14

Wittgruppen von symmetrisch bilinearen Gittern über Bewertungsringen

Manfred Knebusch

A 71-02

Wittgruppen von symmetrisch bilinearen Gittern über Bewertungsringen

Manfred Knebusch

O.T.O'Meara ist es Mitte der fünfziger Jahre gelungen, die symmetrisch bilinearen Gitter (Def. s. § 1.1) über einem diskreten kompletten Bewertungsring C mit von 2 verschiedener Charakteristik und vollkommenem Restklassenkörper k zu klassifizieren (s. [OM], Chap. IX, $[OM]_1$). Doch läßt die Komplexität von O'Meara's Resultaten vermuten, daß schon über dyadischen diskreten kompletten Bewertungsringen mit unvollkommenem Restklassenkörper das Klassifikationsprogramm heutzutage keine Aussicht auf Erfolg hat.

Im Gegensatz dazu werden wir in dieser Studie unter anderem die Frage beantworten können, wann zwei - ohne Einschränkung der Allgemeinheit radikalfreie - Gitter über einem beliebigen Bewertungsring endlicher Höhe ([B], S. 115) dasselbe Bild im Grothendieckring KG(C) aller (radikalfreier, symmetrisch bilinearer) Gitter über C haben.

Bei diesen Untersuchungen kann man von den Grothendieckringen zu - ähnlich wie in [W] definierten - "Wittringen" übergehen, ohne wesentliche Information zu verlieren (s. § 10). Die Elemente der Wittringe lassen sich durch Gitter repräsentieren, während wir für die Grothendieckringe "Differenzen" von Gittern benötigen. Die Wittringe sind somit einfacher zu handhaben und als der eigentliche Gegenstand unserer Theorie anzusehen.

Als Nebenprodukt unserer Überlegungen werden sich Beziehungen zwischen den Wittringen der verschiedenen Restklassenkörper eines beliebigen Bewertungsringes endlicher Höhe ergeben

(§ 4B, vgl. [K], § 12).

Der letzte Paragraph enthält von den übrigen Paragraphen unabhängige Betrachtungen. Wir beweisen ein Analogon zu O'Meara's Kürzungssatz ([OM] 93:14a) über semilokalen Ringen (vgl. [K] § 6). Insbesondere bleibt dieser Satz von O'Meara über beliebigen Bewertungsringen richtig. Weiter studieren wir über diskreten Bewertungsringen die besonders angenehme Klasse der "ausgeglichenen" Gitter (s. § 5B), die in einigen Arbeiten von G.L. Watson eine Rolle spielt (s.z.B. [Wa]). O'Meara's Klassifikation der unimodularen Gitter ([OM] 93:16) läßt sich auf diese Gitter verallgemeinern.

Über <u>diskret</u> bewerteten Ringen (zumindest) lassen sich, nach einer freundlichen Mitteilung von Herrn M.Kneser, die in § 2 - § 4 gewonnenen Resultate wesentlich schneller herleiten.

<u>Inhalt.</u>

§ 1 Vorbereitungen.

1 A. Bezeichnungen. Sei C ein beliebiger Bewertungsring (z.B. auch ein Körper), $\mathfrak{m}$ sein maximales Ideal, L sein Quotientenkörper. C^* bezeichne die Einheitengruppe $C \setminus \mathfrak{m}$ von C, Γ die Wertegruppe zu einer fest gewählten zu C gehörigen Bewertung $v : L \longrightarrow \Gamma \cup \{\infty\}$. (Wir schreiben Γ als additive Gruppe.) Für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ von C bezeichne $k(\mathfrak{p})$ den Quotientenkörper $C_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}$ des Ringes $C/\mathfrak{p}$. Für $k(\mathfrak{m})$ schreiben wir oft kürzer k.

Unter einem symmetrisch bilinearen Gitter E über C (meist kurz "Gitter" genannt), verstehen wir einen freien C-Modul E von endlichem Rang, versehen mit einer symmetrischen, bzgl. C bilinearen Abbildung $B: E \times E \longrightarrow L$. Die Bilinearformen aller Gitter werden wir unterschiedslos mit B bezeichnen, solnage dadurch keine Verwirrung entstehen kann. Ein Gitter (oder seine Isomorphieklasse) bezeichnen wir oft durch die Wertematrix $(B(h_i, h_j))$ zu irgend einer freien Basis $h_1, \ldots, h_n$ von E. Für eine zweireihige Matrix $\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \beta \end{pmatrix}$ mit $\alpha \in C$, $\beta \in C$, $1 - \alpha\beta \in C^*$ benutzen wir das Symbol $A(\alpha, \beta)$.

Wir nennen einen Vektor x eines Gitters E primitiv, falls x nicht Vielfaches λz eines $z \in E$ mit $\lambda \in \mathfrak{m}$ ist, also wenn x Anfang einer Basis von C ist. Vektoren $x \neq o$ aus E mit $B(x,x) = o$ nennen wir isotrop. Falls E isotrope Vektoren besitzt, bezeichnen wir auch E als isotrop, sonst als anisotrop.

Zu zwei Gittern E und F über C können wir als neue Gitter die orthogonale Summe $E \perp F$ und das Tensorprodukt $E \otimes F$ bilden. $E \perp F$ ist die direkte Summe der Moduln E und F, versehen mit der Bilinearform ($e_i \in E$, $f_i \in F$)

$$B(e_1 + f_1, e_2 + f_2) = B(e_1,e_2) + B(f_1,f_2).$$

$E \otimes F$ ist der Modul $E \otimes_C F$, versehen mit der durch

$$B(e_1 \otimes f_1, e_2 \otimes f_2) = B(e_1,e_2)\, B(f_1,f_2)$$

festgelegten Bilinearform. Für die orthogonale Summe von r Kopien eines Gitters E schreiben wir $r \times E$.

Für jeden Teilmodul W eines Gitters E bezeichne $W^{\perp}$ das Gitter aller Vektoren von E, die auf ganz W senkrecht stehen (natürlich unter der Einschränkung der Bilinearform von E). Das Gitter $E^{\perp}$ heiße das <u>Radikal</u> rad E von E. Wir haben eine Zerlegung $E = E' \perp \mathrm{rad} E$ mit einem durch E bis auf Isomorphie eindeutig bestimmten radikalfreien Gitter E' (d.h. rad E' = o). Sind E und F radikalfrei, so gilt gleiches für $E \perp F$ und $E \otimes F$. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit setzen wir daher <u>alle in dieser Note auftretenden Gitter als radikalfrei voraus.</u> Sofern doch einmal Radikale auftreten, werden wir dies ausdrücklich erwähnen.

Wir nennen ein Gitter E über C <u>unimodular</u> oder auch einen <u>nichtentarteten Raum</u> über C, wenn $B(E \times E)$ in C enthalten ist und die durch die Formel ($x \in E$, $y \in E$)

$$B(x,y) = \langle x, \varphi(y) \rangle$$

definierte lineare Abbildung φ von E in den Dualmodul $E^{*} := \mathrm{Hom}_C(E,C)$ bijektiv ist. Dies ist dazu gleichwertig, daß die Determinanten der Wertematrizen von E Einheiten sind. Als <u>modulares</u> Gitter bezeichnen wir wie üblich jedes zu einem unimodularen Gitter M ähnliche Gitter $(\lambda) \otimes M$ mit $\lambda \in L^{*}$.

G(C) sei der assoziative und kommutative Halbring der Isomorphieklassen radikalfreier Gitter über C, mit der orthogonalen Summe als Addition und dem Tensorprodukt als Multiplikation. $G(C)$ besitzt ein Einselement, repräsentiert durch das Gitter (1). Mit $S(C)$ bezeichnen wir den Teil-Halbring (!) der Isomorphieklassen unimodularer Gitter von $G(C)$.

Zu einer abelschen Halbgruppe M bezeichne KM die zugehörige Grothendieckgruppe. (Die Elemente von KM sind "Differenzen" $\xi - \eta$ von Elementen ξ, η aus M mit der Regel: $\xi - \eta = \xi' - \eta' \Longleftrightarrow$ Es gibt ein $\zeta \in M$, so daß in M gilt $\xi + \eta' + \zeta = \xi' + \eta + \zeta$.) Jede additive Abbidlung von M in eine abelsche Gruppe W läßt sich schreiben als Komposition der kanonischen Abbildung von M in KM mit genau einem Homomorphismus $KM \longrightarrow W$ von abelschen Gruppen; in anderen Worten: K ist der linksadjungierte Funktor zu dem Vergessensfunktor von der Kategorie der abelschen Gruppen in die Kategorie der abelschen Halbgruppen. Ist M ein Halbring, so ist KM in natürlicher Weise ein Ring.

Für den Ring $KS(C)$ schreiben wir kürzer $K(C)$. Die Dimensionsfunktion auf $S(C)$ liefert uns einen Ringhomomorphismus $\dim: K(C) \longrightarrow \mathbb{Z}$. Ferner haben wir zu einem beliebigen Homomorphismus $\varphi: C \rightarrow D$ von (Bewertungs)-Ringen einen Ringhomomorphismus $K(\varphi): K(C) \longrightarrow K(D)$. Dieser entsteht, indem wir einem unimodularen Gitter E über C mit Bilinearform B den mit φ gebildeten D-Modul $E \otimes_C D$, mit der induzierten - wiederum unimodularen - Bilinearform B' zuordnen, die durch

$$B'(x \otimes 1, y \otimes 1) = \varphi(B(x,y))$$

$(x \in E,\ y \in E)$ charakterisiert wird. Ist S ein multiplikativer Teil von $C \setminus \{0\}$, so erhalten wir in ähnlicher Weise zu jedem Gitter E über C ein Gitter $E \otimes_C S^{-1}C = S^{-1}E$ über dem Quotientenring $S^{-1}C$. Diese Zuordnung induziert einen Ringhomomorphismus von $KG(C)$ auf $KG(S^{-1}C)$.

1 B. Der Wittring W(C).

Wir notieren die später benötigten Aussagen über unimodulare Gitter. Die Theorie von K(C) läßt sich in wesentlich breiterem Rahmen aufbauen, s. [K] . Da die Arbeit [K] noch nicht erschienen ist, und für Bewertungsringe die Verhältnisse besonders einfach sind, werden wir fast alle Aussagen beweisen. Dabei spielt die Voraussetzung, daß C Bewertungsring ist, erst ab Lemma 1.6 eine Rolle.

Zunächst erinnern wir an den evidenten

Hilfssatz 1.1. ([OM] , 82:15). Sei **E** ein beliebiges Gitter, F ein (unter der Bilinearform von E) unimodulares Teilgitter. Dann ist F genau dann orthogonaler Summand von **E**, wenn $B(F,E) \subset C$ ist. ($\subset$ bedeutet echte oder unechte Inklusion.)

Das folgende Lemma hat für unsere Überlegungen zentrale Bedeutung, wird aber erst in § 2 voll ausgenutzt werden.

Lemma 1.2. Seien α, β, γ Elemente aus C mit $\gamma \neq 0$ und $\Delta := 1 - \alpha\beta\gamma \in C^*$. Dann gilt

(1.2.1) $$A(\alpha, \beta\gamma) \perp (-\gamma) \otimes A(\alpha\gamma, \beta) \cong$$
$$\cong A(\alpha\Delta, 0) \perp (-\gamma) \otimes A(0, \beta\Delta).$$

($\cong$ bedeutet "isomorph".)

Beweis. Wir gehen aus von einer Basis des Gitters auf der linken Seite von (1.2.1), die aus zwei zueinander orthogonalen Vektorpaaren x_1, y_1; x_2, y_2 besteht mit Wertematrizen $A(\alpha, \beta\gamma)$ bzw.

$$(-\gamma) \otimes A(\alpha\gamma, \beta) = \begin{pmatrix} -\alpha\gamma^2 & -\gamma \\ -\gamma & -\beta\gamma \end{pmatrix}.$$

Dann ist auch

$$x_1' = x_1 + \alpha y_2, \qquad y_1' = \Delta^{-1}(y_1 + y_2)$$
$$x_2' = \Delta^{-1}(x_2 + \gamma x_1), \qquad y_2' = y_2 + \beta\gamma\, x_1$$

eine Basis dieses Gitters, die gerade zu der rechten Seite von (1.2.1) paßt.

q.e.d.

Der Spezialfall $\gamma = 1, \alpha = o$ führt auf das

<u>Lemma 1.2a.</u> (vgl. Hfs. 5.5) Für jedes $\beta \in C$ haben $A(o,\beta)$ und $A(o,o)$ in $K(C)$ dasselbe Bild.

Eine orthogonale Summe von Gittern der Gestalt $A(o,\beta)$ nennen wir ein (unimodulare) <u>metabolisches</u> Gitter. Diese Gitter lassen sich auch folgendermaßen charakterisieren:

<u>Lemma 1.3.</u> Ein unimodulares Gitter M gerader Dimension $2r$ ist genau dann metabolisch, wenn es als Modul einen direkten Summanden V der Dimension r mit $B(V,V) = o$ besitzt.

<u>Beweis.</u> Sei $x_1, \ldots, x_r$ eine Basis von V. Der Modul M besitzt eine Linearform , die auf x_1 den Wert 1 annimmt, auf den x_i mit $i \geq 2$ aber den Wert Null. Da M unimodular ist, gibt es also einen Vektor y_1 mit $B(x_i, y_1) = \delta_{i1}$ für $i = 1, \ldots r$. Nach Hilfssatz 1.1 haben wir eine Zerlegung

$$M = (Cx_1 + Cy_1) \perp M'.$$

Die Vektoren $x_2, \ldots, x_r$ sind Basis eines direkten Summanden V' von M'. Durch Fortsetzung des Verfahrens zerlegt man M in Gitter der Gestalt $A(o,\beta)$.

q.e.d.

<u>Hilfssatz 1.4.</u> Das Tensorprodukt eines metabolischen Gitters M mit einem beliebigen unimodularen Gitter E ist wieder metabolisch.

<u>Beweis.</u> Sei $\dim M = 2r$, $\dim E = m$. Ist V direkter Summand von M der Dimension r mit $B(V,V) = o$, so ist $V \otimes E$ direkter

Summand von $E \otimes M$ der Dimension mr, auf dem die Bilinearform von $E \otimes M$ verschwindet.

Zu einem Gitter E mit Bilinearform B bezeichne $-E$ den Modul E, versehen mit der Bilinearform $-B$.

Folgerung 1.5. Für jedes unimodulare Gitter E ist $E \perp (-E)$ metabolisch.

Beweis. $E \perp (-E) \cong E \otimes [(1) \perp (-1)] \cong E \otimes A(1,o)$.

Die Bilder der metabolischen Gitter in K(C) liegen nach Lemma 1.2a in der von A(o,o) additiv erzeugten abelschen Gruppe $\mathbb{Z} A(o,o)$. Nach Hfs. 1.4 ist $\mathbb{Z} A(o,o)$ sogar ein Ideal von K(C). Den Quotienten von K(C) nach diesem Ideal nennen wir den Wittring W(C) der unimodularen Gitter über C. Jedes Element von K(C) ist durch seine Dimension und sein Bild in W(C) eindeutig festgelegt. Für jedes unimodulare Gitter E hat $E \perp (-E)$ nach Folgerung 1.5 in W(C) das Bild Null. Die kanonische Abbildung von S(C) nach W(C) ist also surjektiv.

Die Elemente von W(C) lassen sich durch anisotrope Gitter repräsentieren, denn es gilt

Lemma 1.6. Jedes unimodulare Gitter E läßt sich in ein anisotropes und ein metabolisches Gitter orthogonal zerlegen.

Beweis. Ist E nicht schon anisotorp, so enthält E einen primitiven isotrpen Vektor x. Es gibt eine Linearform des C-Moduls E, die in x den Wert 1 annimmt, also, da E unimodular ist, einen Vektor $y \in E$ mit $B(x,y) = 1$. Nach Hilfssatz 1.1 haben wir eine Zerlegung

$$E = (Cx + Cy) \perp E' .$$

Ist E' noch nicht anisotrop, so setze man das Verfahren fort.

q.e.d.

Satz 1.7. Sei C ein Körper. $E = E_0 \perp M$ und $F = F_0 \perp N$ seien Zerlegungen zweier Gitter E, F in anisotrope Gitter E_0 , F_0 und metabolische Gitter M und N.

Behauptung. E und F haben genau dann gleiches Bild in W(C), wenn $E_0 \cong F_0$ ist.

Dies folgt, falls C eine von 2 verschiedene Charakteristik hat, sofort aus dem Witt'schen Kürzungssatz (s. [W]). Für Charakteristik 2 ist Satz 1.7 aber auch richtig, obwohl dann in S(C) die Kürzungsregel verletzt wird (s. [K] II, Th. 8.2.1).

Für einen beliebigen Bewertungsring C mit Quotientenkörper L erhalten wir aus Lemma 1.6 und Satz 1.7 den

Satz 1.8. Die kanonische Abbildung von W(C) nach W(L) ist injektiv. Ein unimodulares Gitter über C hat genau dann Bild Null in W(C), wenn es metabolisch ist.

1C. Definition der Wittgruppen WG(I,C).

Wir denken uns zu jedem $w \in \Gamma$ ein Urbild $w' \in L^*$ unter der Bewertung v fest ausgewählt.

Satz 1.9. ([OM] , § 91C). Jedes Gitter E über C ist von der Form

$$(1.9.1) \qquad E \cong \coprod_{w \in \Gamma} (w') \otimes E_w$$

mit unimodularen Gittern E_w (von denen selbstredend fast alle Null sind).

In der Tat bleibt der klassische Beweis über beliebigen Bewertungsringen richtig: Die Behauptung besagt, daß sich E irgendwie in modulare Gitter zerlegen läßt. Sei ohne Einschränkung $E \neq 0$. Die $B(x,y)$ mit $x \in E$, $y \in E$ erzeugen zusammen ein (ev. gebrochenes) Hauptideal $B(E,E) = \mathfrak{w}'C$. Wir suchen in E einen Vektor x mit $B(x,E) = \mathfrak{w}'C$. Ist $v(B(x,x)) = w$, so läßt sich nach Hilfssatz 1.1 von E das modulare Gitter Cx orthogonal abspalten. Anderenfalls gibt es ein $y \in E$ mit $B(x,y) = \mathfrak{w}'$. Dann läßt sich das modulare Gitter $Cx + Cy$ abspalten. Man setze dieses Verfahren, wenn nötig, fort.

q.e.d.

Eine Zerlegung (1.9.1) von E heißt <u>Jordan-Zerlegung</u> mit den <u>unimodularen</u> <u>Komponenten</u> $E_{\mathfrak{w}}$.

<u>Satz 1.10</u> (vgl. [OM], 91:9). Die Reduktionen $E_w \otimes k = E_w/\mathfrak{m}E_w$ der unimodularen Komponenten einer Jordanzerlegung (1.9.1) sind - ersichtlich nichtentartete- Räume über k, die bis auf Isomorphie nur von E und dem System $\{\mathfrak{w}'\}_{\mathfrak{w}\in\Gamma}$ abhängen.

<u>Beweis.</u> Für ein $\mathfrak{u} \in \Gamma$ bezeichnen wir mit $E(\mathfrak{u})$ das Gitter aller $x \in E$ mit $B(x,E) \subset \mathfrak{u}'C$.

Aus (1.9.1) folgt

$$E(\mathfrak{u}) \cong (\mathfrak{u}') \otimes \Big[E_{\mathfrak{u}} \perp \mathop{\perp}_{\mathfrak{w} > \mathfrak{u}} (\mathfrak{w}'\mathfrak{u}'^{-1}) \otimes E_{\mathfrak{w}} \perp \perp \mathop{\perp}_{\mathfrak{w} < \mathfrak{u}} (\mathfrak{u}'\mathfrak{w}'^{-1}) \otimes E_{\mathfrak{w}} \Big].$$

$(\mathfrak{u}'^{-1})\otimes$

Reduziert man $E(\mathfrak{u})$ mod $\mathfrak{m}$, so entsteht ein i.a. entarteter Raum über k. Dividiert man bei diesem Raum das Radikal heraus, so erhält man - bis auf Isomorphie- die Reduktion $E_{\mathfrak{u}} \otimes k$.

q.e.d.

Insbesondere sind die "<u>modularen Dimensionen</u>"

(1.11) $\dim_{\mathfrak{w}} E := \dim E_{\mathfrak{w}}$

für alle $w \in \Gamma$ alleine durch E festgelegt. Sei I eine Teilmenge von Γ. Wir bezeichnen E als <u>I-unimodular</u>, wenn für alle $w \notin I$ die modularen Dimensionen $\dim_w E$ Null sind. Die additive Halbgruppe der Isomorphieklassen I-unimodularer Gitter über C nennen wir G(I,C). Zu jedem $w \in I$ induziert die additive Abbildung $\dim_w : G(I,C) \to \mathbb{N}$ eine – ebenfalls mit $\dim_w$ bezeichnete – Abbildung von KG(I,C) in $\mathbb{Z}$.

Sind I, J und M drei Teilmengen von Γ mit $I + J \subset M$, so liefert das Tensorprodukt eine Komposition

(1.12) $\quad KG(I,C) \times KG(J,C) \longrightarrow KG(M,C).$

Insbesondere ($I = M$, $J = \{0\}$) ist jede Gruppe KG(I,C) ein Modul über K(C). Ist I eine Halbgruppe, so ist KG(I,C) eine Algebra über K(C) ($I = J = M$).

Als <u>Wittgruppe</u> WG(I,C) bezeichnen wir den Quotienten von KG(I,C) nach dem K(C)-Teilmodul

$$H(I,C) := A(o,o) \cdot KG(I,C).$$

Die Komposition (1.12) induziert eine entsprechende Komposition

$$WG(I,C) \times WG(J,C) \longrightarrow WG(M,C).$$

Für die Wittalgebra $WG(\Gamma,C)$ über W(C) schreiben wir auch WG(C).

Als <u>metabolische</u> Gitter bezeichnen wir die orthogonalen Summen von Gittern der Gestalt $(\lambda) \otimes A(\alpha, o)$ mit $\lambda \in L^*$, $\alpha \in C$. Sie haben, sofern alle $v(\lambda)$ in I liegen, in WG(I,C) das Bild Null (s. Lemma 1.2a). Doch kann es – in Kontrast zu Satz 1.8 – auch nicht metabolische Gitter mit Bild Null in WG(I,C) geben (s. § 3, Bsp. 3.2 u. Th. 3.3). Das Analogon zu Lemma 1.3 ist i.a. falsch. Aus Hilfssatz 1.4 und Folgerung 1.5 ergeben sich aber sofort die entsprechenden

Aussagen für beliebige Gitter:

Hilfssatz 1.13. Das Tensorprodukt eines metabolischen Gitters mit einem beliebigen Gitter über C ist wieder metabolisch. Insbesondere ist für jedes Gitter E die Summe $E \perp (-E)$ metabolisch.

Die kanonische Abbildung von G(I,C) nach WG(I,C) ist daher surjektiv. Weiter enthalten die Ideale H(I,C) nur Elemente, die sich durch metabolische Gitter repräsentieren lassen. Unter Benutzung der Invarianten $\dim_w$ mit $w \in I$ sehen wir, daß die Gitter $(w') \otimes A(o,o)$ zu den $w \in I$ eine freie Basis von H(I,C) als $\mathbb{Z}$-Modul bilden, und weiter

Satz 1.14. Ein Element aus KG(I,C) ist durch sein Bild in WG(I,C) und seine modularen Dimensionen zu den $w \in I$ eindeutig festgelegt.

Wir werden vorwiegend mit den Wittgruppen arbeiten und die Formulierung der entsprechenden Aussagen über die zugehörigen Grothendieckgruppen i.a. dem Leser überlassen.

Die durch die Abbildung von G(I,C) nach WG(I,C) auf G(I,C) induzierte Äquivalenzrelation läßt sich folgendermaßen beschreiben:

Satz 1.15. Sei I beliebige Teilmenge von Γ. Zwei I-unimodulare Gitter E und F über C haben genau dann gleiches Bild in WG(I,C), wenn es I-unimodulare metabolische Gitter M und N gibt mit $E \perp M \cong F \perp N$.

Beweis: Angenommen, E und F haben gleiches Bild in WG(I,C). Dann dürfen sich die modularen Dimensionen beider Gitter nur um gerade Zahlen unterscheiden. Wir können I-unimodulare metabolische Gitter M_1 und N_1 finden, so daß die modularen Dimensionen von $E \perp M_1$ und $F \perp N_1$ übereinstimmen. Nach Satz 1.14

haben $E \perp M_1$ und $F \perp N_1$ gleiches Bild in $KG(I,C)$. Sie werden also nach Addition eines geeigneten Gitter T isomorph. Mit den metabolischen Gittern $M := M_1 \perp T \perp (-T)$, $N := N_1 \perp T \perp (-T)$ gilt $E \perp M \cong F \perp N$.

q.e.d.

§ 2 Zusammenhang zwischen $WG(C)$ und $WG(C/\mathfrak{p})$.

2 A. Reduktion von Δ-unimodularen Gittern.

Sei Δ eine isolierte Untergruppe von Γ ([B], § 4.2), $\mathfrak{p}$ das zu Δ gehörige Primideal ($\mathfrak{p}$ = Menge der $\lambda \in C$ mit $v(\lambda) > w$ für jedes $w \in \Delta$).
Für ein Δ - unimodulares Gitter E über C ist $B(E,E)$ in der Lokalisierung $C_\mathfrak{p}$ von C nach $\mathfrak{p}$ enthalten. Die Bilinearform B von E induziert daher eine Bilinearform $\bar{B}$ auf $E/\mathfrak{p}E$ über $C/\mathfrak{p}$ mit Werten in dem Quotientenkörper $k(\mathfrak{p}) = C_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}$ von $C/\mathfrak{p}$. Da E ein Δ-unimodulares Gitter ist, hat $\bar{B}$ kein Radikal.

Sei I eine Teilmenge von Δ. Ist E ein I-unimodulares Gitter über C, so ist $E/\mathfrak{p}E$ ein I-unimodulares Gitter über $C/\mathfrak{p}$. (Wir versehen natürlich $k(\mathfrak{p})$ mit der von v induzierten Bewertung $\bar{v}$. Sie hat die Wertegruppe Δ.) Wir haben somit eine - ersichtlich surjektive - Reduktionsabbildung von $G(I,C)$ nach $G(I,C/\mathfrak{p})$. Unser Ziel ist die Bestimmung des Kerns der zugehörigen Abbildung von $WG(I,C)$ auf $WG(I,C/\mathfrak{p})$.

Sei ohne wesentliche Einschränkung der Allgemeinheit $0 \in I$. Die kanonische Abbildung von $W(C)$ in $WG(I,C)$ ist nach Satz 1.8 sicherlich injektiv. Der Kern $W(C,\mathfrak{p})$ der Reduktionsabbildung von $W(C)$ auf $W(C/\mathfrak{p})$ wird dabei in den Kern der Reduktionsabbildung von $WG(I,C)$ auf $WG(I,C/\mathfrak{p})$ abgebildet.

<u>Satz 2.1.</u> Sei $I \subset \Delta$ und $0 \in I$. Dann ist die kanonische Sequenz

$$0 \longrightarrow W(C,\mathfrak{p}) \longrightarrow WG(I,C) \longrightarrow WG(I,C/\mathfrak{p}) \longrightarrow 0$$

exakt.

Zum Beweis benötigen wir folgenden

<u>Hilfssatz 2.2.</u> Sei E ein Δ-unimodulares Gitter über C, $\bar{E}$ seine Reduktion mod $\mathfrak{p}$. Dann läßt sich jede (orthogonale) Zerlegung von $\bar{E}$ in Gitter $\bar{E}_i$ $(i = 1 \ldots r)$ liften zu einer Zerlegung von E in Gitter E_i.

<u>Beweis.</u> Indem wir die Zerlegung von $\bar{E}$ eventuell noch verfeinern, können wir nach Satz 1.9 annehmen, daß alle $\bar{E}_i$ modulare Gitter sind. Wir denken uns die Numerierung der Summanden so gewählt, daß für die Ideale $\bar{\mathfrak{a}}_i := B(\bar{E}_i, \bar{E}_i)$ gilt:

$$\bar{\mathfrak{a}}_1 \supset \bar{\mathfrak{a}}_2 \supset \cdots \supset \bar{\mathfrak{a}}_r .$$

Sei $\mathfrak{a}_i$ das Urbild von $\bar{\mathfrak{a}}_i$ in $C_{\mathfrak{p}}$. Es ist $B(\bar{E},\bar{E}) = \bar{\mathfrak{a}}_1$, also $B(E,E) = \mathfrak{a}_1$. Wir können ein Teilgitter E_1 von E finden, das unter der Reduktionsabbildung von E auf $\bar{E}$ das Bild $\bar{E}_1$ hat, indem wir irgendeine Basis von $\bar{E}_1$ nach E liften. E_1 ist automatisch modular mit der Skala $B(E_1,E_1) = \mathfrak{a}_1$, die als endlich erzeugtes Ideal ein Hauptideal ist. Nach Hilfssatz 1.1 ist $E = E_1 \perp E_1^{\perp}$. Das Gitter $E_1^{\perp}$ liegt über $\bar{E}_2 \perp \ldots \perp \bar{E}_r$. Die Behauptung ergibt sich durch Induktion nach r.

q.e.d.

<u>Beweis von Satz 2.1.</u> Sei E ein I-unimodulares Gitter, dessen Reduktion $\bar{E}$ mod $\mathfrak{p}$ in $WG(I, C/\mathfrak{p})$ das Bild Null hat. Nach Satz 1.15 gibt es ein I-unimodulares metabolisches Gitter $\bar{M}$ über $C/\mathfrak{p}$, so daß auch $\bar{E} \perp \bar{M}$ metabolisch ist. Wir können ein ‖ metabolisches Gitter M über C finden, dessen Reduktion mod $\mathfrak{p}$ zu $\bar{M}$ isomorph ist. Die Reduktion des Gitters $F := E \perp M$ mod $\mathfrak{p}$ läßt sich in binäre metabolische Gitter zerlegen. Wir liften eine solche Zerlegung von $F/\mathfrak{p}F$ aufgrund von Hilfssatz 2.2 zu einer Zerlegung von F und sehen, daß F orthogonale Summe von Gittern der Gestalt $(\gamma) \otimes A(\alpha, \beta)$ mit $\alpha \in \mathfrak{p}$, $\beta \in C$, $v(\gamma) \in I$ ist. Diese binären Gitter erzeugen also additiv den Kern der Reduktionsabbildung von $WG(I,C)$ nach $WG(I, C/\mathfrak{p})$. Nach Lemma 1.2

‖ I-unimodulares

hat aber $(\gamma) \otimes A(\alpha, \beta)$ in $WG(I,C)$ dasselbe Bild wie $A(\gamma^{-1}\alpha, \gamma\beta)$ und es ist $\gamma^{-1}\alpha \in \mathfrak{g}$. Damit ist die Exaktheit der Sequenz in Satz 2.1 bewiesen.

q.e.d.

2 B. Die Abbildung von $WG(C)$ auf $WG(C/\mathfrak{g})\langle\Gamma/\Delta\rangle$.

Wir wollen zunächst den Eindeutigkeitssatz 1.10 für Jordanzerlegungen verallgemeinern. Sei nach wir vor Δ eine isolierte Untergruppe von Γ und $\mathfrak{g}$ das zu Δ gehörige Primideal. Zu jedem $u \in \Gamma/\Delta$ wählen wir uns einen festen Repräsentaten u' in L^*. Aus der Jordan-Zerlegung (1.9.1) eines Gitters E über C erhält man durch Zusammenfassen geeigneter Summanden eine Zerlegung

$$E \cong \coprod_{u \in \Gamma/\Delta} (u') \otimes E_u \tag{2.3}$$

mit Δ-unimodularen Gittern E_u.

Satz 2.4. Die Reduktionen $E_u/\mathfrak{g}E_u$ der Δ-unimodularen Komponenten E_u einer Zerlegung (2.3) hängen bis auf Isomorphie nur von E und dem Repräsentantensystem $\{u'\}_{u \in \Gamma/\Delta}$ ab.

Beweis. (vgl. Bew. v. Satz 1.10). Wir bilden zu vorgegebenem $u_0 \in \Gamma/\Delta$ das Teilgitter $E(u_0)$ aller $x \in E$ mit $B(x,E) \subset u_0' C_{\mathfrak{g}}$. Die Bilinearform des Gitters $(u_0'^{-1}) \otimes E(u_0)$ hat ihre Werte in $C_{\mathfrak{g}}$. Indem wir dieses Gitter modulo $\mathfrak{g}$ reduzieren, erhalten wir ein Gitter über $C/\mathfrak{g}$, das i.a. ein Radikal besitzt. Dividiert man das Radikal heraus, so erhält man bis auf Isomorphie die Reduktion von E_{u_0}.

q.e.d.

Satz 2.4 legt es nahe, über $WG(C/\mathfrak{g})$ die Algebra der endlichen Summen von Ausdrücken $\xi \cdot \langle\lambda\rangle$ zu Elementen ξ aus $WG(C/\mathfrak{g})$, λ aus L^* zu betrachten, mit den Relationen

$$\xi \cdot \langle \eta\lambda \rangle = \xi(\bar{\eta}) \cdot \langle \lambda \rangle$$

‖ $\eta \in$

zu beliebigen ‖ $C^*_{\mathfrak{p}} = v^{-1}(\Delta)$. Dabei bezeichne $\bar{\eta}$ das Bild von η in $k(\mathfrak{p}) = C_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}$, $(\bar{\eta})$ das dazu gehörige eindimensionale Gitter, aufgefaßt als Element von $WG(C/\mathfrak{p})$. Die skalare Multiplikation ‖ mit Elementen aus $WG(C/\mathfrak{p})$ ist in evidenter Weise definiert, die Ringmultiplikation durch

‖ von Elementen ‖ dieser Algebra

$\langle\lambda\rangle\langle\mu\rangle = \langle\lambda\mu\rangle$ $\{\lambda, \mu \in L^*\}$ festgelegt. Wir nennen diese Algebra $WG(C/\mathfrak{p}) \langle \Gamma/\Delta \rangle$. Sie ist das kanonische Tensorprodukt von $WG(C/\mathfrak{p})$ mit dem Gruppenring $\mathbb{Z}[L^*]$ über $\mathbb{Z}[C_{\mathfrak{p}}^*]$.

<u>N.B.2.5.</u> Jedes Repräsentantensystem $\{u'\}$ von Γ/Δ in L^* liefert eine freie Basis $\{\langle u'\rangle\}$ von $WG(C/\mathfrak{p})\langle \Gamma/\Delta \rangle$ als Modul über $WG(C/\mathfrak{p})$. Insbesondere läßt sich $WG(C/\mathfrak{p})$ in kanonischer Weise als Teilring von $WG(C/\mathfrak{p})\langle \Gamma/\Delta \rangle$ auffassen, so daß die Einselemente übereinstimmen. Besitzt Γ/Δ ein gegen Multiplikation abgeschlossenes Repräsentatensystem in L^*, so ist $WG(C/\mathfrak{p})\langle \Gamma/\Delta \rangle$ zu dem Gruppenring $WG(C/\mathfrak{p})[\Gamma/\Delta]$ (unkanonisch) isomorph.

Wir können nun jedem Gitter E über C ein Element $\varphi(E)$ aus $WG(C/\mathfrak{p})\langle \Gamma/\Delta \rangle$ in folgender Weise zuordnen: Man wähle eine Zerlegung (2.3) von E in Gitter $(u') \otimes E_u$ mit Δ-unimodularen E_u. Sei ξ_u das Bild von $E_u/\mathfrak{p}E_u$ in $WG(C/\mathfrak{p})$. Man definiere

$$\varphi(E) := \sum_{u \in \Gamma/\Delta} \xi_u \cdot \langle u' \rangle .$$

Nach Satz 2.4 erhalten wir so eine wohldefinierte Abbildung φ von $G(C)$ auf $WG(C/\mathfrak{p})\langle \Gamma/\Delta \rangle$, die nicht von der Wahl des Repräsentantensystems $\{u'\}$ abhängt. φ ist additiv und multiplikativ und bildet $A(o,o)$ auf Null ab. Sie faktorisiert daher über einen eindeutig bestimmten Ringhomomorphismus

$$\Phi : WG(C) \longrightarrow WG(C/\mathfrak{p})\langle \Gamma/\Delta \rangle .$$

Φ ist ersichtlich surjektiv. Sei jetzt speziell $\mathfrak{p}$ das minimale von Null verschiedene Primideal von C (sofern es dieses gibt). Wir wollen für diesen Fall den Kern von Φ bestimmen. Dazu deuten wir den Wittring $W(C)$ der unimodularen Gitter als Teilring von $WG(C)$. Nach Satz 1.8 ist ja die kanonische Abbildung von $W(C)$ in $WG(C)$ sicher injektiv. Es ist klar, daß der Kern $W(C,\mathfrak{p})$ der Reduktionsabbildung von $W(C)$ auf $W(C/\mathfrak{p})$ in Ker Φ enthalten ist. In Wahrheit sind aber beide Kerne sogar gleich, d.h.

<u>Theorem 2.6.</u> Es gebe in C ein minimales von Null verschiedenes Primideal $\mathfrak{p}$. Sei Δ die zu $\mathfrak{p}$ gehörige isolierte Untergruppe von Γ. Dann ist die kanonische Sequenz

$$0 \longrightarrow W(C,\mathfrak{p}) \longrightarrow WG(C) \xrightarrow{\Phi} WG(C/\mathfrak{p})\langle \Gamma/\Delta \rangle \longrightarrow 0$$

exakt.

<u>Beweis.</u> a) Nach der Definition von Φ ist klar, daß Ker Φ als Ideal erzeugt wird von den Δ-unimodularen Gittern E, deren Reduktionen $E/\mathfrak{p}E$ Bild Null in $WG(C/\mathfrak{p})$ haben. Nach Satz 2.1 (Spezialfall $I = \Delta$) ist somit Ker Φ das von $W(C,\mathfrak{p})$ in $WG(C)$ erzeugte Ideal.

b) Wir müssen einsehen, daß $W(C,\mathfrak{p})$ selbst schon Ideal in $WG(C)$ ist. Dazu führen wir vorübergehend folgende Bezeichnung ein: Wir nennen zwei Gitter E und F über C äquivalent und schreiben $E \sim F$, wenn sie gleiches Bild in $WG(C)$ haben. Im Beweis von Satz 2.1 wurde gezeigt (Spezialfall $I = \{o\}$), daß $W(C,\mathfrak{p})$ additiv erzeugt wird von den Gittern $A(\alpha,\beta)$ mit $\alpha \in \mathfrak{p}$, $\beta \in C$. Wir haben also zu zeigen: Für jedes $\alpha \in \mathfrak{p}$,

$\beta \in \mathfrak{o}$, $\gamma \in L^*$ ist das Gitter $(\gamma) \otimes A(\alpha, \beta)$ zu einem unimodularen Gitter äquivalent.

c) Ist $v(\gamma) \leq v(\alpha)$, so ist nach Lemma 1.2

$$(\gamma) \otimes A(\alpha, \beta) \sim A(\gamma^{-1}\alpha, \gamma\beta),$$

und wir sind fertig. Sei also $v(\gamma) > v(\alpha)$. Dann liefert Lemma 1.2 immerhin

$$(\gamma) \otimes A(\alpha, \beta) \sim (\gamma\alpha^{-1}) \otimes A(1, \alpha\beta).$$

Ist $v(\gamma) \leq 2v(\alpha)$, so teilt $\gamma\alpha^{-1}$ sicher das Element $\alpha\beta$ und wir kommen mit Lemma 1.2 wie zuvor zum Ziel. Ist $v(\gamma) > 2v(\alpha)$, so liefert unser Lemma

$$(\gamma\alpha^{-1}) \otimes A(1, \alpha\beta) \sim (\gamma\alpha^{-2}) \otimes A(\alpha, \beta).$$

Ist auch noch $v(\gamma) > 3v(\alpha)$ so erniedrige man γ um weitere Potenzen von α. Das Verfahren muß nach endlich vielen Schritten abbrechen, da das Bild von $v(\gamma)$ in der archimedischen Gruppe Γ/Δ echt positiv ist.

q.e.d.

§ 3 Zwei Anwendungen

3A. Stabile Äquivalenz. Wir nennen zwei Gitter E und F über C stabil äquivalent, wenn es ein weiteres Gitter T über C mit $E \perp T \cong F \perp T$ gibt, also wenn E und F gleiches Bild in KG(C) haben. Dafür erhalten wir aus dem soeben bewiesenen Theorem 2.6 leicht ein Kriterium. Wir wählen zu jeder isolierten Untergruppe Δ von Γ ein Repräsentantensystem $\{u'\}_{u \in \Gamma/\Delta}$ von Γ/Δ in L^* und zerlegen die vorgegebenen Gitter E und F orthogonal in Gitter $(u') \otimes E_u$, $(u') \otimes F_u$ mit Δ-unimodularen E_u und F_u (s. (2.3), u durchläuft Γ/Δ).

Satz 3.1. C habe endliche Höhe ([B], § 4.4). E ist genau dann stabil äquivalent zu F, wenn gilt:

a) Für jedes $w \in \Gamma$ stimmen die modularen Dimensionen $\dim_w E$ und $\dim_w F$ (s. (1.11)) überein.

b) Für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ und jedes u aus dem Quotienten Γ/Δ nach der $\mathfrak{p}$ entsprechenden isolierten Untergruppe Δ haben die nichtentarteten Räume $E_u \otimes k(\mathfrak{p})$ und $F_u \otimes k(\mathfrak{p})$ gleiches Bild in $W(k(\mathfrak{p}))$. (s.dazu Satz 1.7)

Beweis. Es ist klar, daß ein Paar stabil äquivalenter Gitter E, F die Eigenschaften a) und b) besitzt (s. Satz 2.4). Seien jetzt umgekehrt diese Eigenschaften vorausgesetzt. Aufgrund von a) brauchen wir für den Nachweis der stabilen Äquivalenz nur zu zeigen, daß E und F dasselbe Bild in WG(C) haben (s. Satz 1.14). Indem wir zu dem Gitter $M := E \perp (-F)$ übergehen, stoßen wir auf folgende Aufgabe:

Sei M ein Gitter über C, für das zu beliebigem Primideal $\mathfrak{p}$ von C alle Räume $M_u \otimes k(\mathfrak{p})$ ($u \in \Gamma/\Delta$, Δ = Untergruppe zu $\mathfrak{p}$) Bild Null in $W(k(\mathfrak{p}))$ haben. Man zeige, daß das

Bild ξ von M in WG(C) Null ist.

Den geforderten Beweis führen wir durch Induktion nach der Höhe h von C. Für h = o ist nichts zu tun. Sei h > o. Sei $\mathfrak{q}$ das minimale Primideal $\neq$ o von C, Λ die maximale echte isolierte Untergruppe von Γ. Da $C/\mathfrak{q}$ die Höhe h-1 hat, können wir die Induktionsvoraussetzung auf das Gitter $M_u/\mathfrak{q} M_u$ über $C/\mathfrak{q}$ für jedes $u \in \Gamma/\Lambda$ anwenden. Diese Gitter haben also sämtlich das Bild Null in WG($C/\mathfrak{q}$). Das bedeutet gerade, daß die in § 2B konstruierte Abbildung

$$\Phi : WG(C) \longrightarrow WG(C/\mathfrak{q}) < \Gamma/\Lambda >$$

unser Element ξ auf Null abbildet. ξ stammt nach Theorem 2.6 aus W(C,$\mathfrak{q}$). Da sich andrerseits W(C) in W(L) injiziert und ξ in W(L) das Bild Null hat, (Voraussetzung zum Primideal $\mathfrak{p}$= o) muß ξ = o sein.

q.e.d.

Jetzt läßt sich auch leicht ein Gitter angeben, das nicht metabolisch ist, aber trotzdem in WG(C) das Bild Null hat.

<u>Beispiel 3.2.</u> (vgl. dazu Satz 5.9). Sei C diskreter Bewertungsring mit $2 \in \mathfrak{m}$. Sei π ein Primelement von C. Nach Satz 3.1 ist das Gitter

$$(3.2.1) \qquad E: = A(\pi,-1) \perp (\pi^2) \otimes A(-\pi,1)$$

stabil äquivalent zu $A(o,o) \perp (\pi^2) \otimes A(o,o)$, hat also in WG(C) das Bild Null. Wäre E metabolisch, so müßte der Raum $E/\mathfrak{m}^2 E$ über $C/\mathfrak{m}^2$ nach Herauskürzen seines Radikals die Gestalt $A(\bar{\lambda},o)$ mit $\bar{\lambda} \in C/\mathfrak{m}^2$ haben. (Man betrachte dazu eine Jordan-Zerlegung von E mit metabolischen unimodularen Komponenten.) Wir hätten also aufgrund der Zerlegung (3.2.1) eine

Isomorphie

$$A(\pi,-1) \cong A(\lambda, \mu\pi^2)$$

mit geeigneten $\lambda, \mu \in C$. Vergleich der Determinanten zeigt, daß $1+\pi$ und $1-\lambda\mu\pi^2$ gleiches Bild in $\underbrace{C^*/C^{*2}}$ haben müßten. Da $2 \in m$ ist, läßt sich dies leicht widerlegen. E ist also sicher nicht metabolisch.

<u>3B. WG(I,C) für konvexes I.</u> Wir bringen eine weitere Anwendung der in § 2B konstruierten Abbildung Φ. Eine Teilmenge I von Γ heiße <u>konvex</u>, falls I mit zwei Elementen $u<v$ auch jedes $w \in \Gamma$ enthält, für das $u<w<v$ ist. Unser Ziel ist der Beweis von

<u>Theorem 3.3.</u> Die Höhe h des Bewertungsringes C sei endlich. Dann ist für jedes konvexe $I \subset \Gamma$ die kanonische Abbildung von WG(I,C) nach WG(C) injektiv.

<u>N.B. 3.4.</u> Aufgrund von Satz 1.14 ist dieses Theorem zu folgender Aussage gleichwertig: Gibt es zu I-unimodularen Gittern E und F über C ein Gitter M mit $E \perp M \cong F \perp M$, so gibt es - bei endlichem h und konvexem I - sogar ein I-unimodulares Gitter M' mit $E \perp M' \cong F \perp M'$.

Wir beweisen Theorem 3.3 durch Induktion nach h. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, daß $o \in I$ ist. Im Falle h = o ist nichts zu zeigen. C habe jetzt eine Höhe $h > o$. Für kleinere Höhen wird der Satz als richtig vorausgesetzt.

Sei ξ ein Element von WG(I,C), dessen Bild η in WG(C) Null ist. ξ werde durch das I-unimodulare Gitter E repräsentiert. Sei $\mathfrak{p}$ das minimale von Null verschiedene Primideal von C, Δ die maximale echte isolierte Untergruppe von Γ,

$\{u'\}_{u \in \Gamma/\Delta}$ ein Repräsentantensystem von Γ/Δ in L^*. Wir zerlegen E irgendwie orthogonal in Gitter $(u') \otimes E_u$ mit Δ-unimodularen Gittern E_u. Dabei brauchen wir u nur die Bildmenge $\hat{I}$ von I in Γ/Δ durchlaufen zu lassen. Das Urbild jedes $u \in \hat{I}$ in I ist von der Form $v(u') + J_u$ mit einer wiederum konvexen Teilmengen J_u von Δ. Jedes E_u ist J_u-unimodular.

Die Reduktionen $E_u/\mathfrak{p}E_u$ (s. § 2A) haben für alle $u \in \hat{I}$ das Bild Null in $WG(C/\mathfrak{p})$, denn für die in § 2B definierte Abbildung

$$\Phi : \quad WG(C) \longrightarrow WG(C/\mathfrak{p})\langle \Gamma/\Delta \rangle$$

ist $\Phi(\eta) = o$, da sogar $\eta = o$ ist. Nach Induktionsvoraussetzung sind aber die kanonischen Abbildungen von den $WG(J_u, C/\mathfrak{p})$ nach $WG(C/\mathfrak{p})$ injektiv. Jedes Gitter $E_u/\mathfrak{p}E_u$ hat also sogar Bild Null in $WG(J_u, C/\mathfrak{p})$.

Wie im Beweis von Satz 2.1 gezeigt wurde, läßt sich für jedes $u \in \hat{I}$ ein metabolisches J_u-unimodulares Gitter M_u über C finden, so daß $E_u \perp M_u$ orthogonale Summe von Gittern der Gestalt $(\delta) \otimes A(\alpha, \beta)$ mit $\alpha \in \mathfrak{p}$, $\beta \in C$, $v(\delta) \in J_u$ ist. Da fast alle $E_u = o$ sind, können wir auch fast alle $M_u = o$ wählen. Indem wir zu E die orthogonale Summe der $(u') \otimes M_u$ mit $u \in \hat{I}$ addieren, repräsentieren wir ξ durch eine Summe von Gittern der Gestalt $(\gamma) \otimes A(\alpha, \beta)$ mit $\alpha \in \mathfrak{p}$, $\beta \in C$, $v(\gamma) \in I$.

Jetzt läßt sich zeigen, daß ξ im Bild der kanonischen Abbildung von $W(C, \mathfrak{p})$ nach $WG(I, C)$ liegt. Man braucht dazu nur Teil c) des Beweises von Theorem 2.6 zu wiederholen, wobei aber jetzt das Zeichen $\sim$ als die Äquivalenzrelation "gleiches Bild in $WG(I,C)$" zu lesen ist. Jedesmal, wenn dort Lemma 1.2 benutzt wird, ist man sicher daß alle auftretenden Gitter I-modular sind, weil I konvex und $o \in I$ ist. Da die kanonische Abbildung von $W(C, \mathfrak{g})$ nach $WG(C)$ injektiv ist (s. Satz 1.8) muß $\xi = o$ sein. Theorem 3.3 ist bewiesen.

§ 4 Lokalisationen

4A. Zusammenhang zwischen WG(C) und WG($C_{\mathfrak{p}}$).

Sei $\mathfrak{p}$ ein beliebiges Primideal von C mit zugehöriger isolierter Untergruppe Δ von Γ. Die durch Lokalisation der Gitter über C nach der Halbgruppe $C \setminus \mathfrak{p}$ entstehende Abbildung von WG(C) nach WG($C_{\mathfrak{p}}$) ist ersichtlich surjektiv. Wir wollen ihren Kern bestimmen. Sicherlich umfaßt dieser das Ideal P(C,Δ), welches die Elemente $(\eta^2)-1$ mit $\eta \in v^{-1}(\Delta)$ in WG(C) erzeugen.

<u>Theorem 4.1.</u> Hat C endliche Höhe, so ist für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ von C und die zugehörige isolierte Untergruppe Δ von Γ die kanonische Sequenz

$$o \longrightarrow P(C,\Delta) \longrightarrow WG(C) \longrightarrow WG(C_{\mathfrak{p}}) \longrightarrow o$$

exakt.

<u>Beweis.</u> (s. Bem. 5.10 für kürzeren Beweis, falls C diskret.)

a) Seien $\mathfrak{p} > \mathfrak{q}$ zwei verschiedene Primideale von C und $\Delta \subset \Lambda$ die zugehörigen isolierten Untergruppen von Γ. Dann ist $C_{\mathfrak{p}}$ Bewertungsring mit der Wertegruppe Γ/Δ und $\mathfrak{q}$ auch Primideal von $C_{\mathfrak{p}}$ mit zugehöriger Untergruppe Λ/Δ. Weiß man, daß P(C,Δ) der Kern von WG(C) $\longrightarrow$ WG($C_{\mathfrak{p}}$) und P($C_{\mathfrak{p}}$, Λ/Δ) der Kern von WG($C_{\mathfrak{p}}$) $\longrightarrow$ WG($C_{\mathfrak{q}}$) ist, so ist klar, daß P(C,Λ) der Kern von WG(C) $\longrightarrow$ WG($C_{\mathfrak{q}}$) ist, weil die Abbildung von P(C,Λ) nach P($C_{\mathfrak{p}}$, Λ/Δ) surjektiv ist. Weiter ist Theorem 4.1 inhaltsleer, falls $\mathfrak{p}$ das maximale Ideal $\mathfrak{m}$ von C ist. Wir brauchen daher nur den Fall zu betrachten, daß C eine Höhe h > o besitzt und $\mathfrak{p}$ das maximale Primideal unterhalb $\mathfrak{m}$ ist. Dies sei im folgenden vorausgesetzt.

b) Betrachten wir zunächst den Fall $h = 1$! (vgl. [K] III, Bew. v. Satz 12.2.1.) Dann ist $\mathfrak{g} = o$ und $\Delta = \Gamma$.

Als Länge $l(E)$ eines Gitters über C bezeichnen wir vorübergehend die Anzahl der $w \in \Gamma$ mit $\dim_w E \neq o$ (s. (1.11)). Als Länge $l(\xi)$ eines $\xi \in WG(C)$ bezeichnen wir das Minimum der Längen aller Gitter, die ξ repräsentieren. Angenommen unsere Behauptung ist falsch. Wir suchen im Kern der Abbildung $WG(C) \longrightarrow WG(L)$ ein nicht in $P(C, \Gamma)$ gelegenes Element ξ von minimaler Länge l.

ξ läßt sich durch ein Gitter E der Gestalt

$$(4.2.) \qquad E = \perp_{u \in \Gamma/2\Gamma} (u') \otimes E_u$$

repräsentieren, wobei $\{u'\}_{u \in \Gamma/2\Gamma}$ ein geeignetes Repräsentantensystem von $\Gamma/2\Gamma$ in L^* ist, und die E_u unimodulare Gitter sind, von denen genau l Stück nicht verschwinden. Indem wir ξ eventuell mit einem eindimensionalen Gitter tensorieren, erreichen wir, daß $E_o \neq o$ und $o' = 1$ ist. Jedes E_u hat eine Zerlegung $E_u' \perp M_u$, so daß $E_u' \otimes k$ über $k := C/\mathfrak{m}$ anisotrop und $M_u \otimes k$ metabolisch ist. (Man benutze Lemma 1.6 für k und Hfs. 2.2 für $I = \{o\}$.) Nach Theorem 2.6 läßt sich nun $W(C, \mathfrak{m})$ als Ideal von $WG(C)$ auffassen. Daher können wir, ohne ξ zu ändern, in (4.2) die M_u mit $u \neq o$ weglassen, wenn wir gleichzeitig zu E_o ein geeignetes Gitter addieren. Dabei vergrößert sich die Länge von E nicht. Schließlich können wir bei E_o einen etwa vorhandenen metabolischen orthogonalen Summanden weglassen. Wir können also annehmen, daß in der Zerlegung (4.2) alle $E_u \otimes k$ mit $u \neq o$ anisotrop sind und daß E_o anisotrop und von Null verschieden ist.

ξ hat in $W(L)$ das Bild Null. Die Räume $-E_o \otimes L$ und

$$V := \perp_{u \neq o} (u') \otimes E_u \otimes L$$

haben also gleiches Bild in $W(L)$. Nun ist jeder Raum $E_u \otimes L$ mit $u \neq o$ anisotrop und stellt nur Elemente $\lambda \in L^*$ mit $v(\lambda) \in 2\Gamma$ dar. Nach dem Dominanzprinzip für Bewertungen ist V anisotrop und kann keine Elemente mit Wert in 2Γ darstellen. Da auch $-E_o \otimes L$ anisotrop ist, muß dieser Raum zu V sogar isomorph sein.

Insbesondere darf E_o keine Einheiten darstellen. Daraus gewinnen wir den gesuchten Widerspruch: $E_o \otimes k$ muß von der Form $r \times A(o,o)$ sein (und k muß Charakteristik 2 haben). Sei u_o ein von Null verschiedenes Element von $\Gamma/2\Gamma$, für das $E_{u_o} \neq o$ ist (gibt's, da $V \neq o$). Wir können, wieder nach Theorem 2.6, in (4.2) das Gitter E_o fortlassen, wenn wir gleichzeitig ein geeignetes unimodulares Gitter zu E_{u_o} addieren, ohne daß sich das Bild ξ in $WG(C)$ ändert. ξ müßte eine Länge $\leq l-1$ haben, entgegen unserer Annahme.

c) Wir führen den Beweis im allgemeinen Falle durch Induktion nach der Höhe h. Sei $h > 1$. Dann umfaßt $\mathfrak{p}$ das minimale Primideal $\mathfrak{q} \neq o$ von C (evtl. $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$). $\mathfrak{q}$ ist auch in dem Bewertungsring $C_{\mathfrak{p}}$ das minimale von Null verschiedene Primideal. Λ bezeichne die maximale echte isolierte Untergruppe von Γ. Die exakten Sequenzen aus Theorem 2.6 zu C und $C_{\mathfrak{p}}$ lassen sich durch ein kanonisches kommutatives Diagramm verbinden:

(4.3)
$$\begin{tikzcd}
o \arrow[r] & W(C,\mathfrak{q}) \arrow[r] \arrow[d, "\lambda"'] & WG(C) \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\mu"'] & WG(C/\mathfrak{q})\langle \Gamma/\Lambda \rangle \arrow[r] \arrow[d, "\nu"'] & o \\
o \arrow[r] & W(C_{\mathfrak{p}},\mathfrak{q}) \arrow[r] & WG(C_{\mathfrak{p}}) \arrow[r] & WG(C_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{q})\langle \Gamma/\Lambda \rangle \arrow[r] & o
\end{tikzcd}$$

Dabei ist μ die Abbildung, deren Kern wir bestimmen wollen. γ ist die evidente Fortsetzung der entsprechenden Abbildung μ' von $WG(C/\mathfrak{q})$ auf $WG(C_{\mathfrak{g}}/\mathfrak{q})$ zu einem Ringhomomorphismus von $WG(C/\mathfrak{q})\langle\Gamma/\Lambda\rangle$ auf $WG(C_{\mathfrak{g}}/\mathfrak{q})\langle\Gamma/\Lambda\rangle$. Wir wenden auf μ' die Induktionsvoraussetzung an und erkennen, daß $\mathrm{Ker}(\gamma)$ als Ideal erzeugt wird von den Elementen $(\bar{\eta}^2)-1$ aus $WG(C/\mathfrak{q})$ zu den Bildern $\bar{\eta}$ der $\eta\in v^{-1}(\Delta)$ in $C_{\mathfrak{g}}/\mathfrak{q}$ (s. N.B. 2.5). Daher hat $P(C,\Delta)$ unter Φ als Bild ganz $\mathrm{Ker}(\gamma)$. Da λ injektiv ist (s. Satz 1.8), muß andrerseits $\mathrm{Ker}(\mu)$ unter Φ injektiv abgebildet werden. Es muß also $\mathrm{Ker}(\mu) = P(C,\Delta)$ sein, q.e.d.

Bemerkung 4.4. Die exakte Ker-Koker-Sequenz zu dem Diagramm (4.3) liefert überdies, daß λ auch surjektiv ist. Das kann man leicht direkt sehen: Sind α,β,γ Elemente aus C mit $\beta\in\mathfrak{q}$, $v(\gamma)\in\Delta$, so ist das Gitter $A(\gamma^{-1}\alpha,\beta)$ über $C_{\mathfrak{g}}$ isomorph zu $A(\gamma\alpha,\gamma^{-2}\beta)$ und es ist auch $\gamma^{-2}\beta\in\mathfrak{q}$.

4B. Beziehungen zwischen den Wittringen der Restklassenkörper.

Sei $\mathfrak{g}$ das minimale Primideal $\neq o$ von C (sofern vorhanden), Δ die zu $\mathfrak{g}$ gehörige isolierte Untergruppe von Γ.
Indem wir Theorem 2.6 und Theorem 4.1 auf den Bewertungsring C der Höhe 1 mit Wertegruppe Γ/Δ anwenden, gewinnen wir sofort eine Beziehung zwischen $W(L)$ und $W(k(\mathfrak{g}))$, die schon in [K], § 12- ohne Benutzung des Ringes $WG(C_{\mathfrak{g}})$ - hergeleitet wurde.

Nach Theorem 2.6 haben wir unter Berücksichtigung der soeben gemachten Bemerkung 4.4 eine kanonische exakte Sequenz

$$(4.5)\qquad o\to W(C,\mathfrak{g})\to WG(C_{\mathfrak{g}})\xrightarrow{\Phi} W(k(\mathfrak{g}))\langle\Gamma/\Delta\rangle\to o$$

Dividieren wir im mittleren Term das Ideal $P(C_{\mathfrak{g}},\Gamma/\Delta)$ heraus, welches die Elemente $(\lambda^2)-1$ mit $\lambda \in L^*$ erzeugen, so erhalten wir den Ring $W(L)$ (s. Theorem 4.1). Da sich $W(C,\varphi)$ auch in $W(L)$ injiziert (s. Satz 1.8), führt unsere Sequenz (4.5) sofort zu einer exakten Sequenz

$$o \rightarrow W(C,\varphi) \rightarrow W(L) \xrightarrow{\psi} M \rightarrow o,$$

in der M der Quotient von $W(k(\varphi))\langle\Gamma/\Delta\rangle$ nach $\Phi(P(C_\varphi, \Gamma/\Delta))$ ist, und ψ durch Φ induziert wird.

Sehen wir uns die Algebra M über $W(k(\varphi))$ näher an! Ihre Elemente sind endliche Summen von Ausdrücken $\xi\cdot\langle\lambda\rangle$ mit $\xi \in W(k(\varphi))$, $\lambda \in L^*$ und den Relationen

$$\langle\eta\lambda\rangle = (\bar{\eta})\cdot\langle\lambda\rangle \quad , \langle\lambda^2\rangle = \langle 1\rangle .$$

$\{\lambda \in L^*, \eta \in v^{-1}(\Delta), \bar{\eta} =$ Bild von η in $k(\varphi).\}$ Die skalare Multiplikation und die Ringmultiplikation von M sind in evidenter Weise erklärt. Wir schreiben für die Quadratklassengruppe D^*/D^{*2} eines Bewertungsringes D kurz Q(D) und sehen, daß M isomorph ist zu dem kanonischen Tensorprodukt von $W(k(\varphi))$ mit dem Gruppenring $\mathbb{Z}[Q(L)]$ über $\mathbb{Z}[Q(C_\varphi)]$. Diese Algebra über $W(k(\varphi))$ nennen wir $W(k(\varphi))\langle Q(L)\rangle$. Wir können zu der durch die Bewertung v induzierten Abbildung von Q(L) auf $\Gamma/2\Gamma+\Delta$ einen multiplikationstreuen Schnitt

$$s: \Gamma/_{2\Gamma+\Delta} \longrightarrow Q(L)$$

finden, da beide abelschen Gruppen den Exponenten 1 oder 2 haben. $W(k(\varphi))\langle Q(L)\rangle$ ist freier $W(k(\varphi))$-Modul über den Elementen $\langle s(u)\rangle$ mit $u \in \Gamma/_{2\Gamma+\Delta}$. Diese Algebra ist also zu dem Gruppenring $W(k(\varphi))[\Gamma/_{2\Gamma+\Delta}]$ (unkanonisch) isomorph.

Wir fassen die zuvor angestellten Überlegungen zusammen:

<u>Satz 4.6.</u> Es gebe in C ein minimales Primideal $\mathfrak{p} \neq o$.

i) Dann existiert ein Ringhomomorphismus Ψ von $W(L)$ auf $W(k(\mathfrak{p}))\langle Q(L)\rangle$, der durch die folgenden beiden Eigenschaften festgelegt ist:

a) Das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} W(C_{\mathfrak{p}}) & \longrightarrow & W(k(\mathfrak{p})) \\ \downarrow & & \downarrow \\ W(L) & \xrightarrow{\Psi} & W(k(\mathfrak{p}))\langle Q(L)\rangle \end{array}$$

mit kanonischen unbezeichneten Pfeilen ist kommutativ.

b) Ψ bildet das von einem eindimensionalen Raum (λ) mit $\lambda \in L^*$ gelieferte Element von $W(L)$ auf $\langle\lambda\rangle$ ab.

ii) Die kanonische Sequenz

$$o \to W(C,\mathfrak{p}) \to W(L) \xrightarrow{\Psi} W(k(\mathfrak{p}))\langle Q(L)\rangle \to o$$

ist exakt.

Ist C Bewertungsring endlicher Höhe, so kann man durch mehrfache Anwendung dieses Satzes die Wittringe sämtlicher Restklassenkörper von C zueinander in Beziehung setzen.

§ 5 Ergänzende Betrachtungen.

5A. Zur Abrundung unserer bisherigen Untersuchungen erscheint es mir angebracht, den Leser davon zu überzeugen, daß der Kürzungssatz von O'Meara ([OM], 93:14a) über beliebigen Bewertungsringen gültig bleibt. Dazu würde die Aufforderung genügen, einen Blick auf den Beweis dieses Satzes in [OM] zu werfen. Doch möchte ich die Gelegenheit benutzen, sogar über semilokalen Ringen einen ähnlichen Kürzungssatz herzuleiten (vgl. [K], § 6).

Zunächst darf C ein beliebiger kommutativer Ring mit Einselement sein. L sei der totale Quotientenring von C, d.h. die Lokalisierung $S^{-1}C$ nach der Halbgruppe S der Nichtnullteiler von C.
Als <u>Gitter</u> über C bezeichnen wir jeden endlich erzeugten projektiven C-Modul M, der mit einer symmetrischen bezgl. C bilinearen Form $B: M \times M \rightarrow L$ versehen ist.

Wir wollen einige der in $[K]_1$, § 2 für quadratische Formen benutzte Begriffe auf symmetrisch bilineare Formen übertragen. Sei M ein Gitter über C und (f, g, λ) ein Tripel aus $M \times M \times C$ mit $B(f,M) \subset C$, $B(g,M) \subset C$, $B(f,f) = B(f,g) = o$, $B(g,g) = 2\lambda$. Man rechnet leicht nach, daß die für alle $x \in M$ durch

$$E(f,g,\lambda)(x) = x + B(x,g)f - B(x,f)g - \lambda B(x,f)f$$

definierte <u>"Siegeltransformation"</u> $E(f,g,\lambda)$ von M in sich mit der Bilinearform B verträglich ist.
Ist (f,g',λ') ein weiteres Tripel aus $M \times M \times C$, für das $E(f,g',\lambda')$ definiert ist, so gilt

$$E(f,g,\lambda) \circ E(f,g',\lambda') = E(f,g+g',\lambda+\lambda'+B(g,g')).$$

Insbesondere hat $E(f,g,\lambda)$ ein inverses, nämlich $E(f,-g,\lambda)$, ist also ein Automorphismus von M.

Wir nennen ein Paar (f_1,f_2) von Vektoren aus M <u>hyperbolisches Vektorpaar,</u> wenn

$$B(f_1,f_1) = B(f_2,f_2) = 0, \qquad B(f_1,f_2) = 1$$

und $H := Cf_1 + Cf_2$ orthogonaler direkter Summand von M ist (d.h. $B(H,M) \subset C$, s. Hfs. 1.1). Zu jedem $\varepsilon \in C^*$ bezeichnen wir mit $R(\varepsilon, f_1,f_2)$ den Automorphismus von M, der f_1 auf εf_1 und f_2 auf $\varepsilon^{-1} f_2$ abbildet und die Vektoren aus $H^\perp$ festläßt. Für ein Ideal $\mathfrak{a}$ von C bezeichne $D(f_1,f_2,\mathfrak{a})$ die von den Automorphismen $R(\varepsilon, f_1,f_2)$ mit $\varepsilon \equiv 1 \bmod \mathfrak{a}$ und $E(f_i,g,\lambda)$ mit $i = 1,2$, $g \in \mathfrak{a}H^\perp$, $\lambda \in \mathfrak{a}$ erzeugte Gruppe. Anstelle von $D(f_1,f_2,C)$ schreiben wir auch kürzer $D(f_1,f_2)$. Den Automorphismus von M, der $H^\perp$ elementweise festläßt und f_1 mit f_2 vertauscht, bezeichnen wir mit $\tau(f_1,f_2)$.

Durch Übertragung des Beweises von Teil a) und des Lemmas 2.1 aus $[K]_1$ erhalten wir mühelos die Teile a) und b) von

<u>Lemma 5.1.</u> Sei (f_1,f_2) hyperbolisches Vektorpaar in einem beliebigen Gitter M über C.

a) Ist $\mathfrak{a}$ ein im Jacobson-Radikal $\mathfrak{r}$ von C enthaltenes Ideal, so operiert $D(f_1,f_2,\mathfrak{a})$ transitiv auf der Menge aller zu (f_1,f_2) modulo $\mathfrak{a}$ kongruenten hyperbolischen Vektorpaare von M.

b) Ist C lokaler Ring, so operiert die von $D(f_1,f_2)$ und $\tau(f_1,f_2)$ erzeugte Gruppe transitiv auf der Menge aller hyperbolischen Vektorpaare von C.

c) Ist C semilokal, d.h. besitzt C nur endlich viele maximale Ideale $\mathfrak{m}_1, \ldots \mathfrak{m}_r$, und enthält das orthogonale Komplement $H^{\perp}$ von $H := Cf_1 + Cf_2$ bezgl. M einen Vektor g, für den $B(g,E) \subset C$ und $B(g,g) = 2\eta$ mit $\eta \in C^*$ ist, so operiert $D(f_1,f_2)$ transitiv auf der Menge aller hyperbolischen Vektorpaare von M.

Zum Beweis Teiles c) können wir den Beweis des entsprechenden Teiles von [K]$_1$, Lemma 2.1 nicht unmittelbar heranziehen, da die Siegeltransformationen sich jetzt bei "Liftungen" weniger angenehm verhalten.
Wir gehen folgendermaßen vor:
Sei

$$f_1' = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + x, \quad f_2' = \beta_1 f_1 + \beta_2 f_2 + y$$

ein beliebig vorgegebenes weiteres hyperbolisches Vektorpaar aus M (mit $\alpha_i, \beta_i \in C$ und $x,y \in H^{\perp}$). Wir wollen durch Anwendung von Automorphismen $E(f_i, h, \lambda)$ ($i = 1,2$, $h \in H^{\perp}$, $\lambda \in C$) auf (f_1', f_2') erreichen, daß der Koeffizient α_1 eine Einheit wird. Dann ist es leicht, dieses Paar in (f_1,f_2) zu überführen (s. [K]$_1$, Beginn des Bew. v. Lemma 2.1). Man halte sich im Folgenden vor Augen, daß $E(f_1,h,\lambda)$ den Vektor f_1' auf $\tilde{f}_1 = \tilde{\alpha}_1 f_1 + \tilde{\alpha}_2 f_2 + \tilde{x}$ mit

$$\tilde{\alpha}_1 = \alpha_1 - \lambda\alpha_2 + B(x,h)$$

$$\tilde{\alpha}_2 = \alpha_2$$

$$\tilde{x} = -\alpha_2 h + x$$

abbildet.

Zunächst wenden wir auf (f_1',f_2') eine Transformation $E(f_1, \varrho y, -\varrho^2\beta_1\beta_2)$ mit $\varrho \in C$ an. Dabei wählen wir ϱ so, daß für jedes $\mathfrak{m}_i$ ($i = 1,\ldots r$) gilt: $\varrho \equiv 1 \bmod \mathfrak{m}_i$, falls $\alpha_1 \equiv \alpha_2 \equiv 0 \bmod \mathfrak{m}_i$, $\varrho \equiv 0 \bmod \mathfrak{m}_i$ sonst. Dadurch erreichen wir, daß für das neue Paar keines der Ideale $\mathfrak{m}_i$ die Koeffizienten α_1 und α_2 beide enthält. $\{$Nach jeder Transformation bezeichnen wir das aus (f_1', f_2') entstehende Paar wieder mit (f_1', f_2') und die zugehörigen Koeffizienten wieder mit $\alpha_i, \beta_i, x, y.\}$ Unter Benutzung einer Transformation $E(f_1, \xi x, -\xi^2\alpha_1\alpha_2)$ mit $\xi\alpha_2 \equiv 1 \bmod \mathfrak{m}_i$, falls $\alpha_2 \not\equiv 0 \bmod \mathfrak{m}_i$, $\xi \equiv 0 \bmod \mathfrak{m}_i$ sonst $(i = 1,\ldots r)$, erreichen wir, daß überdies für jedes $\mathfrak{m}_i$ mit $\alpha_2 \equiv 0 \bmod \mathfrak{m}_i$ der Vektor x in $\mathfrak{m}_i E$ enthalten ist. Mit einer Transformation $E(f_2, \xi' x, -\xi'^2\alpha_1\alpha_2)$ ähnlicher Art gelangen wir schließlich zu einem Paar (f_1', f_2'), für das x in jedem $\mathfrak{m}_i E$ liegt. Jetzt wenden wir einen Automorphismus $E(f_1, \zeta g, \zeta^2\eta)$ an, mit dem in der Behauptung genannte Paar (g, η) aus $H^{\perp} \times C^*$. Dabei schreiben wir vor: $\zeta \equiv 1 \bmod \mathfrak{m}_i$, falls $\alpha_1 \equiv 0 \bmod \mathfrak{m}_i$, $\zeta \equiv 0 \bmod \mathfrak{m}_i$ sonst $(i=1,\ldots r)$. Für das so entstehende hyperbolische Vektorpaar ist der Koeffizient α_1 in der Tat eine Einheit. Damit ist der letzte Teil von Lemma 5.1 bewiesen.

Als Norm $\mathfrak{n}E$ eines Gitters E bezeichnen wir wie üblich das von den Werten $B(x,x)$ mit $x \in E$ in L erzeugte Ideal von C. Ist E unimodular, so liegt $\mathfrak{n}E$ zwischen C und 2C.

Theorem 5.2 (vgl. [OM] , 93:14). E und F seien beliebige Gitter, J sei unimodulares Gitter über C mit der Norm 2C. Es gelte weiter eine der beiden folgenden Voraussetzungen:

a) C ist lokal.

b) C ist semilokal; E enthält einen Vektor g, für den $B(g,E) \subset C$ und $B(g,g) = 2\eta$ mit $\eta \in C^*$ ist.

Behauptung. Ist $E \perp J \cong F \perp J$, so ist $E \cong F$.

Beweis. A fortiori ist $E \perp J \perp (-J)$ zu $F \perp J \perp (-J)$ isomorph. Bei semilokalem C ist $J \perp (-J)$ orthogonale Summe von Gittern der Gestalt $A(2\lambda, o)$ mit $\lambda \in C$. Ist (x,y) ein Paar von Vektoren aus $J \perp (-J)$ mit Wertematrix $A(2\lambda, o)$ so ist $(x-\lambda y, y)$ hyperbolisches Vektorpaar. $J \perp (-J)$ ist also isomorph zu einem Gitter $r \times A(o,o)$. Wir können uns somit auf den Fall $J = A(o,o)$ zurückziehen. Die Behauptung folgt jetzt unmittelbar aus Lemma 5.1 b) und c). {Teil a) des Lemmas wird in dieser Arbeit nicht gebraucht.} q.e.d.

N.B. 5.3. Ist C Bewertungsring und 2 Einheit in C, so folgt mit Satz 1.9, daß in G(C) die Kürzungsregel gilt ([D] , falls C komplett). Hat C überdies endliche Höhe, so können wir also die Gitter über C aufgrund von Satz 3.1 weitgehend klassifizieren.

Hilfssatz 5.4. ([OM] 93:12, vgl. [K] , Lemma 3.4.3.) Sei J unimodularer orthogonaler Summand eines Gitters E über C, der eine freie Basis (u_1, u_2) mit Wertematrix $A(\alpha, o)$ besitzt $(\alpha \in C)$. Sei g eine Vektor aus dem orthogonalen Komplement $J^{\perp}$ in E mit $B(g,E) \subset C$. Dann ist auch $J' := C(u_1+g) + Cu_2$ orthogonaler Summand von E (s. Hfs. 1.1) und die Komplemente $J^{\perp}$ und $J'^{\perp}$ sind isomorph.

Beweis. Wir definieren lineare Abbildungen $\varphi : J^{\perp} \to J'^{\perp}$ und $\psi : J'^{\perp} \to J^{\perp}$ durch

$$\varphi(z) = z - B(z,g)\, u_2 \qquad (z \in J^{\perp})$$

und

$$\psi(z') = z' + B(z',g)\, u_2 \qquad (z' \in J'^{\perp}).$$

φ und ψ sind zueinander invers und mit B verträglich.

q.e.d.

Zu jedem $\lambda \in L^*$ bezeichne $E(\lambda)$ den Teilmodul aller x aus E mit $B(x,E) \subset \lambda C$, versehen mit der Einschränkung der Bilinearform von E.
Die <u>Normgruppe</u> $\mathfrak{g}E(\lambda)$ sei die von den Werten $B(x,x)$ mit $x \in E(\lambda)$ additiv in λC erzeugte abelsche Gruppe.

Aus Hilfssatz 5.4 ergibt sich unmittelbar folgende Präzisierung des früheren Lemmas 1.2a:

<u>Hilfssatz 5.5.</u> (vgl. [OM] S. 257/258).
Das Gitter M über C besitze eine Zerlegung

$$M \cong A(\lambda_1,o) \perp \ldots\ldots \perp A(\lambda_r,o).$$

E sei ein Gitter über C mit $\mathfrak{g}E(1) \supset \mathfrak{g}M$. Dann ist $E \perp M \cong E \perp r \times A(o,o)$.

Aufgrund dieses Hilfssatzes läßt sich Theorem 5.2 verallgemeinern zu

<u>Satz 5.6.</u> (vgl. [OM] 93: 14a.) Unter den in Theorem 5.2 angegebenen Voraussetzungen a) oder b) bleibt die dortige Behauptung richtig, falls für das unimodulare Gitter J anstelle von $\mathfrak{n}J = 2C$ nur gilt:

$$\mathfrak{g}J \subset \mathfrak{g}E(1) \cap \mathfrak{g}F(1).$$

<u>Beweis.</u> J habe die Dimension r. Nach Hilfssatz 5.5 ist bei semilokalem C sicherlich $E \perp J \perp (-J) \cong E \perp r \times A(o,o)$ und ebenso $F \perp J \perp (-J) \cong F \perp r \times A(o,o)$. Man wende Theorem 5.2 an!

q.e.d.

<u>Bemerkung 5.7.</u> Aus dem Hilfssatz 5.5 ergibt sich weiter leicht: Sind zwei unimodulare Gitter E und F über einem beliebigen Bewertungsring stabil äquivalent (s. § 3A), so sind

sie genau dann isomorph, wenn $\mathfrak{g}E = \mathfrak{g}F$ ist. (s. Bew. v. Satz 5.10 weiter unten, od. [OM] 93:16, [K] I, Satz 6.2.2.).

5B Ausgeglichene Gitter. Sei C jetzt diskreter Bewertungsring, π ein Primelement von C. Wir nennen ein Gitter über C ausgeglichen, wenn für alle $\nu \in \mathbb{Z} \setminus \{o,1\}$ die modularen Dimensionen $\dim_\nu E$ (s. (1,11)) verschwinden. Dies läßt sich auch so ausdrücken: Man denke sich E in V: $= E \otimes L$ eingebettet und bezeichne mit $\tilde{E}$ das Gitter aller $x \in V$, für die $B(x,E) \subset C$ ist. E ist genau dann ausgeglichen, wenn $\pi\tilde{E} \subset E \subset \tilde{E}$ ist. (Bei anderen Gelegenheiten ist es zweckmäßig, auch die zu diesen Gittern ähnlichen Gitter als ausgeglichen zu bezeichnen.) Für die Halbgruppe der Isomorphieklassen aller ausgeglichenen Gitter schreiben wir anstelle von $G(\{o,1\}, C)$ kürzer $G(o,1,C)$.

Lemma 5.8. Jedes ausgeglichene Gitter E hat eine Zerlegung $E = F \perp M$ in ein anisotropes Gitter F und ein metabolisches M.

Beweis. Ist E nicht schon anisotrop, so enthält E einen primitiven isotropen Vektor x. Sei $E = E_o \perp (\pi) \otimes E_1$ eine Jordan-Zerlegung von E und $x = x_o + x_1$ die zugehörige Zerlegung von x. Ist x_o primitiv, so können wir ein $y_o \in E_o$ mit $B(x_o,y_o) = 1$ finden und (nach Hfs. 1.1) von E das unimodulare metabolische Gitter $Cx + Cy_o$ abspalten. Ist x_o nicht primitiv, so muß x_1 primitiv und $B(x,E) = \pi C$ sein. Jetzt suchen wir ein $y_1 \in E_1$ mit $B(x_1,y_1) = \pi$ und spalten von E das π-modulare metabolische Gitter $Cx + Cy_1$ ab. Das Verfahren läßt sich, wenn nötig, fortsetzen.

q.e.d.

Dieses Lemma ist eine Verallgemeinerung von Lemma 1.6 im diskreten Fall. Entsprechend dem Satz 1.8 erhalten wir jetzt

Satz 5.9. Die kanonische Abbildung von WG(o,1,C) nach W(L) ist bijektiv. Ein ausgeglichenes Gitter über C hat genau dann Bild Null in WG(o,1,C) wenn es metabolisch ist.

Bemerkung 5.10. Damit erhalten wir sofort einen neuen Beweis von Theorem 4.1 im diskreten Fall: WG(o,1,C) injiziert sich in WG(C) und es ist ersichtlich

$$WG(C) = [(\pi^2)-1]\,WG(C) + WG(o,1,C).$$

Diese Zerlegung macht evident, daß der Kern der kanonischen Abbildung von WG(C) auf W(L) mit $[(\pi^2) - 1]$ WG(C) übereinstimmt.

Die ausgeglichenen Gitter lassen sich folgendermaßen klassifizieren:

Satz 5.11. E und F seien ausgeglichene Gitter über C mit $E\otimes L \cong F\otimes L$, $\dim_0 E = \dim_0 F$, $\mathfrak{g}E = \mathfrak{g}F$ und $\mathfrak{g}E(\pi) = \mathfrak{g}F(\pi)$. Dann ist $E\cong F$.

Beweis. Mit $\mathfrak{g}_0$ bezeichnen wir die gemeinsame Normgruppe von E und F, mit $\pi\mathfrak{g}_1$ die von $E(\pi)$ und $F(\pi)$. Mit r_0 bezeichne wir die Zahl $\dim_0 E = \dim_0 F$, mit r_1 die Zahl $\dim_1 E = \dim_1 F$. Das Gitter $E\perp(-F)$ hat nach Satz 5.9 die Gestalt $R_0\perp(\pi)\otimes R_1$ mit unimodularen metabolischen Gittern R_i der Dimensionen $2r_i$, für die $\mathfrak{g}R_i \subset \mathfrak{g}_i$ ist. Dasselbe gilt für das Gitter $F\perp(-F)$. Viermalige Anwendung von Hilfssatz 5.5 liefert uns

$$F\perp E\perp(-F) \cong F\perp r_0\times A(o,o)\perp r_1\times(\pi)\otimes A(o,o)$$

und

$$E\perp F\perp(-F) \cong E\perp r_0\times A(o,o)\perp r_1\times(\pi)\otimes A(o,o).$$

Indem wir den Kürzungssatz Theorem 5.2 zweimal benutzen, erhalten wir die Behauptung $E\cong F$.

q.e.d.

Literatur.

[B] N. Bourbaki, Valuations, Algébre commutative. Chap. VI, Hermann, Paris (1964).

[D] W.H. Durfee, Congruence of quadratic forms over valuation rings, Duke Math. J. 11, 687-697, (1944).

[K] M. Knebusch, Grothendieck- und Wittringe von nichtentarteten symmetrischen Bilinearformen, Teil I-III, Habilitationsschrift, Hamburg (1968).

$[K]_1$ M. Knebusch, Isometrien über semilokalen Ringen, Math.Z. 108, 255-268 (1969).

[OM] O.T.O'Meara, Introduction to quadratic forms, Springer, Berlin-Göttingen-Heidelberg (1963).

$[OM]_1$ O.T.O'Meara, Intergral equivalence of quadratic forms in ramified local fields, Am.J. Math. 79, 157-186 (1957).

[Wa] G.L.Watson, Transformations of a quadratic form which do not increase the class-number, Proc. London Math. Soc. (3)12, 577-587 (1962).

[W] E. Witt, Theorie der quadratischen Formen in beliebigen Körpern, J.r.u.angew. Math. 176, 31-44, (1937).

Saarbrücken, Juli 1970