Franz von Kutschera, Regensburg

Die logischen Antinomien in sprachphilosophischer Sicht*)

Die formale Logik hat sich in den ersten zwei Dritteln unseres Jahrhunderts zunehmend zu einer Spezialdisziplin der Mathematik entwickelt, die sich von der Philosophie immer weiter entfernt hat. Das ist nicht nur deswegen bedauerlich, weil die Logik interessante philosophische Probleme enthält, sondern auch im Hinblick darauf, daß die Logik dadurch eines ihrer wichtigsten Ziele zunehmend aus dem Auge verloren hat: die Analyse der natürlichen Sprache.

Die zentrale Aufgabe der Logik ist es schon in der aristotelischen Bestimmung, gültige Schlüsse auszuzeichnen. Diese Aufgabe wird in einem entscheidenden Sinn verfehlt, wenn man sich darauf beschränkt, künstliche Sprachen aufzubauen und in ihnen Schlußformen zu definieren, deren Gültigkeit man dann untersucht; wenn die Logik sich also ihren Gegenstand selbst vorgibt. Der Wert einer Logik in philosophischer Sicht hängt vielmehr entscheidend davon ab, inwieweit sie in der Lage ist, *natürliche Schlüsse* als gültig auszuzeichnen, d. h. Schlüsse, deren Prämissen und deren Konklusionen Sätze einer natürlichen Sprache sind. Daß die mathematische Logik hier völlig versagt habe, kann man sicherlich nicht behaupten. Ihre Möglichkeiten zur Analyse natürlicher Schlüsse waren aber sehr begrenzt, solange sie nur extensionale Sprachen verwendete. Erst durch die Entwicklung einer intensionalen Semantik durch R. Carnap, S. Kripke und R. Montague, um nur einige Namen zu nennen, wurden seit ca. 1960 Techniken zur Analyse auch komplexerer natursprachlicher Sätze zur Verfügung gestellt. Damit trat das Ziel einer Analyse natursprachlicher Sätze und Schlußweisen wieder mehr in den Vordergrund des Interesses von Logikern, die Vielfalt sprachlicher Phänomene jenseits der Sprachen der Mathematik.

Bis dahin war es gängige Auffassung in der Logik, daß die Sprache mit dem „logischen Lineal" zu messen sei; daß alles, was sich nicht logisch erfassen läßt, unpräzise und für die Zwecke einer exakten Wissenschaft unbrauchbar sei, wobei man „die" Logik in naiver Weise mit der jeweils bekannten, z. B. extensionalen Logik gleichsetzte.

Philosophisch gesehen ist es aber eher so, daß die Logik am Maßstab der natürlichen Sprache zu messen ist, daß ihr Ziel eine Untersuchung natürlicher Schlüsse und damit eine Analyse der natürlichen Sprache ist. Die Logik kann ja schon aus dem Grund nicht von der natürlichen Sprache und deren Logik absehen, weil diese ihr metasprachliches und metatheoretisches Fundament bilden, so daß die These von der prinzipiellen Unexaktheit der natürlichen Sprache die Grundlagen der Logik selbst in Frage stellen würde.

Ein entscheidender Grund für die Rechtfertigung der starken systematischen Abweichungen und Restriktionen von Logiksprachen gegenüber natürlichen Sprachen ist in den Antinomien zu sehen. Man sagt gewöhnlich, daß die natürliche Logik am besten durch die klassische Logik dargestellt werde, deren Prinzipien aber für so ausdrucksreiche Sprachen, wie sie die Natursprachen sind, zu Antinomien, d. h. zu beweisbaren Widersprüchen führen. Eine konsistente Logik müsse also gegenüber den natürlichen

Sprachen und ihren Schlußweisen notwendigerweise wesentliche Modifikationen aufweisen; Aufgabe der Logik sei es daher schon aus diesem Grunde nicht, die Strukturen natürlicher Sprachen zu präzisieren, sondern sie zu verändern.

Dieses Argument möchte ich im folgenden untersuchen, d. h. fragen, ob die Konstruktion von Antinomien in natürlichen Sprachen auch bei Berücksichtigung gewisser linguistischer und sprachphilosophischer Einsichten als möglich erscheint; ob die Antinomien also tatsächlich ein Argument für die Inkonsistenz der natürlichen Sprache sind, oder ob sie sich nur aus einem falschen Verständnis ihrer Funktionsweise ergeben.[1])

Wenn wir uns dabei nicht auf die Besonderheiten dieser oder jener speziellen natürlichen Sprache beziehen, sondern von allgemein gültigen Tatsachen ausgehen, so ist eine solche Untersuchung der Antinomien auch aus folgendem Grund interessant: Die Diskussion der Antinomien innerhalb der Logik hat sich sehr schnell von der philosophischen Frage nach ihren Ursachen, nach den Fehlern derjenigen Auffassungen von der Natur der logisch-mathematischen Erkenntnis und der Semantik, die sich in der klassischen Logik und Mengenlehre ausdrücken, auf die rein technische Frage verlagert, wie sich die Antinomien vermeiden lassen, d. h. wie sich leistungsfähige Kalküle aufbauen lassen, in denen die Antinomien nicht mehr auftreten. Das hat dazu geführt, daß wir heute über eine Vielzahl solcher Kalküle verfügen, auf die Frage nach einer Erklärung des Auftretens der Antinomien aber keine befriedigende Antwort finden, ja kaum Verständnis für eine solche Frage. Genau diese Frage untersuchen wir aber, wenn wir erörtern, ob sich die Antinomien auch bei einem genaueren Verständnis der Funktionsweisen der Sprache ergeben.

Die Antinomien

Die einfachste und neben dem „Lügner" bekannteste Antinomie ist die von Bertrand Russell, mit der die tiefgreifende Grundlagenkrise der Logik und Mathematik des beginnenden 20. Jahrhunderts ausgelöst wurde.

Gottlob Frege, der Begründer der formalen Logik in ihrer heutigen Gestalt, hatte, beginnend mit der „Begriffsschrift" (Halle 1879) eine Formalisierung der heute so genannten *klassischen* Logik und Mengenlehre in einer bis dahin beispiellosen Präzision entwickelt und durch sorgfältige inhaltliche Analysen begründet. So schien sein System, das er in abschließender Form in den „Grundgesetzen der Arithmetik" (2 Bde., Jena 1893, 1903) veröffentlichte, so gut fundiert, daß es als nur zu berechtigt erscheinen konnte, wenn Frege in seiner Einleitung zum 1. Band dieses Werkes sagte:

„Es ist von vornherein unwahrscheinlich, daß ein solcher Bau sich auf einem unsicheren, fehlerhaften Grunde aufführen lassen sollte . . . Und nur das würde ich als Widerlegung anerkennen können, wenn jemand durch die That zeigte, daß auf anderen Grundüberzeugungen ein besseres, haltbareres Gebäude errichtet werden könnte, oder wenn jemand mir nachwiese, daß meine Grundsätze zu offenbar falschen Folgesätzen führten. Aber das wird Keinem gelingen."[2])

Und doch mußte er schon im Anhang zum 2. Band des gleichen Werkes zugestehen:

„Einem wissenschaftlichen Schriftsteller kann kaum etwas Unerwünschteres begegnen, als daß ihm nach Vollendung einer Arbeit eine der Grundlagen seines Baues erschüttert wird. – In diese Lage wurde ich durch einen Brief des Herrn Bertrand Russell versetzt, als der Druck dieses Bandes sich seinem Ende näherte.“[3])

Dieser Brief Russells an Frege – datiert vom 16.6.1902 – enthält die Konstruktion der Antinomie, die als „Russellsche Antinomie“ in die Literatur eingegangen ist. Während noch Cantor in Ermangelung eines wirklich exakten und voll formalisierten Systems der Mengenlehre die von ihm schon früher (1895 und 1899) entdeckten und nach ihm selbst und C. Burali-Forti benannten Antinomien lediglich als noch aufzuklärende Randerscheinungen ansehen konnte, mußte die Konstruktion einer Antinomie im exakten System Freges die Aufgabe dieses Systems selbst erzwingen. Erst für ihn, der die strengen Forderungen einer formalisierten Logik kannte und selbst vertreten hatte, erzeugte die Antinomie jene tiefe Bestürzung, von der er im Antwortbrief an Russell schreibt.[4])

Nach Bekanntwerden dieser ersten Antinomie wurde dann in rascher Folge eine ganze Reihe weiterer Antinomien konstruiert. Sie machten deutlich, daß die zu den Antinomien führenden Fehler in den Grundvoraussetzungen der klassischen Logik liegen müssen, und bewirkten, daß die Kritik an ihr nun auf breiter Front einsetzte.

Es ist hier natürlich nicht möglich, einen Überblick über die ganze Mannigfaltigkeit der Antinomienkonstruktionen zu geben. Ich will nur kurz an das wichtigste Schema solcher Konstruktionen erinnern, an dem sich das Grundproblem bereits ablesen läßt.[5])

Die Antinomie von Russell ergibt sich, wenn man die Klasse R aller Klassen betrachtet, die sich selbst nicht als Element enthalten, und fragt, ob R sich selbst als Element enthält oder nicht. Nehmen wir das erstere an, so folgt daraus, daß R sich selbst nicht enthält; nach dem Prinzip „Wenn non-A aus A folgt, so gilt non-A“ muß also das letztere gelten. Daraus folgt aber, daß R sich selbst enthält. Wir erhalten also einen Widerspruch, der sich in der üblichen symbolischen Notation, in der „$\in$“ die Elementschaftsrelation bezeichnet und „λ“ die Klassenabstraktion, so formulieren läßt: R ist die Klasse $\lambda x \neg (x \in x)$, und es gilt $\lambda x \neg (x \in x) \in \lambda x \neg (x \in x) \equiv \neg (\lambda x \neg (x \in x) \in \lambda x \neg (x \in x))$.

Wie K. Grelling und L. Nelson in (07) gezeigt haben, kann man die Konstruktion der Antinomie von Russell wie folgt verallgemeinern: Ist r(x,y) eine nacheindeutige Relation, so daß gilt

a) $\bigwedge xyz\,(r(x,y) \wedge r(x,z) \supset y=z)$,
und definiert man

b) $c := \lambda x \bigvee y\,(r(x,y) \wedge \neg(x \in y))$,
so gilt, falls es ein a gibt mit,

c) r(a, c)

$a \in c \equiv \bigvee y (r(a,y) \wedge \neg (a \in y))$ nach (b), wegen (c) und (a) also $a \in c \equiv \neg\, a \in c$.

Im Falle der Russellschen Antinomie ist r(x,y) die Relation x = y. Wie J. Bartlett in (61) gezeigt hat, kann man aber für r(x,y) z. B. auch setzen $x = \lambda z\,(z=y)$, $x = \lambda z\,(z \neq y)$, $x = \lambda z\,(y \in z)$ oder $x = \lambda z \neg (y \in z)$.

Nach diesem Schema lassen sich auch *semantische Antinomien* konstruieren. Dazu nehmen wir an, daß der Objektbereich der Sprache auch Namen für ihre Terme enthält, und führen eine Namensrelation n(a,b) ein, so daß n(a,b) besagt, daß der Ausdruck a einen Namen bezeichnet für das durch den Ausdruck b bezeichnete

Objekt. „$n(a,\lambda x\ (x = x))$" besagt also z. B. so viel wie „a ist ein Name für die Klasse aller Objekte, die mit sich selbst identisch sind". Diese Relation ist nacheindeutig.

Man erhält z. B. die Antinomie von Grelling, wenn man in dem obigen Schema „n" für „r" setzt. c ist dann die Klasse aller Klassennamen, die *heterologisch* sind, d. h. die in den Klassen nicht enthalten sind, die sich bezeichnen. Und es ergibt sich, falls a ein Name für c ist, daß a heterologisch ist genau dann, wenn a nicht heterologisch ist.

Die Antinomien nach dem Schema von Grelling und Nelson verwenden das *Cantorsche Diagonalverfahren*, das sich so charakterisieren läßt: Es soll gezeigt werden, daß es keine Abbildung einer Menge A von Objekten auf eine Menge B von einstelligen Begriffen auf A gibt – oder auf eine Menge von Klassen von Elementen aus A. Da Klassen als Begriffsumfänge durch die Begriffe aus B bestimmt werden, erscheint die Bezugnahme auf die Begriffe selbst als einfacher, und daher wählen wir hier diese Darstellung des Diagonalverfahrens. Zum Beweis geht man indirekt vor und nimmt an, es gebe eine solche Abbildung, d. h. eine Relation $r(x,f)$, die auf A und B definiert ist und für die gilt:

1a) $\bigwedge xfg(r(x, f) \wedge r(x, g) \supset f{=}g)$, und

1b) $\bigwedge f \bigvee x r(x, f)$.

Dabei stehe „$f{=}g$" für „$\bigwedge x(fx \equiv gx)$".

Wenn man weiter annimmt

2) B ist abgeschlossen gegenüber Definierbarkeit mit logischen Mitteln (hier: den Mitteln der Prädikatenlogik 2. Stufe), so erhält man einen Widerspruch. Denn man kann definieren

3) $Cx := \bigvee f(r(x, f) \wedge \neg fx)$.

„C" bezeichnet nach (2) einen Begriff aus B, so daß es nach (1b) ein Objekt a aus A gibt mit $r(a,C)$.

Dann gilt aber nach (3) und (1a)

4) $Ca \equiv \neg Ca$.

Die Ableitung dieses Widerspruchs aus (1) und (2) kann man, wenn nicht, wie im Falle der Antinomien, beide Annahmen beweisbar sind, als Widerlegung der nicht beweisbaren Annahme auffassen.

Wege zur Vermeidung der Antinomien

Man hat auf verschiedenen Wegen versucht, mit den Antinomien fertig zu werden.[6]) Ein Weg besteht darin, die Gesetze der klassischen Prädikatenlogik zu modifizieren. Da etwa in der Antinomie von Russell neben dem Abstraktionsprinzip nur elementare aussagenlogische Prinzipien verwendet werden, müßte man also schon die klassische Aussagenlogik abändern. Für eine solche Modifikation fehlt bisher aber eine intuitiv überzeugende Begründung.[7])

Wenn man an der klassischen Prädikatenlogik festhält, so kann man, wie das A. Tarski in (44) vorgeschlagen hat, die semantischen Antinomien vermeiden, indem man nur *semantisch offene* Sprachen verwendet, d. h. Sprachen, die keine Namen für ihre wohlgeformten Ausdrücke enthalten, und in denen sich dann auch semantische Begriffe und Beziehungen, wie der Wahrheitsbegriff und die Namensrelation, nicht ausdrücken lassen; in denen also die Objektsprache nicht die gleichen Ausdrucksmittel enthält wie die Metasprache. Intuitiv gesehen, ist auch das wenig überzeugend, da wir ja z. B. deutsch über die deutsche Sprache sprechen können. Die natürlichen Sprachen sind also semantisch geschlossen. Zudem geht es nicht nur darum, keine Namen für die Terme der Sprache in sie einzuführen. Wie das angegebene Konstruktionsschema für Antinomien zeigt, genügt es für die Ableitung eines Widerspruchs, statt dessen Namen für beliebige Objekte, z. B. Zahlen, zu verwenden, sofern diese sich nur auf die in der Sprache ausdrückbaren Begriffe abbilden lassen. Daher konnte auch K. Gödel in seinem Beweis für die Unvollständigkeit der Arithmetik die Konstruktion der semantischen Antinomie von Richard übernehmen.[8])

Wenn man die klassische Prädikatenlogik beibehält, so kann man zur Vermeidung der logischen Antinomien im wesentlichen zwei Wege einschlagen:

1. Man hält an der (typenfreien) Sprache der klassischen Logik fest, modifiziert aber das Abstraktionsprinzip so, daß nicht jedem Begriff eine Klasse entspricht (bzw. man unterscheidet zwischen *Klassen* und *Mengen* und läßt nicht jedem Begriff eine *Menge* entsprechen). Das ist der Weg der *axiomatischen Mengenlehre.* Er ist jedoch intuitiv unbefriedigend, da nicht ersichtlich ist, wieso manche Begriffe Klassen (bzw. Mengen) definieren, andere aber nicht; wieso nicht jeder Begriff einen Umfang haben soll.
2. Man verwendet eine *typenlogische* Sprache, in der Ausdrücke wie $a \in b$ nur dann syntaktisch wohlgeformt sind, wenn b von einer höheren *Kategorie* ist als a. Insbesondere soll ein Name für eine Klasse von einer höheren Kategorie sein als die Namen für ihre Elemente. Dann ist insbesondere die Bildung von Ausdrücken wie $\neg(c \in c)$ im Falle der Antinomie von Russell oder von $\neg(\lambda(z=c) \in c)$, $\neg(\lambda z(z \neq c) \in c)$, $\neg(\lambda z(c \in z) \in c)$ und $\neg(\lambda z \neg(c \in z) \in c)$ im Falle der Antinomien von Bartlett nicht möglich.

Zu einem solchen Ansatz gelangt man durch folgende Überlegung: Die Extensionen der Begriffe der Menge B im Cantorschen Diagonalverfahren müssen einerseits durch gewisse Bestimmungen definiert sein, damit man von wohlbestimmten Begriffen sprechen kann und die Menge B sich abgrenzen läßt. Auch die Bestimmung der Relation r setzt voraus, daß die Begriffe aus B wohlbestimmt sind. Andererseits kann man aber mit Hilfe von r in mannigfacher Weise auch Begriffe auf A bestimmen. Wenn diese Begriffe nun im Sinne von (2) auch Elemente von B sein sollen, so gibt es für sie zwei Bedingungen, nach denen ihre Extension festgelegt wird: die ursprüngliche Definitionsbedingung und die neue, die auf r Bezug nimmt. Und diese beiden Bedingungen können sich, wie (3) zeigt, widersprechen.

Von einer konzeptualistischen oder konstruktivistischen Position aus, für die Begriffe durch Definitionen gebildet werden und keine vorgegebenen Entitäten im Sinne des Platonismus sind, kann man diesen Sachverhalt so beschreiben: Ist A gegeben, so kann man auf A eine Menge B von Begriffen definieren. Erst wenn B und die Elemente von B definiert sind, lassen sich Relationen r auf A und B definieren. Mit Hilfe solcher Relationen lassen sich dann neue Begriffe auf A erklären, von denen manche extensionsgleich mit solchen aus B sein können. Man kann das aber nicht für alle diese Begriffe voraussetzen, und man kann insbesondere nicht sagen, daß diese neuen Begriffe über A selbst der Menge B angehören. Man gelangt so zu einer Hierarchie von Begriffen über A, die sich daraus ergibt, daß die gewissen Entitäten erst dann definiert werden können, wenn andere bereits definiert sind. Insbesondere gilt ein Verbot der *imprädikativen Begriffsbildung:* Kein Begriff kann unter Bezugnahme auf eine Menge definiert werden, der er selbst angehört. Daher kann der Begriff C nach (3) kein Element von B sein. Damit gelangt man zu einer *verzweigten Typenlogik*, die noch stärkere kategoriale Restriktionen enthält als die *einfache Typenlogik,* da sie die Begriffe, die auf Argumente einer bestimmten Kategorie anwendbar sind, noch in verschiedene Kategorien aufteilt.

Der Nachteil dieses Ansatzes liegt darin, daß sich so starke kategoriale Unterscheidungen in natürlichen Sprachen nicht finden, und daß es viele in einem so allgemeinen Sinn „imprädikative" Begriffsbildungen gibt (wie z. B. „Die Spezies mit dem kleinsten Umfang aus der Menge der Spezies der Gattung *Rosa*",), die durchaus harmlos sind.

Die *einfache Typenlogik* betrachtet demgegenüber in einer nicht-konstruktiven Weise die Menge aller Begriffe über A als vorgegeben, so daß insbesondere (2) gilt. Dann muß sie aber verbieten, daß es Relationen nach (1) gibt, daß also insbesondere Klassen zu oder Namen von Begriffen aus B Elemente von A sind, und muß diese Objekte einer höheren Stufe zurechnen. Während die Typenunterscheidung von Begriffen in Begriffe 1. Stufe, die auf Objekte anwendbar sind, Begriffen 2. Stufe, die sich auf Begriffe 2. Stufe anwenden lassen etc., eine gewisse intuitive Plausibilität hat, da viele Begriffe, wie z. B. ‚rot', ‚Pferd' etc., die für Dinge erklärt sind, nicht zugleich auch für Begriffe definiert sind und umgekehrt, ist die Typenunterscheidung im Bereich der Klassen und Namen jedoch wenig überzeugend. Und es gibt auch viele Begriffe, wie z. B. „lieben" oder „sehen", die für kategorial verschiedene Argumente (Objekte und Tätigkeiten, bzw. Sachverhalte) definiert sind.

Diese Möglichkeiten, die Antinomien zu vermeiden, stellen also keine befriedigende Lösung des philosophischen Problems dar, wie das Auftreten der Antinomien zu erklären ist. Sie erscheinen eher als ad-hoc-Modifikationen, die nur die Krankheitssymptome der klassischen Logik kurieren, nicht aber deren Ursachen aufdecken.

Es ist daher zu überlegen, ob nicht Einsichten in die Funktionsweise der natürlichen Sprache einen Weg zur Modifikation der klassischen Logik weisen können, der intuitiv besser begründet ist.

Partielle Interpretationen

Dazu können wir von zwei grundlegenden sprachphilosophischen und linguistischen Tatsachen ausgehen.

Die erste Tatsache ist, daß in natürlichen im Gegensatz zu den üblichen logischen Kunstsprachen viele Ausdrücke vorkommen, die grammatikalisch wohlgeformt, aber bedeutungslos sind; die syntaktisch richtig aus bedeutungsvollen Wörtern zusammengesetzt sind, denen aber durch die semantischen Regeln keine Bedeutungen zugeordnet werden.

Wir greifen vier typische Fälle solcher wohlgeformter, aber bedeutungsloser Ausdrücke heraus:

1) *Unvollständig erklärte Prädikate:* Es gibt viele Prädikate, die nicht für alle syntaktisch zulässigen Argumente erklärt sind. So ist z. B. das Verb „laufen" für Tiere mit Gehwerkzeugen, Menschen, Maschinen, Flüssigkeiten und Nasen erklärt, nicht aber z. B. für Pflanzen, Mineralien und Zahlen. Und „lachen" ist nur für Menschen und die Sonne erklärt. Der Satz „Der Mond lacht" ist syntaktisch ebenso gebildet wie der Satz

„Die Sonne lacht", hat aber im Gegensatz zu diesem keine Bedeutung.
2) *Nicht erfüllte Präsuppositionen:* Eine Präsupposition einer Aussage A ist eine Bedingung, die in A nicht als bestehend behauptet wird, die aber erfüllt sein muß, damit sowohl A wie auch die Verneinung von A sinnvoll ist. So wird in dem Satz „Hans hat das Rauchen aufgegeben" vorausgesetzt, daß Hans bisher geraucht hat, und in der Aussage „Fritz weiß, daß Regensburg eine Universität hat" wird vorausgesetzt, daß Regensburg tatsächlich eine Universität hat. Nichterfüllte Präsuppositionen liegen speziell in folgenden Fällen vor:
3) *Kennzeichnungen bei nichterfüllter Normalbedingung:* Kennzeichnungsterme wie „das Buch von Russell" oder „der Sohn von Georg VI." haben keine Bedeutung, da das kennzeichnende Prädikat nicht genau auf ein Ding zutrifft, die *Normalbedingung* für Kennzeichnungen also nicht erfüllt ist.
4) *Leere Allsätze:* Im üblichen Verständnis ist der Satz „Alle Kinder von Hans sind rothaarig" bedeutungslos, wenn Hans keine Kinder hat. Und ein Satz der Form „Alle A's sind B" ist allgemein nur dann bedeutungsvoll, wenn es A's gibt. Die Präsupposition eines solchen Satzes ist also „Es gibt A's".

Syntaktische Versuche, solche Phänomene in Logiksprachen auszuschließen, die darauf hinauslaufen, alle bedeutungslosen Ausdrücke als syntaktisch nicht wohlgeformt auszuscheiden, haben keine Aussicht auf Erfolg. Man könnte im Hinblick auf (1) z. B. eine mehrsortige Sprache einführen mit mehreren Objektbereichen und mehreren Sorten von Konstanten und Variablen derselben Kategorie, so daß jedes einstellige Prädikat genau für die Elemente eines dieser Objektbereiche erklärt ist. Schon die Beispiele unter (1) zeigen aber, daß das ein hoffnungsloses Unterfangen ist, da man die Definitionsbereiche der Prädikate nicht mit so einfachen Gattungsnamen wie „Tiere", „Menschen", „Abstrakte Objekte" etc. beschreiben kann. Dieser Versuch versagt auch völlig in den Fällen (2) bis (4). Wenn man also nicht Syntax und Semantik in ungesunder Weise verquicken will, so bleiben nur *semantische Lösungen* des Problems übrig.

Das in der Logik seit Frege übliche Lösungsverfahren besteht in der *Vervollständigung der semantischen Festlegungen:* Man legt z. B. fest, daß ein Grundprädikat, das seiner natursprachlichen Bedeutung nach für ein Argument nicht erklärt ist, ihm den Wert „falsch" zuordnet – „17 läuft" und „Der Mond lacht" sind dann falsche Sätze. Man ergänzt ferner die Festlegung über Kennzeichnungsterme so, daß sie auch bei nichterfüllter Normalbedingung eine Bedeutung erhalten, und deutet Allsätze so, daß sie bei nichterfüllter Präsupposition wahr sind. In den Fällen unter (3) endlich behilft man sich dadurch, daß man die Präsupposition in die Assertion mit hineinnimmt. Der Satz „Hans hat das Rauchen aufgegeben" wird also interpretiert im Sinne von „Hans hat bisher geraucht und raucht jetzt nicht mehr".

Eine solche Vervollständigung der semantischen Festlegungen führt jedoch zu vielen Inadäquatheiten in der semantischen Analyse natursprachlicher Sätze. Insbesondere wird der Unterschied zwischen Assertion und Präsupposition eines Satzes verwischt und damit sein Inhalt verfälscht. Deutet man den Satz „Hans hat das Rauchen aufgegeben" im obigen Sinne, so besagt die Verneinung dieses Satzes soviel wie „Hans hat bisher nicht geraucht oder Hans raucht jetzt immer noch", ist also im Gegensatz zu

„Hans hat das Rauchen nicht aufgegeben" auch dann wahr, wenn Hans nie geraucht hat. Außerdem ist es fraglich, ob eine solche semantische Vervollständigung immer möglich ist. Daß man das nicht einfach voraussetzen kann, zeigen, wie wir sehen werden, gerade die Antinomien.

Den brauchbarsten Vorschlag zu einer Lösung des Problems hat D. Scott in (70) gemacht: Danach sind bei einer Interpretation einer Sprache nicht allen Prädikaten und Funktionsausdrücken nur Begriffe und Funktionen zuzuordnen, die auf dem gesamten Objektbereich, dem *universe of discourse* vollständig definiert sind, sondern auch partielle Funktionen, die nur für manche Objekte dieses Bereichs definiert sind. Dieses Vorgehen ist gleichwertig damit, daß man eine *dreiwertige* Logik benützt, nach der z. B. Sätze neben den beiden Wahrheitswerten „wahr" und „falsch" auch einen dritten Wert „indeterminiert" oder „bedeutungslos" haben können.

Sehen wir nun zu, ob nicht die Antinomien verschwinden, wenn wir in diesem Sinn auch partielle Interpretationen der Logiksprache zulassen. Das angegebene Konstruktionsschema führt dann in der Tat nicht mehr zu einem Widerspruch. Ist im Schema des Cantorschen Diagonalverfahrens B nicht die Menge aller vollständigen Begriffe auf A, sondern die Menge aller partiellen Begriffe auf A, d. h. die Menge derjenigen Begriffe, deren Definitionsbereich eine Teilmenge von A ist, so läßt sich das Cantorsche Diagonalverfahren nicht mehr anwenden. Der Satz „$Ca \equiv \neg Ca$" stellt nur dann eine Kontradiktion dar, wenn „Ca" wahr oder falsch ist. Die Cantorsche Konstruktion läßt sich nun einfach als Beweis dafür auffassen, daß das nach (3) definierte Prädikat „C" nicht für das Argument „a" erklärt ist; und daß es auch nicht möglich ist, „C" vollständig auf A zu definieren.

Es sieht also so aus, als würde es die Verwendung partieller Begriffe und Funktionen erlauben, sowohl mit einer typenfreien Sprache zu arbeiten als auch das Abstraktionsprinzip beizubehalten und semantisch geschlossene Sprachen zuzulassen. Der Preis, den man dafür zu zahlen hat, besteht darin, daß nicht allen wohlgeformten Ausdrücken eine Extension zugeordnet wird; ja daß es, wie die Antinomien zeigen, Sätze gibt, denen sich *prinzipiell* keine Extension zuordnen läßt. Das bedingt eine Modifikation der klassischen Logik, z. B. die Aufgabe des Prinzips *tertium non datur*, aber die Theoreme der klassischen Logik bleiben dabei doch in dem *schwachen Sinn* gültig, daß sie immer wahr sind, wenn sie überhaupt einen Wahrheitswert haben. Diesen Preis muß man jedoch, wie wir oben betont haben, bei der Anwendung der Logiksprache auf die Analyse natürlicher Sprachen ohnehin zahlen.

Ein zweiter Blick zeigt aber, daß dieser Erfolg keineswegs durchschlagend ist: Wenn wir partielle Begriffe als wohlbestimmte Extensionen ansehen, die bei einer Interpretation der Sprache den Prädikaten zugeordnet werden, so können wir ein einstelliges Prädikat U einführen, für das gilt: Ist A ein Satz, so ist U (A) wahr, falls A wahr ist oder indeterminiert, und falsch, falls A falsch ist. Ersetzen wir dann (3) durch

3') $C'x := \bigvee f(r(x, f) \wedge U(\neg fx))$,

so ist C' ein auf A vollständig definierter Begriff. Gilt $r(b, C')$, so ist also der Satz C'b wahr oder falsch, also $U(\neg C'b) \equiv \neg C'b$, und wir erhalten wie früher einen Widerspruch $C'b \equiv \neg C'b$.[9] – Eine Verwendung partieller Interpretationen oder einer 3wertigen Logik führt also tatsächlich nicht zu einer Eliminierung der Antinomien. Aber sie ist ein Schritt in die richtige Richtung.

Wahrheitsbedingungen

Wenn wir den Antinomien durch Verwendung partieller Interpretationen beikommen wollen, müssen wir einen zweiten Gedanken hinzufügen, der sich ebenfalls aus allgemeinen sprachphilosophischen Überlegungen ergibt:[10]) Abstrakte Entitäten wie Funktionen, Begriffe, Klassen, Zahlen, Propositionen und dergleichen sind nicht in derselben Weise „gegeben“ wie konkrete Dinge (Tische, Steine oder Blumen). Wir deuten z. B. Prädikate nicht dadurch, daß wir ihnen vorgegebene Begriffe zuordnen, sondern ihre Bedeutung ergibt sich aus ihrem Gebrauch, aus den Konventionen für ihre Verwendung, und Begriffe sind nichts anderes als Abstraktionen aus Prädikaten auf der Grundlage ihrer durch gleiche Gebrauchsweisen definierten Synonymität.[11]) Der Gebrauch eines Prädikats F wird aber durch Wahrheitsbedingungen für Sätze angegeben, sei es in singulärer Form Fa oder $\neg$Fb, oder einer generellen Form wie z. B. $\bigwedge x\ (Gx \supset Fx)$. Den Gebrauch des Prädikats „rot“ etwa lernen wir aus Beispielen seiner Verwendung wie „Dies ist rot“, „Jenes ist nicht rot“ und aus generellen Sätzen wie „Gekochter Hummer ist rot“, „Reife Tomaten sind rot“, etc. Das heißt: Prädikate werden nur im Kontext von Sätzen gedeutet.

Aufgrund solcher Überlegungen wird man von dem Gedanken abgehen, daß eine Interpretation einer Sprache allen ihren wohlgeformten Termen selbständige Bedeutungen zuordnen muß, der den realistischen Bedeutungstheorien und insbesondere auch der logischen Semantik zugrunde liegt. Statt dessen wird man eine Semantik zu entwickeln haben, in deren Rahmen eine Sprache gedeutet wird durch Gebrauchsregeln für ihre Sätze, in der also eine Interpretation durch Wahrheitsregeln oder -bedingungen für ihre Sätze angegeben wird, die entweder bestimmte Sätze kategorisch als wahr oder als falsch auszeichnen, oder festlegen, daß ein Satz wahr, bzw. falsch ist, wenn gewisse andere Sätze wahr, bzw. falsch sind. Abstrakte Terme werden durch solche Regeln nur innerhalb gewisser, keineswegs in allen Satzkontexten gedeutet.

Ein solcher Ansatz wird auch durch die Analyse theoretischer Begriffe in der Wissenschaftstheorie nahegelegt, die gezeigt haben, daß die empirischen Wissenschaften viele Begriffe verwenden, die sich nicht durch explizite Definitionen charakterisieren lassen, sondern die nur im Rahmen einer Theorie durch deren Axiome implizit charakterisiert werden. Erkenntnistheoretische Überlegungen legen die Vermutung nahe, daß Entsprechendes auch für Beobachtungsbegriffe gilt; daß, ganz generell gesprochen, Begriffsbildung und Theorienkonstruktion (oder bescheidener gesagt: Begriffsbildung und die Annahme von synthetischen Sätzen mit diesen Begriffen) keine unabhängigen Prozesse darstellen, sondern miteinander eng verknüpft sind.

Ist nun R ein System von Wahrheitsregeln für die Sprache S, so wird durch die Regeln von R einem Satz von S immer nur der Wert „wahr“ oder „falsch“ zugeordnet, aber nie der Wert „bedeutungslos“. Es wäre sinnlos, semantische Regeln anzusetzen, die nicht der Deutung der Sätze dienen, sondern sie als ungedeutet auszeichnen. Außerdem sind natürliche Sprachen in dem Sinn offen, daß sie zusätzliche semantische Festlegungen erlauben, wie z. B. Erweiterungen des Definitionsbereichs von Prädikaten. Das ist aber konsistenterweise nur dann möglich, wenn „bedeutungslos“ nicht wie ein dritter Wahrheitswert behandelt wird. Daß einem Satz kein Wahrheitswert zugeordnet wird, ist vielmehr eine metatheoretische Feststellung über das Regelsystem, ähnlich wie die Unbeweisbarkeit einer Formel in einem Kalkül nicht durch dessen Regeln festgelegt wird, sondern ein metatheoretisches Resultat darstellt. Und daß ein Prädikat für einen unvollständigen Begriff steht, ergibt sich nur daraus, daß er nach den Wahrheitsregeln nicht für alle zulässigen Argumente erklärt ist.

Ob ein System R von Wahrheitsregeln jedem Satz der zugrundeliegenden Sprache einen Wahrheitswert zuordnet, ist jeweils durch eine metatheoretische Untersuchung von R zu prüfen. Das Prinzip der Wahrheitsdefinition, daß alle Sätze wahr oder falsch sind, ist also allenfalls ein metatheoretisches Resultat, kein objekttheoretisches Prinzip eines solchen Systems, ebenso wie das der Widerspruchsfreiheit, daß kein Satz in R sowohl als wahr wie als falsch ausgezeichnet wird. Im Fall der (typenfreien) Sprache der klassischen Mengenlehre zeigt sich dann, daß das Prinzip der Wahrheitsdefinitheit nicht gilt, und daß speziell den antinomischen Sätzen keine Wahrheitswerte zugeordnet werden.

Bei einem solchen semantischen Ansatz lassen sich nun die Antinomien auch nicht mehr in der oben geschilderten, modifizierten Form konstruieren: Die Funktion U ist nicht mehr definierbar im Regelsystem R selbst, das keine Regeln enthält, die besagen, daß ein Satz wahr ist (oder falsch), wenn ein anderer indeterminiert ist. Daß ein Satz indeterminiert ist, ist, wie gesagt, mit den Regeln selbst nicht beweisbar, also keine Tatsache, auf die eine rekursiv definierte Interpretation Bezug nehmen kann.

Ein solcher semantischer Ansatz entspricht wohl am besten sprachphilosophischen Einsichten und er nähert sich am stärksten der natürlichen Sprache und ihrer Logik an, für die man, wie wir schon unabhängig von der Antinomienproblematik gesehen haben, ohnehin wohlgeformte, aber bedeutungslose Sätze in Betracht ziehen muß, während das für die klassische Logik eine wesentliche Modifikation bedeutet.

Zur Formalisierung

Diese kurzen Hinweise auf eine Analyse der Antinomien unter sprachphilosophischem Aspekt lösen das logische Problem dieser Widersprüche natürlich noch nicht. Von einer logisch befriedigenden Analyse kann erst dann die Rede sein, wenn ein exaktes Logiksystem nach den genannten sprachphilosophischen Prinzipien aufgebaut wird, in dem sich die Antinomien nicht mehr ableiten lassen. Erst damit ist gezeigt, daß diese Ideen präzisiert und logisch fruchtbar gemacht werden können.

Was ich hier vorgetragen habe, sind also nur die Grundgedanken eines Programms. Ich habe diese Gedanken bisher nur für eine aussagenlogische Sprache ausgeführt.[12]) Während die Verallgemeinerung auf prädikatenlogische Sprachen einfach ist, erfordert die Anwendung auf klassenlogische Sprachen zusätzliche Überlegungen.

Da ich hier nicht auf Einzelheiten eingehen kann, sei nur betont, daß der Aufbau der gesamten Logik sich im Rahmen der folgenden Prinzipien hält, die schon oben angesprochen wurden:

1. Die Logik wird semantisch begründet, d. h. ihre Gesetze werden durch Festlegungen über die Bedeutung der logischen Operatoren gerechtfertigt.
2. Diese Operatoren erhalten, wie Ausdrücke allgemein, eine Bedeutung dadurch, daß Regeln für ihren Gebrauch festgelegt werden. Nur Sätze als kleinste Kommunikationseinheiten werden gebraucht. Daher sind Gebrauchsregeln für einen Operator immer Regeln für den Gebrauch von Sätzen, die diesen Operator als Hauptfunktor enthalten.

3. Für Behauptungssätze ohne Indexausdrücke, wie sie die Logik i. e. S. allein betrachtet, stellen semantische Gebrauchsregeln Wahrheitsregeln dar, die besagen, unter welchen Bedingungen solche Sätze wahr, bzw. falsch sind.
4. Während Sätze, deren Hauptfunktoren deskriptive Ausdrücke sind, durch Bezugnahme auf empirische Sachverhalte zu erklären sind, so daß ihr Wahrheitswert vom Bestehen oder Nichtbestehen solcher Sachverhalte abhängt, lassen sich Wahrheitsbedingungen für Sätze, deren Hauptfunktoren logische Operatoren sind, unabhängig davon nur durch die Wahrheitswerte anderer Sätze angeben, so daß die Grundregeln die Form haben: „Wenn die Sätze $A_1, \ldots, A_m$ wahr und die Sätze $B_1, \ldots, B_n$ falsch sind, so ist der Satz C wahr, bzw. falsch“. Die logische Semantik ist also als ein System solcher Regeln zu definieren, und ein Satz hat nur dann einen bestimmten Wahrheitswert, wenn dieser sich ihm durch eine Anwendung dieser Regeln zuordnen läßt. Sie ist in diesem Sinn konstruktiv.
5. Die Einführung eines logischen Operators muß nicht in dem Sinn rekursiv sein, daß sich die Wahrheitsbedingungen von Sätzen, in denen er vorkommt, immer auf Wahrheitsregeln für Primsätze zurückführen lassen. Sie muß aber nichtkreativ sein in dem Sinn, daß es die Einführung eines Operators nicht ermöglicht, neue Theoreme zu beweisen, in denen er nicht vorkommt.

Der Aufbau dieser Logik folgt also den hier skizzierten Grundgedanken und stellt daher eine Präzisierung des Gesagten dar. Eine andere Frage ist, wie stark das so entstehende System ist. Es entspricht im wesentlichen dem typenfreien System, das W. Ackermann in (52) entwickelt hat und das etwa so stark ist wie die verzweigte Typentheorie.[13]) Erweiterungen sind also noch zu untersuchen.

Anmerkungen

* Der im Rahmen des Kongresses vorgesehene Vortrag konnte krankheitshalber nicht gehalten werden.

1. Die Rede von der Inkonsistenz einer Sprache versteht sich dabei so, daß die Schlußweisen in einer Sprache auf ihren semantischen Regeln basieren, so daß man aus einer deduktiven Inkonsistenz auf eine Inkonsistenz dieser Regeln schließen kann.

2. S. XXVI.

3. S. 253.

4. „Ihre Entdeckung des Widerspruchs hat mich aufs höchste überrascht und, fast möchte ich sagen, bestürzt, weil dadurch der Grund, auf dem ich die Arithmetik aufzubauen dachte, ins Wanken gerät. Es scheint danach, daß die Umwandlung der Allgemeinheit einer Gleichheit in eine Wertverlaufsgleichheit (§ 9 meiner Grundgesetze) nicht immer erlaubt ist, daß mein Gesetz V (§ 20, S. 36) falsch ist, und daß meine Ausführungen in § 31 nicht genügen, in allen Fällen meinen Zeichenverbindungen eine Bedeutung zu sichern. Ich muß noch weiter über die Sache nachdenken. Sie ist um so ernster, als mit dem Wegfall meines Gesetzes V nicht nur die Grundlagen meiner Arithmetik, sondern die einzig mögliche Grundlage der Arithmetik überhaupt zu versinken scheint. Und doch, sollte ich denken, muß es möglich sein, solche Bedingungen für die Umwandlung der Allgemeinheit einer Gleichheit in eine Wertverlaufsgleichheit aufzustellen, daß das Wesentliche meiner Beweise erhalten bleibt. Jedenfalls ist Ihre Entdeckung sehr merkwürdig und wird vielleicht einen großen Fortschritt in der Logik zur Folge haben, so unerwünscht sie auf den ersten Blick auch scheint.“ (Brief Freges an Russell vom 22.6.1902)

5. Für eine ausführliche Darstellung der Antinomien vgl. z. B. Fraenkel, Bar-Hillel und Levy (73), Kap. I oder Kutschera (64), Kap. I.

6. Vgl. zum folgenden auch die ausführlichen Erörterungen z. B. in Fraenkel, Bar-Hillel und Levy (73) oder in Beth (59).

7. Wie die Antinomie von Curry zeigt (vgl. Curry (42)) genügt es z. B. nicht, nur das Prinzip vom ausgeschlossenen Dritten aufzugeben, sondern man muß über die intuitionistische Logik hinausgehende Beschränkungen der Implikationsgesetze vornehmen.

8. Vgl. Gödel (31) sowie die Darstellung in Stegmüller (59).

9. „f = g" ist nun so zu verstehen, daß f und g denselben Definitionsbereich $A' \subset A$ haben und auf A' übereinstimmen.

10. Vgl. dazu Kutschera (71), 2.3 und 2.4.

11. Die „Gebrauchstheorie" der Bedeutung, etwa im Sinne der Ideen Wittgensteins in (53), weist auch gewisse Mängel auf. Die intuitiv befriedigendste Charakterisierung der Bedeutungen hat D. Lewis in (69) auf der Basis seiner Theorie der sprachlichen Konvention geliefert. Vgl. dazu auch Kutschera (76).

12. Vgl. Kutschera (68) und (69).

13. Vgl. Schütte (60), Kap. VIII.

Literatur

Ackermann, W. (52): Widerspruchsfreier Aufbau einer typenfreien Logik, Math. Zeitschr. 55 (1952), S. 364–384 und 57 (1953), S. 155–166.

Bartlett, J. (61): Funktion und Gegenstand, Dissertation München 1961.

Beth, E. W. (59): The Foundations of Mathematics, Amsterdam 1959.

Curry, H. B. (42): The inconsistency of certain formal logics, Journal of Symbolic Logic 7 (1942), S. 115–117.

Fraenkel, A., Bar-Hillel, Y. und Levy, A.: Foundations of Set Theory, Amsterdam ²1973.

Gödel, K. (31): Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme, Monatshefte f. Math. und Physik 38 (1931), S. 173–198.

Grelling, K. und Nelson, L. (07): Bemerkungen zu den Paradoxien von Russell und Burali-Forti, Abh. der Friesschen Schule 2 (1907/08), S. 300–334.

Kutschera, F. v. (64): Die Antinomien der Logik, Freiburg 1964.

Kutschera, F. v. (68): Die Vollständigkeit des Operatorensystems $\{\neg, \Delta, \vee, \supset\}$ für die intuitionistische Aussagenlogik im Rahmen der Gentzensemantik, Archiv f. math. Logik und Grundlagenforschung 11 (Heft 1, 2), S. 3–16.

Kutschera, F. v. (69): Ein verallgemeinerter Widerlegungsbegriff für Gentzen-Kalküle, Archiv f. math. Logik und Grundlagenforschung 12 (1969), S. 104–118.

Kutschera, F. v. (71): Sprachphilosophie, München ¹1971, ²1975.

Kutschera, F. v. (76): Conventions of language and intensional semantics, in Theoretical Linguistics 2 (1975), S. 255–283.

Lewis, D. (69): Convention, Cambridge, Mass. 1969.

Schütte, K. (60): Beweistheorie, Berlin 1960.

Scott, D. (70): Advice on modal logic, in K. Lambert (Hrsg.): Philosophical Problems in Logic, Dordrecht 1970, S. 143–173.

Stegmüller, W. (59): Unvollständigkeit und Unentscheidbarkeit, Wien 1959.

Tarski, A. (44): The semantic conception of truth and the foundations of semantics, Philosophy and Phenomenological Research 4 (1944), S. 341–375.

Wittgenstein, L. (53): Philosophische Untersuchungen, hrsg. von G. Anscombe und R. Rhees, Oxford 1953.