Inventiones math. 11, 319 – 328 (1970)

Ein Residuensatz für symmetrische Bilinearformen

W.-D. GEYER (Heidelberg), G. HARDER (Bonn),
M. KNEBUSCH (Saarbrücken), W. SCHARLAU (Münster)

Diese Arbeit beschäftigt sich mit nicht-entarteten symmetrischen Bilinearformen über einem algebraischen Funktionenkörper F in einer Variablen mit beliebigem Konstantenkörper k. Unser Ziel ist es, die in [2], § 13 und [4], Theorem 4.1 für den Fall eines *rationalen* Funktionenkörpers bewiesene „Summenformel" auf den Fall eines algebraischen Funktionenkörpers zu verallgemeinern. Dabei handelt es sich etwas genauer um folgendes:

Ist b eine symmetrische Bilinearform über dem rationalen Funktionenkörper $F=k(x)$ und $\mathfrak{p}$ eine Bewertung von F/k, so bezeichne $b_\mathfrak{p}$ die b entsprechende Form $b\otimes_F F_\mathfrak{p}$ über der Komplettierung $F_\mathfrak{p}$ von F. Nun gilt nach Springer für die Witt-Gruppe $W(F_\mathfrak{p})$ von F

$$W(F_\mathfrak{p})\cong W(k(\mathfrak{p}))\oplus W(k(\mathfrak{p})),$$

wobei $k(\mathfrak{p})$ den Restklassenkörper von $F_\mathfrak{p}$ bezeichnet. (Hier ist $\operatorname{char}(k)\neq 2$ vorausgesetzt.) Der Form b sind also zwei „Restklassenformen"

$$(\bar{b}_\mathfrak{p})_1, (\bar{b}_\mathfrak{p})_2 \in W(k(\mathfrak{p}))$$

zugeordnet, von denen die erste kanonisch ist, die zweite jedoch von der Wahl eines uniformisierenden Elementes abhängt. (Vgl. [2] für Einzelheiten.) Man erhält mittels der zweiten Restklassenformen einen Homomorphismus

$$W(F)\to\coprod_\mathfrak{p} W(k(\mathfrak{p})).$$

Nun wählt man geeignete k-lineare Abbildungen $s_\mathfrak{p}\colon k(\mathfrak{p})\to k$. Diese induzieren Homomorphismen $s_\mathfrak{p}^*\colon W(k(\mathfrak{p}))\to W(k)$ (vgl. [4], Section 0), und man beweist:

Für alle $b\in W(F)$ ist

$$\sum_\mathfrak{p} s_\mathfrak{p}^*(\bar{b}_\mathfrak{p})_2=0$$

in $W(k)$.

Wie schon gesagt, ist diese Konstruktion nicht kanonisch, sondern hängt von der Wahl geeigneter uniformisierender Elemente und geeigneter „Spuren" $s_\mathfrak{p}$ ab. Es scheint daher zunächst unmöglich zu sein, diesen Satz auf algebraische Funktionenkörper zu verallgemeinern. Es ist völlig unklar, wie man im allgemeinen Fall die uniformisierenden Elemente und die Spuren wählen soll.

Die Lösung dieser Schwierigkeiten ergibt sich aus der Beobachtung, daß wir nicht die für unser Problem „richtigen" symmetrischen Bilinearformen betrachtet haben. Genauso wenig wie man für eine algebraische Funktion Residuen definieren kann und beweisen kann, daß ihre Summe gleich 0 ist, genauso wenig kann man das Analoge für gewöhnliche (d.h. funktionenwertige) symmetrische Bilinearformen tun. Man muß vielmehr nicht-entartete symmetrische bilineare Formen b mit Werten in dem eindimensionalen F-Vektorraum Λ der F/k-Differentiale betrachten:

$$b\colon V \times V \to \Lambda.$$

Natürlich überträgt sich die ganze gewöhnliche Theorie (Diagonalisierbarkeit, Wittscher Satz, Witt-Zerlegung). Die Witt-Gruppe dieser Formen bezeichnen wir mit $W(\Lambda) = W(\Lambda(F/k))$.

Die zweiten Restklassenformen von b werden nun mittels des Residuums in kanonischer Weise definiert. Wir sprechen konsequenterweise deshalb auch von den Residuen einer Form. Der angestrebte Satz lautet dann einfach:

Die Summe der Residuen einer symmetrischen Bilinearform mit Werten in dem eindimensionalen Vektorraum der Differentiale über einem algebraischen Funktionenkörper in einer Variablen ist gleich 0.

Für diesen Satz geben wir zwei wesentlich verschiedene Beweise. Dem ersten liegt die übliche Definition der Differentiale (mittels Derivationen) zugrunde. Er verläuft analog dem Hasseschen Beweis des Residuensatzes ([3], Chapter X, 4.) durch Zurückführung auf den rationalen Fall. Hierbei beschränken wir uns auf den Fall, daß keine Inseparabilitäten auftreten, z.B. $\mathrm{char}(F)=0$. Der zweite Beweis benutzt die Weilschen Differentiale ([1], Chapter II, § 5). Er ist formal besonders einfach, denn alle an sich in den Beweis eingehenden Rechnungen sind schon bei der Identifizierung der Weilschen Differentiale mit den gewöhnlichen (im Fall eines konservativen Funktionenkörpers), d.h. beim Beweis des üblichen Residuensatzes, erledigt worden.

Wir danken den vielen Kollegen, die mit uns beim gemeinsamen Mittagessen am 15. 7. 1970 im Hotel Allerbeck zu Rheda (Westf.) wesentliche Ideen zu diesem Satz und seinem Beweis entwickelt haben.

1. Lokale Betrachtungen

Es sei k ein Körper (beliebiger Charakteristik) und $K = k((t))$ der Potenzreihenkörper in der Variablen t. Es sei $\Omega(K) = K\,dt$ der eindimensionale K-Vektorraum der analytischen Differentiale von K/k. Es bezeichne $W(\Omega(K))$ die Witt-Gruppe der nicht-entarteten symmetrischen Bilinearformen mit Werten in $\Omega(K)$. Jedem Element $b \in W(\Omega(K))$ ordnen wir jetzt folgendermaßen ein Residuum $\operatorname{res}(b) \in W(k)$ zu:

Wir repräsentieren b durch eine anisotrope Form, die wir ebenfalls mit b bezeichnen. Da b anisotrop ist, können wir b diagonalisieren, d.h. eine Basis finden, so daß sich b folgendermaßen schreibt

$$b(x, y) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i y_i \, dt.$$

(In Charakteristik 2 kann man isotrope Formen nicht immer diagonalisieren.) Durch Multiplikation der a_i mit geeigneten Quadraten können wir folgende Form erreichen

$$b(x, y) = \sum_{j=1}^{m} a_j x_j y_j \frac{dt}{t} + \sum_{j=m+1}^{n} a_j x_j y_j \, dt, \tag{$*$}$$

wobei die a_j Einheiten sind. Dann sei $\operatorname{res}(b)$ das durch folgende m-dimensionale Form gelieferte Element von $W(k)$:

$$\bar{b}(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{j=1}^{m} \bar{a}_j \bar{x}_j \bar{y}_j.$$

Man kann zeigen, daß $\operatorname{res}(b)$ unabhängig von allen gemachten Wahlen ist: Zunächst ist es unabhängig von der Diagonalisierung $(*)$, denn das gilt für die zweite Restklassenform einer K-wertigen Bilinearform. Überdies hängt es (im Gegensatz zum klassischen Fall) nicht von der Auswahl des uniformisierenden Elementes t ab, denn

$$\bar{a}_j = \operatorname{res}\left(a_j \frac{dt}{t}\right).$$

Aus dem analogen Satz für gewöhnliche Formen folgt sofort, daß

$$\operatorname{res}\colon\ W(\Omega(K)) \to W(k)$$

ein Homomorphismus ist (mit Kern $W(k)$ falls $\operatorname{char}(k) \neq 2$).

Für die Berechnung des Residuums ist oft folgende Bemerkung nützlich: Es sei $A = k[[t]]$ der Ring der ganzen Zahlen von K und b: $V \times V \to \Omega(K)$ eine symmetrische Bilinearform. Ein A-Modul $M \subset V$ heißt unimodular, falls $b(M, M) \subset A\,dt$ und b einen Isomorphismus $M \cong \operatorname{Hom}_A(M, A\,dt)$ induziert. Ist M unimodular, so gilt $\operatorname{res}(b) = \operatorname{res}(b')$, wobei b' die Beschränkung von b auf das orthogonale Komplement von MK ist.

Sei nun L/K eine endliche separable Erweiterung. Die übliche Spur für Differentiale ([1], Chapter VI, § 2)

$$Tr_{L/K}\colon \Omega(L) \to \Omega(K)$$

induziert einen Gruppenhomomorphismus

$$Tr^*_{L/K}\colon W(\Omega(L)) \to W(\Omega(K)), \qquad b \mapsto Tr_{L/K} \circ b.$$

Lemma. *Sei L/K separabel und die zugehörige Erweiterung der Restklassenkörper l/k sei ebenfalls separabel. Dann ist folgendes Diagramm kommutativ.*

$$\begin{array}{ccc} W(\Omega(L)) & \xrightarrow{\text{res}} & W(l) \\ \downarrow{\scriptstyle Tr^*_{L/K}} & & \downarrow{\scriptstyle Tr^*_{l/k}} \\ W(\Omega(K)) & \xrightarrow{\text{res}} & W(k) \end{array}$$

Beweis. Wir brauchen die Kommutativität nur für eine eindimensionale Form $\langle\omega\rangle$ nachzurechnen. Sei L/K zunächst unverzweigt. Ist $B = l[[t]]$ der Bewertungsring von L, so definiert die Spur eine surjektive Abbildung $Tr|_B\colon B \to A$. Dabei wird tB auf tA abgebildet, und die für die Restklassenkörper induzierte Abbildung $l \to k$ ist die Spur $Tr_{l/k}$. Der A-Modul B ist bezüglich der Bilinearform $Tr(\varepsilon x y)$ mit ε Einheit von B unimodular. Aus diesen Bemerkungen folgt leicht die Behauptung.

Wegen der Transitivität der Spur können wir uns jetzt auf den reinverzweigten Fall beschränken. Dann ist $l = k$, also der rechte senkrechte Pfeil die Identität. Sei τ eine Uniformisierende von L und

$$f(\tau) = \tau^n + a_{n-1}\tau^{n-1} + \cdots + a_1\tau + t = 0$$

ihre Minimalgleichung über K. Dann ist $t = (-1)^n N_{L/K}(\tau)$ Uniformisierende von K. Da wir $\langle\omega\rangle$ durch beliebige Quadrate abändern können, haben wir nur die Fälle $\omega = \varepsilon\, d\tau$ und $\omega = \varepsilon \dfrac{d\tau}{\tau}$ mit ε Einheit zu betrachten. Alle Gruppen unseres Diagrammes sind in einem evidenten Sinn $W(A)$-Moduln, alle Abbildungen sind $W(A)$-linear. Deshalb können wir sogar annehmen, daß ε eine 1-Einheit ist. Dann ist

$$\operatorname{res}\langle\varepsilon\, d\tau\rangle = 0, \qquad \operatorname{res}\left\langle\varepsilon \frac{d\tau}{\tau}\right\rangle = \langle 1\rangle.$$

Wir untersuchen zunächst den Fall $\omega = \varepsilon\, d\tau = -\dfrac{\varepsilon_1}{f'(\tau)}\, dt$ für eine geeignete 1-Einheit ε_1. Nach einem Lemma von Euler ([5] III, §6) gilt für alle $\lambda \in L$

$$Tr_{L/K}\left(\frac{\lambda}{f'(\tau)}\right) = s(\lambda),$$

wobei die K-lineare Abbildung $s\colon L \to K$ durch $s(1)=\dots=s(\tau^{n-2})=0$, $s(\tau^{n-1})=1$ definiert ist. (Vgl. die in [4] auftretenden „Spuren" s_p!) Es ist $B=A+A\tau+\dots+A\tau^{n-1}$, und bezüglich der Basis $1,\tau,\dots,\tau^{n-1}$ ist die Matrix von $s^*\langle 1\rangle$ gleich

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & & \iddots & 1 \\ \vdots & \iddots & & * \\ 0 & 1 & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}.$$

Das A-Gitter B ist also unimodular bezüglich $Tr^*_{L/K}\langle d\tau\rangle$, und da ε eine Einheit ist, ist es auch unimodular bezüglich $Tr^*_{L/K}\langle \varepsilon\, d\tau\rangle$. Wir haben also in $Tr^*_{L/K}\langle \varepsilon\, d\tau\rangle$ ein unimodulares Gitter von maximalem Rang. Also verschwindet das Residuum.

Wir betrachten nun die Form $\left\langle \varepsilon \dfrac{d\tau}{\tau}\right\rangle$. Wir behaupten zunächst, daß der A-Modul $M=A\tau+\dots+A\tau^{n-1}$ bezüglich der Form

$$b=Tr^*_{L/K}\left\langle \varepsilon\frac{d\tau}{\tau}\right\rangle = -s^*\left\langle\frac{\varepsilon}{\tau}\right\rangle dt$$

unimodular ist. Um das zu zeigen, bemerken wir zunächst, daß die Koeffizienten $a_{n-1},\dots,a_1,t$ von f alle in tA liegen. Also gilt $s(\tau^k)\in tA$ für alle $k\geqq n$. Schreiben wir ε als Potenzreihe und berechnen wir die Matrix von $b|_M$ bezüglich der Basis $\tau,\dots,\tau^{n-1}$, so ergibt sich deshalb folgende Gestalt:

$$\begin{pmatrix} * & & \eta \\ & \iddots & \\ \eta & & ** \end{pmatrix}.$$

Hier ist $\eta=s(\varepsilon\tau^{n-1})$ eine 1-Einheit, und unter der Diagonale (bei $**$) stehen nur Elemente aus tA. Also ist M unimodular. Das orthogonale Komplement von M ist $\varepsilon^{-1}K$, denn $s\left(\varepsilon\varepsilon^{-1}\dfrac{\tau k}{\tau}\right)=0$ für $k=1,\dots,n-1$. Ferner ist

$$\operatorname{res}(b(\varepsilon^{-1},\varepsilon^{-1}))=\operatorname{res}\left(-s\left(\frac{1}{\varepsilon\tau}\right)dt\right)=1,$$

denn

$$\tau^{-1}=-\frac{1}{t}(a_1+\dots+a_{n-1}\tau^{n-2}+\tau^{n-1})$$

und ε^{-1} ist 1-Einheit. Also beginnt die Potenzreihenentwicklung von $s(\tau^{-1}\varepsilon^{-1})$ mit $-\dfrac{1}{t}$. Also ist $\operatorname{res}(b)=\langle 1\rangle$, q.e.d.

Bemerkung. Die Rechnungen in diesem Beweis vereinfachen sich, wenn $\varepsilon = 1$ ist, was man im Fall $\operatorname{char}(k) \neq 2$ immer annehmen kann. Zum Beispiel werden die Koeffizienten $*$ der obigen Matrix alle Null.

2. Der Residuensatz

Wir betrachten zunächst einen algebraischen Funktionenkörper F in einer Variablen mit vollkommenem Konstantenkörper k. Es sei $\Omega = \Omega(F/k)$ der (in diesem Fall) 1-dimensionale F-Vektorraum der Differentiale von F/k. Ist $b \in W(\Omega)$ und $\mathfrak{p}$ eine Primstelle von F/k, so bezeichne $\operatorname{res}_{\mathfrak{p}}(b) \in W(k(\mathfrak{p}))$ das Residuum von $b_{\mathfrak{p}} = b \otimes_F F_{\mathfrak{p}}$.

Satz. *In der eben beschriebenen Situation gilt für alle* $b \in W(\Omega)$

$$\sum_{\mathfrak{p}} Tr_{\mathfrak{p}}^* \operatorname{res}_{\mathfrak{p}}(b) = 0.$$

Hier durchläuft $\mathfrak{p}$ *alle Primstellen von* F/k, *und* $Tr_{\mathfrak{p}}: k(\mathfrak{p}) \to k$ *ist die Spur.*

Beweis. Es genügt $b = \langle \omega \rangle$ eindimensional zu wählen. Wir wählen einen rationalen Funktionenkörper $K = k(x) \subset F$, derart daß F/K separabel ist ([3] III, 1.). Wir werden den Beweis durch Zurückführung auf den rationalen Körper K führen. Dazu benutzen wir folgendes Lemma [4] (dessen Beweis sich sofort auf den hier betrachteten allgemeineren Fall überträgt): Ist $\mathfrak{p}$ eine Primstelle von K/k, so gilt für alle $b \in W(\Omega)$

$$(Tr_{F/K}^*(b))_{\mathfrak{p}} \cong \bigoplus_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} Tr_{F_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}}(b_{\mathfrak{P}}).$$

Mit dem Lemma ergibt sich nämlich

$$\begin{aligned}
\sum_{\mathfrak{P}} Tr_{\mathfrak{P}}^*(\operatorname{res}_{\mathfrak{P}}(b)) &= \sum_{\mathfrak{p}} \Big(\sum_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} Tr_{\mathfrak{P}}^*(\operatorname{res}_{\mathfrak{P}}(b))\Big) \\
&= \sum_{\mathfrak{p}} \Big(\sum_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} \operatorname{res}_{\mathfrak{p}}(Tr_{F_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}}^* b_{\mathfrak{P}})\Big) = \sum_{\mathfrak{p}} \operatorname{res}_{\mathfrak{p}}\Big(\sum_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} Tr_{F_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}}^* b_{\mathfrak{P}}\Big) \\
&= \sum_{\mathfrak{p}} \operatorname{res}_{\mathfrak{p}}(Tr_{F/K}^*(b))_{\mathfrak{p}}.
\end{aligned}$$

Wir brauchen uns also nur noch mit der Form $Tr_{F/K}^*(b)$ über dem rationalen Funktionenkörper K zu beschäftigen.

Für den rationalen Fall wurden in [4] zwei Beweise angegeben (die man leicht auf den Fall von symmetrischen bilinearen Differentialformen übertragen kann). Wir wollen einen dieser Beweise wiederholen:

Da alle vorkommenden Gruppen $W(k)$-Moduln und alle Abbildungen $W(k)$-linear sind, können wir nach Multiplikation mit einem Quadrat annehmen, daß

$$\omega = p_1(x)^{-1} \dots p_r(x)^{-1}\, dx,$$

wobei $p_1, \ldots, p_r$ verschiedene normierte irreduzible Polynome aus $k[x]$ von Graden $d_i > 0$ sind. Offensichtlich ist $\mathrm{res}_{\mathfrak{p}}(b) = 0$ für $\mathfrak{p} \neq \infty, \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$, wobei $\mathfrak{p}_i$ die zu p_i und ∞ die zu x^{-1} gehörige Primstelle bezeichne. Weiter ist $\mathrm{res}_{\infty}(b) = 0$, falls $d = \sum d_i$ gerade ist, und $\mathrm{res}_{\infty}(b) = \langle -1 \rangle$, falls d ungerade ist (weil alle p_i normiert sind). Die Form $Tr^*_{\mathfrak{p}_i} \mathrm{res}_{\mathfrak{p}_i}(b)$ wird gegeben durch den k-Vektorraum $A_i = k[x]/(p_i(x))$ mit der Bilinearform

$$b_i(\bar{a}_1, \bar{a}_2) = Tr_{\mathfrak{p}_i} \mathrm{res}_{\mathfrak{p}_i}(a_1 a_2 \omega),$$

wobei $^{-}: k[x] \to k[x]/(p_i(x))$ die kanonische Projektion ist. Wir machen den kanonischen Ring-Isomorphismus

$$A = k[x]/(p_1(x) \ldots p_r(x)) \to \prod_{i=1}^{r} A_i$$

zu einer Isometrie $A \cong \bigoplus_{i=1}^{r} A_i$, indem wir auf dem k-Vektorraum A die Bilinearform

$$B(\bar{a}_1, \bar{a}_2) = \sum_{i=1}^{r} Tr_{\mathfrak{p}_i} \mathrm{res}_{\mathfrak{p}_i}(a_1 a_2 \omega)$$

installieren. Wir betrachten die Matrix von B bezüglich der Basis $1, \bar{x}, \ldots, \bar{x}^{d-1}$. Offensichtlich ist $\mathrm{res}_{\mathfrak{p}}(\bar{x}^n \omega) = 0$ für $\mathfrak{p} \neq \infty, \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$ und beliebiges n. Ferner ist $\mathrm{res}_{\infty}(\bar{x}^n \omega) = 0$ für $0 \leqq n \leqq d-2$ und $= -1$ für $n = d-1$. Aus dem gewöhnlichen Residuensatz folgt, daß unsere Matrix die Gestalt

$$\begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & 1 \\ \vdots & & \iddots & \\ 0 & \iddots & & * \\ 1 & & & \end{pmatrix}$$

hat. Das liefert in $W(k)$ das Element 0 falls d gerade und $\langle 1 \rangle$ falls d ungerade, q.e.d.

Im Fall eines nicht-vollkommenen Konstantenkörpers müssen wir die Weilschen Differentiale betrachten. Sei $A(F/k)$ der Adèle-Ring von F/k. Dann ist

$$\Lambda(F) = \Lambda = \{\lambda : A(F/k) \to k \mid \lambda \text{ stetig, } k\text{-linear, } \lambda(F) = 0\}$$

ein 1-dimensionaler F-Vektorraum. Der Einbettung $F_{\mathfrak{p}} \to A(F/k)$ entspricht eine Komponentenbildung $\Lambda(F) \ni \lambda \mapsto \lambda^{\mathfrak{p}}: F_{\mathfrak{p}} \to k$, wobei $\lambda^{\mathfrak{p}}$ stetig und k-linear ist. Also gilt $\lambda^{\mathfrak{p}}(\mathfrak{p}^n) = 0$ für große n. Das kleinste solche n ist $-v_{\mathfrak{p}}(\lambda)$. Man hat eine kanonische Abbildung

$$\begin{aligned} \psi: \Omega(F) &\to \Lambda(F) \\ \omega &\mapsto \Big(a \mapsto \sum_{\mathfrak{p}} \mathrm{Res}_{\mathfrak{p}}\, a_{\mathfrak{p}} \omega\Big). \end{aligned}$$

Der Residuensatz für $\Omega(F)$ liefert gerade, daß die Bilder unter ψ tatsächlich auf F verschwinden ($\mathrm{Res}_\mathfrak{p}$ im Sinne von [6]). Falls F/k konservativ ist, ist ψ ein divisorenerhaltender Isomorphismus (genauer: ein Isomorphismus der Ω und Λ entsprechenden Moduln über dem regulären projektiven Modell von F/k). Für separable Stellen $\mathfrak{p}$ gilt ferner, wenn $\mathrm{res}_\mathfrak{p}$ wie zuvor das gewöhnliche Residuum mit Werten in $k(\mathfrak{p})$ bezeichnet

$$\mathrm{Res}_\mathfrak{p}\,\omega = Tr_\mathfrak{p}\,\mathrm{res}_\mathfrak{p}\,\omega. \tag{$**$}$$

Sei nun b eine nicht-entartete symmetrische Bilinearform mit Werten in $\Lambda(F)$. Indem wir b notfalls anisotrop repräsentieren, können wir ganz wie früher schreiben

$$b(x,y)=\sum_{i=1}^{m} x_i y_i \lambda_i + \sum_{j=m+1}^{n} x_j y_j \lambda_j$$

mit $v(\lambda_i)=-1$, $v(\lambda_j)=0$. Mit $\mathrm{Res}_\mathfrak{p}\, b$ bezeichnen wir nun die folgende k-wertige symmetrische Bilinearform auf $k(\mathfrak{p})^m$:

$$\bar{b}(\bar{x},\bar{y})=\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^\mathfrak{p}(x_i y_i),$$

wobei $x_i, y_i \in F$ Urbilder der $\bar{x}_i, \bar{y}_i \in k(\mathfrak{p})$ sind. Mit den üblichen Schlüssen zeigt man, daß diese Definition eine wohldefinierte Abbildung

$$\mathrm{Res}_\mathfrak{p}\colon\ W(\Lambda(F/k)) \to W(k)$$

liefert. Außerdem zeigt die Formel ($**$), daß für eine separable Stelle $\mathfrak{p}$ und eine Ω-wertige symmetrische Bilinearform b gilt

$$\mathrm{Res}_\mathfrak{p}(\psi b) = Tr_\mathfrak{p}^*\,\mathrm{res}_\mathfrak{p}\, b,$$

wobei $\mathrm{res}_\mathfrak{p}$ wie in Abschnitt 1 gebildet wird. ($F_\mathfrak{p}$ ist in kanonischer Weise ein Potenzreihenkörper über $k(\mathfrak{p})$.) Dies zeigt, daß der folgende allgemeine Residuensatz wirklich den vorhergehenden Satz verallgemeinert.

Satz. *Sei F/k ein algebraischer Funktionenkörper in einer Variablen mit Konstantenkörper k. Dann gilt für jedes Element $b \in W(\Lambda)$, daß*

$$\sum_\mathfrak{p} \mathrm{Res}_\mathfrak{p}(b) = 0$$

in $W(k)$.

Beweis. Es genügt eine eindimensionale Form $b=\langle\lambda\rangle$ zu betrachten. Nachdem wir λ notfalls mit dem Quadrat einer Funktion $h \in F$ multipliziert haben, können wir annehmen, daß $(\lambda)=\mathfrak{q}^{-1}\mathfrak{n}^2$ mit $\mathfrak{q}^{-1}$ und $\mathfrak{n}$ relativ-prim und $\mathfrak{q}^{-1}$ hat keine Nullstelle und nur einfache Polstellen. (Um das zu erreichen, müssen wir ja nur ein h finden, das an den Stellen

$\mathfrak{p}$ mit $\mathrm{grad}_{\mathfrak{p}}(\lambda)$ ungerade die Ordnung $-\frac{1}{2}(\mathrm{grad}_{\mathfrak{p}}(\lambda)+1)$ hat, was nach dem Approximationssatz möglich ist.) Ist $r=\mathrm{grad}\,\mathfrak{q}$, $n=\mathrm{grad}\,u$ und g das Geschlecht von F/k, so gilt also $r=2(n+1-g)$. Nach dem Riemann-Rochschen Satz gilt ferner

$$\dim(L(\mathfrak{n}))=n+1-g+\dim(L(\mathfrak{q}^{-1}\mathfrak{n})).$$

Für $f\in L(\mathfrak{n})$ ist $f^2\lambda$ ganz außerhalb von $\mathfrak{q}$ und höchstens von (-1)-ter Ordnung an den Stellen $\mathfrak{p}|\mathfrak{q}$. Offenbar kann $\mathrm{Res}_{\mathfrak{p}}(b)\neq 0$ nur für $\mathfrak{p}|\mathfrak{q}$ gelten. Der $\bigoplus_{\mathfrak{p}} \mathrm{Res}_{\mathfrak{p}}(b)$ zugrunde liegende Vektorraum ist $V=\bigoplus_{\mathfrak{p}|\mathfrak{q}} k(\mathfrak{p})$. Wir betrachten nun die k-lineare Abbildung $L(\mathfrak{n})\to V$, die jedem f seine Restklassen in $k(\mathfrak{p})$ zuordnet $(v_{\mathfrak{p}}(f)\geqq 0!)$. Der Kern dieser Abbildung ist gerade $L(\mathfrak{q}^{-1}\mathfrak{n})$. Das Bild ist also ein Teilraum V_0 von V der Dimension $n+1-g=r/2$. Es genügt jetzt zu zeigen, daß V_0 total-isotrop ist, und das folgt unmittelbar aus dem Residuensatz $\lambda(F)=0$: $\lambda(ff')=0$.

3. Eine Anwendung

Zum Schluß wollen wir noch eine Anwendung des Residuensatzes diskutieren. Sei zunächst K ein diskret bewerteter Körper, V sei ein endlich-dimensionaler Vektorraum und $b\colon V\times V\to K$ sei eine nicht-entartete symmetrische Bilinearform. Sei $A\subset K$ der Ring der ganzen Zahlen in K. Man kann sich nun die Frage stellen, wann diese Form über $\mathrm{Spec}(K)$ sich zu einer nicht-entarteten Form über $\mathrm{Spec}(A)$ fortsetzen läßt. Mit anderen Worten, wann gibt es ein A-Gitter $M\subset V$, auf dem b ganze Werte annimmt und für das die Form $b\colon M\times M\to A$ nicht-entartet ist? Die Antwort ist einfach: Diese Fortsetzung ist genau dann möglich, wenn über der Komplettierung von K die bezüglich irgend einer Wahl der Uniformisierenden gebildete zweite Restklassenform verschwindet. Das folgt sofort aus der Definition der zweiten Restklassenform.

Wir betrachten nun wieder einen Funktionenkörper F in einer Variablen mit Konstantenkörper k. Sei Y/k ein reguläres projektives Modell von F/k. Eine unmittelbare Folgerung aus dem Residuensatz ist der folgende Satz.

Satz. *Die Kurve Y/k besitze einen rationalen Punkt $\infty\in Y(k)$. Sei L/Y ein inversibler Modul und M' ein lokal-freier Modul auf dem affinen Schema $Y'=Y-\{\infty\}$. Sei*

$$b'\colon M'\times M'\to L'=L|_{Y'}$$

eine nicht-entartete symmetrische Bilinearform. Wenn die Klasse von $\omega_Y^{-1}\otimes L$ ein Quadrat in der Picard-Gruppe von Y ist, dann kann man b' zu einer nicht-entarteten Form $b\colon M\times M\to L$ fortsetzen, wobei M/Y lokal-frei ist. (Dabei ist ω_Y der inversible Modul der Weilschen Differentiale auf Y.)

Beweis. Für $L=\omega_Y$ folgt der Satz aus der oben gemachten Bemerkung und dem Residuensatz. Ist L beliebig, so wähle man einen inversiblen Modul H mit $H^{\otimes 2}=L^{-1}\otimes\omega_Y$. Mit c_H bezeichnen wir die kanonische Bilinearform $H\times H\to H\otimes H$. Wir setzen die Form

$$b'\otimes c_H\colon\ (M'\otimes H)\times(M'\otimes H)\to\omega_Y$$

über Y' fort zu einer nicht-entarteten Form $a\colon\tilde{M}\times\tilde{M}\to\omega_Y$ über Y. Die Form

$$a\otimes c_{H^{-1}}\colon\ (\tilde{M}\otimes H^{-1})\times(\tilde{M}\otimes H^{-1})\to L$$

ist dann eine Fortsetzung der Form b' auf Y.

Literatur

1. Chevalley, C.: Algebraic functions of one variable. Mathematical Surveys No. VI, AMS, 1951.
2. Knebusch, M.: Grothendieck- und Wittringe von nichtausgearteten symmetrischen Bilinearformen. Sitzungsber. Heidelberger Akad. Wiss., Math.-nat. Klasse, 3. Abh. Jahrg. 1969/70.
3. Lang, S.: Introduction to algebraic geometry. Interscience tracts, 5, New York 1958.
4. Scharlau, W.: Quadratic reciprocity laws. Erscheint in J. Number Theory.
5. Serre, J. P.: Corps locaux. Paris: Hermann 1962.
6. Tate, J.: Residues of differentials on curves. Ann. sci. Ecole norm. sup. **1** (Quatrième série), 149 – 159 (1968).

W.-D. Geyer
Mathematisches Institut der Universität
BRD-6900 Heidelberg 1, Tiergartenstr.
Deutschland

W. Scharlau
Mathematisches Institut der Universität
BRD-4400 Münster (Westf.), Roxelerstr. 64
Deutschland

G. Harder
Mathematisches Institut der Universität
BRD-5300 Bonn, Wegelerstr. 10
Deutschland

M. Knebusch
Mathematisches Institut der Universität
BRD-6600 Saarbrücken
Deutschland

(Eingegangen am 29. September 1970)