27

Journal für die reine und angewandte Mathematik

gegründet 1826 von

August Leopold Crelle

fortgeführt von
C. W. Borchardt, K. Weierstrass, L. Kronecker,
L. Fuchs, K. Hensel, L. Schlesinger

gegenwärtig herausgegeben von

Helmut Hasse · Hans Rohrbach

JRMAA8

Band 286/287

Jubiläumsband anläßlich des 150jährigen Bestehens des Crelle-Journals

Sonderdruck

Walter de Gruyter · Berlin · New York 1976

Bewertungen mit reeller Henselisierung

Von *Manfred Knebusch* in Regensburg und *Michael J. Wright**) (†)

Einleitung

Sei K ein mit einer Anordnung σ versehener Körper und F ein Teilkörper von K. Dann bilden bekanntlich die Elemente a von K, die nicht unendlich groß über F sind, d.h. einer Ungleichung $|a| \leqq |x|$ mit x in F bzgl. σ genügen, einen Bewertungsring von K, den wir mit $\mathfrak{o}(K/F, \sigma)$ bezeichnen {[1], S. 95, [4], S. 165; ein Bewertungsring *von* K ist ein Bewertungsring in K, dessen Quotientenkörper ganz K ist}. Das maximale Ideal von $\mathfrak{o}(K/F, \sigma)$ besteht gerade aus den über F unendlich kleinen Elementen a, also den $a \in K$ mit $|a| \leqq |x|$ für jedes $x \neq 0$ aus F.

Michael J. Wright bewies in seiner Arbeit im wesentlichen folgenden schönen Satz.

Theorem. *Sei A ein Bewertungsring unseres angeordneten Körpers K, weiter $\mathfrak{m}$ das maximale Ideal von A und R ein reeller Abschluß von K bzgl. σ. Dann sind die folgenden Aussagen gleichwertig:*

(i) *A hat die Gestalt $\mathfrak{o}(K/F, \sigma)$ für einen geeigneten Teilkörper F von K.*

(ii) *Die Elemente von $\mathfrak{m}$ sind unendlich klein bzgl. $\mathbb{Q}$.*

(iii) *A ist konvex in K (bzgl. der Anordnung σ).*

(iv) *Über A liegt mindestens ein henselscher Bewertungsring von R.*

(v) *σ läßt sich zu einer Anordnung des Quotientenkörpers $\tilde{K}$ der Henselisierung $\tilde{A}$ von A fortsetzen.*

Die Bewertungsringe der Gestalt $\mathfrak{o}(K/F, \sigma)$ sind somit gerade alle Bewertungsringe, deren Henselisierungen (formal) reelle Quotientenkörper haben.

Zum Verständnis des Theorems sei noch folgendes angemerkt: A genüge den äquivalenten Bedingungen (i)—(v). Dann läßt sich als Körper F in (ii) offenbar jeder maximale Teilkörper von A wählen, und auf diese Weise treten gerade die maximal archimedischen Teilkörper ([1], S. 94; [5], S. 379) von K auf. Weiter werden wir sehen, daß dann über A *genau ein* henselscher Bewertungsring B von R liegt und daß sich σ *auf genau eine Weise* zu einer Anordnung von $\tilde{K}$ fortsetzen läßt (s. § 2).

---

*) Ein von Michael J. Wright, Loyola University of Los Angeles, am 4. Oktober 1972 eingereichtes Manuskript mit dem Titel „Henselian valuations on an ordered field" wurde nach dem Tode des Verfassers von Manfred Knebusch überarbeitet und ergänzt.

Offenbar hat Wright nicht bemerkt, in welch engem Zusammenhang sein Satz sowohl zu § 12 der klassischen Arbeit „Allgemeine Bewertungstheorie" von Krull [4] als auch zu der von Lang entwickelten Theorie der reellen Stellen [5] steht. Diese beiden Arbeiten werden bei ihm nirgends zitiert, und die offensichtlichen Zusammenhänge werden weder registriert noch ausgenutzt. Deshalb ließ sich sein Manuskript in der ursprünglichen Form nicht veröffentlichen.

Lang beweist in der oben zitierten Arbeit insbesondere den Satz, daß jede Stelle λ von einem Körper K in einen reell abgeschlossenen Körper P zu einer P-wertigen Stelle mindestens eines reellen Abschlusses R von K fortgesetzt werden kann [5], Theorem 6. Wie ich in § 3 erläutern werde, ergibt sich aus dem Satz von Wright unmittelbar eine Vervollständigung dieses Fortsetzungssatzes: λ läßt sich genau dann auf einen reellen Abschluß R von K fortsetzen, wenn bzgl. der zu R gehörigen Anordnung von K gilt: Ist a ein positives Element von K, so ist $\lambda(a) \geqq 0$ oder $\lambda(a) = \infty$. Es gibt dann genau eine P-wertige Fortsetzung von λ nach R.

Mit völlig anderen Methoden wurde dies kürzlich von mir in der Arbeit [3] bewiesen. Dort wird der Zusammenhang zwischen den Anordnungen eines Körpers K und den Primidealen des Wittrings der quadratischen Formen über K ausgenutzt und praktisch jedes bewertungstheoretische Argument vermieden. Diese Methode ist sehr schnell und führt auch zu anderen neuen Einsichten in den Zusammenhang zwischen Anordnungen und reellen Stellen, s. insbesondere die Spurformel in [3], § 3, aus der man die Anzahl der P-wertigen Fortsetzungen einer Stelle $\lambda: K \to P \cup \infty$ auf eine vorgegebene endliche Erweiterung von K ablesen kann. Man möchte aber Sätze über reelle Stellen auch bewertungstheoretisch einsehen können. Für § 1 der Arbeit [3] wird dies durch die Arbeit von Wright in sehr direkter und elementarer Weise ermöglicht.

Nach dem Tode von Michael J. Wright beauftragte mich die Schriftleitung von Crelles Journal, das Wright'sche Manuskript zu überarbeiten und den von dem Referenten bemerkten Zusammenhang zwischen den Wright'schen Resultaten und den Arbeiten [5] und [3] über reelle Stellen sichtbar zu machen.

§ 1

A bezeichne stets einen Bewertungsring, $\mathfrak{m}$ das maximale Ideal von A und K den Quotientenkörper von A. Der Körper K sei mit einer Anordnung σ versehen.

Lemma 1. 1. *Die folgenden Aussagen über A sind gleichwertig:*

(i) *A ist konvex in K bzgl. σ.*

(ii) *Für beliebiges positives x aus A liegt jedes Element y aus K, das der Ungleichung $0 < y < x$ genügt, ebenfalls in A.*

(iii) *Alle Elemente von $\mathfrak{m}$ sind unendlich klein über $\mathbb{Q}$.*

(iv) *A enthält den Bewertungsring $\mathfrak{o}(K/\mathbb{Q}, \sigma)$ der über $\mathbb{Q}$ endlichen Elemente (vgl. Einleitung), und ist somit eine Lokalisierung dieses Ringes nach einem Primideal.*

Beweis. Die Gleichwertigkeit der Aussagen (i) und (ii) liegt auf der Hand, desgleichen die von (iii) und (iv), weil A genau dann einen Bewertungsring B von K enthält, wenn $\mathfrak{m}$ in dem maximalen Ideal von B enthalten ist.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Sei $x \in \mathfrak{m}$ und ohne wesentliche Einschränkung der Allgemeinheit $x > 0$. Angenommen, es gibt eine natürliche Zahl r, so daß $x \geqq r^{-1}$ ist. Dann ist $0 < x^{-1} \leqq r$, und wegen der Eigenschaft (ii) ist x^{-1} ein Element von A, während doch x in $\mathfrak{m}$ liegt. Somit muß x unendlich klein über $\mathbb{Q}$ sein.

(iii) $\Rightarrow$ (ii): Sei also $x \in A$, $y \in K$ und $0 < y < x$. Dann ist $xy^{-1} > 1$. Daher liegt xy^{-1} nach Voraussetzung nicht in $\mathfrak{m}$. Somit muß yx^{-1} in A liegen, also auch y, q. e. d.

Definition 1. 2. Wenn A die äquivalenten Bedingungen (i)—(iv) dieses Lemmas erfüllt, so sagen wir, die Anordnung σ und der Bewertungsring A seien *verträglich*.

Ist A mit σ verträglich, so enthält A aufgrund von (iv) sicherlich eine Kopie des rationalen Zahlkörpers $\mathbb{Q}$.

Theorem 1. 3. *Sei A mit σ verträglich, und sei F ein maximaler Teilkörper von A. Dann stimmt A mit dem Bewertungsring $\mathfrak{o}(K/F, \sigma)$ aller über F endlichen Elemente von K überein.*

N. B. Insbesondere ist F also „maximal archimedisch" in K, d. h. keine echte Körpererweiterung von F in K ist über F archimedisch.

Beweis. Sei zunächst x ein Element von K, das über F endlich ist. Es gibt also ein λ in F mit $|x| \leqq \lambda$. Weil A konvex ist, muß x in A liegen. Somit ist $\mathfrak{o}(K/F, \sigma)$ in A enthalten. Sei jetzt x ein über F unendlich großes Element. Angenommen, x liegt in A. Weil x^{-1} in $\mathfrak{o}(K/F, \sigma)$ und somit auch in A liegt, muß x eine Einheit von A sein. Der Durchschnitt von $\mathfrak{m}$ mit dem in A gelegenen Ring $F[x]$ ist sicherlich von Null verschieden, denn sonst würde sogar der Körper $F(x)$ in A liegen, im Widerspruch zur Maximalität von F. Daher gibt es eine Gleichung

$$x^n + \lambda_1 x^{n-1} + \cdots + \lambda_n = \mu$$

mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ in F und μ in $\mathfrak{m}$. Weil x Einheit von A ist, folgt daraus, daß

$$1 + \lambda_1 x^{-1} + \cdots + \lambda_n x^{-n}$$

in $\mathfrak{m}$ liegt, und somit nach Voraussetzung unendlich klein über $\mathbb{Q}$ ist. Aber auch x^{-1} ist unendlich klein über $\mathbb{Q}$. Das ist ein Widerspruch. Somit liegt x nicht in A. Die Ringe $\mathfrak{o}(K/F, \sigma)$ und A stimmen also überein, q. e. d.

Folgerung 1. 4. *Ist A mit σ verträglich, so gibt es eine wohldefinierte Anordnung $\bar{\sigma}$ des Körpers $A/\mathfrak{m}$, so daß für beliebiges a in $A \backslash \mathfrak{m}$ die Restklasse $\bar{a}$ genau dann positiv bzgl. $\bar{\sigma}$ ist, wenn a positiv bzgl. σ ist.*

In der Tat ist dies für die Ringe $\mathfrak{o}(K/F, \sigma)$ wohlbekannt [4], S. 188, und leicht zu verifizieren. Wir nennen $\bar{\sigma}$ die von σ auf $A/\mathfrak{m}$ *induzierte Anordnung*.

Umgekehrt müssen natürlich die Elemente von $\mathfrak{m}$ über $\mathbb{Q}$ unendlich klein sein, d. h. A muß mit σ verträglich sein, damit auf diese Weise $A/\mathfrak{m}$ angeordnet werden kann.

§ 2

Lemma 2. 1. *Ist A henselsch, so ist jede Anordnung von K mit A verträglich.*

Beweis. Wir dürfen natürlich K als reellen Körper voraussetzen, weil sonst die Behauptung leer ist. Für beliebiges a in $\mathfrak{m}$ zerfällt das Polynom $x^2 + x + a$ mod $\mathfrak{m}$ in verschiedene Linearfaktoren. Daher hat dieses Polynom auch in A Nullstellen, d.h. $1-4a$ ist Quadrat in A. Somit ist bzgl. jeder Anordnung $a<\frac{1}{4}$ für alle a in $\mathfrak{m}$. Die Elemente von $\mathfrak{m}$ sind also bzgl. jeder Anordnung unendlich klein über $\mathbb{Q}$, q. e. d.

Satz 2. 2. *K sei reell abgeschlossen. Dann ist $A/\mathfrak{m}$ entweder reell abgeschlossen oder algebraisch abgeschlossen. Folgende Aussagen sind gleichwertig:*

a) *$A/\mathfrak{m}$ ist reell abgeschlossen.*

b) *A ist henselsch.*

c) *A ist mit der einzigen Anordnung von K verträglich.*

Beweis. Seien $B_1, \ldots, B_r$ die endlich vielen über A liegenden Bewertungsringe des algebraischen Abschlusses $\bar{K}$ und $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_r$ ihre maximalen Ideale. Die Restklassenkörper $B_i/\mathfrak{M}_i$ sind algebraisch abgeschlossen und es ist

$$\sum_{i=1}^{r} [B_i/\mathfrak{M}_i : A/\mathfrak{m}] \leqq [\bar{K} : K] = 2$$

[2], § 8 n° 3, Théorème. Somit gibt es nur die Möglichkeiten

$$r=2, \quad B_1/\mathfrak{M}_1 \cong B_2/\mathfrak{M}_2 \cong A/\mathfrak{m}$$

und

$$r=1, \quad \text{d. h. } A \text{ henselsch}, \qquad [B_1/\mathfrak{M}_1 : A/\mathfrak{m}] \leqq 2.$$

Also in der Tat $A/\mathfrak{m}$ entweder algebraisch oder reell abgeschlossen, und die zweite Alternative tritt höchstens bei henselschem A auf. Die Implikation a) $\Rightarrow$ b) ist also schon bewiesen. Weiter folgt die Implikation b) $\Rightarrow$ c) aus dem vorigen Lemma 2. 1. Ist schließlich A mit der Anordnung von K verträglich, so muß nach 1. 4 der Körper $A/\mathfrak{m}$ reell sein. Er kann dann also nicht algebraisch abgeschlossen sein. Das beweist c) $\Rightarrow$ a); q. e. d.

Korollar 2. 3. *Sei K reell abgeschlossen und $A/\mathfrak{m}$ reell, also reell abgeschlossen. Sei weiter F ein maximaler Teilkörper von A. Dann wird F unter der Restklassenabbildung von A nach $A/\mathfrak{m}$ bijektiv auf $A/\mathfrak{m}$ abgebildet* (vgl. [1], S. 95).

Beweis. F ist in K algebraisch abgeschlossen. Also ist F ein reell abgeschlossener Körper. Andrerseits ist $A/\mathfrak{m}$ über dem Bild $\bar{F}$ von F algebraisch. Somit muß $A/\mathfrak{m}$ mit $\bar{F}$ übereinstimmen, q. e. d.

N. B. Die hier betrachteten Körper F sind nach § 1 die maximal archimedischen Teilkörper von K.

Wir können jetzt ein weiteres Kriterium für die Verträglichkeit des vorgegebenen Bewertungsringes A mit der vorgegebenen Anordnung σ herleiten. Wir bezeichnen mit R einen reellen Abschluß von K zu σ und mit ϱ die Anordnung von R.

Theorem 2. 4. *A ist genau dann mit σ verträglich, wenn es einen henselschen Bewertungsring B von R mit $B \cap K = A$ gibt. Es gibt dann genau einen solchen Bewertungsring von B.*

Beweis. Ist A mit σ verträglich, so wählen wir einen maximalen Teilkörper F von A. Nach Theorem 1. 3 ist dann $A = \mathfrak{o}(K/F, \sigma)$. Somit ist sicherlich $B := \mathfrak{o}(R/F, \varrho)$ ein nach Satz 2. 2 henselscher Bewertungsring von R über A. Ist B' irgendein henselscher Bewertungsring von R über $A = \mathfrak{o}(K/F, \sigma)$, so enthält B' den algebraischen Abschluß F'

von F in R, und F' muß maximaler Teilkörper von B' sein, weil B' einen über $A/\mathfrak{m}$ algebraischen Restklassenkörper hat. Also ist, wiederum nach Satz 2. 2 und Theorem 1. 3, $B' = \mathfrak{o}(R/F', \varrho) = B$. Sei jetzt umgekehrt vorausgesetzt, daß über A ein henselscher Bewertungsring B von R liegt. Dann ist B mit ϱ verträglich, und somit A mit der Einschränkung σ von ϱ verträglich, q. e. d.

Korollar 2. 5. *σ ist genau dann mit A verträglich, wenn sich σ auf den Quotientenkörper $\tilde{K}$ der Henselisierung $\tilde{A}$ von A fortsetzen läßt. Es gibt dann genau eine Fortsetzung von σ auf $\tilde{K}$.*

Beweis. Aufgrund des Eindeutigkeitssatzes für reelle Abschlüsse [1], Satz 8, läßt sich σ genau dann auf $\tilde{K}$ fortsetzen, wenn $\tilde{K}$ über K in R eingebettet werden kann. Wegen der universellen Eigenschaft der Henselisierung bedeutet dies wiederum, daß über A ein henselscher Bewertungsring von R liegt, also nach Theorem 2. 4, daß A mit σ verträglich ist. Wir müssen noch einsehen, daß über σ nicht zwei verschiedene Anordnungen von $\tilde{K}$ liegen können. Nun bilden sich Wertegruppe und Restklassenkörper von A isomorph auf Wertegruppe bzw. Restklassenkörper von $\tilde{A}$ ab [6], S. 184. Daher wird die multiplikative Gruppe $\tilde{K}^*$ des Körpers $\tilde{K}$ von K^* und $1+\tilde{\mathfrak{m}}$ erzeugt ($\tilde{\mathfrak{m}}$ = maximales Ideal von $\tilde{A}$). Nach Lemma 2. 1 sind die Elemente von $1+\tilde{\mathfrak{m}}$ bzgl. jeder Anordnung von $\tilde{K}$ positiv. Daher haben zwei Anordnungen von $\tilde{K}$ mit gleicher Einschränkung auf K dieselbe Menge von positiven Elementen und stimmen somit überein (vgl. Satz 3. 1), q. e. d.

§ 3

Wir wollen jetzt den Bezug zur Theorie der reellen Stellen herstellen. Zunächst zitieren wir einen Satz von Baer und Krull. Sei Γ die Wertegruppe einer Bewertung v von K zu dem Bewertungsring A. Weiter sei $(m_i \mid i \in I)$ eine Familie von Elementen aus K, so daß die Bilder der Werte $v(m_i)$ in $\Gamma/2\Gamma$ eine Basis dieses Vektorraumes über dem Körper mit 2 Elementen bilden.

Satz 3. 1. [4], § 12. *Es sei auf $A/\mathfrak{m}$ eine Anordnung τ vorgegeben. Dann gibt es mindestens eine Anordnung σ von K, die mit A verträglich ist und auf $A/\mathfrak{m}$ die Anordnung τ induziert. Genauer gilt: Sei zu jedem $i \in I$ ein Vorzeichen $\varepsilon_i = \pm 1$ gewählt. Dann gibt es genau eine solche Anordnung σ, bei der überdies jedes m_i das Vorzeichen ε_i hat.*

Im folgenden bezeichne P einen festen reell abgeschlossenen Körper und $\lambda: K \to P \cup \infty$ eine Stelle von K mit Werten in P. Weiter sei A jetzt der Bewertungsring von λ.

Definition 3. 2 (vgl. [3]). λ und die Anordnung σ von K heißen *verträglich*, wenn jedes bzgl. σ positive Element a von K einen Wert $\lambda(a) \geqq 0$ oder $= \infty$ hat.

Ist σ mit λ verträglich, so müssen alle Elemente von $1+\mathfrak{m}$ positiv bzgl. σ sein, weil sie unter λ den Wert 1 haben. Somit müssen die Elemente von $\mathfrak{m}$ unendlich klein über $\mathbb{Q}$ sein, d. h. A ist mit σ verträglich. Genauer gilt ersichtlich

Lemma 3. 3. *σ ist genau dann mit λ verträglich, wenn σ mit A verträglich ist und die von λ induzierte Abbildung von $A/\mathfrak{m}$ nach P ordnungstreu ist bzgl. der induzierten Anordnung $\bar{\sigma}$ von $A/\mathfrak{m}$ und der einzigen Anordnung von P.*

Aus dem ersten Teil von Satz 3. 1 folgt

Satz 3. 4 (*vgl.* [3], *Proposition* 1. 1). *Zu jeder Stelle $\lambda: K \to P \cup \infty$ existiert mindestens eine Anordnung σ von K, die mit λ verträglich ist.*

Natürlich erhalten wir aus Satz 3. 1 sogar eine genaue Übersicht über alle Anordnungen, die mit λ verträglich sind, vgl. hierzu [3], Theorem 2. 5.

Theorem 3. 5 (= [3], *Theorem* 1. 6). *Sei σ eine Anordnung von K, und R ein reeller Abschluß von K zu σ. Weiter sei eine Stelle $\lambda: K \to P \cup \infty$ vorgegeben. λ läßt sich genau dann zu einer P-wertigen Stelle von R fortsetzen, wenn λ mit σ verträglich ist. Es gibt in diesem Falle genau eine solche Fortsetzung.*

Beweis. Ist $\mu: R \to P \cup \infty$ eine Fortsetzung von λ, so muß μ nach dem vorigen Satz mit der einzigen Anordnung ϱ von R verträglich sein. Also muß dann λ mit der Einschränkung σ von ϱ verträglich sein. Sei jetzt umgekehrt die Verträglichkeit von σ mit λ vorausgesetzt. Aufgrund von § 2 gibt es genau einen Bewertungsring B von R über A mit reellem Restklassenkörper $B/\mathfrak{M}$, und dieser ist ein reeller Abschluß von $A/\mathfrak{m}$ bzgl. der induzierten Anordnung $\bar{\sigma}$. Die von λ induzierte ordnungstreue Abbildung $\bar{\lambda}$ von $A/\mathfrak{m}$ nach P hat nach dem Eindeutigkeitssatz für reelle Abschlüsse [1], Satz 8, genau eine Fortsetzung zu einem Homomorphismus von $B/\mathfrak{M}$ nach P. Dieser liefert die einzige mögliche P-wertige Stelle von R, die λ fortsetzt, q. e. d.

Die letzten beiden Sätze bilden zusammen eine Verfeinerung des Fortsetzungssatzes [5], Theorem 6, von Lang (vgl. Einleitung).

§ 4

In diesem Abschnitt bezeichne R stets einen reell abgeschlossenen Körper und ϱ die einzige Anordnung von R. Zu einem Teilkörper F von R bezeichnen wir den Bewertungsring $\mathfrak{o}(R/F, \varrho)$ der über F endlichen Elemente jetzt kürzer mit $\mathfrak{o}(R/F)$. Nach der bisherigen Untersuchung sind diese Ringe genau die henselschen Bewertungsringe von R. Als Körper F brauchen wir dabei nur die maximal archimedischen Teilkörper von R ins Auge zu fassen. Diese sind gerade die maximalen Teilkörper der henselschen Bewertungsringe von R. Wir wollen den Zusammenhang zwischen den henselschen Bewertungsringen von R und den maximal archimedischen Teilkörpern von R etwas weiter verfolgen[1]).

Lemma 4. 1. *Seien $A_1 \subset A_2$ zwei henselsche Bewertungsringe von K. Weiter sei F_2 ein maximaler Teilkörper von A_2 und F_1 ein maximaler Teilkörper von $F_2 \cap A_1$. Dann ist F_1 maximaler Teilkörper von A_1.*

Bemerkung. Eine Abschwächung dieses Sachverhaltes findet sich bereits bei Lang [5], Theorem 11: Ist F_2 maximal archimedischer Teilkörper von K und F_1 maximal archimedischer Teilkörper von F_2, so ist F_1 maximal archimedischer Teilkörper von K.

Beweis. Mit $\mathfrak{m}_i$ bezeichnen wir das maximale Ideal von A_i und mit λ die Restklassenabbildung von A_2 auf $A_2/\mathfrak{m}_2$. Sei $\tilde{T}$ ein maximaler F_1 umfassender Teilkörper von A_1 und $\tilde{F}_2$ ein maximaler Teilkörper von A_2 über $\tilde{T}$. Unter λ wird sowohl F_2 als auch $\tilde{F}_2$ bijektiv auf $A_2/\mathfrak{m}_2$ abgebildet (s. 2. 3). Wir haben also einen Isomorphismus α von F_2 nach $\tilde{F}_2$, der durch $\alpha(x) \equiv x \bmod \mathfrak{m}_2$ für x in F_2 gekennzeichnet ist. Dieser Isomorphismus läßt jedes Element von F_1 fest. Sei T das Urbild $\alpha^{-1}(\tilde{T})$ von $\tilde{T}$ in F_2. Für jedes Element t von T liegt $\alpha(t) - t$ in A_1, weil $\mathfrak{m}_2 \subset \mathfrak{m}_1 \subset A_1$ ist, und auch $\alpha(t)$ liegt in A_1. Daher ist $T \subset A_1$.

[1]) Diese Betrachtung geht zum Teil über das Wright'sche Manuskript hinaus.

Aufgrund der Maximalitätsvoraussetzung über F_1 muß $F_1 = T$ sein. Somit ist $\lambda(\tilde{T}) = \lambda(T) = \lambda(F_1)$, und daraus folgt $\tilde{T} = F_1$, d.h. F_1 ist maximaler Teilkörper von A_1, q.e.d.

Satz 4. 2. *Sei*

$$F_0 \subsetneqq F_1 \subsetneqq \cdots \subsetneqq F_n = R$$

eine Kette von maximal archimedischen Teilkörpern von R. Der Bewertungsring $A := \mathfrak{o}(R/F_0)$ *hat einen Rang* $\geqq n$, *und A hat genau dann den Rang n, wenn sich diese Kette nicht verfeinern läßt. In diesem Falle sind die Ringe* $A_i := \mathfrak{o}(R/F_i)$ *sämtliche Bewertungsringe, die A umfassen.*

Beweis. Sicherlich sind die A_i paarweise verschiedene Bewertungsringe, die A umfassen, und somit hat A einen Rang $\geqq n$. Es bleibt zu zeigen, daß die A_i sämtliche A umfassende Bewertungsringe sind, wenn sich unsere Kette nicht verfeinern läßt. Sei alos B ein Bewertungsring, der A echt umfaßt. Es gibt dann genau einen Index $i < n$ mit $A_i \subset B \subset A_{i+1}$. Weiter ist B aufgrund von Lemma 1. 1 mit ϱ verträglich, also henselsch. Sei F ein maximaler Teilkörper von $B \cap F_{i+1}$. Nach Lemma 4. 1 ist F maximaler Teilkörper von B und somit $B = \mathfrak{o}(R/F)$ aufgrund von Theorem 1. 3. Weiter ist $F_i \subset F \subset F_{i+1}$. Weil sich unsere Kette nicht verfeinern läßt, ist $F = F_i$ oder F_{i+1} und somit $B = A_i$ oder $= A_{i+1}$, q.e.d.

Beispiel 4. 3 (Wright). Sei $K = Q(t_1, t_2, \ldots)$ die rein transzendente Erweiterung des rationalen Zahlkörpers Q mit einer abzählbaren Folge $t_1, t_2, \ldots$ von Unbestimmten. Wir installieren auf K die eindeutig bestimmte Anordnung σ, in der jedes t_i positiv und unendlich klein über $Q(t_1, \ldots, t_{i-1})$ ist, vgl. Satz 3. 1. Sei R ein reeller Abschluß von K zu σ. Dann sind die henselschen Bewertungsringe von R genau die Ringe der über den Körpern $Q(t_1, \ldots, t_i)$ endlichen Elemente ($i \geqq 0$). Sie haben alle abzählbar unendlichen Rang.

Zum Beweis betrachte man die Durchschnitte eines vorgegebenen henselschen Bewertungsringes von R mit den algebraischen Abschlüssen der Körper $Q(t_1, \ldots, t_r)$ in R für alle $r \geqq 1$.

Ist K irgendein Körper mit einer Anordnung σ, so erhebt sich die Frage, ob ein zu Satz 4. 2 analoger Satz für die mit σ verträglichen Bewertungsringe von K gilt. Wie wir wissen, entsprechen diese Bewertungsringe eineindeutig den henselschen Bewertungsringen eines reellen Abschlusses R von K bzgl. σ (Theorem 2. 4). Auch ist leicht zu sehen, daß der algebraische Abschluß F' in R eines maximal archimedischen Teilkörpers F von K ein maximal archimedischer Teilkörper von R ist, für den $F' \cap K = F$ ist. Aber es bleibt die Frage, ob man auf diese Weise alle maximal archimedischen Teilkörper von R erhält. Deshalb ist es mir bisher nicht gelungen, Satz 4. 2 auf (K, σ) zu übertragen.

Abschließend fragen wir nach der Existenz eines mit σ verträglichen Bewertungsringes A vom Rang 1 zu vorgegebenem angeordneten Körper (K, σ). Ersichtlich kann es höchstens einen solchen Bewertungsring A von K geben, weil A den Ring $\mathfrak{o}(K/Q, \sigma)$ umfassen muß.

Satz 4. 4 (Wright). *K besitzt genau dann einen mit σ verträglichen Bewertungsring A vom Rang* 1, *wenn es in K einen Körper k und ein bzgl. k unendlich kleines positives Element t gibt, so daß K archimedisch über k(t) ist.*

Beweis. Sei zunächst vorausgesetzt, daß in K ein solcher Ring A existiert. Wir wählen als k einen maximalen Teilkörper von A und als t ein beliebiges positives Element, das über k unendlich klein ist. Der Bewertungsring $\mathfrak{o}(K/k(t), \sigma)$ ist ein echter Oberring von A, muß also ganz K sein. Somit ist K über $k(t)$ archimedisch.

Sei jetzt vorausgesetzt, daß K einen Teilkörper k und ein Element t mit den im Satz genannten Eigenschaften besitzt. Es genügt, einen henselschen Bewertungsring vom Rang 1 für den reellen Abschluß R von (K, σ) nachzuweisen. Somit nehmen wir jetzt zusätzlich $K = R$ an. Nach dem Lemma von Zorn gibt es einen maximalen Oberkörper F von $k(t)$ mit der Eigenschaft, daß t unendlich klein über F ist. Ersichtlich ist F maximal archimedisch. Aufgrund von Satz 4. 2 — oder eines schwächeren Arguments — genügt es einzusehen, daß R selbst der einzige maximal archimedische Teilkörper von R ist, der F echt umfaßt. Dann ist $A = \mathfrak{o}(R/F)$ der gesuchte Bewertungsring. Sei also E ein maximal archimedischer Teilkörper von R, der F echt umfaßt. Wir betrachten ein Element

$$x = t^n + a_1 t^{n-1} + \cdots + a_n \qquad (n \geqq 1)$$

mit Koeffizienten a_i in F. Es ist

$$x = t^n(1 + a_1 t^{-1} + \cdots + a_n t^{-n}).$$

Der zweite Faktor ist eine Einheit von $\mathfrak{o}(R/F)$, also erst recht eine Einheit von $\mathfrak{o}(R/E)$. Wegen der Maximalität von F ist auch t eine Einheit von $\mathfrak{o}(R/E)$, also x eine Einheit. Somit ist der Körper $F(t)$ in E enthalten. Aufgrund unserer Voraussetzungen ist R archimedisch über $F(t)$, also $E = R$, q. e. d.

Es wäre wünschenswert, ein ähnliches Kriterium für die Existenz von mit σ verträglichem Bewertungsring von K von vorgegebenem Rang $n > 1$ zu haben.

Literaturverzeichnis

[1] *E. Artin* und *O. Schreier*, Algebraische Konstruktion reeller Körper, Hamburger Abh. **5** (1926), 85—99.
[2] *N. Bourbaki*, Eléments de mathématique, Algèbre commutative, Chap. 6, Paris 1964.
[3] *M. Knebusch*, On the extension of real places, Comment. Math. Helv. **48** (1973), 345—369.
[4] *W. Krull*, Allgemeine Bewertungstheorie, J. reine angew. Math. **167** (1931), 160—196.
[5] *S. Lang*, The theory of real places, Annals Math. **57** (1953), 378—391.
[6] *P. Ribenboim*, Théorie des valuations, Montreal, 2. ed., 1965.

Fachbereich Mathematik der Universität, 84 Regensburg, Universitätsstr. 31

Eingegangen 25. Januar 1975