Franz von Kutschera

Wissenschaftstheorie II

Grundzüge der allgemeinen Methodologie der empirischen Wissenschaften

Wilhelm Fink Verlag München

ISBN 3-7705-0885-8

Printed in Germany
Satz und Druck: Friedrich Pustet, Regensburg
Gebunden bei der Großbuchbinderei Sigloch, Stuttgart
Einbandgestaltung: Alfred Krugmann, Stuttgart

INHALT

Band I

4 DIE LEISTUNG EMPIRISCHER THEORIEN

Wir wollen uns in diesem Kapitel mit der Leistung empirischer Theorien befassen und uns z. B. die Frage stellen, ob empirische Theorien eine *kognitive* Funktion haben, d. h. Auskunft darüber geben, wie die Welt beschaffen ist, oder ob sie nur eine *instrumentelle Funktion* haben, d. h. nur Hilfsmittel für das praktische Handeln sind, indem sie Voraussagen über künftige Ereignisse machen.

Die Diskussion dieser Fragen erfordert aber verschiedene Vorarbeiten, die in den ersten Abschnitten dieses Kapitels geleistet werden sollen. Die wissenschaftstheoretische Relevanz der dort behandelten Themen beschränkt sich freilich nicht auf das Problem der Leistung empirischer Theorien.

4.1 Die Leistung theoretischer Terme

Wie das Problem der Interpretation empirischer Theorien ist auch das Problem ihrer Leistung eng mit den theoretischen Termen verknüpft, die in diesen Theorien vorkommen. Daher wollen wir in diesem Abschnitt die Funktion theoretischer Terme untersuchen. Wir gehen dabei so vor, daß wir zuerst zeigen, daß diese Terme prinzipiell entbehrlich sind, um uns dann zu überlegen, was bei ihrer Elimination verloren geht.

Wir haben schon im Abschnitt 3.3 gesehen, daß man von einer Theorie T (als Menge ihrer Axiome, die wir im folgenden als endlich voraussetzen) übergehen kann zum Ramsey-Satz R(T) von T, indem man die Konjunktion T* der Axiome von T bildet, die theoretischen Terme durch passende Variablen ersetzt und diese durch T* vorangestellte Existenzquantoren bindet. Ist S die T zugrundeliegende Sprache und S_B derjenige Teil von S, der die Beobachtungssprache darstellt, so lassen sich, wie gezeigt wurde, alle Sätze von S_B, die aus T folgen, auch aus R(T) ableiten und umgekehrt, so daß T und R(T) denselben empirischen Gehalt im Sinne von D3.4–1 haben. Definiert man:

D4.1–1: Zwei Theorien heißen *empirisch äquivalent*, wenn sie denselben empirischen Gehalt haben,

so leisten empirisch äquivalente Theorien zur Gewinnung von Sätzen der Beobachtungssprache dasselbe. Man kann also theoretische Terme prinzipiell immer dadurch vermeiden, daß man von T zum Ramsey-Satz R(T) übergeht.

Die prinzipielle Eliminierbarkeit theoretischer Terme kann noch auf einem zweiten Weg bewiesen werden:

C.G. Hempel hat in [58], S. 210f. darauf hingewiesen, daß der empirische Gehalt E(T) von T, d.h. die Menge der aus T ableitbaren nichtanalytischen Sätze von S_B, trivialerweise mit T empirisch äquivalent ist und keine theoretischen Terme enthält. E(T) ist nun zwar im allgemeinen eine unendliche Satzmenge, die (ohne Rückgriff auf die theoretische Terme enthaltende Theorie T) nicht axiomatisch charakterisiert ist und somit keine Theorie darstellt, aber man kann E(T) axiomatisieren, wie W.Craig gezeigt hat,[1] ohne theoretische Terme oder Variablen für solche Terme (wie im Ramsey-Satz) einzuführen.

Craig hat folgenden Satz bewiesen:

T4.1–1: Ist T eine axiomatische Theorie über der Sprache S mit der Beobachtungssprache S_B, so läßt sich dazu eine axiomatische Theorie T′ über S_B angeben (die also keine theoretischen Terme von S enthält), die mit T empirisch äquivalent ist.

Der Beweis des Theorems ergibt sich wie folgt: Es wird eine *Arithmetisierung* der Sprache S angegeben, d.h. eine Funktion, die umkehrbar eindeutig und in beiden Richtungen berechenbar ist, und die alle Zeichen, Ausdrücke und Ausdrucksfolgen von S auf

---

[1] Vgl. dazu Craig [53] und [57].

natürliche Zahlen abbildet; diese zugeordneten Zahlen nennt man auch *Gödelzahlen* der Zeichen, Ausdrücke und Ausdrucksfolgen.[2] Es sei M die Menge aller Sätze der Gestalt $\bigwedge_{n} A$, d.h. der n-fachen Konjunktion von A mit sich selbst $A \wedge \ldots \wedge A$, so daß n Gödelzahl eines Beweises von A in T ist und A keine theoretischen Terme enthält. Die Sätze aus M werden als Axiome von T′ gewählt. M ist dann entscheidbar, da der Beweisbegriff für T entscheidbar ist – es ist für T, wie für jedes formale axiomatische System, entscheidbar, ob eine Folge von Ausdrücken ein Beweis für einen Satz A in T ist oder nicht –, da die Gödelzahlen der Beweise in T berechenbar sind, und da es entscheidbar ist, ob ein Satz A theoretische Terme enthält. Es ist also entscheidbar, ob ein Satz von S Axiom von T′ ist oder nicht. T′ ist daher ein formales axiomatisches System, das keine theoretischen Konstanten enthält.[3] T′ ist ferner mit T empirisch äquivalent; denn ist ein Satz A ohne theoretische Konstanten in T beweisbar, so gibt es einen Beweis mit der Gödelzahl n für A in T, und also ist $\bigwedge_{n} A$ Axiom von T′ und daher auch A; die Ableitungsregel $\bigwedge_{n} A \vdash A$ ist ja in jedem die Aussagenlogik enthaltenden Logikkalkül für jedes $n \geq 1$ zulässig, da $\bigwedge_{n} A \rightarrow A$ einen trivialen aussagenlogisch gültigen Schluß darstellt. Ist umgekehrt A Theorem von T′, so ist A entweder Axiom von T′ – dann hat A die Gestalt $\bigwedge_{n} B$ und

---

[2] Enthält S n Grundzeichen $X_1, \ldots, X_n$, so kann man die Arithmetisierungsfunktion g z.B. so definieren: $g(X_i)$ ist die $(i+1)$-te Primzahl p_{i+1} (die erste Primzahl ist 2);
$g(X_{i_1} \ldots X_{i_m}) = p_1^{\,g(X_{i_1})} \cdot \ldots \cdot p_m^{g(X_{i_m})}$ für Zeichenfolgen (Ausdrücke) $X_{i_1} \ldots X_{i_m}$; $g(A_1, \ldots, A_k) = p_1^{g(A_1)} \cdot \ldots \cdot p_k^{g(A_k)}$ für Ausdrucksfolgen $A_1, \ldots, A_k$.

[3] Bei empirischen Theorien spezifizieren wir immer nur die nichtlogischen Axiome. Erst wenn man zu ihnen passende logische Axiome (der Prädikatenlogik, der Typen- oder Klassenlogik) und die zugehörigen logischen Deduktionsregeln hinzunimmt, entsteht ein formales System im Sinne der Logik. Aber im Rahmen der Wissenschaftstheorie versteht sich die Logik immer von selbst.

es gibt in T einen Beweis mit der Gödelzahl n für B, so daß wegen der allgemeinen logischen Zulässigkeit der Regel $B \vdash \bigwedge_{n} B$ auch A in T beweisbar ist – oder A folgt logisch aus den Axiomen von T′, dann folgt A aber auch logisch aus in T beweisbaren Sätzen, ist also auch Theorem von T.

Auch nach dem Theorem von Craig sind also theoretische Terme prinzipiell immer entbehrlich.

Wenn wir nun die Leistung der theoretischen Terme in den Blick bekommen wollen, so müssen wir fragen, was bei ihrer Elimination nach Ramsey und Craig verloren geht.

Die Konstruktion nach Craig führt von einer Theorie T zu einer Theorie T′, die unendlich viele Axiome enthält und die in ihrer Struktur sehr kompliziert ist. Die Menge ihrer Axiome enthält zu jedem Satz A aus E(T), dem empirischen Gehalt von T, d.h. zu jedem aus T ableitbaren Satz der Beobachtungssprache S_B Konjunktionen $\bigwedge_{n} A$ für unendlich viele Zahlen n (die zudem nach unserer Konstruktion der Gödelzahlen alle sehr groß sind), da jeder in T beweisbare Satz auf unendlich vielen Wegen (z.B. unter Verwendung beliebiger überflüssiger Prämissen) bewiesen werden kann. Die Axiomatisierung von E(T) wird also bei Craig auf einem zwar technisch eleganten, inhaltlich aber völlig unbefriedigenden Weg – man möchte fast sagen: erschlichen. Intuitive Durchsichtigkeit und Einfachheit gehen dabei verloren.

Die *Systematisierungsleistung* einer empirischen Theorie T, besteht darin, daß die Menge E(T) der mit T als wahr statuierten Sätze der Beobachtungssprache in einfacher, übersichtlicher Weise durch Axiome dargestellt wird, daß eine Vielzahl von Aussagen auf wenige Prinzipien zurückgeführt wird, mit denen der Gehalt der Theorie vollständig erfaßt ist. In dieser Systematisierung besteht eine der praktisch wie theoretisch wichtigsten Leistungen empirischer Theorien. Und diese Leistung geht mit dem Übergang von T zu T′ in der Konstruktion von Craig weitestgehend verloren. Darin zeigt sich eine erste Leistung theoretischer Terme: *Mit der Verwendung solcher Terme läßt sich die Systematisierungsleistung empirischer Theorien wesentlich steigern.*

Über Einfachheit wollen wir im nächsten Abschnitt sprechen. Wir werden dabei diese Einsicht in die Rolle theoretischer Terme anhand eines Beispiels präzisieren. Wir haben aber auch schon im Abschnitt 3.1 am Beispiel des Terms „spezifisches Gewicht" gesehen, wie die Einführung eines neuen Begriffs es erlaubt, eine Vielzahl von Hypothesen („Holz schwimmt auf Wasser", „Eisen schwimmt nicht auf Wasser", etc.) unter ein Gesetz zu subsumieren („Ein Körper schwimmt auf einer Flüssigkeit, wenn er ein geringeres spezifisches Gewicht hat als diese"). Ebenso kann man mit Hilfe theoretischer Terme wie „elastisch", „magnetisch" etc. eine Fülle von Tatbeständen durch einfache Gesetze beschreiben. Auch die metrischen Begriffe, die im 1. Kapitel behandelt wurden und die im 2. Kapitel eine wesentliche Rolle spielten, sind immer dann theoretische Begriffe, wenn sie nicht eindeutig durch komparative Beobachtungsbegriffe festgelegt werden. Über die Bedeutung dieser Begriffe haben wir schon im Abschnitt 1.3 gesprochen.

Können aber nicht auch die Variablen des Ramsey-Satzes diese Systematisierungsleistung übernehmen? Das kann man kaum leugnen, denn der Ramsey-Satz R(T) einer Theorie T ist, intuitiv gesprochen, nicht wesentlich komplizierter als T selbst; und die Argumentationen mit R(T) entsprechen ganz denen mit T: Wie wir in 3.3 gesehen haben, argumentiert man in R(T) wie in T so: Ist T richtig, d.h. gibt es Interpretationen der theoretischen Terme $t_1, \ldots, t_n$ in T, die T erfüllen (d.h. gibt es T-zulässige Erweiterungen der vorgegebenen Interpretation V von S_B, d.h. aber: ist R(T) wahr), so seien die theoretischen Begriffe solche Interpretation von $t_1, \ldots, t_n$; und dann schließt man weiter wie in T. Der Einwand aber, der Satz R(T) sei durch die Annahme der Existenz von Begriffen, Funktionen etc. ontologisch voraussetzungsreicher[4] und also jedenfalls ontologisch weniger einfach als

[4] Nach W.V. Quine [48] bemessen sich die ontologischen Voraussetzungen einer Theorie T durch die Entitäten, für die in T gebundene Variable vorkommen: „To be assumed as an entity is, purely and simply, to be reckoned as the value of a variable". (a.a.O. S. 13)

T, ist wissenschaftstheoretisch nicht relevant, denn die Wissenschaftstheorie darf sich im Gegensatz zur mathematisch-logischen Grundlagenforschung über solche ontologische Skrupel hinwegsetzen.

Wenn man die Systematisierungsleistung der theoretischen Terme auch auf entsprechende Variablen übertragen könnte, so geht doch bei der Elimination theoretischer Terme im Übergang von T zum Ramsey-Satz R(T) etwas anderes verloren, und damit wird eine zweite Funktion der theoretischen Terme deutlich:

Die Verwendung theoretischer Terme von S ist ebensowenig auf eine bestimmte Theorie T beschränkt wie die Verwendung von Beobachtungstermen. Verschiedene Theorien über der Sprache S können ebenso gleiche theoretische Terme enthalten wie gleiche Beobachtungsterme. Wenn wir zunächst an einer idealisierenden und methodologisch motivierten scharfen Grenzziehung zwischen theoretischen Termen und Beobachtungstermen in S festhalten, so besteht der wesentliche Unterschied zwischen Termen dieser beiden Arten allerdings darin, daß wir eine wohlbestimmte Interpretation V von S_B voraussetzen, nach der Beobachtungsterme eine theorienunabhängige Bedeutung haben, während die Bedeutungen theoretischer Terme theoriebezogen sind, d.h. erst durch Bezugnahme auf eine bestimmte Theorie T (partiell) determiniert werden. In verschiedenen Theorien können also dieselben theoretischen Terme ganz verschiedene Bedeutungen haben. Daher hat man oft gefordert, daß theoretische Terme nur in jeweils einer Theorie verwendet werden dürfen, da andernfalls ihre Mehrdeutigkeit Anlaß zu Konfusionen geben würde. Beschränkt man die Verwendung der theoretischen Terme in dieser Weise, versteht sie also ausschließlich theorienimmanent, so kann man sie in der Tat im Sinne der Bildung eines Ramsey-Satzes durch Variablen ersetzen, ohne daß dabei etwas verloren geht.

Diese Auffassung theoretischer Terme ist aber zu eng: Die Theorie $T = T(t_1, \ldots, t_n)$ (hier verstanden als ein Satz) enthalte die theoretischen Terme $t_1, \ldots, t_n$, und weder der Satz $A =$

$A(t_{i_1}, \ldots, t_{i_m})$, der einige dieser Terme (wesentlich) enthält, noch $\neg A$ möge aus T folgen; es soll auch nicht gelten $T \rightarrow A \equiv A'$, wo A' ein Satz von S_B ist. Dann ist die Bedeutung von A nach T3.3–2 nicht durch V und T determiniert, d. h. dieser Satz hat aufgrund der impliziten Definition der Terme $t_1, \ldots, t_n$ durch T keine wohlbestimmte Bedeutung.[5] Deswegen kann man aber nicht sagen, der Satz A sei schlechthin sinnlos und eine Behauptung von A sei leer und irrelevant. Vielmehr bedeutet eine Behauptung von A, daß $T \wedge A$ behauptet wird. Aus A ergeben sich zunächst rein syntaktisch-deduktiv mit T Konsequenzen, die aus T allein nicht folgen, und es kann daher durchaus eine sinnvolle Fragestellung sein, ob über T hinaus auch $T \wedge A$ gilt. Diese Fragestellung setzt die Verwendung theoretischer Terme voraus, da A nach Voraussetzung aufgrund von T nicht mit einem Satz A' ohne solche Terme äquivalent ist. Für unseren Zusammenhang ist es nun wichtig, daß A theoretische Terme von T enthält, denn $T \wedge A$, und damit $R(T \wedge A)$, hat in der Regel einen größeren empirischen Gehalt als $R(T) \wedge R(A)$; aus $\vee x_1 \ldots x_n T(x_1, \ldots, x_n) \wedge \vee x_{i_1} \ldots x_{i_m} A(x_{i_1}, \ldots, x_{i_m})$ folgt nicht $\vee x_1 \ldots x_n(T(x_1, \ldots, x_n) \wedge A(x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}))$. D.h. aber: *Die Verwendung theoretischer Terme erlaubt es, Probleme zu formulieren, die sich bei der Verwendung von Variablen nicht stellen lassen.* Bei der Ersetzung von Theorien durch ihre Ramsey-Sätze geht diese Möglichkeit verloren.[6]

---

[5] Vgl. aber die einschränkenden und erläuternden Bemerkungen zu dieser Interpretation von T3.3–2 in 3.3.

[6] Man kann zwar, nach einem Vorschlag Bohnerts in [67], den Satz A relativ zu T durch den Ramseysatz $R(A \wedge T)$ ersetzen, wenn es um den empirischen Gehalt der verstärkten Theorie $A \wedge T$ geht. Aber mit dem Übergang von R(T) und R(A) zu $R(A \wedge T)$ gibt man schon die theorien- oder hypothesenimmanente Deutung der theoretischen Terme auf; man bleibt nicht bei ihrer impliziten Definition durch T stehen. Wenn man ferner zwei Sätze $\vee y_1 \ldots y_m A(y_1, \ldots, y_m)$ und $\vee x_1 \ldots x_n T(x_1, \ldots, x_n)$ hat, so ist ihre Verbindung zu $\vee x_1 \ldots x_n(A(x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}) \wedge T(x_1, \ldots, x_n))$ nicht eindeutig vorgeschrieben, da nicht klar ist, mit welcher Variablen $x_{i_j}(j = 1, \ldots, m)$ die Variable y_j zu identifizieren ist; will man diese Zuordnung festhalten, so muß man in beiden Sätzen Konstanten verwenden. Endlich wird die Verstärkung der Theorie T

Wenn sich die Annahme A bewährt, kann man natürlich zu der Theorie $T \wedge A$ übergehen, mit der der Ramsey-Satz $R(T \wedge A)$ empirisch äquivalent ist, und in der die theoretischen Terme nun eine zusätzliche Interpretation erfahren. Die Hypothese A erhält damit den neuen Status einer impliziten Definitionsbedingung. Das Carnapsche Bedeutungspostulat $R(T) \supset T$ wird durch $R(T \wedge A) \supset T \wedge A$ ersetzt, und der aufgrund von $R(T) \supset T$ semantisch indefinite Satz A wird nun aufgrund von $R(T \wedge A) \supset T \wedge A$ semantisch definit.

In analoger Weise kann man fragen, ob man gewisse theoretische Terme einer Theorie T_1 im Sinne der theoretischen Begriffe einer anderen Theorie T_2 deuten kann, d.h. ob die Verbindung beider Theorien zu richtigen Annahmen führt. Und es kann sinnvoll sein, dieselben theoretischen Terme in verschiedenen Theorien $T_1, \ldots, T_n$ zu verwenden, sofern diese verträglich sind. Das Carnapsche Bedeutungspostulat lautet dann $R(T_1 \wedge \ldots \wedge T_n) \supset T_1 \wedge \ldots \wedge T_n$.

Wir wollen diese zweite wichtige Rolle der theoretischen Terme neben ihrer Systematisierungsleistung als ihre *theorienübergreifende Relevanz* bezeichnen. Systematisierungsleistung und theorienübergreifende Relevanz sind inhaltlich verwandte Begriffe: Die Systematisierungsleistung eines Terms t liegt darin, daß mit seiner Hilfe eine einfache Axiomatisierung einer vorgegebenen Menge M von Sätzen der Beobachtungssprache möglich wird; ist M gegeben, so wird es mit t möglich, ein einfaches T zu

---

durch A im Sinne einer „und"-Verbindung durch den Satz $R(A \wedge T)$ nicht wiedergegeben.

Die Verwendung theoretischer Terme ist also eindeutig vor der Verwendung von Ramsey-Sätzen ausgezeichnet, wo es darum geht, die Begriffsbildungen und die durch sie vermittelten systematischen Zusammenhänge auch über die Theorie hinaus anzuwenden, in der sie zunächst eingeführt wurden. Der Einwand, daß A und T nicht vollständig interpretierte Sätze seien, ist nicht stichhaltig, denn man kann eben auch mit nicht vollständig gedeuteten Sätzen sinnvoll operieren, und so etwas kommt nicht nur im Bereich theoretischer Terme vor.

formulieren, so daß $M = E(T)$ ist. Die theorienübergreifende Relevanz von t äußert sich darin, daß es mit t möglich ist, für eine $E(T)$ echt enthaltende Menge M' von Sätzen der Beobachtungssprache ein einfaches T' mit $T' \rightarrow T$ und $E(T') = M'$ zu formulieren.

Diese Relevanz theoretischer Terme ist oft gesehen, aber kaum je exakt beschrieben worden. Explizit wird sie von R. B. Braithwaite in [53], Kap. III unter Bezugnahme auf Gedanken von F. P. Ramsey hervorgehoben. Die Durchführung der Gedanken ist aber höchst undurchsichtig. W. Stegmüller hat in [70], S. 280 bis 289 eine Rekonstruktion der Ideen von Braithwaite angegeben, die aber auch nicht ganz überzeugend ist und den Ideen Braithwaites auch nicht voll gerecht wird. Er bezeichnet theoretische Terme einer Theorie T als *nicht explizit harmlos*, wenn sich mit ihnen Sätze formulieren lassen – ihre Konjunktion sei A –, so daß $E(T)$ echt in $E(T \wedge A)$ enthalten ist. In diesem Sinn sind die Terme $t_{1_1}, \ldots, t_{1_m}$ in unserem Argument nicht explizit harmlos. An einem Beispiel soll dann gezeigt werden, daß es Theorien mit nicht explizit harmlosen theoretischen Termen gibt. Das ist aber aufgrund unseres Arguments trivial: Besteht z. B. T aus den drei Axiomen $\bigwedge x(F(x) \supset t_1(x))$, $\bigwedge x(G(x) \supset t_2(x))$ und $\bigwedge x(t_1(x) \wedge t_2(x) \supset H(x))$, wo F,G,H Beobachtungsterme und t_1, t_2 theoretische Terme sind, so ist t_2 nicht explizit harmlos, da man mit dem Satz $\bigwedge x t_2(x)$ und T den Satz $\bigwedge x(F(x) \supset H(x))$ ableiten kann, der aus T allein nicht folgt.[7]

Es ist nun die Hauptthese Braithwaites, daß die partielle Indeterminiertheit theoretischer Terme, die vom semantischen

---

[7] Tatsächlich ist jeder theoretische Term einer konsistenten Theorie T nicht explizit harmlos: Sei B ein Beobachtungssatz, der nicht aus T folgt, so ist $T \supset B$ ein Satz mit theoretischen Termen aus T, der zu einer Verstärkung von T führt. – Störend ist bei Stegmüller, daß in seinem Beispiel einer Theorie (die aus den beiden Sätzen E_1 und E_2 besteht) die theoretischen Terme des Satzes A (der dort aus einer Konjunktion der drei Sätze G_1, G_2 und G_3 besteht), gar nicht vorkommen, also total ungedeutet sind, so daß man nicht recht weiß, wie man zu einer „Vermutung" dieser drei Sätze gelangen soll.

Standpunkt aus zunächst als Nachteil erscheint, im Hinblick auf mögliche Erweiterungen der Theorie und ihren evtl. Einbau in größere theoretische Komplexe tatsächlich einen Vorteil darstellt. Selbst wo es möglich wäre, diese Terme im Sinne von Beobachtungsbegriffen zu deuten, ist das deswegen unzweckmäßig, weil man sich damit u. U. gewisser Möglichkeiten der Erweiterung der Theorie begibt. Braithwaite schreibt: „A theory which it is hoped may be expanded in the future to explain more generalisations than it was originally designed to explain must allow more freedom to its theoretical terms than would be given them were they to be logical constructions out of observable entities".[8]

Um diesen Gedanken zu präzisieren können wir, Stegmüller folgend, den Begriff des *implizit harmlosen* theoretischen Terms t einführen: t ist in einer Theorie genau dann implizit harmlos, wenn es eine Definitionsformel D für t gibt, deren Definiens nur Beobachtungsterme enthält und für die gilt: $T \wedge D$ ist empirisch äquivalent mit T. Selbst wenn also aus T keine solche Definitionsformel für t folgt, so daß t ein echter theoretischer Term ist, ist mit T eine Definition von t durch Beobachtungsterme verträglich, die den empirischen Gehalt von T nicht erhöht, falls t implizit harmlos ist.

In unserem vorstehenden Beispiel einer Theorie T sind t_1 und t_2 implizit harmlos, denn man kann definieren $t_1(x) := F(x) \wedge G(x) \supset H(x)$ und $t_2(x) := F(x) \wedge G(x) \supset H(x)$, ohne damit den empirischen Gehalt von T zu verstärken. Kann man alle theoretischen Terme einer Theorie T in dieser Weise durch Definitionsformeln charakterisieren, so kann man sie in T durch die definierenden Ausdrücke ersetzen und gelangt so zu einer empirisch äquivalenten (evtl. komplizierteren, evtl. wie in unserem Beispiel aber auch einfacheren) Theorie ohne theoretische Terme. Daß diese Form der Elimination theoretischer Terme nicht immer möglich ist, zeigt folgendes Beispiel eines implizit nicht harmlosen Terms: Es sei a eine theoretische Gegenstandskonstante, b_i $(i = 1, \ldots, n)$ die Gegenstandskonstanten der Beobachtungs-

[8] Braithwaite [53], S. 76.

sprache, T bestehe aus den Axiomen $a \neq b_1$, $\bigwedge x(F(x) \supset R(x,a))$ und $\bigwedge x(R(x,a) \supset G(x))$, wobei F und G Beobachtungsterme seien und R eine theoretische Konstante. Dann gibt es keine Definitionsformel $D := \bigwedge x(x = a \equiv B(x))$ für a, wobei der Ausdruck B(x) nur Beobachtungsterme enthält und die Eindeutigkeitsbedingung $\bigvee !xB(x)$ (es gibt genau ein x mit B(x)) aus T folgt. (Da $\bigvee !xB(x)$ ein Satz der Beobachtungssprache ist, wäre der empirische Gehalt von $D \wedge T$ größer als der von T, wenn $\bigvee !xB(x)$ nicht aus T folgen würde, da dieser Satz aus D folgt.) Mit T erhält man ja nur den Satz $\bigwedge x(F(x) \supset G(x))$ von S_B und seine Konsequenzen in S_B.

Es gibt also implizit nicht harmlose theoretische Terme (die zugleich auch nicht explizit harmlos sein können: in unserem letzten Beispiel läßt sich z. B. mit dem Satz $R(b_1, a)$ der neue Beobachtungssatz $G(b_1)$ ableiten).[9]

Die Elimination implizit harmloser theoretischer Terme ist aber weder immer eindeutig – es kann mehrere Definitionsformeln geben, die dafür infrage kommen – noch auch immer zweckmäßig. Letzteres gilt nicht nur, weil die entstehende Theorie komplizierter sein kann. Braithwaite betont vielmehr, daß es im Hinblick auf mögliche Verstärkungen der Theorie und übergreifende Systematisierungen unzweckmäßig sein kann, die theoretischen Terme durch Hinzunahme von Definitionsformeln in ihrer Interpretation eindeutig festzulegen. Wenn eine Definitionsformel D für t mit T verträglich ist und es gilt $E(T \wedge D) = E(T)$, so folgt daraus, wo A ein mit T verträglicher Satz ist, der t enthält, und für den gilt $E(T) \subset E(T \wedge A)$, ja nicht, daß D auch mit $T \wedge A$ verträglich ist und daß $E(T \wedge A \wedge D) = E(T \wedge A)$ ist.

Wenn auch Braithwaites Behauptung „. . . theoretical terms can only be defined by means of observable properties on con-

[9] Stegmüller formuliert in [70], S. 289 Braithwaites These so: „In allen interessanten Fällen naturwissenschaftlicher Theorien sind wenigstens einige theoretische Terme nicht nur nicht explizit harmlos, sondern nicht einmal implizit harmlos“. Wir glauben demgegenüber, daß Braithwaites Intention besser so wiedergegeben wird, wie wir das unten tun.

dition that the theory cannot be adapted properly to apply to new situations"[10] zu stark ist, so ist doch sein Grundgedanke richtig, den wir nun so formulieren können: „Auch wenn theoretische Terme implizit harmlos sind, d.h. wenn sie sich als Beobachtungsbegriffe interpretieren lassen, ist eine solche Interpretation immer (wir würden bescheidener sagen: oft) dann unzweckmäßig, wenn sie nicht explizit harmlos sind." Man kann ihn auch einfach so formulieren: Eine größere Exaktheit bei der Interpretation theoretischer Terme als im jeweiligen theoretischen Kontext für ihre Systematisierungsleistung notwendig ist, kann sich als hinderlich erweisen für übergreifende Systematisierungen.[11]

Systematisierungsleistung und theorienübergreifende Relevanz kommen natürlich nicht nur bei theoretischen Termen vor, sondern auch bei Beobachtungstermen: Auch in der Beobachtungssprache kann man durch Einführung eines neuen Begriffes oft eine tiefgreifende Systematisierung empirischer Phänomene erzielen und eine wesentliche Vereinfachung in ihrer Beschreibung. Und auch in der Beobachtungssprache ist eine gewisse Offenheit der Terme für zusätzliche Bedeutungsbestimmungen der Breite ihrer Anwendbarkeit förderlich. Wir haben ja auch schon im Abschnitt 3.2 betont, daß die Abgrenzung theoretischer Terme von Beobachtungstermen immer nur relativ ist und nur eine methodologisch nützliche Idealisierung darstellt. An einem ande-

---

[10] Braithwaite [53], S. 76.

[11] Vgl. zu diesem Problem auch Hempel [58], S. 204f. I. Scheffler nimmt in [68] noch eine weitere Leistung theoretischer Terme an, die darin liegen soll, daß sie induktive Bestätigungsrelationen zwischen Bedeutungssätzen stiften, die ohne sie nicht bestehen. Sein Beispiel der Hypothese $\bigwedge x((M(x) \supset P(x)) \wedge (M(x) \supset R(x)))$ – M ist hier ein theoretischer Term – kann diese Behauptung aber nicht belegen, denn, abgesehen davon, daß diese Hypothese keinen empirischen Gehalt hat, also uninteressant ist, gibt es keinen Grund, mit Scheffler anzunehmen, daß aufgrund dieser Hypothese ein Satz R(a) den Satz P(a) induktiv bestätigen soll. – Vgl. dazu auch Bohnert [68].

ren Ort[12] werden wir zeigen, daß die Beobachtungsterme prinzipiell in der gleichen Weise eingeführt und interpretiert werden wie theoretische Terme und daß auch für ihre Verwendung Systematisierungsleistung und Anwendungsbreite entscheidend sind. Die Vorstellung, daß man einen sprachlichen Ausdruck erst dann verwenden darf, wenn man ihm zuerst eine wohlbestimmte und exakt abgegrenzte Bedeutung zugeordnet hat, läßt sich aus sprachphilosophischen Gründen generell nicht halten.[13]

4.2 Einfachheit

Wir haben im letzten Abschnitt gesehen, daß die Systematisierung der Erfahrung, d.h. die Zusammenfassung vieler Informationen in einfachen Prinzipien eine der wichtigsten Leistungen empirischer Theorien ist. Aber was heißt einfach? Wann ist eine Theorie einfacher als eine andere? Den ersten Ansatz zu einer Explikation des Einfachheitsbegriffs, zu einer *Theorie* der Einfachheit, hat K. Popper 1934 in seiner „Logik der Forschung" gemacht. Trotz einer Reihe weiterer Untersuchungen, die sich insbesondere an Arbeiten von N. Goodman angeschlossen haben, steckt diese Theorie der Einfachheit heute noch in den allerersten Anfängen, so daß wir im folgenden weniger Lösungen als Probleme vorstellen können. Da die Theorie bei Goodman, wie uns scheint, ohne ausreichende Diskussion der Fragen nach den Aufgaben einer Explikation des Einfachheitsbegriffs und nach seinen intuitiven Eigenschaften sehr schnell in komplizierte technische Detailfragen mündet, wollen wir dabei besonderes Gewicht auf diese Fragen legen. Wir werden dabei zu einem von Poppers und Goodmans Ideen abweichenden Ansatz geführt, der dann mit diesen Ideen verglichen wird.

Die Aufgaben einer Explikation des Einfachheitsbegriffs wollen wir durch folgende fünf Probleme charakterisieren, die uns

---

[12] Vgl. Kutschera [73].
[13] Vgl. dazu Kutschera [71], Kap. 3.

in unseren methodologischen Diskussionen schon begegnet sind, oder noch begegnen werden:

I) Zwei Theorien T_1 und T_2 sind logisch äquivalent; sie enthalten das gleiche Vokabular (als Menge von Termen) $V(T_1) = V(T_2)$ (deskriptiver) Grundterme. Welche der beiden Theorien ist einfacher?

Ein logisches Beispiel ist die Frage nach der relativen Einfachheit zweier (vollständiger) Axiomatisierungen der Aussagenlogik in den gleichen Grundoperatoren (z. B. $\neg$ und $\supset$). In empirischen Theorien geht es dagegen immer nur um das Vokabular der deskriptiven Grundterme.

II) T_1 und T_2 sind so geartet, daß es Definitionsformeln für die Terme aus $V(T_2) - V(T_1)$ in den Termen aus $V(T_1)$ gibt[1] – ihre Konjunktion sei D_1 – und Definitionsformeln für die Terme aus $V(T_1) - V(T_2)$ in den Termen aus $V(T_2)$ – ihre Konjunktion sei D_2 – so daß gilt: T_2 folgt aus T_1 und D_1, und T_1 folgt aus T_2 und D_2. Welche der beiden Theorien ist einfacher?

Dieser Fall liegt z. B. vor, wenn zwei (vollständige) Axiomatisierungen der Aussagenlogik mit verschiedenen Grundoperatoren (z. B. mit $\neg$ und $\supset$, bzw. mit dem Sheffer-Strich $|$) formuliert sind[2].

III) T_1 und T_2 sind empirisch äquivalent; sie enthalten das gleiche Vokabular von Beobachtungstermen $V_B(T_1) = V_B(T_2)$, aber verschiedene theoretische Terme. Welche der beiden Theorien ist einfacher?

Diesen Fall hatten wir bei den Erörterungen in 4.1 im Auge. Hier geht es auch um die Frage, ob die Einführung theoretischer Terme eine Vereinfachung einer Theorie bewirken kann.

IV) Der empirische Gehalt von T_1 ist mit dem von T_2 unverträglich; beide Theorien sind aber mit den zur Verfügung stehenden Beobachtungsdaten verträglich. Welche der beiden Theorien ist einfacher? Wenn man z. B. in den Diskussionen der Good-

[1] Wir sagen, ein Term t sei in Termen aus $V(T_1)$ definiert, wenn das Definiens der Definition von t nur Terme aus $V(T_1)$ enthält.

[2] Man definiert $A \mid B := \neg(A \wedge B)$, bzw. $\neg A := A \mid A$ und $A \wedge B := \neg(A \mid B)$.

manschen Paradoxie die Hypothese „Alle Smaragde sind grün“ vor der (bzgl. der Annahme, daß man nach dem Bezugszeitpunkt t_0 in der Definition von „gricht“ Smaragde beobachten wird) konkurrierenden Hypothese „Alle Smaragde sind gricht“ als die einfachere auszeichnen will, so muß man diese Frage beantworten können.

V) T_2 entsteht aus T_1 durch Hinzunahme von Definitionsformeln für neue Terme und durch Ersetzung aller Vorkommnisse von definierenden Ausdrücken durch diese definierten Ausdrücke in allen Axiomen von T_1. Welche der beiden Theorien ist einfacher?

Das ist die Frage, wann Definitionen eine Vereinfachung bewirken können.

(I) bis (V) sind typische Fragestellungen, die sich mit dem Einfachheitsbegriff verbinden. Die Liste solcher Probleme ließe sich natürlich verlängern, aber wir wollen bei unserem Explikationsversuch vor allem auf diese wichtigen Fragen abzielen.

Bei all diesen Fragen geht es um die relative Einfachheit von *Theorien*. Man kann auch nach der Einfachheit von *Sätzen*, von *Prädikaten* oder *Funktionsausdrücken* fragen, wir wollen aber zunächst die Einfachheit von Theorien bestimmen. Es wird sich zeigen, daß uns diese Frage dann auf die Frage der Einfachheit von Sätzen und Termen führt. Die primäre Aufgabe ist also, einen *komparativen* oder aber einen *metrischen* Begriff der Einfachheit von Theorien zu präzisieren; d.h. einen Begriff $T_1 \leq\cdot T_2$ – T_2 ist nicht einfacher als T_1 (bzw. T_1 ist höchstens so kompliziert wie T_2) –, oder eine Funktion k(T) (den Komplexitätsgrad der Theorie T) anzugeben.

Der intuitive Einfachheitsbegriff, der uns dabei als Explicandum dient, ist sehr *vage*: es ist in vielen Fällen intuitiv nicht klar, welche von zwei Theorien die einfachere ist und wie man eine solche Behauptung begründen soll. Er ist ferner ein *pragmatischer*, subjektbezogener, ein psychologischer Begriff: Uns interessieren nicht Theorien, die in irgendeinem objektiven Sinn „an sich“ einfach sind, sondern Theorien, die *für uns* den Charakter der Einfachheit, der Übersichtlichkeit und Handlichkeit haben – schwierig zu erfassende und zu handhabende, „an sich" aber einfache Theorien würden uns nichts nützen. Ein methodologischer Begriff der Einfachheit kann sich nun nicht auf eine empirisch-psychologische Theorie der Einfachheit stützen, die ja selbst wiederum methodologisch zu durchleuchten wäre. Daher wird man versuchen, den Einfachheitsbegriff mit logischen Mitteln zu bestimmen. Die Vagheit des Explicandums kann sich dabei als nützlich erweisen, denn das logische Explikat muß nur in den relativ engen Grenzen, in denen das Explicandum eindeutig bestimmt ist, mit ihm übereinstimmen.

Das Explicandum ist aber auch *mehrdeutig:* Je nach den Zwekken, die man verfolgt, kann dieselbe Theorie einfach oder kompliziert sein: Das System der drei aussagenlogischen Axiome, das z. B. in Kutschera [67], 1.3 angegeben wird, ist, *was Übersichtlichkeit und Kürze angeht*, einfacher als das System der 11 aussagenlogischen Axiome, das dort im Abschnitt 2.4.2.4 aufgeführt ist; dieses ist jedoch einfacher, *was die Konstruktion von Beweisen angeht.* Ferner kann eine empirische Theorie einfach sein, *was ihre experimentelle Überprüfung angeht;*[3] eine Theorie kann *einfach zu verstehen und didaktisch zu vermitteln sein;* eine Theorie kann *ontologisch einfach* sein, wenn sie nur Variablen für Begriffe oder Mengen niedriger Stufe enthält; und eine Theorie kann einfach sein, *wenn ihre Grundterme sich nur auf direkt Beobachtbares beziehen.*[4] Es gibt also keine pauschale Einfachheit. Uns geht es im folgenden jedoch nicht um Beweiskonstruktionen, Überprüfungen oder didaktische Aspekte, sondern allein um den *theoretischen* Aspekt der Einfachheit, unter dem man annäherungsweise sagen kann: Eine Theorie ist umso einfacher, je weniger Axiome sie enthält,[5] je übersichtlicher und kürzer diese Axiome in ihrer Struktur sind,

---

[3] Einen Einfachheitsbegriff, der sich auf die Überprüfbarkeit bezieht (allerdings auf einen *logischen* Begriff komparativer Überprüfbarkeit) diskutiert K. S. Friedmann in [72].

[4] Vgl. dazu auch die Unterscheidungen verschiedener Einfachheitsbegriffe in Bunge [61] und Post [61].

[5] Auf nicht endlich axiomatisierte Theorien gehen wir im folgenden nicht ein. Ihre Einfachheit wäre auch durch die Einfachheit des Ent-

und je sparsamer das Vokabular der Theorie ist. Diese Art Einfachheit bezeichnen wir auch als *strukturelle* Einfachheit von Theorien.

Diese strukturelle Einfachheit einer Theorie ist *sprachabhängig*, d.h. Einfachheit ist nicht invariant gegenüber Übersetzungen. Wäre sie nicht sprachabhängig, so könnten z.B. Definitionen keinen Einfluß auf die Einfachheit haben, da in einer anderen Sprache die definierten Ausdrücke Grundausdrücke sein können. Mit dem Einfachheitsbegriff wollten wir aber auch gerade die durch Definitionen bewirkten Vereinfachungen erfassen können. Und in der Diskussion der Paradoxie von Goodman haben wir schon darauf hingewiesen, daß man von der größeren Einfachheit einer von zwei konkurrierenden Hypothesen immer nur relativ zu einer Sprache reden kann, in der sie formuliert sind. Die strukturelle Einfachheit ist sogar primär ein *syntaktischer*, kein semantischer Begriff. Einfachheit ist z.B. nicht invariant gegenüber logisch äquivalenten Umformungen, sonst wäre z.B. die Frage (I) trivialerweise immer so zu beantworten, daß die äquivalenten Theorien T_1 und T_2 den gleichen Einfachheitsgrad haben, ebenso wie die beiden Sätze $\bigwedge x(F(x) \supset G(x))$ und $\bigwedge x(\bigwedge z \bigvee y(R(z,y) \wedge F(z)) \vee \bigvee z \bigwedge y(R(z,y) \supset \neg F(z)) \supset \neg F(x) \vee G(x)))$. Würde man aber die Invarianz der Einfachheit von Ausdrücken gegenüber der Ersetzung bedeutungsgleicher Ausdrücke fordern, wobei der Bedeutungsbegriff nun enger gefaßt wird als der durch logische Äquivalenz bestimmte Begriff der Intension nach Carnap, und z.B. so bestimmt wird wie Freges „Sinn" oder Carnaps „intensionale Isomorphie",[6] so gibt es erstens nur mehr eine relativ kleine Klasse syntaktisch verschiedener aber bedeutungsgleicher Ausdrücke, und zweitens könnte man wegen der Bedeutungsgleichheit von Definiendum und Definiens die durch Definitionen bewirkten Vereinfachungen wiederum nicht mehr erfassen.

---

scheidungsverfahrens für die Axiomeigenschaft zu bestimmen, und würde so auf neue Probleme führen.

[6] Vgl. dazu Kutschera [71], 3.1.4 und 3.1.5.

Nun spricht man auch von der Einfachheit von Begriffen, Funktionen und Propositionen, und kann daher fragen, ob es bei der theoretischen Einfachheit nicht eher um die Einfachheit der Ideen geht als um die Einfachheit ihres sprachlichen Ausdrucks. Aber die Sprache dient nicht nur zur Darstellung begrifflicher Unterscheidungen, sondern ist das Mittel dieser Unterscheidungen: Wir bilden Begriffe, indem wir Wörter bilden, und wir wenden Begriffe an, indem wir Wörter gebrauchen.[7] Daher bestimmt sich auch die Einfachheit eines Begriffs durch die Einfachheit des sprachlichen Ausdrucks, den wir dafür haben. Die Einführung eines einfachen Ausdrucks für einen Begriff durch eine Definition vereinfacht nicht nur die Darstellung des Begriffs, sondern diesen Begriff selbst: Wer sich z. B. einmal mit komplizierten mathematischen Begriffsbildungen beschäftigt hat, weiß, welchen konzeptuellen Fortschritt eine Definition bedeuten kann. Die Einsicht, daß eine exakte, übersichtliche und nach einfachen Regeln gebaute Sprache die Begriffe und ihre Verwendung präzisiert und vereinfacht, liegt auch der Entwicklung der modernen logischen Symbolsprachen zugrunde und wird durch die Leistungen der modernen Logik bestätigt.

Nach diesen Vorüberlegungen wollen wir nun einen Vorschlag zur Präzisierung des Begriffs der strukturellen Einfachheit von Theorien mit syntaktischen Mitteln machen. Dabei kommt es uns nur auf die Grundgedanken an: die Ausarbeitung im Detail erfordert noch viel Arbeit und eingehende Diskussionen und kann daher im Rahmen dieser Arbeit nicht geleistet werden.

Wir beziehen uns auf endlich axiomatisierte Theorien, die in einer logischen Symbolsprache formuliert sind.[8] Wir haben oben gesagt: Eine Theorie T mit dem (deskriptiven) Vokabular V(T) ist umso einfacher, je weniger Axiome T enthält, je einfacher

[7] Vgl. dazu Kutschera [71], Kap. 3 und 4.

[8] Diese Forderung soll im Hinblick auf die unten diskutierte Strukturanalyse nur sicherstellen, daß der Funktor-Argument-Aufbau der Sätze eindeutig ist.

diese Axiome sind, je weniger Terme V(T) enthält und je einfacher diese Terme sind. D.h. man wird den Einfachheitsbegriff für Theorien auf einen solchen Begriff für Sätze und einen für Grundterme reduzieren, und kann sagen, wenn man auch V(T) als endlich voraussetzt:

1. Der Komplexitätsgrad von T errechnet sich aus den gewichteten Komponenten des Komplexitätsgrades des axiomatischen Systems von T und des Komplexitätsgrades von V(T).
2. Der Komplexitätsgrad des axiomatischen Systems von T ist die Summe der Komplexitätsgrade der Axiome von T.
3. Der Komplexitätsgrad von V(T) ist die Summe der Komplexitätsgrade der Terme aus V(T).

Es ist also zunächst der Komplexitätsgrad von Termen zu bestimmen und dann der Komplexitätsgrad von Sätzen.

Die Einfachheit eines Grundterms hängt von seiner (logischen) Kategorie, und da wir einen syntaktischen Einfachheitsbegriff entwickeln wollen, auch nur von seiner Kategorie ab.

Der Begriff der Kategorie läßt sich allgemein so bestimmen:[9] Man zeichnet gewisse Kategorien als *Grundkategorien* aus und definiert:

D4.2–1: Die Grundkategorien $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_m$ sind Kategorien; und sind $\tau_1, \ldots, \tau_n$ Kategorien, so ist auch $\varkappa_l(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ $(l = 1, \ldots, m)$ eine Kategorie.

Es genügt hier, die zwei Grundkategorien Satz (σ) und Eigenname (ν) zu betrachten. Wenn wir der Einfachheit wegen auch Satzkonstanten und Gegenstandskonstanten als Funktoren bezeichnen, und festlegen, daß $\varkappa_l(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ die Kategorie eines n-stelligen Funktors ist, der aus Ausdrücken der Kategorien $\tau_1, \ldots, \tau_n$ einen Ausdruck der Kategorie $\varkappa_l$ erzeugt, so ist jedem Funktor, d.h. jedem Term eine Kategorie zugeordnet.[10]

---

[9] Vgl. dazu Kutschera [71], 2.2.

[10] Man kann auch Funktoren wie „$x+y$" durch Prädikate wie „$x+y=z$" darstellen, und so bei Kategorien der Gestalt $\varkappa(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ für „$\varkappa$" immer „σ" setzen. Eine solche Ersetzung erscheint aber in unserem Kontext nicht als sinnvoll, da wir die beiden Ausdrücke nicht als gleich einfach ansehen.

Wir definieren ferner:

D4.2–2: Die *Stufe einer Kategorie* σ oder ν ist 1; sind r_i $(i = 1, \ldots, n)$ die Stufen der Kategorien τ_i, so ist $1 + \max_i r_i$ die Stufe der Kategorie $\varkappa_l(\tau_1, \ldots, \tau_n)$. Die *Stufe eines Funktors* ist die Stufe seiner Kategorie.

Man wird nun annehmen, daß der Komplexitätsgrad eines Funktors mit seiner Stellenzahl und seiner Stufe wächst. Genauer wird man aber auch seine Kategorie berücksichtigen müssen. Anstatt die Komplexität der Funktoren zu vergleichen, kann man auch von der Komplexität der Kategorien sprechen, da Funktoren derselben Kategorien denselben Komplexitätsgrad haben sollen.

Wenn nun ein *komparativer* Einfachheitsbegriff für Kategorien $\tau \leq\cdot\, \rho$ festgelegt werden soll, so wird man Bedingungen angeben, die diese Relation erfüllen soll. Zunächst einmal muß $\leq\cdot$ als komparative Relation natürlich den beiden Forderungen genügen:[11]

A1: $\tau \leq\cdot\, \rho \vee \rho \leq\cdot\, \tau$

A2: $\tau \leq\cdot\, \omega \wedge \omega \leq\cdot\, \rho \supset \tau \leq\cdot\, \rho$

Speziell wird man nun z. B. fordern:

A3: $\varkappa(\tau_1, \ldots, \tau_n) \cdot\!> \tau_i$ $(i = 1, \ldots, n)$; d. h. ein Funktor ist komplizierter als seine Argumente.

A4: $\varkappa_l(\tau_1, \ldots, \tau_n) \cdot\!> \varkappa_r$ für alle $l, r = 1, \ldots, m$, d. h. ein Funktor (mit Argumenten, d. h. ein echter Funktor) ist komplizierter als alle Grundkategorien.

A5: $\varkappa(\tau_1, \ldots, \tau_i, \ldots, \tau_n) <\cdot\, \varkappa(\tau_1, \ldots, \tau_i', \ldots, \tau_n)$ für $\tau_i <\cdot\, \tau_i'$ und $\varkappa(\tau_1, \ldots, \tau_n) <\cdot\, \varkappa'(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ für $\varkappa <\cdot\, \varkappa'$, d. h. die Kompliziertheit eines Funktors wächst mit der Kompliziertheit jedes seiner Argumente und mit der Kompliziertheit der Grundkategorie der Ausdrücke, auf die er diese Argumente abbildet.

A6: $\varkappa(\tau_1, \ldots, \tau_i, \ldots, \tau_k, \ldots, \tau_n) \doteq \varkappa(\tau_1, \ldots, \tau_k, \ldots, \tau_i, \ldots, \tau_n)$, d. h. auf die Reihenfolge der Argumente kommt es nicht an.

[11] Vgl. dazu den Abschnitt 1.2.

Man könnte nun versuchen, weitere Axiome für die Relation $\leq\cdot$ anzugeben und dann die Frage zu stellen, ob es eine Metrisierungsfunktion k zu $\leq\cdot$ gibt mit $k(\tau) \leq k(\rho) \equiv \tau \leq\cdot \rho$, und in welchen Bereichen sie eindeutig ist. Intuitiv einfacher ist es jedoch, gleich einen metrischen Begriff k einzuführen, um dann mit einfachen Annahmen über k schnell zu numerischen Einfachheitsvergleichen zu kommen und an ihnen zu testen, welche Bedingungen für k sinnvoll sind. Die apriorischen Einsichten sind auf dem Gebiet der Einfachheit, wie schon oben bemerkt wurde, nur schwach ausgeprägt, es bleibt der Willkür ein verhältnismäßig großer Raum, und diesen Raum wird man zunächst einmal gewissermaßen experimentell ausloten.

Eine Funktion k für Grundterme, bzw. Kategorien kann man in zwei Schritten festlegen:

1. Die Werte $k(\sigma)$ und $k(\nu)$ werden fixiert;

2. es wird für jedes $n \geq 1$ eine zahlentheoretische Funktion $f_n(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ angegeben, so daß gilt $k(\varkappa(\tau_1, \ldots, \tau_n)) = f_n(k(\varkappa), k(\tau_1), \ldots, k(\tau_n))$. An die Stelle von A3 bis A6 treten dann folgende Bedingungen für f_n:

B1: $f_n(x_0, x_1, \ldots, x_n) \geq \max_i x_i \; (0 \leq i \leq n)$

B2: $f_n(x_0, x_1, \ldots, x_n) > \max_l k(\varkappa_l)$ für alle $l = 1, \ldots, m$, also insbesondere $f_n(x_0, x_1, \ldots, x_n) > x_0$

B3: f_n ist streng monoton wachsend in allen Argumenten, d.h. es gilt
$f_n(x_0, \ldots, x_i, \ldots, x_n) > f_n(x_0, \ldots, x_i', \ldots, x_n)$ für $x_i > x_i'$
$(i = 0, 1, \ldots, n)$.

B4: f_n ist kommutativ in den letzten n Argumenten, d.h. es gilt
$f_n(x_0, \ldots, x_i, \ldots, x_k, \ldots, x_n) = f_n(x_0, \ldots, x_k, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$.

Wir wollen nun gleich einen einfachen Vorschlag für die Festlegung von k machen, der aber nur als illustratives Beispiel dienen soll und nicht schon als eine adäquate Festlegung angesehen werden kann. Wir setzen:

1. $f_n(x_0, x_1, \ldots, x_n) := f_1(x_0, x_1 + \ldots + x_n)$. Für „$f_1$“ schreiben wir auch „f“.

2. $f(x,y) := x \cdot y$, und

3. $k(\sigma) = 2$ und $k(\nu) = 3$.

(1) wird dadurch motiviert, daß wir für die Reihung der Argumente eines Funktors die einfachste kommutative und streng monotone Funktion wählen. (2) bewirkt, daß die Stufe des Funktors gegenüber seiner Stellenzahl stärker betont wird. Das richtige Verhältnis zwischen dem Gewicht der Stufe und dem der Stellenzahl zu finden, ist die entscheidende Aufgabe bei der Festlegung des Komplexitätsgrads von Funktoren. Diese Aufgabe ist durch (2) wohl kaum ganz befriedigend gelöst, da die Komplexität intuitiv mit der Stufe eines Funktors sehr viel schneller zunimmt. Für ein erstes Beispiel ist jedoch die Einfachheit von (2) von Vorteil. Durch (3) soll lediglich ausgedrückt werden, daß Eigennamen als komplizierter angesehen werden als Satzkonstanten, da sie – das ist nun eine semantische Motivation – bei den Interpretationen im allgemeinen mehr Werte annehmen können als diese. Wir sehen wohl auch eine Funktion wie $x + y$ als komplizierter an als die Satzfunktion $A \wedge B$. Diese einfache Festlegung kann wiederum kaum als adäquat gelten.

Mit (1) bis (3) liegt $k(\tau)$ für alle Kategorien τ (und damit für alle Grundterme) fest. Es ist $k(\tau) > 0$, und $k(\tau)$ wächst mit der Stellenzahl und Stufe der Kategorie τ.
Es gilt z. B. $k(\sigma(\sigma)) = 4$, $k(\sigma(\sigma,\sigma)) = 8$, $k(\sigma(\sigma,\sigma,\sigma)) = 12$,
$k(\sigma(\nu)) = 6$, $k(\sigma(\nu,\nu)) = 12$, $k(\nu(\nu)) = 9$, $k(\nu(\nu,\nu)) = 18$,
$k(\sigma(\sigma(\nu))) = 12$, $k(\sigma(\sigma,\nu)) = 10$.

Unsere zweite Aufgabe ist, die Einfachheit von *Sätzen* in komparativer oder metrischer Weise zu bestimmen. Dabei können wir in Analogie zu A1 bis A6 Bedingungen für den komparativen Begriff $\leq\cdot$, angewandt nun auf Ausdrücke der Form $F(t_1, \ldots, t_n)$, d. h. für Funktor-Argument-Fügungen festlegen. Oder wir können einen metrischen Begriff k für solche Ausdrücke definieren. Auch dabei kann man so vorgehen, daß man

1. die Werte $k(F)$ für die Konstanten und Variablen fixiert, und
2. für jedes $n \geq 1$ eine zahlentheoretische Funktion $g_n(x_0, x_1, \ldots x_n)$ angibt, so daß gilt $k(F(t_1, \ldots, t_n)) = g_n(k(F), k(t_1), \ldots, k(t_n))$.

Dann kann man für die g_n Axiome in Analogie zu B1 bis B4 formulieren.

Es liegt nahe, k(F) mit dem im ersten Schritt ermittelten Komplexitätsgrad von Funktoren zu identifizieren, und den Variablen der Kategorie τ denselben Komplexitätsgrad zuzuordnen wie den Konstanten derselben Kategorie. Das bewirkt, daß man nun z. B. die Stellenzahl von F zweimal zählt: sie steckt im Wert k(F) und in den Werten $k(t_i)$. Aber man will ja auch z. B. dem Satz F(a) einen höheren k-Wert zuordnen als der Konstanten F. Wir zählen also das Funktionssymbol mit seinen Leerstellen und das, was in diese Leerstellen eingesetzt wird, gesondert; das Satzmuster, wie es der Funktor F bestimmt, und die Ausdrücke, mit denen dieses Muster ausgefüllt wird.

Es liegt dann nahe, g_n mit f_n zu identifizieren. Wenn wir nun wieder setzen:

1) $g_n(x_0, x_1, \ldots, x_n) = f_n(x_0, x_1, \ldots, x_n) = f(x_0, x_1 + \ldots + x_n)$,
2) $f(x, y) = x \cdot y$ und
3) $k(\sigma) = 2$, und $k(\nu) = 3$,

so erhalten wir z. B. folgende Werte:

$k(\neg p) = 8$, $k(p \wedge q) = 32$, $k(F(a)) = 18$, $k(F(a, b)) = 72$,
$k(f(a)) = 27$, $k(f(a, b)) = 108$, $k(\neg F(a)) = 72$, $k(\bigwedge x F(x)) = 216$,
$k(F(f(a))) = 162$, $k(\bigwedge x \bigvee y (F(x) \wedge G(y))) = 41\,472$,
$k(\bigwedge x F(x) \wedge \bigvee y G(y)) = 3456$.

Dabei seien p, q Satzkonstanten, F, G Prädikatkonstanten 1. Stufe und f, g Funktionskonstanten 1. Stufe. Die beiden letzten Beispiele zeigen, daß verschränkte Quantoren die Komplexität eines Ausdrucks stark erhöhen. Es ist $k(p \wedge q \wedge r) = k((p \wedge q) \wedge r) = 272$. Dem üblichen Verständnis würde es aber wohl besser entsprechen, die Konjunktion $p \wedge q \wedge r$ im Sinne eines dreistelligen Satzoperators zu deuten; dann erhielte man $k(p \wedge q \wedge r) = 72$. Auf solche Detailfragen wollen wir hier aber nicht eingehen.

Während das Komplexitätsmaß für Terme nur deren Kategorie berücksichtigt, nicht aber ihre *semantische Komplexität* (nach der z. B. die Funktion $x + y$ einfacher ist als die Funktion x^y), kann man diese teilweise durch die Einfachheit von Theorien berück-

sichtigen, indem man die Bedeutungspostulate und definitorischen Bestimmungen als Axiome einer Theorie dieses Terms ansieht, bzw. sie zu den Axiomen hinzunimmt, in denen dieser Term vorkommt.[12] Damit wird freilich die Sprachabhängigkeit des Einfachheitsbegriffs nicht aufgehoben: die Grundterme, auf die sich die expliziten und impliziten Definitionen stützen und deren Bedeutung sich daher nicht, oder doch nicht vollständig, durch Bedeutungspostulate ausdrückt – z. B. die Beobachtungsterme in empirischen Theorien – können sich ebenfalls bzgl. ihrer semantischen Komplexität unterscheiden und diese Unterschiede werden auf diese Weise nicht erfaßt.[13] Geht man im obigen Beispiel von der Nachfolgerfunktion x' als Grundterm aus, so lauten die Bedeutungspostulate für $x+y$ so:
$x+0=x$, $x+y'=(x+y)'$. Für x^y kommen dagegen noch folgende Postulate hinzu: $x \cdot 0=0$, $x \cdot y'=x \cdot y+x$; $x^0=1$, $x^{y'}=x^y \cdot x$; die Bedeutung von x' wird dabei vorausgesetzt. Eine Theorie mit dem Term x^y (bzw. die Theorie dieses Terms) ist daher komplizierter als eine Theorie, die statt dessen den Term $x+y$ enthält (bzw. als die Theorie von $x+y$).

Der dritte und letzte Schritt der Festlegung der syntaktischen Einfachheit von Theorien besteht nun darin, aus dem Maß der Einfachheit des Vokabulars V(T) einer Theorie:
$v(T)=\sum_{F\varepsilon V(T)} k(F)$, und dem Maß der Einfachheit der Axiome:
$a(T)=\sum_{A\varepsilon T} k(A)$ einen Wert e(T) für die Einfachheit der Theorie T zu ermitteln, und dabei festzulegen, welches Gewicht man auf konzeptuelle Sparsamkeit, welches Gewicht man auf die Einfachheit der Axiome legen soll.

Man kann z. B. e(T) als gewichtetes Mittel von v(T) und a(T) bestimmen und setzen:

---

[12] Vgl. dazu auch Post [61].

[13] Es erscheint allerdings sehr fraglich, ob man Kriterien für einen sinnvollen Einfachheitsvergleich undefinierter Grundterme angeben kann. Vgl. dazu die Diskussion des Einfachheitsbegriffs von Goodman weiter unten.

$$e(T) = \frac{g_v \cdot v(t) + g_a \cdot a(T)}{g_v + g_a}.$$

Da es wohl sehr schwer ist, ohne ausführliche Diskussion einzelner Fälle die Gewichte g_v und g_a festzulegen, und da jede Wahl fester g_v und g_a entweder für einfache Theorien v(T) oder für komplexe Theorien a(T) zu stark bevorzugt – a(T) wächst mit Zahl und Länge der Axiome sehr viel schneller an als v(T) – wollen wir e(T) im Sinn einer ganz groben ersten Näherung bestimmen durch:

$$e(T) = a(T) \cdot v(T).$$

Diese Festsetzung hat zwar den Nachteil, sehr hohe Zahlenwerte e(T) zu ergeben, aber das spielt für eine erste Orientierung keine Rolle.[14]

Die Berücksichtigung der Einfachheit des Vokabulars einer Theorie soll in Rechnung stellen, daß wir z.B. die Sätze $A_1 = F(a) \wedge G(a)$, $A_2 = F(a) \wedge F(b)$ und $A_3 = F(a) \wedge F(a)$ als einfacher ansehen als den Satz $A_0 = F(a) \wedge G(b)$. Die Sätze haben alle den gleichen syntaktischen Bau, also das gleiche syntaktische Komplexitätsmaß $a(A_i) = 288$. Es ist aber $v(A_0) = 18$, $v(A_1) = 15$, $v(A_2) = 12$ und $v(A_3) = 9$. Es ist also $e(A_0) = 2 \cdot e(A_3)$, $e(A_1) = \frac{5}{3} \cdot e(A_3)$ und $e(A_2) = \frac{4}{3} \cdot e(A_3)$.

Es sei noch einmal betont, daß unsere numerischen Festlegungen nur illustrativen Charakter haben und daß die Bestimmung

---

[14] Man könnte auch daran denken, das Komplexitätsmaß a(T) zur Bestimmung von e(T) im Verhältnis der Zahl der Wiederholungen eines Terms in T und seines Komplexitätsmaßes zu reduzieren. In diesem Sinn kann man die Summe $s(T) = \sum_{F_i \varepsilon V(T)} n_i \cdot k(F_i)$ bilden, wobei n_i die um eins verminderte Zahl der Vorkommnisse des Terms F_i in den Axiomen von T ist, und e(T) bestimmen durch:

$e(T) = \frac{a(T)}{s(T)}$ (für $s(T) = 0$ ist dann $e(T) = a(T)$ zu setzen), oder durch

$e(T) = a(T) - s(T)$.

Für die erstere Festlegung wäre aber z.B. die Theorie mit den beiden Axiomen $\bigwedge x(F(x) \supset G(x))$, $\bigwedge x(G(x) \supset F(x))$ sechsmal einfacher als die Theorie, die nur das erste Axiom enthält. Und im zweiten Fall würde bei hohen a(T)-Werten der Wert von s(T) kaum mehr ins Gewicht fallen.

eines adäquaten Komplexitätsmaßes sehr viel detailliertere Erörterungen von Beispielen voraussetzen würde. Wir wollen aber mit Hilfe unseres einfachen Maßes doch an einem einfachen Beispiel zeigen, was ein metrischer Einfachheitsbegriff leisten kann.

Es ist offensichtlich, daß man mit dem syntaktischen Einfachheitsbegriff die fünf eingangs formulierten Fragen beantworten kann. Uns interessiert es aber vor allem, im Hinblick auf die im Abschnitt 4.1 formulierte These, daß die Einführung theoretischer Terme eine Vereinfachung einer Theorie bewirken kann, ein Beispiel dafür kennenzulernen:

T sei die Theorie mit den Axiomen:

$$\begin{gathered}\bigwedge x(F_1(x) \wedge F_2(x) \wedge G_1(x) \supset H_1(x))\\ \bigwedge x(F_1(x) \wedge F_2(x) \wedge G_2(x) \supset H_1(x))\\ \bigwedge x(F_1(x) \wedge F_2(x) \wedge G_3(x) \supset H_2(x))\\ \bigwedge x(F_1(x) \wedge F_2(x) \wedge G_4(x) \supset H_2(x))\\ \bigwedge x(F_3(x) \wedge F_4(x) \wedge G_1(x) \supset H_1(x))\\ \bigwedge x(F_3(x) \wedge F_4(x) \wedge G_2(x) \supset H_1(x))\\ \bigwedge x(F_3(x) \wedge F_4(x) \wedge G_3(x) \supset H_2(x))\\ \bigwedge x(F_3(x) \wedge F_4(x) \wedge G_4(x) \supset H_2(x))\end{gathered}$$

Die F, G und H seien Beobachtungsterme.

Es wird nun ein theoretischer Term K(x) eingeführt und eine Theorie T′ formuliert:

$$\begin{gathered}\bigwedge x(F_1(x) \wedge F_2(x) \supset K(x))\\ \bigwedge x(F_3(x) \wedge F_4(x) \supset K(x))\\ \bigwedge x(K(x) \wedge G_1(x) \supset H_1(x))\\ \bigwedge x(K(x) \wedge G_2(x) \supset H_1(x))\\ \bigwedge x(K(x) \wedge G_3(x) \supset H_2(x))\\ \bigwedge x(K(x) \wedge G_4(x) \supset H_2(x))\end{gathered}$$

In T″ wird der Term K(x) durch Definition eingeführt, und die ersten beiden Axiome von T′ werden durch die Definitionsformel

$\bigwedge x(F_1(x) \wedge F_2(x) \vee F_3(x) \wedge F_4(x) \equiv K(x))$ ersetzt.

Man erhält nun folgende numerischen Komplexitätswerte

$a(T) = 1893888$, $v(T) = 60$, $e(T) = a(T) \cdot v(T) = 113633280$
$a(T') = 176256$, $v(T') = 66$, $e(T') = a(T') \cdot v(T') = 11632896$
$a(T'') = 561600$, $v(T'') = 66$, $e(T'') = a(T'') \cdot v(T'') = 37065600$.

Die absoluten Zahlenwerte sind dabei für uns ohne Interesse, ihr Vergleich zeigt aber, daß die Einführung des theoretischen Terms K den Wert a(T) sehr stark vermindert und daß auch die damit verbundene Erweiterung des Vokabulars die Verminderung von e(T) nicht aufhebt. Obwohl auch die definitorische Einführung eines neuen Terms in T'' die Werte a(T) und e(T) sehr stark vermindert, erweist sich doch die Einführung von K als eines theoretischen Terms als vorteilhafter: Der strukturelle Einfachheitsbegriff setzt eine hohe Prämie auf kurze Axiome aus. Daher ist es günstiger, die Definitionsbestimmungen in T'' (unter Abschwächung) in die zwei einfacheren ersten Axiome von T' aufzulösen.

Die in der wissenschaftstheoretischen Literatur vorwiegend diskutierten Ansätze zur Explikation des Einfachheitsbegriffs weichen in den Grundgedanken erheblich von dem oben skizzierten Ansatz ab:

1. Teilweise bestimmt man die Einfachheit von Theorien ausschließlich durch die Einfachheit ihres Vokabulars. Dann kann man aber z. B. das oben formulierte Problem (I) nicht befriedigend beantworten: Theorien mit dem gleichen Vokabular haben immer den gleichen Komplexitätsgrad.

Wenn man ferner (a) ein Vokabular V_1 komplizierter als ein Vokabular V_2 nennt, falls sich alle Terme von V_2 in denen von V_1 definieren lassen, aber nicht umgekehrt – wenn man also Komplexität mit definitorischer Stärke identifiziert[15] –, so wäre immer diejenige Theorie aus einer Menge von Theorien, die mithilfe von Definitionen auseinander hervorgehen, am einfachsten, in der alle deskriptiven Terme als Grundterme aufgefaßt werden, und eine Theorie würde durch die Hinzunahme definierbarer Terme nicht komplizierter. Wenn man ferner nur auf den Typ der Terme achtet, so haben Theorien mit einer zweistelligen Re-

---

[15] Vgl. dazu das erste Komplexitätsmaß von J. Kemeny in [55a]; dazu die kritischen Einwände von Goodman in [59].

lation bereits maximale Kompliziertheit, da sich jedes System von Prädikaten durch eine zweistellige Relation definieren läßt.[16]

(b) N. Goodman hat in einer Reihe von Arbeiten[17] die Einfachheit eines Vokabulars so bestimmt, daß ein Vokabular der relevanten Art K höchstens so kompliziert ist wie ein Vokabular der relevanten Art L, wenn jedes Vokabular der Art K ersetzt werden kann durch ein Vokabular der Art L.

Dabei werden zunächst nur Prädikate der elementaren Prädikatenlogik mit Identität betrachtet, und die „relevanten Arten" *(relevant kinds)* K, L werden ausschließlich bestimmt durch die Zahl der Terme, ihre Stellenzahl und ihre Reflexivitäts-, Symmetrie- und Transitivitätseigenschaften. Ersetzbarkeit eines Vokabulars V durch ein Vokabular V′ liegt vor, wenn man mit den Mitteln dieser elementaren Logik und ohne weitere Voraussetzungen, als daß V der Art K und V′ der Art L angehört, die Terme von V′ durch die von V definieren kann und die von V durch die von V′. Da es z. B. zu jedem Vokabular mit einem zweistelligen Prädikat Prädikat $F(x,y)$, für das gilt $x \neq y \supset F(x,y)$, ein Vokabular mit einem einstelligen Prädikat $G(x)$ gibt, das jenes ersetzen kann – man definiert $G(x) := F(x,x)$ und $F(x,y) := x = y \wedge G(x) \vee x \neq y$ – so ist ein Vokabular der ersten Art nicht komplizierter als ein Vokabular der zweiten Art. Ein Vokabular hat den Komplexitätswert der kleinsten relevanten Art, zu der es gehört.

Goodmans Ansatz entgeht den beiden oben angeführten Inadäquatheiten: Nur unter gewissen Bedingungen, die sich nicht durch relevante Arten beschreiben lassen, und mit stärkeren logischen Hilfsmitteln läßt sich mit den Prädikaten $F_1, \ldots, F_n$ eines Vokabulars ein zweistelliges Prädikat G definieren, mit dem man umgekehrt auch die $F_1, \ldots, F_n$ definieren kann; und ist ein Vokabular V echt in einem Vokabular V′ enthalten, so hat das letztere bei Goodman einen höheren Komplexitätswert als das erstere. Es ist jedoch intuitiv sehr unbefriedigend, daß man sich bei der

---

16 Vgl. dazu Tarski [54] und Quine [54].

17 Vgl. insbesondere Goodmans Arbeiten [55a], [59] und [51], Kap. III.

Ersetzbarkeit auf gewisse elementare logische Hilfsmittel beschränken soll und dabei auch nur gewisse elementare Eigenschaften der Prädikate berücksichtigen darf. Warum werden bei der Bestimmung der Vokabular-Arten nur Reflexivitäts-, Symmetrie- und Transitivitätseigenschaften berücksichtigt und nicht auch andere mit elementaren logischen Mitteln definierbare Eigenschaften? Endlich ist zu fragen, woher man von der Zugehörigkeit eines Vokabulars zu einer Art, z. B. von der Reflexivität eines Prädikats weiß: Goodman betont in [59] gegenüber den Einwänden von J. Kemeny in [55a], daß auch eine kontingente Reflexivität, solange sie nur bekannt ist, zu berücksichtigen sei. Wenn aber die relevanten Eigenschaften der Prädikate von ihren Extensionen abhängen, so wird die Einfachheit eines Vokabulars zu einer *empirischen* Angelegenheit. Für die logische Einfachheit dürfen dagegen nur die durch Bedeutungspostulate fixierten Eigenschaften der Prädikate eine Rolle spielen.

Der Goodmansche Ansatz zur Explikation der Einfachheit ist also intuitiv undurchsichtig und unbefriedigend, und sein Einfachheitsbegriff ist als empirischer Begriff nicht für methodologische Zwecke verwendbar.[18]

2. Andere Ansätze lassen wiederum die Einfachheit des Vokabulars einer Theorie für deren Einfachheit außer Betracht. Das hat aber den Nachteil, daß die Ökonomie der Begriffe nicht berücksichtigt wird, und damit das alte philosophische Einfachheitspostulat von Ockham *entia non sunt multiplicanda praeter necessitatem*.[19] Der Wert von Definitionen und theoretischen Begriffen für die Vereinfachung von Theorien kommt dann nicht zum Ausdruck.

Wenn man den Komplexitätsgrad einer Theorie ferner durch ihre Deduktionskraft, d.h. ihre Stärke mißt, so haben logisch äquivalente Theorien denselben Komplexitätsgrad. Einen solchen

[18] Zur Kritik am Ansatz von Goodman vgl. auch Kemeny [55a] und Suppes [56a] und dazu wiederum Goodman [59].

[19] Bei Ockham selbst finden sich allerdings nur Formeln wie „Pluralitas non est ponenda sine necessitate“ oder „Frustra fit per plura, quod potest fieri per pauciora“.

Einfachheitsbegriff hat J. Kemeney in [55a] vorgeschlagen, indem er (für endliche Objektbereiche) die Zahl der Modelle einer Theorie als für ihre Einfachheit ausschlaggebend ansah.

K. Popper setzt in [66], Kap. VII die Einfachheit einer Theorie mit ihrem Falsifizierbarkeitsgrad gleich.[20] Wenn man sich auf den komparativen Falsifizierbarkeitsbegriff Poppers bezieht (den er allerdings selbst verwirft), nach dem stärkere Theorien in höherem Maße falsifizierbar sind, so führt das auf den Begriff der Einfachheit als deduktiver Stärke zurück. Wenn man aber von der Festlegung Poppers ausgeht, daß der Falsifizierbarkeitsgrad einer Theorie mit ihrem Informationsgehalt, d.h. mit ihrer Unwahrscheinlichkeit zusammenfällt, so haben alle Theorien als wesentlich universelle Sätze die Wahrscheinlichkeit Null, so daß man sie mit diesem Maß nicht komparativ ordnen kann. Außerdem ist der intuitive Grundgedanke Poppers für diesen Ansatz ganz unplausibel: Die Wahrscheinlichkeit, daß n Maßwerte $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ für eine Funktion $y = f(x)$ auf einer ebenen Kurve liegen, ist für alle Kurven gleich unwahrscheinlich und nicht etwa, wie Popper meint, für eine Gerade besonders unwahrscheinlich. Es ist freilich sicher, daß man die Meßwerte durch ein Polynom $\sum\limits_{i=0}^{m} a_i x^i$ mit $m = n$ darstellen kann, d.h. daß es Koeffizienten a_i gibt, so daß gilt $y_j = \sum\limits_{i=0}^{m} a_i x_j^i$ für $j = 1, \ldots, n$. Insofern könnte man sagen, daß man mit einem $m > 1$ die Werte besser approximieren kann als mit $m = 1$. Aber eine Hypothese über die Funktion f(x) ist eine Hypothese der Gestalt „$f(x) = \sum\limits_{i=0}^{m} a_i \cdot x^i$“ mit festen Koeffizienten a_i, nicht aber eine Existenzaussage „Es gibt Werte $a_i (i = 0, \ldots, m)$ mit $a_m \neq 0$, so daß $f(x) = \sum\limits_{i=0}^{m} a_i \cdot x^i$ ist“. Eine Existenzhypothese „Es gibt a_0 und a_1, so daß $f(x) = a_0 + a_1 \cdot x$ ist“ wäre auch kaum „unwahrscheinlicher“ als eine Hypothese der Form „$f(x) = \sum\limits_{i=0}^{m} a_i x^i$“ mit $a_m \neq 0$.

---

[20] Vgl. dazu auch den Abschnitt 5.1.

Endlich kann man Einfachheit und Unwahrscheinlichkeit nicht gleichsetzen: Sind H und H′ zwei Hypothesen, die nichts miteinander zu tun haben, so ist $H \wedge H'$ komplizierter aber unwahrscheinlicher als H; und eine einfache Tautologie wie $p \vee \neg p$ hat bei Popper minimale Einfachheit.[21]

Weitere Ansätze zur Explikation des Einfachheitsbegriffs sind:

3. Einfachheit ist Kürze. Ein Satz, bzw. eine Theorie ist umso einfacher, je kürzer sie ist.[22] Die Adäquatheit einer solchen Definition würde aber in unvernünftiger Weise von der zugrundegelegten Sprache S abhängen: Wenn der Konjunktionsoperator in S durch einen Ausdruck mit einem Zeichen, der Disjunktionsoperator hingegen durch einen Ausdruck mit 400 Zeichen dargestellt würde, so wäre der Satz „$p \vee q$" annähernd 400 mal so kompliziert wie der Satz „$p \wedge q$". Man müßte also eine Sprache zugrundelegen, in der gleich komplizierte Terme gleichlange Ausdrücke wären, und müßte so auf einen anderen Einfachheitsbegriff rekurrieren.
4. Die Einfachheit einer Theorie T ist die Zahl der Vorkommnisse von Quantoren in den Axiomen von T.[23] Dieser Vorschlag berücksichtigt aber weder die Komplexität des Vokabulars, noch kann er zwischen Theorien ohne Quantoren differenzieren oder einen Unterschied zwischen verschränkten und nichtverschränkten Quantoren machen.

---

[21] Vgl. dazu Good [68], S. 129. Dort wird umgekehrt die *Komplexität* einer Hypothese H durch die Information von H gemessen (an die Stelle des Maßes $1 - w(H)$ tritt nun das Maß $-\log w(H)$), und die *Einfachheit* von H durch den reziproken Wert der Komplexität; d.h. die wahrscheinlichen Hypothesen sind die einfachen, und eine Kontradiktion wie $p \wedge \neg p$ hat nun minimale Einfachheit. Unsere grundsätzlichen Einwände treffen aber auch auf diesen Ansatz zu.

[22] Vgl. dazu z.B. Kiesow [58], Oberschelp [60] und Walk [66]. Dort wird dieser Grundgedanke freilich noch modifiziert. Der Einfachheitsbegriff wird dann aber nur mehr auf Zustands- und Strukturbeschreibungen anwendbar.

[23] Vgl. dazu Kyburg [61a].

Die starke Divergenz der hier vorgestellten Vorschläge zur Explikation des Einfachheitsbegriffs macht deutlich, daß die Theorie der Einfachheit sich im allerersten Anfangsstadium befindet. Es bedarf also noch ernster Arbeit, um sie auf ein sicheres Fundament zu stellen. Dabei sollte man sich allerdings nicht zu schnell in technischen Detailfragen verlieren, sondern zunächst einmal versuchen, sich den intuitiven Einfachheitsbegriff, den man präzisieren will, hinreichend klar vor Augen zu stellen.

Es gibt auch Stimmen, die das Kriterium der Einfachheit als mehr oder weniger unwichtig für die Beurteilung empirischer Theorien ansehen. So führt z. B. M. Bunge in [61], nachdem er verschiedene Arten von Einfachheit unterschieden und gezeigt hat, daß diese Einfachheitsbegriffe sich nicht unter einen Hut bringen lassen, nicht weniger als 20 Kriterien für die Beurteilung von Theorien an, von denen nur drei etwas mit gewissen Einfachheitsbegriffen zu tun haben. Er versucht an fünf prominenten wissenschaftshistorischen Beispielen zu zeigen, daß Einfachheitskriterien tatsächlich eine höchst geringe Rolle im Wissenschaftsprozeß spielen und meist von anderen Maßstäben verdrängt werden: „... simplicity is similar to phlogiston: it is vague, elusive, and has a negative weight whenever it is not imponderable“.[24]

Wenn man die Kriterien Bunges ansieht, die mit Einfachheitsüberlegungen nichts zu tun haben, so findet man allerdings auch solche wie „Tiefe“, „Originalität“, „Konformität mit der herrschenden Weltanschauung“, „Fruchtbarkeit“ etc., die wohl kaum weniger vage und fragwürdig sind als die Einfachheitsbegriffe. Es ist aber gut, sich abschließend noch einmal klar zu machen, daß 1. weder die strukturelle Einfachheit, für die wir oben eine Präzisierung vorgeschlagen haben, mit Einfachheit schlechthin gleichzusetzen ist, sondern daß es verschiedene divergierende Aspekte gibt, unter denen man eine Theorie als „einfach“ bezeichnen kann; und daß es 2. neben der Einfachheit (und den anderen methodologischen Kriterien, die wir in dieser Arbeit

[24] Bunge [61], S. 147f.

behandeln) noch weitere Kriterien gibt, nach denen man empirische Theorien beurteilen kann. Unter theoretischem Aspekt ist aber wohl die strukturelle Einfachheit ausschlaggebend, und nach den selbstverständlichen anderen methodologischen Kriterien wie Stärke der Theorie, Verträglichkeit mit den Beobachtungsdaten, Überprüfbarkeit (deduktive und induktive Bestätigung), und Verträglichkeit mit oder Integrierbarkeit in andere akzeptierte Theorien, sind wohl Einfachheitskriterien die maßgeblichen Kriterien zur Beurteilung von Theorien.

4.3 Naturgesetze

Der Begriff des Naturgesetzes spielt bei vielen wissenschaftstheoretischen Problemstellungen eine wichtige Rolle, z. B. im Zusammenhang mit den im nächsten Abschnitt zu erörternden wissenschaftlichen Erklärungen. Wir wollen hier die Frage diskutieren, inwieweit dieser Begriff einer präzisen Explikation zugänglich ist.[1]

Üblicherweise versucht man den Begriff des Naturgesetzes dadurch näher zu bestimmen, daß man den Begriff der *gesetzesartigen Aussage* bestimmt und Naturgesetze als wahre gesetzesartige Aussagen charakterisiert. Zur Bestimmung der gesetzesartigen Aussagen bieten sich zunächst folgende beiden Bedingungen an:

I) Gesetzesartige Aussagen, die im Fall ihrer Wahrheit Naturgesetze sein sollen, können im Gegensatz zu logischen und mathematischen Sätzen und Gesetzen nicht aus logischen und mathematischen Gründen wahr oder falsch sein, und sie können im Gegensatz zu Sätzen wie „Alle Junggesellen sind unverheiratet" in ihrem Wahrheitswert nicht allein durch die Bedeutungen der in ihnen vorkommenden Terme bestimmt sein. Wir können in diesem Sinn sagen: *Gesetzesartige Aussagen sind nichtanalytisch.*

[1] Vgl. zum folgenden auch Stegmüller [69], Kap. V.

nauer: *wesentlich generelle Allsätze*, also Sätze der Gestalt $\bigwedge x$---
II) Gesetze sollen allgemeine Aussagen sein. Daher liegt es nahe zu fordern, daß gesetzesartige Aussagen Allaussagen sind, ge-
oder $\bigwedge x_1 \ldots x_n$---, die nicht mit einem molekularen Satz, d.h. einem Satz ohne Quantoren logisch äquivalent sind.[2] Da es für die Gesetzartigkeit einer Aussage aber nicht so sehr auf deren Formulierung ankommt als auf ihre Bedeutung, genügt es zu fordern, daß gesetzesartige Aussagen mit einem wesentlich generellen Allsatz logisch äquivalent sind. Solche Aussagen nennen wir auch *wesentlich universelle Sätze*. Die Formulierung als Allsatz stellt dann eine Normalform einer gesetzesartigen Aussage dar.

Es gibt nun viele wahre, nichtanalytische wesentlich universelle Sätze, die keine Naturgesetze darstellen, wie z.B. den Satz

a) „Alle Studenten, die sich jetzt in diesem Raum befinden, sind im Juni geboren".

Dieser Satz ist zwar faktisch, nicht aber logisch äquivalent mit einem molekularen Satz.[3] Wenn man also den Begriff des Naturgesetzes durch den Begriff der gesetzesartigen Aussage definieren will, muß man für diesen noch weitere einschränkende Bedingungen angeben. Dazu hat man folgende Vorschläge gemacht:

1) Eine gesetzesartige Aussage darf (im Gegensatz zu (a)) keine Bezugnahme auf bestimmte Zeitpunkte, Orte oder Objekte enthalten.

Diese Forderung ist aber zu restriktiv, denn auch Aussagen über alle Lebewesen auf der Erde oder über die Bewegungen der Planeten des Sonnensystems können Gesetzescharakter haben. Um dieser Schwierigkeit zu entgehen, hat R. Carnap in [46b]

---

[2] Auch einfache statistische Gesetze der Gestalt $p(A)=r$ (die objektive Wahrscheinlichkeit von A ist r) haben nach der Häufigkeitsdefinition D2.2.1–1 den Charakter von Allsätzen: sie besagen, daß bei allen Grundfolgen x r der Grenzwert der relativen Häufigkeiten $h_n(A,x)$ ist.

[3] Nimmt man an, das Universum sei endlich, so ist jeder Satz faktisch mit einem molekularen Satz äquivalent; d.h. wenn man für alle Dinge Namen einführt, kann man jede Allaussage durch eine endliche Konjunktion und jede Existenzaussage durch eine endliche Disjunktion ersetzen.

einen Unterschied zwischen *fundamentalen* und aus ihnen *abgeleiteten* gesetzesartigen Aussagen gemacht, und die Forderung nur auf die ersteren bezogen. Aber jeder Satz A läßt sich logisch äquivalent in einem Satz $A' := A \wedge a = a$ mit Objektkonstanten umformen, so daß die Bedingung nicht invariant gegenüber logisch äquivalenten Umformungen ist und daher auch fundamentale gesetzesartige Aussagen nicht auszeichnen kann. Umgekehrt läßt sich auch jeder Satz in einen Satz ohne Objektkonstanten transformieren; definiert man z. B. $G(x) := x = a$, so kann man den Satz F(a) in $\bigwedge x(G(x) \supset F(x))$ übersetzen.[4] Carnaps Vorschlag, rein qualitative Prädikate zu definieren, mit denen man dann die (fundamentalen) gesetzesartigen Aussagen als nichtanalytische wesentlich universelle Sätze bestimmen könnte, die nur qualitative Prädikate enthalten, haben wir schon in 2.3.3 gewürdigt.

Diese Überlegung zeigt bereits, daß es mit rein logischen Mitteln kaum möglich sein wird, den Begriff der gesetzesartigen Aussage enger einzugrenzen als durch (I) und (II); es gibt eben Sätze derselben Struktur, z. B. $\bigwedge x(F(x) \supset G(x))$, die bei manchen Interpretationen („Alle Metalle leiten Elektrizität") gesetzesartig sind, bei anderen Interpretationen (z. B. im Sinn von (a)) hingegen nicht.

2) Ein zweiter Vorschlag zur weiteren Eingrenzung der gesetzesartigen Aussagen lautet: Eine gesetzesartige Aussage muß induktiv bestätigungsfähig sein.

Wenn man im Fall (a) einige der anwesenden Studenten nach ihrem Geburtsmonat befragt hat und alle Befragten im Juni geboren wurden, so wird man es deswegen nicht als wahrscheinlicher ansehen, daß auch die übrigen im Juni Geburtstag haben.

Dieses Kriterium der induktiven Bestätigungsfähigkeit ist aber noch zu weit, da auch viele Sätze, die wir intuitiv nicht als gesetzesartig ansehen, wie z. B. der Satz:

---

[4] Die Vermeidung von Definitionen ist dabei kein Ausweg, denn der Begriff der gesetzesartigen Aussage wäre dann immer noch sprachabhängig: In einer anderen Sprache kann ja G(x) ein Grundprädikat sein.

b) „Alle Kugeln in dieser Urne sind rot"
induktiv bestätigungsfähig sind. Andererseits sind wesentlich universelle Sätze nach den Ausführungen in 2.5.4 nicht bestätigungsfähig; die Beobachtung positiver Instanzen solcher Sätze erhöht allenfalls ihre Instanzenwahrscheinlichkeit. Diese ist aber nur für einfache Sätze der Gestalt $\wedge xF(x)$, $\wedge x(F(x) \supset G(x))$ etc. definiert.[5]

3) Ein dritter Vorschlag endlich lautet: Ein Satz der Form „Alle Fs sind G" ist ein wahrer gesetzesartiger Satz, wenn auch für diejenigen Objekte a, die nicht Fs sind, die irrealen Konditionalsätze gelten „Wäre a ein F, so wäre a auch G".

Im Beispiel (a) würde man nicht behaupten wollen: „Wenn sich der Student a jetzt in diesem Raum befände, wäre er im Juni geboren" (der gegenwärtige Aufenthaltsort von a ist ohne Einfluß auf seinen Geburtsmonat), und im Beispiel (b) würde man nicht behaupten wollen „Wenn sich die Kugel b in dieser Urne befände, wäre sie rot" (die Kugel b ändert ihre Farbe nicht, wenn ich sie in die Urne lege).

Auch dieses Kriterium ist aber inadäquat, weil es nur für Aussagen einer bestimmten Form erklärt ist. Wie lauten z. B. die irrealen Konditionalsätze im Fall des Satzes $\wedge x \vee y(F(x) \wedge R(x,y) \vee \vee zG(y,z))$ oder im Fall einer statistischen Hypothese?

Wenn wir davon jedoch einmal absehen, dann wird das Problem der Gesetzesartigkeit nach diesem Vorschlag auf das *Problem der Wahrheitsbedingungen für irreale Konditionalsätze* zurückgeführt. Auch dieses Problem ist aber sehr umstritten:

Offenbar kann man einen irrealen Konditionalsatz „Wäre p der Fall, so auch q" – wir wollen solche Sätze im folgenden symbolisch durch $A \Rightarrow B$ darstellen, wobei der Satz A den Sachverhalt p und B den Sachverhalt q ausdrückt – nicht in der Form $A \supset B$ darstellen. Denn da bei einem Irrealis das Antecedens A falsch ist, wären dann alle irrealen Konditionalsätze wahr; mit $A \Rightarrow B$ würde insbesondere auch $A \Rightarrow \neg B$ gelten.

[5] Vgl. dazu auch den Abschnitt 5.2.

N. Goodman hat in [55], Teil I eine eingehende Analyse der Wahrheitsbedingungen von Sätzen der Gestalt $A \Rightarrow B$ durchgeführt. Er geht aus von dem Ansatz:

α) Der Satz $A \Rightarrow B$ ist wahr genau dann, wenn es Naturgesetze gibt – ihre Konjunktion sei G – und Randbedingungen (wahre singuläre Sätze) – ihre Konjunktion sei R –, so daß gilt $G,R,A \rightarrow B$.

Da hierbei der Begriff des Naturgesetzes vorausgesetzt wird, hilft dieser Ansatz in unserem Zusammenhang nicht weiter, denn wir wollten ja, dem dritten Vorschlag zufolge, den Begriff des Naturgesetzes mit Hilfe der Wahrheitsbedingungen für irreale Konditionalsätze präzisieren.

Goodman hat aber auch gezeigt, daß sich keine Möglichkeit anbietet, die Menge der zulässigen Randbedingungen sinnvoll abzugrenzen: R muß zunächst, wie auch G, mit dem falschen Satz A verträglich sein, damit nicht $A \Rightarrow B$ für ein beliebiges Konsequens B wahr wird. Es genügt jedoch nicht, in (α) die Bedingung aufzunehmen, daß G und R mit A logisch verträglich sind: Es kann ja R mit A naturgesetzlich unverträglich sein, so daß aus R mit anderen Naturgesetzen $\neg A$ folgt. Goodmans Beispiel ist der richtige Konditionalsatz: „Wenn dies Wasserrohr gestern gefroren wäre, so wäre es geplatzt". Nach (α) ist auch der Satz „Wenn dies Wasserrohr gestern gefroren wäre, wäre es nicht geplatzt" wahr; denn aus Randbedingungen, die naturgesetzlich, wenn auch nicht logisch, implizieren, daß die Temperatur des Rohrs gestern nicht unter +5°C absank, die also *logisch*, wenn auch nicht naturgesetzlich mit dem Satz A: „Dies Wasserrohr ist gestern gefroren" verträglich sind, folgt mit den entsprechenden Gesetzen und mit dem Gesetz „Wasser dehnt sich erst beim Gefrieren stark aus" der Satz „Dies Rohr ist nicht geplatzt".

Man müßte also in (α) auch fordern, daß R naturgesetzlich mit A verträglich ist. Wir hätten dann zu formulieren, wenn G nun die Konjunktion aller Naturgesetze ist:[6]

---

[6] Für unendlich viele Naturgesetze hätte man sich auf ihre Menge anstatt auf eine Konjunktion G zu beziehen.

β) $A \Rightarrow B$ ist wahr genau dann, wenn es Randbedingungen R gibt, so daß die Sätze G,R,A konsistent sind und aus ihnen B logisch folgt.

Auch (β) ist aber unbrauchbar, wie ein einfaches logisches Beispiel zeigt. A sei der Satz $R_1 \vee R_2$, B der Satz R_2; dann sind die Sätze $\neg R_1$ und $\neg R_2$ wahr. Es gelte weder $G, \neg R_1 \rightarrow \neg A$, noch $G, \neg R_2 \rightarrow \neg A$. Dann sind die Sätze $G, \neg R_1, A$ konsistent und es gilt $G, \neg R_1, A \rightarrow B$ und es ist $G, \neg R_2, A$ konsistent und es gilt $G, \neg R_2, A \rightarrow \neg B$.

Wenn man aber fordern würde

γ) $A \Rightarrow B$ ist wahr genau dann, wenn $A \Rightarrow B$, nicht aber $A \Rightarrow \neg B$ nach (β) gilt,

so wäre das zu eng: Folgt B aus A nicht rein naturgesetzlich, d.h. ohne weitere Randbedingungen R, und ist B ebenso wie A falsch, wie das wohl bei den meisten irrealen Konditionalsätzen der Fall ist, so sind die Sätze $G, \neg B, A$ konsistent und es gilt trivialerweise $G, \neg B, A \rightarrow \neg B$, so daß die zweite Forderung in (γ) nicht erfüllt ist.

Wenn man, um diesen letzteren Fall auszuschließen, fordert, daß $G \wedge R$ sowohl mit B wie mit $\neg B$ verträglich ist, so daß sich B wirklich erst mit Hilfe von A ergibt, so erhält man folgende Bedingung:

δ) Es gelte $A \Rightarrow. B$ genau dann, wenn es Randbedingungen R gibt, so daß die Sätze G,R,A konsistent sind und daß gilt $G, R, A \rightarrow B$, nicht jedoch $G, R \rightarrow B$. Dann ist $A \Rightarrow B$ wahr genau dann, wenn gilt $A \Rightarrow. B$, nicht jedoch $A \Rightarrow. \neg B$.

Gegen (δ) hat Goodman abermals Bedenken erhoben: Die beiden irrealen Konditionalsätze (1) „Wenn das Streichholz gerieben worden wäre, hätte es gebrannt“ und (2) „Wenn das Streichholz gerieben worden wäre, wäre es naß gewesen“ kann man nicht zugleich behaupten, denn wenn wir (1) behaupten, setzen wir als notwendige Bedingung voraus, daß das Streichholz trocken war. Nach (δ) wäre aber (2) mit (1) wahr: Es seien R_1 passende Randbedingungen für (1), die den Satz C: „Das Streichholz war trocken“ enthalten; R sei so gewählt, daß $R_1 = R \wedge C$ ist und daß R und C logisch und naturgesetzlich unabhängig voneinander sind. Dann gilt für B: „Das Streichholz hat gebrannt“: Die Sätze G,R, $\neg$ B,A sind konsistent, G,R, $\neg$ B,A $\rightarrow$ $\neg$ C, nicht aber G,R, $\neg$ B $\rightarrow$ $\neg$ C (A sei der Satz „Das Streichholz ist gerieben worden“). Es gilt also A $\Rightarrow$. $\neg$ C. A $\Rightarrow$. C gilt aber nicht, denn es gibt wohl keine Randbedingungen R′, die mit G und A verträglich wären, und für die gilt G,R′,A $\rightarrow$ C, aber nicht G,R′ $\rightarrow$ C: wenn aus den Randbedingungen naturgesetzlich nicht C folgt, so folgt das auch nicht mit A. Nach (δ) gilt also A $\Rightarrow$ $\neg$ C, d.h. der Satz (2).

Goodman zeigt dann, daß ein Verbesserungsvorschlag von (δ), bei dem man die Konsistenzforderung zu einer Forderung der *Mithaltbarkeit* verschärft, zu einem Zirkel führt. Zwei Sätze A und B sollen dabei *mithaltbar (cotenable)* heißen, wenn A im Falle der Wahrheit von B wahr sein kann. (Im obigen Beispiel ist $\neg$ B nicht mit A mithaltbar.) Aber diese Mithaltbarkeit von A und B ist durch die Ungültigkeit von A $\Rightarrow$ $\neg$ B zu erklären, damit sie eine stärkere Bedingung ist als die Konsistenz der Sätze G,A,B, und man gelangt daher zu einem Zirkel, indem man die Wahrheitsbedingungen für irreale Konditionalsätze durch die Mithaltbarkeit erklärt, und diese durch jene.

Dieser letzte Einwand von Goodman zeigt, daß es nicht adäquat ist, bei der Definition der Geltungsbedingungen für irreale Konditionalsätze die angezogenen Randbedingungen durch einen Existenzquantor zu erfassen: Der Satz (1) ist richtig, wenn man voraussetzt, daß das Streichholz trocken war, und dann ist der Satz (2) nicht korrekt. Wenn man diese Voraussetzung hingegen nicht macht, so kann auch der Satz (2) korrekt sein: Wenn man weiß, daß das Streichholz nicht gebrannt hat, daß aber abgesehen davon, ob das Streichholz trocken war, alle Voraussetzungen dafür erfüllt gewesen sind, daß es gebrannt hätte, wenn man es gerieben hätte, so kann man die Behauptung (2) sinnvoll formulieren. Es bleibt allenfalls das Bedenken, daß im Gegensatz zu (1) das Antecedens von (2) keine *Ursache* für das Konsequens sein kann; aber kausale irreale Konditionalsätze lassen sich durch Bezugnahme auf Kausalgesetze bestimmen, und man kann nicht bei

allen Sätzen A $\Rightarrow$ B fordern, daß A Ursache von B sein könnte. Irreale Konditionalsätze kommen ja z. B. auch in der Mathematik vor, etwa in einem indirekten Beweis, wenn man sagt:
„Würde A gelten, so auch $C \wedge \neg C$".

Wir können uns von diesem Problem befreien, wenn wir folgendes Beispiel von W. V. Quine betrachten:
(3) „Wenn Verdi und Bizet Landsleute gewesen wären, so wäre Bizet ein Italiener gewesen".
(4) „Wenn Verdi und Bizet Landsleute gewesen wären, so wäre Verdi ein Franzose gewesen".

Man kann nicht beide Sätze zugleich behaupten, da ihre Consequentia (die nach dem Antecedens implizieren, daß beide Italiener, bzw. Franzosen waren) unverträglich sind. Es gibt aber Voraussetzungen (Randbedingungen), unter denen beide Sätze richtig werden. Halte ich fest, daß Verdi Italiener war (5) und sehe einmal davon ab, daß Bizet tatsächlich Franzose war, so ist es sinnvoll, (3) zu behaupten. Halte ich hingegen fest, daß Bizet Franzose war (6), und sehe einmal davon ab, daß Verdi Italiener war, so ist es sinnvoll, (4) zu behaupten.

Das führt zu folgendem Ansatz, dessen Grundgedanken N. Rescher in [64] entwickelt hat: Ein irrealer Konditionalsatz A $\Rightarrow$ B ist nur wahr oder falsch *in Bezug auf eine Menge von Annahmen* $\mathscr{A}$. Bzgl. $\mathscr{A}$ ist der Satz A $\Rightarrow$ B wahr, wenn A mit $\mathscr{A}$ verträglich ist und B aus $\mathscr{A}$ und A logisch folgt. *Bzgl. derselben Annahmen* $\mathscr{A}$ kann dann nicht zugleich auch der Satz A $\Rightarrow \neg$ B wahr sein, da $\mathscr{A}$ mit A verträglich sein sollte; wohl aber kann A $\Rightarrow \neg$ B bzgl. *anderer Annahmen* $\mathscr{A}'$ wahr sein.[7]

Da sich die Geltung eines Satzes A $\Rightarrow$ B auf eine Menge von Annahmen $\mathscr{A}$ bezieht, kann man eine Behauptung A $\Rightarrow$ B bzgl. $\mathscr{A}$ in dreifacher Hinsicht bestreiten: Man kann sagen, A $\Rightarrow$ B sei *bzgl.* $\mathscr{A}$ *nicht wahr*, wenn $\mathscr{A}$ mit A nicht verträglich ist oder B nicht aus $\mathscr{A}$ und A folgt; man kann sagen A $\Rightarrow$ B sei *bzgl.* $\mathscr{A}$

[7] Man kann auch fordern, daß A$\Rightarrow$B bzgl. $\mathscr{A}$ nur dann wahr ist, wenn B nicht schon aus $\mathscr{A}$ allein folgt; aber auf solche Details kommt es uns im folgenden nicht an.

nicht korrekt, wenn die Annahmen $\mathscr{A}$ nicht alle wahr sind; und man kann sagen, $A \Rightarrow B$ sei *bzgl.* $\mathscr{A}$ *zweifelhaft*, wenn es eine andere Menge $\mathscr{A}'$ wahrer Annahmen gibt, bzgl. der $A \Rightarrow \neg B$ wahr ist. Gibt es Mengen $\mathscr{A}$ und $\mathscr{A}'$, so daß $A \Rightarrow B$ bzgl. $\mathscr{A}$ und $A \rightarrow \neg B$ bzgl. $\mathscr{A}'$ korrekt ist (d.h. $A \Rightarrow B$ ist bzgl. $\mathscr{A}$ wahr und die Annahmen aus $\mathscr{A}$ sind wahr, und ebenso für $A \Rightarrow \neg B$ und $\mathscr{A}'$), so kann man auch den Satz $A \Rightarrow B$ (schlechthin) *zweifelhaft* nennen. Unsere Behauptung ist dann, daß die meisten irrealen Konditionalsätze, die wir behaupten, zweifelhaft sind, d.h. daß man in der Regel erst unter Bezugnahme auf gewisse Tatsachen den Satz $A \Rightarrow B$ gegenüber $A \Rightarrow \neg B$ auszeichnen kann. (3) ist bzgl. des Satzes (5) wahr, (4) bzgl. (6). (3) und (4) sind bzgl. (5), bzw. (6) korrekt, beide Sätze sind aber zweifelhaft.

Wenn ein Satz $A \Rightarrow B$ behauptet wird, so muß aus dem Kontext hinreichend klar sein, wie die Bezugsmenge $\mathscr{A}$ aussieht, sonst liegt keine sinnvolle Behauptung mit eindeutigen Wahrheitsbedingungen vor. Behauptet man daher (3) oder (4) ohne Annahmen $\mathscr{A}$ anzugeben, so kann man damit wenig anfangen.

Wir wollen die Diskussion der irrealen Konditionalsätze mit dem Hinweis auf eine weitere Deutungsmöglichkeit abschließen. Danach wird ein Irrealis nicht wie bei Goodman und Rescher als ein singulärer hypothetischer Satz mit einem falschen Antecedens aufgefaßt, sondern als Konjunktion aus einem falschen singulären Satz und einem generellen hypothetischen Satz.

Wir betrachten den Satz (7') „Würde man dies Stück Zucker in Wasser geben, so würde es sich auflösen". Dieser Satz läßt sich im Sinn von „Würde man dies Stück Zucker in Wasser geben (man tut es aber nicht), so würde es sich auflösen" als Irrealis deuten. Man kann (7') aber auch im Sinne des einfachen Konditionalsatzes (7) „Wenn man dies Stück in Wasser gibt (ob man das tut, bleibt offen), so löst es sich auf" interpretieren. Der Konjunktiv dient dann nur dazu, den problematischen Charakter der Antezedensbedingung zu unterstreichen. Konditionalsätze wie (7) spielen eine ebenso wichtige Rolle wie irreale Sätze, und mit ihrer Deutung wollen wir uns nun befassen. Dabei verwenden wir das

Symbol $\rightarrow$ zum Ausdruck des konditionalen „wenn-dann", das streng vom „wenn-dann" im Sinn der materialen Implikation zu unterscheiden ist.

Es bezeichne „a" dieses Stück Zucker, „T(x)" sei das Prädikat „x wird in Wasser gegeben", „R(x)" das Prädikat „x löst sich auf" und „F(x)" das Prädikat „x ist ein Stück Zucker". (7) lautet dann symbolisch so: $T(a) \rightarrow R(a)$. Wenn man diesen Satz behauptet, so will man nicht darüber spekulieren, was wäre, wenn ein Sachverhalt T(a), von dem man weiß, daß er nicht besteht, doch bestehen würde, sondern man will damit – das ist unser Deutungsvorschlag – eine Gesetzmäßigkeit ausdrücken, in unserem Fall den Satz (8) $\bigwedge x(T(x) \wedge F(x) \supset R(x))$. Wir können (7) nur behaupten, wenn wir (8) voraussetzen, und (7) besagt auch nicht mehr als (8). (8) ist zwar richtig, wenn kein Ding der Art F jemals die Bedingung T erfüllt – im Beispiel: wenn kein Stück Zucker jemals in Wasser gegeben wurde oder gegeben wird – aber das ist harmlos; dieser Fall tritt in den interessanten Anwendungen wohl nie auf.

Wenn man einen Satz $T(a) \rightarrow R(a)$ im Sinn von $\bigwedge x(T(x) \wedge F(x) \supset R(x))$ deutet, so bleibt zunächst offen, wie das Prädikat F zu wählen ist, d.h. als Exemplar welcher Spezies man das durch a bezeichnete Objekt auffaßt. Wenn man (7) behauptet, so gibt man diese Spezies bereits an. Man könnte statt (7) auch sagen: „*Als Stück Zucker* löst sich a auf, wenn man a in Wasser gibt". Explizit oder implizit (durch den Kontext) wird also oft klar sein, welches Prädikat F zu wählen ist. Ist das nicht klar, so bleiben die Deutung und damit die Wahrheitsbedingungen von $T(a) \rightarrow R(a)$ unbestimmt. Es kann dann zwei Prädikate F und F′ mit F(a) und F′(a) geben, so daß gilt $\bigwedge x(T(x) \wedge F(x) \supset R(x))$, nicht aber
$\bigwedge x(T(x) \wedge F'(x) \supset R(x))$.

Sind im Beispiel (a) alle Studenten, die sich jetzt in diesem Raum befinden, im Juni geboren, oder sind im Beispiel (b) alle Kugeln in dieser Urne rot, so gelten zwar die entsprechend interpretierten Sätze $\bigwedge x(T(x) \wedge F(x) \supset R(x))$, man wird aber nicht sagen wollen, daß der Konditionalsatz „Wenn der Student Fritz sich jetzt in diesem Raum befindet, ist er im Juni geboren" oder der (konditional interpretierte) Satz „Würde sich der Student Fritz jetzt in diesem Raum befinden, so wäre er im Juni geboren“ wahr ist, und entsprechend im Beispiel (6). Für die Geltung eines Satzes $T(a) \twoheadrightarrow R(a)$ ist vielmehr zusätzlich zu fordern, daß der Satz $\bigwedge x(T(x) \wedge F(x) \supset R(x))$ ein wahrer gesetzesartiger Satz ist oder ein Naturgesetz. Damit sind wir abermals auf das Problem der Naturgesetze zurückverwiesen und auf die Aufgabe, dieses Problem ohne Rekurs auf (irreale) Konditionalsätze zu lösen. Zunächst wollen wir aber noch einige Worte zu den Konditionalsätzen sagen.

Wenn man Konditionalsätze so darstellt, kann man einen Irrealis $T(a) \Rightarrow R(a)$ ausdrücken durch $\neg T(a) \wedge (T(a) \twoheadrightarrow R(a))$, d.h. durch $\neg T(a) \wedge \bigwedge x(T(x) \wedge F(x) \supset R(x))$.

Wir haben mit dem Beispiel (7) auf das Problem der Dispositionsprädikate zurückgegriffen, das wir in 3.3 behandelt hatten. Ein Definitionsvorschlag für das Prädikat „x ist wasserlöslich“ lautete dort „x ist wasserlöslich genau dann, wenn x sich auflösen würde, wenn x ins Wasser gegeben würde“, führte also auf das Geltungsproblem für irreale Konditionalsätze. Wir hatten dort gesagt, daß man dies Problem nicht mit rein logischen Mitteln lösen könne. Im vorgeschlagenen Definiens liegt aber offenbar kein Irrealis vor – man will ja das Prädikat „wasserlöslich“ nicht nur solchen Objekten zuschreiben, die nicht in Wasser gegeben werden – sondern ein Konditionalsatz. Wir hätten also „a ist wasserlöslich“ zu definieren durch $T(a) \twoheadrightarrow R(a)$. Dieser Satz hat aber nun keinen wohlbestimmten Sinn, denn das bei der Übersetzung in $\bigwedge x(T(x) \wedge F(x) \supset R(x))$ zu wählende Prädikat F mit F(a) ist unbestimmt, da hier a eine inhaltlich nicht näher bestimmte Konstante ist, die wie eine Variable verwendet wird. Wir können den Satz $T(a) \twoheadrightarrow R(a)$ auch nicht durch den Satz $\bigvee f(f(a) \wedge \bigwedge x(T(x) \wedge f(x) \supset R(x)))$ wiedergeben, weil es immer ein solches f gibt, wie wir in 3.3 bei der Diskussion des Definitionsvorschlages von Kaila gesehen haben: Setzt man $F_a(x) := x = a$, so gilt im Fall $\neg T(a)$ wie im Fall $T(a) \wedge R(a)$ der Satz $F_a(a) \wedge \bigwedge x(T(x) \wedge F_a(x) \supset R(x))$; d.h. für alle Objekte, für die der Test T nicht bereits mit negativem Ergebnis durchgeführt worden ist, gibt es ein solches f – sie alle wären also wasserlöslich. Es bestätigt sich damit das in 3.3 vorweggenommene Ergebnis, daß auch der Definitionsversuch von Dispositionsprädikaten durch irreale Konditionalsätze nicht gelingt; diese Sätze haben keine definiten Wahrheitsbedingungen, solange F nicht festliegt, und F läßt sich nur für jedes a gesondert bestimmen.

Konditionalsätze lassen sich also in vielen Fällen als generelle hypothetische Sätze deuten. Dabei muß aber das Prädikat F festgelegt werden. Ob diese Deutung immer möglich ist, und ob sich jeder Irrealis $T(a) \Rightarrow R(a)$ im Sinn von $(T(a) \rightarrow R(a)) \land \neg T(a)$ deuten läßt, wollen wir hier nicht zu entscheiden suchen. Das hängt wohl auch davon ab, wo man bei solchen Sätzen die Grenze zwischen Sinn und Unsinn ziehen will. Man könnte z. B. den Satz (3) deuten im Sinn von „Jede Person, die Landsmann von Verdi ist, ist ein Italiener, und Bizet ist kein Landsmann von Verdi" – aber ist diese Deutung noch adäquat? Und ist ein Satz wie (3) (wenn man ihn nicht so deutet) endlich überhaupt in irgendeinem sinnvollen Verwendungskontext relevant?

Es scheint jedenfalls so zu sein: Je spezifischer, je weniger exemplarisch das durch a bezeichnete Objekt ist (so wie Bizet eine sehr spezifische Person ist), und je weniger deutlich das Bezugsprädikat F ist, desto unbestimmter werden Sinn und Geltung irrealer Konditionalsätze. („Wenn Sokrates heute Bundeswissenschaftsminister wäre, dann ..." – ja, was wäre dann nicht alles der Fall oder nicht der Fall, und was soll man zu derart eingeleiteten Sätzen sagen? Einen greifbaren Sinn erhält eine solche Behauptung erst dann, wenn man sie versteht wie „Wenn ein Mann wie Sokrates, d. h. ein Mann mit den und den Eigenschaften, heute Bundeswissenschaftsminister wäre, dann ...".) Das würde aber für die generell-hypothetische Deutungsmöglichkeit sprechen.

Kommen wir nach diesem Exkurs über irreale Konditionalsätze zu unserem Problem der Bestimmung von Naturgesetzen zurück. Wir haben gesehen, daß alle drei über (I) und (II) hinausgehenden

Bedingungen für gesetzesartige Aussagen sich als inadäquat erwiesen haben. Daher wollen wir einen neuen Ansatz zur Explikation des Begriffs ‚Naturgesetz' machen. Dabei werden wir nicht versuchen, Naturgesetze als wahre gesetzesartige Aussagen zu bestimmen und diese als Aussagen einer bestimmten, syntaktisch, semantisch oder logisch bestimmten Art. Wir wollen vielmehr zunächst zwischen *Sätzen über Regularitäten* in der Natur und *Naturgesetzen* unterscheiden: Ein Naturgesetz ist ein Satz (einer noch näher zu bestimmenden Art) über die Natur, der von der Wissenschaft (gegenwärtig) als wahr akzeptiert wird. Sätze über Regularitäten sind dagegen wahre Sätze über generelle Zusammenhänge, die in der Natur gelten, seien sie bekannt oder unbekannt. Wir versuchen mit den Naturgesetzen solche Regularitäten zu erfassen. Ein Satz ist aber nicht erst dann ein Naturgesetz, wenn er wahr ist – da wesentlich universelle Sätze nicht definitiv verifizierbar sind, könnte man sonst von keinem Satz behaupten, er sei ein Naturgesetz (im Gegensatz zum tatsächlichen Gebrauch dieses Wortes); vielmehr genügt es für seinen Status als Naturgesetz, daß er gegenwärtig wissenschaftlich als wahr akzeptiert wird, als (bis auf weiteres) unproblematisch, und daß er gegenwärtig nicht Objekt, sondern Mittel wissenschaftlicher Begründungsversuche ist.[8]

Wir ersetzen also die semantische Forderung, daß ein Naturgesetz ein wahrer Satz sein soll, durch die pragmatische Bedingung, daß ein Naturgesetz ein gegenwärtig wissenschaftlich akzeptierter Satz ist. Wir nehmen damit eine zeitliche Relativierung dieses Begriffs in Kauf: Was heute ein Naturgesetz ist, war gestern vielleicht noch kein Naturgesetz, und wird morgen vielleicht schon keins mehr sein. Wir glauben aber, daß diese Verwendung des Wortes seinem üblichen Gebrauch besser ent-

[8] Man kann natürlich auch nur wahre Sätze „Naturgesetze" nennen und davon sprechen, daß wir einen Satz „als Naturgesetz akzeptieren", wie das z. B. Carnap und Hempel tun. Im Hinblick darauf, daß der Modus des Akzeptiertseins aber gerade auch für den Charakter der Gesetzesartigkeit entscheidend ist, ziehen wir hier die pragmatische Bestimmung der Naturgesetze vor.

spricht, und daß es wissenschaftstheoretisch vor allem in diesem Sinn verwendet wird.

Nun sind natürlich nicht alle Sätze, die wir (wissenschaftlich) als wahr akzeptieren, Naturgesetze. Wir können aber zunächst an den Bestimmungen (I) und (II) festhalten und sagen, daß Naturgesetze nichtanalytische, wesentlich universelle Sätze sind. Mit den Beispielssätzen (a) und (b) können wir so fertig werden: Beide Sätze haben nicht nur einen endlichen, sondern sogar einen mehr oder minder kleinen Anwendungsbereich. Sie können praktisch durch Verifikation aller Instanzen verifiziert werden; diese Sätze haben eine nichtverschwindende subjektive Aprioriwahrscheinlichkeit, und diese Wahrscheinlichkeit erhöht sich bei der Beobachtung positiver Instanzen. Wir können solche Sätze aufgrund ihrer Verifikation oder ihrer induktiven Bestätigung[9] akzeptieren, und das sind auch die entscheidenden Gründe, mit denen wir sie akzeptieren.

Naturgesetze haben demgegenüber einen unbeschränkten Anwendungsbereich, sie sind daher Sätze, die, solange sie nicht als wahr akzeptiert werden, solange man also nicht schon davon ausgeht, daß sie wahr sind, (bei Zugrundelegung regulärer Wahrscheinlichkeitsbewertungen) die Wahrscheinlichkeit Null haben; und sie behalten diese Wahrscheinlichkeit auch nach Beobachtung noch so vieler positiver Instanzen, d.h. sie sind nicht induktiv bestätigungsfähig. Wenn wir sie als wahr akzeptieren, so nicht deswegen, weil wir wissen, daß sie wahr sind, oder das doch für wahrscheinlich halten, sondern weil sie sich bisher bewährt haben, d.h. allen Überprüfungen von Einzelinstanzen standgehalten haben,[10] und wegen des großen theoretischen und praktischen Interesses, das ihnen zukommt, weil sie eine wesentliche Vereinfachung und Vereinheitlichung im System unserer Annahmen über die Welt bewirken und viele neue Informationen beinhalten.

---

[9] Vgl. dazu den Abschnitt 5.2.

[10] Vgl. dazu den Abschnitt 5.1. – Bei statistischen Hypothesen wie z.B. $p(F)=r$ tritt an die Stelle der Bewährung eine induktive Bestätigung der Hypothese $p(F)=r\pm\varepsilon$ für ein passendes $\varepsilon>0$.

Einfachheit und Vereinheitlichung, d.h. Übersichtlichkeit unserer Annahmen, und neue Informationen sind aber für uns ebenso theoretisch wertvoll, wie für unser Handeln wichtig, das sich auf diese Annahmen stützt.

Wir können also sagen: *Ein Naturgesetz ist ein nichtanalytischer, wesentlich universeller Satz, der wissenschaftlich als wahr akzeptiert wird, obwohl er weder verifizierbar noch einer induktiven Bestätigung zugänglich ist.*[11]

Es ist klar, daß in diese Begriffsbestimmung eine gewisse Vagheit dadurch hineinkommt, daß es keine exakten und scharfen Kriterien für wissenschaftliches Akzeptiertsein gibt. Man wird sich daher oft auf bestimmte Untersuchungskontexte beziehen müssen. Ferner können auch Gesetze, z.B. über eine bestimmte Tiergattung, wenn wir eine große, aber endliche obere Schranke der Anzahl ihres Anwendungsbereiches annehmen, einer induktiven Bestätigung zugänglich werden. Aber die Wahrscheinlichkeit einer solchen Hypothese aufgrund der einschlägigen Beobachtungen ist dann immer klein. Solange wir es als Zufall ansehen, daß alle Beobachtungen für die Hypothese positiv ausfallen, werden wir sie aufgrund der geringen Wahrscheinlichkeit nicht akzeptieren; nur wenn wir eine Gesetzmäßigkeit vermuten, sind wir bereit, die Hypothese trotz ihrer geringen Wahrscheinlichkeit zu akzeptieren.

Bei einer Explikation des Begriffes ‚Naturgesetze' haben wir den Begriff der *gesetzesartigen Aussage* nicht verwendet. Man kann vielleicht sagen: Ein gesetzesartiger Satz H ist ein nichtanalytischer, wesentlich universeller Satz, der weder verifizierbar noch induktiv bestätigungsfähig ist, der aber – vorausgesetzt er bewährt sich – als Naturgesetz akzeptierbar ist – evtl. unter Aufgabe anderer Gesetzesannahmen. Wir sagen dabei, daß eine Hypothese H der angegebenen Art bzgl. gewisser Annahmen $\mathcal{A}$ als Gesetz akzeptierbar ist, wenn H die Form der (einschlägigen)

---

[11] Vgl. dazu auch die Diskussion der methodologischen Thesen von K. Popper im Abschnitt 5.4.

Gesetze aus $\mathscr{A}$ hat und es nur von Beobachtungsergebnissen abhängt, ob wir H als Gesetz akzeptieren oder nicht. H hat die Form der (einschlägigen) Gesetze aus $\mathscr{A}$, wenn H als ein qualitativer (d.h. nicht explizit auf bestimmte Zeitpunkte, Orte oder Individuen Bezug nehmender) Satz in demselbem Grundvokabular formuliert werden kann, bzgl. dessen die (einschlägigen) Gesetze aus $\mathscr{A}$ als qualitative Sätze formuliert sind. Auch der Begriff der gesetzesartigen Aussage ist also ein *pragmatischer* Begriff: Wenn wir anknüpfend an die Paradoxie von Goodman[12] die Hypothesen (c) „Jedes X-Atom zerfällt in ein Y- und ein Z-Atom" und (d) „Jedes X-Atom, das bis zum Zeitpunkt t_0 zerfällt, zerfällt in ein Y- und ein Z-Atom; jedes nach t_0 zerfallende X-Atom zerfällt in ein U- und ein V-Atom" über den radioaktiven Zerfall von Atomen einander gegenüberstellen – t_0 sei ein Zeitpunkt in der nahen Zukunft – so werden wir (c), nicht aber (d) als gesetzesartige Aussage ansehen. Wir tun das aber nur deshalb, weil (d) nicht in das System unserer gegenwärtigen Grundannahmen über die Welt paßt, nach denen Naturgesetze nicht zeitabhängig sind. Würden wir zu der Überzeugung gelangen, daß sich in t_0 das radioaktive Zerfallsverhalten der Atome ändert, so würden wir vielleicht (d) nicht aber (c) als gesetzesartigen Satz ansehen. Wir würden dann vielleicht auch Prädikate „x ist ein Y-U-Atom" := „$t \leq t_0$ und x ist ein Y-Atom oder $t > t_0$ und x ist ein V-Atom" und entsprechend „x ist ein Z-V-Atom" einführen, und würden diese heute recht seltsam wirkenden Prädikate anstelle von „x ist ein Y-Atom" etc. als Grundprädikate verwenden, weil sich damit die nun akzeptierte Hypothese (d) in der einfacheren Form „Jedes X-Atom zerfällt in ein Y-U- und ein Z-V-Atom" darstellen läßt.[13]

Da der Begriff der gesetzesartigen Aussage pragmatischen Charakter hat und sich auf eine Menge von Annahmen und eine diesen Annahmen zugrunde liegende Sprache bezieht, fordern wir gegenüber dem ersten, eingangs diskutierten Ansatz, der auf eine logische Bestimmung der Gesetzesartigkeit abzielte, nicht,

---

[12] Vgl. dazu den Abschnitt 2.3.3.

[13] Vgl. dazu die Diskussion am Ende von 2.3.3 und den Abschnitt 6.4.

daß der Begriff der Gesetzesartigkeit invariant ist gegenüber logisch äquivalenten Umformungen. Wenn man ferner beachtet, daß Prädikate wie „irdisch“, „mittelalterlich“, „amerikanisch“ etc. keinen *expliziten* Bezug auf Zeitpunkte, Orte oder Individuen enthalten und daher als qualitativ angesehen werden können, entfallen die Einwände, die oben gegenüber Carnaps Vorschlag erhoben wurden, (fundamentale) gesetzesartige Aussagen als rein qualitative (nichtanalytische) wesentlich universelle Sätze zu bestimmen.

Wir wollen endlich sagen, daß ein Satz eine *Regularität* in der Natur ausdrückt, wenn er ein wahrer, nichtanalytischer, wesentlich universeller Satz ist, der weder verifizierbar noch induktiv bestätigungsfähig ist.

Diese Bestimmung ist nicht pragmatischer Natur, umfaßt aber Sätze wie (d) und Hypothesen wie „Alle Smaragde sind gricht“ ebenso wie Gesetze und gesetzesartige Aussagen, vorausgesetzt, sie sind wahr.

4.4 Kausalität

Unter dem Titel „Kausalität“ wird eine Reihe von philosophischen Fragen zusammengefaßt. Diese Fragen wollen wir in eine systematische Ordnung bringen. Wir wollen uns dabei aber auf die wichtigsten Punkte beschränken. Eine sehr ausführliche Darstellung findet sich bei W. Stegmüller in [69], Kap. VII.

Man kann zunächst Sinn- und Geltungsprobleme unterscheiden: Bei den *Sinnproblemen* wird nach der Bedeutung und der Explikation von Sätzen über kausale Zusammenhänge gefragt; bei den *Geltungsproblemen* geht es um die Frage, ob gewisse Sätze über kausale Zusammenhänge wahr sind oder nicht. Dabei muß natürlich die Klärung der Bedeutung der Klärung der Geltung vorausgehen, da man erst dann feststellen kann, ob eine Aussage wahr ist, wenn man weiß, was sie bedeutet.

Die drei wichtigsten Sinnprobleme lauten:

a) Was bedeuten *singuläre Kausalsätze*, d.h. Sätze, die sich auf die Form „A bewirkt B" bringen lassen?

b) Was besagen *generelle Kausalsätze* oder *Kausalgesetze*?

c) Was beinhaltet das *Kausalprinzip*?

Singuläre Kausalsätze sind neben Sätzen der Gestalt „A bewirkt B" auch Sätze wie „A ist Ursache von B" oder „B ist Wirkung von A"; sie alle haben die gleiche Bedeutung. Unter welchen Bedingungen gilt ein derartiger Satz? Betrachten wir das folgende Beispiel: Der Motor eines Autos springt nicht an. Es wird behauptet:

1) Die Verschmutzung der Zündkerzen bewirkt, daß der Motor nicht anspringt.

Die Aussage „A bewirkt B" impliziert zunächst, daß das Ereignis B eintritt. Wäre der Motor angesprungen, würden wir (1) nicht als richtig ansehen. Ferner muß auch das Ereignis A eingetreten sein; nur Ereignisse, die tatsächlich stattfinden, können andere Ereignisse verursachen. Sind daher die Zündkerzen nicht verschmutzt, so ist die Behauptung (1) falsch. Die Bedingung, daß die Teilsätze „A" und „B" beide wahr sind, ist also notwendig für die Wahrheit von „A bewirkt B", sie ist aber nicht hinreichend dafür, da dieser Satz sonst die gleichen Wahrheitsbedingungen hätte wie „A und B". Für die Geltung von „A bewirkt B" ist es vielmehr zusätzlich erforderlich, daß das Ereignis B nicht nur zufällig zusammen mit A eintritt, sondern eine notwendige Folge von A ist; daß also, falls A der Fall ist, auch B eintreten muß. Dieser Notwendigkeitscharakter des kausalen Zusammenhangs läßt sich nicht im Sinn einer logisch-mathematischen Notwendigkeit verstehen, die nur dann besteht, wenn B aus A logisch folgt. In unserem Beispiel folgt aus der Verschmutzung der Zündkerzen keineswegs logisch, daß der Motor nicht anspringt. Vielmehr muß man sich hier auf eine naturgesetzliche Notwendigkeit beziehen, d.h. B muß aus A unter Heranziehung von Naturgesetzen und evtl. anderen im Kontext als erfüllt vorausgesetzten wahren Bedingungen $C_1, \ldots, C_n$ folgen. Mit der Bezugnahme auf Naturgesetze kommt in den Satz „A bewirkt B" ein pragmatisches Element hinein. Naturgesetze haben wir in 4.3 nicht als wahre sondern als akzeptierte Sätze charakterisiert, und so wollen wir für singuläre Kausalsätze nun nicht absolute Wahrheitsbedingungen, sondern Bedingungen für ihre Geltung bzgl. gewisser Annahmen formulieren. Wir können dann sagen: Ein Satz „A bewirkt B" gilt bzgl. einer Menge $\mathscr{A}$ von Annahmen, wenn B aus Naturgesetzen aus $\mathscr{A}$ und A, sowie evtl. auch aus weiteren singulären Bedingungen aus $\mathscr{A}$, logisch folgt. Dabei soll A zu $\mathscr{A}$ gehören. Der Begriff des Naturgesetzes muß noch eingeschränkt werden: Singuläre Kausalsätze können nicht durch beliebige Naturgesetze begründet werden. Betrachten wir folgendes Beispiel: In einem Leiter L mit dem Widerstand R ist eine elektrische Spannung U angelegt, und es fließt in L ein Strom der Stärke I. Dann gilt zwischen U,R und I der durch das Ohmsche Gesetz ausgedrückte naturgesetzliche Zusammenhang:

2) Die Stromstärke I ist der Spannung U direkt und dem Widerstand R umgekehrt proportional.

Man wird aber nicht sagen, daß die Stromstärke I und der Widerstand R von L die Spannung U am Leiter bewirken, obwohl die Größe U sich nach dem Ohmschen Gesetz aus I und R ergibt. Man wird daher sagen müssen: Der Satz „A bewirkt B" gilt bzgl. der Annahmen $\mathscr{A}$ genau dann, wenn A zu $\mathscr{A}$ gehört und wenn es in $\mathscr{A}$ *Kausalgesetze* gibt, nach denen B aus A und gewissen anderen Sätzen aus $\mathscr{A}$ logisch folgt.

Diese Formulierung soll uns zunächst genügen. Im nächsten Abschnitt 4.5 führen wir den Begriff der kausalen Erklärung ein. Wir können dann auch sagen: „A bewirkt B" gilt bzgl. einer Menge von Annahmen, wenn es bzgl. dieser Menge eine korrekte kausale Erklärung von B durch A gibt. Die Begriffe *Ursache* und *Wirkung* lassen sich dann so erklären, daß (bzgl. gewisser Annahmen) A Ursache von B und B Wirkung von A ist genau dann, wenn sich bzgl. dieser Annahmen B mit A kausal erklären läßt.

Ist A Ursache von B, d.h. läßt sich „B" kausal mit „A" erklären, so werden dabei in der Regel weitere singuläre Bedingungen $C_1, \ldots, C_m$ herangezogen, ohne die A nicht zu B führen würde.

Wenn man A und nicht ein C_i ($i=1, \ldots, m$) oder $A \wedge C_1 \wedge \ldots \wedge C_m$ als Ursache von B bezeichnet, so deswegen, weil die C_i selbstverständliche (normale) Voraussetzungen sind, während A der spezielle Umstand ist, der für das Auftreten des speziellen Ereignisses B entscheidend ist. Die Kriterien für die Auswahl eines der Ereignisse $A, C_1, \ldots, C_m$ als Ursache für B sind aber alles andere als scharf, wenn die Erklärung nicht die spezielle Form hat, daß gezeigt werden soll, warum B anstelle eines eigentlich erwarteten Ereignisses B′ eingetreten ist; in diesem Fall ist oft ein bestimmtes Ereignis A ausgezeichnet, das bewirkt hat, daß aus den Ereignissen $C_1, \ldots, C_m$ nicht B′, sondern B entstanden ist.

Ist es schon aus diesem Grund nicht immer sinnvoll, von *der* Ursache eines Ereignisses B zu reden, so gilt das erst recht, wenn man beachtet, daß eine Ursache einer Ursache von B auch wieder als Ursache von B bezeichnet werden kann, und daß es Ereignisse gibt, die sich aus mehreren Ursachen ableiten lassen: Wenn z. B. ein Auto im Straßengraben landet, so können mehrere voneinander unabhängige Ursachen im Spiel gewesen sein, die, jede für sich, hinreichend waren, um den Unfall zu bewirken: ein geplatzter Reifen, zu hohe Geschwindigkeit in einer Kurve und ein Blockieren der Lenkung.[1]

Die Erklärung der Bedeutung von singulären Kausalsätzen „A bewirkt B“ muß also auf den Begriff des Kausalgesetzes Bezug nehmen, da die Notwendigkeit im kausalen Zusammenhang zwischen A und B nichts anderes ist als ein kausalgesetzlicher Zusammenhang.

Was ist nun ein *Kausalgesetz*? Betrachten wir folgende Beispiele:

3) Allergische Reaktionen werden durch Reizstoffe hervorgerufen, die bei einer Antigen-Antikörper-Reaktion freigesetzt werden.

4) Die in einem Leiter entwickelte Stromwärme ist dem Quadrat der Stromstärke, dem Widerstand und der Zeit proportional (Joulesches Gesetz).

---

[1] Vgl. dazu auch Carnap [66], S. 191f.

5) Die Schwingungsdauer eines mathematischen Pendels ist der Wurzel aus seiner Länge proportional.

6) Das Produkt aus Volumen und Druck eines Gases ist konstant (Boyle-Mariottesches Gesetz).

7) Der Biß einer Kobra ist in 80% aller Fälle tödlich.

8) $\frac{d^2x}{dt^2} = g$ (Bewegungsgleichung für den freien Fall eines Körpers in Erdnähe)

9) $H = -\frac{\hbar}{i} \cdot \frac{\delta\psi}{\delta t}$ (Schrödingersche Wellengleichung; $\hbar$ ist die Dirac-Konstante, H ist der Hammilton-Operator, ψ ist die Wellenfunktion).

Welche dieser Gesetze sehen wir als Kausalgesetze an und warum? Was unterscheidet Kausalgesetze von anderen Naturgesetzen?

Kausalgesetze im engeren Sinn sind zunächst Naturgesetze, die besagen, daß jedes Ereignis oder jeder Zustand der Art F immer ein Ereignis oder einen Zustand der Art G bewirkt, d.h. Sätze der Gestalt $\wedge xt(F(x,t) \supset G(x,t))$. Dabei ist x eine Variable für Objekte, Ereignisse, Zustände, Orte etc. Es ist dann das F-Ereignis die Bedingung, unter der das G-Ereignis eintritt. Da die Bedeutung singulärer Kausalsätze und damit die Bedeutung der Ausdrücke „Ursache" und „Wirkung" unter Bezugnahme auf Kausalgesetze erklärt worden ist, wollen wir das F-Ereignis als *Antezedensereignis* und das G-Ereignis als *Sukzedensereignis* bezeichnen. Von den angegebenen Gesetzen hat nur (3) die Gestalt eines Kausalgesetzes i.e.S. Tatsächlich haben die wenigsten Naturgesetze diese Form; die grundlegenden physikalischen Gesetze haben z.B. die Gestalt von Gleichungen. Daher überträgt man die Bezeichnung „Kausalgesetz" auch auf Gesetze anderer Gestalt. Aus ihnen lassen sich Kausalgesetze i.e.S. gewinnen: So folgt z.B. aus (4) der Satz „Wenn durch einen Leiter mit einem Widerstand R während der Zeit t_1 bis t_2 ein Strom der Stärke I geflossen ist, so ist die in t_1 erzeugte Wärmemenge dem Wert $R \cdot I(t_2 - t_1)$ proportional".

Es bieten sich nun folgende beiden Kriterien für die Auszeichnung von Kausalgesetzen gegenüber anderen Naturgesetzen an: I) Kausalgesetze sind *deterministisch*, nicht statistisch. Kausalgesetze i.e.S. sagen, was unter der Antecedensbedingung *mit Sicherheit* der Fall ist, und machen nicht nur Aussagen darüber, was unter dieser Bedingung *wahrscheinlich* eintritt.

Deterministisch sind alle Gesetze bis auf (7). (7) ist ein statistisches Gesetz; es beinhaltet, daß die (objektive) Wahrscheinlichkeit 0.8 ist, daß ein von einer Kobra gebissener Mensch stirbt. (7) hat also die Form $p(F/G) = r$ und sagt nicht, daß F(a) im Falle G(a) gilt oder nicht gilt, sondern nur, daß die relative Häufigkeit von F-Fällen unter den G-Fällen 80% beträgt, und daraus folgt nur, daß F(a) wahrscheinlich eintreten wird, falls G(a) gilt. Derartige Aussagen bezeichnet man in der Regel nicht als Kausalgesetze.[2]

---

[2] Das ist freilich nicht unproblematisch, denn es entspricht der alltäglichen Verwendung des einen Kausalnexus andeutenden „weil", wenn man sagt „a ist gestorben, weil er von einer Kobra gebissen wurde". B. Russel sagt in [50], S. 327, daß wir auch dann von *Ursachen* sprechen, wenn die Wirkung nur mit großer Wahrscheinlichkeit eintritt. „I do not mean by this merely that we are not sure of having discovered a true case of cause and effect; I mean that, even when we have a case of cause and effect in our present sense, all that is meant is that, on grounds of observation, it is probable that when one occurs the other will also occur. Thus in our present sense, A may be the cause of B even if there actually are cases where B does not follow A. Striking a match will be the cause of its igniting, in spite of the fact that some matches are damp and fail to ignite."

Aber eine singuläre Aussage wie „a ist gestorben, weil er von einer Kobra gebissen wurde" braucht sich nicht auf ein statistisches Gesetz wie (7) zu stützen, sondern kann auch auf deterministische Gesetze Bezug nehmen und kann eine unvollständige Begründung darstellen, in der nicht alle Antecedensbedingungen genannt werden. Eine derartige Interpretation legt auch Russells Beispiel nahe. In der Tat wäre es sehr schwierig, solche statistischen Gesetze wie (7), als „kausal" vor anderen statistischen Gesetzen auszuzeichnen, wenn sie nicht nur pauschale Beschreibungen von Vorgängen darstellen, die sich in jedem Einzelfall mit deterministischen kausalen Gesetzen beschreiben lassen. Denn das einzige weitere allgemeine Kriterium für Kausalgesetze ist ihr unten zu besprechender Sukzessionscharakter. Nicht alle statisti-

Anders liegt der Fall hingegen bei dem Gesetz (9): Die Wellenfunktion ψ dient zwar zur Berechnung von Wahrscheinlichkeitsaussagen über Größen wie Ort, Impuls etc. von Teilchen in einem physikalischen Zustandsraum, und über diese Größen können nur Wahrscheinlichkeitsaussagen gemacht werden, aber von diesen Größen selbst ist in (9) nicht die Rede. (9) legt vielmehr fest, wie sich ψ in der Zeit ändert. (9) ist also eine *deterministische* Aussage über die Funktion ψ und die durch sie vermittelten Wahrscheinlichkeiten, ebenso wie (8) ein deterministisches Gesetz über die Ortsveränderung eines Körpers in der Zeit ist. Freilich bestimmen sich aus (9) im Gegensatz zu (8) Größen wie der Ort nur mit Wahrscheinlichkeit, und deshalb ist (9) *bzgl. dieser Größen* eine *statistische* Aussage. Dasselbe Gesetz kann so bzgl. gewisser Größen deterministisch sein, bzgl. anderer Größen aber statistisch.

II) Kausalgesetze sind *Sukzessionsgesetze*. Bei Kausalgesetzen i.e.S. liegt der Zeitpunkt t, zu dem das Antecedensereignis stattfindet oder beginnt, früher als der Zeitpunkt, in dem das Sukzedensereignis eintritt oder beginnt.[3] Ursachen gehen ihren Wirkungen voraus.

Betrachten wir zur Illustration den Zusammenhang von elektrischer Spannung, Stromstärke und Widerstand. Wenn man die am

---

schen Sukzessionsgesetze haben aber kausalen Charakter im Sinne von (7). So hat z.B. das statistische Sukzessionsgesetz „In den meisten Ländern, in denen die Zahl der Störche zurückgeht, erweist sich bald auch die Geburtenziffer als rückläufig" sicher keinen kausalen Charakter. – Wenn R. von Mises in [51], S. 188 in Verteidigung kausaler statistischer Begründungen sagt: „We think that people will gradually come to be satisfied by causal statements of this kind: It is *because* the die was loaded that the ‚six' shows more frequently (but we do not know what the next number will be)", so betrifft das nicht unser Problem: Die objektive Wahrscheinlichkeit für „sechs" kann kausal von den geometrischen und den physikalischen Eigenschaften des Würfels abhängen – darin liegt nichts Fragwürdiges –, aber kann man sagen: „Die Sechs ist beim letzten Wurf erschienen, *weil* der Würfel falsch ist"?

[3] Um den Sukzessionscharakter von Kausalgesetzen i.e.S. hervorzuheben, könnte man sie auch in der Form
$\wedge xt(F(x,t) \supset G(x,t+\delta))$ schreiben.

Leiter L anliegende Spannung U ändert, ändert sich – bei konstantem Widerstand R – auch die Stärke I des in L fließenden Stroms. Man wird hier sagen, die Änderung von U habe die Änderung von I bewirkt, aber nicht umgekehrt. (2) besagt nur, daß I und U voneinander funktional abhängig sind. Der Änderung von U folgt aber die Änderung von I mit einer, wenn auch minimalen Verzögerung, die durch die endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit c elektrischer Wirkungen bedingt ist. Das steht jedoch nicht im Ohmschen Gesetz, das sich auf stationäre Ströme bezieht. Wo keine Zustandsänderungen vorliegen, sondern nur koexistente, funktional voneinander abhängige stationäre Zustände, wird man nicht von Ursache und Wirkung sprechen. Beim stationären Strom ist weder U Ursache von I, noch umgekehrt, sondern man kann nur sagen: Die anfängliche Einstellung von U hat bewirkt, daß sich I eingestellt hat. Reine Koexistenzgesetze wie (2) sehen wir daher nicht als Kausalgesetze an. Das Verhältnis von Ursache und Wirkung ist nicht umkehrbar. Nach dem Ohmschen Gesetz ist aber I bei festem R ebenso von U abhängig wie U von I. Das Gesetz enthält also keine Möglichkeit, U als Ursache von I auszuzeichnen. Würde man die Nichtumkehrbarkeit von Ursache und Wirkung nicht durch die Nichtumkehrbarkeit ihrer zeitlichen Aufeinanderfolge begründen, so müßte sie aus anderen Kriterien folgen, die sich aber nicht leicht anbieten.[4]

Dasselbe Gesetz kann nun wieder bzgl. einiger Größen Koexistenzcharakter haben, bzgl. anderer aber Sukzessionscharakter. Nach (8) ist z.B. die Beschleunigung (d.h. die *Geschwindigkeitsänderung*) eines in Erdnähe fallenden Körpers gleich der Anziehungskraft, den die Erde auf ihn ausübt. In Hinsicht auf *Beschleunigung* und Kraft ist (8) also ein Koexistenzgesetz. (8) besagt aber auch, daß die Geschwindigkeit $v(t_2)$ im Zeitpunkt t_2 die Summe aus der Anfangsgeschwindigkeit $v(t_1)$ und $g \cdot (t_2 - t_1)$ ist; d.h. die Geschwindigkeit, die sich in t_2 eingestellt hat, hängt von der während t_1 bis t_2 wirkenden Erdanziehung ab; wir können also sagen: die schon in t_1 wirksame Erdanziehung bewirkt, daß

[4] Vgl. dazu den Versuch von H.A. Simon und N. Rescher in [66].

sich in t_2 die (erst in diesem Zeitpunkt erreichte) Geschwindigkeit $v(t_2)$ einstellt. D.h. bezogen auf *Geschwindigkeit* und Kraft ist (8) ein Sukzessionsgesetz. Entsprechend ist (4) bzgl. der Stromwärme ein Sukzessionsgesetz.

Der Sukzessionscharakter kausaler Gesetze ist nicht unbestritten. Carnap nimmt z.B. im Gegensatz zu Hempel an, daß auch Koexistenzgesetze, wenn sie nur aus fundamentalen Naturgesetzen folgen, kausalen Charakter haben.[5] Man hat sogar Argumente dafür vorgetragen, daß Wirkungen ihren Ursachen vorausgehen können. Diese Argumente sind jedoch alles andere als überzeugend.[6]

Kann man nun sagen: Ein Kausalgesetz (für gewisse Größen) ist ein Naturgesetz, das (bzgl. dieser Größen) deterministischen und Sukzessionscharakter hat? Wie bei allen Explikationsvorschlägen ist diese Frage nicht definitiv zu entscheiden, da diese Vorschläge nicht, wie Begriffsanalysen, reine Tatsachenbehauptungen sind, sondern ein konventionelles Moment enthalten. Es scheint aber, daß in den Bereichen, in denen ein übereinstimmender Gebrauch des Wortes „Kausalgesetz" besteht, unser Explikat diesem Gebrauch angemessen ist.[7]

Da wir in 4.3 Gesetze, gesetzesartige Aussagen und Regularitäten unterschieden haben, wollen wir auch festlegen, was *kausale gesetzesartige Aussagen* und *Sätze über kausale Regularität* sind: A ist eine kausale gesetzesartige Aussage, wenn A eine deterministische

---

[5] Vgl. dazu Carnap [66], S. 190 und Hempel [62], S. 108.

[6] Die Diskussionen hierüber knüpfen an die Fragestellung Humes im „Treatise" Buch I, Teil III, 2 an. Chisholm und Taylor führen z.B. in [60] aus, daß man „A bewirkt B" auch definieren könne durch „A ist eine hinreichende naturgesetzliche Bedingung für B", ohne hinzuzufügen, daß A dem B zeitlich vorausgeht. – Definieren kann man das sicher, es fragt sich nur, ob das im Einklang mit dem üblichen Sprachgebrauch ist.

[7] Neben dem deterministischen und dem Sukzessionscharakter diskutiert H. Feigl in [53] noch weitere Kriterien für Kausalgesetze, die aber wohl die Menge dieser Gesetze zu stark einengen. Vgl. dazu auch Stegmüller [69], S. 452ff.

gesetzesartige Aussage mit Sukzessionscharakter (d.h. eine Aussage über die zeitliche Folge von Ereignissen) ist. Sätze über kausale Regularitäten sind entsprechend deterministische Sätze über Regularitäten mit Sukzessionscharakter.[8]

---

[8] Die hier vorgeschlagene Analyse der Ursache–Wirkungsrelation stimmt mit der Humeschen Analyse in drei Punkten überein, in einem vierten dagegen nicht:

1. Hume interpretiert den singulären Kausalsatz „A bewirkt B" ebenfalls als Satz über eine deterministische Regularität mit Sukzessionscharakter „Auf alle Ereignisse vom selben Typ wie A folgt ein Ereignis vom selben Typ wie B". Nach unserer Analyse besagt „A bewirkt B" soviel wie „Es gibt ein Kausalgesetz (i.e.S.), nach dem ein Ereignis vom gleichen Typ wie A immer ein Ereignis vom gleichen Typ wie B zur Folge hat". Welche Typen man dabei für A und B in Ansatz bringt, muß aus dem Kontext ersichtlich sein, ebenso, wie es aus dem Kontext eines Konditionalsatzes $T(a) \rightarrow R(a)$ ersichtlich sein muß, welche Bedingung F bei der Übersetzung in $\bigwedge x(T(x) \land F(x) \supset R(x))$ zu wählen ist. (Ein Kausalsatz „T(a) bewirkt R(a)" impliziert auch immer die Behauptung $T(a) \land \bigwedge x(T(x) \land F(x) \supset R(x))$, wobei das zweite Konjunktionsglied ein Kausalgesetz i.e.S. ist.)
2. Hume wendet sich dagegen, daß zwischen Ursache A und der Wirkung B eine apriorische (logische) oder empirische Verbindung besteht, die von dieser Regularität verschieden ist: „One event follows another; but we never can observe any tie between them. They seem conjoined, but never connected". (Hume [77]; S. 58) Es gibt keine logische Verbindung, die uns sagt, was ein Ereignis bewirken wird, und für die empirische Verbindung gilt: „When we look about us towards external objects, and consider the operation of causes, we are never able, in a single instance, to discover any power or necessary connexion; any quality, which binds the effect to the cause, and renders the one an infallible consequence of the other. We only find, that the one does actually, in fact, follow the other. The impulse of one billiard-ball is attended with motion in the second. This is the whole that appears to the outward senses ..... Consequently, there is not, in any single, particular instance of cause and effect, any thing which can suggest the idea of power or necessary connexion. (Hume [77], S. 50)
3. Für Hume lassen sich Kausalgesetze nicht induktiv rechtfertigen oder bestätigen.
4. Hume erklärt den Geltungsmodus kausaler Gesetze dagegen im Unterschied zu unserem pragmatischen Vorschlag psychologisch: Wenn sich ein Satz „Auf alle Ereignisse vom selben Typ wie A folgt

Das *Kausalprinzip* wird oft so formuliert „Keine Wirkung ohne Ursache“. Wenn man „Wirkung“, wie das naheliegt, als kausale Folge einer Ursache erklärt, so ist dieses Prinzip im tautologischen Sinn trivial: Wirkung nennen wir eben nur das, was eine Ursache hat. Nichttrivial ist es hingegen, wenn man sagt:

K) Zu jedem wahren Satz B über ein Ereignis gibt es Kausalgesetze (bzw. wahre kausale gesetzesartige Aussagen, bzw. Sätze über kausale Regularitäten) und wahre Bedingungen, aus denen B folgt.

Vom Kausalprinzip unterscheidet man gelegentlich ein *Determinusprinzip*, das besagt:

D) Zu jeder wahren Aussage B über ein Ereignis in einem Zeitpunkt t gibt es deterministische Naturgesetze (bzw. wahre deterministische gesetzesartige Aussagen, bzw. Sätze über deterministische Regularitäten), mit denen B aus wahren Aussagen A_i über Ereignisse in Zeitpunkten $t_i < t$ abgeleitet werden kann.

Ein solches Determinierismusprinzip (D) ist aber in allen drei Versionen nach unserer Bestimmung von Kausalgesetzen, kausalen gesetzesartigen Aussagen und kausalen Regularitäten mit (K) äquivalent.

Wenden wir uns nun den *Geltungsproblemen* zu, so ist offensichtlich die Frage, ob ein bestimmter singulärer Kausalsatz oder

---

ein Ereignis vom selben Typ wie B“ bisher in vielen Fällen bewährt hat, d.h. wenn alle bisher (daraufhin) beobachteten Instanzen von A-Ereignissen von B-Ereignissen gefolgt wurden, so bildet sich bei uns aus Gewohnheit die Erwartung, daß auf ein A-Ereignis ein B-Ereignis folgen wird, und diese Erwartung begründet so etwas wie ein Gefühl der Notwendigkeit. Hume ergänzt so seine Definition der Ursache als „object, followed by another, and where all objects similar to the first are followed by objects similar to the second“ durch die Definition der Ursache als „object followed by another, and whose appearance always conveys the thought to that other“. ([77], S. 60) Diese psychologische Erklärung ist aber unbefriedigend, da sie erstens der Goodmanschen Paradoxie nicht gerecht wird, und da die Erwartungsgefühle als wissenschaftlich irrelevant praktisch herausfallen und ein Kausalgesetz so im Effekt nur als ein Satz über eine deterministische Regularität mit Sukzessionscharakter bestimmt wird.

ein bestimmtes Kausalgesetz einen wahren Satz darstellt, keine philosophische, sondern eine empirische Frage. Das Kausalprinzip ist in seiner ersten Version, in der es auf Kausalgesetze Bezug nimmt, falsch. Denn nach den heute akzeptierten Naturgesetzen kann man z. B. über den Ort, an dem sich ein Elektron in einem bestimmten Zeitpunkt befinden wird, nur statistische Aussagen machen. Die physikalischen Grundgesetze haben statistischen, nicht deterministischen Charakter. Unabhängig davon ist das Kausalprinzip in dieser ersten Version aber schon deswegen sehr unplausibel, weil wir nicht annehmen können, daß die uns heute bekannten Kausalgesetze zur vollständigen Beschreibung aller Phänomene ausreichen.

Auch in der zweiten Version nimmt das Kausalprinzip mit dem Begriff der gesetzesartigen Aussage auf unsere gegenwärtigen Annahmen über die Welt und unser gegenwärtiges Begriffssystem zu ihrer Beschreibung Bezug.[9] Immerhin kann man die Geltung eines so verstandenen Kausalprinzips nicht von vornherein ausschließen, sondern muß sie als ein empirisches Problem ansehen.[10] Als kombinierte All- und Existenzaussage ist der Satz zwar weder verifizierbar noch falsifizierbar, aber er hat den gleichen Status wie andere empirische Hypothesen dieser Form und ist wie sie bestätigungsfähig.

In der dritten Version endlich ist das Kausalprinzip in trivialer, aber ganz irrelevanter Weise richtig. Denn man kann jedes Ereignis $G(a,t+\delta)$, wo a ein Objekt vom Typ $H(x)$ ist, mit dem wahren Satz $F(a,t)$ und dem wahren deterministischen, nichtanalytischen wesentlich universellen Satz $\bigwedge xt(F(x,t) \wedge H(x) \supset G(x,t+\delta) \wedge I(x))$ ableiten, wenn $\bigwedge x(H(x) \supset I(x))$ irgendein fak-

---

[9] Vgl. dazu die Diskussion am Ende des vorigen Abschnitts.

[10] Das Argument, daß es keine deterministische Beschreibung quantenphysikalischer Phänomene gibt – man nimmt dabei auf den Beweis von J. v. Neumann in [32] Bezug (vgl. dazu auch S. Kochen und E. P. Specker [67]) – ist in unserem Zusammenhang nicht brauchbar, da es sich darauf stützt, daß die Quantenmechanik diese Phänomene richtig beschreibt. So wahrscheinlich jedoch diese Beschreibung richtig ist, so unwahrscheinlich ist (K) in der zweiten Version.

tisch wahrer Satz ist, sofern man definiert $F(x,t) := G(x, t+\delta)$. Daß z. B. das Elektron a zur Zeit $t+\delta$ am Ort b ist, kann man damit erklären, daß alle Elektronen, die zur Zeit t dem Ort c zugeordnet sind (dabei heißt „in t dem Ort c zugeordnet" soviel wie „in $t+\delta$ am Ort b befindlich"), in $t+\delta$ am Ort b sind und eine elektrische Ladung von $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Coulomb haben, und daß a zum Zeitpunkt t dem Ort c zugeordnet ist. Der Hinweis, daß sich der Satz $F(a,t)$ tatsächlich nicht auf den Zeitpunkt t beziehe, sondern auf $t+\delta$, ist nicht stichhaltig: Ein Satz spricht über die Objekte, für die in ihm Namen vorkommen; andere Versuche, festzulegen, auf welche Objekte sich ein Satz bezieht, führen zu bisher nicht überwundenen Schwierigkeiten.[11]

Manchmal wird das Kausalprinzip auch nicht als eine Aussage gedeutet, die wahr oder falsch ist, sondern als *Ausdruck eines wissenschaftlichen Programms* oder als eine *Voraussetzung naturwissenschaftlicher Tätigkeit.*

Das Kausalprinzip drückt ein Programm aus, wenn man es so formuliert: „Der Naturforscher soll immer nach kausalen Erklärungen suchen, wenn er auf neue Phänomene stößt". Es ist dann aber ohne große Relevanz, da die Arbeit des Naturwissenschaftlers ohnehin darin besteht, die Phänomene unter allgemeine Gesetze zu subsumieren und zu erklären; und „erklären" heißt in der Naturwissenschaft eben auch „kausal erklären", wo das möglich ist. Ein solches generelles Programm ist allerdings nur sinnvoll, wenn man das Kausalprinzip (K) als deskriptiven Satz für wahr hält.[12]

Als Voraussetzung wissenschaftlicher Tätigkeit kann man das Kausalprinzip erstens ansehen, wenn es im Sinn von (K) die Überzeugung des Naturwissenschaftlers ausdrückt, daß es zu allen Phänomenen erklärende Kausalgesetze gibt – eine Überzeugung, die seine Tätigkeit, nach solchen Gesetzen zu suchen, erst sinnvoll macht. Eine solche Tätigkeit ist aber schon dann

[11] Vgl. dazu z. B. N. Goodman [61].
[12] Vgl. dazu Carnap [66], S. 218ff. und Stegmüller [69], S. 473.

sinnvoll, wenn (K) nicht allgemein gilt, sondern nur in vielen Fällen. Und tatsächlich besteht die Arbeit des Naturwissenschaftlers eben nicht nur in der Suche nach Kausalgesetzen, sondern viel allgemeiner in der Suche nach Regularitäten im Naturgeschehen, wie sie auch statistische Gesetze oder Koexistenzgesetze darstellen. Im Bereich der Quantenphysik nimmt man zudem nicht an, daß sich alle Phänomene kausal beschreiben lassen.

Als Voraussetzung für die Tätigkeit des Naturwissenschaftlers könnte man das Kausalprinzip zweitens ansehen, wenn es im Sinn eines induktionslogischen Uniformitätsprinzips verstanden wird und besagt, daß man vergangene Regelmäßigkeiten auf zukünftige Ereignisse extrapolieren kann; daß man also wahre Naturgesetze aus den Beobachtungen endlich vieler Instanzen induktiv erschließen kann, die dann die Grundlage von kausalen Erklärungen bilden.[13] Das Kausalprinzip müßte aber ganz anders formuliert werden als in (K), um so etwas zu beinhalten, und außerdem haben wir schon im Abschnitt 2.3.3 über die Fragwürdigkeit solcher Uniformitätsprinzipien gesprochen und gesehen, daß diese Prinzipien darauf hinauslaufen, daß wir gewisse Ereignistypen als vertauschbar ansehen. Auch solche Vertauschbarkeitsannahmen bewirken aber nicht, daß wir gesetzesartige Aussagen induktiv bestätigen können.[14]

Es ist also am angemessensten, das Kausalprinzip im Sinn der zweiten Version von (K) als einen empirischen Satz zu verstehen, dessen Geltung dann aber höchst fragwürdig ist.

Endlich sei noch darauf hingewiesen, daß oft aus der Tatsache, daß die Begriffe ‚Ursache', ‚Wirkung', ‚Kausalgesetz' etc. keine

---

[13] Vgl. dazu auch A. Pap [55], S. 138. – Auch bei Kant hat das Kausalprinzip die Funktion, die Humesche Kritik am induktiven Schließen (teilweise) zu umgehen. Vgl. dazu G.H. von Wright [57], S. 27f. Aber selbst wenn (K) gilt, wenn man weiß, daß es eine Regularität gibt, nach der auf F-Ereignisse immer Ereignisse eines Typs G folgen, so kann man aus endlich vielen Beobachtungen $F(a_i) \supset G'(a_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$ doch nicht entnehmen, daß G′ den gesuchten Ereignistyp G darstellt, wie die Paradoxie von Goodman zeigt.

[14] Vgl. dazu die Abschnitte 5.2 und 5.4.

deskriptiven Begriffe der Physik sind (so wie ‚Masse', ‚Ladung', ‚Elektron' etc) und also in physikalischen Theorien nicht vorkommen, der Schluß gezogen wird, daß diese Begriffe überhaupt irrelevant oder leer sind und daß man daher auch in der Philosophie auf sie verzichten sollte.

So schreibt B. Russell: „To me it seems that the reason why physics has ceased to look for causes is that, in fact, there are no such things. The law of causality, I believe, like much that passes muster among philosophers, is a relic of a bygone age."[15] Und: „The law of gravitation will illustrate what occurs in any advanced science. In the motions of mutally gravitating bodies, there is nothing that can be called a cause, and nothing that can be called an effect; there is merely a formula. Certain differential equations can be found, which hold at every instant for every particle of the system, and which, given the configuration and velocities at one instant, or the configurations at two instants, render the configuration at any other earlier or later instant theoretically calculable. That is to say, the configuration at any instant is a function of that instant and the configurations at two given instants. This statement holds throughout physics, and not only in the special case of gravitation. But there is nothing that could be properly called „cause" and nothing that could be properly called „effect" in such a system."[16]

Wenn Begriffe wie ‚Ursache' und ‚Wirkung' in der Physik keinen Platz haben, folgt daraus jedoch noch nicht, daß sie auch in der Metatheorie der Physik, und allgemein: in der Wissenschaftstheorie als Metatheorie der empirischen Wissenschaften, keinen Platz haben. Hier erweisen sie sich durchaus als brauchbar, z. B. bei dem Versuch, Erklärungstypen zu unterscheiden. Man kann allerdings sagen, daß diesen Begriffen heute in der Philosophie der Naturwissenschaften bei weitem nicht mehr jene große Bedeutung zukommt, die sie z. B. in der Naturphilosophie hatten.

---

[15] B. Russell [18], S. 132.
[16] Russell [18], S. 141.

4.5 Begründungen

Eine besonders wichtige Leistung empirischer Theorien besteht darin, daß wir mit ihrer Hilfe zukünftige Ereignisse voraussagen und empirische Phänomene erklären können. Voraussagen und Erklärungen sind Spezialfälle von wissenschaftlichen Begründungen, und wir wollen daher zunächst den Begriff der wissenschaftlichen Begründung im allgemeinen bestimmen und dann auf einige wichtige Typen solcher Begründungen eingehen.

Von einer *Begründung* wollen wir sprechen, wenn ein Argument vorliegt, bei dem für einen Satz B Gründe $A_1, \ldots, A_n$ angegeben werden, die wiederum Sätze sind, als deren Folge sich B darstellt. Oft charakterisiert man auch Sachverhalte als Gründe oder zu Begründendes, aber wir wollen im folgenden $A_1, \ldots, A_n$ und B immer als Sätze ansehen, die solche Sachverhalte ausdrücken.[1]

Besonders im Alltag, aber auch in den Wissenschaften, werden oft unvollständige oder *elliptische* Begründungen angegeben, bei denen gewisse Sätze stillschweigend vorausgesetzt werden, die sich im jeweiligen Kontext von selbst verstehen, und es werden nur die in diesem Kontext besonders wichtigen oder nicht selbstverständlichen Sätze explizit als Gründe angeführt. Wenn man z. B. sagt „Das Wasser kocht nicht, weil es erst eine Temperatur von 99° C hat", so setzt man dabei stillschweigend voraus, daß der atmosphärische Druck 1 Atm beträgt. Der Einfachheit wegen beziehen wir uns im folgenden bei der systematischen Erörterung aber immer nur auf vollständige Begründungen. Wir können das tun, weil die Behauptung bei einer elliptischen Begründung nicht die ist, daß es neben den angeführten Gründen $A_1, \ldots, A_n$ wahre Sätze $C_1, \ldots, C_m$ *gibt*, so daß B aus $A_1, \ldots, A_n, C_1, \ldots, C_m$ folgt – eine solche Behauptung wäre eine *Begründbar-*

---

[1] Der wahrscheinlichkeitstheoretische Formalismus bezieht sich zwar auf (durch Mengen von Zuständen dargestellte) Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$, B, nicht auf Sätze, aber wir werden der Einfachheit halber im folgenden auch bei induktiven Begründungen so tun, als seien die Argumente der Funktion w Sätze. Vgl. dazu auch die Ausführungen in 2.1.1 und 2.3.1.

keitsaussage der Form „B läßt sich mit Hilfe von $A_1, \ldots, A_n$ begründen" – sondern es wird stillschweigend auf *bestimmte* solche Sätze $C_1, \ldots, C_m$ Bezug genommen, die auf Befragen prinzipiell angegeben werden können.[2]

Wir unterscheiden deduktive und induktive Begründungen. Eine *deduktive Begründung* für den Satz B durch die Sätze $A_1, \ldots, A_n$ besteht in einer korrekten logischen Ableitung von B aus $A_1, \ldots, A_n$. Die deduktive Begründbarkeit von B durch $A_1, \ldots, A_n$ setzt also voraus, daß gilt $A_1, \ldots, A_n \rightarrow B$. Das genügt aber nicht, denn durch eine Ableitung aus den Prämissen $A_1, \ldots, A_n$ wird B nur dann begründet, wenn diese Prämissen gesichert sind; wenn sie selbst nicht mehr problematisch sind und einer Begründung selbst nicht mehr bedürfen. Jede Begründung geht also von Annahmen aus, die im Kontext und im Zeitpunkt der Begründung[3] als wahr, als unproblematisch, d. h. einer Begründung nicht bedürftig angesehen werden.[4] Ihre Menge bezeichnen wir im folgenden als $\mathscr{B}$. Die Gründe $A_1, \ldots, A_n$ für B werden dieser Menge $\mathscr{B}$ entnommen, während B nicht zu $\mathscr{B}$ gehört, sondern erst kraft der Begründung in $\mathscr{B}$ aufgenommen werden kann. Für die Korrektheit der Begründung ist nun nicht zu fordern, daß die Sätze $A_1, \ldots, A_n$ tatsächlich wahr sind: Das

---

[2] Stegmüller unterscheidet in [69], S. 128ff. in diesem Sinn (speziell für Erklärungen) effektive Erklärungen und Erklärbarkeitsaussagen. – In Analogie zu den Begriffen der partiellen Erklärung und der Erklärungsskizze, die Hempel in [65], S. 415f. und 423f. einführt, kann man auch von *partiellen* Begründungen und *Begründungsskizzen* sprechen, für die wir uns im folgenden jedoch nicht interessieren.

[3] Wenn wir vom Zeitpunkt einer Begründung sprechen, so verstehen wir unter „Begründung" eine Argumentation, die von jemand zu einer bestimmten Zeit vorgetragen wird. Eine solche Argumentation ist von einer Begründung als Argumentations*weise*, als Argument eines bestimmten *Typs* zu unterscheiden, die von verschiedenen Personen zu verschiedenen Zeiten als Argumentation vorgetragen werden kann.

[4] Es wird sich unten zeigen, daß „unproblematisch" nicht immer nur heißt „in der Geltung (Wahrheit) unproblematisch", sondern daß, je nach Struktur und Zweck der Begründung, weitere Anforderungen an diese Sätze zu stellen sind.

ist weder notwendig – wir akzeptieren eine Begründung, wenn sie eine korrekte Ableitung aus Prämissen ist, die wir für gesichert halten – noch hinreichend – Sätze dienen uns als Gründe erst dann, wenn wir von ihrer Wahrheit überzeugt sind, nicht schon dann, wenn sie tatsächlich, aber unerkanntermaßen wahr sind.

Da alle Sätze der Menge $\mathcal{B}$ zum Zeitpunkt t der Begründung als wahr angesehen werden, ist $\mathcal{B}$ eine Teilmenge der Menge $\mathcal{A}$ aller in t als wahr akzeptierten Sätze (die wir in 2.5.5 als epistemisches Korpus bezeichnet haben); $\mathcal{B}$ ist aber in der Regel nicht mit $\mathcal{A}$ identisch, da es bei Begründungen nicht nur darum geht, Sätze als wahr auszuweisen. Für $\mathcal{B}$ fordern wir, wie für $\mathcal{A}$, daß $\mathcal{B}$ eine konsistente Satzmenge ist. Darin liegt, wie wir in 2.5.5 besprochen haben, eine starke aber sinnvolle Idealisierung. Im Gegensatz zu $\mathcal{A}$ fordern wir für $\mathcal{B}$ hingegen nicht, daß $\mathcal{B}$ auch gegenüber logischen Folgerungen abgeschlossen ist. Es geht ja bei deduktiven Begründungen gerade um die deduktive Erweiterung von $\mathcal{B}$; würden alle Sätze, die aus den unproblematischen Sätzen von $\mathcal{B}$ logisch folgen, selbst als unproblematisch im Sinn von $\mathcal{B}$ angesehen, so würden deduktive Begründungen überflüssig. $\mathcal{B}$ soll aber – diese Forderung ist bei empirischen Begründungen sinnvoll – alle analytischen Sätze, insbesondere alle logisch-mathematisch beweisbaren Sätze enthalten.

Wir können dann sagen:

D4.5–1: Eine korrekte deduktive Begründung eines Satzes B durch Sätze $A_1, \ldots, A_n$ bzgl. der Menge $\mathcal{B}$ besteht in einer (korrekten) logischen Ableitung von B aus $A_1, \ldots, A_n$, wobei $A_1, \ldots, A_n$, nicht aber B Elemente von $\mathcal{B}$ sind.

Die *induktive Begründung* eines Satzes B soll ihm nicht denselben Status der Sicherheit geben, wie ihn die begründenden Sätze $A_1, \ldots, A_n$ haben, sondern ihm nur eine hohe subjektive Wahrscheinlichkeit zuordnen. Es bieten sich nun zwei Deutungen einer solchen induktiven Begründung an: Entweder man faßt sie auf als Beweis einer bedingten Wahrscheinlichkeitsaussage $w(B/A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \approx 1$, oder aber als Ableitung des Satzes $w(B) \approx 1$ aus den Sätzen $w(A_1) = 1, \ldots, w(A_n) = 1$. $w(B) \approx 1$ besagt, daß w(B) hinreichend nahe bei 1 liegt – wie nahe „hinreichend nahe“ ist, läßt sich nur von Fall zu Fall sagen.

Auch bei induktiven Begründungen geht man von einer Menge $\mathscr{B}$ von Sätzen aus, die im Kontext und Zeitpunkt der Begründung als wahr und als unproblematisch (d.h. einer Begründung selbst nicht bedürftig) angesehen werden, und zu diesen sollen die Gründe $A_1, \ldots, A_n$ gehören. Über w macht man keine Annahmen, als daß w eine reguläre subjektive Wahrscheinlichkeitsbewertung ist, die ggf. noch gewisse, von Fall zu Fall anzugebende und zu rechtfertigende Vertauschbarkeitsannahmen erfüllt. Für alle solche Bewertungen ist nun die Aussage $w(B/A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \approx 1$ nur dann definiert, wenn $w(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \neq 0$ ist. Das ist aber nur dann der Fall, wenn unter den Sätzen $A_1, \ldots, A_n$ keine Gesetzesaussagen vorkommen.[5] Gesetzesaussagen spielen aber im Zusammenhang mit Begründungen, speziell mit Erklärungen und Voraussagen, eine so wichtige Rolle, daß diese Restriktion nicht akzeptabel ist. Während wir uns in 2.5.4 bei der Diskussion der einfachen statistischen Syllogismen auf endliche Individuenbereiche bezogen haben und so die Deutung als bedingte Wahrscheinlichkeitsaussagen aufrechterhalten konnten, ist das im allgemeineren Fall der Begründungen nicht möglich.[6]

Wir kommen also im Sinn der zweiten Interpretation zu folgender Bestimmung induktiver Begründungen:

---

[5] Vgl. dazu die Explikation des Gesetzesbegriffs in 4.3.

[6] Es bieten sich auch keine sinnvollen Zusatzbedingungen für w an. Fordert man bei der ersten Interpretation z.B., daß $w(B/A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \approx 1$ nur für alle w mit $w(A)=1$ für alle $A \in \mathscr{B}$ zu beweisen ist, d.h. für alle w, die die Annahmen aus $\mathscr{B}$ berücksichtigen, so hat man neben den Prämissen $w(A_i)=1$ $(i=1, \ldots, n)$ noch zusätzliche, in der Begründung nicht explizit aufgeführte Gründe für B, bzw. für die Konklusion $w(B/A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) = w(B) \approx 1$ in den Annahmen $w(A)=1$ für $A \in \mathscr{B}$ und $A \neq A_i$. – Ist aber $w(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \neq 0$, und ist damit $w(B/A_1 \wedge \ldots \wedge A_n)$ definiert, so folgt aus $w(B/A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \approx 1$ und $w(A_1)=1, \ldots, w(A_n)=1$ auch $w(B) \approx 1$; denn aus $w(B/A)=r$ und $w(A)=1$ folgt allgemein $w(B)=r$ (vgl. dazu das Theorem TII–14 aus dem Anhang II). Jede brauchbare induktive Begründung im Sinn der ersten Interpretation läßt sich daher in eine induktive Begründung nach

D4.5–2: Eine korrekte induktive Begründung eines Satzes B durch Sätze $A_1, \ldots, A_n$ bzgl. der Menge $\mathscr{B}$ besteht in einer (korrekten) Ableitung der Behauptungen $w(B) \approx 1$ aus den Sätzen $w(A_1)=1, \ldots, w(A_n)=1$ für alle regulären Bewertungen w (die ggf. noch gewisse, im Einzelfall gesondert zu rechtfertigende Vertauschbarkeitsannahmen erfüllen), wobei $A_1, \ldots, A_n$, nicht aber B, Elemente von $\mathscr{B}$ sind.[7]

Gilt $w(A_1)=1, \ldots, w(A_n)=1 \rightarrow w(B) \approx 1$, so sagen wir auch, daß B *induktiv aus* $A_1, \ldots, A_n$ *folgt*. Wir beachten, daß eine induktive Begründung von B kein Argument mit der Konklusion B ist, sondern die Konklusion $w(B) \approx 1$ hat.

Bei Begründungen kann es *erstens* darum gehen, zu zeigen, daß aufgrund bekannter Tatsachen eine Annahme zwingend oder sehr wahrscheinlich ist. In diesem Sinn dient eine Begründung der deduktiven oder induktiven Vervollständigung der Menge $\mathscr{B}$ und hilft einem Mangel an logischer oder induktiver Einsicht ab.

---

der zweiten Interpretation umformen. – P. Suppes hat in [66] zwei weitere Formen angegeben, in die man induktive Begründungen bringen könnte:

$$\frac{\begin{array}{l} w(A/B) \geq r \\ w(B) \geq s \end{array}}{w(A) \geq r \cdot s} \quad \text{und} \quad \frac{\begin{array}{l} w(B \supset A) \geq r \\ w(B) \geq s \end{array}}{w(A) \geq r+s-1.}$$

Beides sind wahrscheinlichkeitstheoretisch gültige Schlußschemata. Da für eine Begründung aber $w(B)=1$ gelten muß, und also $w(A/B) = w(A) = w(B \supset A)$, fallen diese Formen der Begründung mit der zweiten Interpretation induktiver Begründungen zusammen.

[7] Da wir in 2.5.5 anhand der Lotterieparadoxie auf die Unbrauchbarkeit der Regel der hohen Wahrscheinlichkeit als einer generellen Regel für die Annahme von Sätzen hingewiesen hatten, sei hier betont, daß korrekte induktive Begründungen keineswegs immer die Annahme des begründeten Satzes als wahr rechtfertigen. – Eine Bedingung wie (d) im Kriterium (B) für die Korrektheit statistischer Syllogismen in 2.5.4 benötigen wir hier nicht, da eine Ableitung für $w(B) \approx 1$ aus Prämissen $w(A_1)=1, \ldots, w(A_n)=1$ durch die Hinzunahme weiterer Prämissen $w(A)=1$ mit $A \in \mathscr{B}$ nicht ungültig wird. Da $\mathscr{B}$ konsistent ist, sind die Annahmen $w(A)=1$ für alle $A \in \mathscr{B}$ kohärent, d.h. wahrscheinlichkeitstheoretisch verträglich.

Der Aufweis logischer oder induktiver Folgebeziehungen ist durchaus nicht immer trivial und kann auch unsere empirische Erkenntnis wesentlich fördern.

Bei einer Begründung kann es *zweitens* auch darum gehen, neue Tatsachen anzuführen und zu zeigen, daß aus ihnen und den bekannten Tatsachen eine Annahme deduktiv oder induktiv folgt. Die Sätze, die diese neuen Tatsachen ausdrücken, müssen aber dann, damit sie als begründende Sätze dienen können, zunächst akzeptiert werden – und zwar nicht nur als wahr, sondern als unproblematisch im Sinne des jeweiligen Begründungsverfahrens. Eine solche Begründung kann man daher in zwei Schritte aufspalten: Zunächst wird die Menge $\mathscr{B}$ durch Hinzunahme der neuen Sätze zur Menge $\mathscr{B}'$ erweitert – mit welchen Gründen diese Erweiterung gerechtfertigt wird, interessiert im Kontext der Begründung selbst nicht –, dann wird der zu begründende Satz B bzgl. $\mathscr{B}'$ begründet im Sinn des ersten Falles, d.h. durch Angabe einer logischen oder wahrscheinlichkeitstheoretischen Ableitung. Daher können wir uns auf den ersten Fall beschränken.

Von einer korrekten *wissenschaftlichen Begründung* wollen wir nur dann sprechen, wenn die Bezugsmenge $\mathscr{B}$ einer Menge von Sätzen ist, die nach wissenschaftlichen Kriterien als im Zeitpunkt der Begründung akzeptiert und im jeweiligen Kontext als unproblematisch angesehen werden können. Von einer *nomologischen* Begründung sprechen wir in Anlehnung an die Terminologie Hempels, wenn sich unter den begründenden Sätzen $A_1, \ldots, A_n$ der (nicht elliptisch formulierten) Begründung auch Naturgesetze befinden, die in der Ableitung keine überflüssigen Prämissen darstellen.

Es ist zu betonen, daß der Begriff der korrekten Begründung in unserer Bestimmung ein pragmatischer und zeitabhängiger Begriff ist, der auf die Tatsache des Akzeptiertseins eine Menge $\mathscr{B}$ von Sätzen in einem Zeitpunkt Bezug nimmt. Er unterscheidet sich damit z.B. wesentlich von dem Erklärungsbegriff bei C.G. Hempel, auf den wir unten noch zu sprechen kommen. Einen ähnlichen pragmatischen Begründungsbegriff hat zuerst M. Käsbauer in [69] entwickelt.

Es gibt nun verschiedene Typen von (wissenschaftlichen) Begründungen, von denen wir im folgenden drei besonders wichtige diskutieren wollen.

I) *Epistemische Begründungen*

Wenn eine Begründung dazu dient, zu zeigen, daß der zu begründende Satz B wahr oder wahrscheinlich wahr ist, sprechen wir von einer *epistemischen* Begründung. Die angegebenen Gründe $A_1, \ldots, A_n$ dienen dann als *Erkenntnisgründe (causae cognoscendi)*, und von der Menge der für eine solche Begründung infrage kommenden Sätze wird nicht mehr verlangt, als daß diese Sätze als wahr anerkannt und in ihrer Geltung unproblematisch sind. B ist hingegen ein Satz, dessen Geltung problematisch ist und dem im Fall einer induktiven Begründung zunächst nicht eine nahe bei 1 liegende Wahrscheinlichkeit zugemessen wird.

Epistemische Begründungen sind *Voraussagen*, wenn die Begründung zu einem Zeitpunkt t vorgetragen wird, der früher liegt als der Zeitpunkt t′, in dem das durch B ausgedrückte Ereignis stattfindet. Liegt t später als t′, so spricht man auch von einer *Retrodiktion*.[8]

Beispiele epistemischer Begründungen (die wir der Kürze wegen elliptisch formulieren) sind:

1) Das Barometer ist gefallen, daher wird sich das Wetter verschlechtern.

2) Der in einer Entfernung s senkrecht aufgestellte Mast hat die Länge $l = s \cdot \mathrm{tg}\, \alpha$, da seine Spitze unter dem Winkel α erscheint.[9]

3) Herr X, der von einer Kobra gebissen wurde, wird (wahrscheinlich) sterben, da der Biß einer Kobra in 80% aller Fälle tödlich ist.

Alle drei epistemischen Begründungen sind nomologisch, (2) ist eine deduktive, (3) eine induktive Begründung, bei (1) hängt

---

[8] W. Stegmüller diskutiert in [66] und [69], S. 161ff. noch weitere Typen epistemischer Begründungen.

[9] Dieses Beispiel stammt von C.G. Hempel.

das davon ab, ob die meteorologischen Gesetze, auf die man sich bezieht, statistische oder deterministische Gesetze sind.

Für epistemische Zwecke sind induktive Begründungen brauchbar und werden häufig verwendet. Es sei aber noch einmal betont, daß auch eine korrekte induktive epistemische Begründung eines Satzes B nur die Behauptung $w(B) \approx 1$ rechtfertigt, nicht aber die Behauptung B. Wir werden den Satz B aufgrund seiner hohen Wahrscheinlichkeit oft akzeptieren oder so handeln, als sei er gewiß, aber wir haben in 2.5.5 gesehen, daß eine hohe Wahrscheinlichkeit von B nicht generell ein hinreichender Grund dafür ist, B als wahr zu akzeptieren.

II) *Kausale Begründungen*

Wenn bereits bekannt ist, daß der zu begründende Satz B wahr ist, wenn es bei der Begründung also nicht darum geht, ihn als wahr oder als wahrscheinlich zu erweisen, dann sprechen wir von einer *kausalen Begründung*, falls die Begründung das Ziel hat, deutlich zu machen, *warum* das durch B ausgedrückte Ereignis eintritt. Die begründenden Sätze $A_1, \ldots, A_n$ dienen dann als *Seinsgründe (causae efficientes)* und stellen *Ursachen* für den zu begründenden Sachverhalt dar. Die Sätze aus $\mathscr{B}$ müssen dann nicht nur, wie im Fall epistemischer Begründungen, als wahr anerkannt und in ihrer Geltung unproblematisch sein, sondern sie müssen Ereignisse oder Gesetze ausdrücken, die einer kausalen Begründung nicht bedürfen, für die also die „Warum"-Frage schon beantwortet ist oder sich (im jeweiligen Zusammenhang) nicht stellt.

Jeder Seinsgrund ist ein Erkenntnisgrund, aber nicht umgekehrt. So stellen z. B. die Begründungen (1) und (2) keine kausalen Begründungen dar; denn das Wetter verschlechtert sich nicht, *weil* das Barometer fällt, und der Mast hat nicht die Länge $l = s \cdot tg\alpha$, *weil* er aus einer Entfernung s unter dem Winkel α erscheint.

In der Wissenschaftstheorie bezeichnet man kausale Begründungen auch mit dem Wort „*Erklärungen*", das sonst eine weitere Bedeutung hat. Von einer *Erklärung* spricht man üblicherweise auch dann, wenn eine Erläuterung der Bedeutung eines Wortes oder Textes, einer Geste, eines Zeichens oder eine Interpretation eines Kunstwerkes gegeben wird, wenn die Funktion oder die Aufgabe eines Apparates oder einer Institution, der Zweck oder Sinn einer Handlung oder ihr Wert verständlich gemacht wird, oder wenn gezeigt wird, wie etwas gemacht wird. Von solchen interpretierenden, teleologischen und lehrhaften Erklärungen unterscheidet man in der Wissenschaftstheorie vielfach Erklärungen im engeren Sinn als Begründungen von Ereignissen, die eine Antwort geben auf die Frage, warum diese Ereignisse stattfinden.[10] Auch wir werden im folgenden kausale Begründungen oft als „Erklärungen“ bezeichnen, ohne damit jedoch eine weitere Verwendung des Wortes ausschließen zu wollen.

Bei vielen kausalen Begründungen geht es darum, eine Ursache in dem Sinn aufzuweisen, daß das zu erklärende Ereignis B (das *Explanandum*) ein unerwartetes, merkwürdiges oder ungewöhnliches Ereignis ist, zu dem es ein eigentlich zu erwartendes oder normales Ereignis B′ gibt, so daß die Frage genauer lautet: Warum B und nicht B′? Gerade im Alltag treten „Warum“-Fragen oft in dieser Form auf. Als Ursache von B wird dann nur diejenige Tatsache aufgeführt, die dafür verantwortlich ist, daß B anstelle von B′ eingetreten ist. Wenn man z. B. beobachtet, daß das Quecksilber in einem Thermometer, das man in heißes Wasser taucht, zuerst fällt, um erst danach anzusteigen, so ist das etwas Unerwartetes. Erwartet hätte man ein sofortiges Ansteigen der Quecksilbersäule. Dieses merkwürdige Phänomen wird nun dadurch erklärt, daß man darauf hinweist, daß Glas ein schlechter Wärmeleiter ist, und daß deswegen die Hitze zunächst auf das Glasgefäß einwirkt, in dem das Quecksilber eingeschlossen ist,

---

[10] Vgl. dazu auch Passmore [82], wo gezeigt wird, daß bei diesen verschiedenen Arten von Erklärungen ganz Verschiedenes getan wird und daß nur eine oberflächliche Verwandtschaft zwischen ihnen besteht. Diese Verwandtschaft könnte man vielleicht so beschreiben, daß in allen Erklärungen etwas verständlich gemacht wird, aber diese Charakterisierung ist nur wenig informativ.

und es ausdehnt, so daß das Quecksilber sinkt; und daß erst dann, wenn die Hitze bis zum Quecksilber vordringt, auch dieses sich ausdehnt. Oder man erklärt die merkwürdige Tatsache, daß immer dann, wenn Herr X im Winter seinen Fernsehapparat einschaltet, die Temperatur in seinem Haus absinkt, dadurch, daß man zeigt, daß die Heizung im Hause von Herr X durch einen Thermostaten geregelt wird, der über dem Fernsehapparat angebracht ist und so durch die Inbetriebnahme dieses Gerätes erhitzt wird.[11]

Allgemein kommen kausale Begründungen aber nicht nur dann vor, wenn etwas Unerwartetes geschieht, sondern wir sprechen auch davon, daß sich die Planetenbewegungen mit der Newtonschen Gravitationstheorie erklären lassen, daß sich die auf Elektronenbewegungen in den Atomen zurückgehenden Spektren nicht mit der klassischen Elektrodynamik, sondern erst mit der Quantentheorie erklären lassen, usw. Hier wird nicht etwas Unerwartetes erklärt, sondern etwas durchaus Gewohntes, wie denn überhaupt eine Erklärung nicht deswegen aufhört eine Erklärung zu sein, weil das Erklärte den Anschein des Unerwarteten verliert. Wir wollen daher die Eigenschaft vieler Erklärungen, daß sie dazu dienen, Unerwartetes verständlich zu machen,[12] im folgenden nicht als Definitionsmerkmal für kausale Begründungen ansehen.

Wir wollen zunächst den Begriff der *deduktiven kausalen Begründung* etwas näher untersuchen: Wir haben den Begriff der Ursache in 4.4 so bestimmt, daß ein singulärer Kausalsatz „A ist Ursache von B“ nur dann wahr ist, wenn es Kausalgesetze gibt, aus denen, zusammen mit A und anderen Bedingungen, B folgt. D.h. eine (deduktive) kausale Erklärung ist immer eine nomologische Erklärung mit Hilfe von Kausalgesetzen.

---

[11] Beide Beispiele stammen wieder von Hempel.

[12] Einen solchen Erklärungsbegriff diskutieren J. König in [19], H.L. Hart und H.M. Honoré in [59], J. Passmore in [62] und E. Scheibe in [69]. Vgl. zu dieser Frage auch Hempel [65], S. 430ff.

C.G. Hempel und P. Oppenheim haben in [48] das folgende deduktive Erklärungsmodell entwickelt: Eine Erklärung eines Satzes B besteht in der Angabe von mehreren gesetzesartigen Aussagen $G_1, \ldots, G_m$ und wahren Antecedensbedingungen $C_1, \ldots, C_n$, so daß gilt $G_1, \ldots, G_m, C_1, \ldots, C_n \rightarrow B$, aber nicht $C_1, \ldots, C_n \rightarrow B$ (d.h. bei der Erklärung werden Gesetzesaussagen benötigt, sie ist also nomologisch). Es sollte sich dabei um den ersten Ansatz zu einem logischen Modell der Erklärung handeln, bei dem man hoffte, man werde den Begriff der gesetzesartigen Aussage mit rein logischen Mitteln präzisieren können.

Um Zirkularitäten bei der Erklärung auszuschalten, d.h. Erklärungen wie

(a) $$\frac{\begin{array}{l}\wedge x(F(x) \supset G(x)) \\ \neg\,(F(a) \supset G(a)) \vee H(b),\end{array}}{H(b)}$$

bei denen das Explanandum $H(b)$ insofern durch sich selbst erklärt wird, als die Explanansbedingung $\neg\,(F(a) \supset G(a)) \vee H(b)$ nur durch das Explanandum verifiziert werden kann, haben Hempel und Oppenheim zu ihrem Modell noch die Bedingung hinzugefügt, daß es eine mit $G_1, \ldots, G_n$ verträgliche Klasse K von Basissätzen (Beobachtungssätzen) gibt, so daß aus K zwar die Sätze $C_1, \ldots, C_n$, nicht aber B folgt. Dann wird die Bedingung der Ungültigkeit von $C_1, \ldots, C_n \rightarrow B$ natürlich überflüssig, und man erhält folgende Definition:

Eine Erklärung von B durch Explanansbedingungen $A_1, \ldots, A_n$ ist korrekt, wenn gilt:

a) $A_1, \ldots, A_n$ sind wahre Sätze,

b) unter diesen Sätzen befinden sich gesetzesartige Aussagen $A_{i_1}, \ldots, A_{i_m}$,

c) B folgt logisch aus $A_1, \ldots, A_n$,

d) es gibt eine Klasse K von Beobachtungssätzen, die mit $A_{i_1} \wedge \ldots \wedge A_{i_m}$ verträglich ist und aus der die übrigen Sätze von $A_1, \ldots, A_n$ folgen, nicht aber B.

Das Beispiel (1) stellt dann keine Erklärung mehr dar, denn jede mit $\wedge x(F(x) \supset G(x))$ verträgliche Menge von Beobachtungssätzen, die den Satz $\neg (F(a) \supset G(a)) \vee H(b)$ verifiziert, verifiziert auch das Explanandum $H(b)$.

Dieses Hempel-Oppenheimsche Erklärungsmodell, das in der wissenschaftstheoretischen Diskussion zum Standardmodell der Erklärung geworden ist, wurde von R. Eberle, D. Kaplan und R. Montague in [61] kritisiert und von Kaplan in [61], J. Kim in [63] und von M. Käsbauer in [69] verbessert, ohne daß die Diskussion damit als abgeschlossen gelten könnte.[13] Wir wollen auf diese Vorschläge, die technisch immer komplizierter werden, hier aus folgenden Gründen nicht eingehen: Wir glauben nach den Diskussionen in 4.3 nicht, daß es möglich ist, den Begriff des Naturgesetzes oder der gesetzesartigen Aussage mit rein logischen Mitteln zu präzisieren. Diese Begriffe sind vielmehr pragmatische Begriffe, und mit ihnen wird in jedem Fall auch der Erklärungsbegriff ein pragmatischer Begriff. Unabhängig davon kommt aber auch durch die Auszeichnung erklärender und im Kontext der Erklärung als unproblematisch angesehener Annahmen ein pragmatisches Moment in den Erklärungsbegriff hinein: Dasselbe Argument, das in einer Situation eine befriedigende Erklärung darstellt, kann in einer anderen Situation als Erklärung nicht brauchbar sein. So ist z. B. das Argument

(b) Alles Kupfer leitet Elektrizität
Der Draht a besteht aus Kupfer
―――――――――――――
a leitet Elektrizität

eine brauchbare Erklärung der Tatsache, daß a Elektrizität leitet, *wenn es als unproblematisch angesehen wird, warum Kupfer Elektrizität leitet.* Wenn das jedoch problematisch ist, genügt die angegebene Erklärung nicht, sondern es ist die Frage, auf Grund welcher physikalischen Gesetze über freie Elektronen etc. ein Material wie das von a Elektrizität leitet. Man kommt hier nicht darum herum, *pragmatisch* zwischen den im Kontext der Begründung unproblematischen und den in diesem Kontext problematischen Annahmen zu unterscheiden.

[13] Vgl. dazu auch Stegmüller [69], Kap. X.

Nimmt man aber wie nach D4.5–1 auf die Menge $\mathscr{B}$ der unproblematischen Annahmen Bezug, so entfallen die Schwierigkeiten, um die sich die an den Hempel-Oppenheimschen Vorschlag anschließende Diskussion dreht. Man benötigt schon die Zusatz-Bedingung zum Ausschluß von Selbsterklärungen nicht mehr, denn alle Annahmen, mit denen man die Aufnahme eines Satzes in $\mathscr{B}$ rechtfertigt, müssen selbst zu $\mathscr{B}$ gehören. Daher ist die Bedingung aus D4.5–1 verletzt, daß B nicht zu $\mathscr{B}$ gehört, wenn einer der zum Explanans gehörigen Sätze $A_1, \ldots, A_n$ nur aufgrund von B akzeptiert und in $\mathscr{B}$ aufgenommen worden ist. Die Bezugnahme auf $\mathscr{B}$ und damit die Wendung des Erklärungsbegriffs ins Pragmatische, ist also notwendig; sie gestattet aber auch, diesen Begriff sehr viel einfacher zu formulieren, als das sonst möglich wäre.[14]

---

[14] Pragmatische Begriffe haben andererseits natürlich den Nachteil, daß sie viel weniger präzise sind als logische Begriffe. Wo also die Explikation eines Begriffs mit rein logischen Mitteln möglich ist, wird man pragmatische Begriffe gern vermeiden. – Es sei noch auf ein verbreitetes Mißverständnis im Zusammenhang mit deduktiven kausalen Erklärungen hingewiesen: J. Canfield und K. Lehrer haben in [61], ausgehend von einer Interpretation induktiver Erklärungen im Sinne von statistischen Syllogismen und dem Problem, daß diese, als Wahrscheinlichkeitsschlüsse interpretiert, dem Prinzip der Prämissenverstärkung nicht genügen (vgl. dazu den Abschnitt 2.5.4), behauptet, daß auch bei deduktiven Erklärungen dieses Prinzip der Prämissenverstärkung nicht gilt. Sie haben dazu folgendes Beispiel angegeben: Die Tatsache, daß ein Faden f reißt, wenn man ein Eisengewicht a daran hängt, wird erklärt mit der Gesetzesaussage, daß ein Faden mit der Reißfestigkeit r reißt, wenn man ein Gewicht > r daran aufhängt, und mit den singulären Aussagen, daß f eine Reißfestigkeit r hat und a ein Gewicht > r. Unter der Zusatzbedingung, daß man über a einen Magneten anbringt, der den von a auf f ausgeübten Zug wesentlich vermindert, gilt diese Erklärung aber nicht mehr. – Dazu ist zu sagen: Die angegebene Gesetzesaussage ist falsch: in ihr darf korrekterweise nicht vom *Gewicht*, sondern nur vom *Zug* die Rede sein; die Reißfestigkeit ist als Festigkeit gegenüber *Zug* definiert. Ist daher ein Magnet angebracht, so bemißt sich der Zug von a nicht durch das Gewicht von a, sondern durch die Differenz von Gewicht und der vom Magneten darauf ausgeübten Anziehungskraft (Vgl. dazu auch Stegmüller

Können auch *induktive Begründungen* kausale Begründungen, d.h. Antworten auf „Warum“-Fragen sein? Ein Beispiel einer induktiven Erklärung ist z.B. der Satz:

4) Herr X ist gestorben, weil er von einer Kobra gebissen worden ist,

wobei man voraussetzt, daß der Biß einer Kobra in der Regel tödlich ist.

Es gibt zwei Positionen gegenüber solchen induktiven Erklärungen:[15] Man kann einmal sagen: Kausalgesetze sind immer deterministische Gesetze, daher kann es nur deduktive Erklärungen geben. Erklärungen wie (4) sind immer als elliptische Erklärungen zu verstehen, bei denen nicht auf ein statistisches Gesetz wie „Der Biß einer Kobra ist in 80% aller Fälle tödlich“ Bezug genommen wird, sondern auf deterministische Gesetze, die sagen, unter welchen Zusatzbedingungen der Biß einer Kobra immer tödlich ist, und darauf, daß diese Zusatzbedingungen bei Herrn X vorlagen.

Die andere Position beinhaltet, daß wir Argumente wie (4) keinesfalls immer als elliptische deterministische Erklärungen verstehen, da in vielen Fällen solcher Erklärungen deterministische Gesetze gar nicht zur Verfügung stehen. Wir fragen nach Ursachen nur dort, wo eine Abweichung von einer Regel vorliegt, sei sie deterministisch oder statistisch.

Zweifellos entspricht die liberale zweite Position eher unserem vorwissenschaftlichen Gebrauch von „Erklärung“. Solange aber der Begriff des Kausalgesetzes nicht auch für statistische Gesetze bestimmt ist, bleibt der Begriff der induktiven kausalen Erklärung ganz im Vagen. Zwar hilft uns der Hinweis auf die Tatsache, daß Herr X von einer Kobra gebissen wurde, und auf

---

[69], S. 145ff.). Es bedarf also auch keiner generellen Störungsfreiheitsklauseln für die bei Erklärungen herangezogenen Gesetze. Naturgesetze gelten in strenger Allgemeinheit oder sie sind falsch – sie gelten nicht unter indefiniten Störungsfreiheitsbedingungen, wie das z.B. R. Carnap in [56], S. 68f. bei der Diskussion der Reduktionssätze annimmt (vgl. dazu den Abschnitt 3.3 Anmerkung 11).

[15] Vgl. dazu die Anmerkung 2 zu 4.4.

das genannte statistische Gesetz zweifellos, den zunächst vielleicht rätselhaften Tod von Herr X zu verstehen; aber dieses Verstehen vermittelt uns keine Einsicht in hinreichende Seinsgründe für das Explanandum-Ereignis, sondern besteht nur darin, daß das Unerwartete dieses Ereignisses verschwindet: Aufgrund der neuen Tatsachen verliert dies Ereignis den Charakter des zunächst Unwahrscheinlichen.

Wir wollen eine Begründung, bei der die Sätze der Bezugsmenge $\mathcal{B}$ nicht nur als wahr anerkannt sind, sondern auch in Übereinstimmung mit den anerkannten Gesetzesaussagen deterministischer und statistischer Art stehen, einmal als *epistemische Begründung 2. Art* von B durch $A_1, \ldots, A_n$ bezeichnen, falls B deduktiv oder induktiv aus $A_1, \ldots, A_n$ folgt und $A_1, \ldots, A_n$, nicht aber B zu $\mathcal{B}$ gehören. B kann dabei bereits als wahr anerkannt sein. Solche Begründungen dienen der Subsumption von Phänomenen unter bekannte Gesetze. Es ist dann die Frage, ob Beispiele wie (4) nicht eher im Sinn solcher epistemischer Begründungen 2. Art zu deuten sind als im Sinn von kausalen Erklärungen als Antworten auf „Warum"-Fragen.[16]

III) *Teleologische Begründungen*

Sind kausale Begründungen Antworten auf „Warum"-Fragen, so kann man teleologische Begründungen als Antworten auf „Wozu"-Fragen charakterisieren: die Argumentation soll klar machen, zu welchem Zweck (in welcher Absicht) eine Handlung

[16] Mit solchen epistemischen Begründungen 2. Art sind die Argumente verwandt, die W. Dray in [57], S. 156ff. behandelt und die zeigen sollen, *wie es möglich war*, daß ein gewisses (zunächst sehr merkwürdiges und exzeptionelles) Ereignis eintreten konnte. Oft genügt zu einer solchen Begründung ein Argument, das dem zu begründenden Satz B eine deutlich über 0 (wenn auch deutlich unter 1) liegende Wahrscheinlichkeit zuordnet. Wenn man z.B. die Tatsache der Scheidung von Herrn Y mit dem Hinweis begründet, daß seine Frau sich jede Woche einen teuren neuen Hut kaufte, so macht dieser Hinweis allein die Tatsache der Scheidung noch nicht sehr wahrscheinlich, läßt sie aber verständlicher erscheinen und nimmt ihr den Charakter des Überraschenden. Vgl. dazu auch die Diskussion in Hempel [65a], S. 430ff.

vollzogen wird, welche Funktion eine staatliche Institution, ein tierisches Organ, ein Teil einer Maschine hat, usw.[17]

Betrachten wir zunächst wieder *deduktive* teleologische Begründungen. Beispiele solcher Begründungen sind:

5) Fritz trainiert, damit er bei den kommenden Wettkämpfen in Form ist.

6) Die männliche Hirschkäferlarve bohrt an zwei bestimmten Stellen ihres Gehäuses ein Loch, damit der Hirschkäfer, in den sie sich später verwandelt, Platz für seine Zangen hat.[18]

7) Dieses Ventil ist angebracht, um ein Platzen des Kessels bei Überdruck zu verhindern.

Solche teleologischen Begründungen sind also Argumente vom Typ „B, damit A". Der zu begründende Satz B wird dabei, wie im Fall kausaler Begründungen der Form „B, weil A", als wahr vorausgesetzt.

Nach Hempel sind solche teleologischen Begründungen als kausale Erklärungen zu interpretieren. (5) ist z. B. eine Antwort auf die Frage: „Warum trainiert Fritz?", die als Grund anführt, daß Fritz die Absicht hat, bei den Wettkämpfen in Form zu sein. Natürlich kann nicht der Satz „Fritz ist bei den kommenden Wettkämpfen in Form" die Prämisse des Arguments sein – dieser Satz ist weder notwendig noch hinreichend für das Explanandum (wenn Fritz bei den Wettkämpfen erkrankt, ist er trotz seines Trainings nicht in Form, und Fritz könnte vielleicht auch ohne Training in Form sein), und ein späteres Ereignis kann auch ein früheres nicht kausal erklären. Das Argument (5) ist bei dieser Interpretation stark elliptisch: Um das Explanandum abzuleiten, benötigt man noch Sätze wie z. B. (5a) „Fritz ist der Ansicht, sein Training sei der einfachste und sicherste Weg, eine gute Form zu erreichen" und (5b) „Wenn Fritz ein Ziel anstrebt und der An-

[17] Das Adjektiv „teleologisch" ist zwar mit vielen in unserem Zusammenhang unerwünschten Assoziationen verknüpft, es hat sich aber zur Bezeichnung dieser Begründungen in der Wissenschaftstheorie eingebürgert.

[18] Dieses Beispiel diskutiert W. Stegmüller in [69], S. 520.

sicht ist, eine Handlungsweise sei der einfachste und sicherste Weg, es zu erreichen, so handelt Fritz in dieser Weise".

Wenn eine solche „kausale" Deutung von Beispielen teleologischer Erklärung auch in einzelnen Fällen möglich sein mag, so ist sie doch im allgemeinen inadäquat und verfehlt insbesondere das Ziel einer teleologischen Begründung. Es geht in (5) nicht um eine kausale Erklärung einer Handlung von Fritz, um eine psychologische Erklärung aus Motiven, die eine Kette von Ursachen aufweist, die dazu führen, daß Fritz nun mit naturgesetzlicher Notwendigkeit trainieren muß;[19] es geht vielmehr darum, die Handlung von Fritz als zweckmäßig oder sinnvoll auszuweisen. Das zeigt sich auch darin, daß man bei der kausalen Deutung von (5) auf so starke Prämissen wie (5b) zurückgreifen muß, die man wohl kaum behaupten will, wenn man die Begründung (5) formuliert. Wir können zwar die Frage „*Wozu* trainiert Fritz?" auch als eine Frage „*Warum* trainiert Fritz?" formulieren, aber dieses „Warum" ist dann eben nicht kausal gemeint. Daher ist das Explanandum von (5), die Konklusion des Arguments, auch nicht der Satz „Fritz trainiert", sondern der Satz „Es ist zweckmäßig, daß Fritz trainiert" – ähnlich, wie bei einer induktiven

---

[19] Es wäre auch die Frage zu stellen, ob es so etwas wie kausale Erklärungen von Handlungen aus Motiven überhaupt gibt: Es fehlen uns dazu gegenwärtig nicht nur die notwendigen Kausalgesetze, sondern es könnte aus dem Grund inadäquat sein, das Motiv einer Handlung als dessen Ursache anzusehen, weil es der Handlung nicht vorausgeht (so daß da zuerst die Absicht wäre, die dann die Tat bewirkt). Ein Motiv ist nach G. Ryle vielmehr eine *Disposition*, unter gewissen Bedingungen T gewisse Handlungen H zu vollziehen (die der Absicht förderlich sind). Eine solche Disposition kann zwar wie ein Gesetz in eine Erklärung eingehen, aber sie ist dann nicht Ursache der Handlung H – Ursache von H wäre vielmehr die Bedingung T. Man sagt nicht, daß eine Glasscheibe zerbricht, *weil sie zerbrechlich ist*, sondern *weil sie von einem Stein getroffen wird*. Dabei setzt man die Disposition der Zerbrechlichkeit voraus, nach der die Scheibe bei harten Schlägen oder Stößen zerbricht. Man könnte sogar die Meinung vertreten, ein Motiv sei auch keine Disposition, sondern die *Eigenschaft* der Handlung, in einer gewissen Absicht zu geschehen.

Begründung von B nicht B, sondern der Satz $w(B) \approx 1$ Konklusion des Arguments ist. Eine Begründung von B ist eben nicht immer ein Argument mit der Konklusion B. Bei der Begründung der Zweckmäßigkeit einer Handlung wird auch nicht notwendigerweise immer vorausgesetzt, daß der Handelnde so handelt, weil er diese und jene Absichten hat und diese und jene Einsichten in die Zweckdienlichkeit seiner Handlungsweise, obwohl das vielfach, wie z. B. in (5) wohl angenommen wird. Wichtig sind nicht die Motive und Ansichten des Handelnden, sondern daß seine Handlungsweise als solche zweckmäßig ist – selbst wenn ihm das vielleicht gar nicht bewußt ist.

Entsprechend sind (6) und (7) zu deuten: (6) will nicht eine kausale Erklärung von (6a) „Die männliche Hirschkäferlarve bohrt an zwei bestimmten Stellen ihres Gehäuses ein Loch" geben, z. B. unter Heranziehung von Instinkten etc. – welche Rolle würde dabei auch der „damit"-Satz spielen? –, sondern die Zweckmäßigkeit dieser Tätigkeit, ihre Funktion für die Entwicklung des Hirschkäfers, aufzeigen. Mit (7) endlich will man nicht eine kausale Erklärung dafür liefern, warum der Konstrukteur der Maschine dieses Ventil angebracht hat; man will nicht die kausale Genese dieser Handlung aufweisen – vom Konstrukteur ist in (7) tatsächlich garnicht die Rede –, sondern man will die Funktion des Ventils erklären, zeigen, wozu es dient. Die Konklusion des Arguments ist also nicht „Dieses Ventil wurde angebracht", sondern „Es ist zweckmäßig, daß dieses Ventil hier angebracht ist".

Eine deduktive teleologische Begründung „B, damit A" ist also eine Begründung, bei der der Satz B als wahr vorausgesetzt wird und deren Konklusion der Satz „Es ist zweckmäßig, daß B" ist. Da B als zweckmäßig ausgewiesen werden soll, ist die Menge $\mathcal{B}$, der der angeführte Grund für B entnommen ist, eine Menge von Sätzen, deren *Zweck* oder *Wert* im jeweiligen Kontext als unproblematisch gilt. Wir können auch sagen: $\mathcal{B}$ ist eine Menge von Sätzen der Form „Es ist zweckmäßig, daß C", deren *Geltung* unproblematisch ist. Der begründende Satz (das Explanans) in „B, damit A" ist dann nicht der Satz A selbst, sondern der Satz

„Es ist zweckmäßig, daß A". In (5) wird vorausgesetzt, daß es (für Fritz) zweckmäßig ist, bei den kommenden Wettkämpfen in Form zu sein; Fritzens Ziel, bei diesen Wettkämpfen gut abzuschneiden, wird unterstellt. In (6) wird vorausgesetzt, daß es für die ungestörte Entwicklung des Hirschkäfers wichtig ist, daß er in der Larve Platz für seine Zangen hat. Und in (7) wird vorausgesetzt, daß es für ein störungsfreies Funktionieren der Maschine wichtig ist, daß der Kessel bei Überdruck nicht platzt. Man setzt also mit $\mathscr{B}$ bei jeder funktionalen Begründung gewisse Zwecke, Ziele und Werte als unproblematisch voraus.

Die Argumentation selbst verläuft dann nach dem Schema: Wenn es zweckmäßig ist, daß A, und B eine (logisch oder empirisch) hinreichende Bedingung für A ist, so ist es (im Hinblick auf A[20]) auch zweckmäßig, daß B. Während also bei einer epistemischen oder kausalen Begründung „B, weil A" das Explanans A eine hinreichende Bedingung für das Explanandum B ist, ist bei einer funktionalen Begründung „B, damit A" zwar der Satz „Es ist zweckmäßig, daß A" eine hinreichende Bedingung für „Es ist zweckmäßig, daß B", aber B selbst ist eine hinreichende Bedingung für A.[21]

Es gibt keine *induktiven* teleologischen Begründungen, in dem Sinn, daß dabei begründet würde, daß B wahrscheinlich zweckmäßig ist. Eine solche Konklusion hätte wohl keinen sehr relevanten Sinn. Aber es gibt teleologische Begründungen mit induktiven Mitteln, bei denen die Zweckmäßigkeit von B damit begründet wird, daß B mit großer Wahrscheinlichkeit A zur Folge hat. Dieser Fall liegt in (5) vor, denn Fritzens gegenwärtiges Training ist keine Garantie dafür, daß er bei den kommenden Wettkämpfen in Form ist. Man verwendet also im deduktiven Argu-

---

[20] In anderer Hinsicht kann B natürlich unzweckmäßig sein.

[21] Diese für teleologische Begründungen korrekte Argumentationsweise ist natürlich bei ihrer kausalen Interpretation unzulässig, und so erhebt Hempel in [59], S. 310f. zu Unrecht den Vorwurf gegen teleologische Begründungen, daß man B nicht damit erklären kann, daß B hinreichende Bedingung für A ist und A realisiert ist. Vgl. dazu auch Stegmüller [69], S. 567.

ment ein Prinzip, daß B (im Hinblick auf A) zweckmäßig ist, wenn A zweckmäßig ist und wenn B mit großer Wahrscheinlichkeit zu A führt.

Ganz analog sind auch *rationale* oder *normative Begründungen* zu deuten, bei denen es darum geht, zu begründen, daß eine Handlung unter den gegebenen Umständen *vernünftig* war (im Sinne irgendwelcher vorausgesetzter Kriterien für rationales Verhalten, z. B. im Sinn eines Handelns unter Risiko nach dem Prinzip der Maximalisierung des erwarteten Nutzens[22]), bzw. daß eine Handlung *normgerecht* oder *wertvoll* war (im Sinne eines vorausgesetzten Normen- oder Wertesystems). Diese Formen der Erklärung hat vor allem W. Dray in [57] untersucht.

Beispiele solcher Begründungen sind:

8) Bei einem Spiel, bei dem in jeder Runde zwei Würfel zusammen mehrere Male hintereinander geworfen werden, setzte Hans jedes Mal darauf, daß keinmal eine Doppelsechs erscheinen werde, weil die beiden Würfel jeweils 24mal geworfen wurden.

9) Hans macht Überstunden, um seine Mutter finanziell unterstützen zu können.

Im Fall (8) läßt sich zeigen, daß die Wahrscheinlichkeit, bei 24 Würfen mit 2 (korrekten) Würfeln eine Doppelsechs zu werfen, den Wert $1-(1-1/36)^{24}=0.491$ hat; d.h. Hans handelt im Sinne der Entscheidungstheorie rational, wenn er darauf setzt, daß die Doppelsechs nicht erscheint.[23] (9) läßt sich im Sinn einer teleologischen Erklärung deuten (Es ist zweckmäßig, daß Hans Überstunden macht, im Hinblick darauf, daß er Geld für die Unterstützung seiner Mutter braucht). Im Sinn einer normativen Be-

---

[22] Vgl. dazu den Abschnitt 2.4.1.

[23] Das Beispiel stellt das Problem des Chevalier de Méré dar, die wohl älteste wahrscheinlichkeitstheoretische Aufgabe. De Méré meinte, die Wahrscheinlichkeit für Doppelsechs bei 24 Würfen müßte mit der Wahrscheinlichkeit für Sechs bei 4 Würfen übereinstimmen. Diese hat jedoch den Wert $1-(1-\frac{1}{6})^4=0.516$. Die Lösung wurde von Fermat gefunden und in einem Brief an Pascal angegeben.

gründung ist aber (9) so zu deuten, daß die ethische Qualität der Handlung von Hans aufgewiesen werden soll; daß gezeigt werden soll, daß seine Handlung gut ist, da sie eine Absicht verfolgt, die als gut unterstellt wird.

Da nun teleologische, rationale und normative Erklärungen nicht nur im Alltag, sondern auch in der Wissenschaft, speziell in den Geisteswissenschaften, eine wichtige Rolle spielen, ist es sehr unglücklich, daß diese Arten der Erklärung von Hempel, und in seiner Nachfolge von vielen bedeutenden Wissenschaftstheoretikern, völlig verkannt worden sind.[24] Man hat sie entweder als elliptische kausale Erklärungen mißdeutet oder überhaupt als unhaltbar bezeichnet. Tatsächlich handelt es sich aber um durchaus korrekte Erklärungsformen – ob man sie als „Erklärungen" bezeichnen will oder nicht, ist natürlich eine rein terminologische Frage –, für die sich ebenso Kriterien ihrer Geltung angeben lassen wie für epistemische oder kausale Begründungen. Freilich müssen sich die Argumente auf Prinzipien für Zweckmäßigkeit, für rationale Handlungen und für Normen stützen.

---

[24] Vgl. dazu Hempel [42], [48], S. 254f., [59], [65a], S. 463ff. und Stegmüller [69], Kap. VI. Man hat speziell gegen W. Drays Modell der rationalen Erklärung vor allem drei Einwände erhoben:
1. Eine Handlung, die rational aber normgerecht ist, ist nicht immer als solche intendiert. – Das wird aber bei einer solchen Erklärung auch gar nicht notwendigerweise behauptet. (Vgl. Stegmüller [69], S. 382f.)
2. Das Explanandum B folgt nicht aus dem Explanans. – Wenn man eine Handlung B als rational erklären will, lautet aber das Explanandum nicht, wie man hier voraussetzt „B", sondern „B ist rational". (Vgl. dazu Stegmüller [69], S. 383f.)
3. Es gibt mehrere Normensysteme und Systeme für rationales Handeln. – Das ist unbestritten, aber die Behauptung bezieht sich jeweils auf *ein* derartiges System. (Vgl. dazu Stegmüller [69], S. 385ff.)

Die „Methode des Verstehens", auf die man sich bei der Kritik an teleologischen, rationalen oder normativen Erklärungen bezieht (vgl. z.B. Hempel in [65], S. 239f., 257f. und Stegmüller [69], S. 360ff.), besteht nicht so sehr im „Einfühlen" in die Handlungen anderer als im Aufweis von Normen- oder Wertsystemen etc., bzgl. derer die Handlungen als sinnvoll, rational, gut etc. verstanden werden können.

Zweckprinzipien sind bisher kaum systematisch entwickelt worden, aber Zwecke hängen eng mit Werten und Normen zusammen, und dafür gibt es sehr präzise Theorien. Hier kann man also keinen grundsätzlichen Einwand gegen diese Formen der Erklärung aufhängen.

Im „Phaidon“ gibt Platon das vielleicht erste Beispiel einer verfehlten „Warum“-Frage in der Philosophiegeschichte, in dem eine normative Frage als Frage nach Ursachen mißdeutet wird: Sokrates ist unschuldig zum Tode verurteilt und sitzt nun im Gefängnis und erwartet seine Hinrichtung, obwohl man ihm (offenbar mit offizieller Duldung) die Gelegenheit zur Flucht gegeben hatte. Warum ist Sokrates im Gefängnis geblieben und nicht geflohen? Die normative Begründung lautet: „Sokrates sitzt im Gefängnis, weil er lieber den Tod auf sich nimmt, als die Gesetze Athens zu brechen“. Die Antwort der Naturphilosophen aber ist: „Sokrates sitzt im Gefängnis, weil seine Beine aus Knochen und Sehnen bestehen und die Sehnen gelockert sind, so daß die Knochen in den Knien gebeugt sind.“ – „Aber“, sagt Sokrates darauf, „derartiges Gründe zu nennen, ist gar zu unsinnig (ἀλλ' αἴτια μὲν τὰ τοιαῦτα καλεῖν λίαν ἄτοπον)“.[25]

Die drei Typen der Begründung, die wir aufgewiesen haben, sind besonders wichtige Erklärungsformen, aber daneben gibt es natürlich noch andere. Hier sei nur noch auf eine Erklärungsform hingewiesen, die keine korrekte Form einer Begründung darstellt, die *genetische Erklärung*.[26] Bei einer genetischen Erklärung soll ein Ereignis (z. B. eine historische Entwicklung) dadurch erklärt werden, daß angegeben wird, was ihm vorausging. Eine solche Erklärung begründet das Ereignis aber nur dann, wenn sie die vorausgehenden Ereignisse und Zustände als Ur-

[25] Phaidon, 99a.

[26] Vgl. dazu die ausführliche Diskussion in Hempel [65a], S. 447ff. und in Stegmüller [69], S. 117ff., 352ff. – Hempels Beispiele historischer Erklärungen a.a.O. sind freilich nur als deduktiv-nomologische kausale Erklärungen unbrauchbar, als induktive kausale Begründungen könnte man sie gelten lassen.

sachen des Ereignisses im Sinn einer kausalen Erklärung ausweist, oder wenn das Ereignis eine Handlung ist und die Erklärung die vorausgehenden Ereignisse im Sinn einer teleologischen Erklärung als Umstände begreift, unter denen die Handlung zweckmäßig, rational oder normgerecht erscheint. Andernfalls stellt ein solches Argument keine Begründung, sondern lediglich eine Beschreibung der Entstehungsgeschichte als eines bloßen zeitlichen Ablaufs dar.

4.6 Reduktionen

Im Zusammenhang mit der Erörterung der kognitiven Leistung empirischer Theorien im nächsten Abschnitt wird der Begriff der Reduktion wichtig. Die Frage der Reduzierbarkeit einer Theorie auf eine andere spielt aber auch in anderen wissenschaftstheoretischen und in vielen erkenntnistheoretischen Problemstellungen eine wichtige Rolle. In der Erkenntnistheorie stößt man z. B. auf die Frage, inwieweit eine Reduzierbarkeit von Theorien über psychische Zustände auf Theorien über neurophysiologische Zustände die physikalistische These von der Übersetzbarkeit aller wissenschaftlichen Aussagen in Aussagen der Physik stützen würde. Und in der Wissenschaftstheorie der Physik tritt die Frage auf, in welchem Sinn und in welchen Grenzen man die phänomenologische Thermodynamik auf die statistische Mechanik reduzieren kann.

Wir betrachten zwei Theorien T_1 und T_2, die in der gleichen Sprache S formuliert sind. $V_1(S)$ sei die Menge der in T_1 (wesentlich) vorkommenden Terme oder Grundkonstanten, $V_{1B}(S)$ die Menge der Beobachtungsterme aus $V_1(S)$, $V_{1T}(S)$ die Menge der theoretischen Terme aus $V_1(S)$, und ebenso seien $V_2(S)$, $V_{2B}(S)$ und $V_{2T}(S)$ unter Bezugnahme auf T_2 bestimmt.

Wir untersuchen zunächst den speziellen Fall einer Reduktion von T_1 auf T_2, in dem gilt $V_{1B}(S) \subset V_{2B}(S)$.

Im einfachsten Fall geht es bei einer solchen Reduktion von T_1 auf T_2 nur darum, daß der empirische Gehalt $E(T_1)$ von T_1 in T_2 enthalten ist. Wir definieren also:

D4.6–1: T_1 ist auf T_2 E_0-*reduzierbar* genau dann, wenn $E(T_1) \subset E(T_2)$.

Für eine E_0-Reduzierung kommt es also nicht auf die theoretischen Terme von T_1 und T_2 und die Formulierung dieser Theorien an, sondern allein darauf, daß T_2, was die Sätze der Beobachtungssprache angeht, mindestens ebenso stark ist wie T_1; daß sich alle Beobachtungssätze, die sich aus T_1 ableiten lassen, auch mit T_2 gewinnen lassen.[1]

Wenn es bei der Reduktion nicht nur um den empirischen Gehalt von T_1 geht, sondern auch um die Aussagen mit theoretischen Termen von T_1, dann könnte man definieren: „T_1 ist auf T_2 reduzierbar genau dann, wenn gilt $T_1 \subset T_2$.“ Diese Art von Reduzierbarkeit besagt also, daß T_1 *vollständig* auf T_2 reduzierbar ist, d.h. daß T_1 aus T_2 folgt oder daß T_1 eine Teiltheorie von T_2 ist.

Ein solcher Reduktionsbegriff ist aber sehr eng und daher weniger interessant als der folgende allgemeinere Begriff:

D4.6–2: T_1 ist auf T_2 T_0-*reduzierbar* genau dann, wenn es für alle Terme aus $V_{1T}(S)$-$V_{2T}(S)$ Definitionsformeln in den Termen aus $V_2(S)$ gibt,[2] – ihre Konjunktion sei D –, so daß gilt $T_1 \subset T_2 \wedge D$.

Danach ist T_1 auf T_2 T_0-reduzierbar, wenn man die in T_2 nicht vorkommenden theoretischen Terme von T_1 in T_2 so definieren kann, daß T_1 aus T_2 folgt. Wir können auch sagen: T_0-Reduzierbarkeit besteht, wenn man in T_2 ein Modell für T_1 angeben kann. Es kann dabei nicht passieren, daß ein I-T_1-determinierter theoretischer Term von T_1 – I sei die vorgegebene Interpretation der

---

[1] In der Physik spielt bei der Reduktion von Theorien auf andere auch der Fall eine große Rolle, daß die Sätze von T_1, bzw. von $E(T_1)$ nur näherungsweise aus T_2 folgen. So gelten z.B. die Gesetze der geometrischen Optik vom Standpunkt der Elektrodynamik aus nur näherungsweise. Auf diesen Fall gehen wir bei den folgenden Definitionen aber nicht ein, da er nichts prinzipiell Neues bringt, und sich durch schematische Modifikationen der Definitionen berücksichtigen läßt.

[2] Wir sprechen von einer Definitionsformel in den Termen aus $V_2(S)$, wenn das Definiens dieser Formel nur (deskriptive) Terme aus $V_2(S)$ enthält.

Beobachtungsterme von S – eine abweichende Deutung erfährt: Nach T3.3–1 ist ein theoretischer Term t $I-T_1$-determiniert, wenn aus T_1 eine Definitionsformel D′ für t in Beobachtungstermen folgt. Ist nun T_1 auf T_2 T_0-reduzierbar, so gibt es eine Definitionsformel D für t in den Termen von T_2, so daß T_1 aus $T_2 \wedge D$ folgt; also folgt auch D′ aus $T_2 \wedge D$, so daß D die I-T_1-determinierte Bedeutung, oder genauer: die Extension von t nicht ändert.

Kommen alle theoretischen Terme von T_1 in T_2 vor, so fällt die T_0-Reduzierbarkeit mit der oben definierten vollständigen Reduzierbarkeit zusammen. Durch die Definitionsformeln in D wird der empirische Gehalt von T_2 nicht verstärkt: Explizitdefinitionen sind immer nichtkreativ, d.h. alle Sätze ohne Terme aus $V_{1T}(S) - V_{2T}(S)$, die aus $T_2 \wedge D$ folgen, folgen auch aus T_2 allein.[3]

Wenn dagegen T_1 in diesem Sinn nur dann auf T_2 reduzierbar wäre, falls man die theoretischen Terme von T_2 in einer bestimmten Weise deuten würde, d.h. falls man weitere Axiome (die nur die theoretischen Terme von T_2 und Beobachtungsterme enthalten) zu T_2 hinzunehmen würde, die den empirischen Gehalt von T_2 nicht verstärken, wollen wir nicht von einer Reduzierbarkeit von T_1 auf T_2 sprechen, sondern nur von einer Reduzierbarkeit von T_1 auf die solchermaßen verstärkte Theorie T_2.

Im Hinblick darauf, daß man nach Carnap den Satz $R(T_1) \supset T_1$ als ein Bedeutungspostulat für die theoretischen Terme von T_1 auffassen kann – $R(T_1)$ ist dabei wieder der Ramsey-Satz zu T_1[4] – könnte man auch folgende Definition ansetzen: „Wir nennen eine Theorie T_1 über S auf eine Theorie T_2 über S T^0-reduzierbar genau dann, wenn T_1 aus $T_2 \wedge (R(T_1) \supset T_1)$ folgt, und wenn $E(T_2) = E((R(T_1) \supset T_1) \wedge T_2)$ ist.“

Danach ist T_1 auf T_2 reduzierbar, wenn T_1 aus T_2 und den Bedeutungspostulaten für T_1 folgt und wenn diese Postulate den empirischen Gehalt von T_2 nicht verstärken. Gilt aber

---

[3] Vgl. dazu Kutschera [67], 6.3.
[4] Vgl. dazu den Abschnitt 3.3.

$E(T_1) \subset E(T_2)$, also $T_2 \rightarrow R(T_1)$, so folgt wegen $T_1 \equiv R(T_1) \wedge (R(T_1) \supset T_1)$ T_1 aus $T_2 \wedge (R(T_1) \supset T_1)$; gilt $E(T_1) \subset E(T_2)$ hingegen nicht, so gilt auch $E(T_1) \subset E(T_2 \wedge (R(T_1) \supset T_1)) = E(T_2)$ nicht, so daß T_1 nicht aus $T_2 \wedge (R(T_1) \supset T_1)$ folgt. Die T^0-Reduzierbarkeit ist also mit der E_0-Reduzierbarkeit äquivalent, und daher ist es überflüssig, diesen Begriff einzuführen. Diese Überlegung zeigt auch: Ist T_1 E_0-reduzierbar auf T_2, so gibt es immer analytische Bedeutungspostulate P für die theoretischen Terme von T_1, so daß T_1 aus P und T_2 folgt.

Betrachten wir nun den allgemeineren Fall einer Reduktion von T_1 auf T_2, in dem $V_{1B}(S)$ nicht in $V_{2B}(S)$ enthalten ist; den Fall also, daß den beiden Theorien nicht dieselbe Beobachtungssprache zugrundeliegt. Speziell können $V_{1B}(S)$ und $V_{2B}(S)$ (und ebenso $V_{1T}(S)$ und $V_{2T}(S)$) keinen Term gemeinsam enthalten.

Eine Reduktion von T_1 auf T_2 verstehen wir dann so, daß in T_2 ein Modell für T_1 angegeben wird. Wie nach D4.6–2 bei einer T_0-Reduktion von T_1 auf T_2 in T_2 ein Modell für die in T_2 nicht vorkommenden *theoretischen* Terme von T_1 angegeben wird, so können wir nun *alle* Terme von T_1, die in T_2 nicht vorkommen, bzgl. T_2 als theoretische Terme auffassen. Würde man nun in Analogie zu D4.6–2 definieren: „T_1 ist auf T_2 reduzierbar genau dann, wenn es für die in T_2 nicht vorkommenden Terme aus $V_{1B}(S)$ Definitionsformeln in den Termen von $V_2(S)$ gibt – ihre Konjunktion sei D – so daß die Sätze aus $E(T_1)$ aus T_2 und D folgen", so wäre die Hypothese „Alle Raben sind schwarz" – symbolisch $\bigwedge x(R(x) \supset S(x))$ – auf die Hypothese „Alle Elektronen tragen eine negative Ladung" – symbolisch $\bigwedge x(E(x) \supset L(x))$ – reduzierbar: Man könnte ja die Konjunktion der Definitionsformeln $\bigwedge x(R(x) \equiv E(x))$ und $\bigwedge x(S(x) \equiv L(x))$ zur zweiten Hypothese hinzunehmen und erhielte damit die erste. Um solche unerwünschten Fälle auszuschließen, müssen wir beachten, daß für die Beobachtungsterme von S im Gegensatz zu den theoretischen Termen von T_1 eine Deutung bereits festliegt, die durch die Definitionen in T_2 nicht verändert werden darf. Es soll dabei nicht gefordert werden, daß die Definitionsformeln den definierten Beobachtungstermen die gleichen *Intensionen* zuordnet, die sie aufgrund der Interpretation von S haben, daß also die Definitionsformeln analytisch wahre Sätze sind. Wohl aber ist zu fordern, daß die Definitionsformeln die gleichen *Extensionen* festlegen, daß sie also empirisch wahr sind. Ist nun I wieder die Interpretation, die wir der Sprache S zugrundelegen und die für alle Beobachtungsterme definiert ist, so müssen also die Definitionsformeln für die Beobachtungsterme bzgl. I und T_2 wahre Sätze sein; d.h. sie müssen I-T_2-wahr sein in dem Sinn, daß alle T_2-zulässigen Erweiterungen von I ihnen den Wahrheitswert „wahr" zuordnen.

Wir können dann definieren:

D4.6–3: T_1 ist auf T_2 *E-reduzierbar* genau dann, wenn es für die in T_2 nicht vorkommenden Terme aus $V_{1B}(S)$ I-T_2-wahre Definitionsformeln in den Termen von $V_2(S)$ gibt – ihre Konjunktion sei D – so daß die Sätze aus $E(T_1)$ aus T_2 und D folgen.

Wenn ein Beobachtungsterm t von T_1 in D durch einen Ausdruck A definiert wird, der theoretische Terme von T_2 enthält, so folgt aus der Forderung, daß die Definitionsformel für t I-T_2-wahr sein soll, daß A I-T_2-determiniert sein muß.

Für $V_{1B}(S) \subset V_{2B}(S)$ enthält die E-Rekonstruierbarkeit die E_0-Rekonstruierbarkeit als Spezialfall.

Wenn es nicht nur um eine Rekonstruktion des empirischen Gehalts von T_1 geht, sondern um eine Rekonstruktion der ganzen Theorie, wird man definieren:

D4.6–4: T_1 ist in T_2 *T-reduzierbar* genau dann, wenn es für die in $V_2(S)$ nicht vorkommenden Terme von $V_1(S)$ I-T_2-wahre Definitionsformeln in den Termen von $V_2(S)$ gibt – ihre Konjunktion sei D – so daß T_1 aus T_2 und D folgt.

Die T-Reduzierbarkeit enthält für $V_{1B}(S) \subset V_{2B}(S)$ die T_0-Reduzierbarkeit als Spezialfall. Ist der theoretische Term t aus $V_1(S) - V_2(S)$ I-T_1-determiniert, ergibt sich wieder aus T3.3–1, daß eine Definitionsformel D′ für t in Beobachtungstermen aus T_1 folgt. Ist T_1 auf T_2 T-reduzierbar, so folgt D′ auch aus $T_2 \wedge D$. t wird also durch D in T_2 extensional in der gleichen Weise gedeutet wie in T_1. Ist t ein Prädikat F(x) und ist der Satz F(a) I-T_1-determiniert, so ergibt sich nach T3.3–2, daß es einen Satz A der Beobachtungssprache von T_1 gibt, so daß aus T_1 folgt $A \equiv F(a)$. Diese Äquivalenz folgt dann auch aus $T_2 \wedge D$, so daß $T_2 \wedge D$ den Wahrheitswert von $F(a)$ in der gleichen Weise festlegt wie T_1.

Ein Beispiel für die Reduzierbarkeit einer Theorie auf eine andere ist die Angabe eines mengentheoretischen Modells der Peanoaxiome für die natürlichen Zahlen, wie es zuerst Frege angegeben hat. Dies Beispiel ist zwar nicht den Naturwissenschaften entnommen, und insofern entfällt hier der Unterschied zwischen Beobachtungstermen und theoretischen Termen, aber man kann die in den Peanoaxiomen (T_1) nur implizit definierten Terme „Null", „Nachfolger" und „natürliche Zahl" als theoretische Terme von T_1 ansehen und kann diese Terme in der Mengenlehre (T_2) explizit definieren.[5]

Einen noch weiteren Begriff der Reduzierbarkeit einer Theorie T_1 auf eine Theorie T_2 muß man verwenden, wenn man die Terme von $V_1(S)$ nicht durch Terme von $V_2(S)$ explizit definieren kann. Dieser Fall liegt im Beispiel der Reduktion einer Theorie T_1 über Psychisches, über Gefühle und Empfindungen, durch eine neurophysiologische Theorie T_2 vor, die von Zuständen und Vorgängen im Nervensystem handelt. Die Prädikate beider Theorien sind für verschiedene Objektbereiche definiert, so daß man nicht mehr extensionsgleiche Terme einander zuordnen kann, sondern nur mehr ganze Sätze. In diesem Fall kann man entweder eine mehrsortige Sprache S betrachten, die beiden Theorien zugrundeliegt und die verschiedene Gegenstandskonstanten und Variablensorten für die verschiedenen Objektbereiche enthält, oder man betrachtet verschiedene (im einfachsten Fall einsortige) Sprachen S_1 und S_2, in denen T_1 und T_2 formuliert sind. Wir wollen das letztere tun. Es sei also im folgenden T_1 in S_1 formuliert, $V_B(S_1)$ sei das Beobachtungs-, $V_T(S_1)$ das theoretische Vokabular von T_1, und entsprechend für T_2 und S_2. Der Einfachheit halber nehmen wir an, daß die Sprachen S_1 und S_2 sich nur in ihrem Vokabular, d.h. in ihren deskriptiven Grundkonstanten

[5] Vgl. dazu z.B. Kutschera [67], 5.4.

unterscheiden, während sie dieselben logischen Operatoren enthalten und dieselben Formregeln (dieselbe Grammatik).

Man kann von einer Reduzierbarkeit von T_1 auf T_2 sprechen, wenn es eine Übersetzung der Aussagen von S_1 in die von S_2 gibt, die wahren Sätzen wieder wahre Sätze zuordnet und falschen Sätzen falsche, so daß die Übersetzungen der Theoreme von T_1 Theoreme von T_2 sind.

Wir definieren:

D4.6–5: Eine *syntaktische Abbildung* von S_1 in S_2 ist eine Funktion φ, die (wohlgeformten, d.h. im Einklang mit den Formregeln gebildeten) Ausdrücken von S_1 Ausdrücke von S_2 zuordnet, und zwar so, daß den deskriptiven Konstanten von S_1 Ausdrücke der gleichen syntaktischen Kategorie von S_2 entsprechen,[6] daß alle logischen Operatoren auf sich selbst abgebildet werden, und die operationstreu ist bzgl. der gemeinsamen Formregeln von S_1 und S_2.[7]

Ist φ für eine Menge V von deskriptiven Konstanten von S_1 definiert, so ist φ für alle (wohlgeformten) Ausdrücke von S_1 definiert, die nur Konstanten aus V enthalten. Ist φ daher für *alle* Konstanten von S_1 definiert, so ist φ auch für alle Ausdrücke von S_1 definiert; wir sprechen dann von einer *vollständigen* syntaktischen Abbildung von S_1 in S_2.

Ist V eine Menge von Termen von S_1, so sei $\varphi(V)$ die Menge der Terme von S_2, die φ-Bilder der Terme aus V sind.

Es sei nun I_1 die Interpretation, die für S_1 vorgegeben ist und die für alle Beobachtungsterme von S_1 erklärt ist, und I_2 sei die entsprechende Interpretation von S_2. Wir definieren:

D4.6–6: $A \underset{D}{\Rightarrow} \varphi(A)$ besage: Wenn der Satz A von S_1 I_1-T_1-determiniert ist, so ist der Satz $\varphi(A)$ von S_2 I_2-$T_2 \wedge D$-determiniert und hat den gleichen Wahrheitswert.

---

[6] Syntaktische Kategorien sind „Eigenname", „n-stelliges Prädikat 1. Stufe", „Satz", etc. Vgl. dazu die logischen Kategorien in 4.2 und in Kutschera [71], 2.2.

[7] φ heißt operationstreu bzgl. der Operation π, die aus den Ausdrükken $A_1, \ldots, A_n$ einen Ausdruck $\pi(A_1, \ldots, A_n)$ erzeugt, wenn gilt $\varphi(\pi(A_1, \ldots, A_n)) = \pi(\varphi(A_1), \ldots, \varphi(A_n))$.

Man kann dann festlegen:

D4.6–7: T_1 ist *E*-reduzierbar* auf T_2 genau dann, wenn es eine syntaktische Abbildung φ von S_1 in S_2 gibt, die für die Terme aus $V_B(S_1)$ erklärt ist, und wenn es für alle Terme aus $\varphi(V_B(S_1))$, die nicht in T_2 vorkommen, Definitionsformeln in den Termen von T_2 gibt – ihre Konjunktion sei D – so daß gilt:

a) $A \underset{D}{\Rightarrow} \varphi(A)$ für alle Sätze, für die φ erklärt ist, und

b) $T_2 \wedge D \rightarrow \varphi(A)$ für alle Sätze A aus $E(T_1)$.

Und

D4.6–8: T_1 ist *T*-reduzierbar* auf T_2 genau dann, wenn es eine syntaktische Abbildung φ von S_1 in S_2 gibt, die für die Terme aus T_1 definiert ist, und wenn es für alle Terme aus $\varphi(V_B(S_1) \cup V_T(S_1))$, die nicht in T_2 vorkommen, Definitionsformeln in den Termen von T_2 gibt – ihre Konjunktion sei D – so daß gilt:

a) $A \underset{D}{\Rightarrow} \varphi(A)$ für alle Sätze, für die φ erklärt ist, und

b) $T_2 \wedge D \rightarrow \varphi(A)$ für alle Sätze A mit $T_1 \rightarrow A$.

Fällt S_1 mit S_2, und also I_1 mit I_2 zusammen, und ist T_1 auf T_2 E_0-reduzierbar, bzw. E-reduzierbar, so ist T_1 auf T_2 E*-reduzierbar mit φ als identischer Abbildung, bzw. mit φ als Abbildung des Definiendums auf das Definiens nach D4.6–3, wie man sich leicht überlegt; ist T_1 auf T_2 T_0-reduzierbar, bzw. T-reduzierbar, so ist T_1 in T_2 mit entsprechendem φ T*-reduzierbar. D.h. D4.6–7 und D4.6–8 sind Erweiterungen von D4.6–3 und D4.6–4.

In den beiden letzten Definitionen wird nicht die Extensionsgleichheit der einander durch φ zugeordneten Terme t und $\varphi(t)$ gefordert (in den Grenzen, in denen T_1 und I_1 die Extension von t festlegen), sondern nur die Invarianz der Wahrheitswerte der Sätze A bei der Übersetzung in $\varphi(A)$. Da insbesondere die Gegenstandskonstanten a von S_1 nicht extensionsgleichen Termen $\varphi(a)$ von S_2 zugeordnet werden, können sich die Aussagen von T_1 und T_2 auf ganz verschiedene Phänomenbereiche beziehen.

Wenn z.B. zwei isomorphe Strukturen vorliegen, d.h. eine Menge A von Objekten, auf der m n_i-stellige Prädikate $F_i^{n_i}$ $(i = 1, \ldots, m)$ definiert sind, und eine Menge B von Objekten, auf der m n_i-stellige Prädikate $G_i^{n_i}$ definiert sind, so daß es eine eineindeutige Abbildung ρ von A auf B gibt mit $\bigwedge x_1 \ldots x_{n_i} \; (F_i^{n_i}(x_1, \ldots, x_{n_i}) \equiv G_i^{n_i}(\rho(x_1), \ldots, \rho(x_{n_i})))$ für alle $i = 1, \ldots, m$, so läßt sich eine Theorie T_1 über A mit den Termen $F_i^{n_i}$ immer auf eine Theorie T_2 gleicher Form mit den Termen $G_i^{n_i}$ reduzieren – selbst wenn A und B kein gemeinsames Element enthalten und eine zufällige Strukturgleichheit inhaltlich vollständig verschiedener Phänomenbereiche vorliegt. So etwas wird natürlich in interessanten Fällen nur sehr selten vorkommen; trotzdem wird man aber versuchen, solche Fälle durch Zusatzbedingungen wie die folgende auszuschalten: „Die durch A und $\varphi(A)$ ausgedrückten Ereignisse oder Zustände sollen zu den gleichen Zeitpunkten, bzw. während der gleichen Zeiträume eintreten und sich, sofern sie auch räumlich lokalisierbar sind, an den gleichen Raumstellen ereignen."

Weiterreichende Bedingungen für den gleichen Bezug der Theorie T_1 und T_2 wird man von Fall zu Fall präzisieren und begründen müssen. Da die einander zugeordneten Sätze A und $\varphi(A)$ nur die gleichen Wahrheitswerte, nicht aber die gleichen Bedeutungen haben sollen, kann man jedenfalls nicht sagen, daß sie den gleichen Sachverhalt ausdrücken müssen. Bei einer Reduktion einer psychologischen Theorie, die über Empfindungen spricht, auf eine Theorie über neurophysiologische Vorgänge wird diese Bezugsgleichheit z. B. dadurch hergestellt, daß es sich um gleichzeitige Empfindungen und Vorgänge im Nervensystem *der gleichen Person* handelt.

Identität des Bezugs ist auch oft eher eine Folge einer Reduktion als ihre Voraussetzung. Es hängt von der Interpretation der Erfahrung ab, welche Dinge wir als identisch ansehen,[8] und sinnvolle Interpretationen stützen sich auf empirische Gesetzmäßigkeiten. Sie können sich insbesondere auf die Korrelationen stützen, die einer erfolgreichen theoretischen Reduktion eines Phänomenbereichs auf einen anderen zugrundeliegen.

---

8 Vgl. dazu auch Feyerabend [63].

Es gibt nicht sehr viele Arbeiten über den Reduktionsbegriff. E. Nagel hat in [49] und [51], ebenso wie J.H. Woodger in [52], Reduktionsbegriffe definiert, die etwa unserer T-Reduzierbarkeit entsprechen. J. Kemeny und P. Oppenheim diskutieren in [56] u.a. einen bzgl. einer Menge O von Beobachtungsdaten relativierten Begriff der E_0-Reduzierbarkeit (bei dem es nur darauf ankommt, daß aus T_2 die Sätze aus $O \cap E(T)$ folgen) und stellen (wie Woodger und Nagel) die Forderungen auf, daß $V_1(S)$ echt in $V_2(S)$ enthalten ist und daß T_2 mindestens ebensogut systematisiert ist wie T_1 (das wird aber nicht näher präzisiert, es geht vermutlich um das Verhältnis von Einfachheit und Gehalt). P. Suppes hat in [57], S. 271 einen Reduktionsbegriff formuliert, nach dem T_1 reduzierbar ist auf T_2 genau dann, wenn es zu jedem Modell von T_1 ein isomorphes Modell von T_2 gibt. Man betrachtet bei empirischen Theorien aber nicht beliebige Modelle, sondern nur Modelle, die bzgl. der vorgegebenen Interpretation der Beobachtungsterme invariant sind, so daß dieser Begriff zu weit ist. Andererseits ist er auch zu eng, da nicht alle oben behandelten Fälle von Reduzierbarkeit darunter fallen. K.F. Schaffner hat in [67] diese Reduktionsbegriffe und den Begriff einer Reduktion durch Näherungen diskutiert (bei dem die reduzierte Theorie, bzw. deren empirischer Gehalt nur näherungsweise aus der reduzierenden Theorie folgt), den er, etwas willkürlich, Popper, Feyerabend und Kuhn zuschreibt, und hat einen eigenen Reduktionsbegriff formuliert, der sich als Liberalisierung des Woodger-Nagel-Begriffes nach dem Gedanken der Reduktion durch Näherung darstellt und der die anderen Reduktionsbegriffe als Spezialfälle enthalten soll. Dieser Begriff wird jedoch nicht hinreichend präzisiert.[9]

4.7 Instrumentalismus und Realismus

Nach den Vorbereitungen der vorausgehenden Abschnitte wollen wir nun auf die Frage zurückkommen, die wir am Eingang

---

[9] Vgl. dazu auch Hempel [69].

dieses Kapitels gestellt hatten: Worin besteht die Leistung empirischer Theorien?

Da ist zunächst einmal die *Systematisierungsleistung* dieser Theorien. Sie liegt darin, daß eine Theorie T als ein System von Axiomen eine Menge von Sätzen der Beobachtungssprache, die empirische Befunde, einfache Generalisierungen und einzelne weiterreichende Hypothesen ausdrücken, in einfacher, übersehbarer und handlicher Weise zusammenfaßt.

Eine Theorie wird formuliert, wenn schon eine Reihe von Beobachtungen und Hypothesen vorliegt, und diese Sätze werden in der Theorie auf einen einheitlichen axiomatischen Nenner gebracht. Der empirische Gehalt E(T) der Theorie T fällt aber in aller Regel nicht mit der bereits vorliegenden Menge von Befunden und Hypothesen zusammen, sondern geht über sie hinaus. D.h. die Leistung der Theorie besteht auch darin, daß sie über die bisherigen Erfahrungen und Annahmen hinausgeht und sagt, was wir von der Zukunft erwarten sollen und was nicht. Der Erfahrungsbereich, über den etwas ausgesagt wird, wird so erweitert, und auch der neu erschlossene Bereich wird durch die Theorie systematisch erfaßt.

In dieser Hinsicht spricht man auch von der *prognostischen Leistung* einer Theorie: Theorien ermöglichen Voraussagen über künftige Ereignisse – allgemeiner: über Ereignisse und Erscheinungen, die man bisher nicht beherrschte. Theorien geben neue Informationen, sie erweitern den Horizont dessen, worüber wir sinnvolle und begründete Aussagen machen können. Theorien enthalten naturgesetzliche Aussagen, d.h. nach den Bestimmungen von 4.3 wesentlich universelle Sätze, die weder verifizierbar noch induktiv bestätigungsfähig sind. Solche Sätze haben gegenüber singulären Sätzen einen ungleich höheren Informationsgehalt, den wir durch Beobachtungen nicht ausschöpfen können und der auch nach beliebig vielen Beobachtungen positiver Instanzen noch eine verschwindende Wahrscheinlichkeit hat.

Die Systematisierungsleistung einer Theorie T besteht aber nicht allein im Informationsgehalt von T, den wir hier einmal mit E(T), dem empirischen Gehalt von T, identifizieren wollen, sondern auch darin, daß dieser Gehalt in einfacher Weise bestimmt wird. Die Systematisierungsleistung, so können wir sagen, ist der Einfachheit und dem Gehalt proportional. Allerdings können wir den Gehalt nicht messen: der Informationsgehalt $1-w(T)$ ist für alle Theorien, die Naturgesetze enthalten, gleich 1. Man kann also nur solche Theorien T_1 und T_2 bzgl. ihres Gehalts vergleichen, für die gilt $E(T_1) \subset E(T_2)$ oder $E(T_2) \subset E(T_1)$. Ist $E(T_1)$ echt in $E(T_2)$ enthalten, so können wir sagen, daß T_1 einen kleineren Gehalt hat als T_2. Aber solche Vergleichsmöglichkeiten sind eng beschränkt, und da man für $E(T_1)$ und $E(T_2)$ selbst im Fall einer Vergleichbarkeit kein Maß hat, wird man nur für Theorien mit gleichem Gehalt und verschiedenem Komplexitätsgrad, bzw. für gleich komplizierte Theorien, die bzgl. ihres Gehalts vergleichbar sind, sagen können, daß die einfachere, bzw. die gehaltvollere Theorie eine höhere Systematisierungsleistung aufweist.

Die Systematisierungsleistung empirischer Theorien, die Tatsache, daß sie unbeschränkt viele Einzeltatsachen überschaubar machen, ist unbestritten. Das eigentliche Problem, das sich mit der Frage nach der Leistung empirischer Theorien verbindet, ist die Frage, ob sie daneben noch einen kognitiven Gehalt haben, indem sie uns sagen, wie die Welt beschaffen ist. Wir gehen meist von einer *realistischen Interpretation* naturwissenschaftlicher Theorien aus und sehen es als selbstverständlich an, daß uns die empirischen Theorien, wenn sie richtig sind, eine Wirklichkeitserkenntnis vermitteln. Wir gehen davon aus, daß den Prädikaten und Objekttermen, die in der Theorie vorkommen, reale Attribute und Objekte entsprechen. Wir glauben, daß uns z. B. die elektromagnetische Theorie der optischen Phänomene Auskunft über die Natur des Lichts gibt; daß uns die statistische Thermodynamik zeigt, daß die Phänomene Temperatur, Wärmeausbreitung etc. aus Molekülbewegungen resultieren; daß uns die Quantenphysik sagt, wie die kleinsten Bausteine der Materie beschaffen sind, usf. Ist die realistische Auffassung richtig, und in welchem Sinn ist sie richtig?

Diejenige Auffassung, die eine solche kognitive Leistung empirischer Theorien bestreitet, nennt man oft *instrumentalistisch*. Der Instrumentalismus tritt in verschiedenen Versionen auf.

In einer extremen *ersten* Version leugnet er, daß man in den Naturwissenschaften überhaupt wesentlich generelle Hypothesen, Naturgesetze und Theorien als *Aussagen*, bzw. *Aussagensysteme* benötigt. Diese Auffassung, die im frühen Wiener Kreis vor allem von L. Wittgenstein und M. Schlick vertreten wurde[1] und von K. Popper von Anfang an scharf bekämpft worden ist, versuchte aus der Not, daß man solche Aussagen nicht verifizieren kann, daß man aber nur verifizierbare Sätze für bedeutungsvoll hielt,[2] eine Tugend zu machen. Sie verstand wesentlich universelle Hypothesen und Naturgesetze nur als Regeln zur Gewinnung von Voraussagen. Nun ist aber eine Regel, wie z. B. „Nimm für beliebige a immer an, daß das Ereignis G(a) eintritt, falls du das Ereignis F(a) beobachtest" genau dann sinnvoll, wenn man den Satz „$\wedge x(F(x) \supset G(x))$" für wahr hält. Ferner hat Hempel darauf hingewiesen, daß sich zwar alle Regeln zur Ableitung von singulären Aussagen aus anderen singulären Aussagen in Sätze übersetzen lassen, daß sich jedoch kompliziertere gesetzesartige Aussagen wie z. B. $\wedge x \vee y(\vee z R(x,y,z) \supset \wedge z S(x,y,z))$ nicht in solche Regeln mit singulären Prämissen und Konklusionen übersetzen lassen; man kann also nicht alle Naturgesetze als Regeln auffassen. Endlich hat K. Popper die methodologische Unentbehrlichkeit von Gesetzesaussagen und Theorien ausführlich belegt.[3] Daher

---

[1] M. Schlick schreibt in [31], S. 151: „Es ist ja oft bemerkt worden, daß man von einer absoluten Verifikation eines Gesetzes eigentlich nie sprechen kann, da wir sozusagen stets stillschweigend den Vorbehalt machen, es aufgrund späterer Erfahrungen modifizieren zu dürfen. Wenn ich nebenbei ein paar Worte über die logische Situation sagen darf, so bedeutet der eben erwähnte Umstand, daß ein Naturgesetz im Grunde auch nicht den logischen Charakter einer ‚Aussage' trägt, sondern vielmehr eine ‚Anweisung zur Bildung von Aussagen' darstellt."

[2] Zur Verifikationstheorie der Bedeutung vgl. die Anmerkung 6 zum Abschnitt 3.4.

[3] Vgl. dazu Popper [66], S. 11f. und [56], Abschnitt 4.

wird diese erste Version des Instrumentalismus in der Wissenschaftstheorie heute kaum mehr vertreten.[4]

Diese Version des Instrumentalismus ist auf höherem Niveau später noch einmal von R. Carnap aufgegriffen worden, der in [50], § 110 H die Entbehrlichkeit von Gesetzesaussagen mit folgendem Argument vertrat: Eine Hypothese wie $\wedge x(F(x) \supset G(x))$ akzeptieren wir nur aufgrund von Beobachtungen, die sie bestätigen. Diese Bestätigung ist induktiv zu verstehen, und zwar so, daß die Wahrscheinlichkeit $w(F(a) \supset G(a)/E)$, bzw. $w(G(a)/F(a) \wedge E)$ aufgrund (ausschließlich) positiver Instanzen der Hypothese, $F(b_i) \supset G(b_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$, in denen a nicht vorkommt und deren Konjunktion E sei, hinreichend groß wird.[5] Hat sich die Hypothese aber in diesem Sinn bestätigt, so ist die Wahrscheinlichkeit der Prognose $F(a) \supset G(a)$, bzw, der Prognose $G(a)$ bei Beobachtung von $F(a)$ ebenfalls hinreichend groß. D.h. aber: Wir benötigen die Hypothese $\wedge x(F(x) \supset G(x))$ nicht, um die Prognose zu machen; diese ist vielmehr aufgrund der Beobachtungen schon wahrscheinlichkeitstheoretisch ausgezeichnet.

Bei diesem Argument ist aber die Prämisse falsch: Wir akzeptieren Hypothesen eben nicht (nur) aufgrund ihrer induktiven Bestätigung, sondern, wie das Popper immer betont hat[6] und wie wir das im Abschnitt 4.3 besprochen hatten, wegen ihrer Systematisierungsleistung. Und die Bestätigung der Hypothesen durch Beobachtung, die wir dabei voraussetzen, kann auch in einer deduktiven Bewährung bestehen.[7]

Carnap hat seine Ausführungen in [50], § 110 H wohl auch nicht im Sinn eines Begründungsversuchs für eine extreme Ver-

---

[4] Der Instrumentalismus des frühen Wiener Kreises, der an Ideen von John Stuart Mill anknüpfte („All inference is from particulars", *Logic*, Buch II, Kap. III, 3.) ist später in modifizierter Form auch von S. Toulmin, G. Ryle, W. Dray und anderen übernommen worden.

[5] Vgl. dazu den Abschnitt 5.2.

[6] Vgl. dazu den Abschnitt 5.4.

[7] Vgl. dazu den Abschnitt 5.1.

sion des Instrumentalismus verstanden. Jedenfalls ist er auf diese Gedanken später nicht mehr zurückgekommen.[8]

In einer liberalen *zweiten Version* bestreitet der Instrumentalismus nicht den Aussage-Charakter von Hypothesen und Gesetzen oder ihre Unentbehrlichkeit für die Systematisierung der Erfahrung, sondern er leugnet nur, daß man diese Theorien realistisch interpretieren kann; er bestreitet also die kognitive Leistung empirischer Theorien. Nachdem offenbar der kognitive Gehalt, der deskriptive Sinn und der Informationsgehalt von Sätzen der Beobachtungssprache nicht problematisch sind, läuft die Grundthese dieses Instrumentalismus auf die Behauptung hinaus: Ist T eine empirische Theorie über der Sprache S, die S_B als Beobachtungssprache enthält, so beschränkt sich der kognitive Inhalt von T auf den Inhalt der Sätze aus dem empirischen Gehalt E(T) von T.

Die wichtigsten Argumente für diese These sind folgende:
1. Ein Theorem von T, das nicht E(T) angehört, also theoretische Terme von T wesentlich enthält, hat keine wohldefinierte Bedeutung.[9] Speziell sagen uns also die Axiome von T, in denen theoretische Terme (wesentlich) vorkommen, nicht, wie die Welt beschaffen ist.

Dieses Argument bezieht sich auf die nur partielle Deutung der theoretischen Terme von T durch die impliziten Definitionsbedingungen in T und die vorausgesetzte Interpretation V der

---

[8] Popper hat in Carnaps Ausführungen jedoch einen Ansatz zur Wiederbelebung des schon totgeglaubten Instrumentalismus gesehen und hat in [63], S. 215ff. entsprechend heftig darauf reagiert. – Zur Diskussion dieser ersten Version des Instrumentalismus vgl. auch Hempel [65a], S. 354ff. und Stegmüller [69], S. 97ff.

[9] Ist ein Satz A mit theoretischen Termen V-T-determiniert (V sei die Interpretation der Beobachtungsterme), so gibt es nach T3.3–2 einen Satz A′ der Beobachtungssprache mit $T \rightarrow A \equiv A'$; gilt also $T \rightarrow A$, so gilt auch $T \rightarrow A'$, also $A' \varepsilon E(T)$. Genauer müßte man also sagen: Ein Satz von T, der nicht E(T) angehört *und nach T nicht mit einem Satz aus* E(T) *äquivalent* ist, hat keine wohlbestimmte Bedeutung.

Beobachtungssprache S_B, über die wir im Abschnitt 3.3 gesprochen haben. Es zielt darauf ab, daß die theoretischen Terme nur Hilfsmittel für eine einfache Systematisierung von E(T) sind, daß sie wie Variablen anzusehen sind, und daß T so mit dem Ramsey-Satz R(T) gleichzusetzen ist, was den kognitiven Gehalt von T betrifft.

Wir haben aber in 4.1 gesehen, daß die Leistung der theoretischen Terme in T sich nicht auf die Leistung der Variablen in R(T) beschränkt, sondern daß sie, falls sie nicht explizit harmlos sind, eine theorienübergreifende Bedeutung haben. In den interessanten Fällen naturwissenschaftlicher Theorien ist es in aller Regel so, daß die theoretischen Terme nicht nur im Kontext von Theorien oder Hypothesen vorkommen, von denen man sagen könnte, die Terme würden durch sie in ihrer Bedeutung charakterisiert, sondern daß sie auch in anderen Theorien, Hypothesen und Fragestellungen verwendet werden. Es ist ferner, wie wir in 4.1 betont haben, nicht notwendig, daß die Bedeutung eines Terms in allen Details vollständig bestimmt ist, damit er in einem Kontext sinnvoll verwendet werden kann. Generell gibt es so etwas wie eine „vollständig bestimmte Bedeutung" auch im Bereich der Beobachtungsterme wohl kaum. Es besteht zwar ein Gradunterschied in der Determiniertheit der Bedeutungen von Beobachtungstermen und theoretischen Termen, der in vielen Fällen sogar sehr deutlich ausfallen mag; deswegen kann man aber nicht die Sätze von S_B als bedeutungsvoll, die übrigen Sätze von S dagegen als schlechthin bedeutungslos ansprechen.

Auch die Theoreme von T, die nicht zu E(T) gehören, sagen also etwas über die Welt aus. In extremen Fällen ist die Bedeutung der Aussagen allerdings nur innerhalb sehr weiter Grenzen bestimmt.[10]

Das zweite Argument für die liberalere Version des Instrumentalismus lautet:

---

[10] Vgl. dazu auch die Definition D3.4–2 der in einer Theorie empirisch bestimmten theoretischen Terme.

2. Zwei empirische Theorien T_1 und T_2 können den gleichen empirischen Gehalt haben, ohne daß sie logisch äquivalent sind. Zwischen solchen Theorien, die z. B. ganz verschiedene theoretische Terme enthalten, können wir mit empirischen Gründen nicht unterscheiden. Wenn wir die eine Theorie vorziehen, so geschieht das nur aus Gründen der Einfachheit. Man kann aber eine These, daß Einfachheit das Siegel der Wahrheit sei,[11] weder empirisch noch apriorisch begründen.

Dieses Argument kann man kaum abweisen. Es trifft aber nur die Form des Realismus, nach der empirische Theorien Abbilder, nicht aber Interpretationen der Wirklichkeit sind.

Wenn zwei empirisch äquivalente Theorien T_1 und T_2 verschiedene Bilder vom gleichen Phänomenbereich entwerfen, wenn T_1 z. B. diese Phänomene durch einen Rückgriff auf theoretische Feldbegriffe erklärt, T_2 aber durch Rückgriff auf theoretische Partikelbegriffe, so kann man nicht sagen, welches die „richtige" Theorie ist und ob „in Wirklichkeit" Felder oder Partikel vorliegen. Beide Bilder sind gleichberechtigt. Selbst wenn die eine Theorie einfacher ist und wir sie deshalb vorziehen, so ist

---

[11] Die scholastische Formulierung dieses Prinzips lautete: *simplicitas sigillum veri.* – Zur Frage der ontologischen Relevanz von Einfachheitskriterien äußerte sich Newton so: „Nature is pleased with simplicity and effects not the pomp of superfluous causes" (zitiert in Thayer [53], S. 71), während Galilei sagte: „Endlich hat uns zur Untersuchung der natürlich beschleunigten Bewegung gleichsam mit der Hand geleitet die aufmerksame Beobachtung des Geschehens und der Natur in allen ihren Verrichtungen, bei deren Ausübung sie die allerersten, einfachsten und leichtesten Hilfsmittel zu verwenden pflegt, ... Wenn ich daher bemerke, daß ein aus der Ruhelage von bedeutender Höhe herabfallender Stein nach und nach neue Zuwüchse an Geschwindigkeit erlangt, warum soll ich nicht glauben, daß solche Zuwüchse in allereinfachster, jedermann plausibler Weise zustande kommen?" (Galileo Galilei: Unterredungen und mathematische Demonstrationen über zwei neue Wissenszweige, die Mechanik und die Fallgesetze betreffend, Hrsg. von A. v. Oettingen, [2]Darmstadt 1964.) – Zur Frage der Erfolgschance einfacher Hypothesen vgl. auch Quine [63].

das doch kein Grund, die kognitive Relevanz dieser Theorie höher einzuschätzen. Und wenn sich T_1 im Sinne von D4.6–4 auf eine Theorie T_1' T-reduzieren läßt, mit der man auch andere Phänomene beherrscht, während sich T_2 in keine solche übergreifende Theorie einbetten läßt, so ist auch das kein Grund, T_1 als die richtigere Theorie anzusehen; als „richtiger" erscheint T_1 nur, wenn T_1' als „richtig" angesehen wird. Wenn sich ferner eine Theorie T_1 auf eine andere Theorie T_2 T*-reduzieren läßt im Sinne von D4.6–8, so ist es möglich, T_1 durch eine Theorie zu ersetzen, die nicht einmal den gleichen empirischen Gehalt hat wie T_1. Während z. B. die phänomenologische Thermodynamik eine Makrotheorie über Kontinua ist, mit eigenen Grundbegriffen wie Temperatur, Wärmemenge etc., ist die molekularkinetische Theorie der Wärme eine statistische Mikrotheorie über Partikel mit mechanischen Grundbegriffen. T_1 entwirft dann nicht nur im theoretischen Teil, sondern auch in seinem empirischen Gehalt ein anderes Bild der Welt als T_2. Entwirft T_2 aber ein richtigeres Bild der Welt als T_1? Wenn die einander zugeordneten Sätze A und $\varphi(A)$ nicht synonym sind – und das ist bei Rekonstruktionen die Regel – so kann man auch nicht behaupten, T_1 und T_2 sagten in verschiedenen begrifflichen Koordinatensystemen dasselbe aus.

Es kann also Theorien geben, die sich in dem, worüber sie sprechen, sehr stark unterscheiden, sowohl, was die theoretische, wie auch, was die Beobachtungssprache angeht. Keine der Theorien aber kann einen empirisch begründbaren Anspruch darauf erheben, die „richtige" zu sein, das „richtige Bild" des Gegenstands zu zeichnen.

Diese Relativität der Bilder, die uns Theorien von der Welt zeichnen, hindert aber nun nicht, daß jedes Bild einen kognitiven Wert hat, denn unter den in einem Sprachsystem möglichen Aussagen zeichnet es gewisse als wahr und andere als falsch aus, und diese Aussagen können durch Erfahrung überprüft werden. Jedes Bild sagt in seinem Bezugssystem etwas über die Welt aus. Die Einsicht in die Relativität der Theorien begründet also kein Argument gegen ihren kognitiven Wert, sie rückt nur diesen

Wert ins rechte Licht, indem sie zeigt, daß die Bilder, die wir uns mit unseren empirischen Theorien von der Welt machen, keinen Anspruch auf absolute oder ausschließliche, sondern nur auf relative Geltung erheben können; daß Theorien keine Abbilder der Realität sind, sondern Interpretationen der Erfahrung darstellen.

Hinzukommt, daß diese Relativität nicht nur für Theorien gilt, sondern allgemein für unsere sprachlich formulierte Erkenntnisse: In Kutschera [71], Kap. 4 haben wir in der Diskussion des Verhältnisses von Sprache und Erfahrung anhand der linguistischen Relativitätsthese von Humboldt und Whorf zu zeigen versucht, daß Erkenntnis immer sprachbezogen ist, und daß es grundlegend verschiedene Sprachsysteme gibt und mit ihnen auch ganz verschiedene „Weltansichten“.

Diese Relativitätsthese läßt sich also auch im wissenschaftstheoretischen Rahmen formulieren – wir waren ihr schon im Abschnitt 2.3.3 begegnet – und läßt sich hier präziser und deutlicher fassen als in der Sprachphilosophie, weil das Phänomen hier mehr an der Oberfläche liegt.

Empirische Theorien sagen nach alldem nicht „was die Welt im Innersten zusammenhält“, sie geben uns nicht Einblick in das „Wesen der Welt“, aber sie entwerfen Modelle der Welt, die einen echten kognitiven Inhalt haben, indem sie sagen, was im Modell gilt und was nicht gilt, und weil sie sich dabei als falsch erweisen können. Da wir z. B. zwischen empirisch äquivalenten Theorien nicht mit empirischen Gründen unterscheiden können, können wir nicht eine dieser Theorien als die ausschließlich richtige auszeichnen und können also auch nicht behaupten, die Welt sei „an sich“ so beschaffen, wie es diese eine Theorie darstellt, in ihr seien die und nur die Objekte und Attribute realisiert, für die in dieser Theorie Ausdrücke vorkommen. Aber dem liegt nur die im Grunde recht einfache, wenn auch erkenntnistheoretisch folgenreiche Tatsache zugrunde, daß sich erst in einer begrifflichen Interpretation, wie sie einer Theorie zugrunde liegt, die Welt als so und so beschaffen darstellt: Wir können eben immer nur in einer bestimmten Sprache Aussagen über sie machen, und eine Sprache, eine begriffliche Interpretation schließt andere nicht aus.[12]

[12] Vgl. dazu auch den Abschnitt 6.4. – P. Feyerabend hat in [64] ein Argument dafür vorgetragen, daß der Realismus dem Instrumentalismus deswegen vorzuziehen sei, weil eine realistische Interpretation empirischer Theorien deren Prüfbarkeit (z.B. Falsifizierbarkeit) erhöht. Nun ist es zwar richtig, daß eine realistische Interpretation einer Theorie T mit gewissen theoretischen Termen (in dem Sinn, daß die Wahrheit von T ausschließt, daß eine empirisch äquivalente Theorie T′, die auf T nicht T-reduzierbar ist, falsch sein soll), für T zusätzliche Falsifikationsmöglichkeiten eröffnet, aber das sind erstens keine *empirischen* Falsifikationsmöglichkeiten, und zweitens ist ein so verstandener Realismus unsinnig, wie wir gesehen haben.

5 BESTÄTIGUNG

Wenn eine empirische Hypothese eine gesetzesartige Aussage ist – und das sind die typischen Fälle naturwissenschaftlicher Hypothesen – so ist sie nicht verifizierbar: da sie empirisch ist, kann man sie nicht mit logisch-mathematischen Argumenten beweisen, und da sie ein wesentlich genereller Allsatz ist,[1] kann man sie aus den endlich vielen Beobachtungen, die uns in der Erfahrung immer nur zur Verfügung stehen, nicht ableiten. Auch statistische Hypothesen folgen, als Aussagen über Grenzwerte relativer Häufigkeiten, nicht aus den beobachtbaren relativen Häufigkeiten endlicher Folgen. Als empirische Aussagen müssen diese Hypothesen aber doch mit der Erfahrung konfrontierbar sein: sie müssen durch Erfahrungen gestützt oder erschüttert werden können. Hypothesen, für die sich keine empirischen Gründe oder Gegengründe anführen ließen, die sich indifferent verhielten gegenüber jedweden Beobachtungen, und die sich immer vertreten ließen, egal wie die Welt aussieht, würden wir keinen Tatsachengehalt zuschreiben.

Folgen aus einer Hypothese H, evtl. unter Zuhilfenahme von empirischen Daten oder Theorien, die als gesichert angesehen werden, Beobachtungssätze, so ist H prinzipiell (d.h. unter Voraussetzung der praktischen Durchführbarkeit der entsprechenden Beobachtungen, mit denen wir den Wahrheitswert dieser Beobachtungssätze bestimmen können) falsifizierbar: Wenn aus H ein Beobachtungssatz E logisch folgt und wenn E sich als falsch erweist, so ist H damit falsifiziert. Lassen sich aus H keine Beob-

---

[1] Vgl. dazu den Abschnitt 4.3.

achtungssätze ableiten, so kann man doch H, ähnlich wie eine statistische Hypothese, durch Beobachtungen stützen oder entkräften. Im Kapitel 2 haben wir gesehen, daß sich aus der Beobachtung relativer Häufigkeiten $h_n(F)$ einer Eigenschaft in einer endlichen Stichprobe vom Umfang n für hinreichend große n subjektive Wahrscheinlichkeitswerte für die statistischen Hypothesen über die Größe der objektiven Wahrscheinlichkeit p(F) gewinnen lassen. Obwohl also in diesem Fall weder eine Verifikation noch eine Falsifikation der Hypothese möglich ist, können wir doch aufgrund von Beobachtungen sagen, daß sie wahrscheinlich wahr oder wahrscheinlich falsch ist.

Unter dem Titel „Bestätigung empirischer Theorie" faßt man nun üblicherweise die Behandlung all der Probleme zusammen, die sich mit der Stützung oder Entkräftung empirischer Theorien oder Hypothesen durch Beobachtungen befassen. Dabei geht es speziell um die Frage, ob eine Theorie H durch einen Beobachtungssatz E bestätigt, d.h. gestützt wird, und ob somit E für die Beurteilung von H relevant ist, ferner um die Frage, ob H durch E besser als eine konkurrierende Hypothese H′ bestätigt wird, oder in welchem Grade H durch E bestätigt wird. Diese Fragen will man mit der Angabe klassifikatorischer, komparativer und metrischer Bestätigungsbegriffe beantworten.

Die Diskussionen darüber leiden aber vielfach unter einer zweifachen Konfusion:

1. Gewöhnlich setzt man es als selbstverständlich voraus, daß es genau ein intuitives Explicandum des Bestätigungsbegriffes gibt, d.h. einen Bestätigungsbegriff, den wir im Alltag und in den Wissenschaften unreflektiert verwenden, und für den die Wissenschaftstheorie ein präzises Explikat anzugeben hat. Demgegenüber werden im folgenden zeigen, daß es verschiedene intuitive Explicanda des Bestätigungsbegriffes gibt, die verschiedenen Zwecken dienen und die verschiedene formale Eigenschaften haben, die sich z.B. in verschiedenen, teilweise untereinander unverträglichen Adäquatheitskriterien ausdrücken. Und wir glauben, daß viele Kontroversen in den einschlägigen Diskussio-

nen sich durch eine Unterscheidung dieser intuitiven Explicanda vermeiden lassen.[2] Daher legen wir diese Unterscheidung schon der Gliederung der folgenden Ausführungen in den ersten drei Abschnitten dieses Kapitels zugrunde.

2. Vielfach unterscheidet man auch nicht konsequent zwischen Bestätigungskriterien, durch die Bestätigungsbegriffe charakterisiert werden, und Akzeptierungsregeln: Akzeptierungsregeln können sich u.a. auf Bestätigungsbegriffe beziehen, indem das Bestehen einer Bestätigungsrelation oder ein Bestätigungsgrad für eine Hypothese H als notwendig oder hinreichend angesehen wird für die Annahme von H, aber es ist keineswegs von vornherein gesagt, daß solche Bestätigungsrelationen und -grade die einzigen Kriterien sind, nach denen sich die Annahme von Hypothesen richtet, oder gar, daß es einen Bestätigungsbegriff gibt, der die alleinige Grundlage für Akzeptierungsregeln bildet. Daher sollte man nicht schon die Begriffsexplikationen mit der schwierigen Akzeptierungsproblematik belasten, sondern zunächst einmal sagen, was man unter „Bestätigung" sinnvollerweise alles verstehen kann, und dann in einem zweiten Schritt die Brauchbarkeit der so gewonnenen Bestätigungsbegriffe für Akzeptierungsregeln prüfen.

Um auch diese Unterscheidung von vornherein deutlich zu machen, wollen wir in den drei ersten Abschnitten dieses Kapitels zunächst die drei Haupttypen von Bestätigungsbegriffen behandeln, und dabei die Akzeptierungsproblematik völlig beiseite lassen. Diese Problematik ist dann der Gegenstand des vierten Abschnitts, der sich mit der methodologischen Kontroverse Carnap-Popper, oder allgemeiner gesagt: mit der methodologischen Kontroverse zwischen Induktivisten und Deduktivisten befaßt.

---

[2] Vgl. dazu auch Smokler [68] und die ausführliche Darstellung dieser These in W. Lenzen [72]. Diese Arbeit ist die bisher gründlichste und am breitesten angelegte Monographie über Bestätigungstheorien.

5.1 Deduktive Bestätigung

Ist H eine deterministische Hypothese oder Theorie, z. B. der einfachen Gestalt $\wedge x(F(x) \supset G(x))$, so kann man H dadurch überprüfen, daß man aus H Beobachtungssätze ableitet (z. B. Sätze der Gestalt $F(a) \supset G(a)$) und durch Beobachtungen feststellt, ob diese Sätze wahr sind: Sind sie wahr, so hat sich H an diesen Prognosen von Beobachtungsresultaten *bewährt*, ist einer dieser Sätze falsch, so ist H damit *falsifiziert*. Denn nach dem logischen Prinzip des *modus tollens* gilt:

Aus $H \rightarrow B$ und $\neg B$ folgt $\neg H$; dabei steht das Zeichen „$\rightarrow$" wieder für die Beziehung der logischen Folge. Bewährt sich H an gewissen Prognosen, so ist damit nicht gesagt, daß sich H auch in Zukunft bewähren wird, daß also H richtig ist. Es ist nicht einmal ohne weiteres gesagt, daß H aufgrund dieser Bewährung wahrscheinlich wahr ist, oder auch nur wahrscheinlicher ist als vorher.[1] Bestätigung in diesem Sinn ist also Bewährung bei der Überprüfung deduktiver Konsequenzen, und daher sprechen wir hier von einem *deduktiven Bestätigungsbegriff*.

Dieser deduktive Bestätigungsbegriff ist vor allem von K. Popper propagiert worden, der ihn so darstellt:

„Aus dem System [der Theorie] werden (unter Verwendung bereits anerkannter Sätze) empirisch möglichst leicht nachprüfbare bzw. anwendbare singuläre Folgerungen („Prognosen") deduziert und aus diesen insbesondere jene ausgewählt, die aus bekannten Systemen nicht ableitbar sind, bzw. mit ihnen in Widerspruch stehen. Über diese – und andere – Folgerungen wird nun im Zusammenhang mit der praktischen Anwendung, den Experimenten usw. entschieden. Fällt die Entscheidung positiv aus, werden die singulären Folgerungen anerkannt, *verifiziert*, so hat das System die Prüfung vorläufig bestanden; wir haben keinen Anlaß, es zu verwerfen. Fällt eine Entscheidung negativ aus, werden Folgerungen *falsifiziert*, so trifft ihre Falsifikation auch das System, aus

[1] Vgl. dazu den Abschnitt 5.4.

dem sie deduziert wurden. – Die positive Entscheidung kann das System immer nur vorläufig stützen; es kann durch spätere negative Entscheidungen immer wieder umgestoßen werden. Solang ein System eingehenden und strengen deduktiven Nachprüfungen standhält und durch die fortschreitende Entwicklung der Wissenschaft nicht überholt wird, sagen wir, daß es sich *bewährt.*"[2]

Man kann nun diese Grundvorstellung der deduktiven Bestätigung erweitern:

Wie das im obigen Zitat schon ausgesprochen ist, kann man erstens auf bereits als wahr akzeptierte Beobachtungssätze oder auch auf bereits akzeptierte und in dem betreffenden Untersuchungskontext nicht in Zweifel gezogene andere Theorien und Hypothesen Bezug nehmen und – wo A die Konjunktion dieser Sätze ist – sagen, daß sich die Hypothese H an dem Beobachtungssatz E bzgl. des Hintergrundwissens A bewährt, wenn E aus H und A logisch folgt und sich als wahr erweist. Tatsächlich erhält man ja in den meisten Fällen Prognosen nicht aus isolierten Hypothesen, sondern aus einer großen Menge von als gesichert geltenden Annahmen mithilfe einer Hypothese. Dabei muß man beachten, daß, falls E sich als falsch erweist, nun nicht mehr direkt und allein H dafür verantwortlich gemacht werden kann – aus $H, A \rightarrow E$ und $\neg E$ folgt nicht $\neg H$, sondern nur $\neg (H \wedge A)$, so daß auch irgendein Satz aus A statt H aufgegeben werden könnte.[3] In vielen Fällen gelten aber die Sätze A in dem betreffenden Kontext als hinreichend gesichert und werden nicht bezweifelt, so daß man dann aus $H, A \rightarrow E$, $\neg E$ und A auf $\neg H$ schließen kann. Man wird aber fordern, daß H und A verträglich sind, und daß E nicht schon aus A allein folgt. Andernfalls würde sich H an jedem Satz E bewähren, bzw. jedes H würde sich an E

---

[2] Popper [66], S. 8.

[3] Vgl. Popper [66], S. 45f. – Diesen einfachen logischen Sachverhalt bezeichnet man in Anwendung auf die geschilderte methodologische Situation auch als Argument von Duhem. Vgl. dazu Duhem [06], S. 303–328.

bewähren; aus $\rightarrow \neg(H \wedge A)$ folgt ja $H,A \rightarrow E$ für beliebige Sätze E; und gilt $A \rightarrow E$, so gilt auch $H,A \rightarrow E$ für beliebige Hypothesen H.

Zweitens kann man die Voraussetzung aufgeben, daß die Sätze, an denen sich die fragliche Hypothese H bewährt, Voraussagen sind – es können auch Sätze über vergangene oder gegenwärtige Ereignisse sein; und es können auch Sätze sein, die bereits als wahr bekannt sind. Denn eine Hypothese bewährt sich auch darin, daß sie bekannte Phänomene erklären kann, daß sich bekannte Erscheinungen unter sie subsumieren lassen.

Drittens kann man auch die Restriktion aufgeben, daß eine Hypothese H sich nur an singulären Sätzen, an Beobachtungssätzen bewähren kann. Auch wenn es gelingt, mit H eine bekannte Regelmäßigkeit zu erklären, wenn man ein bekanntes Gesetz unter H subsumieren kann, so bewährt sich H damit. Da diese Verallgemeinerung aber meist nicht vollzogen wird (vgl. das obige Zitat von Popper), wollen wir auch von Bewährung *im engeren Sinn* sprechen, wo speziell die Bewährung an Beobachtungssätzen gemeint ist. Hingegen wird man festhalten, daß ein Satz E, an dem H sich bewährt, immer ein Satz der Beobachtungssprache ist, also keine theoretischen Terme enthält. Denn wir haben in 3.3 gesehen, daß Sätze, die theoretische Terme (wesentlich) enthalten, höchstens unter der Voraussetzung der Wahrheit, bzw. der Erfüllbarkeit der Theorie, in der diese theoretischen Terme implizit definiert werden, einen bestimmten Wahrheitswert haben. Es wäre aber nicht sinnvoll, eine Theorie T mit einem Satz E zu überprüfen, der nur dann sinnvoll ist, wenn T wahr ist.

Endlich wird man auch sagen, daß sich H nur an Sätzen E bewähren kann, die nicht logisch wahr sind.

Wir kommen damit zu folgender Definition des klassifikatorischen Grundbegriffs deduktiver Bestätigung:

D5.1–1: Eine Theorie oder Hypothese H *bewährt* sich an einem Satz E der Beobachtungssprache bzgl. der Voraussetzungen A –symbolisch B(H,A,E) – genau dann, wenn gilt:

a) $H,A \rightarrow E$

b) es gilt nicht $A \rightarrow E$, und

c) es gilt nicht $H \rightarrow \neg A$.[4]

Ist E ein Beobachtungssatz und gilt B(H,A,E), so sagen wir H *bewähre* sich bzgl. A an E *im engeren Sinn* und schreiben B*(H,A,E).

Setzt man in dieser Relation für A eine Tautologie T ein, so erhält man den eingangs geschilderten, nicht relativierten deduktiven Bestätigungsbegriff.

Es ist systematisch geschickter, in die Definition der Bewährung nicht die Bedingung aufzunehmen, daß E und A als wahr anerkannte Sätze sind, sondern das der Anwendung dieses Begriffs zuzuschieben. Ebenso definiert man ja in der Logik auch den Begriff der Gültigkeit eines Schlusses nicht nur für den Fall, daß die Prämissen wahr sind – das ist nur eine Voraussetzung der Anwendung von Schlüssen in einem Beweis.[5] Man kann also sagen, daß sich H an E bzgl. A bewährt, selbst wenn E und A falsch oder problematisch sind. Die Bewährungsrelation ist damit eine rein logische Relation zwischen Sätzen, die wir aber nur in den Fällen zur Stützung von H verwenden können, in denen E und A als wahr akzeptiert sind. Über Akzeptierung wollen wir aber erst später reden.

Verschiedene Autoren haben in den Bewährungsbegriff noch zusätzliche Bedingungen aufgenommen. So spricht Popper nur dann davon, daß sich eine Hypothese H an einem Beobachtungssatz E bewährt, wenn die Überprüfung der Folge E von H einen „ernstzunehmenden Widerlegungsversuch“ von H darstellt,[6] wenn die Kontrolle von E einen strengen Test für H bedeutet. So ist im obigen Zitat aus der „Logik der Forschung“ auch davon die Rede, daß „insbesondere jene [Beobachtungssätze E] ausge-

---

4 Aus (a) bis (c) folgt, daß A nicht kontradiktorisch ist und H und E weder kontradiktorisch noch tautologisch sind, und daß $A \rightarrow H$ nicht gilt.

5 Vgl. dazu auch Hempel [45], S. 24.

6 Vgl. Popper [66], S. 212, Anmerkung 1. – Für Poppers Bewährungsbegriff vgl. a.a.O. insbesondere S. 211ff.

wählt" werden, „die aus bekannten Systemen nicht ableitbar sind bzw. mit ihnen in Widerspruch stehen". Die Prüfung solcher Sätze bedeutet eine Kontrolle der von H erwarteten höheren Leistungsfähigkeit, bzw. ein experimentum crucis zwischen H und konkurrierenden Hypothesen, stellt also einen für die Bewertung von H entscheidenden Test dar.

Für die Formulierung eines klassifikatorischen Begriffs der Bewährung wäre dieser Gedanke aber nur dann brauchbar, wenn man präzisieren könnte, was denn ein „ernstzunehmender Widerlegungsversuch" ist. Popper selbst gesteht aber zu, daß das in Allgemeinheit nicht gelingt.[7] Daher führt Poppers Ansatz im klassifikatorischen Bereich nicht über 5.1.1 hinaus.

C.G. Hempel hat in [45] ein *Voraussagekriterium* der Bestätigung *(prediction criterion of confirmation)* formuliert, nach dem eine Klasse E von Beobachtungssätzen eine Hypothese H bestätigt, wenn E in zwei disjunkte Klassen E_1 und E_2 zerlegt werden kann, so daß gilt: E_2 ist nicht leer und für alle Sätze C aus E_2 gilt:
$H,E_1 \rightarrow C$, aber nicht $E_1 \rightarrow C$.[8]

Es gilt nun aber offensichtlich: Bestätigt E im Sinne dieses Kriteriums die Hypothese H, so gilt für alle Sätze C aus E_2: $B(H,E_1,C)$ (wobei hier die Konstanten E, E_1 und E_2 je nachdem für Satzmengen oder für die Konjunktion ihrer Elemente stehen sollen) – es sei denn H ist mit E_1, und also mit E, logisch unverträglich. In diesem Fall möchte aber auch Hempel nicht von einer Bestätigung von H durch E sprechen.[9] Gilt umgekehrt $B(H,E_1,C)$

---

[7] Vgl. dazu Popper [66], S. 354. Popper schreibt dort: „Meines Erachtens gibt es einige intuitive *Desiderata*, die durch keine formale Definition erfüllt werden können. Eine Theorie ist beispielsweise desto besser bewährt, je besser ausgedacht unsere erfolglosen Widerlegungsversuche waren. Etwas von diesem Gedanken ist in meiner Definition enthalten – freilich nicht soviel, wie man vielleicht formalisieren könnte. Vollständig formalisieren kann man aber den Gedanken eines ernstgemeinten und gut ausgedachten Widerlegungsversuchs nicht."

[8] Vgl. Hempel [45], S. 26f. Vgl. dazu auch Poppers Definition in [66], S. 212.

[9] Vgl. dazu die Definition von „E disconfirms H" bei Hempel. Hempels Definition der Bestätigung ist aber dann nicht ganz korrekt.

für alle Sätze C aus E_2, und ist E_1 eine Konjunktion von Beobachtungssätzen, so bestätigt die Satzmenge $E_1 \cup E_2$ H im Sinne von Hempel.

Auch das Hempelsche Kriterium bringt daher gegenüber D5.1–1 nichts Neues. Es präzisiert ferner nicht den in seinem Namen angedeuteten Gedanken, daß sich Hypothesen nur an Prognosen bewähren. Diese Vorstellung wäre aber auch, wie wir schon gesehen haben, eine viel zu schmale Grundlage für einen Bewährungsbegriff.

Endlich hat H. Smokler in [68] ein Bestätigungskriterium formuliert, das auf der Vorstellung beruht, daß sich eine Hypothese nur an den *Erklärungen* bewährt, die sie ermöglicht: „Evidence confirms a hypothesis if the hypothesis (together with additional information) explains the evidence".[10] In den von Smokler angezogenen Erklärungsbegriff geht ein, daß eine Hypothese H und Antecedensdaten A das Explanandum E erklären genau dann, wenn gilt $H, A \rightarrow E$, aber weder $A \rightarrow E$, noch $H \rightarrow \neg A$[11] oder $H \rightarrow E$, und wenn H eine gesetzesartige Aussage ist.[12]

Das Smoklersche Erklärungskriterium der Bestätigung unterscheidet sich damit von dem Bewährungsbegriff nach D5.1–1 nur durch Zusatzforderungen, nämlich erstens, daß nicht gelten soll $H \rightarrow E$, d.h. daß der bestätigende Satz nicht aus H allein, sondern erst aus H unter Zuhilfenahme anderer Beobachtungssätze A folgt – diese Forderung ist aber intuitiv nicht gut begründet und hat keine fruchtbaren Konsequenzen – und zweitens, daß H eine gesetzesartige Aussage sein soll. Dieser Begriff läßt sich aber, wie wir in 4.3 gesehen haben, nicht formal präzisieren. Er beschränkt auch die Anwendbarkeit des Bewährungsbegriffs, ohne daß dafür ein Grund sichtbar würde; speziell kann man nicht mehr von der

---

[10] Smokler [68], S. 309. – Smokler bezeichnet das als Prinzip des *abduktiven Schließens* (*abductive inference*). – Vgl. dazu auch Brody [68], S. 297ff., sowie die im Abschnitt 2.5.1 erwähnten Vorschläge von Lehrer und G. Harman.

[11] Diese triviale Forderung ergänzen wir der Vollständigkeit wegen.

[12] Vgl. Smokler [68], S. 309. – Auf die Problematik solcher Präzisierungen des Erklärungsbegriffs haben wir schon in 4.5 hingewiesen.

Bewährung nichtgenereller Hypothesen sprechen. Daher verzichten wir darauf, diese Bedingung in den Bewährungsbegriff mit aufzunehmen.

Dem klassifikatorischen Bewährungsbegriff stellt man meist zwei weitere Begriffe zur Seite: den der Entkräftigung und der Indifferenz.

D5.1–2: Eine Hypothese wird durch einen Satz E bzgl. der Voraussetzungen A *entkräftet*, wenn gilt $B(H,A, \neg E)$.

D5.1–3: Eine Hypothese ist *indifferent* bzgl. des Satzes E, relativ zu den Voraussetzungen A, wenn H sich an E weder bewährt noch durch E entkräftet wird bzgl. A.

Es gilt dann wegen D5.1–1 c, daß keine Hypothese H sich an einem Satz E bewähren kann, durch den sie entkräftet wird.

Der Bewährungsbegriff nach D5.1–1 erfüllt folgende Bedingungen:[13]

I) *(Erweiterte) Äquivalenzbedingung:* Sind H,H′, sowie A,A′ und E,E′ logisch äquivalent, so gilt $B(H,A,E) \equiv B(H',A',E')$.

IIa) *Konverse Konsequenzbedingung:* Gilt $H',A \rightarrow H$, aber nicht $H' \rightarrow \neg A$, und gilt $B(H,A,E)$, so gilt auch $B(H',A,E)$.

IIIa) *Folgebedingung:*[14] Gilt $E,A \rightarrow E'$, aber nicht $A \rightarrow E'$, und gilt $B(H,A,E)$, so gilt auch $B(H,A,E')$.

IVa) *Konverse Folgerungsbedingung:* Gilt $H,A \rightarrow E$ und gilt weder $A \rightarrow E$ noch $H \rightarrow \neg A$, so gilt $B(H,A,E)$.

Va) *Konverse spezielle Konsistenzbedingung:* Die Klasse aller Sätze E mit $B(H,A,E)$ ist mit A konsistent.

[13] Wir verwenden im folgenden die Bezeichnungen von Hempel in [43] und [45]. Das Wort „Entailment“ übersetzen wir dabei mit „Folgerung“. Die dort für zweistellige Bestätigungsrelationen angegebenen Bedingungen werden hier sinngemäß verallgemeinert. Für eine ausführliche Diskussion weiterer Ädäquatheitsbedingungen für Bestätigungsbegriffe vgl. Lenzen [72].

[14] Diese Bedingung, sowie ihr Gegenstück, die konverse Folgebedingung, und die konverse spezielle Konsistenzbedingung werden von Hempel nicht diskutiert.

Davon überzeugt man sich sofort durch einfache logische Betrachtungen. Aufgrund der Deutung der Bestätigungsrelation B(H,A,E) ist aber auch schon intuitiv klar, daß diese Bedingungen gelten müssen, und daß sie Adäquatheitskriterien für den Bewährungsbegriff darstellen, so wie wir ihn oben inhaltlich charakterisiert haben.

Dagegen erfüllt der Bewährungsbegriff folgende Bedingungen *nicht:*

IIb) *Spezielle Konsequenzbedingung:* Gilt $H,A \rightarrow H'$, aber nicht $A \rightarrow H'$, und gilt B(H,A,E), so gilt auch B(H′,A,E).

IIIb) *Konverse Folgebedingung:* Gilt $E',A \rightarrow E$, aber nicht $E' \rightarrow \neg A$, und gilt B(H,A,E), so gilt auch B(H,A,E′).

IVb) *Folgerungsbedingung:* Gilt $E,A \rightarrow H$, aber weder $A \rightarrow H$, noch $E \rightarrow \neg A$, so gilt B(H,T,E).

Vb) *Spezielle Konsistenzbedingung:* Die Klasse aller Hypothesen H mit B(H,A,E) ist mit A konsistent.

Die Bedingungen der beiden Gruppen sind nicht miteinander verträglich. Das gilt unabhängig von der speziellen Interpretation des Bewährungsbegriffs nach D5.1–1. IIb ist mit IIa nicht verträglich. Denn gilt B(H,A,E), so gilt wegen $H \rightarrow H \vee H'$ für nicht $A \rightarrow H' \vee H$ nach IIb $B(H \vee H',A,E)$, wegen $H' \rightarrow H \vee H'$ für nicht $H' \rightarrow \neg A$ nach IIa aber B(H′,A,E). D.h. an Sätzen E, an denen sich irgendeine Hypothese H bewährt (z.B. E selbst), bewähren sich alle Hypothesen H′, die mit A verträglich sind und für die nicht gilt $A \rightarrow H \vee H'$. Die Unverträglichkeit von IIa und IIb ist also keine rein logische Inkonsistenz, sondern besagt, daß ein Bestätigungsbegriff B, der sowohl IIa wie auch IIb genügt, viel zu weit und daher inadäquat ist. Entsprechendes gilt für das Verhältnis von IIIa und IIIb: Gilt B(H,A,E), so gilt nach IIIb für nicht $E' \rightarrow \neg A$ auch $B(H,A,E \wedge E')$, also nach IIIa für nicht $A \rightarrow E'$ auch B(H,A,E′).

Da IIIb für den Bewährungsbegriff nicht gilt, kann man auch nicht sagen, daß z.B. eine Hypothese $\bigwedge x(F(x) \supset G(x))$ sich an einem Satz $F(a) \wedge G(a)$ bewährt im Sinn von D5.1–1 – so plausibel das zunächst klingt –: Dieser Satz folgt ja nicht aus der Hypothese und man kann, wie die Inkonsistenz von IIIb mit IIIa zeigt, die Bewährung nicht auf stärkere Sätze E ausdehnen.[15]

Die Folgerungsbedingung IVb ist mit IIa nicht verträglich; denn aus IVb folgt $B(E \vee H,T,E)$ – T sei eine Tautologie –, nach IIa also $B(H,T,E)$ für beliebige (nicht logisch determinierte) H und E. Ebenso ist auch IIb mit IVa nicht verträglich: Nach IVa gilt für nicht tautologisches E und H und nicht kontradiktorisches $H \wedge E$ $B(E \wedge H,T,E)$, nach IIb also $B(H,T,E)$. Die Bedingung Vb ist mit IVa nicht verträglich; denn nach IVa gilt für nichttautologisches E und ein mit E und $\neg E$ verträgliches H $B(H \wedge E,T,E)$ und $B(\neg H \wedge E,T,E)$. Und Va ist mit IVb nicht verträglich, denn nach IVb gilt für ein mit E und $\neg E$ verträgliches und nichttautologisches H $B(H,T,H \wedge E)$ und $B(H,T,H \wedge \neg E)$.

Die Bedingungen der zweiten Gruppe (IIb bis Vb) stellen aber nun nicht einfach unsinnige Forderungen für Bestätigungsbegriffe dar, sondern sie sind adäquate Bedingungen für andere Typen von Bestätigungsbegriffen, und wir werden in den nächsten beiden Abschnitten die Unverträglichkeit dieser beiden Gruppen von Adäquatheitskriterien als Argument für die Verschiedenartigkeit der zugrundeliegenden Bestätigungsbegriffe verwenden.

Definiert man z. B.

D5.1–4: $V(H,A,E) := E,A \rightarrow H$ und weder $A \rightarrow H$, noch $E \rightarrow \neg A$,[16] so ist auch das ein Bestätigungsbegriff, nach dem der Satz E bzgl. A die Hypothese H bestätigt, wenn man, unter Voraussetzung von A, H durch E *verifizieren* kann.

Dieser Begriff erfüllt (bei Ersetzung von „B“ durch „V“) die Bedingungen I und IIb bis Vb, zeigt also, daß es auch Bestätigungsbegriffe gibt, die sich zur Relation der Bewährung bzgl. H und E genau invers verhalten. Wir haben aber schon eingangs betont, daß dieser Verifikationsbegriff der Bestätigung auf inter-

[15] Vgl. dazu die Diskussion in Lenzen [72], Kap. I B.

[16] Daraus folgt wieder, daß A nicht kontradiktorisch und H und E weder tautologisch noch kontradiktorisch sind, und daß $A \rightarrow E$ nicht gilt.

essante wissenschaftliche Hypothesen, auf statistische Hypothesen und auf wesentlich generelle deterministische Hypothesen nicht anwendbar ist, so daß wir ihn hier nicht weiter diskutieren wollen.

Wir wenden uns nun der Kritik am klassifikatorischen deduktiven Bestätigungsbegriff zu:

1. C.G. Hempel hat in [45], S. 27ff. und [43], S. 130 zwei Einwände gegen Bewährungsbegriff vorgetragen, die sich auf dessen Anwendbarkeit beziehen:

a) Hypothesen H, die theoretische Terme (wesentlich) enthalten, können sich nicht an Sätzen E der Beobachtungssprache bewähren.

Dagegen ist zu sagen: Die Behauptung ist in dieser Allgemeinheit falsch, denn aus einer Hypothese $E \wedge F(a)$, wo E ein Beobachtungssatz und F ein theoretischer Term ist, folgt z. B. E. Hypothesen mit theoretischen Termen sind auch nur relativ zu einer Theorie sinnvoll, in der diese Terme implizit definiert werden. Diese Theorie fungiert dann in der Relation B(H,A,E) als Teil von A. Würden aus H und A keine Sätze der Beobachtungssprache folgen, so wäre die Theorie im Sinne von 3.4 nicht empirisch.

b) Es kann sein, daß aus einer Hypothese H wie $\wedge x \vee y F(x,y)$ keine Beobachtungssätze F(a,b), sondern nur Existenzsätze $\vee y F(a,y)$ folgen. Nun folgt zwar aus F(a,b) der Satz $\vee y F(a,y)$, an dem sich H bewähren würde, aber daraus folgt, wegen der Ungültigkeit der konversen Folgebedingung (IIIb), nicht, daß H sich an F(a,b) bewährt.[17] Und aus einer Hypothese H der Gestalt $\wedge x(\wedge y R(x,y) \supset \vee z S(x,z))$ läßt sich rein deduktiv kein Beobachtungssatz ableiten, obwohl eine solche Hypothese durchaus empirischer Natur sein kann. Vielmehr kann man aus Beobachtungssätzen $R(a,b_1), \ldots, R(a,b_n)$ hier nur induktiv den Satz $\wedge y R(a,y)$ gewinnen, mit H dann den Satz $\vee z S(a,z)$, der durch S(a,b) verifi-

[17] Vgl. dazu auch Carnap in Schilpp [63], S. 879.

ziert werden, sich aber an diesem Satz, wie wir oben gesehen haben, nicht bewähren kann.

Diesem Einwand entgehen wir, indem wir in D5.1–1 nicht gefordert haben, daß E ein Beobachtungssatz ist. Die Hypothese $\wedge x \vee y F(x,y)$ kann sich danach an $\vee y F(a,y)$ bewähren. Und die zweite Hypothese kann sich bzgl. des Satzes $\wedge y R(a,y)$ (der sich seinerseits an den Sätzen $R(a,b_1), \ldots, R(a,b_n)$ bewährt) an $\vee z S(a,z)$ bewähren.

Der Übergang von der Bewährung i.e.S. zur Bewährung an Sätzen E, die keine Beobachtungssätze sind, löst freilich nicht das Problem, wie wir denn allererst von Beobachtungssätzen zu nichtfalsifizierbaren Sätzen der Beobachtungssprache, wie z. B. $\vee y F(a,y)$ etc. kommen. Hier wird die Grenze des Bewährungsbegriffs deutlich, die darin besteht, daß er nicht allein den Übergang von Beobachtungssätzen zu allgemeineren Aussagen über die Natur regeln kann. Aber das ist kein Argument gegen den Bewährungsbegriff als solchen, sondern gegen eine Methodologie, die sich ausschließlich auf einen deduktiven Bestätigungsbegriff stützen will. Daher werden wir erst im Abschnitt 5.4 darauf zurückkommen. Hier sei jedoch schon ausdrücklich angemerkt, daß bei einer Beschränkung des Bewährungsbegriffs B(H,A,E) auf Beobachtungssätze E gerade viele der interessanten Hypothesen nicht bewährungsfähig wären, z. B. Hypothesen über Größen, die durch Grenzwertbildung definiert sind, wie objektive Wahrscheinlichkeiten, Geschwindigkeiten, Beschleunigungen, und die meisten metrischen Begriffe.

2. Statistische Hypothesen der Gestalt $p(F)=r$ (die objektive Wahrscheinlichkeit der Eigenschaft F in einer Folge von Versuchsdurchführungen ist r) sind nicht falsifizierbar; aus ihnen folgen keine Sätze der Form $h_n(F)=r'$ über die Größe der relativen Häufigkeit $h_n(F)$ von F in endlichen Abschnitten der Folge. Auf solche Hypothesen ist also der Bewährungsbegriff nicht anwendbar.

Auch diesem Einwand entgehen wir mit der Liberalisierung des Bewährungsbegriffs, nach der E z. B. auch eine statistische

Hypothese der Gestalt $p(F) = r \pm \varepsilon$ sein kann, die wir aufgrund von Beobachtungen relativer Häufigkeiten bereits als wahr akzeptiert haben.[18]

Hier gilt aber das Gleiche wie oben: Die Liberalisierung löst nicht das Problem, wie wir aufgrund von Beobachtungssätzen $h_n(F) = r'$ allererst zu solchen Sätzen E wie $p(F) = r \pm \varepsilon$ kommen. Dabei hilft uns der Bewährungsbegriff nicht weiter.

3. Die *Goodmansche Paradoxie*, die wir in 2.3.3 dargestellt haben, ist zunächst als Paradoxie der Bestätigung formuliert worden und daher ist, ähnlich wie für die verschiedenen Wahrscheinlichkeitsbegriffe und induktiven Prinzipien, auch für die verschiedenen Bestätigungsbegriffe zu fragen, inwiefern sie durch die Goodmansche Problematik betroffen werden. Inwiefern gilt also z. B. für einen Bestätigungsbegriff, daß der Satz, daß alle bisher beobachteten Smaragde grün waren, sowohl die Hypothese „Alle Smaragde sind grün“ wie auch die ihr für bisher noch nicht beobachtete Smaragde widersprechende Hypothese „Alle Smaragde sind gricht“ bestätigt, und widerspricht ein solches Resultat tatsächlich den dem jeweiligen Bestätigungsbegriff zugrundeliegenden intuitiven Vorstellungen?

Daß letztere Frage nicht ohne weiteres immer zu bejahen ist, zeigt der deduktive Bestätigungsbegriff. Wegen der Ungültigkeit der speziellen Konsistenzbedingung (Vb) ist von vornherein zu erwarten, daß derselbe Satz E bzgl. desselben Erfahrungswissens A zugleich Hypothesen der Gestalt

[18] Man könnte daran denken, den Begriff der Bewährung i.e.S. so zu erweitern, daß er auch auf statistische Hypothesen anwendbar ist, und zu definieren: „Eine Hypothese bestätigt sich an einem Beobachtungssatz E bzgl. der Voraussetzung A, wenn der Wert $w(E/H \wedge A)$ nahe bei 1 liegt und wenn das für $w(E/A)$ nicht gilt; d. h. wenn E aufgrund von H und A zwar nicht gewiß, aber doch sehr sicher ist, und wenn das an der Hypothese H liegt“. Nach dem Multiplikationssatz der Wahrscheinlichkeitstheorie gilt aber $w(H/E \wedge A) > w(H/A) \equiv w(E/H \wedge A) > w(E/A)$. Die erste Bedingung ist aber die definierende Bedingung der *induktiven* Bestätigung (vgl. 5.2), so daß man mit der vorgeschlagenen Definition nur einen Spezialfall dieser vom Ansatz her ganz anders motivierten Bestätigung erfassen würde.

$H_1 = \bigwedge x(F(x) \supset G(x))$ und $H_2 = \bigwedge x(F(x) \supset (M(x) \equiv G(x))$ bestätigen kann, die sich außerhalb des Erfahrungsbereichs M(x), über den E und A Auskunft geben, widersprechen. Wegen $H_1, F(a) \wedge M(a) \rightarrow G(a)$ und $H_2, F(a) \wedge M(a) \rightarrow G(a)$ gilt $B(H_1, F(a) \wedge M(a), G(a))$ und $B(H_2, F(a) \wedge M(a), G(a))$.

Die Goodmansche Paradoxie tritt also im Rahmen der deduktiven Bestätigung auf. Sie ist hier aber keine Paradoxie in dem Sinn, daß sie, von der intuitiven Basis dieses Bestätigungsbegriffs her gesehen, ein unerwartetes oder unerwünschtes Resultat darstellt. Wenn man davon ausgeht, daß sich logische (deterministische) Hypothesen dadurch bewähren, daß sie verifizierbare empirische Konsequenzen haben, so können sich durchaus zwei einander im Bereich nicht beobachteter Objekte widersprechende Hypothesen an den gleichen Daten bewähren. Es gibt aber dann ein experimentum crucis, an dem sich nur eine der beiden Hypothesen bewährt, mit dem man also eine von beiden falsifizieren kann. Insofern bringt also die Goodmansche Paradoxie den Bewährungsbegriff nicht in Schwierigkeiten. Es wird hier aber deutlich, daß uns die Bewährung keinen Aufschluß darüber gibt, welchen von zwei oder mehreren bisher nicht falsifizierten konkurrierenden Hypothesen sich in Zukunft behaupten wird; welche von ihnen die zuverlässigeren Voraussagen macht. Das ist aber die für das praktische Problem: „Wie sollen wir handeln, damit unsere Erfolgsaussichten möglichst groß sind?“ entscheidende Frage.

4. Besonderen Raum nimmt in der Diskussion der Bestätigungstheorien die sogenannte *Raben-Paradoxie* ein, die Hempel in [45] formuliert hat. Diese Paradoxie geht davon aus, daß 1. ein Beobachtungssatz E mit einer Hypothese H auch alle mit H logisch äquivalenten Hypothesen H′ bestätigt (in einem sonst offen gelassenen Sinn), daß 2. der Satz $F(a) \wedge G(a)$ die Hypothese $\bigwedge x(F(x) \supset G(x))$ bestätigt – das ist das sog. Nicod-Kriterium der Bestätigung,[19] und daß 3. der Satz $\neg F(a) \wedge \neg G(a)$ neutral ist

[19] J. Nicod hat es in [23], S. 23, formuliert.

bzgl. der Hypothese $\wedge x(F(x) \supset G(x))$, d.h. sie weder bestätigt noch erschüttert. Denn man wird normalerweise kaum sagen, daß die Beobachtung eines weißen Nashorns die Hypothese bestätigt, daß alle Raben schwarz sind.

Da nun $\wedge x(F(x) \supset G(x))$ mit $\wedge x(\neg G(x) \supset \neg F(x))$ logisch äquivalent ist und der Satz $\neg G(a) \wedge \neg F(a)$ die letztere nach (2) bestätigt, bestätigt er nach (1) auch die erstere, im Widerspruch zu (3).

Für die deduktive Bestätigungsbeziehung gilt die Äquivalenzbedingung (I). Da aus der Hypothese $\wedge x(F(x) \supset G(x))$ jedoch nicht Sätze wie $F(a) \wedge G(a)$ oder $\neg F(a) \wedge \neg G(a)$ ableitbar sind, gilt das Nicod-Kriterium nicht; es gilt nur, daß sich die Hypothese an den Sätzen G(a), bzw. $\neg F(a)$ bzgl. eines Erfahrungsdatums A bewährt, das die Sätze F(a), bzw. $\neg G(a)$ enthält. Es erscheint aber auch als paradox, daß die Feststellung, daß ein weißes Ding (das z.B. von allem Anfang gar nicht im Verdacht stand, ein Rabe zu sein) kein Rabe ist (sondern z.B. ein Nashorn), die Rabenhypothese bestätigen soll.

Diese Paradoxie kann man aber generell und ohne Bezugnahme auf einen speziellen Bestätigungsbegriff mit folgendem Hinweis auflösen:

Der Ansicht, daß nur Sätze der Gestalt $F(a) \wedge G(a)$ den Satz $\wedge x(F(x) \supset G(x))$ bestätigen, wird der logischen Interpretation dieses Satzes nicht gerecht, die von seiner umgangssprachlichen Deutung abweicht. Während die umgangssprachliche Aussage „Alle Fs sind G" vielfach als Aussage nur über die Fs aufgefaßt werden kann – eine Aussage, in der durch die sprachliche Unterscheidung von Subjekt- und Prädikatbegriff zusätzlich noch eine Topikalisierung hineinkommt, die von der des logisch äquivalenten Satzes „Alle nicht-Gs sind nicht F" verschieden ist – handelt der Satz logisch gesehen und in seiner Übersetzung in die Formel $\wedge x(F(x) \supset G(x))$ von *allen* Objekten schlechthin, auch von Nashörnern, und besagt, daß alle Objekte entweder nicht Raben oder schwarz sind (oder beides). Dieser Satz ist nicht auf die Fs hin topikalisiert, er ist also nicht in stärkerem Sinn eine Aussage über die Fs als eine Aussage über die Gs. Die Bestätigung der Raben-Hypothese durch weiße Nashörner stellt also bei der logischen Interpretation dieser Hypothese keine Paradoxie dar. In diesem Sinn argumentiert auch C.G. Hempel in [45], S. 17f.

Man könnte allenfalls die Zweckmäßigkeit der logischen Interpretation von Allaussagen „Alle S sind P" infrage stellen,[20] aber diese Interpretation hat sich in den Anwendungen der Logik sehr gut bewährt und es gibt keine guten Gründe, diese Interpretation hier aufzugeben. Man kann auch Aussagen der Form „Alle Fs sind G" in umgangssprachlicher Deutung keinesfalls immer nur als Aussagen über die Fs auffassen; denn wie Hempel betont hat, wird oft eine Aussage dieser Form, zusammen mit „a ist nicht G" benutzt, um daraus auf „a ist nicht F" zu schließen, was bei dieser engen Interpretation nicht möglich wäre, und bei komplexeren Sätzen wie „Alle Fs, die G sind, sind H, falls sie Ks sind" ist keineswegs eindeutig, ob dieser Satz über alle Fs spricht, über die Fs, die G sind, oder gar nur über die Fs, die G und K sind.[21]

Dieses Argument genügt generell, um die Rabenparadoxie aufzulösen.

Hempel hat in [45], S. 19f. aber noch ein zweites Argument zur Aufklärung der Rabenparadoxie angegeben:[22] Wenn man eine Hypothese H: $\wedge x(F(x) \supset G(x))$ überprüfen will und nicht weiß, ob ein Objekt a die Eigenschaft F hat, so wird man eine Beobachtung, daß a nicht G ist, daß a aber auch nicht F ist, d.h. einen Satz $\neg F(a) \wedge \neg G(a)$, als Bestätigung der Hypothese ansehen. Wenn man dagegen bereits weiß, ob a F oder nicht-F ist, so sieht die Sache anders aus: Weiß man, daß gilt F(a), so ist die Überprüfung von G(a) ein echter Test für die Hypothese: G(a) bestätigt sie, $\neg G(a)$ falsifiziert sie. Weiß man dagegen, daß gilt $\neg F(a)$, so stellt die Überprüfung von G(a) keinen Test dar: $\neg G(a)$ kann die Hypothese nicht falsifizieren und G(a) sie nicht

[20] Vgl. dazu z.B. von Wright [65], S. 217f.
[21] Vgl. dazu Hempel [45], S. 17.f.
[22] Vgl. dazu auch Goodman [55], S. 70f.

mehr bestätigen, als das der Satz $\neg F(a)$ allein schon tut. Während also ein Satz $\neg F(a) \wedge \neg G(a)$ die Hypothese bestätigt, falls $\neg F(a)$ nicht aus dem Hintergrundwissen A folgt, bestätigt der Satz $\neg F(a) \wedge \neg G(a)$ andernfalls die Hypothese nicht.

Dies Argument läßt sich aber nicht für alle Bestätigungsbegriffe darstellen. Da für den deduktiven Bestätigungsbegriff das Nicod-Kriterium nicht gilt, kann man nur für die oben erwähnte hier anwendbare Form der Paradoxie sagen: Es gilt $B(H,A \wedge F(a),G(a))$ und $B(H,A \wedge \neg G(a), \neg F(a))$, aber nicht $B(H,A \wedge \neg F(a),G(a))$ (es gilt nicht $H,A \wedge \neg F(a) \rightarrow G(a)$) und nicht $B(H,A \wedge G(a), \neg F(a))$ (es gilt nicht $H,A \wedge G(a) \rightarrow \neg F(a)$). Dabei soll aus H und A allein keiner der Sätze $F(a)$, $\neg F(a)$, $G(a)$, $\neg G(a)$ logisch folgen.

Man hat auch noch auf anderen Wegen eine generelle Lösung der Raben-Paradoxie versucht, nach der z. B. die Äquivalenzbedingung aufgegeben werden sollte. Aber da solche Ansätze bisher nur sehr schwache Gründe für eine sehr tiefgreifende Modifikation anzugeben wußten, gehen wir darauf hier nicht näher ein.[23] Eine solche Modifikation wäre schon aus dem Grunde sehr tiefgreifend, da es ja bei der Präzisierung der Bestätigungsbegriffe um eine logische Rekonstruktion geht, die Sätze in logischer Symbolik darstellen will und muß, und die keinen Unterschied zwischen logisch äquivalenten Sätzen machen kann. Wären logisch nicht faßbare Unterschiede für den Bestätigungsbegriff entscheidend, so müßte man auf das ganze Programm der logischen Rekonstruktion und Explikation verzichten.

[23] Vgl. dazu Hempel [45], S. 13, sowie Lenzen [72], IV C. – I. Scheffler hat in [63], S. 287ff. einen Lösungsvorschlag angegeben, nach dem ein Satz $F(a) \wedge G(a)$ die Hypothese $\bigwedge x(F(x) \supset G(x))$ stärker bestätigen soll als ein Satz $\neg F(a) \wedge \neg G(a)$, weil er, im Gegensatz zu diesem, nicht mit der konträren Hypothese $\bigwedge x(F(x) \supset \neg G(x))$ verträglich ist. Nun bleibt aber erstens das konträre Gegenteil für komplexere Hypothesen undefiniert, und zweitens ist die Hypothese $\bigwedge x(F(x) \supset \neg G(x))$ ja nach Beobachtung des ersten schwarzen Raben a bereits falsifiziert, die Raben-Paradoxie bleibt aber auch dann noch bestehen; eine Hypothese $\bigwedge x(F(x) \wedge x = a \supset \neg G(x))$ ist aber nicht gesetzesartig, also keine echte Konkurrenz für die Raben-Hypothese.

Neben solchen generellen Überlegungen zur Aufklärung der Raben-Paradoxie stehen Lösungsansätze, die sich auf spezielle Eigenschaften bestimmter Bestätigungsbegriffe stützen. Für den Bewährungsbegriff ist hier der Hinweis Poppers zu erwähnen, daß die paradoxen Fälle der Bestätigung, z. B. die Bestätigung der Raben-Hypothese durch die Beobachtung weißer Nashörner, keine strengen und gut ausgedachten Falsifikationsversuche der fraglichen Hypothesen darstellen. Das kann man sicher zugestehen. Da sich aber der Begriff des strengen und gut ausgedachten Falsifikationsversuchs nicht präzisieren läßt, ist damit nur wenig gewonnen.[24]

Wenn man einen komparativen und einen quantitativen Begriff der Bewährung einführen will, so kann man sich nicht einfach von dem Gedanken leiten lassen, daß sich eine Hypothese H umso besser bewährt hat, je mehr Falsifikationsversuche für diese Theorie mißglückt sind. K. Popper sagt dazu: „Der Grad der Bewährung einer Theorie kann nun aber nicht etwa in der Weise festgestellt werden, daß man die Klasse der bewährenden Fälle,

[24] An den Popperschen Lösungsvorschlag für die Raben-Paradoxie hat sich am Ende der 50er Jahre eine lange Kontroverse zwischen J.N. Watkins und J. Agassi einerseits und C.G. Hempel, I. Scheffler, D. Stove und H.G. Alexander andererseits geknüpft. Die Frucht dieser Erörterung ist aber nicht groß gewesen, so daß wir hier darauf nicht eingehen, sondern nur auf die entsprechenden Darstellungen in Scheffler [63], S. 269ff, Kyburg [64] und Lenzen [72] hinweisen wollen. Auch andere Einwände gegen den Bewährungsbegriff wollen wir hier nicht diskutieren, da ihnen zumeist uninteressante Mißverständnisse zugrundeliegen. Das gilt z. B. für die Argumente von S.F. Barker in [67]. Barker behauptet u.a. (korrekterweise), daß durch einen Satz E mit einer Hypothese H auch der Satz $H \wedge H'$ deduktiv bestätigt wird, wobei H' ein beliebiger Satz sein kann, der mit E und H inhaltlich nichts zu tun hat, z. B. ein metaphysischer Satz, und (inkorrekterweise – die spezielle Konsequenzbedingung gilt ja nicht für die deduktive Bestätigung), daß mit $H \wedge H'$ auch H' durch E bestätigt werde. Die Bestätigung von $H \wedge H'$ mit H ist eine einfache Folge der Grundvorstellung deduktiver Bestätigung, die nur paradox erscheint, wenn man von einem anderen Bestätigungsbegriff ausgeht, nach dem z. B. die Bestätigung einer Hypothese bedeutet, daß sie (mit all ihren Konsequenzen) gesichert oder wahrscheinlich gemacht wird.

der ableitbaren und anerkannten Basissätze abzählt; denn es wäre ja möglich, daß wir mit Hilfe einer Theorie viele Basissätze abgeleitet haben, und daß sie dennoch lange nicht so gut bewährt erscheint als eine andere Theorie, mit Hilfe derer wir wenige Basissätze abgeleitet haben. Ein Beispiel wäre der Vergleich der Hypothesen „Alle Raben sind schwarz" und „Das elektrische Elementarquantum hat den Millikanschen Wert [$1.602 \cdot 10^{-19}$ Coulomb]": Obwohl wir vermutlich bei Hypothesen von der Art der ersten mehr bestätigende Basissätze anerkannt haben, werden wir doch die Millikansche Hypothese für besser bewährt ansehen. – Über den Grad der Bewährung entscheidet also nicht so sehr die Anzahl der bewährenden Fälle, als vielmehr die *Strenge der Prüfung*, der der betreffende Satz unterworfen werden kann und unterworfen wurde".[25]

Ein weiteres Beispiel mag diesen Gedanken verdeutlichen: Wenn man eine Hypothese über den Schmelzpunkt eines Metalls prüft, so bewährt sie sich stärker an einer Voraussage, daß dieser Schmelzpunkt bei $562{,}3 \pm 0.05\,°C$ liegt, als an der Prognose, daß er zwischen $-250°$ und $+2500\,°C$ liegt", – die letztere Aussage ist ohnehin sehr wahrscheinlich richtig. Man kann also beide Bewährungen nicht gleich bewerten. Poppers Gedanke ist nun, die Strenge der Prüfung der Hypothese H an einem Beobachtungssatz E zu messen vermittels der Wahrscheinlichkeit von E aufgrund des Erfahrungswissens A: je größer der Wert $w(E/A)$, desto geringer der Informationsgehalt von E, desto geringer die Erkenntnis, die uns E vermittelt. Man kann also den metrischen Bewährungsbegriff z. B. so definieren:

D5.1–5: Für B(H,A,E) ist der *Bewährungsgrad* von H durch E bzgl. A: $b_w(H,A,E) := 1 - w(E/A)$.[26]

Wenn dann E die Konjunktion aller bisherigen Bewährungsinstanzen von H bzgl. A ist (A sei das Ausgangswissen, mit dem

[25] Popper [66], S. 212f. – Statt „Basissatz" können wir hier einfach „Beobachtungssatz" lesen.

[26] Anstelle von $1 - w(E/A)$ könnte man natürlich auch andere Funktionen von $w(E/A)$ wählen, die mit wachsendem $w(E/A)$ fallen.

wir zuerst an die Prüfung von H herangegangen sind), so ist $b_w(H,A,E)$ der (bisher erworbene) Bewährungsgrad von H (bzgl. A).

Dieser Bewährungsgrad von H bzgl. A ist von dem *Bewährbarkeitsgrad* von H bzgl. A zu unterscheiden, der bei Popper ebenfalls eine wichtige Rolle spielt, der den *Prüfbarkeitsgrad* von H messen soll, den Informationsgehalt, und den man z. B. durch $1-w(H/A)$ messen kann. Dieser Bewährbarkeitsgrad ist also von den Bewährungsinstanzen E unabhängig. Er ist aber tatsächlich nur von geringem Interesse, da für wesentlich generelle deterministische All-Hypothesen, wie für statistische Hypothesen der elementaren Form $p(F)=r$ gilt $w(H/A)=0$ für alle vernünftigen Wahrscheinlichkeitsbewertungen w.[27] Für andere Hypothesen mit $w(H/A)>0$ gilt jedoch: Je größer der Bewährbarkeitsgrad $1-w(H/A)$ von H, d. h. je kleiner $w(H/A)$ ist, desto kleiner kann wegen $H,A \rightarrow E$, also wegen $w(E/A) \geq w(H/A)$ auch $w(E/A)$ werden, desto größer kann also der Bewährungsgrad $1-w(E/A)$ von H werden (er fällt maximal mit dem Bewährbarkeitsgrad zusammen); und umgekehrt: Ist der Bewährungsgrad von H groß, so auch der Bewährbarkeitsgrad, der ja nicht kleiner sein kann.

Popper hat in [54] einen Bewährungsgrad $C(H,A,E)$ von H durch E bzgl. A definiert, der von $1-w(E/A)$ verschieden ist. Statt dessen diskutieren wir hier den in Popper [63] und [66], S. 352, Anmerkung *2 formulierten einfacheren Begriff

$$C(H,A,E)=\frac{w(E/H \cdot A)-w(E/A)}{w(E/H \cdot A)-w(H \cdot E/A)+w(E/A)}.$$

---

[27] Vgl. dazu den Abschnitt 2.5.4, sowie Popper [66], S. 325. Hier wie beim Bewährungsgrad kommt hinzu, daß die Ausdrücke $w(H/A)$ und $w(E/A)$ nur für $w(A) \neq 0$ erklärt sind, d. h. A darf z. B. keine Theorien oder Gesetze enthalten. Auch das bedeutet eine erhebliche Beschränkung für die Anwendbarkeit dieser Begriffe, da zum Hintergrundwissen A in der Regel auch akzeptierte Naturgesetze gehören. – Für Popper ist der Bewährbarkeitsgrad zugleich ein Maß der Einfachheit der Hypothese; die gehaltvollsten Theorien sind zugleich die einfachsten. Das ist in dieser Form aber sicher falsch. Vgl. dazu Popper [66], S. 100f., sowie das dort in Anmerkung *1 zu S. 101 erwähnte Argument von Weyl.

Popper fordert zunächst nicht, daß gilt $H,A \rightarrow E$. Es ist dann aber ganz unklar, was ein derart verallgemeinerter Bewährungsgrad noch mit Poppers qualitativem Bewährungsbegriff zu tun haben soll, und so sagt Popper in [66], S. 368 und 372 denn auch, daß man $C(H,A,E)$ nur dann als Bewährungsgrad interpretieren kann, wenn E eine Konjunktion ernstgemeinter Widerlegungsversuche von H ist. Wir nehmen also an $H,A \rightarrow E$ und erhalten dann $C(H,A,E) = \frac{1 - w(E/A)}{1 - w(H/A) + w(E/A)}$. Es gilt also, wegen $w(H/A) \leq w(E/A)$ $0 \leq C(H,A,E) \leq 1 - w(E/A)$. $C(H,A,E)$ wächst mit $1 - w(E/A)$, d.h. mit der Unwahrscheinlichkeit von $w(E/A)$, und sinkt mit $1 - w(H/A)$ d.h. mit dem Bewährbarkeitsgrad von H. (Das fordert auch die 8. der von Popper in [54] angegebenen Adäquatheitsbedingungen für Bewährungsmaße.) Es ist aber im Sinn Poppers höchst inadäquat, daß für zwei Theorien H und H′ mit $1 - w(H,A) > 1 - w(H'/A)$ gelten soll $C(H,A,E) < C(H',A,E)$, denn Popper will ja von zwei Hypothesen jeweils die unwahrscheinlichere, also die mit dem höheren Bewährbarkeitsgrad bevorzugen: „Was wir tun – oder tun sollten – ist, uns an die *unwahrscheinlichste der überlebenden Theorien halten*, d.h. an jene, die am strengsten überprüft werden kann.“[28]

Der Forderung Poppers in seiner 2. Adäquatheitsbedingung, daß der Bewährungsgrad einer Hypothese H immer kleiner oder gleich ihrem Bewährbarkeitsgrad sein soll, genügt, wie wir gesehen haben, auch der Bewährungsgrad $b_w(H,A,E) = 1 - w(E/A)$. Will man aber haben, daß für dasselbe E sich die Bewährungsgrade zweier in ihrem Gehalt verschiedener Hypothesen H und H′ unterscheiden, so kann man auch setzen:
$b'_w(H,A,E) := (1 - w(E/A)) \cdot (1 - w(H/A))$.
Da aber für alle wesentlich generellen Allsätze H gilt $w(H/A) = 0$, fällt $b'_w(H,A,E)$ für die interessanten generellen Hypothesen mit $b_w(H,A,E)$ zusammen.[29]

[28] Popper [66], S. 373.

[29] Good mißt in [68] den Bewährungsgrad von H durch E durch $\log \frac{w(E/H \cdot A)}{w(E/A)} - \log \frac{w(E/\overline{H} \cdot A)}{w(E/A)}$. Da er die Information von H bzgl.

Man kann ferner sagen:
D5.1–6: H *bewährt sich an* E *bzgl.* A *höchstens so gut wie* H′ *an* E′ *bzgl.* A′ genau dann, wenn B(H,A,E) und B(H′,A′,E′) und $b_w(H,A,E) \leq b_w(H',A',E')$,
und kann so auch einen *komparativen Bewährungsbegriff* einführen.

Das entscheidende Bedenken, dem die Definitionen metrischer und komparativer Bewährungsbegriffe nach D5.1–5 und D5.1–6 begegnen, liegt darin, daß der Bewährungsgrad von der subjektiven Wahrscheinlichkeitsbewertung w abhängt und so subjektiven Charakter hat. Damit ist aber die Angabe, daß eine Hypothese H sich bisher im Grad r bewährt hat, ganz uninformativ, und man muß fragen „Bzgl. welcher Bewertung w hat sich H im Grad r bewährt?" Um das anzudeuten haben wir das Symbol „b" für den Bewährungsgrad mit dem unteren Index „w" versehen. Selbst wenn man sich auf reguläre Bewertungen w beschränkt, bzgl. derer die Ereignisse, die in H als gesetzmäßig angesehen werden, vertauschbar sind, und evtl. weitere sinnvolle Beschränkungen für zulässige w angibt, so wird es doch im allgemeinen für jeden Wert r mit $0 < r < 1$ ein solches w geben, für das bei vorgegebenem A und E gilt $b_w(H,A,E) = r$.

Diese Tatsache wird oft dadurch verschleiert, daß man w als *logische* Wahrscheinlichkeitsbewertung anspricht. Wir haben aber in 2.3.3 gesehen, daß es bisher nicht gelungen ist, logische Wahrscheinlichkeitsbewertungen eindeutig zu bestimmen.[30]

A nicht durch $1 - w(H/A)$, sondern durch $-\log w(H/A)$ mißt, entspricht das einem Wert $w(E/H \cdot A) - w(E/\overline{H} \cdot A)$. Nun wird, wenn H hinreichend speziell ist, annähernd gelten $w(E/\overline{H} \cdot A) = w(E/A)$ und dann erhält man den induktiven Bestätigungsgrad von H durch E bzgl. A nach D5.2–4.

[30] Popper, der auch von einem logischen Wahrscheinlichkeitsbegriff spricht, gibt dafür keinerlei über B1* bis B5* in 2.1.3 hinausgehende Zusatzaxiome an. Offenbar ist für ihn ein Wahrscheinlichkeitswert $w(H/E) = r$ „logisch" nur für $E \rightarrow H$ und $r = 1$, oder für $E \rightarrow \neg H$ und $r = 0$. – Popper ist im übrigen ein Feind der subjektiven Wahrscheinlichkeitstheorie und ein Anhänger der Häufigkeitsdefinition der

Daher kann man mit den komparativen und metrischen Bewährungsbegriffen nach D5.1–5 und D5.1–6 nicht viel anfangen.[31]

5.2 Induktive Bestätigung

Neben dem Gedanken, daß eine empirische Hypothese H bestätigt wird durch Verifikation ihrer deduktiven Konsequenzen, ist auch die Vorstellung natürlich und naheliegend, daß H bestätigt wird durch Beobachtungssätze E, die H wahrscheinlicher machen, als H vorher war. Auch diese Vorstellung kann als Grundlage für die Präzisierung eines Bestätigungsbegriffes dienen. Sie ist aber von der Idee deduktiver Bestätigung zunächst ganz unabhängig und führt daher zu einem eigenständigen Bestätigungsbegriff, dessen Beziehungen zu dem der Bewährung nicht von vornherein deutlich sind.

Wir können den Grundgedanken dieses induktiven *Relevanzkriteriums* der Bestätigung – diese Bezeichnung verwendet Carnap, der diesen induktiven Bestätigungsbegriff vor allem vertreten hat – so formulieren:

D5.2–1: Es sei w eine subjektive Wahrscheinlichkeitsbewertung auf einem Ereigniskörper $\mathscr{K}$, es sei $H,A,E \in \mathscr{K}$ und E sei ein Satz der Beobachtungssprache. Dann definieren wir

a) E *bestätigt* H bzgl. A und w *induktiv:* $R_w(H,A,E) := w(H/E \wedge A) > w(H/A)$[1],

---

objektiven Wahrscheinlichkeit. Allgemein sind aber seine Ausführungen über wahrscheinlichkeitstheoretische Fragen nur von geringem Niveau. Vgl. dazu z. B. Popper [57b].

[31] Damit nicht aus trivialen Gründen gilt $w(E/A) = 0$, ist es im Kontext des metrischen Bewährungsbegriffs auch angezeigt, für E nur Beobachtungssätze zuzulassen. Das bedingt aber natürlich keinen Einwand gegen diesen Begriff.

[1] Man könnte auch $R_w(H,A,E)$ definieren durch $w(E/H \wedge A) > w(E/A)$; denn es gilt $\frac{w(E/H \wedge A)}{w(E/A)} = \frac{w(H/E \wedge A)}{w(H/A)}$, also $w(E/H \wedge A) > w(E/A) \equiv w(H/E \wedge A) > w(H/A)$. Vgl. dazu z. B. Mackie [63], S. 267.

b) E *entkräftet* H bzgl. A und w *induktiv:* $R^-_w(H,A,E) := w(H/E \wedge A) < w(H/A)$,

c) E ist für H bzgl. A und w *induktiv indifferent:* $R^0_w(H,A,E) := w(H/E \wedge A) = w(H/A)$.

Dabei behandeln und bezeichnen wir der Einfachheit wegen wieder die Sätze und Satzoperationen und die mengentheoretischen Operationen, denen diese entsprechen, bzw. die mengentheoretisch verstandenen Ereignisse, die jene ausdrücken, gleich.

A stellt bei der Anwendung dieses Bestätigungsbegriffs, intuitiv gesprochen, das gesamte verfügbare Erfahrungswissen dar, bevor festgestellt ist, ob E wahr ist. H ist die fragliche Hypothese, für die E im Fall (a) bzgl. A *positiv relevant* ist, im Fall (b) *negativ relevant* und im Fall (c) indifferent. Im Fall (a) gilt nicht $A \rightarrow E$, denn sonst wäre $E \wedge A = A$, also $w(H/E \wedge A) = w(H/A)$, und nicht $H \rightarrow \neg A$, denn sonst wäre $w(H/E \wedge A) = w(H/A) = 0$. H ist also nicht kontradiktorisch, und A, E und $A \wedge E$ sind ebenfalls nicht kontradiktorisch, da sonst $w(H/E \wedge A)$, bzw. $w(H/A)$ nicht definiert wäre. E ist auch nicht tautologisch, sonst wäre wieder $E \wedge A = A$, also $w(H/E \wedge A) = w(H/A)$.

Carnap verwendet anstelle subjektiver Wahrscheinlichkeitsbewertungen w logische Bewertungen c. Wir folgen ihm darin wegen der in 2.3.3 aufgewiesenen Schwierigkeiten des logischen Wahrscheinlichkeitsbegriffs nicht. Carnap hat ursprünglich die logische Wahrscheinlichkeit c(H/E) auch als „degree of confirmation“, als *Bestätigungsgrad* von H durch E bezeichnet und diskutiert in [50] den Gedanken, daß ein Satz E eine Hypothese H bestätigt, wenn gilt $c(H/E) > r$, wobei r eine feste Zahl $\geq \frac{1}{2}$ sei. Dieser Ansatz liegt nahe, wenn man, wie Carnap das ursprünglich tat, c(H/E) auch als Grad der partiellen Implikation von H durch E versteht. Denn dann stellt dieses Kriterium so etwas wie eine Liberalisierung des Verifikationskriteriums dar (vgl. D5.1–4). Carnap hat jedoch in [50] betont, daß ein derartiger Bestätigungsbegriff ganz inadäquat wäre, weil $c(H/E) > r$ selbst dann gelten könnte, wenn $c(H/E) < c(H/T)$ ist (T sei eine Tautologie); in einem solchen Fall würde man aber sicher nicht von einer Bestätigung von H durch E sprechen wollen. Da die Bestätigung von H durch E sich im *Zuwachs* der Wahrscheinlichkeit von H durch E und nicht im *Wert* der Wahrscheinlichkeit von H bei E ausdrückt, hat Carnap später auch die Bezeichnung „degree of confirmation" für die logische Wahrscheinlichkeit c(H/E) aufgegeben.[2]

Der induktive Bestätigungsbegriff $R_w(H,A,E)$ nach D5.2–1 erfüllt – wenn man R_w für B schreibt – folgende Bedingungen aus 5.1:[3] die *Äquivalenzbedingung* (I), die *Folgerungsbedingung* (IVb) für $w(E \wedge A) > 0$,[4] die *konverse Folgerungsbedingung* (IVa) für den Normalfall $w(E/A) < 1$ und $w(H/A) > 0$,[5] sowie die *konverse spezielle Konsistenzbedingung* (Va).[6]

---

[2] Vgl. dazu das Vorwort zur 2. Auflage von Carnap [50], S. XVIff. und S. 475f.

[3] Für die Diskussion von Adäquatheitskriterien für die Relation der induktiven Bestätigung vgl. auch Carnap [50], S. 473ff., dessen Beweisen wir hier teilweise folgen, und Lenzen [72], IID.

[4] Für $E,A \rightarrow H$ ist $w(H/E \wedge A) = 1$ für $w(E \wedge A) > 0$. Da nicht gilt $A \rightarrow H$, ist aber für reguläre w $w(H/A) < 1$.

[5] Für $H,A \rightarrow E$ ist $A \wedge H \wedge E = H \wedge A$, also $w(H/E \wedge A) = \frac{w(H/A)}{w(E/A)} > w(H/A)$ für $w(E/A) < 1$ (was man wegen der Ungültigkeit von $A \rightarrow E$ für reguläre w voraussetzen kann) und $w(H/A) \neq 0$ (was man wegen der Ungültigkeit von $H \rightarrow \neg A$ für reguläre w ebenfalls annehmen kann).

[6] Es ist $w(H/A \wedge \bar{E}) = \frac{w(H \wedge A \wedge \bar{E})}{w(A \wedge \bar{E})} = \frac{w(H \wedge A) - w(A \wedge H \wedge E)}{w(A) - w(A \wedge E)}$. Ist nun $\frac{w(H \wedge A)}{w(A)} < \frac{w(A \wedge H \wedge E)}{w(A \wedge E)}$, also $w(A \wedge H \wedge E) > \frac{w(H \wedge A) \cdot w(A \wedge E)}{w(A)}$, so ist $w(H/A \wedge \bar{E}) < \frac{w(H \wedge A)(w(A) - w(A \wedge E))}{w(A)(w(A) - w(A \wedge E))} = w(H/A)$. Gilt also $R_w(H,A,E)$, so gilt $R_w(H,A,\bar{E})$ nicht. – Entsprechend argumentiert man im Fall mehrerer Sätze $E_1, \ldots, E_n$, deren Menge inkonsistent ist.

Es gelten dagegen *nicht* die *spezielle Konsequenzbedingung* (IIb),[7] die *konverse Folgebedingung* (IIIb),[8] die *spezielle Konsistenzbedingung* (Vb),[9] sowie die *konverse Konsequenzbedingung* (IIa),[10] und die *Folgebedingung* (IIIa).[11]

Durch die Verschiedenheit der Adäquatheitskriterien, die für deduktive und induktive Bestätigung gelten, sind die beiden Begriffe auch formal als Begriffe mit deutlich verschiedenen Eigenschaften charakterisiert.

Während für die Relation der deduktiven Bestätigung die Bedingungen IIa (die konverse Konsequenzbedingung) und IVa (die konverse Folgerungsbedingung) typisch sind, sind für die Relation der induktiven Bestätigung die Bedingungen IVa und IVb (die Folgerungsbedingung) – beide mit Einschränkungen – typisch. Die inhaltliche Verschiedenheit, die Unterschiedlichkeit der den beiden Bestätigungsbegriffen zugrundeliegenden intuitiven Vorstellungen haben wir schon eingangs betont.

---

[7] Es sei $A = H_1 \cdot \bar{H}_2 \cdot \bar{H}_3 + \bar{H}_1 \cdot H_2 \cdot \bar{H}_3 + \bar{H}_1 \cdot \bar{H}_2 \cdot H_3$ und $w(H_{i_1} \cdot \bar{H}_{i_2} \cdot \bar{H}_{i_3}) = w(H_{j_1} \cdot \bar{H}_{j_2} \cdot \bar{H}_{j_3}) = a > 0$ für alle $i_1, j_1 = 1,2,3$. Dann gilt $w(H_2/A \cdot \bar{H}_1) > w(H_2/A)$ und $H_2 \rightarrow H_1 \cup H_2$, aber nicht $w(H_1 \cup H_2/A \cdot \bar{H}_1) > w(H_1 \cup H_2/A)$. Denn es ist $w(H_1 \cup H_2/A \cdot \bar{H}_1) = w(H_2/A \cdot \bar{H}_1) = \frac{1}{2} > w(H_2/A) = \frac{1}{3}$, und $w(H_1 \cup H_2/A) = \frac{2}{3}$.

[8] Ist z.B. $E', A \rightarrow E$, aber nicht $E' \rightarrow \neg A$, und gilt $w(H/A) = \frac{1}{2}$, $w(H \cdot E \cdot A) = \frac{1}{6}$, $w(A \cdot E) = \frac{1}{4}$, $w(E' \cdot H) = \frac{1}{6}$, $w(E' \cdot H \cdot A) = \frac{1}{12}$, so ist $w(H/A \cdot E) = \frac{2}{3}$ und $w(H/A \cdot E') = \frac{1}{2} = w(H/A)$.

[9] Unter der Voraussetzung von Anmerkung 7 gilt: $w(H_2/A \cdot \bar{H}_1) > w(H_2/A)$, und $w(H_3/A \cdot \bar{H}_1) > w(H_3/A)$, obwohl H_2 und H_3 mit A unverträglich sind.

[10] Unter den Voraussetzungen von Anmerkung 7 gilt: $w(H_2/A \cdot \bar{H}_1) > w(H_2/A)$ und $H_2 \cdot H_3 \rightarrow H_2$, aber nicht $w(H_2 \cdot H_3/A \cdot \bar{H}_1) > w(H_2 \cdot H_3/A)$, wegen $w(H_2 \cdot H_3/A) = w(H_2 \cdot H_3/A \cdot \bar{H}_1) = 0$.

[11] Unter den Voraussetzungen der Anmerkung 7 gilt: $w(H_2/A \cdot \bar{H}_1) > w(H_2/A)$ und $\bar{H}_1 \rightarrow \bar{H}_1 \cup \bar{H}_3$, aber nicht $w(H_2/A \cdot (\bar{H}_1 \cup \bar{H}_3)) > w(H_2/A)$, wegen $A \cdot (\bar{H}_1 \cup \bar{H}_2) = A$.

Die Definition des klassifikatorischen induktiven Bestätigungsbegriffs nach D5.2–1 führt nun zu folgenden Schwierigkeiten:

1. Eine Bestätigungsbeziehung soll keine subjektiven Momente enthalten, da sie in wissenschaftlich-intersubjektiver Weise die Relevanz von Beobachtungen für eine Hypothese charakterisieren soll. Dieser Forderung genügt der deduktionslogische Bewährungsbegriff nach D5.1–1, nicht aber der unter Bezugnahme auf eine subjektive Wahrscheinlichkeitsbewertung w formulierte induktive Bestätigungsbegriff. Es kann durchaus sein, daß für eine Bewertung w_1 ein Satz E positiv relevant ist für H bzgl. A, der für w_2 negativ relevant oder indifferent ist für H bzgl. A.

Diese Schwierigkeit ist bei Carnap weniger offensichtlich, weil er sich nicht auf einen subjektiven, sondern speziell auf einen logischen Wahrscheinlichkeitsbegriff stützt, von dem er hoffte, er würde sich eindeutig bestimmen lassen. Daher entfällt bei Carnap auch die Relativierung der Bestätigung auf eine Wahrscheinlichkeitsbewertung w. Die in 2.3.3 diskutierten Schwierigkeiten des logischen Wahrscheinlichkeitsbegriffs lassen es aber, wie gesagt, als wenig vorteilhaft erscheinen, ihn anstelle des subjektiven Begriffs in D5.2–1 zu verwenden.

Die Relativierung des Bestätigungsbegriffes durch Wahrscheinlichkeitsbewertungen führt aber nicht dazu, daß dieser Begriff für wissenschaftliche Zwecke unbrauchbar würde. Denn wenn sich auch die Werte $w(H/E \wedge A)$, $w(H/A)$ für verschiedene w erheblich unterscheiden können, gilt das für die Beziehungen $w(H/E \wedge A) > w(H/A)$ nur in sehr viel geringerem Maß. Wenn wir z. B. an den Standardfall der Bestätigung einer Hypothese $F(a_{n+1})$[12] durch einen Satz $F(a_n)$ bzgl. eines Satzes A denken, in dem die Konstanten a_n und a_{n+1} nicht vorkommen, so wird man immer nur reguläre Bewertungen w verwenden, bzgl. derer

[12] Die Diskussion der 2. Schwierigkeit des induktiven Bestätigungsbegriffs wird unten zeigen, warum wir hier nicht die Wahrscheinlichkeit einer Hypothese $\bigwedge x F(x)$, sondern ihre Instanzenwahrscheinlichkeit als typischen Fall betrachten.

die Ereignisse $F(a_i)$ vertauschbar sind. Für alle solche Bewertungen gilt aber die Beziehung $w(F(a_{n+1})/F(a_n) \wedge A) > w(F(a_{n+1})/A)$ nach den in 2.1.6 angegebenen Sätzen.

2. Für wesentlich generelle All-Hypothesen H ist in der Regel $w(H/E \wedge A) = w(H/A) = 0$.[13] D.h. schon eine so einfache Hypothese wie „Alle Raben sind schwarz" kann auch durch noch so viele Beobachtungen schwarzer Raben nicht bestätigt, und durch noch so viele Beobachtungen weißer Raben nicht entkräftet werden.

Diesem Einwand versuchte K. Popper, der in [66] auch der Meinung war, daß die positive Relevanz von neuen Erfahrungsdaten für eine Hypothese ein naheliegendes Bestätigungskriterium sei,[14] dadurch zu entgehen, daß er unter Benutzung der Äquivalenz $w(H/E \wedge A) > w(H/A) \equiv w(E/H \wedge A) > w(E/A)$ (d.h.: ein Beobachtungssatz E erhöht die Wahrscheinlichkeit der Hypothese H bzgl. A genau dann, wenn H die Wahrscheinlichkeit von E bzgl. A erhöht) die induktive Bestätigung durch $w(E/H \wedge A) > w(E/A)$ charakterisierte. Nach den Axiomen B1* bis B5* für bedingte Wahrscheinlichkeiten aus 2.1.3 ist der Wert $w(E/H \wedge A)$ nur für $H \wedge A \rightarrow E$ und für $H \wedge A \rightarrow \neg E$ festgelegt, während wegen $w(H) = 0$ dieser Wert sonst weitgehend willkürlich ist.[15] Daher kann man aufgrund eines solchen Bestätigungskriteriums nur sagen: E bestätigt H bzgl. A, falls E aus H und A folgt, und E entkräftet H bzgl. A, wenn $\neg$ E aus H und A folgt. Das leistet aber auch der deduktive Bestätigungsbegriff.

Man kann also für H,E und A in $R_w(H,A,E)$ zunächst nur Aussagen mit nicht verschwindender Wahrscheinlichkeit ein-

---

[13] Vgl. dazu den Abschnitt 2.5.4. Für Existenzhypothesen gilt entsprechend $w(H/E \wedge A) = w(H/A) = 1$.

[14] Popper schreibt in [66], Anhang *IX, S. 340: „Wenn wir aufgefordert werden, ein Kriterium dafür anzugeben, daß die Tatsachenfeststellung y einen Satz x bewährt oder bestätigt, dann ist die am ehesten zu erwartende Antwort: „y muß die Wahrscheinlichkeit von x erhöhen".

[15] Vgl. dazu die Anmerkung 19 zu 2.1.

setzen. Das ist für E nicht weiter problematisch, da man gewöhnlich ohnehin annimmt, daß E ein Beobachtungssatz ist; für A kann man zur Not annehmen, daß dieser Satz als Erfahrungsdatum eine Konjunktion von Beobachtungssätzen ist. Die Anwendbarkeit des induktiven Bestätigungsbegriffs auf deterministische Hypothesen wird aber sicher stark beschränkt, wenn man für H keine wesentlich generellen All-Hypothesen einsetzen kann.

Ein Ausweg bietet sich hier an, wenn man die Instanzenwahrscheinlichkeit von H anstelle der Wahrscheinlichkeit von H selbst verwendet, wie das Carnap in [50], §110G vorgeschlagen hat.[16] Da Carnap die Instanzenwahrscheinlichkeit als Maß für die *Verläßlichkeit* einer Hypothese anspricht, gibt der so charakterisierte Bestätigungsbegriff ein Kriterium der Relevanz eines Satzes E für die Verläßlichkeit von H.

D5.2–2 Es sei w eine subjektive Wahrscheinlichkeitsbewertung auf einem Ereigniskörper $\mathcal{K}$, bzgl. der die Ereignisse der Form F(a) (mit irgendwelchen Konstanten a) vertauschbar sind; es seien F(a), A,E$\in\mathcal{K}$, E sei ein Beobachtungssatz und die Konstante a komme nicht in A vor. Ferner sei $\wedge xF(x)$ mit A verträglich.[17] Dann definieren wir:

a) $Ri_w(\wedge xF(x),A,E) := w(F(a)/E \wedge A) > w(F(a)/A)$

b) $Ri_w^-(\wedge xF(x),A,E) := w(F(a)/E \wedge A) < w(F(a)/A)$

c) $Ri_w^o(\wedge xF(x),A,E) := w(F(a)/E \wedge A) = w(F(a)/A)$.

Wir sprechen dabei auch von einer *Bestätigung (Entkräftung, Indifferenz) der Verläßlichkeit* der Hypothese $\wedge xF(x)$.

[16] Zur Instanzenwahrscheinlichkeit vgl. den Abschnitt 2.5.4.

[17] Diese Bedingung schließt aus, daß eine Hypothese, die bereits aufgrund von A falsifiziert ist, noch durch E bestätigt oder entkräftet werden kann, – ein Einwand, der von Popper wiederholt gegen Carnap vorgebracht worden ist. In *praktischen* Kontexten macht es allerdings für sehr verläßliche Hypothesen keinen Unterschied, ob sie falsifiziert sind oder nicht; dann wird man diese Zusatzbedingung fallen lassen. – Hat die Hypothese die Gestalt $\wedge x_1 \ldots x_n F(x_1, \ldots, x_n)$, so ist $F(a_1, \ldots, a_n)$ als Instanz anzusehen. In A und E dürfen dann die Konstanten $a_1, \ldots, a_n$ nicht vorkommen.

Wir haben in 2.5.4 besprochen, daß es in Entscheidungssituationen für die Brauchbarkeit einer Hypothese $\bigwedge xF(x)$ vielfach nur auf die Wahrscheinlichkeit des nächsten Falles F(a) ankommt. Insofern ist in vielen Fällen auch die Verläßlichkeit einer Hypothese relevant für ihre Beurteilung. Für Sätze mit verschränkten Quantoren wie $\bigwedge x \bigvee y F(x,y)$ oder $\bigwedge x \bigvee y \bigwedge z G(x,y,z)$ hilft freilich die Instanzenwahrscheinlichkeit auch nicht viel weiter: im ersten Fall ist
$w(\bigvee yF(a,y)/E \wedge A) = w(\bigvee yF(a,y)/A) = 1$, im zweiten Fall ist
$w(\bigvee y \bigwedge zG(a,y,z)/E \wedge A) = w(\bigvee y \bigwedge zG(a,y,z)/A) = 0$ wegen
$w(\bigwedge zG(a,b,z)) = 0$ für alle b.

Carnap betrachtet a.a.O. für Hypothesen der Gestalt $\bigwedge x(F(x) \supset G(x))$ neben der Instanzenwahrscheinlichkeit auch eine *qualifizierte Instanzenwahrscheinlichkeit* bzgl. A, die definiert wird als $w(G(a)/F(a) \wedge A)$, wobei die Konstante a nicht in A vorkommen soll. Dann kann man definieren:

D5.2–3 Es sei w eine subjektive Wahrscheinlichkeitsbewertung auf dem Ereigniskörper $\mathscr{K}$, bzgl. der die Ereignisse der Form $F(a) \supset G(a)$ vertauschbar sind; es seien F(a), G(a), $A, E \in \mathscr{K}$, E sei ein Beobachtungssatz und die Konstante a komme nicht in A vor; ferner sei A mit $\bigwedge x(F(x) \supset G(x))$ verträglich. Dann setzen wir

a) $Riq_w(H,A,E) := w(G(a)/F(a) \wedge E \wedge A) > w(G(a)/F(a) \wedge A)$

b) $Riq_w^-(H,A,E) := w(G(a)/F(a) \wedge E \wedge A) < w(G(a)/F(a) \wedge A)$

c) $Riq_w^0(H,A,E) := w(G(a)/F(a) \wedge E \wedge A) = w(G(a)/F(a) \wedge A)$.

Und wir sprechen dabei auch von der *Bestätigung (Entkräftung* und *Indifferenz)* der *qualifizierten Verläßlichkeit* von $\bigwedge x(F(x) \supset G(x))$ bzgl. A und w.

Wie wir unten bei der Diskussion der Rabenparadoxie sehen werden, entspricht die Verwendung der qualifizierten Instanzenwahrscheinlichkeit bei der induktiven Bestätigung in vielen Situationen besser deren intuitivem Verständnis.

3. Eine entsprechende Schwierigkeit wie für wesentlich generelle deterministische Hypothesen besteht auch für statistische Hypo-

thesen H. Betrachten wir den einfachsten Fall, daß H die Gestalt $p(F)=r$ hat. Dann ist für ein reguläres w, für das die Ereignisse der Gestalt $F(a_i)$ $(i=1,2,..)$ vertauschbar sind, $w(p(F)=r)=0$, also $w(p(F)=r/E \wedge A)=w(p(F)=r/A)=0$ für alle Sätze E und A.

Hier bleibt nur übrig, anstelle der Instanzenwahrscheinlichkeit die Wahrscheinlichkeit von statistischen Hypothesen der Form $p(F)=r\pm\varepsilon$ zu ermitteln, wo $\varepsilon>0$ eine (gegenüber 1) sehr kleine Zahl ist, die von Fall zu Fall so zu wählen ist, daß der Zweck, den wir mit der Überprüfung von $p(F)=r$ verfolgen, auch durch die Überprüfung von $p(F)=r\pm\varepsilon$ erreicht wird. In praktischen Entscheidungskontexten ist das, ebenso wie die Verwendung der Instanzenwahrscheinlichkeit, wohl immer unproblematisch, nicht hingegen in theoretischen Kontexten.

4. K. Popper hat in [58] folgende „Paradoxie der idealen Evidenz" formuliert: Geht man von der (vorerst unbegründeten) Vermutung H aus, daß die Wahrscheinlichkeit, mit dieser Münze „Kopf" zu werfen, 1/2 sei und ist E ein Satz, der besagt, daß in der Hälfte sehr vieler Würfe mit der Münze „Kopf" aufgetreten ist, so würde man üblicherweise sagen, daß E die Hypothese H sehr gut bestätigt. Nach D5.2–1 ist aber E indifferent bzgl. H, da die Wahrscheinlichkeit von H aufgrund von E mit der Ausgangswahrscheinlichkeit von H identisch ist.

Hier liegt jedoch eine Verwechslung von subjektiver und objektiver Wahrscheinlichkeit vor: Die Ausgangshypothese läßt sich nicht durch $w(H)=r$ wiedergeben. $w(H)=r$ ist keine zu begründende Annahme über die Natur der Münze. Eine solche Annahme kann nur so charakterisiert werden, daß die subjektive Wahrscheinlichkeitsdichte ein mehr oder minder deutlich ausgeprägtes Maximum bei den Ergebnisfolgen x hat, bei denen die Grenzwerte der relativen Häufigkeiten H bei $\frac{1}{2}\pm\varepsilon$ liegen – wir hatten oben schon betont, daß das Relevanzkriterium nur auf derart abgeschwächte statistische Hypothesen anwendbar ist –, daß also die Hypothese $p(H)=\frac{1}{2}\pm\varepsilon$ gegenüber anderen statistischen Hypothesen subjektiv bevorzugt wird. Wäre $w(p(H) = \frac{1}{2} \pm \varepsilon) = 1$, so wäre w nicht regulär und als dogmatisches Vorurteil für Bestätigungszwecke nicht brauchbar.

Es ist nun aber $w(p(H) = \frac{1}{2} \pm \varepsilon/E) > w(p(H) = \frac{1}{2} \pm \varepsilon)$ nach T2.1.6–2 für eine (bzgl. ε) hinreichend große Zahl von Münzwürfen, über die E berichtet.[18]

5. Über das Auftreten der *Paradoxie von Goodman* haben wir bereits im Abschnitt 2.3.3 ausführlich gesprochen und haben dort gesehen, daß diese Paradoxie zwar den logischen Wahrscheinlichkeitsbegriff ad absurdum führt, nicht aber den hier im Kontext induktiver Bestätigung verwendeten subjektiven Wahrscheinlichkeitsbegriff; für den läßt sich das Problem auf den Ansatz der Vertauschbarkeit abschieben.

6. Die in 5.1 formulierte *Raben-Paradoxie* ergibt sich für den induktiven Bestätigungsbegriff – aus den unter (2) genannten Gründen wird man hier die Relation „Ri" verwenden –, wenn man wieder reguläre Wahrscheinlichkeitsbewertungen w zugrundelegt, für die die Ereignisse $F(a_i) \supset G(a_i)$ vertauschbar sind. Im System der logischen Wahrscheinlichkeit von Carnap erhält

---

[18] Popper trägt diese „Paradoxie" a.a.O. als Einwand gegen die subjektive Wahrscheinlichkeitstheorie vor, und betrachtet daher die Aussage $w(H_n) = \frac{1}{2}$, wo H_n das Ereignis ist, daß beim n-ten Wurf (z.B. $n = 2000$) mit der Münze „Kopf" auftritt. Es gilt natürlich dann $w(H_n/E) = \frac{1}{2}$, aber $w(H_n) = \frac{1}{2}$ ist keine Hypothese über die Natur, sondern eine Angabe über unsere Wettbereitschaft, und diese Wettbereitschaft ist nichts, was sich zu bestätigen hätte, sondern etwas, das allenfalls aufgrund von E zu modifizieren wäre – wofür aber im vorliegenden Fall bei der angegebenen Wahl von E kein Anlaß besteht. – Für die objektive Interpretation der Wahrscheinlichkeitshypothese, für $p(H) = \frac{1}{2}$, bleibt Poppers Auflösung der „Paradoxie" ganz im Vagen.

man, wenn man von der Prädikatfamilie $P_1(x) \equiv F(x) \wedge G(x)$, $P_2(x) \equiv F(x) \wedge \neg G(x)$, $P_3(x) \equiv \neg F(x) \wedge G(x)$, $P_4(x) \equiv \neg F(x) \wedge \neg G(x)$ ausgeht: $c(F(a) \supset G(a)/A) = c(\neg (F(a) \wedge \neg G(a))/A) = 1 - \frac{n_2 + \lambda/4}{n+\lambda}$, wobei n_i die Zahl der Objekte aus A ist mit der Eigenschaft $P_i(x)$ und $n = \sum_{i=1}^{4} n_i$.[19] A sei ein Satz der Gestalt $\bigwedge_{i=1}^{n} P_{k_i}(a_i)$.

Unabhängig von der Wahl des Parameters λ und von n gilt also, daß alle Sätze, die nicht Instanzen von P_2 sind, also n_2 nicht erhöhen, die Instanzenwahrscheinlichkeit der Hypothese $\bigwedge x(F(x) \supset G(x))$ erhöhen, denn es ist $1 - \frac{n_2 + \frac{\lambda}{4}}{n+1+\lambda} > 1 - \frac{n_2 + \frac{\lambda}{4}}{n+\lambda}$. Die Instanzenwahrscheinlichkeit der Hypothese kann also hoch sein allein aufgrund einer hohen Wahrscheinlichkeit von $\neg F(a)$, die sich aus einem großen Wert $n_3 + n_4$ ergibt.

Für die Relation „Riq" tritt die Paradoxie hingegen nicht auf: Diese Relation orientiert sich mehr am umgangssprachlichen Verständnis der Hypothese „Alle F sind G" und genügt auch nicht der Äquivalenzbedingung: Es gilt z. B. nicht allgemein $w(G(a)/F(a) \wedge A) > w(G(a)/F(a)) \equiv w(\neg F(a)/\neg G(a) \wedge A) > w(\neg F(a)/\neg G(a))$. In Carnaps System der logischen Wahrscheinlichkeit finden wir

$$c(G(a)/F(a) \wedge A) = 1 - \frac{n_2 + \frac{\lambda}{4}}{n_1 + n_2 + \frac{\lambda}{2}};$$

[20] daher gilt

[19] Diese Formel ergibt sich aus T2.3.2–1. Vgl. dazu auch Carnap [50], § 110G.

[20] Das ergibt sich aus T2.3.2–1 mit dem Multiplikationssatz, nach dem gilt $c(G(a)/F(a) \wedge A) = \frac{c(G(a) \wedge F(a)/A)}{c(F(a)/A)}$. – Vgl. dazu auch Carnap [50], § 110G.

$$c(G(a)/F(a) \wedge F(b) \wedge G(b) \wedge A) = 1 - \frac{n_2 + \frac{\lambda}{4}}{n_1 + n_2 + 1 + \frac{\lambda}{2}} >$$

$$1 - \frac{n_2 + \frac{\lambda}{4}}{n_1 + n_2 + \frac{\lambda}{2}} = c(G(a)/F(a) \wedge A).$$

Es gilt aber nicht, daß mit den Sätzen $F(a) \wedge G(b)$ auch die Sätze $\neg F(b) \wedge \neg G(b)$ die Hypothese bestätigen, denn die qualifizierte Instanzenwahrscheinlichkeit von $\bigwedge x(F(x) \supset G(x))$ hängt nur von n_1 und n_2 ab, nicht aber von n_4 oder n.

Die Auflösung der Paradoxie hat sich schon in 5.1 durch die Bemerkung ergeben, daß der Anschein einer Paradoxie sich auf eine von der hier zugrunde gelegten logischen Interpretation der Hypothesen „Alle Fs sind G" abweichende umgangssprachliche Interpretation stützt.

Dem ist auch hier nichts weiter hinzuzufügen.[21] Man hat aber versucht, unter Bezugnahme auf den unten skizzierten komparativen Begriff induktiver Bestätigung die Paradoxie noch ge-

---

[21] Das zweite in 5.1 angegebene Hempelsche Argument zur Auflösung der Rabenparadoxie läßt sich für die Relation R_w so wiedergeben (auf die Relationen Ri_w und Riq_w lassen sich Hempels Überlegungen nicht übertragen, da sich dort die Beobachtungssätze E auf andere Objekte beziehen, als sie in der Hypotheseninstanz erwähnt werden): Wenn H eine Hypothese der Gestalt $\bigwedge x(F(x) \supset G(x))$ ist und der zugrunde gelegte Individuenbereich endlich ist, so daß gilt $w(H) > 0$, so ist
$w(H/F(a) \wedge G(a) \wedge A) > w(H/A)$ und analog
$w(H/\neg F(a) \wedge \neg G(a) \wedge A) > w(H/A)$. In der Regel gilt auch
$w(H/F(a) \wedge G(a) \wedge A) > w(H/F(a) \wedge A)$ und analog
$w(H/\neg F(a) \wedge \neg G(a) \wedge A) > w(H/\neg G(a) \wedge A)$.

Denn wenn wir setzen $H_i = F(a_i) \supset G(a_i)$ und $a = a_0$, so ist für $H = \bigwedge_{i=0}^{n} H_i$ $H \wedge F(a) \wedge G(a) \equiv (\bigwedge_{i=1}^{n} H_i) \wedge F(a) \wedge G(a) \equiv H \wedge F(a)$. Es ist also nauer zu durchleuchten, und wegen der Bedeutung dieser Problematik in der einschlägigen Literatur muß hier darauf in der gebotenen Kürze eingegangen werden:

J. Hosiasson-Lindenbaum hat in [40] ein Argument formuliert, nach dem sich die intuitiv plausible Tatsache, daß die Beobachtung eines schwarzen Rabens die Rabenhypothese induktiv stärker bestätigt als die Beobachtung eines nichtschwarzen Nichtrabens, quantitativ darstellen lassen soll. Sie geht dabei von dem Gedanken aus, daß 1. für $H,A \rightarrow E$ gilt $w(H/E \wedge A) = \frac{w(H/A)}{w(E/A)}$ für $w(E/A) \neq 0$, daß also der Bestätigungsgrad $w(H/E \wedge A) - w(H/A) = w(H/A)\left(\frac{1}{w(E/A)} - 1\right)$ umso größer ist, je kleiner $w(E/A)$ ist, und daß 2. $w(G(a)/A)$ kleiner ist als $w(\neg F(b)/A)$, wenn in A die Information enthalten ist, daß es weniger Raben (F) als nichtschwarze Dinge ($\neg$ G) gibt. Aus der Rabenhypothese $\bigwedge x(F(x) \supset G(x))$ folgt G(a) mit F(a) und $\neg$ F(b) mit $\neg$ G(b). Sind also in A die Sätze F(a) und $\neg$ G(b) (für verschiedene Gegenstandskonstanten a und b, die sonst in A nicht vorkommen sollen) ent-

---

$\frac{w(H \wedge F(a) \wedge G(a)/A)}{w(F(a) \wedge G(a)/A)} > \frac{w(H \wedge F(a)/A)}{w(F(a)/A)}$ für $w(F(a)/A) > w(F(a) \wedge G(a)/A)$, was in der Regel gelten wird.

Es gilt aber andererseits im allgemeinen
$w(H/F(a) \wedge G(a) \wedge A) = w(H/G(a) \wedge A)$, und analog
$w(H/\neg F(a) \wedge \neg G(a) \wedge A) = w(H/\neg F(a) \wedge A)$. Denn es ist $H \wedge G(a) \equiv (\bigwedge_{i=1}^{n} H_i) \wedge G(a)$, also

$$\frac{w(H \wedge F(a) \wedge G(a)/A)}{w(F(a) \wedge G(a)/A)} = \frac{w(H \wedge G(a)/A)}{w(G(a)/A)}$$

für $\frac{w(G(a)/A)}{w(F(a) \wedge G(a)/A)} = \frac{w((\bigwedge_{i=1}^{n} H_i) \wedge G(a)/A)}{w((\bigwedge_{i=1}^{n} H_i) \wedge F(a) \wedge G(a)/A)}$, d.h.

für $w(F(a)/G(a) \wedge A) = w(F(a)/G(a) \wedge A \wedge (\bigwedge_{i=1}^{n} H_i))$, was in der Regel gelten wird.

halten, so bestätigt der Satz G(a) die Hypothese in stärkerem Maße als $\neg F(b)$.

Dieses Argument setzt zunächst voraus, daß die Rabenhypothese nur für endliche Objektbereiche formuliert wird, denn sonst ist $w(H/E \wedge A) = w(H/A) = 0$. Eine solche Voraussetzung ist aber in vielen Fällen nicht angemessen. Geht man hingegen zur Betrachtung der Instanzenwahrscheinlichkeiten von H über, so ist $w(F(a) \supset G(a)/G(a) \wedge A) = w(G(a)/G(a) \wedge A) =$ $w(F(b) \supset G(b)/ \neg F(b) \wedge A) = w(\neg F(b)/ \neg F(b) \wedge A) = 1$ und $w(F(a) \supset G(a)/A) = w(G(a)/A)$ und $w(F(b) \supset G(b)/A) =$ $w(\neg F(b)/A)$. Es ist also $w(F(a) \supset G(a)/G(a) \wedge A) -$ $w(F(a) \supset G(a)/A) = w(\neg G(a)/A)$ und $w(F(b) \supset G(b)/ \neg F(b) \wedge A)$ $- w(F(b) \supset G(b)/A) = w(F(b)/A)$. Ist also, wie angenommen wurde, $w(G(a)/A) < w(\neg F(b)/A)$, so ist $w(F(b)/A) < w(\neg G(a)/A)$, und wir erhalten wieder das obige Ergebnis, daß die Beobachtung, daß ein Objekt, von dem wir wissen, daß es ein Rabe ist, auch schwarz ist, die Rabenhypothese stärker bestätigt als die Beobachtung, daß ein Ding, von dem wir wissen, daß es nicht schwarz ist, auch kein Rabe ist.[22]

I. Scheffler hat in [63], S. 284 aber darauf hingewiesen, daß die Raben-Paradoxie auch in Fällen von Hypothesen der Gestalt $\bigwedge x(F(x) \supset G(x))$ auftritt, in denen es nicht weniger Fs als nicht-Gs gibt. In der Tat braucht man die Hypothesen nur anders zu formulieren: Geht man von der Aussage $\bigwedge x(\neg G(x) \supset \neg F(x))$ aus, so steht jetzt $\neg G$ anstelle von F und F anstelle von $\neg G$. Diese

---

[22] Vgl. zu diesem Thema auch Suppes [66a], sowie die Arbeit [58] von H.G. Alexander, wo folgendes Argument vorgetragen wird: Sind die objektiven Wahrscheinlichkeiten von F und G $p(F) = f$ und $p(G) = g$, so setzt Alexander für $B_1 = F(a) \wedge G(a)$, $B_2 = F(a) \wedge \neg G(a)$, $B_3 = \neg F(a) \wedge G(a)$, $B_4 = \neg F(a) \wedge \neg G(a)$ folgende Wahrscheinlichkeiten an: $w(B_1) = f \cdot g$, $w(B_2) = f \cdot (1-g)$, $w(B_3) = g(1-f)$, $w(B_4) = (1-f)(1-g)$. Mit $w(B_1/H) = f$, $w(B_2/H) = 0$, $w(B_3/H) = g-f$, $w(B_4/H) = 1-g$ erhält man dann für $0 < f,g < 1$: $w(H/B_1) > w(H/B_4)$ für $f < 1-g$, mit $w(H/B_i) = w(H) \cdot \frac{w(B_i/H)}{w(B)}$. Dabei sei w eine aufgrund der Kenntnis von $p(F) = f$ und $p(G) = g$ gebildete Wahrscheinlichkeit.

Hypothese wird aber, so waren wir mit der Annahme der Äquivalenzbedingung (I) übereingekommen, ebenso bestätigt wie die logisch-äquivalente Raben-Hypothese. Daß diese Überlegungen das Argument von J. Hosiasson-Lindenbaum nicht zunichte macht, liegt allein daran, daß dort, wie in der Relation Riq, das Datum A nur $F(a)$ und $\neg G(b)$, nicht aber $\neg G(a)$ und $F(b)$ enthält. Für Riq hatten wir aber schon oben die Paradoxie eliminiert.

Man kann also auch für den induktiven Bestätigungsbegriff die Diskussion der Rabenparadoxie so zusammenfassen: Es liegt keine echte Paradoxie vor. Der Anschein einer Paradoxie ergibt sich aus einer inadäquaten Interpretation der bestätigten Hypothesen. Alle darüber hinausgehenden Argumente zur Beseitigung sind also unnötig; sie sind aber auch in den meisten Fällen schlecht begründet.

7. E. Nagel und I. Lakatos monieren in [63], S. 810ff. bzw. [68a], S. 344f., daß die Instanzenwahrscheinlichkeit wie die qualifizierte Instanzenwahrscheinlichkeit einer Hypothese unabhängig von der Variationsbreite ihrer gestesten Instanzen ist; daß man also z.B. eine Hypothese über alle Säugetiere nur für Katzen testen kann und daß sie dabei doch eine beliebig hohe Wahrscheinlichkeit erhält. Ist z.B. eine Hypothese der Form
$\wedge x(F_1(x) \vee F_2(x) \supset G(x))$, so finden wir für
$P_1(x) \equiv F_1(x) \wedge \neg F_2(x) \wedge G(x)$, $P_2(x) \equiv F_1(x) \wedge \neg F_2(x) \wedge \neg G(x)$,
$P_3(x) \equiv \neg F_1(x) \wedge F_2(x) \wedge G(x)$, $P_4(x) \equiv \neg F_1(x) \wedge F_2(x) \wedge \neg G(x)$,

---

Die spezielle Annahme $w(B_1) = f \cdot g$ ist nur dann gerechtfertigt, wenn man G und F als unabhängig ansieht, und das wird man nicht tun, wenn die Hypothese H zur Debatte steht. Wenn man die Unabhängigkeit von F und G in der objektiven Form $p(G/F) = g$ ($\neq 1$) ansetzt, so widerspricht das sogar der Hypothese H, nach der gilt $p(G/F) = 1$.

Überzeugender ist der Hinweis Alexanders, daß es sinnvoller sein kann, die nicht-Gs zu testen, ob sie nicht-F sind, als die Fs zu testen, ob sie G sind, wenn es viel mehr Fs als nicht-Fs und viel mehr Gs als nicht-Gs gibt: Man kommt dann mit weniger Tests aus und daher hat der einzelne Test mehr Relevanz und – intuitiv gesagt – mehr bestätigende Kraft.

$P_5(x) \equiv \neg F_1(x) \wedge \neg F_2(x) \wedge G(x), P_6(x) \equiv \neg F_1(x) \wedge \neg F_2(x) \wedge \neg G(x)$ – es gelte $\bigwedge x(F_1(x) \supset \neg F_2(x))$, – wie oben

$$c(F_1(a) \vee F_2(a) \supset G(a)/E) = 1 - \frac{n_2 + n_4 + \frac{\lambda}{6} \cdot 2}{n + \lambda} \text{ und}$$

$$c(G(a)/(F_1(a) \vee F_2(a)) \wedge E) = 1 - \frac{n_2 + n_4 + \frac{\lambda}{6} \cdot 2}{n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 4 \cdot \frac{\lambda}{6}}, \text{ wo E wieder}$$

die Gestalt $\bigwedge_{i=1}^{n} P_{k_i}(a_i)$ haben soll. Beide Werte wachsen, wenn keine negativen Instanzen für die Hypothese auftreten (d.h. für $n_2 + n_4 = 0$) mit n gegen 1, unabhängig davon, ob n_1 oder $n_3 = 0$ bleibt oder nicht.

Carnap hat aber in seiner Erwiderung auf Nagel [63] in Schilpp [63], S. 991 betont, daß diese Formeln nur dann anzuwenden sind, wenn E unser *gesamtes* Erfahrungswissen enthält. Ist z. B. neben $n_4 = 0$ auch $n_3 = 0$, so bestätigt ja E auch die Hypothese $\bigwedge x \neg F_2(x)$. Die Schwierigkeit von Nagel und Lakatos setzt aber gerade voraus, daß bekannt ist, daß es sowohl Objekte mit F_1 wie mit F_2 gibt. Zudem wächst z. B. die qualifizierte Instanzenwahrscheinlichkeit für die Teilhypothese $\bigwedge x(F_2(x) \supset G(x))$ bei E:

$$c(G(a)/F_2(a) \wedge E) = 1 - \frac{n_4 + \frac{\lambda}{6}}{n_3 + n_4 + 2\frac{\lambda}{6}} \text{ nicht mit } n_1\text{, also mit der In-}$$

stanzenwahrscheinlichkeit der Gesamthypothese.

Wenn man neben dem klassifikatorischen Begriff induktiver Bestätigung auch einen komparativen und einen metrischen induktiven Bestätigungsbegriff angeben will, so ist der Weg dazu, anders als beim Bewährungsbegriff, schon vorgezeichnet, da man bereits über den metrischen Begriff der Wahrscheinlichkeit w(H/B) verfügt. Am einfachsten legt man den *induktiven Bestätigungsgrad* so fest:

D5.2–4: $r_w(H,A,E) := w(H/E \wedge A) - w(H/A)$, bzw.
$ri_w(\bigwedge x F(x),A,E) := w(F(a)/E \wedge A) - w(F(a)/A)$, und
$riq_w(\bigwedge x(F(x) \supset G(x)),A,E) := w(G(a)/F(a) \wedge E \wedge A) - w(G(a)/F(a) \wedge A)$,
wobei in den beiden letzten Gleichungen die Konstante a nicht in A und E vorkommen soll, und die Hypothesen mit A verträglich sein sollen.

Dieser Bestätigungsgrad mißt also den Wahrscheinlichkeits*zuwachs* der Hypothese H (bzw. ihrer Instanzen) aufgrund des Beobachtungssatzes E bzgl. des Hintergrundwissens A, nicht ihre Wahrscheinlichkeit, die durch $w(H/A \wedge E)$ angegeben wird.[23]

Den *komparativen Begriff induktiver Bestätigung* wird man dann so festlegen:

D5.2–5: H wird durch E bzgl. A höchstens so stark bestätigt wie H′ durch E′ bzgl. A′: $r_w(H,A,E) \leq r_w(H',A',E')$ und entsprechend für ri_w und riq_w.

Die metrischen und komparativen Begriffe induktiver Bestätigung begegnen aber denselben Bedenken, wie sie in 5.1 für die entsprechenden Begriffe deduktiver Bestätigung geltend gemacht worden sind: Die Werte r_w, ri_w, riq_w sind in hohem Maß von der Wahl der Wahrscheinlichkeitsbewertung w abhängig – viel stärker als die Relationen R_w, Ri_w und Riq_w – und haben daher kaum allgemeinere Verbindlichkeit oder Relevanz.

K. Poppers Einwände gegen Carnaps metrischen Bestätigungsbegriff[24] laufen im wesentlichen darauf hinaus: Man kann den

---

[23] Vgl. dazu das Vorwort zur 2. Auflage von Carnap [50]. Carnap hat in [50] ursprünglich zwei andere Maße für die induktive Bestätigung diskutiert: den *Relevanzquotienten* $\frac{w(H/E \wedge A)}{w(H/A)}$ in § 66 und das *Relevanzmaß* $r'_w(H,A,E) := w(H \wedge E \wedge A) \cdot w(A) - w(A \wedge H) \cdot w(E \wedge A)$ in §67, für das gilt $w(E \wedge A) \cdot w(A) \cdot r_w(H,A,E) = r'_w(H,A,E)$.

[24] Vgl. dazu Poppers Aufsätze im British Journal for the Philosophy of Science von 1954 bis 1956 und die Entgegnungen von Carnap, Bar-Hillel und Kemeny ebenda, sowie Popper [63] und Carnaps Entgegnung in Schilpp [63], S. 995–998 (dort finden sich auch die bibliographischen Angaben zu den oben genannten Aufsätzen).

Bestätigungsgrad von H aufgrund von E nicht durch die (logische, oder auch allgemein: die subjektive) Wahrscheinlichkeit c(H/E) messen – wie das in der ursprünglichen Bezeichnung von c(H/E) als „degree of confirmation" bei Carnap angedeutet war. Denn 1. ist $c(H/E)=0$ für alle wesentlich generellen Allsätze H, 2. ist auch die Instanzenwahrscheinlichkeit c(F(a)/E) einer generellen Hypothese $\wedge xF(x)$ als Bestätigungsgrad ungeeignet, da sie für bereits (durch E) falsifizierte Hypothesen positiv sein kann,[25] und 3. besagt die Wahrscheinlichkeit c(H/E) nichts über die Bestätigung von H durch E, denn es kann ja, wie wir oben schon gesehen haben, auch für große Werte c(H/E) gelten $c(H/E) < c(H)$.

Daher mißt denn auch Carnap den Bestätigungsgrad nicht durch c(H/E), sondern durch $c(H/E) - c(H)$. Poppers Formulierung, daß Carnaps Bestätigungstheorie „logisch widerspruchsvoll" sei,[26] ist natürlich falsch und sein Argument dafür beruht darauf, daß er selbst c(H/E) und $c(H/E) - c(H)$ verwechselt: Er zeigt, daß es ein E gibt („Der n-te Wurf mit diesem (homogenen) Würfel wird eine gerade Zahl ergeben") und zwei Hypothesen H („Der n-te Wurf ergibt eine 6") und H′ („Der n-te Wurf ergibt keine 6"), so daß gilt: E bestätigt H, E entkräftet H′ und E bestätigt H′ besser als H. Es gilt zwar $c(H/E) - c(H) = \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$ und $c(H'/E) - c(H') = \frac{2}{3} - \frac{5}{6} = -\frac{1}{6}$ und $c(H'/E) = \frac{2}{3} > \frac{1}{3} = c(H/E)$, aber es gilt natürlich nicht $c(H'/E) - c(H') > c(H/E) - c(H)$; das wäre aber notwendig, damit man sagen könnte, E bestätige H′ besser als H.[27]

---

25 Diesem Einwand kann man freilich durch eine Definition wie D5.2–4 entgehen, indem man setzt $c_1(\wedge xF(x),E)=0$ für $E \rightarrow \neg \wedge xF(x)$ und sonst $=c(F(a)/E)$, wo a nicht in E vorkommt.

26 Popper [66], S. 345.

27 Vgl. Popper [66], S. 342ff. Ein (intuitiv allerdings nicht sehr gut begründetes) Maß für die Stützung einer Hypothese H durch eine Beobachtung E (*degree of factual support*) $F(H,E) = \frac{w(E/H) - w(E/A)}{w(E/H) + w(E/A)}$ haben auch Kemeny und Oppenheim in [52] eingeführt. Für weitere einschlägige Maße vgl. auch Kyburg [64].

5.3 Der Bestätigungsbegriff von Hempel

C. G. Hempel hat in [43] und [45] einen klassifikatorischen Bestätigungsbegriff angegeben, der induktive und deduktive Aspekte vereinigt: Er ist einerseits rein deduktionslogisch formuliert – und daher wird er z. B. von W. Stegmüller in [71] als Begriff deduktiver Bestätigung bezeichnet – andererseits kann man ihn als Formalisierung einer Grundvorstellung enumerativer Induktion ansehen, wie das z. B. H. Smokler in [68], S. 305 und W. Lenzen in [72] tun, und ihn demgemäß als Begriff induktiver Bestätigung bezeichnen.

Die Grundvorstellung, von der dieser Begriff ausgeht, ist die der *Verifikation in Teilbereichen:* Eine Hypothese, wie z. B. der Satz $\wedge x F(x)$, bestätigt sich, wenn alle beobachteten Objekte $a_1, \ldots, a_n$ positive Instanzen $F(a_1), \ldots, F(a_n)$ der Hypothese bilden. Die Hypothese bestätigt sich also, wenn alle aus ihr ableitbaren Molekularsätze, die nur von beobachteten Objekten handeln, durch den Beobachtungsbericht verifiziert werden; oder: wenn die Hypothese, beschränkt auf den Bereich der beobachteten Objekte, durch die Beobachtung verifiziert wird.[1]

Diese Vorstellung übersetzt Hempel zunächst wie folgt in den Begriff einer *direkten* Bestätigung:

Wenn man von einer Sprache S der elementaren Prädikatenlogik ohne Identität ausgeht und M eine (nicht leere) Menge von Gegenstandskonstanten von S ist, so wird die M-*Beschränkung* S(A,M) eines Satzes A von S so erklärt:

a) $S(A,M) = A$, wenn A ein Prim-(Atom-)Satz ist,

b) $S(\neg A,M) = \neg S(A,M)$,

---

[1] Hempel spricht von einem *Erfülltheitskriterium* (*satisfaction criterion*) der Bestätigung, weil eine Hypothese sich an einem Beobachtungssatz E bestätigt, wenn sie im Bereich der beobachteten Objekte aufgrund von E erfüllt ist. Vgl. Hempel [45], S. 37.

c) $S(A \supset B,M) = S(A,M) \supset S(B,M)$, und entsprechend für die Operatoren $\wedge$, $\vee$ und $\equiv$

d) $S(\bigwedge x(F(x),M) = \bigwedge_{a \in M} S(F(a),M)$, und entsprechend für den Operator V.

Dabei sie $\bigwedge_{a \in M} F(a)$ die Konjunktion der Sätze der Form F(a) für alle Gegenstandskonstanten a aus M.

M(E) sei im folgenden die Menge der im Satz E wesentlich vorkommenden Gegenstandskonstanten.

Hempel definiert dann

D5.3–1a: Ein Molekularsatz (Beobachtungssatz) E von S *bestätigt* die Hypothese H von S *direkt:*
$Pd(H,E) := E \rightarrow S(H,M(E))$.

Diese Relation direkter Bestätigung ist nun nach Hempel aber noch zu eng; insbesondere gilt die Äquivalenzbedingung (I) aus 5.1 nicht für diesen Begriff: Mit $\bigwedge xF(x)$ bestätigt z. B. der Satz $F(a_1) \wedge F(a_2)$ nicht auch den mit $\bigwedge xF(x)$ logisch äquivalenten Satz $\bigwedge x(F(x) \wedge F(a_3))$. Auch die spezielle Konsequenzbedingung (IIb) ist nicht erfüllt, obwohl nach der Grundidee der Verifikation in Teilbereichen diese Bedingung gelten sollte, nach der mit einer Hypothese auch alle aus ihr folgenden Hypothesen bestätigt werden.

Hempel hat daher die Beziehung der direkten Bestätigung erweitert, und definiert:

D5.3–1b: Ein Molekularsatz E von S *bestätigt* die Hypothese H von S: $P(H,E) :=$ Es gibt eine Klasse K von Sätzen von S, aus der H logisch folgt, und für deren sämtliche Elemente C gilt Pd(C,E).

Wie Lenzen in [72] betont, kommt aber bei dieser Erweiterung die Grundintention des Hempelschen Bestätigungsbegriffs, die Verifikation in Teilbereichen nicht mehr klar zur Geltung; die Definition erscheint nur als ad-hoc-Modifikation, die die Gültigkeit der speziellen Konsequenzbedingung sicherstellen soll.

Daher hat W. Lenzen in [72] eine, mit D5.3–1 b äquivalente Formulierung des Bestätigungsbegriffs angegeben, die intuitiv konsequenter und befriedigender ist. Er definiert die M-Beschränkung eines Satzes A von S nun als

$S'(A,M) = S(\wedge A,M)$

wobei $\wedge A$ ein Satz $\wedge x_1 \ldots x_n A[x_1, \ldots, x_n]$ sei, der aus $A = A[a_1, \ldots, a_n]$ durch Generalisierung aller in M nicht vorkommenden Gegenstandskonstanten $a_1, \ldots, a_n$ entsteht. Wenn man dann definiert:

D5.3–2: Ein Molekularsatz E von S *bestätigt* die Hypothese H von S:

$P'(H,E) := E \rightarrow S'(H,M(E))$,

so gilt $P'(H,E) \equiv P(H,E)$ für alle Sätze H und E.[2]

Diese Modifikation des Hempelschen Begriffs ist naheliegend und natürlich, da Aussagen über noch nicht beobachtete Objekte sich im Bereich der beobachteten Objekte nur dann bestätigen, wenn sie in diesem Bereich gelten – gleich wie man die Konstanten für die nichtbeobachteten Objekte in diesem Bereich deutet; wenn sie sich also im Bereich der beobachteten Objekte als allgemeingültige Aussagen darstellen.

Man kann nun weiter definieren:

D5.3–3: Der Molekularsatz E von S *entkräftet* die Hypothese H von S, wenn E $\neg$ H bestätigt. Und E ist *indifferent* bzgl. H, wenn E H weder bestätigt noch erschüttert.

Hempels Bestätigungsbegriff nimmt nicht Bezug auf ein unabhängig vom bestätigenden Beobachtungssatz E vorgegebenes Beobachtungsdatum A, wie das die Begriffe der deduktiven und induktiven Bestätigung tun. Eine solche Relativierung wäre hier auch nicht natürlich. Man könnte allenfalls sagen: E bestätigt H relativ zu A, wenn $A \wedge E$, aber nicht A allein H bestätigt.

Der Hempelsche Bestätigungsbegriff erfüllt nun die folgenden der in 5.1 angegebenen Adäquatheitskriterien (bei Ersetzung von B durch P und von A durch eine Tautologie T):[3]

---

[2] Vgl. dazu den Beweis in Lenzen [72], S. 71ff., den wir hier wegen der im folgenden diskutierten Mängel des Hempelschen Begriffs nicht angeben wollen.

[3] Vgl. dazu Hempel [43].

Die Äquivalenzbedingung (I), die spezielle Konsequenzbedingung (IIb) (auch ohne die Forderung, daß H′ nicht tautologisch ist), die Folgerungsbedingung (IVb) (auch ohne die Forderung, daß H nicht tautologisch und E nicht kontradiktorisch ist) und die spezielle Konsistenzbedingung (Vb) (für nichtkontradiktorische E).

Das ergibt sich aus der Definition D5.3–2 sofort, wenn man beachtet, daß gilt: ist $H \rightarrow H'$, so gilt auch
$S'(H,M(E)) \rightarrow S'(H',M(E))$.[4]

Die Relation P(H,E) erfüllt dagegen *nicht* die konverse Konsequenzbedingung (IIa), die Folgebedingung (IIIa), die konverse Folgerungsbedingung (IVa), die konverse spezielle Konsistenzbedingung (Va) und die konverse Folgebedingung (IIIb), wie man leicht verifiziert.

Durch diese formalen Eigenschaften wird die Relation P(H,E) wieder von den Relationen der deduktiven und der induktiven Bestätigung B(H,T,E) und R(H,T,E) unterschieden, für die, wie wir gesehen haben, andere Adäquatheitskriterien gelten.

Aus der Geltung der Folgerungsbedingung (IVb) ergibt sich, daß die Verifikation von H durch E ein Spezialfall der Bestätigung nach Hempel ist, und daß die Falsifikation von H durch E ein Spezialfall der Entkräftung ist.

Gegen den Hempelschen Bestätigungsbegriff kann man nun eine Reihe von Einwänden erheben. Wir sehen dabei, wie in den

---

[4] Das sieht man so ein: Aus $H \rightarrow H'$ folgt $\wedge H \rightarrow \wedge H'$; daraus folgt, daß jede Interpretation, die $\wedge H$ erfüllt, auch $\wedge H'$ erfüllt. Nach den semantischen Theoremen, wie sie z. B. in Kutschera [67], 2.2.2 angeführt werden, gilt nun, daß jeder Satz $S(\wedge H,M(E))$, der überhaupt erfüllbar ist, erfüllt werden kann durch eine Interpretation V über einem mit M(E) gleichzahligen Bereich γ, die M(E) eindeutig in γ abbildet. Für solche Interpretationen gilt aber $V(S(\wedge H,M(E))) = V(\wedge H)$, wie man durch Induktion nach dem Grad von H leicht erkennt; es gilt ja für eine solche Interpretation $V(\wedge xF(x)) = w$ dann und nur dann, wenn $V(F(a_1) \wedge \ldots \wedge F(a_n)) = w$ ist. Gibt es also eine Interpretation, die $S(\wedge H,M(E))$ erfüllt, nicht aber $S(\wedge H',M(E))$, so gibt es eine Interpretation V der angegebenen Art über γ, die $\wedge H$ erfüllt, nicht aber $\wedge H'$ – im Widerspruch zu $\wedge H \rightarrow \wedge H'$.

beiden vorausgehenden Abschnitten 5.1 und 5.2, von der Kritik ab, die sich darauf stützt, daß der fragliche Bestätigungsbegriff gewisse Adäquatheitskriterien nicht erfüllt, die der ihm zugrunde liegenden intuitiven Vorstellung aber auch gar nicht entsprechen, sondern von einem anderen Bestätigungsbegriff abgezogen sind, der stillschweigend als der einzige Bestätigungsbegriff angesehen wird. Beispiele solcher Argumentationen finden sich z. B. auch bei Hempel in [45], S. 33f. wo er etwa die Kritik an der speziellen Konsistenzbecingung (Vb) als berechtigt anerkennt, die Popper in [66], S. 325 von seinem deduktiven Modell der Bestätigung aus vorgetragen hat, und wo er diese Bedingung nur aus pragmatischen Gründen beibehält; ferner bei Carnap [50], § 87, wo er gegen einige Adäquatheitskriterien Hempels, wie z. B. die spezielle Konsequenzbedingung Stellung bezieht, wobei er ausdrücklich von seinem induktiven Bestätigungsbegriff ausgeht.[5]

1. Der Hempelsche Bestätigungsbegriff ist nur für sehr ausdrucksarme Sprachen S erklärt: Nimmt man zur Sprache der elementaren Prädikatenlogik nur die Identität hinzu, so entstehen – da H nun z. B. Zahlaussagen enthalten kann – für die Definition der Bestätigungsrelation ganz neue Schwierigkeiten. So würde nun der Satz $F(a_1) \wedge \ldots \wedge F(a_n)$ z. B. den Satz bestätigen, daß F auf genau n Objekte zutrifft.

2. Der Hempelsche Bestätigungsbegriff ist nur auf Sätze H der Beobachtungssprache anwendbar; denn aus Beobachtungssätzen E lassen sich in vielen Fällen nicht die Sätze S'(H,M(E)) ableiten, die mit H (in E nicht vorkommende) theoretische Terme enthalten.[6]

---

[5] Er schreibt ([50], S. 472): „Our examination [der Hempelschen Adäquatheitsbedingungen] will be based on the view that any adequate explicatum for the classificatory concept of confirmation must be in accord with at least one adequate explicatum for the quantitative concept of confirmation“ – und das heißt für ihn: es muß eine logische Wahrscheinlichkeitsfunktion c geben, so daß $c(H/E \wedge A) > c(H/A)$ aus der Bestätigungsrelation B(H,A,E) folgt.

[6] Vgl. dazu auch Scheffler [63], S. 255ff.

3. Der Hempelsche Bestätigungsbegriff ist nicht auf statistische Hypothesen anwendbar. Das gilt schon wegen (1), aber auch aus dem Grund, daß der Begriff rein deduktionslogisch formuliert ist und man eine Aussage über den Grenzwert relativer Häufigkeiten in einer unendlichen Folge nicht durch Beobachtung der relativen Häufigkeiten in endlichen Abschnitten dieser Folge verifizieren oder falsifizieren kann.

4. Ein Beobachtungssatz $F(a_1) \wedge \ldots \wedge F(a_n) \wedge G(b)$ (wobei G weder F noch $\neg F$ logisch implizieren möge) bestätigt die Hypothese $\bigwedge xF(x)$ nicht, obwohl die Hypothese im Teilbereich *der auf die durch F ausgedrückte Eigenschaft hin untersuchten Objekte* verifiziert ist. Wie Lenzen in [72] ausführt, kann man auch den Bestätigungsbegriff nicht so erweitern, daß man sagt, ein Beobachtungssatz E bestätige H, wenn sich E zerlegen läßt in E_1 und E_2, wobei gilt $P(H,E_1)$ und E_2 ist indifferent für H; denn dann würde z. B. auch eine Beobachtung $F(a) \wedge \neg F(b) \wedge \neg G(a)$ die Hypothese $\bigwedge xF(x)$ bestätigen: dieser Satz ist ja äquivalent mit $(F(a) \wedge \neg G(a)) \wedge (G(a) \vee \neg F(b))$, wobei nun gilt $P(\bigwedge xF(x), F(a) \wedge \neg G(a))$, aber weder $P(\bigwedge xF(x), G(a) \vee \neg F(b))$, noch $P(\neg \bigwedge xF(x), G(a) \vee \neg F(b))$.

5. Da die Bestätigung von H durch E bei Hempel nicht auf ein vorgängiges Erfahrungswissen relativiert wird, stellt sich die Sache jeweils so dar, als wüßte man außer E garnichts. Das ist in den meisten Fällen sehr unrealistisch.

6. B. Skyrms hat in [66] folgendes Beispiel angegeben: „Dieses Gras ist grün" ist eine positive Instanz des Satzes „Alles, was Gras ist oder ein Tuch auf einem Billardtisch, ist grün", und bestätigt wegen der Gültigkeit der Konsequenzbedingung also auch den Satz „Alle Tücher auf Billardtischen sind grün". Das widerspricht aber unserer Intuition.[7]

[7] Vgl. dazu auch Hempels Bemerkungen in [68a], wo nur darauf hingewiesen wird, daß dieses Resultat für den induktiven Bestätigungsbegriff nicht gilt.

7. Hempel hat im Nachwort zu [45] in [65] selbst einige Mängel seines Bestätigungsbegriffes herausgestellt, die ihn zu der Überzeugung brachten, daß das induktive Relevanzkriterium zu einem befriedigenderen klassifikatorischen Bestätigungsbegriff führen würde als der Gedanke der Verifikation in Teilbereichen.

Diese Mängel sind:

a) Eine Theorie, die einen Satz enthält, der nur in unendlichen Individuenbereichen erfüllbar ist, ist nicht bestätigungsfähig, da er in Beschränkung auf endliche Bereiche immer falsch ist.

Das ist jedoch nicht gravierend, da empirische Hypothesen in der Regel keine derartigen Anzahlaussagen enthalten.

b) Eine Konjunktion E von Sätzen $F(a_i,a_k)$ $(i,k = 1, \ldots, n)$, in der nur eines dieser Konjunktionsglieder fehlt, bestätigt den Satz $\wedge xyF(x,y)$ nicht, obwohl sie ihn induktiv (für hinreichend große n) stark stützen würde.

Dieser Einwand ist nur dann ganz überzeugend, wenn man an einen Bestätigungsbegriff nach dem Relevanzkriterium denkt.

c) Da die Relation P(H,E) rein syntaktisch-formal definiert ist, werden auch solche Hypothesen wie „Alle Smaragde sind gricht" durch die bisherigen Beobachtungen grüner Smaragde bestätigt. D.h. Hempels Theorie wird durch die Goodmansche Paradoxie der Bestätigung betroffen. Läßt sich mit einem Prädikat F(x) auch ein Goodmansches Korrelat F'(x) in der Sprache S formulieren, auf die sich die Definition der Relation P(H,E) bezieht, so daß gilt:

$F(a) \equiv F'(a)$	für alle Gegenstandskonstanten a aus M(E), und
$F(b) \equiv \neg F'(b)$	für alle Gegenstandskonstanten b, die nicht für Objekte stehen, wie sie durch die Konstanten aus M(E) bezeichnet werden,

so gilt mit $P(\wedge xF(x),E)$ auch $P(\wedge xF'(x),E)$.

Dieses Resultat widerspricht nicht der Gültigkeit der speziellen Konsistenzbedingung (Vb) für die Relation P(H,E), denn die Sätze $\wedge xF(x)$ und $\wedge xF'(x)$ widersprechen sich nur relativ zu der (meist stillschweigend vorausgesetzten) Annahme, daß es ein Objekt gibt, das in E nicht erwähnt wird.

Wenn auch Hempel die Goodmansche Paradoxie als schwerwiegenden Einwand gegen seinen Bestätigungsbegriff anerkannt hat, so ist doch zu fragen, ob diese Paradoxie seiner Grundvorstellung von Bestätigung, der Verifikation in Teilbereichen, tatsächlich widerspricht. Allgemein gilt ja, daß die spezielle Konsistenzbedingung nicht ausschließt, daß zwei im Bereich der beobachteten Objekte übereinstimmende, sonst aber einander widersprechende Hypothesen beide durch E bestätigt werden. Um ein triviales Beispiel zu geben: Die beiden Hypothesen „Alle Raben sind schwarz“ und „Alle Raben sind weiß“ werden durch den Satz „a ist kein Rabe“ bestätigt (dieser Satz bestätigt ja auch die Hypothese „Kein Ding ist ein Rabe“, unter der die beiden Hypothesen verträglich sind). Hier liegt also eine Schwierigkeit des Hempelschen Bestätigungsbegriffes, die viel allgemeiner ist als die Goodmansche Problematik.[8] Ob man sie als echte Schwierigkeit der Hempelschen Theorie ansehen will, hängt davon ab, wieviel Gewicht man dem Gedanken zumißt, daß diese Theorie eine Formalisierung enumerativer Induktion darstellt: Für den Induktionsgedanken ist die Goodmansche Paradoxie eine entscheidende Schwierigkeit, nicht dagegen für den Gedanken der Verifikation in Teilbereichen.

8. Die in 5.1 angegebene Raben-Paradoxie läßt sich auch für den Bestätigungsbegriff Hempels konstruieren, der die Äquivalenzbedingung (I) erfüllt und für den gilt $P(\bigwedge x(F(x) \supset G(x)), \neg F(a) \wedge \neg G(a))$.

Diese Paradoxie ist aber durch die Bemerkungen in 5.1 bereits aufgelöst.[9] Spezielle Lösungsvorschläge auf der Grundlage der Hempelschen Bestätigungstheorie bieten sich daneben nicht an.

[8] Wir haben allerdings in 2.3.3 schon darauf hingewiesen, daß die Goodmansche Paradoxie in den weiteren Zusammenhang der Bestätigung, Stützung oder Wahrscheinlichkeit einander (für neue Objekte) widersprechender Hypothesen gehört, die im Beobachtungsbereich übereinstimmen. – Vgl. in ähnlichem Sinn auch Lenzen [72], VB.

[9] Hempels zweites Argument läßt sich für seinen Bestätigungsbegriff nicht wiedergeben, da er das Hintergrundwissen nicht berücksichtigt.

Wenn wir nun diese kritischen Einwände gegen Hempels Bestätigungsbegriff zusammenfassen, so müssen wir sagen:
Der Einwand (1) ist sehr schwerwiegend, da er die Anwendbarkeit des Bestätigungsbegriffes stark einschränkt. Darüber hinaus ist der Grundgedanke dieses Bestätigungsbegriffs nicht überzeugend. Das drückt sich z. B. in den intuitiv nur schwer akzeptierbaren Konsequenzen (4), (6) und (7b) aus, denen sich leicht weitere zur Seite stellen lassen. Diese Konsequenzen widersprechen nicht der Vorstellung einer Verifikation in Teilbereichen, zeigen aber, daß diese Vorstellung als Grundlage eines Bestätigungsbegriffs kaum brauchbar ist. Daher werden wir den Hempelschen Bestätigungsbegriff im folgenden nicht mehr diskutieren. Für die Entwicklung komparativer und metrischer Bestätigungsbegriffe bietet die Idee der Verifikation in Teilbereichen ohnehin keine Grundlage.[10]

Es gibt also nur zwei intuitiv gut fundierte und formal präzisierte (klassifikatorische) Bestätigungsbegriffe: den deduktiven Begriff der Bewährung und den induktiven Begriff der Relevanz (bzw. der Relevanz für die Verläßlichkeit). Diese beiden Begriffe beruhen auf verschiedenen Grundvorstellungen und haben verschiedene formale Eigenschaften. Auf den Zusammenhang zwischen ihnen werden wir im nächsten Abschnitt eingehen. Hier sei abschließend nur noch betont, daß weder eine Notwendigkeit noch auch eine Möglichkeit abzusehen ist, neben diesen beiden Begriffen noch weitere intuitiv befriedigende Bestätigungsbegriffe einzuführen.

---

[10] Die Anzahl der Konstanten aus M(E) ist aus den schon in 5.1 diskutierten Gründen kein geeignetes Maß für die Güte der Bestätigung. – In den Arbeiten Hempel und Oppenheim [45] und Helmer und Oppenheim [45] wird ein Bestätigungsgrad im Sinn einer logischen Wahrscheinlichkeit entwickelt, also aufbauend auf ganz anderen Vorstellungen, als sie dem hier diskutierten klassifikatorischen Bestätigungsbegriff zugrundeliegen. Diese Arbeiten sind auch durch die Entwicklungen von Carnaps induktiver Logik überholt.

5.4 Deduktivismus und Induktivismus

Nachdem wir uns in den drei ersten Abschnitten dieses 5. Kapitels mit der Präzisierung von Bestätigungsbegriffen beschäftigt haben, wenden wir uns nun der Frage zu: Kann man Kriterien für die Annahme oder Verwerfung empirischer Hypothesen aufgrund von Beobachtungen angeben, die sich auf Bestätigungsbegriffe stützen?

Damit kommen wir auf die Problematik von Akzeptierungsregeln zurück, die wir schon im Abschnitt 2.5.5 im Zusammenhang mit induktiven Schlüssen behandelt hatten. In der Tat hängt auch das Thema „Bestätigung" sehr eng mit dem Thema „Induktion" zusammen: Beidesmal geht es darum, empirische Hypothesen zu rechtfertigen, die über die zur Verfügung stehenden Beobachtungsdaten hinausgehen. Die Schlußformen der enumerativen Induktion, die wir in 2.5.5 diskutiert haben, stellen dabei sehr spezielle Formen derartig „ampliativer" Argumente dar. Wesentlich allgemeiner ist der Versuch, die Bestätigung einer Hypothese durch Beobachtungssätze als Rechtfertigungsgrund für ihre Annahme auszuweisen; denn Bestätigungsrelationen sind von viel allgemeinerer Art als die speziellen Relationen zwischen den „Prämissen" und der „Konklusion" eines enumerativen Schlusses.

In der Frage, ob man Bestätigungsrelationen zur Grundlage von Akzeptierungsregeln machen kann, gibt es zwei sehr ausgeprägte Positionen: den vor allem von K. Popper und den Popperianern vertretenen *Deduktivismus*, nach dem allein die Bewährung von Theorien für ihre Annahme entscheidend ist, und den von R. Carnap, R. Jeffrey u.a. vertretenen *Induktivismus*, nach dem allein die induktive Bestätigung für die Annahme von Hypothesen den Ausschlag gibt.

Nachdem sich beide Positionen in der Polemik oft so schroff gegenüberstehen, ist es zunächst einmal nützlich, sich zu überlegen, daß zwischen Bewährung und induktiver Bestätigung auch Parallelen bestehen:

Gilt $B(H,A,E)$, also $H,A \rightarrow E$ und nicht $A \rightarrow E$, so gilt ja

$w(H/A \wedge E) = \frac{w(H \wedge A)}{w(A \wedge E)} = \frac{w(H/A)}{w(E/A)} > w(H/A)$ für $w(E/A) < 1$ und $w(H/A) \neq 0$, was wir wegen der Ungültigkeit von $A \rightarrow E$ für reguläre Bewertungen w voraussetzen können. D.h. aber: Bewährt sich H an E (bzgl. A), so bestätigt E (bzgl. A) die Hypothese H induktiv. Die Beschränkung auf $w(H/A) \neq 0$ ist allerdings sehr einschneidend: Gesetzeshypothesen können sich zwar bewähren, können aber nicht induktiv bestätigt werden; auch wenn man die Instanzenwahrscheinlichkeit benutzt, hilft das, wie wir in 5.2 gesehen haben, nur im Fall sehr einfacher Hypothesen weiter.

Die Umkehrung gilt dagegen auch für Hypothesen H mit $w(H/A) > 0$ nicht allgemein, denn es kann ja gelten $w(H/E \wedge A) > w(H/A)$, ohne daß gilt $H,A \rightarrow E$. In den Fällen, wo $H,A \rightarrow E$ gilt, gilt aber auch B(H,A,E). Wäre $A \rightarrow E$, so wäre $E \wedge A = A$, also $w(H/E \wedge A) = w(H/A)$, und wäre $H \rightarrow \neg A$, so wäre $w(H/E \wedge A) = w(H/A) = 0$. Oft wird z.B., wo H eine Hypothese der Gestalt $\bigwedge xF(x)$ ist, E die Gestalt F(a) haben, oder es wird für $H = \bigwedge x(F(x) \supset G(x))$ E die Gestalt G(a) haben mit $A \rightarrow F(a)$, und dann gilt mit $R_w(H,A,E)$, bzw. $Ri_w(H,A,E)$ oder $Riq_w(H,A,E)$ auch B(H,A,E).

Dieser Zusammenhang zwischen deduktiver und induktiver Bestätigung erklärt nun auch und rechtfertigt es in vielen Fällen, daß wir von *der* Bestätigung reden, als gäbe es nur einen Bestätigungsbegriff. Obwohl also die beiden Bestätigungsbegriffe von ihrem Ansatz her grundsätzlich verschieden sind, bestehen doch auch deutliche Parallelen.

Da deduktive Bestätigung in vielen Fällen die induktive Bestätigung impliziert, aber nicht umgekehrt, scheint die induktive Bestätigung zunächst den geeigneteren Rahmen für die Formulierung von Akzeptierungskriterien abzugeben. Wenn es um die Akzeptierung einer Hypothese H geht, spielt aber nicht so sehr die induktive *Bestätigung* von H durch einen Beobachtungssatz E bzgl. des gesamten, E vorausgehenden Erfahrungsdatums A eine Rolle, d.h. der Wahrscheinlichkeits*zuwachs* von H aufgrund von E, als die *Gesamtwahrscheinlichkeit* $w(H/E \wedge A)$: Nur wenn diese hinreichend groß ist, und nicht schon dann, wenn sie größer ist als die, womöglich sehr kleine Wahrscheinlichkeit w(H/A), ist H ein Kandidat für die Anerkennung als richtige Hypothese.

Vom induktiven Standpunkt können sich also Akzeptierungsregeln nicht auf den Bestätigungsgrad $r_w(H,E,A) = w(H/E \wedge A) - w(H/A)$ beziehen, sondern nur auf die Wahrscheinlichkeit von H aufgrund des gesamten zur Verfügung stehenden Erfahrungswissens $E \wedge A$.

Wir haben aber bereits im Abschnitt 2.5.5 gezeigt, daß hohe Wahrscheinlichkeit weder notwendig noch hinreichend für Akzeptierbarkeit ist, und haben gesehen, daß eine rein induktive Methodologie undurchführbar ist, nach der es Akzeptierungsregeln für empirische Sätze gibt, die sich allein nach deren Wahrscheinlichkeit richten. Damit hat sich aber auch der Induktivismus bereits als nicht durchführbar erwiesen.

Betrachten wir nun ausführlicher die zweite methodologische Grundposition, den *Deduktivismus*![1] Er entwirft folgendes methodologische Bild: „Aus der vorläufig unbegründeten Antizipation, dem Einfall, der Hypothese, dem theoretischen System, werden auf logisch-deduktivem Weg Folgerungen abgeleitet; diese werden untereinander und mit anderen Sätzen verglichen, indem man feststellt, welche logischen Beziehungen (z.B. Äquivalenz, Ableitbarkeit, Vereinbarkeit, Widerspruch) zwischen ihnen bestehen."[2] Der Fortschritt der Wissenschaft, das „Wachstum unseres Wissens"[3] beginnt also mit dem schöpferischen Einfall, dem Entwurf einer Hypothese oder Theorie. Dafür, welche Hypothesen wir in einer gegebenen Wissenssituation aufstellen sollen, gibt es für Popper, ebenso wie für Carnap,[4] keine Regeln: Diese Hypothesen ergeben sich nicht aus dem Erfahrungswissen, aus Beobachtungen, sondern sie stellen Fragen an die Natur dar, die erst

---

[1] Diesen Term gebraucht Popper in [66], S. 6. – Zur Charakterisierung der deduktiven Methode bei Popper vgl. auch [66], S. 7f.

[2] Popper [66], S. 7.

[3] Popper [66], Vorwort zur engl. Ausgabe 1959, S. XVII.

[4] Vgl. z.B. Carnap [50], S. 192f. und [46a], S. 520.

eigentlich systematische Erfahrung ermöglichen: Beobachtungen ohne Hypothesen sind blind, erst eine Hypothese ermöglicht sinnvoll organisierte Experimente.[5] „Hypothesen sind Netze: nur der wird fangen, der auswirft" zitiert Popper Novalis als Motto seiner „Logik der Forschung".

Wenn nun eine Hypothese oder Theorie H formuliert worden ist, so wird man zunächst prüfen, ob sie mit den bereits als wahr akzeptierten Sätzen: mit anderen Theorien und Beobachtungsdaten, die im gegenwärtigen Kontext nicht in Zweifel gezogen werden, konsistent ist. Auf diese Weise gewinnt man meist mehrere konkurrierende Hypothesen, stärkere und schwächere oder auch miteinander unverträgliche Hypothesen, die alle mit dem epistemischen Korpus A(t) verträglich sind.[6]

Poppers Vorschlag ist nun, aus dieser Menge möglicher Hypothesen zuerst diejenige zur Überprüfung auszuwählen, deren Bewährbarkeitsgrad am höchsten ist, also die unwahrscheinlichste Hypothese. In diesem Sinn sagt er: „Was wir tun – oder tun sollten – ist, uns *an die unwahrscheinlichste der überlebenden Theorien halten*,

---

[5] Vgl. dazu Popper [66], S. 19. – Popper sagt: „Beobachtung ist stets *Beobachtung im Lichte von Theorien.*" ([66], S. 31, Anmerkung *1.) Und: „Die Natur antwortet nicht, wenn sie nicht gefragt wird" ([66], S. 225). Popper weist in diesem Zusammenhang auch darauf hin, daß z.B. physikalische Effekte nicht in einzelnen Beobachtungsergebnissen bestehen, die irgendjemand irgendwann erhalten hat, sondern daß sie als wissenschaftlich relevante Phänomene gesetzmäßige Vorgänge sind, die jeder, der die Versuchsanordnung nach Vorschrift aufbaut, reproduzieren kann. D.h. ein solcher Effekt stellt bereits eine Gesetzmäßigkeit dar, und daher ist er nicht etwas, das gewissermaßen absichts- und ziellos zufällig beobachtet wird, sondern eine Antwort auf eine systematische Frage. – Für Popper wird diese Reproduzierbarkeit erfordert durch die intersubjektive Überprüfbarkeit, die alle empirischen Theorien auszeichnet und ihre wissenschaftliche Objektivität ausmacht. Vgl. dazu Popper [66], S. 18f.

[6] Wir hatten in 2.5.5 die Menge $A_X(t)$ der Sätze, die eine Person X zur Zeit t als wahr akzeptiert, als *epistemisches Korpus* von X in t bezeichnet und verabredet, daß wir das Subskript X auch weglassen, wenn dadurch keine Mißverständnisse entstehen können.

d.h. an jene, die am strengsten überprüft werden kann".[7] Die unwahrscheinlichste Hypothese ist die, die am leichtesten falsifizierbar ist, also vermutlich am schnellsten falsifiziert wird.[8] Der Erkenntnisfortschritt besteht aber für Popper in der Falsifikation von Hypothesen, darin, daß wir erfahren, was *nicht* der Fall ist. Wir lernen nach Popper aus unseren Fehlern, und, so zitiert Popper John Archibald Wheeler als Motto zu den „Conjectures and Refutations": „Our whole problem is to make the mistakes as fast as possible".[9]

Nun haben wir aber schon in 5.1 gesehen, daß der Bewährbarkeitsgrad $1 - w(H)$, bzw. $1 - w(H/A)$, wo A das Antecedensdatum (z.B. A(t)) ist, für alle Gesetzesaussagen identisch Null ist, d.h. das erste Poppersche Auswahlkriterium ist nicht anwendbar. Daher greift I. Lakatos in [68a] auf einem komparativen Begriff der Bewährbarkeit zurück, den Popper in [66], S. 80ff. diskutiert: Danach hat H einen größeren Gehalt (und also einen höheren Bewährbarkeitsgrad) als H′ (bzgl. A), wenn der empirische Gehalt von H′ (bzgl. A) echte Teilmenge des empirischen Gehalts von H (bzgl. A) ist; d.h. wenn es Beobachtungssätze gibt, die aus H (und A), aber nicht aus H′ (und A) ableitbar sind, während das Umgekehrte nicht gilt. Popper verwirft a.a.O. diesen Begriff, weil er im Normalfall nicht anwendbar ist, in dem sowohl aus H wie aus H′ (mit A) Beobachtungssätze folgen, die aus der anderen Hypothese (mit A) nicht folgen. Gerade in dem interessanten Fall, daß zwei untereinander unverträgliche, mit A aber verträgliche Hypothesen zur Diskussion stehen – wie z.B. das Goodman'sche Hypothesenpaar „Alle Smaragde sind grün" und „Alle Smaragde sind gricht" – ist auch dieses komparative Kriterium nicht anwendbar.

Danach gibt es also keine allgemeinen Kriterien dafür, welche von mehreren Hypothesen wir zur Überprüfung auswählen sol-

[7] Popper [66], S. 373.

[8] Vgl. dazu auch Kneale [49], S. 229f.

[9] Popper zitiert dort auch Oscar Wilde: „Experience is the name everyone gives to his mistakes" – er hätte auch Mao Tse Tung zitieren können: „Die Niederlage ist die Mutter des Erfolgs".

len.[10] Aber begnügen wir uns einmal damit, daß wir auch in Ermangelung eines präzisen komparativen oder metrischen Begriffs des empirischen Gehalts in vielen Fällen sagen können, welche Hypothese als die informativste den Vorzug haben soll, und betrachten wir den nächsten Schritt:

Im nächsten Schritt wird nun die zur Überprüfung ausgewählte Hypothese durch strenge Tests geprüft. Die Strenge des Tests besteht u.a. darin, daß wir Beobachtungssätze E prüfen, die aus H, aber nicht aus den Konkurrentinnen von H ableitbar sind, oder für die aus einer Konkurrentin $\neg$ E ableitbar ist. D.h. wir werden ein experimentum crucis vornehmen. Bewährt sich H dabei, so prüfen wir H weiter, wird H widerlegt, so beginnt das Spiel von vorne.

Es ist nun aber zu bemerken, daß nicht aus allen empirischen Hypothesen Beobachtungssätze folgen, wie wir in 5.1 gesehen haben. Darin liegt eine erhebliche Beschränkung der Anwendbarkeit des Bewährungsbegriffs, wenn er zu seiner methodologischen Verwendung gegenüber D5.1–1 auf eine Bewährung an Beobachtungssätzen eingeengt wird.

Welche Rolle spielt nun der Bewährungsgrad von H in diesem Prozeß der Auswahl von Hypothesen? Dieser Bewährungsgrad wird erst dann wichtig, wenn im ersten Schritt nicht nur eine, sondern mehrere konkurrierende Hypothesen zur Überprüfung zugelassen worden sind, von denen der Test E nicht nur eine übrig läßt. Es stehen dann weiterhin zwei oder mehrere Hypothesen zur Auswahl. Wenn die Frage nun nicht mehr ist „Welche von ihnen sollen wir überprüfen?“, sondern „Welche von ihnen sollen wir (vorläufig) als wahr akzeptieren?“, so ist Poppers Rat,

[10] Auch für singuläre Hypothesen H, die einen Bewährbarkeitsgrad $1-w(H)>0$, bzw. $1-w(H/A)>0$ haben, ist keineswegs gesagt, daß zwei konkurrierende Hypothesen immer verschiedene Bewährbarkeitsgrade haben, so daß auch in diesem Fall Poppers erstes Auswahlkriterium nicht immer anwendbar ist. Vgl. dazu auch Goodman [61], S. 150.

die am besten bewährte Hypothese anzunehmen. Als Bewährungsgrad haben wir in 5.1 als einfachstes und passendstes Maß die Funktion $b_w(H,A,E) = 1 - w(E/A)$ bezeichnet.[11]

Wir hatten in 2.5.5 folgende beiden Grundregeln für epistemische Korpora A(t) angegeben:

R1: A(t) ist konsistent.

R2: A(t) ist abgeschlossen gegenüber logisch-mathematischen Folgerungen.

Wir können nun nicht die Regel hinzufügen:

R6: Ist H eine mit A(t) verträgliche Hypothese, und gilt B(H,A(t),E) und ist E (bei der Überprüfung von H) durch Beobachtungen verifiziert worden,[12] so soll H in A(t) aufgenommen werden, falls $1 - w(E/A(t)) \geq r$ ist, wo r eine feste Zahl sei, die nahe bei 1 liegt.

Denn nach der Vorschrift von Goodman kann man zu jedem H, das die Voraussetzung von R6 erfüllt, ein H' angeben, das ebenfalls die Voraussetzung von R6 erfüllt, und das mit H unverträglich ist. Dann ist aber R1 verletzt.[13] Ein hoher Bewährungsgrad ist also kein *hinreichendes* Kriterium für Akzeptierbarkeit.

Ein hoher Bewährungsgrad ist aber auch keine *notwendige* Bedingung für Akzeptierbarkeit. Denn erstens akzeptieren wir oft

---

[11] I. Lakatos ersetzt in [68a] im Kontext der Akzeptierungsproblematik den in 5.1 diskutierten Bewährungsgrad Poppers durch einen komparativen Bewährungsbegriff: T hat sich (bzgl. A) besser bewährt als T', wenn es einen Satz E gibt, an dem sich T, aber nicht T' (bzgl. A) bewährt hat, während das Umgekehrte nicht gilt. Dann gilt aber auch $1 - w(E/A) > 1 - w(E'/A)$, wenn E die Konjunktion aller Sätze ist, an denen sich T, und wenn E' die Konjunktion aller Sätze ist, an denen sich T' bewährt hat. Gilt umgekehrt diese Ungleichung, so gilt für den Fall, daß $E \subset E'$ oder $E' \subset E$, auch $E' \subset E$. – Da E nicht wesentlich generell ist, besteht hier jedoch kein Grund, nicht mit dem Bewährungsgrad $b_w(H,A,E)$ zu arbeiten.

[12] B(H,A(t),E) impliziert, daß E ein über A(t) hinausgehendes Beobachtungsdatum ist.

[13] Das gilt, genau genommen, wieder nur, falls A(t) die Annahme enthält, daß es Objekte gibt, für die die beiden Hypothesen einander widersprechende Voraussagen machen.

eine Hypothese H aufgrund von Beobachtungsdaten E, die nicht aus H (und A(t)) ableitbar sind, sondern die H nur indirekt stützen. Wir könnten sonst insbesondere nie statistische Hypothesen akzeptieren oder andere Hypothesen, aus denen keine Beobachtungssätze folgen.[14] Zweitens kann es z. B. sein, daß wir schon eine Hypothese H′ akzeptiert haben, die sich sehr gut bewährt hat, und daß wir sie durch eine Hypothese H ersetzen wollen, die zwar nicht mehr leistet als H′, für die also keine über A hinausgehenden bewährenden Instanzen vorliegen, die aber einfacher ist als H′.

Die rein deduktive Theorie des Akzeptierens ist also ebensowenig durchführbar wie die rein induktive Theorie. Wie die hohe Wahrscheinlichkeit eines Satzes oft ein Grund ist, ihn zu akzeptieren, so ist auch sein hoher Bewährungsgrad oft ein Grund dafür – beide Gründe zählen aber nicht immer und beide lassen sich nicht immer geltend machen, wenn wir einen Satz akzeptieren. Und wie wir in 2.5.5 gesehen haben, daß eine rein induktive Strategie des Akzeptierens zirkulär wäre, weil die Bildung bedingter Wahrscheinlichkeiten Annahmen voraussetzt, die nicht selbst wieder durch Wahrscheinlichkeiten begründet werden können, so ist auch eine rein deduktive Strategie des Akzeptierens undurchführbar, da wir ja die Beobachtungssätze, an denen Hypothesen sich bewähren, nicht wiederum aufgrund einer Bewährung akzeptieren, d.h. durch Verifikation von Konsequenzen, sondern indem wir sie selbst verifizieren – und da das wohl meist

---

[14] Selbst wenn man annimmt, im Fall einer statistischen Hypothese, etwa $p(F)=c$, sei E ein Satz über eine relative Häufigkeit – ist dann, wo F^1_n der Satz ist, daß bei n Versuchsdurchführungen das Ereignis F genau 1 mal aufgetreten ist, $w(F^1_n)$ für ein $\frac{1}{n}$ maximal? Hat nicht u. U. $w(F^1_n)$ für viele oder alle möglichen Werte $\frac{1}{n}$ mit $0 \leq \frac{1}{n} \leq 1$ den gleichen Wert, so daß $1-w(F^1_n) \geq 1-r$ allein aufgrund der Größe von n gilt, und somit zwischen den Hypothesen $p(F)=c$ für verschiedene c kein Unterschied besteht?

nicht definitiv möglich ist – sie akzeptieren, z.B. aufgrund ihrer hohen Wahrscheinlichkeit.

Popper sieht das anders: Für ihn besteht ein unendlicher Regress der *Bewährbarkeit* – wir nehmen alle Sätze, auch die Beobachtungssätze, nur vorläufig an, und können für sie alle ihre Bewährung untersuchen – der nur dadurch nicht zu einem unendlichen Regress der *Bewährung* wird, daß wir aufgrund einer Konvention beschließen, (vorläufig) diese und jene Beobachtungssätze als wahr zu akzeptieren.[15] Aber wenn man Popper so weit folgt, kann man eben nicht mehr sagen, daß wir Sätze allein nach Bewährungskriterien akzeptieren: für die bewährenden Basissätze gilt das nicht mehr.

Was bleibt nun von Poppers methodologischen Regeln? Es bleibt zunächst die – im Grunde doch wohl recht elementare – Einsicht, daß informative Theorien interessanter sind als uninformative, und daß man sich bei der empirischen Überprüfung daher zuerst mit den informativen Theorien befassen wird. Bei gleichen empirischen Informationsgehalt wird man aber z.B. auch einfachere Theorien interessanter finden als komplizierte.[16] Und eine Theorie, die so reich ist, daß sie sich von der Basis der verfügbaren Daten zu weit entfernt, ist bei aller Kühnheit oft zu unplausibel, um interessant zu sein.

Von dem Interesse, das eine Hypothese hat, muß man nun klar ihre Akzeptierbarkeit unterscheiden: Theorien werden nicht schon allein wegen ihres Interesses als wahr akzeptiert – auch nicht vorläufig – und wir akzeptieren viele Annahmen als wahr, die alles andere als interessant oder informativ sind. Die Annahme einer Hypothese oder Theorie *als wissenschaftlich interessante Proposition*, die eingehender Prüfung wert ist, ist daher scharf von der Annahme einer Hypothese *als wahr* zu trennen, die uns nur dann gerechtfertigt erscheint, wenn sie auch hinreichend gesichert und

[15] Vgl. dazu Popper [66], S. 69–76.

[16] Für Popper fällt, wie schon oben gesagt wurde, Einfachheit mit hohem Informationsgehalt zusammen. Vgl. dazu auch den Abschnitt 4.2.

durch Erfahrungen gestützt ist.[17] Unser *Interesse* gilt dem hohen Informationsgehalt, unser *Vertrauen* der großen Wahrscheinlichkeit.

Das Verhältnis beider Größen: des Informationswerts einer Hypothese H und ihrer Glaubwürdigkeit (in einem nicht-technischen Sinn) mag folgender Vergleich veranschaulichen: Beim Spiel ist ein großer Geldgewinn für uns interessanter als ein kleiner; trotzdem werden wir vernünftigerweise oft eine gute Gewinnchance auf den kleinen Betrag einer geringen Chance auf den großen vorziehen. So muß auch der Wert einer Hypothese, ihr Informationsgehalt in Relation zu ihrer Wahrscheinlichkeit gebracht werden.[18]

Diese zwei Maßstäbe, Interesse und Sicherheit, werden bei Popper oft nicht sauber unterschieden. So stellt er dem „Idol" der „Induktionstheoretiker" eines sicheren oder doch gut gesicherten und wahrscheinlichen Wissens, sein Ziel gegenüber, sich nicht an die wahrscheinlichen, sondern an die unwahrscheinlichen Hypothesen zu halten, und schreibt: „Mit dem Idol der Sicherheit, auch der graduellen, fällt eines der schwersten Hemmnisse auf dem Weg der Forschung; hemmend nicht nur für die Kühnheit der Fragestellung, hemmend auch oft für die Strenge und Ehrlichkeit der Nachprüfung. Der Ehrgeiz, recht zu behalten, verrät ein Mißverständnis: Nicht der *Besitz* von Wissen, von unumstößlichen Wahrheiten macht den Wissenschaftler, sondern das rücksichtslos kritische, das unablässige *Suchen* nach Wahrheit".[19]

---

[17] I. Lakatos hat in [68a], S. 375ff., leider in recht unpräziser Weise drei verschiedene Akzeptierungsbegriffe unterschieden, den der Auswahl für Tests, den der Auswahl nach Tests und den der Auswahl für praktische Zwecke.

[18] Ähnlich äußert sich Carnap in [66a]. Wir haben aber schon in 2.5.5 gesehen, daß sich dieses entscheidungstheoretische Modell nicht zur Präzisierung von Akzeptierungsregeln für Hypothesen verwenden läßt.

[19] Popper [66], S. 225. Vgl. auch S. 373.

Und in [35], S. 172 sagt Popper:
„Man wird sich wohl daran gewöhnen müssen, die Wissenschaft nicht als ein „System unseres Wissens", sondern als ein System von Hypothesen aufzufassen, d.h. von grundsätzlich unbegründbaren Anticipationen, mit denen wir arbeiten, solange sie sich bewähren, ohne daß wir sie als „wahr" oder auch nur als „mehr oder weniger sicher" oder „wahrscheinlich" ansprechen dürfen."[20]

Hier liegt offenbar eine Konfusion vor: Es ist, als wollte jemand in unserem Beispiel einem Spieler, der die Gewinnchan-

---

[20] Vgl. dazu auch Popper [63], S. 219–221. Dort heißt es: „For the scientist is most interested in theories with a high content. He does not care for highly probable trivialities but for bold and severely testable (and severely tested) hypotheses. If (as Carnap tells us) a high degree of confirmation is one of the things we aim at in science, then degree of confirmation cannot be identified with probability. This may sound paradoxical to some people. But if high probability were an aim of science, then scientists should say as little as possible, and preferably utter tautologies only. But their aim is to „advance" science, that is to add to its content. Yet this means lowering its probability. And in view of the high content of universal laws, it is neither surprising to find that their probability is zero, nor that those philosophers who believe that science must aim at high probabilities cannot do justice to facts such as these: that the formulation (and testing) of universal laws is considered their most important aim by most scientists: or that the intersubjective testability of science depends upon these laws".
„Those who identify confirmation with probability must believe that a high degree of probability is desirable. They impliciply accept the rule: „Always choose the most probable hypothesis"! Now it can be easily shown that this rule is equivalent to the following rule: „Always choose the hypothesis which goes as little beyond the evidence as possible!" And this, in turn, can be shown to be equivalent, not only to „Always accept the hypothesis with the lowest content (within the limits of your task, for example, your task of predicting)!" but also to „Always choose the hypothesis which has the highest degree of ad-hoc character (within the limits of your task)!" This is an unintended consequence of the fact that a highly probable hypothesis is one which fits the known facts, going as little as possible beyond them. – Aiming at high probability entails a counterintuitive rule favouring ad hoc hypotheses!"

cen abwägt, vorwerfen: „Sieh nicht auf die Chancen, sieh auf die Höhe des Gewinns; der Gewinn entscheidet, nicht die Sicherheit!" Weder der Gewinn allein, noch die Sicherheit allein – die auch der Spieler nicht ausschließlich im Auge hat – entscheidet, sondern der Erwartungswert des Gewinns.

Welchen Wert hätte denn auch der Bewährungsgrad einer Theorie für Popper, wenn es nur darum ginge, möglichst kühne Vermutungen aufzustellen? Die Überprüfungen der Theorien würden dann nur dazu dienen, die falschen zu eliminieren, und von den nichteliminierten müßten wir uns immer an die möglichst unwahrscheinlichen und exzentrischen Theorien halten. Der Bewährungsgrad würde eine nichtfalsifizierte Hypothese nicht vor einer anderen auszeichnen, das könnte nur der Bewährbarkeitsgrad.

Der Bewährungsgrad spielt erst dort eine Rolle, wo es nicht mehr allein um das *Interesse* einer Hypothese geht, sondern (auch) um ihre *Glaubwürdigkeit:* Wie wir oben sahen, ist für $H,A \rightarrow E$ $w(H/E \wedge A) = \frac{w(H/A)}{w(E/A)}$ umso größer als $w(H/A)$, d.h. der Wahrscheinlichkeitszuwachs von H ist umso größer, je kleiner $w(E/A)$, je größer also der Bewährungsgrad von H ist. So hat man auch Popper in Zusammenhang seiner Theorie des Bewährungsgrades immer wieder vorgeworfen, daß er vom Pfad der reinen Popperianischen Tugend abgewichen sei, nach dem beim Akzeptieren von Hypothesen alle Glaubwürdigkeits-, Sicherheits- und Wahrscheinlichkeitserwägungen keine Rolle spielen dürfen.[21]

---

[21] Vgl. dazu z.B. Lakatos [68a] – Popperianisch ist es zu sagen, daß selbst bei guter Bewährung einer Hypothese gilt: „Wir „akzeptieren" diese Theorie vorläufig – aber nur in dem Sinn, daß wir sie für würdig erachten, weiterer Kritik und den strengsten denkbaren Prüfungen unterworfen zu werden." (Popper [66], S. 373) oder „. . .high corroboration means high testworthiness but not high trustworthiness" (Lakatos [68a], S. 412). Unpopperianisch, und nach Lakatos „certainly a slip", ist es dagegen, wenn Popper sagt, daß der Bewährungsgrad ein „Grad des Fürwahrhaltens von H aufgrund von Prüfungen" sei ([66], S. 368) oder: „Der Bewährungsgrad ist vielmehr ein Maß der Ratio-

Warum sollen wir uns nun aber nach dem Bewährungsgrad einer Hypothese richten, wenn es darum geht, zu entscheiden, ob wir H (als wahr) annehmen sollen oder nicht? Wir nehmen zunächst einmal die Sätze als wahr an, von denen wir *wissen*, daß sie wahr sind. Im übrigen werden wir uns danach richten, ob sie *wahrscheinlich* wahr sind – so wenig wir auch diese Idee zunächst in präzise und allgemeine Regeln umsetzen können. Danach ist es nur dann sinnvoll, sich nach dem Bewährungsgrad von H zu richten, wenn er etwas über die Wahrscheinlichkeit von H besagt. Wir haben aber gesehen, daß er zwar in vielen Fällen etwas über den Wahrscheinlichkeits*zuwachs* besagt, über die induktive Bestätigung von H, daß daraus aber nichts über die für die Akzeptierbarkeit von H letzlich relevante *Wahrscheinlichkeit* von H folgt. Der Bewährungsgrad nützt uns also ebensowenig wie der induktive Bestätigungsgrad.

Wir können daher sagen: Die Überprüfung der deduktiven Konsequenzen durch Bewährung dient dazu, falsche Hypothesen zu eliminieren. Für die nichteliminierten Hypothesen legt sie keinerlei Präferenzen fest. Wenn es also nicht beim bloßen Raten bleiben soll, wenn man nicht in der „Ersetzung des methodischen Suchens [nach wissenschaftlicher Wahrheit] durch das Raten ... die Auflösung des Induktionsproblems" sehen will,[22] und wenn man der Popperschen Maxime, möglichst viele Fehler zu machen, einen vernünftigen Sinn geben will, den Sinn nämlich, daß wir aus Fehlern lernen, daß sie uns über das Auskunft geben, was wahr oder doch wahrscheinlich wahr ist, dann muß man über den Deduktivismus hinausgehen und neben der Bewährung auch andere Kriterein, z.B. den Wahrscheinlichkeitsbegriff ins Spiel

---

nalität der versuchsweisen Annahme einer problematischen Vermutung – im Bewußtsein, daß es sich zwar nur um eine Annahme handelt, aber um eine, die scharf und gründlich geprüft worden ist" ([66], S. 369). – Vgl. zu diesem Problem auch J. Agassi [61].

[22] So H. Reichenbach in der Rezension von Poppers „Logik der Forschung" in Erkenntnis 5, S. 281. Bei Popper heißt es: „Wir wissen nicht, sondern wir raten" ([66], S. 223).

bringen. Wir lernen natürlich aus Fehlern immer etwas in dem trivialen Sinn, in dem wir mit jeder Beobachtung unser Erfahrungswissen erweitern. Aber das Problem des Lernens aus der Erfahrung besteht nicht darin, das Beobachtungsmaterial zu erweitern, sondern aufgrund gegebener Beobachtungsdaten sich eine Meinung über den Ausgang künftiger Beobachtungen zu bilden.

Fassen wir noch einmal zusammen: Man muß die Auswahl von Theorien *zur Prüfung*, für die nach Popper ihr Interesse, d.h. ihr Informationsgehalt maßgebend ist, von ihrer Akzeptierung *als* (vorläufig vermutlich wahre) *Annahmen über die Welt* unterscheiden. Wenn man Popper *popperianisch* versteht, so hat er zur Rechtfertigung solcher Annahmen nichts zu sagen, sondern er verknüpft die Problemstellung mit dem (unzutreffenden) Hinweis, daß in den Naturwissenschaften nichts als wahr oder als wahrscheinlich wahr angenommen wird, sondern daß allein interessante Vermutungen aufgestellt werden, die man zu falsifizieren sucht.[23] Versteht man Popper in diesem Punkt *nicht popperianisch*, so werden diejenigen Hypothesen als wahr oder als wahrscheinlich wahr akzeptiert, die sich besonders gut bewährt haben, deren Bewährungsgrad also hoch ist. Dieses Verfahren wird jedoch nirgends gerechtfertigt, Popper hält es wohl für evident.[24] Es ist aber nicht nur nicht evident, sondern sogar falsch: selbst dort, wo sich Bewährungsgrade angeben lassen, zählen nicht sie, sondern Wahrscheinlichkeitswerte.

---

[23] In den Naturwissenschaften unterscheidet man sehr wohl zwischen interessanten Vermutungen und experimentell gesicherten Theorien, d.h. zwischen einem Status, wie ihn z.B. die allgemeine Relativitätstheorie vor ihrer experimentellen Überprüfung hatte, und wie sie ihn heute hat.

[24] Auch W. Salmon betont in [67], daß Poppers Auszeichnung der Hypothesen durch ihre Bewährung einer Begründung bedarf. Für ihn stellt eine Akzeptierungsregel, die sich auf Bewährungsgrade stützt, auch eine Form „ampliativen“ Schließens dar, die man nicht ohne Begründung einführen kann, wenn man, wie Popper, mit Hume Kritik am „ampliativen“ Schließen im allgemeinen übt.

Hinzu kommen folgende Schwierigkeiten: 1. Popper hat von Carnap unkritisch den Glauben an die Präzisierbarkeit logischer Wahrscheinlichkeitsbewertungen übernommen und hat daher die Relativität des Bewährungsgrads $1-w(E/A)$ bzgl. der Wahl von w nicht gesehen, oder jedenfalls unterschätzt. 2. Popper hat das Problem, daß $w(A)=0$ ist für Erfahrungsdaten A, die Gesetze enthalten, nicht gelöst; bei seiner Definition des Bewährungsgrades tritt zusätzlich das Problem auf, daß der Bewährbarkeitsgrad $1-w(H/A)$ für alle Gesetzeshypothesen wegen $w(H)=0$ identisch ist. 3. Er hat ferner das Problem nicht gelöst, daß aus vielen deterministischen Hypothesen keine Beobachtungssätze folgen, ebenso wie aus allen statistischen Hypothesen; daß es also für diese Hypothesen keine Bewährung gibt. 4. Er hat auch übersehen, daß in der Regel einzelne Beobachtungssätze, z.B. wegen streuender Meßwerte, nicht verifizierbar oder bewährungsfähig sind, sondern nur induktiv gestützt werden; daß man also sicher mit rein deduktionslogischen Akzeptierungskriterien nicht auskommt.

Aus all diesen Gründen scheitert der Deduktivismus, der ja auch, genau genommen, schon mit der Einführung von Bewährungs- und Bewährbarkeitsgraden keine strenge, d.h. rein deduktionslogisch formulierte Methodologie mehr ist. Die Überprüfung der deduktiven Konsequenzen einer Hypothese ist sicherlich ein unentbehrlicher Prüfstein für unsere Annahmen über die Welt, und in vielen Fällen, in denen die induktiven Bestätigungskriterien versagen, der einzige Maßstab für ihre Zuverlässigkeit, aber eine wissenschaftstheoretisch befriedigende Methodologie läßt sich darauf allein nicht aufbauen.

Poppers deduktivistische Methodologie ist ganz auf die Annahme von Theorien und generellen Gesetzeshypothesen abgestellt, wie andererseits die induktivistische Methodologie ganz auf singuläre Hypothesen zugeschnitten ist. Für diese Hypothesen kommt man mit induktiven Begründungen aus – wenn auch hohe Wahrscheinlichkeit nicht immer ein hinreichender Grund ist, sie zu akzeptieren, wie Lotterie-Paradoxie in 2.5.5 gezeigt hat. Da

Gesetzeshypothesen die Wahrscheinlichkeit Null haben, versagt die induktive Begründung dagegen ganz generell in ihrem Fall. Die deduktive Begründung, die Bewährung, versagt wiederum im Fall singuläre Voraussagen: Sie können sich erst dann bewähren, wenn das fragliche Ereignis eintritt, bzw. nicht eintritt. Der Bewährungsbegriff nützt uns also nichts für Voraussagezwecke. Dagegen können sich generelle Hypothesen, die sich induktiv nicht bestätigen lassen, deduktiv bestätigen, d.h. bewähren. An *Beobachtungssätzen* können sich freilich auch viele Gesetzeshypothesen nicht bewähren, aber immerhin gibt es Gesetze, die sich an ihnen bewähren.[25]

Zwischen induktiver und deduktiver Bestätigung besteht ein entscheidender Unterschied: Eine induktive Bestätigung macht eine Hypothese H wahrscheinlicher, trägt also dazu bei, die Gründe zu verstärken, die *hinreichen*, H als wahr zu akzeptieren. Die Bewährung gibt dagegen nur *notwendige* Bedingungen für die Akzeptierbarkeit an, ist also *kein* hinreichender Grund, H zu akzeptieren. Wenn aus H falsche Beobachtungssätze folgen, so kann H nicht wahr sein; haben sich aber alle beobachtbaren

[25] Aus solchen Überlegungen heraus unterscheidet W. Stegmüller in [71] ein *praktisches Nachfolgerproblem* zum Humeschen Induktionsproblem, in dem es um die Begründung singulärer Voraussagen in entscheidungstheoretischen Kontexten geht und das mit wahrscheinlichkeitstheoretischen Mitteln zu lösen ist, und ein *theoretisches Nachfolgerproblem*, bei dem es um die Annahme von Theorien geht und das mit dem deduktiven Bestätigungsbegriff zu lösen ist. Wahrscheinlichkeitsbegründungen spielen aber nicht nur in praktischen, sondern auch in theoretischen Kontexten eine wichtige Rolle, wie umgekehrt auch Theorien bei praktischen Entscheidungen eine wesentliche Rolle spielen. Man kommt nicht, wie Carnap das in [50], § 110 H andeutet, ohne Theorien zu denselben singulären Voraussagen wie mit Theorien. Dazu ein einfaches Beispiel: Es sei in einer Folge von n Durchführungen eines Versuchs H genau r mal ein Ereignis vom Typ A aufgetreten – diese Tatsache drücke der Satz A_n^r aus. Es sei $q = \frac{r}{n}$. Ist n nicht zu klein, so wird man aufgrund von A_n^r vielleicht die statistische Hypothese $p(A) = q$ akzeptieren. Ist nun w eine subjektive Wahrscheinlichkeitsbewertung über dem zugehörigen Ereigniskörper, die regulär ist und bzgl. der die Ereignisse A_i (A bei der i-ten Durchführung des Versuchs)

Konsequenzen von H bisher als richtig erwiesen, *so ist das kein Grund, H als wahr oder als wahrscheinlich wahr zu akzeptieren.* D.h. die deduktive Bewährung liefert uns keine positiven Gründe dafür, warum wir H akzeptieren sollen, sie schließt nur Gründe für die Verwerfung von H aus. Das ist die fundamentale Schwierigkeit des Bewährungsbegriffs, daß er notwendige und hinreichende Gründe für die Annahme von Hypothesen zu verwechseln scheint. Wenn es um die Frage geht, ob wir H annehmen sollen, benötigen wir Gründe, die *für* H sprechen, nicht Gründe, die *nicht gegen* H sprechen.

Man kann aber der Bewährung im Zusammenhang mit anderen positiven Gründen für die Akzeptierung von Gesetzeshypothesen und Theorien sehen und kommt dabei zu einer wesentlich günstigeren Einschätzung der methodologischen Prinzipien Poppers: Wir haben in 4.3 betont, daß Gesetze und Theorien zu einer Systematisierung der Erfahrung dienen. Von daher sind Einfachheit und Fruchtbarkeit einer Theorie – beide fallen, wie wir sahen, für

---

vertauschbar sind, dann gilt nach T2.1.6–2 $\lim_{n\to\infty}(w(A_{n+1}/A^r_n)-\frac{r}{n})=0$, d.h. es gibt zu jedem solchen w und jedem $\varepsilon>0$ ein N, so daß für alle $n\geq N$ gilt $|w(A_{n+1}/A^r_n)-\frac{r}{n}|<\varepsilon$. Daraus folgt aber nicht, daß es für jedes $\varepsilon>0$ ein N gibt, so daß für alle solche w gilt: für alle $n\geq N$ ist $|w(A_{n+1}/A^r_n)-\frac{r}{n}|<\varepsilon$. D.h. für jedes ε und N kann es ein solches w geben, mit $|w(A_{n+1}/A^r_n)-\frac{r}{n}|\geq\varepsilon$. Auch wenn q der Grenzwert der Folge der $\frac{r}{n}$ ist, gibt es also zu jedem N, sei es auch noch so groß, eine Bewertung w, für die der Wert $w(A_{n+1}/A^r_n)$ noch beliebig weit von q weg liegt. Wenn w dagegen eine Bewertung mit $w(p(A)=q)=1$ ist, d.h. eine Bewertung, die aufgrund der Annahme der Hypothese $p(A)=q$ gebildet ist, so gilt für jedes solche w $w(A_{n+1})=w(A_{n+1}/A^r_n)=q$. Man kann also nicht behaupten, daß der Umweg von der Beobachtung A^r_n über die Hypothese $p(A)=q$, die wir aufgrund von A^r_n akzeptiert haben, dieselben Voraussagen über A_{n+1} ergibt wie der direkte Weg der Bildung einer bedingten Wahrscheinlichkeit $w(A_{n+1}/A^r_n)$.

Popper zusammen – positive Argumente für die Annahme einer Hypothese H. Es sind freilich keine Argumente, die besagen, daß H *wahr oder wahrscheinlich wahr* ist: Einfachheit und Fruchtbarkeit sind keine Wahrheitskriterien, aber Theorien und Gesetze sind vielfach auch nicht so sehr, wie singuläre Hypothesen, *Produkte* unseres Bemühens, herauszufinden, was der Fall ist, als *Mittel* dafür: „Hypothesen sind Netze: nur der wird fangen, der auswirft“ war das Motto Poppers in seiner „Logik der Forschung“; er betont, daß Hypothesen erst die Fragestellungen ermöglichen, unter denen wir sinnvoll organisierte Erfahrung und Experimente machen können. Fügen wir noch zwei wichtige Gesichtspunkte hinzu:

1. Nur aufgrund einer ganzen Reihe zusätzlicher Annahmen, von Beobachtungssätzen angefangen bis hin insbesondere zu den Theorien, entsteht eine hinreichend feste Basis, die wir mit der Erfahrung konfrontieren können, so daß sie uns eindeutige Antworten gibt. Diese Annahmen lassen sich also nicht direkt durch Beobachtungen begründen, sondern ermöglichen erst eindeutige Feststellungen durch Beobachtungen. Wenn man nicht die Resultate von Beobachtungen (bis auf weiteres) einmal als definitiv annimmt, definitive Voraussetzungen über das Funktionieren der Meßinstrumente macht, und von definitiven Hypothesen über Zusammenhänge von Phänomenen ausgeht, kommt man nicht zu definitiven Feststellungen mit definitiven Konsequenzen. Relevante Erfahrungen setzen also Annahmen voraus, die durch Erfahrung selbst nicht hinreichend begründet werden können. Diese Annahmen, und dazu gehören auch Theorien, müssen sich als fruchtbar erweisen, und sie dürfen nicht den (durch sie ermöglichten) Beobachtungen widersprechen, aber das sind die einzigen Kriterien, die sich für sie zunächst anbieten und es sind keine hinreichenden Wahrheits- oder Wahrscheinlichkeitskriterien.

2. Entsprechendes gilt auch für die Hypothesen und Theorien, die dazu beitragen, die Bedeutung der Terme, mit denen wir die Resultate von Beobachtungen beschreiben, festzulegen; die also das

Schema mitbestimmen, in dem wir unsere Erfahrungen interpretieren. Auch hier kann man nicht eine Begründung verlangen in Analogie zu denjenigen Sätzen, die in diesem Interpretationsschema rein synthetischen Charakter haben. Wieder gilt nur das Bewährungskriterium, daß diese Theorien nicht der Erfahrung widersprechen dürfen und daß sie sich als fruchtbar bei der Organisation der empirischen Phänomene erweisen müssen.[26]

Im Hinblick darauf, daß Theorien und Gesetze also in viel höherem Maße Voraussetzung als Produkt unserer Erfahrung sind, als man das vielfach annimmt, ist Poppers Betonung der Rolle von Bewährung, Fruchtbarkeit und Einfachheit gerechtfertigt. Allerdings kann man weder Fruchtbarkeit mit Einfachheit identifizieren, noch Fruchtbarkeit mit Bewährbarkeit. Und der Bewährungsgrad gehört überhaupt nicht in den Kontext der

---

[26] Vgl. dazu auch den Abschnitt 6.4. – Gegen derartige Auffassungen wendet sich Popper in [70], S. 56f. Er spricht dort von einem *Myth of the Framework*, nach dem rationale wissenschaftliche Diskussion und empirische Überprüfung einen gemeinsamen Rahmen der Sprache und der fundamentalen Theorien voraussetzt. Er schreibt: „I do admit that at any moment we are prisoners caught in the framework of our theories; our expectations; our past experiences; our language. But we are prisoners in a Pickwickian sense: if we try, we can break out of our framework at any time. Admittedly, we shall find ourselves again in a framework, but it will be a better and roomier one; and we can at any moment break out of it again“ ... „The Myth of the Framework is, in our time, the central bulwork of irrationalism. My counterthesis is that it simply exaggerates a difficulty into an impossibility“.

Aber wenn Popper einerseits den Relativismus so extrem darstellt, daß er in der Tat eine Schwierigkeit zu einer Unmöglichkeit verfälscht, indem er annimmt, daß die verschiedenen Weltansichten völlig unvergleichbar sind, so verharmlost er andererseits die echten Schwierigkeiten solcher Vergleiche ganz erheblich: Es ist keineswegs möglich, nach Belieben aus einer Weltansicht – wissenschaftlich oder nicht – auszubrechen; denn wären die Ansichten beliebig, so hätten sie wohl kaum den Charakter allgemeiner Verbindlichkeit. Wir haben in der Regel keine echte Alternative, und wo echte Alternativen auftreten, setzt auch schon die Krise der Weltansicht ein. Poppers rationalistischer Fortschrittsglaube ist allzu deutlich selbst ein Teil seiner Weltansicht.

Begründung von Erfahrungsvoraussetzungen, sondern nur in den der Begründung synthetischer Sätze durch Erfahrung.

Zu betonen ist aber, daß man gegenüber Popper den Unterschied zwischen Annahmen machen muß, die Voraussetzungen von Erfahrungen sind, und solchen, die sich auf Erfahrungen stützen. Sie sind in verschiedener Weise zu begründen, und für sie gelten daher verschiedene methodologische Kriterien. In der Regel wird es zwar so sein, daß eine Gesetzeshypothese sich einerseits auf Erfahrungen stützt, andererseits selbst wieder zur Grundlage neuer Erfahrungen wird; weder folgen die Erfahrungen immer nur den Voraussetzungen, noch umgekehrt. Aber methodologisch muß man diese beiden Aspekte unterscheiden und die entsprechenden Begründungskriterien auseinanderhalten.

6 DIE PROBLEMATIK DES EMPIRISMUS

6.1 Die beiden Grundthesen des Empirismus

Wir haben in dieser Darstellung der Grundzüge der allgemeinen Methodologie der empirischen Wissenschaften das Basisproblem ausgeklammert, d.h. die Frage nach der Interpretation der einfachen Beobachtungsterme, die die Grundlage der Interpretation der theoretischen Terme bilden,[1] und nach der Überprüfung der mit solchen Termen gebildeten einfachen Beobachtungssätze, auf die sich die Überprüfung der empirischen Hypothesen und Theorien stützt. Dieses Problem führt wiederum auf andere, fundamentale und weitreichende Fragen und soll daher an anderer Stelle aufgenommen werden.[2] Wir können deswegen aufgrund unserer bisherigen Erörterungen noch nicht versuchen, ein Bild der empirischen Erkenntnis zu entwerfen: Wichtige Züge eines solchen Bildes sind zwar schon deutlich geworden, andere wichtige Teile fehlen aber noch.

---

[1] Wir behaupten nicht, es gäbe eine Menge von Termen, die in einem absoluten Sinn (nicht nur in dem relativen Sinn von 3.2) Beobachtungsterme sind, d.h. die in keinem Kontext als theoretische Terme oder als kompositionelle Terme der Beobachtungssprache aufgefaßt werden können. Gemeint ist vielmehr, daß man bei der Interpretation von empirischen Termen immer Beobachtungsterme als wohlinterpretierte Terme voraussetzen muß, daß man also, will man nicht zirkelhaft argumentieren, eine gewisse Menge von Beobachtungstermen für sich und ohne Rückgriff auf andere interpretieren muß.

[2] Vgl. Kutschera [73].

Wir haben jedoch durch unsere Untersuchungen schon die Mittel in die Hand bekommen, um dasjenige Modell empirischer Erkenntnis zu kritisieren, das im Zusammenhang mit der Wissenschaftstheorie von besonderem Interesse ist: das Erkenntnismodell des Empirismus.

Diese Arbeit ist rein systematisch ausgerichtet, und wir haben uns in den vorausgehenden Kapiteln immer nur auf die gegenwärtigen Diskussionen bezogen und haben auf historische Erörterungen ganz verzichtet – mit Ausnahme einiger Hinweise auf David Hume, die durch die Aktualität der Gedanken Humes in der modernen Diskussion des Induktions- und des Kausalitätsproblems angezeigt erschienen. Auch jetzt wollen wir keinen philosophiehistorischen Exkurs unternehmen und Entstehung, Formen und ideengeschichtliche Bedeutung des Empirismus untersuchen, sondern wir werden seine Thesen systematisch diskutieren. Ihnen kommt unter wissenschaftstheoretischem Aspekt, wie schon in der Einleitung betont wurde, deswegen besondere Bedeutung zu, weil die moderne Wissenschaftstheorie hauptsächlich von Empiristen entwickelt worden ist, und weil auch heute viele ihrer prominenten Vertreter sich als „Empiristen" bezeichnen. Die große Ausnahme bildet dabei der „kritische Rationalismus" Karl Poppers.[3]

Man kann den Empirismus als diejenige philosophische Richtung kennzeichnen, die in der Erfahrung den einzigen Ursprungs- und Rechtfertigungsgrund aller synthetischen Erkenntnis sieht. Alle Begriffe, mit denen wir die Welt beschreiben, sind der Erfahrung entnommen, und alle unsere Aussagen über die Welt

---

[3] Man bezeichnet den philosophischen Standpunkt des frühen Wiener Kreises auch als „Neo-Positivismus". Da der Ausdruck „Positivismus" aber erstens eine engere Bedeutung hat als „Empirismus" (nach dem Programm des Positivismus bei Mach und Avenarius sollte sich die Wissenschaft auf eine möglichst von hypothetischen Elementen freie Beschreibung und Ordnung des „unmittelbar Gegebenen" beschränken) und zweitens heute vielfach polemisch gefärbt ist, verwenden wir im folgenden diese Bezeichnung nicht.

sind aus Erfahrungen gewonnen. Wenn man von Philosophen wie John Stuart Mill absieht, die auch Logik und Mathematik zu den empirischen Wissenschaften rechnen, so erkennen die Empiristen zwar ein analytisches Apriori an, aber diese apriorischen Sätze haben keinerlei synthetischen Gehalt, d.h. aus ihnen folgen keine Sätze, die etwas über die Beschaffenheit der Welt aussagen. Die Sätze der Naturwissenschaften hingegen beruhen nicht auf irgendwelchen apriorisch-synthetischen Prinzipien, wie sie z.B. Kant annahm, sondern lassen sich nur aposteriorisch, d.h. durch Beobachtungen begründen.

Man kann die beiden Grundthesen des Empirismus so formulieren:

I) Die Sprache der Naturwissenschaften läßt sich so aufbauen, daß sie nur deskriptive Terme enthält, die durch Bezugnahme auf Erfahrungen interpretiert sind.

II) Alle wahren naturwissenschaftlichen Behauptungen lassen sich durch Beobachtungen und nur durch Beobachtungen begründen.

Nicht jeder, der sich als „Empirist" bezeichnet, vertritt beide Thesen. Diese Thesen sind von einander weitgehend unabhängig, so daß z.B. Franz Brentano nur die erste These vertreten konnte, während in der heutigen Diskussion des Empirismus fast nur mehr die zweite These eine Rolle spielt, die auch als die wichtigere der beiden Thesen angesehen werden muß.

Wir wollen nun diese Thesen untersuchen und werden dabei Präzisierungsvorschläge für die beiden zunächst sehr vagen Ausdrücke „durch Bezugnahme auf Erfahrungen interpretieren" und „durch Beobachtungen begründen" machen.

Bei der folgenden Diskussion des Empirismus wollen wir nicht mehr auf die empiristischen Sinnkriterien zurückkommen, die wir im Abschnitt 3.4 ausführlich besprochen haben. Es ist klar, daß man die Thesen I und II – in passenden Präzisierungen – beweisen kann, wenn man von einem entsprechenden Sinnkriterium ausgeht. Sieht man z.B. nur diejenigen Sätze als sinnvoll an, die verifizierbar sind durch Beobachtungssätze (vgl. das Kriterium K1 in 3.4), so lassen sich trivialerweise alle naturwissenschaftlichen

Sätze im Sinne der These II durch Beobachtungen begründen. Wir wollen bei der Diskussion der empiristischen Thesen dagegen nicht von einer mehr oder minder ad hoc beschränkten Menge naturwissenschaftlicher Sätze oder Begriffe ausgehen.

6.2 Definition durch Abstraktion

Die These (I) des Empirismus wird in der traditionellen Philosophie meist so verstanden, daß ein Ausdruck „durch Bezugnahme auf Erfahrungen interpretiert" wird, wenn er ein Eigenname ist, der ein unmittelbar beobachtbares Objekt bezeichnet, oder ein Prädikat, das einen Begriff ausdrückt, der „aus der Erfahrung abstrahiert ist". Die These (I) lautet dann:

I′) Die Sprache der Naturwissenschaften läßt sich so aufbauen, daß sie nur deskriptive Terme enthält, die aus der Erfahrung abstrahiert sind.

Dabei bleibt meist im Dunkeln, was dieser letztere Ausdruck beinhalten soll. Deshalb wollen wir zunächst darstellen, in welchem Sinn man von einer *Definition durch Abstraktion* sprechen kann.

In der traditionellen Philosophie wird z.B. die Abstraktion des Begriffes ‚Mensch' so geschildert, daß man von den einzelnen Menschen ausgeht und von ihren Verschiedenheiten absieht (z.B. ihrer Größe, Haarfarbe, von Alter, Geschlecht, Intelligenz etc.), so daß sie gleichartig werden; die Vorstellung eines abstrakten, von akzidentellen Eigenschaften freien Menschen ist dann die Allgemeinvorstellung oder der Begriff des Menschen. Aber eine solche Idee der Produktion eines Begriffes aus Einzelobjekten durch Absehen, d.h. Nichtbeachtung von unterschiedlichen Eigenschaften ist natürlich ganz abenteuerlich: Aus Objekten wird niemals ein Begriff, und es gibt auch zu jeder Menge von Objekten immer unendlich viele Begriffe, die alle Elemente dieser Menge gemeinsam haben (mit einem Begriff G ist z.B. auch $G \vee F$ für beliebige F ein solcher Begriff). Endlich muß man *Vorstellungen* streng von *Begriffen* unterscheiden, und es gibt keine Vorstellung eines „abstrakten" Menschen, der weder groß noch klein, weder Mann noch Frau, weder jung noch alt ist, wohl aber gibt es einen Begriff ‚Mensch', zu dessen Merkmalen weder Bestimmungen der Größe, noch des Geschlechts, noch des Alters gehören.[1]

Wenn man dagegen in der Logik von einer „Definition durch Abstraktion" spricht, dann hat man gewöhnlich folgenden Fall vor Augen:

1) Gegeben ist eine Äquivalenzrelation R(x,y)[2], die auf einer Menge von Objekten M definiert ist, und man kann nun zu jedem Objekt a aus M den Begriff bilden R(a,y). Der Umfang dieses Begriffs $\lambda y R(a,y)$ ist die Äquivalenzklasse $[a]_R$, der a angehört. Man sagt dann, diese Äquivalenzklassen, bzw. die ihnen entsprechenden Relationen R(a,y) seien *durch Abstraktion definiert.* So kann man, um ein Beispiel Freges anzuführen, mit der Äquivalenzrelation der *Parallelität* zweier Geraden (zwei Gerade sind parallel, wenn sie in einer Ebene liegen und sich nicht schneiden) den Begriff der *Richtung* einer Geraden a definieren als Klasse aller mit a parallelen Geraden. Und Frege definiert die Anzahl (der Elemente) einer Menge a durch Abstraktion aus dem Begriff der *Gleichzahligkeit* zweier Mengen als Menge aller mit a gleichzahligen Mengen.[3]

Von einer „Definition durch Abstraktion" könnte man in einem weiteren Sinn auch in folgenden Fällen sprechen:

2) Gegeben ist eine komparative Relation $x \leq\cdot\, y$ auf einer Menge M von Objekten, und man definiert unter Bezugnahme auf be-

[1] Die klarsten und schärfsten Kritiken der traditionellen Abstraktionstheorien finden sich im Werk Freges. Vgl. dazu z. B. Frege [99] und [06].

[2] Vgl. dazu den Abschnitt 1.1.

[3] Vgl. dazu z. B. Kutschera [67], 5.4. Für die Korrektheit dieser Definition ist es dabei entscheidend, daß der Begriff der *Gleichzahligkeit* zweier Mengen a und b nicht durch den Begriff ‚gleiche Anzahlen habend' erklärt wird (sonst läge ein Zirkel vor), sondern durch die Existenz einer eineindeutigen Abbildung von a auf b.

stimmte Objekte $a_1, \ldots, a_n$ aus M mit $\neg\, a_i \doteq a_k$ für $i \neq k$ $(i,k=1, \ldots, n)$ klassifikatorische Begriffe wie $x \leq\cdot\, a_1$, $a_i \leq\cdot\, x \leq a_{i+1}$, $x \cdot\!> a_i$ etc.[4] Oder: Gegeben ist eine vierstellige Ähnlichkeitsrelation $x,y \leq u,v$, die sich als komparative Relation zwischen Paaren von Objekten $\{x,y\} \leq \{u,v\}$ darstellen läßt, und die inhaltlich besagt, daß x dem y höchstens so ähnlich ist wie u dem v. Unter Bezugnahme auf (nichtleere) Klassen $B_1, \ldots, B_n$ von Beispielsobjekten (für die gilt: $a \in B_i \wedge b \in B_k \supset \neg\, a,b \doteq c,c$ für $i \neq k$) kann man dann durch die Definition:

$F_i(x) := \bigvee x(x \in B_i \wedge \bigwedge y(y \in \bigcup_{k \neq i} B_k \supset y,a <\cdot\, x,a))$ $(i=1, \ldots, n)$ n klassifikatorische Begriffe einführen.[5]

Sowohl im Fall (1) wie in den Fällen (2) werden klassifikatorische Begriffe mit Hilfe vorgegebener Relationen durch Bezugnahme auf bestimmte Objekte definiert.[6] Eine Definition durch Abstraktion ist also immer eine Definition *mit Hilfe von Begriffen.* Es gibt kein Verfahren, wie man durch Abstraktion allein von Objekten zu Begriffen kommt; immer werden andere Begriffe bereits vorausgesetzt.

Wo das zugestanden wird, wird aber doch oft behauptet, daß eine einzige Ähnlichkeitsrelation genüge, um damit durch Abstraktion alle empirischen Begriffe zu gewinnen. Diese Behauptung bleibt aber solange unbewiesen, wie nicht eine solche Relation präzisiert und im Detail angegeben wird, wie man daraus, wenn nicht alle, so doch die grundlegenden empirischen Begriffe gewinnen kann. Das hat zuerst R. Carnap 1928 in seinem Buch „Der logische Aufbau der Welt" versucht. Wegen des großen Interesses eines solchen Unternehmens wollen wir in Form eines kurzen Exkurses auf Carnaps Grundgedanken eingehen.

---

[4] Vgl. dazu das Beispiel der Härtegrade in 1.2.

[5] Vgl. dazu Kutschera [71], 3.4.7.

[6] Auf die Einführung komparativer oder metrischer Begriffe auf der Grundlage von vorgegebenen Relationen wollen wir hier nicht eingehen, da der klassifikatorische Fall zur Begründung unserer Behauptungen ausreicht.

Carnap selbst hat seine Arbeit nur als eine Skizze verstanden und hat nur die Begriffe der untersten Stufe seines Konstitutionssystems exakt definiert. Uns geht es im folgenden aber auch allein um die Grundlage seiner Definitionen, um die Definition von Qualitäten mithilfe einer Teilgleichheits- oder einer Teilähnlichkeitsrelation. Carnaps Ansatz steht im Rahmen eines phänomenalistischen Aufbaus der Wissenschaftssprache. Davon wollen wir hier absehen und uns nur auf die Frage konzentrieren, ob man mit einer Relation unspezifischer Ähnlichkeit – gleich welchen Definitionsbereichs – spezifische klassifikatorische Begriffe auf diesem Bereich definieren kann.

Carnaps Grundrelation ist die einer *Teilähnlichkeitserinnerung*, die zwischen zwei (Elementar-) Erlebnissen x und y genau dann besteht, wenn x durch einen Vergleich einer Erinnerungsvorstellung von x mit dem (gegenwärtigen) Erlebnis y als teilähnlich, d.h. als in einer Qualität annähernd übereinstimmend erkannt wird. Den Bezug auf Erlebnisse lassen wir hier beiseite, ebenfalls den Bezug auf die Erinnerung, der bei Carnap nur dazu dient, eine zeitliche Ordnung der Erlebnisse zu definieren. Carnap motiviert die Wahl einer Teilähnlichkeitsrelation als Grundrelation so, daß mit ihr nicht nur Qualitäten zu definieren sind, sondern auch Ordnungsrelationen für solche Qualitäten. Das ist jedoch für uns hier, ebenso wie die Definition der zeitlichen Ordnung, eine *cura posterior*, und so gehen wir zunächst auf Carnaps Versuch ein, mit einer *Teilgleichheitsrelation* Qualitäten zu definieren.

Die Definition der Qualitäten auf der Basis einer Teilgleichheitsrelation: Es sei R(x,y) die Relation einer Teilgleichheit, die auf einer Menge M von (nicht näher spezifierten Objekten) definiert ist, und die zwischen zwei Objekten a und b aus M genau dann besteht, wenn a mit b in irgendeiner Hinsicht, d.h. in irgendeiner Eigenschaft übereinstimmt. Während wir bei einer Beziehung der Gleichheit sonst immer auf eine *bestimmte* Eigenschaft oder Hinsicht F Bezug nehmen, bzgl. der ein Objekt a einem anderen Objekt b gleicht (sie haben gleiche Form, Farbe, sind Fabrikate der gleichen Marke, bestehen aus dem gleichen Material, etc.), soll R als einzige Grundrelation nicht auf spezifische (vorgegebene) Eigenschaft F Bezug nehmen, bzgl. deren eine Gleichheit besteht.

Diese Grundrelation soll bei Carnap rein extensional charakterisiert sein, als Menge (sogar als endliche Menge) von Paaren von Objekten, die in der Relation R stehen. Hier muß bereits die erste grundsätzliche Kritik an Carnap ansetzen: Eine Aufzählung endlich vieler Beispiele und Gegenbeispiele für die Anwendung eines Prädikats legt seine Interpretation nicht hinreichend fest; damit das Prädikat auch auf neue Fälle angewendet werden kann, muß es intensional charakterisiert werden.[7] Das geschieht bei Carnap nicht, und eine intensionale Charakterisierung von S bietet sich auch aus folgendem Grund nicht an: Zu zwei Gegenständen a und b gibt es immer eine Eigenschaft F, die beide gemeinsam haben, z. B. die Eigenschaft, mit a oder b identisch zu sein. Wenn man daher die Menge der in Betracht zu ziehenden Eigenschaften F nicht von vornherein begrenzt (so daß es sich z. B. nur um Farb- oder Form- oder Materialeigenschaften handeln soll) – und das geschieht nicht und kann nicht geschehen, weil man auch solche begrenzenden Prädikate nicht voraussetzen will – gilt also trivialerweise $\bigwedge xyR(x,y)$ und die Relation R ist damit als deskriptive Grundrelation nicht brauchbar.

Sehen wir aber davon für das folgende einmal ab. Die Relation R soll ihrer Deutung nach reflexiv und symmetrisch, nicht aber transitiv sein, d. h. es soll gelten $\bigwedge xy(R(x,y) \vee R(y,x)) \supset R(x,x))$ und $\bigwedge xy(R(x,y) \supset R(y,x))$, aber sie ist nicht transitiv, d. h. es gilt nicht $\bigwedge xyz(R(x,y) \wedge R(y,z) \supset R(x,z))$. Denn wenn zwei Objekte a und b eine Eigenschaft (einer *beschränkten* Eigenschaftsmenge) gemeinsam haben, und ebenso b und c, so folgt daraus nicht, daß auch a und c eine Eigenschaft (dieser Menge) gemeinsam haben.

Carnap definiert dann unter Bezugnahme auf R die Qualitäten (d. h. die Eigenschaften – ihm schweben direkt beobachtbare, elementare sinnliche Differenzen vor) extensional als größte Klas-

[7] Vgl. dazu Kutschera [71], 3.4.4.

sen, deren Elemente untereinander paarweise in der Relation R stehen. Die *Klasse der Qualitäten* wird also definiert durch:

D1: $S(R) := \lambda z(\bigwedge xy(x \in z \wedge y \in z \supset R(x,y)) \wedge \bigwedge y(\bigwedge x(x \in z \supset R(x,y)) \supset y \in z))$.[8]

Und F ist eine Qualität (bzw. der Umfang einer Qualität, wenn gilt $F \in Q(S)$.

Dazu ein *Beispiel:*[9] Es seien 6 Dinge gegeben mit Farben, die durch die Buchstaben b(blau), g(grün), r(rot) symbolisiert werden: 1:br, 2:b, 3:bg, 4:g, 5:r, 6:bgr. Es gilt also R(1,1), R(1,2), R(1,3), R(1,5), R(1,6), R(2,2), R(2,3), R(2,6), R(3,3), R(3,6), R(4,4), R(4,6), R(5,5), R(5,6), R(6,6) und die dazu symmetrischen Ausdrücke R(2,1), R(3,1), etc. und $\neg$ R(i,k) für alle anderen Paare (i,k) (i,k = 1, . . ., 6). Nach D1 ergeben sich nun die Qualitätsklassen {1,2,3,6}, {1,5,6}, {3,4,6}, also die Klassen der blauen, roten und grünen Dinge.

Ob aber im konkreten Fall die Elemente von S(R) tatsächlich Klassen sind, die jeweils genau eine Qualität repräsentieren, die an den Objekten vorkommt, und ob es zu jeder solchen Qualität auch eine Klasse aus S(R) gibt, die sie repräsentiert, ob also D1 adäquat ist, das hängt von den tatsächlichen Gegebenheiten ab: *Das Problem konkomitanter Qualitäten:*[10] Wenn eine Qualität an den Grundobjekten immer nur in Verbindung mit einer anderen Qualität auftritt, so entspricht ihr nach D1 keine eigene Qualitätsklasse in S(R), d.h. die Qualität läßt sich nach D1 nicht darstellen.

Dazu ein Beispiel:[11] Es seine 5 Dinge gegeben: 1:br, 2:b, 3:bg, 4:g, 5:bgr. Hier tritt r immer nur zusammen mit b auf (aber nicht umgekehrt). Es gilt nun R(1,1), R(1,2), R(1,3), R(1,5), R(2,2), R(2,3), R(2,5), R(3,3), R(3,4), R(3,5), R(4,4), R(4,5) und die symmetrischen Ausdrücke, und $\neg$ R(i,k) für alle anderen

---

[8] Vgl. dazu Carnap [28], S. 145ff.

[9] Vgl. dazu Goodman [51], S. 158ff.

[10] N. Goodman, auf dessen Kritik an Carnaps „Aufbau“ wir hier und im folgenden Bezug nehmen, bezeichnet diese Schwierigkeit als *companionship difficulty*, vgl. dazu [51], S. 160ff. Carnap hat in [28], S. 100 selbst auf diese Schwierigkeit hingewiesen.

[11] Vgl. Goodman [51], S. 160.

Paare (i,k) (i,k = 1, ..., 5). Nach D1 ergeben sich also die Qualitätsklassen: {1,2,3,5} und {3,4,5}, aber nicht {1,5}, da R(2,1), R(2,5) gilt, so daß also 2 (und ebenso 3) zur Klasse gehört. Wir erhalten also die Klassen der blauen und die der grünen Dinge, aber nicht eine Klasse der roten Dinge.

Carnap meint nun, das Vorkommen solcher konkomitanter Eigenschaften sei sehr unwahrscheinlich bei einer großen Zahl von Grundobjekten, aber Goodman hebt mit Recht hervor, daß die große Zahl der Grundobjekte wettgemacht werden kann durch die große Zahl der Qualitäten der Objekte.[12] Außerdem kann ja eine systematische (naturgesetzliche) Abhängigkeit bestehen zwischen zwei Qualitäten F und G im Sinne von $\bigwedge x(Fx \supset Gx)$, die die Adäquatheit von D1 zerstört. Diese Schwierigkeit ist also durchaus ernstzunehmen.

Hier wird so das zweite grundsätzliche Problem des gesamten Definitionssystems deutlich: Die Adäquatheit der Definitionen hängt von empirischen Tatsachen ab. Es ist also allenfalls eine nicht verifizierbare empirische Hypothese, daß die Definitionen korrekt sind, und der Inhalt der Definitionen liegt erst dann fest, wenn wir die Extensionen von R kennen, d. h. wenn wir über die Welt vollständig Bescheid wissen, die wir mit den einzuführenden Begriffen beschreiben wollen. Das ist aber völlig unakzeptabel.

Das Problem der unvollständigen Gemeinsamkeit:[13] Goodman hat eine weitere, noch ernstere Schwierigkeit der Definition D1 her-

---

[12] Vgl. Goodman [51], S. 162.

[13] Vgl. Goodman [51], S. 162ff. Goodman bezeichnet diese Schwierigkeit als „difficulty of imperfect community". Er hat in [51], S. 211ff. angegeben, wie sich diese Schwierigkeit bei Wahl einer anderen Grundrelation vermeiden läßt. Wenn man die Relation der Teilgleichheit R(x, y) für Objekte einmal intuitiv so erklärt $R(a, b) \equiv \bigvee f(f(a) \wedge f(b))$ – die Variable f beziehe sich auf eine beschränkte Menge von Eigenschaften – so könnte man sie durch eine Grundrelation für *Klassen* A, B von Objekten ersetzen:
$R'(A, B) \equiv A \neq \Lambda \;\wedge\; B \neq \Lambda \;\wedge\; A \wedge B \neq \Lambda \;\wedge\; \bigvee f \bigwedge x(x \varepsilon A \wedge x \varepsilon B \supset f(x))$.
Dann gilt $R(a,b) \equiv a = b \vee R'(\{a\},\{b\})$. R′ ist symmetrisch und irre-

vorgehoben: $S(R)$ kann, bei geeigneter Beschaffenheit der Grundobjekte, Klassen enthalten, in denen zwar je zwei Elemente eine gemeinsame Qualität aufweisen, für die es aber keine Qualität gibt, die allen Elementen gemeinsam wäre. D.h. nicht jeder Qualitätsklasse nach D1 entspricht auch eine Qualität.
Dazu wieder ein Beispiel:[14] Die Grundobjekte seien: 1:bg, 2:rg, 3:br, 4:r, 5:b, 6:g. Es gilt also $R(1,1)$, $R(1,2)$, $R(1,3)$, $R(1,5)$, $R(1,6)$, $R(2,2)$, $R(2,3)$, $R(2,4)$, $R(2,6)$, $R(3,3)$, $R(3,4)$, $R(3,5)$, $R(4,4)$, $R(5,5)$, $R(6,6)$, sowie die symmetrischen Ausdrücke, und $\neg R(i,k)$ für alle anderen Paare (i,k) $(i,k = 1, \ldots, 6)$. Nach D1 gilt nun $\{1,2,3\} \in S(R)$; diese Klasse repräsentiert aber keine Qualität, da die Objekte 1,2 und 3 keine gemeinsame Qualität aufweisen.

Diese Schwierigkeit ist unabhängig von den konkomitanten Qualitäten (im Beispiel kommen solche nicht vor). Sie bildet einen weiteren entscheidenden Einwand gegen die Möglichkeit, Qualitäten nach D1 zu definieren.

Die Abstraktion der Qualitäten aus einer Teilähnlichkeitsrelation: Wir betrachten nun die Abstraktion der Qualitäten aus einer Teilähnlichkeitsbeziehung, um zu zeigen, daß sich die Schwierigkeiten dabei nicht vermindern, sondern sogar noch verstärken.

---

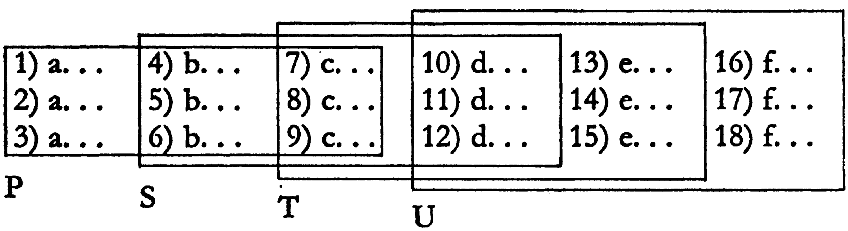
flexiv. Das Problem der unvollständigen Gemeinsamkeit tritt nun nicht mehr auf: Die Aussage $R'(\{a\},\{b, c\})$ ist stärker als $R(a, b) \wedge R(a, c) \wedge R(b, c)$, denn aus ihr, nicht aber aus dieser letzteren Aussage, folgt $\bigvee f(f(a) \wedge f(b) \wedge f(c))$; man kann also die Qualitätsklassen als größte Klassen definieren, deren Elemente alle eine Eigenschaft gemeinsam haben:
$S'(R) := \lambda z \bigwedge xy(x \cup y = z \wedge x \neq \Lambda \wedge y \neq \Lambda \wedge x \cap y \neq \Lambda \supset R'(x, y)) \wedge \neg \bigvee y R'(\{y\}, z))$. Es bleibt jedoch das Problem der Konkomitanten, und $R'(x, y)$ ist intuitiv nicht besser definiert als $R(x, y)$. – Im System von Goodman in [51], auf das wir hier nicht eingehen, weil es nicht Objekte, sondern Qualitäten als gegeben annimmt und sich anstelle des Problems der Abstraktion der Qualitäten aus Objekten die Aufgabe der Konkretion von Objekten aus Qualitäten stellt, tritt das Problem der Konkomitanten dagegen nicht auf.

[14] Vgl. Goodman [61], S. 163.

Es sei also A(x,y) eine Relation der *Teilähnlichkeit*, die zwischen zwei Objekten x und y aus M genau dann bestehen soll, wenn sie in einer Qualität annähernd übereinstimmen. Bezüglich dieser Erläuterung, bzw. Carnaps Ansatz, die Extension dieser Relation als vorgegeben anzunehmen, sind die entsprechenden Bedenken geltend zu machen, wie im Fall der Relation R(x,y): Eine Ähnlichkeit zwischen zwei Objekten besteht immer nur bzgl. einer Eigenschaft (der Form, Farbe etc. der Objekte), die Carnap aber nicht voraussetzen kann; läßt man beliebige Eigenschaften zu, so gibt es immer eine Eigenschaft, bzgl. der sich zwei Objekte ähnlich (ja, wie wir gesehen haben, sogar gleich) sind, so daß trivialerweise gelten würde $\bigwedge xyA(x,y)$. Für die Definition der Qualitäten mit A(x,y) bildet Carnap in einem ersten Schritt nach D1 die Menge S(A), deren Elemente – Carnap bezeichnet sie als *Ähnlichkeitskreise* – wenn alles gut geht – Klassen sind, deren Elemente jeweils eine von mehreren untereinander ähnlichen Qualitäten haben. D.h. jeder Ähnlichkeitskreis enthält mehrere Qualitätsklassen, die es nun im zweiten Schritt zu isolieren gilt. Dazu bildet man die maximalen Klassen von Objekten, die durch Durchschnittsbildung von Ähnlichkeitskreisen nicht geschnitten werden:

D2: $Q(A) := \lambda z[\bigwedge x(x \in S(A) \wedge x \cap z \neq \Lambda \supset z \subset x) \wedge \bigwedge y(\neg y \in z \supset \bigvee x(x \in S(A) \wedge \neg y \in x \wedge z \subset x))]$.

Das läßt sich so veranschaulichen:[15]



Dabei sollen benachbarte Buchstaben für ähnliche Qualitäten stehen, d.h. für Qualitäten, die annähernd übereinstimmen; P, S, T, U stehen für Ähnlichkeitskreise.

[15] Vgl. Goodman [51], S. 175.

Bei dieser Konstruktion treten nun aber folgende Schwierigkeiten auf:

a) Wenn keine konkomitanten Qualitäten vorkommen sollen, so muß es zu jedem Objekt ax. . . ein Objekt x. . . geben, das a nicht enthält. Da nun {ax. . ., x. . ., . . .} eine Qualitätsklasse zu x bildet, müßte nach D2 jeder Ähnlichkeitskreis, der ax. . . enthält, auch x. . . enthalten. D.h. aber: die Qualitätsklasse zu a läßt sich nach D2 nicht bilden; sie ist nicht maximal, da sie x. . . nicht enthält, es aber keinen Ähnlichkeitskreis gibt, der die Qualitätsklasse zu a (also ax. . .) enthält, aber nicht x. . . .

b) Eine weitere Schwierigkeit hat Carnap selbst hervorgehoben: Wenn der Durchschnitt zweier Ähnlichkeitskreise nicht eine oder mehrere vollständige Qualitätsklassen enthält, so spricht er von einer *akzidentellen* Überdeckung der Ähnlichkeitskreise. Nimmt man z.B. das Objekt (19) afh zu den oben angegebenen Objekten (1) bis (18) hinzu, so ist {1,2,3,19} zwar eine Qualitätsklasse, nach D2 aber nicht als solche ausgezeichnet, weil gilt
$\{1,2,3,19\} \cap U = \{19\} \neq \Lambda$, aber nicht $\{1,2,3,19\} \subset U$.

Carnap sucht einen Ausweg aus dieser Schwierigkeit, indem er D2 modifiziert zu

D2′: $Q'(A) := \lambda z[\bigwedge x(x \in S(A) \wedge \overline{x \cap z} \geq \frac{1}{2}\bar{x} \supset z \subset x) \wedge \bigwedge xy(\neg y \varepsilon z \supset \bigvee x(x \varepsilon S(A) \wedge \neg y \varepsilon x \wedge z \subset x))]$,[16] wobei $\bar{x}$ die Anzahl (der Elemente) der Menge x ist.

Damit diese Definition adäquat ist, stellt Carnap die Forderung auf, daß weniger als die Hälfte aller Objekte, die eine Qualität F haben, auch eine Qualität aus einem Ähnlichkeitskreis haben (d.h. einem Ähnlichkeitskreis angehören), dem F nicht ganz angehört. – Diese Forderung behebt auch die Schwierigkeit (a).

Nach D2′ ist nun {1,2,3,19} eine Qualitätsklasse, denn obwohl 19 zu U gehört, gehört doch nicht mehr als die Hälfte von {1,2,3,19} zu U.

---

[16] Vgl. Carnap [28], S. 153.

D2′ funktioniert aber nur unter der angegebenen Bedingung, d. h. unter einer empirischen Bedingung. Carnap sucht diese Bedingung dadurch zu rechtfertigen, daß er sagt: würde sie für eine Qualität F nicht gelten, so ließe sich F tatsächlich nicht aus der Erfahrung abstrahieren. Aber das ist doch zirkelhaft: das wäre nur dann ein Argument, wenn wir bereits das Konstitionssystem Carnaps als das Konstitutionssystem erkannt hätten, in dem wir tatsächlich unsere Begriffe bilden. Dann würde sich aber das Problem einer Adäquatheit der Definition D2′, um das es hier geht, gar nicht stellen.

Goodman hat in [28] eine weitere Modifikation von D2′ vorgeschlagen:

$$\mathbf{D2''}\text{:}\ Q''(A) := \lambda z[\bigwedge x(x \varepsilon S(A) \wedge \overline{x \cap z} \geq \frac{1}{2}\bar{x} \supset z \subset x) \wedge \bigvee x(x \varepsilon S(A) \wedge z \subset x) \wedge \neg \bigvee u(\bigwedge x(x \varepsilon S(A) \wedge \overline{x \cap u} \geq \frac{1}{2}\bar{x} \supset u \subset x) \wedge u \neq z \wedge z \subset u)].$$ [17]

Damit soll vermieden werden, daß im Beispiel auch {19} als Qualitätsklasse auftritt.

Auch die Definition D2″ begegnet aber den früher dargestellten Schwierigkeiten konkomitanter Qualitäten und unvollständiger Gemeinsamkeiten.

c) Das Problem der konkomitanten Qualitäten tritt nun in verstärkter Form auf: Wenn eine Qualität in den Grundobjekten immer nur in Verbindung mit einer aus einer Gruppe ähnlicher Qualitäten auftritt, so läßt sich diese Qualität nicht isolieren.[18]

Hat man so z. B. 1) ax. . 4) bx. .
2) a. . 5) bx. .
3) a. . 6) b. .

im Schema des obigen Beispiels, wo x nur in den angegebenen Objekten vorkommt, so bildet {1,4,5} keine Qualitätsklasse, da diese Klasse überwiegend in S enthalten ist, sich damit aber von b nicht trennen läßt.

[17] Vgl. Goodman [51], S. 178.
[18] Vgl. Goodman [51], S. 168.

d) Das Problem der unvollständigen Gemeinsamkeit tritt ebenfalls in verstärkter Form auf: Sind z. B. folgende Grundobjekte gegeben

gegeben	1) axy	4) bxg	7) cxy	20) xrg
	2) arg	5) bg	8) crw	21) zgf,
	3) ag	6) byr	9) cg	

so enthält der Ähnlichkeitskreis P, der die Objekte a. . und b. . und c. . umfaßt, auch die Objekte 20 und 21. D.h. D1 liefert nicht eine Klasse, deren Elemente je eine von mehreren ähnlichen Qualitäten haben (die Gruppen der ähnlichen Qualitäten sind hier abc, fgh, rst und xyz). Das bewirkt, daß nun z. B. {1,2,3,20,21} eine Qualitätsklasse nach D2″ ist.

Auf den Versuch Carnaps, mit der Teilähnlichkeitsrelation auch Ordnungsbeziehungen zwischen Qualitäten zu definieren, gehen wir hier nicht ein. Es genügt uns der Nachweis, daß Carnaps Versuch, mit Hilfe einer einzigen unspezifischen Teilgleichheits-, bzw. Teilähnlichkeitsrelation spezifische Qualitäten zu definieren, grundsätzlich gescheitert ist.

Es muß aber betont werden, daß Carnap schon in [28] die Schwierigkeiten seines Definitionssystems gesehen hat und es daher nicht als endgültige Lösung, sondern nur als einen Lösungsansatz für sein Problem angesehen hat, eine leistungsfähige empiristische Sprache von einer phänomenalistischen Basis aus zu entwickeln.

Seit dem Erscheinen des Buches hat Carnap auch eine teilweise sehr tiefgreifende Entwicklung seiner philosophischen Ideen durchgemacht, auf die er im Vorwort zur zweiten Auflage des Buches hinweist, so daß die kritischen Einwände, die man gegen das System des „Aufbaus“ erheben muß, nicht Carnaps spätere Position treffen. Trotz aller Einwände ist Carnaps Buch von bleibender Bedeutung, da in ihm der erste Versuch gemacht wurde, unter Einsetzung der Mittel der modernen mathematischen Logik die Rekonstruierbarkeit der Wissenschaftssprache auf einer phänomenalistischen Basis nicht nur zu behaupten, sondern tatsächlich nachzuweisen.

Wir haben gesehen, daß eine Definition von Begriffen durch Abstraktion immer schon gewisse andere Begriffe voraussetzt, und zwar, wie die Diskussion des Versuchs von Carnap gezeigt hat, mehrere spezifische Begriffe. Man kann also nicht im Sinne des traditionellen Empirismus von einer Abstraktion aller empirischen Begriffe aus der Erfahrung sprechen. Das gilt schon für die Beobachtungsbegriffe, erst recht also für die theoretischen Begriffe, die durch das viel allgemeinere Verfahren einer impliziten Definition eingeführt werden.

Der Empirismus kann aber die These (I) auch so präzisieren, daß der Ausdruck „durch Bezugnahme auf Beobachtungen interpretiert" gedeutet wird im Sinne von „durch Beobachtungsterme definiert". Dann lautet die These so:

I″) Die Sprache der Naturwissenschaften läßt sich so aufbauen, daß sie nur deskriptive Terme enthält, die Beobachtungsterme sind[19] oder durch Beobachtungsterme (explizit) definierte Terme.

Auch diese These ist aber falsch, wie die Erörterungen des Abschnitts 3.3 gezeigt haben. Denn wir haben dort gesehen, daß sich theoretische Terme, z. B. schon einfache Dispositionsterme, nicht explizit durch Beobachtungsterme definieren lassen. Im Abschnitt 4.1 aber haben wir gezeigt, daß man auf theoretische Terme nicht allgemein und ohne weiteres verzichten kann; dadurch würden die Theorien komplizierter und in ihrer Anwendung eingeschränkt werden.

Wenn man aber schließlich I″ zu der These abschwächt:

I‴) Die Sprache der Naturwissenschaften läßt sich so aufbauen, daß sie nur deskriptive Terme enthält, die Beobachtungsterme sind oder explizit oder implizit durch Beobachtungsterme definierte Terme,

---

[19] Hier müßte man, da nicht auf spezielle Untersuchungskontexte Bezug genommen wird, den relativen Begriff des Beobachtungsterms aus 3.2 durch einen, allerdings recht fragwürdigen, absoluten Begriff ersetzen, nach dem Beobachtungsterme für direkt oder einfach beobachtbare Objekte oder Attribute stehen.

so wird die These so schwach, daß sie nicht mehr für eine empiristische Position kennzeichnend ist, sondern eine bloße Banalität darstellt: Der Rahmen impliziter Definitionen ist so weit, daß (I''') nur mehr besagt, empirische Terme sollten irgend etwas mit Beobachtungstermen zu tun haben. Es ist aber ohnehin klar, daß empirische Begriffe irgendwie mit Beobachtbarem zu tun haben. Ferner haben wir in 3.4 gesehen, wie weit der Rahmen empirischer theoretischer Terme gezogen werden muß (vgl. dazu die Definition D3.4–2) und daß die intuitive Grenze zwischen empirischen und nichtempirischen Termen dabei sehr ins Fließen kommt.

Wir können also sagen: Wenn man die These I nicht in trivialer Weise interpretiert, so daß sie für eine spezifisch empiristische Position untypisch wird, ist sie – zumindest nach den gängigen Deutungen – falsch.

A. Einstein hat besonders eindrücklich darauf hingewiesen, daß der Empirismus durch seine „Angst vor der Metaphysik" Gefahr läuft, der freien schöpferischen Begriffsbildung in den Wissenschaften zu enge Fesseln anzulegen und die wissenschaftliche Arbeit so eher zu hindern als zu fördern. Er schreibt: „Nach meiner Überzeugung muß man sogar viel mehr behaupten: die in unserem Denken und in unseren sprachlichen Äusserungen auftretenden Begriffe sind alle – logisch betrachtet – freie Schöpfungen des Denkens und können nicht aus den Sinnes-Erlebnissen induktiv gewonnen werden. Dies ist nur deshalb nicht so leicht zu bemerken, weil wir gewisse Begriffe und Begriffs-Verknüpfungen (Aussagen) gewohnheitsmäßig so fest mit gewissen Sinnes-Erlebnissen verbinden, daß wir uns der Kluft nicht bewußt werden, die – logisch unüberbrückbar – die Welt der sinnlichen Erlebnisse von der Welt der Begriffe und Aussagen trennt.

So ist z. B. die Reihe der ganzen Zahlen offenbar eine Erfindung des Menschengeistes, ein selbstgeschaffenes Werkzeug, welches das Ordnen gewisser sinnlicher Erlebnisse erleichtert. Aber es gibt keinen Weg, um diesen Begriff aus den Erlebnissen selbst gewissermaßen herauswachsen zu lassen. Ich wähle hier gerade den Begriff der Zahl, weil er dem vorwissenschaftlichen Denken angehört und an ihm der konstruktive Charakter trotzdem noch leicht erkennbar ist. Je mehr wir uns aber den primitivsten Begriffen des Alltags zuwenden, desto mehr erschwert es uns die Masse eingewurzelter Gewohnheiten, den Begriff als selbständige Schöpfung des Denkens zu erkennen. So konnte die für das Verständnis der hier obwaltenden Verhältnisse so verhängnisvolle Auffassung entstehen, daß die Begriffe aus den Erlebnissen durch „Abstraktion", d.h. durch Weglassen eines Teils ihres Inhaltes, entstehen. Ich will nun zeigen, warum mir diese Auffassung so verhängnisvoll erscheint.

Hat man sich einmal Humes Kritik zu eigen gemacht, so kommt man leicht auf den Gedanken, es seien aus dem Denken alle jene Begriffe und Aussagen als „metaphysische" zu entfernen, welche sich nicht aus dem sinnlichen Roh-Material herleiten lassen. Denn alles Denken erhält materialen Inhalt durch nichts anderes als durch seine Beziehung zu jenem sinnlichen Material. Letzteres halte ich für völlig wahr, die darauf gegründete Vorschrift für das Denken aber falsch. Denn dieser Anspruch – wenn er nur völlig konsequent durchgeführt wird – schließt überhaupt jedes Denken als „metaphysisch" aus.

Damit Denken nicht in „Metaphysik", bzw. in leeres Gerede ausarte, ist es nur notwendig, daß genügend viele Sätze des Begriffssystems mit Sinnes-Erlebnissen hinreichend sicher verbunden seien und daß das Begriffssystem im Hinblick auf seine Aufgabe, das sinnlich Erlebte zu ordnen und übersehbar zu machen, möglichste Einheitlichkeit und Sparsamkeit zeigte. Im übrigen aber ist das „System" ein (logisch) freies Spiel mit Symbolen nach (logisch) willkürlich gegebenen Spielregeln. Dies alles gilt in gleicher Weise für das Denken des Alltags wie für das mehr bewußt systematisch gestaltete Denken in den Wissenschaften.

Es wird nun klar sein, was gemeint ist, wenn ich Folgendes sage: Hume hat durch seine klare Kritik die Philosophie nicht nur entscheidend gefördert, sondern ist ihr auch ohne seine Schuld zur Gefahr geworden, indem durch diese Kritik eine verhängnisvolle „Angst vor der Metaphysik" ins Leben trat, die eine Krankheit des gegenwärtigen empirizistischen Philosophierens bedeutet; diese Krankheit ist das Gegenstück zu jenem früheren Wolken-Philosophieren, welches das sinnlich Gegebene vernachlässigen und entbehren zu können glaubte."[20]

6.3 Begründung durch Erfahrung

Die zweite Grundthese des Empirismus lautete:

II) Alle wahren naturwissenschaftlichen Behauptungen lassen sich durch Beobachtungen und nur durch Beobachtungen begründen.

Für eine Diskussion dieser These müssen wir nun untersuchen, welche Formen die Begründung naturwissenschaftlicher Sätze durch Beobachtungssätze annehmen kann.

1. Eine Begründung eines Satzes H durch (wahre) Beobachtungssätze $B_1, \ldots, B_n$ kann zunächst in einer *Verifikation* von H durch $B_1, \ldots, B_n$ bestehen, d.h. in einer logischen Ableitung von H aus $B_1, \ldots, B_n$. Aber die Verifikation ist für die Zwecke der These II ein viel zu enger Begründungsbegriff, denn aus Sätzen über vergangene Beobachtungen lassen sich keine Aussagen über zukünftige Ereignisse ableiten, und aus endlich vielen Beobachtungssätzen kann man auch keinen einzigen wesentlich universellen Allsatz, also keine einzige gesetzesartige Hypothese ableiten.[1] Die naturwissenschaftlich interessanten Hypothesen sind also nicht verifizierbar.

Eine Begründung kann ferner in einer *Bestätigung* bestehen. Eine Bestätigung ist nach den Erörterungen des 5. Kapitels entweder eine induktive oder eine deduktive Bestätigung. Betrachten wir zunächst den Fall:

2. Eine Begründung des Satzes H besteht in einer *induktiven Bestätigung* von H durch Beobachtungssätze $B_1, \ldots, B_n$. Dieser

[20] Einstein [44], S. 286f.
[1] Vgl. dazu das Theorem T2.1.6–2.

Fall umfaßt auch die Begründung von H durch induktive Schlüsse mit den Prämissen $B_1, \ldots, B_n$, und daher wollen wir hier generell von einer *induktiven Begründung* von H durch $B_1, \ldots, B_n$ sprechen, ohne damit freilich den im Abschnitt 4.5 ebenfalls so bezeichneten Begriff aufgreifen zu wollen. Die induktive Bestätigung ist ja, wenn es um die *Begründung* einer Hypothese H geht, und nicht nur um die Frage, ob Beobachtungssätze $B_1, \ldots, B_n$ H bestätigen, nicht im Sinn von D5.2–1 zu verstehen, sondern wie in 5.4 ausgeführt wurde, durch die Wahrscheinlichkeit von H, bedingt durch $B_1 \wedge \ldots \wedge B_n$, zu messen, und in 2.5 hatten wir gesehen, daß auch induktive Schlüsse als bedingte Wahrscheinlichkeitsaussagen zu interpretieren sind.

Die induktive Begründung ist ein weiterer Begriff als die Verifikation: Induktiv lassen sich auch mit Sätzen über vergangene Beobachtungen Sätze über künftige Ereignisse begründen. Aber schon die Begründung singulärer Sätze hängt, wie wir in 2.1.6 und 2.3.3 gesehen haben, entscheidend von Annahmen ab, die sich selbst weder verifizieren noch induktiv begründen lassen: von den Vertauschbarkeitsannahmen. Nur wenn die $F(a_i)$-Ereignisse $(i=1,2,\ldots)$ vertauschbar sind bzgl. der subjektiven Wahrscheinlichkeitsbewertung w, kann man z. B. den Satz beweisen, daß $\lim_{n\to\infty} w(F(a_{n+1}) / \bigwedge_{i=1}^{n} F(a_i)) = 1$ ist, d. h. daß für hinreichend große n die Beobachtung von n positiven (und keinen negativen) F-Instanzen die Wahrscheinlichkeit, daß auch das nächste Objekt a_{n+1} die Eigenschaft F haben wird, beliebig nahe bei Eins liegt.[2] Das Humesche Problem der Induktion reduziert sich, wie wir gesehen haben, auf das Goodmansche Problem der Induktion und dieses auf die Begründung von Vertauschbarkeitsannahmen. In 2.3.3 wurde aber ausgeführt, daß sich Vertauschbarkeitsannahmen weder analytisch noch empirisch rechtfertigen lassen, sondern daß sie sich mit der Wahl eines Systems von Grundprädikaten zur Beschreibung der Phänomene verbinden.

Wenn aber induktive Begründungen von wahrscheinlichkeits-

[2] Vgl. dazu das Theorem T2.1.6–2.

theoretischen Aprioriannahmen über Vertauschbarkeit abhängen, die selbst nicht empirisch begründet werden können, so erweist sich die These II bei der zweiten Interpretation als unhaltbar.[3]

Wenn wir nun von singulären Hypothesen zu Hypothesen H übergehen, die die Gestalt wesentlich universeller Sätze haben, so kommt ein weiterer Einwand hinzu: Für eine solche Hypothese gilt immer $w(H/B_1 \wedge \ldots \wedge B_n) = 0$, wie groß n auch immer sei.[4] Wie wir in 5.4 gesehen haben, kann man nicht auf die Instanzenwahrscheinlichkeit der Hypothese H ausweichen, weil diese nur für sehr elementare Hypothesen erklärt ist. Bzgl. unserer Gesetzeshypothesen sind wir also mit dem induktiven Begründungsbegriff kaum besser daran als mit dem Verifikationsbegriff.

Endlich haben wir uns in 2.5.5 überlegt, daß hohe Wahrscheinlichkeit weder ein notwendiges noch ein hinreichendes Kriterium dafür darstellt, daß wir eine empirische Hypothese akzeptieren, daß also eine rein induktive Auszeichnung unserer empirischen Annahmen nicht möglich ist.

3. Die Begründung eines Satzes H durch (wahre) Beobachtungssätze $B_1, \ldots, B_n$ kann endlich in einer *deduktiven Bestätigung* oder *Bewährung* von H durch, bzw. an $B_1, \ldots, B_n$ bestehen. Bei singulären Hypothesen über künftige Ereignisse hilft uns der Bewährungsbegriff nicht weiter, denn aus Sätzen über künftige Ereignisse folgen ebensowenig Sätze über gegenwärtige Beobachtungen, wie aus diesen jene folgen. Hier sind wir also auf den induktiven Bestätigungsbegriff zurückverwiesen, von dem wir gesehen

---

[3] Dies Argument stützt natürlich nicht die These, daß in die Begründung empirischer Hypothesen synthetisch-apriorische Annahmen eingehen: Die apriorischen Annahmen der subjektiven Wahrscheinlichkeitsbewertung sind erstens keine apriorischen *Erkenntnisse* wie z. B. die synthetisch apriorischen Grundsätze des reinen Verstandes bei Kant, und zweitens sind sie keine Annahmen *über die Welt*, sondern beschreiben die Erwartungen einer Person.

[4] Vgl. dazu den Abschnitt 2.5.4.

haben, daß er sich auf empirisch nicht begründbare wahrscheinlichkeitstheoretische Apriorannahmen stützt. Im Fall von Gesetzeshypothesen sind wir mit dem Bewährungsbegriff einerseits besser daran als mit dem induktiven Bestätigungsbegriff und dem Verifikationsbegriff, da sich viele, wenn auch nicht alle solche Hypothesen an gegenwärtigen Beobachtungen bewähren können. Wie wir in 5.4 besprochen haben, ist jedoch die Bewährung einer Hypothese allein kein Grund, sie zu akzeptieren: „Eine Hypothese H begründen" heißt soviel wie „wahre Sätze anführen, aus denen folgt, daß H wahr ist, oder doch wahrscheinlich gilt". Zu einer solchen Begründung von Gesetzeshypothesen trägt die Bewährung nichts bei; sie ist nur eine *notwendige* Bedingung für ihre Richtigkeit. Gesetzeshypothesen nehmen wir nicht an, weil wir wissen, daß sie wahr sind, oder das doch für wahrscheinlich halten, sondern weil sie es uns erlauben, unsere Annahmen über die Welt in einfacher Weise zu systematisieren. Das sind aber keine empirischen Gründe für die Wahrheit einer Hypothese, sondern theoretisch-methodische Gründe, sie zu akzeptieren. Man kann also im Fall der Bewährung einer Hypothese nicht von ihrer „empirischen Begründung durch Beobachtungen" sprechen, und daher kann man auch die empiristische These II nicht auf den Bewährungsbegriff stützen.

Die Berücksichtigung der drei Begründungsmodi, sei es einzeln oder zusammen, reicht also zur Begründung unserer naturwissenschaftlichen Annahmen über die Welt allein mit Beobachtungssätzen nicht aus. Beobachtungen sind kein hinreichender Grund für unsere naturwissenschaftlichen Annahmen; sie sind also auch nicht hinreichend und notwendig, wie es die These II behauptet.

Das Problem der induktiven Rechtfertigung empirischer Hypothesen ist seit Hume das zentrale Problem des Empirismus geblieben. Am Beginn der Diskussionen um den logischen Empirismus hat B. Russell die Humesche Kritik am induktiven Schließen aufgenommen. Zur Frage, ob ein induktiver Schluß seine Konklusion, wenn nicht sicher, so doch wahrscheinlich macht, schreibt er: „... it cannot even do this except by assuming postulates, or a postulate, for which there is, and can be, no empirical evidence. This is an awkward conclusion for an empiricist, but it seems to be unescapable".[5] Und „There is a matter of great philosophic importance in which a careful analysis of scientific inference and logical syntax leads – if I am not mistaken – to a conclusion which is unwelcome to me and (I believe) to almost all logical positivists. This conclusion is, that uncompromising empiricism is untenable. From a finite number of observations no general proposition can be inferred to be even probable unless we postulate some general principle of inference which cannot be established empirically."[6]

Und H. Reichenbach sagte: „Hume's criticism was the heaviest blow against empiricism".[7] Auf seinen Rechtfertigungsversuch für das induktive Schließen sind wir in 2.5.5 eingegangen. Mehr noch als Reichenbachs Begründung der Induktion hat man Carnaps Begründung im Rahmen seiner logischen Wahrscheinlichkeitstheorie als Rettung des Empirismus gefeiert. Carnap bezieht sich in [50], S. 180f. explizit auf Russells Preisgabe des Empirismus in [48] und hebt hervor, daß nun eine *analytische* Begründung des induktiven Schließens möglich geworden sei, die von der Humeschen und Russellschen Kritik an *synthetischen* Prinzipien der Induktion nicht betroffen werde. Wir haben aber in 2.3.3 gesehen, daß Carnaps analytische Begründung induktiver Schlüsse nicht haltbar ist, und so bleibt das Induktionsproblem – von einem empiristischen Standpunkt aus – „the despair of philosophy"[8] und „the scandal of philosophy".[9]

Kann man die These (II) aber nicht so abschwächen, daß zwar Erfahrung allein nicht zur Begründung der empirischen Er-

---

[5] Russell [50], S. 372.

[6] Russell [50], S. 381. Zu Russells Kritik am Empirismus auf der Basis des Induktionsproblems vgl. auch Russell [48], Kap. V, VI.

[7] Reichenbach [38], S. 347.

[8] A.N. Whitehead [27], S. 34.

[9] C.D. Broad [26], S. 67.

kenntnis ausreicht, daß es aber keine empirische Erkenntnis ohne Erfahrungen gibt? Auch dann ist ja die Behauptung des Rationalismus oder der Kantischen Philosophie falsch, daß es synthetische Erkenntnisse apriori gibt. Kann man also eine liberalere Version des Empirismus kennzeichnen durch die These:

II') Alle naturwissenschaftlichen Sätze lassen sich nur unter Zuhilfenahme von Beobachtungssätzen begründen.

Hier muß man zwei Fälle unterscheiden: Entweder es wird zusätzlich behauptet, daß es synthetische Sätze gibt, zu deren Begründung Beobachtungssätze hinreichen, oder diese These wird nicht vertreten.

Im letzteren Fall sind apriorische Annahmen wie Beobachtungssätze notwendig für die Begründung aller synthetischen Sätze, d.h. synthetische Sätze können weder rein apriorisch, noch rein empirisch begründet werden. Dann besteht aber eine vollkommene Symmetrie zwischen apriorischen und empirischen Gründen, so daß es nicht mehr sinnvoll ist, hier von einer *empiristischen* Position zu sprechen.

Im ersteren Fall hingegen werden empirische Gründe bevorzugt, da es rein empirisch begründbare synthetische Sätze gibt, aber nicht rein apriorisch begründbare. Es gibt aber Einwände, die sich auch gegen eine solche schwächere Version des Empirismus richten:

Es ist natürlich trivialerweise richtig, daß sich z.B. Beobachtungssätze allein durch Beobachtungssätze begründen lassen. Aber in den beiden *interessanten* Fällen von Hypothesen, die einer Begründung bedürfen: für die singulären Hypothesen über künftige Ereignisse und die Gesetzeshypothesen, haben wir oben gesehen, daß hier Beobachtungssätze (über gegenwärtige Beobachtungen, d.h. im Zeitpunkt der Begründung verifizierbare Beobachtungssätze) nicht zur Begründung hinreichen.

Hinzukommt die Überlegung, daß selbst einfachste Beobachtungssätze durch Beobachtungen in einem strengen Sinn nicht direkt und definitiv entscheidbar sind. Aus jeder Beobachtung, aus jedem Experiment, jeder Messung folgt ein Beobachtungssatz nur mithilfe anderer, als wahr vorausgesetzter singulärer und genereller Annahmen des Systems, so daß er nicht direkt durch die Beobachtung falsifiziert werden kann (Duhems Argument). Und jeder Beobachtungssatz ist durch die Annahmen des Systems mit einer Vielzahl anderer Beobachtungssätze so verbunden – und zwar auch durch Annahmen, die die Bedeutungen der in ihm vorkommenden Terme mitbestimmen –, daß man nicht von seiner vollständigen Verifikation sprechen kann, bevor nicht auch diese verifiziert sind. Auch ein so einfacher Beobachtungssatz wie „Diese Fläche ist rot" muß in einem naturwissenschaftlich verbindlichen Sinn z. B. so überprüft werden, daß die Spektralverteilung der Lichtquelle und des von der Fläche reflektierten Lichts geprüft wird. Dabei verwenden wir aber eine Reihe von optischen Gesetzen, von Theorien über das Funktionieren der Meßinstrumente, usw. Über diese Gesetze und Theorien gehen aber wieder apriori-Annahmen der Wahrscheinlichkeitsbewertungen in die Begründung der Beobachtungssätze ein.

Auch ohne dieses letztere Argument, das wir, da hier das Basisproblem ausgeklammert wurde, erst in anderem Zusammenhang genauer ausführen können, hat sich aber selbst die schwächere These (II) der Empirismus als unhaltbar erwiesen: Wenn sie nichttrivial und für eine empiristische Position kennzeichnend sein soll, ist sie falsch.

Die vorstehenden Argumente gegen den Empirismus sind nicht neu, und so haben verschiedene Autoren versucht, bescheidenere Formulierungen einer empiristischen Position zu finden, als sie die Thesen (I) und (II) darstellen.[10] Dabei werden aber in der Regel entweder gewisse Einwände übersehen oder die Formulierung wird so schwach, daß man von einem „Empirismus" in einem relevanten und prägnanten Sinn nicht mehr sprechen kann; gelegentlich verzichtet man auch ganz auf eine positive Kennzeichnung des Empirismus und versteht ihn lediglich als Negation der Annahme, es gäbe apriorische Erkenntnisse syn-

---

[10] Zur schrittweisen Liberalisierung der Prinzipien des Logischen Empirismus vgl. Carnaps Darstellung in Schilpp [63], S. 56–59.

thetischen Inhalts – eine bloße Verwerfung von philosophischen Thesen macht aber noch keinen „-ismus“ aus; dazu muß man sich schon selbst etwas Positives einfallen lassen.

Oft hat man den Eindruck, daß viele Autoren nur deswegen an dem Etikett „Empirismus“ für ihre Philosophie festhalten, weil es heutzutage noch ein gewisses Wertsiegel ist. So sagt auch B. Russell: „I find also that many issues are decided by many people on a basis of party spirit, not of detailed examination of the problems involved. In particular, whatever presents itself as empiricism is sure of widespread acceptance, not on its merits, but because empiricism is the fashion.“[11]

6.4 Voraussetzungen des Empirismus

Wir haben oben die beiden Hauptthesen des Empirismus einer Kritik unterzogen und gesehen, daß sie nicht haltbar sind, sofern man ihnen nicht einen mehr oder minder trivialen Sinn unterlegt.

Wir wollen nun abschließend versuchen, die Kritik am Empirismus von einem höheren Standpunkt aus zu vervollständigen, indem wir auf zwei wichtige Voraussetzungen seiner Auffassung von empirischer Erkenntnis eingehen, die in seinen Thesen nicht explizit erwähnt werden.[1]

1. Der Empirismus setzt voraus, daß Begriffsbildung und Theorienkonstruktion voneinander unabhängig sind: Wir gehen aus von einem System von einfachen Beobachtungstermen, die sich auf elementare, direkt beobachtbare Unterscheidungen beziehen, die „durch Abstraktion aus der Erfahrung“ gewonnen sind, und können dann durch explizite Definitionen in diesem System alle weiteren Terme einführen, die wir zur Beschreibung empirischer

---

[11] Russells „Reply to criticism“, in Schilpp [44], S. 697.

[1] Vgl. zum folgenden auch P. Feyerabend [65], sowie T.S. Kuhn [62] zum wissenschaftsgeschichtlichen Aspekt der Probleme.

Phänomene benötigen. Bei der Konstruktion von empirischen Theorien beziehen wir uns auf ein Begriffssystem – in diesem Sinn setzt eine Theorie natürlich die Begriffe voraus, die man benötigt, um sie zu formulieren. Abgesehen von den durch die Erfahrung selbst vorgegebenen einfachen Beobachtungstermen kommt es aber auf die Wahl der Terme nicht entscheidend an; man kann eine Theorie in verschiedene Begriffssysteme übersetzen, ohne daß sich damit ihr Gehalt ändert. Und speziell hängt die Wahrheit einer Theorie und die Güte ihrer Begründung durch Beobachtungen nicht von der Wahl des Begriffssystems ab; die Wahl eines Systems von Termen präjudiziert in keiner Weise die Frage, welche mit diesen Termen formulierten (synthetischen, d.h. nicht analytischen) Sätze wahr und falsch sind. Man kann zwar sagen, daß die Wahl des Begriffssystems in gewissem Umfang davon abhängt, welche Ansichten wir über die Welt haben, welche Theorien wir also akzeptieren. Denn wir werden solche Terme zur Beschreibung der Phänomene benützen, die die mit ihnen formulierten Theorien möglichst einfach machen, so daß wir den Gehalt der Theorie mit einem möglichst sparsamen Vokabular in möglichst wenigen, möglichst einfachen Gesetzen ausdrücken können; die also im Sinne Hempels einen großen „systematic import" haben. Aber dieses Auswahlmotiv für Terme ist nur durch unseren Wunsch nach Einfachheit motiviert.

Unsere Überlegungen haben aber gezeigt, daß diese Annahme der Unabhängigkeit von Begriffs- und Theorienbildung aus zwei Gründen falsch ist:

a) Theoretische Terme werden implizit im Rahmen von Theorien definiert. Hier läßt sich also der Prozeß der Bedeutungsfestlegung der Terme nicht trennen von der Annahme einer Theorie, die mit diesen Termen formuliert ist. Wir legen nicht zuerst die Bedeutung der Terme fest und formulieren dann mit ihnen unsere Theorien, sondern Begriffsbildung und Theorienkonstruktion bilden ein und denselben Prozeß. Selbst wenn man im Sinn Carnaps den synthetischen Teil R(T) einer Theorie T (ihren Ramsey-

Satz) von dem analytischen Bedeutungspostulat $R(T) \supset T$ für ihre theoretischen Terme trennt,[2] so sagt doch dieses Postulat nur *unter der Voraussetzung der Wahrheit von $R(T)$*, bzw. von T selbst etwas über die Bedeutung der theoretischen Terme von T aus.

Diese Theorienabhängigkeit der Termbedeutungen, die wir hier nur für theoretische Terme festgestellt haben, hat W. V. Quine in [51] auch für Beobachtungsterme behauptet, und seine Behauptung läßt sich durch sprachphilosophische wie durch erkenntnistheoretische Argumente erhärten.[3]

Neben dieses Argument von der Theorien-Abhängigkeit der Terme tritt das folgende Argument für die Term-Abhängigkeit der Theorien:

b) Wir haben in 2.3.3 gesehen, daß sich mit der Wahl eines Sprachsystems gewisse grundlegende Vertauschbarkeitsannahmen verbinden. Welche induktiven Argumente wir also anerkennen, hängt (auch) davon ab, welches Sprachsystem wir annehmen. Damit hängt aber auch die Begründung empirischer Theorien durch Beobachtungssätze, die Einschätzung ihres Wahrheitsgehalts und ihre Rechtfertigung von der Wahl des Sprachsystems ab, in dem wir die Beobachtungen und die Theorie formulieren.

Die Sprache ist eben nicht nur ein *Beschreibungsmittel* für Beobachtungsdaten und generelle empirische Sachverhalte, sondern mit ihr verbindet sich eine tiefgreifende Interpretation der Erfahrung, und es hängt von der Sprache ab, in welchem Licht wir unsere Erfahrungen beurteilen – wie es von unseren Urteilen umgekehrt auch abhängt, wie wir unsere empirischen Terme einführen.

2. Der Empirismus setzt voraus, daß Beobachtungssätze die Basis darstellen, von der aus wir empirische Theorien zu begründen und zu beurteilen haben: Die Beobachtungssätze bilden den festen Kern unseres empirischen Wissens. Die aufgrund von Be-

---

[2] Vgl. dazu den Abschnitt 3.3.

[3] Vgl. dazu Kutschera [71], 3.3.2 und [73], sowie Kuhn [62], Kap. X.

obachtungen akzeptierten Beobachtungssätze sagen, was als wahr bekannt ist – unsere Hypothesen und Theorien sagen, was wir als wahr vermuten. Diese Vermutungen müssen sich vor dem ausweisen, was wir wissen; sie sind durch Beobachtungstatsachen und nur durch solche zu rechtfertigen.

Demgegenüber ist zunächst zu betonen:

a) Unsere Einschätzung der Zuverlässigkeit von Beobachtungssätzen hängt auch von den Theorien ab, die wir akzeptieren. Keine endliche Menge von Beobachtungen kann einen Beobachtungssatz, und sei er noch so einfach, definitiv und abolut unwiderleglich verifizieren oder falsifizieren, für einen, zwar in den allermeisten Fällen praktisch irrelevanten, aber dennoch rationalen Zweifel bleibt immer Raum. Daher geht in die Annahme von Beobachtungssätzen auch ein konventionelles Moment ein: man einigt sich stillschweigend darüber, diese und jene Beobachtungssätze als wahr zu akzeptieren.[4] Und dieses konventionelle Moment erlaubt es, in Einzelfällen auch Theorien ihnen widersprechenden Beobachtungssätzen vorzuziehen und damit die Richtung empirischer Begründungen umzukehren, die von Beobachtungen zu Theorien geht, und Beobachtungssätze durch Theorien zu begründen oder zu widerlegen, und nicht Theorien durch Beobachtungssätze.[5]

Wichtiger noch ist der folgende Einwand:

b) Wie die enge Verbindung von Theorien- und Begriffsbildung schon gezeigt hat, ist es nicht nur die Aufgabe empirischer Theorien, Antwort auf die Frage zu geben, was sicher oder wahr-

---

[4] Vgl. dazu auch den Abschnitt 2.5.5.

[5] K. Popper erwähnt in diesem Zusammenhang „den unaufgeklärten positiven Ausfall des Michelson-Experiments, den Miller (1921 bis 1926) am Mount Wilson feststellte, nachdem er selbst (sowie Morley) schon früher Michelsons negatives Resultat reproduziert hatte. Da aber spätere Nachprüfungen wieder negativ ausfielen, so pflegt man gegenwärtig das negative Ergebnis als maßgebend anzusehen und betrachtet Millers abweichende Ergebnisse als „durch unbekannte Fehlerquellen verursacht““. (Popper [66], S. 19, Anmerkung 6.)

scheinlich der Fall ist, sondern eine Hauptaufgabe solcher Theorien besteht auch darin, unsere Erfahrung zu interpretieren. Empirische Theorien stellen nicht nur Annahmen über die Welt dar, die aufgrund einer vorgegebenen Bedeutung ihre Terme wahr oder falsch sind, sondern sie legen auch die Bedeutung der Terme fest, mit denen wir unsere Beobachtungen beschreiben, und legen einen Rahmen fest, in dem Sätze als richtig oder falsch ausgezeichnet und (induktive) Begründungsverfahren in Geltung gesetzt werden.

Daher sind Theorien auch nicht ausschließlich durch Beobachtungssätze zu begründen. Theorien müssen sich, wie Begriffsbildungen, in der Erfahrung bewähren in dem allgemeinen Sinn des Wortes, nach dem sich Begriffsbildungen als fruchtbar, Unterscheidungen als relevant erweisen müssen, und in dem Theorien der Erfahrung nicht widersprechen dürfen und darüber hinaus eine tiefgreifende und fruchtbare Systematisierung der Phänomene ermöglichen müssen.

Die Bewährung im engeren Sinn Poppers, d.h. die Übereinstimmung mit der Erfahrung ist nur eine *conditio sine qua non* für die Annahme von Theorien, und da erst in einem theoretischen Rahmen induktive Begründungsverfahren in Geltung gesetzt werden, gibt es auch keine allgemeine induktive Begründung von Theorien durch Beobachtungen. Es ist also kein „Skandal der Philosophie", wenn man fundamentale naturwissenschaftliche Theorien nicht induktiv begründen kann.

Diese Überlegungen führen zu einer Auffassung ähnlich der, wie sie W.V. Quine entwicklet hat:[6] Dem System $\mathscr{A}$ unserer empirischen Annahmen liegt eine Sprache S zugrunde; die Interpretation von S ist aber nicht unabhängig von den in S formulierten Annahmen aus $\mathscr{A}$, sondern diese Annahmen tragen auch dazu bei, die Bedeutung der Terme von S festzulegen. Analytische Bedeutungspostulate und synthetische Annahmen lassen sich nicht scharf unterscheiden. Idealisierend kann man aber sagen, daß es, zumindest relativ zu jedem Untersuchungskontext, eine

[6] Vgl. dazu z.B. Quine [51].

Menge $\mathscr{P}$ grundlegender Annahmen aus $\mathscr{A}$ gibt – zu denen neben den Sätzen, die wir üblicherweise als analytisch ansehen, auch fundamentale naturwissenschaftliche Gesetze und Theorien gehören –, die, zusammen mit theorienunabhängigen Festlegungen über die Sprache, ein Interpretationsschema für die Erfahrung festlegen.[7] Die Menge der übrigen Sätze von $\mathscr{A}$ ist synthetisch;[8] ihr Wahrheitswert wird durch $\mathscr{P}$ nicht festgelegt, und ihre Annahme oder Verwerfung bleibt ohne Einfluß auf das Interpretationsschema und auf die Bedeutung der Terme von S. Durch S und $\mathscr{P}$ sind gewisse Vertauschbarkeitsannahmen und damit gewisse induktive Schlußformen ausgezeichnet. In diesem Rahmen gibt es also eine deduktive und eine induktive Bestätigung für die synthetischen Aussagen. Daneben können in die Begründung der Sätze, auch der Beobachtungssätze, zusätzliche konventionelle Momente eingehen. Abgesehen davon genügen induktive Prinzipien für die Auszeichnung von synthetischen Annahmen. Nicht verifizierbare oder induktiv bestätigungsfähige Sätze, speziell gesetzesartige Aussagen, werden nicht aufgrund von Erfahrungen akzeptiert – für sie ist die Übereinstimmung mit der Erfahrung keine hinreichende, sondern nur eine notwendige Bedingung. Das Motiv zu ihrer Annahme liegt darin, das Interpretationssystem zu verstärken oder zu vereinfachen; sie sind nicht Gegenstand von, sondern Mittel für Begründungen.

Das Gesamtsystem unserer empirischen Annahmen hängt also viel lockerer und indirekter mit Beobachtungen zusammen, als der Empirismus das annimmt. Nur die Menge $\mathscr{A}$-$\mathscr{P}$ der rein synthetischen Annahmen ist so begründet, wie das der Empirismus annimmt. Auch die Annahmen aus $\mathscr{P}$ müssen sich an der Erfahrung bewähren, aber nicht in dem engeren Sinn Poppers, – der Poppersche Begriff setzt ja auch voraus, daß eine Menge von Beobachtungssätzen gegeben ist, deren Interpretation und deren Wahrheitswert nicht von der Theorie abhängt, deren Bewährung

[7] Vgl. dazu auch Kutschera [71], 3.3.2.
[8] Wir nehmen hier an, daß $\mathscr{P}$ gegenüber logischen Folgen abgeschlossen ist.

untersucht wird – sondern dadurch, daß sie eine fruchtbare Ordnung der Phänomene erlauben.

Es ist klar, daß es für diese Art von Bewährung keine scharfen Kriterien gibt, die mit den systemimmanenten Kriterien für die Begründung der rein synthetischen Sätze aus $\mathscr{A}$-$\mathscr{P}$ vergleichbar wären. Hier kommen vielmehr auch praktische Kriterien herein, die jenseits der Thematik der Wissenschaftstheorie liegen: Die empirischen Theorien sind ja nicht nur von akademischem Interesse, sondern spielen eine wichtige Rolle für das Weltbild und das Selbstverständnis einer Kultur, ganz abgesehen von dem elementaren Interesse, das sie für die technische Beherrschung der Welt haben. Wenn man empirische Theorien als kulturelle Leistung in das Gesamtfeld der kulturellen Kräfte einordnet, wird deutlich, daß sich von daher ganz neue Kriterien für die Annahme oder Ablehnung fundamentaler empirischer Theorien ergeben können. Die Wissenschaftsgeschichte kennt dafür eine Reihe eindrucksvoller Belege.

ANHANG I

Ergänzungen zum Kapitel 1

Beweis des Theorems T1.4–1 (S. 34)

Wir beweisen dieses Theorem mithilfe des Satzes:

I1: Eine Reihe $\langle M, \leq\cdot\rangle$ ist genau dann isomorph zu einer Struktur $\langle R, \leq\rangle$ im Bereich der reellen Zahlen, wenn es eine abzählbare, ordnungsdichte Teilmenge N von M gibt.

Aus I.1 folgt T1.4–1a; denn zu der Quasireihe $\langle M, \leq\cdot\rangle$ gibt es eine Reihe $\langle M^*, \leq\cdot^*\rangle$ (d.h. eine Struktur, die die Axiome a1 und a2 für Quasireihen erfüllt, sowie die Bedingung $a \doteq b \supset a = b$),[1] wobei M^* die Menge der Äquivalenzklassen $[a]_{\doteq}$ mit $a \varepsilon M$ ist und $\leq\cdot^*$ definiert ist durch $[a]_{\doteq} \leq\cdot^* [b]_{\doteq} := a \leq\cdot b$. Gibt es eine abzählbare ordnungsdichte Teilmenge N von M, so ist die Menge N^* der Äquivalenzklassen $[a]_{\doteq}$ mit $a \varepsilon N$ abzählbar und ordnungsdicht in M^*, so daß es nach I.1 eine Abbildung m^* von M^* in $\mathfrak{R}$ gibt mit $m^*([a]_{\doteq}) \leq m^*([b]_{\doteq}) \equiv$ $\equiv [a]_{\doteq} \leq\cdot^* [b]_{\doteq} \equiv a \leq\cdot b$. Die Funktion $m(a) := m^*([a]_{\doteq})$ ist also eine Metrisierungsfunktion für $\langle M, \leq\cdot\rangle$.

Der Beweis von I.1 ergibt sich so:[2]

A) Die Bedingung für die isomorphe Metrisierbarkeit ist notwendig. Dazu genügt es zu zeigen, daß jede Menge R von reellen Zahlen eine abzählbare, ordnungsdichte Teilmenge C enthält. Denn dann bildet auch die durch die Metrisierungsfunktion m auf C abgebildete Teilmenge N von M eine in M ordnungsdichte Teilmenge.

---

[1] Vgl. dazu die Anmerkung 2 zum Abschnitt 1.2

[2] Ein solcher Beweis findet sich bei G. Birkhoff [48], sowie, für den einfacheren Fall abzählbarer Mengen M, in Suppes und Zinnes [63].

Für jedes Paar r,r' mit $r < r'$ von rationalen Zahlen betrachten wir die Menge $D(r,r') := [r,r'] \cap R$, also die Menge der reellen Zahlen aus R, die im abgeschlossenen Intervall $[r,r']$ liegen, und bilden (mithilfe des Auswahlprinzips) die Menge C_1, die zu jedem nichtleeren $D(r,r')$ genau ein Element aus $D(r,r')$ enthält. C_2 sei die Menge der Sprungstellen von R, d.h. der Zahlen x aus R, so daß es eine Zahl $y > x$ aus R gibt mit $(x,y) \cap R = \Lambda$ (das offene Intervall (x,y) heißt dann *Sprung* von R). Es sei $C = C_1 \cup C_2$. Dann hat C die verlangten Eigenschaften:
a) C ist abzählbar. C_1 ist abzählbar, da die Paare von rationalen Zahlen abzählbar sind. Und C_2 ist abzählbar, denn zwei Sprünge enthalten kein gemeinsames Element, jeder Sprung enthält eine rationale Zahl (zwischen zwei reellen Zahlen liegt immer eine rationale Zahl), und es gibt nur abzählbar viele rationale Zahlen, also auch nur abzählbar viele Sprünge, also auch nur abzählbar viele Sprungstellen.
b) C ist ordnungsdicht. Sind $a,b \varepsilon R - C$ mit $a < b$, so gibt es ein $d \varepsilon R$ mit $d \varepsilon (a,b)$ – (a,b) ist kein Sprung, sonst wäre a in C, also nicht in $R - C$. Es gibt also ein rationales Intervall $[r,r'] \subset (a,b)$, so daß $D(r,r')$ nicht leer ist. C_1 enthält also ein d' aus $D(r,r')$ mit $a < d' < b$.

B) Die Bedingung der isomorphen Metrisierbarkeit ist hinreichend. Wir zeigen zunächst:

a) Jede Reihe auf einem abzählbaren Bereich M ist isomorph metrisierbar.
Es sei $a_1, a_2, \ldots$ eine Abzählung der Elemente von M. Dann wird die Metrisierungsfunktion m wie folgt definiert:

$m(a_1) := 0$

$$m(a_n) := \begin{cases} n & \text{falls } a_i <\cdot\, a_n \text{ für alle } i < n, \\ -n & \text{falls } a_n <\cdot\, a_i \text{ für alle } i < n, \\ \frac{1}{2}(m(a'_n) + m(b'_n)) & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei $a'_n := \max\{a_i : a_i <\cdot\, a_n \wedge i < n\}$ und $b'_n := \min\{a_i : a_n <\cdot\, a_i \wedge i < n\}$ sei. Die Eindeutigkeit und Existenz der Elemente a'_n, b'_n ist unter der Bedingung gesichert, unter der wir diese Elemente zur Definition von m benötigen; die Mengen, als deren Extrema a'_n, b'_n definiert sind, sind unter dieser Bedingung nicht leer.

Um die Ordnungstreue von m nachzuweisen, zeigen wir durch Induktion nach n, daß für alle n die Aussage gilt
$A(n) := \bigwedge ij(i,j < n \supset (a_i \leq\cdot\, a_j \equiv m(a_i) \leq m(a_j)))$. Die Behauptung $A(1)$:

$a_1 \leq\cdot a_1 \equiv 0 = 0$ ist trivial. Ist nun $A(n)$ bewiesen, so muß für $A(n+1)$ noch gezeigt werden:

1) $\bigwedge i(i < n \supset (a_i \leq\cdot a_n \supset m(a_i) \leq m(a_n)))$ und

2) $\bigwedge j(j < n \supset (a_n \leq\cdot a_j \supset m\,(a_n) \leq m(a_j)))$.

Für $n+1$ treten ja die drei Fälle neu auf: $i = n$, $j < n$ und $j = n$, $i < n$ und $i = j = n$. Der letztere Fall ist aber wegen $a_n \leq\cdot a_n \equiv m(a_n) = m(a_n)$ trivial. Ferner gilt nach (2) $m(a_i) \leq m(a_n) \supset \neg\, m(a_n) < m(a_i) \supset \neg\, a_n <\cdot$ $<\cdot\, a_i \vee a_n \doteq a_i \supset a_i \leq\cdot a_n$, und nach (1) $m(a_n) \leq m((a_j) \supset \neg\, m(a_j) <$ $< m(a_n) \supset \neg\, a_j <\cdot a_n \vee a_n \doteq a_j \supset a_n \leq\cdot a_j$, so daß man in (1) und (2) im Implikat anstelle der Äquivalenz nur die Implikation fordern muß.

Wir zeigen zunächst durch Induktion nach n, daß gilt:

α) $-n \leq m(a_n) \leq n$. Für $n = 1$ ist die Behauptung wegen $m(a_1) = 0$ trivial. Sei die Behauptung für alle $m < n$ nachgewiesen, dann ergibt sie sich für n wie folgt: wegen $a'_n, b'_n \varepsilon \{a_1, \ldots, a_{n-1}\}$ gilt die Behauptung für a'_n, b'_n und also für a_n, da $m(a_n)$ zwischen $m(a'_n)$ und $m(b'_n)$ liegt.

Zum Beweis von (1) und (2) unterscheiden wir nun drei Fälle, gemäß der rekursiven Definition von $m(a_n)$:

β_1) Ist $a_i <\cdot a_n$ für alle $i < n$, so ist $m(a_n) = n$ und also nach (α) für alle $i < n$ $m(a_i) \leq n-1 < n = m(a_n)$, d.h. $m(a_i) < m(a_n)$. Es gilt also (1). (2) gilt aber trivialerweise, da es kein j mit $j < n$ und $a_n <\cdot a_j$ gibt.

β_2) Ist für alle $j < n$ $a_n <\cdot a_j$, so ergibt sich der Beweis für (1), (2) in analoger Weise.

β_3) Gilt weder (β_1) noch (β_2), so ist $m(a_n) = \frac{1}{2}(m(a'_n) + m(b'_n))$. Aus der Definition von a'_n, b'_n folgt $a'_n <\cdot a_n$ und $a_n <\cdot b'_n$, also $a'_n <\cdot b'_n$. Mit $a'_n, b'_n \varepsilon \{a_1, \ldots, a_{n-1}\}$ ergibt sich aus der Induktionsvoraussetzung $A(n)$ ferner $m(a'_n) < m(b'_n)$, also $m(a'_n) < m(a_n) < m(b'_n)$. Es sei nun $i < n$ und $a_i <\cdot a_n$, dann gilt (nach Definition von a'_n) $a_i <\cdot a'_n \vee a_i = a'_n$, also wegen $A(n)$ $m(a_i) \leq m(a'_n) < m(a_n)$. Analog erhält man (2).

b) N sei eine in M ordnungsdichte, abzählbare Teilmenge von M, die außerdem, falls vorhanden, das Minimum und das Maximum von M enthalten soll. Nach (a) gibt es eine ordnungstreue Abbildung m* von N in die Menge der reellen Zahlen $\mathscr{R}$. Für alle $a \varepsilon M$-N betrachten wir nun die folgenden Mengen:

$S_a := \{x : x \varepsilon N \wedge x <\cdot a\}$ und $S^a := \{x : x \varepsilon N \wedge a <\cdot x\}$. Da N die evtl. Extrema von M enthalten soll, sind diese Mengen nicht leer. $m^*(S)$ sei das Bild der Menge S bei der Abbildung m*. Es sei nun folgende Bedingung für m* erfüllt – wir werden unten beweisen, daß sie erfüllbar ist –

V) $\neg \sup m^*(S_a) \varepsilon m^*(S^a)$ und $\neg \inf m^*(S^a) \varepsilon m^*(S_a)$ für alle $a \varepsilon M\text{-}N$. sup und inf sind dabei obere und untere Grenze.

Es ist dann die durch

$$m(x) := \begin{cases} m^*(x) \text{ für } x\varepsilon N, \\ \frac{1}{2}(\sup m^*(S_x) + \inf m^*(S^x)) \text{ für } x\varepsilon M\text{-}N \end{cases}$$

definierte Abbildung m von M in $\mathfrak{R}$ ordnungstreu.

Beweis: α) Es sei $c <\cdot a$ mit $c\varepsilon N$, $a\varepsilon M\text{-}N$. Dann ist $c\varepsilon S_a$, also $m(c) = m^*(c) \leq \sup m^*(S_a) \leq m(a)$. Ist nun $\sup m^*(S_a) < \inf m^*(S^a)$, so $m(c) \leq \leq \sup m^*(S_a) < m(a)$. Ist aber $\sup m^*(S_a) = \inf m^*(S^a) = m(a)$, so erhalten wir aus der Annahme $m(c) = m(a)$: $\inf m^*(S^a) = m(c) = m^*(c) \varepsilon m^*(S_a)$, da $c\varepsilon S_a$, also einen Widerspruch zu (V). – Analog beweist man die Ordnungstreue für $a <\cdot c$ mit $c\varepsilon N$, $a\varepsilon M\text{-}N$.

β) Es sei $a <\cdot b$ mit $a,b\varepsilon M\text{-}N$. Dann gibt es wegen der Ordnungstreue von N ein $c\varepsilon N$ mit $a <\cdot c \wedge c <\cdot b$. Nach (α) erhält man also $m(a) < m(c) < m(b)$.

γ) Ist $c <\cdot d$ mit $c,d\varepsilon N$, so ist $m(c) = m^*(c) < m^*(d) = m(d)$ nach (a).

c) Die Erfüllbarkeit der Voraussetzung (V) beweist man wie folgt:

α) Wir können voraussetzen, daß $m^*(N) \subset [-1, +1]$. Andernfalls können wir ja anstelle von m^* z. B. die folgende ordnungstreue Abbildung von N in $[-1, +1]$ betrachten: $m'(x) := h(m^*(x))$, mit

$$h(x) := \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{1+x} \text{ für } x \geq 0, \\ -1 - \dfrac{1}{x-1} \text{ für } x \leq 0. \end{cases}$$

(h ist monoton wachsend, d. h. es gilt $x < y \supset h(x) < h(y)$).

β) Es gibt höchstens abzählbar viele Stellen $a\varepsilon M\text{-}N$, für die (V) verletzt ist. Denn ist (V) verletzt, so gilt (*): $\sup m^*(S_a) \varepsilon m^*(N)$ oder $\inf m^*(S^a) \varepsilon m^*(N)$. Die Elemente a aus M-N sind eindeutig durch den Funktionswert $\sup m^*(S_a)$, bzw. $\inf m^*(S^a)$ festgelegt, d. h. es gilt $\sup m^*(S_a) = = \sup m^*(S_b) \supset a = b$ und $\inf m^*(S^a) = \inf m^*(S^b) \supset a = b$. Denn für $a,b\varepsilon M\text{-}N$ und $a <\cdot b$ gibt es ein $c\varepsilon N$ mit $a <\cdot c \wedge c <\cdot b$, also gilt $c\varepsilon S_b$ und für alle $x\varepsilon S_a$: $x <\cdot c$. Also $\sup m^*(S_a) < m^*(c) \leq \sup m^*(S_b)$. Analog schließt man für $\inf m^*(S^a)$. Da $m^*(N)$ abzählbar ist, gibt es also nur abzählbar viele Punkte mit der Eigenschaft (*).

γ) Die Abbildung m^* von N in $[-1, +1]$ sei ordnungstreu. Die Bedingung (V) sei genau für die Objekte $a_1, a_2, \ldots \varepsilon M\text{-}N$ verletzt. Dann ist diejenige Abbildung m' von N in $\mathfrak{R}$ ordnungstreu und erfüllt die

Bedingung (V), die wie folgt definiert ist: $m'(x) := m^*(x) + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \cdot 2^{-n}$, wobei gelten soll:

$$u_n(x) := \begin{cases} 0 \text{ für } x <\cdot\, a_n, \\ 1 \text{ für } a_n <\cdot\, x. \text{ (Es ist } a_n \neq x, \text{ da } a_n \varepsilon M\text{-}N, x \varepsilon N.) \end{cases}$$

γ_1) m' ist ordnungstreu, denn m^* ist ordnungstreu und es gilt für alle n: $x \varepsilon N \wedge y \varepsilon N \wedge x <\cdot\, y \supset u_n(x) \leq u_n(y)$, also $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \cdot 2^{-n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} u_n(y) \cdot 2^{-n}$.

γ_2) m' erfüllt (V). Wir beweisen $\neg \sup m'(S_a) \varepsilon m'(S^a)$, der Beweis für den zweiten Teil der Bedingung (V) ergibt sich dann auf analogem Weg. Setzt man $r := \sup m^*(S_a) + \sup_{x \varepsilon S_a} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \cdot 2^{-n}$, so gilt (**): $r < m'(c)$ für alle $c \varepsilon S^a$, wegen $\sup m'(S_a) \leq r$ also (γ_2).

Denn nach Definition von $u_n(x)$ gilt:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \cdot 2^{-n} = \sum_{n: a_n <\cdot\, x} 2^{-n}$.

Ferner gilt:

(2) $\sup_{x \varepsilon S_a} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \cdot 2^{-n} \leq \sum_{n: a_n <\cdot\, a} 2^{-n}$, und

(3) $\sup m^*(S_a) \leq m^*(c)$ für alle $c \varepsilon S^a$, sowie

(4) $\sum_{n: a_n <\cdot\, a} 2^{-n} \leq \sum_{n: a_n <\cdot\, c} 2^{-n}$ für alle $c \varepsilon S^a$.

Daraus folgt $r \leq m'(c)$ für alle $c \varepsilon S^a$. Aus der Annahme

(5) Es gibt ein $c \varepsilon S^a$ mit $r = m'(c)$ folgt wegen (1) bis (4) $\sup m^*(S_a) = m^*(c) \varepsilon m^*(S^a)$ und $\sum_{n: a_n <\cdot\, a} 2^{-n} = \sum_{n: a_n <\cdot\, c} 2^{-n}$. Aus der ersteren Gleichung folgt $a = a_i$ für ein bestimmtes i und also aus der letzteren $\sum_{n: (a_n = a_i \vee a_i <\cdot\, a_n) \wedge a_n <\cdot\, c} 2^{-n} = 0$, also wegen $a_i = a_i \wedge a_i <\cdot\, c$ insbesondere $2^{-i} = 0$. Die Annahme (5) ist also falsch und die Behauptung (**) folglich richtig.

Damit ist der Satz I.1 und also auch T1.4–1a bewiesen.

Der Beweis des zweiten Teils (b) von T1.4–1 ergibt sich so:

1) Sind m, m' Metrisierungsfunktionen für die Struktur $\langle M, \leq\cdot \rangle$, so gibt es eine monoton steigende Transformation h, so daß $m'(a) = h(m(a))$ ist. Denn wählt man m^{-1} so, daß gilt $m(m^{-1}(x)) = x$, so ist die Funktion $h(x) := m'(m^{-1}(x))$ monoton wachsend: $x \leq y \equiv m^{-1}(x) \leq m^{-1}(y)) \equiv m'(m^{-1}(x)) \leq m'(m^{-1}(y)) \equiv h(x) \leq h(y)$, und es gilt nach Definition von

$m^{-1}(x)$: $m'(x) = m'(m^{-1}(m(x)))$. Zwei Metrisierungsfunktionen m, m' gehen also auseinander immer durch eine monoton steigende Transformation hervor.
2) Ist m eine Metrisierungsfunktion und h eine monoton steigende Transformation, so ist auch $m'(a) := h(m(a))$ eine Metrisierungsfunktion, denn es gilt $a \leq\cdot\, b \equiv m(a) \leq m(b) \equiv h(m(a)) \leq h(m(b)) \equiv m'(a) \leq m'(b)$.

Beweis des Theorems T1.4–2 (S. 37)

Wir geben zunächst einen Beweis für den 1. Teil des Theorems an. Dabei gehen wir von der extensiven Quasireihe $\langle M, \leq\cdot, \dot{+} \rangle$ wie im Beweis von T1.4–1 zu der Reihe $\langle M^*, \leq\cdot^*, \dot{+}^* \rangle$ über, wo M^* die Menge der Äquivalenzklassen $[a]_{\doteq}$ mit $a \varepsilon M$ ist und wo gilt $[a]_{\doteq} \leq\cdot^* [b]_{\doteq} \equiv$ $\equiv a \leq\cdot\, b$ und $[a]_{\doteq} \dot{+}^* [b]_{\doteq} = [a \dot{+} b]_{\doteq}$.
Wir beweisen den Satz:
I2: Jede extensive Quasireihe $\langle M, \leq\cdot, \dot{+} \rangle$, für die gilt $a \doteq b \supset a = b$ für alle a und b aus M, ist isomorph einer Struktur $\langle R, \leq, + \rangle$ mit $R \subset \mathscr{R}$.

Aus I.2 folgt sofort T1.4–2a, denn ist m^* eine Metrisierung von $\langle M^*, \leq\cdot^*, \dot{+}^* \rangle$, so ist $m(a) := m^*([a]_{\doteq})$ eine Metrisierung von $\langle M, \leq\cdot, \dot{+} \rangle$, für die gilt $a \leq\cdot\, b \equiv [a]_{\doteq} \leq\cdot^* [b]_{\doteq} \equiv m^*([a]_{\doteq}) \leq m^*([b]_{\doteq}) \equiv m(a) \leq m(b)$, und $m(a \dot{+} b) = m^*([a \dot{+} b]_{\doteq}) = m^*([a]_{\doteq} \dot{+} [b]_{\doteq}) = m^*([a]_{\doteq}) +$ $m^*([b]_{\doteq}) = m(a) + m(b)$.

Der Beweis für den Satz I.2 ergibt sich so[3]:
A) Für das in 1.4 unter c6 definierte Produkt gelten, wie man leicht verifiziert, folgende Gesetze:
$n(m \cdot a) = (nm) \cdot a$; $n \cdot (a \dot{+} b) = n \cdot a \dot{+} n \cdot b$, $(m+n) \cdot a = m \cdot a \dot{+} n \cdot a$, $a <\cdot\, b \equiv m \cdot a <\cdot\, m \cdot b$ und $n \cdot a <\cdot\, m \cdot a \equiv n < m$.

B) Es gibt höchstens eine isomorphe Abbildung f von M in $\mathscr{R}$, für die zusätzlich gilt $f(e) = 1$ für ein bestimmtes Element $e \varepsilon M$. Denn ist f ein solcher Isomorphismus, so definieren wir zu jedem $a \varepsilon M$ die folgenden, von e abhängigen Mengen rationaler Zahlen:
$S_a := \left\{ \frac{n}{m} : n \cdot e \leq\cdot\, m \cdot a \right\}$ und $S^a := \left\{ \frac{n}{m} : m \cdot a <\cdot\, n \cdot e \right\}$. Die Mengen S_a, S^a stellen dann einen Dedekindschen Schnitt dar, d.h. eine Zerlegung der Menge der rationalen Zahlen in zwei Mengen, die nicht leer sind,

---

[3] Vgl. dazu Suppes [51].

für die alle Elemente der ersten kleiner sind als alle Elemente der zweiten Menge, und bei der die zweite Menge kein kleinstes Element enthält, denn es gilt:

1) $S_a \neq \wedge \neq S^a$, nach c6.

2) $\wedge xy(x\varepsilon S_a \wedge y\varepsilon S^a \supset x < y)$, denn aus $\frac{n}{m}\varepsilon S_a$ und $\frac{n'}{m'}\varepsilon S^a$ folgt $n \cdot e \leq\cdot m \cdot a$ und $m' \cdot a <\cdot n' \cdot e$, also $m'n \cdot e \leq\cdot m'\, m \cdot a \leq\cdot mn' \cdot e$, also nach a2 $m'n < mn'$, also $\frac{n}{m} < \frac{n'}{m'}$.

3) $S_a \cup S^a$ ist die Menge aller rationalen Zahlen, da nach a2 für jede rationale Zahl $\frac{n}{m}$ gilt $n \cdot e \leq\cdot m \cdot a$ oder $m \cdot a <\cdot n \cdot e$.

4) $\neg \vee x(x\varepsilon S^a \wedge \wedge y(y\varepsilon S^a \supset x \leq\cdot y))$, denn ist $\frac{n}{m}\varepsilon S^a$, also $m \cdot a <\cdot n \cdot e$, so gibt es nach c6 ein $r \geq 1$ mit $r(n \cdot e \dot{-} m \cdot a) \cdot\!> a$, wobei $n \cdot e \dot{-} m \cdot a$ dasjenige Objekt z mit $z \dot{+} m \cdot a \doteq n \cdot e$ sei, das nach c4 existiert. Es ist dann $r\, n \cdot e \cdot\!> a \cdot (rm+1)$, also $\frac{r \cdot n}{r \cdot m+1}\ \varepsilon\ S^a$ und $\frac{r \cdot n}{r \cdot m+1} < \frac{n}{m}$.

Es gilt aber für Dedekindsche Schnitte, daß die obere Grenze der ersten Menge mit der unteren Grenze der zweiten zusammenfällt; es gilt also $\sup S_a = \inf S^a$. Ferner gilt aber auch

5) $f(a) = \sup S_a$. Denn ist $\frac{n}{m}\varepsilon S_a$, also $n \cdot e \leq\cdot m \cdot a$, so gilt wegen der Isomorphie von f: $n \cdot f(e) = f(n \cdot e) \leq f(ma) = mf(a)$. Da $f(e) = 1$ ist, erhält man so $f(a) \geq \frac{n}{m}$, also $f(a) \geq \sup S_a$, da das für alle $\frac{n}{m}$ aus S_a gilt. Analog ergibt sich $f(a) \leq \inf S^a$; wegen der Identität der Grenzen erhält man so die Behauptung (B).

C) Gibt es einen Isomorphismus f mit $f(e) = 1$, so muß er nach (B) die Gestalt $f(a) = \sup S_a$ haben. Um die Existenz von f nachzuweisen, definieren wir also für ein beliebiges, aber festes Element $e\varepsilon M$ die Funktion f durch $f(a) = \sup S_a$ $(= \inf S^a)$. Es gilt dann: f ist ein Isomorphismus der gewünschten Art mit $f(e) = 1$. Das ist nun nachzuweisen:

1) $f(e) = 1$, denn für $\frac{n}{m}\varepsilon S_e$ gilt $n \cdot e \leq\cdot m \cdot e$, also $n \leq m$, also $\frac{n}{m} \leq 1$, also $f(e) \leq 1$. Andererseits gilt $1\varepsilon S_e$, da $1 \cdot e \leq 1 \cdot e$, also $f(e) \geq 1$.

2) f ist ordnungstreu, d.h. $a <\cdot b \supset f(a) < f(b)$. Denn ist $a <\cdot b$, so gibt es nach c5 ein c mit $b = a \dot{+} c$; nach c6 gibt es ein n' mit $e \leq\cdot n'c$. Es gilt

nun (*) $\left\{x+\frac{1}{n'}: x\varepsilon S_a\right\} \subset S_b$. Denn ist $\frac{n}{m}\ \varepsilon S_a$, also $n\cdot e \leq\cdot m\cdot a$, so gilt $n'n\cdot e \leq\cdot n'm\cdot a$ und $m\cdot e\leq\cdot mn'\cdot c$. Daraus erhält man mit c3 $(n'n+m)\cdot e = n'n\cdot e \dotplus m\cdot e \leq\cdot n'm\cdot a \dotplus m\cdot e \leq\cdot n'm\cdot a \dotplus mn'\cdot c = n'm\cdot(a\dotplus c)$ $= n'm\cdot b$, also $\frac{n'\cdot n+m}{n'\cdot m} = \frac{n}{m}+\frac{1}{n'}\ \varepsilon S_b$. Damit ist die Behauptung (*) bewiesen. Es gilt also $f(a) = \sup S_a < \sup S_a + 1/n' \leq \sup S_b = f(b)$.

3) f ist umkehrbar eindeutig, d.h. es gilt $\inf S^a = \inf S^b \supset a = b$. Das folgt direkt aus (2).

4) f ist operationstreu, d.h. $f(a \dotplus b) = f(a)+f(b)$. Nach c3 und c6 gibt es zu a und jeder natürlichen Zahl n natürliche Zahlen m mit $n\cdot a <\cdot m\cdot e$. Sei m(n) die kleinste dieser Zahlen m, so gilt $(m(n)-1)\cdot e \leq\cdot n\cdot a <\cdot$ $<\cdot m(n)\cdot e$. Analog sei m′(n) definiert durch $(m'(n)-1)\cdot e\leq\cdot n\cdot b <\cdot$ $<\cdot m'(n)\cdot e$. Es gilt $\frac{m(n)-1}{n}\ \varepsilon\ S_a$, $\frac{m(n)}{n}\ \varepsilon\ S^a$, und analog für b. Also $\frac{m(n)-1}{n} \leq \sup S_a = \inf S^a \leq \frac{m(n)}{n}$, also $f(a) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{m(n)}{n}$ – m(n) wächst mit n – und analog für b. Andererseits gilt

$(m(n)+m'(n)-2)\cdot e \leq\cdot n\cdot(a \dotplus b) <\cdot (m(n)+m'(n))\cdot e$, also

$\frac{m(n)+m'(n)-2}{n}\ \varepsilon\ S_{a\dotplus b}$ und $\frac{m(n)+m'(n)}{n}\ \varepsilon\ S^{a\dotplus b}$. Wie oben folgt also

$$f(a \dotplus b) = \lim_{n\to\infty}\frac{m(n)+m'(n)}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{m(n)}{n} + \lim_{n\to\infty}\frac{m'(n)}{n} = f(a)+f(b).$$

Damit ist der Satz I.2, und daher T1.4–2a bewiesen.

Der Beweis für den zweiten Teil (b) von T1.4–2 ergibt sich so:

a) Ist m(x) eine Metrisierungsfunktion für die extensive Quasireihe $\langle M, \leq\cdot, \dotplus\rangle$ und ist c eine positive reelle Zahl, so ist auch $m'(x) = c\cdot m(x)$ eine Metrisierungsfunktion für $\langle M, \leq\cdot, \dotplus\rangle$. Denn es gilt $a \leq\cdot b \equiv m(a) \leq$ $\leq m(b) \equiv c\cdot m(a) \leq c\cdot m(b)$ und $c\cdot m(a+b) = c\cdot(m(a)+m(b)) =$ $= c\cdot m(a) + c\cdot m(b)$.

b) Sind m,m′ zwei Metrisierungsfunktionen für $\langle M, \leq\cdot, \dotplus\rangle$, so gibt es eine positive reelle Zahl c mit $m'(x) = c\cdot m(x)$. Denn die Funktionen $\frac{m(x)}{m(e)}$ und $\frac{m'(x)}{m'(e)}$ sind für festes $e\varepsilon M$ nach (a) Metrisierungsfunktionen; für sie gilt $\frac{m(e)}{m(e)} = \frac{m'(e)}{m'(e)} = 1$, also nach Teil B des Beweises von T1.4–2a: $\frac{m'(x)}{m'(e)} = \frac{m(x)}{m(e)}$, also für $c = \frac{m'(e)}{m(e)}$: $m'(x) = c\cdot m(x)$.

Beweis des Theorems T1.4–3 (S. 41)

Ein Beweis dieses Theorems ist von P. Suppes und M. Winet in [55] angegeben worden. Diesen Beweis stellen wir im folgenden dar.

A) Wir bereiten den Beweis durch einige Hilfssätze vor.

H1: a) $a,a \doteq b,b$

b) $a,b \lesseqgtr\cdot c,d \supset a,c \lesseqgtr\cdot b,d$

c) $a,b \lesseqgtr\cdot c,d \supset d,c \lesseqgtr\cdot b,a$

d) $a,b \doteq c,d \supset b,a \doteq d,c$

e) $a \cdot\geq b \supset c,c \leq\cdot a,b$

f) $a \doteq b \supset (A[a] \equiv A[b])$ für Aussagen A, die nur mit der Relation $\leq\cdot$ gebildet sind.

Beweis: Mit d1 bis d4.

H2: a) $a \leq\cdot b \vee b \leq\cdot a$

b) $a \leq\cdot b \wedge b \leq\cdot c \supset a \leq\cdot c$

(D.h. $\leq\cdot$ ist eine Quasiordnung.)

Beweis: Mit H1a und d1 bis d4.

H3: a) $a,b \doteq c,d \wedge a,b \doteq c,d' \supset d \doteq d'$

b) $a,b \doteq c,d \wedge a,b \doteq c',d \supset c \doteq c'$

Beweis: Mit d3 und H1 erhält man (a), daraus (b).

H4: $a,b \lesseqgtr\cdot a',b' \wedge b,c \lesseqgtr\cdot b',c' \supset a,c \lesseqgtr\cdot a',c'$

Beweis: Aus dem Implikans erhält man mit H1 $a,a' \lesseqgtr\cdot b,b' \wedge \wedge b,b' \lesseqgtr\cdot c,c'$, mit d2 also $a,a' \lesseqgtr. c,c'$, mit H1 also $a,c \lesseqgtr\cdot a',c'$.

H5: $a,b \doteq_m c,d \wedge a',b' \doteq_m c',d' \supset (a,b \lesseqgtr\cdot a'b' \equiv a,d \lesseqgtr\cdot a',d')$

Beweis: Es sei $m=1$ und es gelte $a,b \doteq c,d \wedge b \doteq c \wedge b' \doteq c' \wedge \wedge a',b' \doteq c',d'$. Ist dann $a,b \lesseqgtr\cdot a',b'$, so gilt auch $c,d \lesseqgtr\cdot c',d'$, also nach H4 $a,d \lesseqgtr\cdot a'd'$. Daraus ergibt sich auch schon die Umkehrung. – Ist der Satz für m bewiesen, so gilt er auch für $m+1$: Gilt $a,b \doteq_m u,v \wedge u,v \doteq \doteq_1 c,d$ und $a',b' \doteq_m u',v' \wedge u',v' \doteq_1 c',d'$, so gilt für $a,b \lesseqgtr\cdot a',b'$ nach Induktionsvoraussetzungen $a,v \lesseqgtr\cdot a',v'$. Wegen $a,b \lesseqgtr\cdot a',b'$ gilt auch $c,d \lesseqgtr\cdot c',d'$, denn aus $e,f \doteq_m g,h$ folgt nach D1.4–2 $e,f \doteq g,h$ für alle m; und mit H4 folgt daraus wegen $v' \doteq c'$ und $v \doteq c$ $a,d \lesseqgtr\cdot a',d'$. Aus den drei so bewiesenen Implikationen für $\cdot>$, $<\cdot$ und $\doteq$ folgt auch wieder die Umkehrung.

H6: a) $a,b \doteq_m c,d \wedge a,b \doteq_m c',d' \supset c \doteq c' \wedge d \doteq d'$

b) $a,b \doteq_m c,d \wedge a,b' \doteq_m c',d \supset b = b' \wedge c \doteq c'$

Beweis: a) Aus dem Implikans folgt mit H5 $a,d \doteq a,d'$, also $d \doteq d'$, wegen $a,b \doteq c,d \doteq c',d$, also auch $c \doteq c'$. b) Aus dem Implikans folgt mit H5 $a,b \doteq a,b'$, also $b \doteq b'$, wegen $a,b \doteq c,d \doteq c',d$ also auch $c \doteq c'$.

Man kann nun definieren:

D1: $a,b\ N(1)c,d :\!= a \doteq c \wedge b \doteq d$

$a,b\ N(m+1)c,d :\!= a \doteq c \wedge \mathrm{V}x(a,b \doteq_m x,d)$.

Da nach H2 die Objekte von M eine Quasiordnung bilden, kann man sie als Punkte auf einer Geraden darstellen, wobei äquivalente Objekte (d.h. Punkte a,b mit $a \doteq b$) in einem Punkt zusammenfallen. Dann besagt $a,b\ N(m)c,d$, daß das Intervall [b,a] der $\frac{1}{m}$-te Teil des Intervalls $[d,c] = [d,a]$ ist.

Diese Relation hat folgende Eigenschaften:

H7: $\mathrm{V}x(a,x\ N(2^m)a,b)$ für alle $m \geq 0$.

Beweis: Mit d5 durch Induktion nach m.

H8: $b <\cdot a \wedge d <\cdot c \supset \mathrm{V}mx(a,x\ N(2^m)a,b \wedge a,x \leq\cdot c,d)$

Beweis: Ist $a,b \leq\cdot c,d$, so ist die Behauptung für $m = 0$ und $x = b$ trivial. Ist $c,d <\cdot a,b$, so gibt es nach d7 ein n, ein y und ein z mit $a,y \doteq$ $\doteq_n z,b$ und $a,y \leq\cdot c,d$. Es sei $2^m \geq n+1$. Nach H7 gibt es ein x mit $a,x\ N(2^m)a,b$. Nach H5 gilt dann $a,x \leq\cdot a,y \leq\cdot c,d$.

H9: $(a <\cdot b <\cdot c \vee c <\cdot b <\cdot a) \wedge a,tN(m)a,b \wedge b,sN(m)b,c \wedge a,rN(m)a,c \supset$ $t,r \doteq b,s$.

Beweis: Es sei $c <\cdot b <\cdot a$. Wir zeigen, daß für $t',b \doteq a,t$ gilt (α) $t',s \doteq a,r$. Daraus folgt dann $t,r \doteq b,s$, denn wäre $t,r <\cdot b,s$ oder $t,r \cdot> b,s$, so wäre nach H4 $a,r <\cdot t',s$ oder $t,r \cdot> b,s$. Um (α) zu beweisen, zeigen wir, daß für $a,r' \doteq t',s$ und $a,r'N(m)a,c'$ gilt (β) $a,c \doteq a,c'$. Wegen $a,r\ N(m)a,c$ ergibt sich mit H5 daraus dann $a,r \doteq a,r' \doteq t',s$. Die Behauptung ($\beta$) gilt trivialerweise für $m = 1$. Ist sie bewiesen für m, so gilt sie auch für $m+1$: Es gelte das Implikans des Satzes für a,b,c,t,s und r', und es sei nun a'', $a \doteq a,t \doteq t',b$, $c,c'' \doteq b,s$ und $c,c' \doteq t',s$. Dann muß nach H4 auch gelten $c'',c' \doteq a'',a$, also nach H1 $a,c' \doteq a'',c''$. Es ist aber nun a'', $a\ N(m+1)a'',b$, $b,sN(m+1)b,c''$ und $a,r'N(m+1)a,c'$.

Es wird nun definiert:

D2: $a,bH(m,k;n,l)c,d :\!= \mathrm{V}x_1x_2y_1y_2(a,x_1N(2^m)a,b \wedge$ $a,x_1N(k)a,y_1 \wedge c,x_2N(2^n)c,d \wedge c,x_2N(l)c,y_2 \wedge a,y_1 \leq\cdot c,y_2)$

Danach besagt $a,b\ H(m,k;\ n,l)c,d$, daß ein $\frac{k}{2^m}$-ter Teil des Intervalls [b,a] nicht größer ist als ein $\frac{1}{2^n}$-ter Teil des Intervalls [d,c].

Die Relation H hat folgende Eigenschaften:

H10: $a,b\ H(m,k;n,l)\ c,d \wedge c,\ d\ H(n,l;p,q)e,f \supset a,b\ H(m,k;p,q)e,f$.

Der einfache Beweis benützt d2.

H11: a,b $H(m,k;n,l)$c,d $\supset$ a,b $H(m,k\cdot p;n,l\cdot p)$c,d für $k\cdot p\leq 2^m$ und $l\cdot p\leq 2^n$.

Das beweist man leicht mit H5. Ebenso den Satz:

H12: a,b $H(m,k\cdot p;n,l\cdot p)$c,d $\supset$ a,b $H(m,k;n,l)$c,d.

H13: a,b $H(m,k;n,l)$c,d $\supset$ a,b $H(m+s,k;n+s,l)$c,d.

Beweis: Gilt a,x_1 $N(2^m)$a,b, a,$x_1$$N(k)$a,$y_1$, c,$x_2$$N(2^n)$c,d, c,$x_2$$N(l)$ c,y_2 und a,$y_1\leq\cdot$ c,y_2, so gibt es nach H7 x'_1,x'_2 mit a,$x'_1$$N(2^{m+s})$ a,b, also a,x'_1 $N(2^s\cdot k)$a,y_1 und c,$x'_2$$N(2^{n+s})$c,d, also c,$x'_2$,$N(2^s\cdot l)$c,$y_2$, also a,b $H(m+s,2^s\cdot k;n+s,2^s\cdot l)$c,d.

Daraus folgt mit H12 die Behauptung.

H14: a $\cdot>$ b $\wedge$ a,b $<\cdot$ c,d $\supset$ $\bigvee$l,n($0<l<2^n\wedge$ a,b $H(0,1;n,l)$c,d).

Beweis: Nach d6 gibt es ein x :d $<\cdot$ x $<\cdot$ c und a,b $\leq\cdot$ c,x. Nach H8 gibt es für d $<\cdot$ c und d $<\cdot$ x ein n und ein y mit c,y $N(2^n)$c,d und c,y $\leq\cdot$ x,d. Es gibt dann ein y' mit c,y $\doteq$ $_{2^n-1}$y',d, also c,y$N(2^n-1)$c,y' und a,b $\leq\cdot$ c,y' – es gilt a,b $\leq\cdot$ c,x $\leq\cdot$ y,d $\doteq$ c,y' – also a,b $H(0,1;n,2^n-1)$ c,d.

H15: (c $<\cdot$ b $<\cdot$ a $\vee$ a $<\cdot$ b $<\cdot$ c) $\wedge$ a,b $H(m,1;n,l)$d,e $\wedge$ b,c $H(m,1;n,l')$d,e $\supset$ a,c $H(m,1;n,l+l')$d,e, für $l+l'\leq 2^n$.

Beweis: Es sei c $<\cdot$ b $<\cdot$ a und a,$x_1$$N(2^m)$a,b, d,$x_2$$N(2^n)$d,e, d,$x_2$$N(l)$d,$y_2$, ($\alpha$) a,$x_1\leq\cdot$ d,y_2 und b,$x'_1$$N(2^m)$b,c, d,$x_2'$$N(2^n)$d,e, d,$x'_2$$N(l')$ d,y'_2 und (β) b,$x'_1\leq\cdot$ d,y'_2. Es sei x''_1 so gewählt, daß gilt a,$x_1''$$N(2^m)$a,c und y''_2 so, daß gilt d,$x_2$$N(l+l')$d,$y''_2$. Dann gilt nach H9 ($\gamma$) x_1,x''_1 $\doteq$ $\doteq$ b,x'_1 und es gilt d,y'_2 $\doteq$ y_2,y_2''. Nach (α) gilt a,$x_1\leq\cdot$ d,y_2, nach (β) und (γ) x_1,$x''_1\leq\cdot$ d,y'_2 $\doteq$ y_2, y''_2, also nach H4 a,$x''_1\leq\cdot$ d,y''_2. Daher erhalten wir a,c $H(m,1;n,l+l')$d,e. Für a $<\cdot$ b $<\cdot$ c argumentiert man entsprechend.

B) Nach diesen Vorbereitungen kommen wir nun zum Beweis des Theorems T1.4–3a (S. 41) und zeigen, daß es eine Metrisierungsfunktion u(x) auf M mit a,b $\leq\cdot$ c,d $\equiv$ $u(a)-u(b)\leq u(c)-u(d)$ gibt. Dazu wählen wir zwei feste Elemente a_0 und a_1 mit $a_0 <\cdot a_1$ aus M aus. (Wären alle Elemente aus M äquivalent, so wäre die Struktur $\langle M,\leq\cdot\rangle$ trivial und ebenso der Satz T1.4–3). Dann wird zunächst jedem Intervall [b,a] mit a $\cdot\geq$ b eine nicht negative reelle Zahl r(a,b) zugeordnet:

D3: Für a $\cdot\geq$ b sei R(a,b) die Klasse aller rationalen Zahlen r, so daß gilt: $\bigvee$m,n,k,l ($0<l\leq 2^n\wedge r\geq\frac{l\cdot 2^m}{2^n}\wedge$ a,b $H(m,1;n,l)a_1,a_0$).

Danach ist R(a,b) die Klasse aller Zahlen $\frac{l\cdot 2^m}{2^n}$, so daß der $\frac{1}{2^n}$-te

Teil von $[a_0,a_1]$ größer oder gleich dem $\frac{1}{2^m}$-ten Teil von $[b,a]$ ist, und aller größeren rationalen Zahlen. Wir vermerken für die folgenden Überlegungen, daß die Zahlen $\frac{l \cdot 2^m}{2^n}$ mit $0 < l \leq 2^n$ überall dicht liegen.

Es gilt nun:

1) $R(a,b)$ ist nicht leer: Ist $a,b \leq\cdot\, a_1,a_0$, so ist $1 \varepsilon R(a,b)$. Ist $a_1,a_0 <\cdot\, a,b$, so gibt es nach H8 ein m und ein c mit $a,cN(2^m)a,b$ und $a,c \leq\cdot\, a_1,a_0$; also gilt $a,bH(m,1;0,1)\, a_1,a_0$, also $2^m \varepsilon R(a,b)$.
2) $R(a,b)$ hat eine nicht negative reelle Zahl als untere Schranke: Da 0 in keiner Menge $R(a,b)$ ist, ist das trivial.
3) Ist $r \varepsilon R(a,b)$ und $r' > r$, so gilt auch $r' \varepsilon R(a,b)$: Auch das ist nach D3 trivial.

Nach (1) bis (3) können wir nun definieren:

D4: $r(a,b) := \inf R(a,b)$ für $a \cdot\!\geq b$.

D.h. $r(a,b)$ ist die untere Grenze (die größte untere Schranke) von $R(a,b)$. Und

D5: $u(a) := r(a,a_0)$ für $a \cdot\!\geq a_0$,
$u(a) := -r(a_0,a)$ für $a <\cdot\, a_0$

Es gilt dann:

4) $r(a,b) = 0$ für $a \doteq b$: Ist $a \doteq b$, so gilt $a,b\, H(m,1;n,l)a_1,a_0$ für alle m,n,l, so daß alle positiven rationalen Zahlen in $R(a,b)$ enthalten sind. Es ist also $\inf R(a,b) = 0$. Daher gilt speziell $u(a_0) = 0$.
5) $u(a_1) = 1$. Es gilt ja trivialerweise $a_1,a_0H(0,1;0,1)a_1,a_0$.
6) $u(a) > 0$ für $a_0 <\cdot\, a$ und $u(a) < 0$ für $a <\cdot\, a_0$: Ist $a_0 <\cdot\, a$, so gibt es nach H8 ein n und ein c mit $a_1,c\, N(2^n)\, a_1,a_0$ und $a_1,c \leq\cdot\, a,a_0$, also ein c' mit $a_1,c'\, N(2^{n+1})\, a_1,a_0$ und $a_1,c' <\cdot\, a,a_0$. Dann gilt $a,a_0H(0,1;$ $n+1,1)a_1,a_0$ nicht, also ist $\frac{1}{2^{n+1}}$ nicht in $R(a,a_0)$, also $r(a,a_0) \geq$ $\frac{1}{2^{n+1}} > 0$. Die zweite Behauptung folgt nach D5 aus der ersten.
7) $a,b \leq\cdot\, c,d \supset r(a,b) \leq r(c,d)$: Ist $a \doteq b$, so ist nach (4) $r(a,b) = 0$ $\leq r(c,d)$. Ist $a \cdot\!> b$ und $r(c,d) < r(a,b)$, so gibt es l,m,n mit $r(c,d)$ $< \frac{l \cdot 2^m}{2^n} < r(a,b)$, also $c,d\, H(m,1;n,l)a_1,a_0$ und $\neg\, a,b\, H(m,1;$ $n,l)a_1,a_0$, also nach H10 $\neg\, a,b\, H(m,1;m,1)c,d$, also mit H5 $\neg\, a,b \leq\cdot\, c,d$. Durch Kontraposition erhalten wir die Behauptung.

8) $\mathfrak{r}(a,b) \leq \mathfrak{r}(c,d) \supset a,b \leq\cdot\, c,d$: Es sei $\mathfrak{r}\varepsilon R(a,b)$ und $q\varepsilon R_{a,b}(c,d)$. Dabei sei $R_{a,b}(c,d)$ definiert wie $R(c,d)$ mit a anstelle von a_1 und b anstelle von a_0, und entsprechend unten $\mathfrak{r}_{c,d}$. Dann gibt es Zahlen m_1,n_1,l_1 und m_2,n_2,l_2 mit $\mathfrak{r} \geq \frac{l_1 \cdot 2^{m_1}}{2^{n_1}} \varepsilon R(a,b)$ und $q \geq \frac{l_2 \cdot 2^{m_2}}{2^n} \varepsilon R_{a,b}(c,d)$. Es gilt dann $a,b\, H(m_1,1;n_1,l_1)\, a_1,a_0$ und $c,d\, H(m_2,1;n_2,l_2)\, a,b$, so daß wir mit H13, H11 und H10 erhalten: $c,d\, H(m_1+m_2,1;n_1+n_2,l_1 \cdot l_2)a_1,a_0$. Es ist also $\frac{l_1 \cdot l_2 \cdot 2^{m_1+m_2}}{2^{n_1+n_2}}$ $\varepsilon R(c,d)$ und daher $\mathfrak{r} \cdot q\varepsilon R(c,d)$ und es gilt
(α) $\mathfrak{r}\varepsilon R(a,b) \wedge q\varepsilon R_{a,b}(c,d) \supset \mathfrak{r} \cdot q\varepsilon R(c,d)$.

Es sei nun $s=\mathfrak{r}(a,b), t=\mathfrak{r}_{a,b}(c,d)$, $u=\mathfrak{r}(c,d)$. Wäre $s \cdot t<u$, so gäbe es ein $\varepsilon>0$ mit $(s+\varepsilon)(t+\varepsilon)=u$. Dann gäbe es Zahlen $\mathfrak{r}'$ mit $s<\mathfrak{r}'<s+\varepsilon$ und q' mit $t<q'<t+\varepsilon$ mit $\mathfrak{r}'\varepsilon R(a,b)$ und $q'\varepsilon R_{a,b}(c,d)$. Wegen $\mathfrak{r}' \cdot q'<u$ wäre dann $\mathfrak{r}' \cdot q'$ nicht in $R(c,d)$, im Widerspruch zu (α), und wir erhalten so (β) $\mathfrak{r}(a,b) \cdot \mathfrak{r}_{a,b}(c,d) \geq \mathfrak{r}(c,d)$. Ist nun nicht $a,b \leq\cdot\, c,d$, dann gibt es nach H14 ein l und ein n mit $\frac{l}{2^n}<1$ und $c,d\, H(0,1;n,l)a,b$, also $\mathfrak{r}_{a,b}(c,d)<1$. Mit ($\beta$) erhält man daraus $\mathfrak{r}(a,b)>\mathfrak{r}(c,d)$. Durch Kontraposition ergibt sich die Behauptung.

9) $\mathfrak{r}(a,b)=u(a)-u(b)$: Es sei $a \cdot\!\geq b \cdot\!\geq a_0$. Dann ist zu zeigen $\mathfrak{r}(a,b)+\mathfrak{r}(b,a_0)=\mathfrak{r}(a,a_0)$. Ist $a \doteq b$ oder $b \doteq a_0$, so ist die Behauptung wegen (4) trivial. Wir nehmen also im folgenden an $a \cdot\!> b \cdot\!> a_0$. Wäre $\mathfrak{r}(a,b)+\mathfrak{r}(b,a_0)<\mathfrak{r}(a,a_0)$, so gäbe es m,l,n,l_1,l_2 mit $\mathfrak{r}(a,b)+\mathfrak{r}(b,a_0)<\frac{l \cdot 2^m}{2^n}<\mathfrak{r}(a,a_0)$, $\mathfrak{r}(a,b)<\frac{l_1 \cdot 2^m}{2^n}$ $\mathfrak{r}(b,a_0)<\frac{l_2 \cdot 2^m}{2^n}$ und $l=l_1+l_2 \leq 2^n$. Es gilt dann $a,b\, H(m,1;n,l_1)a_1,a_0$ und $b,a_0 H(m,1;n,l_2)a_1,a_0$. Nach H15 also $a,a_0 H(m,1;n,l)a_1,a_0$ – im Widerspruch zur Annahme $\frac{l \cdot 2^m}{2^n}<\mathfrak{r}(a,a_0)$. – Es gilt also

$\mathfrak{r}(a,a_0) \leq \mathfrak{r}(a,b)+\mathfrak{r}(b,a_0)$.

Um zu zeigen, daß auch gilt $\mathfrak{r}(a,a_0) \geq \mathfrak{r}(a,b)+\mathfrak{r}(b,a_0)$, führen wir die Annahme $\mathfrak{r}(a,a_0)<\mathfrak{r}(a,b)+\mathfrak{r}(b,a_0)$ ad absurdum. Ist sie erfüllt, so gibt es Zahlen l',m,n' mit:

(α) $\mathfrak{r}(a,a_0)<\frac{l' \cdot 2^m}{2^{n'}}<\mathfrak{r}(a,b)+\mathfrak{r}(b,a_0)$.

β) Nach H8 gibt es Zahlen n″,l″ mit $\frac{l'' \cdot 2^m}{2^{n''}} = \frac{l' \cdot 2^m}{2^{n'}}$ und

$\frac{(l''-1) \cdot 2^m}{2^{n''}} > r(a,a_0)$.

γ) Nach H8 gibt es auch ein $n \geq n''$ und ein x_2, so daß für $a,x_1'N(2^m)a,b$ und $b,x_1''\,N(2^m)b,a_0$ (nach H7 gibt es solche x_1',x_1'' gilt: $a_1,x_2N(2^n)a_1,a_0$ und $a_1,x_2 <\cdot\, a,x_1'$ und $a_1,x_2 <\cdot\, b,x_1''$.

Ist aber $n = n''+s$ und $l = l'' \cdot 2^s$, so gilt $\frac{l \cdot 2^m}{2^n} = \frac{l'' \cdot 2^m}{2^{n''}}$ und

$\frac{(l-1) \cdot 2^m}{2^n} \geq \frac{(l''-1) \cdot 2^m}{2^{n''}} > r(a,a_0)$.

Wegen $\frac{(l-1) \cdot 2^m}{2^n} \varepsilon\, R(a,a_0)$ gilt nun für $a,x_1N(2^m)a,a_0$ und $a_1,x_2N(l-1)a_1,y_2^+$: (δ) $a,x_1 \leq\cdot\, a_1,y_2^+$. Es sei l_1 die kleinste Zahl, für die es ein y_2' gibt mit $a_1,x_2N(l_1)a_1,y_2$ und $a,x_1' \leq\cdot\, a_1,y_2'$. Dann gilt wegen (β) und (γ) $l_1 \leq l-1$, es gilt $\frac{l_1 \cdot 2^m}{2^n} \varepsilon\, R(a,b)$, und für $a_1,x_2N(l_1-1)a_1,y_2'^+$ gilt $a,x_1' \cdot\!> a_1,y_2'^+$. Wir setzen nun $l_2 = l - l_1$. Dann gibt es ein y_2'' mit $a_1,x_2N(l_2)a_1,y''$, und es gilt $b,x_1'' \leq\cdot\, a_1,y_2''$. Denn wegen $a_1,x_2N(l_2-1)a_1,y_2''^+$ gilt $a_1,y_2'' \doteq y_2'^+,y_2^+$, nach H9 gilt $a,x_1 \doteq t,x_1''$, wo t so gewählt wird, daß gilt $t,b \doteq a,x_1'$, und es gilt $a,x_1' \cdot\!> a_1,y_2'^+$; wäre also $b,x_1'' \cdot\!> a_1,y_2''$, so wäre nach H4 $t,x_1'' \doteq a,x_1 \cdot\!> a_1,y_2^+$ – im Widerspruch zu (δ). Es ist also $b,x_1'' \leq\cdot\, a_1,y_2''$ und daher $\frac{l_2 \cdot 2^m}{2^n} \varepsilon\, R(b,a_0)$. Ist aber $\frac{l_1 \cdot 2^m}{2^n} > r(a,b)$ und $\frac{l_2 \cdot 2^m}{2^n} > r(b,a_0)$, so ist $\frac{(l_1+l_2) \cdot 2^m}{2^n} = \frac{l \cdot 2^m}{2^n} > r(a,b) + r(b,a_0)$, im Widerspruch zur Annahme (α) und $\frac{l \cdot 2^m}{2^n} \leq \frac{l' \cdot 2^m}{2^{n'}}$.

Damit ist auch gezeigt $r(a,a_0) \geq r(a,b) + r(b,a_0)$, also mit dem früheren Resultat $r(a,a_0) = r(a,b) + r(b,a_0)$. – In den anderen Fällen, in denen die Voraussetzung $a \cdot\!\geq b \cdot\!\geq a_0$ nicht erfüllt ist, argumentiert man entsprechend.

10) $a,b \leq\cdot\, c,d \equiv u(a)-u(b) \leq u(c)-u(d)$: Das folgt aus (7), (8) und (9).

Damit ist die Existenz der Metrisierungsfunktion u bewiesen, wie sie in T1.4–3a behauptet wird.

C) Es bleibt zu zeigen, daß u eindeutig ist bis auf lineare Transformationen, wie das im Teil (b) von T1.4–3 behauptet wird.

a) Ist u(x) eine reelle Funktion auf M, für die gilt
(α) $a,b \leq\cdot c,d \equiv u(a)-u(b) \leq u(c)-u(d)$, so ist auch $u'(x)=p\cdot u(x)+q$ eine solche Funktion, wo p und q reelle Zahlen sind mit $p>0$. Das folgt unmittelbar aus den Eigenschaften der Relation $\leq$.

b) Sind u(x) und u'(x) zwei reelle Funktionen auf M, die (α) erfüllen, so gibt es Zahlen $p>0$ und q, so daß gilt $u'(x)=p\cdot u(x)+q$.
Es sei $v(x)=\dfrac{u(x)-u(a_0)}{u(a_1)-u(a_0)}$ und $v'(x)=\dfrac{u'(x)-u'(a_0)}{u'(a_1)-u'(a_0)}$,
dann gilt (β) $v(a_1)=v'(a_1)=1$ und (γ) $v(a_0)=v'(a_0)=0$, und nach (a) erfüllen v und v' die Bedingung (α). Es soll nun gezeigt werden $v(x)=v'(x)$. Dann gilt $u'(x)=\dfrac{u'(a_1)-u'(a_0)}{u(a_1)-u(a_0)}\cdot u(x)+(u'(a_0)-u(a_0))$.
Aus (α) folgt wegen $a_1 \cdot\!> a_0$ $u'(a_1)-u'(a_0)>0$ und $u(a_1)-u(a_0)>0$; damit ist die Behauptung bewiesen.

v ist nach den Bedingungen (α), (β) und (γ) eindeutig festgelegt durch $v(a)=\inf R(a,a_0)$. Dann gilt $r \varepsilon R(a,a_0)$, so gibt es x_1,x_2,y_2 und n,m,l mit $0<l\leq 2^n$, so daß gilt $a,x_1N(2^m)a,a_0$, $a_1,x_2N(2^n)a_1,a_0$, $a_1,x_2N(l)a_1,y_2$ und $a,x_1 \leq\cdot a_1,y_2$ und $\dfrac{l\cdot 2^m}{2^n}\leq r$. Nun gilt allgemein:
Aus $a,x\,N(k)a,b$ folgt $u(a)-u(x)=\dfrac{u(a)-u(b)}{k}$; denn sind $x_1,\ldots,x_m$ so gewählt, daß gilt $x_1=x$, $x_m=b$ und $x_i,x_{i+1} \doteq x_{i+2}$, so gilt $u(a)-u(x_1)=u(x_1)-u(x_2)=\ldots.=u(x_{m-1})-u(b)$, also $u(a)-u(b)=k\cdot(u(a)-u(x))$. Wir erhalten daher $u(a)-u(x_1)=\dfrac{u(a)}{2^m}$, $1-u(x_2)=\dfrac{1}{2^n}$, $1-u(x_2)=\dfrac{1-u(y_2)}{l}$, also wegen $a,x_1\leq\cdot a_1,y_2$ $u(a)-u(x_1)\leq 1-u(y_2)$, also $u(a)-u(x_1)\leq\dfrac{l}{2^n}$, also $u(a)\leq\dfrac{l\cdot 2^m}{2^n}\leq r$. Ist umgekehrt $u(a)\leq\dfrac{l\cdot 2^m}{2^n}$, so gilt für $a,x_1N(2^m)a,a_0$, $a_1,x_2N(2^n)a_1,a_0$ und $a_1,x_2N(l)a_1,y_2$ auch $u(a)-u(x_1)=\dfrac{u(a)}{2^m}\leq u(a_1)-u(y_2)=\dfrac{l}{2^n}$, also $a,x_1\leq\cdot a_1,y_2$, so daß für $r\geq u(a)$ auch $r \varepsilon R(a,a_0)$ gilt.

Wir haben somit: $r \varepsilon R(a,a_0)\equiv r\geq u(a)$, also $\inf R(a,a_0)=u(a)$.

Damit ist das Theorem T1.4–3 vollständig bewiesen.

ANHANG II

Ergänzungen zum Kapitel 2

Theoreme des komparativen subjektiven Wahrscheinlichkeitsbegriffs

Im folgenden werden einige einfache Theoreme angegeben, die aus den Axiomen des komparativen Wahrscheinlichkeitsbegriffs A1 bis A5 im Abschnitt 2.1.1 folgen. Damit soll die Struktur dieses Wahrscheinlichkeitsbegriffes verdeutlicht und plausibel gemacht werden, daß A1 bis A5 genügen, um den Wahrscheinlichkeitsbegriff zu bestimmen. Daneben werden einige Theoreme bewiesen, die unten zum Beweis des Metrisierungstheorems T2.1.2–1 benötigt werden.

Aus A1 und A2 folgen mit den Definitionen D2.1.1–1 und D2.1.1–2 auf einfache Weise die Theoreme:

T II–1: $A \doteq A$

T II–2: $A \doteq B \supset B \doteq A$

T II–3: $A \doteq B \wedge B \doteq C \supset A \doteq C$

T II–4: $A <\cdot B \wedge B <\cdot C \supset A <\cdot C$

T II–5: $A \doteq B \supset \neg (A <\cdot B)$

T II–6: $A \doteq B \vee A <\cdot B \vee B <\cdot A$

T II–7: $A \leq\cdot B \equiv A <\cdot B \vee A \doteq B$

T II–8: $A \doteq B \supset (A \leq\cdot C \equiv B \leq\cdot C)$
$A \doteq B \supset (A <\cdot C \equiv B <\cdot C)$
$A \doteq B \supset (C \leq\cdot A \equiv C \leq\cdot B)$
$A \doteq B \supset (C <\cdot A \equiv C <\cdot B)$

Mit A3 bis A5 erhalten wir ferner die Theoreme:

T II–9: $A \subset B \supset A \leq\cdot B$

Beweis: Aus $A \subset B$ folgt $B = A + (B - A)$. Nach A3 gilt $\Lambda \leq\cdot B - A$, mit A4 erhält man $\Lambda + A \leq\cdot A + (B - A)$, also $A \leq\cdot B$.

T II–10: $A \leq\cdot M$

Beweis: Mit T II–9.

T II–11: $A <\cdot B \equiv A+C <\cdot B+C$

$A \doteq B \equiv A+C \doteq B+C$

Beweis: Mit D2.1.1–1 und D2.1.1–2 aus A4.

T II–12: $A \leq\cdot B \equiv \bar{B} \leq\cdot \bar{A}$

$A \doteq B \equiv \bar{A} \doteq \bar{B}$

$A <\cdot B \equiv \bar{B} <\cdot \bar{A}$

Beweis: Aus $A \leq\cdot B$ folgt $A \cdot (B+\bar{B}) \leq\cdot B \cdot (A+\bar{A})$, also $A \cdot B + A \cdot \bar{B} \leq\cdot B \cdot A + B \cdot \bar{A}$, mit A4 also $A \cdot \bar{B} \leq\cdot B \cdot \bar{A}$, und $A \cdot \bar{B} + \bar{B} \cdot \bar{A} \leq\cdot B \cdot \bar{A} + \bar{B} \cdot \bar{A}$, also $\bar{B} \cdot (A+\bar{A}) \leq\cdot \bar{A} \cdot (B+\bar{B})$, also $\bar{B} \leq\cdot \bar{A}$. Die Umkehrung folgt wegen $\bar{\bar{A}} = A$, und aus der ersten Behauptung des Theorems folgen die beiden anderen mit T II–5 und T II–6.

T II–13: $A \leq\cdot B \supset A \cup C \leq\cdot B+C$

Beweis: Nach A4 gilt $A+(C-A \cdot C) \leq\cdot B+(C-A \cdot C)$. Wegen $B+(C-A \cdot C) \subset B+(C-A \cdot C)+A \cdot C$ folgt daraus mit T II–9 $A \cup C = A+(C-A \cdot C) \leq\cdot B+(C-A \cdot C)+A \cdot C = B+C$.

T II–14: $A \doteq \Lambda \supset A \cup C \doteq C$

$A \doteq M \supset A \cdot C \doteq C$

Beweis: Die erste Behauptung ergibt sich aus T II–11 mit T II–13. Die zweite folgt daraus mit T II–12.

T II–15: $A \leq\cdot B \wedge C \leq\cdot D \supset A+C \leq\cdot B+D$

$A \doteq B \wedge C \doteq D \supset A+C \doteq B+D$

Beweis: Es sei $E = B \cdot C$, dann ist $C = C' + E$ und $B = B' + E$, und C', B' und E sind disjunkt. Dann gilt nach A4 $A + C' \leq\cdot B + C' = B' + C \leq\cdot B' + D$, also nach A4 $A + C' + E \leq\cdot B' + D + E$, also $A + C \leq\cdot B + D$. Die zweite Behauptung folgt mit D2.1.1–2 aus der ersten.

T II–16: Ist $A_1, A_2, \ldots$ eine Ereignisfolge mit $A_{i+1} \subset A_i$ $(i = 1,2,\ldots)$, so gilt $B \leq\cdot \prod_{i=1}^{\infty} A_i$, wo $B \leq\cdot A_i$ ist für alle i.

Beweis: Aus $B \leq\cdot A_i$ erhält man mit T II–12 $\bar{A}_i \leq\cdot \bar{B}$. Aus $A_{i+1} \subset A_i$ folgt $\bar{A}_i \subset \bar{A}_{i+1}$, so daß man mit A5 erhält $\bigcup_{i=1}^{\infty} \bar{A}_i \leq\cdot \bar{B}$, mit T II–12 also $B \leq\cdot \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} \bar{A}_i} = \prod_{i=1}^{\infty} A_i$.

T II–17: Bilden die $A_1, A_2, \ldots$ eine Ereignisfolge mit $A_{i+1} \subset A_i$ für alle i und $\prod_{i=1}^{\infty} A_i \doteq \wedge$, so gibt es für alle $B \cdot> \wedge$ ein n mit $A_n \leq \cdot B$.

Beweis: Wäre $A_i \cdot> B$ für alle i, so wäre nach T II–16 $\prod_{i=1}^{\infty} A_i \cdot\geq B$, also $\prod_{i=1}^{\infty} A_i \cdot> \wedge$, im Widerspruch zur Annahme.

Beweis des Theorems T2.1.2–1 (S. 53)

Zum Beweis dieses Theorems, der zuerst von B. de Finetti angegeben worden ist,[1] folgen wir in großen Zügen den Gedanken in Savage [54], S. 34ff. und zeigen zunächst, daß es zu einem ausgezeichneten Wahrscheinlichkeitsfeld $\langle M, \mathscr{X}, \leq\cdot \rangle$ höchstens eine Funktion w der in T2.1.2–1 verlangten Eigenschaften gibt. Dabei benützen wir, meist stillschweigend, die oben angegebenen Theoreme über den komparativen Wahrscheinlichkeitsbegriff. Wir zeigen zuerst, daß es nur eine Funktion w gibt, die den Bedingungen (a) bis (d) aus T2.1.2–1 genügt.

Es sei $\{M_i^n\}$ jeweils eine der nach Voraussetzung des Theorems zu n existierenden gleichförmigen Zerlegungen von M. Es sei ferner k(A,n) die größte Zahl r, für die gilt $\sum_{i=1}^{r} M_i^n \leq\cdot A$. Dann gilt $\sum_{i=1}^{k(A,n)} M_i^n \leq\cdot A <\cdot \sum_{i=1}^{k(A,n)+1} M_i^n$, also nach der Bedingung (a) von T2.1.1–1: $w(\sum_{i=1}^{k(A,n)} M_i^n) \leq w(A) < w(\sum_{i=1}^{k(A,n)+1} M_i^n)$. Nach den Bedingungen (a) bis (d) gilt aber $w(\sum_{i=1}^{n} M_i^n) = \sum_{i=1}^{n} w(M_i^n) = n \cdot w(M_i^n) = w(M) = 1$, also $w(M_i^n) = \frac{1}{n}$. Es gilt also α) $\frac{k(A,n)}{n} \leq w(A) < \frac{k(A,n)+1}{n}$. Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es nun ein N, so daß für alle $n,m \geq N$ gilt $\left|\frac{k,(A,n)}{n} - \frac{k(A,m)}{m}\right| < \varepsilon$. Denn aus $\sum_{i=1}^{k(A,m)} M_i^m \leq\cdot$

[1] Vgl. de Finetti [37], S. 101.

$A <\cdot \sum_{i=1}^{k(A,n)+1} M_i^n$ folgt $\frac{k(A,m)}{m} < \frac{k(A,n)+1}{n}$ und aus $\sum_{i=1}^{k(A,n)} M_i^n \leq\cdot A <\cdot$ $\sum_{i=1}^{k(A,m)+1} M_i^m$ folgt $\frac{k(A,n)}{n} < \frac{k(A,m)+1}{m}$, also $\frac{k(A,m)}{m} - \frac{k(A,n)}{n} < \frac{1}{n}$ und $\frac{k(A,n)}{n} - \frac{k(A,m)}{m} < \frac{1}{m}$, d.h. $\left|\frac{k(A,n)}{n} - \frac{k(A,m)}{m}\right| < \varepsilon$, wo $N \geq \frac{1}{\varepsilon}$ und $m,n \geq N$ ist.

Es existiert also der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \frac{k(A,n)}{n}$ und nach (α) gilt $\lim_{n\to\infty} \frac{k(A,n)}{n} \leq w(A) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{k(A,n)+1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{k(A,n)}{n}$, also $w(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{k(A,n)}{n}$. $w(A)$ ist also durch die Bedingungen (a) bis (d) eindeutig festgelegt.

Wir zeigen nun, daß diese Funktion $w(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{k(A,n)}{n}$ die Bedingungen (a) bis (d) auch tatsächlich erfüllt, d.h. daß $w(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{k(A,n)}{n}$ eine Funktion ist, wie sie in T2.1.2–1 als existierend behauptet wird.

Zu d: $w(M) = \lim_{n\to\infty} \frac{k(M,n)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n} = 1$. Ferner gilt $w(\wedge) = \lim_{n\to\infty} \frac{k(\wedge,n)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{0}{n} = 0$. Es ist $0 \leq k(A,n) \leq n$, d.h. $0 \leq \frac{k(A,n)}{n} \leq 1$ für alle n, also $0 \leq w(A) \leq 1$.

Zu b: Ist $A \cdot B = \wedge$, so gilt für alle n: $k(A,n) + k(B,n) \leq k(A+B,n) \leq k(A,n) + k(B,n) + 2$. Denn es ist $\sum_{i=1}^{k(A,n)} M_i^n \leq\cdot A$, $\sum_{i=1}^{k(B,n)} M_i^n \doteq \sum_{i=k(A,n)+1}^{k(A,n)+k(B,n)} M_i^n$ $\leq\cdot B$, also nach T II–15 $\sum_{i=1}^{k(A,n)+k(n,B)} M_i^n \leq\cdot A+B$, also $k(A,n)+k(B,n)$ $\leq k(A+B,n)$. In entsprechender Weise erhält man $k(A+B,n) \leq k(A,n)$ $+(B,n)+2$. Es gilt also $\lim_{n\to\infty} \frac{k(A+B,n)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{k(A,n)+k(B,n)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{k(A,n)}{n} + \lim_{n\to\infty} \frac{k(B,n)}{n}$, d.h. $w(A+B) = w(A) + w(B)$.

Zu a) Nach Definition von $w(A)$ gilt (β): $A \doteq B \supset w(A) = w(B)$ trivialerweise. Ist $A \doteq \wedge$ oder $B \doteq M$, so folgt $w(A) \leq w(B) \equiv A \leq\cdot B$ aus (d).

Wir können also im folgenden annehmen $\neg A \doteq \wedge$ und $\neg B \doteq M$. Ist wieder $A <\cdot B$, so gibt es, da wir voraussetzen, daß $\langle M, \mathscr{X}, \leq\cdot \rangle$ ein ausgezeichnetes Feld ist, ein r und ein n, so daß $k(B,n) = k(A,n) + 1$ ist: Es gibt zunächst ein r und ein n mit $A <\cdot \sum_{i=1}^{r} M_i^n \leq\cdot B$. Wir wählen das kleinste n, für das es ein solches r gibt, und zu diesem das größte r, so daß gilt $A <\cdot \sum_{i=1}^{r} M_i^n \leq\cdot B <\cdot \sum_{i=1}^{r+1} M_i^n$, also $r = k(B,n)$ und $r > 0$. Wäre nun $k(B,n) \neq k(A,n) + 1$, also $k(A,n) \neq r-1$, also $A <\cdot \sum_{i=1}^{r-1} M_i^n <\cdot \sum_{i=1}^{r} M_i^n$ $\leq\cdot B \leq\cdot \sum_{i=1}^{r+1} M_i^n$, so würde wegen $\sum_{i=1}^{r-1} M_i^n <\cdot \sum_{i=1}^{r} M^{n-1} <\cdot \sum_{i=1}^{r} M_i^n$ auch gelten $A <\cdot \sum_{i=1}^{r} M_i^{n-1} \leq\cdot B$, im Widerspruch zu unserer Wahl von n.

Ist aber $k(B,n) = k(A,n) + 1$, so gibt es auch ein $\varepsilon \left(= \frac{1}{n}\right) > 0$, so daß es für alle N ein n' (der Gestalt $2^r \cdot n) \geq N$ gibt mit $\frac{k(B,n')}{n} - \frac{k(A,n')}{n} \geq \varepsilon$. Denn es ist $\sum_{i=1}^{2^r} M_i^{2^r \cdot n} \doteq M_i^n$ – andernfalls wäre nach T II–15 $M \doteq \sum_{i=1}^{2^r \cdot n} M_i^{2^r \cdot n}$ $\lessgtr\cdot \sum_{i=1}^{n} M_i^n \doteq M$ – so daß $k(B, 2^r \cdot n) = k(A, 2^r \cdot n) + 2^r$ ist für $r \geq 0$. Es ist also $\frac{k(B,2^r \cdot n)}{2^r \cdot n} - \frac{k(A,2^r \cdot n)}{2^r \cdot n} = \frac{1}{n} = \varepsilon$, und daher $\lim_{n \to \infty} \frac{k(A,n)}{n} < \lim_{n \to \infty} \frac{k(B,n)}{n}$, also $w(A) < w(B)$. Aus $A <\cdot B \supset w(A) < w(B)$ folgt aber durch Kontraposition $w(A) \leq w(B) \supset A \leq\cdot B$, mit (β) also die Bedingung (a) von T2.1.2–1.

Zu c) Es gilt (γ): Ist $A_1, A_2, \ldots$ eine Ereignisfolge mit $A_{i+1} \subset A_i$ für alle $i = 1, 2, \ldots$ und $\prod_{i=1}^{\infty} A_i = \wedge$, so ist $\lim_{i \to \infty} w(A_i) = 0$. Denn zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein k mit $\frac{1}{k} \leq \varepsilon$ und eine k-fache gleichförmige Zerlegung $\{M_i^k\}$, für die nach (d), (b) und (β) gilt $w(M_i^k) = \frac{1}{k}$. Zu jedem M_i^k gibt es nach T II–17 ein n mit $A_n \leq\cdot M_i^k$, so daß nach (a) für alle $m \geq n$ gilt $w(A_m) \leq \varepsilon$, also $\lim\limits_{i\to\infty} w(A_i)=0$. Setzt man $D_n=\sum\limits_{i\geq n} B_i$, so gilt $D_{n+1}\subset D_n$ und $\prod\limits_n D_n=\Lambda$, also nach ($\gamma$) $\lim\limits_{n\to\infty} w(D_n)=0$. Es ist nun nach (b) $w(\sum\limits_{i=1}^{\infty} B_i)=w(B_1)+\ldots$ $+w(B_n)+w(D_{n+1})=\sum\limits_{i=1}^{n} w(B_i)+w(D_{n+1})$. Also ist $\sum\limits_{i=1}^{\infty} w(B_i)=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} w(B_i)$ $=\lim\limits_{n\to\infty} w(\sum\limits_{i=1}^{\infty} B_i)-w(D_{n+1}))=w(\sum\limits_{i=1}^{\infty} B_i)-\lim\limits_{n\to\infty} w(D_{n+1})=w(\sum\limits_{i=1}^{\infty} B_i)$.

Damit ist der Beweis von T2.1.2–1 beendet.

Drei Theoreme des quantitativen subjektiven Wahrscheinlichkeitsbegriffes

T II–18: Ist $\langle M,\mathscr{X},\leq\cdot\rangle$ ein ausgezeichnetes Wahrscheinlichkeitsfeld und ist w die (nach T2.1.2–1) zugehörige quantitative Wahrscheinlichkeitsbewertung auf $\mathscr{X}$, so gibt es zu jeder Menge $A\varepsilon\mathscr{X}$ und jeder Zahl ρ mit $0\leq\rho\leq 1$ eine Menge A', für die gilt: $A'\subset A$ und $w(A')=\rho\cdot w(A)$.

Zum Beweis übernehmen wir die Grundgedanken von L. Savage in [54], S. 35ff.:[2]

1. Jede Menge $A\cdot\!>\Lambda$ kann man in zwei Teilmengen A_1,A_2 mit $A_1\cdot\!>\Lambda$ und $A_2\cdot\!>\Lambda$ zerlegen. Denn ist $\{M_i^n\}$ eine Zerlegung von M mit $M_i^n<\!\cdot A$, so setzen wir $M_i^{n\prime}:=M_i^n\cdot A$. Dann gilt $M_i^{n\prime}<\!\cdot A$ und $M_i^{n\prime}\subset A$. Wegen $\sum\limits_{i=1}^{n} M_i^{n\prime}=A$ ist auch $M_i^{n\prime}\cdot\!>\Lambda$ für mindestens ein i aus $1,\ldots,n$. Für ein solches i setzen wir $A_1=M_i^{n\prime}$ und $A_2=A-A_1$.

2. Es gibt eine Folge von Zerlegungen von A in drei Mengen B_n, C_n und D_n, so daß gilt:

a) $B_n\leq\cdot C_n+D_n$ und $C_n\leq\cdot B_n+D_n$

b) $B_{n-1}\subset B_n$, $C_{n-1}\subset C_n$ und $D_n\subset D_{n-1}$ für $n>1$

c) $D_{n-1}-D_n\cdot\!\geq D_n$ für $n>1$

d) $B_n\cdot\!>\Lambda$, $C_n\cdot\!>\Lambda$ und $D_n\cdot\!>\Lambda$.

Das zeigen wir durch Induktion nach n. Für $n=1$ gibt es nach (1) eine Zerlegung von A in A_1, A_2 mit $A_1\cdot\!>\Lambda$, $A_2\cdot\!>A$. Es sei $A_1\leq\cdot A_2$.

---

[2] Für die folgende Darstellung war mir eine Ausarbeitung der von Savage in [54] meist nur sehr dürftig angedeuteten Beweise sehr hilfreich, die Herr A. Breitkopf 1966 für ein Seminar von Professor Britzelmayr angefertigt hat.

Wegen $A_2 \cdot\!> \wedge$ gibt es nach (1) wiederum Mengen $A_{21} \cdot\!> \wedge$, $A_{22} \cdot\!> \wedge$ mit $A_{21}+A_{22}=A_2$. Ist $A_{21} \leq\cdot A_{22}$, so setzen wir $B_1=A_1$, $C_1=A_{21}$, $D_1=A_{22}$. Dann sind (a) und (d) erfüllt. Ist nun die Behauptung für n bewiesen, so gilt sie auch für $n+1$: D_n läßt sich nach (1) in $D_{n1} \cdot\!> \wedge$ und $D_{n2} \cdot\!> \wedge$ zerlegen. Wir nehmen an, es sei $D_{n1} \leq\cdot D_{n2}$, und setzen $D_{n+1}=D_{n1}$. Dann ist $D_{n+1} \cdot\!> \wedge$ (d), $D_{n+1} \subset D_n$ (b) und $D_n - D_{n+1} = D_{n2} \cdot\!\geq D_{n+1}$ (c).
Ist nun $B_n + D_{n2} \leq\cdot C_n + D_{n+1}$, so setzen wir $B_{n+1} = B_n + D_{n2}$ und $C_{n+1} = C_n$. Dann gilt $B_{n+1} + D_{n+1} = B_n + D_n \cdot\!\geq C_n = C_{n+1}$ (a) und $C_{n+1} + D_{n+1} = C_n + D_{n+1} \cdot\!\geq B_{n+1}$ (a), nach Induktionsvoraussetzung. Und es gilt $B_n + C_n + D_n = A$, $B_{n+1} \cdot\!> \wedge$, $C_{n+1} \cdot\!> \wedge$ (d), und $B_n \subset B_{n+1}$, $C_n \subset C_{n+1}$ (c). Ist hingegen $B_n + D_{n2} \cdot\!> C_n + D_{n+1}$, so gibt es eine Zerlegung $\{M_i^n\}$ mit $M_i^n <\cdot D_{n+1}$. Wir setzen $M_i^{n'} = D_{n2} \cdot M_i^n$. $\{M_i^{n'}\}$ ist dann eine Zerlegung von D_{n2} in Mengen $M_i^{n'}$ mit $M_i^{n'} <\cdot D_{n+1}$. Es gebe m solche Mengen $M_i^{n'}$ mit $M_i^{n'} \cdot\!> \wedge$. Gilt nun für alle $M_i^{n'}$: $B_n + M_i^{n'} \cdot\!> A - (B_n + M_i^{n'})$, so gilt $B_n + D_{n+1} \cdot\!> A - (B_n + D_{n+1}) = C_n + D_{n2}$. Dann setzen wir $B_{n+1} = B_n$ und $C_{n+1} = C_n + D_{n2}$, so daß wir erhalten: $B_{n+1} + D_{n+1} \cdot\!\geq C_{n+1}$ (a) und nach Induktionsvoraussetzung $C_{n+1} + D_{n+1} = C_n + D_n \cdot\!\geq B_n = B_{n+1}$ (a). Die übrigen Beziehungen nach (b) und (d) sind ebenfalls nach Induktionsvoraussetzung erfüllt. Gibt es hingegen ein $M_i^{n'}$ mit $B_n + M_i^{n'} \leq\cdot A - (B_n + M_i^{n'})$,so sei l die größte Zahl, für die gilt $B_n + M_{i_1}^{n'} + \ldots + M_{i_l}^{n'} \leq\cdot A - (B_n + M_{i_1}^{n'} + \ldots + M_{i_l}^{n'})$, wobei die Indices $i_1, \ldots, i_l$ zu den m Mengen $M_i^{n'} \cdot\!> \wedge$ gehören. Wir setzen dann $B_{n+1} = B_n + M_{i_1}^{n'} + \ldots + M_{i_l}^{n'}$ und $C_{n+1} = A - (B_{n+1} + D_{n+1}) = C_n + M_{i_{l+1}}^{n'} + \ldots + M_{i_m}^{n'}$. Es ist $l < m$ nach Voraussetzung, denn sonst wäre $B_n + D_{n2} \leq\cdot A - (B_n + D_{n2}) = C_n + D_{n+1}$. Es gilt nun $C_{n+1} + D_{n+1} = A - B_{n+1} \cdot\!\geq B_{n+1}$ (a), $B_{n+1} + D_{n+1} \cdot\!\geq C_{n+1}$ (a). Andernfalls würde wegen $C_{n+1} = A - (B_{n+1} + D_{n+1})$ und da es wegen $l < m$ ein k mit $\neg M_{i_k}^{n'} \subset B_{n+1}$ gibt, gelten: $B_{n+1} + M_{i_k}^{n'} \leq\cdot B_{n+1} + D_{n+1} <\cdot A - (B_{n+1} + D_{n+1}) \leq\cdot A - (B_{n+1} + M_{i_k}^{n'})$ – im Widerspruch zur Definition von l und B_{n+1}. – Die übrigen Beziehungen nach (b) und (d) gelten auch in diesem Fall nach Induktionsvoraussetzung trivialerweise.

3. Für jede Menge $E \cdot\!> \wedge$ gibt es ein k, so daß $D_k <\cdot E$. Denn es gibt eine Zerlegung $\{M_i^n\}$ mit $M_i^n <\cdot E$. Ist k das kleinste l mit $2^{l-1} > n$, so ist $D_k <\cdot E$. Andernfalls wäre $D_k \cdot\!> M_i^n$. Es gilt nun für alle $n \geq 1$ $D_n = D_{n+1} + D_n - D_{n+1}$ und nach (2) $D_n - D_{n+1} \cdot\!\geq D_{n+1}$. Wegen $D_{n+1} \cdot\!\geq D_{n+1}$ folgt aus $D_k \cdot\!> M_1^n$ daher $D_{k-1} \cdot\!> M_1^n + M_2^n$, und allgemein $D_{k-l} \cdot\!> \sum_{i=1}^{2^l} M_i^n$, also $D_1 \cdot\!> \sum_{i=1}^{2^{k-1}} M_i^n = \sum_{i=1}^{n} M_i^n = M$, im Widerspruch zu A3.

4. Setzt man $A_1 = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i$ und $A_2 = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} C_i \cup \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} D_i$, so gilt $A = A_1 + A_2$ und $A_1 \doteq A_2$. Jede Menge $A \cdot\!> \wedge$ läßt sich also in zwei Teilmengen A_1, A_2 mit $A_1 \doteq A_2$ zerlegen. – Es ist klar, daß gilt $A = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i \cup \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} C_i \cup \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} D_i$. Denn jedes $x \varepsilon A$ gehört nach (2) für jedes n zu einem B_n (dann zu $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i$) oder zu einem C_n (dann zu $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} C_i$) oder zu einem D_n. Im letzteren Fall gehört es zu D_{n+1} oder zu B_{n+1} oder C_{n+1}, usf. Es gehört also x zu $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} D_i$ oder zu $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i$ oder $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} C_i$.

Wäre z. B. $A_1 <\!\cdot\, A_2$, so gäbe es eine Zahl $0 < \frac{r}{n} < w(A_2) - w(A_1)$, also $\sum\limits_{i=1}^{r} M_i^n \cdot\!> \wedge$ und nach (3) ein k mit $D_k <\!\cdot\, \sum\limits_{i=1}^{r} M_i^n$, so daß gilt $w(D_k) + w(A_1) < w(A_2)$, also $A_1 \cup D_k <\!\cdot\, A_2$. Nun gilt aber nach (2a) $C_n \leq\!\cdot\, B_n + D_n$, also für $n \geq k$ nach (2b): $C_n \leq B_n \cup D_k$, also wegen (2b) nach A5 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} C_i \leq\!\cdot\, \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i \cup D_k$. Nun ist $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} D_i \doteq \wedge$; andernfalls gäbe es nach (3) ein D_k' mit $D_k' <\!\cdot\, \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} D_i$. Also gilt $A_2 = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} C_i \cup \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} D_i \leq\!\cdot\, A_1 \cup D_k$ – im Widerspruch zur Annahme.

5. Für jedes n läßt sich jede Menge $A \cdot\!> \wedge$ in 2^n Mengen A_i^{2n} mit $A_i^{2n} = A_k^{2n}$, $A_i^{2n} \cdot A_k^{2n} = \wedge$ für $i \neq k$ $(i,k = 1, \ldots, 2^n)$ zerlegen. – Das folgt direkt aus der wiederholten Anwendung von (4).

6. Ist $0 \leq \rho \leq 1$ und $A \cdot\!> \wedge$, so gibt es eine Teilmenge $A' \subset A$ mit $w(A') = \rho \cdot w(A)$. – ρ läßt sich darstellen durch eine Summe $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{n(i)}{2^i}$ mit $n(i) = 0$ oder $= 1$. Setzt man $A' = \sum\limits_{n(i)=1} A_{r(i)}^{2i}$, wobei r(i) eine Zahl aus $1, \ldots, 2^i$ ist, für die $A_{r(i)}^{2i}$ nicht in $\sum\limits_{n(k)=1}^{i-1} A_{n(k)}^{2k}$ enthalten ist, so gilt

$$w(A') = \sum_{n(i)=1} w(A_{r(i)}^{2i}) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{n(i)}{2^i} \cdot w(A) = \rho \cdot w(A), \text{ q.e.d.}$$

T II–19: $w(\bar{E}_1 \cdot \ldots \cdot \bar{E}_r \cdot E_{r+1}) = w(E_{r+1}) + \sum_{k=1}^{r} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq r} (-1)^k w(E_{i_1} \cdot \ldots \cdot E_{i_k} \cdot E_{r+1})$.

Dabei läuft die 2. Summe über alle $\binom{r}{k}$ Auswahlen von k Indices aus $1, \ldots, r$.

Beweis:[3] Für $r = 1$ lautet der Satz: $w(\bar{E}_1 \cdot E_2) = w(E_2) - w(E_1 \cdot E_2)$, und das erhält man aus $E_2 = E_2 \cdot \bar{E}_1 + E_2 \cdot E_1$. Ist die Behauptung für r bewiesen, so gilt sie auch für $r+1$: Denn wie im Fall $r = 1$ gilt wieder $w(E_{i_1} \cdot \ldots \cdot E_{i_k} \cdot \bar{E}_r \cdot E_{r+1}) = w(E_{i_1} \cdot \ldots \cdot E_{i_k} \cdot E_{r+1}) - w(E_{i_1} \cdot \ldots \cdot E_{i_k} \cdot E_r \cdot E_{r+1})$, aus der Induktionsvoraussetzung $w(\bar{E}_1 \cdot \ldots \cdot \bar{E}_{r-1} \cdot E_r) = w(E_r) + \sum_{k=1}^{r-1} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq r-1} (-1)^k w(E_{i_1} \cdot \ldots \cdot E_{i_k} \cdot E_r)$ folgt also, wenn wir $\bar{E}_r \cdot E_{r+1}$ für E_r setzen:

$$w(\bar{E}_1 \cdot \ldots \cdot \bar{E}_r \cdot E_{r+1}) = w(\bar{E}_r \cdot E_{r+1}) + \sum_{k=1}^{r-1} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq r-1} (-1)^k$$

$$w(E_{i_1} \cdot \ldots E_{i_k} \cdot \bar{E}_r \cdot E_{r+1}) = w(E_{r+1}) - w(E_r \cdot E_{r+1}) + \sum_{k=1}^{r-1} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq r-1}$$

$$(-1)^k w(E_{i_1} \cdot \ldots E_{i_k} \cdot E_{r+1}) + \sum_{k=1}^{r-1} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq r-1} (-1)^{k+1} w(E_{i_1} \cdot \ldots \cdot$$

$$\cdot E_{i_k} \cdot E_r \cdot E_{r+1}) = w(E_{r+1}) + \sum_{k=1}^{r} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq r} (-1)^k w(E_{i_1} \cdot \ldots \cdot E_{i_k} \cdot E_{r+1}),$$

denn in der voraufgehenden Summe sind nur die Glieder mit $i_k = r$ besonders aufgeführt.

T II–20: Ist E_n^k das Ereignis, daß von den n Ereignissen $E_1, \ldots, E_n$ genau k eintreten, so gilt: $w(E_n^k) = \sum_{l \geq k} (-1)^{l-k} \binom{l}{k} S_l$, mit $S_0 = 1$ und $S_l = \sum_{i_1 < \ldots < i_l} w(E_{i_1} \cdot \ldots \cdot E_{i_l})$ für $l > 0$.

Beweis:[4] Da $E_{i_1} \cdot \ldots \cdot E_{i_l}$ sich als Vereinigung der $E_{i_1} \cdot \ldots \cdot E_{i_k} \cdot \bar{E}_{i_{k+1}} \cdot \ldots \cdot \bar{E}_{i_n}$ darstellt mit $k \geq l$, und da es für $l \geq 1$ $\binom{k}{l}$ Auswahlen von l Indices aus den k Indices $i_1, \ldots, i_k$ gibt, kommt in S_l der Summand $w(E_{i_1} \cdot \ldots \cdot E_{i_k} \cdot \bar{E}_{i_{k+1}} \cdot \ldots \cdot \bar{E}_{i_n})$ genau $\binom{k}{l}$ mal vor. Es gilt also $S_l = \sum_{k \geq l} \binom{k}{l} \sum_{i_1 < \ldots < i_k} w(E_{i_1} \cdot \ldots \cdot E_{i_k} \cdot \bar{E}_{i_{k+1}} \cdot \ldots \cdot \bar{E}_{i_n})$. Diese For-

[3] Vgl. dazu auch Richter [66], S. 100.
[4] Vgl. dazu auch Richter [66], S. 102.

mel gilt offenbar wegen $S_0=1$ auch für $l=0$, da dann rechts die Summe aller möglichen Ereignisfolgen steht. Es ist nun $w(E_n^k)=\sum\limits_{i_1<\ldots<i_k} w(E_{i_1}\cdot\ldots\cdot E_{i_k}\cdot\bar{E}_{i_{k+1}}\cdot\ldots\cdot\bar{E}_{i_n})$, also $S_l=\sum\limits_{k\geq l}\binom{k}{l}\cdot w(E_n^k)$. Es gilt also $\sum\limits_{l\geq 0} x^l\cdot S_l=\sum\limits_{l\geq 0}\sum\limits_{k\geq l}\binom{k}{l}\cdot x^l\cdot w(E_n^k)=\sum\limits_{k\geq 0} w(E_n^k)\cdot\sum\limits_{l\leq k}\binom{k}{l}\cdot x^l$, also $\sum\limits_{l\geq 0} x^l\cdot S_l=\sum\limits_{k\geq 0} w(E_n^k)\cdot(1+x)^k$. Setzt man für x nun $y-1$ ein, so erhält man $\sum\limits_{k\geq 0} w(E_n^k)\cdot y^k=\sum\limits_{l\geq 0} S_l(y-1)^l$, und daraus durch Koeffizientenvergleich die Behauptung.

Zum Beweis des Theorems T2.1.5–3 (S. 78)

Wir können das Theorem T2.1.5–3 hier nicht vollständig und exakt beweisen, da dazu tieferliegende mathematische Sätze nötig sind, die wir nicht voraussetzen können. Es soll aber jedenfalls angedeutet werden, wie man zu den Behauptungen des Satzes gelangt. Wir folgen dabei der Darstellung von de Finetti in [37], S. 124ff.

A) $\lim\limits_{n\to\infty} w(\{x: |Y_n^{A*}(x)-Y^{A*}(x)|\geq\varepsilon\})=0$ (Schwaches Gesetz der großen Zahlen)

Es gilt $Y_{n+q}^{A*}-Y_n^{A*}=\frac{1}{n+q}(X_1^{A*}+\ldots+X_{n+q}^{A*})-\frac{1}{n}(X_1^{A*}+\ldots+X_n^{A*})=$

$$=\frac{1}{n+q}(X_{n+1}^{A*}+\ldots+X_{n+q}^{A*})-\frac{q}{n(n+q)}(X_1^{A*}+\ldots+X_n^{A*}).$$

Es ist dann, wie man leicht verifiziert[5], für $c_i=\frac{q}{n}$ bei $i\leq n$ und $c_i=1$ bei $i>n$:

$$\mathscr{E}((Y_{n+q}^{A*}-Y_n^{A*})^2)=\mathscr{E}\left(\frac{1}{(n+q)^2}\sum_{i,j=1}^{n+q}c_i\cdot c_j(X_i^{A*}\cdot X_j^{A*})\right)=\frac{1}{(n+q)^2}\sum_{i,j=1}^{n+q}c_i\cdot c_j\cdot w(A_i\cdot A_j)=\frac{q}{n(n+q)}\cdot(w(A_i)-w(A_i\cdot A_j)) \text{ für } i\neq j.$$

Mit der Tschebyscheffschen Ungleichung[6] erhält man damit:

$$w(\{x:\ |Y_n^{A*}(x)-Y_{n+q}^{A*}(x)|\geq\varepsilon\})\leq\frac{q}{n(n+q)}(w(A_i)-w(A_i\cdot A_j))\cdot\frac{1}{\varepsilon^2} \text{ für}$$

[5] Es gilt $\mathscr{E}(c\cdot a)=c\cdot\mathscr{E}(a)$ und $\mathscr{E}(a+b)=\mathscr{E}(a)+\mathscr{E}(b)$, vgl. Richter [66], S. 241.

[6] Vgl. Richter [66], S. 255.

beliebige $\varepsilon > 0$. Daraus folgt, daß es eine Funktion $Y^{A*}(x)$ gibt, so daß die $Y_n^{A*}(x)$ *nach* w-*Maß* gegen $Y^{A*}(x)$ konvergieren, d.h. es gilt die Behauptung (A).

B) $w(\{x: \lim_{n\to\infty} Y_n^{A*}(x) = Y^{A*}(x)\}) = 1$ (Starkes Gesetz der großen Zahlen)

Die Wahrscheinlichkeit, daß $\lim_{n\to\infty} Y^{A*}(x)$ existiert, ist die Wahrscheinlichkeit, daß gilt $\prod_{i=1}^{\infty} (|Y_s^{A*} - Y_{s+i}^{A*}| < \varepsilon)$ für beliebige $\varepsilon > 0$ und hinreichend große s. Diese Wahrscheinlichkeit hat aber wegen $w\left(\prod_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n\to\infty} w\left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right)$ den Wert $\lim_{n\to\infty} w(\{x: \prod_{i=1}^{n} | Y_s^{A*}(x) - Y_{s+i}^{A*}(x)| < \varepsilon\})$, und wir haben oben gesehen, daß dieser Wert 1 ist.

C) Daß die $\Phi_n^{A*}(z)$ gegen eine Verteilungsfunktion $\Phi^{A*}(z)$ konvergieren, ergibt sich direkt aus (A): Aus $w(\{x: |Y_s^{A*}(x) - Y_t^{A*}(x)| \geq \varepsilon\}) \leq \delta$ folgt $w(\{x: Y_s^{A*}(x) \leq z \wedge Y_t^{A*}(x) > z + \varepsilon\}) \leq \delta$, also $\Phi_s^{A*}(z) \leq \Phi_t^{A*}(z+\varepsilon) + \delta$, wegen $w(A \cdot \bar{B}) = w(A) - w(A \cdot B)$. In entsprechender Weise erhält man auch $\Phi_s^{A*} \geq \Phi_t^{A*}(z-\varepsilon) - \delta$. Da ε, δ beliebig klein sein können, folgt also, daß es eine Verteilungsfunktion $\Phi^{A*}(z)$ gibt, für die an allen Stetigkeitsstellen z gilt $\Phi^{A*}(z) = \lim_{n\to\infty} \Phi_n^{A*}(z)$.

Es gilt dann auch $\Phi^{A*}(z) = \lim_{n\to\infty} \Phi_n^{A*}(z) = \lim_{n\to\infty} w(\{x: Y_n^{A*}(x) \leq z\}) = w(\{x: \lim_{n\to\infty} Y_n^{A*}(x) \leq z\}) = w(\{x: Y^{A*}(x) \leq z\})$, d.h. $\Phi^{A*}(z)$ ist die Verteilungsfunktion zu $Y^{A*}(x)$.

D) $w_k = w(A_{i_1} \cdot \ldots \cdot A_{i_k}) = \int_0^1 z^k d\Phi^{A*}(z)$. Da $\Phi_n^{A*}(z)$ die Verteilungsfunktion von $Y_n^{A*}(x)$ ist, gilt $\int_0^1 z^k \, d\Phi_n^{A*}(z) = \mathscr{E}((Y_n^{A*})^k)$. Nun ist $(Y_n^{A*})^k = \frac{1}{n^k}(X_1^{A*} + \ldots + X_n^{A*})^k = \frac{1}{n^k} \sum_{i_1,\ldots,i_n} \frac{k!}{i_1! \ldots i_n!} (X_1^{A*})^{i_1} \cdot \ldots \cdot (X_n^{A*})^{i_n}$, mit $i_1 + \ldots + i_n = k$. Unter den n^k Summanden überwiegen mit wachsendem n die mit $i_l \leq 1$ $(l = 1, \ldots, k)$, von denen es $n(n-1)\ldots(n-k+1)$ Stück gibt. Für große n gilt näherungsweise $n(n-1)\ldots(n-k+1) = n^k$. Wir erhalten also $\int\limits_0^1 z^k d\Phi^{A*}(z) = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 z^k d\,\Phi_n{}^{A*}(z) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathscr{E}((Y^{A*})^k) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^k}$ $\sum\limits_{i_1,\ldots,i_n} \frac{k!}{i_1!\ldots i_n!} w(X_{i_1}^{A*}\cdot\ldots\cdot X_{i_k}^{A*}) = w_k$, für diejenigen i_l mit $i_l \geq 1$.

Für einen exakteren Beweis der Behauptung kann man zeigen, daß die charakteristischen Funktionen $\varphi_n(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{itz}\, d\Phi_n^{A*}(z)$ der $\Phi_n^{A*}(z)$ für jedes t gegen die (wegen $0 \leq w_k \leq 1$) bei $t=0$ stetige Funktion $\varphi(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} \cdot w_k$ konvergieren. Daraus folgt nach einem Satz der Wahrscheinlichkeitstheorie[7], daß die $\Phi_n^{A*}(z)$ im Sinne der Verteilungskonvergenz gegen die zu $\varphi(t)$ gehörige Verteilungsfunktion $\Phi^{A*}(z)$ konvergieren. Für $\varphi(t)$ als charakteristische Funktion von $\Phi^{A*}(z)$ gilt $\varphi(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!}. \int\limits_0^1 z^k\, d\Phi^{A*}(z)$, so daß man die Behauptung $w_k = \int\limits_0^1 z^k$ $d\Phi^{A*}(z)$ erhält. – Nach T II–19 gilt: $\Phi_n^{A*}(z) = w(\{x\colon Y_n^{A*}(x) \leq z\}) =$ $= \sum\limits_{r=0}^{n} w(A_n^r) \cdot D\left(z - \frac{r}{n}\right) = \sum\limits_{r=0}^{n} \binom{n}{r} \sum\limits_{m\geq 0} (-1)^m \binom{n-r}{m}\; w_{r+m} \cdot D\left(z - \frac{r}{n}\right)$, also $\varphi_n(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{itz}\, d\Phi_n{}^{A*}(z) = \sum\limits_{k\geq 0} \binom{n}{k}(l^{\frac{it}{n}} - 1)^k \cdot w_k$. Es läßt sich zeigen, daß es für jedes $\varepsilon > 0$ eine Zahl N(t) in Abhängigkeit von t gibt, so daß für alle $n \geq N(t)$ gilt

$\left|\sum\limits_{k\geq 0} \binom{n}{k}(e^{\frac{it}{n}} - 1)^k . w_k - \sum\limits_{k\geq 0} \frac{(it)^k}{k!} \cdot w_k\right| < \varepsilon$. Setzt man $A_{k,n} = \binom{n}{k} \cdot (e^{\frac{it}{n}} - 1)^k \cdot$ w_k und $B_k = \frac{(it)^k}{k!} \cdot w_k$, so gilt: $\left|\sum\limits_{k\geq 0} B_k - \sum\limits_{k\geq 0} A_k\right| \leq \left|\sum\limits_{k\geq K} B_k\right| +$ $+ \left|\sum\limits_{k\geq K} A_k\right| + \left|\sum\limits_{k\geq 0}^{k} (A_k - B_k)\right|$, und alle drei Glieder werden für hinreichend großes K und n kleiner als $\frac{\varepsilon}{3}$.

[7] Vgl. Richter [66], S. 337, Theorem 7.10.

Beweis des Theorems T2.3.2–1 (S. 131)[8]

Die Funktion c erfülle C1 bis C12. Nach C8 und C9 ist $c(P_k(a)/E)$ unabhängig von der Wahl der GK und PK, und nach C10 auch von der Zahl N, so daß $c(P_k(a)/E)$ nur abhängt von der Zahl n der GK in E und den Zahlen n_l der GK, denen in E das Prädikat P_l zugesprochen wird. Nach C12 hängt $c(P_k(a)/E)$ ferner nur ab von den Zahlen n und n_k, während es auf die n_l mit $l \neq k$ nicht ankommt. Es gibt also eine zweistellige Funktion G_K, so daß gilt

α) $c(P_k(a)/E) = G_K(n_{k,n})$.

Wegen $\Vdash P_1(a) \vee \ldots \vee P_K(a)$ gilt $\sum_{k=1}^{K} c(P_k(a)/E) = 1$, also nach (α):

β) $\sum_{k=1}^{K} G_K(n_k,n) = 1$.

Es gilt daher

γ1) $G_K(n,n) + (K-1) \cdot G_K(0,n) = 1$ (nach (β) bei $n_1 = n$; $n_k = 0$ für $k = 2, \ldots, K$)

γ2) $G_K(n+1, n+1) = 1 - (K-1) \cdot G_K(0,n+1)$ (nach (γ1)).

γ3) $G_K(1,1) = 1 - (K-1) \cdot G_K(0,1)$ (nach (γ1)).

γ4) $G_K(n,n+1) + G_K(1,n+1) + (K-2)G_K(0,n+1) = 1$ (nach (β) für $n_1 = n$, $n_2 = 1$, $n_k = 0$ für $k = 3, \ldots, K$).

Es gilt nun nach C6, wenn $E^n_{n_k,n_l}$ ein Satz der Gestalt $\bigwedge_{j=1}^{n} P_{k_j}(a_{l_j})$ ist, in dem die GK a und b nicht vorkommen, und in dem die PK P_k n_k-mal und die PK P_l n_l-mal vorkommt, $c(P_k(a) \wedge P_l(b)/E^n_{n_k,n_l}) = c(P_k(a)/E^{n+1}_{n_k,n_l+1}) \cdot c(P_l(b)/E^n_{n_k,n_l}) = G_K(n_k, n+1) \cdot G_K(n_l,n)$. Andererseits gilt ebenso $c(P_k(a) \wedge P_l(b)/E^n_{n_k,n_l}) = c(P_l(b)/E^{n+1}_{n_k+1,n_l}) \cdot c(P_k(a)/E^n_{n_k,n_l}) = G_K(n_l, n+1) \cdot G_K(n_k,n)$. Setzt man k für n_k und l für n_l, so daß gilt $k + l \leq n$, so gilt also

δ1) $\dfrac{G_K(k,n+1)}{G_K(l,n+1)} = \dfrac{G_K(k,n)}{G_K(l,n)}$.

[8] Ein Beweis dieses Satzes ist von Carnap in [52], S. 14ff., von Carnap und Stegmüller in [59], S. 242ff. und von J. Kemeny in [63], S. 725ff. angegeben worden.

Ist $K=2$, so ist wegen $k+l=n$ 1 kein von n und k unabhängiger Parameter. Daher gilt:

$$\delta 2)\ G_K(k,n+1)=G_K(0,n+1)\cdot\frac{G_K(k,n)}{G_K(0,n)}\ (\text{aus } (\delta 1) \text{ mit } l=0)$$

zunächst nur für $K>2$ allgemein. (Für $K=2$ erhalten wir nur $G_2(n,n+1)=G_2(0,n+1)\cdot\frac{G_2(n,n)}{G_2(0,n)}$.) – Um nun die Gleichung ($\delta 2$) auch für $K=2$ zu erhalten, benutzt man das Axiom C12b. Nach ($\delta 1$) gilt $\frac{G_2(m,n+1)}{G_2(n-m,n+1)}=\frac{G_2(m,n)}{G_2(n-m,n)}$. Ist C12b erfüllt, so hat $c(P_k(a)/E^n_{n_k})=G_2(n_k,n)$ die Gestalt $n_k\cdot c_n+d_n$ und es gilt:

$(c_{n+1}\cdot n_k+d_{n+1})\cdot(c_n(n-n_k)+d_n)=(c_{n+1}(n-n_k)+d_{n+1})\cdot(c_n\cdot n_k+d_n)$, also $c_n\cdot c_{n+1}\cdot n_k\cdot(n-n_k)+c_{n+1}\cdot n_k\cdot d_n+c_n\cdot(n-n_k)\cdot d_{n+1}+d_n\cdot d_{n+1}$ $=c_n\cdot c_{n+1}\cdot n_k(n-n_k)+c_{n+1}\cdot(n-n_k)\cdot d_n+c_n\cdot n_k\cdot d_{n+1}+d_n\cdot d_{n+1}$, also $c_{n+1}\cdot n_k\cdot d_n+d_{n+1}\cdot d_n=c_n\cdot n_k\cdot d_{n+1}+d_{n+1}+d_{n+1}\cdot d_n$, also $(c_{n+1}\cdot n_k+d_{n+1}).\ (0\cdot c_n+d_n)=(0\cdot c_{n+1}+d_{n+1})\cdot(c_n\cdot n_k+d_n)$, also $G_2(n_k,n+1)\cdot G_2(0,n)=G_2(0,n+1)\cdot G(n_k,n)$, also, wenn wir wieder k für n_k schreiben: $G_2(k,n+1)=G_2(0,n+1)\cdot\frac{G_2(k,n)}{G_2(0,n)}$ – in Entsprechung zu ($\delta 2$).

$$\delta 3)\ G_K(0,n+1)\cdot\left[\frac{G_K(n,n)}{G_K(0,n)}+\frac{G_K(1,n)}{G_K(0,n)}+K-2\right]=1,\ \text{für } K\geq 2$$

(nach ($\gamma 4$) mit ($\delta 2$)).

Man kann nun nach ($\gamma 3$) aus $G_K(0,1)$ $G_K(1,1)$ berechnen. Damit hat man alle G_K-Werte für $n=1$. Hat man aber alle G_K-Werte für n, so ist nach ($\delta 3$) der Wert $G_K(0,n+1)$ bestimmt; dann alle Werte $G_K(k,n+1)$ nach ($\delta 2$), und $G_K(n+1,\ n+1)$ nach ($\gamma 2$). D.h. liegt für $K\geq 2$ $G_K(0,1)$ fest, so liegen alle G_K-Werte fest.

Das zeigt auch die folgende Formel, nach der man alle G_K–Werte aus $G_K(0,1)$ berechnen kann:

$$\varepsilon)\ G_K(m,n)=\frac{m-(K\cdot m-1)\cdot G_K(0,1)}{n-(n-1)\cdot K\cdot G_K(0,1)}\ \text{für } K\geq 2,\ m\leq n.$$

Diese Formel gilt für $G_K(0,1)$ trivialerweise für $m=1$, für $n=1$ gilt sie nach ($\gamma 3$), und für $n+1$ und beliebige $k\leq n+1$ folgt der Satz nach ($\delta 2$), ($\delta 3$) und ($\gamma 2$), wenn er für n gilt, wie man leicht verifiziert.

Es gilt wegen $\Vdash P_1(a) \vee \ldots \vee P_K(a)$: $\sum_{k=1}^{K} c(P_k(a)/T) = 1$, wegen $c(P_k(a)/T) = c(P_j(a)/T)$ nach C9, also

ζ) $c(P_k(a)/T) = \frac{1}{K}$.

Ferner gilt

η) $c(P_k(a)/P_l(b)) < c(P_k(a)/T)$ für $l \neq k$, denn andernfalls wäre nach (ζ) $c(P_k(a)/P_l(b)) \geq \frac{1}{K}$, und das würde nach C9 für alle $k \neq l$ gelten, während nach C11 gilt $c(P_l(a)/P_l(b)) > \frac{1}{K}$, so daß wir erhielten $c(P_1(a) \vee \ldots \vee P_K(a)/P_l(b)) = c(P_1(a)/P_l(b)) + \ldots + c(P_K(a)/P_l(b)) > K \cdot \frac{1}{K} = 1$, im Widerspruch zu C2.

Es ist ferner nach C2 $0 \leq c(P_k(a)/P_l(b)) = G_K(0,1)$. Wäre $G_K(0,1) = 0$, so wäre $c(\neg P_k(a)/P_l(b)) = c(\bigvee_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{K} P_j(a)/P_l(b)) = 1$ im Widerspruch zu C6. Es gilt also:

ϑ) $0 < G_K(0,1) < K$.

Setzt man nun

ι) $\lambda_K := \frac{K \cdot G_K(0,1)}{1 - K \cdot G_K(0,1)}$, so gilt

$\varkappa$) $0 < \lambda_\varkappa < \infty$ und

μ) $G_K(0,1) = \frac{\lambda_K}{K \cdot (\lambda_K + 1)}$.

Wir lassen nun den Index „K" in „λ_K" weg und erhalten aus (μ) mit (ε):

ν) $G_K(m,n) = \frac{m + \frac{\lambda}{K}}{n + \lambda}$ für $K \geq 2$, also $c(P_k(a)/E) = \frac{n_k + \frac{\lambda}{K}}{n + \lambda}$, qed.

Beweis des Theorems T2.3.2–2 (S. 131)

Wir denken uns die Zustandsbeschreibung Z so angeordnet, daß zuerst die n_1 Sätze mit P_1, dann die n_2 Sätze mit P_2 stehen, usf., also $Z = P_1(a_{i_1}) \wedge \ldots \wedge P_1(a_{i_{n_1}}) \wedge P_2(a_{i_{n_1+1}}) \wedge \ldots \wedge P_K(a_{i_N})$. Das l-te Konjunk-

tionsglied ($1 \leq l \leq N$) nennen wir A_l. Es sei $B_r = \bigwedge_{l=1}^{r} A_l$ ($r = 1, \ldots, N$).
Dann gilt nach C6 $m(Z) = c(Z/T) = c(A_1/T) \cdot c(A_2/B_1) \cdot \ldots \cdot c(A_N/B_{N-1})$.
Wir betrachten jeweils den ersten Satz in Z mit P_i: Es sei $q_i = \sum_{j=1}^{i-1} n_j$, und $q_1 = 0$. Ist $q_i > 0$, so ist $c(A_{q_i+1}/B_{q_i}) = G_K(0,q_i)$, denn A_{q_i+1} hat die Gestalt $P_i(a_{i_{q_i+1}})$, B_{q_i} die Gestalt $P_1(a_{i_1}) \wedge \ldots \wedge P_{i-1}(a_{i_{q_i}})$, d.h. B_i ist ein Satz mit q_i GK, in dem P_i nicht vorkommt. Die Funktion $G_K(m,n)$ wird wie im Beweis von T2.3.2–1 gewählt. Ist P_i die erste PK in Z, also $q_i = 0$, so ist der erste Term $c(A_1/T) = \frac{1}{K}$ nach (ζ) im Beweis von T2.3.2–1. Setzt man $G_K(0,0) = \frac{1}{K}$, so gilt also $c(A_1/T) = G_K(0,0)$. Der zweite Satz in Z mit P_i A_{q_i+2} hat für $q_i \geq 0$ die Gestalt $P_i(a_{i_{q_i+2}})$, B_{q_i+1} hat die Form $P_1(a_{i_1}) \wedge \ldots \wedge P_{i-1}(a_{i_{q_i}}) \wedge P_i(a_{i_{q_i+1}})$. Es gilt also $c(A_{q_i+2}/B_{q_i+1}) = G_K(1, q_i+1)$, usw. Endlich gilt $c(A_{q_i+n_i}/B_{q_i+n_i-1}) = G_K(n_i - 1, q_i + n_i - 1)$. Wir erhalten also für die P_i-Terme

$$c(A_{q_i+1}/B_{q_i}) \cdot \ldots \cdot c(A_{q_i+n_i}/B_{q_i+n_i-1}) = \prod_{n=0}^{n_i-1} G_K(n, q_i+n), \text{ und daher:}$$

$$m(Z) = \prod_i \prod_{n=0}^{n_i-1} GK\,(n, q_i+n), \text{ also nach } (\nu) \text{ im Beweis von}$$

$$\text{T2.3.2–1: } m(Z) = \prod_i \prod_{n=0}^{n_i-1} \frac{n + \frac{\lambda}{K}}{(q_i+n+\lambda)} =$$

$$\frac{\prod_i \left(\frac{\lambda}{K}\left(\frac{\lambda}{K}+1\right) \ldots \left(\frac{\lambda}{K}+n_i-1\right)\right)}{\prod_i \left((q_i+\lambda)(q_i+\lambda+1) \ldots (q_i+\lambda+n_i-1)\right)}\ .$$

Da nun $q_i + n_i = q_{i+1}$ ist und $q_1 = 0$, so ist der Nenner ein Produkt von $\sum_{r=1}^{K} n_r = N$ wachsenden Faktoren, die mit λ beginnen, jeweils um 1 wachsen und mit $(\lambda + N - 1)$ enden. Der Nenner ist daher $\lambda(\lambda + 1 \cdot \ldots \cdot (\lambda + N - 1) = (N + \lambda - 1)^{[N]}$.
Wir erhalten somit:

$$m(Z) = \frac{\prod_{i=1}^{K} \left(n_i + \frac{\lambda}{K} - 1\right)^{[n_i]}}{(N+\lambda-1)^{[N]}}\ \text{, qed.}$$

Beweis des Theorems T2.3.2–3 (S. 132)

Es gilt:
α) $0 < m(Z_j)$, für alle Zustandsbeschreibungen $Z_j (j = 1, .., K^N)$, denn der Nenner der rechten Seite in der Gleichung

$$(*)\ m(Z) = \frac{\prod_{i=1}^{K}\left(n_i + \frac{\lambda}{K} - 1\right)^{[n_i]}}{(N+\lambda-1)^{[N]}}$$

des Theorems T2.3.2–2 ist als Produkt positiver Faktoren positiv und der Zähler ist ebenfalls ein Produkt positiver Faktoren, da die Faktoren mit $n_i = 0$ entfallen. Ferner ist, wo T tautologisch ist:
β) $m(T) = 1$. Dazu zeigen wir zunächst, daß m unabhängig von N ist. Es genügt zu zeigen $m_N(Z) = m_{N+1}(Z)$, wo m_N nach (*) für L_N^K erklärt ist und Z eine Zustandsbeschreibung von L_N^K ist, denn daraus folgt $m_N(A) = m_{N+1}(A)$ für alle Sätze A, die sich ja als Disjunktionen von Zustandsbeschreibungen darstellen lassen. Es gilt aber:

$$m_{N+1}(Z) = m_{N+1}(Z \wedge P_1(a_{N+1})) + \ldots + m(Z \wedge P_K(a_{N+1})) =$$

$$m_N(Z) \cdot \frac{\left(n_1 + 1 + \frac{\lambda}{K} - 1\right)}{N+1+\lambda-1} + \ldots + m_N(Z) \cdot \frac{\left(n_K + 1 + \frac{\lambda}{K} - 1\right)}{N+1+\lambda-1} =$$

$$m_N(Z) \cdot \frac{K \cdot \frac{\lambda}{K} + \sum_{i=1}^{K} n_i}{N+\lambda} = m_N(Z) \text{ wegen } \sum_{k=1}^{K} n_k = N.$$ Es hat also m(T) in L_N^K den gleichen Wert wie in L_1^K. Für $N = 1$ ist nun $T \equiv P_1(a_1) \vee \ldots \vee P_K(a_1)$, also $m(T) = \sum_{i=1}^{K} m(P_i(a_1)) = K \cdot \frac{\frac{\lambda}{K}}{\lambda} = 1$.

Wegen (α) und (β) gilt also $0 \leq m(A) \leq 1$ und $m(A) = 1 \supset A \equiv T$. Damit ist gezeigt: m ist eine reguläre Wahrscheinlichkeitsbewertung, d.h. c ist eine reguläre c-Funktion, d.h. c erfüllt C1 bis C7. Da m nach (*) invariant gegenüber Permutationen von GK und PK ist, so gilt das auch für c, so daß c C8 und C9 erfüllt. Daß m unabhängig von N ist, haben wir schon hervorgehoben, daher ist auch c unabhängig von N, erfüllt also C10.

Gilt (*) für m, so gilt auch die Behauptung von T2.3.2–1 für $c(P_i(a)/E)$, wobei E wieder ein Satz der Form $\bigwedge_{i=1}^{n} P_{k_i}(a_i)$ ist, in dem die GK a nicht vorkommt, und in dem die PK P_j n_j-mal vorkommt. Wir benutzen wieder die Unabhängigkeit der Funktion m von N, nach der E eine Zustandsbeschreibung in L_n^K ist und $E \wedge P_j(a)$ eine Zustandsbeschreibung in L_{n+1}^K.

$$c(P_j(a)/E) = \frac{m(P_j(a) \wedge E)}{m(E)} =$$

$$\frac{\prod\limits_{i \neq j}\left(\frac{\lambda}{K}\left(\frac{\lambda}{K}+1\right)\ldots\left(\frac{\lambda}{K}+n_i-1\right)\right)\cdot\left(\frac{\lambda}{K}\left(\frac{\lambda}{K}+1\right)\ldots\left(\frac{\lambda}{K}+n_j+1-1\right)\right)\cdot\lambda(\lambda+1)}{\lambda(\lambda+1)\ldots(\lambda+n+1-1)\cdot\prod\limits_{i \neq j}\left(\frac{\lambda}{K}\left(\frac{\lambda}{K}+1\right)\ldots\left(\frac{\lambda}{K}+n_i-1\right)\right)\cdot\left(\frac{\lambda}{K}\left(\frac{\lambda}{K}+1\right)\right.}$$

$$\frac{\ldots(\lambda+n-1)}{\left.\ldots\left(\frac{\lambda}{K}+n_j-1\right)\right)} = \frac{n_j+\frac{\lambda}{K}}{n+\lambda}.$$

Es ist dann $c(P_k(b)/E \wedge P_k(a)) = \dfrac{n_k+1+\frac{\lambda}{K}}{n+1+\lambda} > \dfrac{n_k+\frac{\lambda}{K}}{n+\lambda} = c(P_k(b)/E)$;

c erfüllt also C11.

C12a gilt trivialerweise, da $c(P_k(a)/E) = \dfrac{n_k+\frac{\lambda}{K}}{n+\lambda}$ nicht von den n_j mit $j \neq k$ abhängt.

Damit ist T2.3.2–3 bewiesen.

Beweis des Theorems T2.4.2–3 (S. 176)

Der Beweis dieses Theorems ist etwas langwierig. Daher gliedern wir ihn in mehrere Schritte auf, in denen auch die jeweils notwendigen Hilfssätze bewiesen werden. Im Schritt I beweisen wir zunächst, daß es zu jeder Präferenzstruktur $\langle M, \mathscr{P}(M), R, \mathscr{H}, \leq\cdot\rangle$ eine subjektive Wahrscheinlichkeitsbewertung w auf $\mathscr{P}(M)$ gibt. Im Schritt II beweisen wir die Existenz einer Funktion u für die „normalen" Handlungen f, für die es Akte a* und b* mit $a^* \leq\cdot f \leq\cdot b^*$ gibt, und zeigen, daß für sie die Behauptung (b) des Theorems erfüllt ist. Im III. Schritt wird die Behauptung (b) dann für die „extremen" Handlungen bewiesen, für die es nicht solche a* und b* gibt. Im IV. Schritt endlich wird die Bedingung (c), die Eindeutigkeit der Funktion u bis auf lineare Transformationen bewiesen.

Der folgende Beweis schließt sich eng an die entsprechenden Überlegungen von L. Savage in [54] an, der sich in wichtigen Punkten wiederum an den Beweisgedanken von J. v. Neumann und O. Morgenstern in [47] orientiert.

I

Es ist zu zeigen, daß es genau eine Wahrscheinlichkeitsbewertung w auf $\mathscr{P}(M)$ gibt, die mit der Relation $A \leq\cdot B$ (nach D2.4.2–5) übereinstimmt. Dazu genügt es nach T2.1.2–1 zu zeigen, daß diese Relation mit $\mathscr{P}(M)$ ein ausgezeichnetes komparatives Wahrscheinlichkeitsfeld im Sinne von D2.1.2–1 bildet. Es ist also die Geltung der Axiome A1 bis A5 nachzuweisen, sowie das Erfülltsein der definierenden Bedingung von D2.1.2–1.

Dazu benötigen wir die folgenden Hilfssätze:

I.1: Ist $\langle M, \mathscr{P}(M), R, \mathscr{H}, \leq\cdot\rangle$ eine Präferenzstruktur, so ist $\langle M, \mathscr{P}(M), R, \mathscr{H}, \leq\cdot_A\rangle$ für $A \subset M$ und $\neg\, 0(A)$ eine Quasiordnung.[9]

Beweis:

a) Ist $f = f' = f''$ und $g = g' = g''$ auf A und $f' = g'$ und $f'' = g''$ auf $\bar{A}$, so gilt nach a4: $f' \leq\cdot g' \equiv f'' \leq\cdot g''$. Die Bedingung $\wedge x(x \varepsilon A \supset f(x) = f'(x) \wedge g(x) = g'(x)) \wedge \wedge x(x \varepsilon \bar{A} \supset f'(x) = g'(x)) \supset f' \leq\cdot g'$ gilt also entweder für kein Paar f', g' oder für alle solchen Paare. Gilt also $f \leq\cdot_A g$ nicht, so gilt wegen a1 $g <\cdot_A f$. Also ist a1 für $\leq\cdot_A$ erfüllt.

b) Gilt $f \leq\cdot_A g$ und $g \leq\cdot_A h$ und $f = f'$ und $h = h'$ auf A, und $f' = h'$ auf $\bar{A}$, so gilt für $g' = g$ auf A und $f' = g'$ auf $\bar{A}$, also $h' = g'$ auf $\bar{A}$: $f' \leq\cdot g' \wedge g' \leq\cdot h'$, also $f' \leq\cdot h'$ nach a2. Daher gilt $f \leq\cdot_A g \wedge g \leq\cdot_A h \supset f \leq\cdot_A h$, so daß auch a2 für $\leq\cdot_A$ erfüllt ist.

I.2: Ist $\{B_i\}$ $(i = 1, \ldots, n)$ eine Zerlegung von B (so daß gilt $B = \sum_{i=1}^{n} B_i$ und $B_i \cdot B_k = \wedge$ für $i \neq k$) und ist $f \leq\cdot_{B_i} g$ für alle i, so gilt $f \leq\cdot_B g$. Ist darüber hinaus $f <\cdot_{B_i} g$ für ein i, so gilt $f <\cdot_B g$.

Beweis: Die Behauptung gilt trivialerweise für $n = 1$. Gilt sie für n, so auch für $n+1$: Ist $f \leq\cdot_{B_n} g$, so gilt für $f' = f$ und $g' = g$ auf B_n und $f' = g' = f$ auf $\bar{B}_n$: $f' \leq\cdot g'$, also wegen $f' = f$: $f \leq\cdot g'$, also nach a4 wegen $f = g'$ auf $\overline{B_n + B_{n+1}}$: $f \leq\cdot_{B_n + B_{n+1}} g'$ (α). Ist $f \leq\cdot_{B_{n+1}} g$, so gilt für $f'' = f$

---

[9] Es läßt sich darüber hinaus beweisen: für $\neg\, 0(A)$ ist $\langle M, \mathscr{P}(M), R, \mathscr{H}, \leq\cdot_A\rangle$ eine Präferenzstruktur.

und $g''=g$ auf B_{n+1} und $f''=g''=g$ auf $\overline{B_{n+1}}: f''\leq\cdot g''$. Wegen $\overline{g''=g}$ gilt also $f''\leq\cdot g$, nach a4 also $f''\leq\cdot_{\overline{B_n+B_{n+1}}} g$ (β), da $f''=g$ auf $\overline{B_n+B_{n+1}}$ ist. Auf B_n+B_{n+1} ist nun $f''=g'$, also $f''\doteq_{B_n+B_{n+1}} g'$ (γ). Aus (α), (β), (γ) erhält man $f\leq\cdot_{B_n+B_{n+1}} g$. – Die zweite Behauptung ergibt sich analog. Die erste Behauptung von I.2 folgt auch einfacher aus a5:

Setzt man $A_k=\sum_{i=1}^{k} B_i$ für $1\leq k\leq n$ und $A_k=A_n$ für $k>n$, so ist $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i=B$ und es gilt nach a5 $f\leq\cdot_{\cup A_i} g$, also $f\leq\cdot_B g$.

Wir weisen nun nach, daß die Axiome A1 bis A5 erfüllt sind: A1: Nach a3 gibt es ein a und ein a′ mit $a'<\cdot a$, und nach a1 gilt $h_A^{aa'}\leq\cdot h_B^{aa'}\vee h_B^{aa'}\leq\cdot h_A^{aa'}$. Also gilt nach a7 $\wedge aa'(a'<\cdot a\supset h_A^{aa'}\leq\cdot h_B^{aa'})\vee\wedge aa'(a'<\cdot a\supset h_B^{aa'}\leq\cdot h_A^{aa'})$, also nach D2.4.2–5: $A\leq\cdot B\vee B\leq\cdot A$.

A2: Auf entsprechende Weise erhält man mit a2 $A\leq\cdot B\wedge B\leq\cdot C\supset A\leq\cdot C$.

A3: Es sei $a'<\cdot a$. Wegen $h_\Lambda^{aa'}=a'^*$ und $h_A^{aa'}=a^*$ auf A gilt $h_\Lambda^{aa'}\leq\cdot h_A^{aa'}$. Aus D2.4.2.–2 ergibt sich ja sofort $\wedge x(x\varepsilon A\supset f(x)=g(x))\supset f\doteq_A g$. Auf $\bar{A}$ gilt $h_\Lambda^{aa'}(x)=h_A^{aa'}(x)$, also $h_\Lambda^{aa'}\leq\cdot_{\bar{A}} h_A^{aa'}$, also nach I.2 $h_\Lambda^{aa'}\leq\cdot h_A^{aa'}$, also $\Lambda\leq\cdot A$.

A4: Ist wieder $a'<\cdot a$ und $h_A^{aa'}\leq\cdot h_B^{aa'}$, so gilt wegen $h_A^{aa'}\doteq_{\overline{A\cup B}} h_B^{aa'}$, $h_A^{aa'}\doteq_{A\cup B} h_{A+C}^{aa'}$ und $h_B^{aa'}\doteq_{A\cup B} h_{B+C}^{aa'}$ nach I.1 $h_{A+C}^{aa'}\leq\cdot_{A\cup B} h_{B+C}^{aa'}$; mit I.2 erhält man mit $h_{A+C}^{aa'}\doteq_{\overline{A\cup B}} h_{B+C}^{aa'}$, also $A+C\leq\cdot B+C$. Die Implikation $A+B\leq\cdot B+C\supset A\leq\cdot B$ ergibt sich ebenso.

A5: Es ist zu zeigen: Ist $h_{A_i}^{aa'}\leq\cdot h_B^{aa'}$ und $A_i\subset A_{i+1}$, so ist $h_{\cup A_i}^{aa'}\leq\cdot h_B^{aa'}$ für $a'<\cdot a$.

Wir nehmen zunächst an, es sei $(\cup A_i)\cdot B=\Lambda$. Dann folgt aus $h_{A_i}^{aa'}\leq\cdot h_B^{aa'}$ nach a6 $h_{A_i}^{aa'}\leq\cdot_{A_i+B} h_B^{aa'}$; wegen $h_{\cup A_i}^{aa'}\doteq_{A_i+B} h_{A_i}^{aa'}$ gilt $h_{\cup A_i}^{aa'}\leq\cdot_{A_i+B} h_B^{aa'}$, also nach a5: $h_{\cup A_i}^{aa'}\leq\cdot_{\cup A_i+B} h_B^{aa'}$, also wegen $h_{\cup A_i}^{aa'}\leq\cdot_{\overline{\cup A_i+B}} h_B^{aa'}$ nach I.2: $h_{\cup A_i}^{aa'}\leq\cdot h_B^{aa'}$. Ist $(\cup A_i)\cdot B\neq\Lambda$, so gilt der Satz für $\cup A_i\subset B$ nach TII–9 trivialerweise. Wegen $A_i\leq\cdot B$ kann B nicht echt $\cup A_i$ enhalten sein; dann bleibt nur der Fall, daß sich $\cup A_i$ und B teilweise überdecken. In diesem Fall setzen wir $A_i'=A_i-(\cup A_i\cdot B)$ und $B'=B-(\cup A_i\cdot B)$, so daß wie im ersten Fall gilt $h_{\cup A_i'}^{aa'}\leq\cdot h_{B'}^{aa'}$, also $\cup A_i'\leq\cdot B'$; mit A4 erhalten wir daraus aber sofort
$\cup A_i'+(\cup A_i\cdot B)=\cup A_i\leq\cdot B=B'+(\cup A_i\cdot B)$.

Die Definitionsbedingung von D2.1.2–1 ergibt sich endlich direkt aus a9: Ist $a'<\cdot a$ und $h_A^{aa'}<\cdot h_B^{aa'}$, so gibt es wegen $a'^*\leq\cdot h_{A1}^{aa'}<\cdot h_B^{aa'}<\cdot a^*$ nach a9 ein n und ein r mit $h_A^{aa'}<\cdot h_{\sum_{i=1}^{r} M_i^n}^{aa'}\leq\cdot h_B^{aa'}$, also $A<\cdot\sum_{i=1}^{r} M_i^n\leq\cdot B$.

Wir betrachten nun zunächst Handlungen f aus $\mathscr{H}$, für die es ein a′ und ein a gibt mit $a' <\cdot a$ und $a'^* \leq\cdot f \leq\cdot a^*$. Wir zeigen, daß es zu jedem dieser Akte f ein „Spiel" f′ gibt, so daß gilt $f \leq\cdot g \equiv f' \leq\cdot g'$. Wir zeigen dann, daß es eine Funktion u auf R gibt mit $f' \leq\cdot g' \equiv \int_M u(f'(x))dw \leq \int_M u(g'(x))dw$. Und wir zeigen endlich, daß gilt $\int_M u(f(x))dw = \int_M u(f'(x))dw$, so daß die Bedingung (b) des Theorems: $f \leq\cdot g \equiv \int_M u(f(x))dw \leq \int_M u(g(x))dw$ für alle Handlungen f,g der hier betrachteten Art erfüllt ist.

Wir benötigen zum Beweis folgenden Hilfssatz:

II.1 Gilt $a'^* \leq\cdot f \leq\cdot a^*$ und $a' <\cdot a$, so gibt es eine Menge $A \varepsilon \mathscr{P}(M)$ mit $f \doteq h_A^{aa'}$.

Beweis: Ist $f \doteq a^*$, so ist $A = M$. Ist $f <\cdot a^*$, so sei r(n) dasjenige r zu n, für das gilt $h^{aa'}_{\sum_{i=1}^{r} M_i^n} \leq\cdot f <\cdot h^{aa'}_{\sum_{i=1}^{r+1} M_i^n}$. Nach a9 gibt es ein solches r mit $0 \leq r < n$. Wir können nach der Überlegung in 2.1.2 die M_i^n so wählen, daß gilt $M_{2i-1}^{2n+1} + M_{2i}^{2n+1} = M_i^{2n}$,[10] und erhalten dann mit a5 wie dort für $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{r(n)} M_i^n$: $h_A^{aa'} \leq\cdot f$ und $h_A^{aa'} \cdot\geq f$, also $h_A^{aa'} \doteq f$.

Wegen D2.4.2–5 kommt es nicht auf die Wahl der Menge A bei der Darstellung $f \doteq h_A^{aa'}$ an, sondern nur auf w(A). Wenn wir unter $\rho a^* + (1-\rho)a'^*$ irgend einen Akt verstehen, der auf einer Menge A mit $w(A) = \rho$ zum Ergebnis a führt (so daß $A = \{x : f(x) = a\}$ ist) und sonst zum Ergebnis a′, so sind alle diese Akte untereinander äquivalent (im Sinne von $\doteq$), und es gibt zu jedem Akt f mit $a'^* \leq\cdot f \leq\cdot a^*$ genau ein ρ mit $f = \rho a^* + (1-\rho)a'^*$. So bestimmte Akte nennen wir *Spiele*. Wenn nun f und g Spiele sind, so ist auch $\rho f + (1-\rho)g$ für alle $0 \leq \rho \leq 1$ wieder ein Spiel. Denn ist $f = \sigma a^* + (1-\sigma)a'^*$ und $g = \tau b^* + (1-\tau)b'^*$, so gibt es für $c'^* = \min(a'^*, b'^*)$ und $c^* = \max(a^*, b^*)$ eine Darstellung $f = \sigma' c^* + (1-\sigma')c'^*$ und $g = \tau' c^* + (1-\tau')c'^*$, und es ist dann $\rho f + (1-\rho)g$ das Spiel $(\rho\sigma' + (1-\rho)\tau')c^* + (\rho(1-\sigma') + (1-\rho)(1-\tau'))c'^*$. Allgemein kann man dann den Akt $\rho f + (1-\rho)g$ für $0 \leq \rho \leq 1$ erklären

[10] Vgl. S. 55.

als $\rho f' + (1-\rho)g'$, wo f' und g' Spiele sind mit $f' \doteq f$ und $g' \doteq g$, und es ist für $\sum_{i=1}^{n} \rho_i = 1$ der Ausdruck $\sum_{i=1}^{n} \rho_i a_i^*$ als Spiel erklärt.[11]

Im folgenden seien a_0 und a_1 zwei bestimmte Elemente aus R mit $a_0 <\cdot a_1$, die es nach a3 gibt. Ist nun $a_0^* \leq\cdot f \leq\cdot a_1^*$, so gibt es nach II.1 eine Menge A mit $f \doteq h_A^{a_1 a_0}$. Es gibt also genau eine Zahl $V(f) = w(A)$, für die gilt $f \doteq (1 - V(f)) \cdot a_0^* + V(f) \cdot a_1^*$. Es gilt dann für alle f und g mit $a_0^* \leq\cdot f, g \leq\cdot a_1^*$: ($\alpha$) $V(f) \leq V(g) \equiv f \leq\cdot g$. Das ergibt sich direkt aus dem Beweis von II.1, nach dem gilt $A \leq\cdot B$ für $f \leq\cdot g$, $f \doteq h_A^{aa'}$ und $g \doteq h_B^{aa'}$. Ferner gilt: $\sigma \cdot f + (1-\sigma)g \doteq \sigma\{(1-V(f)) \cdot a_0^* + V(f) \cdot a_1^*\} + (1-\sigma)\{(1-V(g)) \cdot a_0^* + V(g) \cdot a_1^*\} \doteq$
$\{1 - (\sigma \cdot V(f) + (1-\sigma)V(g))\} \cdot a_0^* + \{\sigma \cdot V(f) + (1-\sigma)V(g)\} \cdot a_1^*$ für alle σ mit $0 \leq \sigma \leq 1$, also (β) $V(\sigma \cdot f + (1-\sigma)g) = \sigma \cdot V(f) + (1-\sigma) \cdot V(g)$. Endlich gilt trivialerweise (γ) $V(a_0^*) = 0$, $V(a_1^*) = 1$.

$V(f)$ ist zunächst nur für die f mit $a_0^* \leq\cdot f \leq\cdot a_1^*$ erklärt. Es gibt nun aber für alle a^* und b^* mit $a^* \leq\cdot a_0^* <\cdot a_1^* \leq\cdot b^*$ genau eine Funktion $V(f)$, die für alle f mit $a^* \leq\cdot f \leq\cdot b^*$ erklärt ist, und für die (α), (β) und (γ) gilt. Wir können also für alle f, für die es a^* und b^* mit $a^* \leq\cdot f \leq\cdot b^*$ gibt, $V(f)$ durch (α), (β), (γ) eindeutig festlegen.

Daß es für solche a^* und b^* eine Funktion $V(f)$ gibt, die (α) und (β) erfüllt, ergibt sich aus der entsprechenden Überlegung für a_0^* und a_1^*. Es erfüllt dann aber $V'(f) := \dfrac{V(f) - V(a_0^*)}{V(a_1^*) - V(a_0^*)}$ auch die Bedingung (γ). Ist nun $V''(f)$ irgendeine Funktion, die ebenfalls (α) und (β) erfüllt, so gibt es reelle Zahlen $\alpha > 0$ und β mit $V''(f) = \alpha \cdot V(f') + \beta$; erfüllt also $V''(f)$ auch (γ), so ist $\alpha = 1$ und $\beta = 0$, also $V''(f) = V'(f)$. Daß es solche Zahlen α und β gibt, zeigt folgende Überlegung: Nach II.1 gibt es ein ρ mit $0 \leq \rho \leq 1$ und $f \doteq (1-\rho) \cdot a^* + \rho \cdot b^*$, wegen ($\beta$) gilt also $V''(f) = (1-\rho) \cdot V''(a^*) + \rho \cdot V''(b^*)$ und ebenso für $V'(f)$. Wie man leicht verifiziert, gilt dann aber:
$V''(f) \cdot (V'(b^*) - V'(a^*)) - V'(f)(V''(b^*) - V''(a^*)) + V'(a^*) \cdot V''(b^*) - V''(a^*) \cdot V'(b^*) = 0$, also $V''(f) = \dfrac{V''(b^*) - V''(a^*)}{V'(b^*) - V'(a^*)} \cdot V'(f) -$

[11] Das ist für $n=2$ trivial, und gilt es für n, so auch für $n+1$: $\sum_{i=1}^{n-1} \rho_i a_i^*$ ist das Spiel $\rho_{n+1} a_{n+1}^* + (1-\rho_n) \sum_{i=1}^{n} \frac{\rho_i}{(1-\rho)} a_i^*$.

$\dfrac{V'(a^*) \cdot V''(b^*) - V''(a^*) \cdot V'(b^*)}{V'(b^*) - V'(a^*)}$. Dabei sind die Ausdrücke $V''(b^*) - V''(a^*)$ und $V'(b^*) - V'(a^*)$ wegen $b^* \cdot\!> a^*$ positiv.

Damit ist nun gezeigt: Wählt man zwei Resultate a_0 und a_1 aus, so ist für alle in diesem Abschnitt des Beweises betrachteten Handlungen f eine Funktion V(f) durch (α), (β), (γ) eindeutig festgelegt. Setzt man also $u(a) = V(a^*)$, so ist u(a) für alle Resultate a aus R definiert und es gilt $u(a_0) = 0$, $u(a_1) = 1$.

Ist f ein Spiel, so gibt es ein a'^* und ein a^* mit $f \doteq \rho a^* + (1-\rho) \cdot a'^*$, also $a'^* \leq\cdot\, f \leq a^*$, so daß V(f) erklärt ist. Es ist ferner $\int_M u(f(x))dw = \rho \cdot u(a) + (1-\rho) \cdot u(a')$. Andererseits gilt auch $V(\rho a^* + (1-\rho) a'^*) = \rho V(a^*) + (1-\rho) V(a'^*) = \rho \cdot u(a) + (1-\rho) \cdot u(a')$, so daß die Behauptung (b) des Theorems T2.4.2–3 für Spiele bewiesen ist.

Es bleibt nun noch zu zeigen, daß für $f \doteq f'$ gilt $\int_M u(f(x))dw = \int_M u(f'(x))dw$. Dann haben wir wegen ($\alpha$) $f \leq\cdot\, g \equiv V(f) \leq V(g)$ und $V(f') = \int_M u(f'(x))dw$ für Spiele f', und wegen der Existenz von Spielen $f' \doteq f$ zu allen hier betrachteten Handlungen f auch
$f \leq\cdot\, g \equiv f' \leq\cdot\, g' \equiv V(f') \leq V(g') \equiv \int_M u(f'(x))dw \leq \int_M u(g'(x))dw \equiv \int_M u(f(x))dw \leq \int_M u(g(x))dw$.

Ist f beschränkt, d.h. gibt es Zahlen r_1, r_2 mit $w(\{x: r_1 \leq u(f(x)) \leq r_2\}) = 1$, so kann man die Menge $B = \{x: r_1 \leq u(f(x)) \leq r_2\}$ in n Mengen B_i^n zerlegen, so daß gilt: $x \varepsilon B_i \equiv z_{i-1}^n \leq u(f(x)) \leq z_i^n$ $(i = 1, \ldots, n)$ mit $z_j^n = r_1 + \frac{j}{n} \cdot (r_2 - r_1)$ $(j = 0, \ldots, n)$. Es ist dann $\int_M u(f(x))dw = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n y_i^n \cdot w(B_i^n)$ mit $y_i^n \varepsilon [z_{i-1}^n, z_i^n]$.[12] Es gilt aber für $f \doteq f'$ auch $\sum_{i=1}^n z_{i-1}^n \cdot w(B_i^n) \leq \int_M u(f'(x))dw \leq \sum_{i=1}^n z_i^n \cdot w(B_i)$ für alle $n \geq 1$ (δ), also $\int_M u(f'(x))dw = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n z_{i-1}^n \cdot w(B_i^n) = \lim \sum_{i=1}^n z_i^n \cdot w(B_i^n) = \int_M u(f(x))dw$.

Die Behauptung (δ) ergibt sich so: Ist $f \leq\cdot_{B_i^n} a_{i,n}^*$, so gibt es ein Spiel $g_{i,n}$ mit $f \leq\cdot_{B_i^n} g_{i,n}$ und $\int_M u(g_{i,n}(x))dw \leq z_i^n$: Ist $u(a_{i,n}) \leq z_i^n$, so

---

[12] [x, y] ist das abgeschlossene Intervall von x bis y.

setzen wir $g_{i,n} = a^*_{i,n}$; andernfalls wählen wir ein $a'^*_{i,n}$ mit $u(a'_{i,n}{}^*) \leq z^n_i$ und setzen $g_{i,n} = \rho a_{i,n} {}^+(1-\rho) \cdot a'_{i,n}{}^*$ mit demjenigen ρ, für das gilt $\rho \cdot u(a_{i,n}) + (1-\rho) u(a_{i,n}) = z^n_i$. Es gilt dann wegen $u(f(x)) \leq u(g_{i,n}(x))$ auf B^n_i auch $f(x) \leq\cdot\ g_{i,n}(x)$ auf B^n_i, also nach a6 $f \leq\cdot_{B^n_i} g_{i,n}$. – Ist $f. >_{B^n_i} a^*$ für alle $a \varepsilon R$, so gibt es zu jedem $f' <\cdot f$ ein b^*, so daß für $f'' = b^*$ auf B^n_i und $f'' = f$ auf $\overline{B^n_i}$ gilt: $f' <\cdot f'' \leq\cdot f$. Man verifiziert leicht, daß für $f \doteq \rho_1 d^* + (1-\rho_1) \cdot c^*$, $f' \doteq \rho_2 d^* + (1-\rho_2) c^*$ ein b mit $w(B^n_i) \cdot (\sup_a u(a) - u(b)) < (\rho_1 - \rho_2) u(d) + (\rho_2 - \rho_1) u(c)$ dieser Anforderung genügt. Dabei sei $\sup_a u(a)$ die obere Grenze der Werte $u(a)$.

Es sei nun $g_n = \sum_{i=1}^{n} w(B^n_i) \cdot g_{i,n}$; dann gilt nach I.2 wegen $f' \leq\cdot f \leq\cdot g_n$,

also $V(f') = \int_M u(f'(x)) dw \leq V(g_n) = \sum_{i=1}^{n} w(B^n_i)\, V(g_{i,n}) \leq \sum_{i=1}^{n} w(B^n_i) \cdot z^n_i$.

Der Satz ist zunächst für $f' <\cdot f$ bewiesen. Er kann aber nicht für alle $f' <\cdot f$ gelten und für ein $f' \doteq f$ falsch sein; denn wäre $f' \doteq f \cdot > \sum_{i=1}^{n} w\,(B^n_i) \cdot z^n_i$, so wäre, da die f nach a9 überall dicht liegen, auch für ein f': $f \cdot > f' \cdot > \sum_{i=1}^{n} w(B^n_i) \cdot z^n_i$.

Entsprechend erhält man $\sum_{i=1}^{n} w(B^n_i) \cdot z^n_{i-1} \leq \int_M u(f'(x)) dw$.

III

Es seien nun f und f′ bzgl. w und u beschränkte Akte, für die für alle $a \varepsilon R$ gilt $f, f' <\cdot a^*$, bzw. $a^* <\cdot f, f'$. Dann ergibt sich aus a8 mit $f \leq\cdot f'(x)^*$ und $f' \leq\cdot f(x)^*$, bzw. $f \cdot\geq f'(x)^*$ und $f' \cdot\geq f(x)^*$ für alle $x \varepsilon M$: $f \leq\cdot f' \wedge f' \leq\cdot f$, also $f' \doteq f$. Da f beschränkt ist, gibt es Zahlen r_1 und r_2 mit $w(\{x: r_1 \leq u(f(x)) \leq r_2\}) = 1$. Es sei $\sup_a u(a)$ die obere Grenze und $\inf_a u(a)$ die untere Grenze der Werte $u(a)$ für $a \varepsilon R$. Gilt nun $a^* <\cdot f$ für alle $a \varepsilon R$, so muß gelten $w(\{x: u(f(x)) \geq \sup_a u(a) - \varepsilon\}) = 1$ für alle $\varepsilon > 0$, also $\int_M u(f(x)) dw = \sup_a u(a)$. Denn für jede Menge A mit $w(A) > 0$ muß gelten $f \cdot>_A a^*$ für alle $a \varepsilon R$: Wäre $f \leq\cdot_A a^*$ für ein a^*, so gäbe es ein b^* mit $f <\cdot_A b^*$ (gäbe es ein größtes a^*, so wäre nach a8 $f \leq\cdot a^*$ für alle f,

entgegen unserer Annahme) und für $f' = f$ auf $\bar{A}$ und $f' = b^*$ auf A wäre $f <\cdot f'$, obwohl f ein größtes Element von $\mathscr{H}$ sein sollte.
Entsprechend erhält man für $f <\cdot a^*$ für alle $a \varepsilon R$: $\int\limits_M u(f(x))dw = \inf\limits_a u(a)$.

Sind also f und f' zwei solche maximale oder minimale Akte, oder handelt es sich um einen minimalen und einen maximalen Akt, so gilt die Behauptung des Theorems T2.4.2–3 wegen $f \doteq f'$ und $\int\limits_M u(f(x))dw = \int\limits_M u(f'(x))dw$, bzw. wegen $f <\cdot f'$ und $\int\limits_M u(f(x))dw < \int\limits_M u(f'(x))dw$ (nach a3 ist ja $\inf\limits_a u(a) < \sup\limits_a u(a)$). Ist aber f minimal, bzw. maximal und gibt es für g Resultate a und b mit $a^* \leq\cdot g \leq\cdot b^*$, so gilt $f <\cdot g$, bzw. $g <\cdot f$ und $\inf\limits_a u(a) < u(a) \leq \int\limits_M u(g(x))dw$, bzw. $\sup\limits_a u(a) > u(b) \geq \int\limits_M u(g(x))dw$.

Damit ist die Behauptung (b) von T2.4.2–3 vollständig bewiesen.

IV

Es muß nun noch die Behauptung (c) des Theorems T2.4.2–3 bewiesen werden:
1. Ist u(a) eine Funktion auf R, die (b) genügt, so ist auch $u'(a) = \alpha \cdot u(a) + \beta$ mit $\alpha > 0$ eine solche Funktion. Das ist wegen $\int\limits_M u'(f(x))dw = \alpha \int\limits_M u(f(x))dw + \beta$ trivial.
2. Sind u(a) und u'(a) zwei Funktionen, die (b) erfüllen, so gibt es Zahlen $\alpha > 0$ und β mit $u'(a) = \alpha \cdot u(a) + \beta$. Im Teil II hatten wir uns überlegt, daß sich zwei Funktionen V und V' auf der Teilmenge aller $f \varepsilon \mathscr{H}$, für die es ein a und ein b gibt mit $a^* \leq\cdot f \leq\cdot b^*$, nur durch eine lineare Transformation unterscheiden, falls beide den Bedingungen (α) $f \leq\cdot g \equiv V(f) \leq. V(g)$ und (β) $V(\rho \cdot f + (1-\rho)g) = \rho V(f) + (1-\rho)V(g)$ genügen. Jedes c^* ist aber ein solches f, und u und u' sind solche V und V', denn nach (b) gilt $a^* \leq\cdot b^* \equiv u(a) \leq u(b)$ und ist $c^* = \rho a^* + (1-\rho)b^*$, so gilt nach (b) auch $u(c) = \rho u(a) + (1-\rho) \cdot u(b)$, und ebenso für u'.
Damit ist das Theorem T2.4.2–3 vollständig bewiesen.

Zum Theorem 2.4.3–1 (S. 186)

Wir geben zunächst einige einfache Sätze an, die zur Erläuterung der komparativen Präferenzstrukturen dienen. Wir nehmen dabei an, w und u seien Funktionen zur Struktur$\langle M, \mathscr{X}, \leq\cdot\rangle$, wie sie das Theorem T2.4.3–1a verlangt. Es gilt dann:

H1: $0(A) \equiv w(A)=0$.
Beweis: Ist $0(A)$ und ist B ein Ereignis mit $\neg A \doteq B$, so ist $u(A+B)=$
$$= \frac{u(A) \cdot w(A) + u(B) \cdot w(B)}{w(A)+w(B)} = u(B),$$ also $w(A)=0$ oder $u(A)=u(B)$, oder aber $w(A)=w(B)=0$; wegen $\neg A \doteq B$ gilt also $w(A)=0$. Ist umgekehrt $w(A)=0$, so setzen wir $B_1 = \bar{A} \cdot G$, $B_2 = \bar{A} \cdot \bar{G}$. Es ist $u(G)=$
$$= \frac{u(A \cdot G) \cdot w(A \cdot G) + u(\bar{A} \cdot G) \cdot w(\bar{A} \cdot G)}{w(G)} = u(\bar{A} \cdot G),$$ wegen $w(A)=$ $=0$, also $w(A \cdot G)=0$ und $w(\bar{A} \cdot G = w(G)$. Ebenso erhält man $u(\bar{G})=$ $=u(\bar{A} \cdot \bar{G})$. Wegen $\bar{G} <\cdot M <\cdot G$ gilt also $\neg A \doteq B_1$ oder $\neg A \doteq B_2$. Wegen $w(A)=0$ ist $u(A+B_i)=u(B_i)$, also $A+B_i \doteq B_i$ $(i=1,2)$.

H2: $0(A) \wedge B \subset A \supset 0(B)$
Beweis: Aus $0(A)$ folgt nach H1 $w(A)=0$, also wegen $B \subset A$ $w(B)=0$, also nach H1 $0(B)$.

Man überlegt sich nun leicht, daß die Axiome b3 bis b6 für Präferenzstrukturen gelten:

H3: a) $\neg 0(B) \supset (A \leq\cdot B \equiv A \leq\cdot A+B)$
b) $\neg 0(A+B) \wedge 0(B) \supset A \doteq A+B$
c) $A \doteq B \wedge \neg C \doteq A \wedge A+C \doteq B+C \supset A+D \doteq B+D$.

Beweis: (a) Es ist $u(A) = \frac{u(A) \cdot w(A) + u(A) \cdot w(B)}{w(A)+w(B)}$, $u(B)=$
$$\frac{u(B) \cdot w(A) + u(B) \cdot w(B)}{w(A)+w(B)} \text{ und } u\,(A+B) = \frac{u(A) \cdot w(A) + u(B) \cdot w(B).}{w(A)+w(B)}$$
Diese Ausdrücke sind für $w(A)+w(B) \neq 0$, also nach H1 für $\neg 0(A+B)$ definiert, und das folgt nach H2 aus $\neg 0(B)$. Ist $w(B) \neq 0$, was mit H1 aus $\neg 0(B)$ folgt, so ist $u(A) \leq u(A+B) \equiv u(A) \leq u(B)$. (b): Ist $0(B)$, so nach H1 $w(B)=0$, dann ist $u(A)=u(A+B)$, also $A \doteq A+B$. (c): Ist
$$u(A+C) = \frac{u(A) \cdot w(A) + u(C) \cdot w(C)}{w(A)+w(C)} = \frac{u(B) \cdot w(B) + u(C) \cdot w(C)}{w(B)+w(C)} =$$
$=u(B+C)$ und ist $u\,(A)=u(B)$ und $u(A) \neq u(C)$, so ist $w(A)=w(B)$ oder $u(A)=u(C)$; wegen $\neg C \doteq A$ gilt also $w(A)=w(B)$; dann ist aber
$$u(A+D) = \frac{u(A) \cdot w(A) + u(D) \cdot w(D)}{w(A)+w(D)} = \frac{u(B) \cdot w(B) + u(D) \cdot w(D)}{w(B)+w(D)} =$$
$=u(B+D)$.

H4: Gilt für alle $n \geq 1$ $A_n \subset A_{n+1}$ (bzw. $A_{n+1} \subset A_n$), ist $A = \bigcup_n A_n$ (bzw. $A = \bigcap_n A_n$) und gilt $B <\cdot A <\cdot C$, so gibt es ein N, so daß für alle $n \geq N$ gilt $B <\cdot A_n <\cdot C$.

Beweis: (1) Es gelte $A_n \subset A_{n+1}$ $(n \geq 1)$, $A = \bigcup_n A_n$ und $B <\cdot A <\cdot C$, also $u(B) < u(A) < u(B)$. Es ist nun für $D_1 = A_1$, $D_2 = A_2 - A_1, \ldots A = \sum_i D_i$,

also $u(A) = \dfrac{\sum u(Di) \cdot w(D_i)}{\sum w(D_i)} = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\sum u(D_i) \cdot w(D_i)}{\sum w(D_i)}$. Ist nun c der kleinere der beiden Beträge $|u(B) - u(A)|$, $|u(C) - u(A)|$, so gibt es für ein $\varepsilon < c$ ein N, so daß für alle $n \geq N$ gilt $|u(\sum D_i) - u(A)| < \varepsilon$.
Damit ist der erste Teil der Behauptung bewiesen. Entsprechend verfährt man im 2. Teil.

Nachdem wir bereits einen langen Beweis für das Theorem T2.4.2–3 angegeben haben, wollen wir auf den nicht minder langwierigen Beweis des Theorems T2.4.3–1 verzichten, zumal er in Bolker [66] und in Jeffrey [65] leichter zugänglich ist als der Beweis von Savage in [54]. Allerdings ist der Beweis bei Jeffrey sehr unsystematisch und lückenhaft, so daß wir uns hier auf das Resultat von E. Bolker beziehen.

Bolker hat in [66] bewiesen, daß es zu jeder komparativen Präferenzstruktur über einem atomfreien σ-Körper $\mathscr{X}$, die den Axiomen (b1) bis (b6) genügt, eine Wahrscheinlichkeitsbewertung w und ein nichtnegatives totaladditives Maß m auf $\mathscr{X}$ gibt mit $A \leq\cdot B \equiv \dfrac{m(A)}{w(A)} \leq \dfrac{m(B)}{w(B)}$.

Setzt man also $u(A) := \dfrac{m(A)}{w(A)}$, so hat man Funktionen u und w, wie sie T2.4.3–1a in den Bedingungen (α), (β) verlangt. Bolker hat auch den Eindeutigkeitssatz bewiesen, daß die Maße w, m eindeutig sind bis auf Transformationen der Gestalt: $m'(A) = a \cdot m(A) + b \cdot w(A)$
$w'(A) = c \cdot m(A) + d \cdot w(A)$,
für $a \cdot d - b \cdot c > 0$.

Es ist also $u'(A) = \dfrac{a \cdot u(A) + b}{c \cdot u(A) + d}$ und $w'(A) = w(A)\,(c \cdot u(A) + d)$.

Setzt man nun $b = -a \cdot u(M)$ und $d = a(u(G) - u(M)) - c \cdot u(G)$, so erhält man Maße u', w' mit $u'(M) = 0$ und $u'(G) = 1$, so daß auch die Bedingung (γ) aus T2.4.3–1a erfüllt ist; die Bedingung $a \cdot d - b \cdot c > 0$ erfüllt man dabei z. B. durch Wahl von $a > 0$ und $c = a - 1$.

Soll allgemein gelten $u(M) = 0$ und $u(G) = 1$, so daß die Transformationen aus derartigen Funktionen immer wieder Funktionen mit diesen beiden Eigenschaften erzeugen, so muß gelten $w'(M) = w(M)\ (c \cdot u\ (M) + d)$, also $d = 1$, $u'(M) = \frac{a \cdot u(M) + b}{c \cdot u(M) + 1}$, also $b = 0$, $u'(G) = \frac{a \cdot u(G)}{c \cdot u(G) + 1}$, also $c = a - 1$. Aus $a \cdot d - b \cdot c > 0$ folgt dann $a > 0$. Damit haben wir die Transformationsgleichungen von T2.4.3–1b gewonnen.

LITERATURVERZEICHNIS

Abkürzungen für Zeitschriftentitel

APQ	The American Philosophical Quarterly
AM	Annals of Mathematics
AML	Archiv für mathematische Logik und Grundlagenforschung
AJP	Australasian Journal of Philosophy
BJPS	The British Journal for the Philosophy of Science
FM	Fundamenta Mathematicae
JP	The Journal of Philosophy
JSL	Journal of Symbolic Logic
MA	Mathematische Annalen
PR	The Philosophical Review
PST	Philosophical Studies
PPR	Philosophy and Phenomenological Research
PS	Philosophy of Science
PAS	Proceedings of the Aristotelian Society
RM	Review of Metaphysics
TAMS	Transactions of the American Mathematical Society

Achinstein, P. [62]: The circularity of a self-supporting inductive argument, Analysis 22 (1961/62), S. 138–141.
Ackermann, R. J. [66]: Projecting unprojectibles, PS 33 (1966), S. 70–75.
–, [67]: Conflict and decision, PS 34 (1967), S. 188–193.
Agassi, J. [61]: The role of corroboration in Popper's methodology, AJP 39 (1961), S. 82–91.
Alexander, H. G. [58]: The paradoxes of confirmation, BJPS 9 (1958/1959), S. 227–233.
Altham, J. [68]: A note on Goodman's paradox, BJPS 19 (1968), S. 257.
Ayer, A. J. [36]: Language, Truth and Logic, London [1]1936, [2]1946.
–, [56]: The Problem of Knowledge, Middlesex 1956.

Bar-Hillel, Y. (Hrsg.) [65]: Logic, Methodology, and Philosophy of Science, Proceedings of the 1964 Congress, Amsterdam 1965.
Barker, S. F. [67]: Induction and Hypothesis, New York 1967.

Barker, S.F. und Achinstein, P. [69]: On the new riddle of induction, PR 69 (1969), S. 511–522.
Baumrin, B.H. (Hrsg.) [63]: Philosophy of Science, The Delaware Seminar, vol. 2 (1962–1963), New York 1963.
Bergmann, G. [51]: Comments on Storer's definition of ‚soluble', Analysis 12 (1951), S. 44–48.
Bernoulli, D. [38]: Specimen theoriae novae de mensura sortis, Commentarii academiae scientiarum imperialis Petropolitanae (für 1730/1731) 5 (1738), S. 175–192.
Bierlein, D. [63]: Einheitliche Prinzipien für die Beurteilung statistischer Verfahren, Blätter der Deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematik 6 (1963), S. 245–252.
Birkhoff, G. [48]: Lattice Theory, American Mathematical Society Colloquium ser. *25* (1948).
Black, M. [49]: Language and Philosophy, Ithaca/New York 1949.
–, [54]: Problems of Analysis, Ithaca/New York 1954.
–, [58]: Self-supporting inductive arguments, JP 55 (1958), S. 718–725; abgedr. in Black [62].
–, [59]: Can induction be vindicated?, PST 10 (1959) S. 5–16; abgedr. in Black [62].
–, [62]: Models and Metaphors, Ithaca/New York 1962.
–, [63]: Self-support and circularity: a reply to Mr. Achinstein, Analysis 23 (1962/63), S. 43–44.
Bohnert, H.G. [67]: Communication by Ramsey-sentence clauses, PS 34 (1967), S. 341–347.
–, [68]: In defense of Ramsey's elimination method, JP 65 (1968), S. 275–281.
Bolker, E. [65]: Functions resembling quotients of measures, Dissertation, Harvard 1965; TAMS 124 (1966), S. 292–312.
–, [67]: A simultaneous axiomatisation of utility and subjective probability, PS 34 (1967), S. 333–340.
Braithwaite, R. [53]: Scientific Explanation, Cambridge 1953.
Broad, C.D. [18]: On the relation between induction and probability (I), Mind 27 (1918), S. 389–404.
–, [26]: The Philosophy of Francis Bacon, Cambridge 1926.
Brody, B.A. [68]: Confirmation and explanation, JP 65 (1968), S. 282 bis 299.
Bunge, M. [61]: The weight of simplicity in the construction and assaying of scientific theories, PS 28 (1961), S. 120–149.
–, (Hrsg.) [64]: The Critical Approach to Science and Philosophy, Glencoe/Ill. 1964.

Canfield J. und Lehrer, K. [61]: A note on prediction and deduction, PS 28 (1961), S. 204–211.

Carnap, R. [28]: Der logische Aufbau der Welt, [1]1928; Hamburg [2]1961.
–, [32]: Die physikalische Sprache als Universalsprache der Wissenschaft, Erkenntnis 2 (1932), S. 432–465.
–, [32a]: Psychologie in physikalischer Sprache, Erkenntnis 3 (1932), S. 177–188.
–, [32b]: Überwindung der Metaphysik durch logische Analyse der Sprache, Erkenntnis 2 (1932), S. 219–241.
–, [36]: Testability and meaning, PS 3 (1936), 4 (1937), als Monographie New Haven 1954.
–, [45a]: The two concepts of probability, PPR 5 (1945), S. 513–532.
–, [45b]: On inductive logic, PS 12 (1945), S. 72–97.
–, [46]: Remarks on induction and truth, PPR 6 (1946), S. 590–602.
–, [46a]: Theory and prediction in science, Science 104 (1946), S. 520 f.
–, [46b]: On the application of inductive logic, PPR 8 (1946/7), S. 133 bis 147.
–, [47a]: Probability as a guide in life, JP 44 (1944), S. 141–148.
–, [47b]: On the comparative concept of confirmation, BJPS 3 (1952/1953), S. 311–318.
–, [50]: Logical Foundations of Probability, [1]1950, Chicago [2]1967.
–, [51]: The problem of relations in inductive logic, PST 2 (1951/52), S. 75–80.
–, [52]: The Continuum of Inductive Methods, Chicago 1952.
–, [56]: The methodological character of theoretical concepts, in Feigl und Scriven [56], S. 38–76.
–, [59]: Beobachtungssprache und theoretische Sprache, in Logica, Studia Paul Bernays dedicata, Neuchatel/Schweiz 1959, S. 32–44.
–, [60]: The aim of inductive logic, in Nagel, Suppes, Tarski [62], S. 303–318.
–, [63]: Probability and induction, Teil V von „The philosopher replies", in Schilpp [63].
–, [66]: Philosophical Foundations of Physics, New York 1966; deutsch: Einführung in die Philosophie der Naturwissenschaft, München 1969.
–, [66a]: Probability and content measure, in Feyerabend und Maxwell [66], S. 248–260.
–, und Bar-Hillel, Y. [52]: An outline of a theory of semantic information, Massachussets Institute of Technology, Research Laboratory of Electronics, Technical Report No. 247 (1952).
–, und Stegmüller, W. [59]: Induktive Logik und Wahrscheinlichkeit, Wien 1959.
Chisholm, R.M. [56]: Perceiving – A Philosophical Study, Ithaca 1956.
–, und Taylor, R. [60]: Making things to have happened, Analysis 20 (1960), S. 73–78.

Church, A. [49]: Review of Ayer „Language, Truth and Logic", JSL 14 (1949), S. 52f.
Colodny, R.S. (Hrsg.) [65]: Beyond the Edge of Certainty, Englewood Cliffs 1965.
Cooley, J.C. [57]: Review of N. Goodmans „Fact, Fiction, Forecast", JP 54 (1957), S. 293–311.
Craig, W. [53]: On axiomatizability within a system, JSL 18 (1953), S. 30–32.
–, [56]: Replacement of auxiliary expressions, PR 65 (1956), S. 38–55.
Cramér, H. [46]: Mathematical Methods of Statistics, Princeton 1946.

Dray, W. [57]: Laws and Explanation in History, Oxford 1957.
Duhem, P. [06]: La theorie physique, son object et sa structure, Paris 1906.

Eberle, R., Kaplan, D. und Montague, R. [61]: Hempel and Oppenheim on explanation, PS 28 (1961), S. 418–428.
Edwards, P. [49]: Russell's doubts about induction, Mind 58 (1949), S. 141–163.
Einstein, A. [44]: Bemerkungen zu Bertrand Russells Erkenntnis-Theorie, in Schilpp [44], S. 278–290.
Essler, W.K. [70]: Induktive Logik, Grundlagen und Voraussetzungen, Freiburg, München 1970.

Feigl, H. [49]: Notes on causality, in Feigl und Brodbeck [53], S. 408 bis 418.
– und Sellars, W. (Hrsg.) [49]: Readings in Philosophical Analysis, New York 1949.
– und Brodbeck, M. (Hrsg.) [53]: Readings in the Philosophy of Science, New York 1953.
– und Scriven, M. (Hrsg.) [56]: Minnesota Studies in the Philosophy of Science Bd. I: The Foundations of Science and the Concepts of Psychology and Psychoanalysis, Minneapolis 1956.
–, Scriven, M. und Maxwell, G. (Hrsg.) [58]: Minnesota Studies in the Philosophy of Science, Bd. II: Concepts, Theories, and the Mind-Body Problem, Minneapolis 1958.
– und Maxwell, G. (Hrsg.) [62]: Minnesota Studies in the Philosophy of Science, Bd. III: Scientific Explanation, Space, and Time, Minneapolis 1962.
Feller, W. [39]: Über die Existenz sogenannter Kollektive, FM 32 (1939), S. 87–96.
Feyerabend, P. [58]: An attempt at a realistic interpretation of experience, PAS 59 (1957/58), S. 143–170.
–, [62]: Explanation, reduction and empiricism, in Feigl und Maxwell [62], S. 28–97.

–, [63]: Materialism and the mind-body-problem, RM 17 (1963), 49–66.
–, [64]: Realism and instrumentalism: comments on the logic of factual support, in Bunge [64], S. 280–308.
–, [65]: Problems of empiricism, in Colodny [65], S. 145–260.
– und Maxwell, G., (Hrsg.) [66]: Mind, Matter, Method, Essays in Philosophy and Science in Honor of Herbert Feigl, Minnesota 1966.
Finetti, B. de [33]: Classi di numeri aleatori equivalenti, Rendiconti Reale Accademia Nazionale dei Lincei, Ser. 6, Vol. 18 (1933), S. 107–110.
–, [33a]: La legge dei grandi numeri nel caso dei numeri aleatori equivalenti, Rendiconti Reale Accademia Nazionale dei Lincei, Ser. 6, Vol. 18 (1933), S. 203–207.
–, [37]: La prévision: ses lois logiques, ses sources subjectives, Annales de l'Institut Henri Poincaré 7 (1937), Engl. Übersetzung in Kyburg und Smokler [64], S. 93–158.
–, [70]: Teoria delle Probabilità, 2 Bde, Turin 1970.
Fishburn, P.C. [64]: Decision and Value Theory, New York 1964.
Frege, G. [06]: Antwort auf die Ferienplauderei des Herrn Thomae, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 15 (1906), S. 586–590, abgedr. in Frege [67].
–, [18]: Logische Untersuchungen, Teil I: Der Gedanke, Beiträge zur Philosophie des deutschen Idealismus (1918/19), S. 58–77; abgedr. in Frege [67].
–, [67]: Kleine Schriften, hrsg. von I. Angelelli, Darmstadt 1967.
–, [99]: Über die Zahlen des Herrn H. Schubert, Jena 1899, abgedr. in Frege [67].
Friedmann, K.S. [72]: Empirical simplicity as testability, BJPS 23 (1972), S. 25–33.

Good, I. J. [50]: Probability and the Weighing of Evidence, New York 1950.
–, [68]: Corroboration, explanation, evolving probability, simplicity and a sharpened razor, BJPS 19 (1968), S. 123–143.
Goodman, N. [46]: A query on confirmation, JP 43 (1946), S. 383–385.
–, [47]: On infirmities of confirmation theory, PPR 8 (1947), S. 149–151.
–, [47]: The problem of counterfactual conditionals, JP 44 (1947), S. 113–128.
–, [51]: The Structure of Appearance, ^{1}1951, New York ^{2}1966 (zitiert).
–, [55]: Fact, Fiction, Forecast, ^{1}1955, Indianapolis ^{2}1965 (zitiert).
–, [55a]: Axiomatic measurement of simplicity, JP 52 (1955), S. 709 bis 722.

–, [57]: Reply to an adverse ally, JP 54 (1957), S. 531–535.
–, [59]: Recent developments in the theory of simplicity, PPR 19 (1959), S. 429–446.
–, [61]: About, Mind 70 (1961), S. 1–24.
–, [61a]: Safety, strength, simplicity, PS 28 (1961), S. 150–151.
–, [63]: The Significance of 'Der logische Aufbau der Welt', in Schilpp [63], S. 545–558.
–, [66]: Comments, JP 63 (1966), S. 328–331.
–, [67]: Two replies, JP 64 (1967), S. 286f.
Gross, L. (Hrsg.) [59]: Symposium on Sociological Theory, New York 1959.
Grunstra, B. [69]: The plausibility of the entrenchment concept, in Rescher [69], S. 100–127.

Hacking, I. J. [65]: The Logic of Statistical Inference, Cambridge 1965.
–, [68]: One problem about induction, in I. Lakatos [68], S. 44–59.
Hahn, H., Neurath, O. und Carnap, R. [29]: Wissenschaftliche Weltauffassung: Der Wiener Kreis, Wien 1929.
Hanen, M. [67]: Goodman, Wallace, and the equivalence condition, JP 64 (1967), S. 271–280.
Harman, G. [68]: Knowledge, inference, and explanation, APQ 5 (1968), S. 164–173.
Hart, H. L. und Honoré, A. M. [59]: Causation in the Law, Oxford 1959.
Helmer, O. und Oppenheim, P. [45]: A syntactical definition of probability and of degree of confirmation, JSL 10 (1945), S. 25–60.
Hempel, C. G. [35]: Über den Gehalt von Wahrscheinlichkeitsaussagen, Erkenntnis 5 (1935), S. 228–260.
–, [42]: General laws in history, JP 39 (1942), S. 35–48. Abgedr. in und zitiert nach Hempel [65].
–, [43]: A purely syntactical definition of confirmation, JSL 8 (1943), S. 122–143.
–, [45]: Studies in the logic of confirmation, Mind 54 (1945), S. 1–12, 97–121, abgedr. in und zitiert nach Hempel [65].
–, [52]: Fundamentals of Concept Formation in Empirical Science, Chicago 1952.
–, [58]: The theoretician's dilemma, in Feigl, Scriven und Maxwell [58], S. 37–98. Mit kleinen Änderungen abgedruckt in und zitiert nach Hempel [65].
–, [59]: The logic of functional analysis, in L. Gross [59], abgedruckt in und zitiert nach Hempel [65].
–, [60]: Inductive inconsistencies, Synthese 12 (1960), S. 439–469. Abgedr. in Hempel [65].

–, [62]: Deductive-nomological versus statistical explanation, in Feigl und Maxwell [62], S. 98–169.
–, [65]: Aspects of Scientific Explanation and Other Essays in the Philosophy of Science, New York/London 1965.
–, [65a]: Aspects of scientific explanation, in Hempel [65], S. 331–496.
–, [68]: Maximal specificity and lawlikeness in probabilistic explanation, PS 35 (1968), S. 116–133.
–, [68a]: On a claim by Skyrms concerning lawlikeness and confirmation, PS 35 (1968), S. 274–278.
–, [69]: Reduction: 'Ontological and linguistic facets in Morgenbesser, Suppes, White [69], S. 179–199.
–, und Oppenheim, P. [36]: Der Typusbegriff im Lichte der neuen Logik, Leiden 1936.
–, und Oppenheim, P. [45]: A definition of degree of confirmation, PS 12 (1945), S. 98–115.
–, und Oppenheim, P. [48]: Studies in the logic of explanation, PS 15 (1948), S. 135–175, abgedr. in Hempel [65].
Hermes, H. [61]: Aufzählbarkeit, Entscheidbarkeit, Berechenbarkeit, Berlin 1961.
Hesse, M. [69]: Ramifications of ‚grue', BJPS 20 (1969), S. 13–25.
Hilpinen, R. [68]: Rules of Acceptance and Inductive Logic, Acta Philosophica Fennica XXII, Amsterdam 1968.
Hintikka, J. [65]: Towards a theory of inductive generalization, in Bar-Hillel [65], S. 274–288.
–, [65a]: On a combined system of inductive logic, in Studia Logico-Mathematica et Philosophica in honorem Rolf Nevanlinna, Acta Philosophica Fennica 18 (1965), S. 21–30.
–, [66]: A two-dimensional continuum of inductive methods, in Hintikka und Suppes [66], S. 113–132.
–, und Pietarinen, J. [66]: Semantic information and inductive logic, in Hintikka und Suppes]66], S. 96–112.
–, und Suppes, P. (Hrsg.) [66]: Aspects of Inductive Logic, Amsterdam 1966.
–, und Hilpinen, R. [66]: Knowledge, acceptance, and rational belief, in Hintikka und Suppes [66], S. 1–20.
Hochberg, H. [67]: Dispositional properties, PS 34 (1967), S. 10–17.
Holz, H.H. und Schickel, J. (Hrsg.) [69]: Vom Geist der Naturwissenschaft, Zürich 1969.
Hooker, C.A. und Stove, D. [67]: Relevance and the ravens, BJPS 18 (1967), S. 305–315.
Hosiasson-Lindenbaum, J. [40]: On confirmation, JSL 5 (1940), S. 133–148.

Humburg, J. [64]: Die Problematik des induktiven Schließens bei Carnap und Richter, Münchener Diplomarbeit 1964.
Hume, D. [38]: A Treatise of Human Nature, Bd. I, London 1738.
–, [77]: An Enquiry concerning Human Understanding (1748), zitiert nach der Ausgabe in Essays and Treatises on Several Subjects, Bd. II, London 1777.
Humphreys, W.C. [68]: Statistical ambiguity and maximal specificity, PS 35 (1968), S. 112–115.

Jeffrey, R.C. [56]: Valuation and acceptance of scientific hypotheses, PS 23 (1956), S. 237–246.
–, [65]: The Logic of Decision, New York [1]1965, [2]1967; deutsch: Logik der Entscheidungen, München 1967.
–, [68]: Probable knowledge, in Lakatos [68], S. 166–180.
–, [70]: Dracula meets Wolfman: Acceptance versus partial belief, in Swain [70], S. 137–185.
Jeffreys, H. [31]: Scientific Inference, Cambridge 1931, [2]1957.
–, [38]: Theory of Probability, Oxford 1938, ([3]1961).

Käsbauer, M. [69]: Systematische Analysen, im Erscheinen. Teilweise referiert in Stegmüller [69], Kap. X, 6.
Kahane, H. [65]: Nelson Goodman's entrenchment theory, PS 32 (1965), S. 377–383.
–, [67]: Reply to Ackermann, PS 34 (1967), S. 184–187.
–, [71]: Pathological predicates and projections, APQ 8 (1971), S. 171–178.
–, [71a]: A difficulty on conflict and confirmation, JP 68 (1971), S. 488f.
Kaila, E. [39]: Den mänskliga Kunskapen, Helsingfors 1939.
Kaplan, D. [61]: Explanation revisited, PS 28 (1961), S. 429–436.
Karp, C.R. [64]: Languages with Expressions of Infinite Length, Amsterdam 1964.
Katz, J.J. [62]: The Problem of Induction and Its Solution, Chicago 1962.
Kemeny, J.G. [53]: A logical measure function, JSL 18 (1953), S. 289–308.
–, [55]: Fair bets and inductive probabilities, JSL 20 (1955), S. 263 – 273.
–, [55a]: Two measures of complexity, JP 52 (1955), S. 722–733.
–, [63]: Carnap's theory of probability and induction, in Schilpp [63], S. 711–738.
–, und Oppenheim, P. [52]: Degree of factual support, PS 19 (1952), S. 307–324.
–, und Oppenheim, P. [55]: Systematic power, PS 22 (1955), S. 27–33.

Kemeny, J.G. und Oppenheim, P. [56]: On reduction, PST 7 (1956), S. 6–19.
Keynes, J.M. [21]: A Treatise on Probability, London, New York [1]1921, ([3]1950).
Kiesow, H. [58]: Die Anwendung eines Einfachheitsprinzips auf die Wahrscheinlichkeitstheorie, AML 4 (1958), S. 27–41.
Kim, J. [63]: On the logical conditions of deductive explanation, PS 30 (1963), S. 286–291.
Kochen, S. und Specker, E.P. [67]: The problem of hidden variables in quantum mechanics, Journal of Mathematics and Mechanics 17 (1967), S. 59–87.
König, J. [19]: Bemerkungen über den Begriff der Ursache (1919), in: Das Problem der Gesetzlichkeit, hrsg. von der Joachim-Jungius Gesellschaft der Wissenschaft, Bd. I, Hamburg 1949, S. 25–120.
Körner, S. (Hrsg.) [57]: Observation and Interpretation, Proceedings of the 9th Symposium of the Colston Research Society, New York/London 1957.
–, [66]: Experience and Theory, London 1966.
Kneale, W. [49]: Probability and Induction, Oxford [1]1949, [2]1952.
Kraft, V. [50]: Der Wiener Kreis – Der Ursprung des Neopositivismus, Wien 1950.
Koopman, B. [40a]: The axioms and algebra of intuitive probability, AM 41 (1940), S. 269–292.
–, [40b]: The bases of probability, Bulletin of the American Mathematical Society, 46 (1940), S. 763–774.
–, [41]: Intuitive probability and sequences, AM 42 (1941), S. 169–187.
Kuhn, T.S. [62]: The Structure of Scientific Revolutions, Chicago 1962.
Kutschera, F.v. [67]: Elementare Logik, Wien 1967.
–, [71]: Sprachphilosophie, München 1971.
–, [72]: Eine logische Analyse des sprachwissenschaftlichen Feldbegriffs, Studia Leibnitiana, erscheint 1972.
–, [72a]: Ein offenes Problem der subjektiven Wahrscheinlichkeitstheorie, erscheint in Ratio.
–, [72b]: Induction and the empiricist model of knowledge, erscheint in P. Suppes (Hrsg.): Logic, Methology, and Philosophy of Science, Proceedings of the IVth Congress.
–, [73]: Erkenntnistheorie, erscheint 1973.
–, und Breitkopf, A. [71]: Einführung in die moderne Logik, Freiburg 1971.
Kyburg, H.E. [61]: Probability and the Logic of Rational Belief, Middletown 1961.

–, [61a]: A modest proposal concerning simplicity, PR 70 (1961), S. 390–395.
–, [64]: Recent work in inductive logic, APQ 1 (1964), S. 249–287.
–, [65]: Probability, rationality, and a rule of detachment, in Bar-Hillel [65], S. 301–310.
–, [70]: Conjunctivitis, in Swain [70], S. 55–82.
–, [70a]: Probability and Inductive Logic, London 1970.
–, und Nagel, E. (Hrsg.) [63]: Induction: Some Current Issues, Middletown/Conn. 1963.
–, und Smokler, H.E. (Hrsg.) [64]: Studies in Subjective Probability, New York 1964.
Lakatos, I. (Hrsg.) [68]: The Problem of Inductive Logic, Proceedings of the International Colloquium in the Philosophy of Science, London 1965, Bd. 2, Amsterdam 1968.
–, [68a]: Changes in the problem of inductive logic, in Lakatos [68], S. 315–417.
Laplace, P.S. de [12]: Théorie analytique des probabilités, Paris [1]1812.
Lehmann, R.S. [55]: On confirmation and rational betting, JSL 20 (1955), S. 251–262.
Lehrer, K. [70]: Justification, explanation, and induction, in Swain [70], S. 100–133.
Lenk, H. (Hrsg.) [71]: Neue Aspekte der Wissenschaftstheorie, Braunschweig 1971.
Lenzen, W. [72]: Theorien der Bestätigung wissenschaftlicher Hypothesen, Stuttgart 1973
Levi, I. [61]: Decision theory and confirmation, JP 58 (1961), S. 614 bis 625.
–, [63]: Corroboration and rules of acceptance, BJPS 13 (1963), S. 307 bis 313.
–, [67]: Gambling with Truth, New York 1967.
–, [67a]: Information and inference, Synthese 17 (1967), S. 369–391.
–, [69]: Induction and the aims of inquiring, in Morgenbesser, Suppes, White [69], S. 92–111.
–, [70]: Probability and evidence, in Swain [70], S. 134–156.
Lewis, C.I. [46]: An Analysis of Knowledge and Valuation, La Salle/Ill. 1946.
Lewis, H.D. (Hrsg.) [56]: Contemporary British Philosophy, 3rd series, London 1956.
Luce, R.D. und Raiffa, H. [57]: Games and Decisions, New York 1957.

Mackie, J.L. [63]: The paradox of confirmation, BJPS 13 (1963), S. 265–277.
Martin-Löf, P. [66]: Algorithmen und zufällige Folgen, Vervielfältigtes Vortragsmanuskript, Erlangen 1966.

Massey, G. J. [68]: Hempel's criterion of maximal specificity, PST 19 (1968), S. 43–47.
Mises, R. v. [36]: Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit, Wien ²1936.
–, [51]: Positivism: A Study in Human Understanding, Cambridge/Mass. 1951.
Moore, A. [52]: The principle of induction I, II, JP 49 (1952), S. 741 bis 747 und 750–758.
Morgenbesser, S., Suppes, P. und White, M. (Hrsg.) [69]: Philosophy, Science and Method, Essays in Honor of Ernest Nagel, New York 1969.

Nagel, E. [34]: Verifiability, truth, and verification, JP 31 (1934), S. 141–148.
–, [39]: Principles of the Theory of Probability, International Encyclopedia of Unified Science, Bd. I, No. 6, Chicago 1939.
–, [49]: The meaning of reduction in natural sciences, in Stauffer [49], abgedr. in P. Wiener [53].
–, [51]: Mechanistic explanation and organismic biology, PPR 11 (1951), S. 327–338.
–, [61]: The Structure of Science, New York 1961.
–, [63]: Carnap's theory of induction, in Schilpp [63], S. 785–825.
–, Suppes, P. und A. Tarski [62]: Logic, Methodology and Philosophy of Science, Proceedings of the 1960 International Congress, Stanford/Calif. 1962.
Neumann, J. von [32]: Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik, Berlin 1932.
–, und Morgenstern, O. [47]: Theory of Games and Economic Behavior, Princeton ¹1944, ²1947.
Nicod, J. [23]: Le problème logique de l'induction, Paris ¹1923, ²1961 (zitiert).

Oberschelp, W. [60]: Über Einfachheitsprinzipien in der Wahrscheinlichkeitstheorie, AML 5 (1960), S. 3–25.

Pap, A. [55]: Analytische Erkenntnistheorie, Wien 1955.
–, [62]: An Introduction to the Philosophy of Science, New York 1962.
Passmore, J. [62]: Explanation in every day life, in science and in history, in History and Theory 2 (1962), S. 105–123.
Popper, K. [35]: „Induktionslogik" und „Hypothesenwahrscheinlichkeit", Erkenntnis 5 (1935), S. 170–172.
–, [54]: Degree of confirmation, BJPS 5 (1954), S. 143–149 (auch in [66], Anhang *IX).
–, [56]: Three views concerning human knowledge, in H.D. Lewis [56], S. 335–388, 3rd series, abgedr. in und zitiert nach Popper [63].

–, [57]: The propensity interpretation of the calculus of probability, and the quantum theory, in Körner [57], S. 65–70.
–, [57a]: A second note on degree of confirmation, BJPS 7 (1956/57), S. 350–353.
–, [57b]: Probability magic, or knowledge out of ignorance, Dialectica 11 (1957), S. 354–374.
–, [58]: A third note on degree of corroboration or confirmation, BJPS 8 (1958), S. 294–302 (auch in [66], Anhang *IX).
–, [59]: The propensity interpretation of probability, BJPS 10 (1959), S. 25–42.
–, [63]: Conjectures and Refutations – The Growth of Scientific Knowledge, London ²1963, ³1969.
–, [63]: The demarcation between science and metaphysics, in Schilpp [63], S. 183–226.
–, [66]: Logik der Forschung, ¹Wien 1934, ²Tübingen 1966.
Post, H.R. [61]: Simplicity in scientific theories, BJPS 11 (1961), S. 32–41.
Putnam, H. [56]: A definition of confirmation for very rich languages, PS 23 (1956), S. 58–62.
–, [62]: What theories are not, in Nagel, Suppes, Tarski [62], S. 240 bis 251.

Quine, W.V. [48]: On what there is, RM 2 (1948), S. 21–38; abgedruckt und zitiert nach Quine [64].
–, [51]: Two dogmas of empiricism, PR 60 (1951), S. 20–43, abgedr. in Quine [64].
–, [54]: Reduction to a dyadic predicate, JSL 19 (1954), S. 180–182.
–, [63]: On simple theories of a complex world, Synthese 15 (1963), S. 103–106, abgedr. in Quine [66].
–, [64]: From a Logical Point of View, Cambridge/Mass. ²1969.
–, [66]: The Ways of Paradox and Other Essays, New York 1966.
–, [69]: Ontological Relativity and Other Essays, New York 1969.
–, [69a]: Natural kinds, in Quine [69], S. 114–138.

Ramsey, F.P. [31]: The Foundations of Mathematics, and Other Logical Essays, London/New York 1931.
Reichenbach, H. [35]: Wahrscheinlichkeitslehre, Leiden 1935.
–, [38]: Experience and Prediction, Chicago 1938.
–, [49]: The Theory of Probability, Berkeley 1949. (Engl. Übersetzung von [35] mit Zusätzen.)
Rescher, N. [64]: Hypothetical Reasoning, Amsterdam 1964.
–, (Hrsg.) [69]: Studies in the Philosophy of Science, APQ Monograph Series No. 5, Oxford 1969.

Richter, H. [52]: Zur Grundlegung der Wahrscheinlichkeitstheorie, MA, I: 125 (1952), S. 129–139, II: 125 (1953), S. 223–234, III: 125 (1953), S. 335–343, IV: 126 (1953), S. 362–374, V: 128 (1954), S. 305–339.
–, [54]: Zur Begründung der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Dialectica 8 (1954), S. 48–77.
–, [62]: Subjektive Wahrscheinlichkeit und multisubjektive Tests, Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie 1 (1962/63), S. 271–277.
–, [66]: Wahrscheinlichkeitstheorie, Berlin [2]1966.
–, [72]: Eine einfache Axiomatik der subjektiven Wahrscheinlichkeit, im Erscheinen.
Russell, B. [18]: Mysticism and Logic, and Other Essays, [1]New York 1918, zitiert nach der Ausgabe London 1963.
–, [48]: Human Knowledge. Its Scope and Limits, New York 1948.
–, [50]: Logical Positivism, in Russell [56].
–, [56]: Logic and Knowledge: Essays 1901–1950, hrsg. von R.C. Marsh, London 1956.
Ryle, G. [49]: The Concept of Mind, London 1949.

Salmon, W.C. [55]: The short run, PS 22 (1955), S. 214–221.
–, [57]: Should we attempt to justify induction?, PST 8 (1957), S. 33–48.
–, [57a]: The predictive inference, PS 24 (1957), S. 180–190.
–, [63]: On vindicating induction, PS 30 (1963), S. 252–261; auch in Kyburg und Nagel [63].
–, [63a]: Inductive inference, in Baumrin [63], S. 341–370.
–, [67]: The Foundations of Scientific Inference, als Monographie: Pittsburgh 1967; in Mind and Cosmos: Essays in Contemporary Science and Philosophy, Bd. III, University of Pittsburgh Series in the Philosophy of Science, Pittsburgh/Pa. 1966.
–, [68]: The justification of inductive rules of inference, in: Lakatos [68], S. 24–43.
–, Barker, S.F. und Kyburg, H.E. [65]: Symposium: inductive evidence, APQ 2 (1965), S. 265–280.
Savage, L.J. [54]: The Foundations of Statistics, New York 1954.
–, [67]: Implications of personal probability for induction, JP 64 (1967), S. 593–607.
Schaffner, K.F. [67]: Approaches to reduction, PS 34 (1967), S. 137 bis 147.
Scheffler, I. [63]: The Anatomy of Inquiry, New York 1963, [2]1967.
–, [68]: Reflections on the Ramsey method, JP 65 (1968), S. 269–274.
Scheibe, E. [69]: Bemerkungen über den Begriff der Ursache, in Holz und Schickel [69], S. 105–134.

Schilpp, P.A. (Hrsg.) [44]: The Philosophy of Bertrand Russell, La Salle/Ill. [1]1944, [4]1971.
–, (Hrsg.) [63]: The Philosophy of Rudolf Carnap, La Salle/Ill. 1963.
Schlaifer, R. [59]: Probability and Statistics for Business Decisions, New York 1959.
Schlick, M. [31]: Die Kausalität in der gegenwärtigen Physik, Die Naturwissenschaften 19 (1931), abgedr. in M. Schlick: Gesammelte Aufsätze, Wien 1938, S. 41–82.
–, [36]: Meaning and verification, PS 45 (1936), S. 339–369. Abgedr. in Feigl und Sellars [49].
Schnorr, C.P. [71]: Zufälligkeit und Wahrscheinlichkeit, Berlin 1971.
Schoenberg, J. [64]: Confirmation by observation and the paradox of the ravens, BJPS 15 (1964), S. 200–212.
Schwartz, R., Scheffler, I. und Goodman, N. [70]: An improvement in the theory of projectibility, JP 67 (1970), S. 605–608.
Sellars, W. [64]: Induction as vindication, PS 31 (1964), S. 197–231.
Shimony, A. [55]: Coherence and the axiom of confirmation, JSL 20 (1955), S. 1–28.
Simon, H.A. und Rescher, N. [66]: Cause and counterfactual, PS 33 (1966), S. 323–340.
Skyrms, B. [63]: On failing to vindicate induction, PS 30 (1963), S. 252–261.
–, [66]: Nomological necessity and the paradoxes of confirmation, PS 33 (1966), S. 230–249.
Smokler, H. [66]: Goodman's paradox and the problem of rules of acceptance, APQ 3 (1966), S. 71–76.
–, [67]: The equivalence condition, APQ 4 (1967), S. 300–307.
–, [68]: Conflicting concepts of confirmation, JP 65 (1968), S. 300–312.
Stauffer, R.C. (Hrsg.) [49]: Science and Civilisation, Madison/Wisconsin 1949.
Stegmüller, W. [58]: Conditio irrealis, Disposition, Naturgesetz und Induktion, Kantstudien 50 (1958/59), S. 363–390.
–, [65]: Hauptströmungen der Gegenwartsphilosophie, [3]Stuttgart 1965.
–, [66]: Erklärung, Voraussage, wissenschaftliche Systematisierung und nicht-erklärende Information, Ratio 8 (1966), S. 1–22.
–, [69]: Wissenschaftliche Erklärung und Begründung, Berlin 1969.
–, [70]: Theorie und Erfahrung, Berlin 1970.
–, [71]: Das Problem der Induktion: Humes Herausforderung und moderne Antworten, in: H. Lenk [71], S. 13–74.
Storer, Th. [51]: On defining ‚soluble', Analysis 11 (1951), S. 134–137.
Strawson, P.F. [52]: Introduction to Logical Theory, London 1952.
Suppes, P. [51]: A set of independent axioms for extensive quantities, Portugaliae Mathematica 10 (1951), S. 163–172.

–, [56]: The role of subjective probability and utility in decision-making, Proceedings of the 3rd Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probality (1954/55), Bd. V, hrsg. von J. Neyman, Berkeley/Los Angeles 1956.

–, [56a]: Nelson Goodman on the concept of logical simplicity, PS 23 (1956), S. 153–159.

–, [57]: Introduction to Logic, Princeton 1957.

–, [60]: Some open problems in the foundation of subjective probability, in: R.E. Machol (Hrsg.), Information and Decision Processes, New York 1960, S. 162–169.

–, [66]: Probabilistic inference and the concept of total evidence, in Hintikka und Suppes [66], S. 49–65.

–, [66a]: A Bayesian approach to the paradoxes of confirmation, in Hintikka und Suppes [66], S. 198–207.

–, und Winet, M. [55]: An axiomatisation of utility based on utility differences, Management Science 1 (1955), S. 259–270.

–, und Zinnes, J.L. [63]: Basic measurement theory, in Luce, Bush, und Galanter (Hrsg.): Handbook of Mathematical Psychology Bd. I, New York 1963, S. 1–76.

Svenonius, L. [55]: Definability and simplicity, JSL 20 (1955), S. 235 bis 250.

Swain, M. (Hrsg.) [70]: Induction, Acceptance, and Rational Belief, Dordrecht 1970.

Tarski, A. [35]: Einige methodologische Untersuchungen über die Definierbarkeit der Begriffe, Erkenntnis 5 (1935), S. 80–100. Abgedruckt in Tarski [56].

–, [54]: A general theorem concerning the reduction of primitive notions (Abstract), JSL 19 (1954), S. 158.

–, [56]: Logic, Semantics, Metamathematics, Oxford 1956.

Teller, P. [69]: Goodman's theory of projection, BJPS 20 (1969), S. 219–238.

Thomson, J.J. [66a]: „Grue", JP 63 (1966), S. 289–309.

–, [66b]: More grue, JP 63 (1966), S. 528–534.

Vincent, H.R. [61]: A note on some quantitative theories of confirmation, PST 12 (1961), S. 91f.

–, [62]: Popper on qualitative confirmation and disconfirmation, AJP 40 (1962), S. 159–166.

Waismann, F. [30]: Logische Analyse des Wahrscheinlichkeitsbegriffs, Erkenntnis 1 (1930/31), S. 228–248.

Wald, A. [36]: Sur la notion de collectif dans le calcul des probabilités, Comptes rendus de l'Academie des sciences, Paris, t.202, 1936, S. 180–183.
–, [37]: Über die Widerspruchsfreiheit des Kollektivbegriffes, Ergebnisse eines math. Kolloquiums, Nr. 8, Wien 1937, S. 38–72.
Walk, K. [66]: Simplicity, entropy and inductive logic, in Hintikka und Suppes [66], S. 66–80.
Wallace, J.R. [66a]: Goodman, logic, induction, JP 63 (1966), S. 310 bis 328.
–, [66b]: Lawlikeness = truth?, JP 63 (1966), S. 780f.
Whitehead, A.N. [27]: Science and the Modern World, Cambridge 1927.
Wiener, P. (Hrsg.) [53]: Readings in Philosophy of Science, New York 1953.
Wilson, P.R. [64]: On the confirmation paradox, BJPS 15 (1964), S. 196–199.
Wójcicki, R. [66]: Filozofia Nauki W Minnesota Studies, Studia Filozoficzne (1966), S. 143–154.
Woodger, J.H. [52]: Biology and Language, Cambridge 1952.
Wright, G.H. von [51]: A Treatise on Induction and Probability, London 1951.
–, [57]: The Logical Problem of Induction, Oxford [2]1957.
–, [65]: The paradoxes of confirmation, Theoria 31 (1965), S. 255–274.

VERZEICHNIS DER LOGISCHEN UND MATHEMATISCHEN SYMBOLE

Logische Symbole

$\neg$	nicht
$\wedge$	und
$\vee$	oder
$\supset$	impliziert (wenn-, dann)
$\equiv$	äquivalent (genau dann, wenn)
$\bigwedge$	für alle
$\bigvee$	es gibt (mindestens) ein
$\bigvee^{=n}$	es gibt genau n
$=$	identisch
$\neq$	ungleich
$:=$	definitorisch gleich
$\rightarrow$	logische Folge
$\Vdash$	logische Wahrheit

Mengentheoretische Symbole

Λ	leere Menge
$\{x: -\}$	Klasse der x mit –
$\lambda x -$	Klasse der x mit –
$\{x_1, \ldots, x_n\}$	Klasse mit den Elementen $x_1, \ldots, x_n$
$\in$	ist Element von
$\cap$	Durchschnitt
$\cup$	Vereinigung

$-$	Komplement
$\cap$	großer Durchschnitt
$\prod$	großer Durchschnitt
$\cup$	große Vereinigung
$+$	Vereinigung disjunkter Klassen
$\sum$	große Vereinigung disjunkter Klassen
$\subset$	Teilklassenbeziehung

Alle vorstehenden Symbole außer $+$, $\sum$ und $\prod$ werden z. B. in Kutschera [67] definiert.

Mathematische Symbole

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$	Grenzwert der Folge a_n $(n \geq 1)$, d. h. die Zahl r mit $\wedge\varepsilon(\varepsilon > 0 \supset \vee n \wedge m(m \geq n \supset \lvert a_n - r\rvert \leq \varepsilon))$
$\int$	Integral
$n!$	Es ist $0! = 1$ und $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ für $n \geq 1$.
$\binom{n}{k}$	Binomialkoeffizient, definiert durch $\frac{n!}{k!(n-k)!}$
$r^{[n]}$	definiert als $\binom{r}{n} \cdot n!$
$[a, b]$	das abgeschlossene Intervall zwischen a und b, d. h. $\{x: a \leq x \leq b\}$
(a, b)	das offene Intervall zwischen a und b, d. h. $\{x: a < x < b\}$.
$\mathscr{E}$	Erwartungswert

STICHWORTVERZEICHNIS