Jber. d. Dt. Math.-Verein.
82 (1980) 109–127
AMS subject classification: 15A63, 12D15, 14G30

Signaturen, reelle Stellen und reduzierte quadratische Formen*)

M. Knebusch, Regensburg

§1 Problemstellung

Wir denken uns einen kommutativen Ring A mit Einselement vorgegeben. Wir betrachten über A Paare (E, B) bestehend aus einem projektiven A-Modul E und einer symmetrischen bzgl. A bilinearen Form $B: E \times E \to A$, die nicht ausgeartet ist, d. h., einen Isomorphismus $x \mapsto B(x, -)$ von E auf den dualen Modul $E^* := \operatorname{Hom}_A(E, A)$ liefert. Ein solches Paar (E, B) nennen wir einen *bilinearen Raum* über A. Ein *Isomorphismus* $\alpha: (E, B) \to (E', B')$ zwischen bilinearen Räumen (E, B) und (E', B') ist definiert als ein A-Modul-Isomorphismus $\alpha: E \xrightarrow{\sim} E'$ mit $B'(\alpha x, \alpha y) = B(x, y)$ für x und y beliebig in E. Wenn es einen solchen Isomorphismus gibt, nennen wir (E, B) und (E', B') *isomorph* und schreiben $(E, B) \cong (E', B')$.

Beispiele (i) Sei (a_{ij}) eine symmetrische $n \times n$-Matrix mit Koeffizienten $a_{ij} \in A$, deren Determinante in der Einheitengruppe A^* von A liegt. Sei weiter E freier A-Modul mit Basis $e_1, \ldots, e_n$. Dann gibt es genau eine symmetrische Bilinearform B auf E mit $B(e_i, e_j) = a_{ij}$. Diese ist nicht ausgeartet. Wir bezeichnen den so gebildeten „freien" Bilinearraum (E, B) oft kurz durch die Matrix (a_{ij}). Ist (a_{ij}) eine Diagonalmatrix, also $a_{ij} = a_i \delta_{ij}$ mit Einheiten $a_i \in A^*$, so schreiben wir für den „Diagonalraum" (a_{ij}) auch $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$.

(ii) Sei (U, β) ein Paar bestehend aus einem projektiven endlich erzeugten A-Modul U und einer eventuell ausgearteten symmetrischen Bilinearform β auf U. Wir definieren auf der direkten Summe $U \oplus U^*$ von U und seinem Dualmodul U^* eine symmetrische Bilinearform B wie folgt:

$$\begin{aligned} &B(u, v) = \beta(u, v) \quad \text{für } u, v \in U;\\ &B(u, u^*) = B(u^*, u) = u^*(u) \quad \text{für } u \in U, u^* \in U^*;\\ &B(u^*, v^*) = 0 \quad \text{für } u^*, v^* \in U^*. \end{aligned}$$

Die Form B erweist sich als nicht ausgeartet. Wir nennen das Paar (E, B) den *metabolischen Raum* $M(U, \beta)$ zu dem Paar (U, β). Ist β die Nullform auf U, so nennen wir $M(U, \beta)$ den *hyperbolischen Raum* zu U und bezeichnen ihn mit H(U). Es läßt sich übrigens leicht zeigen, daß, wenn 2 Einheit in A ist, jeder Raum $M(U, \beta)$ zu H(U) isomorph ist.

*) Erweiterte Fassung eines auf der DMV-Tagung in Hamburg 1979 gehaltenen Übersichtsvortrages.

38

(iii) Zu bilinearen Räumen (E_1, B_1) und (E_2, B_2) können wir in naheliegender Weise die *orthogonale Summe* und das *Tensorprodukt* bilden, und gelangen damit zu neuen bilinearen Räumen:

$$(E_1, B_1) \perp (E_2, B_2) := (E_1 \otimes E_2, B_1 \perp B_2),$$

$$(E_1, B_1) \otimes (E_2, B_2) := (E_1 \otimes_A E_2, B_1 \otimes B_2),$$

vgl. Bourbaki: Algèbre, Chap. IX. Zum Beispiel erhält man für Diagonalräume:

$$\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \perp \langle b_1, \ldots, b_m \rangle = \langle a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m \rangle,$$

$$\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \otimes \langle b_1, \ldots, b_m \rangle = \langle a_1 b_1, \ldots, a_1 b_m, a_2 b_1, \ldots, a_2 b_m, \ldots, a_n b_m \rangle.$$

Außer für sehr spezielle Ringe A dürfte es ein aussichtsloses Vorhaben sein, die bilinearen Räume über A bis auf Isomorphie klassifizieren zu wollen. Wir wenden uns einer Äquivalenzrelation für bilineare Räume zu, die im allgemeinen wesentlich gröber als die Isomorphie ist. Wir nennen zwei bilineare Räume φ und ψ über A *Witt-äquivalent*, geschrieben $\varphi \sim \psi$, wenn es metabolische Räume η und ζ über A gibt mit $\varphi \perp \eta \cong \psi \perp \zeta$. Die Äquivalenzklasse eines Raumes φ bezeichnen wir mit $[\varphi]$ und nennen sie die *Wittklasse* von φ. Wittklassen lassen sich wie folgt in wohldefinierter Weise addieren und multiplizieren:

$$[\varphi] + [\psi] := [\varphi \perp \psi], \qquad [\varphi] \cdot [\psi] := [\varphi \otimes \psi].$$

Damit wird die Menge W(A) aller Wittklassen über A ein assoziativer und kommutativer Halbring, in dem die Klasse der metabolischen Räume das Nullelement ist. W(A) ist nun sogar ein Ring, denn für jeden bilinearen Raum (E, B) ist

$$(E, B) \perp (E, -B) \cong M(E, B),$$

also $[E, B] + [E, -B] = 0$. Dieser Ring W(A) heißt der *Wittring* von A. Er hat als Einselement die Wittklasse des freien Raumes $\langle 1 \rangle$.

Jeder Ringhomomorphismus $f: A \to A'$ liefert einen Ringhomomorphismus $f_*: W(A) \to W(A')$, definiert durch

$$f_*([E, B]) = [E \otimes_A A', B \otimes_A A'],$$

wobei $B \otimes_A A'$ die aus B durch Basiserweiterung auf dem vermöge f gebildeten projektiven A'-Modul $E \otimes_A A'$ entstehende Bilinearform bezeichnet. Damit wird die Zuordnung $A \mapsto W(A)$ ein Funktor von der Kategorie der kommutativen Ringe mit 1 in sich.

Literatur hierzu: [Ba], Chap. I, [MH], Chap. I, [K], Chap. I, [K_1].

Die Beschäftigung mit dem Wittring W(A) ist ein Hauptanliegen der sogenannten „algebraischen Theorie der quadratischen Formen". Dieser noch sehr junge Wissenszweig scheint mir bis jetzt – abgesehen von anwendungsbezogenen Zielsetzungen – durch die folgenden beiden Motive angetrieben zu werden:

(1) Man möchte durch ein Studium von W(A) doch eine gewisse Übersicht über die bilinearen Räume über A gewinnen.

(2) Man betrachtet W (A) als eine „natürliche Kohomologie" des Ringes A und möchte durch ein Studium derselben Aufschlüsse über A gewinnen. In der Tat läßt sich W(A) als eine „orthogonale K-Gruppe" verstehen, vgl. z. B. [MH], Chap. III, §2.

Diesen beiden Motiven gemäß werde ich zwei Probleme formulieren. Die Probleme beziehen sich jedoch nicht auf W(A) selbst, sondern eine starke Vergröberung von W(A), den r e d u z i e r t e n W i t t r i n g $\overline{W}(A)$. Dieser entsteht, indem man aus W(A) das Nilradikal Nil W(A), bestehend aus allen nilpotenten Elementen, herausdividiert. Dazu wollen wir uns zunächst mit den Primidealen des Ringes W(A) beschäftigen.

Wir nehmen jetzt ohne wesentliche Einschränkung der Allgemeinheit an, daß A z u s a m m e n h ä n g e n d ist, d. h., keine Idempotenten außer 0 und 1 besitzt. Dann hat jeder endlich erzeugte projektive Modul E einen wohlbestimmten Rang, der eine natürliche Zahl ist, wie man es bei freien Modulen gewohnt ist. Für einen bilinearen Raum $\varphi = (E, B)$ bezeichnen wir als D i m e n s i o n $\dim \varphi$ den Rang von E.

Definition *Das* F u n d a m e n t a l i d e a l I(A) *von* W(A) *ist die Menge aller Klassen* $[\varphi]$ *mit* $\dim \varphi$ *gerade.*

Ersichtlich ist I(A) ein maximales Ideal von W(A) mit Restklassenkörper $W(A)/I(A) \cong \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. Wir interessieren uns jetzt für die Primideale P von W(A) mit $W(A)/P \cong \mathbf{Z}$.

Definition *Eine* S i g n a t u r σ *von* A *(oder „auf" A) ist ein Ringhomomorphismus* $\sigma: W(A) \to \mathbf{Z}$, *natürlich mit* $\sigma(1) = 1$.

Der Kern P_σ einer Signatur σ ist ein Primideal von W(A) mit Restklassenring **Z**. Weil der Ring **Z** außer der Identität keine Automorphismen besitzt, haben wir sogar eine eindeutige Entsprechung $\sigma \mapsto P_\sigma$ zwischen den Signaturen σ von A und den Primidealen P von A mit $W(A)/P \cong \mathbf{Z}$. Wir bezeichnen die Menge aller Signaturen von A mit Sign(A).

Theorem 1 (Dress [D]) (i) *Ist* Sign (A) *leer, so ist* I(A) *das einzige Primideal von* W(A).

(ii) *Ist* Sign (A) $\neq \emptyset$, *so sind die Kerne* P_σ *der Signaturen von* A *genau alle Primideale von* W(A).

Folgerungen Weil das Nilradikal von W(A) der Durchschnitt aller Primideale von W(A) ist, ist im Falle Sign (A) = $\emptyset$ jedes Element aus I(A) nilpotent. Insbesondere ist das Element $2 \cdot 1_{W(A)}$ nilpotent, also $2^n W(A) = 0$ für genügend großes n. Im Falle Sign (A) $\neq \emptyset$ ist das Element φ von W(A) genau dann nilpotent, wenn $\sigma(\varphi) = 0$ für jede Signatur σ von A ist.

Ist A ein lokaler Ring, so läßt sich Theorem 1 dadurch beweisen, daß man W(A) als homomorphes Bild des Gruppenringes $\mathbf{Z}[A^*/A^{*2}]$ der Quadratklassengruppe A^*/A^{*2} (Einheiten modulo Quadrate von Einheiten) auffaßt, was möglich ist, weil jetzt W(A) durch die Wittklassen der eindimensionalen Räume $\langle a \rangle$ erzeugt wird. Man kennt die Primideale des Gruppenringes und hat auch ausreichende Kenntnis über den Kern der Abbildung $\mathbf{Z}[A^*/A^{*2}] \twoheadrightarrow W(A)$, um obige Aussagen über die Primideale von W(A) einsehen zu können ([KRW], vgl. auch [KK]). Dress beweist nun in [D] folgenden Satz von unabhängigem Interesse, aus dem dann Theorem 1 allgemein folgt:

Theorem 2 A *sei beliebiger kommutativer Ring. Zu jedem Primideal* P *von* W(A) *gibt es ein Primideal* $\mathfrak{p}$ *von* A *und ein Primideal* Q *des Wittringes* $W(A_\mathfrak{p})$ *der Lokalisierung* $A_\mathfrak{p}$, *so daß* P *das Urbild von* Q *bzgl. der Abbildung* $W(A) \to W(A_\mathfrak{p})$ *ist, die aus der natürlichen Abbildung* $A \to A_\mathfrak{p}$ funktoriell entsteht.

Ist Sign (A) nicht leer, so nennen wir den Ring A formal reell. Diese Definition harmoniert mit der in der Körpertheorie üblichen Terminologie, denn es gilt:

Satz 3 ([K], Chap. III §2) A *ist genau dann formal reell, wenn* -1 *in* A *nicht Summe von Quadraten ist.*

Wir wollen Theorem 2 für minimale Primideale in der Sprache der Signaturen ausdrücken.

Definition *Es sei ein Ringhomomorphismus* $f: A \to B$ *vorgegeben (stets* $1 \mapsto 1$). *Ist* σ *eine Signatur von* A, *so heißt jede Signatur* τ *von* B, *für die das Diagramm*

$$\begin{tikzcd} W(A) \arrow[rr, "f_*"] \arrow[dr, "\sigma"'] & & W(B) \arrow[dl, "\tau"] \\ & \mathbb{Z} & \end{tikzcd}$$

kommutativ ist, eine Fortsetzung *von* σ *auf* B *(bzgl.* f). *Umgekehrt heißt dann* σ *die* Einschränkung *von* τ *auf* A, *und wir schreiben gerne* $\sigma = \tau | A$.

Unter Benutzung dieser Terminologie gewinnt man aus Theorem 2 leicht folgende Aussage:

Theorem 2a *Zu jeder Signatur* σ *von* A *gibt es mindestens ein Primideal* $\mathfrak{p}$ *von* A, *so daß sich* σ *auf die Lokalisierung* $A_\mathfrak{p}$ *fortsetzen läßt (bzgl. der natürlichen Abbildung* $A \to A_\mathfrak{p}$).

Im allgemeinen wird eine solche Fortsetzung auf viele Weisen möglich sein, auch mit verschiedenen Primidealen $\mathfrak{p}$. Wir erwähnen noch:

Theorem 4 (Craven-Rosenberg-Ware [CRW]) *Ist* A *ein regulärer Ring, also insbesondere nullteilerfrei, so läßt sich jede Signatur von* A *auf den Quotientenkörper von* A *fortsetzen.*

Ab jetzt setzen wir stets voraus, daß A formal reell ist. Die Menge $X = \mathrm{Sing}(A)$ läßt sich dann auch als die Menge aller Primideale des Ringes $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \overline{W}(A)$ deuten. (Erinnerung: $\overline{W}(A)$ ist der reduzierte Wittring von A.) Diese Primideale sind alle maximal und haben den Restklassenkörper $\mathbb{Q}$. Die Zariskitopologie (Bourbaki: Algèbre commutative, Chap. II, §4) macht somit X zu einem proendlichen topologischen Raum, d. h., X ist kompakt, Hausdorff und total unzusammenhängend. Nach allgemeinen Prinzipien der kommutativen Algebra läßt sich überdies $\mathbb{Q} \otimes \overline{W}(A)$ in kanonischer Weise mit dem Ring $C(X, \mathbb{Q})$ der stetigen Funktionen auf X mit Werten im Körper $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen identifizieren ([AK], $\mathbb{Q}$ hat die diskrete Topologie). Indem wir von $\mathbb{Q} \otimes \overline{W}(A)$ zu $W(A)$ zurückgehen, gewinnen wir folgende Beschreibung der Topologie von X und von $\overline{W}(A)$.

Theorem 5 *Wir versehen die Menge* $X = \mathrm{Sign}(A)$ *mit der gröbsten Topologie, so daß die Funktionen* $\hat{\varphi}: \sigma \mapsto \sigma(\varphi)$ *auf* X *mit Werten in* $\mathbb{Z}$ *zu den* $\varphi \in W(A)$ *alle stetig sind. Dann ist* X *ein proendlicher Raum. Die Abbildung* $\varphi \mapsto \hat{\varphi}$ *von* $W(A)$ *nach* $C(X, \mathbb{Z})$ *ist ein Ringhomomorphismus, dessen Kern das Nilradikal von* $W(A)$ *ist und dessen Bild sich somit mit* $\overline{W}(A)$ *identifizieren läßt. Der Quotient* $C(X, \mathbb{Z})/\overline{W}(A)$ *ist eine Torsionsgruppe.*

Jetzt ist es möglich, die beiden Probleme anzugeben, über die ich im folgenden berichten will, wobei die Formulierung des zweiten Problems naturgemäß etwas vage ausfällt.

1. Problem *Welche Funktionen* $f: X \to \mathbb{Z}$ *lassen sich durch einen bilinearen Raum repräsentieren, d. h., haben die Gestalt* $f = \hat{\varphi}$ *für ein* $\varphi \in W(A)$?

2. Problem *Welche Zusammenhänge bestehen – eventuell in speziellen Situationen – zwischen dem Raum* X *und anderen „mehr geometrischen" Objekten, die zu* A *gehören?*

Zu dem 2. Problem sei angemerkt, daß X als total unzusammenhängender Raum vom geometrischen Standpunkt aus ein „schlechter" Raum ist, es sei denn X ist endlich. Man kann aber etwa fragen, ob gewisse stetige Bilder von X gute und zugleich interessante Räume sind.

Eine Verallgemeinerung Allgemeiner kann man bilineare Räume (E, B) über einem Schema V bilden, indem man für E einen lokal freien $\mathcal{O}_V$-Modul von endlichem Typ nimmt und für B eine symmetrische nichtausgeartete Bilinearform auf E mit Werten in der Strukturgarbe $\mathcal{O}_V$ ([K], Chap. I, [K_1]). Es läßt sich dann ähnlich wie oben ein Wittring $W(V)$ definieren, der im Falle, daß $V = \mathrm{Spec}(A)$ affin ist, mit $W(A)$ übereinstimmt. Die Zuordnung $V \mapsto W(V)$ ist jetzt ein kontravarianter Funktor von der Kategorie der Schemata in die Kategorie der kommutativen Ringe mit Eins. Ist V etwa quasiprojektiv, d. h. offener Teil eines projektiven Raumes $\mathbb{P}^m(\Lambda)$ über einen kommutativen Ring Λ, so bleiben obige Sätze mit Ausnahme von Satz 3 sinngemäß richtig ([K], Satz 3 muß durch eine kompliziertere Aussage ersetzt werden). Somit können wir die obigen beiden Probleme allgemeiner über einem quasiprojektiven Schema V stellen.

§2 Reelle Punkte auf algebraischen Varietäten

Sei jetzt A eine endlich erzeugte kommutative Algebra über einem Körper k. Dann läßt sich Theorem 2a wie folgt verschärfen [K_2]:

Theorem 6 *Jede Signatur* σ *von* A *läßt sich auf den Restklassenkörper* $A/\mathfrak{m}$ *eines geeigneten maximalen Ideales* $\mathfrak{m}$ *von* A *fortsetzen.*

Wir wollen uns überlegen, was dieser Satz in dem Fall bedeutet, daß k ein reell abgeschlossener Körper R ist (Beispiel: $R = \mathbb{R}$) und A keine nilpotenten Elemente hat. A läßt sich als Quotient eines Polynomringes $R[T_1, \ldots, T_n]$ nach einem Ideal darstellen. Nach Hilbert wird dieses Ideal durch endlich viele Polynome $f_1(T), \ldots, f_r(T)$ erzeugt mit $T = (T_1, \ldots, T_n)$, also

$$A = R[T]/(f_1(T), \ldots, f_r(T)).$$

Somit ist A der Ring der über R definierten algebraischen Funktionen auf der affinen Varietät

$$M := \{x \in C^n \mid f_1(x) = \ldots = f_r(x) = 0\},$$

wobei C den algebraischen Abschluß $R(\sqrt{-1})$ von R bezeichnet. Als Restklassenkörper $A/\mathfrak{m}$ eines maximalen Ideals $\mathfrak{m}$ kommen nur die Körper R und C in Frage. Der Körper C ist aber nicht formal reell. Daher sind für uns nur die Ideale $\mathfrak{m}$ mit $A/\mathfrak{m} = R$ interessant. Jedes solche Ideal $\mathfrak{m}$ hat die Gestalt

$$\mathfrak{m}_x = \{f \in A \mid f(x) = 0\}$$

zu einem durch $\mathfrak{m}$ eindeutig bestimmten Punkt $x = (x_1, \ldots, x_n)$ auf M, dessen Koordinaten x_i alle in R liegen. Wir nennen diese Punkte die r e e l l e n P u n k t e von M und bezeichnen die Menge aller reellen Punkte mit M(R).

Weil der Wittring von R bekanntlich zu $\mathbb{Z}$ isomorph ist, liefert uns jeder reelle Punkt $P \in M(R)$ eine Signatur

$$\tau_P : W(A) \to W(A/\mathfrak{m}_P) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}.$$

Hier ist der erste Pfeil die funktorielle Abbildung zu $A \to A/\mathfrak{m}_P$. Die Signatur τ_P ordnet einer Wittklasse [E, B] die klassische Sylvester-Signatur des Raumes $(E/\mathfrak{m}_P E, B \otimes A/\mathfrak{m}_P)$ über R zu. Theorem 6 besagt, daß die τ_P zu den $P \in M(R)$ schon alle Signaturen von A sind.

Wir nennen nun zwei Punkte P und Q aus M(R) W i t t - ä q u i v a l e n t , wenn $\tau_P = \tau_Q$ ist. Die Äquivalenzklassen zu dieser Äquivalenzrelation auf M(R) nennen wir die W i t t - K o m p o n e n t e n von M(R).

Theorem 6 bleibt sinngemäß richtig, wenn man den Ring A durch ein algebraisches quasiprojektives Schema V über k ersetzt, wie am Ende von § 1 angedeutet: Jede Signatur von V läßt sich auf einen abgeschlossenen Punkt von V fortsetzen [K_2]. Deshalb lassen sich völlig analoge Betrachtungen für eine quasiprojektive Varietät M über R anstellen und insbesondere Wittkomponenten definieren.

Wir setzen ab jetzt M als quasiprojektiv voraus und wollen Einsicht in die Wittkomponenten von M(R) gewinnen. Der Einfachheit halber identifizieren wir M mit dem zugehörigen Schema V, schreiben also W(M) für den Wittring von V, etc.

R ist ein angeordneter Körper, besitzt also eine natürliche Topologie, die als Basis die offenen Intervalle $]a, b[:= \{x \in R \mid a < x < b\}$ hat. Diese Topologie induziert auf der Menge M(R) die sogenannte s t a r k e T o p o l o g i e . Ist M wie zu Anfang affin, so ist dies einfach die Teilraumtopologie von M(R) in R^n. Man ist versucht zu fragen, ob die Wittkomponenten von M(R) etwas mit den Zusammenhangskomponenten des topologischen Raumes M(R) zu tun haben. Leider ist diese Frage sinnlos, wenn R nicht zu dem Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen isomorph ist, denn dann ist M(R) total unzusammenhängend. Doch macht dieser Sachverhalt das Studium der Wittkomponenten nur interessanter. Man hofft, in den Wittkomponenten auch dann noch sinnvolle „Komponenten" vor sich zu haben, wenn die Topologie versagt.

In der Arbeit [K_3] habe ich in dem Falle, daß M eine glatte Kurve über R ist, die Wittkomponenten von M(R) ausführlich untersucht. Für R = $\mathbb{R}$ stimmen die Wittkomponenten in der Tat mit den Zusammenhangskomponenten von M(R) überein, sind also für projektives M topologische „Kreise", anderenfalls „Kreise" oder „offene Intervalle". Über beliebigem reell abgeschlossenen Körper R läßt sich bei projektivem M immer noch eine „Orientierung" der Menge M(R) sinnvoll definieren und dann auf jeder Wittkomponente Γ von M(R) eine zirkulare Anordnung der Punkte erklären, somit für je zwei Punkte $P \neq Q$ auf Γ das abgeschlossene Intervall [P, Q] und das offene Intervall]P, Q[definieren. Diese Intervalle haben die von dem Falle R = $\mathbb{R}$ her gewohnten elementargeometrischen Eigenschaften[1]). Ist M nicht projektiv, so entsteht M bekanntlich aus einer geeigneten glatten projektiven Kurve $\overline{M}$ durch Herausnahme endlich vieler Punkte. Eine Wittkomponente Γ von M(R) ist dann in einer Wittkomponente $\overline{\Gamma}$ von $\overline{M}$(R) enthalten, und entweder ist $\overline{\Gamma} \setminus \Gamma$ höchstens einpunktig, oder Γ ist ein offenes Intervall]P, Q[von $\overline{\Gamma}$ mit P und Q in $\overline{\Gamma}$, aber nicht in M(R), wie es sein muß.

Wir kehren zu einer beliebigen quasiprojektiven Varietät M über R zurück und wollen zunächst „Komponenten" von M(R) einführen, die leichter zugänglich sind als die Wittkomponenten. Dazu definieren wir in der Menge M(R) „algebraische Wege".

Definition *Ein* E l e m e n t a r w e g γ *in* M(R) *ist eine totalgeordnete Teilmenge* γ *von* M(R) *mit folgenden Eigenschaften:*

a) *Der Zariskiabschluß von* γ *in* M *ist eine irreduzible Kurve* $D \subset M$.

b) *Sei* $\pi : \tilde{D} \twoheadrightarrow D$ *die Normalisierung von* D. *Nach geeigneter Wahl einer Orientierung von* $\tilde{D}$(R) *gibt es ein abgeschlossenes Intervall* $[\tilde{P}, \tilde{Q}]$ *in* $\tilde{D}$(R), *das unter* π *bijektiv und ordnungstreu auf* γ *abgebildet wird.*

Zu dieser Definition sei vermerkt, daß D und $\tilde{D}$ über R definiert sind, weiter, daß durch γ das Intervall $[\tilde{P}, \tilde{Q}]$ eindeutig festgelegt ist. Den ersten Punkt $P = \pi(\tilde{P})$ von γ nennen wir den A n f a n g s p u n k t , den letzten Punkt $Q = \pi(\tilde{Q})$ den E n d p u n k t des Elementarweges γ. Das Intervall $[\tilde{P}, \tilde{Q}]$ bezeichnen wir mit $\tilde{\gamma}$.

Definition *Seien* P *und* Q *Punkte in* M(R). *Ein* W e g v o n P n a c h Q *in* M(R) *ist eine endliche Folge* $(\gamma_1, \ldots, \gamma_t)$ *von Elementarwegen* γ_i *in* M(R), *so daß* γ_1 *den Anfangspunkt* P *hat,* γ_t *den Endpunkt* Q, *und der Endpunkt von* γ_i *mit dem Anfangspunkt von* γ_{i+1} *übereinstimmt* $(1 \leq i \leq t-1)$. *Wir nennen* P *und* Q v e r b i n d b a r *in* M(R), *wenn es in* M(R) *mindestens einen Weg von* P *nach* Q *gibt. Die Äquivalenzklassen der Äquivalenzrelation „verbindbar" nennen wir die* W e g e k o m p o n e n t e n *von* M(R).

[1]) In [K_3] ist erst gegen Ende von Wittringen die Rede. Der Grund ist, daß der Wittring der Kurve durch eindimensionale Formen erzeugt wird und daher eine einfachere Sprache als hier gewählt werden konnte.

Es läßt sich nun auf geometrischem Wege zeigen [K_2]:

Theorem 7 M(R) *hat nur endlich viele Wegekomponenten. Jede Wegekomponente ist offen und abgeschlossen in der starken Topologie.*

Im Falle R = $\mathbf{R}$ sind die Wegekomponenten ersichtlich topologisch zusammenhängend. Sie sind somit die Zusammenhangskomponenten von $M(\mathbf{R})$.

Ist allgemein P ein Punkt eines Elementarweges γ in $M(\mathbf{R})$ und $\widetilde{P}$ der über P liegende Punkt in $\widetilde{\gamma}$, wie oben beschrieben, so faktorisiert die Signatur τ_P von M über die Signatur $\tau_{\widetilde{P}}$ von $\widetilde{D}$,

$$\tau_P : W(M) \longrightarrow W(\widetilde{D}) \xrightarrow[\tau_{\widetilde{P}}]{} \mathbf{Z},$$

wobei $W(M) \to W(\widetilde{D})$ die funktorielle Abbildung zu $\widetilde{D} \xrightarrow{\pi} D \longrightarrow M$ ist. Ist Q ein weiterer Punkt auf γ, so ist aufgrund der Definition der Elementarwege $\tau_{\widetilde{P}} = \tau_{\widetilde{Q}}$, also auch $\tau_P = \tau_Q$. Zwei verbindbare Punkte sind somit Witt-äquivalent, und wir erhalten aus Theorem 7 die

Folgerung M(R) *hat nur endlich viele Wittkomponenten. Also ist der Raum* X *der Signaturen von* M *endlich. Jede Wittkomponente ist Vereinigung endlich vieler Wegekomponenten.*

Es erhebt sich die Frage, ob auf einer vorgegebenen Varietät M jede Wegekomponente selbst schon eine Wittkomponente ist. Diese Frage ordnet sich – wie die gesamte bisherige Betrachtung – dem am Ende von §1 formulierten 2. Problem unter. Ich möchte auch eine Frage stellen, die zu dem 1. Problem gehört. M habe die Dimension d. Weil der Raum X der Signaturen von M endlich ist, gibt es eine kleinste natürliche Zahl $k \geqslant 1$, so daß der reduzierte Wittring $\overline{W}(M)$ die Menge $C(X, k\mathbf{Z})$ aller Funktionen auf X mit durch k teilbaren Werten enthält. Was ist die beste nur von d abhängige obere Schranke m(d) für k? Aufgrund der in den nächsten beiden Paragraphen dargestellten lokalen Theorie muß $m(d) \geqslant 2^d$ sein, s. Satz 26.

Bis jetzt liegen zu diesen Fragen nur sehr partielle Resultate vor. Colliot-Thélène und Sansuc haben in der Arbeit [CS] bewiesen:

Theorem 8 *Ist* R = $\mathbf{R}$ *und* M *entweder eine glatte projektive Fläche oder eine abelsche Varietät, so ist jede Wittkomponente von* M(R) *eine Wegekomponente (= Zusammenhangskomponente). Ferner ist in diesen Fällen* $\overline{W}(M) \supset C(X, 2^{d+1}\mathbf{Z})$.

Im Fall d = 1 herrschen über einem beliebigen reell abgeschlossenen Körper R optimale Verhältnisse, wie man Doktorand G. Dietel kürzlich nachgewiesen hat:

Theorem 9 (unveröffentlicht, vgl. [K_3], §10 für M glatt) *Ist* M *eine beliebige Kurve über* R, *so ist jede Wegekomponente eine Wittkomponente, und es ist*

$$\overline{W}(M) = \mathbf{Z} \cdot 1 + C(X, 2\mathbf{Z}).$$

§3 Die lokale Theorie

Sei ab jetzt A s e m i l o k a l , d. h., A habe nur endlich viele maximale Ideale. Natürlich gehört unser Hauptinteresse in einer lokalen Theorie den lokalen Ringen (nur ein maximales Ideal), zu denen auch die Körper gehören. Jedoch ist es aus technischen Gründen oft wichtig, auch semilokale Ringe zu benutzen, und diese Ringe machen keine wesentlich größeren Schwierigkeiten als die lokalen Ringe. Wir wollen der Einfachheit halber voraussetzen, daß die Zahl 2 in A Einheit ist. Es sei aber angemerkt, daß die ganze im folgenden dargestellte Theorie mit einigen Modifikationen richtig bleibt, wenn 2 nicht Einheit ist. Man beachte, daß jetzt alle projektiven endlich erzeugten Moduln über A frei sind.

Ehe wir auf die in § 1 gestellten Probleme eingehen, wollen wir den reduzierten Wittring $\overline{W}(A)$ in einer Weise beschreiben, die Witts ursprünglicher Definition von $W(A)$ (für einen Körper A, [W]) verwandt ist. Zunächst geben wir die entsprechende Beschreibung von $W(A)$.

Wir nennen einen bilinearen Raum $\varphi = (E, B)$ isotrop, wenn es einen Vektor x in E mit $B(x, x) = 0$ gibt, der sich zu einer Basis des freien Moduls E ergänzen läßt. Anderenfalls heiße φ anisotrop. Jeder bilineare Raum φ hat eine Zerlegung („Wittzerlegung")

$$\varphi \cong r \times \langle 1, -1 \rangle \perp \varphi_0$$

mit einer eindeutig bestimmten Zahl $r \geqslant 0$ und einem durch φ bis auf Isomorphie eindeutig bestimmten anisotropen Raum φ_0 (s. z. B. [K], Chap. II § 1). Dabei bezeichne allgemein $r \times \psi$ für einen bilinearen Raum ψ die orthogonale Summe von r Kopien von ψ. Wir nennen φ_0 den Kernraum von φ. Aus der Wittzerlegung folgt insbesondere, daß die Räume $r \times \langle 1, -1 \rangle$ bis auf Isomorphie genau alle hyperbolischen Räume über A sind.

Wir sehen nun, daß zwei bilineare Räume φ und ψ genau dann Witt-äquivalent sind, wenn sie isomorphe Kernräume haben. Weiter ist klar, daß zwei Witt-äquivalente Räume gleicher Dimension schon isomorph sind. In der lokalen Theorie besteht also – sehr im Gegensatz zur globalen Theorie – ein enger Zusammenhang zwischen den Isomorphieklassen und den Wittklassen von bilinearen Räumen.

Es sollen nun in ähnlicher Weise die Elemente des reduzierten Wittringes $\overline{W}(A)$ beschrieben werden.

Definition *Zwei bilineare Räume φ und ψ über* A *heißen* kongruent, *geschrieben $\varphi \equiv \psi$, wenn* $\dim \varphi = \dim \psi$ *und $\sigma(\varphi) = \sigma(\psi)$ für jede Signatur σ von* A *ist.*

Letztere Bedingung besagt gerade, daß φ und ψ in $\overline{W}(A)$ dasselbe Bild haben. Nun ist das Nilradikal von $W(A)$ für einen formal reellen semilokalen Ring A identisch mit der Menge der Torsionselemente von $W(A)$, d. h. aller Wittklassen $[\varphi]$ mit $m \times \varphi \sim 0$ für geeignetes m ([KRW], [KK]). Dieses m läßt sich überdies stets als 2-Potenz wählen [loc. cit.]. Daher gilt

Satz 10 *Zwei bilineare Räume φ und ψ über* A *sind genau dann kongruent, wenn es ein* $m \geqslant 1$ *gibt mit* $m \times \varphi \cong m \times \psi$. *Das kleinste solche* m *ist eine 2-Potenz.*

Die Kongruenzklasse $\overline{\varphi}$ eines bilinearen Raumes φ nennen wir eine reduzierte quadratische Form über A. Gemäß ihrer Definition hat eine reduzierte Form $\overline{\varphi}$ eine wohlbestimmte Dimension $\dim(\overline{\varphi})$ und zu jeder Signatur σ von A einen wohlbestimmten Wert $\sigma(\overline{\varphi})$.

Wir nennen zwei reduzierte Formen $\overline{\varphi}$ und $\overline{\psi}$ über A Witt-äquivalent, wenn sie in $\overline{W}(A)$ dasselbe Bild haben, also wenn $\sigma(\overline{\varphi}) = \sigma(\overline{\psi})$ für jede Signatur σ ist. Weiter nennen wir eine reduzierte Form $\overline{\varphi}$ isotrop, wenn eine Summe $m \times \varphi$ von Kopien von φ isotrop ist. Wir sagen dann auch, daß der bilineare Raum φ schwach isotrop ist. Es läßt sich nun ohne große Mühe zeigen ([K_5], § 2, vgl. [BeK] im Körperfall):

Satz 11 *Jede reduzierte Form $\overline{\varphi}$ hat eine Zerlegung*

$$\overline{\varphi} = r \times \langle 1, -1 \rangle \perp \overline{\varphi}_0$$

mit einer eindeutig bestimmten natürlichen Zahl $r \geqslant 0$ *und einer eindeutig bestimmten anisotropen reduzierten Form* $\overline{\varphi}_0$.

Wir nennen wieder $\overline{\varphi}_0$ die Kernform von $\overline{\varphi}$ und haben als

Folgerung Zwei reduzierte Formen sind genau dann äquivalent, wenn ihre Kernformen übereinstimmen.

Mit reduzierten Formen läßt sich ganz ähnlich rechnen wie mit gewöhnlichen quadratischen Formen, indem man anstelle von Quadraten Summen von Quadraten benutzt. Wir verweisen den Leser dazu auf [BeK] und [K_5], § 2.

Wir wollen nun auch den Signaturen eine neue, nur im Semilokalen mögliche Deutung geben. Jeder bilineare Raum über A hat jetzt eine Orthogonalbasis, ist also ein Diagonalraum $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ ([Ba], Chap. I § 3). Erst recht wird der Ring W(A) durch die Wittklassen $[\langle a \rangle]$ der eindimensionalen Räume $\langle a \rangle$ additiv erzeugt ($a \in A^*$), wie schon in § 1 erwähnt wurde. Somit ist eine Signatur $\sigma: W(A) \to \mathbf{Z}$ durch die Werte $\sigma(a) := \sigma([\langle a \rangle])$ auf den eindimensionalen Räumen festgelegt. Die so entstehende Funktion $a \mapsto \sigma(a)$ auf A^* ist ein Charakter der Einheitengruppe A^* mit Werten ± 1. Wir identifizieren die Signatur σ mit diesem Charakter. Es gilt [KRW_1], § 2:

Satz 12 *Eine Signatur* $\sigma: A^* \to \{\pm 1\}$ *erfüllt für jedes* $r \geqslant 2$ *die folgende Bedingung:*
S_r: *Sind* $a_1, \ldots, a_r$ *Einheiten von* A *mit* $\sigma(a_1) = \ldots = \sigma(a_r) = +1$ *und* $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ *Elemente von* A, *so daß* $b := \lambda_1^2 a_1 + \ldots + \lambda_r^2 a_r$ *wieder Einheit ist, so ist* $\sigma(b) = +1$. *Weiter ist* $\sigma(-1) = -1$. *Umgekehrt ist jeder Charakter* $\sigma: A^* \to \{\pm 1\}$, *für den* $\sigma(-1) = -1$, *und die Bedingung* S_2 *gilt, eine Signatur.*

Ist A ein Körper, so läßt sich die Bedingung S_2 am Ende dieses Satzes vereinfachen: Ist $a \neq 0$, $b \neq 0$ und $\sigma(a) = \sigma(b) = +1$, so ist auch $a + b \neq 0$ (wegen $\sigma(-1) = -1$) und $\sigma(a+b) = +1$. Wir erhalten als

Folgerung ([H], [LL]) Die Signaturen σ eines Körpers A sind gerade die Vorzeichenfunktionen zu den totalen Anordnungen von A, die mit Addition und Multiplikation verträglich sind ($\sigma(a) = +1$ wenn $a > 0$ und $\sigma(a) = -1$ wenn $a < 0$). Sie entsprechen somit diesen Anordnungen in eineindeutiger Weise.

In Zukunft wollen wir unter den Anordnungen eines Körpers nur solche verstehen wie soeben angegeben. Wir kehren zu einem zusammenhängenden formal reellen semilokalen Ring A zurück und kommen jetzt auf eine Verschärfung von Theorem 2a zu sprechen, auf der – ähnlich wie in § 2 – die feineren Untersuchungen in der lokalen Theorie aufbauen.

Sei σ eine Signatur von A und sei Q die Menge aller Elemente

$$x = \lambda_1^2 a_1 + \ldots + \lambda_r^2 a_r$$

zu Einheiten a_i von A mit $\sigma(a_i) = +1$ und Elementen λ_i von A mit $\lambda_1 A + \ldots + \lambda_r A = A$. Der folgende Satz wurde für lokale Ringe von Kanzaki und Kitamura [KaKi] und dann allgemein in [K_4], § 3 und Appendix B bewiesen.

Theorem 13 A *ist disjunkte Vereinigung der Mengen* Q, (-1)Q *und eines Primideals* $\mathfrak{p}$. *Die Signatur* σ *hat genau eine Fortsetzung* $\bar{\sigma}$ *auf den Restklassenkörper* A($\mathfrak{p}$) *zu* $\mathfrak{p}$, *d. h. den Quotientenkörper des Restklassenringes* A/$\mathfrak{p}$.

In diesem Sinne kommen also auch alle Signaturen eines semilokalen Ringes von Anordnungen von Körpern her, sogar in kanonischer Weise. Wir nennen $\mathfrak{p}$ das zu σ assoziierte Primideal $\mathfrak{p}(\sigma)$ und σ die von σ auf dem Restklassenkörper induzierte Signatur. Aufgrund der Definition von Q ist klar, daß $\mathfrak{p}(\sigma)$ das eindeutig bestimmte größte Primideal $\mathfrak{q}$ von A ist, so daß sich σ auf A($\mathfrak{q}$) fortsetzen läßt.

Wir wollen uns noch überlgegen, welche Einheiten $a \in A^*$ unter allen Signaturen den Wert +1 haben. Ist $a = \lambda_1^2 + \ldots + \lambda_r^2$ eine Summe von Quadraten, so ist aufgrund der Eigenschaft S_r sicherlich $\sigma(a) = +1$ für alle Signaturen. Ist umgekehrt dies vorausgesetzt, so ist $\langle a \rangle \equiv \langle 1 \rangle$, also nach Satz 10 $m \times \langle a \rangle \cong m \times \langle 1 \rangle$ für ein $m \geqslant 1$ und somit a Summe von m Quadraten. Also

Satz 14 *Die Untergruppe der* $a \in A^*$ *mit* $\sigma(a) = +1$ *für alle Signaturen* σ *von* A *besteht genau aus den Quadratsummen in* A, *die Einheiten sind.*

Wir bezeichnen diese Untergruppe mit A_∞ und fassen die Menge X der Signaturen von A als Menge von Charakteren der Gruppe $G := A^*/A_\infty$ auf. G ist eine diskrete Gruppe vom Exponenten 2. Somit ist ihre Charaktergruppe $\hat{G}$ in der Topologie der punktweisen Konvergenz eine proendliche topologische Gruppe. Man sieht leicht, daß X abgeschlossen in $\hat{G}$ ist und die Teilraumtopologie von X in $\hat{G}$ mit der in § 1 auf X eingeführten Topologie übereinstimmt.

Nach dieser Diskussion der Signaturen im semilokalen Fall wenden wir uns dem 1. Problem aus § 1 zu.

Definition *Eine nichtleere Teilmenge* Y *von* X *heißt* Fächer *von* A, *wenn* Y *abgeschlossen in* X *ist und für je drei Elemente* $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ *aus* Y *das in* $\hat{G}$ *gebildete Produkt* $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$ *wieder in* Y *liegt.*

Ist Y ein Fächer von A und σ_0 ein beliebig gewähltes Element von Y, so ist ersichtlich $Y \cup \sigma_0 Y$ die von Y erzeugte Untergruppe von G. Weiter ist Y zu $\sigma_0 Y$ disjunkt, weil die Charaktere aus Y auf dem Elemnet $(-1)A_\infty$ von G den Wert -1 annehmen, die Charaktere aus $\sigma_0 Y$ jedoch den Wert +1. Insbesondere muß für einen endlichen Fächer Y die Anzahl $|Y|$ der Elemente von Y eine 2-Potenz sein.

Die Fächer stehen im Zentrum der lokalen Theorie der reduzierten Formen aufgrund des folgenden Satzes.

Theorem 15 *Eine stetige Funktion* $f: X \to \mathbb{Z}$ *läßt sich genau dann durch eine reduzierte Form (also ein Element von* $\bar{W}(A)$) *repräsentieren, wenn für jeden end-*

lichen Fächer Y *von* A *gilt:*

$$\sum_{\sigma \in Y} f(\sigma) \equiv 0 \bmod |Y|$$

Dieser Satz wurde im Körperfall von Becker und Bröcker bewiesen ([BeB], s. auch [BrM]). Marshall hat darauf eine „abstrakte" Version des Satzes gegeben [M], die Theorem 15 umfaßt, s. [KlR], Prop. 6.4 und [K_5], § 2. Theorem 15 löst das 1. Problem aus § 1, sobald wir eine einigermaßen konkrete Beschreibung der Fächer haben.

Natürlich ist jede ein- oder zweipunktige Teilmenge Y von X ein Fächer. Das sind die „trivalen" Fächer. Die Kongruenzrelationen für f in Theorem 15 bedeuten für die Gesamtheit der zweipunktigen Fächer, daß f entweder nur gerade oder nur ungerade Werte annimmt. Es ist klar, daß man diese Bedingung an f stellen muß, wenn f durch eine reduzierte Form repräsentierbar sein soll.

Jeder nichttriviale Fächer von A kommt nun in kanonischer Weise her von einem Restklassenkörper A($\mathfrak{p}$).

Theorem 16 ([K_5], § 7) *Sei* Y *ein Fächer von* A *mit mindestens* 4 *Elementen. Dann ist zu allen Signaturen aus* Y *dasselbe Primideal* $\mathfrak{p}$ *von* A *assoziiert. Die Menge* $\bar{Y}$ *der von den* $\sigma \in Y$ *auf* A($\mathfrak{p}$) *induzierten Signaturen* $\bar{\sigma}$ *ist ein Fächer von* A($\mathfrak{p}$).

Der Fächer Y entsteht also aus $\bar{Y}$ einfach durch Einschränkung von A($\mathfrak{p}$) auf A. L. Bröcker ist es gelungen, die Fächer von Körpern bewertungstheoretisch zu beschreiben [B]. Damit ist eine gewisse Lösung des 1. Problems erreicht. Wir werden auf Bröckers Resultat erst im nächsten Paragraphen eingehen.

Wir ziehen jetzt eine Folgerung aus den soeben angegebenen Theorem 15 und 16. Es läßt sich ohne Mühe zeigen, daß die Torsionsgruppe $C(X, \mathbf{Z})/\overline{W}(A)$ (s. Theorem 5) jetzt 2-primär ist ([KRW], [KK]). Wir definieren den S t a b i l i - t ä t s i n d e x st(A) von A als die kleinste natürliche Zahl n, so daß $2^n C(X, \mathbf{Z})$ in $\overline{W}(A)$ enthalten ist, mit anderen Worten, als das minimale n, so daß jede stetige Funktion $f: X \to \mathbf{Z}$ mit durch 2^n teilbaren Werten durch eine reduzierte Form repräsentierbar ist. Gibt es keine solche Zahl n, so setzen wir st(A) = ∞. Jedoch werden wir später sehen (Satz 18, Satz 25), daß st(A) in sehr vielen Fällen endlich ist, so daß ein Interesse an dieser Zahl berechtigt ist. st(A) drückt tatsächlich ein „Stabilitätsverhalten" des reduzierten Wittringes $\overline{W}(A)$ aus. Man kann nämlich beweisen, vgl. [B_1], § 3, daß st(A) auch die kleinste natürliche Zahl n ist mit $\bar{I}^{m+1}(A) = 2\bar{I}^m(A)$ für $m \geq n$. Dabei bezeichne $\bar{I}^m(A)$ die m-te Potenz des Fundamentalideals $\bar{I}(A)$ von $\overline{W}(A)$ (= Bild von I(A) in $\overline{W}(A)$).

Aus Theorem 15 folgt sofort

Satz 17 $2^{st(A)}$ *ist das Supremum der Mächtigkeiten* $|Y|$ *aller endlichen Fächer* Y *von* A.

Mit Theorem 16 erhält man dann

Satz 18 *Der Stabilitätsindex von* A *ist nicht größer als das Supremum der Stabilitätsindizes aller formal reellen Restklassenkörper* A($\mathfrak{p}$) *von* A.

Bei einem semilokalen Ring A verdient das Zusammenspiel der verschiedenen Restklassenkörper A($\mathfrak{p}$) besonderes Interesse. Dabei sind für uns jetzt nur die formal reellen Restklassenkörper wichtig. Im Hinblick auf das 2. Problem aus § 1 definieren wir zu jedem Primideal $\mathfrak{p}$ von A mit formal reellem Restklassenkörper $A(\mathfrak{p})$ folgende Mengen.

$Z(\mathfrak{p})$:= Raum der Signaturen (= Anordnungen) von $A(\mathfrak{p})$.
$X(\mathfrak{p})$:= Bild von $Z(\mathfrak{p})$ unter der Restriktionsabbildung von $Z(\mathfrak{p})$ nach X.
$X^{\mathfrak{p}}$:= Bild des Raumes $\mathrm{Sign}(A/\mathfrak{p})$ in X.
$X(\mathfrak{p})^\circ$:= Menge aller $\sigma \in X$ mit $\mathfrak{p}(\sigma) = \mathfrak{p}$.
$Z(\mathfrak{p})^\circ$:= Urbild von $X(\mathfrak{p})^\circ$ in $Z(\mathfrak{p})$.

$X(\mathfrak{p})$ und $X^{\mathfrak{p}}$ sind abgeschlossene Teilmengen von X. Aufgrund von Theorem 13 und der anschließenden Diskussion ist folgendes evident:

(1) X ist disjunkte Vereinigung aller $X(\mathfrak{p})^\circ$.
(2) $X^{\mathfrak{p}} = \bigcup\limits_{\mathfrak{q} \supset \mathfrak{p}} X(\mathfrak{q}) = \bigcup\limits_{\mathfrak{q} \supset \mathfrak{p}} X(\mathfrak{q})^\circ$.
(3) Die natürlichen Abbildungen von $Z(\mathfrak{p})$ auf $X(\mathfrak{p})$ liefert einen Homöomorphismus von $Z(\mathfrak{p})^\circ$ auf $X(\mathfrak{p})^\circ$.

Für einen „geometrischen" semilokalen Ring, d. h. eine Semilokalisierung einer endlich erzeugten kommutativen Algebra über einem Körper k, gilt:

Satz 19 ([K_5], § 6) $Z(\mathfrak{p})^\circ$ *liegt dicht in* $Z(\mathfrak{p})$. *Somit ist* $X(\mathfrak{p})$ *der topologische Abschluß von* $X(\mathfrak{p})^\circ$ *in* X.

Ist also $\mathfrak{p}$ ein Primideal mit $A/\mathfrak{p}$ formal reell und regulär, somit $X(\mathfrak{p}) = X^{\mathfrak{p}}$ nach Theorem 4, so besteht der Abschluß von $X(\mathfrak{p})^\circ$ gerade aus allen $X(\mathfrak{q})^\circ$ mit $\mathfrak{q} \supset \mathfrak{p}$. Das legt nahe, sich die Partition von X in die Mengen $X(\mathfrak{p})^\circ$ als eine „Stratifikation" des proendlichen Raumes X vorzustellen, zumindest für geometrische lokale Ringe.

Von einer befriedigenden Lösung des 2. Problems für geometrische semilokale Ringe sind wir weit entfernt. Will man das Zusammenspiel der verschiedenen Restklassenkörper berücksichtigen, so wird man sich zunächst mit dem Körperfall befassen, um die Räume $Z(\mathfrak{p})$ zu verstehen. Davon soll im nächsten Paragraphen die Rede sein. Dann müßte man die Teilmengen $Z(\mathfrak{p})^\circ$ der Räume $Z(\mathfrak{p})$ im Sinne des 2. Problems untersuchen. Schließlich müßte man die „Stratifikation" studieren. Zu dem zweiten Programmpunkt sei angemerkt:

Satz 20 ([K_5], § 5) $Z(\mathfrak{p})^\circ$ *ist die Menge aller Anordnungen* σ *von* $A(\mathfrak{p})$, *so daß die konvexe Hülle des Teilringes* $A/\mathfrak{p}$ *bzgl.* σ *der ganze Körper* $A(\mathfrak{p})$ *ist.*

§ 4 Reelle Bewertungsringe

Wir kommen jetzt auf einen Zusammenhang zwischen den Anordnungen eines formal reellen Körpers F und gewissen Bewertungsringen $\mathfrak{o}$ von F zu sprechen (Krullsche Bewertungsringe mit Quotientenkörper F), der schon von Baer und Krull entdeckt wurde, s. [Kr]. Wir identifizieren jede Anordnung mit der zugehörigen Signatur $\sigma : F^{\bullet} \longrightarrow \{\pm 1\}$ gemäß der Folgerung aus Satz 12. Es sei eine Anordnung σ von F vorgegeben.

Theorem 21 ([Kr], [P], [KW]) *Sei $\mathfrak{o}$ ein Bewertungsring von* F *und* $\mathfrak{m}$ *das maximale Ideal von* $\mathfrak{o}$. *Folgende Aussagen sind gleichwertig:*

(i) $\mathfrak{o}$ *ist bzgl. der Anordnung* σ *eine konvexe Menge.*

(ii) $\sigma(1+\mathfrak{m}) = \{+1\}$.

(iii) $\mathfrak{m}$ *ist das assoziierte Primideal von* $\mathfrak{o}$ *zu der Signatur* $\sigma|\mathfrak{o}$, *die aus* σ *durch Einschränkung auf* $\mathfrak{o}$ *entsteht.*

Weiter ist jeder bzgl. σ *konvexe Unterring von* F *ein Bewertungsring von* F.

Sind für einen Bewertungsring $\mathfrak{o}$ von F die gleichwertigen Bedingungen (i)–(iii) aus diesem Satz erfüllt, so sagen wir, $\mathfrak{o}$ ist mit σ v e r t r ä g l i c h . Weiter nennen wir dann die von $\sigma|\mathfrak{o}$ auf $\mathfrak{o}/\mathfrak{m}$ induzierte Signatur auch die von σ auf $\mathfrak{o}/\mathfrak{m}$ i n d u z i e r t e A n o r d n u n g $\bar{\sigma}$.

Für einen Teilkörper k von F bezeichne $\mathfrak{o}(\sigma, F/k)$ die konvexe Hülle von k in F bzgl. σ. Das ist also die Menge aller $a \in F$, zu denen ein $\lambda > 0$ in k existiert mit $-\lambda < a < \lambda$, alle Ungleichungen bzgl. σ verstanden. Ersichtlich ist $\mathfrak{o}(\sigma, F/k)$ ein Ring und somit ein mit σ verträglicher Bewertungsring. Das maximale Ideal $\mathfrak{m}(\sigma, F/k)$ besteht gerade aus allen $a \in F$ mit $-\lambda < a < \lambda$ für alle $\lambda > 0$ aus k. Umgekehrt zeigt man leicht, daß ein beliebiger mit σ verträglicher Bewertungsring $\mathfrak{o}$ die konvexe Hülle $\mathfrak{o}(\sigma, F/k)$ jedes maximalen in $\mathfrak{o}$ enthaltenen Teilkörpers k von F ist [KW], § 1. Insbesondere enthält jeder mit σ verträgliche Bewertungsring $\mathfrak{o}$ den Bewertungsring $\mathfrak{o}_0 := \mathfrak{o}(\sigma, F/\mathbb{Q})$ als Teilring. Daraus folgt, daß die mit σ verträglichen Bewertungsringe gerade die Oberringe von $\mathfrak{o}_0$ in F sind und insbesondere unter der Inklusion eine total geordnete Menge bilden.

Wir wollen die Bewertungsringe $\mathfrak{o}$ von F mit formal reellem Restklassenkörper $\mathfrak{o}/\mathfrak{m}$ die „reellen" Bewertungsringe von F nennen. Jeder reelle Bewertungsring $\mathfrak{o}$ von F ist mit mindestens einer Anordnung σ von F verträglich, hat also die Gestalt $\mathfrak{o}(\sigma, F/k)$ zu einem geeigneten Teilkörper k von F. Genauer gilt über die Gesamtheit der mit $\mathfrak{o}$ verträglichen Anordnungen nach Baer und Krull der

Satz 22 ([Kr], § 12) *Sei* M *Vertretersystem einer Basis der Gruppe* $F^*/\mathfrak{o}^*F^{*2}$ *in* F^*. *Sei weiter* ρ *eine Anordnung des Restklassenkörpers* $\mathfrak{o}/\mathfrak{m}$. *Dann gibt es für beliebig vorgegebene Vorzeichen* $\epsilon(\mathfrak{m}) = \pm 1$ *zu den* $\mathfrak{m} \in M$ *genau eine Anordnung* σ *von* F, *die mit* $\mathfrak{o}$ *verträglich ist, auf* $\mathfrak{o}/\mathfrak{m}$ *die Anordnung* ρ *induziert und für jedes* $\mathfrak{m} \in M$ *das Vorzeichen* $\sigma(\mathfrak{m}) = \epsilon(\mathfrak{m})$ *hat.*

Aufgrund dieser Analyse der mit $\mathfrak{o}$ verträglichen Anordnungen sieht man leicht folgenden Satz ein:

Satz 23 ([BeK], § 4) *Sei* $\mathfrak{o}$ *ein reeller Bewertungsring von* F *und sei* $\bar{Y}$ *ein Fächer von* $\mathfrak{o}/\mathfrak{m}$. *Dann ist die Menge* Y *aller mit* $\mathfrak{o}$ *verträglichen Anordnungen* σ *von* F, *die auf* $\mathfrak{o}/\mathfrak{m}$ *eine Anordnung* $\bar{\sigma} \in \bar{Y}$ *induzieren, ein Fächer von* F.

Wir nennen Y den von $\bar{Y}$ auf F i n d u z i e r t e n F ä c h e r . Nach L. Bröcker gilt nun eine bemerkenswerte Umkehrung dieses Satzes.

Theorem 24 ([B], § 2, [J]) *Zu jedem Fächer* V *von* F *gibt es einen reellen Bewertungsring* $\mathfrak{o}$ *von* F *und einen* t r i v i a l e n *Fächer* $\bar{Y}$ *von* $\mathfrak{o}/\mathfrak{m}$, *so daß* V *in den von* $\bar{Y}$ *auf* F *induzierten Fächer* Y *enthalten ist.*

Mit diesem Satz und dem Theorem 15 aus §3 ist unser 1. Problem (s. §1) für Körper zurückgeführt auf eine Analyse der reellen Bewertungsringe von F. Damit wird es zum Beispiel möglich, für viele Körper den Stabilitätsindex (s. §3) zu bestimmen oder zumindest nach oben und unten abzuschätzen, ausgehend von Satz 17 in §3. Allerdings wurden solche Untersuchungen von Bröcker schon vor Kenntnis von Theorem 24 auf anderem Wege durchgeführt [B_1]. Wir zitieren zwei Resultate von Bröcker aus der Arbeit [B_1].

Satz 25 *Ist* L *eine formal reelle Körpererweiterung von* F *vom Transzendenzgrad* d, *so ist*

$$\mathrm{st}(L) \leqslant \mathrm{st}(F) + d + 1.$$

Satz 26 *Jede formal reelle endlich erzeugte Körpererweiterung eines reell abgeschlossenen Körpers* R *vom Transzendenzgrad* d *hat den Stabilitätsgrad* d.

Wir wollen uns noch etwas mit den reellen Bewertungsringen von F befassen und dabei das 2. Problem aus §1 im Blick behalten. Oft ist es günstiger, statt von reellen Bewertungsringen von reellen Stellen von F zu sprechen, die damit in engstem Zusammenhang stehen. Unter einer r e e l l e n S t e l l e v o n F verstehen wir eine Stelle $\lambda: F \to R \cup \infty$ mit Werten in einem reell abgeschlossenen Körper R. Wir nennen eine reelle Stelle λ mit einer Anordnung σ von F v e r t r ä g l i c h , wenn für jedes bzgl. σ positive Element a von F entweder $\lambda(a) = \infty$ oder $\lambda(a) \geqslant 0$ ist.

Eine reelle Stelle λ ist festgelegt durch ihren Bewertungsring $\mathfrak{o}_\lambda$ mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}_\lambda$ und die durch λ gegebene Einbettung $\bar{\lambda}: \mathfrak{o}_\lambda/\mathfrak{m}_\lambda \to R$. Daß λ mit σ verträglich ist, bedeutet ersichtlich, daß $\mathfrak{o}_\lambda$ mit σ verträglich ist und überdies $\bar{\lambda}$ ordnungstreu bzgl. $\bar{\sigma}$ und der Anordnung von R ist. Indem wir uns erinnern, daß zu jeder Anordnung eines Körpers k bis auf Isomorphie genau eine ordnungstreue Einbettung von k in einen über k algebraischen reell abgeschlossenen Körper R existiert [AS], erhalten wir folgenden Zusammenhang zwischen den mit einer Anordnung σ verträglichen Bewertungsringen und reellen Stellen:

Satz 27 *Ist* $\mathfrak{o}$ *ein mit* σ *verträglicher Bewertungsring,* k *ein maximaler Teilkörper von* $\mathfrak{o}$ *und* R *ein reeller Abschluß von* k *zu* $\sigma | k$, *so gibt es genau eine mit* σ *verträgliche Stelle* $\lambda: F \to R \cup \infty$, *die auf* k *die Identität ist. Man erhält jede mit* σ *verträgliche Reelle Stelle* $\lambda': F \to R' \cup \infty$ *aus einer solchen Stelle* λ *durch Hinterschalten einer Injektion* $R \to R'$.

Wir betrachten jetzt spezieller die Menge Ω der Stellen von F mit Werten im Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen. Jede Anordnung σ von F liefert eine Stelle $\lambda \in \Omega$ in folgender Weise. Sei $\mathfrak{o} := \mathfrak{o}(\sigma, F/\mathbb{Q})$ und sei $\bar{\sigma}$ die auf dem Restklassenkörper $\mathfrak{o}/\mathfrak{m}$ induzierte Anordnung. Nach Definition von $\mathfrak{o}$ ist die Anordnung $\bar{\sigma}$ a r c h i m e d i s c h , wird also durch eine eindeutig bestimmte Einbettung $\bar{\lambda}: \mathfrak{o}/\mathfrak{m} \to \mathbb{R}$ festgelegt. λ sei die durch $\mathfrak{o}$ und $\bar{\lambda}$ bestimmte $\mathbb{R}$-wertige Stelle von F. Man sieht leicht, daß dieses λ d i e e i n z i g e mit σ verträgliche $\mathbb{R}$-wertige Stelle ist.

Sei $\pi: X \to \Omega$ die so entstehende Abbildung $\sigma \mapsto \lambda$ von dem Raum X der Anordnungen nach Ω. Diese Abbildung ist surjektiv, weil es zu jeder reellen Stelle λ mit λ verträgliche Anordnungen gibt, vgl. Satz 22. Wir versehen Ω mit der Quotiententopologie von X bzgl. π. Es gilt [BrM], §2:

Satz 28 *Diese Topologie ist die gröbste Topologie, so daß für jedes* $f \in F^*$ *die Abbildung*

$$\hat{f}: \Omega \to P^1(\mathbf{R}) = \mathbf{R} \cup \infty, \quad \lambda \mapsto \lambda(f)$$

stetig ist, wobei die reelle projektive Gerade $P^1(\mathbf{R})$ *mit der starken Topologie versehen ist.*

Satz 28 zeigt, daß der Quotient Ω von X ein recht vernünftiger Raum sein kann. Ist zum Beispiel F ein eindimensionaler Funktionskörper über $\mathbf{R}$ und M die zugehörige glatte projektive über $\mathbf{R}$ definierte Kurve, so läßt sich Ω bekanntlich als die Menge $M(\mathbf{R})$ der reellen Punkte von M deuten. Satz 28 besagt, daß obige Topologie von Ω gerade die starke Topologie auf $M(\mathbf{R})$ ist. Somit ist Ω jezt disjunkte Vereinigung von endlich vielen topologischen Kreisen. Ist F eindimensionaler Funktionenkörper über einem nichtarchimedischen reell abgeschlossenen Körper R, so wird es weniger sinnvoll sein, Ω zu betrachten. In der Tat hat Brown gezeigt, daß dann Ω für den rationalen Funktionenkörper $F = R(x)$ kein Kreiskontinuum ist [Br], § 7. Dabei heißt ein topologischer Raum S K r e i s k o n t i n u u m , wenn S kompakt, Hausdorff und zusammenhängend ist, nach Entfernung eines beliegigen Punktes zusammenhängend bleibt, nach Entfernung von zwei beliebigen Punkten aber unzusammenhängend wird. L. Bröcker hat jedoch einen anderen Quotienten von X gefunden, der berücksichtigt, daß jetzt der Konstantenkörper R die Rolle von $\mathbf{R}$ übernehmen muß. Er hat auf X folgende Äquivalenzrelation eingeführt: Für jedes $\sigma \in X$ ist $\mathfrak{o}(\sigma, F/R)$ entweder ein diskreter Bewertungsring oder ganz F. Im ersten Fall bestehe die Äquivalenzklasse von σ aus allen τ mit $\mathfrak{o}(\tau, F/R) = \mathfrak{o}(\sigma, F/R)$, also nach Satz 22 aus genau zwei Punkten σ, σ'. Im zweiten Falle enthalte die Äquivalenzklasse von σ nur den Punkt σ. Sei $\Omega(F/R)$ der Quotient von X nach dieser Äquivalenzrelation. Wir nennen die Punkte von $\Omega(F/R)$ gemäß der soeben getroffenen Fallunterscheidung P u n k t e e r s t e r A r t (= zweipunktige Äquivalenzklassen) und P u n k t e z w e i t e r A r t (= einpunktige Äquivalenzklassen). Die Punkte erster Art entsprechen genau den diskreten Bewertungsringen $\mathfrak{o} \supset R$ von F mit Restklassenkörper R, also den reellen Punkten der zu F/R gehörigen glatten projektiven Kurve M. Somit läßt sich $M(R)$ als die Teilmenge der Punkte erster Art von $\Omega(F/R)$ auffassen. $M(R)$ liegt dicht in $\Omega(F/R)$ [P], § 9. In dem Spezialfall $R = \mathbf{R}$ gibt es keine Punkte 2. Art und $\Omega(F/R)$ stimmt mit dem oben betrachteten Raum Ω der $\mathbf{R}$-wertigen Stellen auf F überein.

L. Bröcker und sein Diplomand M. Schröder haben nun gezeigt (mündliche Mitteilung), Teilresultate in [S], § 6:

Theorem 29 $\Omega(F/R)$ *besteht aus endlich vielen Zusammenhangskomponenten* $\Delta_1, \ldots, \Delta_r$. *Jede Komponente* Δ_i *ist ein Kreiskontinuum und überdies homöomorph zu dem Raum* $\Omega(R(x)/R)$ *des rationalen* 1*-dimensionalen Funktionenkörpers* $R(x)$ *über* R. *Die von* $\Omega(F|R)$ *auf* $M(R)$ *gelieferte Teilraumtopologie ist die starke Topologie von* $M(R)$. *Die Durchschnitte* $\Gamma_i := \Delta_i \cap M(R)$, $i = 1, \ldots, r$, *sind genau die Wittkomponenten von* $M(R)$, *wie in* § 2 *definiert.*

Der Beweis aller Aussagen dieses Satzes bis auf die letzte verläuft unabhängig von der Arbeit $[K_3]$. Somit haben wir einen neuen und in mancher Hinsicht gegen-über [K_3] einfacheren Zugang zu der Tatsache, daß für eine projektive glatte Kurve M über R jede Wittkomponente von M(R) in natürlicher Weise zirkular geordnet werden kann, wie in § 2 beschrieben.

Kehren wir zu einem beliebigen formal reellen Körper F und dem Raum Ω der **R**-wertigen Stellen auf F zurück! Als reellen Holomorphiering $\mathfrak{O}$ von F bezeichnen wir den Durchschnitt aller reellen Bewertungsringe von F. Weil jeder reelle Bewertungsring von F den Bewertungsring $\mathfrak{o}_\lambda$ einer Stelle $\lambda \in \Omega$ enthält, ist $\mathfrak{O}$ schon der Durchschnitt aller $\mathfrak{o}_\lambda$ mit $\lambda \in \Omega$. H. W. Schülting hat auf Anregung von Herrn Becker den reellen Holomorphiering $\mathfrak{O}$ untersucht und folgendes bewiesen [S]:

Theorem 30 *$\mathfrak{O}$ hat den Quotientenkörper* F. *Jedes maximale Ideal von $\mathfrak{O}$ ist der Kern $\mathfrak{p}_\lambda$ des Ringhomomorphismus von $\mathfrak{O}$ nach* **R**, *der durch Einschränkung einer geeigneten Stelle $\lambda: F \to \mathbf{R} \cup \infty$ auf $\mathfrak{O}$ entsteht. Für jedes $\lambda \in \Omega$ ist die Lokalisierung von $\mathfrak{O}$ nach dem Primideal $\mathfrak{p}_\lambda$ der Bewertungsring $\mathfrak{o}_\lambda$ von λ. Also ist jede Stelle $\lambda \in \Omega$ durch ihre Einschränkung auf $\mathfrak{O}$ bestimmt.*

Nach diesem Satz ist $\mathfrak{O}$ ein Prüferring, d. h., alle Lokalisierungen von $\mathfrak{O}$ sind Bewertungsringe. Weiter läßt sich Ω mit der Menge Hom($\mathfrak{O}$, **R**) der Ringhomomorphismen von $\mathfrak{O}$ nach **R** identifizieren. Man sieht auch leicht, daß unsere Topologie von Ω gerade die gröbste ist, so daß für jedes $a \in \mathfrak{O}$ die **R**-wertige Funktion $\lambda \mapsto \lambda(a)$ auf Ω stetig ist.

Schon seit längerem ist folgende Beschreibung der Elemente von $\mathfrak{O}$ bekannt ([Bch], § 3.3, [Pe]):

Satz 31 *$\mathfrak{O}$ ist der von den Elementen $(1 + q)^{-1}$ mit q Quadratsumme in F erzeugte Unterring von F. Ein Element $a \in F$ liegt genau dann in $\mathfrak{O}$, wenn es eine natürliche Zahl n gibt, so daß für jede Anordnung von F die Ungleichung $-n < a < n$ erfüllt ist.*

Jeder Punkt $\lambda \in \Omega$ liefert eine Signatur von $\mathfrak{O}$, nämlich die funktorielle Abbildung $\lambda_*: W(\mathfrak{O}) \to W(\mathbf{R}) = \mathbf{Z}$ zu dem Ringhomomorphismus $\lambda: \mathfrak{O} \to \mathbf{R}$. Nach Schülting [S] gilt:

Satz 32 *Jede Signatur von $\mathfrak{O}$ hat die Gestalt λ_* zu einem $\lambda \in \Omega$. Zwei Punkte λ, μ von Ω liefern genau dann dieselbe Signatur $\lambda_* = \mu_*$, wenn sie in derselben Zusammenhangskomponente von Ω liegen.*

Somit läßt sich der Raum Sign $\mathfrak{O}$ der Signaturen von $\mathfrak{O}$ mit der Menge $\pi_0(\Omega)$ der Zusammenhangskomponenten von Ω identifizieren. Nach Schülting ist weiter die Topologie aus § 1 auf Sign $\mathfrak{O}$ identisch mit der Topologie von $\pi_0(\Omega)$ als Quotient von Ω. Schließlich gilt für den reduzierten Wittring von $\mathfrak{O}$

$$W(\mathfrak{O}) = \mathbf{Z} \cdot 1 + C(\pi_0(\Omega), 2\mathbf{Z}) = \mathbf{Z} \cdot 1 + C(\Omega, 2\mathbf{Z}).$$

Das Paar ($\mathfrak{O}$, Ω) hat also im Sinne von § 2 optimale Eigenschaften.

Trotzdem ist der reelle Holomorphiering und der durch ihn bestimmte Raum Ω eine im Grundsätzlichen unbefriedigende Antwort auf das 2. Problem. Es ist eine Urerfahrung der höherdimensionalen algebraischen Geometrie, daß man gewöhnlich erst dann zu weitergehenden Einsichten über einen Funktionenkörper F gelangt, wenn man ein Modell von F auswählt. Das wird bei unseren „reellen" Problemen nicht anders sein. Damit kommen wir von der lokalen Theorie zu globalen Problemen zurück.

Für einen formal reellen Funktionenkörper F über $\mathbb{R}$ bietet sich folgende Fragestellung an: Sei M eine projektive über $\mathbb{R}$ definierte Varietät, eventuell auch mit Singularitäten, die F als Funktionenkörper hat. Wir haben eine stetige Abbildung von Ω auf $M(\mathbb{R})$, die jedem $\lambda \in \Omega$ das Zentrum des Bewertungsringes $\mathfrak{o}_\lambda$ auf M zuordnet. Man untersuche direkt die zusammengesetzte Abbildung $\mathrm{Sign}(F) \twoheadrightarrow \Omega \twoheadrightarrow M(\mathbb{R})$ und setze Sign(F) in Beziehung zu der Geometrie von $M(\mathbb{R})$. Ersetze man $\mathbb{R}$ durch einen beliebigen reell abgeschlossenen Körper R, so gibt es zwar im allgemeinen keine Abbildung in analoger Weise von Sign(F) auf M(R), weil jetzt der Bewertungsring $\mathfrak{o}(\sigma, F/R)$ zu einer Anordnung σ von F nicht notwendig den Restklassenkörper R hat. Trotzdem stellt sich auch hier die Aufgabe, die Anordnungen von F in Beziehung zur Geometrie von M(R) zu setzen. Bei dieser Aufgabe wurden kürzlich von L. Bröcker erste Erfolge erzielt (mündl. Mitteilung), die interessante Anwendungen haben. Sie gestatten zum Beispiel nach Bröcker, zu einer vorgegebenen Vorzeichenverteilung auf M(R) notwendige und hinreichende geometrische Bedingungen anzugeben, daß diese Vorzeichenverteilung „fast überall" von einer algebraischen Funktion auf M(R) realisiert wird (vgl. Witt [W_1] und [K_3], falls M glatte Kurve ist).

Quellen und Literaturhinweise

[AK] Ahrens, R.; Kaplansky, I.: Topological representations of algebras. Trans. Amer. Math. Soc. **63** (1948) 457–481

[AS] Artin, E.; Schreier, O.: Algebraische Konstruktion reeller Körper. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **5** (1926) 85–99

[Bch] Bachmann, F.: Algebra III. Vorlesung 1961, ausgearbeitet von J. Gamst. Kiel 1963

[Ba] Baeza, R.: Quadratic forms over semilocal rings. Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1978. = Lecture Notes in Mathematics 655

[BeB] Becker, E.; Bröcker, L.: On the description of the reduced Witt ring. J. Algebra **52** (1978) 328–346

[BeK] Becker, E.; Köpping, E.: Reduzierte quadratische Formen und Semiordnungen reeller Körper. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **46** (1977) 143–177

[B] Bröcker, L.: Characterization of fans and hereditary pythagorean fields. Math. Z. **151** (1976) 149–163

[B_1] Bröcker, L.: Zur Theorie der quadratischen Formen über formal reellen Körpern. Math. Ann. **210** (1974) 233–256

[Br] Brown, R.: Real-valued places on the function field of an algebraic curve. Erscheint demnächst

[BrM] Brown, R.; Marshall, M.: The reduced theory of quadratic forms. Erscheint demnächst

[CS] Colliot-Thélène, J. L.; Sansuc, J. J.: Fibrès quadratiques et composantes connexes réelles. Math. Ann. **244** (1979) 105–134

[D] Dress, A.: The weak local global principle in algebraic K-theory. Communications in Algebra 3 (1975) 615–661

[H] Harrison, D.K.: Witt rings. Lecture Notes, Dept. Math. Univ. Kentucky, Lexington 1970

[J] Jacob, B.: On the structure of pythagorean fields. J. Algebra. Erscheint demnächst

[KaKi] Kanzaki, T.; Kitamura, K.: On prime ideals of a Witt ring over a local ring. Osaka J. Math. **9** (1972) 225–229

[KlR] Kleinstein, J. L.; Rosenberg, A.: Succinct and respresentational Witt rings. *Erscheint demnächst*

[K] Knebusch, M.: Symmetric bilinear forms over algebraic varieties. Lecture Notes, Conf. Quadratic Forms 1976, Queen's Papers pure appl. math. No. 46, Queen's University, Kingston 1977, 103–283

[K_1] Knebusch, M.: Grothendieck- und Wittringe von nichtausgearteten symmetrischen Bilinearformen, Sitzungsber. Heidelb. Akad. Wiss. Math.-naturw. Kl. 1969/70, 3. Abh.

[K_2] Knebusch, M.: Paths in the set of rational points of an algebraic variety over a real closed field. In Vorbereitung

[K_3] Knebusch, M.: On algebraic curves over real closed fields I. Math. Z. **150** (1976) 49–70; II: Math. Z. **151** (1976) 189–205

[K_4] Knebusch, M.: Real closures of commutative rings I. J. reine angew. Math. **274/275** (1975) 61–89

[K_5] Knebusch, M.: On the local theory of signatures and reduced quadratic forms. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, erscheint demnächst

[KK] Knebusch, M; Kolster, M.: Wittringe. Regensburger Trichter Band 14, Fachbereich Math. Univ. Regensburg 1978

[KRW] Knebusch, M.; Rosenberg, A.; Ware, R.: Structure of Witt rings and quotients of abelian group rings. Amer. J. Math. **94** (1972) 119–155

[KRW_1] Knebusch, M.; Rosenberg, A.; Ware, R.: Signatures on semilocal rings. J. Algebra **26** (1973) 208–250

[KW] Knebusch, M.; Wright, M. J.: Bewertungen mit reeller Henselisierung. J. reine angew. Math. **286/287** (1976) 314–321

[Kr] Krull, W.: Allgemeine Bewertungstheorie. J. reine angew. Math. **167** (1931) 160–196

[LL] Leicht, J.; Lorenz, F.: Die Primideale des Wittschen Ringes. Invent. math. **10** (1970) 82–88

[M] Marshall, M.: The Witt ring of a space of orderings, Trans. Amer. Math. Soc. Erscheint demnächst

[MH] Milnor, J.; Husemoller, D.: Symmetric bilinear forms. Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1973. = Ergebnisse Math. 73

[Pe] Pejas, W.: Die Modelle des Hilbertschen Axiomensystems der absoluten Geometrie. Math. Ann. **143** (1961) 212–235

[P] Prestel, A.: Lectures on formally real fields. Monografias Mat. 22, Inst. Mat. Pura Apl., Rio de Janeiro 1975

[S] Schülting, H. W.: Über reelle Stellen eines Körpers und ihren Holomorphiering, Diss. Dortmund 1979

[W] Witt, E.: Theorie der quadratischen Formen in beliebigen Körpern. J. reine angew. Math. **176** (1937) 31–44

[W_1] Witt, E.: Zerlegung reeller algebraischer Funktionen in Quadrate, Schiefkörper über reellem Funktionenkörper. J. reine angew. Math. **171** (1934) 4–11

Prof. Dr. M. Knebusch
FB Mathematik
Universitätsstr. 31
8400 Regensburg

(*Eingegangen: 21. 11. 1979*)