erscheint in:
Proc. Conf. on Real Algebraic
Geometry and Quadratic Forms,
Rennes, 1981.

47

Zur Theorie der semialgebraischen Wege und Intervalle über einem reell abgeschlossenen Körper.

Hans Delfs und Manfred Knebusch (Regensburg)

Bei unserem Aufbau der semialgebraischen Topologie über einem reell abgeschlossenen Grundkörper R in den Arbeiten [DK_1] und [DK_2] benutzen wir bei der Diskussion der semialgebraischen Wege die von dem zweiten Autor in [K] entwickelte Theorie der Intervalle auf der Menge X(R) der reellen Punkte einer glatten projektiven Kurve X über R. Durch diesen Aufbau entsteht ein Mißverhältnis zwischen Methoden und erzielten Resultaten. In [K] werden Tatsachen über quadratische Formen {z.B. der Residuensatz für differentialwertige quadratische Formen} und Jacobi-Varietäten {insbesondere der Dualitätssatz von Geyer für abelsche Varietäten über R, [G]} ausgenutzt, die methodisch gesehen schon zu den höheren Teilen der algebraischen Geometrie gehören. Semialgebraische Topologie handelt aber nur von den einfachsten, nämlich den "topologischen" Eigenschaften des Raumes X(R) der reellen Punkte einer Varietät X über R.

Nun lassen sich aber die Abschnitte §6-§9 und §11 in [DK_2] unabhängig von den Ergebnissen in [K] verstehen. (Theorem 9.2 in [DK_2] kann man, wie schon dort bemerkt ist, mit Hilfe des Tarski-Prinzips durch Übertragen aus dem klassischen Fall gewinnen, der Hinweis auf Lemma 9.3 im Beweis von Proposition 11.1 ist unwesentlich). Ziel dieser Note ist es, ausgehend von dieser Beobachtung, einen neuen Zugang zur Theorie der semialgebraischen Wege zu geben, der mit semialgebraischen Standard-Methoden auskommt und somit nur sehr elementare algebraische Geometrie benutzt. Damit wird die semialgebraische Topologie von der Arbeit [K] unabhängig. Überdies erhalten wir neue Beweise für diejenigen Sätze aus [K], die rein semialgebraischer Natur sind, also nicht auf algebraische Funktionen Bezug nehmen. Alles dies wird in §1-§5 geleistet.

In einem letzten Abschnitt, §6, analysieren wir die Verhältnisse auf dem Einheitskreis

$$S(R) = \{(x,y) \in R^2 \mid x^2+y^2 = 1\}.$$

Wir zeigen, daß dort vieles "genauso ist" wie man es im Falle $R = \mathbb{R}$ gewohnt ist, obwohl vom Standpunkt der klassischen Topologie aus $S(R)$ fast immer ein total unzusammenhängender Raum ist. Weil uns keine Exponentialfunktion zur Verfügung steht, muß dies jedoch mit gänzlich anderen Argumenten bewiesen werden, als man sie aus der Analysis kennt. Besonderes Interesse verdient unseres Erachtens die sich dabei ergebende Möglichkeit, für jede natürliche Zahl n in einem algebraisch abgeschlossenen Körper C der Charakteristik 0 nach Wahl eines reell abgeschlossenen Teilkörpers R mit $[C:R] = 2$ und Wahl einer Quadratwurzel aus -1 eine primitive n-te Einheitswurzel ζ_n auszuzeichnen.

§1 Wegekomponenten.

Wir setzen die in [DK_2, §6-§9] entwickelte allgemeine Theorie der semialgebraischen Räume über einem reell abgeschlossenen Grundkörper R voraus, und benutzen dieselben Bezeichnungen wie dort.

<u>Definition 1.</u> Ein semialgebraischer Weg in einem semialgebraischen Raum M ist eine semialgebraische Abbildung $\alpha : [0,1] \to M$. Dabei bedeutet $[0,1]$ das abgeschlossene Einheitsintervall in R. $\alpha(0)$ heißt der <u>Anfangspunkt</u> P des Weges und $\alpha(1)$ der <u>Endpunkt</u> Q des Weges.

<u>Definition 2.</u> Zwei Punkte $P,Q \in M$ heißten <u>verbindbar</u>, wenn es einen Weg α in M mit Anfangspunkt P und Endpunkt Q gibt. Ersichtlich ist "verbindbar" eine Äquivalenzrelation auf M. Die Äquivalenzklassen heißen die <u>Wegekomponenten</u> von M. Liegt nur eine Äquivalenzklasse vor, so heißt M <u>wegezusammenhängend</u>.

Ausgehend von diesen beiden Definitionen wurden in [DK_2, §11] die folgenden beiden Sätze bewiesen, unter alleiniger Benutzung von [DK_2, §6-§9]und eines elementaren Satzes von Cohen [C, §1, Theorem B_n].

<u>Satz 1.1.</u> Ist M wegezusammenhängend, so gibt es <u>keine</u> Partition $M = U_1 \cup U_2$ von M in disjunkte offene nichtleere semialgebraische Teilmengen U_1, U_2 von M. (Das ist fast trivial.)

Theorem 1.2. Jeder semialgebraische Raum M hat nur endlich viele Wegekomponenten. Diese sind semialgebraische Teilmengen von M.

Beim Beweis dieses Theorems wurde eine Beschreibung einer vorgegebenen semialgebraischen Teilmenge M von $R^n \times R$ durch "Schichten" über einer geeigneten Partition der Koordinantenhyperebene R^n in endlich viele semialgebraische Mengen benutzt [DK_2, p.204]*), die auch in dieser Note eine Rolle spielen wird und überhaupt grundlegend für die semialgebraische Geometrie ist. Dabei ging der oben genannte Satz von Cohen ein.

Wir wollen noch sämtliche wegezusammenhängenden semialgebraischen Teilräume von R angeben. Aus der Tatsache, daß ein Polynom in einer Variablen mit Koeffizienten in R nur endlich viele Nullstellen hat und zwischen zwei reellen Nullstellen nicht das Vorzeichen wechseln kann, folgt, daß jede echte nicht leere semialgebraische Teilmenge M von R disjunkte Vereinigung von endlich vielen Mengen folgender Art ist:

a) $]a,b[:= \{x \in R \mid a < x < b\}$

$[a,b[:=]a,b[\cup \{a\}$

$]a,b] :=]a,b[\cup \{b\}$

$[a,b] :=]a,b[\cup \{a\} \cup \{b\}$

mit Elementen $a < b$ von R. Das sind die "Intervalle" auf R (offen, halboffen, abgeschlossen).

b) $]-\infty,a[:= \{x \in R \mid x < a\}$

$]-\infty,a] :=]-\infty,a[\cup \{a\}$

$]a,\infty[:= \{x \in R \mid x > a\}$

$[a,\infty[:=]a,\infty[\cup \{a\}$

Das sind die "Halbgeraden" auf R ($a \in R$).

c) Einpunktige Mengen.

Jetzt ist evident

Satz 1.3. Die wegezusammenhängenden semialgebraischen Teilmengen von R sind genau die Mengen R, ∅, und die in a),b),c) aufgeführten Mengen.

*) siehe auch [Cs, §2].

§ 2 Vervollständigung von Wegen.

Theorem 2.1. Sei $J \subset R$ ein Intervall und $\gamma : J \to M$ eine semialgebraische Abbildung in einen vollständigen semialgebraischen Raum. Dann läßt sich γ zu einer semialgebraischen Abbildung $\overline{\gamma} : \overline{J} \to M$ auf den Abschluß $\overline{J}$ von J in R fortsetzen.

Beweis. Ersichtlich genügt es, den Fall $J =]0,1]$ zu behandeln. Sei $\Gamma \subset]0,1] \times M$ der Graph von γ. Wir haben die folgende kanonische Faktorisierung von γ.

$$\begin{tikzcd} {]0,1]} \arrow[r, "\sim", "\alpha"'] \arrow[dr, "\gamma"'] & \Gamma \arrow[d, "p"] \\ & M \end{tikzcd}$$

mit dem Isomorphismus α, definiert durch $\alpha(t) = (t,\gamma(t))$, und der kanonischen Projektion p von Γ nach M, $p(t,x) = x$. Wir bezeichnen mit $\overline{\Gamma}$ den Abschluß von Γ in dem vollständigen Raum $N := [0,1] \times M$. $\overline{\Gamma}$ ist vollständig, aber $\Gamma \cong]0,1]$ ist nicht vollständig. Somit ist $\overline{\Gamma} \neq \Gamma$. Weiter ist [$DK_2$, Cor. 8.11]

$$\dim(\overline{\Gamma} \setminus \Gamma) < \dim \Gamma = 1.$$

Also ist $\overline{\Gamma} \setminus \Gamma$ eine endliche Menge $\{P_1,\ldots,P_r\}$ mit paarweise verschiedenen Punkten P_i. Wir wollen zeigen, daß $r = 1$ ist.

Angenommen, $r > 1$. Wir wählen offene semialgebraische Umgebungen U_1, U_2 von P_1, P_2 in N mit $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Der Punkt P_1 liegt schon im Abschluß der semialgebraischen Menge

$$U_1 \cap \Gamma = \alpha(\alpha^{-1}(U_1)).$$

Aufgrund unserer genauen Kenntnis der semialgebraischen Teilmengen von $]0,1]$ (s. Ende von §1) wissen wir:

$$\alpha^{-1}(U_1) = J_1 \cup \ldots \cup J_r$$

mit paarweise disjunkten in $]0,1]$ offenen Intervallen J_i und $t < u$ für $t \in J_i$, $u \in J_{i+1}$ $(1 \leq i \leq r-1)$. Für $i \geq 2$ ist der Abschluß $\overline{J}_i$ von J_i in R in $]0,1]$ enthalten, also wegen der Vollständigkeit von $\overline{J}_i$

$$P_1 \notin \alpha(\bar{J}_i) = \overline{\alpha(J_i)}.$$

Somit ist $P_1 \in \overline{\alpha(J_1)}$. Wäre der Anfangspunkt des Intervalls J_1 von Null verschieden, so wäre auch $\bar{J_1} \subset]0,1]$ und $P_1 \notin \overline{\alpha(J_1)}$. Somit hat J_1 die Gestalt $]0,c_1[$ mit $c_1 \in]0,1]$. Wir haben damit ein $c_1 \in]0,1]$ gefunden so daß

$$\alpha(]0,c_1[) \subset U_1$$

ist. Ebenso findet man ein $c_2 \in]0,1]$ mit

$$\alpha(]0,c_2[) \subset U_2.$$

Es folgt $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, und das ist der gesuchte Widerspruch. Somit ist $\bar{\Gamma} \setminus \Gamma$ eine einpunktige Menge $\{P\}$. Es ist $P = (\tau,Q)$ mit $\tau \in [0,1]$, $Q \in M$. Da $\alpha^{-1}(\Gamma) =]0,1]$ und das Bild von $\bar{\Gamma}$ unter der Projektion auf $[0,1]$ vollständig, also gleich $[0,1]$ ist, muß $\tau = 0$ sein. $\bar{\Gamma}$ ist der Graph der Abbildung $\bar{\gamma} : [0,1] \to M$, definiert durch

$$\bar{\gamma}(t) = \begin{cases} \gamma(t) & 0 < t \leq 1 \\ Q & t = 0 . \end{cases}$$

Weil $\bar{\Gamma}$ abgeschlossen in $[0,1] \times M$ und M vollständig ist, ist $\bar{\gamma}$ stetig, also eine semialgebraische Abbildung, vgl. [DK_2, Th. 9.9]. Damit ist das Theorem bewiesen.

Schon ein Spezialfall dieses Theorems, nämlich das Lemma 12.2 in [DK_2], reicht aus, um den Kurvenauswahlsatz zu beweisen, wie in [DK_2, §12] näher ausgeführt ist.

<u>Theorem 2.2</u> (Kurvenauswahlsatz). Sei M semialgebraischer Teilraum eines semialgebraischen Raumes L und P ein Punkt in dem Abschluß $\bar{M}$ von M in L. Dann gibt es einen Weg $\gamma : [0,1] \to L$ mit $\gamma(0) = P$ und $\gamma(]0,1]) \subset M$.

Aufgrund dieses Satzes ist klar, daß die Wegekomponenten eines semialgebraischen Raumes M sämtlich abgeschlossen, also auch offen in M sind.Sie sind somit in jedem vernünftigen Sinne als die "Zusammenhangskomponenten" von M anzusehen.(Man erinnere sich an Satz 1.1.). Wir nennen deshalb ab jetzt die Wegekomponenten suggestiver "Zusammenhangskomponenten" und nennen insbesondere einen Raum M kurz "zusammenhängend", wenn er wegezusammenhängend ist.

Ohne weitere Arbeit erhält man jetzt als Korollar zu Theorem 2.1 einen Satz über die Liftung von Wegen. Ein Spezialfall dieses Satzes spielte in [DK_1, §3] eine wesentliche Rolle [loc.cit, Th.3.3].

Korollar 2.3. Sei $\pi : M \to N$ eine eigentliche semialgebraische Abbildung. Sei J ein Intervall in R und $\alpha : \bar{J} \to N$ eine semialgebraische Abbildung. Weiter sei eine semialgebraische Liftung $\beta : J \to M$ von $\alpha|J$ vorgegeben, d.h. β sei eine semialgebraische Abbildung mit $\pi \circ \beta = \alpha|J$. Dann läßt sich β fortsetzen zu einer semialgebraischen Liftung $\bar{\beta}$ von α.

Beweis. $\alpha(\bar{J}) = L$ ist ein vollständiger semialgebraischer Teilraum von N. Wir dürfen N durch L und M durch den vollständigen Raum $\pi^{-1}(L)$ ersetzen, somit ohne Einschränkung der Allgemeinheit M als vollständig voraussetzen. Nach Theorem 2.1 setzt sich β zu einer semialgebraischen Abbildung $\bar{\beta} : \bar{J} \to M$ fort. Die semialgebraischen Abbildungen $\pi \circ \bar{\beta}$ und α stimmen auf J überein, wegen ihrer Stetigkeit also auch auf $\bar{J}$.

q.e.d.

§ 3 Genauere Analyse eines Weges.

Wir formulieren zunächst das semialgebraische Analogon zum Zwischenwertsatz und zum Satz von der Existenz von Maximum und Minimum für stetige Funktionen einer reellen Veränderlichen.

Satz 3.1. Sei $f : [a,b] \to R$ eine semialgebraische nicht konstante Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall $[a,b] \subset R$. Dann ist $f([a,b])$ ein abgeschlossenes Intervall $[c,d]$.

Beweis. Das Bild $N := f([a,b])$ von f ist vollständig, weil $[a,b]$ vollständig ist (vgl. [DK_2, §9]). Somit ist N eine abgeschlossene beschränkte semialgebraische Teilmenge von R. Weil $[a,b]$ wegezusammenhängend ist, gilt gleiches für N. Aus der am Ende von §1 angegebenen Liste aller wegezusammenhängenden Teilmengen von R ersieht man, daß N ein abgeschlossenes Intervall ist.

Ziel dieses Abschnittes ist nun der Beweis des folgenden Satzes.

Theorem 3.2. Sei $\gamma : [a,b] \to M$ eine semialgebraische Abbildung von einem abgeschlossenen Intervall $[a,b] \subset R$ in einen semialgebraischen Raum M. Dann gibt es eine Unterteilung

$$t_o = a < t_1 < \ldots < t_r = b$$

so daß jede Einschränkung $\gamma|[t_{k-1},t_k]$ $(1 \le k \le r)$ entweder eine konstante Abbildung oder eine Einbettung (= Isomorphismus aufs Bild) ist.

Zum Beweis wählen wir eine endliche Überdeckung $(M_i | i \in I)$ von M durch offene affine semialgebraische Teilräume M_i. Dann ist $(\gamma^{-1}(M_i) | i \in I)$ eine Überdeckung von $[a,b]$ durch endlich viele offene semialgebraische Teilmengen. Jedes $\gamma^{-1}(M_i)$ ist disjunkte Vereinigung endlich vieler in $[a,b]$ offener Intervalle. Man findet somit leicht eine Unterteilung

$$a_o = a < a_1 < \ldots < a_m = b,$$

so daß γ jedes abgeschlossene Teilintervall $[a_{j-1},a_j]$ in eine der Mengen M_i abbildet. Daher können wir uns von vornherein auf den Fall zurückziehen, daß M affin ist. M läßt sich dann in einen Raum R^n einbetten und wir dürfen somit sogar $M = R^n$ voraussetzen. Seien $\gamma_1,\ldots,\gamma_n$ die Komponenten der Abbildung γ von $[a,b]$ nach R^n. Es genügt, die Behauptung für jede Komponente $\gamma_i : M \to R$ separat einzusehen. Dann ist die Behauptung auch für γ evident.

Damit haben wir uns auf den Fall $M = R$ zurückgezogen. Wir benötigen jetzt das folgende Lemma.

Lemma 3.3. Sei $\gamma : [a,b] \to R$ eine semialgebraische Abbildung. Dann gibt es zu jedem $x \in [a,b[$ ein $\varepsilon > 0$ in R, so daß entweder $\gamma(y) > \gamma(x)$ oder $\gamma(y) = \gamma(x)$ oder $\gamma(y) < \gamma(x)$ jeweils für alle $y \in [a,b]$ mit $x < y < x+\varepsilon$ gilt.

Beweis. Die Mengen

$$A := \{y \in [a,b] \mid \gamma(y) > \gamma(x)\}$$

$$B := \{y \in [a,b] \mid \gamma(y) < \gamma(x)\}$$

$$C := \{y \in [a,b] \mid \gamma(y) = \gamma(x)\}$$

sind semialgebraisch nach Tarski, also disjunkte Vereinigungen endlich vieler Intervalle und endlich vieler Punkte (vgl. Satz 1.3). Damit ist schon klar, daß $]x,x+\varepsilon[$ für ein $\varepsilon > 0$ ganz in einer der Mengen A,B,C liegt.

q.e.d.

Mit diesem Lemma läßt sich Theorem 3.2 im Falle $M = R$ leicht verifizieren. Wir betrachten die Teilmengen F,G,H von $[a,b[$, die aus allen Punkten $x \in [a,b[$ bestehen, zu denen es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so daß $\gamma(y) > \gamma(x)$ bzw. $\gamma(y) < \gamma(x)$ bzw. $\gamma(y) = \gamma(x)$ jeweils für alle $y \in [a,b]$ mit $x < y < x+\varepsilon$ gilt. Nach Tarski sind diese Mengen sicherlich semialgebraisch, also Vereinigungen von endlich vielen Intervallen und endlich vielen Punkten. Nach Lemma 3.3 ist $[a,b[$ die Vereinigung dieser drei Mengen F,G,H. Daher gibt es eine Unterteilung

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_r = b,$$

so daß jedes Intervall $]t_{k-1},t_k[$, $1 \leq k \leq r$, ganz in einer der Mengen F,G,H enthalten ist. Ist $]t_{k-1},t_k[$ in H enthalten, so ist γ auf $[t_{k-1},t_k]$ konstant. Wir betrachten jetzt den Fall, daß ein vorgegebenes Intervall $I =]t_{k-1},t_k[$ ganz in F enthalten ist. Auf jedem abgeschlossenen Teilintervall $[c,d]$ von I muß die Funktion γ nach Satz 3.1 ihr Maximum annehmen. Aufgrund der Definition von F kann das Maximum nur in dem Punkt d angenommen werden. Daher ist γ auf I streng monoton wachsend. Weil γ stetig ist, folgt, daß γ auch auf dem Abschluß $\bar{I} = [t_{k-1},t_k]$ von I streng monoton wächst. Insbesondere ist $\gamma|\bar{I}$ injektiv, somit wegen der Vollständigkeit von $\bar{I}$ eine Einbettung [DK_2, 9.8]. Ist schließlich I in der Menge G enthalten, so ist $\gamma|\bar{I}$ streng monoton fallend und wieder eine Einbettung. Damit ist Theorem 3.2 völlig bewiesen.

§ 4 Die projektive Gerade $\mathbb{P}(R)$.

Wie üblich fassen wir die projektive Gerade

$$\mathbb{P}(R) = \{(x_0:x_1) | x_0, x_1 \in R,\ x_0 \neq 0 \quad \text{oder} \quad x_1 \neq 0\}$$

als Vereinigung der affinen Geraden R mit einem weiteren Punkt ∞ auf. Genauer identifizieren wir a mit (1:a) für $a \in R$ und setzen $\infty = (0:1)$. R ist dann mit seiner Standardstruktur als semialgebraischer Raum ein offener dichter Teilraum des semialgebraischen Raumes $\mathbb{P}(R)$. Zu je zwei verschiedenen Punkten a,b auf $\mathbb{P}(R)$ definieren wir ein "offenes Intervall"]a,b[wie folgt:

$a,b \in R,\ a < b:\quad]a,b[= \{x \in R \mid a < x < b\};$

$a,b \in R,\ a > b:\quad]a,b[= \{x \in R \mid x > a \text{ oder } x < b\} \cup \{\infty\};$

$]\infty,a[= \{x \in R \mid x < a\};$

$]a,\infty[= \{x \in R \mid x > a\}.$

Weiter definieren wir "halboffene Intervalle"

$[a,b[:=]a,b[\cup \{a\}$

$]a,b] :=]a,b[\cup \{b\}$

und "abgeschlossene Intervalle"

$[a,b] :=]a,b[\cup \{a\} \cup \{b\}.$

Um die so definierten semialgebraischen Teilmengen von $\mathbb{P}(R)$ besser zu verstehen, betrachten wir die folgende semialgebraische Einbettung des Intervalls $]-1,1[\subset R$ in $\mathbb{P}(R)$.

$$]-1,1[\xrightarrow{\sim} R \hookrightarrow \mathbb{P}(R),$$
$$x \mapsto x/1-|x|.$$

Nach §2 läßt sich diese Einbettung zu einer semialgebraischen Abbildung

$$\pi : [-1,1] \to \mathbb{P}(R)$$

fortsetzen, natürlich auf genau eine Weise. Diese Abbildung π ist in keiner Umgebung von -1 konstant, muß also nach Theorem 3.2 in einer Umgebung von -1 injektiv sein. Insbesondere ist $\pi(-1) = \infty$. Ebenso ist $\pi(1) = \infty$. Man prüft natürlich auch leicht elementar nach, daß die durch $\pi(x) = x/1-|x|$ für $x \in]-1,1[$, $\pi(-1) = \pi(1) = \infty$ definierte Abbildung von $[-1,1]$ nach $\mathbb{P}(R)$ semialgebraisch ist.

π ist eigentlich und surjektiv, somit gilt:

1) Eine Teilmenge M von $\mathbb{P}(R)$ ist genau dann semialgebraisch, wenn $\pi^{-1}(M)$ semialgebraisch ist. Eine semialgebraische Teilmenge M von $\mathbb{P}(R)$ ist genau dann abgeschlossen bzw. offen in $\mathbb{P}(R)$, wenn $\pi^{-1}(M)$ abgeschlossen bzw. offen in $[-1,1]$ ist.

2) Eine Abbildung $f : \mathbb{P}(R) \to X$ in einen semialgebraischen Raum X ist genau dann semialgebraisch, wenn die Komposition $f \circ \pi : [-1,1] \to X$ semialgebraisch ist. π ist also "identifizierend".

Mit Hilfe der Abbildung π verifiziert man nun leicht

Satz 4.1. Seien a,b verschiedene Punkte auf $\mathbb{P}(R)$.

1) $]a,b[$ ist eine offene und zusammenhängende semialgebraische Teilmenge von $\mathbb{P}(R)$.

2) $[a,b]$ ist der Abschluß von $]a,b[$ in $\mathbb{P}(R)$.

3) Es gibt einen - explizit angebbaren - semialgebraischen Isomorphismus λ von $[0,1]$ auf $[a,b]$ mit $\lambda(0) = a$, $\lambda(1) = b$.

Weiter dient uns die Abbildung π dazu, für jeden Punkt $p \in R$ einen Automorphismus α_p von $\mathbb{P}(R)$ zu konstruieren, der p auf ∞ abbildet. Sei c das Urbild von p unter π. Zunächst definieren wir eine semialgebraische Abbildung $\tilde{\alpha}_p : [-1,1] \to \mathbb{P}(R)$ vermöge

$$\tilde{\alpha}_p(x) = \begin{cases} \pi(x+1-c) & -1 \le x \le c \\ \pi(x-1-c) & c \le x \le 1. \end{cases}$$

Wir stellen fest, daß

$$\tilde{\alpha}_p(1) = \tilde{\alpha}_p(-1) = \pi(-c)$$

ist, und erhalten somit eine semialgebraische Abbildung $\alpha_p : \mathbb{P}(R) \to \mathbb{P}(R)$ mit $\alpha_p \circ \pi = \tilde{\alpha}_p$. Man prüft leicht, daß α_p bijektiv ist. Da $\mathbb{P}(R)$ vollständig ist [DK_2, §9], folgt, daß α_p ein Automorphismus von $\mathbb{P}(R)$ ist. Unter erneuter Benutzung von π verifiziert man mit Geduld, aber ohne Mühe

Lemma 4.2. α_p bildet p auf ∞ ab. Für je zwei verschiedene Punkte a,b auf $\mathbb{P}(R)$ ist

$$\alpha_p([a,b]) = [\alpha_p(a), \alpha_p(b)].$$

Der folgende Satz ist evident für $p = \infty$, aufgrund dieses Lemmas somit richtig für jeden Punkt p auf $\mathbb{P}(R)$.

Satz 4.3. i) Für jeden Punkt $p \in \mathbb{P}(R)$ ist die Menge $\mathbb{P}(R) \setminus \{p\}$ total geordnet vermöge der folgenden Relation:

$$a < b \Longleftrightarrow a \neq b \quad \text{und} \quad p \notin\ ]a,b[.$$

ii) Mit dieser Anordnung gilt für zwei verschiedene Punkte a,b auf $\mathbb{P}(R) \setminus \{p\}$: Ist $a < b$, so ist

$$]a,b[\ = \{x \in \mathbb{P}(R) \setminus \{p\} \mid a < x < b\}.$$

Ist $a > b$, so ist

$$]a,b[\ = \{x \in \mathbb{P}(R) \setminus \{p\} \mid x > a \text{ oder } x < b\} \cup \{p\}.$$

iii) Sei [a,b] ein abgeschlossenes in $\mathbb{P}(R) \setminus \{p\}$ enthaltenes Intervall. Dann gilt für Punkte $c,d \in\ ]a,b[\ : a < c < b$. Genau dann ist $c \leq d$, wenn das Intervall [a,c] in [a,d] enthalten ist. Also auch: Genau dann ist $c \leq d$, wenn das Intervall [c,b] das Intervall [d,b] umfaßt. Insbesondere ist die von $\mathbb{P}(R) \setminus \{p\}$ auf [a,b] induzierte totale Anordnung unabhängig von der Wahl des Punktes p außerhalb von [a,b].

iv) $\mathbb{P}(R) \setminus \{p\}$ ist zusammenhängend. Sind $p_o = p, p_1, \ldots, p_r$ verschiedene Punkte auf $\mathbb{P}(R)$, $r \geq 1$, und ist in der Anordnung von $\mathbb{P}(R) \setminus \{p\}$

$$p_1 < p_2 < \ldots < p_r,$$

so hat $\mathbb{P}(R) \setminus \{p_o, p_1, \ldots, p_r\}$ die folgenden Zusammenhangskomponenten: $]p_o, p_1[,\ ]p_1, p_2[,\ \ldots\ ,\ ]p_r, p_o[$.

v) Die zusammenhängenden nicht leeren echten semialgebraischen Teilmengen von $\mathbb{P}(R) \setminus \{p\}$ sind genau die in $\mathbb{P}(R) \setminus \{p\}$ enthaltenen Intervalle und die einpunktigen Teilmengen.

Bemerkung. Auch $\mathbb{P}(R)$ ist als Bild von $[-1,1]$ unter π zusammenhängend. Damit haben wir alle zusammenhängenden semialgebraischen Teilmengen von $\mathbb{P}(R)$ gefunden.

Satz 4.4. Für jeden semialgebraischen Automorphismus α von $\mathbb{P}(R)$ gilt:
Entweder ist für je zwei verschiedene Punkte a,b auf $\mathbb{P}(R)$

$$\alpha([a,b]) = [\alpha(a), \alpha(b)],$$

oder es ist für je zwei verschiedene Punkte a,b auf $\mathbb{P}(R)$

$$\alpha([a,b]) = [\alpha(b), \alpha(a)].$$

Beweis. Sei $p := \alpha(\infty)$. Weil der oben konstruierte Automorphismus α_p die erste Alternative aus dem Satz erfüllt, genügt es, die Behauptung für $\beta := \alpha_p \circ \alpha$ anstelle von α zu verifizieren. Es ist $\beta(\infty) = \infty$. Die Einschränkung $f : R \xrightarrow{\sim} R$ von β muß aufgrund des Zwischenwertsatzes (s. Satz 3.1) entweder streng monoton wachsend oder streng monoton fallend sein. Man sieht nun leicht, daß dementsprechend β eine der beiden Alternativen in dem Satz erfüllt.

Genügt ein Automorphismus α von $\mathbb{P}(R)$ der ersten Alternative in Satz 4.4, so nennen wir α "wachsend", anderenfalls nennen wir α "fallend". Mit $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}(R))$ bezeichnen wir die Gruppe aller semialgebraischen Automorphismen von $\mathbb{P}(R)$, mit $\mathrm{Aut}^+(\mathbb{P}(R))$ die Untergruppe der wachsenden Automorphismen, mit $\mathrm{Aut}^-(\mathbb{P}(R))$ die Menge der fallenden Automorphismen.

Beispiel. Die Abbildung $i : \mathbb{P}(R) \to \mathbb{P}(R)$, definiert durch $i(x) = -x$ für $x \in R$, $i(\infty) = \infty$, ist ein fallender Automorphismus von $\mathbb{P}(R)$. Überdies ist i^2 die Identität.

Somit ist $\mathrm{Aut}^-(\mathbb{P}(R))$ sicherlich nicht leer. $\mathrm{Aut}^+(\mathbb{P}(R))$ ist also ein Normalteiler vom Index 2 in $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}(R))$.

Epilog. Vermöge einer stereographischen Projektion läßt sich $\mathbb{P}(R)$ mit dem Einheitskreis

$$S(R) := \{(x,y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

identifizieren. Es scheint auf den ersten Blick natürlicher als unser Vorgehen zu sein, auf $S(R)$ eine "zirkulare Anordnung" einzuführen, und diese mit der stereographischen Projektion auf $\mathbb{P}(R)$ zu übertragen. Jedoch haben wir den Eindruck, daß dies schwieriger ist, als mit obiger Abbildung $\pi : [-1,1] \twoheadrightarrow \mathbb{P}(R)$ zu arbeiten, weil keine trigonometrischen Funktionen zur Verfügung stehen. Wir werden umgekehrt in §6 die jetzt konstruierte zirkulare Anordnung von $\mathbb{P}(R)$ auf $S(R)$ übertragen.

§ 5 Intervalle auf glatten vollständigen Kurven.

Ist S ein zu $[0,1]$ isomorpher semialgebraischer Raum, so bezeichnen wir als Rand ∂S von S die Menge aller $x \in S$ für die $S \setminus \{x\}$ zusammenhängend ist. ∂S besteht aus genau zwei Punkten.

Theorem 5.1. Sei M ein vollständiger eindimensionaler affiner semialgebraischer Raum, der keine isolierten Punkte besitzt (d.h. "rein" von der Dimension 1 ist, vgl. [DK_2, §13]). Dann gibt es eine endliche Familie $(S_i | i \in I)$ von zum Einheitsintervall $[0,1]$ isomorphen Teilräumen S_i von M, so daß gilt:

1) $M = \bigcup_{i \in I} S_i$

2) Für $i \neq j$ ist $S_i \cap S_j$ entweder leer oder besteht aus genau einem Punkt, und dieser liegt in ∂S_i und in ∂S_j.

Wir nennen eine solche Familie $(S_i | i \in I)$ eine Triangulierung von M, weiter die Mengen S_i die 1-Simplizes der Triangulierung und die sämtlichen Randpunkte sämtlicher S_i die Ecken der Triangulierung. (Das sind Begriffe ad hoc für den eindimensionalen Fall. Eine systematischere Terminologie findet man in [DK_3, §2].)

Theorem 5.1 ist ein Spezialfall des in [DK_3, §2] bewiesenen Triangulierungssatzes für beliebige affine semialgebraische Räume [loc. cit, Th.2.1]. Jedoch läßt sich dieser Spezialfall wesentlich leichter als der allgemeine Satz herleiten. Wir wollen das kurz skizzieren.

Wir betten M in einen R^n ein und machen Induktion nach n. Für $n = 1$ ist M eine disjunkte Vereinigung von abgeschlossenen Intervallen, und die Behauptung ist evident. Sei jetzt $n = 2$ und ohne wesentliche Einschränkung der Allgemeinheit M zusammenhängend. $p : R^2 \to R$ bezeichne die Projektion $(x,y) \mapsto x$. Die Menge $p(M)$ ist semialgebraisch, zusammenhängend und vollständig in R, also ein abgeschlossenes Intervall $[a,b]$. Wir haben nun bezüglich p eine Zerlegung von M in "Schichten", wie sie allgemein in [DK_2, p.204] und auch in §2 des Übersichtsartikels [Cs] von Coste angegeben wurde. Da M Dimension 1 hat, und da jede semialgebraische Teilmenge von $[a,b]$ Vereinigung von endlich vielen Intervallen und Punkten ist, sieht diese Schichtenzerlegung wie folgt aus: Es gibt eine Unterteilung

$$a = a_o < a_1 < \dots < a_r = b$$

von $[a,b]$ und über jedem offenen Intervall $]a_{i-1},a_i[$, $1 \le i \le r$, semialgebraische Funktionen $\xi_1^i,\dots,\xi_{m(i)}^i$ $(1 \le i \le r,\ m(i) \ge 1)$, so daß gilt:

1) Für jedes $x \in\ ]a_{i-1},a_i[$ ist

$$\xi_1^i(x) < \dots < \xi_{m(i)}^i(x).$$

2) $M \cap (]a_{i-1},a_i[\times R)$ ist die disjunkte Vereinigung der Graphen

$$\Gamma_j^i := \{(x,\xi_j^i(x)) \mid a_{i-1} < x < a_i\}$$

mit $1 \le j \le m(i)$.

3) $M \cap (\{a_i\} \times R)$ ist disjunkte Vereinigung von einpunktigen Mengen und abgeschlossenen Intervallen auf der Geraden $\{a_i\} \times R$.

Nach §2 setzen sich die Funktionen ξ_j^i stetig fort zu semialgebraischen Abbildungen $\eta_j^i : [a_{i-1},a_i] \to M$. Der Graph Δ_j^i von η_j^i ist vollständig und somit ersichtlich der Abschluß von Γ_j^i in M. Überdies ist Δ_j^i zu $[a_{i-1},a_i]$ und damit zu $[0,1]$ isomorph. Da M keine isolierten Punkte hat, ist jetzt klar, daß M die Vereinigung aller Mengen Δ_j^i, $(1 \le i \le r,\ 1 \le j \le m(i))$ und endlich vieler abgeschlossener Intervalle auf den Geraden $\{a_i\} \times R$ ist, und man kann die gesuchte Triangulierung von M "sehen".

Sei jetzt $n > 2$ und p die kanonische Projektion von $R^n = R^{n-1} \times R$ auf R^{n-1}. Wir dürfen M wieder als zusammenhängend voraussetzen. Ist $p(M)$ ein Punkt x_o, so ist M in der Geraden $\{x_o\} \times R$ enthalten, und wir sind im eindimensionalen Fall, der erledigt ist. Anderenfalls haben wir nach Induktionsvoraussetzung eine Triangulierung $(T_j \mid j \in J)$ von $p(M)$. Es genügt, jeden abgeschlossenen Unterraum $p^{-1}(T_j) \cap M$ von M zu triangulieren. Sammelt man dann die 1-Simplizes aller dieser Triangulierungen, so erhält man eine Triangulierung von M, wenn man noch die 1-Simplizes, die ganz über den Randpunkten der T_j liegen, genügend unterteilt. Damit können wir uns auf den Fall zurückziehen, daß es einen Isomorphismus $\varphi : p(M) \xrightarrow{\sim} [0,1]$ gibt. Unter dem Isomorphismus

$$\varphi \times id : p(M) \times R \rightarrow [0,1] \times R$$

wird M isomorph auf einen vollständigen eindimensionalen Teilraum M' von $[0,1] \times R$ abgebildet. M' läßt sich aufgrund des erledigten Falles $n = 2$ triangulieren. Damit erhalten wir auch eine Triangulierung von M.

Bemerkung. Ausgehend von Theorem 5.1 läßt sich ziemlich leicht zeigen, daß jeder vollständige eindimensionale (natürlich separierte) semialgebraische Raum affin ist. Nachträglich läßt sich also in Theorem 5.1 das Wort "affin" streichen.

Theorem 5.2. Sei X eine glatte Kurve über R und M eine Zusammenhangskomponente des semialgebraischen Raumes X(R). Angenommen, M ist vollständig. Dann ist M zu der reellen projektiven Geraden $\mathbb{P}(R)$ isomorph.

Beispiel. Ist X überdies vollständig, also projektiv, so ist jede Zusammenhangskomponente von X(R) vollständig, vgl. [DK_2, §9].

Beweis des Theorems. Aufgrund des Satzes über implizite Funktionen ist M eine eindimensionale semialgebraische Mannigfaltigkeit, d.h. jeder Punkt von M hat eine zu $]0,1[$ isomorphe offene semialgebraische Umgebung (vgl. [DK_2], Beweis von Prop. 8.6). Überdies ist M affin, da X quasiprojektiv ist. Wir wählen nun eine Triangulierung $(S_i | i \in I)$ von M, wie in Theorem 5.1 angegeben. Sei x_o eine Ecke der Triangulierung, und sei $\{S_i | i \in J\}$ die Menge der 1-Simplizes, die x_o enthalten und somit x_o als Randpunkt haben. J enthalte r Elemente. Dann hat für jede Umgebung U von x_o, welche die Simplizes S_i mit $i \notin J$ vermeidet, die Menge $U \setminus \{x_o\}$ mindestens r Zusammenhangskomponenten, denn $U \setminus \{x_o\}$ ist disjunkte Vereinigung der relativ abgeschlossenen Teilmengen $(U \cap S_i) \setminus \{x_o\}$ mit $i \in J$. Weiter gibt es ein Fundamentalsystem von Umgebungen U, bei denen $U \setminus \{x_o\}$ aus genau r Zusammenhangskomponenten besteht, weil x_o in jedem Raum S_i ein Fundamentalsystem von Umgebungen U_i besitzt mit $U_i \setminus \{x_o\}$ zusammenhängend. Da M eine

eindimensionale semialgebraische Mannigfaltigkeit ist, muß $r = 2$ sei
In jeder Ecke der Triangulierung treffen also genau zwei Simplizes zusammen.

Wir wählen jetzt ein 1-Simplex aus und nennen es S_o. Die Randpunkte von S_o bezeichnen wir in beliebig gewählter Reihenfolge mit P_o, P_1. Es gibt dann genau ein weiteres Simplex, genannt S_1, mit Randpunkt P_1. Entweder der andere Randpunkt von S_1 ist P_o oder er ist ein von P_o, P_1 verschiedener Punkt P_2. Dann gibt es genau ein weiteres Simplex, genannt S_2, mit Randpunkt P_2. Falls der andere Randpunkt von S_2 nicht P_o ist, muß er ein von P_o, P_1, P_2 verschiedener Punkt P_3 sein, und wir setzen das Verfahren fort. Schließlich erhalten wir eine Folge paarweise verschiedener 1-Simplizes $S_o, S_1, \ldots, S_r$ mit Randpunkten $P_o, P_1; P_1, P_2; \ldots; P_r, P_o$. Kein anderes 1-Simplex der Triangulierung kann die Menge $S_o \cup S_1 \cup \ldots \cup S_r$ treffen, weil jede Ecke in dieser Menge schon Randpunkt zweier in der Menge enthaltener 1-Simplizes ist. Da M nicht disjunkte Vereinigung zweier nicht leerer semialgebraischer abgeschlossener Teilmengen sein kann, ist also

$$M = S_o \cup S_1 \cup \ldots \cup S_r .$$

Wir wählen jetzt irgendwie r Punkte $a_1 < a_2 < \ldots < a_r$ auf der affinen Geraden R. Dann ist $\mathbb{P}(R)$ die Vereinigung der abgeschlossenen Intervalle $[a_i, a_{i+1}]$, $0 \le i \le r$, mit $a_o = a_{r+1} = \infty$. Für jedes dieser Intervalle wählen wir einen semialgebraischen Isomorphismus $\varphi_i : [a_i, a_{i+1}] \xrightarrow{\sim} S_i$, der a_i auf P_i und a_{i+1} auf P_{i+1} abbildet ($P_{r+1} := P_o$). Diese Isomorphismen fügen sich zusammen zu einer semialgebraischen Abbildung $\varphi : \mathbb{P}(R) \to M$. Aufgrund unserer Kenntnis aller Durchschnitte $S_i \cap S_j$ sehen wir, daß φ bijektiv ist. Weil $\mathbb{P}(R)$ vollständig ist, ist φ ein Isomorphismus. Damit ist Theorem 5.2 bewiesen. Der Beweis wurde nur deshalb in den Einzelheiten ausgeführt, damit keine Bedenken entstehen, daß in unsere Theorie unzulässige intuitive Vorstellungen aus dem klassischen Fall $R = \mathbb{R}$ einfließen.

Wir wollen jetzt auf einer vorgegebenen vollständigen Zusammenhangskomponente M von $X(R)$ zu unserer glatten Kurve X "Intervalle" einführen, die den in §4 im Spezialfall der projektiven Geraden $X = \mathbb{P}_R$ definierten Intervallen entsprechen. Dazu müssen wir M zunächst "orientieren".

Wir führen auf der Menge $\mathrm{Iso}(\mathbb{P}(R), M)$ aller Isomorphismen von

$\mathbb{P}(R)$ auf M die folgende Äquivalenzrelation ein:

$$\varphi \sim \psi \; : \Leftrightarrow \; \psi^{-1} \circ \varphi \in \mathrm{Aut}^+(\mathbb{P}(R)) \, .$$

Weil $\mathrm{Aut}^+(\mathbb{P}(R))$ Untergruppe vom Index 2 in $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}(R))$ ist, zerfällt $\mathrm{Iso}(\mathbb{P}(R), M)$ in zwei Äquivalenzklassen.

Definition 1. Eine Orientierung von M ist die Auszeichnung einer dieser beiden Äquivalenzklassen. Sie wird dann mit $\mathrm{Iso}^+(\mathbb{P}(R), M)$ bezeichnet und die andere Äquivalenzklasse mit $\mathrm{Iso}^-(\mathbb{P}(R), M)$.

In dem Spezialfall $X = \mathbb{P}_R$ orientieren wir $X(R)$ immer durch

$$\mathrm{Iso}^+(\mathbb{P}(R), \mathbb{P}(R)) := \mathrm{Aut}^+(\mathbb{P}(R)) \, .$$

(Standardorientierung). Sind allgemein orientierte vollständige Zusammenhangskomponenten M,N von $X(R)$, $Y(R)$ zu glatten Kurven X,Y über R vorgegeben, so heiße ein Isomorphismus $f : M \xrightarrow{\sim} N$ orientierungserhaltend, (oder orientierungstreu), wenn für ein - und damit jedes - Element $\varphi \in \mathrm{Iso}^+(\mathbb{P}(R)), M)$ die Komposition $f \circ \varphi$ Element von $\mathrm{Iso}^+(\mathbb{P}(R), N)$ ist. Anderenfalls nennen wir f orientierungsumkehrend.

Definition 2. Sei M eine orientierte vollständige Zusammenhangskomponente von $X(R)$ zu einer glatten Kurve X über R. Seien P,Q verschiedene Punkte auf M. Wir wählen einen orientierungstreuen Isomorphismus φ von $\mathbb{P}(R)$ auf M und definieren das offene Intervall]P,Q[wie folgt:

$$]P,Q[\; := \varphi(]\varphi^{-1}(P), \varphi^{-1}(Q)[) .$$

Weiter definieren wir die halboffenen Intervalle [P,Q[,]P,Q] und das abgeschlossene Intervall [P,Q] in völlig analoger Weise.

Aufgrund von §4 ist evident, daß die so definierten Intervalle nicht von der Wahl von φ abhängen, und daß gilt:

$$[P,Q[\; = \;]P,Q[\cup \{P\}, \;]P,Q] = \;]P,Q[\cup \{Q\},$$
$$[P,Q] = \;]P,Q[\cup \{P\} \cup \{Q\}.$$

Weiter überträgt sich alles, was in §4 über Intervalle und zusammenhängende semialgebraische Teilmengen von $\mathbb{P}(R)$ gesagt wurde, auf M. Zum Beispiel haben wir vermöge der Orientierung jede Menge $M \setminus \{p\}$ $(p \in M)$ total geordnet.

Insbesondere erhalten wir eine Beschreibung der Zusammenhangskomponenten von $Z(R)$ für eine beliebige glatte Kurve Z über R. Die Varietät Z besitzt eine kanonische Einbettung $Z \subset X$ in eine vollständige glatte Kurve X über R, und $S := X(R) \setminus Z(R)$ ist eine endliche Menge. Seien $M_1,\ldots,M_r$ die Zusammenhangskomponenten von $X(R)$. Wir orientieren jedes M_i. Jede Zusammenhangskomponente von $Z(R)$ ist in einer Menge M_i enthalten. Aus Satz 4.3.iv folgt

Theorem 5.3. Sei $S_1 := S \cap M_1$.

a) Ist S_1 leer oder einpunktig, so ist $M_1 \setminus S_1$ eine Zusammenhangskomponente von $Z(R)$.

b) Besteht S_1 aus r+1 Punkte $P_o,P_1,\ldots,P_r$ $(r \geq 1)$, und ist in der totalen Anordnung von $M_1 \setminus \{P_o\}$

$$P_1 < P_2 < \ldots < P_r,$$

so sind die in M_1 enthaltenen Zusammenhangskomponenten von $Z(R)$ die r+1 Intervalle

$$]P_o,P_1[,\ ]P_1,P_2[,\ \ldots,\ ]P_r,P_o[.$$

§ 6 Der Einheitskreis.

Wir betrachten jetzt den Raum $S(R)$ der reellen Punkte der affinen Varietät $S = S^1_R$ im zweidimensionalen affinen Standardraum $\mathbb{A}^2$, die durch die Gleichung $x^2+y^2 = 1$ definiert ist. Es ist also

$$S(R) = \{(x,y) \in R^2 \mid x^2+y^2 = 1\}.$$

Die stereographische Projektion $p : S(R) \to \mathbb{P}(R)$ mit Zentrum $(0,1)$, definiert durch

$$(6.1) \qquad p(x,y) = \begin{cases} (x : 1+y) & y \neq -1 \\ (1-y : x) & y \neq 1 \end{cases}$$

bildet den semialgebraischen Raum $S(R)$ isomorph auf die reelle projektive Gerade $\mathbb{P}(R)$ ab. Insbesondere ist $S(R)$ zusammenhängend und vollständig, und die in §5 gewonnenen Erkenntnisse lassen sich auf $S(R)$ anwenden. Wir orientieren $S(R)$ durch die Festsetzung, daß die stereographische Projektion p orientierungserhaltend ist. Damit sind für je zwei verschiedene Punkte P,Q auf S(R) die Intervalle]P,Q[, [P,Q[, etc. definiert, und für jeden Punkt $P \in S(R)$ ist die Menge $S(R) \setminus \{P\}$ total geordnet.

Im folgenden wählen wir in dem algebraischen Abschluß C von R eine Quadratwurzel $i = \sqrt{-1}$ fest aus und identifizieren den Standardraum R^2 mit C vermöge

$$(x,y) = x + i\,y .$$

Wir bezeichnen die Punkte von S(R) meist durch die zugehörigen Elemente von C. Der Einheitskreis S(R) ist eine Untergruppe der multiplikativen Gruppe $C^* = C \setminus \{0\}$ von C. Die Abbildung aufs Inverse

$$z = x + i\,y \mapsto \bar{z} := x - i\,y$$

ist ein Automorphismus des semialgebraischen Raumes S(R). Ebenso ist die Multiplikation $(z_1,z_2) \mapsto z_1 z_2$ eine semialgebraische Abbildung von $S(R) \times S(R)$ auf S(R). Somit ist S(R) eine "semialgebraische Gruppe" über R, in Wahrheit sogar eine "reell-algebraische Gruppe". Insbesondere ist für jeden Punkt a von S(R) die Abbildung

$$L(a) : z \mapsto a\,z$$

von S(R) nach S(R) ein semialgebraischer Automorphismus von S(R).

Es treten nun durchaus nichttriviale Fragen über den Zusammenhang zwischen der zirkularen Anordnung, d.h. der "Intervallstruktur" von S(R), und der Gruppenstruktur von S(R) auf. Zum Beispiel: Sind die Automorphismen L(a) alle orientierungstreu?

Um diese und andere Fragen zu lösen, müssen wir uns die zirkulare Anordnung genauer ansehen. Wenn es die Deutlichkeit erfordert, bezeichnen wir Intervalle auf S(R), $\mathbb{P}(R)$, R mit einem tiefgestellten Buchstaben S, bzw. $\mathbb{P}$, bzw. R. Wir führen weiter folgende Teilmengen von S(R) ein:

$$S_+ := \{(x,y) \in S(R) \mid y \geq 0\},$$

$$S_- := \{(x,y) \in S(R) \mid y \leq 0\},$$

$$S_l := \{(x,y) \in S(R) \mid x \leq 0\},$$

$$S_r := \{(x,y) \in S(R) \mid x \geq 0\}.$$

(l = "links", r = "rechts"), und bezeichnen der Reihe nach $S_+ \cap S_r$, $S_+ \cap S_l$, $S_- \cap S_l$, $S_- \cap S_r$ als ersten, zweiten, dritten und vierten Quadranten des Einheitskreises S(R). Schließlich führen wir in Anlehnung an den nicht vorhandenen Cosinus und Sinus auf S(R) zwei semialgebraische Funktionen ein:

$$c : S(R) \to [-1,1]_R,\ (x,y) \mapsto x.$$

$$s : S(R) \to [-1,1]_R,\ (x,y) \mapsto y.$$

Die Einschränkung von s auf S_l hat die Umkehrabbildung

$$y \mapsto (-\sqrt{1-y^2},\ y)$$

und ist somit ein semialgebraischer Isomorphismus von S_l auf $[-1,1]_R$. Ebenso ist die Einschränkung von s auf S_r ein semialgebraischer Isomorphismus von S_r auf $[-1,1]_R$, und die Einschränkungen von c auf S_+ und S_- sind auch semialgebraische Isomorphismen von S_+ bzw. S_- auf $[-1,1]_R$. Insbesondere sind die vier semialgebraischen Teilmengen S_l, S_r, S_+, S_- von S(R) vollständig und zusammenhängend, also abgeschlossene Intervalle von S(R).

Wir wollen für jedes dieser Intervalle Anfangspunkt und Endpunkt bestimmen.

Man liest aus den Formeln (6.1) für die stereographische Projektion ab:

$$p(1) = 1,\ p(i) = \infty,\ p(-1) = -1,\ p(-i) = 0;$$

$$p(S_l) \subset [\infty,0]_{\mathbb{P}},\ p(S_-) \subset [-1,1]_{\mathbb{P}}.$$

Weil p orientierungserhaltend ist, gilt:

$$p([i,-i]_S) = [\infty,0]_{\mathbb{P}},\ p([-1,1]_S) = [-1,1]_{\mathbb{P}}.$$

Daher ist

$$S_l \subset [i,-i]_S,\ S_- \subset [-1,1]_S.$$

Andererseits bildet s - wie jeder semialgebraische Isomorphismus - die Randpunkte von S_l auf die Randpunkte -1,1 von $[-1,1]_R$ ab. Somit hat S_l die Randpunkte i,-i. Ebenso sieht man mit Hilfe der Funktion c, daß S_- die Randpunkte 1,-1 hat. Es ist also

(6.2a) $S_l = [i,-i]_S,\ S_- = [-1,1]_S,$

und daher auch

(6.2b) $S_r = [-i,i]_S$, $S_+ = [1,-1]_S$.

Der Isomorphismus $s : S_l \xrightarrow{\sim} [-1,1]_R$ muß - letztlich aufgrund des Zwischenwertsatzes 3.1 - als Abbildung zwischen den total geordneten Mengen S_l und $[-1,1]_R$ streng isoton oder streng antiton sein. Weil $s(i) = 1$, $s(-i) = -1$ ist, muß s auf S_l also streng antiton sein. Ebenso sieht man, daß s auf S_r streng isoton ist, daß c auf S_- streng isoton ist, und daß c auf S_+ streng antiton ist. Damit haben wir ein gutes Verständnis der totalen Anordnungen auf den vier Mengen S_l, S_r, S_-, S_+ erzielt. Insbesondere sieht man sofort, daß die 4 Quadranten der Reihe nach die folgenden Intervalle sind:

(6.3) $S_+ \cap S_r = [1,i]_S$, $S_+ \cap S_l = [i,-1]_S$,

$S_- \cap S_l = [-1,-i]_S$, $S_- \cap S_r = [-i,1]_S$.

Die totale Anordnung auf jeder dieser 4 Mengen wird durch die folgende Tabelle beschrieben.

(6.4)

Quadrant	$P < Q$ wenn	$P < Q$ wenn
$S_+ \cap S_r$	$c(P) > c(Q)$	$s(P) < s(Q)$
$S_+ \cap S_l$	$c(P) > c(Q)$	$s(P) > s(Q)$
$S_- \cap S_l$	$c(P) < c(Q)$	$s(P) > s(Q)$
$S_- \cap S_r$	$c(P) < c(Q)$	$s(P) < s(Q)$

Jetzt können wir die oben aufgeworfene Frage über die Automorphismen $L(a) : z \mapsto az$ von $S(R)$ beantworten.

Satz 6.5. Für jedes $a \in S(R)$ ist $L(a)$ orientierungstreu.

Beweis. Für zwei Punkte $z = x+iy$, $w=u+iv$ aus dem 1. Quadranten hat zw den Imaginärteil $xv + yu \geq 0$, somit liegt zw in S_+. Es ist also

$$[1,i]\cdot[1,i] \subset [1,-1]_S.$$

Jetzt läßt sich die Orientierungstreue von $L(a)$ für einen Punkt $a = \alpha + i\beta$ aus dem ersten Quadranten ($\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$) wie folgt ein-

sehen. Apriori ist $a[1,i] = [a,ia]$ oder $= [ia,a]$ und $a[1,i] \subset [1,-1]_S$.
Der Punkt $ia^{\bullet} = -\beta + i\alpha$ liegt aber im zweiten Quadranten und somit gilt in der Totalordnung von $[1,-1]_S$ die Relation $a < ia$. Das Intervall $[ia,a]$ ist also nicht in $[1,-1]_S$ enthalten, und es muß $a\cdot[1,i] = [a,ia]$ sein. Weil $L(a)$ Anfangspunkt auf Anfangspunkt und Endpunkt auf Endpunkt abbildet, ist $L(a)$ orientierungstreu. (N.B. Man braucht zum Nachweis der Orientierungstreue nur das Bild eines Intervalles zu betrachten!)

Insbesondere $(a=i)$ ist $i\cdot[1,i] = [i,-1]$. Jeder Punkt a aus dem zweiten Quadranten hat also die Gestalt $a = ib$ mit b aus dem ersten Quadranten (wie man auch leicht ab ovo sieht), und somit ist auch $L(a) = L(i)L(b)$ für jedes a aus dem zweiten Quadranten orientierungstreu. Schließlich liegt für jedes $a \in S_-$ das Inverse $\bar{a}$ in S_+ und somit ist $L(a) = L(\bar{a})^{-1}$ auch für diese Punkte a orientierungstreu.

q.e.d.

Andererseits bildet der Automorphismus $z \mapsto \bar{z}$ das Intervall $[1,-1]_S = S_+$ auf das Intervall $[-1,1]_S = S_-$, 1 auf 1 und -1 auf -1 ab.

<u>Zusatz 6.6.</u> Der Automorphismus $z \mapsto \bar{z}$ von $S(R)$ ist orientierungsumkehrend.

Wir wollen jetzt für jede natürliche Zahl $n > 1$ die Untergruppe

$$\mu_n(C) = \{z \in C \mid z^n = 1\}$$

der n-ten Einheitswurzeln von $S(R)$ studieren. Bekanntlich besteht $\mu_n(C)$ aus n Elementen. Wir numerieren die von 1 verschiedenen n-ten Einheitswurzeln gemäß der totalen Anordnung von $S(R) \setminus \{1\}$,

$$\varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \ldots < \varepsilon_{n-1},$$

und setzen $\varepsilon_o := 1$. Weiter setzen wir für jede ganze Zahl r fest: $\varepsilon_r := \varepsilon_j$, mit $0 \le j < n$, $j \equiv r \bmod n$.

<u>Satz 6.7.</u> Für jedes $r \in \mathbb{Z}$ ist $\varepsilon_r = \varepsilon_1^r$.

<u>Beweis.</u> Nach Theorem 5.3 zerfällt $S(R) \setminus \mu_n(C)$ in die Zusammenhangskomponenten

$$]\varepsilon_o,\varepsilon_1[,\ \ldots,\ ]\varepsilon_{n-1},\varepsilon_o[.$$

Somit bildet $L(\varepsilon_1)$ jedes Intervall $]\varepsilon_j,\varepsilon_{j+1}[$ auf ein Intervall $]\varepsilon_k,\varepsilon_{k+1}[$ ab, also auch $[\varepsilon_j,\varepsilon_{j+1}]$ auf $[\varepsilon_k,\varepsilon_{k+1}]$. Nach Satz 6.5 ist diese Abbildung streng isoton. Wir sehen also: Ist $\varepsilon_1\varepsilon_j = \varepsilon_k$, so ist $\varepsilon_1\varepsilon_{j+1} = \varepsilon_{k+1}$. Weil $\varepsilon_1\varepsilon_o = \varepsilon_1$ ist, folgt nun der Reihe nach:

$$\varepsilon_1\varepsilon_1 = \varepsilon_2,\ \varepsilon_1\varepsilon_2 = \varepsilon_3,\ \ldots,\ \varepsilon_1\varepsilon_{n-1} = \varepsilon_o,$$

und damit der Satz.

q.e.d.

<u>Bemerkung</u>. Wir haben im Falle der Charakteristik Null zugleich einen neuen Beweis der wohlbekannten Tatsache gefunden, daß die Einheitswurzelgruppe $\mu_n(C)$ eines jeden (algebraisch abgeschlossenen) Körpers C zyklisch ist.

Wir bezeichnen ab jetzt die obige, durch die Wahl des Körpers R in C und die Wahl von $\sqrt{-1}$ ausgezeichnete n-te Einheitswurzel ε_1 mit ζ_n.

<u>Zusatz 6.8.</u> ζ_n ist dasjenige Element von $\mu_n(C) \setminus \{1\}$, welches in S_+ liegt und von allen in S_+ gelegenen Einheitswurzeln $\neq 1$ den kleinsten euklidischen Abstand zu 1 hat.

<u>Beweis</u>. Im Falle $n = 2$ ist nichts zu zeigen. Sei jetzt $n \geq 3$. Dann ist $\zeta_n = \varepsilon_1$ von $\zeta_n^{-1} = \varepsilon_{n-1}$ verschieden. Wäre $\varepsilon_1 \in S_-$, so wäre $\varepsilon_{n-1} \in S_+$, also würde das Intervall $]\varepsilon_{n-1},\varepsilon_1[$ den Punkt 1 nicht enthalten, wie aus unserer obigen expliziten Beschreibung der zirkularen Anordnung auf S(R) sofort folgt. Es ist aber $1 = \varepsilon_o \in\ ]\varepsilon_{n-1},\varepsilon_1[$. Daher ist $\zeta_n \in S_+$.

Ein Punkt $z = x + iy \in S_+$ hat von 1 das euklidische Abstandsquadrat $(1-x)^2 + y^2 = 2(1-x)$. Die Funktion $2(1-c)$ ist auf $S_+ = [1,-1]_S$ streng isoton, weil c streng antiton ist. Damit ist der Zusatz 6.8 evident.

<u>Satz 6.9</u>. Für beliebige natürliche Zahlen $r > 1$, $n > 1$ gilt

$$\zeta_{nr}^r = \zeta_n.$$

<u>Beweis</u>. In der total geordneten Menge $S(R) \setminus \{1\}$ gilt:

$$\zeta_{nr} < \zeta_{nr}^2 < \ldots < \zeta_{nr}^{nr-1},$$

insbesondere also

$$\zeta_{nr}^r < \zeta_{nr}^{2r} < \ldots < \zeta_{nr}^{(n-1)r}.$$

Das sind n-1 von 1 verschiedene n-te Einheitswurzeln, also sämtliche von 1 verschiedenen n-ten Einheitswurzeln. Weil ζ_{nr}^r die kleinste unter ihnen ist, muß sie mit ζ_n übereinstimmen.

q.e.d.

Jetzt können wir zeigen, daß für jedes natürliche n der Gruppenhomomorphismus $z \mapsto z^n$ von $S(R)$ in sich "streng monoton wachsend im Sinne zirkularer Anordnung" ist. Genauer gilt

Satz 6.10. Für jeden Punkt $a \in S(R)$ nimmt die Funktion $z \mapsto z^n$ auf $]a,a\zeta_n[$ nicht den Wert a^n an. Die somit definierte Abbildung

$$]a, a\zeta_n[\rightarrow S(R) \setminus \{a^n\},\ z \mapsto z^n,$$

ist ein isotoner semialgebraischer Isomorphismus.

Beweis. Indem wir anstelle von $\varphi_n :]a, a\zeta_n[\rightarrow S(R),\ z \mapsto z^n$ die Abbildung

$$L(a^{-n})\circ\varphi_n\circ L(a) :]1,\zeta_n[\rightarrow S(R),\ z \mapsto z^n$$

betrachten, ziehen wir uns auf den Fall $a = 1$ zurück. Weil das Intervall $]1,\zeta_n[$ keine n-ten Einheitswurzeln enthält, haben wir also eine wohldefinierte semialgebraische Abbildung

$$\psi_n :]1,\zeta_n[\rightarrow S(R) \setminus \{1\},\ z \mapsto z^n.$$

Weil der Körper C algebraisch abgeschlossen ist, ist die Abbildung $z \mapsto z^n$ von $S(R)$ nach $S(R)$ surjektiv. Also ist auch ψ_n surjektiv. Da jede Translation $L(\zeta_n^k)$ zu einer Einheitswurzel $\zeta_n^k \neq 1$ das Intervall $]1,\zeta_n[$ in ein zu $]1,\zeta_n[$ fremdes Intervall $]\zeta_n^k,\zeta_n^{k+1}[$ überführt, ist ψ_n auch injektiv. Die Fortsetzung

$$[1,\zeta_n] \twoheadrightarrow S(R),\ z \mapsto z^n$$

von ψ_n ist eigentlich, da $[1,\zeta_n]$ vollständig ist. Also ist auch ψ_n eigentlich, und somit ein semialgebraischer Isomorphismus. ψ_n muß streng isoton oder streng antiton sein.

Wir betrachten die Punkte ζ_{4n}, ζ_{4n}^2. Nach dem vorigen Satz 6.9 ist $\zeta_n = \zeta_{4n}^4$. Somit liegen ζ_{4n}, ζ_{4n}^2 in $]1,\zeta_n[$ und es ist $\zeta_{4n} < \zeta_{4n}^2$. Unter ψ_n haben diese Punkte die Bilder $\zeta_4 = i$ und $\zeta_4^2 = -1$ und in $S(R) \setminus \{1\}$ ist $i < -1$. Also ist ψ_n streng isoton.

q.e.d.

Literatur

[C] P.J. Cohen, Decision procedures for real and p-adic fields, Comm. Pure Appl. Math. 22, 131-151 (1969).

[Cs] M. Coste, Ensembles semi-algebriques,

[DK$_1$] H. Delfs, M. Knebusch, Semialgebraic topology over a real closed field I: Paths and components in the set of rational points of an algebraic variety, Math. Z. 177, 107-129 (1981).

[DK$_2$] H. Delfs, M. Knebusch, Semialgebraic topology over a real closed field II: Basic theory of semialgebraic spaces, Math. Z. 178, 175-213 (1981).

[DK$_3$] H. Delfs, M. Knebusch, On the homology of algebraic varieties over real closed fields, erscheint demnächst, preprint Univ. Regensburg 1981.

[G] W.D. Geyer, Dualität bei abelschen Varietäten über reell abgeschlossenen Körpern, J. reine angew. Math. 293/294, 62-66 (1977).

[K] M. Knebusch, On algebraic curves over real closed fields I, II. Math.Z. 150, 49-70; 151, 189-205 (1976).

Adresse: Hans Delfs, Manfred Knebusch
Fakultät für Mathematik
Universität
D - 8400 Regensburg