Math. Ann. 234, 167—192 (1978)

Über die Grade quadratischer Formen

Jón Kr. Arason und Manfred Knebusch

Raunvísindastofnun Háskólans, Dunhaga 3, Reykjavik, Island
Fachbereich Mathematik der Universität, Universitätsstr. 31, D-8400 Regensburg, Bundesrepublik Deutschland

1. Einleitung

Sei φ eine quadratische Form über einem Körper K einer Charakteristik $\neq 2$, die wir stillschweigend stets als nicht ausgeartet voraussetzen. Ist φ nicht hyperbolisch, so betrachten wir zu allen Körpererweiterungen L von K in einem Universalkörper, für die $\varphi \otimes L$ nicht hyperbolisch ist, die Dimensionen der Kernformen $\ker(\varphi \otimes L)$ {Kernform = anisotroper Anteil}. Das Minimum dieser Dimensionen ist eine 2-Potenz 2^d [9, Proposition 6.1], und wir nennen d den *Grad* $\deg(\varphi)$ der Form φ. Einer hyperbolischen Form ordnen wir den Grad ∞ zu. Der Grad von φ hängt ersichtlich nur von der Klasse $\{\varphi\}$ von φ im Wittring $W(K)$ ab. Wir haben also eine numerische Funktion

$$\deg : W(K) \to \mathbb{N} \cup \infty .$$

Die Menge $J_n(K)$ aller Klassen $\{\varphi\}$ mit Grad $\geqq n$ erweist sich als ein Ideal des Ringes $W(K)$ [loc.cit., Theorem 6.4]. Weil eine nicht hyperbolische Pfisterform $\langle 1, a_1 \rangle \otimes \ldots \otimes \langle 1, a_n \rangle$ sicherlich den Grad n hat, umfaßt $J_n(K)$ die n-te Potenz $I^n(K)$ des Fundamentalideals $I(K)$ der Formen gerader Dimension in $W(K)$ [loc.cit., Corollary 6.6]. Dies ist in anderer Formulierung der „Hauptsatz" von Arason und Pfister in der Arbeit [3].

Für $n \leqq 2$ läßt sich leicht zeigen, daß $J_n(K)$ mit $I^n(K)$ übereinstimmt [9, 6.2]. $J_3(K)$ besteht genau aus den Klassen $\{\varphi\}$ mit $\dim \varphi$ gerade, Diskriminante $d(\varphi) = 1$ und Cliffordinvariante $c(\varphi) = 1$ [loc.cit., 6.2]. Die Frage, ob das Ideal $J_n(K)$ mit $I^n(K)$ übereinstimmt, ist somit schon für $n = 3$ offen und vermutlich schwierig.

Die vorliegende Arbeit ist aus der Beschäftigung mit dieser Frage entstanden. Sei $\deg'$ die zu der Filtrierung von $W(K)$ durch die Potenzen $I^n(K)$ gehörige Gradfunktion. Wir weisen zunächst nach (§ 2), daß die Funktionen deg und $\deg'$ „stabil gleich" sind im folgenden Sinne: Zu jeder Form φ gibt es eine 2-Potenz 2^l mit

$$\deg(2^l \times \varphi) = \deg'(2^l \times \varphi) .$$

Wir wenden uns dann einer Untersuchung der Ideale J_n selbst zu. Unser Ziel ist, in einschlägigen Situationen nachzuweisen, daß die J_n dasselbe Verhalten haben wie

0025-5831/78/0234/0167/$03.20

die I^n. Das gelingt uns in § 3 für die Scharlausche Verlagerung $s_*: W(L) \to W(K)$ zu einer endlichen Körpererweiterung L/K und K-Linearform $s: L \to K$ (vgl. [13, Chapter 7]) und in § 4 für die Restklassenabbildungen von $W(K)$ nach $W(K/v)$ zu einer beliebigen Krull-Bewertung v auf K mit Restklassenkörper K/v nicht von der Charakteristik 2. Für eine henselsche Bewertung können wir im charakteristikgleichen Fall die Ideale $J_n(K)$ aus den Idealen $J_n(K/v)$ berechnen. Insbesondere sehen wir, daß bei Übereinstimmung der $J_n(K/v)$ mit den $I^n(K/v)$ auch die $J_n(K)$ mit den $I^n(K)$ übereinstimmen.

Aufbauend auf diesen Resultaten zeigen wir in § 5 für einen rationalen Funktionenkörper $K(x)$ in einer Unbestimmten x, daß die Milnor-Sequenz [13, Chapter 9]

$$0 \to W(K) \to W(K(x)) \xrightarrow{(\partial_p)} \bigoplus_p W(K[x]/p) \to 0$$ [1]

für jedes $n \geqq 0$ eine split-exakte Sequenz

$$0 \to J_{n+1}(K) \to J_{n+1}(K(x)) \xrightarrow{(\partial_p)} \bigoplus_p J_n(K[x]/p) \to 0$$

induziert. Die analogen Sequenzen für die I^n finden sich schon bei Milnor [14, Lemma 5.7]. Wir beweisen auch für die Formen über dem rationalen Funktionenkörper $K(x_1, \ldots, x_r)$ in mehreren Variablen $x_1, \ldots, x_r$ eine Gradformel (§ 5, Satz 13). Diese läßt sich als eine sehr weitgehende Verallgemeinerung des Normensatzes in [10, § 4] auffassen.

In § 6 führen wir einige wenige Fälle an, in denen sich die Gleichheit von J_n und I^n nachweisen läßt.

In § 7 befassen wir uns mit dem Phänomen der Graderhöhung einer Form φ bei Erweiterung des Grundkörpers K zu dem Funktionenkörper $K(\psi)$ oder dem Leitkörper oder dem totalen generischen Zerfällungskörper (vgl. [9, § 5]) einer weiteren Form ψ. Analoge Betrachtungen scheinen für die zu den I^n gehörige Gradfunktion deg' außer Reichweite aller bekannten Methoden zu sein. Somit wird hier ein Vorteil der Ideale J_n gegenüber den I^n sichtbar.

Am Ende der Arbeit (§ 8) studieren wir auch die Graderhöhung von φ bei Multiplikation mit einer Pfisterform τ. Es war bereits bekannt [9, Proposition 6.9], daß

$$(*) \quad \deg(\tau \otimes \varphi) \geqq \deg \tau + \deg \varphi$$

ist. Wir behandeln jetzt den Fall, daß hier Ungleichheit auftritt.

Wir machen in der vorliegenden Arbeit oft Gebrauch von der Theorie der generischen Zerfällung, wie sie in der Arbeit [9] dargestellt wurde. Deshalb benutzen wir die dort entwickelte Terminologie, ohne diese hier erneut zu erklären.

Abschließend sei auf zwei Probleme hingewiesen, die uns für eine bessere Erkenntnis der Ideale J_n wichtig erscheinen:

A) Die Ungleichung (*) besagt, daß $I^m J_n$ in J_{m+n} enthalten ist. Gilt sogar $J_m J_n \subseteqq J_{m+n}$?

---

[1] p durchläuft die normierten irreduziblen Polynome in $K[x]$ und ∂_p ist die 2. Restklassenabbildung zu p

B) Zu einer quadratischen Erweiterung $L=K(\sqrt{d})$ hat man bekanntlich ein exaktes Dreieck ([1, Satz 2.4], [6, Theorem 2.6])

$$\begin{tikzcd} & W(L) \arrow[dr, "s_*"] & \\ W(K) \arrow[ur, "i"] & & W(K) \arrow[ll, "\mu"] \end{tikzcd}.$$

Hier ist i die kanonische Abbildung von $W(K)$ nach $W(L)$, s_* die Verlagerung zu der K-Linearform $s: L \to K$ mit $s(1)=0$, $s(\sqrt{d})=1$ und μ die Multiplikation mit der Form $\langle 1, -d\rangle$. Durch i wird $J_n(K)$ nach $J_n(L)$, durch s_* wird $J_n(L)$ nach $J_n(K)$ (vgl. § 3) und durch μ wird $J_n(K)$ nach $J_{n+1}(K)$ abgebildet. Ist der so entstehende Komplex

$$W(K) \xrightarrow{i} W(L) \xrightarrow{s_*} W(K) \xrightarrow{\mu} J_1(K) \xrightarrow{i} J_1(L) \to \dots$$

exakt? Die Exaktheit läßt sich bis zur Stelle $J_3(L)$ nachweisen, wie in § 3 erläutert wird.

2. Stabilitätsbetrachtungen

Wir bezeichnen mit $\deg'(\varphi)$ den Grad der Form φ über K zu der Filtrierung von $W(K)$, die durch die Ideale $I^n(K)$ gegeben wird, d.h. $\deg'(\varphi) = \sup\{n \mid \varphi \in I^n(K)\}$. Wegen $I^n(K) \subseteq J_n(K)$ gilt $\deg'(\varphi) \leqq \deg(\varphi)$.

Satz 1. *Ist* $\dim(\varphi)=n$, *so gilt*

$$\deg'(2^{n-1} \times \varphi) \geqq n-1+\deg(\varphi).$$

Beweis. Es sei o.E. $\varphi = \langle 1, a_2, \dots, a_n\rangle$. Für jedes $\varepsilon = (\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) \in \{1, -1\}^{n-1}$ setzen wir

$$\pi(\varepsilon) := \bigotimes_{i=2}^{n} \langle 1, \varepsilon_i a_i\rangle.$$

Dies sind $(n-1)$-fache Pfisterformen. Durch elementare Rechnung im Wittring $W(K)$ erhalten wir

$$\perp_{\varepsilon} \pi(\varepsilon) \sim 2^{n-1} \times \langle 1\rangle$$

und dann

$$2^{n-1} \times \varphi \sim \perp_{\varepsilon} \varphi \otimes \pi(\varepsilon).$$

Fener ist $a_i\langle 1, \varepsilon_i a_i\rangle \cong \varepsilon_i\langle 1, \varepsilon_i a_i\rangle$, also

$$\varphi \otimes \pi(\varepsilon) \sim (1+\varepsilon_2+\dots+\varepsilon_n) \times \pi(\varepsilon).$$

Hier kann die rechte Seite als ein ungerades ganzzahliges Vielfaches einer Pfisterform geschrieben werden, und auf solchen Formen stimmen deg' und deg überein (s. [9, Corollary 6.10]). Es folgt

$$\deg'(\varphi \otimes \pi(\varepsilon)) = \deg(\varphi \otimes \pi(\varepsilon)) \geqq n-1+\deg(\varphi).$$

Durch Summation über alle ε bekommen wir $\deg'(2^{n-1}\times\varphi)\geqq n-1+\deg(\varphi)$.

Ist K nicht formal reell, so gibt es zu der Form φ über K eine 2-Potenz 2^k mit $2^k\times\varphi\sim 0$. Für den Rest dieses Paragraphen sei daher K formal reell. Für die Form φ über K sei $\overline{\deg}(\varphi)$ das Minimum der Grade $\deg(\varphi\otimes R)$, wo R die reellen Abschlüsse von K durchläuft. Dann bedeutet $\overline{\deg}(\varphi)\geqq n$ genau, daß für jede Anordnung α von K die Signatur $\operatorname{sign}_\alpha(\varphi)$ von φ bezüglich α durch 2^n teilbar ist. Offenbar ist $\deg(\varphi)\leqq\overline{\deg}(\varphi)$.

Satz 2. *Es gilt*

$$\deg'(2^k\times\varphi)=\deg(2^k\times\varphi)=\overline{\deg}(2^k\times\varphi)$$

für alle genügend großen k.

Beweis. Sei $d=\overline{\deg}(\varphi)$. Offenbar ist dann $\overline{\deg}(2^k\times\varphi)=k+d$ für alle k. Wir nehmen jetzt die Bezeichnungen des Beweises von Satz 1 auf. Für jede Anordnung α von K sei $\varepsilon_{i\alpha}$ das Signum von a_i bezüglich α und $\varepsilon_\alpha=(\varepsilon_{2\alpha},\ldots,\varepsilon_{n\alpha})$. Dann ist $1+\varepsilon_{2\alpha}+\ldots+\varepsilon_{n\alpha}=\operatorname{sign}_\alpha(\varphi)$ durch 2^d teilbar. Es folgt

$$\deg'(2^l\times\varphi\otimes\pi(\varepsilon_\alpha))=\deg'(2^l\operatorname{sign}_\alpha(\varphi)\times\pi(\varepsilon_\alpha))\geqq l+d+n-1$$

für alle l. Ist ε aber nicht von der Form ε_α, so hat $\pi(\varepsilon)$ für jedes α die Signatur 0, also ist $\pi(\varepsilon)$ eine Torsionsform. Für solche ε gilt also

$$2^l\times\varphi\otimes\pi(\varepsilon)\sim 0$$

für alle genügend große l. Summieren über alle ε gibt

$$\deg'(2^{l+n-1}\times\varphi)\geqq l+d+n-1$$

für alle genügend große l, d.h.

$$\deg'(2^k\times\varphi)\geqq k+d=\overline{\deg}(2^k\times\varphi)$$

für alle genügend große k. Wegen $\deg'(2^k\times\varphi)\leqq\deg(2^k\times\varphi)\leqq\overline{\deg}(2^k\times\varphi)$ folgt daraus die Behauptung.

Das so gewonnene Resultat wollen wir jetzt unter anderen Blickwinkeln betrachten. Multiplikation mit $\langle 1,1\rangle^k$ gibt Homomorphismen $I^n(K)\to I^{k+n}(K)$ und $J_n(K)\to J_{k+n}(K)$. Wir können damit die direkten Limites $\varinjlim I^n(K)$ und $\varinjlim J_n(K)$ bilden; und wegen $I^n(K)\subsetneqq J_n(K)$ ist $\varinjlim I^n(K)\subsetneqq\varinjlim J_n(K)$. Aus Satz 2 folgt jetzt sofort die „stabile Gleichheit" von $I^n(K)$ und $J_n(K)$:

Satz 2a. $\varinjlim I^n(K)=\varinjlim J_n(K)$.

Diese Gruppe kann man noch auf eine dritte Weise beschreiben. Sei X der Raum der Anordnungen von K und $C(X,\mathbb{Z})$ die Gruppe der stetigen Abbildungen $X\to\mathbb{Z}$ in die additive Gruppe $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen, die mit der diskreten Topologie versehen ist. Für jedes n definieren wir einen Homomorphismus $s_n: J_n(K)\to C(X,\mathbb{Z})$ durch $s_n(\varphi):=2^{-n}\operatorname{sign}(\varphi)$, wobei $\operatorname{sign}(\varphi)\in C(X,\mathbb{Z})$ die totale Signatur von φ bezeichnet. Dann induzieren die s_n einen Isomorphismus

$$s:\varinjlim J_n(K)\xrightarrow{\cong}C(X,\mathbb{Z}).$$

Die Injektivität von s folgt nämlich aus dem Lokal-Global-Satz von Pfister und die Surjektivität aus dem Normalitätssatz [5, Theorem 3.2] von Elman und Lam und der Kompaktheit von X.

Setzen wir $\bar{J}_n(K) := J_n(K)/J_{n+1}(K)$, so ist $\bar{J}_*(K) := \bigoplus_{n \geqq 0} \bar{J}_n(K)$ ein graduierter Modul über dem graduierten Wittring $W_{gr}(K) = \bigoplus_{n \geqq 0} \bar{I}^n(K)$, wobei $\bar{I}^n(K) := I^n(K)/I^{n+1}(K)$. Nach [9, Proposition 6.9] ist nämlich $I^m(K) \cdot J_n(K) \subseteq J_{m+n}(K)$. Sei $[1,1] \in \bar{I}(K)$ die Klasse von $\langle 1,1 \rangle$. Dann folgt aus Satz 2 sofort das folgende Lokal-Global-Prinzip für $\bar{J}_*(K)$:

Satz 3. *Ist $\Phi \in \bar{J}_n(K)$ und $\Phi \otimes R = 0 \in \bar{J}_n(R)$ für jeden reellen Abschluß R von K, so gibt es ein $k \geqq 0$ mit $[1,1]^k \cdot \Phi = 0 \in \bar{J}_{k+n}(K)$.*

Ein analoges Prinzip gilt auch in dem graduierten Wittring $W_{gr}(K)$ selbst, s. [2, Satz 2].

3. Verlagerung

Ist L/K eine endliche algebraische Erweiterung, so induziert jede nicht-triviale K-lineare Abbildung $s: L \to K$ einen Gruppenhomomorphismus

$$s_*: W(L) \to W(K)$$

— die Verlagerung von Scharlau (siehe z. B. [13, VII, § 1]). Nach [1, Satz 3.3] ist $s_*(I^n L) \subseteq I^n K$ für alle n. Wir zeigen jetzt, daß auch $s_*(J_n L) \subseteq J_n K$ für alle n, d. h. $\deg(s_*(\psi)) \geqq \deg(\psi)$ für alle $\psi \in W(L)$. Zunächst beweisen wir als Hilfssatz einen Spezialfall:

Hilfssatz. *Sei $L = K(\sqrt{d})$ eine quadratische Erweiterung und $s: L \to K$ die K-lineare Abbildung mit $s(1) = 0$ und $s(\sqrt{d}) = 1$. Ist dann ψ eine Form über L, so ist* $\deg(s_*(\psi)) \geqq \deg(\psi)$.

Beweis. Sei $\varphi := s_*(\psi)$. Zerfällt φ, so ist die Behauptung trivial. Es sei daher $m := \deg(\varphi) < \infty$. Es ist dann $m \geqq 1$. Wir betrachten jetzt solche Erweiterungen K' von K, die $\sqrt{d}$ nicht enthalten und für die gilt $\varphi \otimes K' \sim a\tau$ mit einer anisotropen m-fachen Pfisterform τ über K' und $a \in K'^*$ (ein regulärer Leitkörper von φ ist z. B. ein solches K'). Wir setzen $L' := K'(\sqrt{d})$ und definieren $s': L' \to K'$ dem s entsprechend. Da $\deg(\psi \otimes L') \geqq \deg(\psi)$ ist, genügt es zu zeigen, daß $\deg(\psi \otimes L') \leqq m$ ist.

Aus $s'_*(\psi \otimes L') \cong \varphi \otimes K' \sim a\tau$ folgt nach [1, Satz 2.4 und Zusatz], daß $a\tau \sim s'_*(a\sigma)$ ist mit einer m-fachen Pfisterform σ über L, und dann, daß

$$\psi \otimes L' \sim a\sigma \perp \chi \otimes L'$$

mit einer Form χ über K'. Wir wählen jetzt K' und χ so, daß χ minimale Dimension hat. Insbesondere ist dann $\chi \otimes L'$ anisotrop. Ist $\chi = 0$, so ist $\deg(\psi \otimes L') = \deg(a\sigma) = m$, und ist $1 \leqq \dim(\chi) < 2^m$, so $\deg(\chi \otimes L') < m = \deg(a\sigma)$, damit $\deg(\psi \otimes L') = \deg(\chi \otimes L') < m$. Sei schließlich $\dim \chi \geqq 2^m$. Der Körper $K'(\chi)$ enthält nicht $\sqrt{d}$, und χ wird über diesem Körper isotrop. Wegen der Wahl von K' und χ zerfällt also τ über $K'(\chi)$. Nach [1, Satz 1.3] oder [9, Lemma 4.5] ist χ ähnlich zu einer Teilform von τ, aus Dimensionsgründen also $\chi \cong b\tau$ mit $b \in K'^*$. Die Form $a\sigma \perp \chi \otimes L'$ hat somit die Dimension 2^{m+1}. Wäre nun $\deg(\psi \otimes L') > m$, so müßte $\psi \otimes L'$ ähnlich zu einer $(m+1)$-fachen Pfisterform sein. Insbesondere würde $\psi \otimes L'$ in $I^{m+1}(L')$ liegen. Daher würde die zu $s'_*(\psi \otimes L')$ äquivalente Form $a\tau$ in $I^{m+1}(K')$ liegen. Das ist ein Widerspruch. Es ist also $\deg(\psi \otimes L') \leqq m$.

Bemerkung. Wie in [1, Bemerkung nach Satz 3.4] bekommen wir jetzt eine lange Nullsequenz

$$(*) \quad \ldots \to \bar{J}_{n-1}K \xrightarrow{\mu} \bar{J}_n K \xrightarrow{i} \bar{J}_n L \xrightarrow{s_*} \bar{J}_n K \xrightarrow{\mu} \bar{J}_{n+1}K \to \ldots,$$

wobei $\bar{J}_n = J_n / J_{n+1}$ ist, $i: W(K) \to W(L)$ der kanonische Ringhomomorphismus, und $\mu: W(K) \to W(K)$ die Multiplikation mit der Klasse von $\langle 1, -d \rangle$ in $W(K)$.

Ob diese Sequenz exakt ist, ist nicht bekannt. Der Anfang

$$0 \to \bar{J}_0 K \xrightarrow{i} \ldots \xrightarrow{s_*} \bar{J}_1 K \xrightarrow{\mu} \bar{J}_2 K \xrightarrow{i} \bar{J}_2 L$$

ist aber jedenfalls exakt. Das folgt aus der Exaktheit der (*) entsprechenden Sequenz für die Galois-Cohomologiegruppen $H^n(K, 2)$ mit Werten in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (siehe [1, Corollar 4.6]) und der Kommutativität des Diagramms

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \bar{J}_0 K \arrow[r] \arrow[d, "e"] & \ldots \arrow[r] & \bar{J}_1 K \arrow[r] \arrow[d, "d"] & \bar{J}_2 K \arrow[r] \arrow[d, "c"] & \bar{J}_2 L \arrow[r] \arrow[d, "c"] & \bar{J}_2 K \arrow[d, "c"] \\
0 \arrow[r] & H^0(K,2) \arrow[r] & \ldots \arrow[r] & H^1(K,2) \arrow[r] & H^2(K,2) \arrow[r] & H^2(L,2) \arrow[r] & H^2(K,2)
\end{tikzcd}$$

(siehe [1, Bemerkung nach Satz 4.18]). Dabei ist e der Dimensionsindex, d die Diskriminante und c die Klasse der Cliffordalgebra. Die Pfeile e und d sind bekanntlich Isomorphismen, und die restlichen Pfeile c sind injektiv, weil J_3 gerade der Kern der Cliffordinvarianten auf $I^2 = J_2$ ist, vgl. [9, Ex. 6.2].

Gilt allgemein, daß die Sequenz (*) auch an der nächst folgenden Stelle

$$\bar{J}_2 K \xrightarrow{i} \bar{J}_2 L \xrightarrow{s_*} \bar{J}_2 K$$

exakt ist, so folgert man wie in [1, Satz 4,19], daß $c: J_2 K \to H^2(K, 2)$ immer surjektiv ist. Das wäre eine positive Antwort auf die bekannte Frage ob die Gruppe der Algebrenklassen vom Exponenten $\leqq 2$ von den Klassen der Quaternionenalgebren erzeugt wird.

Man kann natürlich genauso die Nullsequenz

$$(**) \quad W(K) \xrightarrow{i} W(L) \xrightarrow{s_*} W(K) \xrightarrow{\mu} J_1 K \xrightarrow{i} J_1 L \to \ldots$$

$$\ldots \to J_{n-1}K \xrightarrow{\mu} J_n K \xrightarrow{i} J_n L \xrightarrow{s_*} J_n K \xrightarrow{\mu} J_{n+1}K \to \ldots$$

benutzen. Die Exaktheit von (*) bis zur Stelle

$$\xrightarrow{\mu} \bar{J}_2 K \xrightarrow{i}$$

ist, wie mit etwas Diagramm-Jagd folgt, gleichbedeutend mit der Exaktheit von (**) bis zur Stelle

$$\xrightarrow{i} J_3 L \xrightarrow{s_*}.$$

Satz 4. *Sei L/K eine endliche algebraische Erweiterung und $s: L \to K$ eine nicht-triviale K-lineare Abbildung. Dann gilt*

$$s_*(J_n L) \subseteqq J_n K$$

für alle n.

Der *Beweis* verläuft in 5 Schritten:

(1) Für jede endliche Erweiterung L/K genügt es, den Satz für eine feste Linearform $s_0: L \to K$ zu beweisen. Es gibt nämlich ein $c \in L^*$ mit $s(z) = s_0(cz)$ für alle $z \in L$, damit $s_*(\varphi) = s_{0*}(c\varphi)$.

(2) Gilt der Satz für die Erweiterungen L/L_0 und L_0/K, so auch für L/K. Ist nämlich $r_0: L \to L_0$ eine nicht-triviale L_0-lineare Abbildung und $t_0: L_0 \to K$ eine nicht-triviale K-lineare Abbildung, so ist $s_0 := t_0 \circ r_0 : L \to K$ nicht-trivial und K-linear und $s_{0*} = t_{0*} \circ r_{0*}$.

(3) Es genügt den Satz für separable Erweiterungen L/K zu beweisen. Ist nämlich L/L_0 rein inseparabel und $i: W(L_0) \to W(L)$ der kanonische Ringhomomorphismus, so ist i bijektiv und wegen $[L:L_0]$ ungerade auch graderhaltend (vgl. [9, Proposition 6.11]). Ferner gilt es (s. [1, S. 458]) eine L_0-lineare Abbildung $r_0: L \to L_0$ mit $r_{0*} = i^{-1}$.

(4) Entsteht L aus K durch sukzessive quadratische Erweiterungen, so gilt der Satz für die Erweiterung L/K. Dies folgt aus den Schritten (1), (2) und dem Hilfssatz.

(5) Sei jetzt L/K eine endliche separable Erweiterung und $s: L \to K$ eine nicht-triviale K-lineare Abbildung. Sei dann M/K eine endliche galoissche Erweiterung, die L enthält, und sei K' der zu einer 2-Sylowgruppe der Galoisgruppe von M/K gehörige Zwischenkörper. Dann ist $K' \otimes_K L \cong \prod_{i=1}^{r} L_i'$ ein direktes Produkt von Zwischenkörpern $K' \subseteqq L_i' \subseteqq M$. Sind ferner $s_i': L_i' \to K'$ die zu dieser Zerfällung gehörige Komponenten der K'-linearen Abbildung $1 \otimes s: K' \otimes_K L \to K'$, so gilt nach [1, Satz 2.2]

$$s_*(\varphi) \otimes K' = \sum_{i=1}^{r} s_{i*}'(\varphi \otimes L_i')$$

für alle $\varphi \in W(L)$. Sei jetzt $\varphi \in J_n L$. Da die Galoisgruppe von M/K' eine 2-Gruppe ist, so entsteht L_i' aus K' durch sukzessive quadratische Erweiterungen. Nach (4) liegt damit $s_{i*}'(\varphi \otimes L_i')$ in $J_n K'$. Es folgt $s_*(\varphi) \otimes K' \in J_n K'$. Nun ist aber $[K':K]$ ungerade, damit die Erweiterung K'/K graderhaltend, also liegt $s_*(\varphi)$ in $J_n K$.

Bemerkung. Die induzierten Abbildungen

$$s_*: \bar{J}_n L \to \bar{J}_n K$$

hängen nicht von der speziellen Wahl der nicht-trivialen K-linearen Abbildung $s:L\to K$ ab. Ist nämlich t eine zweite solche Abbildung, so gibt es ein $c\in L^*$ mit $t(z)=s(cz)$ für alle $z\in L$. Für $\psi\in J_nL$ folgt $t_*(\psi)=s_*(c\psi)=s_*(\psi)+s_*(\langle c,-1\rangle\otimes\psi)$ $\equiv s_*(\psi)\bmod J_{n+1}(K)$.

4. Bewertungen

Sei v eine (Krull-) Bewertung des Körpers K. Wir bezeichnen mit Γ die Wertegruppe, mit $\mathfrak{o}$ den Bewertungsring und mit $\bar{K}$ den Restklassenkörper von v. Wir nehmen an, daß $\bar{K}$ von 2 verschiedene Charakteristik hat. Ist $a\in\mathfrak{o}$, so sei $\bar{a}$ die Klasse von a in $\bar{K}$, und ist $\varphi\in W(\mathfrak{o})$, so sei $\bar{\varphi}$ das Bild von φ in $W(\bar{K})$. Wir identifizieren $W(\mathfrak{o})$ mit seinem Bild in $W(K)$.

Es gibt eine eindeutig bestimmte additive Abbildung $\partial_{v,1}:W(K)\to W(\bar{K})$ mit $\partial_{v,1}(\langle a\rangle)=\langle\bar{a}\rangle$ falls a eine Einheit in $\mathfrak{o}$ ist, und $\partial_{v,1}(\langle a\rangle)=0$ falls die Quadratklasse aK^{*2} von a keine Einheit von $\mathfrak{o}$ enthält ([11, Proposition 2.1]). Ersichtlich gilt $\partial_{v,1}(\varphi)=\bar{\varphi}$ für $\varphi\in W(\mathfrak{o})$. Für jedes $q\in K^*$ definieren wir den Restklassenhomomorphismus

$$\partial_{v,q}:W(K)\to W(\bar{K})$$

durch $\partial_{v,q}(\varphi):=\partial_{v,1}(q\varphi)$. Offenbar hängt $\partial_{v,q}$ nur von der Quadratklasse von q ab.

Sei jetzt $M\subseteq K^*/K^{*2}$ eine Untergruppe, die unter v bijektiv auf $\Gamma/2\Gamma$ abgebildet wird. Dann kann jedes $\varphi\in W(K)$ in der Form $\varphi=\sum_{q\in M}q\varphi_q$ geschrieben werden mit $\varphi_q\in W(\mathfrak{o})$ für alle $q\in M$, und es gilt $\partial_{v,q}(\varphi)=\bar{\varphi}_q$. Ferner wird durch

$$\partial_{v,M}(\varphi):=\sum_{q\in M}\partial_{v,q}(\varphi)q$$

ein Ringhomomorphismus

$$\partial_{v,M}:W(K)\to W(\bar{K})[M]$$

von $W(K)$ auf den Gruppenring $W(K)[M]$ definiert ([11, §2], wo $\partial_{v,M}$ mit Δ bezeichnet wird). Ist v henselsch, so ist $\partial_{v,M}$ sogar ein Isomorphismus (s. [11, Proposition 2.4] und [12, Satz 7.1.1]).

Komposition von $\partial_{v,M}$ mit der Augmentation $W(\bar{K})[M]\to W(\bar{K})$ gibt einen Ringhomomorphismus

$$\Delta_{v,M}:W(K)\to W(\bar{K}).$$

Ist v diskret einrangig und $p\in K$ ein Primelement bezüglich v, so kann man $M=\{K^{*2},pK^{*2}\}$ nehmen. $\partial_{v,1}$ heißt dann der erste und $\partial_{v,p}$ der zweite Restklassenhomomorphismus. Statt $\Delta_{v,M}$ schreiben wir in diesem Fall einfach $\Delta_{v,p}$ wie in [1, S. 460].

$W(\bar{K})[M]$ ist das Tensorprodukt von $W(\bar{K})$ und dem Gruppenring $\mathbb{Z}[M]$ über $\mathbb{Z}$. Auf $\mathbb{Z}[M]$ betrachten wir die Filtrierung durch die Potenzen des Ideals

$$I_M=i_M+2\mathbb{Z}$$

wobei i_M das Augmentationsideal von $\mathbb{Z}[M]$ ist. Diese Filtrierung läßt sich sehr explizit wie folgt beschreiben:

Wir wählen eine Basis $\mathfrak{B}$ des F_2-Vektorraumes M. Zu jeder endlichen Teilmenge T von $\mathfrak{B}$ führen wir das Produkt

$$X_T := \prod_{b \in T} (1-b)$$

ein. $\{X_\phi = 1.\}$ Ersichtlich bilden diese X_T eine freie Basis von $\mathbb{Z}[M]$ als Modul über $\mathbb{Z}$. Unter Beachtung der Gleichung $(1-b)^2 = 2(1-b)$ sieht man durch Induktion nach n sofort, daß die Produkte $2^r X_T$ mit $r + |T| = n$ und die Produkte X_T mit $|T| > n$ zusammen eine freie Basis von I_M^n bilden.

Auf dem Tensorprodukt $W(\bar{K})[M]$ betrachten wir nun den — wieder mit „deg" bezeichneten — Totalgrad bezüglich der Filtrierung durch die J_n auf $W(\bar{K})$ und der Filtrierung durch die I_M^n auf $Z[M]$. Das Ideal der Elemente vom Grad $\geqq n$ in $W(\bar{K})[M]$ ist also

$$J_{n,M} = \sum_{r+s=n} J_r(\bar{K}) I_M^s,$$

und der Grad eines Elementes

$$\Phi = \sum_{T \subsetneqq \mathfrak{B}} \Phi_T X_T$$

$\{\Phi_T \in W(\bar{K})$, fast alle $\Phi_T = 0\}$ ist gegeben durch die Formel

$$\deg(\Phi) = \operatorname*{Min}_T (\deg \Phi_T + |T|).$$

Den X_T entsprechend führen wir für jede endliche Teilmenge T von $\mathfrak{B}$ die $|T|$-fache Pfisterform

$$\chi_T := \bigotimes_{b \in T} \langle 1, -b \rangle$$

über K ein. Dann kann jedes $\varphi \in W(K)$ in der Gestalt

$$(*) \quad \varphi = \sum_T \varphi_T \otimes \chi_T$$

mit $\varphi_T \in W(\mathfrak{o})$ geschrieben werden[2], und es ist

$$\partial_{v,M}(\varphi) = \sum_T \bar{\varphi}_T X_T.$$

Satz 5. *Für jedes $\varphi \in W(K)$ ist*

$$\deg \partial_{v,M}(\varphi) \geqq \deg(\varphi).$$

Beweis. Sei φ in der Gestalt $(*)$ hingeschrieben und $\Phi_T := \bar{\varphi}_T \in W(\bar{K})$. Ist $\partial_{v,M}(\varphi) = 0$, so ist unsere Behauptung trivial. Sei jetzt $m := \deg \partial_{v,M}(\varphi)$ endlich und S eine endliche Teilmenge von $\mathfrak{B}$ mit

$$m = \deg \Phi_S + |S|.$$

---

[2] Die φ_T sind durch φ nicht notwendig eindeutig bestimmt

Wir führen den Körper K' ein, der aus K durch Adjunktion der Quadratwurzeln aus allen Elementen in $\mathfrak{B}\setminus S$ entsteht. Es gibt genau eine Bewertung v' von K', die v fortsetzt, und diese hat denselben Restklassenkörper $\bar{K}$ wie v. Es bezeichne Γ' die Wertegruppe von v'. Für jedes $T \subsetneqq S$ bezeichne weiter T' das Bild von T in der Quadratklassengruppe von K'. Es ist dann $|T'|=|T|$. Weiter ist S' Teil einer Basis $\mathfrak{B}'$ einer Untergruppe M' von K'^*/K'^{*2}, die unter v' bijektiv auf $\Gamma'/2\Gamma'$ abgebildet wird. Jetzt ist

$$\varphi \otimes K' = \sum_T \varphi_T \otimes \chi_T \otimes K' = \sum_{T \subsetneqq S} \varphi_T \otimes \chi_{T'},$$

weiter

$$\partial_{v',M'}(\varphi \otimes K') = \sum_{T \subsetneqq S} \Phi_T X_T.$$

Insbesondere hat $\partial_{v',M'}(\varphi \otimes K')$ wieder den Grad m. Wegen $\deg(\varphi \otimes K') \geqq \deg(\varphi)$ können wir jetzt den Körper K' vergessen und von vornherein annehmen, es sei schon

$$\partial_{v,M}(\varphi) = \sum_{T \subsetneqq S} \Phi_T X_T$$

und $m = k + |S|$ mit $k := \deg \Phi_S$.

Unter den Körpererweiterungen von $\bar{K}$ in einem Universalkörper greifen wir jetzt einen Körper F mit folgenden beiden Minimal-Eigenschaften heraus:

a) Die Kernform von $\Phi_S \otimes F$ ist skalares Vielfaches $\varepsilon\sigma$ einer k-fachen Pfisterform σ.

b) Für die Kernformen α_T der Elemente $\Phi_T \otimes F$ ist die Summe der Dimensionen über alle $T \subset S$ möglichst klein.

Für jede echte Teilmenge T von S ist nun

$$\deg \alpha_T \geqq \deg \Phi_T \geqq m - |T| = k + |S| - |T| > k,$$

also die Dimension von α_T entweder Null oder $> 2^k$. Im zweiten Falle würde jedoch der Funktionenkörper $F(\alpha_T)$ die Form σ nicht zerfällen, und der Körper $F(\alpha_T)$ widerspräche den Minimaleigenschaften von F. Somit müssen alle $\alpha_T = 0$ sein.

Sei jetzt $(\tilde{K}, \tilde{v})$ eine Henselsche Erweiterung von (K, v) mit Restklassenkörpererweiterung $F/\bar{K}$ und Wertegruppe $\tilde{\Gamma} = \Gamma$. Mit $\tilde{M}$ bezeichnen wir das Bild der Gruppe M in $\tilde{K}^*/\tilde{K}^{*2}$. Ebenso bezeichnen wir für jede endliche Teilmenge T von $\mathfrak{B}$ mit $\tilde{T}$ ihr Bild in $\tilde{M}$. Offenbar ist

$$\partial_{\tilde{v},\tilde{M}}(\varphi \otimes \tilde{K}) = \sum_{\tilde{T} \subsetneqq \tilde{S}} (\Phi_T \otimes F) X_{\tilde{T}} = \varepsilon\sigma X_{\tilde{S}}.$$

Für die k-fache unimodulare Pfisterform τ über $\tilde{K}$ mit $\bar{\tau} = \sigma$ und eine Einheit e in $\tilde{K}$ mit $\bar{e} = \varepsilon$ ist auch

$$\partial_{\tilde{v},\tilde{M}}(e\tau \otimes \chi_{\tilde{S}}) = \varepsilon\sigma X_{\tilde{S}}.$$

Nun ist $\tilde{v}$ jedoch Henselsch, somit $\partial_{\tilde{v},M}$ bijektiv. Daher ist

$$\varphi\otimes\tilde{K}\sim e\tau\otimes\chi_{\mathfrak{S}}.$$

Wir lesen ab, daß $\varphi\otimes\tilde{K}$ den Grad $k+|S|=m$ hat. Also hat φ in der Tat einen Grad $\leqq m$, und unser Satz ist bewiesen.

Als Folgerungen bekommen wir die beiden folgenden Sätze.

Satz 6. *Für jedes $\varphi\in W(K)$ gilt*

$$\deg(\Delta_{v,M}(\varphi))\geqq\deg(\varphi).$$

Satz 7. *Ist $|\Gamma/2\Gamma|=2^l$, so gilt für jedes $q\in K^*$ und jedes $\varphi\in W(K)$*

$$\deg(\partial_{v,q}(\varphi))\geqq\deg(\varphi)-l.$$

Beweise. Ist $\partial_{v,M}(\varphi)=\sum_T\Phi_T X_T$ wie im Beweis von Satz 5, so ist $\Delta_{v,M}(\varphi)=\Phi_\emptyset$ und $\partial_{v,q}(\varphi)$ ist eine $W(\bar{K})$-lineare Kombination der Φ_T. Nach Satz 5 ist aber $\deg(\Phi_T)+|T|\geqq\deg(\varphi)$ für alle T, also $\deg(\Phi_\emptyset)\geqq\deg(\varphi)$ und $\deg(\Phi_T)+l\geqq\deg(\varphi)$ für alle T falls $|\Gamma/2\Gamma|\leqq 2^l$.

Es folgt, daß allgemein $\Delta_{v,M}(J_n(K))\subseteqq J_n(\bar{K})$ ist, und daß im Falle $|\Gamma/2\Gamma|=2^l$ auch $\partial_{v,q}(J_n(K))\subseteqq J_{n-l}(\bar{K})$ ist. Die entsprechenden Aussagen für die Ideale I^n sind leicht zu beweisen. Der Fall v diskret einrangig findet sich bei Milnor [14, § 5], vgl. auch [1, § 3].

Bemerkung. Ist $|\Gamma/2\Gamma|=2^l$, so sind die Homomorphismen

$$\partial_v=\partial_{v,q}:\bar{J}_n(K)\to\bar{J}_{n-l}(\bar{K})$$

nicht von der speziellen Wahl von q abhängig[3]. Ist nämlich $\varphi\in J_n(K)$, so ist

$$\begin{aligned}\partial_{v,q}(\varphi)&=\partial_{v,1}(q\varphi)=\partial_{v,1}(\varphi)+\partial_{v,1}(\langle q,-1\rangle\otimes\varphi)\\&\equiv\partial_{v,1}(\varphi)\bmod J_{n+1-l}(\bar{K}).\end{aligned}$$

Ist die Bewertung v henselsch, so ist, wie schon bemerkt, $\partial_{v,M}:W(K)\to W(\bar{K})[M]$ ein Isomorphismus. Man möchte aber haben, daß in diesem Fall sogar $\deg(\partial_{v,M}(\varphi))=\deg(\varphi)$ ist für alle $\varphi\in W(K)$. Wie man leicht einsieht (die X_T und χ_T benutzen!), ist das dazu äquivalent, daß $\deg(\bar{\varphi})=\deg(\varphi)$ ist für alle $\varphi\in W(\mathfrak{o})$. Das zu zeigen ist uns leider nur im Falle $\mathrm{char}(\bar{K})=\mathrm{char}(K)$ gelungen:

Satz 8. *Sei v henselsch und* $\mathrm{char}(\bar{K})=\mathrm{char}(K)$. *Dann gilt*

$$\deg(\bar{\varphi})=\deg(\varphi)$$

für alle $\varphi\in W(\mathfrak{o})$.

Beweis. Zunächst ist

$$\deg(\bar{\varphi})=\deg\Delta_{v,M}(\varphi)\geqq\deg(\varphi).$$

---

[3] $\bar{J}_n$ bezeichnet nach früherer Verabredung den Quotienten J_n/J_{n+1}

Sei $\lambda: K \to \bar{K} \cup \infty$ die zu v gehörige Stelle. Ist P der in $\bar{K}$ enthaltene Primkörper, so gibt es wegen der Gleichheit der Charakteristiken (genau) eine Einbettung $\pi: P \to K$, und λ ist trivial auf $\pi(P)$, also ist $\lambda \circ \pi$ die Inklusion $P \to \bar{K}$. Wir betrachten jetzt weitere Paare (C, γ) bestehend aus einem Teilkörper C von $\bar{K}$ und einer Einbettung $\gamma: C \to K$, für die λ auf $\gamma(C)$ trivial ist und $\lambda \circ \gamma$ die Inklusion von C in $\bar{K}$ ist. Sei (A, α) ein — nach Zorn's Lemma existierendes — maximales Paar dieser Art. Dann muß $\bar{K}$ über A ersichtlich algebraisch sein. Nach Hensels Lemma kann $\bar{K} \setminus A$ überdies keine separablen Elemente enthalten, also ist $\bar{K}$ über A rein inseparabel. Daher gibt es eine Form χ über A mit $\chi \otimes \bar{K} = \bar{\varphi}$, weil sich die Quadratklassen von A bijektiv auf die Quadratklassen von $\bar{K}$ abbilden. Weiter ist $[\bar{K}:A]$ ungerade und somit $\deg(\chi) = \deg(\bar{\varphi})$. Da $\lambda \circ \alpha$ die Inklusion von A in $\bar{K}$ ist, gilt $\overline{\alpha_*(\chi)} = \bar{\varphi}$[4]. Daraus folgt $\alpha_*(\chi) = \varphi$, weil v henselsch ist. Wir erhalten nun

$$\deg(\varphi) \geqq \deg(\chi) = \deg(\bar{\varphi}),$$

und unser Satz ist bewiesen.

Der entsprechende Satz für die durch die Ideale I^n gegebene Gradfunktion ist trivial, auch im charakteristikungleichen Falle. Bei dem Isomorphismus $W(\mathfrak{o}) \xrightarrow{\sim} W(\bar{K})$ wird nämlich ersichtlich $I(\mathfrak{o}) := I(K) \cap W(\mathfrak{o})$ auf $I(\bar{K})$ abgebildet, also $I^n(\mathfrak{o})$ auf $I^n(\bar{K})$.

Sei jetzt v spezieller henselsch und *einrangig diskret*. Ist $p \in K$ ein Primelement zu v, so hat man bekanntlich die exakte Sequenz

$$0 \to W(\bar{K}) \xrightarrow{j} W(K) \xrightarrow{\partial_{v,p}} W(\bar{K}) \to 0,$$

wobei j durch Komposition des Inversen zu dem Isomorphismus $W(\mathfrak{o}) \xrightarrow{\sim} W(\bar{K})$ mit der Inklusion $W(\mathfrak{o}) \to W(K)$ entsteht. Haben K und $\bar{K}$ dieselbe Charakteristik, so bildet j nach Satz 8 jedes Ideal $J_n(\bar{K})$ in $J_n(K)$ ab. Ferner bildet $\partial_{v,p}$ nach Satz 7 jedes Ideal $J_n(K)$ in $J_{n-1}(\bar{K})$ hinein ab.

Satz 9. *Sei v einrangig diskret und henselsch, und sei* $\mathrm{Char}(K) = \mathrm{Char}(\bar{K})$. *Dann sind die Sequenzen*

$$0 \to \bar{J}_{n+1}(\bar{K}) \xrightarrow{j} \bar{J}_{n+1}(K) \xrightarrow{\partial_v} \bar{J}_n(\bar{K}) \to 0$$

exakt. Sie werden überdies zerfällt durch die von der Wahl des Primelementes p im allgemeinen abhängigen Homomorphismen

$$\Delta_{v,p}: \bar{J}_{n+1}(K) \to \bar{J}_{n+1}(\bar{K}).$$

Beweis. Es sind nämlich sogar die Sequenzen

$$0 \to J_{n+1}(\bar{K}) \xrightarrow{j} J_{n+1}(K) \xrightarrow{\partial_{v,p}} J_n(\bar{K}) \to 0$$

exakt und werden von $\Delta_{v,p}$ zerfällt. Außer der Surjektivität von

$$\partial_{v,p}: J_{n+1}(K) \to J_n(\bar{K})$$

folgt dies aus dem Obigen. Ist nun $\chi \in J_n(\bar{K})$ vorgegeben, so ist $\langle 1, p \rangle \otimes j(\chi)$ ein in $J_{n+1}(K)$ gelegenes Urbild von χ unter $\partial_{v,p}$.

[4] $\alpha_*(\chi)$ bezeichnet die Basiserweiterung $\chi \otimes K$ bezüglich $\alpha: A \to K$

Jede anisotrope Form φ über unserem henselsch diskret bewerteten Körper K hat eine Zerlegung

$$\varphi = \varphi_0 \perp p\varphi_1$$

mit unimodularen Formen φ_0 und φ_1, deren Reduktionen $\bar{\varphi}_0$ und $\bar{\varphi}_1$ über $\bar{K}$ anisotrop und bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt sind. Aufgrund von Satz 9 können wir — im Falle $\mathrm{Char}(K) = \mathrm{Char}(\bar{K})$ — den Grad von φ wie folgt aus den Graden von $\bar{\varphi}_0$ und $\bar{\varphi}_1$ berechnen:

Satz 9a. $\deg(\varphi) = \mathrm{Min}(\deg\bar{\varphi}_0, \deg\bar{\varphi}_1)$ *außer in dem Falle, daß* $\bar{\varphi}_0$ *und* $\bar{\varphi}_1$ *gleichen* Grad n *haben und* $\bar{\varphi}_0 \equiv \bar{\varphi}_1 \bmod J_{n+1}(\bar{K})$ *ist. In diesem Falle ist* $\deg(\varphi) = n+1$.

Beweis. Sei $\deg\bar{\varphi}_0 = n_0$, $\deg\bar{\varphi}_1 = n_1$ (natürliche Zahlen oder ∞). Aus Satz 9 liest man ab:

$$\deg(\varphi) = \mathrm{Min}(n_1 + 1, \deg(\bar{\varphi}_0 \perp \bar{\varphi}_1)).$$

Im Falle $n_0 < n_1$ ergibt die rechte Seite n_0, im Falle $n_0 > n_1$ ergibt sie n_1. Sei jetzt $n_0 = n_1 = n$. Ist $\deg(\bar{\varphi}_0 \perp \bar{\varphi}_1) = n$ so ergibt die rechte Seite n. Ist jedoch $\deg(\bar{\varphi}_0 \perp \bar{\varphi}_1) > n$, so ist $\bar{\varphi}_0 \equiv \bar{\varphi}_1 \bmod J_{n+1}(\bar{K})$ und $\deg(\varphi) = n+1$. Damit ist alles gezeigt.

Allgemeiner bleiben Satz 9 und Satz 9a natürlich richtig, wenn man die Voraussetzung „v diskret einrangig“ zu „$(\Gamma : 2\Gamma) = 2$“ abschwächt und p als ein Element aus K^* mit $v(p)$ nicht in 2Γ wählt.

5. Rationale Funktionenkörper

Sei $K(x)$ der rationale Funktionenkörper in einer Unbestimmten x über K. Für jedes normierte Primpolynom p in $K[x]$ sei $K_p = K[x]/(p)$ und $\partial_p : W(K(x)) \to W(K_p)$ der zu der zu p gehörigen Stelle von $K(x)$ über K und der Ortsuniformisierenden p gehörige zweite Restklassenhomomorphismus. Nach Satz 7 gilt dann $\deg(\partial_p \Phi) \geqq \deg(\Phi) - 1$, d.h. $\deg\Phi \leqq 1 + \min_p(\deg(\partial_p \Phi))$ für alle $\Phi \in W(K(x))$.

Es sei ferner $\partial_\infty : W(K(x)) \to W(K)$ der zu der unendlichen Stelle von $K(x)$ über K und der Ortsuniformisierenden $\frac{1}{x}$ gehörige zweite Restklassenhomomorphismus. Ist dann für jedes normierte Primpolynom p in $K[x]$ die K-lineare Abbildung $s_p : K_p \to K$ definiert durch

$$s_p(x_p^{d-1}) := 1 \quad \text{und} \quad s_p(x_p^i) := 0 \quad \text{für} \quad 0 \leqq i < d-1,$$

wobei d den Grad von p und x_p die Klasse von x in K_p bezeichnet, so gilt nach [15, Theorem 4.1] die Formel

$$(*) \quad \partial_\infty(\psi) = \sum_p s_p\, \partial_p(\psi)$$

für alle $\psi \in W(K(x))$.

Jetzt sei $\Delta_\infty: W(K(x)) \to W(K)$ der zu der unendlichen Stelle und der Ortsuniformisierenden $\frac{1}{x}$ gehörige Ringhomomorphismus. Dann ist $\Delta_\infty(\psi) = \partial_\infty\left(\left\langle 1, \frac{1}{x}\right\rangle \otimes \psi\right)$ für alle $\psi \in W(K(x))$. Nach Satz 6 gilt $\deg(\Phi) \leqq \deg(\Delta_\infty(\Phi))$ für alle $\Phi \in W(K(x))$. Wir werden zeigen, daß $\deg(\Phi) = \deg \Delta_\infty(\Phi)$ oder $\deg(\Phi) = 1 + \min_p \deg(\partial_p \Phi)$.

Für $a \in K$ sei $\Delta_a: W(K(x)) \to W(K)$ der zu der zu $x-a$ gehörigen Stelle von $K(x)$ und der Ortsuniformisierenden $x-a$ gehörige Ringhomomorphismus, also $\Delta_a(\psi) = \partial_{x-a}(\langle 1, x-a\rangle \otimes \psi)$ für alle $\psi \in W(K(x))$. Wir haben jetzt (vgl. [15, Corollary 4.3]):

Lemma. *Für alle $\phi \in W(K(x))$ gilt*

$$\Delta_a(\Phi) = \Delta_\infty(\Phi) - \sum_{p \neq x-a} s_{p*}(\langle 1, x_p - a\rangle \otimes \partial_p(\Phi)).$$

Beweis. Da $\frac{x-a}{x}$ bezüglich der unendlichen Stelle von $K(x)$ über K eine Einseinheit ist, gilt

$$\Delta_\infty(\Phi) = \partial_\infty\left(\left\langle 1, \frac{1}{x}\right\rangle \otimes \Phi\right) = \partial_\infty\left(\left\langle 1, \frac{1}{x-a}\right) \otimes \Phi\right)$$
$$= \partial_\infty(\langle 1, x-a\rangle \otimes \Phi).$$

Das Lemma folgt daher aus der Formel (*) angewandt auf $\psi = \langle 1, x-a\rangle \otimes \Phi$ und der Tatsache, daß $\partial_p(\langle 1, x-a\rangle \otimes \Phi) = \langle 1, x_p - a\rangle \otimes \partial_p \Phi$ ist falls $p \neq x-a$.

Satz 10. *Für jedes $\Phi \in W(K(x))$ gilt*

$$\deg \Phi = \min(\deg \Delta_\infty(\Phi), 1 + \min_p \deg \partial_p(\Phi)),$$

wo p die normierten Primpolynome in $K[x]$ durchläuft.

Beweis. Sei $N := \deg(\Delta_\infty(\Phi))$ und $n := \min_p \deg \partial_p(\Phi)$. Wir wissen schon, daß $\deg(\Phi) \leqq \min(N, 1+n)$. Aus Satz 4 und dem Lemma folgt $\deg(\Delta_a(\Phi)) \geqq \min(N, 1+n)$ für alle $a \in K$. Es sei jetzt u eine von x unabhängige Unbestimmte über K und $K' := K(u)$, $\Phi' := \Phi \otimes K'(x)$. Dann gilt $\deg(\Phi') = \deg(\Phi)$ und $\deg(\Delta_\infty(\Phi')) = \deg(\Delta_\infty(\Phi))$ (s. [9, Proposition 6.11]). Ist $p' \in K'[x]$ ein normiertes Primpolynom, so gilt $\partial_{p'}(\Phi') = 0$ falls $p' \notin K[x]$, aber $\deg \partial_{p'}(\Phi') = \deg \partial_p(\Phi)$ falls $p' = p \in K[x]$. Mit $a = u$ folgt daher $\deg \Delta_u(\Phi') \geqq \min(N, 1+n)$. Nun ist aber $\Delta_u(\Phi') \in W(K(u))$ offenbar das zu $\Phi \in W(K(x))$ unter dem durch $x \to u$ definierten Isomorphismus zwischen $K(x)$ und $K(u)$ über K gehörige Element, insbesondere $\deg(\Delta_u(\Phi')) = \deg(\Phi)$. Damit haben wir auch $\deg(\Phi) \geqq \min(N, 1+n)$ bewiesen.

Nach [14, Theorem 5.3] (vgl. auch [15, Theorem 1.4]) ist die Sequenz

$$0 \to W(K) \to W(K(x)) \xrightarrow{(\partial_p)} \bigoplus_p W(K_p) \to 0$$

exakt und zerfallend. Zur Zerfällung kann man $\Delta_\infty : W(K(x)) \to W(K)$ nehmen. Wir haben jetzt

Satz 11. *Die Sequenzen*

$$0 \to \bar{J}_{n+1}(K) \to \bar{J}_{n+1}(K(x)) \xrightarrow{(\partial_p)} \bigoplus_p \bar{J}_n(K_p) \to 0$$

sind exakt und zerfallend. Zur Zerfällung kann man $\Delta_\infty : \bar{J}_{n+1}(K(x)) \to \bar{J}_{n+1}(K)$ *nehmen.*

Beweis. Es sind sogar die Sequenzen

$$0 \to J_{n+1}(K) \to J_{n+1}(K(x)) \xrightarrow{(\partial_p)} \bigoplus_p J_n(K_p) \to 0$$

exakt und durch $\Delta_\infty : J_{n+1}(K(x)) \to J_{n+1}(K)$ zerfällt. Dabei ist nur noch die Surjektivität von $(\partial_p) : J_{n+1}(K(x)) \to \bigoplus_p J_n(K_p)$ zu zeigen. Ist aber $(\varphi_p) \in \bigoplus_p J_n(K_p)$, so gibt es nach dem Obigen ein $\Phi \in W(K(x))$ mit $\partial_p(\Phi) = \varphi_p$ für alle p und $\Delta_\infty(\Phi) = 0$. Aus Satz 10 folgt dann $\Phi \in J_{n+1}(K(x))$.

Der entsprechende Satz für die Ideale I^n ist ebenfalls richtig, s. [14, Lemma 5.7].

Satz 10 läßt sich auf den Fall eines rationalen Funktionenkörpers $K(x)$ mit einer beliebigen endlichen Folge $x = (x_1, \ldots, x_r)$ von Unbestimmten verallgemeinern. Um unsere Notationen zu fixieren, definieren wir eine Anordnung der Monome $x_1^{\nu_1} \ldots x_r^{\nu_r}$ in $K[x]$, indem wir $x_1^{\nu_1} \ldots x_r^{\nu_r} < x_1^{\mu_1} \ldots x_r^{\mu_r}$ setzen genau dann wenn es ein i gibt, $1 \leqq i \leqq r$, mit $\nu_i < \mu_i$ und $\nu_j = \mu_j$ für $j > i$. Wir nennen ein Polynom f in $K[x]$ normiert, falls der Koeffizient zum größten in f vorkommenden Monom gleich 1 ist. Ist $p \in K[x]$ ein normiertes irreduzibles Polynom, so sei K_p der Quotientenkörper von $K[x]/(p)$ und $\partial_p : W(K(x)) \to W(K_p)$ der zweite Restklassenhomomorphismus bzgl. der kanonischen Stelle von $K(x)$ in K_p über K und der Ortsuniformisierenden p. Ferner sei $\Delta_{i,\infty} : W(K(x_1, \ldots, x_i)) \to W(K(x_1, \ldots, x_{i-1}))$ analog wie oben definiert und

$$\Delta_\infty := \Delta_{1,\infty} \circ \ldots \circ \Delta_{r,\infty} : W(K(x)) \to W(K).$$

Dann ist offenbar Δ_∞ ein Linksinverses zu $W(K) \to W(K(x))$.

Satz 12. *Für jedes* $n \geqq 0$ *ist die Sequenz*

$$0 \to \bar{J}_{n+1}(K) \to \bar{J}_{n+1}(K(x)) \xrightarrow{(\partial_p)} \bigoplus_p \bar{J}_n(K_p)$$

exakt {*p durchläuft die normierten Primpolynome in* $K[x]$, $x = (x_1, \ldots, x_r)$}.

Beweis. Die Exaktheit an der ersten Stelle liegt auf der Hand. Die an der zweiten Stelle zeigen wir durch Induktion nach r. Der Fall $r = 1$ wurde erledigt. Sei $r > 1$ und $x' = (x_1, \ldots, x_{r-1})$. Sei Φ ein Element in $\bar{J}_{n+1}(K(x))$ mit $\partial_p \Phi = 0$ für alle normierten Primpolynome p von $K[x]$. Ist nun P ein normiertes Primpolynom von $K(x')[x_r]$, so haben wir $P = f^{-1} p$ mit einem eindeutig bestimmten normierten Primpolynom p von $K[x]$ und einem Polynom f in $K[x']$. Für die zu P gehörige

Restklassenabbildung ∂_p von $\bar{J}_{n+1}(K(x))$ nach $\bar{J}_n(K_p)$ gilt

$$\partial_p(\Phi)=\langle f\rangle\partial_p(\Phi)=0.$$

Aufgrund von Satz 11 ist somit $\Phi=\Psi\otimes K(x)$ mit einem Element Ψ aus $\bar{J}_{n+1}(K(x'))$. Ist jetzt q ein normiertes Primpolynom von $K[x']$, so ist q auch normiertes Primpolynom von $K[x]$, und wir haben zwei zu q gehörige Restklassenhomomorphismen

$$\partial'_q:\bar{J}_{n+1}(K(x'))\to\bar{J}_n(K'_q),$$
$$\partial_q:\bar{J}_{n+1}(K(x))\to\bar{J}_n(K'_q(x_r)),$$

wobei K'_q den Quotientenkörper von $K[x']/(p)$ bezeichnet. Es ist

$$0=\partial_q(\Phi)=\partial'_q(\Psi)\otimes K'_q(x_r),$$

also $\partial'_q(\Psi)=0$. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es somit ein Element Λ in $\bar{J}_{n+1}(K)$ mit $\Psi=\Lambda\otimes K(x')$, also $\Phi=\Lambda\otimes K(x)$. Damit ist Satz 12 bewiesen.

Jetzt können wir Satz 10 wie folgt verallgemeinern:

Satz 13. *Für jede Form Φ über $K(x)$ ist*

$$\deg\Phi=\min(\deg\Delta_\infty(\Phi),1+\min_p\deg\partial_p(\Phi)),$$

wobei p die normierten irreduziblen Polynome in $K[x]=K[x_1,\ldots,x_r]$ durchläuft.

Beweis. Für $n:=\deg\Phi$ gilt nach den Sätzen 6 und 7

$$n\leqq\min(\deg\Delta_\infty(\Phi),1+\min_p\deg\partial_p(\Phi)).$$

Ist aber $n<1+\min_p\deg\partial_p(\Phi)$, so hat die Klasse $[\Phi]$ von Φ in $\bar{J}_n(K(x))$ unter jeder Restklassenabbildung

$$\partial_p:\bar{J}_n(K(x))\to\bar{J}_{n-1}(K_p)$$

das Bild Null. Nach Satz 12 gibt es also eine Form φ in $J_n(K)\setminus J_{n+1}(K)$ so daß $[\Phi]=[\varphi\otimes K(x)]$. Daraus folgt $[\Delta_\infty(\Phi)]=[\varphi]$, also

$$\deg\Delta_\infty(\Phi)=\deg(\varphi)=n.$$

Als Beispiel betrachten wir den Fall

$$\Phi=\langle 1,-f\rangle\otimes\varphi\otimes K(x)$$

mit $f\in K[x]$ und einer Form φ über K. Ist a der Koeffizient zum größten in f vorkommenden Monom, und sind $q_1,\ldots,q_s$ die normierten Primpolynome, die in f in ungerader Potenz aufgehen, so ist $\langle 1,-f\rangle=\langle 1,-aq_1\ldots q_s\rangle$. Aus Satz 13 folgt

$$\deg(\Phi)=\min(\deg(\langle 1,-a\rangle\otimes\varphi),1+\deg(\varphi\otimes K_{q_1}),\ldots,1+\deg(\varphi\otimes K_{q_r})).$$

Ist sogar $f=q$ ein normiertes irreduzibles Polynom, so erhalten wir

$$\deg(\Phi)=1+\deg(\varphi\otimes K_q).$$

Diese Formeln können als Verallgemeinerung des Normensatzes [10, Theorem 4.2 und Corollary 4.3]—im Falle char $K \neq 2$—gedeutet werden.

6. Gleichheit von J_n und I^n

Wir wollen einige Spezialfälle anführen, in denen sich die Gleichheit der Ideale J_n und I^n nachweisen läßt. Es sei angemerkt, daß diese Fälle nicht ausreichen, um unsere Skepsis gegenüber Gleichheit dieser Ideale im allgemeinen zu zerstreuen.

Aus den in § 4 angestellten Betrachtungen folgt sofort:

Satz 14. *Sei (K, v) ein henselsch bewerteter Körper, dessen Restklassenkörper $\bar{K}$ dieselbe Charakteristik $\neq 2$ wie K hat. Ist dann $J_n(\bar{K}) = I^n(\bar{K})$ für alle $n \leqq n_0$, so ist auch $J_n(K) = I^n(K)$ für alle $n \leqq n_0$.*

Insbesondere gilt somit $J_n(K) = I^n(K)$ für jedes n, falls K Henselisierung eines Funktionenkörpers F nach einer auf seinem Konstantenkörper k trivialen Stelle ist, und der Konstantenkörper etwa algebraisch abgeschlossen oder endlich oder reell abgeschlossen ist.

Satz 14 umfaßt nicht die $\mathfrak{p}$-adischen Körper der Zahlentheorie, doch bei diesen ist $J_3 = 0$ und tritt somit kein Problem auf.

Für einen algebraischen Zahlkörper K gilt ebenfalls $J_n(K) = I^n(K)$ für alle n, denn für $n \geqq 3$ enthält $J_n(K)$ nur die Formen $2^n r \times \langle \pm 1 \rangle$ mit $r \geqq 0$.

Satz 15. *Sei K ein Körper und n eine natürliche Zahl mit $J_n(K) = I^n(K)$ und $J_{n-1}(L) = I^{n-1}(L)$ für jede endliche Erweiterung L von K. Dann ist für den rationalen Funktionenkörper $K(x)$ in einer Variablen $J_n(K(x)) = I^n(K(x))$.*

Das folgt sofort aus einem Vergleich der in § 5 aufgestellten Sequenz

$$0 \longrightarrow J_n(K) \longrightarrow J_n(K(x)) \xrightarrow{(\partial_p)} \bigoplus_p J_{n-1}(K_p) \longrightarrow 0$$

mit der von Milnor aufgestellten Sequenz [14, Lemma 5.7]

$$0 \longrightarrow I^n(K) \longrightarrow I^n(K(x)) \xrightarrow{(\partial_p)} \bigoplus_p I^{n-1}(K_p) \longrightarrow 0.$$

Insbesondere gilt $J_n(K(x)) = I^n(K(x))$ für alle n, wenn K etwa ein Zahlkörper oder ein $\mathfrak{p}$-adischer Körper ist. Wir können in diesen Fällen aber nicht entscheiden, ob bei zwei Unbestimmten x, y die Ideale $J_n(K(x, y))$ und $I^n(K(x, y))$ für jedes n übereinstimmen. Hingegen erhalten wir allgemein aus Satz 15 sofort die

Folgerung. *Ist $J_3(K) = I^3(K)$, so ist für beliebig viele Unbestimmte $x_1, \ldots, x_d$ ebenfalls $J_3(K(x_1, \ldots, x_d)) = I^3(K(x_1, \ldots, x_d))$.*

Sei jetzt F ein beliebiger Funktionenkörper über einem Konstantenkörper k von einem Transzendenzgrad $d \geqq 1$. Wir wollen uns überlegen, daß zumindest in den Fällen k algebraisch abgeschlossen, k endlich, k reell abgeschlossen die Ideale $J_n(F)$ und $I^n(F)$ für große n übereinstimmen.

Ist k algebraisch abgeschlossen, so ist F ein C_d-Körper. Somit haben alle anisotropen Formen über F eine Dimension $\leqq 2^d$, und es ist $J_{d+1}(F) = 0$. Weiter kann $J_d(F)$ an anisotropen Formen nur d-fache Pfisterformen enthalten. Also ist

$J_d(F)=I^d(F)$. Ist k endlich, so ist F ein C_{d+1}-Körper, und wir haben aus denselben Gründen $J_n(F)=I^n(F)$ für $n\geqq d+1$.

Weniger trivial ist der Fall, daß k reell abgeschlossen ist.

Satz 16. *Ist F ein Funktionenkörper über einem reell abgeschlossenen Körper k vom Transzendenzgrad d, so ist $J_n(F)=I^n(F)$ für $n\geqq d+1$.*

Als erster Schritt zum Beweis dieses Satzes dient uns folgendes

Lemma 1. *Das Ideal $J_{d+1}(F)$ enthält keine Torsionselemente.*

Beweis. Angenommen, die Behauptung des Lemmas ist falsch. Dann gibt es in $J_{d+1}(F)$ eine anisotrope Form φ mit $\langle 1,1\rangle\otimes\varphi\sim 0$. Somit ist φ die Verlagerung $s_*(\psi)$ einer Form ψ über $F(\sqrt{-1})$ bezüglich der F-Linearform $s:F(\sqrt{-1})\to F$, die durch $s(1)=0$, $s(\sqrt{-1})=1$ definiert ist (s. [1, Satz 2.4]). Sicherlich ist ψ anisotrop und

$$\dim\psi=\tfrac{1}{2}\dim\varphi\geqq 2^d.$$

Weil $F(\sqrt{-1})$ ein C_d-Körper ist, muß $\dim\psi=2^d$ sein und ψ jedes Element von F^* darstellen. Insbesondere stellt ψ die 1 dar, und deshalb ist $s_*(\psi)\cong\varphi$ isotrop. Das ist der gesuchte Widerspruch.

Bemerkung. Etwas allgemeiner sieht man mit derselben Methode: Besitzt ein Körper K eine unreelle[5] quadratische Erweiterung $K(\sqrt{-w})$, deren u-Invariante $\leqq 2^d$ ist, so ist $J_{d+1}(K)$ torsionsfrei. (Man ersetze dazu im obigen Beweis die Form $\langle 1,1\rangle$ durch $\langle 1,w\rangle$ und beachte $\langle 1,1\rangle^r\cong\langle 1,w\rangle^r$ für große r.) Dieser Satz findet sich für das Ideal $I^{d+1}(K)$ anstelle von $J_{d+1}(K)$ schon bei Elman und Lam [6, Theorem 6.2].

Aufgrund dieses Lemmas ist Satz 16 schon bewiesen, falls F unreell ist, weil dann $J_{d+1}(F)=0$ ist. Sei ab jetzt F reell.

Wir benötigen im folgenden den von Bröcker in der Arbeit [4] eingeführten Begriff des *Stabilitätsindex* $st(K)$ eines reellen Körpers K. Sei $\hat{W}(K)$ der reduzierte Wittring von K, der aus $W(K)$ durch Herausdividieren des Nilradikals (=Torsionsanteil) entsteht. Vermöge der totalen Signatur fassen wir $\hat{W}(K)$ als Teilring des Ringes $C(X,\mathbb{Z})$ der stetigen $\mathbb{Z}$-wertigen Funktionen auf dem kompakten total unzusammenhängenden Raum X der Anordnungen von K auf. Bekanntlich ist $C(X,\mathbb{Z})/\hat{W}(K)$ eine 2-Torsionsgruppe. $st(K)$ ist definiert als die kleinste natürliche Zahl s mit

$$2^sC(X,\mathbb{Z})=C(X,2^s\mathbb{Z})\subset\hat{W}(K),$$

bzw. $st(K)=\infty$, falls es keine solche Zahl gibt. Ab jetzt sei $st(K)<\infty$ vorausgesetzt. Dann ist $st(K)$ auch die kleinste natürliche Zahl s, so daß für das Bild $\hat{I}(K)$ von $I(K)$ in $\hat{W}(X)$ gilt $\hat{I}^{s+1}(K)=2\hat{I}^s(K)$[6] [4, Satz 3.17]. Somit ist für jedes $n\geqq s=st(K)$

$$\hat{I}^n(K)=2^{n-s}\hat{I}^s(K).$$

[5] Das heißt nicht formal reelle

[6] Die Bezeichnung „reduzierter Stabilitätsindex" wäre also treffender

Daraus folgt nun sofort für $n \geqq s$

$$\hat{I}^n(K) = C(X, 2^n\mathbb{Z}).$$

In der Tat, sicherlich ist $\hat{I}^n(K)$ für jedes n in $C(X, 2^n\mathbb{Z})$ enthalten. Sei nun $n \geqq s$ und f ein Element in $C(X, 2^n\mathbb{Z})$. Aufgrund des Normalitätssatzes von Elman und Lam [5, Theorem 3.2] gibt es für genügend großes t ein Element ψ in $\hat{I}^{n+t}(K)$ mit $\psi = 2^t f$ (wie wir schon in § 2 festgestellt haben). Wegen $n \geqq s$ ist $\psi = 2^{n+t-s}\chi$ mit einem Element χ aus $\hat{I}^s(K)$, also $f = 2^{n-s}\chi \in \hat{I}^n(K)$ (vgl. [5, p. 1189]).

Weil andererseits für jedes n sogar das Bild $\hat{J}_n(K)$ von $J_n(K)$ in $\hat{W}(K)$ in $C(X, 2^n\mathbb{Z})$ enthalten ist, erhalten wir intern in dem Wittring $W(K)$:

Lemma 2. *Ist k formal reeller Körper mit endlichem Stabilitätsindex s, so ist für jedes $n \geqq s$*

$$J_n(K) = I^n(K) + J_n(K)_t,$$

wobei $J_n(K)_t$ den Torsionsanteil von $J_n(K)$ bezeichnet.

Nach Bröcker hat nun der reelle Funktionenkörper F in Satz 16 einen Stabilitätsindex $s \leqq d$ [4, Folgerung 4.7]. Aus Lemma 1 und Lemma 2 ergibt sich somit die in Satz 16 gemachte Behauptung.

Ist insbesondere $d \leqq 2$, so wissen wir, daß $I^n(F) = J_n(F)$ für alle n gilt. Im Falle $d = 3$ ist die Gleichheit von $I^n(F)$ und $J_n(F)$ höchstens für $n = 3$ fraglich. Elman und Lam haben aber gezeigt [7, Proposition 2.9], daß in diesem Falle in der Tat auch $I^3(F) = J_3(F)$ ist. Somit erhalten wir:

Satz 17. *Für einen Funktionenkörper F von einem Transzendenzgrad $\leqq 3$ über einem reell abgeschlossenen Konstantenkörper ist $I^n(F) = J_n(F)$ für alle n.*

7. Graderhöhung bei Körpererweiterungen

Wir benutzen die folgenden Standardnotationen: φ ist eine Form vom Grad $\deg(\varphi) = n \geqq 1$ und der Höhe $h \geqq 1$ über einem Körper k. Weiter ist $\{K_i, 0 \leqq i \leqq h\}$ ein generischer Zerfällungsturm von φ, der *regulär* ist, d.h. K_{i+1} ist reguläre Körpererweiterung von K_i für $0 \leqq i \leqq h-2$ und im Falle $n > 1$ auch für $i = h-1$, im Falle $n = 1$ ist jedoch $K_h = K_{h-1}(\sqrt{d(\varphi)})$. Den Leitkörper K_{h-1} bezeichnen wir auch mit F und den totalen generischen Zerfällungskörper K_h mit T. Die Kernform von $\varphi \otimes K_i$ bezeichnen wir mit φ_i und die Leitform von φ mit τ. Es ist also τ die n-fache anisotrope Pfisterform über F, die zu φ_{h-1} ähnlich ist.

Sei L eine Körpererweiterung von k. Für jedes i mit $0 \leqq i \leqq h$ bezeichne $K_i \cdot L$ das bis auf Isomorphie wohlbestimmte freie Kompositum von K_i mit L über k. Sicherlich ist $\deg(\varphi \otimes L) \geqq n$. In [9, Proposition 6.11] wurde bereits folgendes festgestellt:

(i) $\deg(\varphi \otimes L) > n$ genau dann, wenn τ über $F \cdot L$ zerfällt.

(ii) Ist L der Funktionenkörper $K(\psi)$ einer Form ψ einer Dimension $\geqq 2$, $\psi \not\cong \langle 1, -1 \rangle$, so ist genau dann $\deg(\varphi \otimes L) > n$, wnn $\psi \otimes F$ ähnlich zu einer Teilform von τ ist. Insbesondere ist sicherlich $\deg(\varphi \otimes L) = n$, wenn $\dim \psi > 2^n$ ist.

Sei jetzt ψ eine weitere Form über k vom Grad $m \geqq 0$ und der Höhe $e \geqq 1$. Sei $\{L_j, 0 \leqq j \leqq e\}$ ein regulärer generischer Zerfällungsturm von ψ und ψ_j die Kernform von $\psi \otimes L_j$. Den Leitkörper L_{e-1} bezeichnen wir auch mit E und den totalen generischen Zerfällungskörper L_e mit S, schließlich die Leitform von ψ über E mit σ.

Wir wollen die Beziehungen zwischen φ und ψ studieren, die vorliegen müssen, damit eine der Körpererweiterungen $K(\psi)$, E, S auf φ graderhöhend wirkt. Dabei werden wir für $m \geqq n-1$ zu detaillierten Aussagen gelangen.

Satz 18. *Sei* $\deg(\varphi \otimes k(\psi)) > n$ *und somit* $\dim \psi \leqq 2^n$, $m \leqq n$, ψ *anisotrop.*

(i) *Ist* $m = n$, *so ist* ψ *ähnlich zu einer Pfisterform* ϱ, *und es ist*

$$\varphi \equiv \psi \bmod J_{n+1}(k).$$

Weiter ist $\tau \cong \varrho \otimes F$.

(ii) *Ist* $m = n-1$, *so ist* ψ *ebenfalls ähnlich zu einer Pfisterform* ϱ, *und es ist*

$$\tau \cong \langle 1, -d \rangle \otimes (\varrho \otimes F)$$

mit geeignetem $d \in F^*$.

Beweis. Wie oben festgestellt, ist $\psi \otimes F$ ähnlich zu einer Teilform von τ. Wir wählen ein von ψ über k dargestelltes Element $a \neq 0$ aus und haben mit einer geeigneten Form η über F die Gleichung

$$(*) \quad (a\psi) \otimes F \perp \eta \cong \tau.$$

Ist $m = n$, so muß ψ die Dimension 2^n haben, somit $\eta = 0$ sein. Die Leitform τ ist also über k definiert durch die Form $a\psi$, und nach [9, Proposition 9.2] ist $a\psi$ eine Pfisterform ϱ. Nach [9, Theorem 9.6 und Proposition 6.9] ist weiter

$$\varphi \equiv \varrho \equiv \psi \bmod J_{n+1}(k).$$

Sei jetzt $m = n-1$ vorausgesetzt. Dann ist $\dim \psi \geqq 2^{n-1}$. Weiter hat die Form η ebenfalls den Grad m. Im Falle $\dim \psi > 2^{n-1}$ wäre $\dim \eta < 2^{n-1}$, also $m \leqq n-2$. Somit ist $\dim \psi = 2^{n-1}$ und $\psi \cong a\varrho$ mit einer $(n-1)$-fachen Pfisterform ϱ über k. Die Form $\varrho \otimes F$ ist Teilform von τ. Daraus folgt

$$\tau \cong \langle 1, -d \rangle \otimes (\varrho \otimes F)$$

mit geeignetem $d \in F^*$, vgl. [8, S. 192].

Satz 19. *Wird der Grad von* φ *durch den Leitkörper* E *von* ψ *erhöht, so muß* $m \leqq n-2$ *sein.*

Beweis. Es ist $e \geqq 2$. Sei j die größte natürliche Zahl $\leqq e-2$, für die $\varphi \otimes L_j$ noch den Grad n hat. Dann wird der Grad von $\varphi \otimes L_j$ durch $L_j(\psi_j)$ erhöht. Andrerseits ist ψ_j wegen $j \leqq e-2$ nicht zu einer Pfisterform ähnlich. Aufgrund des vorhergehenden Satzes muß also gelten:

$$m = \deg(\psi_j) \leqq \deg(\varphi \otimes L_j) - 2 = n - 2.$$

Wir betrachten jetzt in dem freien Kompositum $T \cdot S$ über k die von den Körpern K_i und L_j erzeugten Teilkörper $K_i \cdot L_j$ $(0 \leqq i \leqq h,\ 0 \leqq j \leqq e)$. Nach

[9, Proposition 5.13] bilden bei festem j die Körper $K_i \cdot L_j$, für die $\varphi_i \otimes K_i \cdot L_j$ anisotrop ist, einen generischen Zerfällungsturm von $\varphi \otimes L_j$. Ebenso bilden bei festem i die Körper $K_i \cdot L_j$ mit $\psi_j \otimes K_i \cdot L_j$ anisotrop einen generischen Zerfällungsturm von $\psi \otimes K_i$ [7].

Ist $|m-n| \leqq 1$, so hat nach dem soeben bewiesenen Satz 19 die Form $\varphi \otimes E$ den Grad n und $\psi \otimes F$ den Grad m. Somit ist folgender Hilfssatz evident.

Hilfssatz. *Im Falle* $|m-n| \leqq 1$ *sind die Formen* $\tau \otimes E \cdot F$ *und* $\sigma \otimes E \cdot F$ *beide anisotrop.*

Bezüglich der Graderhöhung durch den totalen generischen Zerfällungskörper S von ψ erhalten wir nun:

Satz 20. (i) *Ist* $\deg(\varphi \otimes S) > n$, *so muß* $m \leqq n$ *sein.*
(ii) *Im Falle* $m = n$ *sind gleichwertig:*
a) $\deg(\varphi \otimes S) > n$,
b) $\sigma \otimes E \cdot F \cong \tau \otimes E \cdot F$,
c) $\varphi \equiv \psi \bmod J_{n+1}(k)$.
(iii) *Im Falle* $m = n-1$ *sind gleichwertig:*
a) $\deg(\varphi \otimes S) > n$,
b) $\tau \otimes E \cdot F \cong \langle 1, -d \rangle \otimes (\sigma \otimes E \cdot F)$, *mit einem Element* $d \neq 0$ *aus* $E \cdot F$.

Beweis. Ist $\deg(\varphi \otimes S) > n$, so wird — wie oben festgestellt — τ durch den Körper $S \cdot F$ zerfällt. Sei j die größte natürliche Zahl unterhalb e mit $\tau \otimes L_j \cdot F$ anisotrop. Dann wird $\tau \otimes L_j \cdot F$ durch den Funktionenkörper der Form $\psi_j \otimes L_j \cdot F$ zerfällt. Somit ist

$$2^m \leqq \dim \psi_j \leqq \dim \tau = 2^n,$$

also $m \leqq n$.

Sei jetzt $m = n$ oder $m = n-1$. Dann ist nach dem vorangehenden Hilfssatz a priori $\tau \otimes E \cdot F$ anisotrop, also in der soeben angestellten Betrachtung $j = e-1$. Weiter sehen wir, daß genau dann S den Grad von φ erhöht, wenn $S \cdot F$ die Pfisterform $\tau \otimes E \cdot F$ zerfällt, also wenn $\sigma \otimes E \cdot F$ die Form $\tau \otimes E \cdot F$ teilt. Damit leuchten die Implikationen a)$\Leftrightarrow$b) unter Punkt (ii) und Punkt (iii) des Satzes ein.

Sei schließlich $m = n$ und $\deg(\varphi \otimes S) > n$. Dann ist $\sigma \otimes E \cdot F \cong \tau \otimes E \cdot F$, also

$$[\varphi \perp (-\psi)] \otimes E \cdot F \equiv [\sigma \perp (-\tau)] \otimes E \cdot F \equiv 0 \bmod J_{n+1}(E \cdot F).$$

$\{$Beachte $I \cdot J_n \subset J_{n+1}\}$. Also hat die Form $[\varphi \perp (-\psi)] \otimes E \cdot F$ einen Grad $> n$. Nun gelangt man von K nach $E \cdot F$ durch eine Folge von Körpererweiterungen L''/L' die zu Erweiterungen $L'(\chi)/L'$ mit $\dim \chi > 2^n$ äquivalent sind. Somit kann nach Satz 18 die Form $\varphi \perp (-\psi)$ *nicht* den Grad n haben, d. h. es ist

$$\varphi \equiv \psi \bmod J_{n+1}(k).$$

Umgekehrt ist in diesem Falle natürlich $\deg(\varphi \otimes S) > n$. Damit ist Satz 20 völlig bewiesen.

Nach Teil (i) und (ii) dieses Satzes ist die natürliche Abbildung

$$J_r/J_{r+1}(k) \to J_r/J_{r+1}(S)$$

für $r < m$ injektiv und hat für $r = m$ im Kern nur die Klassen 0 und $[\psi]$.

---

[7] Ist $\varphi_0 \otimes L_j$ bzw. $\psi_0 \otimes K_i$ isotrop, so ist der kleinste dieser Körper durch L_j bzw. K_i zu ersetzen.

Weiter ist die Folgerung aus Teil (ii) bemerkenswert, daß im Falle $m=n$ genau dann $\deg(\varphi\otimes S)>n$ ist, wenn $\deg(\psi\otimes T)>n$ ist.

Die in den Sätzen 18–20 niedergelegte Theorie ist inhaltsleer, wenn ψ *ungerade Dimension* hat, weil dann $m=0$ ist. Um auch für Formen ψ ungerader Dimension nützliche Sätze zu erhalten, müssen wir anstelle von $\deg(\psi)$ den Grad der Form $\psi\perp\langle -d(\psi)\rangle$ betrachten.

Sei also jetzt ψ eine Form ungerader Dimension $\geqq 3$ über k mit Diskriminante $d(\psi)=\langle d\rangle$. Mit χ bezeichnen wir die Form $\psi\perp\langle -d\rangle$ und mit m im Gegensatz zu früher den Grad von χ. Es ist $m\geqq 2$. Ansonsten benutzen wir für φ und ψ die oben eingeführten Bezeichnungen weiter.

Satz 21. *Es sei* $\deg(\varphi\otimes k(\psi))>n$.

(i) *Dann ist* $\dim\chi\leqq 2^n$, *also* $m\leqq n$.

(ii) *Im Falle* $m=n$ *ist* χ *ähnlich zu einer* n*-fachen Pfisterform* ϱ *und es ist*

$$\varphi\equiv\varrho \bmod J_{n+1}(k).$$

(iii) *Sei jetzt* $m=n-1$. *Dann hat* ψ *die Dimension* $2^{n-1}-1$ *oder* $2^{n-1}+1$.

a) *Ist* $\dim\psi=2^{n-1}-1$, *so ist*

$$\psi\cong\langle -d\rangle\varrho',$$

wobei ϱ' *den reinen Anteil einer* $(n-1)$*-fachen Pfisterform* ϱ *über* k *bezeichnet. Weiter ist*

$$\tau\cong\langle 1,-c\rangle\otimes(\varrho\otimes F)$$

mit geeignetem $c\in F^*$.

b) *Ist* $\dim\psi=2^{n-1}+1$ *und* χ *isotrop, so ist* ψ *excellent von der Höhe* 2, *genauer*

$$\psi\cong c\varrho\perp\langle d\rangle$$

mit geeignetem $c\in k^*$ *und einer* $(n-1)$*-fachen Pfisterform* ϱ *über* k. *Weiter ist*

$$\varphi\equiv\langle 1,cd\rangle\otimes\varrho \bmod J_{n+1}(k).$$

c) *Ist schließlich* $\dim\psi=2^{n-1}+1$ *und* χ *anisotrop, so ist* ψ *kein Pfisternachbar. Hingegen ist* $\psi\otimes F$ *excellent von der Höhe* 2 *und Nachbar der Leitform* τ *von* φ. *Genauer ist*

$$\psi\otimes F\cong c\gamma\perp\langle d\rangle$$

mit geeignetem $c\in F^*$ *und einer anisotropen* $(n-1)$*-fachen Pfisterform* γ *über* F, *und*

$$\tau\cong\langle 1,cd\rangle\otimes\gamma.$$

Jedoch gibt es keine Form ϱ *über* k *mit* $\varrho\otimes F\cong\gamma$.

Beweis. (i) Die Form τ wird durch den Körper $F\cdot k(\psi)=F(\psi\otimes F)$ zerfällt. Also haben wir nach Wahl eines von ψ über k dargestellten Elementes a eine Isometrie

$$(*)\quad \psi\otimes F\perp\eta\cong a\tau$$

mit geeigneter Form η über F. Die Form η ist $\neq 0$, weil ψ ungerade Dimension hat.

Somit ist $\dim\chi \leqq 2^n$ und $m \leqq n$.

(ii) Im Falle $m=n$ ist χ ähnlich zu einer Pfisterform ϱ, also $\chi \cong (-d)\varrho$, und wir erhalten $\psi \cong (-d)\varrho'$. Weiter muß η eindimensional, also $\eta = \langle -d \rangle$ sein, und wir erhalten aus (*) eine Isometrie $a\tau \cong \chi \otimes F$, also $\tau \cong \varrho \otimes F$. Nach [9, Theorem 9.6] bedeutet dies, daß

$$\varphi \equiv \varrho \mod J_{n+1}(k)$$

ist.

(iii) Sei ab jetzt $m=n-1$. Wir betrachten die Form $\zeta := \eta \perp \langle d \rangle$ über F, und wir folgern aus (*):

$$\zeta \sim a\tau \perp (-\chi) \otimes F .$$

$\chi \otimes F$ hat nach Satz 19 den Grad $n-1$, während τ den Grad n hat, somit hat ζ den Grad $n-1$ und eine Dimension $\geqq 2^{n-1}$. Es ist also

$$\dim\eta \geqq 2^{n-1} - 1 .$$

Weil auch ψ mindestens die Dimension $2^{n-1}-1$ hat, bleiben für ψ nur die Möglichkeiten $\dim\psi = 2^{n-1}-1$ und $\dim\psi = 2^{n-1}+1$.

a) Sei zunächst $\dim\psi = 2^{n-1}-1$. Dann ist $\dim\chi = 2^{n-1}$, also $\chi \cong (-d)\varrho$ mit einer $(n-1)$-fachen Pfisterform ϱ über k. Daraus folgt

$$\psi \cong (-d)\varrho' .$$

Die Form τ wird durch den zu $F(\psi \otimes F)$ über F äquivalenten Funktionenkörper $F(\varrho \otimes F)$ zerfällt. Also ist

$$\tau \cong \langle 1, -c \rangle \otimes (\varrho \otimes F)$$

mit geeignetem $c \in F^*$.

b) Wir betrachten jetzt den Fall $\dim\psi = 2^{n-1}+1$, χ isotrop. Dann ist $\psi \cong \alpha \perp \langle d \rangle$ mit einer Form α der Dimension 2^{n-1} und des Grades $n-1$. Es ist also $\alpha = c\varrho$ mit einer $(n-1)$-fachen Pfisterform ϱ über k und $c \in k^*$. Weiter erhalten wir

$$\psi \perp d\varrho' \cong c\langle 1, cd \rangle \otimes \varrho .$$

Also ist ψ Nachbar der Pfisterform $\langle 1, cd \rangle \otimes \varrho$ mit Komplementärform $d\varrho'$ und somit exzellent von der Höhe 2. Aus (*) folgt andrerseits, daß $\psi \otimes F$ Nachbar von τ ist. Wir erhalten also

$$\tau \cong \langle 1, cd \rangle \otimes \varrho \otimes F .$$

Aufgrund von [9, Theorem 9.5] bedeutet dies

$$\varphi \equiv \langle 1, cd \rangle \otimes \varrho \mod J_{n+1}(k) .$$

c) Sei schließlich $\dim\psi = 2^{n-1}+1$ und χ anisotrop. Wie weiter oben festgestellt wurde, hat die Form $\zeta = \langle \eta \rangle \perp d$ den Grand $n-1$. Andererseits hat ζ die Dimension 2^{n-1}. Also ist $\zeta \cong d\gamma$ mit einer $(n-1)$-fachen Pfisterform γ über F, somit $\eta \cong d\gamma'$. Wir sehen also, daß $\psi \otimes F$ exzellent von der Höhe 2 und Nachbar von τ ist. Nach [9, Corollary 7.19] ist

$$\psi \otimes F \cong c\gamma \perp \langle d \rangle$$

mit geeignetem $c\in F^*$. Weil die rechte Seite ersichtlich Nachbar von $\langle 1, cd\rangle\otimes\gamma$ ist, folgt

$$\tau\cong\langle 1, cd\rangle\otimes\gamma.$$

Angenommen, es gibt eine Form ϱ über k mit $\varrho\otimes F\cong\gamma$. Ist a ein von ϱ über k dargestelltes Element, so ist auch $(a\varrho)\otimes F\cong\gamma$. Indem wir ϱ durch $a\varrho$ ersetzen, erreichen wir also, daß ϱ über k das Element 1 darstellt. Nach Satz 19 wirkt F auf die 2^{n-1}-dimensionale Form ϱ nicht graderhöhend. Somit ist ϱ eine $(n-1)$-fache anisotrope Pfisterform. Wir erhalten nun $\eta\cong(d\varrho')\otimes F$ und dann

$$(\psi\perp d\varrho')\otimes F\cong\tau.$$

Nach Satz 19 wirkt F auf die 2^n-dimensionale Form $\psi\perp d\varrho'$ nicht graderhöhend. Also ist $\psi\perp d\varrho'$ ähnlich zu einer n-fachen anisotropen Pfisterform, die dann die Gestalt $\langle 1, g\rangle\otimes\varrho$ mit geeignetem $g\in k^*$ haben muß. Wir wählen ein von ϱ' über k dargestelltes Element h aus und erhalten

$$\psi\perp d\varrho'\cong dh\varrho\otimes\langle 1, g\rangle\cong d\varrho\otimes\langle 1, g\rangle.$$

Daraus folgt

$$\psi\cong gd\varrho\perp\langle d\rangle$$

im Widerspruch zu unserer Voraussetzung, daß χ anisotrop ist. Es gibt also *keine* Form ϱ über k mit $\varrho\otimes F\cong\gamma$.

Wäre schließlich ψ Nachbar einer Pfisterform über k, so könnten wir die am Anfang dieses Beweisabschnittes über $\psi\otimes F$ angestellte Betrachtung für ψ selbst wiederholen und erhielten, daß ψ das Element d darstellt. χ sollte jedoch anisotrop sein. Damit ist Satz 21 völlig bewiesen.

Sei G ein Leitkörper von χ mit zugehöriger Leitform ϱ und Q ein totaler generischer Zerfällungskörper von χ. Wie früher bezeichne σ die Leitform von ψ über E. In [9, Proposition 5.12] wurde folgendes festgestellt:

(i) Die Körper Q und S sind über k äquivalent.

(ii) Es gibt über k eine Stelle $\lambda: G\to E\cup\infty$.

(iii) ϱ hat gute Reduktion bezüglich jeder solchen Stelle λ und es ist $\lambda_*(\varrho)\cong\sigma$. Insbesondere hat σ den Grad m.

Satz 22. *Der Grad n von φ werde durch E erhöht. Dann muß $m\leqq n-1$ sein. Im Falle $m=n-1$ muß überdies ψ_{e-2} die Dimension $2^{n-1}+1$ haben.* (N.B.: *Es muß $e\geqq 2$ sein.*)

Zum Beweis wähle man $j\leqq e-2$ maximal mit $\deg(\varphi\otimes L_j)=n$. Der Grad von $\varphi\otimes L_j$ wird durch $L_j(\psi_j)$ erhöht. Weiter ist wegen $j\leqq e-2$ die Form $\psi_j\perp\langle -d\rangle$ nicht zu einer Pfisterform ähnlich. Aufgrund von Satz 21 ist also $m\leqq n-1$ und im Falle $m=n-1$ weiter $\dim\psi_j=2^{n-1}+1$. Insbesondere ist $j=e-2$.

Satz 23. (i) *Erhöht S den Grad n von φ, so ist $m\leqq n$.*

(i) *Im Falle $m=n$ sind gleichwertig:*

a) $\deg(\varphi\otimes S)>n$,

b) $\sigma\otimes E\cdot F\cong\tau\otimes E\cdot F$,

c) $\varphi\equiv\chi \bmod J_{n+1}(k)$.

(iii) *Im Falle* $m=n-1$ *sind gleichwertig:*
a) $\deg(\varphi\otimes S)>n$,
b) $\tau\otimes E\cdot F\cong\langle 1,-c\rangle\otimes(\sigma\otimes E\cdot F)$ *mit einem Element* $c\neq 0$ *aus* $E\cdot F$.

Beweis. Die Behauptung (i) ist aufgrund von Satz 20 evident, weil S über k zu Q äquivalent ist. Der Beweis von a)⇔b) im Falle $m=n$ und im Falle $m=n-1$ ergibt sich wie folgt: Wir können $S=E(\sigma)$ wählen. S erhöht genau dann den Grad von φ, wenn der Körper

$$F\cdot E(\sigma)=(F\cdot E)(\sigma\otimes F\cdot E)$$

die Pfisterform τ zerfällt. Dies bedeutet, daß $\sigma\otimes F\cdot E$ die Form τ teilt. Im Falle $n=m$ sind schließlich die Implikationen a)⇔c) evident aufgrund von Satz 20 und der Äquivalenz von S und Q über k.

8. Graderhöhung bei Multiplikation mit Pfisterformen

Sei wieder φ eine Form über einem Körper k von einem Grad $n>0$, sei F ein Leitkörper von φ und τ die zugehörige Leitform. Sei weiter ϱ eine d-fache anisotrope Pfisterform über k. Dann ist $\deg(\varrho\otimes\varphi)\geqq d+n$ [9, Proposition 6.9].

Ist nun $\deg(\varrho\otimes\varphi)>d+n$, so ist sicherlich $\varrho\otimes\tau\sim 0$. Es liegt die Frage nahe, ob umgekehrt aus $\varrho\otimes\tau\sim 0$ gefolgert werden kann, daß $\varrho\otimes\varphi$ einen Grad $>d+n$ hat. Für $d=1$ können wir dies in der Tat beweisen:

Satz 24. *Ist a ein Element aus* K^* *mit* $\langle 1,a\rangle\otimes\tau\sim 0$, *so hat* $\langle 1,a\rangle\otimes\varphi$ *mindestens den Grad* $n+2$.

Beweis. Angenommen, die Form $\psi:=\langle 1,a\rangle\otimes\varphi$ habe den Grad $n+1$. Dann wirkt nach Satz 19 der Leitkörper F von φ auf ψ nicht graderhöhend. Mit geeignetem $b\in F^*$ ist jedoch

$$\psi\otimes F\sim b\langle 1,a\rangle\otimes\tau\sim 0,$$

Widerspruch!

Für $d\geqq 2$ muß unsere Frage leider verneint werden. Wir geben zwei Beispiele:

a) $\varphi=\alpha\otimes\varrho'$ mit Pfisterformen α,ϱ von vorgegebenen Graden $n\geqq 1$ und $d\geqq 2$. Dabei bezeichnet ϱ' wie üblich den reinen Anteil von ϱ $\{\varrho\cong\langle 1\rangle\perp\varrho'\}$. φ werde als anisotrop vorausgesetzt, was sich über geeigneten Körpern leicht einrichten läßt. φ ist eine exzellente Form der Höhe 2 mit dem Leitkörper $k(\varphi)$ und der Leitform $\tau=\alpha\otimes k(\varphi)$, vgl. [9, § 7]. Es ist $\varrho\otimes\tau\sim 0$. Dennoch ist

$$\deg(\varrho\otimes\varphi)=\deg(\varrho\otimes\alpha)=d+n.$$

b) Zu vorgegebenem $n\geqq 1$ und ungeradem $r>1$ sei φ die Form $(2^n r)\times\langle 1\rangle$ über einem reellen Körper k. Der Leitkörper F von φ ist unreell, weil schon $k(\varphi)$ unreell ist. Somit gibt es zu der Leitform $\tau=2^n\times\langle 1\rangle$ über F (vgl. [9, § 7]) eine — leicht explizit angebbare — natürliche Zahl d, mit $\langle 1,1\rangle^d\otimes\tau\sim 0$. Dennoch ist sogar für jedes t

$$\deg(\langle 1,1\rangle^t\otimes\varphi)=t+\deg(\varphi).$$

Literatur

1. Arason, J. Kr.: Cohomologische Invarianten quadratischer Formen. J. Algebra **36**, 448—491 (1975)
2. Arason, J. Kr.: Primideale im graduierten Wittring und im mod 2 Cohomologiering. Math. Z. **145**, 139—143 (1975)
3. Arason, J. Kr., Pfister, A.: Beweis des Krullschen Durchschnittsatzes für den Wittring. Invent. Math. **12**, 173—176 (1971)
4. Bröcker, L.: Zur Theorie der quadratischen Formen über formal reellen Körpern. Math. Ann. **210**, 233—256 (1974)
5. Elman, R., Lam, T. Y.: Quadratic forms over formally real fields and pythagorean fields. Amer. J. Math. **94**, 1155—1194 (1972)
6. Elman, R., Lam, T. Y.: Quadratic forms under algebraic extensions. Math. Ann. **219**, 21—42 (1976)
7. Elman, R., Lam, T. Y.: On the quaternion symbol homomorphism $g_F: k_2F \rightarrow B(F)$. Proc. Conference Alg. K-Theory Seattle 1972, Vol. II, Lecture Notes in Mathematics 342, pp. 447—463. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1973
8. Elman, R., Lam, T. Y.: Pfister forms and K-theory of fields. J. Algebra **23**, 181—213 (1972)
9. Knebusch, M.: Generic splitting of quadratic forms. Proc. London Math. Soc. **33**, 65—93 (1976); **34**, 1—31 (1977)
10. Knebusch, M.: Specialization of quadratic and symmetric bilinear forms, and a norm theorem. Acta arithm. **24**, 279—299 (1973)
11. Knebusch, M.: On the extension of real places. Comment. Math. Helv. **48**, 354—369 (1973)
12. Knebusch, M.: Grothendieck- und Wittringe von nichtausgearteten symmetrischen Bilinearformen. Sitz.ber. Heidelberg. Akad. Wiss. 1969/70, 3. Abh., pp. 93—157
13. Lam, T. Y.: The algebraic theory of quadratic forms. Reading, Mass.: Benjamin 1973
14. Milnor, J.: Algebraic K-theory and quadratic forms. Invent. Math. **9**, 318—344 (1970)
15. Scharlau, W.: Quadratic reciprocity laws. J. Number Theory **4**, 78—97 (1972)

Eingegangen am 6. Dezember 1977