des Widerspruchs hat mich aufs höchste überrascht, fast möchte ich sagen bestürzt, weil dadurch der Grund, auf dem ich die Arithmetik aufzubauen gedachte, ins Wanken gerät... (Die Sache) ist um so ernster, als (dadurch)... nicht nur die Grundlagen meiner Arithmetik, sondern die einzig mögliche Grundlage der Arithmetik überhaupt zu verschwinden scheint."

FREGE hat im Anhang zum 2. Band der Grundgesetze noch in aller Eile einen Vorschlag für die Beseitigung der Antinomie von RUSSELL entworfen, der darauf beruht, daß das Abstraktionsprinzip abgeschwächt wird. Dieser Vorschlag ist aber intuitiv sehr unbefriedigend und schwächt das System so, daß sich die Existenz zweier verschiedener Klassen nicht mehr beweisen läßt. Später haben LEŚNIEWSKI und QUINE gezeigt, daß bei der Annahme der Existenz zweier verschiedener Klassen im modifizierten System erneut ein Widerspruch auftritt[1]. FREGE selbst hat seinen Lösungsvorschlag auch nicht aufrecht erhalten und ist später nie mehr auf ihn zurückgekommen.

Die Tragweite des Antinomienproblems und die Revisionsbedürftigkeit der Grundlagen der klassischen Logik wird noch deutlicher, wenn man bedenkt, daß die Antinomie von RUSSELL keineswegs die einzige Antinomie der klassischen Logik ist, sondern daß es eine ganze Reihe weiterer Antinomien gibt. Schon CANTOR hatte 1895 und 1899 vor RUSSELL zwei Antinomien gefunden, die nach ihm benannte Antinomie der größten Kardinalzahl und die Antinomie der größten Ordinalzahl, die nach BURALI-FORTI benannt wird, der sie zuerst veröffentlichte. In Ermangelung eines exakten Systems der Mengenlehre hat CANTOR diesen Widersprüchen aber keine grundsätzliche Bedeutung zugemessen

[1] Vgl. [69] und [57].

und sich bei der etwas vagen Vorstellung begnügt, nicht alle Klassen ließen sich als Gegenstände auffassen[1].

Da die Darstellung der Antinomien von CANTOR und BURALI-FORTI zu umfangreiche Vorbereitungen erfordern würde, geben wir hier noch einige einfachere logische Antinomien an, um einen Eindruck zu vermitteln von den vielfältigen Konstruktionsmöglichkeiten für Antinomien.

Die Antinomie von QUINE[2] erhält man wie folgt: Man definiert $a := \lambda x \neg \bigvee y(x\varepsilon y \wedge y\varepsilon x)$ und findet dann

| | | |
|---|---|---|
| 1) | $a\varepsilon a \equiv \neg\bigvee y(a\varepsilon y \wedge y\varepsilon a)$ | A11, A10 |
| 2) | $a\varepsilon a$ | AF |
| | $\neg\bigvee y(a\varepsilon y \wedge y\varepsilon a)$ | (1) |
| | $\bigwedge y(a\varepsilon y \supset \neg y\varepsilon a)$ | T46, T27, D1 |
| | $a\varepsilon a \supset \neg a\varepsilon a$ | A4 |
| | $\neg a\varepsilon a$ | (2), R1 |
| | $a\varepsilon a \supset \neg a\varepsilon a$ | MT4, (2) |
| 3) | $\neg a\varepsilon a$ | T10 |
| | $a\varepsilon z \wedge z\varepsilon a$ | AF |
| 4) | $a\varepsilon z$ | T21 |
| 5) | $z\varepsilon a$ | T22 |
| | $\neg\bigvee y(z\varepsilon y \wedge y\varepsilon z)$ | (1) |
| | $\bigwedge y(z\varepsilon y \supset \neg y\varepsilon z)$ | T46, T27, D1 |
| | $z\varepsilon a \supset \neg a\varepsilon z$ | A4 |
| | $\neg a\varepsilon z$ | (5), R1 |
| | $a\varepsilon z \wedge \neg a\varepsilon z$ | T23, (4) |
| | $a\varepsilon a$ | T2, T23, R1. |

Es gilt also $a\varepsilon z \wedge z\varepsilon a \vdash a\varepsilon a$, nach MT4, T44, R1 also $\bigvee y(a\varepsilon y \wedge y\varepsilon a) \vdash a\varepsilon a$, nach (3) und (1) also $a\varepsilon a$. Daraus erhält man aber mit (3) und T23 $a\varepsilon a \wedge \neg a\varepsilon a$.

Ebenso kann man für beliebige $n$ definieren

$b := \lambda x \neg\bigvee y_1 \ldots y_n(x\varepsilon y_1 \wedge y_1\varepsilon y_2 \wedge \ldots \wedge y_n\varepsilon x)$ und erhält dann $b\varepsilon b \wedge \neg b\varepsilon b$.

---

[1] Vgl. dazu [13]. Die Vorstellungen CANTORS sind erst später von J. v. NEUMANN präzisiert worden.

[2] Vgl. [58], S. 128 f.

Einige weitere einfache logische Antinomien sind in [2] von BARTLETT angegeben worden:

Definiert man $a := \lambda x \bigvee y(x = \{y\} \wedge \neg x\varepsilon y)$, so erhält man

| | |
|---|---|
| $x\varepsilon a \equiv \bigvee y(x = \{y\} \wedge \neg x\varepsilon y)$ | A11, A10 |
| $\{a\}\varepsilon a \equiv \bigvee y(\{a\} = \{y\} \wedge \neg\{a\}\varepsilon y)$ | wegen $\{a\} = \{y\} \supset a = y$ also |
| $\{a\}\varepsilon a \equiv \neg\{a\}\varepsilon a$ | und daher |
| $\{a\}\varepsilon a \wedge \neg\{a\}\varepsilon a.$ | |

Auf die gleiche Weise erhält man mit den Definitionen

$a' := \lambda x \bigvee y(x = \overline{\{y\}} \wedge \neg x\varepsilon y)$,
$a'' := \lambda x \bigvee y(x = \lambda z(y\varepsilon z) \wedge \neg x\varepsilon y)$ und
$a''' := \lambda x \bigvee y(x = \overline{\lambda z(y\varepsilon z)} \wedge \neg x\varepsilon y)$
die Widersprüche
$\overline{\{a'\}}\varepsilon a' \wedge \neg\overline{\{a'\}}\varepsilon a'$,
$\lambda z(a''\varepsilon z)\varepsilon a'' \wedge \neg\lambda z(a''\varepsilon z)\varepsilon a''$ und
$\overline{\lambda z(a'''\varepsilon z)}\varepsilon a''' \wedge \neg\overline{\lambda z(a'''\varepsilon z)}\varepsilon a'''$ [1].

Neben den *logischen* Antinomien, die sich im System $\mathfrak{K}1$ konstruieren lassen, gibt es auch noch *semantische* Antinomien, die auftreten, wenn man in die Objektsprache auch Namen für Ausdrücke der Objektsprache aufnimmt und semantische Prädikate, wie das Wahrheitsprädikat oder die Namensrelation. So erhält man die Antinomie von GRELLING, wenn man die Eigenschaft betrachtet, die ein einstelliges Prädikat genau dann hat, wenn die Eigenschaft, die es bezeichnet, auf es selbst zutrifft. Man nennt diese Eigenschaft auch *heterologisch*. Danach sind z. B. die Prädikate „einsilbig“ und „rund“ heterologisch, weil diese Worte nicht einsilbig bzw. rund sind, und die Prädikate „dreisilbig“ und „kurz“ sind nicht heterologisch, weil diese Ausdrücke dreisilbig bzw. kurz sind. Ist nun das Prädikat „heterologisch“ heterologisch oder nicht? Ist „heterologisch“ heterologisch, so bezeichnet dieses Prädikat laut Definition einen Begriff, der nicht auf dies Prädikat

---

[1] Dabei benötigt man den Satz $\lambda z(x\varepsilon z) = \lambda z(y\varepsilon z) \supset x = y$, den man wie folgt gewinnen kann:

| | |
|---|---|
| $\lambda z(x\varepsilon z) = \lambda z(y\varepsilon z)$ | AF |
| $\bigwedge z(x\varepsilon z \equiv y\varepsilon z)$ | A11, A10 |
| $x\varepsilon\{x\} \equiv y\varepsilon\{x\}$ | A4 |
| $y = x$ | D17. |

zutrifft, d. h. „heterologisch" ist nicht heterologisch. Ist aber „heterologisch" nicht heterologisch, so bezeichnet dieses Prädikat einen Begriff, der auf es selbst zutrifft, d. h. „heterologisch" ist heterologisch. Wir erhalten so den Widerspruch: „heterologisch" ist heterologisch und „heterologisch" ist nicht heterologisch.

Schreibt man für „$x$ ist ein Ausdruck, der den Begriff $f$ bezeichnet" „$N(x, f)$" und kürzt man das Prädikat „heterologisch" durch „$H$" ab, so stellt sich diese Antinomie wie folgt dar:

$$H(x) := \bigvee f(N(x, f) \wedge \neg f(x)).$$

Damit erhält man

$$H(„H") \equiv \bigvee f(N(„H", f) \wedge \neg f(„H")).$$

Aus $N(„H", f)$ folgt aber mit $N(„H", H)$ und der Eindeutigkeit der Bezeichnungen $f = H$, also

$$H(„H") \equiv \neg H(„H")$$

und damit

$$H(„H") \wedge \neg H(„H")$$[1].

Solche semantischen Antinomien sind einerseits zwar bedeutungsvoll, weil sie schon im Rahmen schwächerer Logiksysteme, wie z. B. in $\mathfrak{P}1$ und $\mathfrak{P}_2 1$ auftreten, andererseits werden sie aber durch eine strenge Trennung der Sprachschichten vermieden, nach der semantische Prädikate und Namen für Ausdrücke einer Sprache $S$ immer nur der von $S$ zu unterscheidenden Metasprache von $S$ angehören und nicht $S$ selbst[2]. Die semantischen Antinomien sind deshalb nicht von unmittelbarer Relevanz für die Logik und können aus der Diskussion des Antinomienproblems weitgehend ausgeklammert werden.

Die logischen Antinomien aber stellen zwangsläufig die Aufgabe, die Grundlagen der klassischen Logik einer Kritik zu unterziehen, die dann in die Aufstellung eines neuen Logiksystems münden muß, in dem die Antinomien nicht mehr auftreten — wünschenswert wäre ein Widerspruchsfreiheitsbeweis für dieses System — und das hinreichend leistungsfähig ist zur Entwicklung der Grundlagen der Mathematik.

---

[1] Für die Darstellung weiterer Antinomien vgl. [44].

[2] Das hat zuerst A. Tarski hervorgehoben, vgl. [75].

Die gesamte klassische Mathematik kann ein widerspruchsfreies System natürlich nicht liefern, es sollte aber die wesentlichen, insbesondere die für die Anwendungen der Mathematik in den Naturwissenschaften wesentlichen Teile der Mathematik liefern.

Wenn FREGE in dem oben zitierten Brief an RUSSELL weiterhin schreibt:

„Jedenfalls ist Ihre Entdeckung sehr merkwürdig und wird vielleicht einen großen Fortschritt in der Logik zur Folge haben, so unerwünscht sie auf den ersten Blick auch scheinen mag",

so hat sich diese Vermutung durch die nachfolgende Entwicklung der Logik voll bestätigt. Nach der Jahrhundertwende hat eine überaus fruchtbare logische Grundlagendiskussion eingesetzt, die bis heute andauert, und die eine ganze Reihe interessanter Systemkonstruktionen hervorgebracht hat. Die wichtigsten dieser Systeme sind

1. die Systeme der *axiomatischen Mengenlehre,* in denen, wie man vereinfachend sagen kann, das Komprehensionsaxiom durch eine Reihe von Spezialfällen dieses Axioms ersetzt wird, die zusammen ausreichen, die Grundlagen der Mathematik zu gewinnen[1],

2. die Systeme der *Typentheorie,* in denen im Bereich der Klassen eine ähnliche kategoriale Stufenunterscheidung durchgeführt wird, wie wir sie im Abschnitt 4.1 für Begriffe betrachtet haben (man unterscheidet dann Individuen von Klassen von Individuen, diese von Klassen von Klassen von Individuen usw. und verbietet die Aussageformen $x \varepsilon y$, wo $x$ eine Klasse von höherer oder gleicher Stufe wie $y$ ist)[2],

3. Systeme, in denen nicht nur die klassische Mengenlehre, sondern auch die klassische elementare Logik abgeändert wird. Hier ist insbesondere die *intuitionistische Logik* hervorzuheben, sowie das typenfreie System von ACKERMANN[3].

Wir können hier auf diese Systeme, die jeweils eine eigene ausführliche Darstellung erfordern, nicht näher eingehen. Material für ein weiteres Studium findet der Leser in der angegebenen Literatur. Eine eingehendere Behandlung der klassischen Mengenlehre findet sich in [12] und [28].

---

[1] Vgl. dazu [13] und [77].
[2] Vgl. dazu [64].
[3] Vgl. dazu [36] und [64].

Man wird sich nun vielleicht fragen, warum in diesem Buch die klassische Logik dargestellt wurde, wenn diese Logik doch widerspruchsvoll ist. Dazu ist zweierlei zu sagen: Einmal ist der Hauptgegenstand dieses Buches die elementaıe Logik, die auch in der klassischen Version widerspruchsfrei ist, und die auch in den weitaus meisten Anwendungen in dieser Version verwendet wird. Zum anderen ist auch die Kenntnis der klassischen Mengenlehre Voraussetzung für das Verständnis der verschiedenen Systeme der axiomatischen oder typentheoretischen Klassenlogik. Eine Vertrautheit mit der klassischen Logik ist also die erste Voraussetzung für eine Beschäftigung mit der modernen Logik und ihre Darstellung ist daher die erste Aufgabe eines einführenden Buches, wie des vorliegenden.

# 6 Einige Themen aus der Geschichte der Logik

In diesem Kapitel sollen drei logische Theorien zur Darstellung kommen, die auch vom historischen Gesichtspunkt aus interessant sind und geeignet scheinen, drei Entwicklungsstadien der Logik etwas näher zu beleuchten. Für eine eingehende und kontinuierliche Darstellung der Geschichte der Logik müssen wir den Leser auf die einschlägige Literatur verweisen [1]. Da uns auch jetzt das systematische Interesse leitet, werden wir bei der Formulierung der folgenden Theorien weniger auf historische Treue, als auf systematische Durchsichtigkeit achten und daher auch die Mittel der modernen Logik zur Darstellung heranziehen.

## 6.1 Die aristotelische Syllogistik

Das Kernstück der aristotelischen Logik und das erste Logiksystem überhaupt ist die *Syllogistik*, die ARISTOTELES im Buch A der ersten Analytiken entwickelt hat[2]. Es handelt sich dabei, modern gesprochen, um ein Teilsystem der monadischen P.L., einer P.L. also, in der nur einstellige PV vorkommen.

### 6.1.1 Aussage- und Schlußformen

In der Syllogistik werden nur Aussagen der folgenden vier Formen betrachtet:

Alle S sind P (allgemein bejahende Sätze) — symbolisch S*a*P,
Einige S sind P (partikulär bejahende Sätze) — symbolisch S*i*P,

---

[1] Vgl. [5], [43] und [62].

[2] Für eine historisch getreue Darstellung der Syllogistik vgl. [50] und [54].

Kein S ist P (allgemein verneinende Sätze) — symbolisch S*e*P,
Einige S sind nicht P (partikulär verneinende Sätze) — symbolisch S*o*P.

S und P sind dabei einstellige PV. Die PV S bezeichnet den sog. Subjekts-, die PV P den sog. Prädikatsbegriff.

In der modernen Symbolik sind diese vier Aussageformen wiederzugeben als $\Lambda x(S(x) \supset P(x))$, $\mathrm{V}x(S(x) \wedge P(x))$, $\Lambda x(S(x) \supset \neg P(x))$ und $\mathrm{V}x(S(x) \wedge \neg P(x))$. Die Syllogistik betrachtet nun im Gegensatz zur modernen P.L. nur Begriffe, deren Umfang weder mit der Nullmenge, noch mit der Allmenge zusammenfällt. Es gilt also das Postulat

E) Für alle betrachteten Begriffe $f$ gilt $\mathrm{V}xf(x) \wedge \mathrm{V}x\neg f(x)$.

Wo in den folgenden Ableitungen von diesem Postulat Gebrauch gemacht wird, werden wir besonders darauf hinweisen.

Die Syllogistik betrachtet ferner nur Schlüsse mit zwei Prämissen und einer Konklusion, in denen alle Sätze eine der vier oben angegebenen Formen haben und in denen die Prämissen eine gemeinsame PV M enthalten, die den sog. *Mittelbegriff* bezeichnet. Die Konklusion enthält dann die beiden übrigen PV der Prämissen. Wenn man Punkte für die Symbole *a*, *i*, *e*, *o* schreibt, so gelangt man dann zu folgenden vier Schlußfiguren:

$$\text{I)}\quad \begin{array}{c} M\cdot P \\ S\cdot M \\ \hline S\cdot P \end{array} \qquad \text{II)}\quad \begin{array}{c} P\cdot M \\ S\cdot M \\ \hline S\cdot P \end{array} \qquad \text{III)}\quad \begin{array}{c} M\cdot P \\ M\cdot S \\ \hline S\cdot P \end{array} \qquad \text{IV)}\quad \begin{array}{c} P\cdot M \\ M\cdot S \\ \hline S\cdot P \end{array}$$

Aus diesen vier Figuren lassen sich die übrigen möglichen Figuren durch Umbenennung der PV und Prämissenvertauschung gewinnen, durch Operationen also, auf die es für die logische Struktur der Schlüsse nicht ankommt und die auch in der Syllogistik als zulässig vorausgesetzt werden.

Die Syllogistik ist nun die Theorie solcher Schlüsse und ihre Theoreme sind die logisch gültigen unter diesen Schlüssen, d.h. die Schlüsse, für die gilt: alle Interpretationen der PV S, M, P, die beide Prämissen erfüllen, erfüllen auch die Konklusion. Daß ARISTOTELES diesen mit seiner modernen Definition übereinstimmenden Begriff der logischen Gültigkeit zugrundelegte, geht aus seinem Widerlegungsverfahren für die logische Gültigkeit hervor, nach dem man eine Interpretation der PV anzugeben hat, die beide Prämissen, aber nicht die Konklusion erfüllt [1].

[1] Vgl. dazu den Abschnitt 6.1.3.

### 6.1.2 Die gültigen Schlußformen

Setzt man in den vier Schlußfiguren für jeden Punkt eines der drei Symbole *a, i, e, o* ein, so erhält man in jeder Figur $4^3 = 64$ mögliche Schlußformen oder *Modi,* zusammen also 256 mögliche Schlußformen. Die Syllogistik lehrt nun, daß von ihnen genau 24 logisch gültige Schlußformen darstellen. Zur Bezeichnung dieser gültigen Modi hat man mnemotechnische Kunstausdrücke eingeführt [1]. Schon die Wahl der Buchstaben *a, i, e, o* hat einen mnemotechnischen Grund: *a* und *i* sind die beiden Stammvokale von *affirmo* (ich bejahe), *e* und *o* die Vokale von *nego* (ich verneine). Zur Bezeichnung der Schlußmodi wählt man dann dreisilbige Wörter, die mit den Vokalen *a, i, e, o* gebildet sind und so die Aussageformen der Prämissen und der Konklusion bezeichnen.

Man erhält dann folgende Tabelle der gültigen Schlußformen:

| I | II | III | IV |
|---|---|---|---|
| *barbara*<br>*celarent*<br>*darii*<br>*ferio* | *cesare*<br>*camestres*<br>*festino*<br>*baroco* | *datisi*<br>*disamis*<br>*ferison*<br>*bocardo*<br>*darapti*<br>*felapton* | *calemes*<br>*dimatis*<br>*fresison*<br>*fesapo* |
| *barbari*<br>*celaront* | *cesaro*<br>*camestros* | | *bamalip*<br>*calemos* |

Die Modi unter dem Strich bezeichnet man aus einem Grund, der später noch deutlich werden wird, als *subalterne* Modi.

Zur Verdeutlichung der Bezeichnungsweise dieser Kunstworte geben wir zwei Beispiele an:

*celarent* ist ein Modus der ersten Figur. Man erhält diesen Schluß also, wenn man in I für die drei Punkte in Prämissen und Konklusion die Symbole *e, a, e* in dieser Reihenfolge einsetzt:

[1] Die mnemotechnischen Ausdrücke gehen auf die Scholastik zurück und werden PETRUS HISPANUS (1210—1277) zugeschrieben.

$$\frac{\begin{array}{c}\mathrm{M}e\mathrm{P}\\ \mathrm{S}a\mathrm{M}\end{array}}{\mathrm{S}e\mathrm{P}.}$$

*darapti* ist ein Modus der dritten Figur. Man hat also in III für die drei Punkte die Symbole $a, a, i$ einzusetzen und erhält so

$$\frac{\begin{array}{c}\mathrm{M}a\mathrm{P}\\ \mathrm{M}a\mathrm{S}\end{array}}{\mathrm{S}i\mathrm{P}.}$$

Zur Begründung der 24 gültigen Schlußformen nimmt ARISTOTELES zunächst die vier ersten Modi der ersten Figur, die sog. vollkommenen Modi als Grundschlüsse an und leitet die übrigen mit Hilfe der folgenden Regeln aus ihnen ab[1]:

**R1:** $\mathrm{S}e\mathrm{P} \vdash \mathrm{P}e\mathrm{S}$ — $\bigwedge x(S(x) \supset \neg P(x)) \vdash \bigwedge x(P(x) \supset \neg S(x))$.

**R2:** $\mathrm{S}i\mathrm{P} \vdash \mathrm{P}i\mathrm{S}$ — $\bigvee x(S(x) \wedge P(x)) \vdash \bigvee x(P(x) \wedge S(x))$.

**R3:** $\mathrm{S}a\mathrm{P} \vdash \mathrm{S}i\mathrm{P}$ — $\bigwedge x(S(x) \supset P(x)) \vdash \bigvee x(S(x) \wedge P(x))$ — hier benötigt man das Axiom $\bigvee x S(x)$, vgl. (E).

**R4:** $\mathrm{S}e\mathrm{P} \vdash \mathrm{S}o\mathrm{P}$ — $\bigwedge x(S(x) \supset \neg P(x)) \vdash \bigvee x(S(x) \wedge \neg P(x))$ — auch hier benötigt man das Axiom $\bigvee x S(x)$, vgl. (E).

**R5:** Aus dem Schluß $\dfrac{\begin{array}{c}A\\ \mathrm{S}a\mathrm{P}\end{array}}{\mathrm{S}'a\mathrm{P}'}$ kann man den Schluß $\dfrac{\begin{array}{c}A\\ \mathrm{S}'o\mathrm{P}'\end{array}}{\mathrm{S}o\mathrm{P}}$ gewinnen.

— Aus A, $\bigwedge x(S(x) \supset P(x)) \vdash \bigwedge x(S'(x) \supset P'(x))$ folgt A, $\neg\bigwedge x(S'(x) \supset P'(x)) \vdash \neg\bigwedge x(S(x) \supset P(x))$, wegen $\neg\bigwedge x(f(x) \supset g(x)) \equiv \bigvee x(f(x) \wedge \neg g(x))$ also A, $\bigvee x(S'(x) \wedge \neg P'(x)) \vdash \bigvee x(S(x) \wedge \neg P(x))$.

Die Regeln R1, R2 bezeichnet man als *Konversionsregeln*, R3, R4 als *Abschwächungs-* oder *Subalternationsregeln*. Wir geben nun die Ableitung der unvollkommenen aus den vollkommenen Modi an. Die mnemotechnischen Ausdrücke sind so gewählt, daß die Anfangsbuchstaben der unvollkommenen Modi mit den Anfangsbuchstaben derjenigen vollkommenen Modi übereinstimmen, aus denen sie abgeleitet werden können. Im folgenden bedeute (f/g) die Operation der Umbenennung der PV f in die PV g.

---

[1] Die Bezeichnung „vollkommene Modi" rührt daher, daß ARISTOTELES diese Schlußformen als in besonderer Weise evident ansah und daher als Grundschlußregeln wählte. Eine Begründung dafür gibt PATZIG in [54].

Aus *barbara* erhalten wir:

*baroco* mit (M/P, P/M) und R5,
*bocardo* mit (S/M, M/S) und R5,
*bamalip* mit (S/P, P/S) und R3, R2,
*barbari* mit R3.

Aus *celarent* erhalten wir:

*cesare* mit R1,
*camestres* mit (S/P, P/S) und R1,
*calemes* mit (S/P, P/S) und R1,
*celaront* mit R4,
*cesaro* mit R1, R4,
*camestros* mit (S/P, P/S) und R4, R1,
*calemos* mit (S/P, P/S) und R1, R4.

Aus *darii* erhalten wir:

*darapti* mit R3, R2,
*datisi* mit R2,
*disamis* mit (S/P, P/S) und R2,
*dimatis* mit R2.

Aus *ferio* erhalten wir:

*festino* mit R1,
*feriso* mit R2,
*felapton* mit R3, R2,
*fresison* mit R1, R2,
*fesapo* mit R1, R3, R2.

Läßt man das Postulat (E) fallen, so gelten die Regeln R3 und R4 nicht und damit fallen die subalternen Modi und die Modi *darapti, felapton, fesapo* fort[1].

Aristoteles hat auch Regeln angegeben, die es ermöglichen, die Modi *celarent, darii* und *ferio* aus *barbara* abzuleiten. Es handelt sich dabei um die sog. Regeln der *Ekthesis*:

[1] Die vollkommenen Modi gelten auch ohne Benützung des Postulats (E), wie man sich leicht klarmacht. Daher gelten auch alle Modi, die oben aus ihnen ohne die Regeln R3, R4 abgeleitet worden sind, unabhängig von (E).

**R6a:** Es gibt ein N, so daß gilt S$i$P $\vdash$ N$a$S und S$i$P $\vdash$ N$a$P.
**R6b:** N$a$S, N$a$P $\vdash$ S$i$P.
**R7a:** Es gibt ein N, so daß gilt S$o$P $\vdash$ N$a$S und S$o$P $\vdash$ N$e$P.
**R7b:** N$a$S, N$e$P $\vdash$ S$o$P.

R6a ist zulässig, weil man für N das Prädikat $S \wedge P$ setzen kann, und die Einsetzung von $S \wedge \neg P$ für N erweist die Zulässigkeit von R7a. Es gilt ja $\bigwedge x(S(x) \wedge P(x) \supset S(x))$, $\bigwedge x(S(x) \wedge P(x) \supset P(x))$, $\bigwedge x(S(x) \wedge \neg P(x) \supset S(x))$ und $\bigwedge x(S(x) \wedge \neg P(x) \supset \neg P(x))$. Die Regeln R6b und R7b sind zulässig unter der Voraussetzung (E), denn es gilt

$$\bigvee xN(x) \wedge \bigwedge x(N(x) \supset S(x)) \wedge \bigwedge x(N(x) \supset P(x)) \supset \bigvee x(S(x) \wedge P(x)) \text{ und}$$
$$\bigvee xN(x) \wedge \bigwedge x(N(x) \supset S(x)) \wedge \bigwedge x(N(x) \supset \neg P(x)) \supset \bigvee x(S(x) \wedge \neg P(x)).$$

Ferner verwenden wir noch die Regel

**R8:** Aus dem Schluß $\dfrac{\begin{array}{c}\mathrm{A}\\ \mathrm{S}i\mathrm{P}\end{array}}{\mathrm{S'}i\mathrm{P'}}$ kann man den Schluß $\dfrac{\begin{array}{c}\mathrm{A}\\ \mathrm{S'}e\mathrm{P'}\end{array}}{\mathrm{S}e\mathrm{P}}$ gewinnen. — Aus A, $\bigvee x(S(x) \wedge P(x)) \vdash \bigvee x(S'(x) \wedge P'(x))$ folgt A, $\neg\bigvee x(S'(x) \wedge P'(x)) \vdash \neg\bigvee x(S(x) \wedge P(x))$, mit $\neg\bigvee x(f(x) \wedge g(x)) \equiv \bigwedge x(f(x) \supset \neg g(x))$ also A, $\bigwedge x(S'(x) \supset \neg P'(x)) \vdash \bigwedge x(S(x) \supset \neg P(x))$.

Man erhält dann aus *barbara*:

*darii* mit (S/N) und R6a, R6b,

aus *darii*:

*celarent* mit (S/P, P/M, M/S) und R8, R1,

aus *celarent*:

*ferio* mit (S/N) und R6a, R1, (P/M), R7b[1].

Man erhält nun auch:

---

[1] Diese Ableitung der Modi *celarent*, *darii* und *ferio* mit Hilfe der Regeln 6b und 7b ist nicht ganz befriedigend, da für die Gültigkeit dieser Regeln, nicht aber für die Gültigkeit der Modi das Postulat (E) vorausgesetzt werden muß.

*darapti* mit R6b, (N/M),
*felapton* mit R7b, (N/M) und
*fesapo* mit R7b, R1, (N/M).

Diese Modi, die oben mit R3 bewiesen worden waren, lassen sich also auch ohne Benutzung der Abschwächungsregeln gewinnen.

Der Modus *barbara* ist nun umkehrbar, in dem Sinn, daß aus S*a*P folgt: es gibt ein M, so daß gilt M*a*P und S*a*M. Denn man kann für M ja S setzen. Auch die übrigen starken, d. h. nicht subalternen Modi erweisen sich als umkehrbar in diesem Sinn. Das erkennt man mit Hilfe der Regeln R6a, R7a für die Modi mit *i*- und *o*-Konklusion (in *baroco* setzt man P für M), sowie der Umkehrbarkeit von *celarent* (man setze S für M) für die Modi mit *e*-Konklusion, wobei auch die Regeln R1 bis R4 berücksichtigt werden. Damit ist die Auszeichnung dieser Modi vor den nicht umkehrbaren subalternen Modi gerechtfertigt.

Die hier dargestellte aristotelische Methode der Ableitung der gültigen Modi ist zwar, vom modernen Standpunkt aus gesehen, nicht sehr elegant, sie zeigt aber doch, daß die aristotelische Logik bereits eine sehr ausgeprägte deduktive Technik entwickelt hat. Wie zuerst A. DE MORGAN hervorgehoben hat, gelangt man zu einer sehr viel eleganteren Ableitung der Modi, wenn man S, M, P als Klassenvariablen auffaßt, *a*, *i*, *e*, *o* als zweistellige Relationen und die Syllogistik als Theorie der Relationsprodukte abhandelt[1].

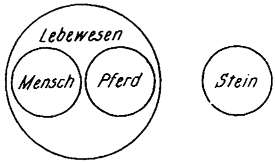
### 6.1.3 Die ungültigen Schlußformen

Von den 256 möglichen Schlußformen sind 232 nicht logisch gültig. Das wird in der aristotelischen Logik bewiesen durch Angabe von Interpretationen, die beide Prämissen erfüllen, aber nicht die Konklusion. Auch dazu hat die Syllogistik eine interessante Systematik entwickelt, die wir nun darstellen wollen.

Man kann zunächst zeigen, daß 7 Prämissenpaare nicht schlüssig sind, d. h. daß aus ihnen keine Aussage der Form S*a*P, S*i*P, S*e*P oder S*o*P logisch folgt. Wegen R3 und R4 genügt es zu zeigen, daß aus ihnen keine Aussage S*i*P oder S*o*P folgt. Dazu kann man nach ARISTOTELES Interpretationen der PV S, M, P durch die Begriffe ‚Lebewesen',

[1] Vgl. dazu die Darstellung in [47].

,Mensch', ,Pferd' und ,Stein' wählen, deren Einschlußverhältnisse durch folgendes Diagramm dargestellt werden:




Die folgende Tabelle enthält in der ersten Spalte die 7 unschlüssigen Prämissenpaare, in der zweiten Spalte die negierten Konklusionen $\neg SoP \equiv SaP$ und $\neg SiP \equiv SeP$. Die folgenden Spalten geben an, welche Interpretationen für S, M, P zu wählen sind, damit die Prämissen und die negierte Konklusion erfüllt sind:

| | Prämissen | negierte Konklusion | S | M | P |
|---|---|---|---|---|---|
| a) | S*a*M, P*a*M | S*a*P | Mensch | Lebewesen | Lebewesen |
| | | S*e*P | Mensch | Lebewesen | Pferd |
| b) | S*a*M, M*o*P | S*a*P | Mensch | Lebewesen | Mensch |
| | | S*e*P | Mensch | Lebewesen | Stein |
| c) | S*a*M, P*o*M | S*a*P | Mensch | Mensch | Lebewesen |
| | | S*e*P | Mensch | Mensch | Pferd |
| d) | M*a*S, P*o*M | S*a*P | Mensch | Mensch | Lebewesen |
| | | S*e*P | Mensch | Mensch | Pferd |
| e) | S*e*M, M*e*P | S*a*P | Mensch | Pferd | Mensch |
| | | S*e*P | Mensch | Pferd | Stein |
| f) | S*e*M, M*a*P | S*a*P | Mensch | Pferd | Lebewesen |
| | | S*e*P | Stein | Mensch | Lebewesen |
| g) | M*o*S, P*a*M | S*a*P | Lebewesen | Mensch | Lebewesen |
| | | S*e*P | Lebewesen | Stein | Mensch |

Wenn man nun die Prämissen eines dieser 7 Paare durch gleichstarke oder schwächere ersetzt, so kann auch das so entstehende Prämissenpaar nicht schlüssig sein, da andernfalls sich die Konklusion ja auch aus den stärkeren Prämissen ergeben müßte. Mit den Regeln R1, R2, R3, R4 erhalten wir so aus den 7 unschlüssigen Paaren 38 weitere unschlüssige Prämissenpaare. So erhält man aus (b) z. B. die unschlüssigen Paare: S*i*M, M*o*P und M*i*S, M*o*P. Insgesamt haben wir also 45 unschlüssige Prämissenpaare und daher $45 \cdot 4 = 180$ ungültige Modi.

Es bleibt nun zu zeigen, daß sich aus den 19 schlüssigen Prämissenpaaren, mit denen die gültigen Modi gebildet sind und zu denen die restlichen $19 \cdot 4 = 76$ möglichen Schlußformen gehören, nicht mehr als 24 gültige Modi gewinnen lassen.

Eine Konklusion S*a*P schließt aus, daß zugleich eine Konklusion S*e*P oder S*o*P aus den gleichen Prämissen zu gewinnen ist (es gilt ja S*o*P $\equiv \neg$S*a*P und im Hinblick auf (E) sind S*a*P und S*e*P unverträglich), hat aber nach R3 eine Konklusion S*i*P zur Folge. Nach der Schlußtabelle gibt es nur einen gültigen Modus mit S*a*P-Konklusion, also 2 gültige Konklusionen zu diesem Prämissenpaar (*barbara, barbari*).

Eine Konklusion S*e*P schließt aus, daß zugleich eine Konklusion S*a*P oder S*i*P aus den gleichen Prämissen zu gewinnen ist (es gilt ja S*i*P $\equiv \neg$S*e*P und im Hinblick auf (E) sind S*a*P und S*e*P unverträglich), hat aber eine S*o*P-Konklusion zur Folge. Nach der Schlußtabelle gibt es vier gültige Modi mit S*e*P-Konklusion, also 8 gültige Modi mit diesen Prämissenpaaren (*celarent, celaront, cesare, cesaro, camestres, camestros, calemes, calemos*).

Mit einer S*i*P-Konklusion ist eine S*e*P-Konklusion unverträglich, S*a*P- oder S*o*P-Konklusionen aber verträglich. Und mit einer S*o*P-Konklusion ist eine S*a*P-Konklusion unverträglich, eine S*e*P- oder S*i*P-Konklusion aber verträglich. Es bleibt also zu zeigen, daß die Prämissenpaare mit S*i*P- bzw. S*o*P-Konklusion aus der Schlußtabelle nicht auch S*a*P- oder S*o*P- bzw. S*e*P- oder S*i*P-Konklusionen zur Folge haben, die nicht in dieser Tabelle aufgeführt sind. Zu den subalternen Modi außer *bamalip* existieren aber starke Modi mit den gleichen Prämissenpaaren, auf die wir also unsere Aufmerksamkeit beschränken können. Oben haben wir gesehen, daß die starken Modi umkehrbar sind. Würde also aus einem der fraglichen Prämissenpaare eine S*a*P- oder S*o*P- bzw. eine S*e*P- oder S*i*P-Konklusion folgen, so auch aus S*i*P bzw. S*o*P. Es gilt aber nicht S*i*P $\vdash$ S*a*P oder S*i*P $\vdash$ S*o*P bzw. S*o*P $\vdash$ S*e*P oder S*o*P $\vdash$ S*i*P, wie man sich leicht klarmacht.

Aus *barbara* erhalten wir ferner mit (S/P, P/S) aus den Prämissenpaaren von *bamalip* die Konklusion P*a*S und dieser Schluß ist umkehrbar. Würde also aus den Prämissen von *bamalip* eine S*a*P- oder S*o*P-Konklusion folgen, so auch aus P*a*S. Wie man sich wieder leicht klarmachen kann, gilt aber weder P*a*S $\vdash$ S*a*P noch P*a*S $\vdash$ S*o*P.

Damit ist gezeigt, daß aus den 19 schlüssigen Prämissenpaaren tatsächlich nur die 24 in der Schlußtabelle angegebenen Konklusionen folgen. Wir haben also bewiesen, daß nur die 24 aristotelischen Modi gültige Schlußformen der Syllogistik darstellen.

Abschließend können wir sagen, daß die Bedeutung der Syllogistik, die den Kern der traditionellen Deduktionstheorie bis hin zu BOOLE ausmacht, nicht in der Stärke des Systems oder seiner praktischen Anwendbarkeit liegt — tatsächlich ist die Syllogistik ein sehr schwaches System — sondern darin, daß sie die historisch erste in sich geschlossene und präzise logische Theorie darstellt.

## 6.2 Die Boolesche Klassenlogik

GEORGE BOOLE (1815—1864) hat in seinem ersten logischen Hauptwerk, *The Mathematical Analysis of Logic* (1847), aufbauend auf Gedanken von LEIBNIZ, einen Kalkül angegeben, der sich sowohl als Kalkül der A.L. wie der elementaren Klassenalgebra interpretieren läßt[1]. BOOLE hat auch A.L. und elementare Klassenalgebra zu einem einzigen Kalkül kombiniert, den wir $\mathfrak{Bl}$ nennen wollen, und für diese Klassenlogik wollen wir uns im folgenden interessieren. Da die Darstellung dieser Klassenlogik bei BOOLE nicht sehr präzise durchgeführt ist, entwickeln wir sie im Rahmen des Formalismus, den wir in diesem Buch aufgebaut haben.

Die Aussagen der elementaren Klassenalgebra haben die Gestalt $s = t$, wobei s und t Klassenterme sind, die aus GV und den Konstanten $\Lambda$ und $V$ mit den Operatoren $\cap$, $\cup$ und $\overline{\phantom{x}}$ aufgebaut sind. Wie wir im Abschnitt 5.2 gesehen haben, kann man die Aussagen $s = t$ umschreiben in Aussagen der Form $s = V$, wobei s die Konstanten $\Lambda$ und $V$ nicht mehr enthält. Statt „$s = V$“ wollen wir nun „$[s]$“ schreiben. Dann sind die Ausdrücke $[s]$, wo s eine Klassenterm ist, der $\Lambda$ und $V$ nicht enthält, die a.l. Atome der Formeln der Sprache $\mathfrak{B}$ des Kalküls $\mathfrak{Bl}$, aus denen man dann mit Hilfe der a.l. Operatoren $\wedge$, $\vee$ und $\neg$ die Formeln von $\mathfrak{B}$ zusammensetzen kann. Es steht also z. B. die Formel $[\overline{s}] \wedge \neg[t]$ für $\overline{s} = V \wedge \neg(t = V)$, die Formel $[\overline{s} \cup t] \vee \neg[\overline{t} \cup s]$ für $(\overline{s} \cup t = V) \vee \neg(\overline{t} \cup s = V)$, usf[2].

---

[1] Vgl. dazu wie für das folgende den Abschnitt 5.2!

[2] BOOLE hat für die a.l. und die klassenlogischen Operatoren dieselben Symbole verwendet. Tut man das, so wird die Verwendung der Klammersymbole [ ] wichtig, damit man z. B. zwischen $\overline{[s]}$, und $[\overline{s}]$ also zwischen $\neg(s = V)$ und $\overline{s} = V$ unterscheiden kann.

### 6.2.1 Die Entscheidbarkeit des Kalküls $\mathfrak{B}$1

Die logische Gültigkeit der Formeln von $\mathfrak{B}$ ist nun entscheidbar. Das hat auch schon BOOLE hervorgehoben, dessen arithmetisches Entscheidungsverfahren allerdings etwas undurchsichtig ist. Ist A eine a.l. atomare Formel, d. h. eine Formel der Gestalt [s], so läßt sich die Gültigkeit von A nach dem a.l. Entscheidungsverfahren aus 1.2.4 bestimmen[1]. Ist A eine a.l. komplexe Formel von $\mathfrak{B}$, so kann man zunächst die konjunktive Normalform $A_N$ zu A bilden[2]. $A_N$ ist genau dann gültig, wenn alle Konjunktionsglieder von $A_N$ gültig sind. Diese Glieder haben die Gestalt $[s_1] \vee \ldots \vee [s_m] \vee \neg[t_1] \vee \ldots \vee \neg[t_n]$ $(m, n \geqslant 0)$. Es gilt nun der Satz:

I) $[s_1] \vee \ldots \vee [s_m] \vee \neg[t_1] \vee \ldots \vee \neg[t_n]$ ist logisch gültig genau dann, wenn mindestens eine der Aussagen $[\bar{t}_1 \cup \ldots \cup \bar{t}_n \cup s_1], \ldots, [\bar{t}_1 \cup \ldots \cup \bar{t}_n \cup s_m]$ logisch gültig ist[3].

Die Frage, ob eine dieser letzteren Aussagen gültig ist, läßt sich dann wieder mit Hilfe des a.l. Entscheidungsverfahrens feststellen.

Wir beweisen nun den Satz (I):

1) Es sei $[\bar{t}_1 \cup \ldots \cup \bar{t}_n \cup s_i]$ (i aus $1, \ldots, m$) gültig. Dann gilt auch

$$
\begin{array}{ll}
\bar{t}_1 \cup \ldots \cup \bar{t}_n \cup S_i = V, & \text{also mit T97} \\
\overline{t_1 \cap \ldots \cap t_n} \cup s_i = V, & \text{also mit T99} \\
t_1 \cap \ldots \cap t_n \subset s_i, & \text{also} \\
t_1 \cap \ldots \cap t_n = V \supset s_i = V, & \text{also mit T89} \\
t_1 = V \wedge \ldots \wedge t_n = V \supset s_i = V, & \text{also} \\
[t_1] \wedge \ldots \wedge [t_n] \supset [s_i], & \text{also mit D1, T27} \\
\neg[t_1] \vee \ldots \vee \neg[t_n] \vee [s_i], & \text{und daher mit T13, T14} \\
\neg[t_1] \vee \ldots \vee \neg[t_n] \vee [s_1] \vee \ldots \vee [s_m]. &
\end{array}
$$

2) Wenn keine der Aussagen $[\bar{t}_1 \cup \ldots \cup \bar{t}_n \cup s_i]$ gültig ist, so ist $[s_1] \vee \ldots \vee [s_m] \vee \neg[t_1] \vee \ldots \vee \neg[t_n]$ ungültig. Es seien $x_1, \ldots, x_t$ die GV aus den Termen $s_1, \ldots, s_m, t_1, \ldots, t_n$. Wir zeigen: Wenn alle Aussagen $[\bar{t}_1 \cup \ldots \cup \bar{t}_n \cup s_i]$ nicht gültig sind, so gibt es eine Interpretation $\mathfrak{B}$ der GV $x_1, \ldots, x_t$, so daß gilt: $\mathfrak{B}(t_1) = \ldots = \mathfrak{B}(t_n) = V$ und $\mathfrak{B}(s_1) \neq V, \ldots, \mathfrak{B}(s_m) \neq V$.

---

[1] Vgl. dazu 5.2.

[2] Vgl. dazu 1.2.6.2 und Mt8, Mt9 aus 1.2.6.

[3] Vgl. dazu auch den Beweis in [37], S. 41 ff.

Dazu entwickeln wir die Terme $\overline{t}_1 \cup \ldots \cup \overline{t}_n \cup s_i$ in konjunktive Normalform[1]. Sie sei $d_i$. Da $[\overline{t}_1 \cup \ldots \cup \overline{t}_n \cup s_i]$ nach Voraussetzung ungültig ist, so muß $d_i$ ein Glied $d_i^*$ der Gestalt $x_{r_{i1}} \cup \ldots \cup x_{r_{ip_i}} \cup \overline{x}_{s_{i1}} \cup \ldots \cup \overline{x}_{s_{iq_i}}$ enthalten, wo alle Zahlen $r_{i1}, \ldots, r_{ip_i}, s_{i1}, \ldots, s_{iq_i}$ (aus $1, \ldots, t$) untereinander verschieden sind. Es sei $a_i = \{s_{i1}, \ldots, s_{iq_i}\}$ und es sei $M$ die Menge der $a_i$ für $i = 1, \ldots, m$. Wir definieren dann die Interpretation $\mathfrak{B}$ über dem Objektbereich $M$. $B_k$ sei die Teilmenge von $M$, deren Elemente die Zahl k enthalten ($k = 1, \ldots, t$). Wir setzen nun $\mathfrak{B}(x_k) = B_k$ und finden: $a_i \varepsilon B_{s_{i1}}, \ldots, a_i \varepsilon B_{s_{iq_i}}, \neg a_i \varepsilon B_{r_{i1}}, \ldots, \neg a_i \varepsilon B_{r_{ip_i}}$, also $\neg a_i \varepsilon \mathfrak{B}(d_i^*) = \mathfrak{B}(x_{r_{i1}} \cup \ldots \cup x_{r_{ip_i}} \cup \overline{x}_{s_{i1}} \cup \ldots \cup \overline{x}_{s_{iq_i}})$[2]. Da $\mathfrak{B}(d_i)$ ein Durchschnitt von Klassen mit der Klasse $\mathfrak{B}(d_i^*)$ ist, so gilt auch $\neg a_i \varepsilon \mathfrak{B}(\overline{t}_1 \cup \ldots \cup \overline{t}_n \cup s_i)$, also $\neg a_i \varepsilon \mathfrak{B}(s_i)$. $\mathfrak{B}(s_i)$ ist also nicht die Allklasse, wie zu zeigen war. Weiterhin gilt $\neg a_i \varepsilon \mathfrak{B}(\overline{t}_1), \ldots, \neg a_i \varepsilon \mathfrak{B}(\overline{t}_n)$, also $a_i \varepsilon \mathfrak{B}(t_1), \ldots, a_i \varepsilon \mathfrak{B}(t_n)$. Da das für alle $a_i$ ($i = 1, \ldots, m$) gilt, also für alle Elemente des Grundbereichs, so gilt auch $\mathfrak{B}(t_1) = \ldots = \mathfrak{B}(t_n) = V$.

Damit ist nun die Behauptung (2) und somit auch der Satz (I) bewiesen. Aus (I) folgt aber, wie schon oben ausgeführt wurde, die Existenz eines Entscheidungsverfahrens für den Kalkül $\mathfrak{B}1$.

### 6.2.2 Die Äquivalenz der Booleschen Klassenlogik mit der monadischen P.L.

Es soll nun gezeigt werden, daß die BOOLEsche Klassenlogik mit der monadischen Prädikatenlogik äquivalent ist. Die Sprache der monadischen P.L., die aus $\mathfrak{P}$ durch Streichung der mehrstelligen PV entsteht, wollen wir $\mathfrak{P}^1$ nennen. Die Äquivalenz soll dann besagen, daß sich jeder Formel A von $\mathfrak{P}^1$ ohne freie GV in einer (bis auf freie Umbenennungen gebundener GV) umkehrbar eindeutigen Weise eine

[1] Wegen der Analogie zwischen den Operatoren $\cap, \cup$ und $-$ mit $\wedge, \vee$ und $\neg$ ergibt sich die Definition einer solchen konjunktiven Normalform für Klassenterme direkt aus 1.2.6.2 und in Analogie zu den Metatheoremen Mt8 und Mt9 gilt, daß zu jedem Klassenterm s ein Klassenterm $s_N$ in konjunktiver Normalform existiert, so daß gilt $s = s_N$ und $s_N = V$ genau dann, wenn jedes Konjunktions- bzw. Durchschnittsglied von $s_N$ mindestens eine GV x negiert und unnegiert enthält, d. h. den Term $x \cup \overline{x}$ enthält.

[2] Ist $a_i = \Lambda$, so gilt $\neg a_i \varepsilon B_k$ für alle $k = 1, \ldots, t$ also $\neg a_i \varepsilon \mathfrak{B}(d_i^*)$, da aus $a_i = \Lambda$ folgt $q_i = 0$.

Formel A* von $\mathfrak{B}$ gleichen Inhalts zuordnen läßt, so daß A genau dann logisch wahr ist, wenn A* logisch wahr ist.

Wir geben zunächst ein Verfahren an, nach dem sich jede Formel A von $\mathfrak{P}^1$ in eine Formel $A^+$ von $\mathfrak{P}^1$ umformen läßt, für die gilt:

a) $A^+$ setzt sich mit den a.l. Operatoren $\wedge$, $\vee$ und $\neg$ aus Teilformeln der Gestalt $\Lambda x B$ zusammen, in denen sich B wiederum nur mit den Operatoren $\wedge$, $\vee$ und $\neg$ aus Atomformeln von $\mathfrak{P}^1$ zusammensetzt, die nur die GV x enthalten (also aus Formeln der Gestalt f(x)), und

b) $\vdash_{\mathfrak{P}^1} A \equiv A^+$.

Nach diesem Verfahren wird zunächst A in pränexe Normalform gebracht (vgl. 2.3.2). Im Kern dieser Formel werden dann alle Vorkommnisse der Operatoren $\supset$ und $\equiv$ vermittels der Definitionen D1, D3 eliminiert. Dadurch entstehe die Formel A′, für die dann nach MT8, T38, A4, R1 gilt $\vdash A' \equiv A$. Hat nun der letzte Quantor im Präfix von A′ die Gestalt $\Lambda x$ ($\vee x$), so entwickeln wir den Kern von A′ in konjunktive (disjunktive) Normalform (vgl. 1.2.6) und ziehen unter Benutzung von T49 (T52) diesen Quantor nach innen vor die einzelnen Konjunktions- (Disjunktions-)Glieder. Enthält eins dieser Glieder die GV x nicht frei, so kann man wegen $\Lambda x A \equiv \vee x A \equiv A$ diesen Quantor weglassen. Andernfalls ordnen wir in den neuen Bereichen von $\Lambda x$ ($\vee x$) die Disjunktions- (Konjunktions-)Glieder unter Benutzung von T15 (T30) so um, daß die Formeln, die x frei enthalten, an erster Stelle stehen. Es gilt nun $\vdash \Lambda x(A[x] \vee B) \equiv \Lambda x A[x] \vee B$ ( $\vee x(A[x] \wedge B) \equiv \vee x A[x] \wedge B$ ), wenn x nicht frei in B vorkommt[1]. Man kann also

[1] Der Beweis dieser Theoreme ergibt sich wie folgt:

| | | | |
|---|---|---|---|
| a) | 1) | $\Lambda x(A[x] \vee B)$ | AF |
| | | $\Lambda x(\neg B \supset A[x])$ | T15, T24, D1 |
| | | $\neg B \supset A[x]$ | A4, R1 |
| | | $\neg B \supset \Lambda x A[x]$ | R2 |
| | | $\Lambda x A[x] \vee B$ | D1, T15 |
| | 2) | $\Lambda x(A[x] \vee B) \supset \Lambda x A[x] \vee B$ | MT4, (1) |
| | | $\Lambda x A[x] \supset A[x] \vee B$ | A4, T13 |
| | | $B \supset A[x] \vee B$ | T14 |
| | | $\Lambda x A[x] \vee B \supset A[x] \vee B$ | T17 |
| | 3) | $\Lambda x A[x] \vee B \supset \Lambda x(A[x] \vee B)$ | R2 |
| | 4) | $\Lambda x(A[x] \vee B) \equiv \Lambda x A[x] \vee B$ | T23, D3, (2), (3). |
| b) | | $\Lambda x(\neg A[x] \vee \neg B) \equiv \Lambda x \neg A[x] \vee \neg B$ | (4) |
| | | $\neg \vee x(A[x] \wedge B) \equiv \neg \vee x A[x] \vee \neg B$ | T27, T46, MT5 |
| | | $\vee x(A[x] \wedge B) \equiv \vee x A[x] \wedge B$ | T46, T27, T25, T24, MT5. |

die Bereiche der Quantorenvorkommnisse $\wedge x$ ($\vee x$) so beschränken, daß sie nur Atomformeln mit der GV x enthalten. Für die so entstehende Formel $A''$ gilt nach Konstruktion $\vdash A'' \equiv A'$. Wir wiederholen nun den Konstruktionsschritt, der von $A'$ zu $A''$ führt so oft, bis wir endlich zu einer Formel $A^0$ gelangen, die mit den Operatoren $\wedge$, $\vee$ und $\neg$ aus Formeln $\wedge xC$ und $\vee yD$ zusammengesetzt ist, wobei C und D quantorenfrei sind und nur die GV x bzw. y enthalten. Es gilt dann $\vdash A' \equiv A^0$. Die gesuchte Formel $A^+$ erhält man dann aus $A^0$, wenn man die Teilformeln $\vee yC$ nach T46 durch die Formeln $\neg\wedge y\neg C$ ersetzt. Wir finden also endlich auch $\vdash A \equiv A^+$, was zu beweisen war.

Wir stellen nun eine eineindeutige Zuordnung zwischen den PV $f_i$ von $\mathfrak{P}^1$ und den GV $y_i$ von $\mathfrak{B}$ her ($i = 1, 2, \ldots$). Dann können wir einer Formel $A^+$ von $\mathfrak{P}^1$ der oben angegebenen Gestalt eine Formel $A^*$ von $\mathfrak{B}$ zuordnen, indem wir die Teilformeln $\wedge xB_k$ von $A^+$ durch die Ausdrücke $[B_k]$ ersetzen, die Atomformeln $f_i(x)$ durch die GV $y_i$ und die Vorkommnisse der Operatoren $\wedge$, $\vee$ und $\neg$ in den eckigen Klammern durch $\cap$, $\cup$ und $\overline{\phantom{x}}$. Diese Zuordnung ist offenbar umkehrbar eindeutig bis auf freie Umbenennungen gebundener GV. Aus jeder Teilformel $\wedge xB_k$ von $A^+$ entsteht so eine Teilformel von $A^*$ der Gestalt $[s_k]$. Betrachten wir nun die Interpretationen $\mathfrak{V}$, für die gilt

a) $\mathfrak{V}(f_i) = \mathfrak{V}(y_i)$, so gilt $\wedge xB_k \equiv s_k = \mathsf{V}$. Denn ersetzt man in $B_k$ die Formeln $f_i(x)$ durch $x \varepsilon y_i$, so gilt nach den Definitionen D18, D19 und D20 $\lambda xB_k = s_k$, also $\wedge xB_k \equiv s_k = \mathsf{V}$. Bzgl. solcher Interpretationen gilt also nach dem Ersetzungstheorem auch:

b) $A^+ \equiv A^*$. In diesem Sinn kann man sagen, daß $A^+$ und $A^*$ den gleichen Inhalt haben: $A^*$ drückt in der Klassenterminologie das gleiche aus, was $A^+$ in der Begriffsterminologie besagt.

Ist nun $A^+$ nicht logisch wahr, so gibt es eine Interpretation $\mathfrak{V}$, die $A^+$ nicht erfüllt. Zu $\mathfrak{V}$ gibt es dann eine Interpretation $\mathfrak{V}'$, die mit $\mathfrak{V}$ bis auf höchstens die Werte für die GV übereinstimmt und die der Bedingung (a) genügt. $\mathfrak{V}'$ erfüllt dann ebenfalls $A^+$ nicht, da $A^+$ keine freien GV enthält, also erfüllt $\mathfrak{V}'$ auch $A^*$ nicht und $A^*$ ist nicht logisch gültig. Ebenso kann man zu einer Interpretation, die $A^*$ nicht erfüllt, eine Interpretation finden, die (a) genügt und die $A^+$ nicht erfüllt. Es gilt also, wie zu beweisen war, $A^+$ ist logisch wahr genau dann, wenn $A^*$ logisch wahr ist. Da sich, wie wir eingangs gezeigt haben, jede Aussage A von $\mathfrak{P}^1$ äquivalent in eine Aussage $A^+$ umformen läßt, ist damit der Äquivalenzbeweis für die BOOLEsche Klassenlogik und die monadische P.L. erbracht.

Aus dieser Äquivalenz folgt dann mit dem Ergebnis aus 6.2.1 die Entscheidbarkeit der monadischen P.L. [1]. Ferner ergibt sich daraus, daß die BOOLEsche Logik, was ihre Leistungsfähigkeit anbelangt, zwischen der Syllogistik und der, auf FREGE zurückgehenden, elementaren Logik steht. Die monadische P.L. ist ja ein echtes Teilsystem der elementaren Logik, also schwächer als diese. Andererseits ist die Syllogistik ein echtes Teilsystem der monadischen P.L., die also stärker ist als jene. Man kann die Syllogistik also auch im Rahmen der BOOLEschen Klassenlogik entwickeln. Den Aussageformen der Syllogistik S*a*P, S*i*P, S*e*P und S*o*P entsprechen die Formeln $[\overline{x} \cup y]$, $\neg[\overline{x} \cup \overline{y}]$, $[\overline{x} \cup \overline{y}]$ und $\neg[\overline{x} \cup y]$. Der Schluß *celarent* geht also z. B. über in den Schluß $[\overline{y} \cup \overline{z}], [\overline{x} \cup y] \vdash [\overline{x} \cup \overline{z}]$, dem der Schluß $y \subset \overline{z}, x \subset y \vdash x \subset \overline{z}$ (T101) entspricht.

*Übungsaufgaben:*

1. Man leite die 24 aristotelischen Modi im Rahmen des Kalküls $\mathfrak{B}1$ ab! Dazu genügt es, nach den Resultaten aus 6.1.2 die Ableitungsbeziehung $[\overline{y} \cup z], [\overline{x} \cup y] \vdash [\overline{x} \cup z]$ zu beweisen, die dem Modus *barbara* entspricht, und die Regeln R1 bis R9 (unter Berücksichtigung des Postulats (E)) als zulässig zu erweisen.

2. Das oben angegebene Verfahren zur Gewinnung der Formel $A^+$ zielt nicht auf eine praktisch einfache Handhabung ab, sondern nur auf eine einfache Formulierung. Man gebe ein Verfahren für die Konstruktion von $A^+$ an, das schneller zum Ziel führt und in dem $A^+$ aus A ohne den Umweg über die pränexe Normalform gewonnen wird.

## 6.3 Freges Definitionslehre

GOTTLOB FREGE (1848—1925) nimmt unter den Begründern der modernen Logik den bedeutendsten Platz ein. Seine wichtigste Leistung

[1] Die Entscheidbarkeit der monadischen P.L. erhält man auch aus der Transformierbarkeit der Formeln von $\mathfrak{P}^7$ in die Gestalt $A^+$, wenn man das Beweisverfahren des Kalküls $\mathfrak{P}2$ benützt. In einer Herleitung aus $A^+$ treten ja keine SF auf, so daß jede Herleitung aus $A^+$ endlich ist (vgl. dazu den Abschnitt 2.4.1). Ein Beweis für die Entscheidbarkeit der monadischen P.L. auf semantischer Ebene findet sich auch in [1].

besteht in der Formulierung der Prädikatenlogik und der Klassenlogik. Schon in der *Begriffsschrift* von 1879, seiner ersten logischen Veröffentlichung, ging er mit der Angabe eines vollständigen Kalküls der elementaren Logik, sowohl was die Stärke dieser Logik wie die Präzision ihrer syntaktischen Formulierung angeht, weit über BOOLES Klassenlogik hinaus. Wir haben oben gesehen, daß BOOLES kombinierter Kalkül mit der monadischen P.L. äquivalent ist. In der elementaren Logik FREGES treten nun auch mehrstellige Prädikate auf. Für die Formalisierung einer solchen mehrstelligen P.L. war es notwendig, Quantoren und gebundene Variablen einzuführen, und obwohl FREGE sich dabei einer ganz neuen Aufgabe gegenübersah, hat er sie auf Anhieb in einer Weise gelöst, die noch heute gültig ist[1]. Auch die Grundlagen der höheren P.L. gehen auf FREGE zurück, der insbesondere im ersten Band der *Grundgesetze* die Typenunterscheidung für Prädikate ganz klar formuliert hat. Endlich hat er dort auch die Klassenlogik in vollem Umfang begründet, in dem sie weit über BOOLES Kalkül hinausgeht, und er hat in ihrem Rahmen die erste rein logische Begründung der Arithmetik angegeben und damit den ersten Schritt zur Verwirklichung des logizistischen Programms getan.

Wir wollen hier aber auf diese Leistungen FREGES nicht näher eingehen, da wir bereits früher wiederholt auf sie verwiesen haben und da diese Logik in ihrer syntaktischen Ausformung im wesentlichen mit der in diesem Buch dargestellten klassischen Logik identisch ist. Vielmehr wollen wir wegen der grundsätzlichen Bedeutung der Definitionen für die Methodik der Wissenschaften auf eine andere Leistung FREGES zu sprechen kommen, auf seine Theorie der Definition, der er selbst größten Wert beigemessen hat und auf die er häufig zurückgegriffen hat, insbesondere zur Kritik anderer logischer und mathematischer Theorien. FREGES Ausführungen zur Definitionslehre sind in seinen Werken verstreut, die wichtigsten Äußerungen dazu finden sich aber im 2. Band seiner „Grundgesetze"[2] und in dem unveröffentlichten Aufsatz „Über Logik in der Mathematik" von 1914 zusammengefaßt.

Werfen wir aber zunächst einen Blick auf die Ansätze der traditionellen Logik zu einer Definitionstheorie, von denen FREGE ausgehen konnte.

---

[1] Vgl. dazu 2.1.2.

[2] [18], S. 69–80.

### 6.3.1 Traditionelle Lehren

Die auf ARISTOTELES zurückgehende traditionelle Begriffslehre gibt ein Definitionsschema an, nach dem ein einstelliger Begriff $F$ zu definieren ist durch Angabe des nächsthöheren Artbegriffes $G$ und eines spezifischen Merkmals $M$, das den Begriff $F$ vor anderen Unterbegriffen von $G$ auszeichnet: *definitio fit per genus proximum et differentiam specificam.* Symbolisch läßt sich dieses Schema also in der Form S) $F(x) \equiv G(x) \wedge M(x)$ darstellen. Definitionen nach diesem Schema müssen ferner folgenden Kriterien genügen, um korrekte Definitionen im Sinne der traditionellen Logik zu sein:

I) Eine Definition muß das Wesen des zu definierenden Begriffes erfassen.

II) Eine Definition darf nicht zirkulär sein.

III) Eine Definition darf nicht negativ sein.

IV) Die definierenden Begriffe $G$ und $M$ müssen hinreichend klar und scharf bestimmt sein.

Beispiele für korrekte Definitionen in diesem Sinn sind z. B.

a) Ein Mensch ist ein vernunftbegabtes Lebewesen. (Hier ist ‚Lebewesen' das Genus, ‚vernunftbegabt' die spezifische Differenz.)

b) Ein Minderjähriger ist eine Person, die weniger als 21 Jahre alt ist. (Hier ist ‚Person' das Genus, ‚weniger als 21 Jahre als' die spezifische Differenz.)

c) Ein Fisch ist ein Wirbeltier, das schuppenbedeckt und mit Flossen als Gliedmassen versehen ist, durch Kiemen atmet, wechselwarmes Blut hat, sich durch Eier fortpflanzt und dessen Herz nur eine Vor- und eine Herzkammer hat. (Hier ist ‚Wirbeltier' das Genus, die Konjunktion der übrigen Eigenschaften die spezifische Differenz.)

Beispiele für unkorrekte Definitionen sind hingegen:

d) Ein Hecht ist ein Fisch, der ein Hecht ist. (Verstoß gegen II!)

e) Ein Spatz ist kein Säugetier. (Verstoß gegen III!)

f) Wahrheit ist ein Splitter der Unendlichkeit. (Verstoß gegen IV!)

Die traditionelle Definitionslehre hat also einen gewissen Wert, insofern sie die Struktur gewisser Definitionen genauer beschreibt und es erlaubt, gewisse unkorrekte Definitionen auszuschließen. Sie ist aber 1. weder präzise genug, noch 2. weit genug, um alle korrekten Definitionen zu erfassen, noch 3. auch eng genug, um alle unkorrekten Definitionen auszuschließen.

Zum ersten Punkt ist zu sagen, daß alle vier Kriterien mehr oder minder vage sind: Im Kriterium I ist unklar, was unter dem „Wesen" eines Begriffes zu verstehen ist. Darüber gehen die verschiedenen philosophischen Meinungen weit auseinander. Gemeint ist wohl, daß z.B. die Definition (c) der Fische das „Wesen" der Fische besser erfaßt als eine Definition wie etwa c') Ein Fisch ist ein Tier, das mit einer Angelrute gefangen wird. (Die Korrektheit dieser Charakterisierung der Fische sei hier einmal vorausgesetzt.) Denn die Kiemenatmung der Fische ist z.B. eine tiefere Charakterisierung, als die Art und Weise wie sie gefangen werden, d.h. sie ermöglicht uns auf Grund der bekannten biologischen Gesetze die Ableitung einer größeren Anzahl von Aussagen über Fische, als diese. Wenn man diese Vorstellung verallgemeinern wollte, so müßte man also etwa sagen: Eine Definition eines Begriffes $F$ genügt bzgl. einer Theorie $T$ dem Kriterium I, wenn sie in $T$ eine möglichst große Zahl von möglichst relevanten Voraussagen über die unter $F$ fallenden Gegenstände ermöglicht. Aber von einer brauchbaren Präzisierung wäre das Kriterium I auch damit noch weit entfernt.

Im Kriterium II bleibt unklar, unter welchen Bedingungen eine Zirkularität vorliegt. So könnte man annehmen, daß Freges Definition der Anzahlen „Die Anzahl einer Menge $m$ ist die Menge der mit $m$ gleichzahligen Mengen" zirkulär ist, wenn man den Begriff ‚gleichzahlig' wie ‚identische Anzahlen habend' versteht. Auch G. Cantor hat in seiner Rezension von Freges „Grundlagen der Arithmetik" diese Definition für zirkulär erklärt, obwohl tatsächlich von einer Zirkularität keine Rede sein kann, da Frege den Begriff ‚gleichzahlig' für zwei Mengen durch die Existenz einer eineindeutigen Abbildung der einen auf die andere Menge erklärt. Dieses Beispiel zeigt, daß eine Präzisierung des Kriteriums II auf eine bestimmte Theorie mit einer bestimmten Folge von Definitionen Bezug nehmen müßte.

Das Kriterium III wird man zunächst so auffassen, daß eine Definition nicht nur ein hinreichendes Kriterium für das Nichtzutreffen des zu definierenden Begriffes angeben darf, wie das in (e) der Fall ist. Da aber solche Definitionen ohnehin nicht unter das Schema S fallen, ist das Kriterium überflüssig oder es ist in anderer Weise zu deuten. Eine mögliche Deutung wäre, daß im Definiens kein Ausdruck für die Negation vorkommen darf. Aber auch in diesem Sinn wäre das Kriterium nichtssagend, da man Negationen immer nach dem Schema $\neg A \equiv A \supset B$ eliminieren kann, wo B ein falscher Satz ist. Oder man müßte unter Berücksichtigung dieser Eliminierbarkeit der Negationen sagen: Eine Definition genügt dem Kriterium III nur dann, wenn das Definiens sich nicht äquivalent in einen Satz umformen läßt, der eine Negation enthält. Dann aber wären wegen der äquivalenten Ersetzbarkeit eines Satzes A durch $A \wedge (B \vee \neg B)$ alle Definitionen auszuschließen. Endlich würde durch ein Verbot des Vorkommens von Negationen im Definiens auch korrekte Definitionen ausgeschaltet, wie z.B. die Definition „Eine Primzahl ist eine Zahl, die nicht durch eine von 1 verschiedene kleinere Zahl ohne Rest teilbar ist".

Das Kriterium IV endlich ist zu vage, da es nicht hinreichend klar ist, welche Begriffe hinreichend klar bestimmt sind. Vertreter verschiedener philosophischer Richtungen werden da wieder ganz verschiedener Meinung sein.

Auch das Schema S selbst ist insofern ungenau formuliert, als es *den* nächsten Oberbegriff $G$ zu einem Begriff $F$ nicht gibt. Vielmehr existieren zu jedem (nicht allgemeingültigen) Begriff $F$ beliebig viele nächste Oberbegriffe, deren Umfang jeweils nur ein Element mehr enthält als der Umfang von $F$. Im Paradebeispiel (a) der traditionellen Logik wäre auch sicher ‚Säugetier' ein näherer Oberbegriff zu ‚Mensch', als ‚Lebewesen'. Die Rede vom *genus proximum* ist also im traditionellen Definitionsschema nicht genau zu nehmen.

Zum zweiten Punkt ist zu sagen, daß es auch korrekte Definitionen gibt, die nicht nach dem Schema S gebaut sind. Da S nur ein Definitionsschema für einstellige Begriffe ist, gilt das insbesondere für alle korrekten Definitionen von mehrstelligen Begriffen (Beziehungen), von Funktionen oder Gegenständen. Aber auch einstellige Begriffe kann man auf andere Weise korrekt definieren, als nach S. So ist die Definition „Ein Wirbeltier ist ein Fisch oder ein Lurch oder ein Kriechtier oder ein Vogel oder ein Säugetier" sicherlich korrekt, obwohl hier ein Oberbegriff als Vereinigung von Unterbegriffen definiert wird, nicht aber ein Unterbegriff vermittels eines Oberbegriffes, wie das in S verlangt wird.

Zum dritten Punkt endlich ist zu bemerken, daß durch das traditionelle Definitionsschema S *bedingte Definitionen* nicht ausgeschlossen werden, d. h. definitorische Festsetzungen über das Zutreffen von $F$ auf einen Gegenstand $x$, die nur unter der Voraussetzung gemacht werden, daß $x$ eine bestimmte Eigenschaft $H$ hat, die also $F$ nur in Anwendung auf solche Gegenstände definieren, die unter den Begriff $H$ fallen. Ein Beispiel einer solchen bedingten Definition erhalten wir etwa, wenn wir anstelle der Definitionen (a) die Definition (a') ansetzen „Ein Lebewesen ist ein Mensch, wenn es vernunftbegabt ist." Hier wird der Begriff ‚Mensch' nur in Anwendung auf Lebewesen definiert. Während nach (a) die Aussage „$x$ ist ein Mensch" immer falsch ist, wenn $x$ kein Lebewesen ist, enthält (a') für diesen Fall keine Wahrheitsbedingung für „$x$ ist ein Mensch". Das hat zur Folge, daß für so definierte Begriffe wichtige logische Gesetze, wie z. B. das *tertium non datur* nicht gelten. Denn ist „$x$ ist ein Mensch" weder wahr noch falsch, so läßt sich auch der Satz „$x$ ist ein Mensch oder $x$ ist nicht ein Mensch" nicht als wahr auszeichnen. Läßt man unvollständig definierte Begriffe zu, so kann es auch sein, daß der Begriff $M$ im Definiens nach S gerade für diejenigen Argumente $x$ undefiniert ist, für die die Bedingung $H(x)$ der Definition von $F(x)$ erfüllt ist, so daß der Begriff $F$ vollständig undefiniert bleibt. Dann wird man aber kaum mehr von einer korrekten Definition von $F$ sprechen wollen.

Zusammenfassend wird man also sagen müssen, daß das traditionelle Definitionsschema S und die Kriterien I bis IV nicht zur Begründung einer brauchbaren Definitionslehre ausreichen.

In der traditionellen Logik findet sich auch eine Unterscheidung zwischen Nominal- und Realdefinitionen. Eine *Nominaldefinition* ist dabei eine Festsetzung, durch die einem Ausdruck A, dem *Definiendum*, der bisher noch keine Bedeutung hatte, die Bedeutung eines Ausdrucks B, des *Definiens*, dem also bereits eine wohlbestimmte Bedeutung zugeordnet sein muß, verliehen wird. Als sprachliche Festsetzung enthält eine Nominaldefinition keine Tatsachenbehauptung, sie ist also weder wahr noch falsch, sondern nur korrekt oder unkorrekt nach gewissen Regeln, die man für solche Festsetzungen zugrunde legen wird. Aus einer Nominaldefinition $A := B$ ergibt sich dann aber die Bedeutungsgleichheit von A und B, sie begründet also Aussagen der Form $A \equiv B$ bzw. $A = B$, je nachdem A und B Formeln oder Terme sind. Diese Formeln oder auch die aus ihnen durch Generalisierung der in A frei vorkommenden Variablen entstehenden Formeln $\Lambda x_1 \ldots x_n(A \equiv B)$ bzw. $\Lambda x_1 \ldots x_n(A = B)$ wollen wir im folgenden als *Definitionsformeln* bezeichnen. Definitionsformeln dürfen dann in Beweisen wie Axiome verwendet werden[1].

Was eine *Realdefinition* sein soll, ist hingegen weniger klar. Deutlich ist nur, daß Realdefinitionen Behauptungen enthalten sollen, die wahr oder falsch sind, daß es sich bei ihnen also nicht um reine Festsetzungen handelt. Nach einer Deutung der Realdefinitionen sind sie *Begriffsanalysen*, bei denen das zu analysierende Begriffswort $F$ (das *Analysandum*) bereits eine wohlbestimmte Bedeutung hat, von der in der Realdefinition ausgesagt wird, daß sie mit der Bedeutung des analysierenden Prädikates $G$ (des *Analysans*) zusammenfällt[2]. Eine solche Behauptung hat dann, extensional gefaßt, die Form $\Lambda x(F(x) \equiv G(x))$. Solche Analysen können nun entweder linguistischen oder empirischen Charakter haben: Eine *linguistische* Analyse, wie z. B. „Ein Junggeselle ist ein unverheirateter Mann" wird nur durch den Sprachgebrauch begründet und besagt soviel wie: das Wort „Junggeselle" wird in der deutschen Sprache im Sinne von „unverheirateter Mann" verwendet. Eine *empirische* Analyse hingegen liegt vor, wenn man z. B. die Bezeichnung „Americium" durch eine Nominaldefinition einführt für das chemische Element mit 95 Protonen und dann, sei es durch Beobachtungen, sei es durch Ableitung in einer empirischen Theorie, feststellt: Americium ist das Element, das die und die chemischen Eigenschaften hat. Von Begriffsanalysen sind zu unterscheiden *Begriffsexplikationen*, die zwischen Definitionen und Analysen einzuordnen wären: In einer Begriffsexplikation wird ein umgangssprachliches Prädikat, dessen Bedeutung nur bis auf einen gewissen Unbestimmtheitshorizont festgelegt war, zum Zweck etwa seiner Verwendung in einer exakten Theorie, in seiner Extension genauer fixiert. Dabei soll diese Extension im wesentlichen mit dem bisherigen Anwendungsbereich des Wortes

---

[1] Wenn aus der Nominaldefinition als einer semantischen Festsetzung über die Definitionsformel mit dem Ersetzungstheorem die Substituierbarkeit von Definiendum und Definiens in allen Kontexten, also eine syntaktische Eigenschaft folgt, so kann man eine Definition auch umgekehrt als eine syntaktische Festsetzung auffassen, nach der das Definiendum eine Abkürzung für das Definiens sein soll, also in allen Kontexten für das Definiens gesetzt werden kann. Aus der Tautologie $A \equiv A$ erhält man dann wieder die Definitionsformel $A \equiv B$ und also die Bedeutungsgleichheit von Definiendum und Definiens als semantische Folge.

[2] Zum Thema Begriffsanalyse und -explikation vgl. auch C. G. HEMPEL Fundamentals of Concept Formation in Empirical Science, Chicago 1952, S. 6ff.

zusammenfallen — die Präzisierung ist also nicht völlig frei und insofern handelt es sich nicht um eine freie Bedeutungsfestsetzung im Sinne der Nominaldefinition — ansonsten kann aber über die Erweiterung oder Einengung des Anwendungsbereichs des zu präzisierenden Prädikats (des *Explicandum*) frei verfügt werden — und insofern handelt es sich nicht um eine Feststellung im Sinne der Begriffsanalysen, die auf Grund der vorgegebenen Bedeutung des Explicandums bereits als wahr oder falsch fixiert wäre. So gebraucht man z. B. das umgangssprachliche Wort „Fisch" in der Biologie in einem präzisierten Sinn, der durch die Definition (c) bestimmt ist und der in einigen Anwendungsfällen vom umgangssprachlichen Wortsinn abweicht, weil diese Abweichung durch die Zielsetzung einer einheitlichen und tiefgreifenden biologischen Klassifizierung nahegelegt wird.

In einem zweiten Sinn versteht man unter einer Realdefinition auch eine Nominaldefinition, mit der sich eine Existenzbehauptung verbindet, wie z. B. die Einführung eines Eigennamens „$a$ sei der Gegenstand, der die Eigenschaft $F$ hat" zusammen mit der Behauptung, daß es genau einen solchen Gegenstand gibt, oder die Einführung eines Begriffsworts, zusammen mit der Behauptung, daß der betreffende Begriff nicht leer ist. Während nun Realdefinitionen im Sinne von Begriffsanalysen eine klare methodische Funktion haben, werden in Realdefinitionen im letzteren Sinn offenbar zwei ganz heterogene Dinge verbunden, die methodisch sauber zu trennen sind: eine Tatsachenbehauptung, die zu beweisen ist, und eine Nominaldefinition, die als reine sprachliche Festsetzung diese Behauptung nicht begründen kann. Durch die Verquickung beider entsteht aber die Gefahr, daß ein Beweis der Tatsachenbehauptung unterbleibt, indem man meint, es handle sich ja nur um eine Definition, bei der es nichts zu beweisen gäbe. Wenn man z. B. sagt: „$a$ sei die kleinste Zahl, die größer als 1 ist", so ist zuerst zu beweisen, daß es genau eine solche Zahl gibt — im Bereich der reellen Zahlen wäre diese Behauptung z. B. falsch — und dann erst kann man für diese Zahl einen Namen durch eine Nominaldefinition einführen. Und wenn man z. B. den Begriff ‚Dorfbarbier' einführt durch die Erklärung, daß ein Dorfbarbier genau diejenigen Männer des Dorfes rasiert, die sich nicht selbst rasieren, und mit dieser Definition die Existenzannahme verbindet, daß es Dorfbarbiere in diesem Sinne gibt bzw. daß die tatsächlich existierenden Dorfbarbiere unter diesen Begriff fallen, so erhält man den Widerspruch, daß sich ein solcher Dorfbarbier genau dann selbst rasiert, wenn er sich nicht selbst rasiert. Die Gefahr eines solchen Übergangs von einer Begriffsdefinition zur Annahme, der definierte Begriff sei nicht leer, liegt in der traditionellen Logik besonders nahe, wo man, wie wir im Abschnitt 6.1 gesehen haben, nur nichtleere Begriffe betrachtet.

Obwohl schon PASCAL und LEIBNIZ hervorgehoben haben, daß nur Nominaldefinitionen, nicht aber Realdefinitionen im letzteren Sinn als korrekte Definitionen anzusehen seien, sind solche Realdefinitionen doch erst viel später etwa seit J. ST. MILL aus der Logik endgültig verschwunden. MILL sagt dazu:

„The definition is a mere identical proposition which gives information only about the use of language and from which no conclusions affecting matters of fact can possibly be drawn. The accompanying postulate on the other hand, affirms a fact which may lead to consequences of every degree of importance. It affirms the actual or possible existence of things, possessing the combination of attributes set forth[1]...“

Zur Theorie der Definitionen hat in der traditionellen Logik insbesondere auch PASCAL beigetragen. Er hat zunächst hervorgehoben, daß man in einer Sprache streng zwischen Grundausdrücken und den definierten Ausdrücken unterscheiden muß. Jede Definition setzt ja im Definiens Ausdrücke voraus, deren Bedeutung bereits festgelegt und hinreichend scharf umrissen ist. Man kann also nicht alle Ausdrücke einer Sprache mit Ausdrücken dieser Sprache definieren — das würde zu einem unendlichen Regreß führen — sondern muß einen gewissen Vorrat von bedeutungsvollen Ausdrücken, die Grundausdrücke, voraussetzen, die dann die Basis zur definitiorischen Einführung weiterer Ausdrücke bilden. Die exakte Fassung dieser Unterscheidung findet sich freilich erst bei FREGE, der zuerst eine ausdrückliche Relativierung der Definitionsregeln auf Sprachsysteme vorgenommen hat, wie sie hier notwendig ist. Denn die Grundausdrücke einer Sprache können definierte Ausdrücke einer anderen Sprache sein und umgekehrt. Bzgl. einer Sprache $S$ kann man aber eindeutig eine Menge von Grundausdrücken auszeichnen und die Definitionen stehen dann in einer solchen Sprache in einer bestimmten Folge, so daß im Definiens keiner Definition ein erst in dieser oder einer späteren Definition erklärtes Zeichen vorkommt. Es besteht also eine gewisse Analogie zwischen den Grundausdrücken einer Sprache $S$ und den Axiomen einer axio-

[1] A System of Logic, London 1843, I, VIII. 5.

matischen Theorie $T$, sowie zwischen den definierten Ausdrücken von $S$ und den abgeleiteten Theoremen von $T$: Wie man in $T$ nicht alle Sätze beweisen kann, sondern als Basis für die Beweise die Axiome benötigt, so kann man in $S$ nicht alle Ausdrücke definieren, sondern braucht dazu als Basis die Grundausdrücke. Und wie man in $T$ bereits bewiesene Theoreme in weiteren Beweisen wie Axiome verwenden kann, so kann man in weiteren Definitionen in $S$ bereits früher in $S$ definierte Ausdrücke im Definiens verwenden[1].

Weiterhin hat PASCAL zwei wichtige Kriterien für Definitionen aufgestellt:

1. Das Kriterium der *Eliminierbarkeit* der definierten Ausdrücke: Da eine Nominaldefinition das Definiendum als bloße Abkürzung für das Definiens einführt, sind Definitionen grundsätzlich entbehrlich und die definierten Zeichen müssen so in allen Kontexten eliminierbar sein. Unter Bezugnahme auf eine formalisierte Theorie $T$ über einer Sprache $S$ — wir denken dabei etwa an elementare Systeme über $\mathfrak{P}$ — kann man dieses Kriterium wie folgt präzisieren[2]: Ist D eine Definitionsformel, durch die ein Zeichen Z eingeführt werden soll, so muß es zu jeder Formel A, die Vorkommnisse von Z enthält, eine Formel B geben, die kein Vorkommnis von Z enthält, und für die der Satz $D \supset (A \equiv B)$ in $T$ beweisbar ist.

Diese Forderung der Eliminierbarkeit ist z. B. erfüllt für die Definitionen D1, D2, D3 der a.l. Operatoren $\vee$, $\wedge$, $\equiv$, wie das im Abschnitt 1.2.3 gezeigt wurde.

2. Das Kriterium der *Nichtkreativität* der Definitionen: Aus einer Nominaldefinition eines Zeichens Z als einer bloßen sprachlichen Abkürzung dürfen keine neuen Tatsachenbehauptungen folgen. Ist $T$ also eine formalisierte Theorie, D die Definitionsformel für Z und A ein Satz, der Z nicht enthält, so muß es zu jedem Beweis für A in $T$, in dem die Formel D verwendet wird, einen Beweis für A in $T$ geben, der D nicht verwendet.

---

[1] Vgl. dazu auch den Aufsatz „Pascals Forderungen an die mathematische Methode" in [63], S. 115—127.

[2] Die folgenden Präzisierungen der PASCALschen Kriterien gehen auf S. LEŚNIEWSKI zurück.

Danach ist z. B. die Definition „$e$ sei ein Gruppenelement, für das gilt $\bigwedge x(x \circ e = x)$" im Teilsystem der Gruppentheorie aus 3.3.1 mit a1 als einzigem Axiom nicht korrekt, da aus dieser Definition, nicht aber aus a1 allein der Satz $\bigvee y \bigwedge x(x \circ y = x)$ ableitbar ist. Die letztere Behauptung ergibt sich wie folgt: Ist $\mathfrak{B}$ eine Interpretation über dem Bereich $\gamma$ der positiven ganzen Zahlen, durch welche die Operation $\circ$ als Addition interpretiert wird, so erfüllt $\mathfrak{B}$ a1, nicht aber den Satz $\bigvee y \bigwedge x(x \circ y = x)$, da $0$ nicht in $\gamma$ ist.

Durch das Kriterium der Nichtkreativität werden nun offenbar Realdefinitionen im Sinn der zweiten oben skizzierten Deutungen dieser Definitionen ausgeschlossen. Ferner schließt das Kriterium auch aus, daß ein widerspruchsfreies System $T$ durch die Hinzunahme einer Definitionsformel D widerspruchsvoll wird. Denn wäre in $T$ mit D ein Widerspruch beweisbar, so nach dem Prinzip *ex falso quodlibet* auch ein kontradiktorischer Satz B, der das in D erklärte Zeichen nicht enthält. Dann müßte aber nach dem zweiten PASCALschen Kriterium B auch in $T$ allein beweisbar sein, d. h. $T$ selbst wäre bereits widerspruchsvoll.

Die beiden PASCALschen Kriterien schließen nun sicher nur unkorrekte Definitionen aus. Es bleibt aber offen, inwieweit diese Kriterien hinreichen, tatsächlich auch alle unkorrekten Definitionen auszuschließen. Der Diskussion dieser Frage müssen wir die FREGEsche Definitionslehre vorausschicken.

### 6.3.2 Freges Auszeichnung der Explizitdefinitionen

FREGE hat die Diskussion der Definitionsregeln dadurch auf eine höhere Präzisionsebene gestellt, daß er, wie schon oben erwähnt, den Definitionsbegriff relativiert hat auf formale Systeme $T$ über einer Kunstsprache $S$. Für solche Sprachen ist ein Bereich von Grundausdrücken abgegrenzt, denen durch die semantischen Regeln von $S$ eine wohlbestimmte Bedeutung zugeordnet ist. Die Definitionen in $S$ stehen in einer bestimmten Folge, so daß die i-te Definition $D_i$ den Definitionen $D_k$ mit $k > i$ vorausgeht. Jede Definition $D_k$ soll nun als Nominaldefinition eine Festsetzung sein, durch die dem Definiendum von $D_k$ die Bedeutung des Definiens verliehen wird. Dazu muß einmal das Definiens von $D_k$ bereits eine Bedeutung haben, darf also nur Grundausdrücke enthalten und Ausdrücke, die durch die Definitionen $D_i$ mit $i < k$ bereits definiert worden sind. Zum andern darf das Definiendum in $S$ bisher noch keine Bedeutung gehabt haben. Mehrfache

Definitionen ein und desselben Ausdrucks sind also auszuschließen. FREGE sagt dazu:

„Ich verwerfe die Vielfachheit der Definitionen für dasselbe Zeichen aus folgendem Grunde. Nehmen wir an, es liegen zwei Definitionen vor, die beide demselben Zeichen eine Bedeutung beilegen. Dann sind nur zwei Fälle denkbar: entweder geben beide dem Zeichen dieselbe Bedeutung, oder nicht. Im ersteren Fall haben wir wieder zwei Möglichkeiten: entweder beide Definitionen verleihen dem Zeichen denselben Sinn, besagen ganz dasselbe, oder nicht. Im ersten Falle ist eine von beiden überflüssig, im anderen wäre zu beweisen, daß sie dem Zeichen dieselbe Bedeutung zuteilen, obwohl sie ihm verschiedenen Sinn geben. Man müßte etwa eine von beiden als Definition stehen lassen, die andere in einen Lehrsatz verwandeln und beweisen. Um diesen Beweis betrügt man den Leser, indem man als Definition hinstellt, was ein Lehrsatz sein sollte. Wenn endlich die Definitionen demselben Zeichen verschiedene Bedeutung geben, nicht nur verschiedenen Sinn, so widersprechen sie einander und eine von beiden muß weichen[1].“

Da durch eine Nominaldefinition dem Definiendum die gleiche Bedeutung zugeordnet werden soll wie dem Definiens, da andererseits aber in einer nach der Idee der *lingua characteristica* gebauten Kunstsprache gleichbedeutende Ausdrücke auch die gleiche syntaktische Kategorie haben müssen, ergibt sich für FREGE die weitere Forderung, daß Definiendum und Definiens von gleicher syntaktischer Kategorie sein müssen, daß also nicht Eigennamen durch Prädikate, $n$-stellige Prädikate durch $m$-stellige Prädikate mit $m \neq n$ oder Funktionsausdrücke durch Prädikate definiert werden dürfen. Diese Forderung läßt sich aber erst bei Bezugnahme auf bestimmte Sprachen, für die ein wohldefinierter Begriff der syntaktischen Kategorie vorliegt, näher präzisieren.

Nach diesen vorbereitenden allgemeineren Abgrenzungen stellt FREGE nun ein Prinzip und zwei Kriterien für korrekte Nominaldefinitionen auf. FREGES oberstes Prinzip ist das Prinzip I der *Freiheit* der Definitionen: Definitionen als sprachliche Abkürzungen müssen prinzipiell freie Vereinbarungen sein, d.h. sie dürfen nicht noch jeweils einen besonderen Beweis ihrer Korrektheit und Zulässigkeit erfordern. Es ist daher Aufgabe der Definitionstheorie, solche Definitionsregeln

[1] [19], S. 54.

anzugeben, daß die im Einklang mit ihnen formulierten Definitionen immer ohne weiteres korrekt und zulässig sind. FREGE sagt dazu:

„Es ist aber daran festzuhalten, daß in der Definition nichts behauptet, sondern etwas festgesetzt wird. Es darf also nie etwas als Definition hingestellt werden, was eines Beweises oder sonst einer Begründung seiner Wahrheit bedarf[1]." Und:

„Es ist überhaupt eine solche Weise des Definierens zu verwerfen, bei welcher die Rechtmäßigkeit einer Definition von einem vorher zu führenden Beweis abhängig wird; denn dadurch wird es außerordentlich erschwert, die Strenge der Beweisführung nachzuprüfen, weil dann bei jeder Definition eine Untersuchung nötig ist, ob vor ihrer Aufstellung irgendwelche Sätze zu beweisen seien; eine Untersuchung, die dann doch fast immer unterbleibt. Eine solche Lücke wird eben fast nie gefüllt und ist dadurch für die Strenge besonders gefährlich. Es genügt eben... nicht, irgendeine Behauptung aufzustellen ohne Beweis oder mit einem Scheinbeweise und nur abzuwarten, ob es jemandem gelingt, ihre Falschheit nachzuweisen, sondern umgekehrt muß verlangt werden, daß jede nicht ganz selbstverständliche Behauptung wirklich bewiesen werde, und dazu gehört, daß die dabei gebrauchten Ausdrücke oder Zeichen einwandfrei eingeführt seien, sofern sie nicht als allgemein bekannt angesehen werden dürfen[2]."

Eine definitorische Festsetzung kann nun entweder bedingt oder unbedingt sein. Eine *unbedingte* Definition z. B. eines einstelligen Prädikates $F$ legt fest, daß die Instanzen $F(\mathrm{x})$ für alle nach den Formregeln einsetzbaren Terme x die gleiche Bedeutung haben wie die Instanzen $G(\mathrm{x})$ eines Prädikates $G$. Eine bedingte Definition von $F$ hingegen trifft diese Festsetzung nur unter einer bestimmten Voraussetzung, z. B. unter der Voraussetzung, daß der Satz $H(\mathrm{x})$ wahr ist. Während also $F(\mathrm{x})$ einmal für alle zulässigen Terme x erklärt wird, wird $F(\mathrm{x})$ das andere Mal nur für bestimmte Einsetzungen x erklärt, für die $H(\mathrm{x})$ gilt. Dabei können wir annehmen, daß nicht gilt $\wedge x H(x)$, da sonst beide Definitionen von $F$ äquivalent sind. Wenn nun $F(\mathrm{x})$ nicht für alle Einsetzungen x erklärt, also nicht total definiert ist, gilt das Prinzip der Wahrheitsdefinitheit, das der gesamten klassischen Logik zugrunde liegt, nicht für alle Sätze $F(\mathrm{x})$, so daß fundamentale

[1] Brief an HILBERT vom 27. 12. 1899 (unveröffentlicht).
[2] [18], Bd. II, S. 73.

logische Gesetze wie z. B. das *tertium non datur* nicht für $F$ gelten. Man kann also mit den Ausdrücken $F(\mathrm{x})$ nur unter gewissen Beschränkungen logisch operieren und muß für alle logischen Theoreme, in denen $F$ vorkommt, und die man verwenden will, zeigen, daß sie trotz der bedingten Definition von $F$ gelten. Damit ist aber das Prinzip I verletzt, so daß FREGE solche bedingten oder unvollständigen Definitionen durch seine Forderung II der *Vollständigkeit* ausschließt:

„Eine Definition eines Begriffes (möglichen Prädikates) muß vollständig sein, d. h. sie muß für jeden Gegenstand unzweideutig bestimmen, ob er unter den Begriff falle (ob das Prädikat mit Wahrheit von ihm ausgesagt werden könne) oder nicht. Es darf also keinen Gegenstand geben, für den es nach der Definition zweifelhaft bliebe, ob er unter den Begriff fiele, wenn es auch für uns Menschen nach unserem mangelhaften Wissen nicht immer möglich sein mag, die Frage zu entscheiden[1]."

Bedingte Definitionen können allgemein auch die Form einer Definition durch Fallunterscheidung annehmen:

$$\text{a) } F(\mathrm{x}) \equiv \begin{cases} G_1(\mathrm{x}), & \text{wenn gilt } H_1(\mathrm{x}) \\ \quad\cdots & \\ G_n(\mathrm{x}), & \text{wenn gilt } H_n(\mathrm{x}) \end{cases}$$

Solche Definitionen werfen neben der Unvollständigkeit des erklärten Begriffes $F$, die besteht, wenn nicht gilt (b) $\land x(H_1(x) \lor \ldots \lor H_n(x))$, noch ein weiteres Problem auf: Aus (a) erhält man die Sätze (c) $\land x(H_i(x) \land H_k(x) \supset (G_i(x) \equiv G_k(x)))$ für $i, k = 1, \ldots, n$. Das sind nun Sätze, in denen das definierte Zeichen $F$ nicht vorkommt, die also nach der Idee der Nichtkreativität von Definitionen unabhängig von (a) beweisbar sein müßten. Wäre einer dieser Sätze aber falsch, so würde durch die Hinzunahme von (a) zur Bezugstheorie $T$ ein Widerspruch entstehen. Für die Zulässigkeit von (a) sind also die Sätze (c) zu beweisen, so daß Definitionen nach (a) auch aus diesem Grunde dem obersten FREGEschen Definitionsprinzip nicht genügen. Gelten die Sätze (b) und (c) nicht, so ist (a) unkorrekt, gelten sie aber, so läßt sich (a) in die korrekte unbedingte Definition d) $F(\mathrm{x}) \equiv H_1(\mathrm{x}) \land G_1(\mathrm{x}) \lor \ldots \lor H_n(\mathrm{x}) \land G_n(\mathrm{x})$ verwandeln. In diesem Sinn gilt allgemein: bedingte Definitionen sind unkorrekt oder überflüssig, in dem sie sich in unbedingte Definitionen umformen lassen.

Trotz der erwähnten Nachteile verwendet man bedingte Defini-

---

[1] [18], Bd. II, S. 69. Vgl. auch [19], S. 55.

tionen in der Mathematik häufig. So, wenn man z. B. den Bruch $\frac{x}{y}$ nur für $y \neq 0$ erklärt. Bei Beachtung der Restriktionen, die sich aus dieser unvollständigen Definition der Funktion ergeben, kann man aber mit dieser Definition handlicher operieren, als mit der vollständigen Definition $\frac{x}{y} = z := y \neq 0 \wedge x = y \cdot z \vee y = 0 \wedge z = a$, wo $a$ ein passend gewähltes mathematisches Objekt ist. — Bedingte Definitionen verwendet man auch gelegentlich, wenn man z. B. einen Begriff stückweise definiert, wenn man also etwa die Beziehung $x < y$ zunächst für natürliche Zahlen, dann für ganze, dann für rationale und endlich für reelle Zahlen erklärt und dabei immer das gleiche Zeichen verwendet. Alle diese Definitionen sind unvollständig und zudem wird das Zeichen „$<$" immer neu für den alten Definitionsbereich erklärt, also z. B. für die natürlichen als spezielle ganze, für die ganzen als spezielle rationale Zahlen usw. Eine solche Definition erfordert aber den Beweis, daß die neue Definition des Zeichens im früheren Definitionsbereich mit der alten Definition zusammenstimmt. FREGE sagt dazu:

„Durch stückweises Definieren wird auch der Bestand der Lehrsätze ins Ungewisse gestellt. Wenn man z. B. in der Beschränkung auf das Gebiet der positiven ganzen Zahlen die Worte „Quadratwurzel aus 9" erklärt hat, so beweist man etwa den Satz, daß es nur eine einzige Quadratwurzel aus 9 gebe, der sofort umgestoßen wird, wenn man die Betrachtung auf die negativen Zahlen ausdehnt und demgemäß die Definition ergänzt. Aber ob man nun zu einem endgültigen Satze gekommen sei, wer kann es wissen? Wer kann wissen, ob man sich nicht noch zur Anerkennung von vier Quadratwurzeln aus 9 gedrängt sehen werde. Woher will man eigentlich wissen, daß es nicht mehr als zwei Quadratwurzeln aus — 1 gebe? Solange man keine endgültige und vollständige Definition hat, ist es unmöglich[1]."

„Und es ist überdies so leicht, mehrfache Erklärungen desselben Zeichens zu vermeiden. Statt es zuerst für ein beschränkteres Gebiet zu erklären und es dann zu benutzen, um es selbst für ein weiteres Gebiet zu erklären, statt also zweimal das gleiche, braucht man ja nur verschiedene Zeichen zu wählen, indem man die Bedeutung des ersteren endgültig auf das engere Gebiet einschränkt, so daß nun auch die erste Definition vollständig ist und scharfe Grenzen zieht. Dann ist die logische Be-

[1] [18], Bd. II, S. 74.

ziehung zwischen den Bedeutungen der beiden Zeichen nicht irgendwie präjudiziert und mag untersucht werden, ohne daß durch den Ausfall dieser Untersuchung die Rechtmäßigkeit der Definitionen in Frage gestellt werden kann[1]."

Wenn durch die Forderung II nur unbedingte Definitionen zugelassen werden, so grenzt FREGES Kriterium III der *Einfachheit* des Definiendums die Definitionen weiter auf Explizitdefinitionen ein. Zunächst kann man solche Definitionen ausmustern, in deren Definiendum mehr als ein bisher noch nicht erklärtes Zeichen vorkommt. Denn durch eine solche Definition wird nicht jedem der Zeichen für sich, sondern nur einem speziellen Kontext solcher Zeichen eine Bedeutung zugeordnet:

„Noch weniger geht es an, mit einer einzigen Definition zweierlei zu erklären, sondern jede Definition muß ein einziges Zeichen enthalten, dessen Bedeutung durch sie festgesetzt wird. Man kann ja auch nicht mit einer einzigen Gleichung zwei Unbekannte bestimmen[2]."

Danach tritt nun im Definiendum neben Hilfszeichen und Variablen, die ja keine eigene semantische Funktion haben, entweder nur das zu erklärende Zeichen (eine GK, PK oder FK) auf — in diesem Fall sprechen wir von einer *Explizitdefinition* — oder das Definiendum enthält daneben auch Grundausdrücke oder bereits definierte Ausdrücke — dann sprechen wir von einer *Kontextdefinition*. FREGE schließt nun Kontextdefinitionen mit folgender Begründung aus:

„Daß durch die Bedeutung eines Ausdrucks und eines seiner Teile die Bedeutung des übrigen Teils nicht immer bestimmt ist, leuchtet ein. Man darf also ein Zeichen oder Wort nicht dadurch erklären, daß man einen Ausdruck erklärt, in dem es vorkommt, während die übrigen Teile bekannt sind. Denn es wäre erst eine Untersuchung nötig, ob die Auflösung für die Unbekannte — ich bediene mich eines wohl verständlichen algebraischen Bildes — möglich sei, und ob die Unbekannte eindeutig bestimmt werde. Es ist aber, wie oben schon gesagt, untunlich, die Rechtmäßigkeit einer Definition von dem Ausfall einer solchen Untersuchung abhängig zu machen[3]."

Daß FREGES Kritik der Kontextdefinitionen tatsächlich berechtigt ist, zeigt folgendes Beispiel von G. PEANO: Es wird eine zweistellige

---

[1] [18], Bd. II, S. 73.
[2] [18], Bd. II, S. 79.
[3] [18], Bd. II, S. 79.

Funktion $x * y$ für rationale Zahlen definiert durch die Festsetzung: $\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{q}} * \frac{\mathrm{r}}{\mathrm{t}} := \frac{\mathrm{p}+\mathrm{r}}{\mathrm{q}+\mathrm{t}}$. Hier liegt eine Kontextdefinition vor, da im Definiendum neben dem zu erklärenden Zeichen $*$ und den Variablen p, q, r, t auch das Funktionszeichen „—" für Brüche vorkommt. Aus dieser Definition erhalten wir nun $\frac{2}{3} * \frac{3}{4} = \frac{2+3}{3+4} = \frac{5}{7}$ und $\frac{4}{6} * \frac{3}{4} = \frac{4+3}{6+4} = \frac{7}{10}$. Da nun nach der Definition der Brüche gilt $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$, erhalten wir also $\frac{2}{3} * \frac{3}{4} = \frac{4}{6} * \frac{3}{4}$, also $\frac{5}{7} = \frac{7}{10}$, also $50 = 49$. Aus der Kontextdefinition ergibt sich also ein Widerspruch.

In der Mathematik werden Kontextdefinitionen häufig vorgenommen, so wenn man etwa Brüche $\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{y}}$ definiert als Äquivalenzklassen von geordneten Paaren von ganzen Zahlen $\langle \mathrm{x}, \mathrm{y} \rangle$ bzgl. der Äquivalenzrelation $\langle \mathrm{x}, \mathrm{y} \rangle \approx \langle \mathrm{u}, \mathrm{v} \rangle := \mathrm{u} \cdot \mathrm{y} = \mathrm{x} \cdot \mathrm{v} \wedge \mathrm{y} \neq 0 \wedge \mathrm{v} \neq 0$, so daß gilt $\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{y}} = \lambda \mathrm{z} \bigvee \mathrm{uv}(\mathrm{z} = \langle \mathrm{u}, \mathrm{v} \rangle \wedge \langle \mathrm{u}, \mathrm{v} \rangle \approx \langle \mathrm{x}, \mathrm{y} \rangle)$. Die Summe $\mathrm{x} \oplus \mathrm{y}$ von rationalen Zahlen wird dann durch die Kontextdefinition $\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{y}} \oplus \frac{\mathrm{u}}{\mathrm{v}} := \frac{\mathrm{x} \cdot \mathrm{v} + \mathrm{u} \cdot \mathrm{y}}{\mathrm{y} \cdot \mathrm{v}}$ erklärt, wo $+$ die für den Bereich der ganzen Zahlen definierte Addition ist. Die Korrektheit dieser Kontextdefinition ist nun aber gesondert nachzuweisen, indem man zeigt, daß es genau eine Funktion $\oplus$ der in dieser Definition verlangten Art gibt. Daß es höchstens eine solche Funktion gibt, ist aber trivial und für die Existenz einer solchen Funktion hat man nur zu zeigen: $\langle \mathrm{x}, \mathrm{y} \rangle \approx \langle \mathrm{x}', \mathrm{y}' \rangle \wedge \langle \mathrm{u}, \mathrm{v} \rangle \approx \langle \mathrm{u}', \mathrm{v}' \rangle \supset \frac{\mathrm{x}}{\mathrm{y}} \oplus \frac{\mathrm{u}}{\mathrm{v}} = \frac{\mathrm{y}'}{\mathrm{y}'} \oplus \frac{\mathrm{u}'}{\mathrm{v}'}$. Allgemein ist bei Kontextdefinitionen immer zu beweisen, daß es genau eine Entität gibt, die den Bedingungen der Definition genügt. Gelingt dieser Beweis, so zeigt er eine Entität der verlangten Art auf, durch die sich dann die das fragliche Zeichen explizit definieren läßt, sofern das Bezugssystem $T$ hinreichend ausdrucksstark ist. So ließe sich das Zeichen $\oplus$ auch explizit definieren durch $\mathrm{x} \oplus \mathrm{y} := \iota \mathrm{z} \bigvee \mathrm{uvstpq}(\mathrm{x} = \langle \mathrm{u}, \mathrm{v} \rangle \wedge \mathrm{y} = \langle \mathrm{s}, \mathrm{t} \rangle \wedge \mathrm{z} = \langle \mathrm{p}, \mathrm{q} \rangle \wedge \mathrm{G}(\mathrm{u}) \wedge \mathrm{G}(\mathrm{v}) \wedge \mathrm{G}(\mathrm{s}) \wedge \mathrm{G}(\mathrm{t}) \wedge \mathrm{G}(\mathrm{p}) \wedge \mathrm{G}(\mathrm{q}) \wedge \langle \mathrm{p}, \mathrm{q} \rangle \approx \langle \mathrm{u} \cdot \mathrm{t} + \mathrm{s} \cdot \mathrm{v}, \mathrm{v} \cdot \mathrm{t} \rangle)$, wobei „G(x)" steht für „x ist eine ganze Zahl". Daß die Umformung einer korrekten Kontextdefinition in eine Explizitdefinition jedoch nicht immer möglich ist, zeigt das Beispiel der Kontextdefinition für Kennzeichnungsausdrücke in 3.2, wo sich die Kennzeichnungsfunktion nur metatheoretisch nachweisen, aber nicht in $\mathfrak{P}$ ausdrücken läßt. Aus diesem Grunde ist auch die Kennzeichnung im System FREGES ein Grundausdruck, nicht aber ein definierter Ausdruck.

FREGES allgemeine Grundsätze des Definierens bewirken also, daß nur Explizitdefinitionen zugelassen werden.

### 6.3.3 Definitionsregeln für spezielle Sprachen

Bezieht man sich nun auf eine spezielle Kunstsprache $S$, so kann man aus den allgemeinen Definitionsgrundsätzen ganz konkrete Regeln für die Formulierung von Definitionen gewinnen, wie das FREGE für die Sprache der „Grundgesetze" getan hat[1]. Wir wollen solche Definitionsregeln hier für die Sprache der erweiterten P.L. $\mathfrak{P}$ angeben.

$\alpha$) Eine n-stellige PK F ist in $\mathfrak{P}$ zu definieren durch eine Definitionsformel der Gestalt $\Lambda x_1 \ldots x_n(F(x_1, \ldots, x_n) \equiv A)$, wobei gilt: a) In A kommen neben den Grundausdrücken von $\mathfrak{P}$ nur Konstanten vor, die in $\mathfrak{P}$ bereits früher definiert worden sind. b) $x_1, \ldots, x_n$ sind n verschiedene GV. c) A enthält genau die GV $x_1, \ldots, x_n$ frei.

Die Form der Definition stellt mit der Bedingung (a) sicher, daß tatsächlich eine Explizitdefinition vorliegt. Die Forderung (b) ist notwendig, denn definiert man z. B. $\Lambda x(F(x, x) \equiv A)$, so sind durch diese Definition nur die Instanzen $F(x, x)$ von F erklärt, nicht aber die Instanzen $F(x, y)$ mit $x \neq y$, so daß die Definition von F unvollständig ist und Ausdrücke der Gestalt $F(x, y)$ nicht immer eliminierbar sind. Die Forderung (c) ergibt sich aus der Bedingung, daß Definiendum und Definiens von gleicher syntaktischer Kategorie sein sollen[2]. Wichtig ist dabei insbesondere, daß in A höchstens die GV $x_1, \ldots, x_n$ frei vorkommen sollen. Denn definiert man etwa F durch 1) $\Lambda xy(F(x, y) \equiv G(x, y, z))$, so ist für die Korrektheit dieser Definition zu zeigen, daß gilt 2) $\Lambda xyzz'(G(x, y, z) \equiv G(x, y, z'))$. Andernfalls erhielte man für $\neg(G(x, y, z) \equiv G(x, y, z'))$ auch $\neg(F(x, y) \equiv F(x, y))$, also einen Wider-

[1] Vgl. [18], Bd. I, S. 43ff.

[2] Die Prädikate $F(x_1, \ldots, x_n)$ und A wären auch dann von gleicher syntaktischer Kategorie, wenn in A anstelle von $x_1, \ldots, x_n$ genau n andere GV frei vorkämen. Die Definition legt aber fest, daß beide Prädikate für gleiche Instanzen gleiche Wahrheitswerte annehmen sollen und damit ergibt sich dann die Forderung (c).

spruch. Gilt aber (2), so ist die Definition $\wedge xy(F(x, y) \equiv \vee zG(x, y, z))$ mit (1) äquivalent, wobei nun (2) dem Schema ($\alpha$) entspricht. Kommen hingegen nicht alle GV $x_1, \ldots, x_n$ frei in A vor, so kann sich daraus kein Widerspruch ergeben, da das nur zur Folge hat, daß $F(x_1, \ldots, x_n)$ nicht von den nicht frei in A vorkommenden GV abhängt. Andererseits läßt sich aber die Definition dann auch äquivalent in eine Definition nach der Bedingung (c) umformen, indem man zu A konjunktiv die Glieder $x_i = x_i$ hinzufügt für alle nicht in A frei vorkommenden GV $x_i$ aus $x_1, \ldots, x_n$, so daß die Forderung (c) in diesem Sinn auch nicht zu streng ist.

Ganz entsprechend begründet man die folgenden Definitionsregeln für FK und GK:

$\beta$) Eine n-stellige FK F* ist in $\mathfrak{P}$ zu definieren durch eine Definitionsformel der Gestalt $\wedge x_1 \ldots x_n(F^*(x_1, \ldots, x_n) = t)$, wobei gilt: a) Im Term t kommen neben den Grundausdrücken von $\mathfrak{P}$ nur Konstanten vor, die in $\mathfrak{P}$ bereits früher definiert worden sind. b) $x_1, \ldots, x_n$ sind n verschiedene GV. c) t enthält genau die GV $x_1, \ldots, x_n$ frei.

$\gamma$) Eine GK a ist in $\mathfrak{P}$ zu definieren durch eine Definitionsformel der Gestalt $a = t$, wobei der Term t keine freien GV enthält und neben den Grundausdrücken von $\mathfrak{P}$ nur Konstanten, die in $\mathfrak{P}$ bereits früher definiert worden sind.

Da man in $\mathfrak{P}$ Kennzeichnungsterme nicht als Grundausdrücke zur Verfügung hat, wird man aber die Definitionsregeln für FK und GK insofern liberalisieren, daß man für sie auch Kontextdefinitionen nach folgenden Regeln zuläßt:

$\beta'$) Eine n-stellige FK F* ist in $\mathfrak{P}$ zu definieren durch eine Definitionsformel der Gestalt $\wedge x_1 \ldots x_n y(F^*(x_1, \ldots, x_n) = y \equiv A)$, wobei gilt: a) Die Formel A enthält neben den Grundausdrücken von $\mathfrak{P}$ nur K stanten, die in $\mathfrak{P}$ bereits vorher definiert worden sind. b) $x_1, \ldots$ sind n verschiedene GV. c) In A kommen genau die GV $x_1, \ldots, x$ frei vor. d) Die Formel $\wedge x_1 \ldots x_n \vee! y\, A$ ist beweisbar.

$\gamma'$) Eine GK a ist in $\mathfrak{P}$ zu definieren durch eine Definitionsformel Gestalt $\wedge y(a = y \equiv A)$, wobei gilt: a) Die Formel A enthält neben Grundausdrücken von $\mathfrak{P}$ nur Konstanten, die in $\mathfrak{P}$ bereits defir worden sind. b) Die Formel $\vee! yA$ ist beweisbar.

Die Bedingung (d) in ($\beta'$) stellt sicher, daß es zu jedem Argument-n-tupel $x_1, \ldots, x_n$ genau einen Funktionswert $F^*(x_1, \ldots, x_n)$ gibt, die Bedingung (b) in ($\gamma'$) stellt sicher, daß es genau einen solchen Gegenstand gibt, wie er der GK a als Bedeutung zugeordnet werden soll. Mit der Kennzeichnungsfunktion kann man von ($\beta'$) und ($\gamma'$) offenbar wieder zu ($\beta$) und ($\gamma$) übergehen.

Die allgemeinen Definitionsgrundsätze FREGES reichen also hin, für spezielle Sprachen nun ganz konkrete Definitionsregeln anzugeben, die besagen, wie Ausdrücke zu definieren sind, und die sicherstellen, daß alle ihnen gemäßen Definitionen korrekte Nominaldefinitionen sind. Um den letzteren Punkt noch näher zu beleuchten, wollen wir nun zeigen, daß Definitionen nach den Regeln ($\alpha$) bis ($\gamma'$) die PASCALschen Kriterien der Eliminierbarkeit und der Nichtkreativität erfüllen.

Auf Grund des Ersetzungstheorems MT5 und des Axioms A6 ist unmittelbar klar, daß alle Vorkommnisse eines nach ($\alpha$), ($\beta$) oder ($\gamma$) definierten Zeichens in einer Formel A so durch eine Ersetzung durch das Definiens eliminierbar sind, daß eine äquivalente Formel B entsteht, die dieses Zeichen nicht mehr enthält, daß also für diese Definitionsschemata das Kriterium der Eliminierbarkeit erfüllt ist. Für Definitionen nach dem Schema ($\beta'$) ist aber die Eliminierbarkeit gegeben, da wegen $\Lambda x_1 \ldots x_n V!yA$ für beliebige Formeln B gilt $B[z/F^*(x_1, \ldots, x_n)] \equiv Vy(B[z/y] \wedge A)$. Daraus erhält man aber mit MT5 die Ersetzbarkeit von Ausdrücken $F^*(x_1, \ldots, x_n)$ in beliebigen Formeln, in denen die $x_1, \ldots, x_n$ auch gebunden sein können. Entsprechendes gilt für die Definitionen nach ($\gamma'$). Andererseits erfüllen die Definitionen D nach ($\alpha$) bis ($\gamma'$) auch das Kriterium der Nichtkreativität. Denn ist $\mathfrak{B}$ ein Beweis für eine Formel A, die das definierte Zeichen Z nicht enthält und in dem D vorkommt, so kann man in allen Sätzen von $\mathfrak{B}$ Z in der angegebenen Weise eliminieren. Dadurch entstehe aus einem Satz C der Satz C' und aus $\mathfrak{B}$ die Satzfolge $\mathfrak{B}'$. D' ist nun ein orem, das ggf. unter Benutzung der Bedignung (d) und (b) aus und ($\gamma'$), also ohne D beweisbar ist. Das Gleiche gilt für die Sätze wo C ein Axiom ist. Geht C endlich in $\mathfrak{B}$ aus Formeln $C_1$ und $C_2$ n R1 bzw. aus einer Formel $C_1$ nach R2, so ist C' aus $C_1'$ und $C_2'$ . $C_1'$ ohne D ableitbar, wie man sich leicht überlegt. $\mathfrak{B}'$ läßt sich also inen Beweis für A umformen, in dem die Definitionsformel D nicht r vorkommt.

Jmgekehrt gilt nun auch: erfüllt eine Definitionsformel D die erien der Eliminierbarkeit und der Nichtkreativität bzgl. einer elementaren Theorie $T$ in nichttrivialer Weise, so daß $T$ erweitert um D konsistent ist, so läßt sich D äquivalent in eine Definitionsformel nach ($\alpha$) bzw. ($\beta'$) oder ($\gamma'$) umformen. Wir zeigen das für die Definition einer n-stelligen PK F und überlassen die restlichen Fälle dem Leser als Übungsaufgabe. Erfüllt D das Kriterium der Eliminierbarkeit, so gibt es wegen R2 eine Formel A, die F nicht enthält, so daß gilt 1) $T \vdash \mathrm{D} \supset \wedge x_1 \ldots x_n(\mathrm{F}(x_1, \ldots, x_n) \equiv \mathrm{A})$, wobei $x_1, \ldots, x_n$ n verschiedene GV sind, die nicht frei in D vorkommen. A kann dabei nicht von Konstanten abhängen, die in $T$ noch nicht definiert worden sind, da solche Konstanten weder in $T$, d. h. in den Axiomen und den früheren Definitionsformeln von $T$, noch in D vorkommen. Kommen in A neben den GV $x_1, \ldots, x_n$ nun zusätzliche GV $y_1, \ldots, y_m$ frei vor, so muß gelten C) $\wedge x_1 \ldots x_n y_1 \ldots y_m y'_1 \ldots y'_m(\mathrm{A}[y_1, \ldots, y_m] \equiv \mathrm{A}[y_1/y'_1, \ldots, y_m/y'_m])$, wenn D das Kriterium der Nichtkreativität erfüllt, da C in $T$ aus D ableitbar ist, und C die Konstante F nicht enthält. Gilt aber C, so kann man, wie unter ($\alpha$) angegeben, A durch eine Formel ersetzen, die nur die GV $x_1, \ldots, x_n$ frei enthält. Unter ($\alpha$) haben wir uns auch schon überlegt, wie A in eine Formel umzuformen ist, die genau die GV $x_1, \ldots, x_n$ frei enthält, wenn einige der GV $x_1, \ldots, x_n$ nicht frei in A vorkommen. Der Satz D') $\wedge x_1 \ldots x_n(\mathrm{F}(x_1, \ldots, x_n) \equiv \mathrm{A})$ hat dann aber die Gestalt einer expliziten Definitionsformel nach ($\alpha$). Um zu zeigen, daß D sich in $T$ durch D' ersetzen läßt, muß im Hinblick auf (1) noch gezeigt werden, daß auch gilt 2) $T \vdash \mathrm{D}' \supset \mathrm{D}$, d. h. daß jedes Modell $\mathfrak{B}$ von $T$ und D' auch D erfüllt. Es gilt nun a) Zu jedem Modell $\mathfrak{B}$ von $T$ gibt es ein Modell $\overline{\mathfrak{B}}$ mit $\overline{\mathfrak{B}} \overline{\overline{\scriptstyle \mathrm{F}}} \mathfrak{B}$ und $\overline{\mathfrak{B}}(\mathrm{D}) = \mathfrak{w}$. Denn nach (1) ist die Formel $\mathrm{D}[\mathrm{F}/\mathrm{A}[x_1, \ldots, x_n]]$ in $T$ aus D ableitbar, d. h. alle Modelle von $T$ und D erfüllen diese Formel. In ihr kommt F aber nicht vor, so daß sie auch in $T$ ohne D beweisbar sein muß nach dem Kriterium der Nichtkreativität, d. h. alle Modelle von $T$ müssen $\mathrm{D}[\mathrm{F}/\mathrm{A}[x_1, \ldots, x_n]]$ erfüllen. Gäbe es nun ein Modell $\mathfrak{B}$ von $T$, zu dem es kein $\overline{\mathfrak{B}}$ mit $\overline{\mathfrak{B}} \overline{\overline{\scriptstyle \mathrm{F}}} \mathfrak{B}$ und $\overline{\mathfrak{B}}(\mathrm{D}) = \mathfrak{w}$ gibt, so wäre auch $\mathfrak{B}(\mathrm{D}[\mathrm{F}/\mathrm{A}[x_1, \ldots, x_n]]) = \mathfrak{f}$, d. h., die Nichtkreativität von D bestünde nicht. — Nach (1) gilt aber nun, daß es zu jedem Modell $\mathfrak{B}$ von $T$ auch nur ein $\overline{\mathfrak{B}}$ mit $\overline{\mathfrak{B}} \overline{\overline{\scriptstyle \mathrm{F}}} \mathfrak{B}$ und $\overline{\mathfrak{B}}(\mathrm{D}) = \mathfrak{w}$ geben kann, da $\overline{\mathfrak{B}}(\mathrm{F})$ durch die Werte von $\mathfrak{B}$ für die in A frei vorkommenden Variablen bzw. Konstanten und die Forderung $\overline{\mathfrak{B}}(\mathrm{D}') = \mathfrak{w}$ festgelegt ist. Erfüllt also ein Modell $\mathfrak{B}$ von $T$ die Formel D', so auch D, da es zu $\mathfrak{B}$ genau ein $\overline{\mathfrak{B}}$ mit $\overline{\mathfrak{B}} \overline{\overline{\scriptstyle \mathrm{F}}} \mathfrak{B}$ gibt, das D erfüllt und dieses $\overline{\mathfrak{B}}$ nach (1) auch D' erfüllt, also mit $\mathfrak{B}$ identisch ist.

Damit ist die Behauptung (2) bewiesen und also die Ersetzbarkeit einer Definitionsformel D für eine n-stellige PK, welche die Kriterien der Eliminierbarkeit und der Nichtkreativität in nichttrivialer Weise erfüllt, durch eine explizite Definition nach ($\alpha$).

Auf Grund der Definitionsregeln für die Sprache $\mathfrak{P}$ der elementaren Systeme kann man nun auch den Begriff der *Unabhängigkeit* der Grundbegriffe eines Systems $T$ formulieren, wie das zuerst A. PADOA getan hat[1]. Wir haben bereits oben auf eine Analogie zwischen den Grundausdrücken und den Axiomen eines Systems $T$ hingewiesen. Ebenso wie man nun für die Axiome die Frage der Unabhängigkeit stellen kann[2], kann man auch fragen, ob die Grundausdrücke von $T$ unabhängig sind. Dabei wird man eine n-stellige PK F bzw. eine n-stellige FK F* bzw. eine GK a von $T$ *abhängig* von den übrigen Grundausdrücken nennen, wenn sie sich nach dem Schema ($\alpha$) bzw. ($\beta'$) oder ($\gamma'$) durch diese übrigen Grundausdrücke definieren läßt. Das System der Grundausdrücke von $T$ heißt dann *unabhängig*, wenn keiner dieser Grundausdrücke von den übrigen abhängig ist.

PADOA hat nun folgendes Kriterium für die Unabhängigkeit einer n-stelligen PK F von $T$ angegeben:

P) F ist unabhängig, wenn es zwei Modelle $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ von $T$ gibt und GV $y_1, \ldots, y_n$, so daß gilt $\mathfrak{B}_1 \underset{\mathrm{F}}{=} \mathfrak{B}_2$ und $\mathfrak{B}_1(\mathrm{F}(y_1, \ldots, y_n)) \neq \mathfrak{B}_2(\mathrm{F}(y_1, \ldots, y_n))$.

Daß dieses Kriterium hinreicht zum Nachweis der Unabhängigkeit von F ergibt sich wie folgt: Wäre in $T$ eine Formel nach dem Schema ($\alpha$) beweisbar, so würde für jedes Modell $\mathfrak{B}_1$ von $T$ gelten: $\mathfrak{B}_1(\wedge x_1 \ldots x_n (\mathrm{F}(x_1, \ldots, x_n) \equiv \mathrm{A})) = \mathfrak{w}$, also für alle $\overline{\mathfrak{B}}_1$ mit $\overline{\mathfrak{B}}_1 \underset{x_1, \ldots, x_n}{=} \mathfrak{B}_1$ $\overline{\mathfrak{B}}_1(\mathrm{A}) = \overline{\mathfrak{B}}_1(\mathrm{F}(x_1, \ldots, x_n))$. Für $\overline{\mathfrak{B}}_1(x_i) = \mathfrak{B}_1(y_i)$ ($i = 1, \ldots, n$) erhielten wir nach 2.2.2.4 also insbesondere $\overline{\mathfrak{B}}_1(\mathrm{A}) = \mathfrak{B}_1(\mathrm{F}(y_1, \ldots, y_n))$. Ebenso erhielten wir für ein Modell $\mathfrak{B}_2$ von $T$ und ein $\overline{\mathfrak{B}}_2$ mit $\overline{\mathfrak{B}}_2 \underset{x_1, \ldots, x_n}{=} \mathfrak{B}_2$ und $\overline{\mathfrak{B}}_2(x_i) = \mathfrak{B}_2(y_i)$ auch $\overline{\mathfrak{B}}_2(\mathrm{A}) = \mathfrak{B}_2(\mathrm{F}(y_1, \ldots, y_n))$. Aus $\overline{\mathfrak{B}}_1 \underset{x_1, \ldots, x_n}{=} \mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_1 \underset{\mathrm{F}}{=} \mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{B}_2 \underset{x_1, \ldots, x_n}{=} \overline{\mathfrak{B}}_2$, $\overline{\mathfrak{B}}_1(x_i) = \mathfrak{B}_1(y_i) = \mathfrak{B}_2(y_i) = \overline{\mathfrak{B}}_2(x_i)$ ergäbe sich dann aber $\overline{\mathfrak{B}}_2 \underset{\mathrm{F}}{=} \overline{\mathfrak{B}}_1$, also nach 2.2.2.3 $\overline{\mathfrak{B}}_1(\mathrm{A}) = \overline{\mathfrak{B}}_2(\mathrm{A})$, da A die PK F nicht enthält, und damit $\mathfrak{B}_1(\mathrm{F}(y_1, \ldots, y_n)) = \mathfrak{B}_2(\mathrm{F}(y_1, \ldots, y_n))$. Ist das Kriterium von

[1] Vgl. [52] und [53], sowie die Darstellung in dem Aufsatz „Some methodological investigations on the definability of concepts" in [76], S. 296–319.

[2] Vgl. den Abschnitt 1.3.5.

PADOA also erfüllt, so ist eine Formel nach dem Schema (α) in $T$ nicht beweisbar und F ist unabhängig.

Als Übungsaufgabe stelle man zu (P) entsprechende Kriterien für die Unabhängigkeit einer FK und einer GK auf!

### 6.3.4 Implizite Definitionen

FREGE hat sich in seiner Definitionslehre auch ausführlich mit dem Problem der impliziten Definitionen auseinandergesetzt[1]. Den Anstoß dazu gaben D. HILBERTS „Grundlagen der Geometrie" von 1899. HILBERT hatte in dieser Schrift ein Axiomensystem der Geometrie angegeben, das sich von der Axiomatik EUKLIDS insbesondere auch dadurch unterscheidet, daß nicht versucht wird, die geometrischen Grundbegriffe wie ‚Punkt', ‚Ebene', ‚Gerade' usf. explizit zu definieren oder doch zu erläutern. Diese Definitionsversuche bilden gerade einen der schwächsten Punkte des Systems von EUKLID. Die geometrischen Grundbegriffe sollen vielmehr bei HILBERT nur durch die Aussagen charakterisiert werden, die in den Axiomen über sie gemacht werden. HILBERT hatte dabei die Formulierung gebraucht, die Grundbegriffe würden durch die Axiome „definiert". Gegen diese Behauptung HILBERTS hat sich FREGE in mehreren Aufsätzen und Briefen gewendet.

Wir können das Problem solcher impliziter Definitionen von Grundbegriffen durch ein Axiomensystem einfacher anhand des uns schon bekannten Systems der Peanoaxiome diskutieren:

a1) $N(0)$

a2) $\wedge x(N(x) \supset N(x'))$

a3) $\wedge xy(N(x) \wedge N(y) \wedge x' = y' \supset x = y)$

a4) $\wedge x \neg(x' = 0)$

a5) $\wedge f(f(0) \wedge \wedge x(N(x) \wedge f(x) \supset f(x')) \supset \wedge x(N(x) \supset f(x)))$.

Dabei steht „$N(x)$" für „$x$ ist eine natürliche Zahl", „$0$" für die Null, „$x'$" für „der Nachfolger von $x$". Dieses System enthält die Grundkonstanten „$N$", „$0$" und „$'$" und die Frage ist, ob man sagen kann, daß diese drei Grundkonstanten durch die Peanoaxiome definiert werden. Zur Begründung einer solchen Behauptung könnte man in diesem Fall etwa anführen, daß die Modelle dieses Axiomensytems bis auf isomorphe Transformationen festgelegt sind[2], daß also die

[1] Vgl. dazu [21], sowie den Briefwechsel FREGES mit HILBERT (unveröffentlicht).

[2] Vgl. dazu den Abschnitt 4.5.

Struktur der Grundbegriffe durch die Axiome vollständig charakterisiert ist. Dennoch kann von einer Definition dieser Grundbegriffe hier aber nicht die Rede sein. Die drei Grundkonstanten wären nach unseren früheren Überlegungen vielmehr nur dann durch diese Axiome definiert, wenn sich aus den Axiomen eine Folge von Definitionsformeln D1, D2, D3 für die Konstanten nach den Schemata $(\alpha)$, $(\beta)$ bzw. $(\beta')$ und $(\gamma)$ bzw. $(\gamma')$ ableiten ließe, so daß im Definiens von D1 nur Grundausdrücke der P.L. vorkämen, im Definiens von D2 ev. auch noch die in D1 erklärte Konstante, und im Definiens von D3 daneben auch noch ev. die in D2 erklärte Konstante. Mit D1, D2 und D3 wären dann umgekehrt auch die Peanoaxiome beweisbar und wir hätten so ein logisches Modell der Peanoaxiome im Rahmen der P.L. zweiter Stufe gewonnen. Die Folgerungen aus den Peanoaxiomen würden dann nicht nur hypothetisch gelten in dem Sinn, daß sie aus a1 bis a5 im Rahmen der P.L. ableitbar sind, sondern kategorisch, da sie mit Hilfe von Explizitdefinitionen rein logisch beweisbar wären. Da aber aus den Peanoaxiomen offensichtlich keine Definitionsformeln für die drei Grundkonstanten abgeleitet werden können, kann von einer Definition dieser Konstanten durch die Axiome nicht gesprochen werden. Allgemein wird man von einer Definition von Grundbegriffen durch Axiome nur dann sprechen können, wenn sich aus den Axiomen Definitionsformeln für die Grundbegriffe ableiten lassen. Würde man beliebige Axiomensysteme als Definitionssysteme für ihre Grundbegriffe zulassen, so käme man, wie Frege hervorgehoben hat, zu recht eigenartigen Folgerungen. Es wäre dann z. B. der ontologische Gottesbeweis glänzend gerechtfertigt: man könnte ja dann die Prädikate „$V(x)$" für „$x$ ist ein vollkommenes Wesen" und „$G(x)$" für „$x$ ist ein göttliches Wesen" durch die Axiome „definieren": $\bigvee xV(x)$ und $\bigwedge x(G(x) \equiv V(x))$. Daraus erhält man durch rein logische Deduktion den Satz $\bigvee xG(x)$: Es gibt ein göttliches Wesen. Da nun die Axiome als Definitionen angesehen werden könnten, würde diese Folgerung nicht nur hypothetisch gelten, d. h. für alle Interpretationen, die beide Axiome erfüllen, sondern kategorisch. Allgemein ließe sich auf diesem Wege zu einem Begriff auch gleich seine Erfüllbarkeit hinzudefinieren, zu einem Gegenstand beliebige Eigenschaften, die er haben soll, usw.

Axiomensysteme definieren also im allgemeinen nicht ihre Grundbegriffe, sondern sie definieren nur einen Begriff zweiter Stufe, den Modellbegriff — im Beispiel den Begriff: ein Tripel $\langle F, G^*, a\rangle$ bestehend aus einem einstelligen Begriff $F$, einer einstelligen Funktion $G^*$ und einem Objekt $a$ ist ein Modell der Peanoaxiome, d. h. es gibt eine Interpretation $\mathfrak{B}$, die a1 bis a5 erfüllt und für die gilt $\mathfrak{B}$(„$N$“) $= F$, $\mathfrak{B}$(„$'$“) $= G^*$ und $\mathfrak{B}$(„$0$“) $= a$. Definiert wird also nur eine Beziehung zwischen $F$, $G^*$ und $a$, die bestehen muß, damit wir dieses Tripel als Tripel eines natürlichen Zahlbegriffes, einer Nachfolgerfunktion und eines Nullelements ansprechen können — nicht hingegen die Eigenschaft, ein natürlicher Zahlbegriff, eine Nachfolgerfunktion, ein Nullelement zu sein für sich, und erst recht nicht die Eigenschaft, eine natürliche Zahl zu sein, die Nachfolgerfunktion oder die Null.

Die Leistung in der Aufstellung der Peanoaxiome liegt nicht darin, daß hier eine Definition der arithmetischen Grundbegriffe gegeben würde, sondern darin, daß hier die Eigenschaften fixiert werden, die von diesen Begriffen beim Aufbau der Arithmetik allein verwendet werden, daß die Postulate, auf denen die Arithmetik beruht, einer genauen Überprüfung zugänglich werden und daß damit die Arithmetik als Menge der Folgerungen, die sich aus diesen Postulaten ziehen lassen, genau abgegrenzt wird. Entsprechendes gilt auch für HILBERTS geometrisches Axiomensystem wie allgemein für die Axiomatisierungen von Theorien.

# Literaturverzeichnis


[1] ACKERMANN, W.: Solvable Cases of the Decision Problem, Amsterdam 1954.

[2] BARTLETT, J. M.: Funktion und Gegenstand, Dissertation. München 1961.

[3] BETH, E. W.: Semantic entailment and formal derivability, Mededelingen der Kon. Nederlandse Akad. van Wet., ns. **18** (1955), S. 309–342.

[4] – The Foundations of Mathematics, Amsterdam 1959.

[5] BOCHEŃSKI, I. M.: Formale Logik, Freiburg 1956.

[6] CARNAP, R.: Meaning and Necessity, Chicago 1947.

[7] – Einführung in die symbolische Logik, Wien² 1960.

[8] CHURCH, A.: A note on the Entscheidungsproblem, Journal for Symbolic Logic **1** (1936), S. 40 f. und 101 f.

[9] – Introduction to Mathematical Logic I, Princeton 1956.

[10] CURRY, H. B.: Foundations of Mathematical Logic, New York 1963.

[11] DEDEKIND, R.: Was sind und was sollen die Zahlen? Braunschweig 1887.

[12] FRAENKEL, A. A.: Abstract Set Theory, Amsterdam 1961.

[13] – und Y. BAR-HILLEL: Foundations of Set Theory, Amsterdam 1958.

[14] FREGE, G.: Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens, Halle 1879.

[15] – Über die wissenschaftliche Berechtigung einer Begriffsschrift, Zeitschrift f. Philos. und philos. Kritik, N. F. **81** (1882), S. 48–56.

[16] – Die Grundlagen der Arithmetik, Breslau 1884.

[17] – Über formale Theorien der Arithmetik, Jenaische Zeitschr. f. Naturwiss. **19** (1885), Suppl.-Heft, S. 94–104.

[18] – Grundgesetze der Arithmetik, 2 Bde., Jena 1893/1903.

[19] – Lettera del Sig. G. Frege all'Editore (deutscher Brief an G. Peano vom 29. 9. 1896), Revue de Mathem. (Riv. di Mat.) **6** (1896–1899), S. 53–59.

[20] – Über die Begriffsschrift des Herrn Peano und meine eigene, Ber. d. Vhdlg. d. Kgl. Sächsischen Ges. d. Wiss. zu Leipzig, Math.-Phys. Classe **48** (1897), S. 361–378.

[21] – Über die Grundlagen der Geometrie, I–III, Jahresb. der dt. Math.-Vereinigung, I: **12** (1903), S. 319–324; II: ebd. S. 368–375; III/1:**15** (1906), S. 293–309; III/2: ebd. S. 377–403; III/3: ebd. S. 423–430.

[22] FREGE, G.: Der Gedanke. Eine logische Untersuchung, Beitr. zur Philos. d. Dt. Idealismus **1** (1918/19), S. 58–77.

[23] – Die Verneinung. Eine logische Untersuchung, ebd. S. 143–157.

[24] – Gedankengefüge, ebd. **3** (1923–1926), S. 36–51.

[25] GENTZEN, G.: Untersuchungen über das logische Schließen, Mathematische Zeitschr. **39** (1934/35), S. 176–210, 405–431.

[26] GÖDEL, K.: Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls, Monatshefte f. Math. und Physik **37** (1930), S. 349–360.

[27] – Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I, ebd. **38** (1931), S. 173–198.

[28] HALMOS, P. R.: Naive Set Theory, New York 1960.

[29] HASENJÄGER, G.: Eine Bemerkung zu Henkins Beweis für die Vollständigkeit des Prädikatenkalküls der ersten Stufe, Journal for Symbolic Logic **18** (1953), S. 42–48.

[30] HENKIN, L.: The completeness of the first-order functional calculus, Journal for Symbolic Logic **14** (1949), S. 159–166.

[31] – Completeness in the theory of types, ebd. **15** (1950), S. 81–91.

[32] HERMES, H.: Aufzählbarkeit, Entscheidbarkeit, Berechenbarkeit, Berlin 1961.

[33] – Einführung in die Mathematische Logik, Stuttgart 1963.

[34] – Eine Termlogik mit Auswahloperator, Berlin 1965.

[35] – und GUMIN, H.: Die Soundness des Prädikatenkalküls auf der Basis der Quineschen Regeln, Archiv f. Mathem. Logik **2** (1956), S. 68–77.

[36] HEYTING, A.: Intuitionism, Amsterdam 1956.

[37] HILBERT, D., und W. ACKERMANN: Grundzüge der theoretischen Logik, Berlin[3] 1949.

[38] – und P. BERNAYS: Grundlagen der Mathematik, 2 Bde., Berlin 1934/1938.

[39] HINTIKKA, K. J. J.: A new approach to sentential logic, Soc. Scient. Fennica, Comm. physico-math. **17** (1953), Nr. 2.

[40] – Form and content in quantification theory, in: Two Papers on Symbolic Logic, Acta philos. Fennica **8** (1955), S. 7–55.

[41] – Notes on quantification theory, Soc. Scient. Fennica Comm. physico-math. **17** (1955), Nr. 12.

[42] KLEENE, S. C.: Introduction to Metamathematics, Amsterdam 1952.

[43] KNEALE, W., und M. KNEALE: The Development of Logic, Oxford 1962.

[44] KUTSCHERA, F.: Die Antinomien der Logik, Freiburg 1964.

[45] – Zur semantischen Begründung der klassischen und der intuitionistischen Logik, Notre Dame Journal of Formal Logic **7** (1966), No. 1.

[46] LANDAU, E.: Grundlagen der Analysis, Leipzig 1930.

[47] LORENZEN, P.: Formale Logik, Berlin 1958.

[48] LÖWENHEIM, L.: Über Möglichkeiten im Relativkalkül, Math. Annalen **76** (1915), S. 447–470.

[49] Łukasiewicz, J.: Zur Geschichte der Aussagenlogik, Erkenntnis **5** (1935/36), S. 111–131.

[50] — Aristotle's Syllogistic, Oxford[2] 1957.

[51] — und A. Tarski: Untersuchungen über den Aussagenkalkül (1930), abgedr. in [76], S. 38–59.

[52] Padoa, A.: Un nouveau système irréductible de postulats pour l'algèbre, C. R. Deuxième Congrès International des Mathématiciens, Paris 1902, S. 249–256.

[53] — Le problème No. 2 de M. David Hilbert, L'Enseignement Math. **5** (1903), S. 85–91.

[54] Patzig, G.: Die aristotelische Syllogistik, Göttingen 1959.

[55] Prawitz, D.: Natural Deduction, Stockholm 1965.

[56] Quine, W. V.: On natural deduction, Journal for Symbolic Logic **15** (1950), S. 93.

[57] — On Freges way out, Mind **64** (1955), S. 145–159.

[58] — Mathematical Logic, Cambridge/Mass.[2] 1958.

[59] — Methods of Logic, New York[2] 1959.

[60] Russell, B.: On denoting, Mind **14** (1905), S. 479–493.

[61] Schmidt, H. A.: Mathematische Gesetze der Logik I. Vorlesungen über Aussagenlogik, Berlin 1960.

[62] Scholz, H.: Abriß der Geschichte der Logik,[2] Freiburg 1959.

[63] — Mathesis universalis, Abhandlungen zur Philosophie als strenger Wissenschaft, hrsg. von H. Hermes, F. Kambartel und J. Ritter Basel 1961.

[64] Schütte, K.: Beweistheorie, Berlin 1960.

[65] Skolem, Th.: Logisch-kombinatorische Untersuchungen über die Erfüllbarkeit oder Beweisbarkeit mathematischer Sätze nebst einem Theorem über dichte Mengen, Skrifter utgit av Videnskapsselskapet i Kristiania, I. Matematisk naturvidenskabelig klasse 1920, No. 4.

[66] — Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre, Wissenschaftliche Vorträge, gehalten auf dem 5. Kongreß der Skandinavischen Mathematiker in Helsingfors vom 4. bis 7. Juli 1922, Helsingfors 1923, S. 217–232.

[67] — Über die Nicht-charakterisierbarkeit der Zahlenreihe mittels endlich oder abzählbar unendlich vieler Aussagen mit ausschließlich Zahlenvariablen, Fund. math. **23** (1934), S. 150–161.

[68] — Sur la portée du théorème de Löwenheim-Skolem, Les entretiens de Zurich sur les fondements et la méthode des sciences mathématiques, 6–9 Décembre 1938, Exposés et discussions, Zürich 1941, S. 25–47.

[69] Sobociński, B.: L'analyse de l'antinomie Russellienne par Leśniewski, Methodos **2** (1949), S. 220–228.

[70] Stegmüller, W.: Das Wahrheitsproblem und die Idee der Semantik, Wien 1957.

[71] — Unvollständigkeit und Unentscheidbarkeit, Wien 1959.

[72] SURÁNYI, J.: Reduktionstheorie des Entscheidungsproblems im Prädikatenkalkül der ersten Stufe, Berlin 1959.

[73] TARSKI, A.: Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen (1935), abgedr. in [76], S. 152–278.

[74] – Introduction to Logic and to The Methodology of Deductive Sciences, New York² 1946.

[75] – The semantic conception of truth and the foundations of semantics, in: FEIGL und SELLARS: Readings in Philosophical Analysis, New York 1949, S. 52–84.

[76] – Logic, Semantics, Metamathematics, Oxford 1956.

[77] WANG, HAO, und R. MCNAUGHTON: Les systèmes axiomatiques de la théorie des ensembles, Paris 1953.

[78] WHITEHEAD, A. N., und B. RUSSELL: Principia Mathematica, 3 Bde., Cambridge² 1925–1927.

# Sachverzeichnis

# Verzeichnis der Abkürzungen und Symbole

| | | |
|---|---|---|
| AF | für | *Annahmeformel* |
| A.L. | für | *Aussagenlogik* |
| a.l. | für | *aussagenlogisch* |
| FK | für | *Funktionskonstante* |
| FV | für | *Funktionsvariable* |
| GK | für | *Gegenstandskonstante* |
| GV | für | *Gegenstandsvariable* |
| HF | für | *Hinterformel* |
| P.L. | für | *Prädikatenlogik* |
| p.l. | für | *prädikatenlogisch* |
| PK | für | *Prädikatkonstante* |
| PV | für | *Prädikatvariable* |
| SF | für | *Sekundärformel* |
| SQ | für | *Sequenz* |
| SS | für | *Sequenzensatz* |
| SV | für | *Satzvariable* |
| VF | für | *Vorderformel* |

| | | |
|---|---|---|
| $\neg$ | für | *Negation* |
| $\wedge$ | für | *Konjunktion* |
| $\vee$ | für | *Disjunktion* |
| $\supset$ | für | *Implikation* |
| $\equiv$ | für | *Äquivalenz* |
| $\mid$ | für | *Exklusion* |
| $\rightarrowtail\!\!\!\leftarrowtail$ | für | *Kontravalenz* |
| $\dagger$ | für | *Rejektion* |
| $\bigwedge$ | für | *Alloperator, Nullklasse* |
| $\bigvee$ | für | *Existenzoperator, Allklasse* |
| $=$ | für | *Identität* |
| $\neq$ | für | *ungleich* |
| $\iota$ | für | *Kennzeichnungsoperator* |
| $x'$ | für | *Nachfolgerfunktion* |

$\kappa, {}^\wedge$ für *Funktionalabstraktion*
$f \circ g$ für *Relationsprodukt*
$f^n$ für *Relationspotenz*
$f^{\geqslant 0}$ für *Relationskette 1. Art*
$f^{>0}$ für *Relationskette 2. Art*
$\lambda$ für *Klassenabstraktion*
$\varepsilon$ für *Elementschaftsrelation*
$\{x_1, \ldots, x_n\}$ für *Menge mit den Elementen* $x_1, \ldots, x_n$
$\frown$, $\cap$ für *Durchschnitt*
$\smile$, $\cup$ für *Vereinigung*
$\overline{\phantom{x}}$ für *Komplement*
$\subset$ für *Inklusion*
$\sqsubset$ für *Relation der echten Teilmenge*
$\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ für *n-tupel mit den Gliedern* $x_1, \ldots, x_n$
$s \times t$ für *Cartesisches Produkt*
$:=$ für *definitorische Gleichheit*
$\rightarrow$ für *Beziehung der Folge*
$\leftrightarrow$ für *Beziehung der umkehrbaren Folge*
$\vdash$ für *Ableitbarkeit*
$\Rightarrow$ für *Sequenzensymbol*
$<$ für *kleiner*
$\leqslant$ für *kleiner oder gleich*
$>$ für *größer*
$\geqslant$ für *größer oder gleich*
A[p/B] für *Substitution von* B *für* p *in* A
A[x/t] für *freie Substitution von* t *für* x *in* A
A[f/B[$\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_\mathrm{n}$]] für *freie Substitution von* B[$\mathrm{x}_1, \ldots, x_\mathrm{n}$] *für* f *in* A
A[[B]] für A *enthält an einer bestimmten Stelle* B *oder ist mit* B *identisch.*

# Verzeichnis der Axiome und Definitionen

**A 1** $A \supset (B \supset A)$

**A 2** $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$

**A 3** $(\neg A \supset \neg B) \supset (B \supset A)$

**A 4** $\wedge x A[x] \supset A[x/t]$, wo x frei ist für t in $A[x]$.

**A 5** $x = x$

**A 6** $x = y \supset (A[x] \supset A[x/y])$

**A 7** $\wedge x_1 \ldots x_n \vee ! y f(x_1, \ldots, x_n, y)$ für alle f aus $\Pi$.

**A 8** $\wedge x_1 \ldots x_n f(x_1, \ldots, x_n, f^*(x_1, \ldots, x_n))$ für alle f aus $\Pi$.

**A 9** $\wedge f B[f] \supset B[f/A[x_1, \ldots, x_n]]$, wo f eine n-stellige PV ist, die frei ist für $A[x_1, \ldots, x_n]$ in $B[f]$.

**A 10** $t \varepsilon \lambda y A[y] \equiv A[y/t]$

**A 11** $\wedge x(x \varepsilon s \equiv x \varepsilon t) \supset s = t$

**A 12** $\wedge xy(x \varepsilon t \wedge y \varepsilon t \supset \vee z(z \varepsilon x) \wedge \neg \vee z(z \varepsilon x \wedge z \varepsilon y)) \supset \vee u \wedge x(x \varepsilon t \supset \vee ! z(z \varepsilon u \wedge \wedge z \varepsilon x))$

**D 1** $A \vee B := \neg A \supset B$

**D 2** $A \wedge B := \neg(\neg A \vee \neg B)$

**D 3** $A \equiv B := (A \supset B) \wedge (B \supset A)$

**D 4** $\vee x A := \neg \wedge x \neg A$

**D 5** $x \neq y := \neg x = y$

**D 6** $\vee ! x A[x] := \vee x(A[x] \wedge \wedge y(A[x/y] \supset y = x))$, wo y nicht frei in $A[x]$ vorkommt.

**D 7** $B[y/\iota x A[x]] := \vee ! x A[x] \wedge \vee x(A[x] \wedge B[y/x]) \vee \neg \vee ! x A[x] \wedge B[y/u]$

**D 8** $\vee f A := \neg \wedge f \neg A$

**D 9** $x = y := \wedge f(f(x) \equiv f(y))$

**D 10** $f \circ g(x, y) := \vee z(f(x, z) \wedge g(z, y))$

**D 11** $f^{1}(x, y) := f(x, y)$,
$f^{n+1}(x, y) := f \circ f^{n}(x, y)$,
$f^{-1}(x, y) := f(y, x)$,
$f^{-n}(x, y) := (f^{n})^{-1}(x, y)$

**D 12** $E(f, g) := \wedge xy(f(x) \wedge g(x, y) \supset f(y))$

**D 13** $g^{\geqslant 0}(x, y) := \wedge f(E(f, g) \wedge f(x) \supset f(y))$

**D 14** $g^{\geqslant 0}(x, y) := g \circ g^{\geqslant 0}(x, y)$
**D 15** $\Lambda := \lambda z(z \neq z)$
**D 16** $V := \lambda z(z = z)$
**D 17** $\{x\} := \lambda z(z = x)$
**D 18** $s \cap t := \lambda z(z\varepsilon s \wedge z\varepsilon t)$
**D 19** $s \cup t := \lambda z(z\varepsilon s \vee z\varepsilon t)$
**D 20** $\bar{s} := \lambda z \neg z\varepsilon s$
**D 21** $s \subset t := \bigwedge z(z\varepsilon s \supset z\varepsilon t)$
**D 22** $s \sqsubset t := s \subset t \wedge s \neq t$
**D 23** $s - t := \lambda z(z\varepsilon s \wedge \neg z\varepsilon t)$
**D 24** $\bigcap s := \lambda z \bigwedge y(y\varepsilon s \supset z\varepsilon y)$
**D 25** $\bigcup s := \lambda z \bigvee y(y\varepsilon s \wedge z\varepsilon y)$
**D 26** $\{s_1, \ldots, s_n\} := \lambda z(z = s_1 \vee \ldots \vee z = s_n)$
**D 27** $\langle s, t\rangle := \{\{s\}, \{s, t\}\}$
**D 28** $\langle s_1, \ldots, s_{n+1}\rangle := \langle\langle s_1, \ldots, s_n\rangle, s_{n+1}\rangle$
**D 29** $C^n := \lambda x \bigvee y_1 \ldots y_n(x = \langle y_1, \ldots, y_n\rangle)$
**D 30** $R^n(r) := r \subset C^n$
**D 31** $r(s_1, \ldots, s_n) := \langle s_1, \ldots, s_n\rangle \varepsilon r$

# Verzeichnis der Theoreme

| | |
|---|---|
| **T 1** | $\vdash A \supset A$ |
| **T 2** | $\vdash \neg A \supset (A \supset B)$ |
| **T 3** | $\vdash \neg\neg A \supset A$ |
| **T 4** | $\vdash A \supset \neg\neg A$ |
| **T 5** | $A \supset B, B \supset C \vdash A \supset C$ |
| **T 6 a** | $A \supset B \vdash \neg B \supset \neg A$ |
| **T 6 b** | $\neg A \supset \neg B \vdash B \supset A$ |
| **T 6 c** | $A \supset \neg B \vdash B \supset \neg A$ |
| **T 6 d** | $\neg A \supset B \vdash \neg B \supset A$ |
| **T 7** | $A \vdash \neg A \supset B$ |
| **T 8** | $A \supset (A \supset B) \vdash A \supset B$ |
| **T 9** | $A \supset (B \supset C) \vdash B \supset (A \supset C)$ |
| **T 10** | $A \supset \neg A \vdash \neg A$ |
| **T 11** | $\neg A \supset A \vdash A$ |
| **T 12** | $A \vee A \vdash A$ |
| **T 13** | $A \vdash A \vee B$ |
| **T 14** | $B \vdash A \vee B$ |
| **T 15** | $A \vee B \vdash B \vee A$ |
| **T 16** | $A \supset B \vdash C \vee A \supset C \vee B$ |
| **T 17** | $A \supset C, B \supset C \vdash A \vee B \supset C$ |
| **T 18** | $A \vee (B \vee C) \vdash B \vee (A \vee C)$ |
| **T 19** | $A \vee (B \vee C) \vdash (A \vee B) \vee C$ |
| **T 20** | $(A \vee B) \vee C \vdash A \vee (B \vee C)$ |
| **T 21** | $A \wedge B \vdash A$ |
| **T 22** | $A \wedge B \vdash B$ |
| **T 23** | $A, B \vdash A \wedge B$ |
| **T 24** | $\vdash A \equiv \neg\neg A$ |
| **T 25** | $A \equiv B \vdash \neg A \equiv \neg B$ |
| **T 26** | $A \equiv B, B \equiv C \vdash A \equiv C$ |
| **T 27** | $\vdash \neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$ |
| **T 28** | $\vdash \neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$ |
| **T 29** | $\vdash \neg(A \supset B) \equiv A \wedge \neg B$ |
| **T 30** | $A \wedge B \vdash B \wedge A$ |
| **T 31** | $\vdash A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$ |
| **T 32** | $A \vee B \supset C \vdash (A \supset C) \wedge (B \supset C)$ |
| **T 33** | $\vdash A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ |
| **T 34** | $\vdash A \wedge (B \vee C) \equiv A \wedge B \vee A \wedge C$ |

**T 35** $\vdash A \vee \neg A$

**T 36** $\vdash \neg(A \wedge \neg A)$

**T 37** $\vdash A \supset (B \supset C) \equiv A \wedge B \supset C$

**T 38** $A[x] \vdash_x \bigwedge x A[x]$

**T 39** $A[x] \supset B[x] \vdash_x \bigwedge x A[x] \supset \bigwedge x B[x]$

**T 40** $A[x] \equiv B[x] \vdash_x \bigwedge x A[x] \equiv \bigwedge x B[x]$

**T 41** $\vdash \bigwedge x A[x] \equiv \bigwedge y A[x/y]$ — wo x frei für y in $A[x]$ ist und y nicht frei in $A[x]$ vorkommt.

**T 42** $\vdash \bigwedge x A[x] \supset A[x/y]$

**T 43** $\vdash A[x/y] \supset \bigvee x A[x]$

**T 44** $A[x] \supset B \vdash_x \bigvee x A[x] \supset B$ — wo x nicht frei in B vorkommt.

**T 45** $\vdash \bigwedge x A \supset \bigvee x A$

**T 46 a** $\vdash \bigwedge x A \equiv \neg \bigvee x \neg A$

**T 46 b** $\vdash \bigwedge x \neg A \equiv \neg \bigvee x A$

**T 46 c** $\vdash \neg \bigwedge x A \equiv \bigvee x \neg A$

**T 46 d** $\vdash \neg \bigwedge x \neg A \equiv \bigvee x A$

**T 47** $\vdash \bigwedge x(A \supset B) \equiv A \supset \bigwedge x B$ — wo x nicht frei in A vorkommt.

**T 48** $\vdash \bigwedge x(B \supset A) \equiv \bigvee x B \supset A$ — wo x nicht frei in A vorkommt.

**T 49** $\vdash \bigwedge x(A \wedge B) \equiv \bigwedge x A \wedge \bigwedge x B$

**T 50** $\vdash \bigvee x(A \supset B) \equiv A \supset \bigvee x B$ — wo x nicht frei in A vorkommt.

**T 51** $\vdash \bigvee x(B \supset A) \equiv \bigwedge x B \supset A$ — wo x nicht frei in A vorkommt.

**T 52** $\vdash \bigvee x(A \vee B) \equiv \bigvee x A \vee \bigvee x B$

**T 53 a** $\vdash \bigwedge xy A \equiv \bigwedge yx A$

**T 53 b** $\vdash \bigvee xy A \equiv \bigvee yx A$

**T 54** $\bigvee x \bigwedge y A \vdash \bigwedge y \bigvee x A$

**T 55** $\vdash x = y \supset y = x$

**T 56** $\vdash x = y \wedge y = z \supset x = z$

**T 57** $\bigvee !x A[x] \vdash \bigvee x A[x]$

**T 58** $\bigvee !x A[x] \vdash \bigwedge yz(A[x/y] \wedge A[x/z] \supset y = z)$

**T 59** $\bigvee !x A[x] \vdash \bigvee x(A[x] \wedge B[x]) \equiv \bigwedge x(A[x] \supset B[x])$

**T 60** $\vdash \bigwedge x A[x] \supset A[x/t]$

**T 61** $\vdash A[x/t] \supset \bigvee x A[x]$

**T 62** $\bigvee !x A[x] \vdash A[x/\iota x A[x]]$

**T 63** $\vdash \bigwedge x(A[x] \equiv x = y) \supset y = \iota x A[x]$

**T 64** $\neg \bigvee !x A[x] \vdash \iota x A[x] = u$

**T 65** $\bigvee !x A[x] \vdash B[y/\iota x A[x]] \equiv \bigvee x(A[x] \wedge B[y/x])$

**T 66** $\vdash x = y \supset f^*(x) = f^*(y)$

**T 67** $\vdash (f \circ g) \circ h(x, y) \equiv f \circ (g \circ h)(x, y)$

**T 68** $\vdash g \circ f^0(x, y) \equiv f^0 \circ g(x, y) \equiv g(x, y)$

**T 69** $\vdash (f^{-1})^{-1}(x, y) \equiv f(x, y)$

**T 70** $\vdash (f \circ g)^{-1}(x, y) \equiv g^{-1} \circ f^{-1}(x, y)$

**T 71** $\vdash f^{m} \circ f^{n}(x, y) \equiv f^{m+n}(x, y)$ für $m, n \geqslant 0$

**T 72** $\vdash (f^{m})^{n}(x, y) \equiv f^{m \cdot n}(x, y)$ für $m, n \geqslant 0$

**T 73** $\vdash g^{n}(x, y) \supset g^{>0}(x, y)$ für $n > 0$

**T 74** $\vdash g^{>0}(x, y) \supset g^{\geqslant 0}(x, y)$

**T 75** $\vdash g^{>0}(x, y) \wedge g^{>0}(y, z) \supset g^{>0}(x, z)$

**T 76** $\vdash g^{\geqslant 0}(x, y) \wedge g^{\geqslant 0}(y, z) \supset g^{\geqslant 0}(x, z)$

**T 77** $\vdash g^{>0}(x, y) \equiv \bigwedge f(E(f, g) \wedge \bigwedge z(g(x, z) \supset f(z)) \supset f(y))$

**T 78** $\vdash s \cup t = t \cup s$

**T 79** $\vdash s \cap t = t \cap s$

**T 80** $\vdash (s \cup t) \cup r = s \cup (t \cup r)$

**T 81** $\vdash (s \cap t) \cap r = s \cap (t \cap r)$

**T 82** $\vdash s \cup (s \cap t) = s$

**T 83** $\vdash s \cap (s \cup t) = s$

**T 84** $\vdash s \cup \bar{s} = V$

**T 85** $\vdash s \cap \bar{s} = \Lambda$

**T 86** $\vdash s \cup (t \cap r) = (s \cup t) \cap (s \cup r)$

**T 87** $\vdash s \cap (t \cup r) = s \cap t \cup s \cap r$

**T 88** $\vdash s \cup \Lambda = s$

**T 89** $\vdash s \cap V = s$

**T 90** $\vdash s \cup s = s$

**T 91** $\vdash s \cap s = s$

**T 92** $\vdash s \cup V = V$

**T 93** $\vdash s \cap \Lambda = \Lambda$

**T 94** $s = t \vdash (\bar{s} \cup t) \cap (\bar{t} \cup s) = V$

**T 95** $(\bar{s} \cup t) \cap (\bar{t} \cup s) = V \vdash s = t$

**T 96** $\vdash s = \bar{\bar{s}}$

**T 97** $\vdash \overline{s \cap t} = \bar{s} \cup \bar{t}$

**T 98** $\vdash \overline{s \cup t} = \bar{s} \cap \bar{t}$

**T 99** $\vdash s \subset t \equiv \bar{s} \cup t = V$

**T 100** $\vdash s \subset s$

**T 101** $\vdash s \subset t \wedge t \subset r \supset s \subset r$

**T 102** $\vdash s \subset t \wedge t \subset s \supset s = t$

**T 103** $\vdash s - t = s \cap \bar{t}$

**T 104** $\vdash \bigwedge y(y \varepsilon s \supset \bigcap s \subset y)$

**T 105** $\vdash \bigwedge y(y \varepsilon s \supset y \subset \bigcup s)$

**T 106** $\vdash \langle s, t \rangle = \langle s', t' \rangle \equiv s = s' \wedge t = t'$

---

Druck: Dipl.-Ing. Schwarz' Erben KG, A–3910 Zwettl