FRANZ VON KUTSCHERA

ZUR PROBLEMATIK DER NATURWISSENSCHAFTLICHEN VERWENDUNG DES SUBJEKTIVEN WAHRSCHEINLICHKEITSBEGRIFFS

Solange die Auffassung bestand, die Verwendung statistischer Gesetze in den Naturwissenschaften sei stets nur ein Provisorium, ein Hilfsmittel zur pauschalen Beschreibung von Massenvorgängen, während die wahren Naturgesetze immer deterministisch seien, war die Untersuchung von Wahrscheinlichkeitsaussagen kein Thema, das die Philosophie der Naturwissenschaften ernstlich hätte interessieren müssen. Erst mit der Entwicklung der Quantenphysik änderte sich diese Situation von Grund auf, denn mit ihr mußte man die Möglichkeit ins Auge fassen, daß naturwissenschaftliche Grundgesetze irreduzibel und wesentlich indeterministischen Charakter haben. Damit wurde für die Wissenschaftstheorie die Aufgabe dringlich, Deutung und Funktion solcher statistischer Gesetze, und allgemein Deutung und Funktion von Wahrscheinlichkeitsaussagen einer genaueren Analyse zu unterziehen.

Diese Aufgabe wird dadurch kompliziert, daß in der heutigen Diskussion der Wahrscheinlichkeitsaussagen sich im wesentlichen drei grundsätzlich verschiedene Wahrscheinlichkeitsbegriffe gegenüberstehen: der *objektive* Wahrscheinlichkeitsbegriff, wie er im Anschluß an die grundlegenden Arbeiten von Richard von Mises und Hans Reichenbach entwickelt worden ist[1], der *subjektive* Wahrscheinlichkeitsbegriff, der insbesondere von Bruno de Finetti präzisiert wurde[2], und der *logische* Wahrscheinlichkeitsbegriff, wie er, aufbauend auf Gedanken von John M. Keynes und Harold Jeffreys vor allem von Rudolf Carnap ausgearbeitet wurde[3]. Da sich aber der logische Wahrscheinlichkeitsbegriff als ein spezieller subjektiver Wahrscheinlichkeitsbegriff auffassen läßt[4], können wir uns im folgenden auf eine Betrachtung des subjektiven und des objektiven Wahrscheinlichkeitsbegriffs beschränken.

Der vorherrschenden Auffassung nach kommt allein der objektive Wahrscheinlichkeitsbegriff für eine Verwendung in naturwissenschaftlichen Aussagen in Frage, während der subjektive Wahrscheinlichkeitsbegriff wegen seines subjektbezogenen und nichtempirischen Charakters für naturwissenschaftliche Kontexte unbrauchbar ist. Diese Ansicht soll

Synthese 20 (1969) 84–103; © *D. Reidel Publishing Co., Dordrecht - Holland*

im folgenden kritisch untersucht werden. Daß eine solche Untersuchung der naturwissenschaftlichen Verwendbarkeit des subjektiven Begriffs von echtem wissenschaftstheoretischen Interesse ist, erhellt daraus, daß sich mit dem objektiven Begriff erhebliche Schwierigkeiten verbinden, die sich nur durch eine Einbeziehung des subjektiven Begriffs in den Aufbau der objektiven Wahrscheinlichkeitstheorie überwinden lassen. Damit ergeben sich aber die gleichen Probleme auch für eine Verwendung des objektiven Wahrscheinlichkeitsbegriffs in den Naturwissenschaften, wie sie sich bei einer Verwendung des subjektiven Begriffes stellen.

Um nun diese Probleme genauer formulieren und diskutieren zu können, soll in den folgenden beiden Abschnitten zunächst eine kurze, nichtformale Charakterisierung der beiden Wahrscheinlichkeitsbegriffe gegeben werden.

I. DER OBJEKTIVE WAHRSCHEINLICHKEITSBEGRIFF

Der grundlegenden Intention nach soll der objektive Wahrscheinlichkeitsbegriff objektive, empirische Eigenschaften eines wiederholbaren Versuchs *V* charakterisieren, und zwar Eigenschaften, die sich in den relativen Häufigkeiten der Versuchsergebnisse in einer hinreichend großen Zahl unabhängiger Durchführungen von *V* ausdrücken[5]. Daß die Wahrscheinlichkeit, mit einem bestimmten Würfel die Augenzahl 6 zu werfen, 1/6 ist, soll demnach etwas über die Natur des Würfels, bzw. der gesamten Versuchsanordnung des Werfens dieses Würfels besagen[6], und diese Aussage stellt eine naturwissenschaftliche Hypothese dar, die durch Beobachtungen der relativen Häufigkeiten des Ergebnisses '6' in längeren Reihen von Würfen mit dem Würfel überprüft werden kann. Ebenso soll die Aussage, daß die Wahrscheinlichkeit für den Zerfall eines Radiumatoms in einem Zeitraum von 1622 Jahren 1/2 ist, etwas über die Natur der Radiumatome besagen und sie wird experimentell überprüft durch das Zerfallsverhalten großer Mengen von Radiumatomen.

Es ist nun die Aufgabe der objektiven Wahrscheinlichkeitstheorie, diese Intention durch die exakte Einführung eines Wahrscheinlichkeitsbegriffes zu verwirklichen. Mises schlug dazu den Weg einer expliziten Definition des Wahrscheinlichkeitsbegriffes ein, indem er die objektive Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses *A*, das zu einer Versuchsvorschrift *V* gehört, definierte als den Grenzwert der relativen Häufigkeiten des Auftretens von A in einer unendlich langen Reihe von Durchführungen von V. Daß A zu V gehört, soll dabei besagen, daß A Element eines Ereigniskörpers zu V ist, d.h. einer Menge von Ereignissen, die durch jedes Ergebnis von V als wahr oder falsch bestimmt werden und denen im Zusammenhang mit V ein Wahrscheinlichkeitswert zugeordnet wird[7].

Diese Häufigkeitsdefinition der objektiven Wahrscheinlichkeit führt nun aber auf eine Reihe von Schwierigkeiten, die bewirkt haben, daß man heute diese Definition aufgegeben hat. Es handelt sich dabei nicht, wie manchmal behauptet wird, um die Schwierigkeit, daß eine Wahrscheinlichkeitsaussage als Aussage über den Grenzwert einer Folge mit dem Auftreten beliebiger relativer Häufigkeiten in endlichen Abschnitten der Folge verträglich ist, wie sie sich immer nur beobachten lassen, so daß sich so verstandene Wahrscheinlichkeitsaussagen nie durch Beobachtungen verifizieren oder falsifizieren lassen. Solche durch Beobachtungen nicht in Strenge entscheidbare Aussagen kommen in den Naturwissenschaften auch an anderer Stelle vor[8] und verbinden sich mit jedem Wahrscheinlichkeitsbegriff. Es handelt sich vielmehr um Schwierigkeiten, die mit der Forderung bei v. Mises zusammenhängen, nur solchen Versuchsvorschriften Wahrscheinlichkeiten zuzuordnen, für die bei allen Folgen von Durchführungen die relativen Häufigkeiten der zugeordneten Ereignisse in Strenge konvergieren. Diese Forderung schränkt die Anwendbarkeit dieses Wahrscheinlichkeitsbegriffs erheblich ein. Tatsächlich wollen wir ja damit, daß wir dem Ereignis 'Augenzahl 6' die Wahrscheinlichkeit 1/6 zuordnen, keineswegs ausschließen, daß in einer Folge von Würfen des Würfels auch einmal nur das Ergebnis 'Augenzahl 3' auftritt, wir wollen also keine Konvergenz in Strenge behaupten, sondern nur sagen, daß es für große Wurfzahlen praktisch sicher wird, daß sich eine relative Häufigkeit von '6' nahe 1/6 einstellt[9].

Im Hinblick auf diese Schwierigkeiten der Häufigkeitsdefinition führt man heute den objektiven Begriff der Wahrscheinlichkeit nicht mehr durch explizite Definition ein, sondern charakterisiert ihn implizit durch Angabe von Axiomen, denen dieser Begriff genügen soll[10]. Eine erste Gruppe dieser Postulate besteht aus rein mathematischen Axiomen, die besagen, daß eine objektive Wahrscheinlichkeit ein normiertes Maß über einem Ereigniskörper ist. Was das im einzelnen heißt, ist für das folgende nicht wichtig. Wichtig ist nur zu bemerken, daß diese Axiome für alle Wahrscheinlichkeitsbegriffe gelten, den objektiven Wahrscheinlichkeitsbegriff also noch nicht auszeichnen. Insbesondere stellen sie als rein mathematische Axiome, in denen keine empirischen Begriffe vorkommen, auch noch keinen Zusammenhang zwischen dem Begriff der objektiven Wahrscheinlichkeit und der Welt her, sie leisten also weder etwas zur Verwirklichung der grundlegenden Intention, die man mit diesem Begriff verfolgt, nämlich reale Versuchsanordnungen und Vorgänge zu charakterisieren, noch stellen sie einen Zusammenhang zwischen Wahrscheinlichkeit und relativer Häufigkeit her.

Das alles soll das Multiplikationsaxiom leisten, das in der axiomatischen Einführung des objektiven Wahrscheinlichkeitsbegriffs noch zu den mathematischen Axiomen hinzutritt und das besagt, daß für zwei physikalisch unabhängige Ereignisse die Wahrscheinlichkeit ihrer Konjunktion gleich dem Produkt ihrer Wahrscheinlichkeiten ist. Dieses Axiom enthält nun im Begriff der physikalischen Unabhängigkeit einen empirischen Begriff und insofern könnte dieses Axiom geeignet sein, dem Begriff der objektiven Wahrscheinlichkeit einen empirischen Gehalt zu verleihen. Der Begriff der physikalischen Unabhängigkeit ist nun aber kein Beobachtungsbegriff, d.h. kein Begriff, der einen durch Bezugnahme auf Beobachtbares unmittelbar bestimmten empirischen Sinn hätte, sondern ein theoretischer Begriff sehr hoher Abstraktionsstufe, der selbst nur unter Bezugnahme auf bestimmte physikalische Theorien implizit als empirisch charakterisiert ist, denn nur bezüglich bestimmter Theorien kann man zwei Ereignisse als physikalisch unabhängig ansprechen[11].

Wegen dieses hohen Abstraktionsgrades des Begriffs der physikalischen Unabhängigkeit und des Zusammenhangs, den das Multiplikationsaxiom zwischen ihm und dem Begriff der objektiven Wahrscheinlichkeit herstellt, kann man nun aber nicht von einer ausreichenden empirischen Interpretation des Begriffs der objektiven Wahrscheinlichkeit sprechen. Welche empirischen Eigenschaften oder Dispositionen von Versuchsanordnungen mit objektiven Wahrscheinlichkeitsaussagen gemeint sind und wie diese durch Beobachtungen überprüft werden können, bleibt aufgrund der impliziten Definition des Wahrscheinlichkeitsbegriffs weitestgehend im Dunkeln.

Auch der intendierte Zusammenhang zwischen Wahrscheinlichkeit und relativer Häufigkeit wird durch die besprochenen Axiome nicht hergestellt. Es läßt sich zwar mit dem Multiplikationsprinzip das (schwache) Gesetz der großen Zahlen beweisen, das besagt: "Für hinreichend lange

Folgen von unabhängigen Versuchsdurchführungen liegt die objektive Wahrscheinlichkeit dafür, daß sich die objektive Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses von der relativen Häufigkeit seines Auftretens in der Folge nur beliebig wenig unterscheidet, beliebig nahe bei eins" – aber dieses Gesetz macht eine Aussage über den Zusammenhang von Wahrscheinlichkeit und relativer Häufigkeit nur im Kontext einer Wahrscheinlichkeitsaussage, und solange wir diesen Kontext nicht verstehen, weil der Begriff der objektiven Wahrscheinlichkeit ungenügend interpretiert ist, verstehen wir auch den ausgesagten Zusammenhang zwischen Wahrscheinlichkeit und relativer Häufigkeit nicht. Das Gesetz der großen Zahlen hat eine formale Ähnlichkeit mit dem Prinzip der Häufigkeitsinterpretation der objektiven Wahrscheinlichkeit, das wir oben angedeutet haben, und das sich allgemein so formulieren läßt: "Für hinreichend lange Folgen von unabhängigen Versuchsdurchführungen liegt die subjektive Wahrscheinlichkeit dafür, daß sich die objektive Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses von der relativen Häufigkeit seines Auftretens in der Folge nur beliebig wenig unterscheidet, beliebig nahe bei eins". Da "die subjektive Wahrscheinlichkeit, daß..., liegt beliebig nahe bei eins" nichts anderes heißt als "es ist praktisch sicher, daß...", so unterscheidet sich dieses Prinzip wesentlich von dem Gesetz der großen Zahlen dadurch, daß es eine Aussage über den Zusammenhang zwischen objektiver Wahrscheinlichkeit und relativer Häufigkeit in einem Kontext macht, dessen Verständnis nicht schon ein Verständnis des objektiven Wahrscheinlichkeitsbegriffs voraussetzt, daß es also eine brauchbare Interpretation dieses Begriffes liefert. Vom Gesetz der großen Zahlen führt aber in dem bisher besprochenen Rahmen der objektiven Wahrscheinlichkeitstheorie kein Weg zum Prinzip der Häufigkeitsinterpretation, da in den Axiomen dieser Theorie der subjektive Wahrscheinlichkeitsbegriff nicht vorkommt.

Die bisher besprochene Theorie der objektiven Wahrscheinlichkeit, die sogenannte *direkte* Theorie, die man gewöhnlich allein vor Augen hat, wenn von objektiver Wahrscheinlichkeitstheorie die Rede ist, reicht also zu einer Interpretation des Wahrscheinlichkeitsbegriffs für empirische Verwendungen nicht aus. Da sie nur erlaubt, Wahrscheinlichkeitsaussagen aus vorgegebenen Wahrscheinlichkeitsaussagen abzuleiten, nicht aber aus Beobachtungsaussagen über relative Häufigkeiten Wahrscheinlichkeitsaussagen zu gewinnen, ist sie auch für eine statistische Verwendung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs unzulänglich. Sie muß also noch eine wesentliche Ergänzung erfahren, welche die sogenannte *indirekte* Theorie der objektiven Wahrscheinlichkeit liefern soll. Eine solche Ergänzung hat in besonders durchsichtiger und überzeugender Form Hans Richter angegeben, auf dessen Gedanken wir uns im folgenden beziehen[12].

In der indirekten Theorie betrachtet man die Menge aller statistischen Hypothesen, d.h. die Menge aller objektiven Wahrscheinlichkeitsbewertungen, über dem Ereigniskörper $\mathscr{R}$ einer Versuchsanordnung V. Für diese Menge wird eine subjektive Wahrscheinlichkeitsbewertung eingeführt, d.h. den einzelnen statistischen Hypothesen werden subjektive Wahrscheinlichkeitswerte, genannt *Glaubwürdigkeiten*, zugeordnet, die ausdrücken, wie stark wir an diese Hypothesen glauben. Es wird dann ein Schätzwert der objektiven Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses von $\mathscr{R}$, genannt *Chance*, definiert mit den Eigenschaften einer subjektiven Ereigniswahrscheinlichkeit, und es wird festgelegt, wie die Glaubwürdigkeiten der statistischen Hypothesen abzuändern sind nach Beobachtung des Eintretens von Ereignissen aus $\mathscr{R}$. Dazu werden eine Reihe intuitiv begründeter Axiome angegeben, die bewirken, daß sich die abgeänderten Chancen wie bedingte subjektive Wahrscheinlichkeiten verhalten. Im Rahmen der indirekten Theorie, die so wesentlich vom subjektiven Wahrscheinlichkeitsbegriff Gebrauch macht, läßt sich nun auch das Prinzip der Häufigkeitsinterpretation der objektiven Wahrscheinlichkeit beweisen, so daß man auf diesem Weg nun eine befriedigende Interpretation der objektiven Wahrscheinlichkeit erhält, sowie den Zusammenhang zwischen Wahrscheinlichkeit und relativer Häufigkeit, den man für die Begründung und Überprüfung statistischer Hypothesen benötigt.

Mit der Ergänzung der direkten durch die indirekte Theorie wird so ein insoweit befriedigender Aufbau der Theorie der objektiven Wahrscheinlichkeit erreicht.

II. DER SUBJEKTIVE WAHRSCHEINLICHKEITSBEGRIFF

Bei der Charakterisierung des subjektiven Wahrscheinlichkeitsbegriffs schlägt man nicht den Weg einer impliziten Definition ein, sondern nimmt eine Explikation des vorwissenschaftlich-umgangsprachlichen Begriffs der Wahrscheinlichkeit vor, den wir im Alltag laufend verwenden, wenn wir sagen, daß wir ein Ereignis (aufgrund einer gegebenen Wissenssituation) für weniger oder gleich wahrscheinlich erachten wie ein anderes Ereignis.

So sagen wir (aufgrund einer Beobachtung fallenden Luftdrucks und der Wolkenbildung und unserer Erfahrung, daß dies häufig Anzeichen von Regen sind), daß es wahrscheinlicher sei, daß es morgen regnet, als daß es morgen schönes Wetter ist.

Diesen vorwissenschaftlichen Begriff einer komparativen Wahrscheinlichkeit im Sinn einer subjektiven Erwartung präzisiert man nun für den wissenschaftlichen Gebrauch durch Angabe von einfachen Axiomen für diesen Begriff, die aufgrund unseres alltäglichen Verständnisses als einleuchtend erscheinen. Es läßt sich dann zeigen, daß sich dieser komparative Begriff der subjektiven Wahrscheinlichkeit metrisieren läßt in Form eines quantitativen Begriffs der subjektiven Wahrscheinlichkeit, nach dem auch die subjektive Wahrscheinlichkeit ein normiertes Maß über einem Ereigniskörper ist. Man gelangt so in prinzipiell gleicher Weise zu einem quantitativen Wahrscheinlichkeitsbegriff, wie man auch zu quantitativen Begriffen der Länge, des Gewichts etc. gelangt[13].

Besteht der erste Schritt des Aufbaus der subjektiven Wahrscheinlichkeitstheorie so in einer Präzisierung und Metrisierung des vorwissenschaftlichen Wahrscheinlichkeitsbegriffs, so geht es im zweiten Schritt darum, die Begründbarkeit eines Induktionsprinzips im Rahmen dieser Theorie nachzuweisen, d.h. einen Zusammenhang zwischen dem Ansatz der subjektiven Wahrscheinlichkeiten und der Beobachtung relativer Häufigkeiten herzustellen, und in diesem Rahmen Entsprechungen zu den Aussagen der objektiven Wahrscheinlichkeitstheorie aufzuweisen, um so zu zeigen, daß der subjektive Wahrscheinlichkeitsbegriff den objektiven ersetzen kann. Dazu wird zunächst der Begriff der Vertauschbarkeit von Ereignissen eingeführt: die Glieder einer Ereignisfolge E_1, E_2,... heißen *vertauschbar*, wenn die Wahrscheinlichkeiten aller Konjunktionen von je n verschiedenen Gliedern dieser Folge gleich sind. Dieser Begriff spielt für die subjektive Wahrscheinlichkeitstheorie eine ähnlich fundamentale Rolle wie der Begriff der Unabhängigkeit für die objektive Wahrscheinlichkeitstheorie. Man wird insbesondere dann eine Vertauschbarkeit der Ereignisse E_1, E_2,... in Ansatz bringen, d.h. man wird die subjektive Wahrscheinlichkeitsbewertung so ansetzen, daß eine Vertauschbarkeit besteht, wenn die E_i Ereignisse des gleichen Typs sind, die zu verschiedenen, als unabhängig angesehen Wiederholungen eines Versuchs V gehören. So wird man z.B. die Ergebnisse 'Augenzahl 6' für verschiedene Würfe mit einem Würfel als vertauschbar ansehen. Ist nun V ein Versuch und w eine subjektive Wahrscheinlichkeitsbewertung über einem Ereigniskörper, der zu einer abzählbar unendlichfachen Wiederholung von V gehört, und sind E_1, E_2,... zu den einzelnen Versuchsdurchführungen gehörige Ereignisse des Typs E, so kann man, wo φ eine Folge von Ergebnissen der Versuchsdurchführungen ist, die Größe $Y_n^E(\varphi)$ als relative Häufigkeit von E in den ersten n Durchführungen definieren. Wie zuerst de Finetti bewiesen hat, gilt dann, daß die Funktionen $Y_n^E(\varphi)$ für fast alle φ gegen einen Grenzwert $Y^E(\varphi)$ konvergieren[14]. Die Größe $Y^E(\varphi)$ stellt nun den Grenzwert der relativen Häufigkeiten des Ereignistyps E in der Folge φ dar und steht so in Analogie zur objektiven Wahrscheinlichkeit[15]. Es zeigt sich, daß man im Kontext subjektiver Wahrscheinlichkeitsaussagen mit der Größe Y^E wie mit einer objektiven Wahrscheinlichkeit rechnen kann, und es gilt das Prinzip der Häufigkeitsinterpretation in der Form: "Für hinreichend lange Folgen von unabhängigen Versuchsdurchführungen liegt die subjektive Wahrscheinlichkeit dafür, daß sich die Größe Y^E nur beliebig wenig von der relativen Häufigkeit von E unterscheidet, beliebig nahe bei eins"[16]. Wenn wir also die Größe Y^E einmal hier als *induktive* Wahrscheinlichkeit von E bezeichnen wollen[17], so können wir sagen, daß im Rahmen der subjektiven Wahrscheinlichkeitstheorie die induktive Wahrscheinlichkeit die Rolle einer objektiven Wahrscheinlichkeit übernimmt. Danach entspricht der Aussage, die objektive Wahrscheinlichkeit, mit einem bestimmten Würfel '6' zu werfen, sei 1/6, nicht die Aussage, die subjektive Wahrscheinlichkeit von '6' bei einem bestimmten Wurf mit dem Würfel sei 1/6, sondern die Aussage, daß $Y^E(\varphi)$ für fast alle φ 1/6 ist[18]. Natürlich ist die induktive Wahrscheinlichkeit keine objektive Wahrscheinlichkeit, ist sie doch überhaupt nur in Zusammenhang mit einem subjektiven Wahrscheinlichkeitsbegriff definiert und ist kein Modell der direkten Theorie der objektiven Wahrscheinlichkeit[19], noch ein objektives Merkmal empirischer Vorgänge, wie das die objektive Wahrscheinlichkeit sein soll. Aber die Analogie der induktiven zur objektiven Wahrscheinlichkeit ist hinreichend stark, daß wir den objektiven Wahrscheinlichkeitsaussagen subjektive Entsprechungen zur Seite stellen und so in einer ersten Näherung behaupten können, daß die subjektive Wahrscheinlichkeitstheorie nicht ärmer ist als die objektive. Wie weit diese Näherung gilt, werden wir im folgenden noch zu untersuchen haben.

In Analogie zur indirekten Theorie der objektiven Wahrscheinlichkeit läßt sich weiterhin eine Glaubwürdigkeitsbewertung für statistische Hypothesen definieren[20] und man findet, daß diese Glaubwürdigkeiten in gleicher Weise von der Beobachtung relativer Häufigkeiten abhängen, wie das in der indirekten Theorie gefordert wird. Diese Abhängigkeit ist so geartet, daß sich im Sinn des Prinzips der Häufigkeitsinterpretation für die Beobachtung relativer Häufigkeiten in hinreichend langen Versuchsfolgen eine Konvergenz der Glaubwürdigkeiten auf die Auszeichnung solcher statistischer Hypothesen ergibt, die eine induktive Wahrscheinlichkeit nahe den beobachteten relativen Häufigkeiten annehmen, sofern nur solche subjektive Wahrscheinlichkeitsbewertungen betrachtet werden, die nicht gewisse statistische Hypothesen von vornherein ausschliessen, d.h. ihnen die Wahrscheinlichkeit 0 zuordnen. Von solchen Wahrscheinlichkeitsbewertungen wird man aber immer ausgehen, wenn man aus der Erfahrung lernen will. Von welchen subjektiven Wahrscheinlichkeitsbewertungen wir also auch immer ausgehen, solange sie nicht von vornherein gewisse mögliche statistische Hypothesen ausschließen, gelangen wir aufgrund der Beobachtung langer Versuchsreihen immer zu den gleichen, durch diese Beobachtung bedingten Wahrscheinlichkeitsannahmen. In diesem Sinn bewirkt also die Erfahrung eine Konvergenz der subjektiven Wahrscheinlichkeitsannahmen.

Vergleicht man nun den Aufbau von objektiver und subjektiver Wahrscheinlichkeitstheorie, so ergeben sich die folgenden Vorzüge der subjektiven Theorie:

(1) Wir haben oben gesehen, daß man für einen befriedigenden und geschlossenen Aufbau der objektiven Theorie den subjektiven Wahrscheinlichkeitsbegriff benützen muß. In der objektiven Theorie kommen also zwei, aufeinander nicht reduzierbare Wahrscheinlichkeitsbegriffe vor, während die subjektive Theorie nur einen Wahrscheinlichkeitsbegriff verwendet.

(2) Die subjektive Theorie ist in ihrem axiomatischen Aufbau einfacher und intuitiv durchsichtiger. In der objektiven Theorie stehen zwei Axiomensysteme nebeneinander, das der direkten und das der indirekten Theorie. Während nun die Axiome der subjektiven Theorie intuitiv einleuchtend sind – sie werden ja durch das vorwissenschaftliche Verständnis des Wahrscheinlichkeitsbegriffs gerechtfertigt –, sind die Axiome der objektiven Theorie intuitiv zunächst undurchsichtig: wie wir sahen, ist eine befriedigende Interpretation des objektiven Wahrscheinlichkeits-

begriffs aufgrund der direkten Axiome nicht möglich. Da sich aber die Axiome der indirekten Theorie auf diesen Begriff beziehen, sind auch sie zunächst intuitiv nicht ausreichend zu begründen. Ein näheres Verständnis des objektiven Wahrscheinlichkeitsbegriffs und damit auch der Axiome ergibt sich erst aus einem Theorem der indirekten Theorie, dem Häufigkeitsprinzip.

(3) Erkenntnistheoretisch erscheint die, man ist fast geneigt zu sagen 'metaphysische' Hypostasierung von Eigenschaften oder Dispositionen als fragwürdig, wie sie sich mit der grundlegenden Intention des objektiven Wahrscheinlichkeitsbegriffs verbindet, indem man fordert, daß die objektive Wahrscheinlichkeitsbewertung auf dem zu einem Versuch V gehörigen Ereigniskörper in der Natur dieses Versuchs eine reale Entsprechung hat, daß wir also mit objektiven Wahrscheinlichkeitsaussagen die Natur beschreiben. Allgemein ist man ja durch die Diskussion des kognitiven Status theoretischer Begriffe bezüglich der Annahme solcher realen Entsprechungen heute vorsichtig geworden. Empirisch gegeben sind zunächst nur die relativen Häufigkeiten h_n^E eines Ereignisses E in einer Folge von n (unabhängigen) Wiederholungen von V. Die Beobachtung einer solchen relativen Häufigkeit bewirkt, aufgrund der Festlegungen über die Bildung bedingter subjektiver Wahrscheinlichkeiten, daß wir mit großer subjektiver Wahrscheinlichkeit dem Ereignis E eine induktive Wahrscheinlichkeit nahe h_n^E zuordnen, d.h. wir erwarten mit großer Sicherheit, daß die weiteren relativen Häufigkeiten nahe bei h_n^E liegen werden. Für den Zusammenhang zwischen der Beobachtung relativer Häufigkeiten und unserer Erwartung zukünftiger relativer Häufigkeiten leistet also die Annahme einer objektiven Wahrscheinlichkeit nichts, dieser Zusammenhang wird schon durch den subjektiven Begriff allein in befriedigender Weise erklärt[21]. Aber auch für eine Erklärung der auftretenden relativen Häufigkeiten leistet die Annahme objektiver Wahrscheinlichkeiten nichts. Daß die beobachteten relativen Häufigkeiten von E auftreten, wird durch die physikalischen Eigenschaften von V (wie z.B. die geometrische Gestalt, die Dichteverteilung eines Würfels) bewirkt (wenn auch nicht determiniert), denn eine Änderung dieser physikalischen Eigenschaften bewirkt im allgemeinen auch eine Änderung der auftretenden relativen Häufigkeiten[22]. Was soll nun damit geleistet werden, daß man neben diese physikalischen Eigenschaften noch eine weitere, von ihnen nicht unabhängige Eigenschaft oder Disposition, genannt 'objektive Wahrschein-

lichkeit' stellt, die ebensowenig wie jene die auftretenden Häufigkeiten determiniert und die sich auch nur in diesen relativen Häufigkeiten kund tut?

Wenn so die metaphysische Hypostasierung, die man meist mit dem objektiven Wahrscheinlichkeitsbegriff verbindet, erkenntnistheoretisch gesehen unfruchtbar ist, so ist sie auch unnötig: diese Hypostasierung findet in den Axiomen der objektiven Theorie nirgends Ausdruck. Sie ist mit diesen Axiomen verträglich, wird von ihnen aber nicht gefordert. Was diese Axiome festlegen ist vielmehr nur die Häufigkeitsinterpretation der objektiven Wahrscheinlichkeit, nach der eine Aussage, daß die objektive Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses E den Wert r hat, besagt, daß die subjektive Wahrscheinlichkeit, daß für hinreichend lange Versuchsfolgen die relativen Häufigkeiten von E nahe bei r liegen, sehr groß ist. Beschränkt man sich auf diese Charakterisierung des objektiven Wahrscheinlichkeitsbegriffs, so ist der Unterschied zwischen objektiver und induktiver Wahrscheinlichkeit aber nur mehr formal, nicht jedoch erkenntnistheoretisch relevant.

(4) Für die Anwendbarkeit der objektiven Theorie spielt es eine große Rolle, daß man die Möglichkeit hat, Ereignisse als physikalisch unabhängig auszuzeichnen. Die Aussage, daß zwei Ereignisse physikalisch unabhängig sind, ist aber eine Aussage über die Welt, die durch Beobachtungen begründet werden muß. In vielen Fällen würde eine solche Begründung aber nun darauf hinauslaufen, daß man von einer gänzlich 'offenen' Glaubwürdigkeitsbewertung ausgeht, die alle möglichen statistischen Hypothesen zuläßt, und aufgrund der Beobachtungen von relativen Häufigkeiten dann zu einer Auszeichnung solcher statistischer Hypothesen käme, die eine Unabhängigkeit der fraglichen Ereignisse behaupten. Jürgen Humburg hat aber gezeigt, daß man von einer derart 'offenen' Glaubwürdigkeitsbewertung durch die Berücksichtigung noch so vieler Beobachtungen nie zu einer nichtoffenen Glaubwürdigkeitsbewertung gelangen kann, die bestimmte statistische Hypothesen auszeichnet[23]. Die Begründung des Ansatzes der physikalischen Unabhängigkeit, die sich somit im Rahmen der objektiven Theorie nicht leisten läßt, bildet eine erhebliche erkenntnistheoretische Schwierigkeit für die Anwendung dieser Theorie. Demgegenüber bildet das analoge Problem im Rahmen der subjektiven Theorie, die Frage, warum wir gewisse Ereignisse als vertauschbar ansehen, keine derartigen Schwierigkeiten. Denn die

Aussage der Vertauschbarkeit ist keine Aussage über die Welt, sondern eine Aussage über unsere Wahrscheinlichkeitsannahmen: wenn wir Ereignisse als gleichartig ansehen, gleichgültig, ob sie auch objektiv physikalisch gleichartig sind, so werden wir auch unsere subjektive Wahrscheinlichkeitsbewertung so ansetzen, daß diese Ereignisse vertauschbar sind.

Wenn es nun zu den Aussagen über objektive Wahrscheinlichkeiten Entsprechungen gibt, in denen nur von subjektiven Wahrscheinlichkeiten die Rede ist, wenn nach (3) im Übergang zu diesen Entsprechungen erkenntnistheoretisch gesehen nichts Wesentliches verlorengeht und wenn also in diesem Sinn die subjektive Theorie nicht weniger leistungsfähig ist als die objektive, so ist man geneigt, der subjektiven Theorie den Vorzug vor der objektiven Theorie zu geben und sich der Meinung von de Finetti anzuschließen, daß der objektive Wahrscheinlichkeitsbegriff überflüssig sei und es für alle Zwecke genüge, die subjektive Wahrscheinlichkeitstheorie zugrunde zu legen. Wenn sich aber trotz ihrer Vorzüge die subjektive Theorie bis heute nicht gegenüber der objektiven Theorie durchzusetzen vermocht hat, und insbesondere die Naturwissenschaftler an der objektiven Theorie festhalten, so liegt das vor allem an zwei Einwänden, die man gegen den subjektiven Wahrscheinlichkeitsbegriff geltend macht und die wir im folgenden nun näher untersuchen wollen.

III. DER EINWAND MANGELNDER OBJEKTIVITÄT

Der erste Einwand, der sich gegen eine wissenschaftliche Verwendung des subjektiven Wahrscheinlichkeitsbegriffes überhaupt richtet, nicht nur speziell gegen seine naturwissenschaftliche Verwendung, läßt sich etwa so formulieren: In der Wissenschaft geht es wesentlich um die Formulierung objektiv gültiger Aussagen. Subjektive Wahrscheinlichkeitsaussagen haben demnach (sofern sie keine Theoreme der subjektiven Wahrscheinlichkeitstheorie sind, d.h. aus ihren Axiomen logisch folgen) als Aussagen über bloß subjektive Überzeugungen keinen Platz in der Wissenschaft und sind keine wissenschaftlich relevanten Aussagen. Zur Wissenschaft gehören Aussagen wie '2+2=4' und 'Es gibt 9 Planeten', nicht aber Aussagen wie 'Ich glaube, daß 2+2=4 ist' und 'Ich bin in dem und dem Grade davon überzeugt, daß es 9 Planeten gibt'.

Zu diesem Einwand ist zunächst zu sagen, daß er den objektiven

Wahrscheinlichkeitsbegriff ebenso trifft, wie den subjektiven. Denn wie wir oben schon sahen, ist nach der Häufigkeitsinterpretation eine Aussage der Gestalt 'Die objektive Wahrscheinlichkeit des Ereignisses *E* ist *r*' gleichbedeutend mit der Aussage 'Für hinreichend lange Folgen von Versuchsdurchführungen ist es praktisch sicher, daß die relativen Häufigkeiten von *E* nahe bei *r* liegen'. Weil also die Deutung des objektiven Wahrscheinlichkeitsbegriffs nur durch eine Verwendung des subjektiven Begriffs gelingt, sind objektive Wahrscheinlichkeitsaussagen ebenso wie subjektive Aussagen über subjektive Wahrscheinlichkeitsannahmen. Wäre der Einwand der mangelnden Objektivität also stichhaltig, so wären objektive Wahrscheinlichkeitsaussagen ebenso wie subjektive als unwissenschaftlich anzusehen, und das ist angesichts der Bedeutung von Wahrscheinlichkeitsaussagen in den Naturwissenschaften sicherlich eine unhaltbare Position.

Man kann dem Einwand aber nun wie folgt begegnen: Die Forderung, daß wissenschaftliche Aussagen 'objektiv' sein müssen, ist nur dann stichhaltig, wenn man das Wort 'objektiv' so versteht, daß eine Aussage als objektiv zu gelten hat genau dann, wenn es intersubjektive Kriterien zu ihrer Überprüfung gibt. Diese für die Wissenschaftlichkeit einer Aussage allein zu fordernde Objektivität hängt nicht an einer 'Objektivität' ihres Gegenstandes im Sinne einer das Subjekt transzendierenden Realität ihres Gegenstandes. So sind z.B. Aussagen über die Lösung von Schachproblemen intersubjektiv kontrollierbar (an Hand der Spielregeln), ohne daß man sagen könnte, das Schachspiel sei eine Realität 'an sich'. Und in der Logik und Mathematik besteht eine intersubjektive Überprüfbarkeit der Aussagen auch für konstruktivistische Systeme, die sich nicht im Sinne des Platonismus auf eine transzendente Realität ihrer Gegenstände berufen [24].

Wie steht es nun mit der intersubjektiven Überprüfbarkeit subjektiver Wahrscheinlichkeitsaussagen? Eine Aussage der Gestalt $w(E)=r$ (die subjektive Wahrscheinlichkeit von *E* ist *r*) gilt zunächst kraft der Setzung der subjektiven Wahrscheinlichkeitsbewertung *w*, die in gewissem Maße willkürlich ist und nur durch die Forderung der Kohärenz eingeschränkt ist, d.h. durch die Forderung, daß *w* den Axiomen der Wahrscheinlichkeitstheorie genügt. Wenn man aber das Prinzip akzeptiert, daß bei der Zuordnung subjektiver Wahrscheinlichkeiten immer das gesamte (relevante) Erfahrungsdatum *D* zu berücksichtigen ist – das ist aber eine für die Anwendung des subjektiven Wahrscheinlichkeitsbegriffes ebenso natürliche wie wesentliche Forderung, da wir ja aus der Erfahrung lernen und sich unsere Erwartungen an der Erfahrung orientieren –, so legt man den subjektiven Wahrscheinlichkeitsaussagen nie die willkürliche Ausgangsbewertung w allein zugrunde, sondern bildet jeweils die durch D bedingte Wahrscheinlichkeit $w(E/D)$. Dann ist aber auch eine subjektive Wahrscheinlichkeitsaussage intersubjektiv überprüfbar in dem Sinn, daß sie Argumenten zugänglich ist. Es ist dann nämlich sinnvoll zu fragen 'Warum ordnest du dem Ereignis E die Wahrscheinlichkeit r zu?', weil man zur Begründung auf gewisse Beobachtungsdaten verweisen kann; und man kann jemanden, der einem Ereignis E die Wahrscheinlichkeit r zuordnet, durch Hinweis auf neue Beobachtungstatsachen dazu bringen, E einen anderen Wert als r zuzuordnen, der sich für ihn aus der zusätzlichen Berücksichtigung dieser Tatsachen ergibt.

Bei diesen Überlegungen haben wir stillschweigend die Voraussetzung gemacht, die für die praktisch wichtigen Anwendungsfälle des subjektiven Wahrscheinlichkeitsbegriffs erfüllt sind, daß nämlich E ein Ereignis einer Folge vertauschbarer Ereignisse eines Typs T ist und daß w keine Hypothese über die induktive Wahrscheinlichkeit von T ausschließt. Unter diesen Voraussetzungen gilt auch das oben schon erwähnte subjektive Induktionsprinzip, das besagt: wenn das Erfahrungsdatum D hinreichend viele Ereignisse vom Typ T enthält, so liegt $w(E/D)$ beliebig nahe bei der relativen Häufigkeit von T in D. Mit wachsender Erfahrung D wird also die Willkürlichkeit der Wahrscheinlichkeitszuordnung, die in w steckt, von immer geringerem Gewicht und die Wahrscheinlichkeitszuordnungen $w(E/D)$ konvergieren für die verschiedenen w gegen einen gemeinsamen Wert. Diese Aussage zeigt noch einmal deutlich, daß es falsch ist, die subjektiven Wahrscheinlichkeitszuordnungen als schlechthin willkürlich zu bezeichnen.

Wenn man in diesem Sinn nun auch subjektive Wahrscheinlichkeitsaussagen als intersubjektiv überprüfbar anspricht, so darf man allerdings nicht übersehen, daß hier ein wesentlich weiterer Überprüfungsbegriff benützt wird, als man ihn sonst oft vor Augen hat. Vielfach nennt man ja einen Satz nur dann überprüfbar, wenn er entscheidbar ist, d.h. wenn sich seine Wahrheit oder Falschheit erweisen läßt, z.B. durch Bezugnahme auf eine Menge von Beobachtungssätzen, aus denen der Satz selbst oder seine Negation logisch folgt. In diesem Sinn sind subjektive Wahrscheinlichkeitsaussagen nicht überprüfbar, denn ihre Überprüfung führt, wie wir sahen, nicht zu einem Resultat, daß sie wahr oder falsch sind – sie gelten immer kraft subjektiver Setzung –, sondern sie bewirkt nur den Übergang von einer Aussage $w(E/D_1)=r$ zu einer Aussage $w(E/D_2)=r'$, wo das Erfahrungsdatum D_1 in D_2 echt enthalten ist. Ist $r=r'$, bzw. $r\neq r'$, so ist damit nicht die Wahrheit, bzw. Falschheit von $w(E/D_1)=r$ erwiesen, sondern durch den Übergang zu einer neuen bedingten Wahrscheinlichkeit $w(E/D_2)$ wird nur überprüft, inwieweit die ursprüngliche Wahrscheinlichkeitszuordnung $w(E/D_1)$ den neuen Erfahrungsdaten angemessen ist.

Um eine Erweiterung des engen Überprüfungsbegriffes kommt man nicht umhin, wenn man Wahrscheinlichkeitsaussagen als überprüfbar ansehen will. Denn selbst wenn sich die objektive Wahrscheinlichkeit im Sinne der Häufigkeitsdefinition von Mises definieren ließe, wären auch objektive Wahrscheinlichkeitsaussagen als Aussagen über den Grenzwert von Folgen durch die Beobachtung relativer Häufigkeiten in endlichen Abschnitten dieser Folgen nicht entscheidbar.

Man kann aber fragen, ob nicht doch die objektiven Wahrscheinlichkeitsaussagen dadurch vor den subjektiven ausgezeichnet sind, daß sie einem engeren Begriff der Überprüfbarkeit genügen als diese. Objektive Wahrscheinlichkeitsaussagen sind ja induktiv überprüfbar in dem Sinn, daß man ihnen aufgrund der Beobachtung relativer Häufigkeiten eine mehr oder minder große subjektive Wahrscheinlichkeit zuordnen kann, während man offenbar nicht davon sprechen kann, daß eine subjektive Wahrscheinlichkeitsaussage aufgrund einer solchen Beobachtung eine mehr oder minder große subjektive Wahrscheinlichkeit gewinnt. Eine solche Frage übersieht aber, daß den objektiven Wahrscheinlichkeitsaussagen im subjektiven Rahmen Aussagen über induktive Wahrscheinlichkeiten entsprechen, wie oben hervorgehoben wurde, die ebenso induktiv überprüfbar sind wie jene.

Es besteht auch kein Grund für die Annahme, daß sich das liberale Kriterium für die Überprüfbarkeit von Aussagen (nach dem es intersubjektiv kontrollierbare Argumente für oder gegen die Aussage geben muß) für den wissenschaftlichen Gebrauch ganz allgemein wesentlich verschärfen ließe, so daß dann unsere Aussage, subjektive Wahrscheinlichkeitsaussagen seien überprüfbar im weiten Sinne, zu schwach wäre. Denn bereits sehr einfache empirische, deterministische Aussagen von der Form kombinierter All- und Existenzsätze lassen sich ja weder durch

Beobachtung entscheiden, noch induktiv überprüfen, da jede Allaussage den Wahrscheinlichkeitswert 0 erhält und jede Existenzaussage den Wert 1 [25]. Legt man aber das liberale Überprüfbarkeitskriterium zugrunde, so kann man auch subjektive Wahrscheinlichkeitsaussagen als überprüfbar und damit als objektiv ansprechen in dem Sinn, wie das für die wissenschaftliche Verwendbarkeit dieser Aussagen allein entscheidend ist.

IV. DER EINWAND MANGELNDEN EMPIRISCHEN GEHALTS

Der zweite Einwand, der sich speziell gegen eine naturwissenschaftliche Verwendung des subjektiven Wahrscheinlichkeitsbegriffs richtet, lautet so: Subjektive Wahrscheinlichkeitsaussagen haben deswegen in einer empirischen Wissenschaft keinen Platz, weil sie nichts über die Welt besagen, sondern nur etwas über die Erwartungen eines Subjekts.

Gerade bezüglich dieses Einwands macht man oft einen Unterschied zwischen subjektiven und objektiven Wahrscheinlichkeitsaussagen. Denn ein Satz wie 'Die objektive Wahrscheinlichkeit, daß ein Radiumatom in einem Zeitraum von 1622 Jahren zerfällt, ist 1/2' soll nach der Intention, die sich mit dem Begriff der objektiven Wahrscheinlichkeit verbindet, etwas über die Natur der Radiumatome besagen, während eine Aussage wie 'Die subjektive Wahrscheinlichkeit, daß es morgen regnet, ist 1/4' nichts über die Wetterlage besagt, sondern nur etwas über die Erwartungen eines Subjekts.

Nach der Häufigkeitsinterpretation trifft aber der Einwand des mangelnden empirischen Gehalts objektive Wahrscheinlichkeitsaussagen ebenso wie subjektive. Außerdem darf man, wie schon gesagt wurde, Aussagen über objektive Wahrscheinlichkeiten nicht mit primitiven subjektiven Wahrscheinlichkeitsaussagen vergleichen, sondern nur mit Aussagen über induktive Wahrscheinlichkeiten. Tut man das aber, so verliert der Einwand seine Plausibilität. Endlich haben wir aber auch schon oben gesehen, daß die metaphysische Intention, die sich mit dem objektiven Wahrscheinlichkeitsbegriff verbindet, erkenntnistheoretisch nicht gerechtfertigt ist. Wenn also der Einwand Stich hält, so trifft er nicht nur subjektive Wahrscheinlichkeitsaussagen.

Die Frage, welche Aussagen man als empirisch klassifizieren soll, ist umstritten, wie die Diskussionen der empiristischen Sinnkriterien zeigen [26]. Der überzeugendste Weg zu einem Abgrenzungskriterium ist vielleicht der, von Fall zu Fall eine Menge von Grundtermen (sogenannte 'Beobachtungsterme') einer Sprache S als empirisch sinnvoll auszuzeichnen und dann genau die Sätze von S als empirisch anzusprechen, deren sämtliche deskriptiven Grundterme empirisch sinnvoll sind. Dann fallen zwar diejenigen Sätze heraus, die sogenannte 'theoretische Terme' enthalten, d.h. Terme, die durch die Beobachtungsterme nur implizit definiert werden, aber für diese Terme kann man sich damit begnügen, daß die Menge der für sie zulässigen Interpretationen beschränkt ist, daß man sie also zumindest als partiell empirisch gedeutet ansprechen kann[27]. Da der Term, der für die subjektive Wahrscheinlichkeit steht, aber nun weder ein Beobachtungsterm ist, noch auch ein durch Beobachtungsterme implizit definierter theoretischer Term, sondern ein Grundterm mit nichtempirischer Deutung ist, so gelangt man auf diesem Wege nicht zu einer Charakterisierung der subjektiven Wahrscheinlichkeitsaussagen als empirisch.

Andererseits erfaßt man auf diesem Wege aber auch nicht den weitesten Sinn des Wortes 'empirisch', in dem man es dem Wort 'apriorisch' gegenüberstellt. In diesem weitesten Sinn wird man eine Aussage genau dann als empirisch ansprechen, wenn sie sich auf empirischem Wege, d.h. durch Beobachtungen, aber auch nur auf empirischem Wege überprüfen läßt. Für eine subjektive Wahrscheinlichkeitsaussage $w(A)=r$ besteht aber eine solche empirische Überprüfbarkeit, wie wir oben sahen, wenn A zu einem Ereigniskörper gehört, der einen Beobachtungssatz E enthält mit $w(E)\neq 0$, so daß $w(A/E)\neq r$ ist (wie das bei empirischen Anwendungen des subjektiven Wahrscheinlichkeitsbegriffs im allgemeinen der Fall sein wird) und wenn man den oben skizzierten liberalen Überprüfungsbegriff zugrunde legt. Angesichts der Relevanz neuer Erfahrungsdaten für die subjektiven Wahrscheinlichkeitszuordnungen nach der Regel der Berücksichtigung des Gesamtdatums muß man also auch subjektive Wahrscheinlichkeitsaussagen als empirisch im weitesten Sinn dieses Wortes charakterisieren.

Wenn wir damit nun Argumente angeführt haben, nach denen sich subjektive Wahrscheinlichkeitsaussagen als überprüfbar und als empirisch charakterisieren lassen, so bleibt doch ein erheblicher Unterschied zwischen dem Sinn, in dem diese Charakterisierung gilt, und dem Sinn, in dem man üblicherweise deterministische Aussagen als überprüfbar und als empirisch klassifiziert: deterministische Aussagen werden auf ihren

Wahrheitswert hin überprüft, Wahrscheinlichkeitsaussagen aber auf ihre Angemessenheit an eine neue Erfahrungssituation; deterministische Aussagen sprechen in einem einfachen Sinn von der Welt, Wahrscheinlichkeitsaussagen aber sprechen über die Überzeugungen eines Subjekts und sind nur insoweit empirisch, als empirische Daten für ihre Überprüfung relevant sind. Wir haben aber gesehen, daß die Kriterien, nach denen Wahrscheinlichkeitsaussagen überprüfbar und empirisch sind, natürliche und naheliegende Verallgemeinerungen jener Kriterien sind, nach denen diese Klassifizierung für deterministische Aussagen gilt.

ANMERKUNGEN

1 Vgl. R. v. Mises, *Die Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung in der Statistik und theoretischen Physik*, Wien[3] 1931; derselbe, *Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit*, Wien 1951; H. Reichenbach, *Wahrscheinlichkeitslehre*, Leiden 1935.

2 Vgl. insbesondere B. de Finetti, 'La prevision: ses lois logiques, ses sources subjectives', *Annales de l'Institut Henri Poincaré* 7 (1937).

3 Vgl. J. M. Keynes, *A Treatise on Probability*, London[1] 1921; H. Jeffreys, *Theory of Probability*, Oxford[1] 1939; R. Carnap, *Logical Foundations of Probability*, Chicago 1950; derselbe: *The Continuum of Inductive Methods*, Chicago 1952.

4 Vgl. dazu Anm. 13.

5 Als relative Häufigkeit eines Ereignisses A in einer Reihe von n Durchführungen von V bezeichnet man die Zahl r/n, wo A in dieser Reihe r mal aufgetreten ist.

6 Daß sich Wahrscheinlichkeitsaussagen grundsätzlich immer auf die gesamte Versuchsanordnung beziehen, hat insbesondere Karl Popper in 'The Propensity Interpretation of the Calculus of Probability, and the Quantum Theory' in: *Observation and Interpretation* (hrg. von S. Körner), London 1957 hervorgehoben. Er bringt das Beispiel eines Würfels, dessen Schwerpunkt nicht mit seinem geometrischen Mittelpunkt zusammenfällt und bei dem sich diese Inhomogenität um so stärker bemerkbar macht, je stärker das Gravitationsfeld ist, in dem der Würfel geworfen wird. Hier charakterisieren die Ergebniswahrscheinlichkeiten also nicht den Würfel als solchen, sondern die Versuchsanordnung unter Einschluß des Gravitationsfelds, von dem sie abhängen.

7 Für eine genauere Definition von Ereigniskörpern vgl. z.B. H. Richter, *Wahrscheinlichkeitstheorie*, Berlin[2] 1966, § 2.

8 So z.B. bei der Verwendung von irrationalen Maßzahlen und bei kombinierten All- und Existenzaussagen.

9 Vgl. dazu auch die Ausführungen von H. Richter, *l.c.* S. 56f.

10 Es ist auch sehr fraglich, ob eine explizite Definition des Wahrscheinlichkeitsbegriffes (durch dann notwendigerweise deterministische Begriffe) möglich ist, da eine solche Definition ebensowenig über den deterministischen Rahmen hinausführen würde, wie die Benützung reeller Zahlen als Maßzahlen aus dem Bereich der Beobachtungssprache herausführt. Vgl. dazu C. G. Hempel, 'The Theoreticians Dilemma', in: *Minnesota Studies in the Philosophy of Science*, Bd. II (hrg. von H. Feigl, M. Scriven, G. Maxwell), Minneapolis 1958, S. 65.

11 Man kann z.B. unter Bezugnahme auf die Relativitätstheorie zwei räumlich getrennte Ereignisse als physikalisch unabhängig ansprechen, die sich aufgrund der endlichen

Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wirkungen gegenseitig nicht beeinflussen können.
[12] Vgl. dazu H. Richter, 'Zur Grundlegung der Wahrscheinlichkeitstheorie', Teil V, *Math. Annalen* **128** (1954) 305–339, sowie seine weniger formal gehaltene Darstellung in: 'Zur Grundlegung der Wahrscheinlichkeitsrechnung', *Dialectica* **8** (1954) 48–77.
[13] Vgl. dazu B. de Finetti, *l.c.* und L. J. Savage, *The Foundations of Statistics*, New York 1954. – Für das allgemeine Verfahren der Metrisierung qualitativer Begriffe vgl. P. Suppes und J. L. Zinnes, 'Basic Measurement Theory', In: *Handbook of Mathematical Psychology*, Bd. I (hrg. von R. D. Luce, R. R. Bush, E. Galanter), New York 1963, S. 3–76. – Eine *logische* Wahrscheinlichkeitsbewertung kann man als spezielle subjektive Bewertung auffassen, die aus der Menge der nach den Axiomen der subjektiven Theorie zulässigen Bewertungen über einem Ereigniskörper durch zusätzliche Axiome, die intuitiv als Rationalitätsbedingungen begründet werden, eindeutig ausgezeichnet wird. Bisher ist es aber nur für sehr einfache Sprachen gelungen, ausreichende Rationalitätsbedingungen anzugeben. Vgl. dazu R. Carnap, *l.c.*
[14] Genauer: die $Y_n^E(\varphi)$ konvergieren für w-fast alle φ gegen $Y^E(\varphi)$, d.h. es gilt

$$w(\{\varphi:\lim_{n\to\infty} Y_n^E(\varphi)=Y^E(\varphi)\})=1.$$

[15] Vgl. de Finetti, *l.c.*
[16] Genauer:

$$w(\{\varphi:|Y^E(\varphi)-Y_n^E(\varphi)|\leq\varepsilon\})\geq 1-\delta.$$

Das folgt direkt aus der Aussage in Anm. 14.
[17] Als *induktive* Wahrscheinlichkeit bezeichnet man auch die logische Wahrscheinlichkeit nach Carnap. Da wir hier aber nicht auf die logische Wahrscheinlichkeit eingehen, mag dieser terminologische Übergriff angehen.
[18] Also nicht $w(E_i)=1/6$, sondern

$$w(\{\varphi: Y^E(\varphi)=1/6\})=1.$$

[19] So gilt z.B. für unabhängige E, E' nicht

$$Y^{E\cdot E'}(\varphi)=Y^E(\varphi)\cdot Y^{E'}(\varphi)$$

– sofern diese Grenzwerte überhaupt existieren –, sondern nur

$$w(\{\varphi: Y^{E\cdot E'}(\varphi)\leq r\})=w(\{\varphi: Y^E(\varphi)\cdot Y^{E'}(\varphi)\leq r\}).$$

[20] So ist

$$w(\{\varphi: Y^E(\varphi)\leq r\})$$

die Glaubwürdigkeit der Hypothese, daß die induktive Wahrscheinlichkeit von $E\leq r$ ist.
[21] Es wäre ja auch unbegreiflich, wie ein objektives Charakteristikum der Natur auf unsere Überzeugungen einwirken sollte, es sei denn über die Beobachtung. Objektive Wahrscheinlichkeiten lassen sich aber nur an Hand der relativen Häufigkeiten 'beobachten', für den Übergang von relativen Häufigkeiten zu Wahrscheinlichkeitserwartungen braucht man aber, wie gesagt, die objektive Wahrscheinlichkeit nicht.
[22] Vgl. das Beispiel von K. Popper in Anm. 6.
[23] Vgl. J. Humburg: Die Problematik des induktiven Schließens bei Carnap und Richter, Münchener Diplomarbeit 1964.
[24] Vgl. dazu F. v. Kutschera, 'Zwei Theorien über den Gegenstand der Logik', *Studium Generale* **19** (1966) 169–175.
[25] Vorausgesetzt ist, daß es sich um echte All- und Existenzsätze handelt, daß also der zugrunde gelegte Individuenbereich nicht endlich ist, und daß die quantifizierten

Satzformen nicht für fast alle Einsetzungen den Wahrscheinlichkeitswert 1, bzw. 0 erhalten.

[26] Die empiristischen Sinnkriterien sollen in erster Linie eine Abgrenzung der sinnvollen von den sinnlosen Sätzen liefern. In unserem Zusammenhang interessieren sie aber nur in der Popperschen Auffassung, in der sie aus der Menge der sinnvollen Aussagen die Sätze mit empirischem Gehalt ausgrenzen. Vgl. dazu C. G. Hempel: *Aspects of Scientific Explanation*, New York 1965, hier: 'Empiricist Criteria of Cognitive Significance: Problems and Changes'; K. Popper: *Logik der Forschung*,[2] Tübingen 1966, S. 15.

[27] Vgl. dazu C. G. Hempel, *l.c.*