5

Math. Z. 108, 255–268 (1969)

Isometrien über semilokalen Ringen

MANFRED KNEBUSCH

Einleitung

Witt bewies 1936 in etwas anderer Formulierung den folgenden für die Theorie der quadratischen Formen grundlegenden Satz ([16]): Ist E ein nicht entarteter quadratischer Raum über einem Körper mit von 2 verschiedener Charakteristik und F beliebiger Teilraum von E, so läßt sich jede (injektive) Isometrie von F in E zu einem Automorphismus von E fortsetzen. Dasselbe wurde 1940 von Arf über Körpern der Charakteristik 2 gezeigt ([1]). Einen anderen, sehr eleganten Beweis des Wittschen Satzes für beliebige Charakteristik gibt Chevalley in seinem Buch über Spinoren an ([5], S. 16).

In dieser Note studieren wir die Fortsetzung von Isometrien über semilokalen Ringen, d.h. über kommutativen Ringen mit Einselement, die nur endlich viele maximale Ideale besitzen. Dabei benutzen wir die folgenden, über einem beliebigen kommutativen Ring A mit Einselement sinnvollen Begriffe:

Definition 0.1. Ein *quadratischer Raum* ist ein projektiver endlich erzeugter A-Modul E, versehen mit einer quadratischen Form q, d.h. einer Abbildung $q\colon E \to A$, für die gilt:

a) $q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$ $(\lambda \in A, x \in E)$.

b) $B(x, y) := q(x+y) - q(x) - q(y)$ ist als Funktion von $(x, y) \in E \times E$ eine (symmetrische) Bilinearform.

An Stelle von „quadratischer Raum" sagen wir oft kurz „Raum". Die quadratischen bzw. bilinearen Formen aller auftretenden Räume bezeichnen wir unterschiedslos mit q bzw. B, solange dadurch keine Verwirrung entsteht.

Definition 0.2. Ein quadratischer Raum E heiße *nicht entartet*, falls die durch seine Bilinearform induzierte lineare Abbildung von E in den Dualraum $E^* = \mathrm{Hom}_A(E, A)$ bijektiv ist.

Definition 0.3. Ein *Teilraum* eines quadratischen Raumes E ist ein direkter Summand F des Moduls E, versehen mit der eingeschränkten quadratischen Form $q|F$. Mit $F^\perp$ bezeichnen wir den Modul aller $x \in E$ mit $B(x, F) = 0$. Ist E oder F nicht entartet, so ist $F^\perp$ wieder Teilraum von E (s. § 1).

Definition 0.4. Ein Teilraum F von E heißt *totalisotrop*, falls $q(F) = 0$ ist. E heißt *isotrop*, falls E von Null verschiedene totalisotrope Teilräume besitzt, sonst *anisotrop*.

Definition 0.5. Eine *Isometrie* von einem Raum F in einen Raum G ist eine injektive lineare Abbildung $\varphi\colon F \to G$ mit $q(\varphi(x)) = q(x)$ für alle $x \in F$, deren

Bild wieder Teilraum von G ist, also ein Isomorphismus von F auf einen Teilraum F_1 von G, komponiert mit der Inklusion von F_1 in G.

N.B. Ist F nicht entartet, so ist jede mit den quadratischen Formen von F und G verträgliche lineare Abbildung $\varphi\colon F \to G$ eine Isometrie.

Definition 0.6. Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal von A. Wir nennen zwei Isometrien φ, ψ von F in G zueinander *kongruent* mod $\mathfrak{a}$ und schreiben $\varphi \equiv \psi$ mod $\mathfrak{a}$, wenn φ und ψ dieselbe Isometrie des Raumes $F/\mathfrak{a}F$ über $A/\mathfrak{a}$ in $G/\mathfrak{a}G$ induzieren.

Die Automorphismengruppe eines Raumes E über A bezeichnen wir mit $O(E)$, den Normalteiler der $\sigma \in O(E)$ mit $\sigma \equiv 1$ mod $\mathfrak{a}$ mit $O(E, \mathfrak{a})$.

Jetzt ist es möglich, das in dieser Note hauptsächlich betrachtete Problem zu formulieren:

Fortsetzungsproblem. *Sei E quadratischer Raum über einem kommutativen Ring A mit Einselement, F ein Teilraum von E, $\varphi\colon F \to E$ eine Isometrie, die modulo einem Ideal $\mathfrak{a}$ von A zur Inklusion von F in E kongruent ist. Wann läßt sich φ zu einem $\sigma \in O(E, \mathfrak{a})$ fortsetzen?*

Darauf können wir die folgenden Antworten geben:

(0.1) **Satz.** *Sei F nicht entartet. Dann läßt sich φ sicherlich unter jeder der folgenden Voraussetzungen zu einem $\sigma \in O(E, \mathfrak{a})$ fortsetzen:*

a) $\mathfrak{a}$ *ist im Jacobsonradikal* $\mathfrak{r}$ *von A enthalten.*

b) *A ist lokal.*

c) *A ist semilokal. $\mathfrak{a}$ ist offen in der $\mathfrak{r}$-adischen Topologie. Die Menge $q(F^{\perp})$ erzeugt als Ideal ganz A.*

(*Beweis* in § 2.)

(0.2) **Satz.** *Dasselbe gilt, wenn wir anstelle von F den Raum E als nicht entartet annehmen und unter* a) *zusätzlich voraussetzen, daß A semilokal ist.*

(*Beweis* in § 4 und § 5.)

Ein Teil des Satzes (0.2) b) wurde unter der Voraussetzung, daß in A die Zahl 2 Einheit ist, von Klingenberg bewiesen. ([13], Klingenberg betrachtet nur Unterräume, die orthogonale Summen von nicht entarteten und totalisotropen Räumen sind.)

Sind E und F beide entartet, so ist schon über einem vollständigen diskreten Bewertungsring mit endlichem Restklassenkörper das Fortsetzungsproblem schwierig. Für die hier bisher erzielten Fortschritte s. etwa [11] und die dort angegebene Literatur.

Satz (0.1) c) läßt sich in dem Spezialfall $\mathfrak{a} = A$ auch formulieren als

Kürzungssatz. *F, G und G' seien Räume über einem semilokalen Ring A. Die Menge $q(G)$ erzeuge als Ideal ganz A (z.B. $G \neq 0$ und nicht entartet). Der Raum F sei nicht entartet. Dann gilt: Ist die orthogonale Summe $G \perp F$ zu $G' \perp F$ isomorph, so ist G zu G' isomorph.*

Ist A sogar lokal, so läßt sich die Voraussetzung über G streichen.

Aus diesem Satz folgt insbesondere, daß sich die Elemente der ähnlich wie über Körpern definierten *Wittgruppe* $W(A)$ (s. [3], S. 144) bei semilokalem A eineindeutig durch die Isomorphieklassen der anisotropen Räume repräsentieren lassen.

Unser Beweis des Satzes (0.2) sowie des Teiles c) von Satz (0.1) ist mit dem Problem der Liftung von Isometrien verquickt. Wir beweisen in § 3 und § 5 den

(0.3) **Liftungssatz.** *F sei Teilraum eines quadratischen Raumes E über einem semilokalen Ring A, $\mathfrak{a}$ ein im Radikal von A enthaltenes Ideal. $\bar{\varphi}$ sei eine Isometrie von $F/\mathfrak{a}F$ in $E/\mathfrak{a}E$. Mindestens einer der Räume E, F sei nicht entartet.*

Behauptung. Unter jeder der beiden folgenden Voraussetzungen läßt sich $\bar{\varphi}$ zu einer Isometrie von F in E liften:

a) *A ist lokal.*

b) *$q(F^{\perp})$ erzeugt das Ideal A.*

Ist A *henselscher* lokaler Ring und F oder E nicht entartet, so können wir $\bar{\varphi}$ sogar liften, ohne vorher zu wissen, daß F zu einem Teilraum von E isomorph ist (§ 3, vgl. [6], Prop. 8.1, S. 79; [14], § 7).

Definition 0.7. Sei E nicht entarteter Raum über einem Ring A. Wir nennen einen Automorphismus von E *eigentlich*, wenn er auf den reduzierten Räumen $E/\mathfrak{m}E$ zu allen maximalen Idealen $\mathfrak{m}$ von A eigentliche Automorphismen im üblichen Sinne induziert (s. [8], S. 65, falls $2 \in \mathfrak{m}$). Die Gruppe der eigentlichen Automorphismen von E bezeichnen wir mit $O^+(E)$.

In Ergänzung zu Satz (0.3) werden wir in § 3 zeigen:

(0.4) **Satz.** *Ist A semilokal und $\mathfrak{a}$ ein im Radikal von A enthaltenes Ideal, so ist für jeden nicht entarteten Raum E über A die kanonische Abbildung von $O^+(E)$ in $O^+(E/\mathfrak{a}E)$ surjektiv.*

Ist A lokal, so ist nach Satz (0.3) (Spezialfall $E=F$) sogar die Abbildung von $O(E)$ in $O(E/\mathfrak{a}E)$ surjektiv. Dies ist aber über nur semilokalen Ringen im allgemeinen *falsch* aufgrund des folgenden Satzes:

(0.5) **Satz.** *Sei A semilokal. $e_1, \ldots, e_r$ sei das System der unzerlegbaren Idempotente von A. E sei nicht entarteter Raum über A mit $e_i E \neq 0$ für alle $i=1, \ldots, r$. Dann hat $O^+(E)$ in $O(E)$ den Index 2^r.*

Die Zahl r kann sich nämlich bei Reduktion mod $\mathfrak{a}$ durchaus vergrößern.

Die Tatsache, daß im semilokalen Fall im allgemeinen nicht jeder Automorphismus von $E/\mathfrak{a}E$ zu einem Automorphismus von E geliftet werden kann, ist der Grund, weshalb wir für unsere Beweise von Satz (0.1)c), (0.2)c) und (0.3)b) eine Zusatzvoraussetzung über $F^{\perp}$ brauchen.

Da wir den Satz (0.5) für die Herleitung der zuvor formulierten Sätze nicht benötigen, deuten wir seinen Beweis nur an: Der Zentralisator $D(E)$ der zweiten Cliffordalgebra $C^+(E)$ in der ersten Cliffordalgebra $C(E)$ erweist sich als eine kommutative quadratische étale Ringerweiterung (s. [10]) von A („Diskriminantenalgebra"). Seine Automorphismengruppe Aut $D(E)$ ist daher isomorph zu $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^r$ ($\mathbb{Z}$:= ganze rationale Zahlen). Die kanonische Abbildung von $O(E)$ in Aut $D(E)$ („Dickson-Invariante") hat als Kern gerade $O^+(E)$. Ist A semilokal, so ist sie überdies surjektiv.

Als Nebenresultat beim Beweis von Satz (0.2) erhalten wir in § 4 den folgenden

(0.6) **Satz.** *Sei A semilokaler Ring ohne nichttriviale Idempotente* ($r=1$), *E nicht entarteter Raum über A. Dann läßt sich $O(E)$ genau dann durch Spiegelungen* (s. § 1) *erzeugen, wenn sich für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}$ von A die Gruppe $O(E/\mathfrak{m}E)$ durch Spiegelungen erzeugen läßt.*

Letzteres ist bekanntlich nur dann nicht der Fall, wenn $A/\mathfrak{m}$ aus zwei Elementen besteht und zugleich $E/\mathfrak{m}E$ vierdimensional und hyperbolisch ist ([7], Prop. 14).

Abschließend sei angemerkt, daß wir für unsere Beweise den Satz von Witt nicht voraussetzen, also als Nebenprodukt auch eine – von den eingangs erwähnten Beweisen verschiedene – Herleitung dieses Satzes erhalten (s. § 2).

§ 1. Vorbereitungen

1.1. Orthogonalräume

Ist ein quadratischer Raum E über einem kommutativen Ring A (stets mit Einselement) direkte Modulsumme zweier Teilräume F und G, so schreiben wir $E=E\oplus G$. Stehen F und G überdies aufeinander senkrecht $(B(F,G)=0)$, so schreiben wir $E=F\perp G$. Für jeden Teilraum F von E bezeichnen wir mit $F^\perp$ den Modul der $x\in E$ mit $B(x,F)=0$. Für den dualen Modul $\mathrm{Hom}_A(P,A)$ zu einem projektiven Modul P über A schreiben wir P^*. ($P\neq A$; mit A^* bezeichnen wir die Einheitengruppe von A.) Wir erwähnen ([12], § 1; [3], S. 136; [14], § 1).

(1.1.1) **Satz.** *Ist F Teilraum* (s. Def. 0.3) *eines nicht entarteten Raumes E, so sind die durch die Bilinearform von E gelieferten kanonischen Abbildungen $F^\perp\to(E/F)^*$ und $E/F^\perp\to F^*$ bijektiv. Insbesondere ist $F^\perp$ wieder Teilraum von E. Weiter ist $(F^\perp)^\perp=F$.*

An diesem Satz interessiert uns besonders die

(1.1.2) **Folgerung.** *E sei nicht entartet, F ein Teilraum von E. Dann gilt für jeden Homomorphismus $A\to B$ von A in einen weiteren kommutativen Ring B (mit Einselement, $1\mapsto 1$): Der Orthogonalraum $(F\otimes_A B)^\perp$ von $F\otimes_A B$ bezüglich $E\otimes_A B$ stimmt mit $(F^\perp)\otimes_A B$ überein.*

Dieselbe Folgerung können wir ziehen, wenn anstelle von E der Raum F nicht entartet ist. Dann ist nämlich

$$E=F\perp(F^\perp). \tag{1.1.3}$$

Man erhält die zu dieser Zerlegung führende Projektion von E auf F, indem man jedem $x\in E$ denjenigen Vektor von F zuordnet, der auf F unter der Bilinearform dieselbe Linearform induziert wie x.

(1.1.4) **Lemma.** *Sei $\mathfrak{a}$ ein im Jacobson-Radikal $\mathfrak{r}$ von A enthaltenes Ideal, E quadratischer Raum über A.*

Behauptung. Jede orthogonale Zerlegung $\bar{E}=\bar{F}\perp\bar{G}$ des Raumes $\bar{E}:=E/\mathfrak{a}E$, in der $\bar{F}$ freier, nicht entarteter Unterraum von $\bar{E}$ ist, läßt sich zu einer Zerlegung gleicher Art von E liften.

Beweis. Indem wir eine Basis $\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_r$ von $\bar{F}$ irgendwie zu einer Folge $x_1,\ldots,x_r$ in E liften, erhalten wir wieder die Basis eines nicht entarteten Raumes F, denn die Determinante der Matrix $(B(x_i,x_j))$ muß wegen $\mathfrak{a}\subset\mathfrak{r}$ Einheit sein. Natürlich liegt die orthogonale Zerlegung von E zu F über derjenigen von $\bar{E}$ zu $\bar{F}$. q.e.d.

(1.1.5) *Bemerkung.* Allgemeiner läßt sich jeder Teilraum von $\bar{E}$ zu einem Teilraum von E liften, der als Modul zu der Reduktion mod $\mathfrak{a}$ irgendeines projektiven endlich erzeugten Moduls über A isomorph ist. Doch wird dies hier nicht gebraucht.

1.2. Hyperbolische Räume

Zu jedem projektiven endlich erzeugten A-Modul U definieren wir einen quadratischen Raum $H(U)$, der als Modul die direkte Summe $U\oplus U^*$ ist und dessen quadratische Form q durch

$$q(u+u^*)=\langle u,u^*\rangle \qquad (u\in U,\ u^*\in U^*)$$

beschrieben wird (s. [3], S. 140). $H(U)$ ist ersichtlich nicht entartet. Die zu den $H(U)$ isomorphen Räume bezeichnen wir als „*hyperbolische Räume*". Ist $U=A$, so besitzt $H(U)$ eine Basis u, v mit $q(u)=q(v)=0$, $B(u,v)=1$. Ein solches (geordnetes) Paar von Vektoren eines beliebigen Raumes nennen wir *hyperbolisches Vektorpaar.* $H(U)$ besitzt bei freiem U eine Basis von zueinander orthogonalen hyperbolischen Vektorpaaren. Allgemeiner gilt die Formel

$$H(U_1\oplus U_2)\cong H(U_1)\perp H(U_2). \tag{1.2.1}$$

Wir benötigen später den folgenden

(1.2.2) **Satz.** ([3], S. 142, Lemma 2.2.) *Sei E nicht entarteter Raum über A. Den Raum, der aus E entsteht, indem wir die quadratische Form q von E in $-q$ abändern, bezeichnen wir mit $-E$. Weiter schreiben wir $H(E)$ für den hyperbolischen Raum zu dem E zugrunde liegenden Modul. Mit diesen Bezeichnungen gilt*

$$E\perp(-E)\cong H(E).$$

1.3. Spiegelungen

Wir nennen einen Vektor g eines Raumes E über A *strikt anisotrop*, wenn $q(g)$ eine Einheit von A ist. Bei strikt anisotropem g wird durch

$$\tau(g)(x)=x-q(g)^{-1}B(g,x)g \qquad (x\in E)$$

ein Automorphismus $\tau(g)$ von E mit $\tau(g)^2=1$ definiert, wie man leicht nachrechnet. $\tau(g)$ läßt die zu g orthogonalen Vektoren fest und führt g in $-g$ über. Wir nennen $\tau(g)$ die *Spiegelung* von E an dem Vektor g.

1.4. Siegeltransformationen (vgl. [9], S. 13)

Sei M quadratischer Raum über A. Ein Vektor f von M heiße *isotrop*, falls $q(f)=0$ ist. Ist g ein weiterer Vektor aus M mit $B(f,g)=0$, so wird durch

$$E(f,g)(x)=x-B(x,f)g+B(x,g)f-q(g)(x,f)f \qquad (x\in M)$$

eine lineare Abbildung $E(f,g)$ von M in sich definiert, die mit der quadratischen Form verträglich ist, wie man leicht verifiziert. Ferner rechnet man nach, daß mit einem weiteren zu f senkrechten Vektor g' gilt:

(1.4.1) $$E(f,g)\,E(f,g')=E(f,g+g').$$

Insbesondere hat $E(f,g)$ ein Inverses, nämlich $E(f,-g)$, ist also ein Automorphismus von M. Wir nennen die $E(f,g)$ *Siegeltransformationen.* $E(f,g)$ läßt f fest. Für $g\in Af$ ist $E(f,g)=1$.

(1.4.2) *Bemerkung.* Zum begrifflichen Verständnis der $E(f,g)$ erwähnen wir: Sei M nicht entartet und f überdies *primitiv*, d.h. Af ein Teilraum $V\neq 0$ von M. Dann ist $E(f,g)$ die einzige mögliche Fortsetzung des naheliegenden Automorphismus $x\mapsto x+B(x,g)f$ von $V^\perp$ zu einem Automorphismus von M. Bei festem f bilden die $E(f,g)$ die Gruppe aller Automorphismen von M, welche die Kompositionsreihe $0\subset V\subset V^\perp\subset M$ stabil lassen und auf jedem Faktor die Identität induzieren.

Sei M weiterhin nicht entartet. Dann sind die Siegeltransformationen eigentliche Automorphismen von M. Das brauchen wir aufgrund der Definition 0.7 (s. Einleitung) nur über Körpern zu prüfen. Dort ist dies wohlbekannt (s. z.B. [15], S. 195).

§ 2. Beweis von Satz (0.1)

Sei (f_1,f_2) ein hyperbolisches Vektorpaar in einem beliebigen quadratischen Raum E über einem kommutativen Ring A und

$$E=(Af_1+Af_2)\perp G$$

die dazu gehörige orthogonale Zerlegung von E (s. (1.1.3)). Jede Einheit ε von A liefert uns einen Automorphismus $R(\varepsilon,f_1,f_2)$ von E, der f_1 auf εf_1, f_2 auf $\varepsilon^{-1}f_2$ abbildet und G elementweise festläßt. Aufgrund der Formel

$$R(\varepsilon,f_1,f_2)=\tau(f_1-f_2)\,\tau(f_1-\varepsilon f_2)$$

sind diese Automorphismen – bei nicht entartetem E – eigentlich.

Zu einem Ideal $\mathfrak{a}$ von A bezeichnen wir mit $D(f_1,f_2,\mathfrak{a})$ die von den $R(\varepsilon,f_1,f_2)$ mit $\varepsilon\equiv 1 \bmod \mathfrak{a}$ und den Siegeltransformationen (s. § 1.4) $E(f_i,g)$ mit $i=1,2$; $g\in\mathfrak{a}G$ erzeugte Gruppe. Für $D(f_1,f_2,A)$ schreiben wir auch kürzer $D(f_1,f_2)$.

Der Beweis des Satzes (0.1) der Einleitung wird sich leicht ergeben aus folgendem

(2.1) **Lemma.** a) *Ist A beliebig, $\mathfrak{a}$ aber in dem Jacobsonradikal $\mathfrak{r}$ von A enthalten, so operiert $D(f_1, f_2, \mathfrak{a})$ transitiv auf der Menge der* mod $\mathfrak{a}$ *zu (f_1, f_2) kongruenten hyperbolischen Vektorpaare in E.*

b) *Ist A lokal, so operiert die von $D(f_1, f_2)$ und $\tau(f_1 - f_2)$ erzeugte Gruppe transitiv auf der Menge aller hyperbolischen Vektorpaare in E.*

c) *Ist A semilokal, $\mathfrak{a}$ offen in der $\mathfrak{r}$-adischen Topologie und erzeugt die Menge $q(G)$ als Ideal ganz A, so operiert $D(f_1, f_2, \mathfrak{a})$ transitiv auf der Menge aller hyperbolischen Vektorpaare von E, die* mod $\mathfrak{a}$ *zu (f_1, f_2) kongruent sind.*

Beweis. i) Sei (u, v) ein zu (f_1, f_2) modulo einem Ideal $\mathfrak{a}$ kongruentes hyperbolisches Paar. Es ist dann

$$u = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + g \tag{2.2}$$

mit $\alpha_1 \equiv 1 \bmod \mathfrak{a}$, $\alpha_2 \in \mathfrak{a}$, $g \in \mathfrak{a} G$. Ist α_1 eine Einheit, so läßt sich (u, v) sicherlich durch ein Element aus $D(f_1, f_2, \mathfrak{a})$ in (f_1, f_2) transformieren: Anwendung von $R(\alpha_1^{-1}, f_1, f_2)$ auf u ergibt

$$u' = f_1 + \alpha_1 \alpha_2 f_2 + g.$$

$E(f_2, g)$ führt u' in f_1 über. Bei diesen Transformationen muß v in einen Vektor

$$v'' = \beta_1 f_1 + f_2 + w$$

mit $\beta_1 \in \mathfrak{a}$, $w \in \mathfrak{a} G$ übergehen. Durch $E(f_1, w)$ wird v'' auf f_2 abgebildet, während f_1 festbleibt.

ii) Ist $\mathfrak{a}$ im Radikal von A enthalten, so sind wir schon fertig, da dann in (2.2) der Koeffizient α_1 automatisch Einheit ist. Wir wollen jetzt Teil b) des Lemmas und für lokale Ringe auch Teil c) beweisen. Sei also A lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{a} = A$. Nach i) können wir annehmen, daß der Koeffizient α_1 von u in der Gl. (2.2) zu $\mathfrak{m}$ gehört.

Ist α_2 Einheit, so läßt sich u durch ein Element aus $D(f_1, f_2)$ in f_2 transformieren. f_2 wird durch $\tau(f_1 - f_2)$ in f_1 überführt. Ist $q(G)$ nicht in $\mathfrak{m}$ enthalten, so läßt sich aber f_2 auch durch ein Element aus $D(f_1, f_2)$ in f_1 überführen: Man suche in G einen strikt anisotropen Vektor h. Der Vektor $E(f_1, h) f_2$ hat als zu f_1 gehörigen Koeffizienten die Einheit $-q(h)$, geht also nach i) unter einer geeigneten weiteren Transformation aus $D(f_1, f_2)$ in f_1 über.

Es bleibt der Fall zu betrachten, daß α_1 und α_2 beide in $\mathfrak{m}$ liegen. Da $B(u, E) = A$ ist, muß es ein $z \in G$ mit $B(g, z) \in A^*$ geben. Wenden wir auf u die Transformation $E(f_1, z)$ an, so erhalten wir als neuen Koeffizienten bei f_1 das Element $\alpha_1 - q(z)\alpha_2 + B(z, g)$, also eine Einheit.

iii) Es fehlt noch der Beweis der Aussage c) über einem beliebigen semilokalen Ring A. Da wir diese Aussage über lokalen Ringen schon als richtig erkannt haben, ist sie auch wahr, falls A ein Produkt $\prod_{i=1}^{r} A_i$ lokaler Ringe ist:

Wir haben dann Zerlegungen

$$\mathfrak{a}=\prod_{i=1}^{r}\mathfrak{a}_i, \qquad E=\prod_{i=1}^{r}E_i,$$

wobei $\mathfrak{a}_i$ Ideal von A_i und E_i Raum über A_i ist. Seien f_{1i}, f_{2i} die Komponenten von f_1, f_2 in E_i. Die Voraussetzung über das orthogonale Komplement von Af_1+Af_2 in E ist genau dann erfüllt, wenn sie für die orthogonalen Komplemente der $A_i f_{1i}+A_i f_{2i}$ in E_i erfüllt ist. Schließlich induziert die Zerlegung $O(E)=\prod_{i=1}^{r}O(E_i)$ eine Zerlegung

(2.3)
$$D(f_1, f_2, \mathfrak{a})=\prod_{i=1}^{r}D(f_{1i}, f_{2i}, \mathfrak{a}_i).$$

Sei nun A beliebiger semilokaler Ring. Nach Voraussetzung ist in $\mathfrak{a}$ eine geeignete Potenz $\mathfrak{r}^n$ des Radikals von A enthalten. Wir betrachten die Bilder $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{u}, \bar{v}$ von f_1, f_2, u, v in $E/\mathfrak{r}^n E$. Da $A/\mathfrak{r}^n$ Produkt lokaler Ringe ist (s. [4], §2 Prop. 7 und Cor. 1 zu Prop. 9), läßt sich $(\bar{u}, \bar{v})$ durch ein $\bar{\sigma}\in D(\bar{f}_1, \bar{f}_2, \mathfrak{a}/\mathfrak{r}^n)$ in $(\bar{f}_1, \bar{f}_2)$ überführen. $\bar{\sigma}$ läßt sich ersichtlich zu einem $\sigma\in D(f_1, f_2, \mathfrak{a})$ liften. Das Vektorpaar $(\sigma u, \sigma v)$ ist zu (f_1, f_2) mod $\mathfrak{r}^n$ kongruent. Es kann somit nach dem bewiesenen Teil a) des Lemmas durch ein geeignetes Element aus $D(f_1, f_2, \mathfrak{r}^n)$ in das Paar (f_1, f_2) transformiert werden. q.e.d.

(2.4) *Bemerkung.* Die Aussage b) läßt sich auf diese Weise nicht auf semilokale Ringe übertragen, da für die von $D(f_1, f_2)$ und $\tau(f_1-f_2)$ erzeugte Gruppe die (2.3) entsprechende Gleichung falsch ist.

Wir kommen nun zu dem Beweis des in der Einleitung formulierten Satzes (0.1). Sei F nicht entarteter Teilraum eines Raumes E über einem Ring A, $\varphi\colon F\to E$ eine Isometrie, die modulo einem Ideal $\mathfrak{a}$ von A zu der Inklusion von F in E kongruent ist. Es gibt einen endlich erzeugten projektiven Modul P, so daß der Modul $F\oplus P$ frei ist. Wir bilden den Hilfsraum $E_1:=E\perp(-F)\perp H(P)$ (s. §1.2). Der Teilraum $F_1:=F\perp(-F)\perp H(P)$ besitzt nach Satz (1.2.2) und (1.2.1) eine Basis von zueinander orthogonalen hyperbolischen Vektorpaaren u_i, v_i $(i=1, \dots, m)$. Die Isometrie $\psi:=\varphi\perp 1\perp 1$ von F_1 in E_1 ist mod $\mathfrak{a}$ zur Inklusion von F_1 in E_1 kongruent.

Unter den im Satz (0.1) gemachten Voraussetzungen über A, $\mathfrak{a}$ und das orthogonale Komplement von F in E liefert uns das Lemma (2.1) zunächst ein $\rho_1\in O(E_1, \mathfrak{a})$, das $(\psi u_1, \psi v_1)$ in (u_1, v_1) überführt, dann ein $\rho_2\in O(E_1, \mathfrak{a})$, das (u_1, v_1) festläßt und $(\rho_1\psi u_2, \rho_1\psi v_2)$ in (u_2, v_2) überführt, etc. Schließlich erhalten wir eine Transformation $\rho=\rho_m\cdots\rho_1$ in $O(E_1, \mathfrak{a})$, die $(\psi u_i, \psi v_i)$ auf (u_i, v_i) für jedes $i=1, \dots, m$ abbildet. ρ^{-1} setzt ψ fort, ist also von der Gestalt $\sigma\perp 1\perp 1$ mit einem $\sigma\in O(E, \mathfrak{a})$, das φ fortsetzt. q.e.d.

§ 3. Liftung von Isometrien

Die soeben benutzte Methode ergibt auch einen Beweis des in der Einleitung formulierten Liftungssatzes (0.3) bei nicht entartetem F.

Sei $\mathfrak{a}$ ein im Radikal des semilokalen Ringes A enthaltenes Ideal. Für einen quadratischen Raum L über A bezeichne $\bar{L}$ den Raum $L/\mathfrak{a}L$ über dem Ring $\bar{A}:=A/\mathfrak{a}$. Für einen Vektor $x\in L$ bezeichne $\bar{x}$ dessen Bild in $\bar{L}$.

Uns ist ein Raum E über A, ein nicht entarteter Teilraum F von E und eine Isometrie $\bar{\varphi}$: $\bar{F}\to\bar{E}$ vorgegeben, die wir liften wollen. Wir betrachten wieder die am Ende von §2 eingeführten Hilfsräume $E_1:=E\perp(-F)\perp H(P)$ und $F_1:=F\perp(-F)\perp H(P)$. $\bar{\varphi}$ liefert uns die Isometrie $\bar{\psi}:=\bar{\varphi}\perp 1\perp 1$ von $\bar{F}_1$ in $\bar{E}_1$.

Erzeugt nun die Wertemenge $q(F^{\perp})$ des orthogonalen Komplementes $F^{\perp}$ von F in E als Ideal ganz A, so läßt sich, wie wir am Ende von §2 sahen, $\bar{\psi}$ zu einem $\bar{\rho}\in O(\bar{E}_1)$ fortsetzen, das Produkt von Transformationen der Form $E(\bar{u},\bar{g})$, $E(\bar{v},\bar{g})$, $R(\bar{\varepsilon},\bar{u},\bar{v})$ zu hyperbolischen Vektorpaaren (u,v) von E_1 ist. Wird über $q(F^{\perp})$ nichts vorausgesetzt, aber angenommen, daß A lokal ist, so muß man noch Spiegelungen $\tau(\bar{u}-\bar{v})$ hinzunehmen. In beiden Fällen ist klar, daß $\bar{\rho}$ zu einem $\rho\in O(E_1)$ geliftet werden kann. Die Restriktion von ρ auf den Teilraum $(-F)\perp H(P)$ von E_1 ist mod $\mathfrak{a}$ zu der Inklusion desselben in E_1 kongruent, läßt sich also nach Satz (0.1)a) zu einem $\eta\in O(E_1,\mathfrak{a})$ fortsetzen. $\eta^{-1}\rho$ ist von der Form $\sigma\perp 1\perp 1$ mit einem $\sigma\in O(E)$. Die Restriktion φ: $F\to E$ von σ auf F liegt über $\bar{\varphi}$. q.e.d.

In ähnlicher Weise ergibt sich die Surjektivität der kanonischen Abbildung von $O^+(E)$ in $O^+(E/\mathfrak{a}E)$ bei nicht entartetem E (s. Einleitung, Satz (0.4)) aus folgendem

(3.1) **Lemma.** *Sei A semilokaler Ring, E ein Raum über A, der eine Basis von zueinander orthogonalen hyperbolischen Vektorpaaren u_i, v_i $(i=1,\dots,m)$ besitzt.*

Behauptung. *$O^+(E)$ wird erzeugt durch Transformationen der Form $E(u_i,g)$, $E(v_i,g)$, $R(\varepsilon,u_i,v_i)$ mit $g\in E$ (und zu u_i bzw. v_i orthogonal), $\varepsilon\in A^*$, $i=1,\dots,m$.*

Beweis des Lemmas. Sei $\sigma\in O^+(E)$ gegeben. Nach Lemma (2.1)c) gibt es ein Produkt ρ von Transformationen aus den Gruppen $D(u_i,v_i)$ mit $i>1$, so daß $\rho^{-1}\sigma$ den Orthogonalraum zu Au_1+Av_1 festläßt, also von der Form $\sigma_0\perp 1$ mit $\sigma_0\in O^+(Au_1+Av_1)$ ist. Wir können uns also auf den Fall $m=1$ zurückziehen.

Seien $\mathfrak{m}_1,\dots,\mathfrak{m}_r$ die maximalen Ideale von A, $\mathfrak{r}$ ihr Durchschnitt.

$$O^+(E/\mathfrak{r}E)=\prod_{i=1}^{r} O^+(E/\mathfrak{m}_i E)$$

enthält nur Transformationen der Form $R(\bar{\varepsilon},\bar{u}_1,\bar{v}_1)$ mit $\bar{\varepsilon}\in(A/\mathfrak{r})^*$, denn entsprechendes gilt bekanntlich für alle $O^+(E/\mathfrak{m}_i E)$. (In $E/\mathfrak{m}_i E$ gibt es genau zwei isotrope Geraden ... .) Ebenso enthält $O(E,\mathfrak{r})$ nach Lemma (2.1)a) nur Transformationen der Form $R(\varepsilon,u_1,v_1)$. Daher gilt dies auch für $O^+(E)$. q.e.d.

Wir gehen noch kurz auf das Problem der Liftung von Isometrien ein, falls nicht von vornherein angenommen wird, daß F Teilraum von E ist. Jetzt betrachten wir nur lokale Ringe.

(3.2) **Definition.** Ein lokaler Ring A mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$ heiße *quadratisch henselsch*, falls jedes Polynom der Form $T^2+\alpha T+\beta$ in einer Unbestimmten T mit $\alpha\in A$, $\beta\in A$, das nach Reduktion mod $\mathfrak{m}$ zwei verschiedene Nullstellen in $A/\mathfrak{m}$ besitzt, auch in A Nullstellen besitzt.

Diese Eigenschaft läßt sich offenbar auch so formulieren: Ist F zweidimensionaler nicht entarteter quadratischer Raum über A und $F/\mathfrak{m}F$ hyperbolisch, so ist F selbst hyperbolisch.

(3.3) **Satz.** (Vgl. [6], Prop. 8.1, S. 79; [14], § 7.) *A sei quadratisch henselscher lokaler Ring, $\mathfrak{a}$ ein echtes Ideal von A. Seien F und E quadratische Räume über A, von denen mindestens einer nicht entartet ist. Dann läßt sich jede Isometrie $\bar{\varphi}$ von $F/\mathfrak{a}F$ in $E/\mathfrak{a}E$ zu einer Isometrie von F in E liften.*

Beweis. a) Sei zunächst F nicht entartet. Die Behauptung stimmt, falls F Teilraum von E ist. Daher genügt es, aus der Existenz von $\bar{\varphi}$ zu folgern, daß F zu einem Teilraum von E isomorph ist. Das Bild von $\bar{\varphi}$ ist nicht entarteter Teilraum von $E/\mathfrak{a}E$, läßt sich also nach Lemma (1.1.4) zu einem nicht entarteten Teilraum G von E liften. Wegen des schon bewiesenen Kürzungssatzes (s. Einleitung und § 2) brauchen wir nur zu zeigen, daß $F\perp(-F)$ zu $G\perp(-F)$ isomorph ist. Indem wir noch $\mathfrak{a}$ zu $\mathfrak{m}$ vergrößern und Satz (1.2.2) beachten, stoßen wir auf folgendes Problem: Sei T ein Raum über A, dessen Reduktion $T/\mathfrak{m}T$ hyperbolisch ist. Man zeige, daß T selbst hyperbolisch ist.

Dazu liften wir eine Zerlegung $T/\mathfrak{m}T=\bar{H}_1\perp\cdots\perp\bar{H}_r$ in hyperbolische Ebenen $\bar{H}_i$ irgendwie zu einer Zerlegung $T=H_1\perp\cdots\perp H_r$ (s. Lemma (1.1.4)). Da A quadratisch henselsch ist, sind die H_i automatisch wieder hyperbolische Ebenen.

b) Jetzt sei E nicht entartet. Nach dem schon Bewiesenen genügt es, einen nicht entarteten quadratischen Raum F_1 zu finden, der F als Teilraum enthält, so daß sich $\bar{\varphi}$ zu einer Isometrie $\bar{\psi}$ von $F_1/\mathfrak{a}F_1$ in $E/\mathfrak{a}E$ fortsetzen läßt.

Sei T freier Modul, der F zu einem freien Modul $F_1:=F\oplus T$ gleicher Dimension wie E ergänzt. Wir können $\bar{\varphi}$ zu einem Modulisomorphismus $\bar{\psi}$ von $F_1/\mathfrak{a}F_1$ auf $E/\mathfrak{a}E$ fortsetzen. Indem wir die quadratische Form von $E/\mathfrak{a}E$ mit Hilfe von $\bar{\psi}$ auf $F_1/\mathfrak{a}F_1$ übertragen, setzen wir die Form von $F/\mathfrak{a}F$ zu einer Form $\bar{q}_1$ von $F_1/\mathfrak{a}F_1$ fort und erreichen zugleich, daß $\bar{\psi}$ Isomorphismus quadratischer Räume wird. Da F und T frei sind, ist es leicht, die Form von F zu einer quadratischen Form q_1 auf F_1 fortzusetzen, deren Reduktion mod $\mathfrak{a}$ mit $\bar{q}_1$ übereinstimmt. Mit $\bar{q}_1$ ist automatisch q_1 eine nicht entartete Form. q.e.d.

Offenbar ist in Satz (3.3) „quadratisch henselsch“ auch eine notwendige Voraussetzung.

§ 4. Rückungen

Sei E nicht entarteter Raum über einem Ring A, $\mathfrak{a}$ ein im Radikal $\mathfrak{r}$ von A enthaltenes Ideal. Als *Rückung* mod $\mathfrak{a}$ bezeichnen wir jedes Spiegelungsprodukt $\tau(u)\tau(v)$ zu strikt anisotropen Vektoren u, v von E, die mod $\mathfrak{a}E$

zueinander kongruent sind. Die Situation, in der bei uns Rückungen auftreten werden, wird beschrieben durch den folgenden evidenten

(4.1) **Hilfssatz.** *Seien x, y, t drei Vektoren aus E, für die gilt: $x \equiv y \bmod \mathfrak{a} E$, $q(x)=q(y)$, $B(x,t) \in A^*$ und $q(t) \in A^*$. Der Vektor $r := \tau(t)(x)-y$ ist $\bmod \mathfrak{a} E$ zu $-q(t)^{-1} B(x,t)\, t$ kongruent. Daher ist r strikt anisotrop und $\tau(r)\,\tau(t)$ eine Rükkung, die wir mit $\lambda(x,y,t)$ bezeichnen.*

Behauptung. $\lambda(x,y,t)$ führt x in y über und läßt die zu $x-y$ und t orthogonalen Vektoren fest.

Der folgende Satz umfaßt den Teil a) des in der Einleitung formulierten Satzes (0.2).

(4.2) **Satz.** (Vgl. [13], S. 295.) *Sei E nicht entarteter Raum über einem semilokalen Ring A, $\mathfrak{a}$ ein im Radikal von A enthaltenes Ideal. φ: $F \to E$ sei eine Isometrie von einem Teilraum F von E in E, die* mod $\mathfrak{a}$ *zu der Inklusion von F in E kongruent ist. Sei m das Maximum der Dimensionen der Reduktionen von F nach den maximalen Idealen von A.*

Behauptung. φ läßt sich zu einem Automorphismus σ von E fortsetzen, der Produkt von m Rückungen mod $\mathfrak{a}$ *ist. Ist $F=E$, so kommt man sogar mit $(m-1)$ Rückungen aus.*

Beweis. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit setzen wir voraus, daß A keine nicht trivialen Idempotente besitzt. F ist dann freier A-Modul der Dimension m.

Zunächst behandeln wir den Fall $F \neq E$. Wir wählen für F eine feste Basis $x_1, \dots, x_m$ mit folgender Eigenschaft: Zu jedem maximalen Ideal $\mathfrak{m}$ von A gibt es eine – von $\mathfrak{m}$ abhängige – natürliche Zahl t zwischen 0 und m, so daß die x_i mit $1 \leqq i \leqq t$ bei Reduktion mod $\mathfrak{m}$ Basis eines nicht entarteten Raumes über $A/\mathfrak{m}$ werden, die x_i mit $t+1 \leqq i \leqq m$ hingegen Basis eines dazu orthogonalen totalisotropen Raumes über $A/\mathfrak{m}$. Man erhält die Basis $x_1, \dots, x_m$, indem man in jeder Komponente von $F/\mathfrak{r}F = \prod_{\mathfrak{m}} F/\mathfrak{m}F$ eine Basis dieser Art aufsucht, daraus eine Basis von $F/\mathfrak{r}F$ über $A/\mathfrak{r}$ zusammensetzt und diese irgendwie nach F liftet.

Gelingt es uns, strikt anisotrope Vektoren $g_1, \dots, g_m$ zu finden, so daß für jedes k zwischen 1 und m der Vektor g_k auf den x_i mit $i<k$ senkrecht steht, aber $B(g_k, x_k)$ Einheit ist, so sind wir aufgrund des Hilfssatzes (4.1) fertig: Wir definieren sukzessive folgende Automorphismen $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ von E:

$$\sigma_1 = \lambda(x_1, \varphi x_1, g_1)$$

$$\sigma_2 = \lambda(\sigma_1 x_2, \varphi x_2, \sigma_1 g_2) \circ \sigma_1$$

$$\vdots$$

$$\sigma_m = \lambda(\sigma_{m-1} x_m, \varphi x_m, \sigma_{m-1} g_m) \circ \sigma_{m-1}.$$

σ_m setzt φ fort.

Zur Konstruktion der g_k können wir, indem wir die Folgerung (1.1.2) aus § 1 beachten, den Raum E mod $\mathfrak{r}$ reduzieren. Wir können uns dann sogar auf den Fall zurückziehen, daß A ein Körper ist.

Unsere Basis $x_1, \ldots, x_m$ von F war so gewählt, daß es einen Index t gibt, so daß die x_k mit $1 \leqq k \leqq t$ einen nicht entarteten Raum F_1 aufspannen, die x_k mit $t+1 \leqq k \leqq m$ hingegen einen zu F_1 orthogonalen totalisotropen Raum. Wegen $F \neq E$ ist das orthogonale Komplement $F_1^{\perp}$ von F_1 in E ein von Null verschiedener nicht entarteter Raum. $F_1^{\perp}$ enthält also sicher einen anisotropen Vektor h. Weiter gibt es, da E nicht entartet ist, Vektoren $y_1, \ldots, y_m$ in E mit $B(x_i, y_j) = \delta_{ij}$. Wir wählen nun die g_k $(k = 1, \ldots, m)$ auf folgende Weise: Ist $q(y_k) \neq 0$, so sei $g_k = y_k$. Ist $q(y_k) = 0$ und $k \leqq t$, so sei $g_k = y_k + h$. Ist $q(y_k) = 0$ und $k > t$, so sei $g_k = y_k + x_k$. Diese g_k leisten das Verlangte.

Es bleibt der Fall $F = E$ zu betrachten. Wir können eine orthogonale Zerlegung $E = E_1 \perp E_2$ finden, bei der E_2 frei vom Rang 2 ist, indem wir eine entsprechende Zerlegung von $E/\mathfrak{r} E$ liften (s. Lemma (1.1.4)). Auf ähnliche Weise finden wir in E_2 eine Basis x, y mit $B(x, y) = 1$. Die Einschränkung von φ auf $E_1 \perp A x$ können wir nach dem schon Bewiesenen zu einem Produkt σ von $m-1$ Rückungen mod $\mathfrak{a}$ fortsetzen. $\sigma^{-1} \varphi$ hat die Gestalt $1 \perp \psi$ mit einem $\psi \in O(E_2, \mathfrak{a})$, das x festläßt. Wir zeigen, daß $\psi = 1$ sein muß. Damit ist dann Satz (4.2) auch in dem Falle $F = E$ bewiesen. Der Vektor ψy hat wegen $B(x, \psi y) = 1$ die Gestalt

$$\psi y = \alpha x + (1 - 2\alpha q(x)) y$$

mit einem $\alpha \in \mathfrak{a}$. Die Bedingung $q(\psi y) = q(y)$ führt auf

$$\alpha(1 - \alpha q(x))(1 - 4 q(x) q(y)) = 0.$$

Der letzte Faktor auf der linken Seite dieser Gleichung ist Einheit, da E nicht entartet ist, der mittlere ebenfalls, da α im Radikal liegt. Daher muß $\alpha = 0$ und somit $\psi = 1$ sein. q.e.d.

Als Nebenprodukt liefert uns der Spezialfall $\mathfrak{a} = \mathfrak{r}$, $E = F$ des soeben bewiesenen Satzes zusammen mit dem in § 3 bewiesenen Satz (0.4) der Einleitung das folgende Resultat:

(4.3) **Satz.** *Sei E nicht entarteter Raum über einem semilokalen Ring A. Dann sind folgende Aussagen gleichwertig:*

(i) *Alle Elemente von $O^+(E)$ sind Produkte von Spiegelungen.*

(ii) *Für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}$ von A sind alle Elemente von $O^+(E/\mathfrak{m} E)$ Produkte von Spiegelungen.*

Beweis. Da die kanonische Abbildung von $O^+(E)$ in $O^+(E/\mathfrak{r} E) = \prod_{\mathfrak{m}} O^+(E/\mathfrak{m} E)$ surjektiv ist (Satz (0.4)), folgt aus (i) sicher (ii). Sei nun (ii) vorausgesetzt und σ ein Element von $O^+(E)$. Die Reduktion $\bar{\sigma}$ von σ mod $\mathfrak{r}$ läßt sich als Produkt von Spiegelungen schreiben, also zu einem Produkt ρ von Spiegelungen des Raumes E liften. $\rho^{-1} \sigma$ liegt in $O(E, \mathfrak{r})$, ist nach Satz (4.2) also ebenfalls Produkt von Spiegelungen. Somit ist σ Produkt von Spiegelungen. q.e.d.

Die Aussage (ii) läßt sich auch so formulieren:

(ii a) Für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}$ wird $O(E/\mathfrak{m}E)$ durch Spiegelungen erzeugt.

Besitzt A keine nichttrivialen Idempotente, so können wir aufgrund des Satzes (0.5) der Einleitung anstelle von (i) auch sagen:

(i a) $O(E)$ wird durch Spiegelungen erzeugt.

Damit erhalten wir aus Satz (4.3) den in der Einleitung angekündigten Satz (0.6).

§ 5

Es ist jetzt leicht, die noch fehlenden Teile des Fortsetzungssatzes (0.2) und des Liftungssatzes (0.3) aus der Einleitung zu beweisen.

(5.1) **Satz.** *F sei Teilraum eines nicht entarteten Raumes E über einem lokalen Ring A. Weiter sei $\mathfrak{c}$ ein Ideal von A.*

a) *Jede Isometrie $\varphi: F \to E$ läßt sich zu einem Automorphismus von E fortsetzen.*

b) *Jede Isometrie von $F/\mathfrak{c}F$ in $E/\mathfrak{c}E$ läßt sich zu einer Isometrie von F in E liften.*

Beweis. b) folgt unmittelbar aus a), da nach § 3 jeder Automorphismus von $E/\mathfrak{c}E$ zu einem Automorphismus von E geliftet werden kann.

Es bleibt Teil a) zu zeigen. Sei $\mathfrak{m}$ das maximale Ideal von A. Es genügt, die Reduktion $\bar{\varphi}$: $F/\mathfrak{m}F \to E/\mathfrak{m}E$ von φ zu einem $\bar{\sigma} \in O(E/\mathfrak{m}E)$ fortzusetzen. Denn nach § 3 können wir $\bar{\sigma}$ zu einem $\sigma \in O(E)$ liften, und da $\sigma^{-1} \circ \varphi \bmod \mathfrak{m}$ zu der Inklusion von F in E kongruent ist, läßt sich $\sigma^{-1} \circ \varphi$ aufgrund von Satz (4.2) zu einem Automorphismus von E fortsetzen. Damit haben wir uns auf den Fall zurückgezogen, daß A ein Körper ist.

Es folgt die klassische Argumentation: Man erweitert die Räume F und $\varphi(F)$ durch hyperbolische Ergänzung ihrer Radikale zu nicht entarteten Räumen F_1 und F_1' und setzt φ auf naheliegende Weise fort zu einem Isomorphismus φ_1: $F_1 \to F_1'$ (s. z.B. [2], Theorem 3.8). φ_1 läßt sich nach § 2 zu einem Automorphismus von E fortsetzen. q.e.d.

(5.2) **Satz.** *Sei F Teilraum eines nicht entarteten Raumes E über einem semilokalen Ring A mit Radikal $\mathfrak{r}$. Die Menge $q(F^\perp)$ erzeuge als Ideal ganz A. Sei $\mathfrak{a}$ ein in der $\mathfrak{r}$-adischen Topologie offenes Ideal von A und $\mathfrak{c}$ ein in $\mathfrak{r}$ enthaltenes Ideal. Dann gilt:*

a) *Jede Isometrie $\varphi: F \to E$, die* mod $\mathfrak{a}$ *zu der Inklusion von F in E kongruent ist, läßt sich zu einem $\sigma \in O(E, \mathfrak{a}) \cap O^+(E)$ fortsetzen.*

b) *Jede Isometrie von $F/\mathfrak{c}F$ in $E/\mathfrak{c}E$ läßt sich zu einer Isometrie von F in E liften.*

Beweis. b) folgt wieder aus a), da sich eigentliche Automorphismen von $E/\mathfrak{c}E$ nach Satz (0.4) zu Automorphismen von E liften lassen.

Es bleibt Teil a) zu beweisen. Sei $\mathfrak{r}^n$ eine in $\mathfrak{a}$ enthaltene Potenz des Radikals. Aufgrund von Satz (0.4) und (4.2), genügt es, die von φ induzierte Isometrie von $F/\mathfrak{r}^n F$ in $E/\mathfrak{r}^n E$ zu einem in $O^+(E/\mathfrak{r}^n E)$ und $O(E/\mathfrak{r}^n E, \mathfrak{a}/\mathfrak{r}^n)$ gelegenen Automorphismus fortzusetzen (gleiche Argumentation wie im Beweis von Satz (5.1)a)). Wir können also annehmen, daß eine Potenz von $\mathfrak{r}$ verschwindet. Da jetzt A Produkt (artinscher) lokaler Ringe ist (s. [4], § 2 Prop. 7 und Cor. 1 zu Prop. 9), können wir uns sogar auf den Fall zurückziehen, daß A (artinscher) lokaler Ring ist.

Nach Satz (5.1) läßt sich φ zu einem $\sigma \in O(E, \mathfrak{a})$ fortsetzen. Ist $\mathfrak{a} \neq A$, so ist σ automatisch eigentlich. Sei $\mathfrak{a} = A$ und σ nicht eigentlich. Aufgrund der Voraussetzung über $q(F^\perp)$, die bei allen Reduktionsschritten erhalten blieb, gibt es in $F^\perp$ einen strikt anisotropen Vektor h. Der Automorphismus $\sigma \circ \tau(h)$ ist eigentlich und setzt φ ebenfalls fort. q.e.d.

Literatur

1. Arf, C.: Untersuchungen über quadratische Formen in Körpern der Charakteristik 2 (Teil I). J. reine und angew. Math. **183**, 148 – 167 (1941).
2. Artin, E.: Geometric algebra. New York: Interscience 1957.
3. Bass, H.: Lectures on topics in algebraic K-theory. Tata Inst. of Fund. Research, Bombay (1967).
4. Bourbaki, N.: Algèbre commutative, Chap. IV. Paris: Hermann 1961.
5. Chevalley, C.: The algebraic theory of spinors. New York: Columbia Univ. Press 1954.
6. Demazure, M.: Automorphismes des groupes réductifs. Sém. schémas en groupes, Fasc. 7, Exp. 24, Inst. Hautes Ét. Sci. (1963 – 64).
7. Dieudonné, J.: Sur les groupes classiques, 3. Aufl. Paris: Hermann 1967.
8. – La géométrie des groupes classiques. Ergebnisse d. Math. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1963.
9. Eichler, M.: Quadratische Formen und orthogonale Gruppen. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1952.
10. Grothendieck, A.: Morphismes étales. Sém. géométrie algébrique 1960 – 61, Fasc. 1, Exp. 1, Inst. Hautes Ét. Sci.
11. Hsia, J. S.: Integral equivalence of vectors over local modular lattices. Pacific J. Math. **23**, 527 – 542 (1967).
12. Jehne, W.: Die Struktur der symplektischen Gruppe über lokalen und dedekindschen Ringen. Sitzungsber. Heidelberger Akad. Wiss. 1962 – 64, 3. Abh., S. 189 – 235.
13. Klingenberg, W.: Orthogonale Gruppen über lokalen Ringen. Amer. J. Math. **83**, 281 – 320 (1961).
14. Knebusch, M.: Grothendieck- und Wittringe von nichtausgearteten symmetrischen Bilinearformen, Teil I (erscheint demnächst).
15. Tamagawa, T.: On the structure of orthogonal groups. Amer. J. Math. **80**, 191 – 197 (1958).
16. Witt, E.: Theorie der quadratischen Formen in beliebigen Körpern. J. reine u. angew. Math. **176**, 31 – 44 (1937).

Dr. M. Knebusch
Mathematisches Seminar der Universität
2 Hamburg 13, Rothenbaumchaussee 67/69

(Eingegangen am 23. Juli 1968)