2

Sonderdruck aus

ABHANDLUNGEN

AUS DEM

MATHEMATISCHEN SEMINAR

DER

UNIVERSITÄT HAMBURG

Herausgegeben von

H. Bauer · L. Collatz · H. Hasse · E. Kähler

E. Sperner · E. Witt

Band 28, Heft 3/4 — Oktober 1965

VANDENHOECK & RUPRECHT IN GÖTTINGEN

BAND 28, HEFT 3/4

Inhalt

Eine Klasse von Ordnungen in Jordanalgebren vom Grade 3

Von Manfred Knebusch in Hamburg

Einleitung

Eine reduzierte einfache Jordanalgebra vom Grade 3 über einem Körper k läßt sich, indem man eine „Koordinatendarstellung" (s. § 4) zugrunde legt, auffassen als eine Algebra $\mathfrak{H}(C, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, bestehend aus allen dreireihigen Matrizen X mit Koeffizienten in einer Kompositionsalgebra C (s. § 1), für die X, von links multipliziert mit der Diagonalmatrix diag $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ hermitesch ist. Die γ_i sind dabei Elemente $\neq 0$ aus k (s. [14], [18] u. d. d. angeg. Literatur).

In k seien nun ganze Elemente erklärt. Dann bilden alle Matrizen aus $\mathfrak{H}(C, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, deren Koeffizienten in einer Ordnung L von C liegen, eine Ordnung $\mathfrak{H}(L, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ der Jordanalgebra in dem in [15] definierten Sinne. Ordnungen dieser Form sollen in der vorliegenden Arbeit betrachtet werden. Die Beschränkung auf den Grad 3 ist an vielen Stellen unwesentlich[1]).

In § 1 bis § 4 formulieren wir bekannte Resultate, auf denen die Arbeit aufbaut. Außerdem setzen wir die Kenntnis von [15], § 2 voraus.

In § 5 beweisen wir elementare Sätze über Gitter ganzer Elemente.

§ 6 enthält die Definition der Ordnungen $\mathfrak{H}(L, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$.

In § 7 untersuchen wir, welche von diesen Ordnungen maximal sind und welche sogar „ausgezeichnet" sind, d.h. von keinem Gitter ganzer Elemente echt umfaßt werden. Ist die Jordanalgebra speziell, so erweist sich eine Ordnung $\mathfrak{H}(L, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ genau dann als maximal, wenn sie sogar ausgezeichnet ist. In der zerfallenden Ausnahmealgebra gibt es aber durchaus maximale, nicht ausgezeichnete Ordnungen $\mathfrak{H}(L, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$.

In § 8 schließlich beweisen wir bei komplettem diskret bewerteten Grundkörper für eine ausgezeichnete Ordnung M folgenden

Satz: *M ist genau dann eine Ordnung $\mathfrak{H}(L, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, wenn M ein vollständiges Orthogonalsystem primitiver Idempotente enthält.*

Bezeichnungen:

OE: „Ohne Einschränkung der Allgemeinheit".

$\boldsymbol{\delta_{ij}}$: Kroneckersymbol ($\delta_{ij} = 1$ für $i = j$, $= 0$ für $i \neq j$).

---

[1]) Die in dieser Arbeit benutzten Methoden sind auf die Behandlung von Ausnahmealgebren zugeschnitten.

$\boldsymbol{k}$ bezeichne stets den Grundkörper der betrachteten Algebren, $\boldsymbol{k^*}$ seine multiplikative Gruppe. Wir setzen voraus, daß die *Charakteristik von k nicht* 2 *oder* 3 ist. In den arithmetischen Teilen der Arbeit ist k Quotientenkörper eines Dedekindringes, den wir mit $\boldsymbol{A}$ bezeichnen und dessen Elemente wir die „ganzen Elemente" von k nennen. Für zwei Elemente $\alpha, \beta \in k^*$ bedeute $\boldsymbol{\alpha \sim \beta}$, daß $\alpha = \beta\eta$ mit einer Einheit η von A ist. Ist k komplett diskret bewertet, so sei $\boldsymbol{p}$ ein fest gewähltes Primelement von k. $\boldsymbol{C}$ bezeichne stets eine Kompositionsalgebra über k (s. § 1), $\boldsymbol{\varepsilon}$ ihr Einselement. Die Gruppe der Normen der invertierbaren Elemente von C bzgl. k schreiben wir $\boldsymbol{N_C}$.

$\boldsymbol{V}$ soll stets ein dreidimensionaler nicht ausgearteter unitärer C-Rechtsvektorraum sein (s. § 3). $\boldsymbol{\mathfrak{A}}$ bezeichnet eine Jordanalgebra, die fast immer reduziert und zentral einfach vom Grade 3 sein wird. Ihre Minimalspur kürzen wir durch $\boldsymbol{MS}$ ab, ihre Minimalnorm durch $\boldsymbol{MN}$. Weitere Bezeichnungen werden im Text erläutert.

§ 1. Kompositionsalgebren

(Siehe [4] und die dort angegebene Literatur)

In diesem Paragraphen ist die Einschränkung auf Körper einer Charakteristik $\neq 2, 3$ unnötig.

Eine *Kompositionsalgebra* ist eine — eventuell nicht assoziative — Algebra C mit Einselement ε, auf der eine nicht ausgeartete quadratische Form N, die sog. *Norm*, erklärt ist mit der Eigenschaft:

$$N(xy) = N(x)\,N(y) \quad \text{für alle } x, y \in C. \tag{1.1}$$

$$t(x, y) = N(x + y) - N(x) - N(y) \tag{1.2}$$

sei die zu N gehörige Bilinearform.

In einer Kompositionsalgebra C ist

$$x \to \bar{x} := t(x, \varepsilon) - x \tag{1.3}$$

eine *Involution* ($\bar{\bar{x}} = x$, $\overline{xy} = \bar{y}\bar{x}$) mit

$$x\bar{x} = \bar{x}x = N(x)\varepsilon. \tag{1.4}$$

Eine Kompositionsalgebra C ist stets *alternativ*, d.h. für beliebige Elemente a, b von C ist $a(ab) = a^2 b$, $(ba)a = ba^2$ und damit auch $(ab)a = a(ba)$.

Darüber hinaus gilt

Satz 1.1. *k sei beliebiger Körper.*

Es gibt genau zu der Dimensionen 1, 2, 4, 8 *Kompositionsalgebren, und zwar:*

Dimension 1: $C = k\varepsilon$ $(N(\xi\varepsilon) = \xi^2)$

Dimension 2: *Die quadratischen Körper über* k *und* $C = k \oplus k$.

Dimension 4: *Die Quaternionenalgebren.*

Dimension 8: *Die sog. Cayley-Algebren.*

Die Cayley-Algebren sind nicht assoziative, einfache Algebren.

Satz 1.2. *Enthält eine Kompositionsalgebra* C *Nullteiler, so ist* C *bezüglich* N *ein hyperbolischer Raum (d.h. ohne Kernraum). Es gibt zu jeder der Dimensionen* 2, 4, 8 *genau eine Kompositionsalgebra* C *mit Nullteilern, die sog. zerfallende Kompositionsalgebra.*

Sei jetzt k Quotientenkörper eines Dedekindringes A. Ein A-Gitter L von C heißt *Ordnung*, wenn $\varepsilon \in L$ und $LL \subset L$ ist, *Maximalordnung*, wenn L von keiner anderen Ordnung echt umfaßt wird. Eine Ordnung läßt sich stets zu einer Maximalordnung vergrößern. Bezüglich der quadratischen Form N ist eine Maximalordnung L maximales Gitter ganzer Norm, anders formuliert: Für beliebiges $x \in C$ gilt:

$$t(x, L) \subset A,\ N(x) \in A \Rightarrow x \in L. \tag{1.5}$$

Satz 1.3. *Eine nullteilerfreie Kompositionsalgebra über komplettem, diskret bewertetem Körper* k *besitzt nur eine Maximalordnung* L. *Es ist* $L = \{x \in C \mid N(x) \in A\}$.

Ist der Restklassenkörper $\hat{k}$ von k endlich, so gibt es über k keine nullteilerfreie Cayley-Algebra, weil eine quadratische Form in mehr als 4 Variablen über k isotrop ist.

Satz 1.3. folgt sofort aus [9], Satz 9.4. Die in [9] generell gemachte Voraussetzung, daß $\hat{k}$ endlich ist, wird an dieser Stelle nicht gebraucht. Satz 1.3 läßt sich auch wie der entsprechende Satz über assoziative Algebren beweisen (s. [8], S. 100, [15], § 3).

Satz 1.4. *A sei Hauptidealring. C zerfalle. Dann sind alle Maximalordnungen von C isomorph. Sie sind von der Form* $\sum_i (Ax_i + Ay_i)$ *mit* $t(x_i, y_j) = \delta_{ij}$, $t(x_i, x_j) = t(y_i, y_j) = 0$.

Lemma 1.1. *k sei komplett diskret bewertet. L sei Maximalordnung einer Kompositionsalgebra C über k. Die Normform N nehme auf C den Wert $\alpha \in A$ an. Dann nimmt N sogar auf L den Wert α an.*

Beweis. Zerfällt C, so nimmt N auf L sowieso jeden Wert aus A an. Für nullteilerfreies C folgt die Behauptung aus Satz 1.3.

§ 2. Zwei Formeln in Jordanalgebren vom Grade 3

$\mathfrak{A}$ sei Jordanalgebra mit Einselement e vom Grade 3 über k. Auf $\mathfrak{A}$ führen wir die quadratische Form $Q(x) := \frac{1}{2} MS(x^2)$ und die zugehörige Bilinearform $(x, y) := MS(xy)$ ein. Wir notieren zwei später gebrauchte Formeln (2.2), (2.3).

1. Aus der Minimalgleichung

$$x^3 - (x, e)x^2 + \sigma_2(x)x - MN(x)e = 0 \tag{2.1}$$

von $\mathfrak{A}$ folgt für generisch unabhängige Elemente x, y von $\mathfrak{A}$ unmittelbar (s. [18]):

$$\begin{aligned} 2x(xy) + x^2y = 2(x, e)xy &+ (y, e)x^2 + \sigma_2(x)y \\ &+ [(x, y) - (x, e)(y, e)]x \\ &+ [(x^2, y) - (x, e)(x, y) + (y, e)\,\sigma_2(x)]e. \end{aligned} \tag{2.2}$$

2. Mit Hilfe des von H. Freudenthal ([11]) eingeführten „Kreuzproduktes"

$$x \times y := xy - \tfrac{1}{2}(x, e)y - \tfrac{1}{2}(y, e)x + \tfrac{1}{2}[(x, e)(y, e) - (x, y)]e$$

läßt sich für die zu $MN(x)$ gehörige symmetrische Trilinearform $\lambda(x,y,z)$ mit $\lambda(x, x, x) = 3\,MN(x)$ schreiben: $\lambda(x, y, z) = (x \times y, z)$ (s. [18], [19]). Daher ist

$$MN(x + y) = MN(x) + (x \times x, y) + (x, y \times y) + MN(y). \tag{2.3}$$

§ 3. Die Algebren $\mathfrak{H}(C, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$

C sei *assoziative* Kompositionsalgebra über k. V sei dreidimensionaler unitärer C-Rechtsvektorraum. Darunter verstehn wir, auch falls C Nullteiler besitzt, einen C-Rechtsmodul mit freier dreigliedriger Basis, versehen mit einer hermiteschen Form $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$. ($(\mathfrak{x}, \mathfrak{y} + \mathfrak{z}) = (\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) + (\mathfrak{x}, \mathfrak{z})$, $(\mathfrak{y}, \mathfrak{x}) = \overline{(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})}$, $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}c) = (\mathfrak{x}, \mathfrak{y})c$, also $(\mathfrak{x}c, \mathfrak{y}) = \bar{c}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$, $(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) \in k$, für beliebige $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z} \in V$, $c \in C$. $c \to \bar{c}$ sei die Involution (1.3).) V sei nicht ausgeartet: $(\mathfrak{x}, V) = 0 \Rightarrow \mathfrak{x} = 0$.

Mit Hom (V) bezeichnen wir die assoziative Algebra der C-linearen Abbildungen von V in sich unter der Multiplikation $x \cdot y$, definiert durch $(x \cdot y)(\mathfrak{x}) = x(y(\mathfrak{x}))$. Wir haben auf Hom (V) eine Involution $x \to x^*$. Dabei bedeute x^* die zu x adjungierte Abbildung, definiert durch $(x^*\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = (\mathfrak{x}, x\mathfrak{y})$ $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in V)$. Die selbstadjungierten Abbildungen $x^* = x$ bilden ersichtlich eine unter dem Produkt $xy := \frac{1}{2}(x \cdot y + y \cdot x)$ abgeschlossene Menge, also eine spezielle Jordanalgebra $\mathfrak{H}(V)$.

Man kann in V stets eine Orthogonalbasis $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3$ finden:

$$V = \mathfrak{e}_1 C + \mathfrak{e}_2 C + \mathfrak{e}_3 C, \quad (\mathfrak{e}_i, \mathfrak{e}_j) = \gamma_i \delta_{ij}. \tag{3.1}$$

Das läßt sich auch, falls C Nullteiler besitzt, nach üblicher Methode (s. z.B. [5], S. 90f.) beweisen:

Sei $n = \dim_C V$ beliebig, V eventuell auch ausgeartet.

Für $n = 1$ ist nichts zu beweisen. Der Satz sei für die Dimension $(n-1)$ richtig. V habe die Dimension n. Es sei OE $(V, V) \neq 0$.

1. Wir suchen eine C-Basis $g_1, g_2, \ldots, g_n$ mit $(g_1, g_1) \neq 0$: Sei $f_1, \ldots, f_n$ irgendeine C-Basis. OE seien alle $(f_i, f_i) = 0$. Wegen $(V, V) \neq 0$ dürfen nicht alle (f_i, f_j) Null sein. Sei etwa $(f_1, f_2) \neq 0$. Dann existiert ein Element $d \in C$, so daß $(f_1 + f_2 d, f_1 + f_2 d) = t((f_1, f_2)d, \varepsilon) \neq 0$ ist.

$$g_1 := f_1 + f_2 d, \quad g_i := f_i \quad \text{für } i = 2, \ldots, n \text{ ist Basis von } V.$$

2. $$g_1, g_i' = g_i - g_1 (g_1, g_1)^{-1} (g_1, g_i) \qquad (i = 2, \ldots, n)$$

ist eine Basis von V mit $(g_1, g_i') = 0$. $V' := \sum_{i=2}^{n} g_i' C$ besitzt nach Induktionsvoraussetzung eine Orthogonalbasis, die sich durch g_1 zu einer Orthogonalbasis von V ergänzen läßt. —

Wir kehren zu unserer Situation (3.1) zurück. Vermöge

$$x \mathfrak{e}_j = \sum_i \mathfrak{e}_i d_{ij} \tag{3.2}$$

entsprechen den $x \in \mathfrak{H}(V)$ die Matrizen der Form

$$(d_{ij}) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \gamma_2 c_3 & \gamma_3 \bar{c}_2 \\ \gamma_1 \bar{c}_3 & \alpha_2 & \gamma_3 c_1 \\ \gamma_1 c_2 & \gamma_2 \bar{c}_1 & \alpha_3 \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

Die Algebra der Matrizen (3.3) bezeichnen wir mit $\mathfrak{H}(C, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$. Sie läßt sich auch für echt alternatives C mit beliebigen $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in k^*$ bilden und ist dann ebenfalls Jordanalgebra, allerdings nicht speziell. Die Algebren $\mathfrak{H}(C, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ sind zentral einfach vom Grade 3. (S. [1] und die dort angegebene Literatur.) Wir führen folgende Abkürzung ein: $e_i := e_{ii}$,

$$(c)_{jk} := \gamma_k c e_{jk} + \gamma_j \bar{c} e_{kj} \qquad (c \in C). \tag{3.4}$$

Dabei sei e_{ij} die Matrixeinheit $(d_{\nu\mu})$ mit $d_{\nu\mu} = \delta_{\nu i} \delta_{\mu j} \varepsilon$. Für die Matrix (3.3) läßt sich jetzt schreiben:

$$(d_{ij}) = \sum_i \alpha_i e_i + \sum_{(i,j,k)} (c_i)_{jk}. \tag{3.5}$$

Das Zeichen $\sum\limits_{(i,j,k)}$ bedeute stets Summation über alle *zyklischen* Permutationen (i, j, k) von $(1, 2, 3)$.

Aus (3.4) liest man ab:

$$(3.6) \qquad (c)_{kj} = (\bar{c})_{jk},$$

$$(3.7) \qquad (c)_{jk}^2 = \gamma_j \gamma_k N(c)(e_j + e_k),$$

$$(3.8) \qquad 2(c)_{ij}(d)_{jk} = \gamma_j (cd)_{ik} \qquad \text{(Jordanprodukt!)}.$$

Die Matrizen (3.3) lassen sich für beliebiges $\lambda \in k^*$ auch als Elemente von $\mathfrak{H}(C, \lambda\gamma_1, \lambda\gamma_2, \lambda\gamma_3)$ auffassen.

$$(3.9) \qquad \mathfrak{H}(C, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = \mathfrak{H}(C, \lambda\gamma_1, \lambda\gamma_2, \lambda\gamma_3).$$

Lemma 3.1. *Für eine beliebige Kompositonsalgebra C und*

$$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in k^*, \quad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in k^*$$

ist

$$(3.10) \qquad \mathfrak{H}(C, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \cong \mathfrak{H}(C, \gamma_1\lambda_1^2, \gamma_2\lambda_2^2, \gamma_3\lambda_3^2).$$

Ein Isomorphimus von der Algebra links auf die Algebra rechts wird gegeben durch:

$$(3.11) \qquad e_i \to e_i, \quad (c)_{ij} \to \lambda_i^{-1}\lambda_j^{-1}(c)'_{ij}.$$

Dabei bezeichnen wir mit $(c)'_{ij}$ die Ausdrücke (3.4), berechnet mit $\gamma'_i = \gamma_i\lambda_i^2$.

Beweis. Die Behauptung, daß (3.11) einen Isomorphismus liefert, wird im wesentlichen verifiziert durch die Gleichungen:

$$(\lambda_i^{-1}\lambda_j^{-1}(c)'_{ij})^2 = \gamma'_i\gamma'_j\lambda_i^{-2}\lambda_j^{-2}N(c)(e_i + e_j) = \gamma_i\gamma_j N(c)(e_i + e_j).$$

$$2\big(\lambda_i^{-1}\lambda_j^{-1}(c)'_{ij}\big)\big(\lambda_j^{-1}\lambda_k^{-1}(d)'_{jk}\big) = \gamma'_j\lambda_j^{-2}\lambda_i^{-1}\lambda_k^{-1}(cd)'_{ik} = \gamma_j\lambda_i^{-1}\lambda_k^{-1}(cd)'_{ik}.$$

Lemma 3.2. *C sei assoziativ; $\gamma_1, \gamma_2 \gamma_3$ seien beliebige Elemente aus k^*, a_1, a_2, a_3 beliebige invertierbare Elemente aus C.*
Dann wird durch

$$(3.12) \qquad e_i \to e_i, \quad (c)_{ij} \to (a_i^{-1} c \bar{a}_j^{-1})'_{ij}$$

ein Isomorphismus von $\mathfrak{H}(C, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ auf $\mathfrak{H}(C, \gamma_1 N(a_1), \gamma_2 N(a_2), \gamma_3 N(a_3))$ geliefert. Dabei bezeichnen wir mit $(c)'_{ij}$ die Ausdrücke (3.4), berechnet mit $\gamma'_i = \gamma_i N(a_i)$ statt γ_i.

Beweis. Man ändere in (3.2) die Basis $\{e_i\}$ zu $\{e_i a_i\}$. Die zugehörige Änderung der Matrix (d_{ij}) wird durch (3.12) beschrieben.

Lemma 3.3. *Ist C echt alternativ, so liefert* (3.12) *zumindest für $a_1 = 1$, $a_2 = a$, $a_3 = \bar{a}$ mit beliebigem invertierbaren $a \in C$ einen Isomorphismus von* $\mathfrak{H}(C, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ auf $\mathfrak{H}(C, \gamma_1, \gamma_2 N(a), \gamma_3 N(a))$.

Man verifiziert diese Behauptung mühelos durch direktes Nachrechnen unter Beachtung der für beliebige Elemente a, x, y von C gültigen „Moufang-Identitäten" $(ax)(ya) = a(xy)a$, $(axa)y = a(x(ay))$, $y(axa) = ((ya)x)a$ (s. [16], [7]).

Lemma 3.4. *Zu einer beliebigen Kompositionsalgebra C, beliebigen Elementen $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$* von k^* *und beliebigen invertierbaren Elementen a_1, a_2, a_3 von C gibt es einen Isomorphismus von $\mathfrak{H}(C, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ auf $\mathfrak{H}(C, \gamma_1 N(a_1), \gamma_2 N(a_2), \gamma_3 N(a_3))$, der jedes e_i ($i = 1, 2, 3$) auf sich abbildet* (s. [3]).

Beweis. Wegen (3.9) können wir *OE* $a_1 = 1$ annehmen. Man bilde gemäß Lemma 3.3 Isomorphismen

$$\begin{aligned}\mathfrak{H}(C, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) &\to \mathfrak{H}(C, \gamma_1 N(a_3)^{-1}, \gamma_2 N(a_3)^{-1}, \gamma_3)\\ &\to \mathfrak{H}(C, \gamma_1 N(a_3)^{-1} N(a_2)^{-1}, \gamma_2 N(a_3)^{-1}, \gamma_3 N(a_2)^{-1})\\ &= \mathfrak{H}(C, \gamma_1, \gamma_2 N(a_2), \gamma_3 N(a_3)). \quad —\end{aligned}$$

Abschließend geben wir die Werte

$$MS(x),\ Q(x),\ \sigma_2(x),\ MN(x)$$

für

$$x = \sum_i \alpha_i e_i + \sum_{(i,j,k)} (c_i)_{jk}$$

an. Ausgehend von der Formel

$$MS(x) = \sum_i \alpha_i \quad \text{(s. [2], [13], [6])}$$

erhält man:

$$Q(x) = \tfrac{1}{2} MS(x^2) = \tfrac{1}{2} \sum_i \alpha_i^2 + \sum_{(i,j,k)} \gamma_j \gamma_k N(c_i), \tag{3.13}$$

$$\sigma_2(x) = \tfrac{1}{2} MS^2(x) - Q(x) = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_1 - \sum_{(i,j,k)} \gamma_j \gamma_k N(c_i), \tag{3.14}$$

$$\begin{aligned}MN(x) &= \tfrac{1}{6}\{MS^3(x) - 3\, MS(x)\, MS(x^2) + 2\, MS(x^3)\}\\ &= \alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \gamma_1\gamma_2\gamma_3 t(c_1c_2c_3, \varepsilon) - \sum_{(i,j,k)} \gamma_j\gamma_k\alpha_i N(c_i) \quad \text{(vgl. [10])}.\end{aligned} \tag{3.15}$$

Für x und $y = \sum_i \beta_i e_i + \sum_{(i,j,k)} (d_i)_{jk}$ folgt aus (3.13):

$$(x, y) = \sum \alpha_i \beta_i + \sum_{(i,j,k)} \gamma_j \gamma_k t(c_i, d_i). \tag{3.16}$$

§ 4. Idempotente, Koordinatendarstellungen

Zu einem Idempotent u ($u^2 = u \neq 0$) einer Jordanalgebra $\mathfrak{A}$ mit Einselement e haben wir eine „*Peircesche Zerlegung*" von $\mathfrak{A}$ in eine direkte Summe von Moduln

$$\mathfrak{A}_\lambda(u) := \{x \in \mathfrak{A} \mid ux = \lambda x\} \qquad (\lambda = 0, 1/2, 1).$$

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1(u) \oplus \mathfrak{A}_{1/2}(u) \oplus \mathfrak{A}_0(u).$$

$\mathfrak{A}_1(u)$ und $\mathfrak{A}_0(u)$ sind Teilalgebren von $\mathfrak{A}$ mit den Elementen u, $e - u$. Näheres s. [1].

Zu einem beliebigen vollständigen System orthogonaler Idempotente $e_1, \ldots, e_r$ ($e_i e_j = \delta_{ij} e_i$, $\sum\limits_i e_i = e$) gibt es ebenfalls eine Peircesche Zerlegung $\mathfrak{A} = \sum\limits_{i \leq j} \mathfrak{A}_{ij}$ von $\mathfrak{A}$ in eine direkte Summe von Moduln

$$\mathfrak{A}_{ii} := \mathfrak{A}_1(e_i),\ \mathfrak{A}_{ij} = \mathfrak{A}_{ji} := \mathfrak{A}_{1/2}(e_i) \cap \mathfrak{A}_{1/2}(e_j) \quad (i \neq j) \quad (\text{s. } [1]).$$

Ein Idempotent u von $\mathfrak{A}$ heißt *primitiv*, wenn u nicht als Summe zweier orthogonaler Idempotente darstellbar ist, *absolut primitiv*, wenn diese Unzerlegbarkeit in einer beliebigen Grundkörpererweiterung von $\mathfrak{A}$ bestehen bleibt. Ist u absolut primitiv, $\mathfrak{A}$ nicht ausgeartet, so ist $\mathfrak{A}_1(u) = ku$. $\mathfrak{A}$ heißt *reduziert*, falls $\mathfrak{A}$ ein vollständiges Orthogonalsystem absolut primitiver Idempotente besitzt. Ein solches besteht dann, falls $\mathfrak{A}$ nicht ausgeartet und vom Grade n ist, stets aus n Elementen. Ist $\mathfrak{A}$ einfach, reduziert und n Primzahl, so ist jedes primitive Idempotent von $\mathfrak{A}$ absolut primitiv (s. [6]).

Wir formulieren einen Satz von N. Jacobson ([14]) für den Spezialfall $n = 3$ (vgl. [18]).

Satz 4.1. *$\mathfrak{A}$ sei reduziert und einfach vom Grad 3 über k. e_1, e_2, e_3 sei vollständiges Orthogonalsystem primitiver Idempotente von $\mathfrak{A}$ mit der Peirceschen Zerlegung $\mathfrak{A} = \sum\limits_i ke_i + \sum\limits_{i<j} \mathfrak{A}_{ij}$. Wir wählen ein $a_+ \in \mathfrak{A}_{12}$ und ein $a_- \in \mathfrak{A}_{31}$ mit $Q(a_+) \neq 0$, $Q(a_-) \neq 0$.*

Behauptung. *Es gibt (bis auf Isomorphie) genau eine Kompositionsalgebra C, genau ein $\gamma_2 \in k^*$, genau ein $\gamma_3 \in k^*$ und genau einen Isomorphismus von $\mathfrak{A}$ auf $\mathfrak{H}(C, 1, \gamma_2, \gamma_3) = \sum ke'_i + \sum\limits_{i<j} (C)_{ij}$, der e_i auf e'_i, a_+ auf $(\varepsilon)_{12}$ und a_- auf $(\varepsilon)_{31}$ abbildet.*

Wir identifizieren $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{H}(C, 1, \gamma_2, \gamma_3)$ so, daß dieser Isomorphismus die Identität wird, und sprechen von „der durch e_1, e_2, e_3, a_+, a_- definierten *Koordinatendarstellung* mit $\gamma_1 = 1$" von $\mathfrak{A}$.

Wir identifizieren weiter C mit $\mathfrak{A}_{23}$ und zwar das Element c mit $(c)_{23}$. Die alternative Multiplikation in C markieren wir durch das Zeichen $*$. Dann gilt, wie man mit (3.8) leicht nachrechnet:

$$c * d = 8\gamma_2^{-1}\gamma_3^{-1}(a_- c)(a_+ d) \qquad (c, d \in C). \tag{4.1}$$

Nach (3.7) ist

$$\gamma_2 = Q(a_+), \quad \gamma_3 = Q(a_-). \tag{4.2}$$

Satz 4.2. (Siehe [3], [19], [12] Theorem 3.)

Die Kompositionsalgebra C hängt (bis auf Isomorphie) nicht von der Wahl von e_1, e_2, e_3, a_+, a_- ab, ist also allein durch $\mathfrak{A}$ bestimmt.

§ 5. Elementare Sätze über Gitter ganzer Elemente

Für den Rest der Arbeit sei k *stets Quotientenkörper eines Dedekindringes* A, $\mathfrak{A}$ *stets eine zentral einfache Jordanalgebra vom Grade* 3 *über* k.

Satz 5.1. *M sei ein Gitter von $\mathfrak{A}$, welches das Einselement e enthält. Dann sind folgende Aussagen gleichwertig:*

(1) *Alle Elemente von M sind ganz.*

(2) *Für jedes $x \in M$ gilt $(x, e) \in A$, $MN(x) \in A$.*

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (2) ist trivial.

(2) $\Rightarrow$ (1): Sei $x \in M$. Dann ist $(e, x) \in A$, $MN(x) \in A$. Weil mit x auch $e - x$ in M liegt, ist weiter

$$MN(e - x) = 1 - (x, e) + \sigma_2(x) - MN(x) \in A.$$

Also ist $\sigma_2(x) \in A$. x ist ganz.

Satz 5.2. *M sei Gitter von $\mathfrak{A}$, welches das Einselement e enthält. Dann sind folgende Aussagen gleichwertig:*

$$x \in M \Rightarrow x^2 \in M. \tag{1}$$

$$x, y \in M \Rightarrow P(x)y \in M. \tag{2}$$

Beweis. (2) $\Rightarrow$ (1): Für $x \in M$ ist $P(x)e = x^2 \in M$.

(1) $\Rightarrow$ (2): Für beide Aussagen (1), (2) gilt das Lokal-Global-Prinzip. Deshalb sei k *OE* (komplett) diskret bewertet.

a) Die Funktion $x \to |MN(x)|$ nimmt auf dem endlich erzeugten A-Modul M ihr Maximum an. Auf Grund der Voraussetzung (1) und der Formel $MN(x^2) = MN(x)^2$ ist dieses Maximum $\leqq 1$, d.h. $MN(x) \in A$ für alle $x \in M$.

$$MN(e + x) = 1 + (x, e) + \sigma_2(x) + MN(x) \in A$$

liefert $(x, e) + \sigma_2(x) \in A$ und weiter $2(x, e) \in A$.

b) Es ist $\sigma_2(x)^2 = \sigma_2(x^2) + 2\,MN(x)(x, e)$, wie man leicht nachrechnet, indem man alle Terme dieser Gleichung durch die Eigenwerte von x ausdrückt. Nach a) ist

$$\sigma_2(x)^2 \equiv \sigma_2(x^2) \bmod A.$$

Daraus folgt, nach ähnlichem Schluß wie unter a) $\sigma_2(x) \in A$ für alle $x \in M$. Nach a) ist somit auch $(x, e) \in A$ für alle $x \in M$. Alle Elemente von M sind ganz. Nach [15], Satz 2.2 ist $(M, M) \subset A$.

c) Für $x, y \in M$ ist $2xy = (x + y)^2 - x^2 - y^2 \in M$.

d) Die Behauptung folgt nun aus der mit (2.2) gleichwertigen Formel

$$\begin{aligned} P(x)y = &-2x^2y + 2(x, e)xy + (y, e)x^2 + \{(x, y) - (x, e)(y, e)\}x \\ &+ \sigma_2(x)y + \{(x^2, y) - (x, y)(x, e) + (y, e)\sigma_2(x)\}e. \end{aligned}$$

Satz 5.3. *M sei eine Ordnung von $\mathfrak{A}$, x sei ein ganzes Element von $\mathfrak{A}$. Dann sind folgende Aussagen gleichwertig:*

(1) *$M + Ax$ ist Gitter ganzer Elemente.*

(2) $(x, M) \subset A$, $(x^2, M) \subset A$.

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (2): Nach [15], Satz 2.2 ist $(x, M) \subset A$ und $(x^2, m) + (x, m^2) \in A$ für ein $m \in M$, weil $m^2 \in M$ ist, also $(x^2, m) \in A$.

(2) $\Rightarrow$ (1): Wir benutzen das in Satz 5.1 aufgestellte Kriterium. Es ist $(M + Ax, e) \subset A$. Ferner gilt für $m \in M$ und $\lambda \in A$ (s. (2.3)):

$$MN(m + \lambda x) = MN(m) + \lambda(m \times m, x) + \lambda^2(m, x \times x) + \lambda^3 MN(x).$$

Nun liegt $m \times m = m^2 - (m, e)m + \sigma_2(m)e$ in M, also ist $(m \times m, x) \in A$. Ebenso ist $(m, x \times x) = (m, x^2) - (x, e)(m, x) + \sigma_2(x)(m, e) \in A$. $MN(m + \lambda x)$ liegt für jedes $m \in M$ und $\lambda \in A$ in A. q. e. d.

§ 6. Die Ordnungen $\mathfrak{H}(L, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$

k sei Quotientenkörper eines Dedekindringes A.

C sei eine *assoziative* Kompositionsalgebra über k, eventuell mit Nullteilern, L eine festgewählte Ordnung von C.

Wir betrachten, wie in § 3, einen unitären nichtausgearteten dreidimensionalen C-Rechtsvektorraum V und die Jordanalgebra $\mathfrak{A} = \mathfrak{H}(V)$ der selbstadjungierten Transformationen von V. Auf diese Weise erfassen wir alle speziellen reduzierten zentral einfachen Jordanalgebren vom Grad 3 über k (s. § 4).

Unter einem *L-Gitter* von V verstehen wir ein A-Gitter $\mathfrak{v}$ des k-Vektorraumes V mit $\mathfrak{v}L \subset \mathfrak{v}$. Zu jedem A-Gitter $\mathfrak{v}$ von V gibt es natürlich eine Ordnung L von C, so daß $\mathfrak{v}$ ein L-Gitter wird, etwa $L := \{d \in C \mid \mathfrak{v}d \subset \mathfrak{v}\}$.

$\mathfrak{H}(\mathfrak{v})$ bezeichne die Menge aller selbstadjungierten Transformationen, die $\mathfrak{v}$ stabil lassen. Wir zeigen: $\mathfrak{H}(\mathfrak{v})$ ist A-Gitter von $\mathfrak{H}\ (V)$.

1. $\mathfrak{H}(\mathfrak{v})$ spannt $\mathfrak{H}(V)$ auf: Sei $x \in \mathfrak{H}(V)$ vorgegeben. $x\mathfrak{v}$ ist wieder Gitter von V. Es existiert ein $\lambda \in k^*$ mit $(\lambda x)\mathfrak{v} = (x\mathfrak{v})\lambda \subset \mathfrak{v}$, also mit $\lambda x \in \mathfrak{H}(\mathfrak{v})$.

2. $\mathfrak{H}(\mathfrak{v})$ ist endlich erzeugter A-Modul: Es genügt nachzuweisen, daß $\mathfrak{H}(\mathfrak{v})$ in einem endlich erzeugten A-Modul enthalten ist. Sei $\mathfrak{v}_1$ ein L-Gitter in V mit ‚Basis': $\mathfrak{v}_1 = \mathfrak{e}_1 L + \mathfrak{e}_2 L + \mathfrak{e}_3 L$. Durch Multiplikation mit einem Skalar aus k^* können wir erreichen, daß $\mathfrak{v}_1 \subset \mathfrak{v}$ ist. Weiter existiert ein $\lambda \in k^*$ mit $\lambda \mathfrak{v}_1 \supset \mathfrak{v}$.

$\mathfrak{H}(\mathfrak{v})$ ist nun ohne Zweifel in dem A-Modul Hom $(\mathfrak{v}_1, \lambda\mathfrak{v}_1)$ aller C-linearen Transformationen von V, die $\mathfrak{v}_1$ in $\lambda\mathfrak{v}_1$ abbilden, enthalten. Hom $(\mathfrak{v}_1, \lambda\mathfrak{v}_1)$ ist aber isomorph zu dem A-Modul aller (3.3)-Matrizen mit Koeffizienten in λL und daher sicher endlich erzeugt. —

$\mathfrak{H}(\mathfrak{v})$ ist sogar Ordnung von $\mathfrak{H}(V)$: Aus $x\mathfrak{v} \subset \mathfrak{v}$, $y\mathfrak{v} \subset \mathfrak{v}$ folgt sofort, daß $\big(P(x)y\big)\mathfrak{v} = x\big(y(x\mathfrak{v})\big) \subset \mathfrak{v}$ ist. Weiter ist $e\mathfrak{v} \subset \mathfrak{v}$.

Wir wollen die Ordnungen $\mathfrak{H}(\mathfrak{v})$ genauer untersuchen für den Spezialfall, daß $\mathfrak{v}$ eine orthogonale Basis besitzt:

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{e}_1 L + \mathfrak{e}_2 L + \mathfrak{e}_3 L, \quad (\mathfrak{e}_i, \mathfrak{e}_j) = \gamma_i \delta_{ij}. \tag{6.1}$$

Vermöge (3.2) identifizieren wir $\mathfrak{H}(V)$ mit der Algebra $\mathfrak{H}(C, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$. $\mathfrak{H}(\mathfrak{v})$ ist dann ersichtlich die Ordnung aller Matrizen mit Koeffizienten in L in dieser Algebra. Wir wollen diese Matrizen noch mit Hilfe der Bezeichnung (3.4) charakterisieren. Nach (3.4) liegt

$$z = \sum_i \alpha_i e_i + \sum_{(i,j,k)} (c_i)_{jk}$$

genau dann in $\mathfrak{H}(\mathfrak{v})$, wenn die α_i in A liegen und $\gamma_j c_i \in \bar{L} = L$, $\gamma_k c_i \in L$ ist, d.h. $(\gamma_j A + \gamma_k A) c_i \subset L$ ist.

Wir bezeichnen mit (γ_j, γ_k) den größten gemeinsamen Teiler von γ_j und γ_k. Genauer treffen wir die folgende umständliche, aber für später bequeme Konvention: Ist k komplett diskret bewertet, so sei (γ_j, γ_k) eine feste beliebig gewählte Zahl, die $\gamma_j A + \gamma_k A$ erzeugt, sonst sei (γ_j, γ_k) das Ideal $\gamma_j A = \gamma_k A$ selbst. Wir können dann für das Gitter (6.1) schreiben:

$$\mathfrak{H}(\mathfrak{v}) = \sum_i A e_i + \sum_{j<k} (\gamma_j, \gamma_k)^{-1} (L)_{jk}. \tag{6.2}$$

Ist nun C echt alternative Kompositionsalgebra, so können wir keine solchen geometrischen Überlegungen anstellen, doch können wir auch in diesem Falle in einer Algebra $\mathfrak{A} = \mathfrak{H}(C, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ das A-Gitter

$$\mathfrak{H}(L, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) := \sum_i A e_i + \sum_{j<k} (\gamma_j, \gamma_k)^{-1} (L)_{jk} \tag{6.3}$$

betrachten, wobei L eine Ordnung von C und $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ Elemente von k^* seien. (6.3) ist wieder das Gitter aller Matrizen (3.3) mit Koeffizienten aus L und nach Satz 5.2 eine Ordnung: Mit x liegt auch x^2 in $\mathfrak{H}(L, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$.

Wir sahen in (3.9) und Lemma 3.4, daß für beliebiges $\lambda \in k^*$ und invertierbare a_1, a_2, a_3 aus C

$$\mathfrak{H}(C, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \cong \mathfrak{H}(C, \lambda\gamma_1 N(a_1), \lambda\gamma_2 N(a_2), \lambda\gamma_3 N(a_3))$$

ist.

Der Ordnung $\mathfrak{H}(L, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ wird auf der rechten Seite im allgemeinen eine in ziemlich komplizierter Form zu schreibende Ordnung entsprechen.

Der Faktor λ macht dabei natürlich keinerlei Schwierigkeiten: Es ist

$$(6.4) \qquad \mathfrak{H}(L, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = \mathfrak{H}(L, \lambda\gamma_1, \lambda\gamma_2, \lambda\gamma_3).$$

Auf beiden Seiten steht ja die Menge der Matrizen (3.3) mit Koeffizienten in L.

Lemma 6.1. *α sei ganzes Element von k^*, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ seien Einheiten von k. Dann ist $\mathfrak{H}(L, \varepsilon_1, \varepsilon_2\alpha, \varepsilon_3\alpha) \cong \mathfrak{H}(L, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_1\alpha)$.*

Beweis. Zunächst ist nach (6.4) mit $\lambda = \alpha^{-1}$

$$\mathfrak{H}(L, \varepsilon_1, \varepsilon_2\alpha, \varepsilon_3\alpha) \cong \mathfrak{H}(L, \alpha^{-1}\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \cong \mathfrak{H}(L, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \alpha^{-1}\varepsilon_1).$$

Die durch (3.11) mit $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = \alpha^{-1}$ definierte Abbildung $\varphi : \mathfrak{H}(C, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_1\alpha) \to \mathfrak{H}(C, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_1\alpha^{-1})$ führt nun

$$\mathfrak{H}(L, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_1\alpha) = \sum_i A e_i + (L)_{31} + (L)_{12} + (L)_{23}$$

in die Ordnung $\sum\limits_i A e_i + \alpha(L)_{31} + (L)_{12} + \alpha(L)_{23}$ von $\mathfrak{H}(C, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_1\alpha^{-1})$ über. Diese Ordnung ist aber gemäß Definition $\mathfrak{H}(L, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_1\alpha^{-1})$. q. e. d.

§ 7. Maximale Ordnungen der Form $\mathfrak{H}(L, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$

Wir stellen uns nun die Frage, wie die Koeffizienten $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ beschaffen sein müssen, damit $\mathfrak{H}(L, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ eine maximale Ordnung ist. Wir setzen L jetzt stets als *Maximalordnung* von C voraus. Ist L echt in der Ordnung L' von C enthalten, so ist ja $\mathfrak{H}(L, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ echt in $\mathfrak{H}(L', \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ enthalten. Wir fragen weiter, welche Ordnungen der Form $\mathfrak{H}(L, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ nicht nur von keiner Ordnung, sondern von überhaupt keinem Gitter ganzer Elemente echt umfaßt werden. Solche Ordnungen nennen wir „*ausgezeichnet*".

Es genügt, komplette diskret bewertete Grundkörper zu betrachten. In der Tat: Sei k Quotientenkörper des Dedekindringes A, $\mathfrak{M}$ die Menge der diskreten Primstellen $\mathfrak{p}$ von k, für die alle Elemente von A $\mathfrak{p}$-ganz sind. $k_{\mathfrak{p}}$ sei die Komplettierung von k zu $\mathfrak{p}$, $A_{\mathfrak{p}}$ die von A zu $\mathfrak{p}$. Ferner schreiben wir für einen k-Vektorraum W: $W_{\mathfrak{p}} = W \otimes k_{\mathfrak{p}}$ und für ein A-Gitter N in W: $N_{\mathfrak{p}}$ = topologischer Abschluß von N in $W_{\mathfrak{p}}$ bzgl. der üblichen Topologie.

Damit gilt für eine Ordnung M von $\mathfrak{A}$:

M ist maximal $\Leftrightarrow$ $M_{\mathfrak{p}}$ ist maximal für alle $\mathfrak{p} \in \mathfrak{M}$.

M ist ausgezeichnet $\Leftrightarrow$ $M_{\mathfrak{p}}$ ist ausgezeichnet für alle $\mathfrak{p} \in \mathfrak{M}$.

Weiter ist $\mathfrak{H}(L, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{H}(L_{\mathfrak{p}}, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$. Das sind triviale Feststellungen.

Satz 7.1. *k sei komplett diskret bewertet. In $\mathfrak{A} = \mathfrak{H}(C, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ sei B eine Ordnung der Form $B = \mathfrak{H}(L, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ mit maximaler Ordnung L von C.*

Fall I. *N_C enthalte Primelemente.*

Behauptung. *B ist genau dann ausgezeichnete Ordnung, wenn* $\operatorname{ord} \gamma_1 = \operatorname{ord} \gamma_2 = \operatorname{ord} \gamma_3$ *ist.*

Fall II: *N_C enthalte keine Primelemente.*

Behauptung: *B ist genau dann ausgezeichnete Ordnung, wenn* $|\operatorname{ord} \gamma_i - \operatorname{ord} \gamma_j| \leqq 1$ *für $i, j = 1, 2, 3$ ist.*

Beweis. Wir benutzen im folgenden häufig die Formeln (3.13) bis (3.16).

a) Sei $\operatorname{ord} \gamma_1 = \operatorname{ord} \gamma_2 = \operatorname{ord} \gamma_3$ im Falle I, $|\operatorname{ord} \gamma_i - \operatorname{ord} \gamma_j| \leqq 1$ im Falle II.

$$x = \sum_i \alpha_i e_i + \sum_{(i,j,k)} (\gamma_i, \gamma_j)^{-1} (v_k)_{ij}$$

sei ein Element von $\mathfrak{A}$, für welches auch $B + Ax$ noch ein Gitter von ganzen Elementen ist. Es ist zu zeigen: $x \in B$.

Zunächst sehen wir, daß $(x, e_i) = \alpha_i \in A$ ist. Wir können OE annehmen, daß alle $\alpha_i = 0$ sind.

Weiter ist

$$(7.1) \qquad \left(x, (\gamma_i, \gamma_j)^{-1} (L)_{ij}\right) = (\gamma_i, \gamma_j)^{-2} \gamma_i \gamma_j t(L, v_k) \subset A.$$

Schließlich erhalten wir aus

$$MN(x + e_k) = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 t(v_1 v_2 v_3, \varepsilon) - (\gamma_i, \gamma_j)^{-2} \gamma_i \gamma_j N(v_k) \in A$$

und

$$MN(x) = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 t(v_1 v_2 v_3, \varepsilon) \in A$$

durch Subtraktion:

$$(7.2) \qquad (\gamma_i, \gamma_j)^{-2} \gamma_i \gamma_j N(v_k) \in A.$$

Im Fall I sollte nun $\operatorname{ord} \gamma_i = \operatorname{ord} \gamma_j$ sein.

(7.1) und (7.2) schreiben sich dann als $t(L, v_k) \subset A$ und $N(v_k) \in A$. Nach (1.5) ist $v_k \in L$.

Im Falle II sollte $|\text{ord}\,\gamma_i - \text{ord}\,\gamma_j| \leqq 1$ sein, also $\text{ord}\{(\gamma_i, \gamma_j)^{-2}\gamma_i\gamma_j\} = 0$ oder 1. N_C sollte keine Primelemente enthalten. Somit folgt aus (7.2): $N(v_k) \in A$. Da C jetzt eine Divisionsalgebra sein muß, ist $N(v_k) \in A$ mit $v_k \in L$ gleichbedeutend (s. Satz 1.3). q. e. d.

b) Sei nun im Falle I $\text{ord}\,\gamma_2 \geqq \text{ord}\,\gamma_1 + 1$, also $\text{ord}\{(\gamma_1, \gamma_2)^{-2}\gamma_1\gamma_2\} \geqq 1$, im Falle II $\text{ord}\,\gamma_2 \geqq \text{ord}\,\gamma_1 + 2$, also $\text{ord}\{(\gamma_1, \gamma_2)^{-2}\gamma_1\gamma_2\} \geqq 2$. L enthält im Falle I sicherlich ein v mit $N(v) \sim p$, im Falle II sicherlich ein v mit $N(v) \sim 1$ (s. Lemma 1.1).

Für $x = \{p(\gamma_1, \gamma_2)\}^{-1}(v)_{12}$ gilt nun:

1. x ist ganz: $(x, e) = 0$, $MN(x) = 0$, $\sigma_2(x) = -(\gamma_1, \gamma_2)^{-2}\gamma_1\gamma_2 p^{-2} N(v) \in A$,
2. $(x, B) = (\gamma_1, \gamma_2)^{-2}\gamma_1\gamma_2 p^{-1} t(v, L) \subset A$.
3. $(x^2, B) = (\gamma_1, \gamma_2)^{-2}\gamma_1\gamma_2 p^{-2} N(v)(e_1 + e_2, B) \subset A$.
4. $x \notin B$.

Nach Satz 5.3 ist $B + Ax$ ein Gitter ganzer Elemente, das echt größer als B ist. B ist sicher kein maximales Gitter ganzer Elemente. q. e. d.

Es bleibt die Frage, ob einige der Ordnungen $\mathfrak{H}(L, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, die wir als *nicht ausgezeichnet* erkannt haben, nicht doch *maximale* Ordnungen sind. Diese Frage wird durch Satz 7.2 bis Satz 7.4 beantwortet.

Satz 7.2. *k sei komplett diskret bewertet, B sei eine Ordnung $\mathfrak{H}(L, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ mit maximaler Ordnung L einer Kompositionsalgebra über k.*

Es gelte nicht $|\text{ord}\,\gamma_i - \text{ord}\,\gamma_j| \leqq 1$ für alle $i, j = 1, 2, 3$.

Dann ist B nicht maximale Ordnung.

Beweis. $OE\ \gamma_1 = 1$, $\gamma_2 \sim p^\nu$, $\gamma_3 \sim p^\mu$, $0 \leqq \nu \leqq \mu$. Nach Voraussetzung ist $\mu \geqq 2$.

a) Sei $\nu < \mu$.

Wir betrachten den durch (3.11) mit $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = p^{-1}$ definierten Isomorphismus

$$\mathfrak{H}(C, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \to \mathfrak{H}(C, \gamma_1, \gamma_2, p^{-2}\gamma_3).$$

Dabei wird $\mathfrak{H}(L, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = \sum A e_i + (L)_{31} + (L)_{12} + p^{-\nu}(L)_{23}$ auf $\sum A e_i + p(L)'_{31} + (L)'_{12} + p^{-\nu+1}(L)'_{23}$ abgebildet. Diese Ordnung ist aber echt enthalten in

$$\mathfrak{H}(L, \gamma_1, \gamma_2, p^{-2}\gamma_3) = \sum A e_i + (L)'_{31} + (L)'_{12} + (p^\nu, p^{\mu-2})^{-1}(L)'_{23},$$

weil $\mu - 2 \geqq \nu - 1$, also $p^{\nu-1} \mid (p^\nu, p^{\mu-2})$ ist.

b) Sei $\nu = \mu$.

Wir betrachten den durch (3.11) mit $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = p^{-1}$, $\lambda_3 = p^{-1}$ definierten Isomorphismus

$$\varphi : \mathfrak{H}(C, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \to \mathfrak{H}(C, \gamma_1, p^{-2}\gamma_2, p^{-2}\gamma_3).$$

$\varphi B = \sum A e_i + (pL)'_{31} + (pL)'_{12} + p^{-\nu+2}(L)_{23}$ ist echt enthalten in

$$\mathfrak{H}(L, \gamma_1, p^{-2}\gamma_2, p^{-2}\gamma_3) = \sum Ae_i + (L)'_{31} + (L)'_{12} + p^{-\nu+2}(L)'_{23}.$$

q. e. d.

Satz 7.3. *k sei komplett diskret bewertet, C sei assoziativ, N_C enthalte Primelemente. ε_2, ε_3 seien Einheiten des Körpers k. L sei eine Maximalordnung von C.*

Behauptung. *$\mathfrak{H}(L, 1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 p)$ ist nicht maximale Ordnung.*

Beweis. Nach Lemma 1.1 können wir in L ein Element a finden mit $N(a) \sim p$. Wir betrachten den durch (3.12) für $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_3 = a^{-1}$ beschriebenen Isomorphismus

$$\varphi : \mathfrak{H}(C, 1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 p) \to \mathfrak{H}\big(C, 1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 p N(a)^{-1}\big).$$

Dabei geht

$$B = \mathfrak{H}(L, 1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 p) = \sum A e_i + \sum_{i<j} (L)_{ij}$$

in

$$\varphi(B) = \sum A e_i + (L\bar{a})'_{13} + (L)'_{21} + (L\bar{a})'_{23}$$

über. $L\bar{a}$ ist in L enthalten und zwar echt, weil $L\bar{a}$ bezüglich $N(x)$ ein Gitter der Norm $\mathfrak{p}$ ist. $\varphi(B)$ ist daher echt in der Ordnung $\sum A e_i + \sum_{i<j} (L)'_{ij}$ vom Typ $\mathfrak{H}\big(L, 1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 p N(a)^{-1}\big)$ enthalten. $\varphi(B)$, also auch B, ist nicht Maximalordnung. q. e. d.

Bemerkung. Wegen Lemma 6.1 haben wir damit für assoziatives C die Frage, welche der Ordnungen $\mathfrak{H}(L, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ maximal sind, lückenlos beantwortet.

Wir sahen: $\mathfrak{H}(L, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ maximal $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{H}(L, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ ausgezeichnet. Diese Aussage wird falsch, wenn C echt alternativ ist:

Satz 7.4. *k sei komplett diskret bewertet, C sei die zerfallende Cayleyalgebra über k. ε_2, ε_3 seien Einheiten aus k, L sei eine Maximalordnung von C.*

Behauptung. *$B = \mathfrak{H}(L, 1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 p)$ ist, obschon nicht ausgezeichnete, so doch maximale Ordnung.*

Beweis. Es ist $B = \sum_i A e_i + \sum_{i<j} (L)_{ij}$. Sei B' eine Ordnung $\supset B$, $x = \sum \alpha_i e_i + \sum_{(i,j,k)} (v_i)_{jk}$ ein Element von B. Genau wie im Teil a) des

Beweises von Satz 7.1 sehen wir, daß die α_i in A liegen und die Gleichungen (7.1) und (7.2) gelten.

(7.1) und (7.2) zeigen für $(i,j) = (1,2)$: $t(L, v_3) \subset A$, $N(v_3) \in A$. Daraus schließen wir wieder, daß $v_3 \in L$ ist.

Wir sehen:

Jedes Element aus B' läßt sich modulo B auf eine Summe $x = (c)_{31} + (d)_{23}$ reduzieren.

Den A-Modul aller $c \in C$, die in einem $x = (c)_{31} + (d)_{23} \in B'$ auftreten, nennen wir H_{31}. Entsprechend definieren wir H_{23}. Mit $x = (c)_{31} + (d)_{23}$ liegt nun auch

$$2(\varepsilon)_{12}x = (c)_{32} + \varepsilon_2(d)_{13}$$

in B'. Wir sehen:

$$\bar{H}_{31} \subset H_{23}, \quad \bar{H}_{23} \subset H_{31}, \quad \text{also} \quad \bar{H}_{31} = H_{23}.$$

Weiter ist für $g \in L$ statt ε ebenfalls $2(g)_{12}x = (cg)_{32} + \varepsilon_2(gd)_{13} \in B'$. Dies zeigt: $H_{31}L \subset \bar{H}_{23} = H_{31}$. Nach [4], S. 414 ist H_{31} sogar zweiseitiges Ideal und von der Form λL mit einem $\lambda \in k^*$. Insbesondere: $\lambda\varepsilon \in H_{31}$, d.h. es existiert ein $x = \lambda(\varepsilon)_{31} + (d)_{23}$ in B'. Nun ist auch (s. (3.7), (3.8))

$$x^2 = \lambda^2\gamma_3(e_1 + e_3) + \gamma_2\gamma_3 N(d)(e_2 + e_3) + \lambda\gamma_3(d)_{21} \in B'.$$

Daher ist $\lambda^2\gamma_3 \sim \lambda^2 p \in A$. Es muß $\lambda \in A$ sein, also $H_{31} \subset L$, $H_{23} \subset L$ sein. $B' \subset B$. q. e. d.

Abschließend betrachten wir noch folgende Situation:

C sei nullteilerfreie Cayley-Algebra über komplettem diskret bewertetem Grundkörper k, — ein Fall, der sicher nicht auftreten kann, wenn der Restklassenkörper von k endlich ist. N_C enthalte Primelemente. *Dann ist eine Ordnung $\mathfrak{H}(L, 1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 p)$ mit Einheiten $\varepsilon_2, \varepsilon_3$ nicht maximal.* Das läßt sich mit dem gleichen Gedanken wie Satz 7.3 beweisen:

Nach Lemma 6.1 ist $\mathfrak{H}(L, 1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 p)$ zunächst isomorph zu einer Ordnung $B = \mathfrak{H}(L, 1, \eta_2 p, \eta_3 p) = \sum_i A e_i + (L)_{31} + (L)_{12} + p^{-1}(L)_{23}$ mit Einheiten η_2, η_3. Sei a Element von C, also von L, mit $N(a) \sim p$. Wir betrachten die durch (3.12) mit $a_2 = a^{-1}$, $a_3 = \bar{a}^{-1}$ definierte Abbildung

$$\varphi : \mathfrak{H}(C, 1, \eta_2 p, \eta_3 p) \to \mathfrak{H}\left(C, 1, \eta_2 p N(a)^{-1}, \eta_3 p N(a)^{-1}\right).$$

Nach Lemma 3.3 ist φ ein Isomorphismus.

$$\varphi(B) = \sum A e_i' + (\bar{a}L)_{31}' + (L\bar{a})_{12}' + p^{-1}(aLa)_{23}'$$

ist echt in

$$\sum A e_i' + (L)_{31}' + (L)_{12}' + (L)_{23}' = \mathfrak{H}\left(L, 1, \eta_2 p N(a)^{-1}, \eta_3 p N(a)^{-1}\right)$$

enthalten. Entscheidend ist, daß wir, weil C nullteilerfreie ist, aus Satz 1.3 $p^{-1}aLa \subset L$ folgern können.

§ 8. Ausgezeichnete Ordnungen mit Idempotenten

A sei beliebiger Dedekindring. $\mathfrak{A}$ sei reduziert und einfach vom Grade 3. M sei eine Ordnung von $\mathfrak{A}$, die ein primitives Idempotent u enthalte. Zu der Peirceschen Zerlegung (s. § 4). $\mathfrak{A} = ku \oplus \mathfrak{A}_{1/2} \oplus \mathfrak{A}_0$ bezüglich u haben wir dann auch eine „*Peircesche Zerlegung von* M“. Mit $M_{1/2} := \mathfrak{A}_{1/2} \cap M$, $M_0 := \mathfrak{A}_0 \cap M$ gilt nämlich:

$$M = Au + M_{1/2} + M_0. \tag{8.1}$$

In der Tat, ist $m = \alpha u + m_{1/2} + m_0 \in M$ $(m_{1/2} \in \mathfrak{A}_{1/2}, m_0 \in \mathfrak{A}_0)$, so ist auch

$$\begin{aligned} \alpha u &= P(u)m \in M, \quad \text{also } \alpha \in A, \\ m_{1/2} &= 4u\big((e - u)m\big) \in M, \\ m_0 &= P(e - u)m \in M. \end{aligned}$$

M_0 ist eine Ordnung der Jordanalgebra $\mathfrak{A}_0$.

Satz 8.1. *Ist* $M = Au + M_{1/2} + M_0$ *ausgezeichnete Ordnung von* $\mathfrak{A}$, *so ist* M_0 *ausgezeichnete Ordnung von* $\mathfrak{A}_0$.

Beweis:

a) Zunächst überlegen wir uns, wie die Minimalnorm von $\mathfrak{A}_0$ aussieht. Sei x generisches Element von $\mathfrak{A}_0$. Es ist $MN(x) = 0$, da x in $\mathfrak{A}$ den Eigenwert 0 besitzt. (Zugehöriger Eigenvektor: u.) Daher folgt aus (2.1):

$$x^2 - (x, e - u)x + \sigma_2(x)(e - u) = 0. \tag{8.2}$$

Dies ist die Minimalgleichung für $\mathfrak{A}_0$.

Man sieht:

1. $\sigma_2(x)$ ist die Minimalnorm von $\mathfrak{A}_0$.
2. $z \in \mathfrak{A}_0$ ist genau dann ganzes Element von $\mathfrak{A}$, wenn z ganzes Element von $\mathfrak{A}_0$ ist.

(Anderer Beweis: Man betrachte die Eigenwerte von x bzw. z in $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_0$.)

b) Nun gehen wir zum eigentlichen Beweis über. Sei $M_0 + Az$ ein Gitter von ganzen Elementen in $\mathfrak{A}_0$. Zu zeigen: $z \in M_0$. Dazu genügt es, nachzuweisen, daß $M + Az$ ein Gitter von ganzen Elementen in $\mathfrak{A}$ ist, da M ja maximales Gitter ganzer Elemente sein sollte. Wir wenden das Kriterium Satz 5.1 an.

$(M + Az, e) \subset A$ ist trivial. Sei $m \in M$, $\lambda \in A$.
Es ist $MN(m + \lambda z) = MN(m) + \lambda(m \times m, z) + \lambda^2(m, z \times z)$ (s. (2.3)). Wegen

$$m \times m = m^2 - (m, e)m + \sigma_2(m)e \in M$$

und

$$z \times z = z^2 - (z, e)z + \sigma_2(z)e = \sigma_2(z)u \text{ (nach (8.2))}$$

ist $(m \times m, z) \in (M, z) = (M_0, z) \subset A$, $(m, z \times z) = \sigma_2(z)(m, u) \in A$,

also $MN(m + \lambda z) \in A$.

$M + Az$ ist als Gitter ganzer Elemente erwiesen. q. e. d.

Bemerkung. Ist M nur maximale Ordnung von $\mathfrak{A}$, so braucht M_0 nicht maximale Ordnung von $\mathfrak{A}_0$ zu sein. Dies zeigt unser Beispiel

$$M = \mathfrak{H}(C, 1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 p) = \sum A e_i + (L)_{31} + (L)_{12} + (L)_{23},$$

mit C = zerfallende Cayley-Algebra über komplettem diskret bewertetem Grundkörper k, $\varepsilon_2 \sim 1$, $\varepsilon_3 \sim 1$ (s. Satz 7.4). Für $u = e_1$ ist $M_0 = (Ae_2 + Ae_3) + (L)_{23}$. M_0 ist bezüglich $\sigma_2(x)$ die direkte Summe des hyperbolischen Gitters $Ae_2 + Ae_3$ und des Gitters $(L)_{23}$ von der Norm $\mathfrak{p}$. Weil der Raum $(C)_{23}$ isotrop ist, ist $(L)_{23}$ sicher nicht maximales Gitter ganzer Norm darin. M_0 ist kein maximales Gitter ganzer Norm bezüglich $\sigma_2(x)$ in $\mathfrak{A}_0$, somit nach [15] Satz 4.4 keine Maximalordnung von $\mathfrak{A}_0$.

Wir gehen nun zu der Betrachtung von Ordnungen über, die sogar zwei zueinander orthogonale primitive Idempotente enthalten, also ein vollständiges Orthogonalsystem primitiver Idempotente e_1, e_2, e_3. Zur Peirceschen Zerlegung

$$\mathfrak{A} = \sum_i k e_i + \sum_{i<j} \mathfrak{A}_{ij}$$

von $\mathfrak{A}$ haben wir dann wieder eine „*Peircesche Zerlegung von M bezüglich* e_1, e_2, e_3":

(8.3) $$M = \sum_i A e_i + \sum_{i<j} M_{ij} \quad \text{mit} \quad M_{ij} = M \cap \mathfrak{A}_{ij}.$$

Der Beweis von (8.3) erfolgt analog zu dem Beweis von (8.1).

Satz 8.2. *A sei Hauptidealring. $\mathfrak{A}$ sei zentral einfache reduzierte Jordanalgebra vom Grade 3 über k. Die Koeffizientenalgebra C von $\mathfrak{A}$ zerfalle. M sei ausgezeichnete Ordnung von $\mathfrak{A}$ und enthalte ein vollständiges Orthogonalsystem primitiver Idempotente e_1, e_2, e_3. γ_2, γ_3 seien Einheiten von A.*

Behauptung. *Es gibt eine Koordinatendarstellung von $\mathfrak{A}$ mit e_1, e_2, e_3 als Idempotenten und $\gamma_1 = 1, \gamma_2, \gamma_3$ als Koeffizienten, so daß $M = \mathfrak{H}(L, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ mit einer Maximalordnung L von C wird.*

Beweis. a) Wir gehen von der Peirceschen Zerlegung (8.3) von M aus. $M_0(e_1) = Ae_2 + Ae_3 + M_{23}$ ist maximales Gitter ganzer Elemente in $\mathfrak{A}_0(e_1)$, nach [15], Satz 4.4 also maximales Gitter ganzer Norm bezüglich $\sigma_2(x)$.

Aus $\sigma_2(\xi_2 e_2 + \xi_3 e_3 + v_{23}) = \xi_2\xi_3 - Q(v_{23})$ $(\xi_2, \xi_3 \in k,\ v_{23} \in \mathfrak{A}_{23})$ ersehen wir: M_{23} ist maximales Gitter ganzer Norm von $\mathfrak{A}_{23}$ bezüglich $-Q(x)$, also bezüglich $Q(x)$. Dasselbe gilt für M_{31}, M_{12}. Weil C zerfällt, hat $\mathfrak{A}_{12}$ bezüglich der quadratischen Form $Q(x)$ keinen Kernraum. M_{12} enthält isotrope Vektoren, somit ein Teilgitter

$$A x_1 + A x_2 \quad \text{mit} \quad Q(x_1) = Q(x_2) = 0, (x_1, x_2) = 1$$

(s. [17], 82: 20, 82: 21a). Daher ist der Wertebereich von Q auf M_{12} ganz A. Dasselbe gilt für M_{31}, M_{23}.

b) Wir wählen ein $a_+ \in M_{12}$ mit $Q(a_+) = \gamma_2$ und ein $a_- \in M_{31}$ mit $Q(a_-) = \gamma_3$. Wir werden zeigen, daß die durch e_1, e_2, e_3 a_+, a_- definierte Koordinatendarstellung von $\mathfrak{A}$ mit $\gamma_1 = 1$ (s. § 4) das Verlangte leistet.

Wie in § 4 identifizieren wir $\mathfrak{A}_{23}$ mit C und bezeichnen die Multiplikation mit *. Mit x und x' liegt auch (s. (4.1))

$$x * x' = 8\gamma_2^{-1}\gamma_3^{-1}(a_- x)(a_+ x') \text{ in } M_{23}.$$

M_{23} ist also eine Ordnung L von C. Weiter ist (s. (3.8))

$$(L)_{13} = 2(\varepsilon)_{12} M_{23} = 2a_+ M_{23} \subset M_{13}.$$

Es gilt sogar $(L)_{13} = M_{13}$. Denn für $y_- \in M_{13}$ liegt $\gamma_2 y_- = 4a_+(a_+ y_-)$ in $2(\varepsilon)_{12}M_{23} = (L)_{13}$, da γ_2 Einheit ist, also auch y_- selbst. Ebenso ist $(L)_{21} = M_{21}$. Wir haben bewiesen:

$$M = \sum A e_i + \sum_{j<k} (L)_{jk} = \mathfrak{H}(L, 1, \gamma_2, \gamma_3).$$

Natürlich muß L Maximalordnung von C sein. q. e. d.

Satz 8.3. *$\mathfrak{A}$ sei zentral einfache, reduzierte Jordanalgebra vom Grade 3 über komplett diskret bewertetem Körper k. Die Koeffizientenalgebra C von $\mathfrak{A}$ sei nullteilerfrei. M sei maximale Ordnung von $\mathfrak{A}$ und enthalte ein vollständiges System primitiver orthogonaler Idempotente e_1, e_2, e_3.*

$\gamma_1 = 1, \gamma_2, \gamma_3$ seien zu e_1, e_2, e_3 gehörige Koeffizienten mit

ord $\gamma_2 =$ ord $\gamma_3 = 0$, falls N_C Primelemente enthält (Fall I),

ord γ_2, ord $\gamma_3 = 0$ oder 1, falls N_C keine Primelemente enthält (Fall II). (Solche Koeffizienten lassen sich sicher finden (s. Lemma 3.4).) L sei die Maximalordnung von C.

Behauptung. *Bezüglich einer beliebigen Koordinatendarstellung von $\mathfrak{A}$ mit e_1, e_2, e_3 als Idempotenten und $\gamma_1 = 1, \gamma_2, \gamma_3$ als Koeffizienten ist $M = \mathfrak{H}(L, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$.*

Beweis. Nach Satz 1.3 ist $L = \{c \in C \mid N(c) \in A\}$. Wir legen eine beliebige Koordinatendarstellung von $\mathfrak{A}$ mit den Idempotenten e_1, e_2, e_3

und den Koeffizienten $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ zugrunde. M hat eine Peircesche Zerlegung

$$M = \sum_i A e_i + \sum_{i<j} M_{ij}.$$

Sei $(c)_{ij} \in M_{ij}$. Dann ist (s. (3.14))

$$\sigma_2\big((c)_{ij}\big) = -\gamma_i \gamma_j N(c) = -(\gamma_i, \gamma_j)^{-2} \gamma_i \gamma_j N\big((\gamma_i, \gamma_j) c\big) \in A.$$

Nach Voraussetzung ist $(\gamma_i, \gamma_j)^{-2} \gamma_i \gamma_j$ im Falle I von der Ordnung 0, im Falle II von der Ordnung 0 oder 1. Daher ist $N\big((\gamma_i, \gamma_j) c\big) \in A$, also $(\gamma_i, \gamma_j) c \in L$.

Wir haben gezeigt:

$$M \subset \sum_i A e_i + \sum_{i<j} (\gamma_i, \gamma_j)^{-1} (L)_{ij} = \mathfrak{H}(L, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3).$$

Da M maximal ist, muß M mit $\mathfrak{H}(L, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ übereinstimmen.

q. e. d.

Nach Satz 8.2 und Satz 8.3 sind für kompletten diskret bewerteten Grundkörper die ausgezeichneten Ordnungen der Form $\mathfrak{H}(L, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ charakterisierbar als die ausgezeichneten Ordnungen, die ein vollständiges Orthogonalsystem primitiver Idempotente enthalten.

Wir gehen noch auf die Situation bei beliebigem Dedekindring A ein. Es gilt folgendes Kriterium:

Satz 8.4. *k sei Quotientenkörper eines beliebigen Dedekindringes A. $\mathfrak{A}$ sei reduzierte zentral einfache Jordanalgebra vom Grade 3 über k. M sei ausgezeichnete Ordnung von $\mathfrak{A}$ und enthalte ein vollständiges Orthogonalsystem primitiver Idempotente e_1, e_2, e_3. $M = \sum_i A e_i + \sum_{i<j} M_{ij}$ sei die Peircesche Zerlegung von M zu e_1, e_2, e_3.*

Dann sind folgende Aussagen gleichwertig:

(1) Es gibt eine Koordinatendarstellung $\mathfrak{H}(C, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ von $\mathfrak{A}$ mit e_1, e_2, e_3 als Idempotenten, so daß $M = \mathfrak{H}(L, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ wird.

(2) Es existiert ein Element $a_+ \in M_{12}$ und ein Element $a_- \in M_{31}$, so daß $Q(a_+)$ Teiler von $Q(y_+)$ für alle $y_+ \in M_{12}$ ist und $Q(a_-)$ Teiler von $Q(y_-)$ für alle $y_- \in M_{31}$ ist.

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (2): Man lege eine Koordinatendarstellung der in (1) beschriebenen Art zugrunde und wähle $a_+ = (\varepsilon)_{12}$, $a_- = (\varepsilon)_{31}$.

(2) $\Rightarrow$ (1): Wir betrachten die Koordinatendarstellung von $\mathfrak{A}$ zu e_1, e_2, e_3, a_+, a_- mit $\gamma_1 = 1$: $\mathfrak{A} = \mathfrak{H}\big(C, 1, Q(a_-), Q(a_+)\big)$. Für jedes $\mathfrak{p} \in \mathfrak{M}$ (Bezeichnungen s. § 7 Anfang) ist

$$\mathfrak{A}_\mathfrak{p} = \mathfrak{H}\big(C_\mathfrak{p}, 1, Q(a_+), Q(a_-)\big).$$

Weil $(M_{12})_{\mathfrak{p}}$, $(M_{31})_{\mathfrak{p}}$ maximale Gitter ganzer Norm sind (s. Anfang des Beweises von Satz 8.2), müssen $\gamma_2 = Q(a_+)$ und $\gamma_3 = Q(a_-)$ an den Stellen $\mathfrak{p} \in \mathfrak{M}$, für die $C_{\mathfrak{p}}$ zerfällt, Einheiten sein und an den anderen Stellen $\mathfrak{p} \in \mathfrak{M}$ Elemente sein, wie sie in Satz 8.3 beschrieben werden. Satz 8.3 und der Beweis von Satz 8.2 zeigen, daß bei unserer Koordinatendarstellung an allen Stellen $\mathfrak{p} \in \mathfrak{M}$ $M_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{H}(L'_{\mathfrak{p}}, 1, \gamma_2, \gamma_3)$ ist mit Maximalordnungen $L'_{\mathfrak{p}}$ von $C_{\mathfrak{p}}$. Mit Hilfe eines Standardschlusses ziehen wir daraus die Folgerung, daß $M = \mathfrak{H}(L, 1, \gamma_2, \gamma_3)$ mit einer Maximalordnung L von C ist: Sei zunächst L irgendeine Maximalordnung von C. Dann ist schon $\mathfrak{H}(L, 1, \gamma_2, \gamma_3)_{\mathfrak{p}} = M_{\mathfrak{p}}$ an *fast* allen Stellen $\mathfrak{p} \in \mathfrak{M}$. An den anderen Stellen ändern wir L so ab, daß $L_{\mathfrak{p}} = L'_{\mathfrak{p}}$ wird. Mit der so geänderten Maximalordnung L ist $\mathfrak{H}(L, 1, \gamma_2, \gamma_3)_{\mathfrak{p}} = M_{\mathfrak{p}}$ für alle $\mathfrak{p} \in \mathfrak{M}$, also $M = \mathfrak{H}(L, 1, \gamma_2, \gamma_3)$. q. e. d.

Die Bedingung (2) des soeben bewiesenen Satzes braucht durchaus nicht immer erfüllt zu sein. Wir erläutern diese Feststellung durch ein Beispiel.

Sei L Maximalordnung einer assoziativen Kompositionsalgebra C über k. W sei ein L-Rechtsideal in C, das C aufspannt und dessen Normideal $N(W) = \sum_{x \in W} AN(x)$ ein Hauptideal αA ist. V sei dreidimensionaler unitärer C-Rechtsvektorraum mit einer Orthogonalbasis $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3$, für die $\gamma_1 := (\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_1)$ und $\gamma_2 := (\mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_2)$ Einheiten seien und $\gamma_3 := (\mathfrak{e}_3, \mathfrak{e}_3) \sim \alpha^{-1}$ sei. Wir legen in $\mathfrak{A} := \mathfrak{H}(V)$ die zu den $\mathfrak{e}_i$ gehörige Koordinatendarstellung (s. (3.2)) zugrunde und betrachten die Ordnung $M = \mathfrak{H}(\mathfrak{e}_1 L + \mathfrak{e}_2 L + \mathfrak{e}_3 W)$. Man rechnet leicht nach, daß

$$M = \sum_i A e_i + (L)_{12} + (W)_{31} + (W)_{32}$$

ist.

M ist ausgezeichnete Ordnung. In der Tat: Für jedes $\mathfrak{p} \in \mathfrak{M}$ ist $W_{\mathfrak{p}}$ ein $L_{\mathfrak{p}}$-Hauptideal $a_{\mathfrak{p}} L$. Man überzeugt sich an Hand der Koordinatendarstellung von $\mathfrak{A}_{\mathfrak{p}}$ zu der Basis $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3 a_{\mathfrak{p}}$ von $V_{\mathfrak{p}}$, daß

$$M_{\mathfrak{p}} \cong \mathfrak{H}(L_{\mathfrak{p}}, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 N(a_{\mathfrak{p}}))$$

ist. Aus $\alpha A_{\mathfrak{p}} = N(W)_{\mathfrak{p}} = N(W_{\mathfrak{p}}) = N(a_{\mathfrak{p}}) A_{\mathfrak{p}}$ und $\gamma_3 \sim \alpha^{-1}$ folgt: $\gamma_3 N(a_{\mathfrak{p}})$ ist Einheit. Nach Satz 7.1 ist $M_{\mathfrak{p}}$ ausgezeichnete Ordnung für alle $\mathfrak{p} \in \mathfrak{M}$. Der Wertebereich von Q auf M_{31} ist $\{\gamma_1 \gamma_3 N(w) \mid w \in W\}$.

Für ein Element $w_0 \in W$ gilt nun:

$$N(W) = N(w_0) A \Leftrightarrow W = w_0 L. \tag{8.4}$$

Der Beweis der Richtung „$\Rightarrow$" sei kurz skizziert: Wir prüfen die Gleichung $W = w_0 L$ an allen Stellen $\mathfrak{p} \in \mathfrak{M}$. Wegen $W_{\mathfrak{p}} = a_{\mathfrak{p}} L$ existiert ein Element $g_{\mathfrak{p}} \in L_{\mathfrak{p}}$ mit $w_0 = a_{\mathfrak{p}} g_{\mathfrak{p}}$. Aus $N(w_0) \sim N(a_{\mathfrak{p}})$ schließen wir, daß $N(g_{\mathfrak{p}})$

Einheit ist und somit $g_{\mathfrak{p}}^{-1} = \bar{g}_{\mathfrak{p}} N(g_{\mathfrak{p}})^{-1}$ (s. (1.4)) in $L_{\mathfrak{p}}$ liegt. Es ist $W_{\mathfrak{p}} = w_0 L_{\mathfrak{p}}$.

(8.4) lehrt: Die Bedingung (2) von Satz 8.4 ist genau dann erfüllt, wenn W ein Hauptideal ist.

Falls k nicht komplett diskret bewertet ist und C nicht gerade die Klassenzahl 1 besitzt, dürfte es unpraktisch sein, das Augenmerk auf die Ordnungen $\mathfrak{H}(L, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ zu richten. Man hat statt dessen allgemeiner die Ordnungen $\mathfrak{H}(\mathfrak{e}_1 W_1 + \mathfrak{e}_2 W_2 + \mathfrak{e}_3 W_3)$ mit Rechtsidealen W_i einer Maximalordnung L von C und Orthogonalbasis $\{\mathfrak{e}_i\}$ eines unitären dreidimensionalen Raumes über C zu betrachten sowie ihre Analoga in den reduzierten Ausnahmealgebren.

Es sei angemerkt, daß sich aus Satz 8.2 und Satz 8.3 ziemlich leicht der folgende Satz herleiten läßt:

Satz 8.5. *M sei ausgezeichnete Ordnung einer Algebra $\mathfrak{H}(V)$ über dem Quotientenkörper k eines beliebigen Dedekindringes A. M besitze ein vollständiges Orthogonalsystem primitiver Idempotente e_1, e_2, e_3. Dann ist M eine Ordnung $\mathfrak{H}(\mathfrak{e}_1 W_1 + \mathfrak{e}_2 W_2 + \mathfrak{e}_3 W_3)$ mit Rechtsidealen W_i einer Maximalordnung L der Koeffizientenalgebra C und mit einer Orthogonalbasis $\{\mathfrak{e}_j\}$ von V, die zu den e_i paßt: $e_i \mathfrak{e}_j = \delta_{ij} \mathfrak{e}_j$.*

Literatur

[1] A. A. ALBERT, A structure theory for Jordanalgebras, Ann. of Math. 48, (1948) 446—467.

[2] A. A. ALBERT, A theory of power associative commutative algebras, Trans. Amer. Math. 69, (1950) 503—527.

[3] A. A. ALBERT and N. JACOBSON, On reduced exceptional simple Jordan-algebras, Ann. of Math. 66, (1957) 400—417.

[4] F. VAN DER BLIJ and T. A. SPRINGER, The arithmetic of octaves and of the group G_2, Proc. Kon. Ned. Akad. Wet. A, 62 (= Indag. Math. 21), (1959) 406—418.

[5] N. BOURBAKI, Formes sesquilinéaires et formes quadratiques, Act. Sci. Ind. 1272 (1959).

[6] H. BRAUN und M. KOECHER, Noch nicht veröffentlichtes Manuskript über Jordanalgebren und Positivitätsbereiche.

[7] R. H. BRUCK and E. KLEINFELD, The structure of alternative division rings, Proc. Amer. Math. Soc. 2, (1951) 878—890.

[8] M. DEURING, Algebren, Springer 1935, Chelsea 1948.

[9] M. EICHLER, Quadratische Formen und orthogonale Gruppen, Springer 1952.

[10] H. FREUDENTHAL, Oktaven, Ausnahmegruppen und Oktavengeometrie, Utrecht 1951.

[11] H. FREUDENTHAL, Zur ebenen Oktavengeometrie, Proc. Kon. Ned. Akad. Wet. A, 56 (= Indag. Math. 15), (1953) 195—200.

[12] N. Jacobson, Structure of alternative and Jordan bimodules, Osaka Math. J. 6, (1954) 1—71.
[13] N. Jacobson, Some groups of transformations defined by Jordanalgebras I, J. reine u. angew. Math. 201, (1959) 178—195.
[14] N. Jacobson, A coordinatization theorem for Jordan Algebras, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. 48, (1962) 1154—1160.
[15] M. Knebusch, Der Begriff der Ordnung einer Jordanalgebra, Diese Zeitschrift.
[16] R. Moufang, Zur Struktur von Alternativkörpern, Math. Annalen 110, (1934) 416—430.
[17] O. T. O'Meara, Introduction to quadratic forms, Springer 1963.
[18] T. A. Springer, On a class of Jordanalgebras, Proc. Kon. Ned. Akad. Wet. A, 62 (= Indag. Math. 21), (1959) 254—264.
[19] T. A. Springer, The projective octave plane I, Ibid. A, 63 (= Indag. Math. 22) (1960) 74—80.

Eingegangen am 15. 12. 1964