FREGES BEGRÜNDUNG DER ANALYSIS*

Von FRANZ V. KUTSCHERA, München

Im zweiten Band seines Hauptwerkes, der *Grundgesetze der Arithmetik*, Jena 1903, hat Gottlob Frege eine Begründung der Analysis formuliert, die bisher nur wenig Beachtung gefunden hat. Da eine exakte Definition der reellen Zahlen vor Frege schon von Weierstraß, Dedekind und Cantor angegeben worden war, fand Frege in diesem Punkt nicht das gleiche Interesse wie bzgl. seiner Begründung von Logik und Arithmetik. Zudem hat Frege in den *Grundgesetzen* seinen Ansatz zur Definition der reellen Zahlen nicht vollständig durchgeführt. Er plante wohl einen dritten Band dieses Werkes, der jedoch nicht erschien, da die Grundlagen des Fregeschen Systems durch die Entdeckung der Antinomie von Russell im Jahre 1902 erschüttert wurden. Davon gibt der Anhang zum zweiten Band der *Grundgesetze* Zeugnis. Immerhin enthält dieser Band aber ein so fest umrissenes Programm der Begründung der Analysis, daß es keine Schwierigkeiten macht, Freges Gedanken zu Ende zu führen. Da diese Gedanken sich schon in ihrem ersten Ansatz von den heute üblichen Konstruktionen unterscheiden, können sie neben dem historischen auch ein gewisses systematisches Interesse beanspruchen. Der leichteren Verständlichkeit wegen wollen wir ihrer Darstellung im folgenden die moderne Begriffsbildung und Symbolik zugrunde legen. Die dadurch bedingten inhaltlichen Abweichungen von den Definitionen Freges sind jedoch nur unwesentlich. Der Rahmen der Darstellung ist naturgemäß die klassische (naive) Mengenlehre, wie sie von Frege verwendet wurde.

1

Üblicherweise definiert man in der Mengenlehre die natürlichen Zahlen ohne Bezugnahme auf ihre Anwendung zum Zählen. Die Definition nach v. Neumann lautet etwa[1]:

$0 := \Lambda$ — die Null wird mit der leeren Menge identifiziert,

$x' := x \cup \{x\}$ — der Nachfolger von x ist die Vereinigung von x mit der Einermenge aus x,

$N := \lambda x \wedge y(I(y) \to x \in y)$, wobei man setzt $I(y) := 0 \in y \wedge \wedge z(z \in y \to z' \in y)$ — die Menge der natürlichen Zahlen ist der Durchschnitt aller induktiven Klassen. Wenn man die so definierten Zahlen zum Zählen der Elemente einer endlichen Menge verwenden will, so muß man zusätzlich noch den Begriff der Gleichmächtigkeit von Mengen einführen — symbolisch $x \sim y$ — und kann dann setzen:

$A(x) := \iota y(y \in N \wedge y \sim x)$ — die Anzahl einer endlichen Menge x ist diejenige natürliche Zahl, die mit x gleichmächtig ist.

* Eingegangen am 4. 6. 1965.

[1] J. v. Neumann: Eine Axiomatisierung der Mengenlehre. *J. f. Math.* **154**, 1925, S. 219—240.

2

Ebenso definiert man üblicherweise die reellen Zahlen ohne Bezugnahme auf ihre Verwendung zum Messen von Größen: von Längen, Kräften, Geschwindigkeiten usw. Man kann etwa — Frege bezieht sich auf diese Darstellung [161][2] — die reellen Zahlen definieren als geordnete Paare $\langle m, M\rangle$, gebildet aus einer ganzen Zahl m und einer unendlichen Menge M von natürlichen Zahlen mit Ausschluß der 0. Die Möglichkeit dieser Darstellung erhellt aus der eindeutigen Darstellbarkeit aller reellen Zahlen in der Form $m + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i^M}{2^i}$, wobei gilt: $c_i^M = 1$, wenn $i \in M$ und $c_i^M = 0$, wenn nicht $i \in M$.

Definiert man bzgl. dieser Darstellung der reellen Zahlen als Paare $\langle m, M\rangle$ die Addition $+$, die Kleiner-Beziehung $<$ und das Einselement 1 in passender Weise und definiert R als Menge der Paare $\langle m, M\rangle$, so kann man zeigen, daß $\langle R, <, +, 1\rangle$ ein Modell des Axiomensystems der reellen Zahlen von Tarski bildet[3]:

2.1 **A1**: $x \neq y \rightarrow x < y \vee y < x$

A2: $x < y \rightarrow \neg\, y < x$

A3: $x < y \rightarrow \bigvee z(x < z \wedge z < y)$

A4: $u \subset R \wedge v \subset R \wedge \bigwedge xy(x \in u \wedge y \in v \rightarrow x < y) \rightarrow \bigvee z \bigwedge xy(x \in u \wedge x \neq z \wedge$
$\wedge\, y \in v \wedge y \neq z \rightarrow x < z \wedge z < y)$

A5: $x + (y + z) = (x + z) + y$[4]

A6: $\bigwedge xy \bigvee z(x = y + z)$

A7: $x + z < y + t \rightarrow x < y \vee z < t$

A8: $1 \in R$

A9: $1 < 1 + 1$.

Da man die ganzen Zahlen $+m$ und $-m$ ausgehend von den natürlichen Zahlen m als geordnete Paare $\langle 0, m\rangle$ und $\langle m, 0\rangle$ definieren kann, hat man damit eine Definition der reellen Zahlen unter Bezugnahme nur auf die natürlichen Zahlen gewonnen.

3

Will man die so definierten reellen Zahlen zum Messen von Größen verwenden, so muß man eine solche Anwendung zusätzlich erklären. Das kann etwa in folgender Weise geschehen: Man faßt die Größen eines eindimensionalen Bereichs $\bar{s}$ auf als Vektoren auf einer Geraden. Ein Vektor sei dabei charakterisiert als Verschiebung eines Punktes in einer bestimmten Richtung um einen bestimmten Betrag. Man fordert, daß jeder Vektor im Endpunkt jedes anderen angreifen kann und daß er im Angriffspunkt jedes anderen enden kann. Dann läßt sich die Addition $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$

[2] Die Ziffern in eckigen Klammern stellen Seitenangaben für den 2. Bd. der *Grundgesetze der Arithmetik* dar.

[3] Vgl. A. Tarski: Introduction to logic and to the methodology of deductive sciences, New York,[2] 1946, § 61.

[4] Aus A5, A6 folgt die Kommutativität der Addition: Sind x, y vorgegeben, so läßt sich y nach A6 in der Form $y = x + z$ darstellen. Nach A5 gilt $x + (x + z) = (x + z) + x$, also $x + y = y + x$. Umgekehrt folgt aus der Kommutativität und der Assoziativität $x + (y + z) = (x + y) + z$ der Addition sofort A5.

zweier Vektoren erklären als Verschiebung $\mathfrak{a}$, gefolgt von der Verschiebung $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ liegt in $\bar{s}$, wenn $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ in $\bar{s}$ liegen. Diese Addition ist assoziativ und kommutativ. Ferner fordert man, daß zu jedem Vektor $\mathfrak{a}$ von $\bar{s}$, der einen Punkt A in einen Punkt B verschiebt, der Vektor $-\mathfrak{a}$ in $\bar{s}$ existiert, der B in A verschiebt. Dann ist die Differenz $\mathfrak{a} - \mathfrak{b}$ als $\mathfrak{a} + (-\mathfrak{b})$ erklärt. Der Nullvektor $\mathfrak{o}$ sei definiert durch $\mathfrak{o} = \mathfrak{a} - \mathfrak{a}$. Weiter zeichnet man eine Richtung als positiv aus und damit eine Klasse s positiver Vektoren dieser Richtung, so daß gilt:

3.1 $\bigwedge \mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,(\mathfrak{a} \in s \wedge \mathfrak{b} \in s \rightarrow \mathfrak{a} + \mathfrak{b} \in s \wedge \neg\, \mathfrak{a} = \mathfrak{o} \wedge (\mathfrak{a} \neq \mathfrak{b} \rightarrow \mathfrak{a} - \mathfrak{b} \in s \vee \mathfrak{b} - \mathfrak{a} \in s))$ und $\bar{s} = \lambda\, \mathfrak{a}(\mathfrak{a} \in s \vee -\mathfrak{a} \in s \vee \mathfrak{a} = \mathfrak{o})$.

Dann kann man setzen: $\mathfrak{a} \underset{s}{<} \mathfrak{b} := \mathfrak{b} - \mathfrak{a} \in s$.

Zur Einführung der reellen Zahlen als Maßzahlen für die Vektorem aus $\bar{s}$ fehlen noch Forderungen, die Dichte und Existenz der oberen Grenze sicherstellen:

3.2 $\bigwedge \mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,(\mathfrak{a} \in s \wedge \mathfrak{b} \in s \wedge \mathfrak{a} \underset{s}{<} \mathfrak{b} \rightarrow \bigvee \mathfrak{c}\,(\mathfrak{a} \underset{s}{<} \mathfrak{c} \wedge \mathfrak{c} \underset{s}{<} \mathfrak{b}))$ und

3.3 $\bigwedge uv\,(u \subset \bar{s} \wedge v \subset \bar{s} \wedge \bigwedge \mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,(\mathfrak{a} \in u \wedge \mathfrak{b} \in v \rightarrow \mathfrak{a} \underset{s}{<} \mathfrak{b}) \rightarrow \bigvee \mathfrak{c} \bigwedge \mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,(\mathfrak{a} \in u \wedge \mathfrak{a} \neq \mathfrak{c} \wedge \mathfrak{b} \in v \wedge \mathfrak{b} \neq \mathfrak{c} \rightarrow \mathfrak{a} \underset{s}{<} \mathfrak{c} \wedge \mathfrak{c} \underset{s}{<} \mathfrak{b}))$.

Sind diese Forderungen erfüllt, so bildet $\langle \bar{s}, +, \underset{s}{<}, \mathfrak{e} \rangle$ — der Einheitsvektor $\mathfrak{e}$ sei ein festes Element aus s — ein Modell des Axiomensystems 2.1. Man setzt nun: $0 \cdot \mathfrak{a} = \mathfrak{o}$, $n' \cdot \mathfrak{a} = n \cdot \mathfrak{a} + \mathfrak{a}$ und $-n \cdot \mathfrak{a} = n \cdot (-\mathfrak{a})$, und definiert so die Multiplikation der Vektoren mit ganzen Zahlen. Wegen 3.2 und 3.3 gilt auch $\bigwedge \mathfrak{a}\,(\mathfrak{a} \in s \rightarrow \bigvee !\, \mathfrak{b}\,(\mathfrak{b} \in s \wedge \mathfrak{b} + \mathfrak{b} = \mathfrak{a}))$, so daß wir setzen können $\frac{\mathfrak{e}}{2^1} = \iota\, \mathfrak{b}(\mathfrak{b} + \mathfrak{b} = \mathfrak{e})$ und $\frac{\mathfrak{e}}{2^{n'}} = \iota\, \mathfrak{b}\left(\mathfrak{b} + \mathfrak{b} = \frac{\mathfrak{e}}{2^n}\right)$. Damit sind dann die Summen $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{c_i^M \cdot \mathfrak{e}}{2^i}$ für alle n definiert und nach 3.3 ist auch $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{c_i^M \cdot \mathfrak{e}}{2^i}$ als obere Grenze dieser Summen definiert. Da $\langle s, +, \underset{s}{<}, \mathfrak{e} \rangle$ Modell des Axiomensystems 2.1 ist, läßt sich wie allgemein für reelle Zahlen die eindeutige Darstellbarkeit der Vektoren aus $\bar{s}$ in der Form:

3.4 $\mathfrak{a} = m \cdot \mathfrak{e} + \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{c_i^M \cdot \mathfrak{e}}{2^i}$ beweisen.

Man kann dann sagen: Dem Vektor $\mathfrak{a}$ von $\bar{s}$ kommt bzgl. $\mathfrak{e}$ die Maßzahl $\langle m, M \rangle$ zu, wenn die Beziehung 3.4 besteht. Für die eineindeutige Abbildung $F(\mathfrak{a}) = \langle m, M \rangle$ von $\bar{s}$ in die Menge R der reellen Zahlen gilt dann: $F(\mathfrak{e}) = 1$, $\mathfrak{a} \underset{s}{<} \mathfrak{b} \leftrightarrow F(\mathfrak{a}) < F(\mathfrak{b})$ und $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{c} \leftrightarrow F(\mathfrak{a}) + F(\mathfrak{b}) = F(\mathfrak{c})$. Damit ist die Verwendung der reellen Zahlen zum Messen der Größen eines Gebietes $\bar{s}$ mit den angegebenen Eigenschaften erklärt.

4

Die Verschiedenheit des Fregeschen Ansatzes zur Definition der Zahlen von den heute üblichen Methoden läßt sich nun darauf zurückführen, daß Frege der Ansicht war, die Art und Weise der Anwendung der Zahlen zum Zählen oder Messen müsse schon in ihre Definition eingehen und dürfe nicht „rein äußerlich angeflickt“

werden [157]. Er unterschied bzgl. der Anwendung zwei Arten von Zahlen: *Anzahlen*, mit denen wir antworten auf die Frage: Wieviele Elemente enthält eine Menge? — und *Maßzahlen*, mit denen wir auf die Frage antworten: Wie groß ist eine Größe, verglichen mit der Einheitsgröße? Die natürlichen Zahlen (wie allgemein die Mächtigkeiten) sind dann Anzahlen, die ganzen, die rationalen und die reellen Zahlen sind Maßzahlen. Daher kann man auch nicht von einer „Erweiterung" der Klasse der natürlichen etwa zu derjenigen der ganzen oder reellen Zahlen sprechen, denn diese Zahlarten sind ganz verschiedener Natur [155]. Wie die Anwendung der Anzahlen zum Zählen in ihre Definition bei Frege eingeht ist bekannt: Er definiert die Anzahl $A\,(x)$ einer Menge x als Klasse aller mit x gleichmächtigen Mengen $\lambda\, y\,(y \sim x)$. Frege setzt dann z. B. $\mathit{0} := A\,(\wedge)$ und daraus ergibt sich sofort $A\,(x) = \mathit{0} \leftrightarrow x \sim \wedge$. Der Begriff der Gleichmächtigkeit, den wir oben der Definition der natürlichen Zahlen für ihre Anwendung zum Zählen noch hinzufügen mußten, ist so bei Frege bereits in seiner Definition der Anzahlen enthalten. Er definiert also gewissermaßen die Anzahlen von ihrer Anwendung zum Zählen her.

5

Ähnlich ist Freges Vorgehen auch bei der Einführung der reellen Zahlen: er definiert sie als Verhältnisse von Größen zu Einheitsgrößen, als Maßrelationen also. Was sind nun Größen? Freges Antwort auf diese Frage ist aufgrund der obigen Darstellung von Größen durch Vektoren sofort verständlich: Größen sind für Frege eineindeutige zweistellige Relationen. Einem Vektor $\mathfrak{a}$ können wir als solche Relation zuordnen die Menge der Punktpaare $\langle A, B\rangle$, für die gilt, daß B aus A durch die Verschiebung $\mathfrak{a}$ hervorgeht. Wie oben ein Größengebiet als Menge von Vektoren definiert wurde, bzgl. deren Elementen sich die reellen Zahlen als Maßzahlen einführen ließen, so definiert Frege entsprechende Größengebiete allgemein für Relationen.

Zweistellige Relationen sind in moderner Auffassung Klassen von geordneten Paaren. In diesem Sinn verstehen wir das Prädikat $Rel\,(r)$ — r ist eine zweistellige Relation[5]. Wir setzen $r\,(x, y) := \langle x, y\rangle \in r$ — x und y stehen in der Relation r zueinander, $Ne(r) := \wedge\, xyz\,(r\,(x, y) \wedge r\,(x, z) \rightarrow y = z)$ — die Relation r ist nacheindeutig. $D^{1}\,(r)$ sei der Vorbereich $\lambda\, x \vee y\, r\,(x, y)$, $D_2\,(r)$ sei der Nachbereich $\lambda\, y \vee x\, r\,(x, y)$ von r [171], $r \mid t$ sei das Relationsprodukt [72], r^m die m-te Relationspotenz von r, $r^{\geqq 0}$ die Relationskette 1. Art zu r^6. Es sei $\mathit{0} := r^{\mathit{0}}$, $r^{\mathit{0}} = \lambda\, z \vee x\,(z = \langle x, x\rangle) = r \mid r^{-\mathit{1}}$ für $Ne\,(r^{-\mathit{1}})$, $r^{-\mathit{1}}\,(x,y) = r\,(y,x)$ und $r^{-m} = (r^m)^{-\mathit{1}}$.

Entsprechen den Relationen r und t die Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, so entspricht also $r^{-\mathit{1}}$ der Vektor $-\mathfrak{a}$, $r \mid t$ die Summe $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ und $r \mid t^{-\mathit{1}}$ die Differenz $\mathfrak{a} - \mathfrak{b}$.

---

[5] Freges Definition für das Prädikat *Rel* (r) lautet anders [171]: er bestimmt Relationen als Doppelwertverläufe von zweistelligen Funktionen, deren Wertebereich nur die beiden Wahrheitswerte enthält.

[6] Vgl. dazu R. Carnap: Einführung in die symbolische Logik, Wien [2]1960, S. 149. Frege hatte die Relationsketten schon in seiner *Begriffsschrift* (1879) definiert. In den *Grundgesetzen* finden sich seine Definitionen im 1. Bd., S. 60.

Damit $\bar{s}$ ein Größengebiet ist, muß man in Entsprechung zu 3 verlangen: $r \in \bar{s} \wedge t \in \bar{s} \rightarrow Rel\,(r) \wedge Ne\,(r) \wedge r \mid t \in \bar{s} \wedge r^{-1} \in \bar{s} \wedge D_1\,(r) = D_2\,(t)$. Um eine Klasse s von positiven Größen aus $\bar{s}$ auszuzeichnen, spannt Frege seine Größengebiete durch Angabe einer solchen Klasse auf. Er definiert:

5.1 $\bar{s} := \lambda\, r\, (r \in s \vee r^{-1} \in s \vee r = 0)$ — das Größengebiet von s [169],

5.2 $P\,(s) := \bigwedge rt\, (r \in s \wedge t \in s \rightarrow Ne\,(r) \wedge Ne\,(r^{-1}) \wedge Rel\,(r) \wedge r \mid t \in s \wedge \neg\, 0 \in s \wedge r \mid t^{-1} \in \bar{s} \wedge t^{-1} \mid r \in \bar{s})$ —
s ist eine Klasse positiver Größen oder *Positivalklasse* [171][7].

5.3 $r \underset{s}{<} t := P\,(s) \wedge r \in \bar{s} \wedge t \in \bar{s} \wedge t \mid r^{-1} \in s$ — r ist kleiner als t bzgl. s, [185].

Damit sich die reellen Zahlen später als Maßrelationen zwischen den Größen eines Gebietes definieren lassen, muß man für $\bar{s}$, bzw. für s Eigenschaften in Entsprechung zu 3.2 und 3.3 fordern. Frege definiert:

5.4 $u \underset{s}{lim}\, t := P\,(s) \wedge t \in s \wedge \bigwedge r\, (r \in s \wedge r \underset{s}{<} t \rightarrow r \in u) \wedge \bigwedge r\, (t \underset{s}{<} r \rightarrow \bigvee q\, (q \in s \wedge q \underset{s}{<} r \wedge \neg\, q \in u))$ — t ist s-Grenze von u [187].

5.5 $P^*(s) := P\,(s) \wedge \bigwedge t\, (t \in s \rightarrow \bigvee r\, (r \in s \wedge r \underset{s}{<} t)) \wedge \bigwedge u \big(\bigvee r\, (r \in s \wedge \bigwedge t\, (t \underset{s}{<} r \rightarrow t \in u)) \wedge \bigvee r\, (r \in s \wedge \neg\, r \in u) \rightarrow \bigvee t\, (u \underset{s}{lim}\, t)\big)$ — s ist eine *Positivklasse* [190][8].

Ist s eine Positivklasse und ist s nicht leer, so kann man in s ein Einselement e auszeichnen. Man kann dann zeigen, daß $\langle \bar{s}, \mid, \underset{s}{<}, e \rangle$ ein Modell des Axiomensystems 2.1 bildet. Dieser Aufgabe wenden wir uns nun zu. Der Definitionsbereich der Relationsvariablen r, t, q, p sei im folgenden immer die Menge $\bar{s}$.

T1: $r \mid (t \mid q) = (r \mid t) \mid q$, [165], Satz 489.

Diese Assoziativität des Relationenprodukts gilt allgemein.

A1: $r \neq t \rightarrow r \underset{s}{<} t \vee t \underset{s}{<} r$, [186], Satz 588.

Ist $r \neq t$ und $\neg\, t \mid r^{-1} \in s$, dann gilt nach 5.2 und 5.1 $(t \mid r^{-1})^{-1} = r \mid t^{-1} \in s$, also nach 5.3 $t \underset{s}{<} r$.

A2: $r \underset{s}{<} t \rightarrow \neg\, t \underset{s}{<} r$, [186], Satz 589.

Ist $t \mid r^{-1} \in s$, so gilt $\neg\, r \mid t^{-1} \in s$. Andernfalls erhielten wir aus 5.2 $t \mid r^{-1} \mid r \mid t^{-1} \in s$, also $0 \in s$ im Widerspruch zu 5.2.

A3: $r \underset{s}{<} t \rightarrow \bigvee p\, (r \underset{s}{<} p \wedge p \underset{s}{<} t)$.

Ist $t \mid r^{-1} \in s$, so gibt es nach 5.5 in s ein q, so daß $q \underset{s}{<} t \mid r^{-1}$. Aus $q \in s$ folgt $q \mid r \mid r^{-1} = q \in s$, also $r \underset{s}{<} q \mid r$. Aus $t \mid r^{-1} \mid q^{-1} \in s$ folgt $t \mid (q \mid r)^{-1} \in s$, also $q \mid r \underset{s}{<} t$. $q \mid r$ ist also ein p der verlangten Art.

A4: $u \subset \bar{s} \wedge v \subset \bar{s} \wedge \bigwedge rt\, (r \in u \wedge t \in v \rightarrow r \underset{s}{<} t) \rightarrow \bigvee q \bigwedge rt\, (r \in u \wedge r \neq q \wedge t \in v \wedge t \neq q \rightarrow r \underset{s}{<} q \wedge q \underset{s}{<} t)$.

---

[7] Die Definitionsglieder $r \mid t \in s$, $r \mid t^{-1} \in \bar{s}$ und $t^{-1} \mid r \in \bar{s}$ stellen sicher, daß gilt $r \in \bar{s} \wedge t \in \bar{s} \rightarrow r \mid t \in \bar{s}$.

[8] Statt der Existenz der s-Grenze von u könnte man natürlich mit dem gleichen Effekt auch die Existenz der oberen Grenze von u fordern, sofern u nach oben beschränkt ist.

Beweis: Ist u oder v leer, so ist die Behauptung trivial. Wir können also für das folgende annehmen $u \neq \Lambda$ und $v \neq \Lambda$.
1. Fall: $u \cap s \neq \Lambda$. Wir setzen $u^* := \lambda r \bigvee t\, (t \in u \wedge r \underset{s}{\leqq} t)$ und $v^* := \lambda r \bigvee t$ $(t \in v \wedge t \underset{s}{\leqq} r)$. Nach 5.5 gibt es dann ein t, so daß $u^* \underset{s}{lim}\, t$, also $r \in s \wedge r \underset{s}{<} t \rightarrow r \in u^*$ und $t \underset{s}{<} r \rightarrow \bigvee q\, (q \in s \wedge q \underset{s}{<} r \wedge \neg\, q \in u^*)$. Nach Definition von u^* gilt dann $t \underset{s}{<} r \rightarrow \neg\, r \in u^*$, also wegen A1 $r \in u^* \wedge r \neq t \rightarrow r \underset{s}{<} t$, wegen $r \in u \rightarrow r \in u^*$, also $r \in u \wedge r \neq t \rightarrow r \underset{s}{<} t$. Aus $r \in v^* \rightarrow \neg\, r \in u^*$ und $\neg\, r \in u^* \wedge r \neq t \rightarrow t \underset{s}{<} r$ erhalten wir mit $r \in v \rightarrow r \in v^*$ auch $r \in v \wedge r \neq t \rightarrow t \underset{s}{<} r$. t ist also ein q, wie es A4 verlangt.
2. Fall: $u \cap s = \Lambda$. Wegen $u \neq \Lambda$ gibt es ein p aus u und wir können annehmen $p \neq 0$, denn für $u = \{0\}$ ist 0 das in A4 gesuchte q. Die Menge $u' := \lambda r \bigvee t$ $(t \in u \wedge r = t \mid p^{-2})$ enthält dann Elemente aus s, z. B. $p \mid p^{-2}$. Wenn wir setzen $v' := \lambda r \bigvee t\, (t \in v \wedge r = t \mid p^{-2})$, so gibt es also ein q', so daß gilt $\bigwedge rt\, (r \in u' \wedge r \neq q'$ $\wedge\, t \in v' \wedge t \neq q' \rightarrow r \underset{s}{<} q' \wedge q' \underset{s}{<} t)$. Setzt man nun $q := q' \mid p^2$, so gilt $r \in u \wedge r \neq q \rightarrow$ $r \underset{s}{<} q$. Denn aus $r \in u \wedge r \neq q$ folgt $r \mid p^{-2} \in u'$ und $r \mid p^{-2} \neq q'$, daraus $q' \mid (r \mid p^{-2})^{-1}$ $= q' \mid p^2 \mid r^{-1} = q \mid r^{-1} \in s$. Ferner gilt: $t \in v \wedge t \neq q \rightarrow q \underset{s}{<} t$. Denn aus $t \in v \wedge t \neq q$ folgt $t \mid p^{-2} \in v'$ und $t \mid p^{-2} \neq q'$, daraus $t \mid p^{-2} \mid q'^{-1} = t \mid (q' \mid p^2)^{-1} = t \mid q^{-1} \in s$. Die letztere Betrachtung ergibt, sofern wir setzen $u' := \lambda r \bigvee t\, (t \in u \wedge r = t \mid p)$, allgemein den Satz:

T2: $u \underset{s}{lim}\, t \rightarrow u' \underset{s}{lim}\, t \mid p$.

T3: $u \underset{s}{lim}\, t \wedge u \underset{s}{lim}\, r \rightarrow t = r$, [189], Satz 602.

Wäre $t \neq r$ und z. B. $t \underset{s}{<} r$, so erhielten wir aus $u \underset{s}{lim}\, r$ nach 5.4 $\bigwedge q\, (q \in s \wedge q \underset{s}{<} r \rightarrow$ $q \in u)$ und daher $\bigvee r\, (t \underset{s}{<} r \wedge \neg \bigvee q\, (q \in s \wedge q \underset{s}{<} r \wedge \neg\, q \in u)$, also $\neg\, u \underset{s}{lim}\, t$.

T4: $r \in s \wedge t \in s \rightarrow \bigvee q\, ({}_*r^{\geqq 0}\, (r, q) \wedge \neg\, q \underset{s}{<} t)$, [203], Satz 635.

Dabei sei ${}_*p\, (r, t) := r \mid p = t$, so daß also gilt $\bigvee t\, {}_*p^{\geqq 0}\, (p, t)$ genau dann, wenn es eine nicht negative ganze Zahl m gibt, so daß $t = p^m$ ist [166].
Beweis: Wir setzen $u := \lambda p \bigvee q\, ({}_*r^{\geqq 0}\, (r, q) \wedge p \underset{s}{<} q)$ und $v := \lambda p \bigvee q$ $({}_*r^{\geqq 0}\, (r^2, q) \wedge p \underset{s}{<} q)$. Würde nun gelten $\bigwedge q\, ({}_*r^{\geqq 0}\, (r, q) \rightarrow q \underset{s}{<} t)$, so gäbe es wegen $t \in s$ und $\neg\, t \in u$ ein p^+ mit $u \underset{s}{lim}\, p^+$, also nach T3 $v \underset{s}{lim}\, p^+ \mid r$. Nun gilt aber $u = v$ und nach T3 würden wir somit erhalten $p^+ = p^+ \mid r$, im Widerspruch zur Annahme $r \in s$, d. h. zu $r \neq 0$.

T5: $t \in s \rightarrow r \mid t \mid r^{-1} \in s$, [206f].

Beweis: 1. Fall: $r = 0$. Es gilt dann $r \mid t \mid r^{-1} = t \in s$.
2. Fall: $r \in s$. Ist dann $t \mid r^{-1} \in s$, so $r \mid t \mid r^{-1} \in s$ nach 5.2. Ist $t = r$, so ist $r \mid t \mid r^{-1} = r$ und $r \in s$. Andernfalls ist wegen A1 $r \mid t^{-1} \in s$. Nach T4 gibt es dann eine Zahl m, so daß gilt: $t^m \underset{s}{<} r \underset{s}{\leqq} t^{m+1}$. Sei $r = t^{m+1}$, dann ist $r \mid t \mid r^{-1} = t^{m+1} \mid t \mid t^{-m-1} = t \in s$. Sei $r \underset{s}{<} t^{m+1}$, so erhalten wir $r \mid t \mid r^{-1} = (r \mid t^{-m}) \mid (t^{m+1} \mid r^{-1}) \in s$, da beide Faktoren nach Voraussetzung Elemente von s sind.

3. Fall: Wir beweisen $r \in s \wedge t \in s \to r^{-1} \mid t \mid r \in s$. Daraus folgt dann für $\neg\, r \in s$ und $r \neq 0$, also für $r^{-1} \in s$: $(r^{-1})^{-1} \mid t \mid r^{-1} = r \mid t \mid r^{-1} \in s$. — Gilt $r^{-1} \mid t \in s$, so nach 5.2 auch $r^{-1} \mid t \mid r \in s$. Ist $r = t$, so erhalten wir $r^{-1} \mid t \mid r = r \in s$. Andernfalls gilt wegen A1 und 5.2 $t^{-1} \mid r \in s$. Aus unseren Überlegungen zum 2. Fall folgt I) $p \in s \wedge q \in s \wedge p^{-1} \mid q \in s \to p \mid (p^{-1} \mid q) \mid p^{-1} \in s$. Also gilt auch II) $p \in s \wedge q \in s \wedge p \mid q^{-1} \in s \to q^{-1} \mid p \in s$. Denn nach A1 und 5.2 gilt $q^{-1} \mid p \in s$ oder $q = p$ oder $p^{-1} \mid q \in s$. Ist $q = p$, so ist $p \mid q^{-1} = 0$, also $\neg\, p \mid q^{-1} \in s$. Ist $p^{-1} \mid q \in s$, so nach (I) $q \mid p^{-1} \in s$, also wegen $q \mid p^{-1} \mid p \mid q^{-1} = 0 \quad \neg\, p \mid q^{-1} \in s$.

Aus $t^{-1} \mid r \in s$ erhalten wir mit (I) $r \mid t^{-1} \in s$. Es gibt dann ein m, so daß gilt $t^m \underset{s}{<} r \underset{s}{\leqq} t^{m+1}$. Für $r = t^{m+1}$ finden wir $r^{-1} \mid t \mid r = t^{-m-1} \mid t \mid t^{m+1} = t \in s$. Für $r \underset{s}{<} t^{m+1}$ finden wir $t^{m+1} \mid r^{-1} \in s$, also nach (II) $r^{-1} \mid t^{m+1} \in s$. Aus $r \mid t^{-m} \in s$ folgt nach (II) $t^{-m} \mid r \in s$, also $r^{-1} \mid t \mid r = (r^{-1} \mid t^{m+1}) \mid (t^{-m} \mid r) \in s$. Damit ist die Behauptung $r \in s \wedge t \in s \to r^{-1} \mid t \mid r \in s$ bewiesen und also auch T5.

T6: $p \underset{s}{<} r \wedge r \underset{s}{<} t \to p \underset{s}{<} t$.

Aus $t \mid r^{-1} \in s$ und $r \mid p^{-1} \in s$ folgt nach 5.2 $t \mid r^{-1} \mid r \mid p^{-1} = t \mid p^{-1} \in s$.

T7: $q \underset{s}{<} p \to r \mid q \underset{s}{<} r \mid p \wedge q \mid r \underset{s}{<} p \mid r$.

Wegen $p \mid q^{-1} \in s$ gilt nach T5 $r \mid p \mid (r \mid q)^{-1} = r \mid p \mid q^{-1} \mid r^{-1} \in s$ und $p \mid r \mid (q \mid r)^{-1} = p \mid r \mid r^{-1} \mid q^{-1} = p \mid q^{-1} \in s$.

T8: $t \in s \to \bigvee q\, (q \in s \wedge q \mid q \underset{s}{<} t)$, [233], Satz 670.

Denn nach 5.5 gibt es zu t in s ein kleineres Element p, so daß $t \mid p^{-1} \in s$. Gilt nun $p \mid p \underset{s}{<} t$, so ist p das gesuchte q. Gilt $t \underset{s}{<} p \mid p$, so auch $t^2 \underset{s}{<} t \mid p^2$, $t^2 \mid p^{-2} \underset{s}{<} t$, $t \mid p^{-2} < 0$, $t \mid p^{-1} \underset{s}{<} p$, $(t \mid p^{-1})^2 \underset{s}{<} t \mid p^{-1} \mid p$ und $(t \mid p^{-1})^2 \underset{s}{<} t$ nach T7. Also ist dann $t \mid p^{-1}$ ein q der gesuchten Art. Gilt endlich $p^2 = t$, so gibt es ein $q \in s$, so daß $q \underset{s}{<} p$. Dann ist $q \mid q \underset{s}{<} p \mid q$ und $p \mid q \underset{s}{<} p \mid p$, also nach T6 $q \mid q \underset{s}{<} t$.

T9: $r \mid t = t \mid r$, [243], Satz 689.

Beweis: 1. Fall: $r \in s$ und $t \in s$. Wir setzen: $u_1 := \lambda p\, (p \in s \wedge p \underset{s}{<} r \mid t)$, $u_2 := \lambda p\, (p \in s \wedge p \underset{s}{<} t \mid r)$, $v_1 := \lambda p \bigvee q_1 q_2 q_3\, ({}_*q_{\bar{1}}^{\geqq 0}(q_1, q_2) \wedge {}_*q_{\bar{1}}^{\geqq 0}(q_1, q_3) \wedge q_2 \underset{s}{<} r \wedge q_3 \underset{s}{<} t \vee p \underset{s}{<} q_2 \mid q_3)$ und $v_2 := \lambda p \bigvee q_1 q_2 q_3\, ({}_*q_{\bar{1}}^{\geqq 0}(q_1, q_2) \wedge {}_*q_{\bar{1}}^{\geqq 0}(q_1, q_3) \wedge q_2 \underset{s}{<} r \wedge q_3 \underset{s}{<} t \wedge p \underset{s}{<} q_3 \mid q_2)$. Es gilt nun: $u_1 = v_1$. Denn aus $p \underset{s}{<} q_2 \mid q_3$ und $q_2 \underset{s}{<} r$ und $q_3 \underset{s}{<} t$ folgt $q_2 \mid q_3 \underset{s}{<} r \mid q_3 \underset{s}{<} r \mid t$, also $p \underset{s}{<} r \mid t$. Und wenn gilt $p \underset{s}{<} r \mid t$, so gibt es auch ein q aus s, so daß $q^m \underset{s}{<} r$ und $q^n \underset{s}{<} t$ und $p \underset{s}{<} q^{m+n}$. Denn nach 5.5 und T8 gibt es ein q aus s, so daß gilt $q \underset{s}{<} r$, $q \underset{s}{<} t$ und $q^2 \underset{s}{<} r \mid t \mid p^{-1}$. Nach T4 gibt es dann ein m und ein n, so daß $q^m \underset{s}{<} r \underset{s}{\leqq} q^{m+1}$ und $q^n \underset{s}{<} t \underset{s}{\leqq} q^{n+1}$. Aus $q^{n+1} \mid t^{-1} \underset{s}{\geqq} 0$ folgt nach T5 $r \mid q^{n+1} \mid t^{-1} \mid r^{-1} \underset{s}{\geqq} 0$, aus $q^{m+1} \mid r^{-1} \underset{s}{\geqq} 0$ folgt dann $q^{m+1} \mid r^{-1} \mid r \mid q^{n+1} \mid t^{-1} \mid r^{-1} = q^{m+n+2} \mid (r \mid t)^{-1} \underset{s}{\geqq} 0$, d. h. $r \mid t \underset{s}{<} q^{m+n+2}$ [9]. Aus $q^2 \underset{s}{<} r \mid t \mid p^{-1}$ folgt mit T7 $q^2 \mid p \underset{s}{<} r \mid t$ und $q^2 \mid p \underset{s}{<} q^{m+n+2}$, also $p \underset{s}{<} q^{m+n}$. — Ebenso zeigt man $u_2 = v_2$. Wegen $q^m \mid q^n = q^n \mid q^m$ gilt nun auch ${}_*q_{\bar{1}}^{\geqq 0}(q_1, q_2) \wedge {}_*q_{\bar{1}}^{\geqq 0}(q_1, q_3) \to q_2 \mid q_3 = q_3 \mid q_2$. Es ist also auch $v_1 = v_2$. Also folgt aus $u_1 \underset{s}{lim}\, r \mid t$ und $u_2 \underset{s}{lim}\, t \mid r$ mit T3 $r \mid t = t \mid r$.

Die Behauptung $u_1 \underset{s}{lim}\, r \mid t$ erhält man aber aus der Definition von u_1 und 5.4 sofort, wenn man beachtet: aus $r \mid t \underset{s}{<} p$ folgt $p \mid (r \mid t)^{-1} \in s$, also gibt es nach 5.5 ein q aus s, so daß $q \underset{s}{<} p \mid (r \mid t)^{-1}$. Es ist dann $r \mid t \underset{s}{<} q \mid r \mid t$ und $q \mid r \mid t \underset{s}{<} p$, also gilt $\wedge\, p\, (r \mid t \underset{s}{<} p \rightarrow \vee q\, (q \in s \wedge q \underset{s}{<} p \wedge \neg\, q \in u_1)$. Ebenso erhält man $u_2 \underset{s}{lim}\, t \mid r$.
2. Fall: $r^{-1} \in s$ und $t^{-1} \in s$. Dann gilt $r \mid t = (t^{-1} \mid r^{-1})^{-1} = (r^{-1} \mid t^{-1})^{-1} = t \mid r$.
3. Fall: $r \in s$ und $t^{-1} \in s$. Dann gilt $r \mid t = r \mid t \mid t^{-2} \mid t^2 = t \mid t^{-2} \mid r \mid t^2$, da nach Voraussetzung $t \mid t^{-2} = t^{-1}$ und r in s liegen. Ferner gilt $t \mid t^{-2} \mid r \mid t^2 = t \mid r \mid t^{-2} \mid t^2 = t \mid r$, da $r \in s$ und $t^{-2} \in s$. — Ebenso argumentiert man im Fall, daß $r^{-1} \in s$ und $t \in s$. Ist $r = 0$ oder $t = 0$, so ist die Behauptung von T9 trivial. Damit ist T9 für alle r und t aus $\bar{s}$ bewiesen.
Aus T1 und T9 erhält man nun sofort:

A5: $r \mid (t \mid p) = (r \mid p) \mid t$.

A6: $\wedge\, rt\, \vee q\, (r = t \mid q)$.

Man setzt für q $t^{-1} \mid r$. Dann gilt $r = t \mid q = t \mid t^{-1} \mid r$.

A7: $r \mid t \underset{s}{<} p \mid q \rightarrow r \underset{s}{<} p \vee t \underset{s}{<} q$.

Wenn gilt $p \mid q \mid (r \mid t)^{-1} \in s$ und $\neg\, r \underset{s}{<} p$, so gilt nach A1 entweder $r = p$ — dann finden wir $p \mid q \mid (r \mid t)^{-1} = p \mid q \mid t^{-1} \mid p^{-1} = p \mid p^{-1} \mid q \mid t^{-1} = q \mid t^{-1} \in s$, also $t \underset{s}{<} q$ — oder es gilt $p \underset{s}{<} r$, dann finden wir $r \mid p^{-1} \in s$, also mit $p \mid q \mid t^{-1} \mid r^{-1} = q \mid t^{-1} \mid (r \mid p^{-1})^{-1} \in s$ auch $q \mid t^{-1} \in s$.

A8: $e \in \bar{s}$.

Das folgt direkt aus der Voraussetzung $e \in s$ und 5.1.

A9: $e \underset{s}{<} e^2$.

Es gilt $e^2 \mid e^{-1} = e \in s$.
Damit ist unsere Behauptung bewiesen, daß $\langle \bar{s}, \mid \underset{s}{<}, e \rangle$ ein Modell des Axiomensystems 2.1 bildet, wenn gilt $P^*(s)$ und $e \in s$.
Als Folgesatz aus T8 und T9 führen wir noch folgendes Theorem an:

T10: $r \in s \rightarrow \vee t\, (t \in s \wedge t \mid t = r)$.

Beweis: Die Klasse $u := \lambda t\, (t \in s \wedge t \mid t \underset{s}{<} r)$ enthält kein größtes Element. Sei $t \in s$ und $t \mid t \underset{s}{<} r$, so gibt es nach T8 ein q, so daß $q \in s$ und $q^2 < r \mid t^{-2}$, also wegen T9 $(q \mid t)^2 \underset{s}{<} r$ und $q \mid t \in u$ und $t \underset{s}{<} q \mid t$ gilt. Ebenso zeigt man, daß die Klasse $v := \lambda t\, (t \in s \wedge r \underset{s}{<} t \mid t)$ kein kleinstes Element enthält: Sei $r \underset{s}{<} t \mid t$, $q \in s$ und $q^2 \underset{s}{<} t^2 \mid r^{-1}$, so ist $q^2 \mid r \underset{s}{<} t^2$ und $r \underset{s}{<} q^{-2} \mid t^2$, also nach T9 $(q^{-1} \mid t) \in v$ und $q^{-1} \mid t \underset{s}{<} t$, denn $t \mid (q^{-1} \mid t)^{-1} = t \mid t^{-1} \mid q \in s$. Nach 5.5 gibt es nun ein t, so daß gilt $u \underset{s}{lim}\, t$ und aus unseren Resultaten über u und v und $u \cap v = \wedge$ ergibt sich sofort $t \mid t = r$.

[9] Setzt man $r \underset{s}{\geqq} t := \neg\, r \underset{s}{<} t$, so gilt $r \underset{s}{\geqq} 0 \leftrightarrow r \in s \vee r = 0$. Man beachte ferner: aus $q \in s$ folgt $Ne\,(q)$ und $Ne\,(q^{-1})$ und $D_1(q) = D_2(q)$, also $\wedge\, xy\, (q(x,y) \rightarrow \vee\, uv\, (q(u,x) \wedge q(y,v)))$. Daraus erhält man $q^m \mid q^n = q^{m+n}$ für beliebige ganze m und n.

Man kann nun, in Entsprechung zu dem Vorgehen im Abschnitt 3, für die Größen des Gebietes einer Positivklasse s die Darstellung in der Form $r = m \cdot e + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i^M \cdot e}{2^i}$ erklären, wo e aus s ist. Man setzt dazu $m \cdot e = e^m$ und definiert vermittels T10 und A4 die Summen $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i^M \cdot e}{2^i}$. Dabei stehe nun $r + t$ für $r \mid t$.
Die Eindeutigkeit dieser Darstellung sowie die Darstellbarkeit jeder Relation aus s in dieser Form beweist man wie für die reellen Zahlen nach 2. Wir brauchen darauf hier nicht näher einzugehen, da wie die Eigenschaften der reellen Zahlen für die Relationen aus $\bar{s}$ bereits nachgewiesen haben.
Die reellen Zahlen lassen sich dann nach dem Plan Freges als Relationen zwischen den Größen eines Größengebietes einführen, das über einer Positivklasse aufgespannt ist:

5.6 $$R_{\langle m, M\rangle}(r, t) := \bigvee s \left(P^*(s) \wedge r \in s \wedge t = m \cdot r + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i^M \cdot r}{2^i} \right).$$

Diese Konstruktion ist erfolgreich, wenn es gelingt zu zeigen, daß es eine Positivklasse gibt. Frege hatte dafür folgenden Plan [161, 243]: Man definiert, ausgehend von den natürlichen Zahlen die reellen Zahlen nach 2 als geordnete Paare $\langle m, M\rangle$ und zeigt, daß die Relationen $x + a = y$ für positive reelle Zahlen a eine Positivklasse bilden. Um die Existenz der Fregeschen reellen Zahlen nachzuweisen, benützt man also die reellen Zahlen in der Charakterisierung nach 2. Der Nachweis selbst ist sehr einfach, wenn man die Eigenschaften der reellen Zahlen für die Paare $\langle m, M\rangle$ bereits bewiesen hat. Setzt man $\bar{a} := \lambda z \bigvee xy\,(z = \langle x, y\rangle \wedge x + a = y)$ und $s :=$ Klasse der $\bar{a}$ für positive a, so gilt: $\bar{a}^{-1} = \overline{-a}$, $\bar{a} \mid \bar{b} = \overline{a+b}$, $\bar{a} \mid \bar{b}^{-1} = \overline{a-b}$ und $\bar{s} =$ Klasse der $\bar{a}$ für beliebige reelle a. Aus 5.2 erhalten wir dann sofort $P(s)$ und aus A3 und A4 auch $P^*(s)$. Die Klassen $R_{\langle m, M\rangle}$ sind also für kein $\langle m, M\rangle$ leer. Ferner gilt $R_{\langle m, M\rangle} \cap R_{\langle m', M'\rangle} = \Lambda$ für $m \neq m'$ oder $M \neq M'$. Denn wegen der Darstellbarkeit aller Elemente einer Positivklasse s in der Form $m \cdot r + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i^M}{2^i}$, wo $m \geqq -1$ und $r \in s$ ist, gilt $r \in s \wedge P^*(s) \wedge r \in s' \wedge P^*(s') \rightarrow s = s'$. Wegen der Eindeutigkeit dieser Darstellung gilt aber auch $m \cdot r + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i^M \cdot r}{2^i} = m' \cdot r + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i^{M'} \cdot r}{2^i} \rightarrow$ $\rightarrow m = m' \wedge M = M'$. Es besteht also eine eineindeutige Zuordnung zwischen den Paaren $\langle m, M\rangle$ und den Fregeschen Maßzahlen $R_{\langle m, M\rangle}$.
Für die Fregeschen reellen Zahlen, die Relationen $R_{\langle m, M\rangle}$, hat man endlich noch die Addition, die Kleiner-Beziehung und das Einselement in Analogie zu den entsprechenden Definitionen für die Paare $\langle m, M\rangle$ zu erklären. Man setzt also $\mathbf{R} :=$ Klasse aller Relationen $R_{\langle m, M\rangle}$, wo m eine ganze Zahl ist, N' die Menge der natürlichen Zahlen mit Ausschluß der Null und $M \subset N'$ (M unendlich). Ferner $\mathbf{1} := R_{\langle 0, N'\rangle}$ und $R_{\langle m, M\rangle} + R_{\langle m', M'\rangle} := R_{\langle m, M\rangle + \langle m', M'\rangle}$, wobei gelten soll $\langle m, M\rangle + \langle m', M'\rangle = \langle m + m' + m'', M''\rangle$, wenn $m'' + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i^{M''}}{2^i}$ die Entwicklung der Summe $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i^M + c_i^{M'}}{2^i}$ in die Normalform mit $c_i^{M''} = 0$ oder 1 ist. Endlich setzt man $R_{\langle m, M\rangle} < R_{\langle m', M'\rangle}$:

$= \langle m, M \rangle < \langle m', M' \rangle$, wobei $\langle m, M \rangle < \langle m', M' \rangle \leftrightarrow m < m' \vee m = m' \wedge \bigvee i \, (c_i^M < c_i^{M'} \wedge \bigwedge k \, (k < i \rightarrow c_k^M = c_k^{M'}))$. Man findet dann kraft der Isomorphie zwischen den Fregeschen Maßzahlen und den reellen Zahlen nach 2, daß auch $\langle \mathbf{R}, +, <, 1 \rangle$ ein Modell des Axiomensystems 2.1 bildet.

Die reellen Zahlen Freges lassen sich nun ihrer Definition nach direkt für Maßangaben verwenden. Wie aus der Fregeschen Definition der Anzahlen nach 4 folgt: $A\,(x) = n \leftrightarrow x \in n$, so erhalten wir aus 5.6: die Größe t hat, gemessen bzgl. der Größe r einer Positivklasse den reellen Wert $\langle m, M \rangle$ genau dann, wenn gilt $\langle r, t \rangle \in R_{\langle m, M \rangle}$. Wir können also zusammenfassen: Reell meßbare Größen lassen sich als Relationen einer Klasse auffassen, die bzgl. Relationsprodukt, Kleiner-Beziehung und Einselement ein Modell eines Axiomensystems der reellen Zahlen bildet. Über solchen Größen kann man die reellen Zahlen nach Frege als Maßrelationen einführen.

Bei der Übertragung der Fregeschen Definitionen der reellen Zahlen in ein System der axiomatischen Mengenlehre ergibt sich, wie für seine Definition der natürlichen Zahlen, die Schwierigkeit, daß sich der Mengencharakter der Zahlen nicht nachweisen läßt, so daß man sich bei der Definition der Positivklassen z. B. auf die Betrachtung von Größengebieten beschränken müßte, deren Relationen über Teilmengen einer festen Menge hinreichender Mächtigkeit definiert sind.