Arch. math. Logik 12 (1969), 104—118.

EIN VERALLGEMEINERTER WIDERLEGUNGSBEGRIFF FÜR GENTZENKALKÜLE*

Von Franz v. Kutschera

In [3] wurde eine aussagenlogische Semantik skizziert, in der gültige Schlüsse durch Ableitungsbeziehungen in Kalkülen definiert werden[1]. Dabei wurde darauf hingewiesen, daß es von diesem Ansatz her wünschenswert ist, einen möglichst allgemeinen Kalkültyp zu verwenden, und daß der Widerlegungsbegriff der dort verwendeten Gentzenkalküle einer Verallgemeinerung fähig ist. Eine solche Verallgemeinerung soll hier angegeben werden.

Das Interesse einer solchen Verallgemeinerung liegt erstens darin, daß sie die Frage nach der Auszeichnung der intuitionistischen Logik durch die Gentzensemantik in neuem Licht erscheinen läßt: Zunächst sieht es so aus, als ob durch den in [3] skizzierten semantischen Ansatz die intuitionistische Logik ausgezeichnet sei und sich auf natürliche Weise aus diesem Ansatz ergäbe, während etwa die klassische Logik nur durch eine Zusatzforderung an die dort zugrunde gelegten Kalküle K zu gewinnen sei, nach der jeder Satz beweisbar oder widerlegbar sein muß. Die Einführung des Widerlegungsbegriffs für die Gentzenkalküle, nach der eine Formel widerlegbar ist, wenn aus ihr beliebige Formeln ableitbar sind, ist aber keineswegs zwingend. Ebenso hätte man z. B. von einem Widerlegungsbegriff ausgehen können, der in Analogie zum skizzierten Beweisbegriff eingeführt ist, d. h. man hätte von Kalkülen K ausgehen können, die durch Antiaxiome definiert sind, die in K widerlegbar sind, und durch Deduktionsregeln, die besagen, wie aus bereits in K widerlegten Formeln eine neue in K widerlegbare Formel gewonnen werden kann. Dann hätte man den Beweisbegriff so einführen können, daß eine Formel beweisbar ist, wenn durch eine Widerlegung dieser Formel beliebige Formeln widerlegt werden können. So würde man zu einer Logik gelangen, die sich zur intuitionistischen Logik gewissermaßen spiegelbildlich bezüglich Beweis- und Widerlegungsbegriff verhält. Da aber durch den semantischen Grundgedanken einer Definition von Schlüssen durch Kalküle allein das eine Vorgehen nicht vor dem anderen ausgezeichnet ist, kann man nicht sagen, daß durch diesen Grundgedanken selbst schon die intuitionistische Logik ausgezeichnet sei.

Gelingt es, den Widerlegungsbegriff für Gentzenkalküle so zu verallgemeinern, daß sich in diesem Rahmen z. B. intuitionistische und klassische Logik auszeichnen lassen, so hat man – und darin liegt dann der zweite Vorteil dieser Verallgemeinerung – auch eine semantische Basis, bezüglich deren sich verschiedene Logiksysteme vergleichen lassen.

---

* Eingegangen am 29. 11. 1967.

[1] Die Bezeichnung „Semantik" versteht sich hier wie in [3] in dem allgemeinsten Sinn dieses Wortes, in dem man es auf Untersuchungen anwendet, die sich mit der Deutung von Ausdrücken, speziell von logischen Operatoren befassen, nicht aber in der engeren Bedeutung modelltheoretischer Untersuchungen.

1 *R-Formeln*

Es sei L eine Sprache, für die ein Formelbegriff definiert ist. Der Begriff der R-Formel über L wird dann durch folgende Bedingungen festgelegt:

a) Formeln von L sind R-Formeln über L.

b) Ist S eine R-Formel über L, die nicht die Gestalt $\sim T$ hat, so auch $\sim S$.

c) Sind $S_1, \ldots, S_n, T$ R-Formeln über L $(n \geqq 0)$, so ist auch $(S_1, \ldots, S_n \rightarrow T)$ eine R-Formel über L. Die Ausdrücke $S_1, \ldots, S_n$ bezeichnen wir dabei als *Vorderformeln*, T als *Hinterformel* von $(S_1, \ldots, S_n \rightarrow T)$.

d) Nur die Ausdrücke nach den Bedingungen (a) bis (c) sind R-Formeln über L.

Die äußeren Klammern um R-Formeln lassen wir meist weg. Als Mitteilungszeichen für Formeln verwenden wir die Buchstaben „A", „B", „C", als Mitteilungszeichen für R-Formeln die Buchstaben „S", „T", „U". Die Buchstaben „Δ", „Γ", „Π" symbolisieren im folgenden (evtl. leere) Reihen von R-Formeln, die durch Kommata getrennt sind.
Wir sagen, eine Formel von L habe den *R-Grad* 0 und wenn S den R-Grad n hat, so auch $\sim S$. Ist n das Maximum der R-Grade von Δ, S, so ist $n + 1$ der R-Grad von $\Delta \rightarrow S$. Als *Sequenzen* bezeichnen wir R-Formeln vom Grad 1.

Wir sagen ferner: S ist *R-Teilformel* von S und die R-Teilformeln von S, bzw. Δ, S sind auch R-Teilformeln von $\sim S$, bzw. $\Delta \rightarrow S$. Als *Formelkomponenten* einer R-Formel S bezeichnen wir die R-Teilformeln vom R-Grad 0 von S.

2 *Der Ableitungsbegriff für R-Formeln*

Wir gehen aus von einem Kalkül K über der Sprache L, der definiert ist durch Angabe einer entscheidbaren Menge von Axiomen, die als in K beweisbar gelten, einer entscheidbaren Menge von Antiaxiomen, die als in K widerlegbar gelten, und einer entscheidbaren Menge von Grundregeln, die besagen, wie aus bereits in K bewiesenen Formeln $A_1, \ldots, A_m$ und bereits in K widerlegten Formeln $B_1, \ldots, B_n$ $(m, n \geqq 0)$ eine neue in K beweisbare, bzw. widerlegbare Formel C gewonnen werden kann.

Ist A Antiaxiom von K, so wollen wir den Ausdruck $\sim A$ als Axiom von K bezeichnen, und ist A in K widerlegbar, so nennen wir den Ausdruck $\sim A$ in K beweisbar. Dann stellt sich K dar als ein Kalkül im üblichen Sinn, in dem neben Formeln auch Ausdrücke der Gestalt $\sim A$ beweisbar sind. Man wird also festlegen: Eine Ableitung eines Ausdrucks C, bzw. $\sim C$ in K aus Ausdrücken $A_1, \ldots, A_m$ und $\sim B_1, \ldots, \sim B_n$ ist eine endliche Folge von Ausdrücken, deren letztes Glied C, bzw. $\sim C$ ist und für deren sämtliche Glieder gilt: sie sind Axiome von K oder Annahmeformeln aus $A_1, \ldots, A_m, \sim B_1, \ldots, \sim B_n$ oder sie gehen durch einmalige Anwendung einer der Grundregeln von K aus vorhergehenden Gliedern der Folge hervor. C, bzw. $\sim C$ ist also in K aus $A_1, \ldots, A_m, \sim B_1, \ldots, \sim B_n$ ableitbar (symbolisch: $A_1, \ldots, A_n, \sim B_1, \ldots, \sim B_n \rightarrow C$, bzw. $A_1, \ldots, A_m, \sim B_1, \ldots, \sim B_n \rightarrow \sim C$) genau dann, wenn C bzw. $\sim C$ in dem Kalkül K' beweisbar ist, der aus K hervorgeht durch Hinzunahme von $A_1, \ldots, A_m$ zu den Axiomen und von $B_1, \ldots, B_n$ zu den Antiaxiomen.

Nach den Überlegungen in [3], 1.2 ordnen wir nun dem Kalkül K einen Sequenzenkalkül $\bar{K}$ zu, der wie folgt bestimmt wird:

A1) Ist S Axiom von K, so ist $\rightarrow S$ Axiom von $\bar{K}$.

A2) Ist $\Delta \rightarrow S$ eine Grundregel von K, so ist $\Delta \rightarrow S$ Axiom von $\bar{K}$.

Die Axiome nach A1 und A2 bezeichnen wir wieder als *spezielle* Axiome von $\bar{K}$. Ferner enthält $\bar{K}$ folgende Axiome und Regeln:

RF) $S \rightarrow S$ (Prinzip der Reflexivität),

VV) $\Delta \rightarrow S \vdash \Delta, T \rightarrow S$ (Prinzip der Prämissenverdünnung),

TR) $\Delta \rightarrow S; \Delta, S \rightarrow T \vdash \Delta \rightarrow T$ (Prinzip der Transitivität)

ST) $\Delta, S, T, \Gamma \rightarrow U \vdash \Delta, T, S, \Gamma \rightarrow U$ (Prinzip der Prämissenvertauschung)

SK) $\Delta, S, S \rightarrow T \vdash \Delta, S \rightarrow T$ (Prinzip der Prämissenkontraktion).

Eine Anwendung der Strukturregeln ST und SK wird im folgenden nicht explizit hervorgehoben.

Man erhält dann wie in [3] den

Satz 1: Die Sequenz $\Delta \rightarrow S$ ist in $\bar{K}$ genau dann beweisbar, wenn S in K aus den Annahmeformeln Δ ableitbar ist.
Um den Ableitungsbegriff für R-Formeln beliebigen Grades zu erklären, geht man wie in [3], 1.2 vor. Man nimmt also zu $\bar{K}$ die Regeln PB und PE hinzu, die wir hier als Regeln 1 HF und 1 VF bezeichnen wollen:

1 HF: $\Delta, \Gamma \rightarrow S \vdash \Delta \rightarrow (\Gamma \rightarrow S)$ (Prinzip der Prämissenbeseitigung),

1 VF: $\Delta \rightarrow \Gamma; \Delta, S \rightarrow T \vdash \Delta, (\Gamma \rightarrow S) \rightarrow T$ (Prinzip der Prämisseneinführung[2]).

Dabei stehe $\Delta \rightarrow \Gamma$ für $\Delta \rightarrow U_1; \ldots; \Delta \rightarrow U_n$, wo Γ die R-Formel-Reihe $U_1, \ldots, U_n$ ist.

Weiterhin ist nun aber auch festzulegen, unter welchen Bedingungen eine R-Formel $\Gamma \rightarrow S$ widerlegbar ist. Es liegt nahe, eine Widerlegbarkeit der Ableitungsbeziehung $\Gamma \rightarrow S$, bzw. $\Gamma \rightarrow \sim S$ durch die Beweisbarkeit der Γ-Formeln und die Widerlegbarkeit, bzw. Beweisbarkeit von S zu definieren. Um diese beiden Regeln als eine formulieren zu können, setzen wir fest, daß $\sim S$ für U stehen soll, wo S mit $\sim U$ identisch ist. Dann erhält man die Regel:

2 HF: $\Delta \rightarrow \Gamma; \Delta \rightarrow \sim S \vdash \Delta \rightarrow \sim (\Gamma \rightarrow S)$ (1. Prinzip der Widerlegung von Ableitungsbeziehungen).

---

[2] Mit 1 VF ist wieder die Umkehrung von 1 HF: $\Delta \rightarrow (\Gamma \rightarrow S) \vdash \Delta, \Gamma \rightarrow S$ äquivalent, die wir in [3] als PE′ bezeichnet haben.

Fordert man auch die Notwendigkeit dieser Bedingung, d. h. die Regeln

$$\varDelta \to \sim (\varGamma \to S) \vdash \varDelta \to \varGamma \quad \text{und} \quad \varDelta \to \sim (\varGamma \to S) \vdash \varDelta \to \sim S\,,$$

so erhalten wir eine Bedingung für die Ableitbarkeit aus R-Formeln der Gestalt $\sim (\varGamma \to S)$:

2 VF: $\varDelta, \varGamma, \sim S \to T \vdash \varDelta, \sim (\varGamma \to S) \to T$ (2. Prinzip der Widerlegung von Ableitungsbeziehungen).

Erklärt man den Ableitungsbegriff für R-Formeln in K induktiv, indem man R-Formeln von immer höherem Grad in dem Kalkül zuläßt, der aus $\bar{K}$ durch Hinzunahme der Regeln 1 HF bis 2 VF entsteht, so gilt der Satz 1 in der Formulierung

Satz 1': Ist $\bar{K}_\infty$ der Kalkül, der gegenüber $\bar{K}$ zusätzlich die Regeln 1 HF bis 2 VF enthält und in dem beliebige R-Formeln anstelle der Sequenzen in $\bar{K}$ zugelassen sind, so ist eine R-Formel $\varDelta \to S$ in $\bar{K}_\infty$ beweisbar genau dann, wenn S in K aus den $\varDelta$-Formeln ableitbar ist.

Das ergibt sich wie in [3] aus der Eliminierbarkeit der Regel TR in $\bar{K}_\infty$ für Anwendungen mit Schnittformeln von größerem R-Grad, als sie in den speziellen Axiomen von $\bar{K}_\infty$ vorkommen.
Wie in [3] kann man auch für $\bar{K}_\infty$ das Deduktionstheorem beweisen:

Satz 2: Gilt in $\bar{K}_\infty$ $\varDelta, \varGamma \vdash S$, so gilt auch $\varDelta \vdash \varGamma \to S$.

Daraus folgt insbesondere, daß $\bar{K}_\infty$ abgeschlossen ist gegenüber einer deduktiven Erweiterung durch Regeln, die 1 HF bis 2 VF entsprechen, da diese Regeln in $\bar{K}_\infty$ beweisbar sind.
Es stehe $S \Rightarrow T$ für $S \to T$ und $\sim T \to \sim S$, und $S \Leftrightarrow T$ stehe für $S \Rightarrow T$ und $T \Rightarrow S$. Dann läßt sich das Ersetzungstheorem für Gentzenkalküle im Sinne von $\bar{K}_\infty$ so formulieren:

Satz 3: $S \Leftrightarrow T \vdash U_S \Leftrightarrow U_T$.

Dabei sei U_S eine R-Formel, die an einer bestimmten Stelle ein Vorkommnis von S enthält und U_T gehe aus U_S hervor durch Ersetzung dieses Vorkommnisses von S durch ein solches von T. Ist g der R-Grad von U_S minus dem R-Grad von S, so beweist man den Satz durch Induktion nach g in Entsprechung zu dem Satz 3 aus [3].
Gilt $S \Leftrightarrow T$, so nennen wir die R-Formeln S und T auch *streng äquivalent*. Da S und $(\to S)$ streng äquivalent sind, kann man also z. B. die R-Formeln $(\to S)$ in allen Kontexten durch S ersetzen und erhält dabei streng äquivalente Formeln.

3 *Die Definition aussagenlogischer Operatoren*

Nach den Grundgedanken, die in [3], 2.1 dargelegt wurden, kann man nun eine Semantik auf der Basis von Gentzenkalkülen mit verallgemeinertem Widerlegungsbegriff aufbauen. In diesem Rahmen ist dann ein n-stelliger aussagenlogischer Operator F zu definieren durch Angabe von Regeln, die besagen, wie

Ausdrücke der Gestalt $F(A_1, \ldots, A_n)$ und $\sim F(A_1, \ldots, A_n)$ als Hinter-, bzw. Vorderformeln eingeführt werden können. Wie in [3] erhält man für die Formel $F(A_1, \ldots, A_n)$ folgende Regeln:

$$\text{I)} \quad \Delta \to S_{11}; \ldots; \Delta \to S_{1s_1} \vdash \Delta \to F(A_1, \ldots, A_n),$$
$$\ldots$$
$$\Delta \to S_{t1}; \ldots; \Delta \to S_{ts_t} \vdash \Delta \to F(A_1, \ldots, A_n),$$
$$\text{II)} \quad \Delta, S_{11}, \ldots, S_{1s_1} \to T; \ldots; \Delta, S_{t1}, \ldots, S_{ts_t} \to T \vdash \Delta, F(A_1, \ldots, A_n) \to T.$$

Dabei seien S_{ik_i} $(i = 1, \ldots, t; k_i = 1, \ldots, s_i)$ R-Formeln, deren Formelkomponenten Formeln aus $A_1, \ldots, A_n$ sind.

Zusätzlich sind nun Regeln anzugeben für die Einführung der R-Formeln $\sim F(A_1, \ldots, A_n)$. Offenbar kann man diese Regeln nicht unabhängig von (I) und (II) ansetzen, wenn die Konsistenz der Gentzenkalküle bei der Hinzunahme der semantischen Regeln erhalten bleiben soll, so daß also nicht zugleich $\to F(A_1, \ldots, A_n)$ und $\to \sim F(A_1, \ldots, A_n)$ beweisbar ist, sofern nicht für mindestens ein A_j $(j = 1, \ldots, n)$ zugleich $\to A_j$ und $\to \sim A_j$ beweisbar ist. Es liegt unter diesem Gesichtspunkt nahe, die Regelschemata zur Einführung von $\sim F(A_1, \ldots, A_n)$ als Hinterformel so zu wählen, daß, wenn nach (I) aus der Beweisbarkeit von $S_{i1}, \ldots, S_{is_i}$ für ein i die Beweisbarkeit von $F(A_1, \ldots, A_n)$ folgt, nun aus der Widerlegbarkeit aller S-Formelreihen $S_{i1}, \ldots, S_{is_i}$ die Widerlegbarkeit von $F(A_1, \ldots, A_n)$ folgt. Man gelangt so zu folgenden Regeln:

$$\text{III)} \quad \Delta \to \sim S_{1k_{11}}; \ldots; \Delta \to \sim S_{tk_{t1}} \vdash \Delta \to \sim F(A_1, \ldots, A_n),$$
$$\ldots$$
$$\Delta \to \sim S_{1k_{1r}}; \ldots; \Delta \to \sim S_{tk_{tr}} \vdash \Delta \to \sim F(A_1, \ldots, A_n).$$

Dabei sei $r = s_1 \times \ldots \times s_t$ und $k_{il} = 1, \ldots, s_i$ für $l = 1, \ldots, r$.

Mit der Forderung der Nichtkreativität der Definitionsregeln für den Operator F erhält man dann, ebenso wie (II) aus (I), aus (III) die Regeln:

$$\text{IV)} \quad \Delta, \sim S_{1k_{11}}, \ldots, \sim S_{tk_{t1}} \to T; \ldots; \Delta, \sim S_{1k_{1r}}, \ldots,$$
$$\sim S_{tk_{tr}}, \to T \vdash \Delta, \sim F(A_1, \ldots, A_n) \to T. [3]$$

Auf Grund dieser Regeln kann man nun das folgende Ersetzungstheorem beweisen:

Satz 4: $A \Leftrightarrow B \vdash C_A \Leftrightarrow C_B$.

Dabei sei C_A eine Formel, die ein bestimmtes Vorkommnis von A enthält und C_B entstehe aus C_A durch Ersetzung dieses Vorkommnisses durch ein solches von B. Den Beweis des Satzes führt man durch Induktion nach der Zahl g, dem Grad von C_A minus dem Grad von A. Als *Grad* einer Formel bezeichnet man dabei die Zahl der Vorkommnisse logischer Operatoren in ihr.

Mit Satz 3 erhält man dann sofort auch den

[3] Vgl. [3], 2.1.

Satz 5: $A \Leftrightarrow B \vdash S_A \Leftrightarrow S_B$, wobei nun S_A eine R-Formel ist, die ein Vorkommnis der Formel A enthält.
Es seien nun die Operatoren $\neg, \wedge, \vee, \supset$ durch folgende Regeln nach den Schemata (I) bis (IV) definiert:

1HN: $\Delta \to {\sim} A \vdash \Delta \to \neg A$ **1VN:** $\Delta, {\sim} A \to S \vdash \Delta, \neg A \to S$

2HN: $\Delta \to A \vdash \Delta \to {\sim} \neg A$ **2VN:** $\Delta, A \to S \vdash \Delta, {\sim} \neg A \to S$

1HK: $\Delta \to A; \Delta \to B \vdash \Delta \to A \wedge B$ **1VK:** $\Delta, A, B \to S \vdash \Delta, A \wedge B \to S$

2HK: $\Delta \to {\sim} A \vdash \Delta \to {\sim} A \wedge B$

$\Delta \to {\sim} B \vdash \Delta \to {\sim} A \wedge B$

2VK: $\Delta, {\sim} A \to S; \Delta, {\sim} B \to S \vdash \Delta, {\sim} A \wedge B \to S$

1HD: $\Delta \to A \vdash \Delta \to A \vee B$

$\Delta \to B \vdash \Delta \to A \vee B$

1VD: $\Delta, A \to S; \Delta, B \to S \vdash \Delta, A \vee B \to S$

2HD: $\Delta \to {\sim} A; \Delta \to {\sim} B \vdash \Delta \to {\sim} A \vee B$

2VD: $\Delta, {\sim} A, {\sim} B \to S \vdash \Delta, {\sim} A \vee B \to S$

$\Delta \to (A \to B) \vdash \Delta \to A \supset B$,

oder äquivalent **1HJ:** $\Delta, A \to B \vdash \Delta \to A \supset B$

$\Delta, (A \to B) \to S \vdash \Delta, A \supset B \to S$,

oder äquivalent **1VJ:** $\Delta \to A; \Delta, B \to S \vdash \Delta, A \supset B \to S$

$\Delta \to {\sim} (A \to B) \vdash \Delta \to {\sim} A \supset B$,

oder äquivalent **2HJ:** $\Delta \to A; \Delta \to {\sim} B \vdash \Delta \to {\sim} A \supset B$

$\Delta, {\sim} (A \to B) \to S \vdash \Delta, {\sim} A \supset B \to S$,

oder äquivalent **2VJ:** $\Delta, A, {\sim} B \to S \vdash \Delta, {\sim} A \supset B \to S$.

Daraus ergibt sich sofort: $\neg A \Leftrightarrow {\sim} A$ und $A \supset B \Leftrightarrow (A \to B)$.

Die Vollständigkeit des Operatorensystems $\{\neg, \wedge, \vee, \supset\}$ erhält man auf folgendem Weg: Wir ordnen jeder R-Formel S eine Formel $\bar{S}$ zu. Es sei $\bar{S} = S$, wo S eine Formel ist, $\overline{{\sim} S}$ sei $\neg \bar{S}$, $\bar{\Delta}$ sei $\bar{S}_1, \ldots, \bar{S}_n$ und $\bar{\bar{\Delta}}$ sei $\bar{S}_1 \wedge \cdots \wedge \bar{S}_n$, wo Δ die R-Formelreihe $S_1, \ldots, S_n$ ist. $\overline{(\Delta \to S)}$ endlich sei $\bar{\bar{\Delta}} \supset \bar{S}$ und $\overline{(\to S)}$ sei $\bar{S}$. Dann gilt der

Satz 6: $\vdash \bar{S} \Leftrightarrow S$.

Wir führen den Beweis durch Induktion nach dem R-Grad g von S. Für $g = 1$ ist die Behauptung trivial wegen $S \Leftrightarrow S$ und ${\sim} S \Leftrightarrow \neg S$. Sei die Behauptung für alle $g \leqq n$ bewiesen und sei nun $g = n + 1$. Hat dann S die Gestalt $T_1, \ldots, T_n \to U$, so gilt nach Induktionsvoraussetzung und Satz 5 $(T_1, \ldots, T_n \to U) \Leftrightarrow (\bar{T}_1, \ldots, \bar{T}_n \to \bar{U})$. Nach 1HK, 1VK, 2HF, 2VF gilt aber $(\bar{T}_1, \ldots, \bar{T}_n \to \bar{U}) \Leftrightarrow (\bar{T}_1 \wedge \cdots \wedge \bar{T}_n \to \bar{U})$ und wegen $A \supset B \Leftrightarrow (A \to B)$ gilt $(\bar{T}_1 \wedge \cdots \wedge \bar{T}_n \to \bar{U}) \Leftrightarrow \bar{T}_1 \wedge \cdots \wedge \bar{T}_n \supset \bar{U}$, so daß wir endlich erhalten $(T_1, \ldots, T_n \to U) \Leftrightarrow \overline{(T_1, \ldots, T_n \to U)}$. Wegen ${\sim} S \Leftrightarrow \neg S$ gilt dann auch ${\sim} (T_1, \ldots, T_n \to U) \Leftrightarrow \overline{{\sim} (T_1, \ldots, T_n \to U)}$.

Aus (I) und (II) erhalten wir nun wie in [3], 2.2 $F(A_1, \ldots, A_n) \leftrightarrow B$, wo B die Formel $(\bar{S}_{11} \wedge \cdots \wedge \bar{S}_{1 s_1}) \vee \cdots \vee (\bar{S}_{t1} \wedge \cdots \wedge \bar{S}_{t s_t})$ ist. Nach (III) gilt ferner:

$$\sim S_{1 k_{11}}, \ldots, \sim S_{t k_{t1}} \rightarrow \sim F(A_1, \ldots, A_n); \ldots; \sim S_{1 k_{1r}}, \ldots, \sim S_{t k_{tr}} \rightarrow \sim F(A_1, \ldots, A_n).$$

Daraus erhalten wir mit den Sätzen 6 und 5 und 2VK

$$\sim (\bar{S}_{11} \wedge \cdots \wedge \bar{S}_{1 s_1}), \ldots, \sim (\bar{S}_{t1} \wedge \cdots \wedge \bar{S}_{t s_t}) \rightarrow \sim F(A_1, \ldots, A_n), \quad \text{mit 2VD also}$$

$$\sim B \rightarrow \sim F(A_1, \ldots, A_n).$$

Endlich gilt:

$$\sim S_{1 k_{1l}}, \ldots, \sim S_{t k_{tl}} \rightarrow \sim S_{k 1_l}; \ldots; \sim S_{1 k_{1l}}, \ldots, \sim S_{t k_{tl}} \rightarrow \sim S_{t k_{tl}} \text{ für alle } l = 1, \ldots, r.$$

Mit den Sätzen 6, 5 und 2HK erhalten wir also:

$$\sim S_{1 k_{1l}}, \ldots, \sim S_{t k_{tl}} \rightarrow \sim \bar{S}_{11} \wedge \cdots \wedge \bar{S}_{1 s_1}; \ldots; \sim S_{1 k_{1l}}, \ldots, \sim S_{t k_{tl}} \rightarrow \sim \bar{S}_{t1} \wedge \cdots \wedge \bar{S}_{ts}$$

und mit 2HD

$\sim \bar{S}_{1 k_{1l}}, \ldots, \sim \bar{S}_{t k_{tl}} \rightarrow \sim B$. Daraus folgt aber mit (IV) $\sim F(A_1, \ldots, A_n) \rightarrow \sim B$.

Es gilt also $F(A_1, \ldots, A_n) \Leftrightarrow B$, so daß man $F(A_1, \ldots, A_n)$ nach Satz 5 in allen Kontexten durch B ersetzen, also durch die Formel B definieren kann, die sich aus den Formeln $A_1, \ldots, A_n$ nach Konstruktion nur mit den Operatoren $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\supset$ zusammensetzt. Das System dieser Operatoren ist also vollständig. Es gilt nun aber, wie man leicht verifiziert, der

Satz 7: $A \vee B \Leftrightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$.

Man kann also auch $A \vee B$ durch $\neg(\neg A \wedge \neg B)$ definieren, so daß auch das Operatorensystem $\{\neg, \vee, \supset\}$ vollständig ist.

4 *Die direkte Aussagenlogik*

4.1 Ist K ein Gentzenkalkül im Sinn des Abschnitts 2, dessen spezielle Axiome nur Atomformeln als Formelkomponenten enthalten, so sei K^* die Erweiterung von K mit den semantischen Regeln 1HN bis 2VI. Ist M der Gentzenkalkül, der keine speziellen Axiome enthält, so ist dann M^* ein Logikkalkül, in dem genau diejenigen R-Formeln beweisbar sind, die in allen Kalkülen K^* bewiesen werden können. Wir wollen hier zur Vereinfachung der Bezugnahme die Aussagenlogik, wie sie in M^* formalisiert ist, als *direkte Aussagenlogik* bezeichnen, da in ihr alle indirekten Schlußweisen ausgeschlossen sind.

In M^* ist die Regel TR eliminierbar, wie man in Anlehnung an die üblichen Beweisverfahren leicht zeigen kann. Daher kann man durch Induktion nach dem R-Grad von S plus der Summe der Grade der Formelkomponenten von S die Widerspruchsfreiheit von M^* in folgendem Sinn beweisen:

Satz 8: In M^* ist für keine R-Formel S zugleich $\rightarrow S$ und $\rightarrow \sim S$ beweisbar.

Wie in [3], 2.3 beweist man über die Eliminierbarkeit der Regel TR auch leicht den Satz, daß in M^* genau diejenigen Sequenzen beweisbar sind, die in dem Kalkül $M^{*\prime}$ bewiesen werden können, der aus M^* entsteht, indem man die Axiome auf Sequenzen beschränkt und die Regeln 1HF bis 2VF wegläßt. Da sich M^* als deduktive Erweiterung von $M^{*\prime}$ darstellt und da weiterhin die Menge der in M^* beweisbaren R-Formeln $\varDelta \to S$ nach den Sätzen 6 und 5 bereits durch die Menge der in $M^{*\prime}$ beweisbaren Sequenzen $\bar{\varDelta} \to \bar{S}$ festgelegt ist, kann man auch $M^{*\prime}$ als Kalkül der direkten Aussagenlogik ansprechen. Um den Gehalt dieser Logik noch einmal zu umgrenzen, ordnen wir $M^{*\prime}$ einen axiomatischen Formelkalkül $\mathfrak{M}$ zu, der folgende Axiome und Regeln enthält:

A1: $A \supset (B \supset A)$

A2: $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$

A3: $A \supset (\neg B \supset \neg (A \supset B))$

A4: a) $\neg (A \supset B) \supset A$
b) $\neg (A \supset B) \supset \neg B$

A5: $A \supset \neg\neg A$

A6: $\neg\neg A \supset A$

A7: $A \supset (B \supset A \wedge B)$

A8: a) $A \wedge B \supset A$
b) $A \wedge B \supset B$

A9: a) $\neg A \supset \neg (A \wedge B)$
b) $\neg B \supset \neg (A \wedge B)$

A10: $(\neg A \supset C) \supset \big((\neg B \supset C) \supset (\neg (A \wedge B) \supset C)\big)$

A11: a) $A \supset A \vee B$
b) $B \supset A \vee B$

A12: $(A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset (A \vee B \supset C))$

A13: $\neg A \supset (\neg B \supset \neg (A \vee B))$

A14: a) $\neg (A \vee B) \supset \neg A$
b) $\neg (A \vee B) \supset \neg B$

R: $A, A \supset B \vdash B$.

Satz 9: In $\mathfrak{M}$ ist eine Formel A aus Formeln $\varDelta$ genau dann ableitbar, wenn die Sequenz $\varDelta \to A$ in $M^{*\prime}$ beweisbar ist.

Der Beweis des Satzes wird durch Induktion nach der Länge l der Ableitung von A aus $\varDelta$ in $\mathfrak{M}$, bzw. des Beweises von $\varDelta \to A$ in $M^{*\prime}$ geführt, wobei man zeigt: ist $\varDelta \to S$ in $M^{*\prime}$ beweisbar, so gilt in $\mathfrak{M}$ $\bar{\varDelta} \vdash \bar{S}$.

4.2 Wenn oben gezeigt wurde, wie durch eine Semantik auf der Grundlage der Gentzenkalküle mit verallgemeinertem Widerlegungsbegriff die direkte Aussagenlogik ausgezeichnet wird, so soll in den folgenden Abschnitten untersucht werden, wie sich durch Zusatzforderungen, die einen Zusammenhang zwischen den bisher als unabhängig betrachteten Beweis- und Widerlegungsbegriffen herstellen, andere Logiksysteme gewinnen lassen.

Wir betrachten zunächst die Forderung, daß aus einer zugleich beweisbaren und widerlegbaren R-Formel beliebige R-Formeln gewonnen werden können. Diese Forderung kann man für die Gentzenkalküle durch das folgende zusätzliche Axiomenschema formulieren:

WS: $S, \sim S \to T$ (Widerspruchsprinzip).

Dieses Axiomenschema ist gleichwertig mit dem Regelschema $\varDelta \to \sim S \vdash \varDelta, S \to T$ und enthält so die Festsetzung, daß eine Ableitungsbeziehung beweisbar ist, wenn eine ihrer Prämissen widerlegbar ist. Das entspricht einer oft gebrauchten Konvention.

Nach Hinzunahme des Schemas WS besteht kein Anlaß, die Regeln 1 HF bis 2 VF oder die semantischen Regeln abzuändern, denn die intuitiven Überlegungen, auf die sich die Formulierung dieser Regeln stützt, bleiben weiterhin gültig. Ebenso ändert sich durch die Hinzunahme von WS nichts an den Grundeigenschaften der Gentzenkalküle. So bleibt die Regel TR weiterhin eliminierbar und die Sätze 2 bis 8 bleiben erhalten. An der Deutung der Operatoren ändert sich nur insofern etwas, als wegen der Definition von $A \supset B$ durch $A \rightarrow B$ nun auch gilt $\neg A \rightarrow A \supset B$. Das ist aber ganz im Sinn der üblichen Deutung der Implikation und hat zudem den Vorteil, daß nun für alle aussagenlogischen Operatoren F das Prinzip gilt, daß $F(A_1, \ldots, A_n)$ entscheidbar ist, d. h. daß gilt $\rightarrow F(A_1, \ldots, A_n)$ oder $\rightarrow \sim F(A_1, \ldots, A_n)$, wenn alle $A_1, \ldots, A_n$ entscheidbar sind. Das galt bisher nicht für die Implikation, denn aus $\rightarrow \sim A$ und $\rightarrow \sim B$ konnte man weder $\rightarrow A \supset B$, noch $\rightarrow \sim A \supset B$ gewinnen. Mit WS aber erhält man:

$$\frac{\rightarrow \sim A ; A, \sim A \rightarrow B}{A \rightarrow B}$$
$$\rightarrow A \supset B.$$

Gilt aber dieses Prinzip der relativen Entscheidbarkeit für die Operatoren $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\supset$, so wegen der Vollständigkeit dieses Operatorensystems auch für alle Operatoren F.

Entsteht der Kalkül M_W^* aus M^* durch Hinzunahme von WS und entsteht $M_W^{*\prime}$ aus M_W^* durch Beschränkung auf Sequenzen als Theoreme, so ist $M_W^{*\prime}$ im Sinne von Satz 9 äquivalent mit dem Kalkül $\mathfrak{M}_W$, der aus $\mathfrak{M}$ entsteht durch Hinzunahme des Axiomenschemas

A15: $\neg A \supset (A \supset B)$.

Wir bezeichnen M_W^*, bzw. $\mathfrak{M}_W$ als Kalküle der *erweiterten direkten Logik*[4]. Diese Logik hat eine ähnliche Struktur wie das aussagenlogische System von W. Ackermann in [1] und das System der fundamentalen Aussagenlogik von K. Schütte in [4].

5 *Intuitionistische und klassische Aussagenlogik*

5.1 Da im folgenden eine Asymmetrie zwischen Beweis- und Widerlegungsbegriff eingeführt wird, verwenden wir Ausdrücke der Gestalt $\sim \sim S$ (für S) nicht mehr. Wo also im folgenden ein Ausdruck $\sim S$ vorkommt, besagt das, daß S nicht die Gestalt $\sim T$ hat.

---

[4] Durch eine zusätzliche Erweiterung der direkten Logik mit der Regel V aus Abschnitt 5.2 könnte man von hier aus auch zur klassischen Logik übergehen. In diesem Abschnitt soll aber gezeigt werden, daß die Hinzunahme dieser Regel unter dem Gesichtspunkt des semantischen Begründungsansatzes eine tiefergreifende Modifikation der direkten Logik erfordert.

Der Ableitungsbegriff der Kalküle K sei nun so gefaßt, daß in $\overline{K}_\infty$ das Axiomenschema WS gilt sowie zusätzlich die Regeln

V1: $\varDelta, S \rightarrow \sim T; \varDelta, \sim S \rightarrow \sim T \vdash \varDelta \rightarrow \sim T.$

(T kann also nicht die Gestalt $\sim U$ haben.)

Diese Regeln erscheinen intuitiv gesehen nur dann berechtigt, wenn alle R-Formeln S entscheidbar sind. Das ist aber eine sehr weitgehende Forderung, die wir bisher nicht gestellt haben und die den Kalkülbegriff stark einengen würde. Sehen wir aber von der Frage der intuitiven Berechtigung der Regeln V1 einmal ab und untersuchen welche Konsequenzen die Regeln V1 für den Aufbau der Gentzenkalküle haben!

Mit V1 ist äquivalent das Regelschema:

V1′: $\varDelta, S \rightarrow T; \varDelta, S \rightarrow \sim T \vdash \varDelta \rightarrow \sim S.$

Da nun nach V1′ die Widerlegbarkeit einer Formel dadurch bestimmt ist, daß aus ihr beliebige Formeln folgen, so kann man die logischen und semantischen 2V- und 2H-Regeln nicht mehr als Grundregeln ansetzen, da die Festlegungen, die sie über die Widerlegbarkeit von R-Formeln treffen, auf Grund von V1 nicht mehr unabhängig von den Festsetzungen der 1V- und 1H-Regeln sind. Die Forderung eines so starken Zusammenhangs zwischen Beweis- und Widerlegungsbegriff, wie ihn V1 beinhaltet, bewirkt also, daß der bisher benützte semantische Begründungsansatz, wie er sich in den logischen und semantischen Grundregeln der direkten Logik ausdrückt, unter dem Gesichtspunkt der inhaltlichen Rechtfertigung überprüft werden muß. Und es zeigt sich, daß nun speziell die 2V- und 2H-Regeln ihre Berechtigung verlieren und daher zu streichen sind.

Sei M_I^* der Kalkül, der aus M_W^* durch Hinzunahme von V1 und Streichung der 2V- und 2H-Regeln entsteht, so ist nun zu zeigen, daß M_I^* ein Kalkül der intuitionistischen Aussagenlogik ist. Dazu ordnen wir jeder R-Formel U einen Ausdruck U^+ zu, der aus U entsteht durch Ersetzung aller R-Teilformeln der Gestalt $\sim S$ durch Ausdrücke $(S \rightarrow)$. U^+ ist dann eine S-Formel im Sinne von [3], 1.1, d. h. eine R-Formel ohne das Symbol „$\sim$“, in deren R-Teilformeln der Gestalt $\varDelta \rightarrow \varOmega$, $\varOmega$ auch die leere Formel sein kann. Definiert man den Ausdruck $\varDelta \rightarrow$ (z. B. als $\varDelta \rightarrow A \wedge \neg A$) so, daß gilt

HV: $\varDelta \rightarrow \vdash \varDelta \rightarrow S,$

so gilt $\sim S \leftrightarrow (S \rightarrow)$[5] und damit auch $U \leftrightarrow U^+$. Es ist also die Menge der in M_I^* beweisbaren R-Formeln festgelegt durch die Menge der in M_I^* beweisbaren

---

[5] Es gilt	$S, \sim S \rightarrow$	nach WS und Definition von $\varDelta \rightarrow$
	$\sim S \rightarrow (S \rightarrow)$	1 HF
und	$(S \rightarrow) \rightarrow (S \rightarrow)$	RF
	$(S \rightarrow), S \rightarrow$	1 VF
	$(S \rightarrow), S \rightarrow \sim S$	HV
	$(S \rightarrow), S \rightarrow S$	RF, VV
	$(S \rightarrow) \rightarrow \sim S$	V1′.

S-Formeln. Diese Menge läßt sich nun induktiv definieren durch die Axiome und Regeln, die aus den Axiomen und Regeln von M_I^* durch die angegebene Transformation von R-Formeln in S-Formeln hervorgehen, denn jeder Beweis einer S-Formel läßt sich, wie man leicht verifiziert, umformen in einen Beweis, der nur von diesen transformierten Axiomen und Regeln Gebrauch macht. Die transformierten Axiome und Regeln sind aber die Axiome und Regeln der intuitionistischen Aussagenlogik, wie sie in [3] im Kalkül M^+ formuliert wurde. Nur WS geht über in $S, (S \to) \to T$, was man in M^+ aus $(S \to) \to (S \to)$ mit PE und HV gewinnt, V1 geht über in $\Delta, S \to (T \to); \Delta, (S \to) \to (T \to) \vdash \Delta \to (T \to)$, eine Ableitungsbeziehung, die man in M^+ mit PE, PB und TR beweisen kann, und VN geht über in $\Delta, (A \to) \to S \vdash \Delta, \neg A \to S$, was man mit der intuitionistischen Regel $\Delta \to A \vdash \Delta, \neg A \to$ wie folgt erhält:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{A \to A}{A, \neg A \to}}{\neg A \to (A \to)} \qquad \Delta, (A \to) \to S}{\Delta, \neg A \to S.}$$

Umgekehrt lassen sich auch alle in M^+ beweisbaren S-Formeln in M_I^* beweisen, da die Axiome und Regeln von M^+ bis auf die Negationsregeln auch Axiome und Regeln von M_I^* sind. Die Ableitungsbeziehung $\Delta, A \to \vdash \Delta \to \neg A$ erhält man aber wegen $\Delta, A \to \vdash \Delta \to (A \to)$ aus der Transformation von HN und $\Delta \to A \vdash \Delta, \neg A \to$ erhät man wegen $A, (A \to) \to$ (der Transformation von WS) mit der Transformation von VN.

Damit ist gezeigt, daß sich die in M_I^* beweisbaren R-Formeln durch äquivalente Umformungen aus den intuitionistisch gültigen S-Formeln gewinnen lassen, so daß man auch M_I^* als Kalkül der intuitionistischen Aussagenlogik ansprechen kann.

Die Äquivalenz $\sim S \leftrightarrow (S \to)$ und die dadurch mögliche Eliminierung des Symbols „$\sim$" zeigt, daß bei Hinzunahme von V1 zu M_W^* der Widerlegungsbegriff durch den Beweisbegriff mit Hilfe einer logisch falschen Formel festgelegt ist, und präzisiert somit die obige Bemerkung, daß die 2V- und 2H-Regeln nach Hinzunahme von V1 nicht mehr unabhängig von den 1V- und 1H-Regeln angesetzt werden können.

Wegen der pauschalen Definition der Widerlegbarkeit von R-Formeln S durch die Beweisbarkeit von $S\to$ erhalten nun die negierten komplexen Formeln eine gegenüber der direkten Logik indirekte Deutung. So gilt z. B. $\neg(A \wedge \neg A)$, weil aus $A \wedge \neg A$ beliebige Formeln ableitbar sind. In diesem Sinn gilt in der direkten Logik $A \wedge \neg A \to T$ für beliebige R-Formeln T. Daraus kann man aber nicht $\neg(A \vee \neg A)$ gewinnen. Eine negierte Konjunktion ist vielmehr in der direkten Logik nur dann wahr, wenn eines der Konjunktionsglieder falsch ist. Dann müßte aber im vorliegenden Fall gelten $\to A$ oder $\to \sim A$, d. h. alle Formeln müßten entscheidbar sein. In der intuitionistischen Logik hingegen ist $\neg(A \wedge \neg A)$ wahr, ohne daß A oder $\neg A$ falsch sein müßte.

Der Auszeichnung der intuitionistischen Semantik im Rahmen der Gentzensemantik entspricht es, wenn man in dem Kalkül $\mathfrak{M}_W$ ein Axiomenschema hinzunimmt, das der Regel V 1′ entspricht:

A16: $(A \supset B) \supset ((A \supset \neg B) \supset \neg A)$

und sämtliche Axiome streicht, die hinreichende oder notwendige Bedingungen für die Falschheit komplexer Sätzen enthalten, d. h. also die Axiome A 3 bis A 6, A 9, A 10, A 13 und A 14. Der so bestimmte Kalkül heißen $\mathfrak{M}_I$.[6]

5.2 Wir nehmen nun zu M_I^* noch die Regel

V2: $\Delta, S \rightarrow T; \Delta, \sim S \rightarrow T \vdash \Delta \rightarrow T$ (wobei T nicht die Form $\sim U$ hat) hinzu,

oder äquivalent die Regel

V2′: $\Delta, \sim S \rightarrow T; \Delta, \sim S \rightarrow \sim T \vdash \Delta \rightarrow S$,

d. h. zu M_W^* die Regel

V: $\Delta, S \rightarrow T; \Delta, \sim S \rightarrow T \vdash \Delta \rightarrow T$.

Die Regel V 2 ist nun in M_I^* äquivalent mit der Regel $\Delta, A \rightarrow \Omega; \Delta, \neg A \rightarrow \Omega \vdash \Delta \rightarrow \Omega$, d. h. mit dem *tertium non datur* $\rightarrow A \vee \neg A$, so daß das System M_K^*, das man aus M_W^* durch Hinzunahme von V und Streichung der 2 V- und 2 H-Regeln erhält, ein System der klassischen Aussagenlogik ist. Daß man bei Hinzunahme der Regel V zu M_W^* die 2 V- und 2 H-Regeln zu streichen hat, erklärt sich wie unter 5.1 dadurch, daß der Widerlegungsbegriff über V durch den Beweisbegriff schon festgelegt ist.

Eleganter ist es, von M_K^* zu einer Formulierung der klassischen Aussagenlogik überzugehen, die der Verwendung von Sequenzen mit mehreren Hinterformeln bei Gentzen [2] entspricht. Wir bezeichnen zu diesem Zweck als *K-Formeln* Formeln und Ausdrücke der Gestalt $(\Delta \rightarrow \Gamma)$, in denen Δ, Γ Reihen von R-Formeln sind, von denen eine auch leer sein kann. Man kann dann jeder R-Formel U eine K-Formel $\varphi(U)$ zuordnen, indem man setzt:

$\varphi(A) = A$, $\varphi(S_1, \ldots, S_m, \sim T_1, \ldots, \sim T_n \rightarrow U) = \varphi(S_1), \ldots, \varphi(S_m) \rightarrow \varphi(U), \varphi(T_1), \ldots, \varphi(T_n)$ und $\varphi(S_1, \ldots, S_m, \sim T_1, \ldots, \sim T_n \rightarrow \sim U) = \varphi(S_1), \ldots, \varphi(S_m), \varphi(U) \rightarrow \varphi(T_1), \ldots, \varphi(T_n)$. Die Abbildung φ ist nicht umkehrbar eindeutig, da gilt $\varphi(S_1, \ldots, S_m, \sim T_1, \ldots, \sim T_n, \sim V \rightarrow \sim U) = \varphi(S_1, \ldots, S_m, U, \sim T_1, \ldots, \sim T_n \rightarrow V) = \varphi(S_1), \ldots, \varphi(S_m), \varphi(U) \rightarrow \varphi(V), \varphi(T_1), \ldots, \varphi(T_n)$. Für $\varphi(U) = \varphi(U')$ gilt aber $U \Leftrightarrow U'$, denn es gilt $\Delta, S \rightarrow T \vdash \Delta, \sim . T \rightarrow \sim S$:

$$\cfrac{\cfrac{\Delta, S \rightarrow T;\ T, \sim T \rightarrow \sim S}{\Delta, \sim T, S \rightarrow \sim S;\ \Delta, \sim T, S \rightarrow S}\ \text{TR}}{\Delta, \sim T \rightarrow \sim S}\ \text{V1}'$$

[6] Wie einleitend angedeutet wurde, kann man auch ein zur intuitionistischen Logik bezüglich Beweis- und Widerlegungsbegriff duales Logiksystem gewinnen, wenn man die unten angegebene Regel V 2 anstelle von V 1 annimmt und entsprechenderweise anstelle der 2 V- und 2 H-Regeln die 1 V- und 1 H-Regeln streicht.

und $\Delta, \sim T \rightarrow \sim S \vdash \Delta, S \rightarrow T$:

$$\cfrac{\cfrac{\Delta, \sim T \rightarrow \sim S; S, \sim S \rightarrow T}{\Delta, \sim T, S \rightarrow T; \Delta, \sim T, S \rightarrow \sim T}\ \text{TR}}{\Delta, S \rightarrow T\,.}\ \text{V2}'$$

Definiert man nun einen Kalkül $\mathfrak{K}$ für K-Formeln, dessen Axiome die φ-Bilder der Axiome von M_K^* sind und deren Regeln die φ-Bilder der Regeln von M_K^* sind, so ist eine R-Formel U in M_K^* beweisbar genau dann, wenn $\varphi(U)$ in $\mathfrak{K}$ beweisbar ist. $\mathfrak{K}$ ist nun, wie man leicht verifiziert, äquivalent (ja praktisch identisch) mit dem Kalkül $\mathfrak{K}'$, der folgende Axiome und Regeln enthält:

$\overline{\text{RF}}$: $S \rightarrow S$

$\overline{\text{VV}}$: $\Delta \rightarrow \Gamma \vdash \Delta, S \rightarrow \Gamma$ $\overline{\text{HV}}$: $\Delta \rightarrow \Gamma \vdash \Delta \rightarrow S, \Gamma$

$\overline{\text{ST}}$: $\Delta, S, T, \Delta' \rightarrow \Gamma \vdash \Delta, T, S, \Delta' \rightarrow \Gamma$ $\overline{\text{ST}}'$ $\Delta \rightarrow \Gamma, S, T, \Gamma' \vdash \Delta \rightarrow \Gamma, T, S, \Gamma'$

$\overline{\text{SK}}$: $\Delta, S, S \rightarrow \Gamma \vdash \Delta, S \rightarrow \Gamma$ $\overline{\text{SK}}'$: $\Delta \rightarrow S, S, \Gamma \vdash \Delta \rightarrow S, \Gamma$

$\overline{\text{TR}}$: $\Delta \rightarrow S, \Gamma; \Delta, S \rightarrow \Gamma \vdash \Delta \rightarrow \Gamma$

$\overline{\text{HF}}$: $\Delta, \Delta' \rightarrow \Gamma', \Gamma \vdash \Delta \rightarrow (\Delta' \rightarrow \Gamma'), \Gamma$ $\overline{\text{VF}}$: $\Delta \rightarrow \Delta', \Gamma; \Delta, \Gamma' \rightarrow \Gamma \vdash \Delta, (\Delta' \rightarrow \Gamma') \rightarrow \Gamma$

$\overline{\text{VN}}$: $\Delta \rightarrow A, \Gamma \vdash \Delta, \neg A \rightarrow \Gamma$ $\overline{\text{HN}}$: $\Delta, A \rightarrow \Gamma \vdash \Delta \rightarrow \neg A, \Gamma$

$\overline{\text{VK}}$: $\Delta, A, B \rightarrow \Gamma \vdash \Delta, A \wedge B \rightarrow \Gamma$ $\overline{\text{HK}}$: $\Delta \rightarrow A, \Gamma; \Delta \rightarrow B, \Gamma \vdash \Delta \rightarrow A \wedge B, \Gamma$

$\overline{\text{VD}}$: $\Delta, A \rightarrow \Gamma; \Delta, B \rightarrow \Gamma \vdash \Delta, A \vee B \rightarrow \Gamma$ $\overline{\text{HD}}$: $\Delta \rightarrow A, B, \Gamma \vdash \Delta \rightarrow A \vee B, \Gamma$

$\overline{\text{VJ}}$: $\Delta \rightarrow A, \Gamma; \Delta, B \rightarrow \Gamma \vdash \Delta, A \supset B \rightarrow \Gamma$ $\overline{\text{HJ}}$: $\Delta, A \rightarrow B, \Gamma \vdash \Delta \rightarrow A \supset B, \Gamma$.

In $\mathfrak{K}'$ ist wieder die Regel $\overline{\text{TR}}$ eliminierbar und daher sind in $\mathfrak{K}'$ genau diejenigen Sequenzen beweisbar, die in dem Kalkül $\mathfrak{K}''$ beweisbar sind, der gegenüber $\mathfrak{K}'$ die Regeln $\overline{\text{HF}}$, $\overline{\text{VF}}$ nicht enthält. Ein Vergleich von $\mathfrak{K}''$ mit dem klassischen Sequenzenkalkül LK in [2] zeigt aber sofort, daß $\mathfrak{K}''$ ein Kalkül der klassischen Aussagenlogik ist, so daß wir auch $\mathfrak{K}'$ und damit M_K^* als klassischen Logikkalkül ansprechen können.

Dem skizzierten Vorgehen zur Gewinnung der klassischen Aussagenlogik in diesem Abschnitt entspricht es, wenn wir M_K^* einen Formelkalkül zuordnen, der aus $\mathfrak{M}_I$ durch Hinzunahme des Axiomenschemas

A18: $(\neg A \supset B) \supset ((\neg A \supset \neg B) \supset A)$

entsteht.

Die aussagenlogischen Operatoren erfahren in der so begründeten klassischen Logik gegenüber der direkten Logik wiederum eine indirekte Deutung, und das in einem gegenüber der intuitionistischen Logik verstärkten Maße.

In der intuitionistischen Logik wird die Widerlegbarkeit und damit die Negation einer Formel A allgemein definiert dadurch, daß aus A beliebige Formeln ableitbar sind, ohne daß dabei auf die Teilformeln von A Bezug genommen wird. Deshalb war $\neg (A \wedge \neg A)$ im Gegensatz zur direkten Logik beweisbar, weil aus $A \wedge \neg A$ beliebige Formeln ableitbar sind. In der klassischen Logik ist nun eine Formel A auch beweisbar, wenn aus $\neg A$ beliebige Formeln ableitbar sind. So ist z. B. auch $A \vee \neg A$ beweisbar, weil aus $\neg (A \vee \neg A)$ beliebige Formeln ableitbar sind. In diesem Sinn gilt in der erweiterten direkten Logik auch $\sim A \vee \neg A \rightarrow S$ für beliebige R-Formeln S, aber daraus kann man nicht $\rightarrow A \vee \neg A$ gewinnen. Eine Disjunktion ist in der direkten Logik nur beweisbar, wenn mindestens ein Disjunktionsglied beweisbar ist, dazu müßten aber im vorliegenden Fall alle Formeln A entscheidbar sein[7].

Zusammenfassend kann man sagen: Durch die hier verwendete Semantik auf der Basis von Gentzenkalkülen mit einem allgemeinen Widerlegungsbegriff wird die direkte Logik im Sinn von M^* oder M^*_W ausgezeichnet. Durch Zusatzforderungen, wie sie sich in den Regeln V1 und V2 ausdrücken, kann man in diesem Rahmen auch die intuitionistische und die klassische Aussagenlogik gewinnen, jedoch hängt die intuitive Berechtigung dieser Regeln an der Entscheidbarkeit aller Formeln in den betrachteten Kalkülen, also an einer Zusatzforderung, die die Menge der zugelassenen Kalküle sehr stark einschränkt. Ist diese Forderung nicht

[7] Für die Begründung der klassischen Logik ist die deduktive Erweiterung der Sequenzenkalküle mit den Regeln $\overline{\mathrm{HF}}$ und $\overline{\mathrm{VF}}$ überflüssig. Diese Erweiterung wurde bei der Begründung der intuitionistischen Aussagenlogik, wie in [3], 3.2 hervorgehoben, verwendet, um die Vollständigkeit des Operatorensystems $\neg, \wedge, \vee, \supset$ zu beweisen. Setzt man aber im Sinne von [3], 3.2 die Regelschemata an:

$$\text{I}')\quad \Delta, \Delta_{11} \rightarrow \Gamma_{11}, \Gamma; \ldots; \Delta, \Delta_{1s_1} \rightarrow \Gamma_{1s_1}, \Gamma \vdash \Delta \rightarrow F(A_1, \ldots, A_n), \Gamma$$

$$\ldots$$

$$\Delta, \Delta_{t1} \rightarrow \Gamma_{t1}, \Gamma; \ldots; \Delta, \Delta_{ts_t} \rightarrow \Gamma_{ts_t}, \Gamma \vdash \Delta \rightarrow F(A_1, \ldots, A_n), \Gamma,$$

wobei die Formelreihen $\Delta_{ik_i}, \Gamma_{ik_i}$ $(i = 1, \ldots, t; k_i = 1, \ldots, s_i)$ nur Formeln aus $A_1, \ldots, A_n$ enthalten, und

$$\text{II}')\quad \Delta \rightarrow \Delta_{1k_{11}}, \Gamma; \ldots; \Delta \rightarrow \Delta_{tk_{t1}}, \Gamma; \Delta, \Gamma_{1k_{11}} \rightarrow \Gamma; \ldots;$$
$$\Delta, \Gamma_{tk_{t1}} \rightarrow \Gamma \vdash \Delta, F(A_1, \ldots, A_n) \rightarrow \Gamma,$$

$$\Delta \rightarrow \Delta_{1k_{1r}}, \Gamma; \ldots; \Delta \rightarrow \Delta_{tk_{tr}}, \Gamma; \Delta, \Gamma_{1k_{1r}} \rightarrow \Gamma; \ldots;$$
$$\Delta, \Gamma_{tk_{tr}} \rightarrow \Gamma \vdash \Delta, F(A_1, \ldots, A_n) \rightarrow \Gamma,$$

wobei $r = s_1 \times \ldots \times s_t$ ist und die Indices k_{il} $(l = 1, \ldots, r)$ Zahlen aus $1, \ldots, s_i$ sind, so kann man beweisen $F(A_1, \ldots, A_n) \leftrightarrow B$, wobei die Formel B sich wie folgt bestimmt:
Es sei $\bar{S} = S$ wo S eine Formel ist, $\Delta^* = \bar{S}_1 \wedge \ldots \wedge \bar{S}_n$, wo $\Delta = S_1, \ldots, S_n$ ist, $\Gamma^+ = \bar{T}_1 \vee \ldots \vee \bar{T}_m$, wo $\Gamma = T_1, \ldots, T_m$ ist,

$$\text{und wo gilt } \overline{(\Delta \rightarrow \Gamma)} = \begin{cases} \Delta^* \supset \Gamma^+, & \text{wo } \Delta, \Gamma \text{ nicht leer sind,} \\ \neg\, \Delta^*, & \text{wo } \Gamma \text{ leer ist,} \\ \Gamma^+, & \text{wo } \Delta \text{ leer ist.} \end{cases}$$

Dann ist B die Formel

$$((\overline{\Delta_{11} \rightarrow \Gamma_{11})} \wedge \ldots \wedge \overline{(\Delta_{1s_1} \rightarrow \Gamma_{1s_1})}) \vee \ldots \vee ((\overline{\Delta_{t1} \rightarrow \Gamma_{t1})} \wedge \ldots \wedge \overline{(\Delta_{ts_t} \rightarrow \Gamma_{ts_t})}),$$

die sich aus den Formeln $A_1, \ldots, A_n$ also nur mit den Operatoren $\neg, \wedge, \vee, \supset$ zusammensetzt. Alle nach (I′) und (II′) definierten Operatoren F lassen sich daher durch $\neg, \wedge, \vee, \neg$ definieren.

erfüllt, so bewirken die Regeln V 1 und V 2 eine indirekte Deutung der Operatoren. Will man nicht aus Gründen, die außerhalb der hier betrachteten semantischen Grundgedanken liegen, eine Asymmetrie zwischen Widerlegungs- und Beweisbegriff einführen, so ist insbesondere auch die gegenüber der Regel V 1 allgemeinere Regel V ausgezeichnet und damit die klassische vor der intuitionistischen Logik.

LITERATUR

[1] Ackermann, W.: Widerspruchsfreier Aufbau der Logik. Typenfreies System ohne tertium non datur. Journal of Symbolic Logic **15** (1950), S. 33—57.
[2] Gentzen, G.: Untersuchungen über das logische Schließen. Math. Zeitschr. **39** (1934), S. 176—210, 405—431.
[3] v. Kutschera, F.: Die Vollständigkeit des Operatorensystems $\{\neg, \wedge, \vee, \supset\}$ für die intuitionistische Aussagenlogik im Rahmen der Gentzensemantik. Archiv für mathematische Logik und Grundlagenforschung **11**/1-2, S. 3—16.
[4] Schütte, K.: Beweistheorie. Berlin 1960.