Kolleg Philosophie

Franz von Kutschera:

Einführung in die Logik der Normen, Werte und Entscheidungen

Franz von Kutschera

Einführung in die Logik der Normen, Werte und Entscheidungen

Verlag Karl Alber Freiburg/München

Herstellung: Union Druckerei GmbH Stuttgart
ISBN 3-495-47269-X

Inhalt

Einleitung

Wenn wir uns in diesem Buch mit Normen, d. h. mit Geboten, Verboten und Erlaubnissen, mit den Werten von Handlungszielen und mit Kriterien für rationale Entscheidungen befassen, so bewegen wir uns in dem weiten Rahmen derjenigen theoretischen Untersuchungen, die sich mit Handlungen und Verhaltensweisen befassen.

Uns geht es dabei nicht um *empirische* Untersuchungen. Wir fragen nicht danach, wie sich Menschen unter gewissen Bedingungen verhalten, welche Normen sozialen Verhaltens in unserer oder anderen Gesellschaften gelten, oder welche Wertvorstellungen hinter den bei uns oder anderen geltenden moralischen Verhaltensregeln stehen. Solche Untersuchungen gehören ins Gebiet der Psychologie, Soziologie oder Ethnologie.

Es geht im folgenden auch nicht um *normative* Untersuchungen im materialen Sinn. Wir stellen keine Regeln dafür auf, was man tun oder wie man sich verhalten soll. Wir geben keine Antwort auf Fragen nach den höchsten Werten oder nach der Verbindlichkeit gewisser Normen. Obwohl wir uns also mit Normen, Werten und Entscheidungen befassen, stellen wir doch keine Normen auf und nehmen keine Wertungen vor.

Wir wollen hier also keine *Lebenshilfe* geben, sondern nur eine *Denkhilfe:* Unsere Untersuchungen sind im weiteren Sinn des Wortes *logische*, d. h. formale Untersuchungen. Wir analysieren normative Begriffe und Aussagen, befassen uns mit der Struktur von Wertaussagen und dem Zusammenhang zwischen den Wertansichten und den Annahmen einer Person über die Welt und den Entscheidungen, die für sie aufgrund dieser Ansichten und Annahmen in einer konkreten Situation optimal sind.

Das erste Kapitel befaßt sich mit der Logik der Normen oder der *deontischen Logik*. Da es auf diesem Gebiete zwar eine Vielfalt von Ansätzen gibt, die sich aber oft schon in den Grundlagen erheblich unterscheiden, die teilweise mit vielen unserer Ansicht nach durchaus ephemeren Problemen belastet sind und oft auch nicht die in logischen Untersuchungen notwendige Präzision erreichen, stellen wir die Normlogik ausführlicher dar, als das z.B. für die Grundlagen der Entscheidungstheorie notwendig ist. Wir hoffen, daß die Diskussion der grundlegenden Probleme in den ersten Abschnitten dieses Kapitels dem Leser auch den Zugang zur einschlägigen Literatur erleichtern wird. Ein ausführliches Literaturverzeichnis zur deontischen Logik findet sich z. B. in N. Rescher [66].[1] Für eine historische Darstellung vgl. z. B. Foellesdal und Hilpinen [71]. Die durch einen Stern gekennzeichneten Abschnitte können von dem Leser, der an mehr technischen Details nicht interessiert ist, überschlagen werden. Die Verständlichkeit der übrigen Abschnitte wird dadurch nicht berührt.

Die Kapitel 2 mit 4 behandeln die elementaren Grundbegriffe und Prinzipien der *Entscheidungstheorie*. Sie lassen sich auch unabhängig vom ersten Kapitel lesen. Die Entscheidungstheorie ist heute innerhalb der mathematischen Statistik eine sehr umfangreiche und schwierige Spezialdisziplin. Die einfachsten Grundlagen kann man aber auch ohne höhere Mathematik darstellen, und sie dürfen in einem Buch, das sich mit Normen und Werten befaßt, nicht fehlen; denn der Zusammenhang zwischen der Bewertung der Ziele von Handlungen und den für sie geltenden normativen Prinzipien wird durch entscheidungstheoretische Kriterien hergestellt.

Das zweite Kapitel charakterisiert den *subjektiven Wahrscheinlichkeitsbegriff*, der in Entscheidungskontexten eine Rolle spielt. Im dritten Kapitel werden *Wertstrukturen* behandelt und die wichtigsten Eigenschaften von Wertbegriffen. Im vierten Kapitel wird dann erörtert, wie sich aus der Wertordnung

[1] Die Zahlen in eckigen Klammern bezeichnen jeweils das Erscheinungsjahr der im Literaturverzeichnis unter dem Verfassernamen genannten Werke.

einer Person und ihren Wahrscheinlichkeitsannahmen eine *Präferenzordnung* für ihre Handlungen ergibt, in der die vermutlich nützlicheren Handlungen den anderen vorgezogen werden. Und es wird erörtert, inwieweit sich umgekehrt aus den Präferenzen einer Person für Handlungen Rückschlüsse auf ihre Wertansichten und Wahrscheinlichkeitsannahmen ziehen lassen.

Im fünften Kapitel wird dann der Zusammenhang zwischen Normen und Werten hergestellt. Dabei wird ein komparativer Normenbegriff, der Begriff der *normativen Präferenz* verwendet. Es wird untersucht, ob sich aus Werten Normen ableiten lassen und umgekehrt; ob man also Normensysteme durch Wertsysteme begründen und charakterisieren kann, und in welchem Sinn man aus einem Normensystem auf die dahinterstehenden Werthaltungen zurückschließen kann. Diese in der Literatur bisher zu wenig beachteten Beziehungen zwischen Normen und Werten sind für viele Untersuchungen von Handlungen und Verhaltensweisen ebenso wichtig wie für die Analyse ethischer oder juristischer Theorien.

Die Relevanz solcher logischer Untersuchungen über Normen, Werte und Entscheidungen würde unterschätzt, wenn man sie als „bloß formal" charakterisierte. Die Untersuchungen gehören sicher nur zur *Propädeutik* derjenigen Theorien, die sich z.B. auf dem Gebiet der Ethik oder Rechtstheorie inhaltlich mit Normen und Werten befassen. Zur Propädeutik einer Disziplin gehört aber das, was man eigentlich schon wissen müßte (oft aber nicht weiß), bevor man sich deren Einzelproblemen zuwendet. Man überschätzt die Kraft naturwüchsiger Intuition bei weitem, wenn man glaubt, in komplizierten Kontexten ohne jede Analyse der formalen Strukturen der verwendeten Sprache und der Begriffe auszukommen. Ein Blick in die ethische Literatur zeigt, wie notwendig dort „bloß formale" Kenntnisse oft wären, und in der Jurisprudenz ist seit der verdienstvollen Arbeit von U. Klug [51] das Interesse an der „Rechtslogik" ständig im Wachsen. Man vgl. dazu auch die neueren Arbeiten von G. Kalinowski [65] und O. Weinberger [70].

Das Buch stellt eine systematische, aber elementare Einführung in die Grundlagen von Norm- und Wertlogik und Entscheidungstheorie dar. Dabei wird besonderes Gewicht auf den intuitiven Zugang zu den Begriffsbildungen und Prinzipien gelegt. Auf kompliziertere logische oder mathematische Fragen, wie sie z.B. in der Semantik der deontischen Logik oder in Wahrscheinlichkeits- und Entscheidungstheorie auftreten, gehen wir nicht ein. Die Arbeit soll einer ersten Orientierung dienen. Daher wird auch auf eine kritische Auseinandersetzung mit der einschlägigen Literatur weitgehend verzichtet. Im Rahmen einer Einführung soll die Arbeit aber gründliche Kenntnisse vermitteln und daher wurde auf Präzision Wert gelegt, und diese Präzision ist nicht ohne einige Mühe zu haben. Logikkenntnisse sind, wie immer, sehr nützlich, aber nicht notwendig. Wer dennoch logische Hilfestellung haben möchte, findet sie z.B. in Kutschera und Breitkopf [71].

1. Deontische Logik

In diesem ersten Kapitel wollen wir uns mit der *Logik der Normen* oder der *deontischen Logik*, wie man heute meist sagt[1], befassen. In den ersten sechs Abschnitten führen wir grundlegende Unterscheidungen und Begriffe ein, sprechen über die Struktur von Aussagen über Normen, legen eine symbolische Schreibweise für solche Aussagen fest und diskutieren einige grundsätzliche Probleme, die sich bei der Standardisierung von Aussagen über Normen ergeben. Dabei zeigt sich schon, daß selbst die einfachsten Grundlagen der deontischen Logik umstritten sind. In den nächsten sechs Abschnitten wird dann ein formales System der deontischen Logik in Form eines axiomatischen Kalküls entwickelt. Im letzten Abschnitt diskutieren wir die Frage, ob aus Tatsachenbehauptungen Normen abgeleitet werden können, ob es also eine naturalistische Begründung von Normensystemen gibt.

1.1 Normen und Imperative

Als *Normsätze* bezeichnen wir Aussagen, mit denen wir behaupten, daß gewisse Handlungen geboten, verboten oder erlaubt sind.

Beispiele solcher Sätze sind: „Man darf im Schachspiel einen Läufer nur in der Diagonalen ziehen“, „Man darf nicht lügen“, „Es ist verboten, auf der Autobahn zu parken“, „Niemand

[1] Die Bezeichnung „deontische Logik“ ist 1951 von C. D. Broad geprägt worden, ist also erst jüngeren Datums. Vgl. dazu G. H. von Wright [68], S. 11.

darf einen anderen töten, es sei denn in Notwehr", „Man muß im Verkehr Rücksicht auf die anderen Verkehrsteilnehmer nehmen" und „Auf gewissen Autobahnabschnitten ist es geboten, eine gewisse Mindestgeschwindigkeit einzuhalten".

Solche Normsätze sind als Behauptungen wahr oder falsch. Es ist z.B. richtig, daß man im Schachspiel den Läufer nur in der Diagonalen ziehen darf, und der Satz „Der Läufer darf wie ein Turm gezogen werden" ist falsch. Man muß daher Normsätze von *Imperativen* unterscheiden: Ein *Imperativ* ist eine sprachliche Form des Gebietens, Verbietens, Erlaubens, Aufforderns etc., wie z.B. „Schließ die Tür!", „Lüge nicht!", „Überweisen Sie den Betrag auf mein Konto!" usw. Imperative stellen Handlungen dar, die sich in sprachlichen Äußerungen vollziehen. Sie sind als Handlungen weder wahr noch falsch. Man kann nicht sagen, die Äußerung „Lüge nicht!" sei wahr oder falsch, wohl aber ist der Normsatz „Man darf nicht lügen" wahr oder falsch.

Sprachlich haben Imperative jedoch oft dieselbe Form wie Normsätze: So kann man die Aussagen „Du sollst die Tür schließen" und „Du sollst nicht lügen" sowohl als Imperative deuten, d.h. als Aufforderungen, etwas zu tun oder zu unterlassen, wie auch als Normsätze, d.h. als Behauptung darüber, daß gewisse Verpflichtungen oder Obligationen bestehen. Wenn die Mutter ihr Kind auffordert: „Du sollst jetzt deine Schulaufgaben machen!", so ist das ein Imperativ; wenn ein Bruder des Kindes die Anordnung der Mutter übermittelt und sagt: „Du sollst jetzt deine Schulaufgaben machen!", so ist das ein Normsatz, der aufgrund der Anordnung der Mutter und ihrem Weisungsrecht wahr ist.

Entsprechendes gilt für *Wunschsätze*. Solche Sätze wie z.B. „Es soll regnen!" oder „Alle Menschen sollen frei von Furcht leben!", sind, wie Imperative, keine Aussagen, die wahr oder falsch sind, keine Behauptungen, die besagen, daß etwas der Fall ist. Sie drücken vielmehr einen Wunsch des Sprechers aus, wie Imperative einen Akt des Ge- oder Verbietens oder Erlaubens des Sprechers ausdrücken.

Durch Imperative können Normen gesetzt werden. Eine Aufforderung, Anordnung oder Erlaubnis allein bewirkt allerdings noch nicht, daß eine Norm besteht, vielmehr muß eine *Anordnungsbefugnis* des Sprechers vorliegen, damit seine Anordnung im Sinn einer Norm verbindlich wird: Erst aufgrund der Weisungsbefugnis eines Verkehrspolizisten sind seine Anordnungen für mich verbindlich. Diese Weisungsbefugnis drückt sich aber in einer gesetzlichen Norm aus wie „Verkehrsteilnehmer haben den Anordnungen der Polizei Folge zu leisten", aus der sich dann aufgrund der konkreten Anordnung eines Polizisten in einer bestimmten Situation eine bestimmte Norm herleitet. Imperative können also Normen in Geltung setzen, aber nur aufgrund anderer Normen, und sie sind auch, wo sie Normen in Geltung setzen, als Handlungen von den in Geltung gesetzten Normen, bzw. von Aussagen über das Bestehen von Normen zu unterscheiden.

Normsätze wie Imperative muß man endlich von Aussagen darüber unterscheiden, daß eine Norm *gesetzt* wird; daß z.B. ein Imperativ ausgesprochen wird oder eine Erlaubnis gegeben wurde. Solche Aussagen sind z.B. „Die Regierung hat angeordnet, daß morgen die Gebäude beflaggt werden" oder „Herr Kunz erlaubt, daß Frl. Maier morgen ihren Dienst erst um 11 Uhr antritt". Sätze über Normsetzungen sollen im Hinblick auf den Gebrauch, den wir später von ihnen machen, nicht implizieren, daß eine Norm besteht; sie beinhalten nur, daß ein Gebot, ein Verbot oder eine Erlaubnis ausgesprochen wird – ob dadurch die entsprechende Norm *in Geltung gesetzt* wird, bleibt offen. So ist der zweite Beispielssatz auch dann richtig, wenn Herr Kunz sagt: „Frl. Maier braucht ihren Dienst morgen erst um 11 Uhr anzutreten", obwohl er zu einer solchen Erlaubnis nicht berechtigt ist und diese daher nicht besteht. „Eine Norm setzen" heißt also in diesem Sinn nicht „eine Norm *in Geltung* setzen".

Ein Imperativ setzt eine Norm, ein Normsatz behauptet, daß eine Norm gilt, und eine Aussage über eine Normsetzung behauptet, daß jemand eine Norm gesetzt hat. Ein Satz über eine Normsetzung setzt weder eine Norm noch behauptet er, daß eine Norm gilt. Ein Normsatz setzt keine Norm und behauptet nicht, daß jemand eine Norm gesetzt hat. Und ein Imperativ behauptet nichts; er behauptet also insbesondere nichts über Normsetzungen oder die Geltung von Normen.

Wenn wir im folgenden die deontische Logik als Logik der Normsätze aufbauen und nicht, wie in anderen Ansätzen, als Logik der Imperative[2], so hat das folgenden Grund:

Während sich Normsätze aus anderen Normsätzen ableiten lassen, lassen sich Imperative als Handlungen nicht aus anderen Imperativen ableiten. Folgebeziehungen sind nur für Aussagen, nicht aber für Handlungen erklärt. Wenn es z.B. verboten ist, andere Verkehrsteilnehmer unnötig zu gefährden, und zu schnelles Fahren impliziert, daß man andere Verkehrsteilnehmer unnötig gefährdet, so folgt daraus, daß auch zu schnelles Fahren verboten ist. Aus dem Imperativ „Gefährde andere Verkehrsteilnehmer nicht unnötig!“ folgt aber kein Imperativ „Fahre nicht zu schnell!“. Denn wenn jemand die eine Aufforderung an jemanden richtet, folgt daraus nicht, daß er auch die andere Aufforderung an ihn richtet. Wo aber keine Folgebeziehungen bestehen, bleibt für eine Logik kein Raum. In der deontischen Logik geht es ja auch gerade darum, festzulegen, welche Normsätze aus anderen Normsätzen folgen, welche Anwendungen sich aus allgemeinen Normen im Einzelfall ergeben. Und der Gesetzgeber käme in erhebliche Schwierigkeiten, wenn er die Regelungen, die er für die unübersehbar vielen und unvoraussehbaren Einzelfälle des Alltags treffen will, nicht in allgemeine Normen zusammenfassen könnte, aus denen diese Regelungen folgen, sondern wenn er alle einzelnen Regelungen explizit in gesonderten Imperativen festhalten müßte.

1.2 Die Form einfacher Normsätze

Wir wollen nun die Normsätze in eine kanonische Form bringen, denn ohne Standardformulierungen zugrunde zu legen, kann man keine präzise Logik solcher Sätze entwickeln.

[2] Vgl. dazu z. B. N. Rescher [66].

Elementare Normsätze haben die Gestalt, oder lassen sich auf die Gestalt bringen „Es ist geboten –", „Es ist verboten –", „Es ist erlaubt –". Die Ausdrücke „Es ist geboten", „Es ist verboten", „Es ist erlaubt" bezeichnet man als *deontische Operatoren*. Wir symbolisieren sie durch die Buchstaben O, V und E; diese Symbole sind aber keineswegs einheitlich in der Literatur. Es bedeutet also

„O(–)" soviel wie „Es ist geboten –"[3],
„V(–)" soviel wie „Es ist verboten –", und
„E(–)" soviel wie „Es ist erlaubt –".

Welche Ausdrücke treten nun an den Stellen auf, die wir durch einen Strich „–" gekennzeichnet haben? Was sind die *Argumente* der deontischen Operatoren?

Geboten, verboten oder erlaubt sind zunächst *Handlungen*. Sollen wir aber als Argumente der deontischen Operatoren *Sätze* wählen, die Handlungen ausdrücken, z.B. „Es ist verboten, *daß* man raucht", oder *Prädikate*, die Handlungsweisen ausdrücken, z.B. „*Rauchen* ist verboten" oder „Es ist verboten *zu rauchen*"?

Wir werden im folgenden Normsätze immer in der ersten Weise formulieren, also die deontischen Operatoren auf Sätze beziehen. Denn für Sätze als Argumente sind die üblichen logischen Satzverknüpfungen erklärt, d. h. Ausdrücke wie „und", „nicht", „oder", „wenn – dann", etc., so daß man ohne weiteres im Argument logische Satzkomposita einsetzen kann. Ferner erlaubt diese Formulierung Unterscheidungen, die in der anderen Form nicht ohne weiteres möglich sind. So läßt sich der Unterschied zwischen den Sätzen „Irgend jemand soll die Nachricht überbringen" und „Eine bestimmte Person soll die Nachricht überbringen" wiedergeben durch „Es ist geboten, *daß es jemand gibt, der die Nachricht überbringt*" und „Es gibt jemand, so daß es geboten ist, *daß er die Nachricht überbringt*", während der Satz „Es gibt jemanden, dem es geboten ist, *die Nachricht zu überbringen*" nur den zweiten Sachverhalt ausdrückt.

[3] Das Symbol „O" leitet sich vom Wort „obligatorisch" her.

Wenn wir nun Sätze über Handlungen durch die Buchstaben A, B, C, ... andeuten, so können wir symbolisch schreiben
„O(A)" für „Es ist geboten, daß A",
„V(B)" für „Es ist verboten, daß B" und
„E(C)" für „Es ist erlaubt, daß C".

Die Unterscheidungen, die wir gerade besprochen haben, zeigen nun schon, daß es empfehlenswert ist, die Symbole der elementaren Logik einzuführen. Diese Logik wird z.B. in Kutschera und Breitkopf [71] behandelt. Dort findet man genauere Angaben über logische Details. Wir benötigen im folgenden, abgesehen von den mit „*" gekennzeichneten schwierigeren Abschnitten[4], keine speziellen Logikkenntnisse, sondern nur einige logische Symbole:

Stehen die Buchstaben A, B, C, ... wieder für Sätze, so gilt:

„$\neg A$" bedeutet „nicht A" oder „Es ist nicht der Fall, daß A".

„$A \wedge B$" bedeutet „A und B".

„$A \vee B$" bedeutet „A oder B" (im nichtausschließenden Sinn des „oder", d. h. ein Satz „$A \vee B$" ist auch dann wahr, wenn sowohl A wie auch B wahr sind).

„$A \supset B$" bedeutet ungefähr soviel wie „wenn A, dann B" (genauer bedeutet „$A \supset B$" soviel wie „$(\neg A) \vee B$").

„$A \equiv B$" bedeutet ungefähr soviel wie „A genau dann, wenn B" (genauer bedeutet „$A \equiv B$" soviel wie „$(A \supset B) \wedge (B \supset A)$").

Wir nennen die Symbole $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\supset$, $\equiv$ *aussagenlogische Operatoren*. Man bezeichnet $\neg$ als Operator der *Negation*, $\wedge$ als Operator der *Konjunktion*, $\vee$ als Operator der *Adjunktion* (oder *Disjunktion*), $\supset$ als Operator der *Implikation* und $\equiv$ als Operator der *Äquivalenz*. Die Logik, die sich mit Sätzen befaßt, die nur mit solchen aussagenlogischen Operatoren gebildet sind, nennt man *Aussagenlogik*. Um bei komplizierten aussagenlogischen Kompositionen Klammern einzusparen (mit denen man, wie in der Mathematik, andeutet, was alles zum Argument eines Operators gehört), legt man fest, daß in der Reihe $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\supset$, $\equiv$ die weiter links stehenden Operatoren stärker binden als

[4] Vgl. dazu die Einleitung S. 8.

die weiter rechts stehenden Operatoren. Man kann also statt „$(\neg A) \wedge B$" (die Konjunktion aus $\neg A$ und B, z.B. „Fritz fährt nicht nach Italien und Hans fährt nach Schweden") schreiben „$\neg A \wedge B$", aber statt „$\neg(A \wedge B)$" (die Negation der Konjunktion aus A und B, z.B. „Es ist nicht der Fall, daß Fritz nach Italien fährt und (zugleich) Hans nach Schweden") kann man nicht „$\neg A \wedge B$" schreiben.

In der *Prädikatenlogik* stellt man auch dar, wie die Sätze, die wir in der Aussagenlogik durch A, B, C, ... symbolisieren, aus Prädikaten und Eigennamen zusammengesetzt sind. *Eigennamen* sind dabei Ausdrücke, die bestimmte einzelne Gegenstände, Tiere, Pflanzen, Städte, Sterne, Personen – wir sagen zusammenfassend *Objekte* – bezeichnen, wie „Fritz Meier", „München", „Die Sonne", etc. *Prädikate im logischen Sinn* sind die Ausdrücke, die in einfachen Sätzen übrig bleiben, wenn wir einen oder mehrere Eigennamen herausstreichen. Aus dem Satz „Fritz friert" entsteht das Prädikat „– friert" durch Streichung des Eigennamens „Fritz". Aus dem Satz „Hans liebt Eva" können wir die beiden *einstelligen* Prädikate „–liebt Eva" und „Hans liebt ..." und das *zweistellige* Prädikat „– liebt ..." erzeugen. Wir unterscheiden also Prädikate verschiedener Stellenzahl: Ein Prädikat ist n-stellig ($n \geq 1$), wenn es n *Leerstellen* enthält (wir haben sie durch Striche und Punkte markiert), so daß man durch Einsetzung von n Eigennamen in diese Leerstellen aus dem Prädikat wieder einen Satz erhält. Aus dem Satz „München liegt zwischen Garmisch und Nürnberg" erhält man z.B. das dreistellige Prädikat „– liegt zwischen ... und ---".

Wir symbolisieren einfache Prädikate durch die Buchstaben F, G, H, ... und Eigennamen durch die Buchstaben a, b, c, ... Wenn man dann die elementaren Sätze in der aus der Mathematik geläufigen Funktionsschreibweise formuliert, so besagt also z. B. der Satz

„F(a)", daß a die Eigenschaft F hat,

„G(a, b)", daß a in der Beziehung G zu b steht,

„H(a, b, c)", daß a, b und c in der Beziehung H zueinander stehen, usf. Und steht „H" für das Prädikat „– liegt zwischen ... und ---" und steht „a" für „München", „b" für „Garmisch" und „c“ für „Nürnberg“, so bedeutet „H(a,b,c)“ soviel wie „München liegt zwischen Garmisch und Nürnberg“.

In der Prädikatenlogik führt man auch zwei neue (prädikatenlogische) Operatoren ein, den *Alloperator* Λ zum Ausdruck der *Generalisierung* und den Existenzoperator V zum Ausdruck der *Partikularisierung.* Allsätze kann man auf die Form bringen „Für jedes Ding gilt: es ist ein F“, wobei F ein einstelliges Prädikat ist. Statt dessen kann man auch schreiben, indem man das Pronomen „es“ durch eine *Variable* x,y,z, ... ersetzt: „Für jedes Ding x gilt: x ist ein F“ oder „Für jedes Ding x gilt: F(x)“. Statt dessen schreibt man mit dem Alloperator kurz „$\Lambda x F(x)$“. Entsprechend schreibt man „$V x F(x)$“ für „Es gibt (mindestens) ein Ding x, für das gilt: F(x)“. Man kann auch lesen:

„$\Lambda x F(x)$“ als „Alle x sind F“, und

„$V x F(x)$“ als „Einige x sind F“.

Es besagen also z.B. die Formeln

$\Lambda x(F(x) \supset G(x))$	– Alle Dinge, die die Eigenschaft F haben, haben auch die Eigenschaft G – oder: Alle Fs sind G.
$\Lambda x(F(x) \supset \neg G(x))$	– Alle Fs sind nicht G.
$V x(F(x) \wedge G(x))$	– Es gibt Dinge, die sowohl die Eigenschaft F wie auch die Eigenschaft G haben, oder: Einige Fs sind G.
$V x(F(x) \wedge \neg G(x))$	– Es gibt Dinge, welche die Eigenschaft F, nicht aber die Eigenschaft G haben, oder: Einige Fs sind nicht G.

Die Ausdrücke Λx, $V y$, die aus All-, bzw. Existenzoperator und einer Variablen bestehen, bezeichnet man auch als *Quantoren.*

Im folgenden stellen wir Prädikate, gleich ob einfach oder zusammengesetzt, auch durch Ausdrücke wie A(x), B(x,y), C(x,y,z) usw. dar.

Wenn wir nun auf unser obiges Problem zurückkommen, welche Ausdrücke man als Argumente der deontischen Operatoren ansehen soll, so können wir sagen: Da Handlungen durch Prädikate ausgedrückt werden, stehen z.B. bei dem Operator O die beiden Grundformen:

1) $O(a,F)$ – dem a ist es geboten, F zu tun, und
2) $O(F(a))$ – es ist geboten, daß a F tut
zur Auswahl.

Nun kann man aber erstens im Fall (2) im Argument des Operators O beliebige logische Kompositionen von Sätzen wie $O(A \wedge B)$, $O(\bigwedge x A(x))$, etc. einsetzen, während eine Konjunktion für Prädikate nicht ohne weiteres definiert ist. Und man kann im Fall (2) unterscheiden zwischen $O(\bigvee x F(x))$ und $\bigvee x O(F(x))$ (zwischen „Es ist geboten, daß jemand F tut" und „Es gibt jemanden, dem es geboten ist, F zu tun"). Im Fall (1) kann man aber nur die zweite Aussage (durch $\bigvee x O(x,F)$) wiedergeben, die erste aber nicht. Die zweite Schreibweise sichert uns also die größeren Ausdrucksmöglichkeiten.

In dieser Schreibweise stellen wir Gebote, Verbote und Erlaubnisse von Handlungsweisen, die nicht an bestimmte Personen oder Gruppen adressiert sind („Es ist verboten zu rauchen", „Es ist geboten, die Steuern pünktlich zu entrichten"), als generelle Gebote, Verbote und Erlaubnisse in der Form $\bigwedge x O(A(x))$, $\bigwedge x V(A(x))$ oder $\bigwedge x E(A(x))$ („Allen Personen ist es geboten, bzw. verboten oder erlaubt, A zu tun") dar.

Wir können nun schon einige einfache deontisch-logische Prinzipien formulieren, in denen sich unser Verständnis der deontischen Operatoren ausdrückt:

T1.2–1: $O(A \wedge B) \equiv O(A) \wedge O(B)$

Wenn es geboten ist, sowohl A wie auch B zu tun, so ist es sowohl geboten, A zu tun, wie auch, B zu tun. Und ist es geboten, A zu tun, und ist es auch geboten, B zu tun, so ist es geboten, sowohl A wie B zu tun.

Wenn es z.B. geboten ist, auf der rechten Straßenseite und nicht schneller als 50 km/h zu fahren, so ist es sowohl geboten, rechts zu fahren, als auch, nicht schneller als 50 km/h zu fahren, und umgekehrt.

T1.2–2: $O(A) \vee O(B) \supset O(A \vee B)$

Ist es geboten, A zu tun, oder ist es geboten, B zu tun, so ist es geboten, A oder B zu tun.

Wenn es z.B. geboten ist, an einer Kreuzung rechts abzubiegen, oder wenn es geboten ist, an der Kreuzung links abzubiegen, so ist es auch geboten, an der Kreuzung rechts oder links abzubiegen.

Die Umkehrung gilt dagegen nicht: Ist es z.B. geboten, zu rauchen oder nicht zu rauchen (eine triviale Forderung, der man genügt, wie immer man sich verhält), so folgt daraus nicht, daß es geboten ist, zu rauchen, oder daß es geboten ist, nicht zu rauchen.

In dem Prinzip T1.2–2 hat man manchmal eine Paradoxie vermutet[5]: Aus dem Gebot $O(A)$, nicht zu stehlen, folgt rein logisch $O(A) \vee O(B)$, also nach T1.2–2 das Gebot $O(A \vee B)$, nicht zu stehlen oder zu lügen, dem man durch Lügen Genüge tut. – Dazu ist zu sagen: Natürlich kann man mit T1.2–2 die Normsätze beliebig abschwächen, aber da die ursprüngliche Norm $O(A)$, nicht zu stehlen, weiter besteht und nach T1.2–2 nicht etwa durch $O(A \vee B)$ ersetzt wird, kann man ihr nicht durch Lügen Genüge tun. Neben $O(A)$ gibt es zudem noch andere Normen, die das Lügen verbieten, so daß man nicht sagen kann, man verhalte sich mit dem Lügen normgerecht: Normgerecht verhält man sich nur, wenn man *alle* bestehenden Normen erfüllt.

T1.2–3: $O(A \supset B) \supset (O(A) \supset O(B))$

Wenn es geboten ist, falls man A tut, auch B zu tun, so ist es, falls es geboten ist, A zu tun, auch geboten, B zu tun.

Wenn es z.B. geboten ist, falls man die linke Fahrbahn einer Autobahnstrecke benützt, schneller als 80 km/h zu fahren, so ist es geboten, schneller als 80 km/h zu fahren, sofern es geboten ist, die linke Fahrbahn zu benützen.

Die Umkehrung gilt jedoch nicht: Wenn es, falls geboten ist, die linke Fahrbahn zu benützen, auch geboten ist, schneller als 80 km/h zu fahren, so folgt daraus nicht, daß es geboten ist, falls man die linke Fahrbahn benützt, schneller als 80 km/h zu fahren – es könnte ja sein, daß keinerlei einschlägiges Gebot besteht: es ist dann $O(A)$ falsch, also nach der Interpretation der Implikation $O(A) \supset O(B)$ wahr, aber $O(A \supset B)$ falsch.

[5] Man spricht auch von der *Ross'schen Paradoxie*, weil sie zuerst von A. Ross in [41] diskutiert wurde.

T1.2–4: $O(A \equiv B) \supset (O(A) \equiv O(B))$

Dieses Prinzip folgt logisch aus T1.2–1 und T1.2–3 und der Interpretation der Äquivalenz. Denn aus $O(A \equiv B)$ folgt $O((A \supset B) \wedge (B \supset A))$, daraus nach T1.2–1 $O(A \supset B)$ und $O(B \supset A)$; damit erhält man nach T1.2–3 $O(A) \supset O(B)$ und $O(B) \supset O(A)$, also $O(A) \equiv O(B)$. Man kann sich den Inhalt dieses Prinzips an dem gleichen Beispiel verdeutlichen, das wir unter T1.2–3 gebracht haben. An diesem Beispiel überlegt man sich auch wieder leicht, daß die Umkehrung von T1.2–4 nicht gilt.

T1.2–5: Folgt der Satz B logisch aus A – symbolisch $A \rightarrow B$ – so gilt $O(A) \supset O(B)$.

Wenn es geboten ist, A zu tun, und wenn A tun rein logisch impliziert, daß man auch B tut, so ist es auch geboten, B zu tun.

Daraus folgt:

T1.2–6: Sind die Sätze A und B logisch äquivalent, d. h. gilt sowohl $A \rightarrow B$ wie auch $B \rightarrow A$ – wir schreiben dafür auch $A \leftrightarrow B$ – so gilt $O(A) \equiv O(B)$, und ebenso $E(A) \equiv E(B)$ und $V(A) \equiv V(B)$.

Man wird Gebote, Erlaubnisse und Verbote in dem Sinn *objektiv* verstehen, daß es für ihre Gültigkeit oder Ungültigkeit nicht auf ihre Formulierung ankommt, auf logisch unerhebliche Differenzen ihres Ausdrucks, sondern nur auf materiale Unterschiede.

T1.2–7: $O(\neg A) \equiv V(A)$

Es ist genau dann verboten, A zu tun, wenn es geboten ist, A nicht zu tun (A zu unterlassen).

Wenn es geboten ist, nicht zu lügen, so ist Lügen verboten, und umgekehrt. Man kann demnach Verbote als Gebote der Unterlassung verstehen.

T1.2–8: $O(A) \equiv V(\neg A)$

Es ist genau dann geboten, A zu tun, wenn es verboten ist, A zu unterlassen.

Das folgt mit T1.2–6 und wegen der logischen Äquivalenz von $\neg\neg A$ und A aus T1.2–7; denn nach T1.2–7 gilt $O(\neg\neg A) \equiv V(\neg A)$, also nach T1.2–6 $O(A) \equiv V(\neg A)$.

T1.2–9: Aus $A \rightarrow B$ folgt $V(B) \supset V(A)$.

Impliziert A tun rein logisch, daß man auch B tut, und ist B tun verboten, so ist auch A tun verboten.

Das ergibt sich mit T1.2–7 aus T1.2–5: Aus $A \rightarrow B$ folgt $\neg B \rightarrow \neg A$, also nach T1.2–5 $O(\neg B) \supset O(\neg A)$, also nach T1.2–7 $V(B) \supset V(A)$.

T1.2–10: $V(A \vee B) \equiv V(A) \wedge V(B)$

Wenn es verboten ist, A oder B zu tun, so ist es sowohl verboten, A zu tun, wie auch, B zu tun; und umgekehrt. Das ergibt sich aus T1.2–1, T1.2–6 und T1.2–8.

T1.2–11: $V(A) \vee V(B) \supset V(A \wedge B)$

Wenn es verboten ist, A zu tun, oder wenn es verboten ist, B zu tun, dann ist es auch verboten, A und B zu tun. Das ergibt sich aus T1.2–2, T1.2–6 und T1.2–8.

T1.2–12: $O(A) \supset E(A)$

Was geboten ist, ist auch erlaubt. Die Umkehrung gilt jedoch nicht: Wenn es erlaubt ist zu rauchen, so folgt daraus nicht, daß es auch geboten ist zu rauchen.

T1.2–13: $E(A) \equiv \neg V(A)$

Was erlaubt ist, ist nicht verboten. Und was nicht verboten ist, das ist erlaubt.

T1.2–14: $E(A \vee B) \equiv E(A) \vee E(B)$

Wenn es erlaubt ist, A oder B zu tun, so ist es auch erlaubt, A zu tun, oder es ist erlaubt, B zu tun, und umgekehrt.

Auch in diesem Prinzip hat man eine Paradoxie gesehen[6]: Wenn es erlaubt ist, zu rauchen, so ist es nach T1.2–14 auch

---

[6] G. H. von Wright diskutiert sie in [68], S. 21–36 und spricht von dem *paradox of free choice permission.*

erlaubt zu rauchen oder zu stehlen. Aber die Erlaubnis, A oder B zu tun, beinhaltet nicht die Erlaubnis, *nach freier Wahl* A oder B zu tun, sondern besagt nur, daß nicht beide Handlungen verboten sind, daß also mindestens eine Handlung erlaubt ist; man darf also rauchen oder stehlen, insofern man rauchen darf. Wenn man stiehlt, kommt man mit dem Gebot, nicht zu stehlen, in Konflikt. Freilich sagt man umgangssprachlich manchmal „A oder B sind erlaubt" im Sinn von „A *und* B sind erlaubt"; aber aus einer solchen ungenauen Sprachverwendung im Alltag ergibt sich keine deontologische Paradoxie.

T1.2–15: $E(A \wedge B) \supset E(A) \wedge E(B)$

Wenn es erlaubt ist, A und B zu tun, so ist es sowohl erlaubt, A zu tun, als auch, B zu tun. Die Umkehrung gilt dagegen nicht: Wenn es erlaubt ist, Auto zu fahren, und wenn es auch erlaubt ist, Alkohol zu trinken, so ist es doch nicht erlaubt, beides zugleich zu tun.

Nach den Gesetzen T1.2–7 und T1.2–13 und ihren Begründungen kann man nun definieren:

D1.2–1: $V(A) := O(\neg A)$ und

D1.2–2: $E(A) := \neg O(\neg A)$.

Die erste Definition ist so zu lesen: Der Satz $V(A)$ soll eine Abkürzung für den Satz $O(\neg A)$ sein und also das Gleiche bedeuten wie dieser. Das Zeichen „:=", gelesen „ist definitorisch gleich" oder „wird definiert durch", besagt also, daß man für den rechts stehenden, definierenden Ausdruck, das *Definiens* (hier also für $O(\neg A)$), immer den linksstehenden, definierten Ausdruck, das *Definiendum* (hier also $V(A)$), schreiben darf, und umgekehrt.

Nach D1.2–1 und D1.2–2 kommt man also allein mit dem deontischen Operator O aus und könnte prinzipiell auf die Operatoren V und E verzichten: Alles, was man mit ihnen ausdrücken kann, kann man auch durch O allein ausdrücken.

Oft ist auch die Verwendung eines vierten deontischen Operators I praktisch, den wir so definieren:

D1.2–3: $I(A) := \neg O(A) \wedge \neg O(\neg A)$.

Ein Satz $I(A)$ besagt danach, daß A weder geboten, noch verboten ist, und daher liest man diesen Satz als „A ist *indifferent*". Während nach T1.2–12 alles, was geboten ist, auch erlaubt ist, so daß sich Gebotensein und Erlaubtsein nicht gegenseitig ausschließen, teilt man mit ihrer Charakterisierung in gebotene, verbotene und indifferente die Handlungen in drei voneinander getrennte Klassen ein. Nach D1.2–3 gilt ja $I(A) \supset \neg O(A)$ und nach D1.2–1 $I(A) \supset \neg V(A)$. Nach D1.2–2 gilt auch

T1.2–16: $I(A) \equiv E(A) \wedge \neg O(A)$.

Indifferent sind genau die Handlungen, die erlaubt, aber nicht geboten sind. Und

T1.2–17: $I(A) \equiv E(A) \wedge E(\neg A)$.

Eine Handlung ist indifferent genau dann, wenn sowohl sie selbst wie auch ihre Unterlassung erlaubt ist.

1.3 Bedingte Normen

Es gibt Normen, die nur unter bestimmten Bedingungen gelten. Diese Normen nennt man *bedingte Normen.* Bedingte Gebote sind z.B. „Wenn Fritz krank ist, soll Hans ihn besuchen" und „Wenn das Vermögen von Herrn Kunz eine bestimmte Summe überschreitet, muß er Vermögenssteuer zahlen". Die unbedingten Gebote würden hier lauten: „Hans soll Fritz besuchen" und „Herr Kunz muß Vermögenssteuer zahlen".

Für die Darstellung bedingter Gebote bieten sich zunächst zwei Möglichkeiten an:

1. Man stellt den Satz „Unter der Bedingung A ist B geboten" dar durch $O(A \supset B)$.

Diese Darstellung hat aber folgende Mängel:

a) Aus A folgt mit $O(A \supset B)$ nicht $O(B)$, d.h. aus der bedingten Verpflichtung „Wenn Fritz krank ist, so soll Hans ihn besuchen" und der Aussage „Fritz ist krank" würde nicht folgen, daß Hans den Fritz besuchen soll. Das ist aber die elementarste Forderung an bedingte Obligationen.

b) Nach dem Prinzip T1.2–5 gilt $O(\neg A) \supset O(A \supset B)$. D.h. wenn es geboten ist, A zu unterlassen, verpflichtet die Handlung A zu jeder beliebigen Handlung. Wenn es also verboten ist zu lügen, und man lügt, so hat man die dadurch bedingten Verpflichtungen, auch zu stehlen, Steuern zu hinterziehen, usf.

Auf diese Weise kann man also bedingte Gebote nicht darstellen.

2. Man stellt den Satz „Unter der Bedingung A ist B geboten" dar durch $A \supset O(B)$.

Gegen diese Darstellung hat man eingewendet:

a) Es gilt aus logischen Gründen $\neg A \supset (A \supset O(B))$, d.h. nicht bestehende Sachverhalte bedingen beliebige Verpflichtungen. – Dieser Einwand bedeutet aber keine echte Schwierigkeit, da die Verpflichtung $O(B)$ wegen $\neg A$ aufgrund von $A \supset O(B)$ tatsächlich nicht eintritt.[7]

b) Es gilt, wiederum aus logischen Gründen, $O(B) \supset (A \supset O(B))$, d.h. unbedingte Gebote werden durch beliebige Sachverhalte bedingt. – Auch das ist keine Schwierigkeit, denn was unbedingt getan werden soll, soll auch unter jeder Bedingung getan werden.

c) Wenn man verneint, daß ein bedingtes Gebot besteht, d.h. wenn man sagt: „Es ist nicht der Fall, daß es unter der Bedingung A geboten ist, B zu tun", so will man damit nicht behaupten, daß der Sachverhalt A besteht; es ist aber $\neg(A \supset O(B)) \equiv A \wedge \neg O(B)$.

---

[7] Von Wright wendet ein, daß man auch im Fall $\neg A$ unterscheiden möchte zwischen Obligationen $O(B)$, die gelten würden, wenn A wahr wäre, und dem Nichtbestehen von $O(B)$ auch im Falle von A. Zum Ausdruck solcher Folgebeziehungen sei aber die Implikation nicht geeignet (vgl. Wright [68], S. 77). – Das ist zwar richtig, aber irreale bedingte Obligationen kann man wohl immer durch generelle Implikationen wiedergeben. Ein irrealer Konditionalsatz der Form „Wäre $F(a)$ der Fall, so wäre auch $G(a)$ der Fall" läßt sich darstellen durch die Konjunktion aus einem generellen Gesetz $\bigwedge x(F(x) \wedge H(x) \supset G(x))$, wobei H ein passend gewähltes Prädikat mit $H(a)$ ist, und dem Satz $\neg F(a)$ (vgl. dazu Kutschera [72], 4.3). Deontische Gesetze über bedingte Normen sind generelle Normsätze der Gestalt $\bigwedge x(A(x) \supset O(B(x)))$. Man kann also einen Satz „Wäre $A(a)$ der Fall, so bestünde die Obligation $O(B(a))$" mit einem passend gewählten Prädikat „$H(x)$", für das gilt „$H(a)$", darstellen durch „$\bigwedge x(A(x) \wedge H(x) \supset O(B(x))) \wedge \neg A(a)$".

Wenn man das Bestehen eines bedingten Gebots $A \supset O(B)$ verneint, so kann man damit meinen (α): „Selbst wenn A gilt (und erst recht, wenn A nicht gilt), ist B nicht geboten" – das drücken wir aus durch $A \vee \neg A \supset \neg O(B)$, oder äquivalent durch $\neg O(B)$: B ist nicht geboten, gleichgültig ob A oder $\neg A$ der Fall ist. Oder man meint (β): „A ist der Fall, und trotzdem ist B nicht geboten" – $A \wedge \neg O(B)$. Evtl. könnte man auch meinen – aber dann drückt man sich schon recht schief aus – (γ): „Wenn A der Fall ist, ist B nicht geboten" – $A \supset \neg O(B)$.

Es ist richtig, daß wir die Verneinung eines bedingten Gebots meist im Sinn von (α) verstehen, nicht im Sinn von (β). Es liegt daher eine gewisse Modifikation des Sprachgebrauchs darin, wenn wir bedingte Gebote in der Form $A \supset O(B)$ darstellen. Aber solche Modifikationen der Umgangssprache sind notwendig, wenn man sprachliche Präzision erreichen will. Wichtig ist nur, daß man dabei nicht Unterscheidungsmöglichkeiten verliert. Davon kann aber nicht die Rede sein. Zum Vergleich ein anderes Beispiel der logischen Normierung umgangssprachlicher Aussagen: Einen Satz „B gilt nur, wenn A gilt" geben wir logisch durch „$B \supset A$" wieder, obwohl man das „nur" oft auch so versteht, daß der Satz „B gilt nur, wenn A gilt" impliziert, daß B auch dann gilt, wenn A gilt. Will man das ausdrücken, so muß man logisch statt „$B \supset A$" den Satz „$A \equiv B$" wählen. Daß die Übersetzung von „B nur, wenn A" durch „$B \supset A$" nicht immer angemessen ist, ist kein Grund, sie generell als inadäquat anzusehen.

Wir müssen daher im folgenden bei der Verneinung eines bedingten Gebots „Wenn A, so O(B)" aufpassen, was gemeint ist, und ob wir den Sinn der Verneinung besser durch „$\neg(A \supset O(B))$" oder durch „$\neg O(B)$" wiedergeben.

Man kann also bedingte Gebote und in entsprechender Weise auch bedingte Erlaubnisse – in der Form $A \supset E(B)$ – und bedingte Verbote – in der Form $A \supset V(B)$ – als Implikationen zwischen einer Tatsachenbehauptung und einem Normsatz auffassen.

Es besteht daher auch kein Anlaß, die deontischen Operatoren als zweistellige Satzoperatoren aufzufassen – und z. B. $A \supset$

$O(B)$ zu ersetzen durch $O(B/A)$: B ist unter der Bedingung A geboten.[8] Zur Begründung für die Einführung dyadischer deontischer Operatoren weist man oft auf das Problem der *contrary-to-duty obligations* (d. h. der Pflichten, die bei Pflichtverletzungen entstehen) hin, auf das R. M. Chisholm in [63] aufmerksam gemacht hat. Es gelte z. B.

a) a soll den b nicht bestehlen.
b) a bestiehlt den b.
c) Wenn a den b bestiehlt, soll a wegen Diebstahls bestraft werden.
d) Wenn a den b nicht bestiehlt, soll a nicht wegen Diebstahls bestraft werden.

Übersetzt man das in die Formeln

a′) $O(\neg A)$
b′) A
c′) $A \supset O(B)$
d′) $O(\neg A \supset \neg B)$,

so folgt aus (a′) bis (d′) ein deontischer Widerspruch; denn aus (d′) erhält man $O(\neg A) \supset O(\neg B)$, also mit (a′) $O(\neg B)$, aus (b′) und (c′) folgt aber $O(B)$. (a′) bis (d′) sind also im Gegensatz zu (a) bis (d) widerspruchsvoll, können also nicht adäquate Übersetzungen darstellen. Ersetzt man hingegen (c′) durch

c″) $O(A \supset B)$,

so verschwindet zwar der Widerspruch, aber (c″) ist nun eine Folge von (a′) oder von (d′), während (c) keine Folge von (a) oder von (d) ist. Auch diese Übersetzung ist also inadäquat. Ersetzt man endlich, was aufgrund der früheren Überlegungen von vornherein nahe gelegen hätte, (d′) durch

d″) $\neg A \supset O(\neg B)$,

so verschwindet zwar der Widerspruch ebenfalls, aber (d″) ist nun eine Folge von (b′), während (d) keine Folge von (b) ist.

---

[8] Solche Systeme sind z. B. von N. Rescher in [66] und H. v. Wright in [68] entwickelt worden. Für eine Kritik an diesen Systemen vgl. Hansson [69]. Die dort von Hansson entwickelten Systeme der dyadischen deontischen Logik haben den grundsätzlichen Mangel, daß in ihnen gilt $O(A/A)$ – es ist also a *geboten* zu morden, wenn a tatsächlich mordet. Damit wird aber doch wohl die normative Kraft des Faktischen etwas überschätzt.

Daraus schließt man, daß weder $O(A \supset B)$ noch $A \supset O(B)$ eine adäquate Darstellung einer bedingten Obligation ist.

Das letzte Argument ist jedoch nur dann richtig, wenn man das umgangssprachliche „wenn –, dann“ in (d) nicht im Sinne der materialen Implikation versteht, sondern in einem engeren Sinn, z. B. im Sinn einer inhaltlichen Folge. Dann ist natürlich auch in (d″) statt der Implikation diese Folgebeziehung zu setzen, nach der dann (d″) auch nicht mehr aus (b′) folgt. Das Problem der *contrary-to-duty obligations* reduziert sich damit aber auf das Problem der Übersetzung von „wenn –, dann“, d. h. es handelt sich um eine der sogenannten „Paradoxien der Implikation“, nicht um ein Problem, das speziell die deontischen Operatoren betrifft.

Die Schreibweise $O(A/B)$ für bedingte Obligationen hat gegenüber unserer Darstellung auch den Nachteil, daß man nicht zwischen den beiden Aussagen „Es ist nicht der Fall, daß es bei A geboten ist, B zu tun“ ($\neg(A \supset O(B))$, bzw. $\neg O(B)$) und „Es ist der Fall, daß es bei A nicht geboten ist, B zu tun“ ($A \supset \neg O(B)$) unterscheiden kann: $\neg O(B/A)$ bedeutet immer nur dasselbe wie der erste Satz.

1.4 Normensysteme

Da aus Normen andere Normen folgen, kann man Mengen von Normen oder *Normensysteme* definieren durch Angabe von grundlegenden Normen oder normativen *Axiomen*, aus denen dann die übrigen im System geltenden Normen nach den Prinzipien der deontischen Logik folgen. Man kann auf diese Weise den Gehalt eines Normensystems in einigen Normsätzen zusammenfassen und ihn so leicht überschaubar machen.

Normensysteme sind z. B. Gesetzeswerke, die einen Bereich des sozialen Lebens regeln, ethische Kodizes, die Forderungen für das sittliche Verhalten aufstellen, oder Spielregeln, die das Verhalten der Spieler regulieren. Spiele sind wegen ihrer einfachen und expliziten Regeln oft besser für die Illustration von Normensystemen geeignet als die wesentlich komplexeren und mit mehr Problemen beladenen Systeme juristischer oder ethischer Normen.

Ein Normensystem regelt das Verhalten in einem gewissen Bereich, indem es Forderungen aufstellt, wie man sich verhalten soll. Wir können auch sagen: es definiert in diesem Bereich ein richtiges, normgerechtes Verhalten. So definieren die Regeln des Schachspiels z.B. das korrekte Spielen, die Ableitungsregeln eines logischen Kalküls definieren das korrekte Beweisen, usw.

Wir bezeichnen im folgenden Normensysteme durch die Symbole $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}'$, ... Wenn wir von einem Normensystem $\mathfrak{N}$ sprechen, so meinen wir entweder die Menge der Axiome von $\mathfrak{N}$, oder die Menge aller aus diesen Axiomen mit Hilfe logischer und deontologischer Prinzipien folgenden Sätze – zur Verdeutlichung schreiben wir dann gelegentlich auch „$C(\mathfrak{N})$" statt „$\mathfrak{N}$", wobei „C" für „Konsequenzmenge" steht – oder (im Normalfall endlich vieler Axiome) auch die Konjunktion der Axiome von $\mathfrak{N}$, also einen Satz – zur Verdeutlichung schreiben wir dann gelegentlich auch „$\mathfrak{N}^*$" statt „$\mathfrak{N}$".

Es gibt nun verschiedene Normensysteme, und derselbe Normsatz A kann in einem System $\mathfrak{N}$ gelten, in einem anderen System $\mathfrak{N}'$ dagegen nicht. Dabei sagen wir, daß A in $\mathfrak{N}$ *gilt*, wenn A aus $\mathfrak{N}$ folgt, d.h. wenn A zur Menge $C(\mathfrak{N})$ gehört – kurz $A \varepsilon C(\mathfrak{N})$. Wenn man also sagt, ein Normsatz A gelte, bzw. er gelte nicht, so bezieht man sich – meist stillschweigend – auf ein bestimmtes Normensystem $\mathfrak{N}$. Wenn man z.B. behauptet, man müsse sich im Straßenverkehr so und so verhalten, so nimmt man dabei auf die (deutschen) Verkehrsgesetze Bezug; und wenn man behauptet, man dürfe den Läufer in der Diagonalen ziehen, so nimmt man dabei auf die Regeln des Schachspiels Bezug.

Wir führen nun einige Beispiele zur Charakterisierung von Normensystemen ein:

D 1.4–1: Ein Normensystem $\mathfrak{N}$ heißt *logisch widerspruchsfrei*, wenn es keinen Satz A gibt, so daß sowohl A wie auch $\neg A$ aus $\mathfrak{N}$ folgt. In diesem Fall nennt man auch die Menge $C(\mathfrak{N})$ oder $\mathfrak{N}$ selbst *konsistent*, sonst *inkonsistent*.

D 1.4–2: Ein Normensystem $\mathfrak{N}$ heißt *deontisch widerspruchsfrei*, wenn es keinen Satz A gibt, so daß sowohl O(A) wie auch

$O(\neg A)$ aus $\mathfrak{N}$ folgt. Man kann in diesem Sinn auch von *deontischer Konsistenz* bzw. *Inkonsistenz* sprechen.

Ein deontischer Widerspruch liegt also vor, wenn dieselbe Handlung sowohl geboten wie auch verboten ist; denn wenn es geboten ist, A nicht zu tun, so ist es verboten, A zu tun. Vgl. dazu das Prinzip T1.2–7. $\mathfrak{N}$ kann logisch widerspruchsfrei, aber deontisch widerspruchsvoll sein. $C(\mathfrak{N})$ dagegen kann nach der Festlegung der deontologischen Folgebeziehung durch das Axiomensystem D, bzw. nach D1.9–5 nicht zugleich logisch widerspruchsfrei, deontologisch aber widerspruchsvoll sein, denn in diese Festlegung geht die Bestimmung der deontologischen Widerspruchsfreiheit ein (vgl. dazu das Axiom A3 von D). Aus der logischen Inkonsistenz folgt aber immer auch die deontische Inkonsistenz, denn aus einem kontradiktorischen, d.h. logisch-falschen Satz wie $A \wedge \neg A$ folgt jeder beliebige Satz, insbesondere also ein Satz wie $O(B) \wedge O(\neg B)$.

D1.4–3: Als *Regulationsfeld* $R(\mathfrak{N})$ eines Normensystems $\mathfrak{N}$ bezeichnen wir die Menge derjenigen Sätze A, für die einer der Sätze $O(A)$, $V(A)$ oder $I(A)$ in $C(\mathfrak{N})$ enthalten ist.

Das Regulationsfeld von $\mathfrak{N}$ umfaßt also diejenigen Sätze, die in $\mathfrak{N}$ *normativ bewertet* werden, d.h. die Sätze über solche Handlungen, die in $\mathfrak{N}$ geboten, verboten oder als indifferent eingestuft werden.

Es sei $H(\mathfrak{N})$ die Menge aller Sätze über Handlungen, die man in der dem Normensystem $\mathfrak{N}$ zugrundeliegenden Sprache formulieren kann, d.h. die Menge der Sätze, auf die man die deontischen Operatoren sinnvoll anwenden kann. Wir nehmen an, daß mit einem Satz A auch $\neg A$ zu $H(\mathfrak{N})$ gehört, da mit einer Handlung auch immer deren Unterlassung normativ bewertet werden kann.

In der Regel wird es nun Sätze aus $H(\mathfrak{N})$ geben, die nicht zu $R(\mathfrak{N})$ gehören, die also in $\mathfrak{N}$ nicht normativ bewertet werden. Besteht z.B. $\mathfrak{N}$ nur aus dem bedingten Gebot $A \supset O(B)$, so enthält $R(\mathfrak{N})$ keinen einzigen Satz. Nach $\mathfrak{N}$ ist B ja nicht kategorisch geboten, sondern es wird nur gesagt, daß B im Falle A geboten ist. B wird deswegen aber auch in $\mathfrak{N}$ nicht etwa als indifferent eingestuft, denn sonst würde aus $\mathfrak{N}$ $\neg A$ folgen. Man muß also genau unterscheiden zwischen den Sätzen B, die in $\mathfrak{N}$ *als nicht geboten* ausgezeichnet werden (für die also $\neg O(B)$ zu $C(\mathfrak{N})$ gehört) und den Sätzen B, die in $\mathfrak{N}$ *nicht als geboten* ausgezeichnet werden (für die also $O(B)$ nicht zu $C(\mathfrak{N})$ gehört).

Normensysteme $\mathfrak{N}$, in denen alle Sätze aus $H(\mathfrak{N})$ in $R(\mathfrak{N})$ enthalten sind, die also alle (einschlägigen) Handlungen normativ bewerten, nennt man auch *universal*. Definiert man nun:

D1.4–4: Ein Normensystem $\mathfrak{N}$ heißt *deontisch vollständig*, wenn für alle Sätze A aus $H(\mathfrak{N})$ einer der beiden Sätze $O(A)$ und $\neg O(A)$ zu $C(\mathfrak{N})$ gehört[9],

so sind die universalen Normensysteme genau die deontisch vollständigen Normensysteme: Ist $\mathfrak{N}$ deontisch vollständig und gehört $O(A)$ für einen beliebigen Satz A aus $H(\mathfrak{N})$ nicht zu $C(\mathfrak{N})$, so gehört $\neg O(A)$ zu $C(\mathfrak{N})$ und außerdem $O(\neg A)$, also $V(A)$, oder $\neg O(\neg A)$, also nach D1.2–3 auch $I(A)$; $\mathfrak{N}$ ist also auch universal. Und ist umgekehrt $\mathfrak{N}$ universal und gehört $O(A)$ nicht zu $C(\mathfrak{N})$, so gehört $I(A)$, nach D1.2–3 also auch $\neg O(A)$, oder $V(A)$, also $O(\neg A)$ und daher auch $\neg O(A)$ zu $C(\mathfrak{N})$; $\mathfrak{N}$ ist also auch deontisch vollständig.

Man kann nun die Frage stellen, ob und ggf. wie sich nicht universale oder deontisch unvollständige Normensysteme zu universalen oder deontisch vollständigen Systemen erweitern lassen. Diese Frage ist deswegen von Interesse, weil solche Erweiterungen in der Praxis oft vorgenommen werden. So sagt man z. B., daß Handlungen, die in einem System $\mathfrak{N}$ nicht ausdrücklich oder explizit bewertet werden, implizit zu bewerten seien nach dem *konzessionalen Prinzip:*

I) Alles, was (in $\mathfrak{N}$) nicht (ausdrücklich) verboten ist, ist als erlaubt anzusehen.

oder nach dem *interdiktionalen Prinzip:*

II) Alles, was (in $\mathfrak{N}$) nicht (ausdrücklich) erlaubt ist, ist als verboten anzusehen.

In der Jurisprudenz wird das konzessionale Prinzip z.B. in dem Grundsatz des römischen Rechts *nullum crimen sine lege*

---

[9] Diese *deontische* Vollständigkeit ist von der in T1.10–3 definierten *deontologischen* Vollständigkeit zu unterscheiden.

formuliert. Spielregeln sind dagegen oft interdiktional gemeint: nur die ausdrücklich erlaubten Spielzüge sind erlaubt, alle anderen verboten. Ähnlich ist es mit den Regeln in Kalkülen: nur die ausdrücklich erlaubten Form- und Ableitungsprozesse sind erlaubt, alle anderen verboten.

Gerade wegen der Häufigkeit solcher extensiver Interpretationen von Normensystemen ist es nun wichtig, zu bemerken, daß derartige Erweiterungen zu deontischen Widersprüchen führen können. Man kann nicht jedem deontisch konsistenten System $\mathfrak{N}$ ein ebensolches System $\mathfrak{N}'$ zuordnen, das die Sätze von $\mathfrak{N}$ enthält und für das nach (I) gilt: Wenn für einen Satz A aus $H(\mathfrak{N})$ $V(A)$ nicht in $C(\mathfrak{N})$ ist, so ist $E(A)$ in $C(\mathfrak{N}')$, bzw. nach (II): Wenn für einen Satz A aus $H(\mathfrak{N})$ $E(A)$ nicht in $C(\mathfrak{N})$ ist, so ist $V(A)$ in $C(\mathfrak{N}')$. Das zeigt schon das einfache Beispiel eines Systems $\mathfrak{N}$, das nur den Satz $\neg V(A) \supset V(B)$ enthält, so daß weder $V(A)$ noch $V(B)$ zu $C(\mathfrak{N})$ gehört. Wäre in $\mathfrak{N}'$ nun alles erlaubt, was in $\mathfrak{N}$ nicht verboten ist, so würde $\mathfrak{N}'$ neben dem Satz $\neg V(A) \supset V(B)$ die Sätze $E(A)$ und $E(B)$ enthalten, d. h. die Sätze $\neg V(A)$ und $\neg V(B)$, wäre also logisch inkonsistent. Ebenso wird das System, das nur den Satz $\neg E(A) \supset E(B)$ enthält, durch Hinzunahme der Sätze $V(A)$ (d. h. $\neg E(A)$) und $V(B)$ (d. h. $\neg E(B)$) logisch inkonsistent.

Es gilt aber der Satz:

T1.4–1: Jedes deontisch konsistente Normensystem $\mathfrak{N}$ läßt sich erweitern zu einem deontisch konsistenten und vollständigen Normensystem $\mathfrak{N}'$.

Beweis[10]: Es sei $A_1, A_2, \ldots$ eine Abzählung aller Sätze aus $H(\mathfrak{N})$. Es sei $\mathfrak{N}_0 = \mathfrak{N}$ und $\mathfrak{N}_{n+1} = \mathfrak{N}_n$ für $V(A_{n+1}) \varepsilon C(\mathfrak{N}_n)$ und $\mathfrak{N}_{n+1} = \mathfrak{N}_n$, erweitert um den Satz $E(A_{n+1})$, falls nicht gilt $V(A_{n+1}) \varepsilon C(\mathfrak{N})$. $\mathfrak{N}'$ sei die Menge, die genau diejenigen Sätze enthält, die in einer der Mengen $\mathfrak{N}_i$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ enthalten sind. Wir zeigen

1) Ist $\mathfrak{N}$ deontisch konsistent, so auch $\mathfrak{N}'$. Dazu beweisen wir:

a) Alle Mengen $\mathfrak{N}_i$ sind deontisch konsistent: Ist $\mathfrak{N}_{n+1}$ deontisch inkonsistent, so ist auch $\mathfrak{N}_n$ deontisch inkonsistent; das

[10] Dieser Beweis kann bei der ersten Lektüre ohne Nachteil für das Verständnis der folgenden Abschnitte überschlagen werden.

ist für $\mathfrak{N}_{n+1} = \mathfrak{N}_n$ trivial; und folgt aus $\mathfrak{N}_n$ und $E(A_{n+1})$ ein Satz $O(B) \wedge O(\neg B)$, so folgt aus $\mathfrak{N}_n$ und $\neg(O(B) \wedge O(\neg B))$ nach dem logischen Kontrapositionsprinzip (nach dem allgemein aus einem Satz der Gestalt $C \supset D$ der Satz $\neg D \supset \neg C$ logisch folgt) $\neg E(A_{n+1})$; dann folgt aber, da $\neg(O(B) \wedge O(\neg B))$ ein deontologisch gültiges Prinzip ist[11], aus $\mathfrak{N}_n$ der Satz $V(A_{n+1})$ – im Widerspruch zur Annahme, $\mathfrak{N}_{n+1}$ sei $\mathfrak{N}_n$, erweitert um den Satz $E(A_{n+1})$, was ja nach Definition von $\mathfrak{N}_{n+1}$ impliziert, daß $V(A_{n+1})$ *nicht* in $C(\mathfrak{N}_n)$ enthalten ist. Ist also ein $\mathfrak{N}_i$ deontisch inkonsistent, so sind auch alle $\mathfrak{N}_j$ mit $j \leq i$ inkonsistent, also auch $\mathfrak{N}_0 = \mathfrak{N}$, im Widerspruch zur Annahme, $\mathfrak{N}$ sei konsistent.
b) Sind die Mengen $\mathfrak{N}_i$ deontisch konsistent, so auch $\mathfrak{N}'$: Gilt $O(B) \wedge O(\neg B) \varepsilon C(\mathfrak{N}')$, so gibt es (nach der Definition der deontischen Folgebeziehung in 1.8) eine endliche Menge von Sätzen $\mathfrak{N}''$ aus $\mathfrak{N}'$, aus denen $O(B) \wedge O(\neg B)$ folgt, und es gibt ein $\mathfrak{N}_i$, in dem alle Sätze aus $\mathfrak{N}''$ enthalten sind, so daß $O(B) \wedge O(\neg B)$ auch aus $\mathfrak{N}_i$ folgt. Dann ist aber $\mathfrak{N}_j$ deontisch inkonsistent.

Wir müssen nun noch zeigen:
2) $\mathfrak{N}'$ ist deontisch vollständig: Es sei nicht $V(A_i) \varepsilon C(\mathfrak{N}')$. Dann gilt auch nicht $V(A_i) \varepsilon C(\mathfrak{N}_{i-1})$, also gilt $E(A_{n+1}) \varepsilon \mathfrak{N}_i$ und, nach D1.2–2, damit auch $\neg V(A_{n+1}) \varepsilon C(\mathfrak{N}_i)$ also auch $\neg V(A_{n+1}) \varepsilon C(\mathfrak{N}')$. Es gilt also für alle Sätze A_i und also auch für alle Sätze $\neg A_i$ aus $H(\mathfrak{N})$, daß $V(\neg A_i)$ oder $\neg V(\neg A_i)$ in $C(\mathfrak{N}')$ enthalten ist; und daher ist auch $O(A_i)$ oder $\neg O(A_i)$ in $C(\mathfrak{N}')$ enthalten.

Wie wir hier die Mengen $\mathfrak{N}_{n+1}$ nach dem Gedanken des konzessionalen Prinzips konstruiert haben, so könnte man diese Mengen natürlich auch nach dem interdiktionalen Prinzip bilden und setzen $\mathfrak{N}_{n+1} = \mathfrak{N}_n$ für $E(A_{n+1}) \varepsilon C(\mathfrak{N}_n)$, andernfalls $\mathfrak{N}_{n+1} = \mathfrak{N}_n$, erweitert um den Satz $V(A_{n+1})$. Die Überlegungen würden dann ganz analog verlaufen.

Das Ergebnis dieser Erörterungen ist also: Man kann jedes deontisch konsistente Normensystem $\mathfrak{N}$ zu einem universalen deontisch konsistenten Normensystem $\mathfrak{N}'$ erweitern, aber

[11] Vgl. das Axiom A3 des Kalküls D in 1.8.

dabei kann man $\mathfrak{N}'$ *nicht immer* nach den pauschalen Prinzipien (I) oder (II) aus $\mathfrak{N}$ erhalten, sondern man muß jeweils im einzelnen angeben, wie $\mathfrak{N}'$ aus $\mathfrak{N}$ zu konstruieren ist.

Man kann die deontischen Operatoren auch auf Sätze anwenden, die nicht Aussagen über Handlungen sind. Das hat den Vorteil, daß man in der Sprache, die dem Normensystem zugrundeliegt, nicht zwischen Sätzen über Handlungen und anderen Aussagen unterscheiden und die deontischen Operatoren in ihrer Anwendung auf Handlungsaussagen beschränken muß. Dabei sind Sätze wie „$2+2=4$“, „Der Mond ist 400000 km von der Erde entfernt“ oder „Friedrich Schulze ist 69 Jahre alt“ deontisch wie folgt zu bewerten: Nach den Prinzipien T1.2–5 und T1.2–9 sind tautologische Sätze über Handlungen als geboten ausgezeichnet und kontradiktorische Sätze über Handlungen als verboten. Denn ein tautologischer Satz B folgt aus jedem beliebigen Satz A, so daß nach T1.2–5 gilt $O(A) \supset O(B)$. Man kann also aus einem beliebigen Gebot $O(A)$ auf $O(B)$ schließen. Und aus einem kontradiktorischen Satz A folgt jeder beliebige Satz B, nach T1.2–9 gilt also $V(B) \supset V(A)$, d. h. aus einem beliebigen Verbot $V(B)$ erhält man $V(A)$. Daher wird man allgemein Tautologien ge- und Kontradiktionen verbieten. Für nicht logisch determinierte Sätze A, d.h. Sätze, die weder tautologisch noch kontradiktorisch sind, kann man dann festlegen $I(A)$, wenn A ein Satz ist, der nicht über Handlungen spricht.

Man kann so in trivialer Weise auch andere als Handlungssätze deontisch bewerten. Die deontische Bewertung von Handlungen wird durch eine solche Erweiterung des Anwendungsbereichs der deontischen Operatoren nicht tangiert. Es handelt sich einfach um eine technische Vereinfachung der Sprache. Die vorausgehenden und die folgenden Erörterungen werden dadurch nicht berührt, und so lassen wir es zunächst auch offen, ob nur Handlungen deontisch bewertet werden oder nicht.

Es stellt sich nun die Frage, ob man mit den drei bisher betrachteten deontischen Operatoren auskommt, oder ob noch andere deontische Grundbegriffe anzunehmen sind. Betrachten wir drei elementare juristische Begriffe.[12]

Pflichten: Die Pflicht von a, A zu tun, können wir so ausdrücken, daß es a *geboten* ist, A zu tun: $O(A(a))$. Will man ausdrücken, daß die Pflicht von a, A zu tun, eine Pflicht *gegenüber* b ist, so kann man das mit Hilfe des Prädikats „Der Sachverhalt C begünstigt, falls er besteht, den b gegenüber dem a" – symbolisch $B(C,b,a)$ – tun (aus $B(C,b,a)$ soll weder C noch $\neg C$ folgen); man schreibt dann $O(A(a)) \wedge B(A(a),b,a)$. Eine Pflicht des a, die nur unter einer bestimmten Bedingung eintritt, läßt sich durch ein bedingtes Gebot darstellen.

Ansprüche: Wenn a gegenüber b einen Anspruch hat, so muß b etwas tun, was a gegenüber b begünstigt: $O(A(b)) \wedge B(A(b),a,b)$. Ein Anspruch von a gegenüber b ist also eine Pflicht von b gegenüber a.

Rechte: Ein Recht von a, A zu tun, besteht in einer *Erlaubnis*, daß a A tut: $E(A(a))$. Ist das Recht von a, A zu tun, ein *Recht gegenüber* b, so können wir schreiben: $E(A(a)) \wedge B(A(a),a,b)$.

An diesen drei Beispielen erweist sich die Leistungsfähigkeit der drei deontischen Operatoren, die aber erst in der Analyse komplexerer, z. B. juristischer Texte ganz deutlich wird.

1.5 Mehrstufige Normen

Es gibt Systeme der deontischen Logik, in denen auch Sätze der Gestalt $O(O(A))$, $O(A \supset E(B))$ etc. zugelassen werden, d.h. Sätze, in denen deontische Operatoren vorkommen, in deren Bereich wieder deontische Operatoren stehen. Es ist die Frage, ob solche Bildungen sinnvoll sind und wie sie ggf. zu verstehen sind.

Ein Normsatz drückt keine Handlung aus. Deswegen können Anwendungen deontischer Operatoren auf Sätze, die bereits solche Operatoren enthalten, nur in dem Sinn zugelassen werden, wie wir sie in 1.4 für die Anwendung deontischer

[12] Vgl. dazu auch die Analysen von Hohfeld in [19] und von S. und H. Kanger in [66] und [71].

Operatoren auf Sätze diskutiert haben, die nicht Sätze über Handlungen sind. Es gibt dann aber keine eigenen deontischen Prinzipien für solche mehrfachen Anwendungen deontischer Operatoren; tautologische Sätze wie $O(A) \vee \neg O(A)$ sind geboten, kontradiktorische Sätze wie $O(A) \wedge \neg O(A)$ verboten und nicht logisch determinierte Normsätze sind erlaubt. Derlei Normsätze über Normen sind aber ganz irrelevant, und so kann man auf eine mehrfache Anwendung deontischer Operatoren auch ganz verzichten.

Ein Typ von Sätzen, die sich im Zusammenhang mit Normen als nichttriviale Argumente von deontischen Operatoren anbieten, sind *Sätze über Normsetzungen.* Man kann z.B. sagen, daß ein Lehrer gewisse Anordnungen nicht treffen darf, daß ein Offizier in einer gewissen Situation einen bestimmten Befehl geben muß, oder daß ein Vorgesetzter Anweisungen geben darf.

Aber Sätze über Normsetzungen sind, wie wir in 1.1 gesehen haben, keine Normsätze. Wenn man solche Sätze über Normsetzungen formulieren will, so muß man z.B. das folgende (nicht deontische) Prädikat verwenden:
$s(a,A)$ – Die Person a setzt die Norm A, wobei für A irgendein Normsatz eingesetzt werden kann. Es soll dabei nicht gelten $s(a,A) \supset A$, d.h. die Setzung der Norm A durch a bedingt nicht schon, daß die Norm A auch gilt. Vielmehr besagt z.B. $s(a,O(A))$ nur, daß a gebietet, A zu tun, daß er ein Gebot ausspricht; ob er dazu auch berechtigt ist und ob daher aufgrund seines Gebotes die Norm $O(A)$ gilt, ist eine andere Frage.

Wir können auch sagen: Die Aussage $s(a,A)$ beinhaltet, daß a eine normative (gebietende, verbietende, erlaubende) Äußerung macht, die, *falls sie verbindlich ist,* dazu führt, daß die Norm A gilt.

Wir schreiben $A \underset{D}{\rightarrow} B$, wenn der Satz B aus dem Satz A nach den Prinzipien der deontischen Logik folgt (die jene der formalen Logik einschließen); und wir schreiben $A \underset{D}{\leftrightarrow} B$, wenn sowohl gilt $A \underset{D}{\rightarrow} B$, wie auch $B \underset{D}{\rightarrow} A$[13]. Es soll nun gelten:

[13] Für eine exakte Definition dieser beiden Beziehungen vgl. den Abschnitt 1.9.

T1.5–1: Gilt $A \underset{D}{\leftrightarrow} B$, so gilt $s(a, A) \equiv s(a, B)$.

Das heißt, wir nehmen an, daß die durch das Prädikat $s(a, A)$ ausgedrückten Normsetzungen in dem Sinne objektiv verstanden werden, daß es nicht darauf ankommt, was a mit seinem Gebot oder Verbot oder mit seiner Erlaubnis *gemeint* hat, sondern nur darauf, was dieses Gebot, so wie es a formuliert hat, objektiv beinhaltet.

Dagegen folgt aus $A \underset{D}{\rightarrow} B$ nicht $s(a, A) \supset s(a, B)$. Denn wenn a z.B. gebietet, daß b das Fenster schließt, so folgt daraus nicht, daß a auch gebietet, daß b das Fenster schließt oder es nicht schließt; einen Satz dieses Inhalts braucht a nicht auszusprechen.

Wir können Anordnungsbefugnisse, -gebote oder -verbote nun so ausdrücken:

$E(s(a, A))$ – a darf die Norm A setzen
$O(s(a, A))$ – a muß die Norm A setzen
$V(s(a, A))$ – a darf die Norm A nicht setzen.

Es gilt dann nach unserem Verständnis des Prädikats $s(a, A)$ folgendes Prinzip:

T1.5–2: $E(s(a, A)) \supset (s(a, A) \supset A)$

Wenn a die Befugnis hat, die Norm A zu setzen, und a setzt diese Norm, so gilt sie.

Wir haben in 1.1 betont, daß aus einer Anordnung allein noch kein Gebot folgt, sondern daß die Norm sich aus der Anordnung erst dann ergibt, wenn eine übergeordnete Norm, eine Anordnungsbefugnis, besteht. Das drückt T1.5–2 aus. Es gilt dagegen nicht $(s(a, A) \supset A) \supset E(s(a, A))$, denn der Satz $s(a, A) \supset A$ ist bereits dann wahr, wenn $s(a, A)$ falsch ist. Daraus, daß a nicht gebietet, daß b ihm 20,– DM zahlt, folgt aber nicht, daß es a erlaubt ist, zu gebieten, daß b ihm 20,– DM zahlt.

Wegen $O(A) \supset E(A)$ (T1.2–12) folgt aus T1.5–2 natürlich auch

T1.5–3: $O(s(a, A)) \supset (s(a, A) \supset A)$.

Wie wir oben gesehen haben, ergibt sich zwar aus $A \underset{D}{\rightarrow} B$ nicht $s(a, A) \supset s(a, B)$, aber es gilt nach T1.5–2 nun z.B.

T1.5–4: Gilt $A \underset{D}{\rightarrow} B$, so gilt auch $E(s(a,A)) \supset (s(a,A) \supset B)$.

Man könnte noch versuchen, weitere Prinzipien zu formulieren wie z.B.: $A \supset \bigwedge x E(s(x,A))$ – eine bestehende Norm darf jedermann setzen. Aber wir wollen darauf hier nicht weiter eingehen, sondern die Frage diskutieren, ob man zweifache (und entsprechend dann auch mehrfache) Anwendungen von deontischen Operatoren als Normen für Normsetzungen deuten kann. Kann man also z.B. $O(O(A))$ deuten im Sinn von „Es ist geboten, A zu gebieten" oder „Jedermann ist es geboten, A zu gebieten", d.h. im Sinn von $\bigwedge x O(s(x,O(A)))$?

Eine derartige Deutung führt auf folgende Schwierigkeiten:
a) Es treten Mehrdeutigkeiten auf. Man kann z.B. den Satz $O(A \supset O(B))$ sowohl in $\bigwedge x O(s(x, A \supset O(B)))$ als auch in $\bigwedge x O(A \supset s(x,O(B)))$ übersetzen, und $O(\neg E(A))$ läßt sich übersetzen in $\bigwedge x O(\neg s(x,E(A)))$ („Es ist verboten, A zu erlauben") und in $\bigwedge x O(s(x,\neg E(A)))$ („Es ist geboten, A zu verbieten").

Vermeidet man diese Mehrdeutigkeit, indem man z.B. festlegt, daß das gesamte Argument des äußeren deontischen Operators das Argument von s bilden soll – übersetzt man also $O(A \supset O(B))$ immer in $\bigwedge x O(s(x, A \supset O(B)))$ und $O(\neg E(A))$ immer in $\bigwedge x O(s(x,\neg E(A)))$, so kann man die anderen Versionen nicht mehr ausdrücken. Das heißt, die Schreibweise A statt $s(x,A)$ im Argument deontischer Operatoren bewirkt eine starke Beschränkung der Ausdrucksmöglichkeiten.
b) Entsprechendes gilt auch für die Ersetzung des Arguments a in $O(s(a,O(A)))$ durch einen Quantor $\bigwedge x O(s(x,O(A)))$, bzw. für den Wegfall dieses Arguments in $O(O(A))$: Man kann nur mehr generelle Rechte, Pflichten und Verbote für Normsetzungen formulieren, nicht mehr Befugnisse für bestimmte Personen. Hinzukommt, daß die Verneinung von Geboten mehrdeutig wird: Ist $\neg O(O(A))$ zu ersetzen durch $\bigwedge x \neg O(s(x,O(A)))$ oder durch $\neg \bigwedge x O(s(x,O(A)))$? Man wird aus inhaltlichen Gründen die erste Version vorziehen, aber dann gilt das *tertium non datur* nicht mehr: Es kann sowohl $\bigwedge x O(s(x,O(A)))$ wie auch $\bigwedge x \neg O(s(x,O(A)))$ falsch sein, obwohl gelten müßte $O(O(A)) \vee \neg O(O(A))$.
c) Es gelten für Normsetzungen nicht dieselben Gesetze wie

für Normen. Es gilt z.B. $O(E(A)) \equiv O(\neg O(\neg A))$; es gilt aber nicht $\Lambda x O(s(x, E(A))) \equiv \Lambda x O(\neg s(x, O(\neg A)))$: Wenn es geboten ist, A nicht (ausdrücklich) zu verbieten, folgt daraus nicht, daß es geboten ist, A (ausdrücklich) zu erlauben. Das betrifft die eine der beiden unter (a) diskutierten Übersetzungsmöglichkeiten. Wählt man die andere Möglichkeit, so gilt z.B. zwar $\neg O(O(A)) \equiv E(E(\neg A))$, aber nicht $\Lambda x \neg O(s(x, O(A))) \equiv \Lambda x E(s(x, E(\neg A)))$; denn wenn es jedermann nicht geboten ist, A zu gebieten, so folgt daraus nicht, daß es jedermann erlaubt ist, $\neg A$ zu erlauben.

Ein zweiter Typ von Sätzen, die etwas über Normen besagen und selbst als Argumente von deontischen Operatoren aufgefaßt werden könnten, sind *Sätze über die Befolgung von Normen*. Man kann z.B. sagen, daß es geboten ist, ein bestehendes Verkehrsgebot zu befolgen, oder daß es verboten ist, ein geltendes Verbot zu übertreten. Dabei handelt es sich aber um bedingte Gebote: „Wenn A ge-, bzw. verboten ist, so ist es ge-, bzw. verboten, A zu tun". Diese Gebote sind nach den Erörterungen in 1.3 jedoch durch die trivialerweise gültigen Sätze $O(A) \supset O(A)$, bzw. $V(A) \supset V(A)$ darzustellen, und nicht etwa in der Form $O(O(A) \supset A)$ oder $V(V(A) \supset A)$.

Nach alldem ist es sinnvoller, mehrstufige Normen auszuschließen, und die Sachverhalte, die man damit ausdrücken will, mit Hilfe des Prädikats s zu formulieren. Dadurch wird das System der deontischen Logik wesentlich vereinfacht.

In der deontischen Logik werden u.a. folgende Prinzipien für mehrstufige Normen angegeben:

1) $E(A) \supset E(E(A))$
2) $O(A) \supset E(O(A))$
3) $\neg O(A) \equiv O(\neg O(A))$
4) $O(O(A \supset B) \supset (O(A) \supset O(B)))$
5) $O(\neg O(A) \equiv O(\neg O(A)))$
6) $O(O(A) \supset A)$.[14]

[14] Die Formeln (1), (2) gibt v. Wright in [68], S. 91ff. an, die Prinzipien (3) mit (5) finden sich z. B. bei Montague in [68].

Man kann sich überlegen, wie diese Formeln als Erlaubnisse und Gebote für Normsetzungen bzw. für die Befolgung von Normen zu interpretieren sind, und ob man ihnen unabhängig von einer solchen Interpretation einen relevanten Sinn geben kann.

1.6 Quantifizierung in deontische Kontexte

Im Unterschied zu den aussagenlogischen Operatoren haben die deontischen Operatoren nicht die Eigenschaft, daß die Wahrheitswerte der mit ihnen gebildeten Sätze O(A), E(A), V(A) nur vom Wahrheitswert des Arguments A abhängen: Aus der Wahrheit oder Falschheit von A allein folgt noch nichts darüber, ob A geboten, verboten oder erlaubt ist. Es gilt also nicht $A \equiv B \supset (O(A) \equiv O(B))$, sondern nur das Prinzip T1.2–6, d.h. man kann im Argument deontischer Operatoren nicht generell Sätze durch andere Sätze mit dem gleichen Wahrheitswert ersetzen, ohne daß sich dabei der Wahrheitswert des ganzen Satzes ändert.

Man kann im Argument von deontischen Operatoren auch nicht Prädikate durch andere Prädikate mit gleichem Umfang ersetzen, ohne Gefahr zu laufen, daß sich der Wahrheitswert des Satzes ändert. Wenn z.B. die Norm gilt: „Die Lehrer müssen vormittags die Schüler beaufsichtigen“, so folgt daraus nicht, daß auch ein Gebot des Inhalts besteht „Die Lehrer müssen vormittags eine Glatze haben“, wenn zufällig einmal die Lehrer, die an einem Vormittag ihrer Aufsichtspflicht tatsächlich nachkommen, genau diejenigen unter den Lehrern sind, die eine Glatze haben.

In diesem Sinn sind Normsätze nicht *extensional*, d.h. ihr Wahrheitswert hängt nicht nur ab von den *Extensionen* der Ausdrücke, die in ihnen vorkommen – von den Wahrheitswerten der Sätze und den Umfängen der Prädikate.

Wie weit besteht nun aber eine Extensionalität solcher Kontexte gegenüber der Ersetzung von Eigennamen durch einander? Kann man extensionsgleiche Eigennamen, d. h. Eigennamen, die denselben Gegenstand bezeichnen, durch einander ersetzen, ohne den Wahrheitswert der Sätze zu ändern? Gilt das Prinzip $a = b \supset (A(a) \equiv A(b))$, wobei $A(a)$ irgendein Normsatz sei, in dem an einigen oder mehreren bestimmten Stellen der Eigenname a vorkommt, und der Satz $A(b)$ aus dem Satz $A(a)$ entsteht durch Ersetzung von a durch b an diesen Stellen?

Dieses Prinzip gilt nicht in modalen Kontexten, wie das folgende Beispiel von W. V. Quine zeigt: Wenn man in dem wahren Satz „Es ist notwendig, daß $9 = 9$ ist" den Eigennamen „9" ersetzt durch den extensionsgleichen Namen „die Anzahl der Planeten" – es gilt ja, daß 9 die Anzahl der Planeten ist –, so erhält man den falschen Satz „Es ist notwendig, daß die Anzahl der Planeten $= 9$ ist. Kann so etwas bei deontischen Kontexten auch passieren?

Das Beispiel von Quine zeigt, daß eine Extensionalität von deontischen Kontexten bezüglich der Eigennamen sicher nicht generell behauptet werden kann: Ist das Argument A des deontischen Operators O im Satz $O(A)$ ein Satz, der bezüglich der Eigennamen nicht extensional ist, so kann man auch nicht erwarten, daß der Satz $O(A)$ bezüglich der Eigennamen extensional ist. Wir müssen also unsere Frage so formulieren: Vorausgesetzt es gilt $a = b \supset (A(a) \equiv A(b))$, gilt dann auch $a = b \supset (O(A(a)) \equiv O(A(b)))$?

Diese Frage ist vor allem im Zusammenhang mit der Quantifizierung wichtig: Die Festlegung der Bedeutung der Quantoren Λx, $V x$ in Sätzen der Form $\Lambda x B(x)$ oder $V x B(x)$ in der prädikatenlogischen Semantik setzt voraus, daß gilt: Bezeichnen die beiden Eigennamen a und b denselben Gegenstand, so haben die beiden Sätze $B(a)$ und $B(b)$ den gleichen Wahrheitswert, d.h. aus $a = b$ muß $B(a) \equiv B(b)$ folgen.[15] Andernfalls könnten wir die Quantoren nicht in der üblichen, extensionalen Weise deuten, und es würden für sie daher auch nicht die üblichen prädikatenlogischen Gesetze gelten. Um also in Sätzen der Form $\Lambda x B(x)$, $V x B(x)$, wo B ein Normsatz ist, die Quantoren wie üblich verwenden zu können, müssen wir sicherstellen, daß folgendes Prinzip gilt:

---

[15] Vgl. dazu den Abschnitt 1.9.

T1.6–1: Wenn zwei Eigennamen a und b denselben Gegenstand bezeichnen, so gilt unter der Voraussetzung $A(a) \equiv A(b)$ auch $O(A(a)) \equiv O(A(b))$.
Es genügt, die Gültigkeit dieses Prinzips für den Operator O zu fordern, da sich E und V nach D1.2–1 und D1.2–2 durch O definieren lassen. T1.6–1 ist nun, wie auch die Prinzipien T1.2–5 oder T1.2–6, kein Satz, den wir beweisen können, sondern das Prinzip beinhaltet eine Forderung an den Operator O, die wir intuitiv als vernünftig zu rechtfertigen haben.

Ist also dieses Prinzip nach unserem intuitiven Verständnis von Geboten adäquat?

Betrachten wir ein Beispiel, das diesem Prinzip auf den ersten Blick zu widersprechen scheint: Herr X ist der Autor des Buches Y, und Herr X ist der Lebensretter von Frau Z. Das Buch Y enthält Beleidigungen und falsche Anschuldigungen. Herr Y werde deswegen verurteilt und das Urteil laute:

1) Der Autor des Buches Y soll DM 1000,– Strafe bezahlen. Folgt daraus nun auch das Gebot:
2) Der Lebensretter von Frau Z soll DM 1000,– Strafe zahlen?

Offenbar ja, denn Herr X ist der Autor von Y und muß so Strafe zahlen. Der etwas problematische Klang des Gebotes (2) kommt daher, daß man die Kennzeichnung von Herrn X als Begründung der Strafe verstehen kann. Das heißt, man kann (1) so interpretieren:

1′) Herr X soll *als der Autor von Y* DM 1000,– Strafe zahlen oder
1″) Herr X soll DM 1000,– Strafe zahlen, *weil er der Autor von Y ist.*

Hier könnte man nun für „Herrn X“ auch „Der Lebensretter von Frau Z“ einsetzen, ohne daß dadurch der problematische Eindruck von (2) entstehen würde. Hingegen kann man für „der Autor von Y“ nicht einsetzen „Der Lebensretter von Frau Z“; aber das kommt daher, daß die Apposition, bzw. der Nebensatz, nun ein nicht extensionaler Kontext ist, nicht aber daher, daß das Prinzip T1.6–1 für deontische Kontexte nicht gelten würde. Man kann ja auch in den nichtdeontischen Kontexten

3) Herr X wurde *als der Autor von Y* verurteilt, bzw.

3') Herr X wurde verurteilt, *weil er der Autor von Y ist*
den Ausdruck „der Autor von Y" nicht durch „der Lebensretter von Frau Z" ersetzen, ohne daß sich der Wahrheitswert dieser Sätze ändert.

Wir wollen also im folgenden annehmen, daß das Prinzip T1.6–1 gilt und daß es daher sinnvoll ist, Sätze wie $\bigvee x O(A(x))$, $\bigwedge x O(A(x))$, etc. in der üblichen Weise zu deuten und für diese Quantoren die üblichen logischen Gesetze als gültig anzusehen.

Es gelten dann insbesondere z.B. die logischen Prinzipien $O(A(a)) \supset \bigvee x O(A(x))$ und $\bigwedge x O(A(x)) \supset O(A(a))$.

Als deontische Prinzipien können wir folgende Sätze annehmen:

T1.6–2: $\bigwedge x O(A(x)) \equiv O(\bigwedge x A(x))$.

Das besagt u.a.: Wenn es jedermann geboten ist, A zu tun, so ist es auch geboten, daß jedermann A tut, und umgekehrt. Wenn es also z.B. jedem Bürger geboten ist, zur Wahl zu gehen, so ist es geboten, daß alle Bürger zur Wahl gehen, und umgekehrt. Die Generalisierung bezieht sich aber natürlich nicht immer nur auf Personen. Aus T1.6–2 folgt z.B. auch: Wenn für jedes Buch x von Fritz gilt, daß es Fritz geboten ist, x pfleglich zu behandeln, so ergibt sich daraus auch, daß es Fritz geboten ist, alle seine Bücher pfleglich zu behandeln, und umgekehrt.

T1.6–3: $\bigvee x O(A(x)) \supset O(\bigvee x A(x))$.

Wenn es z.B. jemand gibt, dem es geboten ist, einen Brief zu überbringen, so ist es auch geboten, daß jemand den Brief überbringt. Die Umkehrung gilt jedoch nicht: Wenn es geboten ist, daß jemand den Brief überbringt, so folgt daraus nicht, daß es eine bestimmte Person gibt, an die dieses Gebot gerichtet ist; das Gebot kann sich vielmehr an eine Gruppe richten und besagen, daß einer der Gruppe – wer bleibt offen – den Brief überbringen soll.

T1.6–4: $\bigwedge x V(A(x)) \equiv V(\bigvee x A(x))$.

Wenn es jedermann verboten ist, A zu tun, so ist es verboten, daß jemand A tut, und umgekehrt.

Das folgt mit D1.2–1 sofort aus T1.6–2 mit dem logischen Gesetz $\neg \Lambda x \neg A(x) \equiv V x A(x)$.

T1.6–5: $V x V(A(x)) \supset V(\Lambda x A(x))$.

Wenn es jemand verboten ist, A zu tun, so ist es verboten, daß alle A tun. Das folgt wiederum mit D1.2–1 logisch aus T1.6–3. Die Umkehrung gilt hingegen nicht, denn wenn es z.B. verboten ist, daß alle Sitzungsteilnehmer zugleich reden, so folgt daraus nicht, daß es einen Teilnehmer gibt, dem es verboten ist zu reden.

T1.6–6: $V x E(A(x)) \equiv E(V x A(x))$.

Wenn es jemand erlaubt ist, A zu tun, so ist es auch erlaubt, daß jemand A tut, und umgekehrt.

Das folgt mit D1.2–2 wiederum aus T1.6–2; und aus T1.6–3 erhält man:

T1.6–7: $E(\Lambda x A(x)) \supset \Lambda x E(A(x))$.

Wenn es erlaubt ist, daß alle A tun, so ist es jedem erlaubt, A zu tun. Die Umkehrung gilt nicht; denn wenn es, im obigen Beispiel, jedem Sitzungsteilnehmer erlaubt ist, zu reden, so ist es deswegen nicht erlaubt, daß alle Teilnehmer zugleich reden.

1.7 Die deontische Sprache Δ

Nachdem wir in den ersten sechs Abschnitten über die Grundlagen der deontischen Logik gesprochen und einige fundamentale deontische Prinzipien formuliert haben, wollen wir nun darangehen, ein präzises System der deontischen Logik aufzubauen. Dabei geht es vor allem darum, uns einen Überblick über die Annahmen zu verschaffen, die wir über die Bedeutung der deontischen Operatoren machen, und einen strengen Begriff der Gültigkeit für Normsätze und deontische Schlüsse festzulegen.

Zunächst bestimmen wir die Sprache Δ, in der wir das System der deontischen Logik formulieren wollen. Das ist die symbolische Sprache, die wir zur Darstellung von Normsätzen auch bisher schon verwendet haben; nun soll sie aber exakt beschrieben werden.

Das Alphabet von Δ umfaßt folgende Grundzeichen: Jeweils abzählbar unendlich viele *Gegenstandskonstanten* (GK), *Gegenstandsvariablen* (GV) und *Prädikatkonstanten* (PK), für die Stellenzahlen festgelegt sind, sowie die Symbole $\neg$, $\supset$, Λ, O und die Hilfszeichen „)“, „(“, „,“.

Jede endliche Folge von Grundzeichen von Δ nennen wir einen *Ausdruck* von Δ.

Ist A[*] eine endliche Folge von Grundzeichen von Δ und dem Symbol *, das in Δ nicht vorkommt, so sei A[B] derjenige Ausdruck, der aus A[*] dadurch entsteht, daß wir das Zeichen * an allen Stellen, in denen es in A[*] vorkommt, durch den Ausdruck B ersetzen. Kommt * in A[*] nicht vor, so ist A[B] = A[*].

Mit dieser Schreibweise präzisieren wir die bisher benützten, aber nicht exakt festgelegten Ausdrucksweisen A(a), ΛxA(x), usw.

Wir bestimmen nun die Sätze von Δ als spezielle Ausdrücke von Δ:

Sätze von Δ:

a) Ist F eine n-stellige PK von Δ und sind $a_1, \ldots, a_n$ GK von Δ, so ist $F(a_1, \ldots, a_n)$ ein Satz von Δ.

b) Ist A ein Satz von Δ, so ist auch $\neg$A ein Satz von Δ.

c) Ist A ein Satz von Δ, in dem das Symbol O nicht vorkommt, so ist auch O(A) ein Satz von Δ.[16]

d) Sind A und B Sätze von Δ, so ist auch $(A \supset B)$ ein Satz von Δ.

e) Ist A[a] ein Satz von Δ, in dem die GV x nicht vorkommt und ist a eine GK von Δ, so ist auch ΛxA[x] ein Satz von Δ.

Als definitorische Abkürzungen verwenden wir in Δ die folgenden Ausdrücke:

D1.7–1: $A \vee B := \neg A \supset B$

D1.7–2: $A \wedge B := \neg(\neg A \vee \neg B)$

D1.7–3: $A \equiv B := (A \supset B) \wedge (B \supset A)$

D1.7–4: $\mathrm{V}x A[x] := \neg \Lambda x \neg A[x]$

[16] Wir machen also in Δ keinen Unterschied zwischen Sätzen über Handlungen und anderen Sätzen. Vgl. dazu die Bemerkung in 1.4, S. 34.

sowie die Ausdrücke $V(A)$, $E(A)$ und $I(A)$, die nach D1.2–1 bis D1.2–3 durch O definiert werden können.

Äußere Klammern, die einen Satz als ganzen einschließen, können wir auch weglassen, und im übrigen verwenden wir die Regel aus 1.2 zur Klammereinsparung.

Endlich führen wir noch folgende Bezeichnungen ein:
D1.7–5: Wir nennen einen Satz A von Δ *normfrei*, wenn in ihm kein deontischer Operator vorkommt; andernfalls ist A ein *Normsatz* von Δ. Wenn alle GK und PK in A im Bereich eines deontischen Operators stehen, so nennen wir A einen *reinen Normsatz*.

Von den Sätzen
a) $\Lambda x V y(F(x) \supset \neg G(x,y))$
b) $\Lambda x(F(x) \supset O(G(x)))$
c) $F(a) \wedge G(b) \supset V(H(a,b))$
d) $\Lambda x(E(F(x)) \supset O(G(x)))$
e) $\Lambda x O(F(x) \supset G(x))$
ist also (a) ein normfreier Satz, (b) bis (e) sind Normsätze, und (d) und (e) sind reine Normsätze. Diese Terminologie benötigen wir für den Abschnitt 1.12.

1.8 Das axiomatische System D der deontischen Logik

Als *Axiome* des Systems D der deontischen Logik zeichnen wir die Sätze von Δ aus, die eine der folgenden fünf Formen haben:
A1: $O(T)$, wo T eine Tautologie (also ein logisch wahrer Satz) ist.
A2: $O(A \supset B) \supset (O(A) \supset O(B))$
A3: $O(A) \supset \neg O(\neg A)$
A4: $\Lambda x O(A[x]) \equiv O(\Lambda x A[x])$
A5: $V x O(A[x]) \supset O(V x A[x])$

A1 bis A5 sind also Axiomenschemata, aus denen die Axiome von D entstehen, indem man für A, B und A[x] solche Ausdrücke einsetzt, daß Sätze von Δ entstehen. Die Anwendung des Axiomenschemas A1 setzt voraus, daß die logisch wahren Sätze bereits bekannt sind. Diese Sätze werden, wenn wir uns hier auf die elementare Prädikatenlogik beschränken, in der Logik dadurch angegeben, daß man ein axiomatisches System festlegt, in dem man alle Tautologien ableiten kann. Man kann zwar nicht entscheiden, ob ein vorgelegter Satz eine Tautologie ist oder nicht (das gelingt nur in der Aussagenlogik), aber man gibt durch ein solches logisches Axiomensystem ein Verfahren zur Aufzählung aller Tautologien an.[17]

Wir sagen nun, in D sei ein Satz B *beweisbar* (symbolisch $\vdash_D B$), wenn B aus den Axiomen von D logisch folgt, und wir sagen, in D sei ein Satz B aus den Sätzen $A_1, \ldots, A_n$ *ableitbar* (symbolisch $A_1, \ldots, A_n \vdash_D B$), wenn B aus den Axiomen von D und den Sätzen $A_1, \ldots, A_n$ logisch folgt.[18]

Die deontischen Prinzipien nach A1 bis A5 sind uns schon bekannt. Sie sind in den voraufgehenden Abschnitten bereits intuitiv begründet worden als gültige deontisch-logische Sätze. A3 drückt z. B. die Bedingung der deontischen Widerspruchsfreiheit aus.

Wir geben nun die Beweise für einige deontologische Theoreme an, die wir schon früher kennengelernt hatten. Dabei steht $\rightarrow$ wieder für die Beziehung der logischen Folge.

T1: Gilt $A \rightarrow B$, so gilt $O(A) \supset O(B)$
(Das ist das Theorem T1.2–5.)
Beweis: Aus $A \rightarrow B$ folgt, daß $A \supset B$ eine Tautologie ist. Es

---

[17] Vgl. dazu Kutschera und Breitkopf [71], §§ 10, 11.2.

[18] Beweisbegriff und Ableitungsbegriff sind hier keine syntaktischen, sondern semantische Begriffe, da die Bezeichnung der logischen Folge mit semantischen Mitteln definiert wird (vgl. dazu den folgenden Abschnitt); sie werden aber zu syntaktischen Begriffen, wenn wir zu A2 bis A5 die Axiome eines vollständigen Systems der elementaren Prädikatenlogik hinzunehmen, und zu dessen Regeln eine Regel, die besagt, daß man aus einem beweisbaren Satz A den Satz O(A) gewinnen kann (wobei A den Operator O nicht enthält). Diese Regel ersetzt dann das Axiom A1. Dann kann man den semantischen Begriff der Folge durch den syntaktischen Begriff der Ableitbarkeit im Gesamtsystem ersetzen. – Ist $\mathfrak{A}$ eine unendliche Satzmenge, so bedeutet die Behauptung $\mathfrak{A} \vdash B$, daß es endlich viele Sätze $A_1, \ldots, A_n$ aus $\mathfrak{A}$ gibt, für die gilt $A_1, \ldots, A_n \vdash B$.

gilt also 1)	$O(A \supset B)$	nach A 1
2)	$O(A \supset B) \supset (O(A) \supset O(B))$	A 2
3)	$O(A) \supset O(B)$	das folgt logisch aus (1) und (2).

T2: Gilt $A \leftrightarrow B$, so gilt $O(A) \equiv O(B)$.
(Das ist das Theorem T 1.2–6.)
Beweis: Aus $A \leftrightarrow B$ folgt $A \rightarrow B$ und $B \rightarrow A$, so daß $A \supset B$ und $B \supset A$ Tautologien sind. Also

1)	$O(A \supset B)$	nach A 1
2)	$O(A) \supset O(B)$	nach A 2 aus (1)
3)	$O(B \supset A)$	nach A 1
4)	$O(B) \supset O(A)$	nach A 2 aus (3)
5)	$O(A) \equiv O(B)$	logisch aus (2) und (4).

T3: $O(A \wedge B) \equiv O(A) \wedge O(B)$
(Das ist das Theorem T 1.2–1.)
Beweis: $A \wedge B \supset A$, $A \wedge B \supset B$ und $A \supset (B \supset A \wedge B)$ sind Tautologien. Es gilt also

1)	$O(A \wedge B \supset A)$	nach A 1
2)	$O(A \wedge B) \supset O(A)$	nach A 2 aus (1)
3)	$O(A \wedge B \supset B)$	nach A 1
4)	$O(A \wedge B) \supset O(B)$	nach A 2 aus (3)
5)	$O(A \wedge B) \supset O(A) \wedge O(B)$	logisch aus (2), (4)
6)	$O(A \supset (B \supset A \wedge B))$	nach A 1
7)	$O(A) \supset O(B \supset A \wedge B)$	nach A 2 aus (6)
8)	$O(A) \supset (O(B) \supset O(A \wedge B))$	nach A 2 aus (7)
9)	$O(A) \wedge O(B) \supset O(A \wedge B)$	logisch aus (8)
10)	$O(A \wedge B) \equiv O(A) \wedge O(B)$	logisch aus (5), (9).

T4: $O(A) \vee O(B) \supset O(A \vee B)$
(Das ist das Theorem T 1.2–2.)
Beweis: $A \supset A \vee B$ und $B \supset A \vee B$ sind Tautologien. Also

1)	$O(A \supset A \vee B)$	nach A 1
2)	$O(A) \supset O(A \vee B)$	nach A 2 aus (1)
3)	$O(B \supset A \vee B)$	nach A 1
4)	$O(B) \supset O(A \vee B)$	nach A 2 aus (3)
5)	$O(A) \vee O(B) \supset O(A \vee B)$	logisch aus (2), (4).

T5: $O(A \equiv B) \supset (O(A) \equiv O(B))$
(Das ist das Theorem T 1.2–4.)
Beweis:

1)	$O(A \equiv B)$	Annahme (im folgenden durch „AF" abgekürzt)
2)	$O((A \supset B) \wedge (B \supset A))$	nach T 2, D 1.7–3 aus (1)
3)	$O(A \supset B) \wedge O(B \supset A)$	nach T 3 aus (2)
4)	$O(A \supset B)$	logisch aus (3)
5)	$O(A) \supset O(B)$	nach A 2 aus (4)
6)	$O(B \supset A)$	logisch aus (3)
7)	$O(B) \supset O(A)$	nach A 2 aus (6)
8)	$O(A) \equiv O(B)$	mit D 1.7–3 aus (5), (7)
9)	$O(A \equiv B) \supset (O(A) \equiv O(B))$	logisch, da (8) nur von (1) abhängt.

T6: Gilt $A \rightarrow B$, so gilt $V(B) \supset V(A)$.
(Das ist das Theorem T 1.2–9.)
Beweis: Gilt $A \rightarrow B$, so ist $\neg B \supset \neg A$ eine Tautologie. Also

1)	$O(\neg B \supset \neg A)$	nach A 1
2)	$O(\neg B) \supset O(\neg A)$	nach A 2 aus (1)
3)	$V(B) \supset V(A)$	nach D 1.2–1 aus (2).

T7: $V(A \vee B) \equiv V(A) \wedge V(B)$
(Das ist das Theorem T 1.2–10.)
Beweis:

1)	$V(A \vee B)$	AF
2)	$O(\neg(A \vee B))$	nach D 1.2–1 aus (1)
3)	$O(\neg A \wedge \neg B)$	nach T 2 aus (2)
4)	$O(\neg A) \wedge O(\neg B)$	nach T 3
5)	$V(A) \wedge V(B)$	nach D 1.2–1 aus (4)
6)	$V(A \vee B) \supset V(A) \wedge V(B)$	logisch, da (5) nur von (1) abhängt.
7)	$V(A) \wedge V(B)$	AF
8)	$O(\neg A) \wedge O(\neg B)$	nach D 1.2–1 aus (7)
9)	$O(\neg A \wedge \neg B)$	nach T 3 aus (8)
10)	$O(\neg(A \vee B))$	nach T 2 aus (9)
11)	$V(A \vee B)$	nach D 1.2–1 aus (10)

12)	$V(A) \wedge V(B) \supset V(A \vee B)$	logisch, da (11) nur von (7) abhängt
13)	$V(A \vee B) \equiv V(A) \wedge V(B)$	logisch aus (6), (12).

Wir können uns leicht davon überzeugen, daß das System D der deontischen Logik (logisch) *widerspruchsfrei* ist, d. h. daß es keinen Satz A von Δ gibt, so daß sowohl A wie $\neg A$ in D beweisbar ist. Denn die Axiome von D haben, wie man sofort sieht, die Eigenschaft, in Tautologien überzugehen, wenn man den Operator O im Sinne eines Identitätsoperators deutet, so daß gilt $O(A) \equiv A$. Und durch logische Ableitungen entstehen aus Sätzen, die bei dieser Deutung von O in Tautologien übergehen, immer nur wieder solche Sätze – die formale Logik legt ja über die Bedeutung von O nichts fest, ist also mit einer solchen Deutung verträglich. Das heißt ein Satz B ist in D nur dann beweisbar, wenn er in eine Tautologie übergeht, falls man O im Sinne eines Identitätsoperators deutet. Ein Satz $A \wedge \neg A$ hat aber nicht diese Eigenschaft, ist also in D nicht beweisbar. – Ist D widerspruchsfrei, so ist D wegen A3 auch deontisch widerspruchsfrei.

Diese Überlegung gibt uns zugleich ein einfaches Kriterium dafür an die Hand, daß ein Satz in D nicht beweisbar ist.

Leider gibt es kein Entscheidungsverfahren für deontologische Beweisbarkeit, d. h. kein rein mechanisch anwendbares und für jeden Satz A von Δ in endlich vielen Schritten zur Beantwortung der Frage führendes Verfahren, ob A in D beweisbar ist oder nicht. Ein Satz O(B) ist in D genau dann beweisbar, wenn B eine Tautologie ist. Das ergibt sich unmittelbar aus A1 und dem genannten Kriterium. Gäbe es also ein solches Entscheidungsverfahren, so gäbe es auch ein Entscheidungsverfahren für prädikatenlogische Beweisbarkeit, und ein solches Verfahren gibt es nachweislich nicht, wie schon oben bemerkt wurde.

Es gibt aber ein Entscheidungsverfahren für deontische Beweisbarkeit, wenn man die Sprache Δ auf ihren aussagenlogischen Teil beschränkt. Darauf gehen wir im Abschnitt 1.11 ein.

Abschließend sei noch darauf hingewiesen, daß man natürlich auch andere Axiomensysteme für die deontische Logik angeben kann, die dasselbe leisten wie D. Ein solches System ist z. B. das System D′ mit den Axiomen:

A′1: $O(A) \supset O(B)$ für $A \rightarrow B$

A′2: $O(A) \supset \neg O(\neg A)$

A′3: $O(A) \wedge O(B) \supset O(A \wedge B)$

A′4: $\bigwedge x O(A[x]) \supset O(\bigwedge x A[x])$.

Diese Axiome sind, wie wir gesehen haben, sämtlich in D beweisbar. Umgekehrt sind die Axiome von D auch in D′ beweisbar, wenn wir annehmen, daß es einen Satz A gibt, für den gilt O(A), d. h. daß die betrachteten Normensysteme nicht trivial sind. Denn dann gilt wegen $A \rightarrow T$ nach A′1 auch A1; aus $O(A \supset B) \wedge O(A)$ folgt nach A′3 auch $O(A \wedge (A \supset B))$, also wegen $A \wedge (A \supset B) \rightarrow B$ auch O(B), so daß A2 gilt. Wegen $\bigwedge x A[x] \rightarrow A[a]$ für beliebige GK a gilt nach A′1 $O(\bigwedge x A[x]) \supset O(A[a])$, daraus folgt logisch $O(\bigwedge x A[x]) \supset \bigwedge x O(A[x])$, woraus man mit A′4 A4 erhält; und wegen $A[a] \rightarrow \bigvee x A[x]$ gilt nach A′1 $O(A[a]) \supset O(\bigvee x A[x])$, und daraus folgt logisch $\bigvee x O(A[x]) \supset O(\bigvee x A[x])$, also A5. Unter der Voraussetzung der Existenz eines Satzes A mit O(A) sind also in D und D′ genau dieselben Sätze beweisbar. In diesem Punkt – daß O(T) nur für nichttriviale Normensysteme gilt – ist also D′ schwächer als D. Im übrigen ist auch D′ ein Axiomensystem, das sich durch seine Einfachheit und intuitive Durchsichtigkeit empfiehlt.

*1.9 Die Interpretation der Sprache Δ

Für diesen und die folgenden Abschnitte müssen wir einige Logikkenntnisse voraussetzen, wie sie z. B. in Kutschera und Breitkopf [71], Kap. 1–11, vermittelt werden. Wer sich für diese mehr technischen Dinge nicht interessiert, kann nach einem Blick auf die Theoreme des Abschnitts 1.12 gleich zur Lektüre des zweiten Kapitels übergehen.

In der Prädikatenlogik definiert man, was unter einer *Interpretation* einer prädikatenlogischen Sprache zu verstehen ist.

Eine solche Sprache ist Δ', die Sprache, die aus Δ entsteht, indem man den Operator O und die Sätze, die ihn enthalten, herausstreicht.

D 1.9–1: Eine *prädikatenlogische Interpretation* von Δ' über dem (nichtleeren) Objektbereich U ist eine Funktion M, für die gilt:

a) $M(a) \varepsilon U$ für alle GK a,
b) $M(F) \varepsilon P(U^n)$ für alle n-stelligen PK F (dabei ist $P(U^n)$ die Potenzmenge der n-ten Cartesischen Potenz von U, d. h. M(F) ist eine Menge von n-gliedrigen Folgen von Elementen aus (U).
c) $M(F(a_1, \ldots, a_n)) = w$ genau dann, wenn $M(a_1), \ldots, M(a_n) \varepsilon M(F)$, d. h. wenn das n-tupel der Objekte $M(a_1), \ldots, M(a_n)$ Element von M(F) ist; w ist der Wahrheitswert „wahr", f der Wahrheitswert „falsch".
d) $M(\neg A) = w$ genau dann, wenn $M(A) = f$.
e) $M(A \supset B) = w$ genau dann, wenn $M(A) = f$ oder $M(B) = w$.
f) $M(\Lambda x A[x]) = w$ genau dann, wenn für alle Interpretationen M' mit $M' \overline{\overline{\scriptstyle a}} M$ gilt $M'(A[a]) = w$; dabei sei a eine GK, die in $\Lambda x A[x]$ nicht vorkommt.

$M' \overline{\overline{\scriptstyle a}} M$ besagt, daß die Interpretationen M und M' übereinstimmen bis auf höchstens die Werte M(a) und M'(a); M und M' liegt also derselbe Objektbereich U zugrunde, und es gilt $M(t) = M'(t)$ für alle GK und PK t, die von a verschieden sind.

Aus einer solchen prädikatenlogischen Interpretation von Δ' erhält man eine deontische Interpretation von Δ durch eine sehr elementare Anwendung der Gedanken von S. Kripke zur Interpretation modallogischer Sprachen (vgl. z. B. Kripke [63], sowie Hanson [66], Hintikka [57], Kanger [71] und Montague [68]):

D 1.9–2: Eine *deontische Interpretation* von Δ über dem (nichtleeren) Objektbereich U und der (nichtleeren) Menge N von prädikatenlogischen Interpretationen von Δ' über U ist eine Funktion M, für die gilt:

1) M erfüllt die Bedingungen (a) bis (f) für prädikatenlogische Interpretationen über U aus D 1.9–1.

2) Für alle Interpretationen M^* aus N gilt $M^*(a) = M(a)$ für alle GK a.
3) $M(O(A)) = w$ genau dann, wenn für alle Interpretationen M^* aus N gilt $M^*(A) = w$.

Für deontische Interpretationen impliziert die Forderung $M' \overline{\overline{\scriptstyle a}} M$ auch, daß es zu jedem $M^{*\prime}$ aus N' ein M^* aus N gibt mit $M^{*\prime} \overline{\overline{\scriptstyle a}} M^*$, und umgekehrt; N' geht also aus N durch Ersetzung der Werte $M^*(a) = M(a)$ durch $M^{*\prime}(a) = M'(a)$ hervor.

Im folgenden sei $\overline{M}$ immer diejenige prädikatenlogische Interpretation, die für Δ' mit der deontischen Interpretation M übereinstimmt.

Intuitiv kann man diese Festlegungen so deuten: Nach (3) wird ein Satz A als obligatorisch charakterisiert, wenn er in allen Welten (mit den gleichen Objekten wie die wirkliche Welt) wahr ist, die besser sind als die durch M bestimmte wirkliche Welt. Die Klasse N ist also die Klasse der bezüglich M besseren Welten. Eine Welt ist gekennzeichnet durch die Menge U ihrer Objekte und durch deren Eigenschaften und Beziehungen, wie sie (extensional) durch die Interpretation der PK festgelegt werden.

Ist $N = \{\overline{M}\}$, so ist M über N eine Interpretation, bei der gilt $M(O(A)) = M(A)$ für alle Sätze A, die also den Operator O als Identität deutet.

Ist N die Menge aller prädikatenlogischen Interpretationen M^* über U mit $M^*(a) = M(a)$ für alle GK a, so gilt $M(O(A)) = w$ genau dann, wenn der Satz A in allen mit U gleichzahligen Bereichen gilt.

Ist U eine abzählbar unendliche Menge, z. B. die Menge U^* der natürlichen Zahlen, und ist N die Menge aller prädikatenlogischen Interpretationen M^* über U^* mit $M^*(a_i) = M(a_i) = i$ bei irgendeiner Abzählung $a_1, a_2, \ldots$ der GK, so gilt $M(O(A)) = w$ genau dann, wenn A logisch wahr ist; denn in der Prädikatenlogik beweist man den Satz, daß die logisch wahren Sätze genau die Sätze sind, die bei allen Interpretationen M^* über U^* mit $M^*(a_i) = i$ wahr sind.

Diese drei Fälle zeigen, daß für Sätze der Gestalt O(A) je nach Festlegung von N ganz verschiedene Wahrheitsbedingungen gelten können.

Für prädikatenlogische Interpretationen gelten die folgenden beiden grundlegenden semantischen Theoreme:

T1.9–1 *(Koinzidenztheorem):* Gilt $M' \underset{a}{=} M$ und kommt die GK a nicht in dem Satz A vor, so gilt $M(A) = M'(A)$.

T 1.9–2 *(Überführungstheorem):* Gilt $M' \underset{a}{=} M$ und $M'(a) = M(b)$, so gilt $M'(A[a]) = M(A[b])$ für alle Sätze A[a], wobei die GK a nicht in dem Satz A[b] vorkommt.[19]

Diese beiden Theoreme gelten auch für deontische Interpretationen. Um das einzusehen, braucht man die Beweise für den prädikatenlogischen Fall, der durch Induktion nach dem Grad der Sätze A, bzw. A[a] geführt wird (der *Grad* eines Satzes ist die Anzahl der in ihm vorkommenden logischen und deontischen Operatoren), nur um folgende Fälle im Induktionsschritt zu erweitern:

Für T1.9–1: Es sei $M' \underset{a}{=} M$, A sei vom Grad $n + 1$ und habe die Gestalt O(B). Es sei bereits bewiesen, daß das Theorem für alle Sätze vom Grad $\leq n$ gilt. Für alle $M^* \varepsilon N$ gibt es ein $M^{*\prime} \varepsilon N'$ mit $M^* \underset{a}{=} M^{*\prime}$. Gibt es also ein $M^* \varepsilon N$ mit $M^*(B) = f$, so gibt es nach Induktionsvoraussetzung auch ein $M^{*\prime} \varepsilon N'$ mit $M^{*\prime}(B) = f$. Ist also $M(O(B)) = f$, so auch $M'(O(B)) = f$. Auf die gleiche Weise folgt $M(O(B)) = f$ aus $M'(O(B)) = f$.

Für T1.9–2: Es sei $M' \underset{a}{=} M$ und $M'(a) = M(b)$; A[a] sei vom Grad $n+1$ und habe die Gestalt O(B[a]). Es sei bereits bewiesen, daß das Theorem für alle Sätze vom Grad $\leq n$ gilt. Zu jedem $M^* \varepsilon N$ gibt es ein $M^{*\prime} \varepsilon N'$ mit $M^{*\prime} \underset{a}{=} M^*$ und $M^{*\prime}(a) = M^*(b)$. Gibt es also ein $M^* \varepsilon N$ mit $M^*(B[b]) = f$, so gibt es nach Induktionsvoraussetzung auch ein $M^{*\prime} \varepsilon N'$ mit $M^{*\prime}(B[a]) = f$. Ist also $M(O(B[b])) = f$, so gilt auch $M'(O(B[a])) = f$. Auf die gleiche Weise folgt $M(O(B[b])) = f$ aus $M'(O(B[a])) = f$.

Die Sprache Δ' wird durch die Interpretationen nach D1.9–1 als extensionale Sprache gedeutet. Aus $M(a) = M(b)$ folgt also $M(A[a]) = M(A[b])$ für alle GK a, b und alle Sätze A[a] von Δ'. Es gilt daher auch das Theorem T1.6–1 in der Form:

---

[19] Für einen Beweis dieser Theoreme vgl. Kutschera und Breitkopf [71], § 9.4.

T 1.9–3: Aus $M(a) = M(b)$ folgt $M(A[a]) = M(A[b])$.

Der Beweis ergibt sich in einfacher Weise durch Induktion nach dem Grad g des Satzes A[a]. Ist $g = 0$, hat also A die Gestalt F(–, a, –), so ist die Behauptung nach D1.9–2(a) und D 1.9–1 (c) trivial. Ist die Behauptung bereits bewiesen für alle Sätze von Grad $\leq n$, so zeigt man leicht, daß sie auch für $g = n+1$ gilt. Wir greifen nur den Fall heraus, daß A[a] die Gestalt O(B[a]) hat: Nach Induktionsvoraussetzung gilt für alle M^* aus N: $M^*(B[a]) = M^*(B[b])$; gilt also für alle $M^* \varepsilon N$ $M^*(B[a]) = w$, so gilt für alle $M^* \varepsilon N$ auch $M^*(B[b]) = w$, und umgekehrt. Nach D1.9–2 (3) gilt also $M(O(B[a])) = M(O(B[b]))$.

Dieser Beweis zeigt, daß die Geltung des Prinzips von der Bedingung (2) in D 1.9–2 abhängt.

Wir definieren:

D 1.9–3: Die Interpretation M *erfüllt* den Satz A von Δ genau dann, wenn gilt $M(A) = w$. M erfüllt die Menge $\mathfrak{M}$ von Sätzen genau dann, wenn M alle Sätze aus $\mathfrak{M}$ erfüllt.

D 1.9–4: Ein Satz A von Δ heißt *deontologisch wahr* (kurz D-*wahr*) genau dann, wenn alle deontischen Interpretationen A erfüllen. A heißt *deontologisch falsch* (D-*falsch*) genau dann, wenn keine deontische Interpretation A erfüllt. Und A heißt *deontologisch indeterminiert* (D-*indeterminiert*) genau dann, wenn A weder D-wahr noch D-falsch ist.

Ist der Satz O(A) D-wahr, so ist A tautologisch. Das ergibt sich nach der Bemerkung unter D 1.9–2 daraus, daß zu den deontologischen Interpretationen, die A erfüllen, auch alle Interpretationen über der Menge der natürlichen Zahlen U^* gehören, für die N die Menge aller prädikatenlogischen Interpretationen über U^* ist. – Man kann auch so argumentieren: Ist O(A) D-wahr, so gilt für alle deontischen Interpretationen M mit $N = \{\overline{M}\}$: $M(O(A)) = w$, also $M'(A) = w$ für alle prädikatenlogischen Interpretationen M'. Entsprechend gilt: Ist O(A) D-falsch, so ist A kontradiktorisch.

D 1.9–5: Ein Schluß mit den Prämissen $A_1, \ldots, A_n$ und der Konklusion B heißt *deontologisch gültig* (D-gültig) genau dann, wenn alle deontischen Interpretationen, die alle Sätze $A_1, \ldots, A_n$

erfüllen, auch den Satz B erfüllen. Wir schreiben dann auch $A_1, \ldots, A_n \underset{D}{\Rightarrow} B$.

T1.9–4: Gilt $A_1, \ldots, A_n \rightarrow B$, so gilt auch $A_1, \ldots, A_n \underset{D}{\Rightarrow} B$. Ist ein Schluß logisch gültig, so ist er also auch deontologisch gültig.

Beweis: Erfüllt die deontische Interpretation M über U alle Sätze einer Menge $\mathfrak{M}$, so erfüllt auch diejenige prädikatenlogische Interpretation M^+ von Δ alle Sätze aus $\mathfrak{M}$, für die gilt: M^+ ist eine Interpretation über U mit $M^+(t) = M(t)$ für alle GK und PK t und es gilt $M^+(O(A[x_1, \ldots, x_n])) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n \varepsilon U$: es gibt ein M' mit $M' \underset{a_1, \ldots, a_n}{=} M$, $M'(a_1) = \alpha_1, \ldots, M'(a_n) = \alpha_n$ und $M'(O(A[a_1, \ldots, a_n])) = w\}$. Dabei seien $O(A[x_1, \ldots, x_n])$ Ausdrücke, in denen keine GK vorkommen. Bezüglich M^+ werden also die Ausdrücke $O(A[x_1, \ldots, x_n])$ wie n-stellige PK interpretiert, und entsprechend die Sätze der Form $O(A[b_1, \ldots, b_n])$ wie Atomsätze. $M' \underset{a_1, \ldots, a_n}{=} M$ besagt, daß M' mit M bis auf höchstens die Werte $M'(a_i)$ und $M(a_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$ übereinstimmt. Man verifiziert die Behauptung, daß M^+ die Sätze A aus $\mathfrak{M}$ erfüllt, durch eine einfache Induktion nach dem Grad g von A. Ist $g = 0$, so ist die Behauptung trivial. Ist sie bereits für alle Sätze vom Grad $\leq n$ bewiesen, so gilt sie auch für alle Sätze vom Grad $n+1$. Wir greifen nur zwei Fälle heraus: a) Hat A die Gestalt $O(B[b_1, \ldots, b_n])$, so gilt $M^+(O(B[b_1, \ldots, b_n])) = w$ genau dann, wenn $M^+(b_1), \ldots, M^+(b_n) \varepsilon M^+(O(B[x_1, \ldots, x_n]))$ (nach D1.9–1 (c)), also genau dann, wenn es ein M' mit $M' \underset{a_1, \ldots, a_n}{=} M$ gibt mit $M'(a_1) = M(b_1), \ldots, M'(a_n) = M(b_n)$ und $M'(O(B[a_1, \ldots, a_n])) = w$; das ist nach dem Überführungstheorem aber genau dann der Fall, wenn gilt $M(O(B[b_1, \ldots, b_n])) = w$. b) Hat A die Gestalt $\Lambda x B[x]$ und gilt $M(\Lambda x B[x]) = f$, so gibt es ein M' mit $M' \underset{a}{=} M$ (die GK a komme in $\Lambda x B[x]$ nicht vor) und $M'(B[a]) = f$. Setzt man $M^{+\prime} \underset{a}{=} M^+$ und $M^{+\prime}(a) = M'(a)$, so gilt nach Induktionsvoraussetzung $M^{+\prime}(B[a]) = f$, also $M^+(\Lambda x B[x]) = f$. Auf die gleiche Weise folgt $M(\Lambda x B[x]) = f$ aus $M^+(\Lambda x B[x]) = f$.

Gilt nun $A_1, \ldots, A_n \underset{D}{\Rightarrow} B$ nicht, so gibt es eine deontische Interpretation M, die alle Sätze $A_1, \ldots, A_n, \neg B$ erfüllt, also auch eine prädikatenlogische Interpretation M^+, die diese Sätze erfüllt, so daß auch $A_1, \ldots, A_n \rightarrow B$ nicht gilt.

Durch M^+ bezeichnen wir im folgenden immer die der deontischen Interpretation M zugeordnete prädikatenlogische Interpretation von Δ, die dieselben Sätze erfüllt wie M. Die prädikatenlogische Interpretation $\overline{M}$ war demgegenüber nur für die Sätze von Δ' definiert, stimmt für diese Sätze aber mit M^+ überein.

Wir können jetzt auch das wichtige Theorem T1.2–5 semantisch in der Form beweisen:

T1.9–5: Gilt $A \rightarrow B$, so gilt auch $O(A) \rightarrow O(B)$.

Beweis: Ist $M(O(A)) = w$, so gilt nach D1.9–2 (3) für alle $M^* \varepsilon N$: $M^*(A) = w$, wegen $A \rightarrow B$ also auch $M^*(B) = w$, also $M(O(B)) = w$.

Endlich führen wir noch den Satz an:

T1.9–6: Ist A ein reiner Normsatz und stimmen die deontischen Interpretationen M, M' überein bis auf höchstens die Werte M(F), M'(F), die sie den PK F von Δ zuordnen, so gilt $M(A) = M'(A)$.

Der Beweis ergibt sich durch Induktion nach dem Grad von A direkt aus der Definition D1.9–2. Hat A die Gestalt O(B), so gilt trivialerweise $M(O(B)) = M'(O(B))$, da M und M' dieselbe Menge N zugrundeliegt. Hat A die Gestalt $\Lambda x B[x]$, wo B[a] ein reiner Normsatz ist – die GK a komme in $\Lambda x B[x]$ nicht vor – und gilt $M(\Lambda x B[x]) = f$, so gibt es ein M'' mit $M'' \overline{\overline{\scriptstyle a}} M$ und $M''(B[a]) = f$. Es gilt dann nach Induktionsvoraussetzung $M'''(B[a]) = f$, wo M''' die Interpretation mit $M''' \overline{\overline{\scriptstyle a}} M'$ und $M'''(a) = M''(a)$ ist; also $M'(\Lambda x B[x]) = f$. Umgekehrt argumentiert man entsprechend.

*1.10 Die Adäquatheit des Systems D

Bisher konnte es so scheinen, als seien die Axiome des Systems D der deontischen Logik mehr oder minder willkürlich ausgewählt. Die Frage blieb zunächst offen, warum wir nur diese Axiome annehmen und nicht auch andere. Es zeigte sich zwar, daß aus ihnen die grundlegenden Prinzipien T1.2–1 bis T1.2–15 und T1.6–2 bis T1.6–6 folgen, aber damit ist nicht gesagt, daß alle gültigen deontologischen Prinzipien in D beweisbar sind.

Und es ist auch nicht gesagt, daß in D nicht Sätze beweisbar sind, die deontologisch nicht gültig sind.

Wir wollen nun zeigen, daß bezüglich der Präzisierung des Begriffs der deontologischen Gültigkeit durch die Semantik aus 1.9 das axiomatische System adäquat ist, d. h. daß in D genau die D-wahren Sätze beweisbar sind.

T1.10–1: Das System D ist *deontologisch widerspruchsfrei*, d. h. in D sind nur D-wahre Sätze beweisbar.[20]

Beweis: a) Alle Axiome von D sind D-wahre Sätze:

A1: Ist T eine Tautologie, so gilt für alle Interpretationen M über N: für alle $M^* \varepsilon N$ ist $M^*(T) = w$, also gilt $M(O(T)) = w$.

A2: Gilt $M(O(A \supset B)) = w$, so gilt für alle $M^* \varepsilon N$: $M^*(A \supset B) = w$, also $M^*(A) = f$ oder $M^*(B) = w$. Ist nun $M(O(A)) = w$, so gilt für alle $M^* \varepsilon N$: $M^*(A) = w$, also muß für alle $M^* \varepsilon N$ gelten $M^*(B) = w$, also $M(O(B)) = w$.

A3: Gilt $M(O(A)) = w$, so gilt für alle $M^* \varepsilon N$: $M^*(A) = w$, also $M^*(\neg A) = f$, also $M(O(\neg A)) = f$, also $M(\neg O(\neg A)) = w$.

A4: Gilt $M(O(\Lambda x A[x])) = f$, so gibt es nach D1.9–1(f) ein $M^* \varepsilon N$ mit $M^*(\Lambda x A[x]) = f$, also ein $M^{*\prime}$ mit $M^{*\prime} \overline{\overline{\scriptstyle a}} M^*$ und $M^{*\prime}(A[a]) = f$ (die GK a komme nicht in $A[x]$ vor). Es sei $M' \overline{\overline{\scriptstyle a}} M$ und $M'(a) = M^{*\prime}(a)$. Dann ist $M^{*\prime} \varepsilon N'$, also $M'(O(A[a])) = f$, also $M(\Lambda x O(A[x])) = f$. Ist umgekehrt $M(\Lambda x O(A[x])) = f$, so gibt es ein M' mit $M' \overline{\overline{\scriptstyle a}} M$ und $M'(O(A[a])) = f$, also ein $M^{*\prime} \varepsilon N'$ mit $M^{*\prime}(A[a]) = f$. Für dasjenige $M^* \varepsilon N$ mit $M^{*\prime} \overline{\overline{\scriptstyle a}} M^*$ gilt also $M^*(\Lambda x A[x]) = f$, und daraus folgt $M(O(\Lambda x A[x])) = f$.

A5: Gilt $M(\mathrm{V} x O(A[x])) = w$, so gibt es nach D1.7–4 und D1.9–1 (f) ein M' mit $M' \overline{\overline{\scriptstyle a}} M$ (die GK a komme in $\mathrm{V} x O(A[x])$ nicht vor) und $M'(O(A[a])) = w$, also für alle $M^{*\prime} \varepsilon N'$: $M^{*\prime}(A[a]) = w$. Zu jedem $M^* \varepsilon N$ gibt es ein $M^{*\prime} \varepsilon N'$ mit $M^{*\prime} \overline{\overline{\scriptstyle a}} M^*$, also gilt für alle $M^* \varepsilon N$: $M^*(\mathrm{V} x A[x]) = w$, also $M(O(\mathrm{V} x A[x])) = w$.

b) Sind die Sätze $A_1, \ldots, A_n$ D-wahr und gilt $A_1, \ldots, A_n \rightarrow B$, so

[20] Dieser Begriff der deontologischen Widerspruchsfreiheit ist von dem in D1.4–2 definierten Begriff der deontischen Widerspruchsfreiheit zu unterscheiden!

ist auch B D-wahr. Das ergibt sich sofort aus T1.9–4, denn wäre B nicht D-wahr, so würde $A_1, \ldots, A_n \underset{D}{\Rightarrow} B$ nicht gelten, also auch $A_1, \ldots, A_n \rightarrow B$ nicht.

Damit ist das Theorem T1.10–1 bewiesen. Aus diesem Theorem folgt auch: Ist B in D aus $A_1, \ldots, A_n$ ableitbar, so gilt $A_1, \ldots, A_n \underset{D}{\Rightarrow} B$. Denn besteht diese Ableitbarkeit, so ist $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \supset B$ in D beweisbar, also ist dieser Satz D-wahr, und daher gilt $A_1, \ldots, A_n \underset{D}{\Rightarrow} B$. Das ergibt sich einfach aus den semantischen Regeln für die Implikation.

Aus der deontologischen Widerspruchsfreiheit von D ergibt sich nach der Bemerkung unter D1.9–4 sofort, daß ein Satz O(A) nur dann in D beweisbar ist, wenn A tautologisch ist. Diese Tatsache hätten wir im Abschnitt 1.8 ebenfalls zum Beweis der logischen Widerspruchsfreiheit von D verwenden können. Ebenso ergibt sich, daß $\neg$O(A) nur dann in D beweisbar ist, wenn A kontradiktorisch ist.

Das halten wir in einem Theorem fest:

T1.10–2: Gilt $\vdash_D$O(A), so ist A logisch wahr. Gilt $\vdash_D \neg$O(A), so ist A logisch falsch.

T1.10–3: Das System D ist *deontologisch vollständig*, d. h. in D sind alle D-wahren Sätze beweisbar.

Beweis: Wir schließen uns eng an den prädikatenlogischen Vollständigkeitsbeweis nach L. Henkin an.[21] Wir nennen eine Satzmenge $\mathfrak{M}$ *D-konsistent,* wenn für keinen Satz A gilt $\mathfrak{M} \underset{D}{\Rightarrow} \neg(A \supset A)$.[22] $\mathfrak{M}$ heißt *maximal-D-konsistent,* wenn $\mathfrak{M}$ D-konsistent ist und jede Erweiterung von $\mathfrak{M}$ nicht D-konsistent ist. $\mathfrak{M}$ heißt *normal,* wenn der Satz $\wedge x A[x]$ immer dann in $\mathfrak{M}$ enthalten ist, wenn die Sätze A[b] für alle GK b in $\mathfrak{M}$ enthalten sind.

Man kann dann zeigen:

1. Ist A nicht in D beweisbar, so ist die Menge $\{\neg A\}$ (die nur den Satz $\neg$A enthält) D-konsistent.

---

[21] Vgl. dazu Kutschera und Breitkopf [71], § 11.2.

[22] Ist $\mathfrak{M}$ eine unendliche Satzmenge, so gilt $\mathfrak{M} \underset{D}{\Rightarrow} B$ genau dann, wenn es endlich viele Sätze $A_1, \ldots, A_n$ aus $\mathfrak{M}$ gibt, für die gilt $A_1, \ldots, A_n \underset{D}{\Rightarrow} B$.

2. Zu jeder D-konsistenten Menge $\mathfrak{M}$ gibt es eine normale, maximal-D-konsistente Menge $\mathfrak{M}^*$, die alle Sätze aus $\mathfrak{M}$ enthält.
3. Zu jeder normalen, maximal-D-konsistenten Menge $\mathfrak{M}^*$ gibt es eine deontische Interpretation M, die genau die Sätze aus $\mathfrak{M}^*$ erfüllt.

Daraus folgt sofort die Vollständigkeit von D.

Die Behauptungen (1) und (2) werden völlig analog bewiesen wie in der Prädikatenlogik.[23] Die Behauptung (3) beweist man so: Ist $\mathfrak{M}^*$ eine normale, maximal-D-konsistente Satzmenge und U^* die Menge der natürlichen Zahlen, so sei M diejenige deontische Interpretation über U^* und N, für die gilt: $M(a_i) = i$ (a_i sei die i-te GK in irgendeiner Abzählung der GK aus Δ), $M(F) = \{n_1, \ldots, n_m : F(a_{n_1}, \ldots, a_{n_m}) \varepsilon \mathfrak{M}^*\}$ für alle m-stelligen PK F. N sei die Menge aller prädikatenlogischen Interpretationen M^* über U^* mit $M^*(a) = M(a)$ für alle GK a und $M^*(A) = w$ für alle Sätze A mit $O(A) \varepsilon \mathfrak{M}^*$. Solche Interpretationen gibt es, wie im prädikatenlogischen Vollständigkeitsbeweis gezeigt wird, da die Menge $\mathfrak{M}^{*\prime}$ der Sätze A mit $O(A) \varepsilon \mathfrak{M}^*$ konsistent ist. Wäre $\mathfrak{M}^{*\prime}$ inkonsistent, so würde es Sätze $B_1, \ldots, B_n \varepsilon \mathfrak{M}^{*\prime}$ geben mit $B_1, \ldots, B_n \rightarrow \neg(C \supset C)$, also $B_1, \ldots, B_{n-1} \rightarrow \neg B_n$. Dann würde es aber in $\mathfrak{M}^*$ Sätze $O(B_n)$ und $O(\neg B_n)$ geben – mit $O(B_1), \ldots, O(B_{n-1})$ ist nach T3 auch $O(B_1 \wedge \ldots \wedge B_{n-1})$ in $\mathfrak{M}^*$, wegen A1 also $O(B_1 \wedge \ldots \wedge B_{n-1} \supset \neg B_n)$, und daher wegen A2 auch $O(\neg B_n)$ – so daß $\mathfrak{M}^*$ wegen A3 nicht D-konsistent wäre.
Man zeigt nun leicht durch Induktion nach dem Grad der Sätze A wie im prädikatenlogischen Fall, daß M genau die Sätze aus $\mathfrak{M}^*$ erfüllt. Ist $O(A) \varepsilon \mathfrak{M}^*$, so gilt $M(O(A)) = w$ nach Festlegung von N; andernfalls gibt es eine Interpretation M^* aus N, die $\neg A$ erfüllt. Wäre das nicht der Fall, so würde es Sätze $A_1, \ldots, A_n$ aus $\mathfrak{M}^{*\prime}$ geben mit $A_1, \ldots, A_n \rightarrow A$; dann würde aber aus $O(A_1), \ldots, O(A_n)$ wieder folgen $O(A)$, so daß $O(A)$ in $\mathfrak{M}^*$ wäre. Ist $O(A)$ nicht in $\mathfrak{M}^*$, so gilt also $M(O(A)) = f$.

Damit ist die Vollständigkeit von D bewiesen.

Aus T1.10–3 folgt sofort, daß im Fall $A_1, \ldots, A_n \underset{D}{\rightarrow} B$ auch $A_1, \ldots, A_n \underset{D}{\vdash} B$ gilt.

---

[23] Vgl. dazu wieder Kutschera und Breitkopf [71], S. 104 ff.

Aus dem Beweis von T1.10–3 ergibt sich ferner auch das Theorem

T1.10–4: Gibt es eine deontische Interpretation, die alle Sätze einer Menge $\mathfrak{M}$ erfüllt, so gibt es auch eine deontische Interpretation M über der Menge der natürlichen Zahlen mit $M(a_i) = i$ für irgendeine Abzählung der GK, die alle Sätze aus $\mathfrak{M}$ erfüllt.

Ist also ein Satz A wahr bei jeder Interpretation über der Menge der natürlichen Zahlen, so ist er D-wahr. Das Entsprechende gilt auch in der Prädikatenlogik.

Wir haben uns hier, wo es uns nur auf die Semantik des deontischen Operators O ankam, auf eine einfache extensionale Grundsprache Δ', die Sprache der elementaren Prädikatenlogik bezogen. Für die Analyse komplizierter deontischer Texte wird man auf ausdrucksreichere Sprachen zurückgreifen müssen, deren semantische Charakterisierung entsprechend komplizierter ist.[24] An den semantischen Festlegungen über den Operator O ändert sich dabei aber nichts.

*1.11 Ein Entscheidungsverfahren für den aussagenlogischen Teil des Systems D

Der Vollständigkeitsbeweis für das System D zeigt, wie man ein Entscheidungsverfahren für die deontische Aussagenlogik aufbauen kann.

Die Sprache Δ_a enthalte anstelle der GK und PK von Δ Satzkonstanten (kurz SK), z. B. die Buchstaben p, r, s, ... SK sind Sätze von Δ_a; mit einem Satz A ist auch $\neg A$, und mit einem Satz A, in dem der Operator O nicht vorkommt, auch O(A) ein Satz von Δ_a; und mit den Sätzen A und B ist auch $(A \supset B)$ ein Satz von Δ_a.

D1.11–1: Eine aussagenlogische *Bewertung* von Δ_a ist eine

[24] Vgl. dazu z. B. Montague [70].

Funktion M, die allen Sätzen von Δ_a, die den Operator O nicht enthalten, Wahrheitswerte zuordnet, so daß gilt:
a) $M(\neg A) = w$ genau dann, wenn $M(A) = f$, und
b) $M(A \supset B) = w$ genau dann, wenn $M(A) = f$ oder $M(B) = w$.[25]

D 1.11–2: Eine *deontische Bewertung* von Δ_a über einer (nichtleeren) Menge N von aussagenlogischen Bewertungen von Δ_a ist eine Funktion M, die allen Sätzen von Δ_a Wahrheitswerte zuordnet, so daß neben (a) und (b) aus D 1.11–1 auch gilt:
c) $M(O(A)) = w$ genau dann, wenn für alle $M^* \varepsilon N$ gilt $M^*(A) = w$.

Für Bewertungen kann man in Analogie zu D 1.9–3, D 1.9–4 und D 1.9–5 eine Erfüllungsrelation, D-wahre Sätze und D-gültige Schlüsse definieren.

In der Aussagenlogik wird nun gezeigt:
1. Ein Schluß $A_1, \ldots, A_n \rightarrow B$ ist gültig genau dann, wenn der Satz $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \supset B$ logisch wahr ist.

Entsprechend gilt $A_1, \ldots, A_n \underset{D}{\rightarrow} B$ genau dann, wenn der Satz $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \supset B$ D-wahr ist. Man kann also die Frage der D-Gültigkeit von Schlüssen auf die Frage der D-Wahrheit von Sätzen reduzieren.[26]
2. Jeder Satz A einer aussagenlogischen Sprache läßt sich in mechanischer Weise in endlich vielen Schritten in einen mit A logisch äquivalenten Satz der Gestalt
$\Phi(A) = (\neg)A_{11} \wedge \ldots \wedge (\neg)A_{1m_1} \vee \ldots \vee (\neg)A_{n1} \wedge \ldots \wedge (\neg)A_{nm_n}$
(die disjunktive Normalform von A)
umformen, wobei die A_{ik_i} $(i = 1, \ldots, n;\ k_i = 1, \ldots, m_i)$ SK sind und die eingeklammerten Negationszeichen andeuten, wo Negationszeichen stehen können.[27]

---

[25] Vgl. dazu auch Kutschera und Breitkopf [71], § 5.2.
[26] Vgl. Kutschera und Breitkopf [71], § 4.1.
[27] Vgl. z. B. Kutschera [67], S. 66. – Zur Konstruktion von $\Phi(A)$ ersetzt man zunächst in A die Operatoren $\supset$ und $\equiv$ nach D 1.7–1 und D 1.7–3, zieht dann die Negationszeichen nach den Gesetzen $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$ und $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$ möglichst weit nach innen, ersetzt Formeln $\neg\neg A$ durch A und formt endlich die Formeln $A \wedge (B \vee C)$, bzw. $(A \vee B) \wedge C$ in die äquivalenten Formeln $A \wedge B \vee A \wedge C$, bzw. $A \wedge C \vee B \wedge C$ um.

Entsprechend gilt: Jeder Satz A von Δ_a läßt sich in einen logisch äquivalenten Satz der Gestalt $\Phi(A)$ umformen, wobei die A_{ik_i} nun SK oder Sätze der Form O(B) sind. Dabei sind neben D 1.7–1 und D 1.7–3 nun auch D 1.2–1 und D 1.2–2 anzuwenden, um die Operatoren E und V zu eliminieren.

Die disjunktive Normalform von A gibt an, ob A erfüllbar ist oder nicht: Enthält jedes Disjunktionsglied von $\Phi(A)$ eine SK zugleich negiert und unnegiert, so ist A nicht erfüllbar. Wir nennen ein solches Disjunktionsglied auch *geschlossen*. Enthält $\Phi(A)$ ein nicht geschlossenes Disjunktionsglied B, so erfüllt jede Bewertung A, die allen unnegierten SK in B den Wahrheitswert w und allen negierten SK von B den Wahrheitswert f zuordnet.

Die Konstruktion der disjunktiven Normalform für den Satz $\neg A$ bildet also ein aussagenlogisches Entscheidungsverfahren für den Satz A: A ist logisch wahr genau dann, wenn $\neg A$ nicht erfüllbar ist.

In Analogie dazu sieht das Entscheidungsverfahren für D-Wahrheit für die Sätze von Δ_a so aus:
Man bildet zu einem Satz A von Δ_a seine Negation $\neg A$ und konstruiert dazu die disjunktive Normalform $\Phi(\neg A)$. Ist jedes Disjunktionsglied von $\Phi(\neg A)$ geschlossen, so ist $\neg A$ aussagenlogisch nicht erfüllbar, A ist also aussagenlogisch wahr, und daher auch D-wahr. Gibt es hingegen nichtgeschlossene Disjunktionsglieder $C_1, \ldots, C_r$ von $\Phi(\neg A)$, so bilden wir zu jedem solchen $C_j (j=1,\ldots,r)$ die Sätze $\Psi_{l_j}(C_j) = D_{j1} \wedge \ldots \wedge D_{jq_j} \supset E_{jl_j}$ wobei die $D_{j1}, \ldots, D_{jq_j}$ genau diejenigen Sätze seien, für die in C_j die Sätze $O(D_{j1}), \ldots, O(D_{jq_j})$ vorkommen, während E_{jl_j} ein Satz ist, für den in C_j der Satz $\neg O(E_{jl_j})$ vorkommt. Gibt es p_j solche E-Sätze, so ist also $l_j = 1, \ldots, p_j$. A ist genau dann D-wahr, wenn für alle C_j ein $\Psi_{l_j}(C_j)$ aussagenlogisch wahr ist – diese Frage entscheiden wir wieder durch Bildung der disjunktiven Normalform $\Phi(\neg \Psi_{l_j}(C_j))$.

Dazu drei Beispiele:

a) $A = (p \supset E(q)) \vee (p \supset V(q))$. Es ist dann

$$\neg A \equiv \neg((p \supset E(q)) \vee (p \supset V(q)))$$
$$\equiv \neg(p \supset E(q)) \wedge \neg(p \supset V(q))$$

$$\equiv \neg(\neg p \vee \neg O(\neg q)) \wedge \neg(\neg p \vee O(\neg q))$$
$$\equiv \neg\neg p \wedge \neg\neg O(\neg q) \wedge \neg\neg p \wedge \neg O(\neg q)$$
$$\equiv p \wedge O(\neg q) \wedge \neg O(\neg q).$$

$\Phi(\neg A)$ enthält also nur ein Disjunktionsglied. In dieser Formel kommt der Satz $O(\neg q)$ zugleich negiert und unnegiert vor; sie ist also nicht erfüllbar, und A ist ein aussagenlogisch wahrer Satz.

b) $A = E(p \wedge q) \supset E(p) \wedge E(q)$
(Das ist das Theorem T1.2–15)

$$\neg A \equiv \neg(E(p \wedge q) \supset E(p) \wedge E(q))$$
$$\equiv E(p \wedge q) \wedge (\neg E(p) \vee \neg E(q))$$
$$\equiv \neg O(\neg(p \wedge q)) \wedge (\neg\neg O(\neg p) \vee \neg\neg O(\neg q))$$
$$\equiv \neg O(\neg(p \wedge q)) \wedge (O(\neg p) \vee O(\neg q))$$
$$\equiv \neg O(\neg(p \wedge q)) \wedge O(\neg p) \vee \neg O(\neg(p \wedge q)) \wedge O(\neg q).$$

$\Phi(\neg A)$ besteht also aus zwei Disjunktionsgliedern, von denen keines geschlossen ist. Für das erste Disjunktionsglied (C_1) müssen wir daher den Satz $\Psi_1(C_1) = \neg p \supset \neg(p \wedge q)$, für das zweite den Satz $\Psi_1(C_2) = \neg q \supset \neg(p \wedge q)$ untersuchen. Beide sind aussagenlogisch wahr (wie die Bildung der disjunktiven Normalformen $\Phi(\neg\Psi_1(C_1)) = \neg p \wedge p \wedge q$ und $\Phi(\neg\Psi_1(C_2)) = \neg q \wedge p \wedge q$ zeigt), also ist A D-wahr.

c) $A = V(p \wedge q) \supset V(p) \vee V(q)$
(Das ist die Umkehrung von T1.2–11)

$$\neg A \equiv \neg(V(p \wedge q) \supset V(p) \vee V(q))$$
$$\equiv V(p \wedge q) \wedge \neg(V(p) \vee V(q))$$
$$\equiv V(p \wedge q) \wedge \neg V(p) \wedge \neg V(q)$$
$$\equiv O(\neg(p \wedge q)) \wedge \neg O(\neg p) \wedge \neg O(\neg q)$$

$\Phi(\neg A)$ besteht also nur aus einem Disjunktionsglied C_1, das nicht geschlossen ist. Wir müssen also die beiden Sätze $\Psi_1(C_1) = \neg(p \wedge q) \supset \neg p$ und $\Psi_2(C_1) = \neg(p \wedge q) \supset \neg q$ untersuchen. Beide sind nicht aussagenlogisch wahr (es ist $\Phi(\neg\Psi_1(C_1)) = p \wedge \neg p \vee p \wedge \neg q$ und $\Phi(\neg\Psi_2(C_1)) = \neg p \wedge q \vee \neg q \wedge q$, also ist A nicht D-wahr.

Wir müssen nun aber noch beweisen, daß dieses Entscheidungsverfahren *korrekt* ist; daß die Sätze, die danach als

D-wahr ausgezeichnet werden, auch tatsächlich die D-wahren Sätze sind.

1. A sei nach dem Entscheidungsverfahren als D-wahr ausgezeichnet. Dann ist entweder $\Phi(\neg A)$ eine aussagenlogisch nicht erfüllbare Formel, so daß A logisch und also auch deontologisch wahr ist. Oder $\neg A$ ist nur dann erfüllbar, falls eines der nichtgeschlossenen Disjunktionsglieder C_j von $\Phi(A)$ erfüllbar ist. Ist aber A als D-wahr ausgezeichnet, so ist für jedes C_j ein $\Psi_{l_j}(C_j)$ eine Tautologie, so daß nach A1, A2 und T4 gilt $O(D_{j1})\wedge\ldots\wedge O(D_{jq_j}) \supset O(E_{jl_j})$. Da aber C_j die Gestalt $O(D_{j1})\wedge\ldots\wedge O(D_{jq_j}) \wedge \neg O(E_{jl_j})\wedge\ldots$ hat, so ist C_j deontisch nicht erfüllbar. Also ist kein C_j deontisch erfüllbar, also ist $\neg A$ deontisch nicht erfüllbar und damit A D-wahr.

2. Ist A nach dem Entscheidungsverfahren nicht als D-wahr augezeichnet, so gibt es ein nichtgeschlossenes Disjunktionsglied C_j von $\Phi(A)$, für das kein Satz $\Psi_{l_j}(C_j)$ aussagenlogisch wahr ist. Sei nun M eine deontische Bewertung, die allen unnegierten SK aus C_j den Wert w und allen negierten SK von C_j den Wert f zuordnet, und sei N die Menge aller aussagenlogischen Bewertungen, die alle Sätze $D_{j1},\ldots,D_{jq_j}$ erfüllen. Da C_j keine SK zugleich negiert und unnegiert enthält, gibt es ein solches M. N ist nicht leer, denn wäre die Menge der Sätze $D_{j1},\ldots,D_{jq_j}$ inkonsistent, so würden alle Sätze $\Psi_{l_j}(C_j)$ aussagenlogisch wahr sein – im Widerspruch zu unserer Annahme, daß A nicht als D-wahr ausgezeichnet sein soll. Und zu jedem Satz B, der nicht aus $D_{j1},\ldots,D_{jq_j}$ logisch folgt, gibt es eine Bewertung M^* aus N, die B nicht erfüllt (beim aussagenlogischen Vollständigkeitsbeweis zeigt man, daß es zu jeder konsistenten Satzmenge – die Menge $D_{j1},\ldots,D_{jq_j}, \neg B$ ist dann konsistent – eine Bewertung gibt, die alle Sätze dieser Menge erfüllt). Es gilt also $M(O(D_{j1})) = \ldots = M(O(D_{jq_j})) = w$ und $M(E_{jl_j}) = f$ für alle $l_j = 1,\ldots,p_j$. Daher gilt $M(C_j) = w$ und also wegen $C_j \rightarrow \neg A$ nach Konstruktion von $\Phi(\neg A)$ auch $M(\neg A) = w$, also $M(A) = f$. Daher ist A nicht D-wahr.

Anstelle der Konstruktion von disjunktiven Normalformen kann man natürlich auch Herleitungen im Kalkül der semantischen Tafeln von E. W. Beth konstruieren.[28] Dieses Verfahren läßt sich dann, zwar nicht als Entscheidungsverfahren, wohl aber als einfaches Verfahren für Beweiskonstruktionen, auch auf den prädikatenlogischen Fall ausdehnen.

*1.12 Die Begründung von Normen

Wir wollen uns nun überlegen, ob aus Normen nichtnormative Sachverhalte folgen und ob umgekehrt solche Sachverhalte Normen implizieren. Diese Frage ist im Zusammenhang des Problems der Begründung von Normen sehr wichtig, das vor allem in der Ethik und der Rechtswissenschaft, aber nicht nur dort, eine wichtige Rolle spielt.

Nichtnormative Sachverhalte werden durch normfreie Sätze dargestellt.[29] Nun folgt offenbar aus dem normfreien Satz A der Normsatz $A \lor O(B)$, und aus dem Normsatz $A \land O(B)$ folgt der normfreie Satz A. Wenn wir die Beziehungen zwischen Normen und nichtnormativen Sachverhalten erfassen wollen, werden wir also nicht allgemein nach den Beziehungen zwischen *Normsätzen* und normfreien Sätzen fragen, sondern spezieller nach den Beziehungen zwischen *reinen Normsätzen* und normfreien Sätzen.

Über diese Beziehungen geben die folgenden beiden Theoreme Auskunft:

T1.12–1: Es sei $\mathfrak{M}$ eine konsistente Menge normfreier Sätze und A sei ein reiner Normsatz.

a) Gilt $\mathfrak{M} \rightarrow A$, so ist A logisch wahr.

b) Gilt $\mathfrak{M} \underset{D}{\rightarrow} A$, so ist A D-wahr.

Beweis: a) Da $\mathfrak{M}$ konsistent ist, gibt es, wo $a_i (i = 1,2,\ldots)$ eine Abzählung der GK ist, eine prädikatenlogische Interpretation

[28] Vgl. dazu Kutschera und Breitkopf [71], § 12.

[29] Auch wenn ein Satz A mit einem normfreien Satz logisch äquivalent ist, könnte man sagen, A drücke einen nichtnormativen Sachverhalt aus. Auf diese triviale Verallgemeinerung, die sich auch an die folgenden Theoreme anschließen läßt, wollen wir hier aber nicht eingehen. – Entsprechendes gilt für die reinen Normsätze.

M über der Menge U^* der natürlichen Zahlen mit $M(a_i) = i$, die alle Sätze aus $\mathfrak{M}$ erfüllt. Ist $\neg A$ erfüllbar, so gibt es eine ebensolche Interpretation M', die $\neg A$ erfüllt. Und diejenige prädikatenlogische Interpretation M'' über U^* erfüllt die Sätze aus $\mathfrak{M}$ und $\neg A$, für die gilt: $M''(t) = M(t)$ für alle GK und PK t und $M''(O(B[x_1,\ldots,x_n])) = M'(O(B[x_1,\ldots,x_n]))$; die Ausdrücke $O(B[x_1,\ldots,x_n])$ fungieren ja bezüglich prädikatenlogischer Interpretationen wie n-stellige PK (vgl. dazu den Beweis von T1.9–4). Das ergibt sich direkt aus dem Satz T1.9–6. M'' zeigt dann, daß $\mathfrak{M} \rightarrow A$ nicht gilt.
b) Im Fall (b) argumentiert man entsprechend, wobei man das Theorem T1.10–4 benützt.

T1.12–2: Es sei $\mathfrak{M}$ eine D-konsistente Menge reiner Normsätze und A sei ein normfreier Satz. Gilt dann $\mathfrak{M} \underset{D}{\rightarrow} A$, so ist A logisch wahr.

Daraus ergibt sich mit T1.9–4 sofort: Gilt $\mathfrak{M} \rightarrow A$, so ist A logisch wahr.

Der *Beweis* ergibt sich wie unter T1.12–1 mit T1.9–6. Ist M eine deontische Interpretation über der Menge U^* der natürlichen Zahlen mit $M(a_i) = i$ für eine Abzählung $a_1, a_2, \ldots$ der GK, die alle Sätze aus $\mathfrak{M}$ erfüllt, und M' eine ebensolche prädikatenlogische Interpretation, die $\neg A$ erfüllt, so erfüllt die deontische Interpretation M'' über U^* alle Sätze aus $\mathfrak{M}$ und $\neg A$, für die gilt $M''(t) = M'(t)$ für alle GK und PK t und $N'' = N'$.

Als einfache Verallgemeinerung von T1.12–1 und T1.12–2 erhält man den Satz:

T1.12–3: Es sei $\mathfrak{M}$ eine Menge normfreier Sätze und $\mathfrak{N}$ eine Menge reiner Normsätze. Die Vereinigungsmenge $\mathfrak{M} \cup \mathfrak{N}$ sei D-konsistent. A sei ein reiner Normsatz, B ein normfreier Satz.
a) Gilt $\mathfrak{M}, \mathfrak{N} \underset{D}{\rightarrow} A$, so gilt $\mathfrak{N} \underset{D}{\rightarrow} A$.
b) Gilt $\mathfrak{M}, \mathfrak{N} \underset{D}{\rightarrow} B$, so gilt $\mathfrak{M} \rightarrow B$.
Beweis: (a) Gilt $\mathfrak{M}, \mathfrak{N} \underset{D}{\rightarrow} A$, so gibt es Sätze $A_1, \ldots, A_n$ aus mit $\mathfrak{M}, A_1, \ldots, A_n \underset{D}{\rightarrow} A$, also $\mathfrak{M} \underset{D}{\rightarrow} A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \supset A$. Da die Konklusion ein reiner Normsatz ist, ist sie nach T1.12–1 D-wahr, so daß gilt $A_1, \ldots, A_n \underset{D}{\rightarrow} A$, also $\mathfrak{N} \underset{D}{\rightarrow} A$. – Entsprechend argumentiert man im Fall (b).

Aus T1.12–1 folgt nun, daß man mit nicht-normativen Sachverhalten, bzw. mit normfreien Sätzen, die solche Sachverhalte ausdrücken, keine Normen begründen kann, die durch reine Normsätze ausgedrückt werden. Aus normfreien Sätzen folgen insbesondere keine Sätze über das Bestehen oder Nichtbestehen (genereller, partikulärer oder singulärer) unbedingter Gebote, Verbote und Erlaubnisse – abgesehen von den trivialen D-wahren Fällen.

Wie steht es aber mit den bedingten Geboten, Verboten und Erlaubnissen? Aus $\neg A$ folgt $A \supset O(B)$; man kann also aus normfreien Sätzen Sätze über bedingte Gebote ableiten. Das gilt aber eben nur in dem trivialen Sinn des Beispiels, in dem das Gebot $A \supset O(B)$ nur insofern gilt, als aus ihm unter keinen Umständen die Obligation $O(B)$ hergeleitet werden kann. Würde aus einer Menge $\mathfrak{M}$ normfreier Sätze ein Normsatz A deontologisch folgen, zu dem es mit $\mathfrak{M}$ verträgliche Bedingungen gibt, unter denen aus A eine Aussage über das Bestehen oder Nichtbestehen unbedingter Gebote, Erlaubnisse oder Verbote folgt, d. h. aber: würde es zu A eine mit $\mathfrak{M}$ verträgliche Menge $\mathfrak{N}$ normfreier Sätze geben[30], so daß aus $\mathfrak{N}$ und A ein reiner Normsatz B folgt, so würde auch gelten $\mathfrak{M}, \mathfrak{N} \underset{D}{\rightarrow} B$, so daß nach T1.12–1 b B ein D-wahrer Satz wäre.

Wir können in diesem Sinn sagen: *Aus normfreien Sätzen folgen keine normativ relevanten Sätze.*

Das Theorem T1.12–2 besagt, daß aus einem D-konsistenten Normensystem $\mathfrak{N}$, das nur reine Normsätze enthält, kein nicht tautologischer normfreier Satz folgt. Mit Sätzen über das Bestehen oder Nichtbestehen (genereller, partikulärer oder singulärer) unbedingter Gebote, Verbote oder Erlaubnisse kann man also keine relevanten Aussagen über nicht normative Sachverhalte begründen. Man kann aber auch z. B. mit dem bedingten Gebot $A \supset O(B)$ keine solche Aussage begründen.

Wir definieren:

D1.12–1: Ein Normensystem $\mathfrak{N}$ heißt *rein* genau dann, wenn

[30] Das heißt die Menge $\mathfrak{M} \cup \mathfrak{N}$ soll konsistent sein.

für alle normfreien Sätze A gilt: $\mathfrak{N} \underset{D}{\rightarrow} A$ nur dann, wenn A logisch wahr ist.

Reine Normensysteme sind also immer D-konsistent. Jede D-konsistente Menge reiner Normsätze ist nach T1.12–2 ein reines Normensystem. Die Umkehrung gilt aber nicht, wie unser Beispiel des Normensystems mit einem bedingten Gebot zeigt. Der Begriff des reinen Normensystems ist demnach so weit, daß solche Normensysteme auch bedingte Gebote, Verbote und Erlaubnisse enthalten können. Ist er aber weit genug, alle vernünftigen Normensysteme zu umfassen, so daß man generell sagen könnte, daß aus vernünftigen Normensystemen keine nichttautologischen normfreien Sätze folgen?

Aus dem System der beiden bedingten Normen $A \supset O(B)$, $A \supset O(\neg B)$ folgt deontologisch der normfreie Satz $\neg A$. Aber diese beiden Normen sind nicht vernünftig. Um vernünftig zu sein, müssen die Normen eines Systems $\mathfrak{N}$ *realisierbar* sein, d. h. es muß eine „ideale Welt“ geben, in der alle Gebote aus $\mathfrak{N}$ realisiert sind, in der also gilt $O(A) \supset A$. Diese Forderung entspricht in gewisser Weise dem juristischen Grundsatz *impossibile nulla obligatio,* d. h. was unmöglich ist, ist nicht geboten.

Wir definieren:

D1.12–2: Wir nennen ein Normensystem $\mathfrak{N}$ *realisierbar bezüglich der Menge* $\mathfrak{M}$ normfreier Sätze genau dann, wenn es eine deontische Interpretation M gibt, die $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{M}$ und alle Sätze der Form $O(A) \supset A$ erfüllt. $\mathfrak{N}$ heißt *realisierbar* genau dann, wenn es ein solches $\mathfrak{M}$ gibt, so daß $\mathfrak{N}$ bezüglich $\mathfrak{M}$ realisierbar ist. Und $\mathfrak{N}$ heißt *immer realisierbar* genau dann, wenn $\mathfrak{N}$ bezüglich jeder konsistenten Menge $\mathfrak{M}$ normfreier Sätze realisierbar ist.

Die Menge $\mathfrak{N} = \{A \supset O(B), A \supset O(\neg B)\}$ ist realisierbar (bezüglich einer Menge $\mathfrak{M}$ mit $\neg A \varepsilon \mathfrak{M}$), aber nicht immer realisierbar, denn gilt $A \varepsilon \mathfrak{M}$, so gilt $O(B)$ und $O(\neg B)$, also nach dem Schema $O(A) \supset A$ B und $\neg B$. Ebenso ist die Menge $\{A \supset O(\neg A)\}$ nicht immer realisierbar, und die Menge $\{A \supset O(\neg A), \neg A \supset O(A)\}$ ist überhaupt nicht realisierbar: Es gilt $A \vee \neg A$; in jedem Fall soll ein Sachverhalt realisiert werden, der nach Voraussetzung nicht besteht. Nach dem Satz *impossibile nulla obligatio* sind aber solche Gebote auszuschließen.

Ferner wird man auch Gebote ausschließen, die unter gewissen Bedingungen nicht realisierbar sind, wie z. B. das Gebot $A \supset O(\neg A)$, oder die beiden Gebote $A \supset O(B)$, $A \supset O(\neg B)$. Ein vernünftiges bedingtes Gebot $A \supset O(B)$ muß unter der Bedingung A erfüllbar sein, d. h. A muß mit B verträglich sein.

Wir kommen dann zu der Forderung: *Vernünftige Normensysteme müssen immer realisierbar sein.*

Es gilt aber nun der Satz:

T1.12–4: Ist $\mathfrak{N}$ ein immer realisierbares Normensystem, so ist $\mathfrak{N}$ ein reines Normensystem.

Beweis: Würde gelten $\mathfrak{N} \underset{D}{\to} A$, wo A ein nichttautologischer normfreier Satz ist, so wäre die Menge $\mathfrak{M} = \{\neg A\}$ konsistent, $\mathfrak{N} \cup \mathfrak{M}$ aber D-inkonsistent, d. h. es gäbe keine deontische Interpretation, die $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{M}$ erfüllt.

Wenn wir also für vernünftige Normensysteme fordern, daß sie immer realisierbar sind, so gilt auch, daß aus (vernünftigen) Normensystemen keine normfreien Aussagen folgen. Damit haben wir eine passende Verallgemeinerung des speziellen Resultats T1.12–2 gewonnen.

Der Versuch, Normen aus nichtnormativen Tatsachen abzuleiten, liegt jeder naturalistischen Begründung ethischer Normensysteme zugrunde. Von Aristoteles, der versuchte, ethische und politische Normen aus der Natur des Menschen und der Gesellschaft abzuleiten, geht die Kette solcher Versuche über den Rationalismus, in dessen Tradition auch Kants Ansatz in der „Kritik der praktischen Vernunft" steht, bis in die Gegenwart. Bei näherem Zusehen erweisen sich aber alle solche Begründungen als fehlerhaft, da den begründenden Tatsachenaussagen stillschweigend ein normativer Sinn unterschoben wird.

Da wir uns im Rahmen dieser Arbeit nicht auf komplizierte philosophiehistorische Untersuchungen einlassen wollen, betrachten wir nur zwei einfache Muster solcher Begründungen:

1. Ein Verbot (1) „a ist es verboten, F zu tun" (z. B. a ist es verboten zu lügen) wird mit der nichtnormativen Aussage be-

gründet: (2) „Würden alle Leute F tun, so würde ein Schaden entstehen" (z. B. Wenn alle Leute lügen würden, könnte man sich auf die Aussagen anderer nicht mehr verlassen; damit würde aber jede sinnvolle Kommunikation unmöglich und damit auch jede Zusammenarbeit von Menschen, auf der unser Leben beruht) – und dem analytischen Satz (3) „Es ist verboten, Schaden anzurichten". Die Aussage (3) drückt als analytische Aussage ebensowenig eine materiale Norm aus wie der Satz $O(A) \vee \neg O(A)$; sie ist logisch äquivalent mit einer beliebigen Tautologie, die sich in einem normfreien Satz formulieren läßt.

Dieses Argument enthält zwei Fehler: Aus (2) und (3) folgt mit T1.2–9 zwar $V(\Lambda x F(x))$, daraus folgt aber nicht $\Lambda x V(F(x))$, also auch nicht $V(F(a))$ (vgl. dazu das Theorem T1.6–4). Dazu ein Beispiel: Wenn es verboten ist, daß alle Leute über mein Vermögen verfügen, so folgt daraus keineswegs, daß es auch mir verboten ist, über mein Vermögen zu verfügen.

Aber dieser einfache deontologische Fehlschluß trifft noch nicht den Punkt des Arguments, um den es uns hier geht: Der Satz (3) ist nur dann analytisch, wenn das Prädikat „x stellt einen Schaden dar" die Bedeutungskomponente enthält „x zu bewirken ist verboten", so daß aus dem Satz (4) „b stellt einen Schaden dar" der Satz (5) „b zu bewirken ist verboten" logisch folgt. Dann ist aber (4) eine normative Aussage, und der Satz (1) wird dann nicht mit einer nichtnormativen Aussage (2) und einem analytischen Satz (3), sondern mit einer normativen Aussage und einem analytischen Satz begründet. Ist dagegen (2) wirklich eine nichtnormative Aussage, so ist (3) kein analytischer Satz.

2. Ein analoger Fehler liegt dem Argument von J. Searle zugrunde.[31] Hier soll der Normsatz (1) „a soll F tun" begründet werden durch den nichtnormativen Satz (2) „a hat versprochen, F zu tun" und dem analytischen Satz (3) "Ein Versprechen von a, F zu tun, ist ein Akt, der a verpflichtet, F zu tun".

[31] Vgl. Searle [64].

Auch hier ist zu sagen: Ist (3) analytisch, so daß aus (3) logisch folgt (4) „Wenn a versprochen hat, F zu tun, so ist es geboten, daß a F tut“, so ist (2) ein normativer Satz, denn um die Wahrheit von (2) festzustellen, muß ich dann auch prüfen, ob der Normsatz (1) gilt. Ist aber (2) ein nichtnormativer Satz, so muß man diesen Satz so verstehen, daß er bereits dann wahr ist, wenn a z. B. gesagt hat „Ich verspreche, F zu tun“, also als eine Beschreibung eines rein empirischen, nicht-normativen Sachverhalts. Dann ist aber der Satz (3) nicht analytisch, sondern drückt eine materiale Norm aus.

2. Wahrscheinlichkeiten

2.1 Ereignisse als Mengen

In diesem Kapitel wollen wir zur Vorbereitung der Darstellung von Wertstrukturen im 3. und der Behandlung von Entscheidungen im 4. Kapitel einige Bemerkungen über den Wahrscheinlichkeitsbegriff machen. Wir beschränken uns dabei auf die einfachsten Begriffsbildungen und Prinzipien. Die Wahrscheinlichkeitstheorie ist ja eine sehr umfangreiche und schwierige mathematische Disziplin, in die wir den Leser im Rahmen dieser Arbeit nicht einführen können. Außerdem wollen wir mit einem Minimum an Mathematik auskommen. Für eine eingehendere Beschäftigung mit der Wahrscheinlichkeitstheorie müssen wir den Leser daher auf die einschlägige Literatur verweisen.[1]

Man unterscheidet drei Typen von Wahrscheinlichkeitsbegriffen: *objektive, subjektive* (oder *personelle*) und *logische* Wahrscheinlichkeitsbegriffe. Während die objektive Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses, wie z. B. die radioaktive Zerfallswahrscheinlichkeit von Radium eine Eigenschaft der Natur darstellt (im Beispiel: eine physikalische Eigenschaft des Elements Radium), charakterisiert die subjektive Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A den Grad der Sicherheit, mit dem eine Person X mit dem Eintreten von A rechnet. Die logische

---

[1] Vgl. z. B. H. Richter [66], B. de Finetti [37] und [70], L. Savage [54]. Für eine philosophische Diskussion der Grundlagen der Wahrscheinlichkeitstheorie vgl. Kutschera [72], Kap. 2. Dort sind viele der hier in den Kapiteln 2 bis 4 erörterten Themen ausführlicher behandelt, so daß wir öfter darauf verweisen werden. Die Behandlung von Werten und Entscheidungen wird hier aber etwas anders aufgezogen als dort.

Wahrscheinlichkeit stellt eine spezielle subjektive Wahrscheinlichkeit dar: die Wahrscheinlichkeit, die eine Person X dem Ereignis A zumißt, die sich nicht von blinden Vorurteilen, sondern ausschließlich von rationalen Erwägungen leiten läßt.

Wir benötigen im folgenden nur den subjektiven Wahrscheinlichkeitsbegriff. Dieser Begriff ist uns allen aus dem Alltag geläufig. Wir sagen z. B., es sei wahrscheinlich, daß morgen schönes Wetter sein wird, oder es sei unwahrscheinlich, daß der Sportler Maier bei den nächsten olympischen Spielen eine Medaille gewinnen kann. Wir teilen in diesem Sinn die Ereignisse nach unseren Erwartungen *klassifikatorisch* in wahrscheinliche und unwahrscheinliche ein. Oder wir verwenden einen *komparativen* Begriff subjektiver Wahrscheinlichkeit, indem wir sagen, es sei *weniger wahrscheinlich*, daß das Pferd a in einem bestimmten Rennen gewinnt, als daß das Pferd b gewinnt; oder es sei (aufgrund der uns bekannten Krankheitssymptome) ebenso wahrscheinlich, daß Hans Scharlach hat wie daß er Masern hat. Mit einem solchen komparativen Begriff der Wahrscheinlichkeit kann man sehr viel feinere Differenzierungen vornehmen als mit einem klassifikatorischen Begriff. Insbesondere können wir mit Hilfe des komparativen Begriffs den klassifikatorischen z. B. so definieren: Das Ereignis A ist wahrscheinlich, wenn A wahrscheinlicher ist als $\neg A$; und A ist unwahrscheinlich, wenn $\neg A$ wahrscheinlicher ist als A. Wir wollen uns daher zunächst für den komparativen Begriff der subjektiven Wahrscheinlichkeit interessieren und betrachten als Grundrelation die Beziehung: *Das Ereignis* A *ist höchstens so wahrscheinlich wie das Ereignis* B, die wir symbolisch durch $A \leq_p B$ ausdrücken. Der Index „p“ dient dabei zur Unterscheidung der Relation $\leq_p$: „höchstens so wahrscheinlich wie“ von der zahlentheoretischen Beziehung $\leq$: „höchstens so groß wie“. Mit diesem Begriff können wir auch andere Begriffe komparativer Wahrscheinlichkeit definieren:

D 2.1–1: $A <_p B := \neg(B \leq_p A)$
– A ist weniger wahrscheinlich als B –

D 2.1–2: $A =_p B := A \leq_p B \wedge B \leq_p A$
– A ist ebenso wahrscheinlich wie B –

D 2.1–3: $A >_p B := B <_p A$ – A ist wahrscheinlicher als B.

Ereignisse kann man durch Sätze darstellen. In der Wahrscheinlichkeitstheorie ist es aber üblich, Ereignisse als *Mengen* aufzufassen; das hat gewisse Vorteile, da die mengentheoretische Sprechweise ausdrucksreicher ist als die Sprechweise der Aussagen- oder Prädikatenlogik. Bei den elementaren Fällen, die wir im folgenden betrachten, fällt das zwar nicht ins Gewicht, um aber den Anschluß an die üblichen wahrscheinlichkeitstheoretischen Formulierungen zu haben, wollen auch wir Ereignisse als Mengen auffassen.

Wir gehen dabei aus von Systemen (Versuchen, Prozessen etc.), die sich in mehreren Zuständen befinden oder diese Zustände annehmen können. K sei die Menge dieser Zustände, die endlich oder unendlich sein kann. Dabei soll das System immer einen Zustand, aber auch nur einen Zustand aus K annehmen. Als Ereignisse zu dieser Zustandsmenge K sehen wir die Teilmengen von K an. Ein Ereignis A als Menge von gewissen Zuständen aus K besagt also, daß einer dieser Zustände realisiert ist, bzw. realisiert wird.

Ein solches System kann z. B. der Wurf mit einem Würfel sein, der genau einen der Zustände (oder Ergebnisse) Augenzahl 1, 2, 3, 4, 5 oder 6 annimmt. K ist also die Menge aus diesen Zuständen. Schreiben wir

$\{a_1,\ldots,a_n\}$ für *diejenige Menge, die genau die Elemente* $a_1,\ldots,a_n$ *enthält,*

so können wir also setzen $K = \{1,\ldots,6\}$. Ereignisse zu K sind nun alle Teilmengen von K.

Man sagt, A sei *Teilmenge* von B – symbolisch $A \subset B$ –, wenn alle Elemente von A auch Elemente von B sind.

Schreibt man also

$a \varepsilon A$ für a *ist Element der Menge* A, so gilt

$A \subset B \equiv \Lambda x(x \varepsilon A \supset x \varepsilon B)$.

Die Teilmengen von K sind im Würfelbeispiel demnach die Mengen $\{1\},\ldots,\{6\}$, die besagen, daß die Augenzahl 1, bzw. ..., bzw. 6 als Ergebnis des Wurfs mit dem Würfel auftritt; ferner die Mengen $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, ..., $\{1,6\}$, $\{2,3\}$, ..., $\{2,6\}$, ..., $\{5,6\}$, die besagen, daß eine von zwei bestimmten Augenzahlen, nämlich 1 oder 2, bzw. 1 oder 3, bzw. ..., bzw. 5 oder 6 eintritt; ferner die Mengen $\{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \ldots, \{4,5,6\}$, die besagen, daß eine von drei bestimmten Augenzahlen eintritt, usw. bis hin zur Menge K selbst, die das *logisch sichere* Ereignis darstellt, daß eine der 6 Augenzahlen eintritt. Auch die Menge

Λ – die *Nullmenge* oder *leere Menge*, die kein Element enthält, ist eine Teilmenge von K. Sie stellt das logisch unmögliche Ereignis dar, daß keine der 6 Augenzahlen eintritt. Dieses Ereignis ist nach der Voraussetzung unmöglich, daß immer genau ein Zustand aus K eintreten soll. (Ein Wurf, bei dem der Würfel nicht genau eine Augenzahl angibt, zählt also nicht.) Das Ereignis, daß eine gerade Augenzahl eintritt, stellt die Menge $\{2,4,6\}$ dar, das Ereignis, daß eine ungerade Augenzahl eintritt, die Menge $\{1,3,5\}$.

Die *Potenzmenge* P(K) ist die Menge aller Teilmengen von K.

Das System kann aber auch die gesamte Welt sein, die verschiedener Zustände fähig ist, von denen sich in jedem Zeitpunkt t genau einer realisiert.

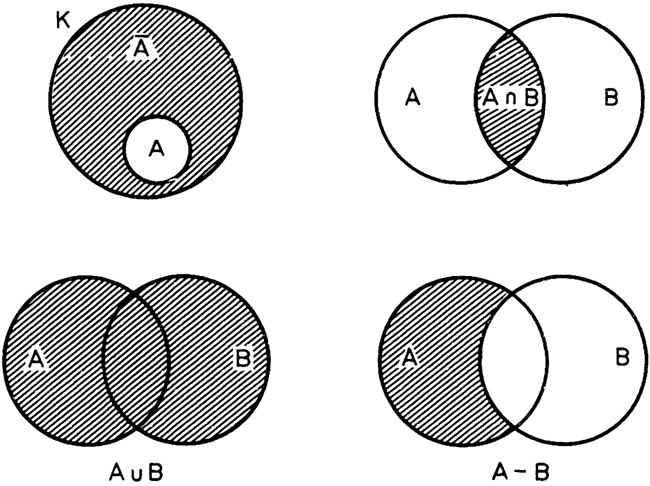
Man kann nun nicht immer sagen, daß die Relation der komparativen Wahrscheinlichkeit $\leq_p$ für alle Ereignisse irgendeiner Ereignismenge $\mathfrak{K}$ zu K (als Menge von Teilmengen von K) erklärt ist. Denn mit dem Ereignis A will man auch das Ereignis nicht-A, mit den Ereignissen A und B will man auch das Ereignis A-und-B und das Ereignis A-oder-B betrachten.

Welche Mengenoperationen entsprechen nun diesen aussagenlogischen Operationen der Negation, Konjunktion und Adjunktion? Es sind das Bildungen von *Komplement*, *Durchschnitt* und *Vereinigung*. Schreiben wir {x: —x—} für die Menge der x mit der Eigenschaft —x—, so können wir definieren

Das *Komplement* von A bezüglich K: $\bar{A} := \{x\colon x \varepsilon K \wedge \neg x \varepsilon A\}$
Der *Durchschnitt* von A und B: $A \cap B := \{x\colon x \varepsilon A \wedge x \varepsilon B\}$
Die *Vereinigung* von A und B: $A \cup B := \{x\colon x \varepsilon A \vee x \varepsilon B\}$.

Wir führen auch noch die *Differenz* zweier Mengen ein:
Die *Differenz* von A und B: $A - B := \{x\colon x \varepsilon A \wedge \neg x \varepsilon B\}$
Es gilt also $\bar{A} = K - A$.

Graphisch lassen sich diese Mengen so veranschaulichen, wenn man die Mengen durch Flächen und ihre Elemente durch die Punkte in dieser Fläche darstellt:



Da wir im folgenden vor allem endliche Zustandsmengen K betrachten werden, benötigen wir die folgenden mengentheoretischen Operationen nur an wenigen Stellen:

Die *große Vereinigung* der $A_i (i = 1, \ldots, \infty)$:

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i := \{x: \bigvee i (1 \leq i \wedge x \varepsilon A_i)\}$$

Der *große Durchschnitt* der $A_i (i = 1, \ldots, \infty)$:

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i := \{x: \bigwedge i (1 \leq i \supset x \varepsilon A_i)\}$$

Während also $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ alle Objekte als Elemente enthält, die Elemente *mindestens einer* der Mengen $A_1, A_2, \ldots$ sind, enthält $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ nur solche Objekte, die Elemente *aller* Mengen $A_1, A_2, \ldots$ sind.[2]

Falls gilt $A \cap B = \Lambda$, d. h. wenn die Mengen A und B *dis-*

[2] Zu diesen mengentheoretischen Operatoren vgl. z. B. Kutschera [67], 5.2.

junkt sind und kein gemeinsames Element enthalten – aber auch nur dann –, schreiben wir auch $A + B$ statt $A \cup B$.

Und entsprechend schreiben wir $\sum_{i=1}^{\infty} A_i$ statt $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, falls gilt $A_i \cap A_k = \Lambda$ für alle $i,k = 1,2,\ldots$ mit $i \neq k$ – aber auch *nur* dann. Für $A \cap B$ schreibt man in der Wahrscheinlichkeitstheorie auch vielfach $A \cdot B$ (auch wir werden das tun).

Wenn man nun definiert:

D2.1–4: Eine (nichtleere) Menge $\mathfrak{K}$ von Mengen $A, B, C, \ldots$ heißt ein *Mengenkörper*, wenn für $A \varepsilon \mathfrak{K}$ auch gilt $\bar{A} \varepsilon \mathfrak{K}$, und wenn für $A \varepsilon \mathfrak{K}$ und $B \varepsilon \mathfrak{K}$ auch gilt $A \cup B \varepsilon \mathfrak{K}$. $\mathfrak{K}$ heißt ein *σ-Körper*, wenn $\mathfrak{K}$ ein Mengenkörper ist, für den zusätzlich gilt: Ist $A_i \varepsilon \mathfrak{K}$ für alle $i = 1,2,\ldots$, so ist auch $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \varepsilon \mathfrak{K}$ –

so kann man die Anforderung an den Definitionsbereich $\mathfrak{K}$ der Relation $\leq_p$ so formulieren: $\leq_p$ soll immer definiert sein auf einer Menge $\mathfrak{K}$ von Teilmengen einer Zustandsmenge K; ist $\mathfrak{K}$ endlich, so soll $\mathfrak{K}$ ein Mengenkörper sein, ist $\mathfrak{K}$ unendlich, so denken wir uns $\mathfrak{K}$ immer als σ-Körper. Man nennt $\mathfrak{K}$ auch einen *Ereigniskörper über der Zustandsmenge* K.

Mit $A \varepsilon \mathfrak{K}$ und $B \varepsilon \mathfrak{K}$ ist auch $A \cap B \varepsilon \mathfrak{K}$, wenn $\mathfrak{K}$ ein Ereigniskörper ist. Denn es gilt, wie man leicht nachprüft, $A \cap B = \overline{\bar{A} \cup \bar{B}}$. Und ebenso ist dann mit $A_i \varepsilon \mathfrak{K}$ für alle $i = 1,2,\ldots$ auch $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \varepsilon \mathfrak{K}$, denn es gilt $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} \bar{A}_i}$.

Im folgenden werden wir vor allem den elementaren Fall vor Augen haben, daß $K = \{x_1, \ldots, x_n\}$ endlich ist, so daß auch jeder Ereigniskörper $\mathfrak{K}$ über K endlich ist (es gibt zu einem K mit n Elementen 2^n Teilmengen). Speziell werden wir dann $\mathfrak{K}$ als Potenzmenge P(K) von K ansehen. P(K) ist die umfassendste Ereignismenge zu K und also trivialerweise ein Mengenkörper.

2.2 Der komparative Wahrscheinlichkeitsbegriff

Nach diesen mehr technischen Vorbemerkungen wollen wir nun den komparativen Begriff $\leq_p$ der subjektiven Wahrscheinlichkeit näher charakterisieren, d. h. wir wollen in Form von Prinzipien oder *Axiomen* für diesen Begriff seine grundlegenden Eigenschaften angeben. Damit soll zugleich die vorwissenschaftliche Verwendung dieses Begriffs für seinen wissenschaftlichen Gebrauch präzisiert werden.

Das Ziel einer solchen Präzisierung ist es weder, Aussagen darüber zu machen, was eine bestimmte Person als wahrscheinlich ansieht oder was die meisten Menschen als wahrscheinlich ansehen, noch allgemeine Gesetze für solche Ansichten zu formulieren. Was der einzelne oder die meisten glauben, und wie sie sich in ihren Glaubensannahmen verhalten, ist eine rein empirische Frage. Uns geht es hier vielmehr allein um die *Logik* des Wahrscheinlichkeitsbegriffes, um Mindestbedingungen für einen rationalen und konsistenten Gebrauch dieses Wahrscheinlichkeitsbegriffes und um die Charakterisierung, die ihm für seine wissenschaftliche Verwendung Eindeutigkeit und Präzision sichert. Ebenso wie es in der formalen Logik nicht darum geht, empirisch zu erforschen, wie einzelne Leute oder wie die meisten Leute die Wörter „nicht", etc. verwenden und wie sie schließen, sondern allein um eine Präzisierung dieser Wörter und eine Normierung der Schlußweisen für den wissenschaftlichen Gebrauch, so geht es in der subjektiven Wahrscheinlichkeitstheorie allein um die Präzisierung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs und die Normierung seiner Eigenschaften.

Diese Eigenschaften des Wahrscheinlichkeitsbegriffs werden nun durch die folgenden Axiome festgelegt:

B1: $A \leq_p B \vee B \leq_p A$
B2: $A \leq_p B \wedge B \leq_p C \supset A \leq_p C$
B3: $\Lambda \leq_p A$
B4: $A \leq_p B \equiv A + C \leq_p B + C.$

B1 und B2 besagen nicht mehr, als daß $\leq_p$ ein komparativer Begriff ist: Für zwei Ereignisse A und B gilt immer $A <_p B$ oder $A =_p B$ oder $A >_p B$ und *nur* eine dieser drei Beziehungen, d. h. A und B sind vergleichbar; es gilt $A =_p A$; aus $A =_p B$ und $B =_p C$ folgt $A =_p C$; und aus $A <_p B$ und $B <_p C$ folgt $A <_p C$. Diese Behauptungen kann man mit den Definitionen D2.1–1 bis D2.1–3 leicht aus B1 und B2 gewinnen.

B3 besagt, daß das logisch unmögliche Ereignis Λ minimale

Wahrscheinlichkeit hat. Daraus folgt auch $A \leq_p K$, d. h. das logisch sichere Ereignis K hat maximale Wahrscheinlichkeit.

B4 endlich besagt, daß die Wahrscheinlichkeiten von A und B sich durch Hinzufügung eines disjunkten Ereignisses C in gleichem Maße erhöhen. Daraus ergibt sich u. a. auch, daß aus $A \leq_p B$ folgt $\overline{B} \leq_p \overline{A}$ und umgekehrt, und daß für $A \subset B$ immer gilt $A \leq_p B$.

Für den Fall unendlicher Ereigniskörper nimmt man noch das folgende Axiom hinzu:

B5: Ist $A_1, A_2, \ldots$ eine Folge von Ereignissen mit $A_i \subset A_{i+1}$ für alle $i = 1, 2, \ldots,$ so gilt $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \leq_p B$, wenn für alle i gilt $A_i \leq_p B$.

Dieses Axiom dient als Verallgemeinerung von B4. Ist $\mathfrak{K}$ endlich, so gilt dieses Axiom trivialerweise, denn dann ist für ein n $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_n$.

Ist $\leq_p$ ein komparativer Wahrscheinlichkeitsbegriff, der die Axiome B1 bis B5 erfüllt und ist $\leq_p$ auf einem Ereignis-(σ-) Körper $\mathfrak{K}$ über der Zustandsmenge K definiert, so bezeichnet man das Tripel $\langle K, \mathfrak{K}, \leq_p \rangle$, bestehend aus K, $\mathfrak{K}$ und $\leq_p$, auch als *komparative Wahrscheinlichkeitsstruktur*.

2.3 Der metrische Wahrscheinlichkeitsbegriff

Neben klassifikatorischen und komparativen Begriffen gibt es auch *metrische* Begriffe wie Volumen, Masse, elektrische Ladung usf., die jedem Gegenstand eines bestimmten Bereichs eine reelle Zahl zuordnen. So ist das Volumen z. B. eine Funktion, die jedem Körper eine reelle Zahl als seinen Rauminhalt (gemessen in cm^3, m^3, o. ä.) zuordnet. Mit metrischen Begriffen kann man noch wesentlich feinere Differenzierungen vornehmen als mit komparativen Begriffen, und sie eignen sich viel besser zur Formulierung von exakten Gesetzen. Deswegen kommen in der Physik z. B. fast nur metrische Begriffe vor.

Wie kann man nun solche metrischen Begriffe einführen? Wie kann man sinnvoll Zahlen als Maße für Volumen, Masse etc. angeben? In Allgemeinheit wird dieses Problem in der

Wissenschaftstheorie behandelt.[3] In unserem Fall des Wahrscheinlichkeitsbegriffs können wir sagen: Man kann eine komparative Wahrscheinlichkeitsstruktur $\langle K, \mathfrak{K}, \leq_p \rangle$ metrisieren, wenn es gelingt, auf $\mathfrak{K}$ eine Funktion w zu definieren, deren Werte reelle Zahlen sind, so daß gilt

a) $A \leq_p B \equiv w(A) \leq w(B)$.

Dann kann man die komparative Ordnung der Ereignisse aus $\mathfrak{K}$ durch die Ordnung der ihnen zugeordneten Wahrscheinlichkeitswerte wiedergeben und kann sagen: Ein Ereignis A ist um so wahrscheinlicher, je größer sein Wahrscheinlichkeitswert w(A) ist. Man wird aber von einem metrischen Wahrscheinlichkeitsbegriff auch verlangen, daß die Werte w(A), wie üblich, zwischen 0 und 1 liegen, also

b) $0 \leq w(A) \leq 1$ für alle $A \varepsilon \mathfrak{K}$.

Und man wird, nach dem Gedanken, der dem Axiom B4 zugrundeliegt (daß nämlich die Wahrscheinlichkeit von A sich im Maße der Wahrscheinlichkeit von C erhöht, wenn man zum Ereignis A + C übergeht), fordern:

c) $w(A + B) = w(A) + w(B)$.

Für unendliche Ereigniskörper läßt sich das verallgemeinern zu

d) $w(\sum_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} w(A_i)$.

Wir fordern also von metrischen Wahrscheinlichkeiten, daß sie folgenden Axiomen genügen:

B*1: $0 \leq w(A)$

B*2: $w(K) = 1$

B*3: $w(A + B) = w(A) + w(B)$

B*4: $w(\sum_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} w(A_i)$.

Ist w auf dem Ereignis-(σ-)Körper $\mathfrak{K}$ über K definiert und genügt w den Bedingungen B*1 bis B*4, so nennen wir das Tripel $\langle K, \mathfrak{K}, w \rangle$ eine *metrische Wahrscheinlichkeitsstruktur.*

Aus $w(K) = w(A + \bar{A}) = 1$ folgt mit B*3

T2.3–1: $w(\bar{A}) = 1 - w(A)$;

mit B*3 erhält man auch wieder

[3] Vgl. dazu z. B. Kutschera [72], Kap. 1.3.

T2.3–2: $A \subset B \supset w(A) \leq w(B)$,
also wegen $A \subset K$ für alle $A \varepsilon \mathfrak{K}$: $w(A) \leq 1$.

Man kann nun den Satz beweisen:

T2.3–3: Zu jeder komparativen Wahrscheinlichkeitsstruktur $\langle K, \mathfrak{K}, \leq_p \rangle$, die die Eigenschaft hat:

a) Zu jeder Zahl $n \geq 1$ gibt es eine Zerlegung von K in n Mengen $K_1^n, \ldots, K_n^n$ mit $K_i^n =_p K_k^n$, $K_i^n \cap K_k^n = \Lambda$ für alle i und $k = 1, \ldots, n$ mit $i \neq k$, und $\sum_{i=1} K_i^n = K$,

gibt es genau eine metrische Wahrscheinlichkeitsstruktur $\langle K, \mathfrak{K}, w \rangle$ mit

b) $A \leq_p B \equiv w(A) \leq w(B)$.[4]

Man kann sich ferner überlegen, daß sich eine komparative Wahrscheinlichkeitsstruktur $\langle K, \mathfrak{K}, \leq_p \rangle$, die nicht der Bedingung (a) aus T2.3–3 genügt, in eine Wahrscheinlichkeitsstruktur nach dieser Bedingung transformieren läßt, indem man z. B. von dem Ereignis A aus $\mathfrak{K}$ zu dem Ereignis A' übergeht, das besagt, daß A eintritt und daß bei einer Folge von n Würfen mit einer Münze die Ergebnisse „Kopf" und „Wappen" in einer bestimmten Reihenfolge auftreten. Es gilt dann, wo $\langle K', \mathfrak{K}', \leq_p' \rangle$ die transformierte Struktur ist, $A \leq_p B \equiv A' \leq_p' B'$, so daß man mit einer Metrisierung der transformierten Struktur auch eine Metrisierung der ursprünglichen Strukturen $\langle K, \mathfrak{K}, \leq_p \rangle$ gewinnt.[5] Danach kann man also sagen: Zu *jeder* komparativen Wahrscheinlichkeitsstruktur $\langle K, \mathfrak{K}, \leq_p \rangle$ gibt es eine metrische Struktur $\langle K, \mathfrak{K}, w \rangle$ mit $A \leq_p B \equiv w(A) \leq w(B)$.

Daß durch $\leq_p$ auf $\mathfrak{K}$ die Funktion w eindeutig bestimmt sei, kann man in diesem allgemeineren Fall nicht mehr behaupten. Wenn z. B. für einen Münzwurf die Zustandsmenge $K = \{$„Kopf", „Wappen"$\}$ und $\mathfrak{K} = P(K)$ ist, und nur festliegt „Kopf" $<_p$ „Wappen", so stellt jede Wahrscheinlichkeitsfunktion w auf $\mathfrak{K}$ mit w(„Kopf")$< {}^1/_2$ eine Metrisierung der komparativen Struktur dar.

Da man nun umgekehrt mit jeder metrischen Struktur $\langle K, \mathfrak{K}, w \rangle$, wie man leicht nachprüft, durch $A \leq_p B := w(A) \leq w(B)$ auch einen komparativen Wahrscheinlichkeitsbegriff $\leq_p$

[4] Zum Beweis dieser Behauptung vgl. z. B. Kutschera [72], 2.1.2.
[5] Vgl. Kutschera [72], 2.1.2.

auf $\mathfrak{K}$ definieren kann, sind metrische Wahrscheinlichkeitsaussagen in ihrem Sinn durch die entsprechenden komparativen Wahrscheinlichkeitsaussagen erklärt.

Durch ähnliche Verfahren führt man auch andere metrische Begriffe, wie Volumen, Masse, Geschwindigkeit etc. ein.

Nach B*3 gilt nun, wo $K = \{x_1, \ldots, x_n\}$ und daher auch $\mathfrak{K}$ eine endliche Menge ist,

T2.3–4: $w(A) = \sum_{x \varepsilon A} w(\{x\})$.

Das heißt die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten der Zustände, aus denen A besteht. Im unendlichen Fall tritt an die Stelle dieser Summe das Lebesguesche Integral $w(A) = \int_A dw$, wobei $w(x)$ auf $\mathfrak{K}$ definiert ist.

2.4 Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Die subjektive Wahrscheinlichkeit, die eine Person X einem Ereignis A zumißt, hängt offenbar sehr stark von den Informationen ab, über die X verfügt. Wenn X z. B. sieht, daß das Barometer steigt, wird er dem Ereignis, daß morgen schönes Wetter sein wird, eine höhere Wahrscheinlichkeit zumessen als vorher. Und wenn X erfährt, daß der Wurf mit einem Würfel eine gerade Augenzahl ergeben hat, so wird er eher annehmen, daß eine 6 geworfen wurde als vorher.

Wenn man nun diese Abhängigkeit der Wahrscheinlichkeiten von Informationen explizit machen will, so wird man einen komparativen Begriff $\leq_{p/E}$ festlegen, der die Wahrscheinlichkeit bei Kenntnis von E angibt. Wenn X schon weiß, daß E eingetreten ist, wird er für den Wahrscheinlichkeitsvergleich von A und B nur die Ereignisse $A \cdot E$ und $B \cdot E$ in Betracht ziehen, d. h. jene Zustände aus A und B, die auch Zustände von E sind.

In diesem Satz kann man das Axiom ansetzen

B6: $A \leq_{p/E} B \equiv A \cdot E \leq_p B \cdot E$.

Die Relation $\leq_{p/E}$ ist dabei nur dann vernünftig erklärt, wenn nicht gilt $E =_p \Lambda$ (andernfalls wäre für alle Ereignisse $A =_{p/E} \Lambda$). Für $\neg(E =_p \Lambda)$ macht man sich leicht klar, daß $\langle K, \mathfrak{K}, \leq_{p/E} \rangle$ für $E \varepsilon \mathfrak{K}$ eine komparative Wahrscheinlichkeitsstruktur ist, falls $\langle K, \mathfrak{K}, \leq_p \rangle$ eine solche Struktur ist. $\leq_{p/E}$ bezeichnet man als durch E *bedingte* Wahrscheinlichkeitsrelation.

Im Rahmen des metrischen Wahrscheinlichkeitsbegriffs kann man bedingte Wahrscheinlichkeiten so einführen: Ist $w(E) \neq 0$ und schreibt man $w(A/E)$ für die durch Kenntnis von E bedingte Wahrscheinlichkeit von A, so erhält man mit

D2.4–1: $w(A/E) = \dfrac{w(A \cdot E)}{w(E)}$

aus einem metrischen Wahrscheinlichkeitsbegriff $w(A)$ auf $\mathfrak{K}$ für $E \varepsilon \mathfrak{K}$ wiederum einen metrischen Wahrscheinlichkeitsbegriff $w(A/E)$ auf $\mathfrak{K}$, für den in Entsprechung zu B 6 gilt:
$w(A/E) \leq w(B/E) \equiv w(A \cdot E) \leq w(B \cdot E)$, der also eine Metrisierung von $\langle K, \mathfrak{K}, \leq_{p/E} \rangle$ ist, wo w eine Metrisierung von $\langle K, \mathfrak{K}, \leq_p \rangle$ darstellt.

Aus D2.4–1 folgt das Axiom für bedingte Wahrscheinlichkeiten

B*5: $w(A \cdot B/C) = w(B/C) \cdot w(A/B \cdot C)$ für $B \cdot C \neq \Lambda$.

D2.4–2: Man nennt zwei Ereignisse A und B (wahrscheinlichkeitstheoretisch) *unabhängig*, wenn gilt $w(A/B) = w(A)$ (oder gleichwertig $w(A \cdot B) = w(A) \cdot w(B)$). Entsprechend heißen die Ereignisse $A_1, A_2, \ldots$ einer unendlichen Folge *unabhängig*, wenn gilt $w(A_{i_1} \cdot \ldots \cdot A_{i_n}) = w(A_{i_1}) \cdot \ldots \cdot w(A_{i_n})$ für alle $n \geq 1$ und irgendwelche von einander verschiedenen Ereignisse A_{i_k} $(k = 1, \ldots, n)$ der Folge.

In unserem Würfelbeispiel aus dem Abschnitt 2.1 mit $K = \{1, \ldots, 6\}$ und $\mathfrak{K} = P(K)$ erhält man wegen $\sum_{i=1}^{6} w(\{x_i\}) = w(K) = 1$ für $w(\{x_i\}) = w(\{x_k\})$ für alle $i, k = 1, \ldots, 6 : w(\{x_i\}) = {}^1/_6$ für alle i. Es ist dann z. B. w(„gerade Augenzahl") $= w(\{2,4,6\}) = 3 \cdot {}^1/_6 = {}^1/_2$, und es ist $w(\{6\}/\{2,4,6\}) = \dfrac{w(\{6\} \cdot \{2,4,6\})}{w(\{2,4,6\})} = \dfrac{w(\{6\})}{w(\{2,4,6\})} = {}^2/_6 = {}^1/_3$; d. h. bei Kenntnis des Ereignisses „gerade Augenzahl" erhöht sich die Wahrscheinlichkeit von „Sechs" von ursprünglich ${}^1/_6$ auf ${}^1/_3$, also auf das Doppelte.

3. Werte

3.1 Bewertung von Ereignissen

In diesem Kapitel wollen wir über Wertbegriffe sprechen und einige fundamentale Eigenschaften solcher Begriffe kennenlernen. Wie bei der Charakterisierung der Normen und des subjektiven Wahrscheinlichkeitsbegriffs geht es dabei nicht darum, tatsächliche Wertstrukturen zu analysieren, sondern Wertbegriffe durch Bedingungen zu charakterisieren, die aufgrund unseres intuitiven Vorverständnisses dieser Begriffe vernünftig sind. Wir sind also nicht an speziellen Wertsystemen interessiert, sondern an der *Logik der Wertbegriffe*, an Prinzipien, die für alle solche Begriffe gelten.

Wir können wieder klassifikatorische, komparative und metrische Wertbegriffe unterscheiden, ebenso wie wir das für Wahrscheinlichkeitsbegriffe getan haben. Ein *klassifikatorischer* Wertbegriff liegt vor, wenn wir die Gegenstände einer Menge in wertvolle und wertlose einteilen. Ein *komparativer* Wertbegriff liegt vor, wenn wir die Gegenstände ihrem Wert nach vergleichen und von zwei Gegenständen a und b sagen können, a sei wertvoller als b, oder a sei ebenso wertvoll wie b. Ein *metrischer* Wertbegriff liegt endlich vor, wenn wir den Gegenständen eine Zahl zuordnen können, die ihren Wert angibt, z. B. indem wir ihren Wert in Geldbeträgen ausdrücken. Wir werden uns im folgenden ihrer großen Leistungsfähigkeit wegen wieder vor allem für komparative und metrische Wertbegriffe interessieren.

Ein Gegenstand ist immer in einer *bestimmten Hinsicht* wertvoll oder wertlos; er kann in einer Hinsicht wertvoll sein, in einer anderen Hinsicht dagegen wertlos. So kann z. B. ein Schmuckstück einen geringen Marktwert, aber einen hohen

Erinnerungswert haben. Und neben materiellen Werten gibt es ethische, kulturelle und politische Werte, neben individuellen Werten soziale Werte, usf.

Ferner müssen wir, insbesondere im Hinblick auf die Anwendung des Wertbegriffs in der Entscheidungstheorie, zwischen *subjektiven* und *objektiven* Werten unterscheiden: Der subjektive Wert eines Gegenstands a ist der Wert von a für eine Bezugsperson X. Er kann für zwei Personen ganz verschieden sein. Objektiv ist ein Wert hingegen, wenn er durch intersubjektive Kriterien festgelegt wird. Eine alte Münze ist für einen Sammler z. B. subjektiv wertvoll, für einen numismatischen Banausen dagegen subjektiv wertlos; der objektive Wert der Münze ist ihr Marktwert. Ein DM-Betrag hat einen objektiven Wert, der sich aus der Goldparität der Deutschen Mark ergibt, für verschiedene Personen hat er aber zu verschiedenen Zeiten und in verschiedenen Situationen einen verschiedenen subjektiven Wert: Für jemand, der nichts besitzt, sind 100,– DM viel Geld; wenn jemand dagegen ein Vermögen von 10 Millionen DM hat, machen 100,– DM mehr oder weniger für ihn keinen wesentlichen Unterschied.

Der subjektive Wert kann auch der Wert für eine Gruppe von Individuen sein, bezieht sich also nicht immer nur auf Einzelpersonen. Und der objektive Wert einer Sache wird sich oft aus den subjektiven Werten für viele Individuen ergeben. So ergibt sich z. B. der Marktwert eines Bildes aus dem subjektiven Wert, den es für die möglichen Käufer hat; denn der subjektive Wert bestimmt die Nachfrage und diese den Marktwert.

Wir haben bisher vom Wert von *Gegenständen* gesprochen. Wertbegriffe lassen sich aber ebenso auf *Handlungen* oder *Handlungsweisen* oder *Ereignisse* anwenden. Man kann sich sogar darauf beschränken, Ereignisse als Argumente von Wertbegriffen anzusehen. Denn wenn man z. B. sagt „Unrecht leiden ist besser als Unrecht tun“, so kann man das auch so ausdrücken: „Für alle Personen X gilt: wenn X Unrecht leidet, so ist das besser, als wenn X Unrecht tut“. Man kann also Wertaussagen über Handlungsweisen in Wertaussagen über Handlungen als Ereignisse umformen. Und statt „Dieser Ring ist wertvoller als jenes Armband“ kann man auch sagen, „Diesen

Ring zu besitzen ist besser, als jenes Armband zu besitzen", so daß man auch Wertaussagen über Gegenstände in solche über Ereignisse umformen kann.

Wir wollen daher zur Vereinheitlichung der betrachteten Wertbegriffe, wie auch zur leichteren Vergleichbarkeit von Wert- und Normbegriffen im folgenden nur Wertbegriffe betrachten, die für Ereignisse definiert sind.

Wir können Ereignisse wieder durch Mengen darstellen, so wie das im Abschnitt 2.1 besprochen wurde. Der Definitionsbereich eines Wertbegriffs ist dann wieder ein Ereignis-(σ-) Körper $\mathfrak{K}$ über einer Zustandsmenge K.

3.2 Das Mittelwertprinzip

Ebenso wie bei der Einführung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs führt der systematische Weg der Einführung eines metrischen Wertbegriffs über die Metrisierung eines komparativen Wertbegriffs. Wir wollen hier aber das Verfahren umkehren und zunächst über die Eigenschaften metrischer Wertbegriffe sprechen, um mit ihnen dann die Annahmen für komparative Wertbegriffe plausibel zu machen. Denn die Axiome für die komparativen Begriffe sind intuitiv sehr viel weniger durchsichtig als jene für metrische Begriffe.

Wir nehmen also an, es sei $\mathfrak{K}$ ein Ereigniskörper über der Zustandsmenge K, und auf $\mathfrak{K}$ sei ein metrischer Wertbegriff $u(A)$ – der Wert von A für die Bezugsperson – erklärt (mit Ausnahme gewisser Ereignisse $A \varepsilon \mathfrak{K}$, über die wir unten sprechen). $u(A)$ ist immer eine reelle Zahl.

Der Einfachheit wegen setzen wir zunächst wieder voraus, $K = \{x_1, \ldots, x_n\}$ sei eine endliche Menge und $\mathfrak{K}$ sei die Potenzmenge $P(K)$ von K, d. h. die Menge aller Teilmengen von K.

Da wir beim metrischen Wahrscheinlichkeitsbegriff mit dem Axiom B*3: $w(A+B) = w(A) + w(B)$ die Formel T2.3–4: $w(A) = \sum_{x \varepsilon A} w(\{x\})$ erhielten, mit der wir die Werte $w(A)$ für alle $A \varepsilon \mathfrak{K}$ aus den Werten $w(\{x\})$ für die $x \varepsilon K$ berechnen konnten, werden wir auch eine Bedingung für die Funktion u anzugeben suchen, nach der sich $u(A+B)$ aus den Werten $u(A)$ und $u(B)$ (und evtl. anderen Parametern) errechnet, um damit dann $u(A)$ für alle $A \varepsilon \mathfrak{K}$ aus den Werten $u(\{x\})$ für die $x \varepsilon K$ berechnen zu können.

Wie also verhält sich $u(A+B)$ zu $u(A)$ und $u(B)$?

Zunächst einmal wird man sagen, daß der Wert von $A+B$ zwischen den Werten von A und B liegen wird, also

I) $u(A) \leq u(B) \supset u(A) \leq u(A+B) \leq u(B)$, und daher
$u(A) = u(B) \supset u(A) = u(A+B) = u(B)$.

Denn wenn mir z. B. ein Urlaub in Spanien lieber ist als ein Urlaub in Schottland, so wird mir bei einer Auslosung solcher Reisen die Ziehung eines Loses, das mir einen Urlaub in Spanien oder einen solchen in Schottland verspricht (das Gremium, das die Verlosung durchführt, wird noch entscheiden, welche dieser beiden Reisen ich gewinne), lieber sein als die Ziehung eines Loses, mit dem ich einen Urlaub in Schottland gewinne, weil das Alternativlos mir die Chance eines noch besseren Urlaubs eröffnet als dieses; wenn die Entscheidung des Gremiums für mich ungünstig ausfällt, bin ich immer noch so gut daran wie mit dem zweiten Los. Das Los mit der Alternative werde ich dagegen geringer bewerten als ein Los, mit dem ich eine Reise nach Spanien gewinne; denn im günstigsten Fall bin ich mit ihm nur ebenso gut daran wie mit dem Spanien-Los. Fahre ich dagegen ebenso gern nach Schottland wie nach Spanien, so haben für mich alle drei Lose den gleichen Wert.

Um wieviel höher als das Schottland-Los und um wieviel niedriger als das Spanien-Los ich das Alternativ-Los bewerte, hängt nun davon ab, für wie wahrscheinlich ich die Entscheidung des Gremiums für Spanien, bzw. Schottland halte. Haben z. B. 10 Preisträger ein solches Alternativlos gezogen und stehen für sie noch 8 Schottlandreisen und 2 Spanienreisen zur Verfügung, die in einer zweiten Verlosung unter ihnen verteilt werden, so stehen die Chancen für Spanien aufgrund des Alternativloses nur 1:4, d. h. es ist wahrscheinlich, daß ich mit dem Alternativlos endlich doch nur eine Schottlandreise erhalte. Das Los ist also nur wenig mehr wert als ein Schottland-Los bei der ersten Auslosung. Stehen dagegen 5 Schottland- und 5 Spanienreisen zur zweiten Verlosung, so liegt der Wert des

Alternativloses in der Mitte zwischen den Werten des Schottland- und des Spanienloses. Halte ich es endlich für ausgeschlossen, bei der zweiten Verlosung eine Spanienreise zu gewinnen, so ist das Alternativlos für mich ebenso viel wert wie ein einfaches Schottlandlos.

Dieses Beispiel zeigt: Der Wert $u(A+B)$ hängt nicht nur von $u(A)$ und $u(B)$ ab, sondern auch von den *Wahrscheinlichkeiten*, die die Ereignisse A und B für die Bezugsperson haben. In diesem Zusammenhang geht es dabei um die *subjektiven* Wahrscheinlichkeiten von A und B, nicht um ihre objektiven Wahrscheinlichkeiten, die der Bezugsperson ja unbekannt sein und somit ohne Einfluß auf seine Werturteile bleiben können.

Wir nehmen also an, auf $\mathfrak{K}$ sei eine subjektive Wahrscheinlichkeit w erklärt. Dann können wir aufgrund unserer Überlegungen folgendes *Mittelwertprinzip* formulieren:

$$\text{C*1:}\quad u(A+B) = \frac{u(A)\cdot w(A) + u(B)\cdot w(B)}{w(A)+w(B)}\,.$$

Das heißt: *Der Wert von u (A + B) ist das mit den subjektiven Wahrscheinlichkeiten gewichtete Mittel von u (A) und u (B).*

Der Ausdruck $\frac{u(A)\cdot w(A) + u(B)\cdot w(B)}{w(A)+w(B)}$ ist wegen $w(A)+w(B) = w(A+B)$ nur dann erklärt, wenn $w(A+B) > 0$ ist. Wenn man also von einer Bewertung u für die *Atome* $\{x_i\}$ von $\mathfrak{K}$ ausgeht und u für andere Ereignisse $A \varepsilon \mathfrak{K}$ durch

$$\text{T3.2–1:}\quad u(A) = \frac{\sum_{x\varepsilon A} u(\{x\})\cdot w(\{x\})}{\sum_{x\varepsilon A} w(\{x\})} = \frac{1}{w(A)} \sum_{x\varepsilon A} u(\{x\})\cdot w(\{x\})$$

definiert, so bleibt u für alle Ereignisse $A \varepsilon \mathfrak{K}$ mit $w(A)=0$ undefiniert. Insbesondere ist u für das Argument Λ nicht erklärt. Ereignisse, die als praktisch unmöglich angesehen werden, erhalten also keinen Wert. Sie fallen auch nicht ins Gewicht, denn es gilt nach C*1

T3.2–2: $w(A) = 0 \supset u(A+B) = u(B)$.

Ist umgekehrt $u(A+B) = u(B)$, so ist auch $w(A) = 0$, oder aber $u(A) = u(B)$, also

T3.2–3: $u(A+B) = u(B) \supset w(A) = 0 \vee u(A) = u(B)$.

Dabei ist immer vorausgesetzt, daß die angegebenen u-Werte definiert sind, daß also speziell $u(B)$ definiert ist. Mit $u(B)$ ist auch $u(A+B)$ definiert, denn nach T2.3–3 gilt allgemein: ist $u(A)$ definiert, so ist auch $u(B)$ definiert für jede Menge B mit $A \subset B$.

Man kann die metrischen Wertbegriffe auch so normieren, daß gilt:

II) $u(K) = 0$.

Damit wird das logisch sichere Ereignis K als indifferent angesehen und die Werte der übrigen Ereignisse $A \varepsilon \mathfrak{K}$ werden im Verhältnis zu dem gemessen, was ohnehin sicher ist.

Allgemein gilt nach C* 1

$u(K) = u(\bar{A} + A) = u(A) \cdot w(A) + u(\bar{A}) \cdot w(\bar{A})$; also

T3.2–4: $u(\bar{A}) = \dfrac{u(K) - u(A) \cdot w(A)}{w(\bar{A})}$.

Im Fall (II) erhalten wir also wegen T2.3–2:

$u(\bar{A}) = -u(A) \dfrac{w(A)}{1 - w(A)}$.

Es gilt also auch für (II) nicht allgemein $u(\bar{A}) = -u(A)$, sondern nur für $w(A) = {}^1/_2$.

Da die u-Werte der Ereignisse von $\mathfrak{K}$ auch von deren Wahrscheinlichkeiten abhängen, ändern sich diese Werte, wenn wir wissen, daß ein Ereignis E von $\mathfrak{K}$ eingetreten ist. Ist $u_E(A)$ der Wert von A bei Kenntnis von E, so wird man in Analogie zu T3.2–1 setzen:

D3.2–1: $u_E(A) = \dfrac{\sum_{x \varepsilon A} u(\{x\}) \cdot w(\{x\}/E)}{\sum_{x \varepsilon A} w(\{x\}/E)}$

Wegen $\sum_{x \varepsilon A} w(\{x\}/E) = w(A/E)$ und $\sum_{x \varepsilon A} w(\{x\} \cdot E) = \sum_{x \varepsilon A \cdot E} w(\{x\})$ gilt dann

T3.2–5: $u_E(A) = u(A \cdot E)$.

Dabei ist $u_E(A)$ nur dann definiert, wenn $w(A \cdot E) > 0$ ist. T3.2–5 besagt, daß der Wert von A bei Kenntnis von E mit dem Wert derjenigen Teilmenge von A identisch ist, die in E enthalten ist.

Betrachten wir nun zwei einfache *Beispiele:*

a) In einem Brettspiel möge Gewinn und Verlust vom letzten Zug abhängen, über die der Wurf mit einem Würfel entscheidet. Es ist also wieder $K = \{1,\ldots,6\}$. $\mathfrak{K}$ ist die Potenzmenge zu K. Es soll gelten: falls ich eine 1 werfe, gewinne ich 3,– DM; falls ich eine 2 oder eine 5 werfe, gewinne und verliere ich nichts; falls ich eine 3 werfe, verliere ich 4,– DM; falls ich eine 4 werfe, verliere ich 1,– DM, und falls ich eine 6 werfe, gewinne ich 2,– DM. Wenn wir die subjektiven Werte mit den Markbeträgen gleichsetzen, gilt also $u(\{1\}) = +3$, $u(\{2\}) = u(\{5\}) = 0$, $u(\{3\}) = -4$, $u(\{4\}) = -1$, $u(\{6\}) = +2$. Der Würfel sei korrekt, so daß wir setzen $w(\{1\}) = \ldots = w(\{6\}) = {}^1/_6$. Es ist dann $u(K) = u(\{1\} + \ldots + \{6\}) = {}^1/_6 \cdot \sum_{i=1}^{6} u(\{i\}) = 0$. Der Wert eines Wurfs mit gerader Augenzahl ist $u(\{2\} + \{4\} + \{6\}) = 2 \cdot (0 \cdot {}^1/_6 - 1 \cdot {}^1/_6 + 2 \cdot {}^1/_6) = {}^1/_3$, er ist also positiv. Der Wert eines Wurfs mit ungerader Augenzahl ist $u(\{1\} + \{3\} + \{5\}) = -{}^1/_3$. Man wird also lieber eine gerade als eine ungerade Augenzahl werfen. Man wird auch lieber eine Augenzahl ≥ 4 werfen als eine Augenzahl ≤ 3, denn es ist auch $u(\{1\} + \{2\} + \{3\}) = -{}^1/_3$ und $u(\{4\} + \{5\} + \{6\}) = +{}^1/_3$.

Für das zweite Beispiel müssen wir unsere Überlegungen zum Mittelwertprinzip noch verallgemeinern für die Fälle, in denen K nicht endlich ist. Man wird dann – $\mathfrak{K}$ sei nun ein σ-Körper über K – das Prinzip

$$\text{C*2:}\quad u\Big(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} u(A_i) \cdot w(A_i)}{\sum_{i=1}^{\infty} w(A_i)}$$

als verallgemeinertes Mittelwertprinzip in Ansatz bringen. Anstelle von T3.2–1 erhält man dann, wo nun $u'(x)$ eine Funktion auf K ist, den Satz

$$\text{T3.2–6:}\quad u(A) = \frac{\int_A u'(x)\,dw}{\int_A dw} = \frac{1}{w(A)} \int_A u'(x)\,dw.$$

Dabei ist $\int_A u'(x)\,dw$ wieder das Lebeguesche Integral und wir nehmen an, daß $u'(x)$ über allen Mengen $A \varepsilon \mathfrak{K}$ w-integrabel ist, so daß diese Integralausdrücke alle erklärt sind.

An die Stelle von D3.2–1 bzw. T3.2–5 tritt dann die Aussage

$$\text{T3.2–7:}\quad u_B(A) = \frac{\int\limits_A u'(x)\,dw_B}{\int\limits_A dw_B} = u(A \cdot B),$$

wobei $w_B(A) = w(A/B)$ sei.

b) Wir betrachten nun die Ereignisse, daß man bei einer Bohrung in $x \cdot 1000$ m Tiefe Öl findet. Es sei sicher, daß man spätestens in einer Tiefe von 1000 m auf Öl stoßen wird. Wir stellen das Ereignis, daß man in $x \cdot 1000$ m Öl findet, der Einfachheit halber durch die Zahl x selbst dar. Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses, daß bei der Bohrung spätestens in $x \cdot 1000$ m Tiefe Öl gefunden wird, sei x^2; also $w([0,x]) = x^2$, wobei $[0,x]$ das Intervall von 0 bis x ist und w eine Funktion auf $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}$ ein σ-Körper über $K = [0,1]$. Der Wert von x sei $u'(x) = 1-3x$; er sinkt also mit wachsendem x, z. B. weil die Kosten der Bohrung mit x wachsen.

Die Frage ist, wie groß der Wert des Ereignisses A_y ist, spätestens bis zu einer Tiefe von $y \cdot 1000$ m auf Öl zu stoßen. Es ist $u(A_y) = \int\limits_0^y u'(x)\,dw = \int\limits_0^y (1-3x)2x\,dx = \left[2\left(\frac{x^2}{2} - \frac{3}{3}x^3\right)\right]_0^y =$ $y^2 - 2y^3$. (Hier haben wir es nun wieder mit dem gewöhnlichen Riemannschen Integral zu tun.) Dieser Wert hat bei $y = {}^1\!/_3$ ein Maximum. Das heißt das Ereignis, daß spätestens bei einer Tiefe von $y \cdot 1000$ m Öl gefunden wird, hat einen maximalen Wert für $y = {}^1\!/_3$.

Ist $\mathfrak{K}$ ein (σ-)Körper über K, w ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathfrak{K}$ und ist u eine Funktion, die für alle Elemente A von $\mathfrak{K}$ definiert ist (für die nicht gilt $w(A) = 0$), und die den Axiomen C*1 und C*2 genügt, so nennen wir das Quadrupel $\langle K, \mathfrak{K}, w, u \rangle$ eine *metrische Wertstruktur.*

Wie steht es nun mit der Wertzuordnung zu den Ereignissen von $\mathfrak{K}$, wenn wir von dem grundlegenden Prinzip (I) ausgehen, wenn aber der Bezugsperson X entweder bekannt ist, welcher Zustand aus K realisiert ist, d. h. welche Ereignisse aus $\mathfrak{K}$ zu-treffen und welche nicht, oder wenn X den Ereignissen von $\mathfrak{K}$ keine Wahrscheinlichkeiten zuordnen kann?

Im *ersten Fall* können wir einfach mit dem Mittelwertprinzip C* 1 arbeiten und den Ereignissen A mit $x \varepsilon A$ (wo x der wahre Zustand aus K ist), insbesondere also dem Ereignis $\{x\}$ selbst, die Wahrscheinlichkeit $w(A) = 1$ zuordnen und den Ereignissen A mit $\neg x \varepsilon A$ die Wahrscheinlichkeit $w(A) = 0$. Dann ist $u(A)$ nur für $x \varepsilon A$ definiert und hat den Wert $u(\{x\})$.

Im *zweiten Fall* wird man versuchen, den Rahmen des Prinzips (I) durch Ansätze auszufüllen, wie z. B.

I') $u(A + B) = \min(u(A), u(B))$, oder

I'') $u(A + B) = \max(u(A), u(B))$, oder

I''') $u(A + B) = \dfrac{u(A) + u(B)}{2}$.

Während (I') eine pessimistische Einstellung ausdrückt – gemessen am Mittelwertprinzip C* 1 wird das Ereignis mit dem höheren Wert als praktisch unmöglich angesehen – drückt (I'') eine optimistische Einstellung aus – das bessere Ereignis wird als praktisch sicher angesehen. (I''') endlich ersetzt das mit den Wahrscheinlichkeiten gewichtete Mittel der Werte nach C* 1 durch ihr arithmetisches Mittel.

Es ist offensichtlich, daß (I') bis (I''') nur als mehr oder minder schlechte Notbehelfe für C* 1 anzusehen sind.

3.3 Komparative Wertbegriffe

Nachdem wir im vorausgehenden Abschnitt mit C* 1 und C* 2 die grundlegenden Eigenschaften metrischer Wertbegriffe angegeben haben, wollen wir uns nun überlegen, wie ein komparativer Wertbegriff $A \leq_s B$ – A ist höchstens so wertvoll wie B – auszusehen hat, dessen Metrisierung $u(A)$ mit $A \leq_s B \equiv u(A) \leq u(B)$ diese Eigenschaften besitzt. Wir folgen dabei im wesentlichen den Gedanken, die R. C. Jeffrey in [65], aufbauend auf die Arbeit [65] von E. Bolker, entwickelt hat.[1]

Es sei wieder K eine Zustandsmenge und $\mathfrak{K}$ sei ein Ereigniskörper über K, auf dem die komparative Relation $\leq_s$ definiert

[1] Vgl. auch Bolker [67].

sein soll. Damit $\leq_s$ eine komparative Relation ist, fordern wir zunächst:

C1: $A \leq_s B \vee B \leq_s A$

C2: $A \leq_s B \wedge B \leq_s C \supset A \leq_s C$.

Das sind die grundlegenden Eigenschaften eines komparativen Begriffs, wie wir sie schon im Abschnitt 2.2 kennengelernt hatten.

Es ist nun, wie im Fall des metrischen Wertbegriffs, festzulegen, wie sich die Relation $\leq_s$ bezüglich der Operation $+$ für Mengen verhält. Nach den Überlegungen des vorigen Abschnitts soll gelten $A \leq_s B \supset A \leq_s A+B \leq_s B$. Diese Forderung ist aber zu schwach, denn sie drückt nicht das Mittelwertprinzip C^*1 aus, sondern nur das allgemeinere Prinzip (I). Nach C^*1 soll spezieller gelten $A =_s B \supset A =_s A+B$ und $A <_s B \supset A <_s A+B$, falls $w(A)$ und $w(B)$ nicht den Wert 0 haben. Nun wollen wir aber in den Axiomen für den komparativen Wertbegriff noch nicht auf ein Wahrscheinlichkeitsmaß w oder auf eine komparative Wahrscheinlichkeitsrelation $\leq_p$ auf $\mathfrak{K}$ Bezug nehmen. Daher müssen wir versuchen, die Ereignisse A mit $w(A)=0$ mit Hilfe der Relation $\leq_s$ selbst zu charakterisieren.

Bei den folgenden Überlegungen zur Begründung der Axiome für die komparative Relation $\leq_s$ nehmen wir nun an, daß eine metrische Wertstruktur $\langle K, \mathfrak{K}, w, u \rangle$ gegeben ist, für die gilt $A \leq_s B \equiv u(A) \leq u(B)$, und leiten damit die Eigenschaften von $\leq_s$ aus denen von u und w ab.

Wir fordern zunächst, daß die Wertstruktur $\langle K, \mathfrak{K}, \leq_s \rangle$ im folgenden Sinn nicht trivial ist: Es soll ein Ereignis E in $\mathfrak{K}$ geben mit $0 < w(E) < 1$ und $u(E) \neq (\bar{E})$, d. h. ein Ereignis E, das weder praktisch unmöglich, noch praktisch sicher ist und das nicht indifferent ist (so daß es einen Wertunterschied macht, ob E oder $\bar{E}$ eintritt). Es sind dann $u(E)$ und $u(\bar{E})$ definiert, und es gilt $u(K) = u(E+\bar{E}) = u(E) \cdot w(E) + u(\bar{E}) \cdot w(\bar{E})$, also $u(K)$ $(1-w(E)) > u(\bar{E}) \cdot (1-w(E))$ und damit $u(\bar{E}) < u(K)$ für $u(K) < u(E)$ – oder $u(K)\ (1-w(E)) < u(\bar{E})\ (1-w(E))$ und damit $u(\bar{E}) > u(K)$ für $u(E) < u(K)$ – oder $u(K) = u(\bar{E})$ für $u(E) = u(K)$. Der letzte Fall ist aber nach der Voraussetzung über E ausgeschlossen. Wir fordern also

C3: $V E(\bar{E} <_s K <_s E)$, d. h. es gibt ein Ereignis E mit $\bar{E} <_s K <_s E$.

Gilt $\bar{E} <_s K <_s E$, so sind umgekehrt auch $u(E)$ und $u(\bar{E})$ definiert, also $0 < w(E) < 1$; denn ist $u(E)$ nicht definiert, also $w(E) = 0$, so ist $w(\bar{E}) = 1$, also ist $u(\bar{E})$ definiert, und es gilt $u(K) = u(E + \bar{E}) = 0 \cdot u(E) + 1 \cdot u(\bar{E}) = u(\bar{E})$, also $K =_s \bar{E}$. Und ist $u(\bar{E})$ nicht definiert, so ist $u(E)$ definiert, und es gilt $u(E) = u(K)$, also $E =_s K$. Definiert man nun

D3.3–1: $N(A) := V B((\bar{B} <_s K <_s B \vee B <_s K <_s \bar{B}) \wedge \neg(B =_s A) \wedge B + A =_s B)$,

so gilt

T3.3–1: $N(A) \equiv w(A) = 0$.

Beweis:

a) Es sei $\bar{B} <_s K <_s B$ oder $B <_s K <_s \bar{B}$, $\neg(B =_s A)$ und $B + A =_s B$. Dann ist $u(B)$ definiert, also auch $u(B + A)$ (nach T2.3–3), also gilt $u(B) = \dfrac{u(B) \cdot w(B) + u(A) \cdot w(A)}{w(A) + w(B)}$. Es muß also sein $u(A) = u(B)$ (wobei $u(A)$ definiert ist) – im Widerspruch zur Annahme $\neg(B =_s A)$, also $u(A) \neq u(B)$ – oder aber $w(A) = 0$.

b) Ist $w(A) = 0$, so gibt es nach C3 ein E mit $\bar{E} <_s K <_s E$. Wegen $\neg(E =_s \bar{E})$ ist $\neg(A =_s E)$ oder $\neg(A =_s \bar{E})$; wegen $w(A) = 0$ ist $u(A + E) = u(E)$, bzw. $u(A + \bar{E}) = u(\bar{E})$, also $A + E =_s E$, bzw. $A + \bar{E} =_s \bar{E}$.

Durch $N(A)$ können wir also die Ereignisse $A \varepsilon \mathfrak{K}$ mit $w(A) = 0$ allein mit Hilfe der Relation $\leq_s$ kennzeichnen, und wir können daher nun im Sinn des Mittelwertprinzips C*1 folgende Axiome für $\leq_s$ formulieren:

C4: $\neg N(A) \wedge N(B) \supset A =_s A + B$

C5: $\neg N(A) \wedge \neg N(B) \supset (A \leq_s B \equiv A \leq_s A + B)$.

Es gilt nicht $A =_s B \supset A + C =_s B + C$, denn aus $u(A) = u(B)$ folgt nicht $\dfrac{u(A) \cdot w(A) + u(C) \cdot w(C)}{w(A) + w(C)} = \dfrac{u(B) \cdot w(B) + u(C) \cdot w(C)}{w(B) + w(C)}$, da $w(A)$ und $w(B)$ verschieden sein können. Aus dieser letzteren Gleichung folgt aber mit $u(A) = u(B)$: $u(A) \cdot w(A) \cdot w(B) + u(A) \cdot w(A) \cdot w(C) + u(C) w(C) w(B) + u(C) w(C) \cdot w(C) = u(A) \cdot w(B) \cdot w(A) + u(A) \cdot w(B) \cdot w(C) + u(C) \cdot w(C) \cdot w(C) + u(C) \cdot w(C) \cdot w(A)$, also $u(A) \cdot w(C)(w(A) - w(B)) = u(C) \cdot$

$w(C)\,(w(A)-w(B))$, für $w(C)\neq 0$ also $u(A)\,(w(A)-w(B)) = u(C)\,(w(A)-w(B))$; ist nun $u(A)\neq u(C)$, so gilt also $w(A) = w(B)$. Wenn A und B sowohl in ihren Werten wie in ihren Wahrscheinlichkeiten übereinstimmen, gilt aber $A + D =_s B + D$ für beliebige Ereignisse D.

Man kann daher das folgende Axiom ansetzen:

C6: $A =_s B \wedge \neg C =_s A \wedge \neg N(C) \wedge A + C =_s B + C \wedge \neg N(D) \supset A + D =_s B + D$.

Ist hier $w(A) = 0 = w(B)$, so gilt $A + D =_s B + D$ wegen $\neg N(D)$ schon nach C4. Ist $w(A) = 0$, $w(B) > 0$, so folgt wegen $w(C) > 0$ aus $u(A + C) = u(B + C)$: $u(C) = u(B)$, im Widerspruch zur Voraussetzung des Axioms; dieser Fall kann also nicht auftreten. Ebenso kann der Fall $w(A) > 0$ und $w(B) = 0$ nicht auftreten, so daß man in C6 nicht $\neg N(A)$ oder $\neg N(B)$ zu fordern braucht.

Für den allgemeinen Fall, daß $\mathfrak{K}$ ein σ-Körper über einer unendlichen Zustandsmenge K ist, fügt man noch das Axiom hinzu:

C7: Ist $A_1, A_2, \ldots$ eine Folge von Mengen aus $\mathfrak{K}$ mit $A_1 \subset A_{i+1}$ (bzw. $A_{i+1} \subset A_1$) und $\neg N(A_i)$ für alle $i \geq 1$, und gilt für $A = \cup A_i$ (bzw. für $A = \cap A_i$) $B <_s A <_s C$, so gibt es ein N, so daß für alle $n \geq N$ gilt $B <_s \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i <_s C$ (bzw. $B <_s \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i <_s C$).

Zur Rechtfertigung dieses Axioms genügt es zu zeigen:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} u(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i) = u(\cup A_i)$. Wir setzen $D_1 = A_1$ und $D_{n+1} = A_{n+1} - D_n$. Dann ist $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \sum\limits_{i=1}^{n} D_i$ und $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i = \sum\limits_{i=1}^{\infty} D_i$. Es gilt:

$$\lim u(\sum_{i=1}^{n} D_i) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} u(D_i)\cdot w(D_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n} w(D_i)} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{\infty} u(D_i)\cdot w(D_i)}{\sum\limits_{i=1}^{\infty} w(D_i)} = u(\sum_{i=1}^{\infty} D_i).$$

b) Es gilt auch $\lim\limits_{n\to\infty} u(\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i) = u(\cap A_i)$. Wir setzen $D_1 = \overline{A}_1$ und

$D_{n+1} = \overline{A}_{n+1} - D_n$. Dann ist $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i = \overline{\sum\limits_{i=1}^{n} D_i}$ und $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i = \overline{\sum\limits_{i=1}^{\infty} D_i}$ und

$$\text{es gilt } \lim_{n\to\infty} \overline{u(\sum_{i=1}^{n} D_i)} = \lim_{n\to\infty} \frac{u(K)-u(\sum_{i=1}^{n} D_i)\cdot w(\sum_{i=1}^{n} D_i)}{1-w(\sum_{i=1}^{n} D_i)} =$$

$$= \frac{u(K)-\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} u(D_i)\cdot w(D_i)}{1-w(\sum_{i=1}^{\infty} D_i)} = \frac{u(K)-u(\sum_{i=1}^{\infty} D_i)\cdot w(\sum_{i=1}^{\infty} D_i)}{1-w(\sum_{i=1}^{\infty} D_i)}$$

$$= \overline{u(\sum_{i=1}^{\infty} D_i)}.$$

Obwohl wir annehmen, daß die Relation $\leq_s$ für alle Ereignisse A aus $\mathfrak{K}$ definiert ist, auch für $w(A) = 0$, legen die Axiome C3 bis C7 doch für diese Ereignisse nichts fest, so daß ihre Bewertung willkürlich ist.

Wenn auf einem Ereigniskörper $\mathfrak{K}$ über K eine Relation $\leq_s$ definiert ist, welche die Bedingungen C1 bis C7 erfüllt, so nennen wir das Tripel $\langle K, \mathfrak{K}, \leq_s \rangle$ eine *komparative Wertstruktur.*

3.4 Die Metrisierung komparativer Wertbegriffe

Es ist nun die Frage, ob die Axiome C1 bis C7 genügen, um die komparativen Wertbegriffe so zu charakterisieren, daß sie den metrischen Wertbegriffen entsprechen. Gibt es also zu jeder komparativen Wertstruktur $\langle K, \mathfrak{K}, \leq_s \rangle$ eine metrische Wertstruktur $\langle K, \mathfrak{K}, w, u \rangle$, für die gilt: $u(A) \leq u(B) \equiv A \leq_s B$?

Diese Frage beantwortet der folgende Metrisierungssatz, der von R. C. Jeffrey in [65] bewiesen worden ist.[2]

T3.4–1: Zu jeder komparativen Wertstruktur $\langle K, \mathfrak{K}, \leq_s \rangle$, für die gilt (a): Ist $\neg A =_s K \wedge \neg \bar{A} =_s K$, so gibt es Ereignisse A_1, A_2 mit $A_1 + A_2 = A$, $A_1 =_s A_2$ und $\bar{A}_1 =_s \bar{A}_2$,
existiert eine metrische Wertstruktur $\langle K, \mathfrak{K}, u, w \rangle$, für die gilt $u(A) \leq u(B) \equiv A \leq_s B$ für alle Ereignisse A, B aus $\mathfrak{K}$, für die u definiert ist.

[2] Vgl. dazu Jeffrey [65]. Der Beweis dort ist allerdings sehr lückenhaft, und wir sind auch in einigen kleinen Details von Jeffreys Definitionen und Axiomen abgewichen.

Dabei sind u und w eindeutig bis auf Transformationen der Gestalt:

b) $u'(A) = \dfrac{a \cdot u(A) + b}{c \cdot u(A) + d}$ und c) $w'(A) = w(A)\,(c \cdot u(A) + d)$,

wobei gelten soll

d) $a \cdot d - b \cdot c > 0$, e) $c \cdot u(K) + d = 1$ und f) $c \cdot u(A) + d > 0$ für alle $A \varepsilon \mathfrak{K}$.

Man beweist leicht, daß falls $\langle K, \mathfrak{K}, u, w \rangle$ eine metrische Struktur zu $\langle K, \mathfrak{K}, \leq_s \rangle$ ist, das auch für $\langle K, \mathfrak{K}, u', w' \rangle$ nach (b) bis (f) gilt. Im übrigen ist der Beweis des Satzes T3.4–1 jedoch alles andere als trivial.

Man kann sich nun überlegen, daß sich jede komparative Wertstruktur so in eine Struktur $\langle K', \mathfrak{K}', \leq_s' \rangle$ nach der Bedingung (a) transformieren läßt, daß gilt: $A \leq_s' B \equiv A \leq_s B$. So läßt sich z. B. jedes Ereignis mit einem positiven oder negativen Wert und einer von Null verschiedenen Wahrscheinlichkeit wie „Morgen wird es schön sein“ als Disjunktion der beiden Ereignisse darstellen „Morgen wird es schön sein und der nächste Wurf mit dieser Münze ergibt Kopf“ und „Morgen wird es schön sein und der nächste Wurf mit dieser Münze ergibt Wappen“. Beide Ereignisse und ihre Negationen haben denselben Wert, wenn es uns auf den Ausgang des Münzwurfs nicht ankommt.

Aufgrund einer solcher Überlegung kann man dann auch sagen, daß es zu *jeder* komparativen Wertstruktur eine zugehörige metrische Wertstruktur gibt. Die Eindeutigkeitsbehauptungen gelten freilich nicht in Allgemeinheit, da sich Wertstrukturen, für die (a) nicht gilt, in verschiedener Weise in solche Strukturen einbetten lassen.

Wenn wir mit dem komparativen Wertbegriff nicht auf das Mittelwertprinzip C*1 abzielen, sondern annehmen, daß die Bezugsperson X den Ereignissen von $\mathfrak{K}$ keine Wahrscheinlichkeiten zuordnen kann, so wird sich das in den Axiomen für diese Wertbegriffe ausdrücken.

Wenn wir der Einfachheit halber festlegen, daß die Unfähigkeit, subjektive Wahrscheinlichkeiten zuzuordnen, insbesondere implizieren soll, daß kein Ereignis A aus $\mathfrak{K}$ außer Λ als praktisch unmöglich angesehen wird; so ist u für alle Ereignisse $A \neq \Lambda$ von $\mathfrak{K}$ erklärt.

Zielt man nur auf das Prinzip (I) aus 3.2 ab, so tritt an die Stelle von C5 das Axiom

$A \leq_s B \equiv A \leq_s A + B \leq_s B$.

Wegen $A = A + \Lambda$ gilt C4 trivialerweise, während C6 und C7 keine Entsprechung haben.

Zielt man hingegen z. B. auf das Prinzip (I') ab, so erhält man statt C4 und C5 die Axiome

$A \leq_s B \supset A =_s A + B$,

$A =_s A + B \supset A \leq_s B \vee B = \Lambda$.

Daraus folgt $A =_s B \supset A + C = B + C$ und $A \leq_s B \supset A + C \leq_s B + C$.

Untersuchungen der Metrisierbarkeit solcher komparativer Strukturen hätten aber in jedem Fall noch zu zeigen, ob diese Axiome ausreichen, um die Existenz metrischer Strukturen mit den gewünschten Eigenschaften zu garantieren.

4. Entscheidungen

4.1 Das Grundmodell

Nach den Vorbereitungen der letzten beiden Kapitel können wir nun die Grundbegriffe und -prinzipien der Entscheidungstheorie formulieren. Dabei beschränken wir uns der Einfachheit wegen im wesentlichen wieder auf den elementaren Fall endlicher Zustandsmengen.

Das zentrale Problem der Entscheidungstheorie besteht darin, rationale Kriterien anzugeben, mit denen wir in einer gegebenen Situation unter den möglichen Handlungen eine bestimmte auswählen. Es sei X wieder die Bezugsperson, die in einer solchen Entscheidungssituation steht. X kann in dieser Situation zwischen den Handlungen einer Menge F wählen. Dabei setzen wir voraus, daß genau eine Handlung f aus F vollzogen wird (ggf. zählen wir also auch den Sachverhalt, daß X nichts tut, als eine Handlung aus F). Die Resultate dieser Handlungen sollen von Bedingungen abhängen, vom Eintreffen oder Nichteintreffen von Ereignissen, die einen Ereigniskörper $\mathfrak{K}$ über einer Zustandsmenge K bilden. Genauer soll für jeden Zustand x aus K festliegen, welches Resultat die Handlung f aus F bei x hat. Die Menge der möglichen Resultate der Handlungen aus F sei R.

Da das Resultat einer Handlung $f \varepsilon F$ von den Zuständen $x \varepsilon K$ abhängt, können wir f als Funktion mit dem Definitionsbereich K und dem Wertbereich R auffassen. $f(x)$ ist also das Resultat von $f \varepsilon F$ bei dem Zustand x. Es geht dann darum, zwischen den Handlungen aus F eine komparative *Präferenzordnung* $f \leq_t g$ im Sinn eines komparativen Begriffs subjektiver *Nützlichkeit* der Handlungen für die Bezugsperson X zu definieren, oder einen metrischen Begriff des Nutzens der Handlungen für X.

Der Nutzen einer Handlung f hängt von dem Wert ab, den die möglichen Resultate für X haben. Wir wollen in diesem Sinn annehmen, daß auf R ein metrischer Wertbegriff u definiert sei.

Wenn nun X bekannt ist, welcher Zustand x aus K realisiert ist, so spricht man von einer *Entscheidung unter Sicherheit.* Es liegt dann für jede Handlung f aus F ihr Resultat f(x) fest, und X wird eine Handlung f wählen, für die der Wert u(f(x)) maximal ist. Eine solche Handlung hat für X dann maximale Nützlichkeit.

Ist X hingegen nicht bekannt, welcher Zustand x aus K realisiert ist, kann aber X den Ereignissen aus $\mathfrak{K}$ subjektive Wahrscheinlichkeiten im Sinn einer Wahrscheinlichkeitsfunktion w auf $\mathfrak{K}$ zuordnen, so spricht man von einer *Entscheidung unter Risiko.* X wird dann nach folgender *Maxime der Maximalisierung des zu erwartenden Werts* handeln:

T4.1–1: *Wähle eine Handlung f aus F, für die der zu erwartende Wert maximal ist.*

Den zu erwartenden Wert setzen wir mit dem *Erwartungswert* von u bei der Handlung f gleich. Ist $K = \{x_1, \ldots, x_n\}$ endlich, so ist der Erwartungswert der Funktion u(f(x)) definiert als

D4.1–1a: $U(f) = \sum_{x \varepsilon K} u(f(x)) \cdot w(\{x\})$,

d. h. als Summe der möglichen Werte von u(f(x)), multipliziert mit der Wahrscheinlichkeit derjenigen Ereignisse, bei denen u(f(x)) diese Werte annimmt. Ist K unendlich, so erhalten wir statt dieser Summe das Lebesguesche Integral

D4.1–1b: $U(f) = \int_K u(f(x))dw$,

wobei wir voraussetzen, daß die Funktionen u(f(x)) für alle $f \varepsilon F$ integrierbar sind.

Mit U(f) haben wir schon einen metrischen Begriff des (subjektiven) Nutzens der Handlungen gewonnen. Mit diesem Begriff können wir auch einen komparativen Nutzensbegriff $f \leq_t g$ (f ist (für X) höchstens so nützlich wie g) definieren durch

D4.1–2: $f \leq_t g := U(f) \leq U(g)$.

Es kann nun sein, daß die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse aus $\mathfrak{K}$ auch von der Wahl der Handlungen abhängen, die X realisiert. Stellen z. B. die Ereignisse von $\mathfrak{K}$ die möglichen Züge des Partners von X in einem Spiel dar, mit denen er auf den Zug f von X antwortet, so werden ihre Wahrscheinlichkeiten von der Wahl von f abhängen. Dann ist jeder Handlung f aus F eine Wahrscheinlichkeitsfunktion w_f auf $\mathfrak{K}$ zuzuordnen, so daß $w_f(A)$ die Wahrscheinlichkeit von A ist, wenn f durchgeführt wird. An die Stelle von D4.1–1 treten dann die Gleichungen

D4.1–3: a) $U(f) = \sum_{x \varepsilon K} u(f(x)) w_f(\{x\})$, bzw.

b) $U(f) = \int_K u(f(x)) dw_f$.

Wenn X erfährt, daß das Ereignis $A \varepsilon \mathfrak{K}$ eingetreten ist, wird er den Erwartungswert des Nutzens von f mit der bedingten Wahrscheinlichkeit $w(\{x\}/A)$, bzw. $w_f(\{x\})/A)$ messen. Ist $U(f, A)$ der Nutzen von f bei Kenntnis von A, so setzen wir also

D4.1–4 a) $U(f,A) = \sum_{x \varepsilon K} u(f(x)) \cdot w_f(\{x\}/A)$ bzw.

b) $U(f,A) = \int_K u(f(x)) dw_{f,A}$.

Dabei setzen wir voraus $w(A) > 0$.

Es gilt dann

T4.1–1 a) $U(f,A) = \dfrac{1}{w_f(A)} \sum_{x \varepsilon A} u(f(x)) \cdot w_f(\{x\})$, bzw.

b) $U(f,A) = \dfrac{1}{w_f(A)} \int_A u(f(x)) dw_f$.

Das ergibt sich sofort aus der Definition D 2.4–1 der bedingten Wahrscheinlichkeit und aus $w_f(\{x\} \cdot A) = w(\{x\})$ für $x \varepsilon A$, und $w_f(\{x\} \cdot A) = 0$ für $\neg x \varepsilon A$. $U(f,A)$ bezeichnen wir auch als durch A *bedingte Nützlichkeit* von f.

Zur Verdeutlichung der Grundgedanken dieses Entscheidungsmodells zwei einfache *Beispiele*. Das erste stammt von L. Savage:

a) X will sich ein Omelett aus 6 Eiern zubereiten und hat zu diesem Zweck bereits 5 Eier in eine Tasse geschlagen, die sich dabei als gut erwiesen haben. X steht nun vor der Wahl, eine der folgenden Handlungen durchzuführen:

f_1: X schlägt das 6. Ei in die Tasse zu den fünf anderen.

f_2: X schlägt das 6. Ei in eine neue Tasse (um zunächst zu sehen, ob es gut ist).

f_3: X wirft das 6. Ei in den Mülleimer.

Die möglichen Zustände aus K sind

x_1: Das 6. Ei ist gut.

x_2: Das 6. Ei ist schlecht.

Die möglichen Resultate sind:

y_1(bei f_1 und x_1): Omelett aus 6 Eiern und keine neue Tasse abzuwaschen.

y_2(f_1 und x_2): 5 gute Eier durch ein schlechtes verdorben; kein Omelett.

y_3(f_2 und x_1): Omelett aus 6 Eiern, aber eine Tasse zusätzlich abzuwaschen.

y_4(f_2 und x_2): Omelett aus 5 Eiern; eine zweite Tasse abzuwaschen.

y_5(f_3 und x_1): Omelett aus 5 Eiern, aber ein gutes Ei verschwendet.

y_6(f_3 und x_2): Omelett aus 5 Eiern und keine zweite Tasse abzuwaschen.

Nehmen wir nun an, es sei $w(\{x_1\}) = {}^2/_3$, also $w(\{x_2\}) = {}^1/_3$, unabhängig von dem gewählten f (die Handlungen haben keinen Einfluß auf die Güte des 6. Eis). Ferner sei $u(y_1) = 5$, $u(y_2) = -5$, $u(y_3) = 4$, $u(y_4) = 3$, $u(y_5) = 0$, $u(y_6) = 2$. Dann ist $U(f_1) = 5 \cdot {}^2/_3 - 5 \cdot {}^1/_3 = {}^5/_3$, $U(f_2) = 4 \cdot {}^2/_3 + 3 \cdot {}^1/_3 = {}^{11}/_3$ und $U(f_3) = 0 \cdot {}^2/_3 + 2 \cdot {}^1/_3 = {}^2/_3$. Das heißt X wird die Handlung f_2 wählen.

2. X hat die Wahl, ein Spiel zu spielen (f_1) oder nicht zu spielen (f_2), bei dem mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2^n}$ der Betrag 2^n bei einem Einsatz e (beides seien DM-Beträge) gewonnen wird ($n = 1, 2, \ldots$). Z. B. werde der Betrag 2^n bezahlt, wenn der n-te Wurf mit einer Münze, für die X annimmt, „Kopf" (x_1) und „Wappen" (x_2) seien gleichwahrscheinlich, das erste Mal „Kopf" ergibt. Das Spiel endet also mit dem ersten Auftreten von „Kopf". Wenn man den subjektiven Wert des Geldbetrages r für X mit r gleichsetzt, so ist $U(f_1) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \cdot (2^i - e) = (1 + 1 + \ldots)$

$-e \cdot (^1/_2 + ^1/_4 + \ldots) = (1 + 1 + \ldots) - e$, also unendlich groß. Dagegen ist $U(f_2) = 0$. Wie hoch also e auch immer sei, X wird f_1 vorziehen.

Das letzte Beispiel macht noch einmal folgendes deutlich: Bei der Berechnung der Nützlichkeit U(f) einer Handlung f spielt allein die *subjektive* Wahrscheinlichkeit der Ereignisse aus $\mathfrak{K}$ (bezogen auf X) eine Rolle, nicht aber eine evtl. für diese Ereignisse definierbare *objektive* Wahrscheinlichkeit. Für das Verhalten von X, für seine Präferenz auf der Menge F der Handlungen, kommt es nicht darauf an, was wahr ist oder was in einem objektiven Sinn wahrscheinlich ist, sondern allein auf das, was X glaubt und als wahrscheinlich ansieht. Ist z. B. die objektive Wahrscheinlichkeit für „Kopf" bei der Münze 0, die subjektive Wahrscheinlichkeit aber $^1/_2$, so handelt X trotzdem rational, wenn er das Spiel mitspielt, obwohl er fast sicher einen Verlust erleiden wird. Rationale Handlungen führen nicht immer zum Erfolg, und erfolgreiche Handlungen sind nicht immer rational; sie sind dann nicht rational, wenn der Erfolg aufgrund der bei der Entscheidung verfügbaren Informationen nicht zu erwarten war.

Bei der Berechnung der Nützlichkeit der Handlungen kommt es auch nicht auf den *objektiven* Wert der möglichen Resultate an, sondern allein auf deren *subjektiven* Wert. Für einen großen Einsatz e, z. B. für e = 256,– DM, ist die Wahrscheinlichkeit, bei dem Spiel diesen Einsatz mindestens herauszubekommen, nur $\sum_{i=8}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{128}$. Das heißt die Wahrscheinlichkeit, bei diesem Spiel zu verlieren, ist sehr groß. Tatsächlich kann man den subjektiven Wert u(r) eines Betrages r nicht immer mit r gleichsetzen: Für große r ist u(r) sehr viel kleiner als r; der Unterschied des subjektiven Werts von 10 000 000,– DM und 10 000 500,– DM ist fast 0, der Wertunterschied zwischen 0 und 500,– DM dagegen sehr beträchtlich. Es ist daher rational, das Spiel für größere Einsätze nicht zu spielen.

Diese Inadäquatheit, die sich bei der Beurteilung der Nützlichkeit des Spiels ergibt, wenn man anstatt des subjektiven Werts u(r) den objektiven Wert r verwendet, hat Daniel Bernoulli schon 1738 in den Anfängen der Wahrscheinlichkeitstheorie diskutiert. Da diese Erörterungen in den Kommentaren der Wissenschaftlichen Akademie von St. Petersburg veröffentlicht wurden, spricht man auch von der *St.-Petersburg-Paradoxie.*

Auf Maximen für *Entscheidungen unter Unsicherheit,* die dann vorliegen, wenn die Bezugsperson X weder weiß, welcher Zustand aus K realisiert ist, noch eine subjektive Wahrscheinlichkeitsbewertung über $\mathfrak{K}$ angeben kann, gehen wir erst im Abschnitt 4.4 ein; zunächst verfolgen wir die Entscheidungen unter Risiko weiter.

4.2 Das Jeffrey-Modell

Im letzten Abschnitt haben wir die Frage diskutiert, wie man zu einem komparativen oder metrischen Begriff der Präferenz von Handlungen aus einer Menge F kommt, wenn eine metrische Wertfunktion u auf der Menge R der möglichen Resultate dieser Handlungen vorgegeben ist und eine Wahrscheinlichkeitsfunktion w auf einem Ereigniskörper $\mathfrak{K}$ über der Menge K der Zustände, von denen diese Resultate abhängen. Umgekehrt kann man auch fragen, ob und ggf. wie man aus einem vorgegebenen komparativen oder metrischen Begriff der Präferenz einer Person Aufschlüsse über ihre Wahrscheinlichkeitsannahmen und Wertvorstellungen gewinnen kann.

Dieser Frage werden wir uns im nächsten Abschnitt zuwenden. Sie läßt sich am besten beantworten, wenn wir Präferenzstrukturen als Wertstrukturen auffassen – dann können wir den Satz T3.4–1 von R. C. Jeffrey benützen – und wenn man das Grundmodell der Entscheidungstheorie, in dem die drei Funktionen u, w und U drei verschiedene Definitionsbereiche haben, so umformt, daß ihnen derselbe Bereich zugrunde liegt. Eine solche Umformung wollen wir nun angeben.

Dabei gehen wir so vor:

1. Wir konstruieren über F einen Ereigniskörper $\mathfrak{F}$. Ist $F = \{f_1,$

$\ldots,f_s\}$ endlich, so können wir z. B. $\mathfrak{F}$ als Potenzmenge $P(F)$ von F, d. h. als Menge aller Teilmengen von F, ansehen.

Wir betrachten also die Tatsache, daß X die Handlung f_i durchführt, als ein Ereignis und fragen auch nach den Ereignissen, daß X eine Handlung aus Teilmengen H von F durchführt.

2. Um ausgehend von den Nützlichkeiten der einzelnen Handlungen f_i auch eine Nützlichkeit von Ereignissen $H \varepsilon \mathfrak{F}$ erklären zu können, definieren wir eine (subjektive) Wahrscheinlichkeit w'' auf $\mathfrak{F}$.

Da die Durchführung der Handlungen aus F in das Belieben von X gestellt ist, ist es nicht in demselben Sinn möglich, ihnen Wahrscheinlichkeiten zuzuordnen wie den Ereignissen aus $\mathfrak{K}$, deren Realisierung nicht, oder doch nicht völlig, in das Belieben von X gestellt ist (andernfalls läge eine Entscheidung unter Sicherheit vor). Was soll also eine Aussage wie $w''(\{f\}) = r$ bedeuten? Wenn wir Handlungen Wahrscheinlichkeiten zuordnen und z. B. sagen „Ich werde morgen wahrscheinlich eine Bergtour unternehmen", so meinen wir damit, daß unsere Entscheidung von Ereignissen abhängt (ob es morgen früh so aussieht, als würde es schön; ob ich bis morgen mit einer dringenden Arbeit fertig werde, etc.), deren Eintreten noch ungewiß ist. Die Wahrscheinlichkeit der Handlung ist dann die Wahrscheinlichkeit der Umstände, unter denen wir uns entschließen, die Handlung durchzuführen. Zu diesen Umständen können insbesondere Teilinformationen über den wahren Zustand x aus K gehören, von dem das Resultat und damit der Nutzen der Handlung abhängt (im Beispiel der Barometerstand morgen früh).

Die Funktion w'' läßt sich also nur von Fall zu Fall bestimmen und kann insbesondere auch mit der Wahrscheinlichkeit w auf $\mathfrak{K}$ zusammenhängen. Richtet sich die Bezugsperson allein nach dem Entscheidungskriterium T4.1–1 (und einem Kriterium $Y(f,x)$, das unter den im Zustand x optimalen Handlungen jeweils eine auszeichnet), so kann man auch setzen $w''(\{f\}) = w(\{x\colon U(f,\{x\}) \text{ ist optimal und } Y(f,x)\})$. Für die Präferenz auf F bleibt w'' ohne Einfluß; für die Präferenzen der Handlungs-

alternativen aus F benötigt man w'' hingegen nach dem Mittelwertprinzip.
3. Aus $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{K}$ bilden wir nun den Ereigniskörper $\mathfrak{K}'$. $\mathfrak{K}'$ sei der kleinste Mengenkörper (bzw. σ-Körper), der alle Ereignisse $A \cdot H$ mit $A \varepsilon \mathfrak{K}$ und $H \varepsilon \mathfrak{F}$ enthält. Das Ereignis, daß A und H beide eintreten, können wir durch das sog. *Cartesische Produkt* dieser beiden Mengen, d.h. durch die Menge $\{(x,y): x \varepsilon A \wedge y \varepsilon H\}$ der Paare von Zuständen darstellen, deren erstes Glied x zu A und deren zweites Glied y zu H gehört. Diese Menge symbolisiert man gewöhnlich durch $A \times H$. Sind $F = \{f_1, \ldots, f_s\}$ und $K = \{x_1, \ldots, x_n\}$ endlich, so ist $K' = \{(x_1, f_1), (x_2, f_1), \ldots, (x_1, f_2), \ldots, (x_n, f_s)\}$ die Zustandsmenge zu $\mathfrak{K}'$, und der Zustand (x_i, f_j) $(i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, s)$ besagt, daß der Zustand x_i vorliegt und die Handlung f_j realisiert wird. $\mathfrak{K}'$ können wir dann wieder als Potenzmenge von K' ansehen. Das Ereignis $A \times H$ ist dann für $A = \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_v}\}$ und $H = \{f_{j_1}, \ldots, f_{j_w}\}$ die Menge $\{(x_i, f_j): i = i_1, \ldots, i_v$ und $j = j_1, \ldots, j_w\}$. In $\mathfrak{K}'$ wird das Ereignis H aus $\mathfrak{F}$ durch $K \times H$ dargestellt und das Ereignis A aus $\mathfrak{K}$ durch $A \times F$; K' durch $K \times F$. Statt „$K \times H$", bzw. „$A \times F$" können wir kurz auch wieder „H", bzw. „A" schreiben und also $A \cdot H$ statt $(A \times F) \cdot (K \times H) = A \times H$.
4. Wir definieren auf $\mathfrak{K}'$ eine subjektive Wahrscheinlichkeit w', so daß gilt:
$w'(A \cdot H) = w''(H) \cdot w_H(A)$.

Wir hatten im vorigen Abschnitt auch den Fall betrachtet, daß die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse A aus $\mathfrak{K}$ von den Handlungen f_j abhängen, die realisiert werden. $w_H(A)$ sei in diesem Sinn die Wahrscheinlichkeit von A, wenn bekannt ist, daß eine der Handlungen aus H realisiert wird. $w_F(A)$ ist dann die Wahrscheinlichkeit von A, wenn nicht bekannt ist, welche Handlung aus F durchgeführt wird. Da nun die $H \varepsilon \mathfrak{F}$ auch Ereignisse sind, können wir $w_H(A)$ als bedingte Wahrscheinlichkeiten auffassen: Es ist ja $w'(H) = w'(K \cdot H) = w''(H)$, also $w_H(A) = \dfrac{w''(H) \cdot w_H(A)}{w''(H)} = \dfrac{w'(A \cdot H)}{w'(H)} = w'(A/H)$. Hängt w nicht von den Handlungen aus F ab, so ist $w'(A/H) = w'(A)$.
5. Wir definieren endlich auf $\mathfrak{K}'$ eine Wertfunktion u' durch die Funktion u auf R, indem wir setzen

$u'(\{(x_i, f_j)\}) = u(f_j(x_i))$,
(bzw. $u'(f,x) = u(f(x))$ für unendliche F oder K) und dann $u'(A \cdot H)$ durch das Mittelwertprinzip C*1 bestimmen.

Wir stellen also die Resultate y aus R, die sämtlich die Werte $f_j(x_i)$ einer Funktion f_j aus F und eines Zustandes x_i aus K sind, durch den Zustand (x_i, f_j) aus K′ dar.

Es gilt nun

$$u'(\{f\}) = u'(K \cdot \{f\}) = \frac{\sum_{x \varepsilon K} u(f(x)) \cdot w'(\{(x,f)\})}{\sum_{x \varepsilon K} w'(\{(x,f)\})} =$$

$$\frac{\sum_{x \varepsilon K} u(f(x)) \cdot w_f(\{x\})}{\sum_{x \varepsilon K} w_f(\{x\})}, \text{ also}$$

T4.2–1: $u'(\{f\}) = U(f)$.

Entsprechend findet man

T4.2–2: $u'(A \cdot \{f\}) = U(f, A)$.

D. h. die auf $\mathfrak{K}'$ vermittels u definierte Funktion u′ stellt die Nützlichkeiten der Handlungen dar, und $\langle K', \mathfrak{K}', w', u' \rangle$ ist eine metrische Wertstruktur. Damit haben wir die Nützlichkeiten als Werte dargestellt.

T4.2–1 zeigt, daß $u'(A \cdot \{f\})$ nicht von w″ abhängt; d. h. die Einführung der im Grundmodell nicht enthaltenen Handlungswahrscheinlichkeit w″ bleibt ohne Einfluß auf die Nützlichkeiten der einzelnen Handlungen aus F, wie wir das oben unter (2) betont hatten. Sie bleibt aber natürlich nicht ohne Einfluß auf die Nützlichkeiten von Handlungsalternativen.

Es gilt

$$u'(A \cdot H) = \frac{1}{w'(A \cdot H)} \sum_{f \varepsilon H} U(f, A) \cdot w'(A \cdot \{f\})$$

und wir können setzen

D4.2–1: $U(H, A) := u'(A \cdot H)$.

U(H, A) stellt dann die Nützlichkeit der Handlung (bzw. der Handlungsalternative) H bei Kenntnis von A dar. Wir bezeichnen U(H, A) auch wieder als die durch A *bedingte Nützlichkeit* von H.

Bei der Rekonstruktion des entscheidungstheoretischen Grundmodells als Wertstruktur wird jeder Zustand (x_i, f_j) als eigenes Resultat aufgefaßt. Das heißt die Werte werden weniger gewissen Resultaten zugeordnet, die durch verschiedene Handlungen unter verschiedenen Bedingungen realisiert werden können, als der Verbindung von Handlungen und Zuständen. Auch im Grundmodell kann freilich gelten $f(x) \neq g(y)$ für alle $f \neq g$ oder $x \neq y$, aber in vielen Fällen ist es doch adäquater, nicht die Zustände (x_i, f_j) zu bewerten, sondern Handlungsresultate. Man kann dann eine Relation r einführen, die auf K' definiert ist und für die gilt: $r(\alpha, \alpha)$, $r(\alpha, \beta) \supset r(\beta, \alpha)$ und $r(\alpha, \beta) \wedge r(\beta, \gamma) \supset r(\alpha, \gamma)$, wo α, β, γ Zustände aus K' sind (d. h. r soll eine *Äquivalenzrelation* sein) und für die $r((x_i, f_j), (x_i', f_j'))$ besagt, daß die Handlung f_j beim Zustand x_i dasselbe Resultat hat wie f_j' beim Zustand x_i'.

Man kann dann die *Äquivalenzklassen* zu r, d. h. die größten Mengen von Zuständen von K', die untereinander alle in der Relation r stehen, als Resultate ansehen, und wird dann u' so definieren, daß gilt

T4.2–3: $r(\alpha, \beta) \supset u'(\alpha) = u'(\beta)$;

d. h. gleiche Resultate haben gleiche Werte.

4.3 Metrisierungsprobleme

Wir kommen nun auf die Frage zurück, ob und ggf. in welchen Grenzen man aus den Präferenzen einer Person Aufschlüsse über ihre Wahrscheinlichkeitsannahmen und Wertvorstellungen gewinnen kann.

Bei dieser Fragestellung sind mehrere Fälle zu unterscheiden:

1. Es ist eine komparative Präferenzstruktur $\langle K', \mathfrak{K}', \leq_t \rangle$ gegeben. Gefragt wird nach Bedingungen, unter denen es Funktionen u' und w' auf $\mathfrak{K}'$ gibt, so daß $\langle K', \mathfrak{K}', u', w' \rangle$ eine metrische Wertstruktur ist, die zu $\langle K', \mathfrak{K}', \leq_t \rangle$ gehört, d. h. für die gilt $A \leq_t B \equiv u'(A) \leq u'(B)$ für alle A, B aus $\mathfrak{K}'$.

Diese Frage wird durch den Satz T3.4–1 von Jeffrey beantwortet. Da aber in der Präferenzstruktur $\langle K, \mathfrak{K}', \leq_t \rangle$ schon die Wertstruktur enthalten ist – es gilt ja nach den Ausführungen des letzten Abschnitts $f(x) \leq_s g(y) \equiv u(f(x)) \leq u(g(y)) \equiv u'(\{x,f\}) \leq u'(\{y,g\}) \equiv \{(x,f)\} \leq_t \{(y,g)\}$ –, so daß $\leq_t$ nicht nur eine Präferenz für die Handlungen aus F, bzw. $\mathfrak{F}$ darstellt, ist zunächst die folgende Frage von größerem Interesse:

2. Es ist eine komparative Präferenzstruktur $\langle F, \mathfrak{F}, \leq_t \rangle$ gegeben. Unter welchen Bedingungen gibt es zu einem vorgegebenen Ereigniskörper $\mathfrak{K}$ über K eine metrische Wertstruktur $\langle K', \mathfrak{K}', u', w' \rangle$, die auf $\mathfrak{F}$ mit $\leq_t$ übereinstimmt, d. h. für die gilt $H \leq_t G \equiv u'(H) \leq u'(G)$? Dabei seien K' und $\mathfrak{K}'$ aus K und F, bzw. aus $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{F}$ wie in 4.2 gebildet.

Ist auf K keine Relation r definiert, für die T4.2–3 gelten soll, so gibt es immer eine solche metrische Wertstruktur. Wir haben uns in 3.4 überlegt, daß jede komparative Wertstruktur metrisierbar ist. Zu $\langle F, \mathfrak{F}, \leq_t \rangle$ gibt es also eine Struktur $\langle F, \mathfrak{F}, u'', w'' \rangle$ mit $u''(H) \leq u''(G) \equiv H \leq_t G$ für alle H, G aus $\mathfrak{F}$. Setzen wir nun $w'(\{(x,f)\}) = w(\{x\}) \cdot w''(\{f\})$, $w(\{x\}) = \frac{1}{n}$ – wir nehmen wieder an, $F = \{f_1, \ldots, f_s\}$ und $K = \{x_1, \ldots, x_n\}$ seien endlich – und $u'(\{(x,f)\}) = u''(\{f\})$, so gilt

$$u'(H) = u'(K \cdot H) = \frac{\sum\limits_{f \varepsilon H} \sum\limits_{x \varepsilon K} u'(\{(x,f)\}) \cdot w'(\{(x,f)\})}{\sum\limits_{f \varepsilon H} \sum\limits_{x \varepsilon K} w'(\{(x,f)\})}$$

$$= \frac{1}{w''(H)} \sum_{f \varepsilon H} u''(\{f\}) \cdot w''(\{f\}) = u''(H),$$ d. h. u' stimmt auf $\mathfrak{F}$ mit u'' überein, d. h. $u'(H) \leq u'(G) \equiv u''(H) \leq u''(G)$.

Dabei nimmt man also an, daß die Zustände $x \varepsilon K$ von den Handlungen $f \varepsilon H$ unabhängig sind, daß die x gleichwahrscheinlich sind und der Wert von (x, f) nur von f abhängt.

Das folgende Beispiel zeigt ferner, daß keine Eindeutigkeit in der Ordnung der Werte und Wahrscheinlichkeiten besteht und daß sich die Wahrscheinlichkeitsordnung insbesondere auch umkehren läßt, wenn man gleichzeitig die Wertordnung umkehrt:

Es sei $F = \{f_1, f_2\}$, $w''(\{f_1\}) = {}^1\!/_2 = w''(\{f_2\})$, $u''(\{f_1\}) = 2$, $u''(\{f_2\}) = -2$. Es sei ferner $K = \{x_1, x_2\}$ und $R = \{y_1, y_2\}$ mit $f_1(x_1) = y_1$, $f_1(x_2) = y_2$, $f_2(x_1) = y_2$, $f_2(x_2) = y_1$. Man kann nun sowohl setzen

$w'(\{x_1\}) = {}^2/_3$, $w'(\{x_2\}) = {}^1/_3$, $u'(\{y_1\}) = 6$, $u'(\{y_2\}) = -6$, als auch $w'(\{x_1\}) = {}^1/_3$, $w'(\{x_2\}) = {}^2/_3$, $u'(\{y_1\}) = -6$, $u'(\{y_2\}) = 6$. In beiden Fällen erhält man $u'(\{f_1\}) = 2$ und $u'(\{f_2\}) = -2$.

Die Präferenzordnung $\leq_t$ auf $\mathfrak{F}$ erlaubt es also nicht, auf die Wahrscheinlichkeitsordnung $\leq_p$ und auf die Wertordnung $\leq_s$ zu schließen.

Ist dagegen auf K eine Relation r definiert, für die T4.2–3 gelten soll, so ergeben sich Zusatzbedingungen für u', die nicht immer erfüllbar sind. Stehen z. B. alle Zustände aus K′ zueinander in der Relation r, soll also gelten $u'(\{(x,f)\}) = u'(\{(y,g)\})$ für alle $x, y \varepsilon K$ und $f, g \varepsilon F$, so ist diese Bedingung nicht erfüllbar, wenn es F, G aus $\mathfrak{F}$ gibt mit $F <_t G$.

3. Sind neben der komparativen Präferenzordnung $\langle F, \mathfrak{F}, \leq_t \rangle$ auch die Wahrscheinlichkeitsannahmen der Bezugsperson X in Gestalt eines metrischen Wahrscheinlichkeitsbegriffs w auf $\mathfrak{K}$ gegeben, so wird dadurch die komparative Wertordnung $\leq_s$ auf R im allgemeinen ebenfalls nicht eindeutig festgelegt. Ist z. B. $F = \{f_1, f_2\}$, $K = \{x_1, x_2\}$ und $f_1(x_i) \neq f_2(x_k)$ für alle i, $k = 1,2$, so gilt $\{f_1\} <_t \{f_2\}$, falls $f_1(x_i) <_s f_2(x_k)$ ist für alle i, k – unabhängig davon, wie w aussieht und ob gilt $f_1(x_1) \gtreqless_s f_1(x_2)$ oder $f_2(x_1) \gtreqless_s f_2(x_2)$. Ist dagegen $f_1(x_1) = f_2(x_2) = y_1$ und $f_1(x_2) = f_2(x_1) = y_2$, so muß für $f_1 =_t f_2$ gelten $w(\{x_1\}) = w(\{x_2\})$ oder $u(y_1) = u(y_2)$, für $f_1 <_t f_2$ $w(\{x_1\}) < w(\{x_2\})$ und $u(y_1) > u(y_2)$ oder $w(\{x_1\}) > w(\{x_2\})$ und $u(y_1) < u(y_2)$, und entsprechend für $f_1 >_t f_2$. In diesem Fall ergibt sich also aus den Wahrscheinlichkeiten die Wertordnung der Resultate $y_1 =_s y_2$, $y_1 <_s y_2$ oder $y_1 >_s y_2$.

Obwohl also oft die Wahrscheinlichkeitsannahmen von X zusammen mit den Präferenzen die subjektive Wertordnung festlegen, gilt das keineswegs immer.

4. Wenn man im allgemeinen aus den Präferenzen einer Person X ohne Kenntnis ihrer Wahrscheinlichkeitsannahmen nicht auf ihre Wertvorstellungen schließen kann, so stellt sich die Frage, ob man diesen Schluß nicht doch vollziehen kann, wenn man mehr über die Präferenzen von X weiß: Wenn man nicht nur weiß, daß X gewisse Handlungen aus $\mathfrak{F}$ anderen vorzieht, *solange X nicht weiß, welche Ereignisse aus* $\mathfrak{K}$ eintreten, sondern

wenn man auch weiß, welche Handlungen aus $\mathfrak{F}$ X bevorzugt, *wenn* X *weiß, daß ein Ereignis* A *aus* $\mathfrak{K}$ *eintritt.*

Nachdem wir in D4.2–1 die Nützlichkeit U(H,A) von H bei Kenntnis von A mit $u'(A \cdot H)$ gleichgesetzt haben, besagt das aber, daß wir die Präferenzen von X nicht nur auf F, sondern auf $\mathfrak{K}'$ kennen. Damit kommen wir zu der Fragestellung unter (1) zurück und können nun sagen: Wenn die bedingten Präferenzen von X bekannt sind, dann liegen auch die komparativen Wertordnungen von X fest.

Aus dem Theorem T3.4–1b ergibt sich ferner für bedingte komparative Präferenzen $\langle K', \mathfrak{K}', \leq_t \rangle$, die der Bedingung (a) dieses Theorems genügen, daß der metrische Wertbegriff u' für festes w (d. h. für $c = 0$ und $d = 1$) bis auf lineare Transformationen $a \cdot u(A) + b$ mit $a > 0$ festliegen, d. h. bis auf die Wahl des Nullpunkts und der Einheit des Maßsystems.

4.4 Entscheidungen unter Unsicherheit

Nach der vorangegangenen Diskussion der Entscheidungen unter Risiko kehren wir zum Grundmodell der Entscheidungssituation aus 4.1 zurück und fragen, welche Entscheidungskriterien sich angeben lassen, wenn die Bezugsperson X den Ereignissen aus $\mathfrak{K}$ keine Wahrscheinlichkeiten zuordnen kann.

Es bieten sich dann z. B. folgende Regeln an:

α) Wähle eine Handlung f aus F, für die der mögliche Nutzen, d. h. das Maximum der Werte $u(f(x))$ für alle $x \varepsilon K$ maximal ist. Sind $F = \{f_1, \ldots, f_s\}$ und $K = \{x_1, \ldots, x_n\}$ wieder endlich, so schreiben wir u_{ji} für $u(f_j(x_i))$ $(i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, s)$. Die Bedingung für die Wahl von f_j lautet dann

$\max\limits_i(u_{ji}) \geq \max\limits_i(u_{ki})$ für alle $k = 1, \ldots, s$.

β) Wähle eine Handlung f_j, für die der mögliche Schaden für alle i minimal ist:

$\min\limits_i(u_{ji}) \geq \min\limits_i(u_{ki})$ für alle k.

Diese beiden Regeln haben den Nachteil, daß (a) die Möglichkeit eines großen Schadens nicht ausschließt, während (b) die Möglichkeit eines großen Nutzens nicht sicherstellt. Die folgenden Regeln sind daher angemessener:

γ) Wähle aus den Handlungen nach (α) eine nach (β) aus:

Für alle $k \neq j$ soll also gelten $\max_i u_{ji} > \max_i u_{ki}$, oder $\max_i u_{ji} = \max_i u_{ki}$ und $\min_i u_{ji} \geq \min_i u_{ki}$.

δ) Wähle aus den Handlungen nach (β) eine nach (α) aus:

Für alle $k \neq j$ soll also gelten $\min_i u_{ji} > \min_i u_{ki}$, oder $\min_i u_{ji} = \min_i u_{ki}$ und $\max_i u_{ji} \geq \max_i u_{ki}$.

Diese beiden Regeln grenzen im Bereich der Handlungen mit dem größten möglichen Nutzen (bzw. dem kleinsten möglichen Schaden) die vorteilhaftesten aus.

Da es aber auch nicht immer sinnvoll ist, primär auf einen maximalen möglichen Nutzen, bzw. einen minimalen möglichen Schaden abzuzielen, kann auch die folgende Regel gute Dienste tun:

ε) Wähle eine Handlung f_j, für die der größte mögliche Mißgriff, d. h. das Maximum der Differenzen $\max_k(u_{ki}) - u_{ji}$ für alle i minimal ist:

$\max_i (\max_k(u_{ki}) - u_{ji}) \leq \max_i (\max_k(u_{ki}) - u_{li})$ für alle l.

Die Regel:

ζ) Wähle eine Handlung f_j, für die das Mittel der u_{ji} maximal ist: $\sum_i u_{ji} \geq \sum_i u_{ki}$ für alle k,

erhält man nach der Maxime der Maximalisierung des erwarteten Nutzens, wenn man annimmt, daß alle $x \varepsilon K$ gleichwahrscheinlich sind.

Welche dieser Regeln man akzeptiert, hängt erstens davon ab, wie wichtig es in der gegebenen Situation ist, Nutzen zu erreichen, bzw. Schaden zu vermeiden. Zweitens wird man, selbst wenn sich keine metrische Wahrscheinlichkeit auf $\mathfrak{K}$ angeben läßt, doch meist gewisse Vorstellungen über die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse aus $\mathfrak{K}$ haben, und aufgrund dieser Vorstellungen wird man dann oft eine Auswahl unter den Regeln (α) bis (ζ) oder vergleichbaren Regeln treffen können.

In der mathematischen Statistik werden, mit entsprechendem mathematischen Aufwand, auch für den Fall der Entscheidung unter Unsicherheit sehr viel detailliertere Kriterien angegeben.[1]

[1] Vgl. dazu z. B. R. D. Luce und H. Raiffa [57].

5. Normen und Werte

5.1 Normative Präferenzen

Nachdem wir in den vorausgegangenen Kapiteln die Normlogik einerseits und die Logik der Werte und Entscheidungen andererseits getrennt behandelt haben, wollen wir in diesem letzten Kapitel nach den Zusammenhängen von Normen mit Werten und Entscheidungen fragen. Speziell interessieren wir uns dabei für die Frage, ob man durch Wertstrukturen Normensysteme definieren kann und umgekehrt. Die Frage spielt z. B. in der Auseinandersetzung zwischen Wert- und Normethik eine wichtige Rolle.

Während wir *komparative* und *metrische* Wertbegriffe diskutiert haben, haben wir für Normen bisher nur einen *klassifikatorischen* Begriff angegeben, mit dem wir die Handlungen in gebotene und nicht gebotene eingeteilt haben, und die letzteren in indifferente und verbotene. Die erste Frage ist also, ob man nicht auch einen komparativen Normbegriff einführen kann (und mit seiner Hilfe evtl. auch einen metrischen Normbegriff); denn ein komparativer Normbegriff läßt sich ersichtlich besser mit einem komparativen Wertbegriff vergleichen als ein klassifikatorischer.

Wenn man eine komparative Relation $A \leq_n B$ des Gebotenseins einführt – A ist höchstens so sehr geboten wie B –, so möchte man damit die Handlungen in Form einer Reihe ordnen, die man z. B. so veranschaulichen kann

verbotene gebotene

Handlungen.[1]

indifferente

[1] Da bei einer solchen Reihe verschiedene, aber im gleichen Maße gebotene Handlungen denselben Platz einnehmen können, spricht man auch von einer *Quasireihe*. Vgl. dazu Kutschera [72], 1.3.

Die indifferenten Handlungen sind nach D1.2–3 die weder ge- noch verbotenen Handlungen. Die indifferenten Handlungen wird man gleich einstufen, d. h. man wird fordern $I(A) \wedge I(B) \supset A =_n B$. Da nach D1.2–3 gilt $I(A) \supset I(\neg A)$, könnte man mit der komparativen Relation $\leq_n$ den klassifikatorischen Begriff O definieren durch:

D5.1–1: $O(A) := \neg A <_n A$.

Damit erhält man $V(A) \equiv O(\neg A) \equiv A <_n \neg A$ und $I(A) \equiv \neg A =_n A$. Es wären dann für die Relation $\leq_n$ Axiome anzugeben, aus denen mit D5.1–1 genau diejenigen Normsätze folgen, die sich im System D der deontischen Logik beweisen lassen.

Ein solches Vorgehen scheitert jedoch daran, daß nach T1.2–5 für $A \rightarrow \neg B$ gilt $O(A) \supset O(\neg B)$. D. h. es ist nicht möglich, daß zwei miteinander logisch unverträgliche Handlungen beide geboten sind. Betrachten wir z. B. den wichtigen Fall einer Entscheidungssituation, in der einer Person X genau eine Handlung aus der Menge $F = \{f_1, \ldots, f_s\}$ offensteht, so kann allenfalls *eine* dieser Handlungen f_j $(j = 1, \ldots, s)$ geboten sein, und die übrigen sind dann verboten. D. h. eine komparative Ordnung der Handlungen aus F kann nicht mehrere Handlungen als geboten im Sinne von D5.1–1 auszeichnen, wobei einige davon in gleichem oder höherem Maße geboten sind als die anderen; der klassifikatorische Begriff des Gebotenseins ist dazu zu exklusiv.

Wenn man also den klassifikatorischen Begriff O auf der Grundlage einer komparativen Relation $A \leq_n B$ einführen will, so kann man diese Relation nicht lesen als „Die Handlung A ist höchstens so sehr geboten wie die Handlung B“, sondern muß sie z. B. lesen als „Die Handlung A ist der Handlung B nicht vorzuziehen“, d. h. man muß sie im Sinn einer *normativen Präferenzrelation* deuten. Während die im Abschnitt 4.1 diskutierte *subjektive Präferenzrelation* $\leq_t$ besagt, welche Handlungen von einer Person (oder einer Gruppe von Personen) anderen Handlungen aufgrund ihrer subjektiven Werthaltungen *vorgezogen werden,* besagt die normative Präferenzrelation $\leq_n$, was im Sinne eines intersubjektiven Systems von Normen oder Werten *vorzuziehen ist.*

Derartige normative Präferenzen kommen z. B. vor, wenn gefordert wird, diejenige von zwei möglichen Handlungen vorzuziehen, die das höhere Rechtsgut schützt; wenn also nach dem Prinzip der Güterabwägung eine Rangordnung der Handlungen festgelegt wird.

Von einer solchen normativen Präferenzordnung muß man den Fall unterscheiden, daß für eine Handlung mehrere klassifikatorische Normensysteme einschlägig sind, z. B. ethische und juristische, politische und religiöse, und daß eine Rangordnung zwischen diesen Normensystemen festgelegt wird mit der Maßgabe, daß, falls die Normen verschiedener Systeme einander widersprechen, jeweils die Norm des Systems mit dem höchsten Rang gelten soll. Solche Rangordnungen werden z. B. festgelegt durch Prinzipien wie „Bundesrecht bricht Landesrecht“ oder „Man soll Gott mehr gehorchen als den Menschen“ (d. h. „Göttliche Gebote setzen menschliche Gebote außer Kraft“).

Eine normative Präferenzrelation $\leq_n$ kann man als einen komparativen Begriff auf einer Menge F von Handlungen ansehen, so wie auch die subjektive Präferenzrelation $\leq_t$ im Grundmodell der Entscheidungstheorie aufgefaßt wird. Im Sinn einer einheitlichen Darstellung benützen wir dabei anstelle der in der deontischen Logik üblichen Darstellung von Handlungen durch *Sätze* wieder ihre Darstellung durch Mengen.

Wenn wir von einem solchen normativen Präferenzbegriff $\leq_n$ auf F ausgehen, dann können wir für die Handlungen aus einem Ereigniskörper $\mathfrak{F}$ über F einen klassifikatorischen Begriff des Gebotenseins durch folgende Bedingungen festlegen:

D5.1–2: $O(A) := A = F \vee \bigvee f \bigwedge g(g \leq_n f) \wedge \{f: \bigwedge g(g \leq_n f)\} \subset A.$

Das heißt A ist geboten, wenn A die Tautologie F ist – das muß nach dem Axiom A1 des Systems D aus 1.8 gelten[2] – oder wenn es bezüglich $\leq_n$ optimale Handlungen f aus F gibt und die Klasse dieser optimalen Handlungen in A enthalten ist. Gilt für alle f und g aus F $f =_n g$, so ist nur F geboten, und ebenso, wenn es zu jedem f aus F ein g aus F gibt mit $f <_n g$. Andern-

[2] In einem System der deontischen Logik wie D′ (vgl. die Schlußbemerkung zu 1.8) wäre diese erste Bedingung entbehrlich.

falls ist es geboten, eine der optimalen Handlungen aus F durchzuführen.

Mit D5.1–2 definiert eine normative Präferenzrelation $\leq_n$ auf F ein Normensystem über $\mathfrak{F}$. (Man kann natürlich von den Normsätzen über Handlungen als Mengen wieder übergehen zu Normsätzen über Handlungen, die im Sinn der Ausführungen des 1. Kapitels durch Sätze dargestellt werden.)

Wir müssen uns nun noch davon überzeugen, daß der Begriff O(A), wie er durch D5.1–2 charakterisiert wird, die Eigenschaften eines klassifikatorischen Normbegriffs hat, wie wir sie im 1. Kapitel durch die Axiome von D festgelegt haben. Wir beweisen also den Satz:

T5.1–1: Der durch D5.1–2 festgelegte Begriff O erfüllt für jede normative Präferenzrelation $\leq_n$ die Axiome von D.

Beweis: Wir zeigen, daß O die Axiome A'1 bis A'4 des Systems D' aus 1.8 erfüllt, das bei Hinzunahme des Axioms A1 von D: O(T) mit D äquivalent ist. A1 gilt aber in der Form O(F) trivialerweise nach D5.1–2. In der klassenlogischen Darstellung nehmen die Axiome von D' nun folgende Form an:

A'1: $A \subset B \supset (O(A) \supset O(B))$ – auch das ist nach D5.1–2 trivial.

A'2: $O(A) \supset \neg O(\bar{A})$ – ist $A = F$, so ist $\bar{A} = \Lambda$, so daß $\bar{A}$ eine nichtleere Menge $\{f\colon \Lambda g(g \leq_n f)\}$ nicht enthalten kann. Ist $A \neq F$ und O(A), so ist also auch $A \neq \Lambda$, also $\bar{A} \neq F$, und wenn die nichtleere Menge $\{f\colon \Lambda g(g \leq_n f)\}$ dann in A enthalten ist, ist sie nicht in $\bar{A}$ enthalten.

A'3: $O(A) \wedge O(B) \supset O(A \cdot B)$ – Ist $A = F$, so $A \cdot B = B$; ist $B = F$, so $A \cdot B = A$; ist $A \neq F$ und $B \neq F$, so gilt für $O(A) \wedge O(B)$, daß die nichtleere Menge $\{f\colon \Lambda g(g \leq_n f)\}$ sowohl in A wie in B enthalten ist, sie ist also auch in $A \cdot B$ enthalten.

A'4: Gilt $O(A_i)$ für alle $i = 1, 2, \ldots$, so gilt auch $O(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i)$ – hier argumentiert man wie für A'3.

In D5.1–2 haben wir zur Definition des Begriffs O auf $\mathfrak{F}$ nur die Präferenzrelation $\leq_n$ auf F benützt, wie das in Anlehnung an das Grundmodell der Entscheidungstheorie naheliegt. Man kann aber diese Relation auch durch eine komparative Wertstruktur $\langle F, \mathfrak{F}, \leq_n \rangle$ im Sinne von 3.3 charakterisieren – wir sprechen dann von einer *komparativen normativen Präferenzstruktur* – und sie so auf einem Ereigniskörper $\mathfrak{F}$ über F definieren. An die Stelle von D5.1–2 kann dann die Bedingung treten:

D5.1–3: $O(A) := A = F \vee \bigvee B(\neg N(B) \wedge \bigwedge C(C \leq_n B) \wedge$
$\bigwedge D(D =_n B \supset N(D-B)) \wedge B \subset A)$.

Dabei sind A, B, C Elemente von $\mathfrak{F}$, und N(A) ist der in D3.3–1 definierte Begriff der Nullmenge, der nach T3.3–1 besagt, daß A die Wahrscheinlichkeit 0 hat. Nach D5.1–3 besagt also O(A), daß A tautologisch ist oder daß es eine optimale Handlung B mit nichtverschwindender Wahrscheinlichkeit gibt, in der alle optimalen Handlungen D bis auf praktisch unmögliche Teilhandlungen enthalten sind, und daß B in A enthalten ist.

In Analogie zu T5.1–1 gilt dann der Satz

T5.1–2: Der durch D5.1–3 festgelegte Begriff O erfüllt für jede normative Präferenzstruktur $\langle F, \mathfrak{F}, \leq_n \rangle$ die Axiome von D.

Beweis: A1, d. h. O(F) gilt nach D5.1–3 trivialerweise; ebenso A′1. A′2 beweist man wie in T5.1–1, wobei nun anstelle der Eigenschaft, nichtleer zu sein, die Eigenschaft tritt, keine Nullmenge zu sein. Betrachtet man ferner, daß eine Menge wie B in D5.1–3, falls sie existiert, eindeutig ist bis auf Nullmengen (sind also B und B′ solche Mengen, so gilt $N(B-B \cap B')$ und $N(B'-B \cap B')$), so kann man auch A′3 und A′4 wie in T5.1–1 beweisen.

Ist $\mathfrak{F}$ die Potenzmenge von F, so gilt nicht allgemein, daß die nach D5.1–2 gebotenen Handlungen genau diejenigen Handlungen sind, die nach D5.1–3 geboten sind. Ist die Menge $E = \{f : \bigwedge g(\{g\} \leq_n \{f\})\}$ nicht leer, so sind die nach D5.1–2 gebotenen Handlungen genau die Handlungen A mit $E \subset A$; nach dem Mittelwertprinzip gilt $E =_n \{f\}$ und $C \leq_n \{f\}$ für $f \varepsilon E$ und alle $C \varepsilon \mathfrak{F}$; ist nun $\neg N(E)$, so gilt für $D =_n E$ $N(D-E)$, also O(A) nach D5.1–3. Wir können also nur sagen: Die nach D5.1–2 gebotenen Handlungen sind auch nach D5.1–3 geboten, falls nicht gilt $E \neq \Lambda$ und zugleich N(E). Gibt es umgekehrt ein B mit $\neg N(B)$ und $C \leq_n B$ für alle $C \varepsilon \mathfrak{F}$, so muß für $\neg N(E)$ gelten $E =_n B$; gilt also $\bigwedge D(D =_n B \supset N(D-B))$ und $B \subset A$, so gilt $N(E-B)$, d. h. $N(E-A)$. Wir können also sagen: Die nach D5.1–3 gebotenen Handlungen sind bis auf Nullereignisse die nach D5.1–2 gebotenen Handlungen, falls nicht gilt

$\bigvee B(\neg N(B) \wedge \bigwedge C(C \leq_n B) \wedge \bigwedge D(D =_n B \supset N(D-B)))$ und zugleich $N(E)$.

Für D5.1–3 ist aber zu beachten, daß eine Handlung A geboten sein kann, die bezüglich $\leq_n$ schlechter eingestuft ist als eine nicht gebotene Handlung B: Gilt $C <_n B <_n A$, so kann nach dem Mittelwertprinzip gelten $C+A <_n B$, mit $O(A)$ gilt nach D5.1–3 aber auch $O(A+C)$. Es ist also noch einmal zu betonen, daß man einen Satz „$A \leq_n B$" nicht deuten kann als „A ist höchstens so sehr geboten wie B". Es gilt daher auch nicht das Prinzip (*) $O(A) \wedge A \leq_n B \supset O(B)$. Die Beziehungen zwischen dem komparativen Präferenzbegriff und dem klassifikatorischen Normenbegriff sind also viel lockerer, als es z. B. die Beziehungen zwischen den klassifikatorischen und komparativen Begriffen der Härte, der Masse, der Temperatur etc. sind, für die sämtlich eine Relation wie (*) gilt. Der klassifikatorische Begriff des Gebotenseins wird vielmehr durch die Maxime definiert: „Wähle eine Handlung mit maximaler Nützlichkeit", oder: „Es ist geboten, eine der bezüglich der Präferenzrelation $\leq_n$ optimalen Handlungen durchzuführen".

Im Grundmodell der Entscheidungstheorie haben wir nach D4.1–4 auch bedingte Nützlichkeiten $U(F,B)$ von Handlungen definiert. Damit können wir – nun im normativen Sinn – auch bedingte komparative Präferenzrelationen definieren durch

D5.1–4: $f \leq_{n,B} g := U(f,B) \leq U(g,B)$.

In Analogie zu D5.1–2 können wir dann auch *bedingte Gebote* definieren durch

D5.1–5: $O_B(A) := A = F \vee \bigvee f \bigwedge g(g \leq_{n,B} f) \wedge$
$\{f : \bigwedge g(g \leq_{n,B} f)\} \subset A$.

$O_B(A)$ drückt also aus, daß A unter der Bedingung B geboten ist, und das soll der Fall sein, wenn A tautologisch ist, oder wenn es eine nichtleere Menge von Handlungen gibt, die unter der Bedingung B optimal sind, und diese Menge in A enthalten ist.

In der Darstellung der Präferenzen als Werte in 4.2 haben wir in D4.2–1 noch allgemeinere bedingte Präferenzen $U(H,B) = u'(B \cdot H)$ definiert. Wenn wir nun die normative Präferenzrelation $\leq_n$ im Sinne von 4.2 nicht nur auf die Ereignisse aus $\mathfrak{H}$, sondern auf alle Ereignisse des dort beschriebenen Mengenkörpers $\mathfrak{K}'$ anwenden, so sind die Argumente A in D5.1–3 als Durchschnitte $B \cdot H$ aufzufassen, wobei B ein Ereignis aus $\mathfrak{K}$ und H eine Handlung aus $\mathfrak{H}$ ist. Dann können wir auch sagen, daß das Gebot, eine Handlung aus H zu vollziehen, gilt, wenn im Sinne von D5.1–3 gilt $O(K \cdot H)$, und daß das bedingte Gebot gilt, bei Kenntnis des Ereignisses B aus $\mathfrak{K}$ eine Handlung aus H zu vollziehen, wenn im Sinne von D5.1–3 gilt $O(B \cdot H)$.

Es ist offensichtlich, daß die bedingten Gebote $O_B(A)$ nach D5.1–5 sich nicht in der Gestalt $B \supset O(A)$ ausdrücken lassen, in der wir im Abschnitt 1.3 bedingte Gebote formuliert hatten. Denn während $B \supset O(A)$ wahr ist, wenn B falsch oder $O(A)$ wahr ist, gilt das für $O_B(A)$ nicht.

$O_B(A)$ beinhaltet, daß A nach dem Prinzip der Realisierung des maximalen Werts *bei Kenntnis von* B geboten ist, bezieht also gegenüber $B \supset O(A)$ die Informationen der handelnden Person ein. Auch $O_B(A)$ ist aber ein sinnvoller und brauchbarer Begriff bedingter Gebote.

An diesem Beispiel zeigt sich, daß die Einschränkung des Vergleichs von klassifikatorischen und komparativen Normen auf den Fall von Entscheidungssituationen so wesentlich nicht ist. Diese Einschränkung empfiehlt sich, wenn man die normativen Präferenzstrukturen als Wertstrukturen auffassen will. Jeder Fall, in dem Normen relevant werden, ist ja auch eine Entscheidungssituation. Auf die bedingten Normen im Sinne von 1.3, die allgemeine Prinzipien darstellen, kann man bei der Betrachtung konkreter Entscheidungssituationen auch ganz verzichten, denn aufgrund der gegebenen Umstände gelten sie entweder unbedingt, oder sie gelten nicht.

Während man im Sinn von D5.1–2, bzw. D5.1–3 Normensysteme durch komparative Präferenzstrukturen charakterisieren kann, kann man umgekehrt Präferenzstrukturen natürlich nicht durch Normensysteme festlegen, wenn man von dem trivialen Fall absieht, daß man setzt: $O(A) \wedge O(B) \supset A =_n B$, $V(A) \wedge V(B) \supset A =_n B$, $I(A) \wedge I(B) \supset A =_n B$ und $O(A) \wedge$

$I(B) \supset B <_n A$ und $I(A) \wedge V(B) \supset B <_n A$ für alle A, B aus $\mathfrak{F}$; die Relation $\leq_n$ teilt dann aber ebenso wie die Begriffe O, V und I die Handlungen nur in drei Klassen ein und leistet so nicht mehr als diese. Durch den Begriff O auf F werden nach D5.1–2 nur die bezüglich des komparativen Begriffes $\leq_n$ maximalen Elemente aus F ausgezeichnet; die Einstufung der übrigen Elemente von F nach $\leq_n$ bleibt völlig offen. Allgemein sind klassifikatorische Begriffe sehr viel ausdrucksärmer als komparative, und man kann auch mit den klassifikatorischen Begriffen wie „schwer", „warm", „hell" nicht zugehörige komparative Begriffe wie „schwerer als", „wärmer als", „heller als" bestimmen.

5.2 Präferenzen und Werte

Nachdem wir einen Zusammenhang zwischen dem klassifikatorischen Begriff des Gebotenseins, wie er im 1. Kapitel behandelt wurde, und dem komparativen Begriff einer normativen Präferenz hergestellt haben, genügt es zur Beantwortung unserer Frage nach der wechselseitigen Charakterisierbarkeit von Normen und Werten, eine Antwort zu geben auf die Frage nach den Zusammenhängen zwischen diesen normativen Präferenzen und Werten. Diese Frage ist durch die Diskussion des 4. Kapitels schon erledigt. Es ist aber vielleicht gut, die Grundgedanken der Zuordnung von Werten und Normen noch einmal zusammenzufassen:

1. Wenn ein Wertsystem vorgegeben ist, d. h. ein komparativer Wertbegriff $\leq_s$ oder ein metrischer Wertbegriff u auf der Menge R der möglichen Resultate der Handlung aus F, die eine Person X in einer bestimmten Situation durchführen kann, und eine Wahrscheinlichkeitsbewertung w (bzw. Bewertungen w_f für $f \varepsilon F$) auf der Menge K über $\mathfrak{K}$ der Bedingungen, von denen diese Resultate abhängen, so läßt sich im Sinn des Grundmodells der Entscheidungstheorie, wie es im Abschnitt 4.1 vorgestellt wurde, ein komparativer (oder auch metrischer) Begriff der normativen Präferenz auf F angeben, mit dem sich nach D5.1–2 ein Normensystem bestimmen läßt, nach der Maxime:

„Es ist X geboten, eine nach $\leq_n$ optimale Handlung durchzuführen". Werte bestimmen also Normen, und mit D5.1–2, D4.1–2 und D4.1–3 lassen sich aus Wertaussagen Normaussagen ableiten.

Entsprechend kann man, wenn zusätzlich eine Wahrscheinlichkeitsfunktion w″ auf $\mathfrak{F}$ gegeben ist, im Sinn von 4.2 eine noch umfassendere Präferenzrelation $\leq_n$ auf $\mathfrak{K}'$ angeben, mit der sich die Gebote nach D5.1–3 bestimmen lassen.

Wenn man die Struktur $\langle K', \mathfrak{K}', \leq_n \rangle$ im Sinne von 4.2 insgesamt als Wertstruktur auffaßt, so enthält diese Wertstruktur bereits die Präferenzen und die bedingten Präferenzen für Handlungen.

Wir haben im Kapitel 4 neben den Entscheidungen unter Risiko auch Entscheidungen unter Sicherheit und unter Unsicherheit betrachtet und haben auch für diese Fälle Kriterien für eine Festlegung der Präferenzrelation $\leq_n$ (bzw. $\leq_t$) aufgrund des Wertbegriffs u, bzw. eines komparativen Wertbegriffs $\leq_s$ angegeben. Ist bekannt, daß der Zustand x aus K (der Menge von Zuständen, von denen die Resultate der Handlungen aus F abhängen) realisiert wird, so gilt $f \leq_n g \equiv u(f(x)) \leq u(g(x)) \equiv f(x) \leq_s g(x)$. Ist nicht bekannt, welcher Zustand von K realisiert wird, und kann die Bezugsperson X den Zuständen aus K auch keine Wahrscheinlichkeiten zuordnen, so tritt eines der Kriterien aus 4.4 ein. Wählt man z. B. das Kriterium (δ), so gilt $f \leq_n g \equiv \min_{x \varepsilon K} u(f(x)) < \min_{x \varepsilon K} u(g(x)) \vee \min_{x \varepsilon K} u(f(x)) = \min_{x \varepsilon K} u(g(x)) \wedge \max_{x \varepsilon K} u(f(x)) \leq \max_{x \varepsilon K} u(g(x))$, bzw. $f \leq_n g \equiv \bigvee x \bigwedge y(f(x) <_s g(y)) \vee \neg \bigvee x \bigwedge y(f(x) <_s g(y)) \wedge \neg \bigvee x \bigwedge y(g(x) <_s f(y)) \wedge \bigvee x \bigwedge y(g(x) \geq_s f(y))$.

Mit der Relation $\leq_n$ erhält man dann durch D5.1–3 wieder das Gebot, eine der bezüglich $\leq_n$ optimalen Handlungen zu wählen – falls es solche optimale Handlungen gibt.

Abschließend sei noch einmal betont, daß die Wertbegriffe $\leq_s$, bzw. u, mit denen wir *normative* Präferenzen bestimmen, wie sie Normensystemen zugrundeliegen, inhaltlich nicht als subjektive Werte zu charakterisieren sind, sondern als intersubjektive Werte, z. B. als ethische oder soziale Werte. Ein subjektives Element in der Festlegung der Präferenzen und Normen steckt dann freilich immer noch in der Verwendung eines subjektiven Wahrscheinlichkeitsbegriffs: Verschiedene Personen werden sich trotz Anerkennung derselben Wertordnung oft verschieden verhalten, und zwar *richtig* verhalten, weil sie verschiedene Glaubensannahmen über die Welt machen, d. h. den Zuständen aus K verschiedene subjektive Wahrscheinlichkeiten zumessen. Diese Relativität läßt sich praktisch nicht ganz vermeiden, weil man nicht mehr verlangen kann, als daß der einzelne *nach bestem Wissen und Gewissen* handelt, d. h. eine Handlung vollzieht, die nach seinen Informationen und nach seiner Einschätzung der vorliegenden Umstände im Sinne des vorgegebenen Wertsystems optimal ist, nicht aber, daß er über alles für seine Entscheidung relevante Wissen verfügt. Dieses subjektive Element läßt sich nur dann eliminieren, wenn hinreichend viele Informationen vorliegen, sei es über den wahren Zustand oder über die objektiven Wahrscheinlichkeiten der Zustände.

Der große Vorzug von Normen, die durch Werte nach Entscheidungskriterien definiert werden, ist ihre Flexibilität, ihre Anpassung an die Umstände. In Fällen, in denen es vor allem auf die strikte und generelle Einhaltung gewisser Verhaltensweisen ankommt, unabhängig von den jeweiligen Umständen und ihrer Einschätzung durch das Subjekt, wird man aber die rigiden Normen eines nicht durch Werte festgelegten Normensystems bevorzugen.

2. Ist eine normative Präferenz für Handlungen festgelegt, sei es im Sinn einer komparativen Relation $\leq_n$ oder eines metrischen Begriffes, so ist dadurch wieder ein klassifikatorisches Normensystem nach D5.1–2, bzw. D5.1–3 festgelegt. Wir haben aber im Abschnitt 4.3 gesehen, daß durch Präferenzen auf der Menge $\mathfrak{F}$ über F Wertordnungen nur unter sehr speziellen Bedingungen festgelegt sind, da die Bevorzugung einer Handlung nicht nur von den Werten ihrer möglichen Resultate abhängt, sondern auch von den Wahrscheinlichkeiten, die den Zuständen zugemessen werden, unter denen sie diese Resultate haben. Sind diese Wahrscheinlichkeiten bekannt, so wird die

Wertordnung $\leq_s$ auf R, wie wir uns in 4.3 überlegt haben, ebenfalls nur in manchen Fällen festgelegt. Wenn hingegen die bedingten Präferenzen gegeben sind, d. h. die Präferenzen auf $\mathfrak{K}'$, so liegen damit, wie wir uns in 4.3 überlegt haben, auch die Werte fest. Ein System bedingter normativer Präferenzen bestimmt also eindeutig das System der zugehörigen Werte. In diesem und nur in diesem Sinn kann man also sagen, daß jedes System von normativen Präferenzen ein Wertsystem bestimmt.

Wenn der wahre Zustand x aus K bekannt ist, dann ist die Wertordnung zwischen den bei diesem Zustand möglichen Resultaten schon festgelegt durch die bedingten Präferenzen: Es gilt ja nach D5.1–5 $f(x) \leq_s g(x) \equiv f \leq_{n,\{x\}} g$.

Durch die Präferenzen bei Unsicherheit ergeben sich hingegen, z. B. nach (δ), nur sehr schwache Aussagen über die Wertordnung.

3. Ist ein klassifikatorisches Normensystem festgelegt, so läßt sich damit, wie wir schon gesehen haben, weder eine (nichttriviale) Präferenzordnung definieren – nach D5.1–3 ist dadurch z. B. nur die Menge der optimalen Handlungen ausgezeichnet – noch eine (nichttriviale) Wertordnung. Das ergibt sich einfach aus der Tatsache, daß klassifikatorische Begriffe viel weniger Differenzierungen erlauben als komparative oder metrische Begriffe.

Zusammenfassend können wir also sagen: Ein System komparativer bedingter normativer Präferenzen, das nach D5.1–3 auch ein klassifikatorisches Normensystem definiert, legt ein System komparativer Werte fest, und umgekehrt impliziert ein Wertsystem in dem umfassenden Sinn von 4.2 eine normative Präferenzordnung. Ja, Präferenzordnung und Wertordnung fallen in diesem Sinn sogar zusammen. Der Zusammenhang unbedingter Präferenzen mit den Resultatwerten nach dem Grundmodell der Entscheidungstheorie muß dagegen durch Wahrscheinlichkeitsannahmen vermittelt werden.

Wertsysteme erlauben eine sehr viel detailliertere Bewertung von Handlungen als klassifikatorische Normensysteme. Sie sind aber gleichwertig mit komparativen Normensystemen im Sinne von normativen Präferenzen.

5.3 Der kognitive Charakter von Norm- und Wertaussagen

Zum Abschluß unserer Erörterungen von Normen und Werten müssen wir noch auf ein Problem eingehen, das in der metaethischen Diskussion der analytischen Philosophie aufgeworfen worden ist.

Neben anderen Autoren hat C. L. Stevenson in [44] die Ansicht vertreten, Wertaussagen seien keine deskriptiven Aussagen, wie „München hat 1,3 Millionen Einwohner", die wahr oder falsch sind und deren charakteristische Bedeutungskomponente *kognitiver* Natur ist, insofern sie hauptsächlich zur Vermittlung von Informationen, zur Mitteilung von Tatsachen dienen. Die Bedeutung von Wertaussagen sei vielmehr wesentlich *emotiv* oder *evokativ* bestimmt: Wenn ich z.B. sage „Dieses Bild ist schön", so teile ich dem Hörer nichts über das Bild mit, sondern drücke nur meine positive Einstellung dazu aus, ebenso wie in dem Ausruf „Wie schön!"; und wenn ich zu einem Kind, das gelogen hat, sage: „Lügen ist böse", so teile ich ihm nichts über die Natur des Lügens mit, sondern richte den Appell an das Kind: „Lüge nicht!". Wertaussagen sind daher nach dieser Auffassung ebensowenig wahr oder falsch wie Imperative und Ausrufe.[3] Die leitende Absicht bei der Äußerung von Wertaussagen liegt darin, eigene moralische Einstellungen auszudrücken oder dem Hörer eine bestimmte Verhaltensweise vorzuschreiben oder nahezulegen, nicht aber darin, ihm objektive Sachverhalte mitzuteilen. Solche Aussagen werden also wie Ausrufe oder Imperative verwendet, und aus dieser Verwendungsweise ergibt sich ihre Bedeutung. Die Bedeutungen von Wertprädikaten wie „gut", „schön" und dergleichen sind ferner nicht durch feste, objektive und allgemeine Kriterien festgelegt, sondern sie werden je nach den moralischen Ansichten des Sprechers in verschiedenen und oft mit einander unverträglichen Weisen verwendet – ebenso wie der eine „Bravo" ruft, wo der andere „Pfui" schreit. Sie sind also auch mangels eines objektiven Inhalts zu Mitteilungszwecken ungeeignet. Gibt es aber keine

[3] Zu den Bedeutungsmodi vgl. z. B. Kutschera [71], 1.2.

objektiven Kriterien für die Wahrheit von Wertaussagen, so lassen sie sich endlich auch nicht objektiv begründen. Ähnliche Bedeutungsanalysen hat man auch für Normaussagen angegeben.

Das Problem des kognitiven Charakters von Norm- und Wertaussagen ist im Zusammenhang dieser Arbeit insofern von Bedeutung, als wir diese Aussagen hier immer kognitiv interpretiert haben, als deskriptive Aussagen, die wahr oder falsch sind.

Wir können im Rahmen dieser Arbeit nicht näher auf die Diskussion solcher emotiven und evokativen Deutungen von Norm- und Wertaussagen eingehen[4], es werden aber folgende Bemerkungen genügen:

1. Auch deskriptive Sätze wie z. B. „N. N. war ein Faschist" oder „Wir könnten dieses gemeinnützige Projekt realisieren, wenn Sie sich mit einer Spende von 1000,– DM beteiligen würden", können emotive oder evokative Bedeutungskomponenten haben. Aus der Existenz emotiver oder evokativer Komponenten eines Wert- oder Normsatzes folgt also nicht, daß er nicht auch einen kognitiven Charakter hätte.

2. Die Absicht, mit der ein Satz in gewissen Situationen geäußert wird, besagt nicht ohne weiteres etwas über seine Bedeutung, obwohl natürlich Gebrauch und Bedeutung sprachlicher Ausdrücke eng zusammenhängen. Auch kognitive Sätze können z. B. in evokativer Absicht ausgesprochen werden, wie der zweite Beispielssatz unter (1) zeigt. Selbst wenn also Norm- und Wertaussagen häufig in evokativer Absicht geäußert werden, ist das noch kein hinreichendes Argument für die These ihres nichtkognitiven Charakters. Viele Äußerungen von Wert- und Normaussagen dienen aber auch ausschließlich der Mitteilung von Fakten. Wenn ich z. B. zu einem Ortsunkundigen sage „An der nächsten Kreuzung dürfen Sie nicht links abbiegen", so kläre ich ihn lediglich über ein bestehendes Verbot

---

[4] Eine gut lesbare Diskussion findet sich z. B. in E. v. Savigny [69], Kap. 4. Dort wird auch die einschlägige Literatur angegeben. Vgl. zum folgenden auch Lobkowicz [73].

auf, verbiete ihm aber weder etwas, noch fordere ich ihn zu etwas auf.

3. Auch das Argument, daß uns Norm- und Wertaussagen nichts über die Sache mitteilen, sticht nicht. Mit dem Satz „Wahrscheinlich wird es morgen regnen" im Sinne von „Ich halte es für wahrscheinlich, daß es morgen regnen wird" teile ich dem Hörer ebenfalls nichts über den morgigen Regen mit, sondern nur über meine diesbezüglichen Annahmen. Dieser Satz hat dennoch nicht etwa nur eine emotive oder evokative Bedeutung, sondern ist ein kognitiver Satz, der wahr oder falsch ist und dem Hörer etwas über meine Wahrscheinlichkeitsannahmen mitteilt. In ähnlicher Weise teilt der Satz „Dieses Bild ist schön", wenn er im Sinn einer subjektiven ästhetischen Einschätzung gemeint ist, dem Hörer zwar nichts über das Bild mit (seine Größe, seine Farben, seinen Gegenstand etc.), aber etwas über meine ästhetische Wertordnung. Im Gegensatz dazu teilt der Ausruf „Wie schön!" nicht die Tatsache mit, daß ich dieses Bild schön finde, sondern drückt das nur emotiv aus; der Ausruf ist ein Symptom der Tatsache, keine Mitteilung.

4. Wenn wir einmal einen ganz groben und vorläufigen Unterschied zwischen empirischen Prädikaten wie „rot", „hart", „Pferd", „magnetisch" etc. und Wertprädikaten wie „gut" oder „schön", machen, dann ist zur *Relativität* von Wertprädikaten und Wertaussagen folgendes zu bemerken.

a) Wertprädikate können in dem Sinn relativ sein, daß sie *kontextabhängig* sind. „Gut" bedeutet in der Verbindung „gute Aktie" etwas anderes als in „guter Schuh". Eine gute Aktie ist eine Aktie, die eine hohe Dividende bringt und konstant einen hohen Kurswert hat. Ein „guter Schuh" ist dagegen kein Schuh, der eine hohe Dividende bringt oder einen hohen Kurswert hat, sondern ein haltbarer und bequemer Schuh. Auch empirische Prädikate sind aber vielfach kontextabhängig: Ein großer Baum ist ein Baum von 20 m Höhe oder darüber, ein großer Hund ist dagegen wesentlich kleiner. Ein wirklicher Freund ist ein treuer, zuverlässiger Freund, eine wirkliche Krankheit ist dagegen nicht treu oder zuverlässig, sondern nicht eingebildet oder vorgetäuscht.

b) Dasselbe Objekt oder Ereignis kann in einer Hinsicht gut sein, in einer anderen dagegen schlecht. Eine Handlung kann z. B. der Absicht nach gut, ihrem Resultat nach aber schlecht sein. Aber ebenso können wir dieselben Dinge empirisch in verschiedener Hinsicht verschieden klassifizieren: derselbe Mensch kann z. B. auf einem Gebiet begabt, auf einem anderen Gebiet unbegabt sein.

c) Wertprädikate beziehen sich auf Wertsysteme: eine Handlungsweise, die in einer Kultur als moralisch gut gilt, kann in einer anderen als moralisch schlecht bewertet werden. Eine Klassifikation einer Handlung als gut ist also relativ zu verstehen – sie ist gut in bezug auf ein bestimmtes Wertsystem. Aber so etwas kommt auch bei empirischen Prädikaten vor: Ein Körper hat ein Gewicht von 5 kp z. B. nur in einem bestimmten Gravitationsfeld.

Keiner dieser drei Aspekte, unter denen Wertprädikate relativ sind, zeichnet sie also vor empirischen Prädikaten aus.

Es gibt ferner zwischen rein empirischen Prädikaten und reinen Wertprädikaten, wie wir sie oben durch Beispiele illustriert haben, viele Übergangsstufen, d. h. Prädikate, die sowohl empirischen wie auch wertenden Charakter haben, wobei diese beiden Komponenten verschieden stark ausgeprägt sein können. Wörter wie „tapfer“, „gerecht“, „klug“, „bescheiden“ etc. charakterisieren Handlungsweisen oder Haltungen einerseits empirisch – es gibt objektive Merkmale für ein tapferes Verhalten –, andererseits als gut im Sinne eines Wertsystems. So kann man z. B. „tapfer sein“ definieren als „auch unter erheblichen Gefahren an der Verfolgung von Zielen festhalten, die moralisch gut sind“. Ob jemand bei Gefahr von seinen Zielen abläßt, kann man empirisch prüfen; ob seine Ziele gut sind, ist eine Frage des moralischen Bezugssystems. Deswegen kann auch dieselbe Handlung von verschiedenen derartigen Bezugssystemen aus einmal als „tapfer“, das andere Mal aber als „furchtlos, aber moralisch verwerflich“ klassifiziert werden.

Es sind auch nicht nur Wertprädikate emotiv besetzt, so daß wir oft mit der Anwendung von Wertprädikaten positive oder negative Einstellungen zu der betreffenden Sache ausdrücken. Das gilt auch für viele empirische Prädikate, nicht nur für solche Wörter wie „demokratisch“ oder „intelligent“, mit denen sich in unserem Wertsystem regelmäßig positive oder negative Wertungen verbinden, sondern auch (wenngleich in geringerem Maße) für Wörter wie „kalt“, „dunkel“ oder „klein“. In diesem Sinn könnte man sogar sagen, daß in der Alltagssprache rein wertende und rein empirische Wörter Grenzfälle darstellen.

5. Zur Erörterung der Fragen nach der *Begründbarkeit* von Norm- und Wertaussagen unterscheiden wir drei Fragestellungen:

a) Es wird nach der *Beschaffenheit* eines Normen- oder Wertesystems gefragt, z. B. ob in einer bestimmten Gesellschaft in einer Epoche gewisse Normen sozialen Verhaltens galten, oder ob dem Verhalten eines bestimmten Menschen gewisse Wertvorstellungen zugrundeliegen. Hier handelt es sich um rein deskriptive, empirische oder historische Fragen, und Antworten auf solche Fragen werden durch empirische oder historische Untersuchungen begründet. Dabei kann man z. B. von den Verhaltensweisen und Präferenzen eines Individuums, einer Gesellschaft oder einer gesellschaftlichen Gruppe auf die leitenden Wertvorstellungen zurückschließen.

b) Eine Frage nach der *Geltung* eines Gebots oder Verbots oder nach dem Wert einer Sache bezieht sich oft explizit oder implizit auf ein System von Normen oder Werten, deren Geltung vorausgesetzt und nicht angezweifelt wird. Es ist dann die Frage, ob die problematische Norm oder der problematische Wert aufgrund der gegebenen Umstände *in diesem System* gilt oder nicht.

Solche Fragen bezeichnen wir als *relative Geltungsfragen*. Sie lassen sich auf logische und empirische Fragen zurückführen: Ob eine Handlung geboten oder gut ist, hängt zunächst von den Umständen ab. „Wie sind die Umstände?“, „Welche Konsequenzen und Nebeneffekte hat die Handlung unter diesen Umständen?“ – das sind empirische Fragen. Und logische Fragen sind: „Ist die Handlung bei Kenntnis dieser Umstände bezüglich des vorausgesetzten Wertsystems optimal?“, „Ist sie unter den gegebenen Umständen aufgrund bestehender bedingter Normen geboten?“.

Ein Richter muß bei der juristischen Bewertung eines Tatbestandes sowohl empirische Tatsachenfeststellungen machen – in der Urteilsbegründung muß gezeigt werden, daß der Täter die Tat begangen hat, und welche näheren Umstände vorlagen, die für das Strafmaß erheblich sind –, und er muß in der Subsumption des Tatbestandes unter Gesetzesnormen logische Argumente vorbringen und nachweisen, daß eine Rechtsnorm, der er das Strafmaß entnimmt, in diesem Fall tatsächlich einschlägig ist.

c) Ein dritter Problemtyp umfaßt endlich die Fragen nach der *Verbindlichkeit* von Normen oder nach der *Geltung* von Werten. Dabei wird nicht gefragt, ob eine Handlungsweise in einem bestimmten Normensystem geboten ist, sondern ob sie überhaupt geboten ist; es wird nicht gefragt, ob und unter welchen Bedingungen es nach den in unserem Staat gültigen Gesetzen erlaubt ist, einen anderen Menschen zu töten, sondern ob das an sich erlaubt ist. Und es wird nicht gefragt, ob nach den heute gängigen Wertvorstellungen unserer Gesellschaft eine demokratische Staatsauffassung besser ist als eine oligarchische, sondern ob eine Demokratie an sich und von der Sache her besser ist als eine Oligarchie.

Solche *absoluten Geltungsfragen* spielen besonders in der Ethik eine große Rolle. Dabei geht es also nicht um die relative Begründung von Norm- oder Wertsätzen auf der Basis eines vorgegebenen Normen- oder Wertsystems, sondern um die Begründung der Aussagen eines solchen Systems selbst. Man behauptet oft, daß gerade hier Begründungen versagen, und sieht darin ein Argument gegen die deskriptive Natur von Norm- und Wertaussagen.

Zur besseren Illustration wollen wir diese Frage in Parallele setzen zu den Geltungsfragen im empirischen Bereich. Auch hier kann man eine Frage nach der Geltung eines bestimmten Satzes A, z. B. einer empirischen Gesetzmäßigkeit, zunächst beantworten, indem man zeigt, daß dieser Satz aus anderen empirischen Sätzen $B_1, \ldots, B_n$ folgt. Damit beweist man, daß A wahr ist, wenn $B_1, \ldots, B_n$ wahr sind. In vielen Fällen genügen solche relativen Begründungen, weil $B_1, \ldots, B_n$ allgemein als wahr akzeptierte und nicht als problematisch angesehene Sätze sind. Andernfalls kann man die Sätze $B_1, \ldots, B_n$ wieder relativ durch Sätze $C_1, \ldots, C_m$ begründen. Dieser Begründungsregreß kann aber nicht beliebig fortgesetzt werden, sonst würde er einen unendlichen und daher fehlerhaften Regreß darstellen. Es muß also Sätze geben, die nicht mehr relativ begründet werden, sondern ihrerseits die Grundlage relativer Begründungen von anderen Sätzen bilden. Wie werden aber diese Sätze begründet? In den empirischen Wissenschaften lautet die Antwort: durch Beobachtungen; Beobachtungen bilden die letzte Basis empirischer Begründungen.

Wie sieht es nun mit den Begründungen im Bereich von Norm- und Wertaussagen aus? Auch hier kann man eine Norm, die als gültig ausgewiesen werden soll, zunächst aus anderen Normen ableiten. Schließlich muß es aber Normen geben, die ohne Rückgriff auf andere als gültig ausgewiesen werden können. In der Frage, wie das geschieht, stehen sich zwei Grundpositionen gegenüber:

Der ethische *Naturalismus* behauptet, daß man Norm- und Wertaussagen aus empirischen Aussagen ableiten kann. An die Stelle des Rückgriffs auf andere Normsätze tritt also bei der Begründung schließlich der Rückgriff auf empirische Aussagen, die sich letztlich wieder auf Beobachtungen gründen. Wir haben uns aber im Abschnitt 1.12 überlegt, daß (reine) Normsätze nicht aus empirischen (normfreien) Sätzen ableitbar sind. Das Entsprechende gilt auch für Wertaussagen: Eine Wertaussage der elementaren Form $A \leq_s B$, die nicht schon aus den Axiomen für Wertbegriffe selbst folgt, folgt auch nicht aus Sätzen, die das Prädikat „$\leq_s$" nicht enthalten. Mithilfe von Prinzipien wie D4.1–2 und D5.1–2, die man als analytisch ansprechen kann, kann man (reine) Normsätze oder Sätze über normative Präferenzen auch aus Wertaussagen ableiten, und umgekehrt; es gibt aber keine analytischen Zusammenhänge zwischen rein empirischen Sätzen und reinen Norm- oder Wertaussagen.

Der ethische Naturalismus ist also nicht haltbar.

Ihm gegenüber ist es die These des ethischen *Intuitionismus*, daß es eine objektive Wertordnung gibt und ein eigenständiges Vermögen der Werterkenntnis, mit dem wir die Werte und die Beziehungen zwischen ihnen erfassen können.

Wenn man einmal von der Annahme der Existenz einer absoluten Wertordnung und von der im Intuitionismus oft etwas kurzschlüssig verstandenen Analogie zwischen empirischer Erkenntnis und Werterkenntnis absieht, so ist sein Grundgedanke durchaus akzeptabel: Normaussagen lassen sich, wie wir gesehen haben, aus Wertaussagen ableiten, und diese begründen wir durch eine Werterkenntnis, die deutliche Parallelen zur empirischen Erkenntnis aufweist.

Unsere empirischen Urteile stützen sich letztlich auf unsere Sinnesempfindungen, die aber für sich weder ein notwendiges noch ein hinreichendes Wahrheitskriterium darstellen. Von ihnen führen erst solche Kriterien wie die immanente Kohärenz, die Geltung gewisser Gesetzmäßigkeiten und die intersubjektive Übereinstimmung zu den empirischen Urteilen. Der Zusammenhang zwischen Sinnesempfindungen, auf die sich die Evidenz empirischer Aussagen stützt, und den Tatsachen, die diese Aussagen ausdrücken, ist dabei sehr kompliziert und es zeigt sich, daß er auch viele konstruktive, schöpferische Momente aufweist, so daß es durchaus konkurrierende Systeme empirischer Erkenntnis, verschiedene Weltansichten gibt.[5] Ebenso gibt es auch Wertempfindungen, auf die sich unsere Werturteile stützen; unsere Erlebnisse haben z. B. die Qualität des Angenehmen oder Unangenehmen. Ebenso kompliziert und weitläufig wie der Zusammenhang zwischen Sinnesempfindungen und den Aussagen einer empirischen Theorie ist auch der Zusammenhang solcher Wertempfindungen und der Aussagen eines ethischen Systems. Und wie es viele empirische Prädikate gibt, denen kein eigener Typ von Sinnesempfindungen entspricht, so gibt es auch viele Wertprädikate, denen keine eigenen Wertempfindungen entsprechen. Ebenso wie die Bezugnahme auf Sinnesempfindungen nicht bewirkt, daß alle empirische Erkenntnis subjektiven Charakter hat, besagt die Bezugnahme auf Wertempfindungen nicht, daß wir nicht zwischen objektiven oder intersubjektiven und subjektiven Werten unterscheiden könnten.

Wie ein Weltbild den Versuch einer umfassenden Ordnung und Interpretation der empirischen Erfahrung darstellt, kann

[5] Vgl. dazu z. B. Kutschera [73].

man ein Wertsystem, sofern es seiner Intention nach intersubjektiv und allgemein verbindlich sein will, als Versuch ansehen, die Werterfahrungen und die auf diese Erfahrungen bezogenen Verhaltensweisen und Lebensformen einer Kultur in eine umfassende Ordnung zu bringen. Freilich ist der Pluralismus der Wertsysteme viel ausgeprägter als der Pluralismus der Weltbilder.

Wenn man sich also von der empirischen Erkenntnis wie der Werterkenntnis nicht ein zu naives Bild macht, gibt es zwischen ihnen durchaus tragfähige Analogien, die es berechtigt erscheinen lassen, auch für Wertaussagen eine Begründung durch Erfahrung zu beanspruchen.

Ebenso wie für die wissenschaftliche Rekonstruktion der empirischen Erkenntnis gibt es auch für die Rekonstruktion der Werterkenntnis natürlich noch viele ungelöste Probleme. Die vorstehenden Bemerkungen sollen darüber nicht hinwegtäuschen – sie sollen nur andeuten, daß die negative Einschätzung der Werterkenntnis vorläufig als nicht berechtigt erscheint.

Verzeichnis der Symbole

O	„es ist geboten", vgl. S. 15
V	„es ist verboten", vgl. S. 15
E	„es ist erlaubt", vgl. S. 15
I	„es ist indifferent", vgl. S. 23
$\leq_p$	komparativer Begriff der Wahrscheinlichkeit, vgl. S. 74
$\leq_s$	komparativer Begriff des Wertes, vgl. S. 93
$\leq_t$	komparativer Begriff der Präferenz, vgl. S. 101
$\leq_n$	komparativer Begriff der normativen Präferenz, vgl. S. 115
$\neg$	Negation („nicht"), vgl. S. 16
$\wedge$	Konjunktion („und"), vgl. S. 16
$\vee$	Adjunktion („oder"), vgl. S. 16
$\supset$	Implikation („wenn–dann"), vgl. S. 16
$\equiv$	Äquivalenz („genau dann, wenn"), vgl. S. 16
Λ	Generalisierung („Für alle"), vgl. S. 18
V	Partikularisierung („Für einige"), vgl. S. 18
$=$	Identität
$:=$	definitorische Gleichheit, vgl. S. 23
$\rightarrow$	logische Folge, vgl. S. 21
$\leftrightarrow$	logische Äquivalenz, vgl. S. 21
ε	Elementschaftsrelation, vgl. S. 75
$\{x: -\}$	Menge der x mit der Eigenschaft, vgl. S. 76
$\{a_1, \ldots, a_n\}$	Menge mit den Elementen $a_1, \ldots, a_n$, vgl. S. 75
$\cap$	Durchschnitt von Mengen, vgl. S. 76
$\cup$	Vereinigung von Mengen, vgl. S. 76
$\bigcap$	großer Durchschnitt, vgl. S. 77
$\bigcup$	große Vereinigung, vgl. S. 77
$\subset$	Teilmengenrelation, vgl. S. 75
Λ	Nullmenge, vgl. S. 76
$\bar{\ }$	Komplement, vgl. S. 76
$+$	arithmetisches Summenzeichen oder Vereinigung disjunkter Mengen, vgl. S. 78
$\cdot$	arithmetisches Produktzeichen oder Durchschnitt von Mengen, vgl. S. 78
Σ	arithmetische Summe oder Vereinigung disjunkter Mengen, S. 78
lim	Grenzwert einer Folge
$\underset{D}{\rightarrow}$	deontologische Folge, vgl. S. 36, 55 f.
$\underset{D}{\leftrightarrow}$	deontologische Äquivalenz, vgl. S. 36
$\vdash$	Beweisbarkeit, bzw. Ableitbarkeit, vgl. S. 47

Literaturverzeichnis

Bolker, E. [65]: Functions resembling quotients of measures, Dissertation Harvard 1965, in: Transactions of the American Mathematical Society 124 (1966) S. 292–312.

Bolker, E. [67]: A simultaneous axiomatisation of utility and subjective probability, in: Philosophy of Science 34 (1967) S. 333–340.

Chisholm, R. M. [63]: Contrary-to-duty imperatives and deontic logic, in: Analysis 23 (1963) S. 33–36.

Finetti, B. de [37]: La prévision: ses lois logiques, ses sources subjectives, in: Annales de l'Institut Henri Poincaré 7 (1937). Engl. Übersetzung in Kyburg und Smokler [64] S. 93–158.

Finetti, B de [70]: Teoria delle Probabilità, 2 Bde. Turin 1970.

Foellesdal, D. und Hilpinen, R. [71]: Deontic logic – an introduction, in Hilpinen [71], S. 1–35.

Hanson, W. H. [66]: A logic of commands, in: Logique et Analyse 9 (1966) S. 329–348.

Hansson, B. [69]: An analysis of some deontic logics, in: Nous 3 (1969) S. 373–398. Abgedr. in Hilpinen [71].

Hilpinen, R. (Hrsg.) [71]: Deontic Logic – Introductory and Systematic Readings. Dordrecht 1971.

Hintikka, J. [57]: Quantifiers in Deontic Logic, Helsinki 1957.

Hohfeld, W. N. [19]: Fundamental Legal Conceptions, ^{1}1919. New Haven, London 1964.

Jeffrey, R. C. [65]: The Logic of Decisions. New York ^{1}1965, ^{2}1967; deutsch: Die Logik der Entscheidungen. München 1967.

Kalinowski, G. [65]: Introduction à la logique juridique. Paris 1965.

Kanger, S. [71]: New foundations for ethical theory, in: Hilpinen [71], S. 36–58.

Kanger, S. und H. [66]: Rights and parliamentarism, in: Theoria 32 (1966) S. 85–115.

Klug, U. [51]: Juristische Logik. Berlin ^{1}1951, ^{2}1958.

Kripke, S. [63]: Semantical considerations on modal logic, Proceedings of a colloquium on modal and many-valued logics, in: Acta Philosophica Fennica 16. Helsinki 1963, S. 83–94.

Kutschera, F. v. [67]: Elementare Logik. Wien 1967.

Kutschera, F. v. und Breitkopf, A. [71]: Einführung in die moderne Logik. Freiburg/München 1971.

Kutschera, F. v. [71]: Sprachphilosophie. München 1971.

Kutschera, F. v. [72]: Wissenschaftstheorie – Grundzüge der allgemeinen Methodologie der empirischen Wissenschaften. München 1972.
Kutschera, F. v. [73]: Erkenntnistheorie, in Vorbereitung.
Kyburg, H. E. und Smokler, H. E. (Hrsg.) [64]: Studies in Subjective Probability. New York 1964.
Lobkowicz, N. [73]: Analytische Ethik, erscheint in der Reihe „Kolleg Philosophie" im Verlag Karl Alber, Freiburg/München.
Luce, R. D. und Raiffa, H. [57]: Games and Decisions, New York 1957.
Montague, R. [68]: Pragmatics, in: R. Klibansky (Hrsg.) Contemporary Philosophy, Bd. I. Florenz 1968, S. 102–122.
Montague. R. [70]: Universal grammar, in: Theoria 36 (1970) S. 373–398.
Rescher, N. [66]: The Logic of Commands. London 1966.
Richter, H. [66]: Wahrscheinlichkeitstheorie. Berlin ²1966.
Ross, A. [41]: Imperatives and logic, in: Theoria 7 (1941) S. 53–71.
Savage, L. [54]: The Foundations of Statistics. New York 1954.
Savigny, E. v. [69]: Die Philosophie der normalen Sprache. Frankfurt a. M. 1969.
Searle, J. R. [64]: How to derive Ought from Is, in: Philosophical Review 73 (1964) S. 53–58.
Stevenson, C. L. [44]: Ethics and Language. New Haven/Conn. 1944.
Weinberger, O. [70]: Rechtslogik. Wien 1970.
Wright, G. H. v. [68]: An Essay in Deontic Logic and the General Theory of Action, Acta Philosophica Fennica Bd. 21. Amsterdam 1968.

Stichwortverzeichnis