

Die Singularitäten  
einer generisch gewählten  
impliziten Differentialgleichung  
erster Ordnung.

Diplomarbeit

von

Diethard Michaelis

Universität Regensburg

1976

Inhalt:

Literatur	2
§0 Überblick	3
§1 Die sichtbare Kontur einer Fläche	6
§2 Der singuläre Ort einer impliziten Differentialgleichung	15
§3 Die geliftete implizite Differentialgleichung	20
§4 Lokale Transformationen einer impliziten Differentialgleichung	25
§5 Lösungen in der Nähe eines regulären Faltenpunktes	33
§6 Lösungen in der Nähe eines singulären Faltenpunktes	39
§7 Lösungen in der Nähe eines Kuspenspunktes	63

Literatur:

- [1] R. Thom: Sur les Equations Différentielles multiformes et leur intégrales singuliers.
- [2] Golubitsky - Guillemin: Stable Mappings and their Singularities; Springer 1973
- [3] Th. Bröcker: Differentiable Germs and Catastrophes; Cambridge University Press 1975
- [4] Th. Bröcker: Partielle Differentialgleichungen; Regensburger Trichter Band 11
- [5] Bröcker - Jänich: Einführung in die Differentialtopologie; Springer 1973
- [6] Coddington - Levinson: Theory of Ordinary Differential Equations; Mc Graw Hill 1955
- [7] P. Hartman: A Lemma in the Theory of Structural Stability of Ordinary Differential Equations; Proc.Am.Math.Soc.11,S.610
- [8] P. Hartman: On the Local Linearisation of Differential Equations; Proc.Am.Math.Soc. 14, S.568

§0 Überblick

Es sollen Differentialgleichungen der Form

$$f(x,y,y') = 0, f \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$$

betrachtet werden. Generisch beschreibt eine solche Gleichung eine Fläche  $S$  im  $\mathbb{R}^3$ . Dort, wo die kanonische Projektion

$$p: (x,y,z) \longmapsto (x,y)$$

von  $S$  auf die  $(x,y)$ -Ebene regulär ist, kann man die Differentialgleichung differenzierbar nach  $y'$  auflösen und erhält eine explizite Differentialgleichung

$$y' = g(x,y)$$

mit ihrer dazugehörigen Lösungsschar.

Interessant ist nun das Verhalten dieser Schar bei Annäherung an den singulären Ort der Projektion  $p$ . Hierzu ist als erstes die Fläche  $S$  und in ihr die Menge  $C$  der singulären Punkte dieser Projektion zu untersuchen. Für  $S$  erhält man als Ergebnis, analog zu der Charakterisierung der Abbildungen von der Ebene in die Ebene von H. Whitney [3]:

Bezüglich der kanonischen Projektion  $p$  hat  $S$  für generisches  $f$  an singulären Punkten nur Falten und Kuspunkte, und die singuläre Menge  $C$  ist eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit in  $S$ .

Anschließend wird das Richtungsfeld der impliziten Differentialgleichung am singulären Ort  $p(C)$  untersucht. Hierbei zeigt sich, daß die Lösungen generisch transversal auf den singulären Ort treffen (von einer diskreten Untermenge in  $p(C)$  abgesehen).

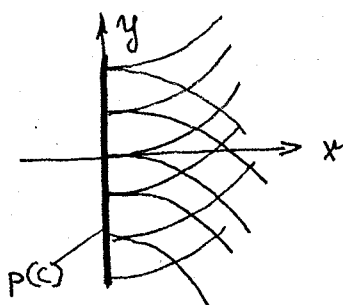
Weiter kann man lokal die Lösung der impliziten Differentialgleichung für generisches  $f$  auf das Lösen eines autonomen zweidimensionalen Systems zurückführen, das man erhält, wenn man das zu

$$f(x,y,y') = 0$$

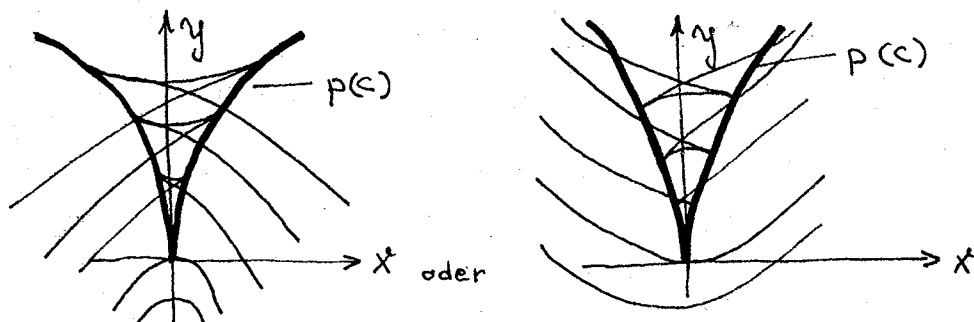
gehörige Hamiltonsche System

$$\mathcal{H}_f \begin{cases} \dot{x} = f_z \\ \dot{y} = z f_z \\ \dot{z} = -f_x - z f_y \end{cases} \quad (y' =: z)$$

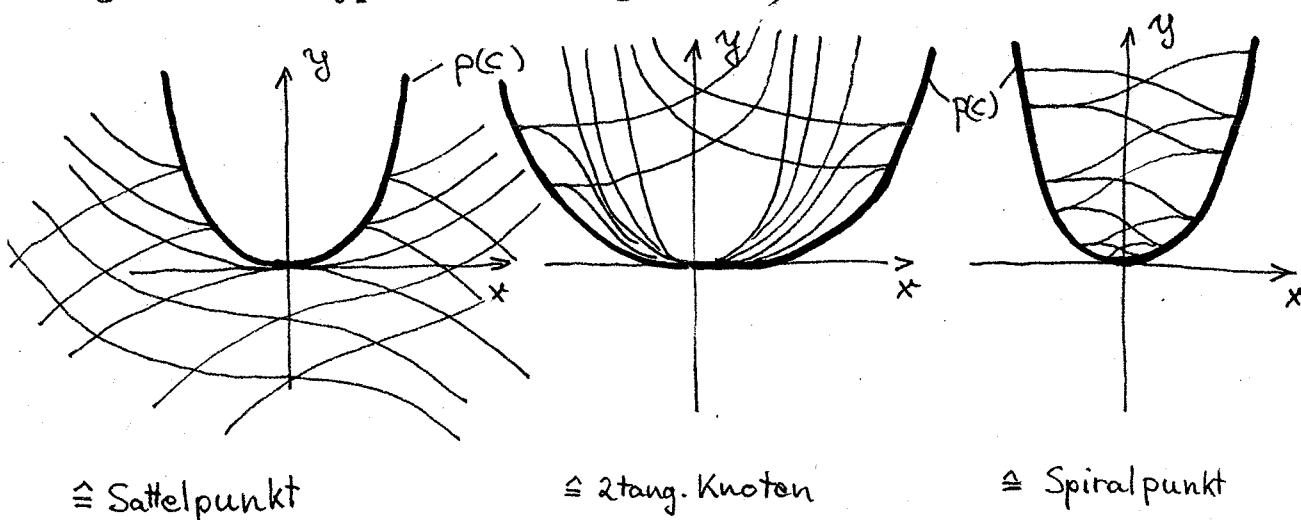
auf  $S$  eingeschränkt ( $f$  ist erstes Integral von  $\mathcal{H}_f$ ). Generisch treten für dieses zweidimensionale System als Singularitäten nur Spirelpunkt, Sattelpunkt und zweitangenter Knoten auf, und diese natürlich nur auf  $C$ . Aus der Betrachtung dieses Systems erhält man dann Aussagen über die Geometrie der Lösungsschar von  $f(x, y, y') = 0$ . U.a. ist diese Lösungsschar am singulären Ort  $p(C)$  (von einer diskreten Menge, gegeben durch die Singularitäten des Systems  $\mathcal{H}_f|_S$  und die Kuspunkte, abgesehen) lokal  $C^1$ -diffeomorph zu einer Schar parallelverschobener Neilscher Parabeln mit Umkehrpunkten auf der  $y$ -Achse:



Das Verhalten bei den Singularitäten von  $\mathcal{H}_f|_S$  und an den Kuspunkten bekommt man ebenfalls aus der Geometrie von  $S$  und dem Phasenportrait von  $\mathcal{H}_f|_S$  durch Projektion mit  $p$ . An den Kuspunkten erhält man ein Kaustik-artiges Verhalten:



Und zu den Singularitäten von  $\mathcal{H}_f|_S$  gehören im Wesentlichen folgende drei Typen von Lösungsscharen:



Zur Schreibweise:

Für Jets, Jet-Bündel etc. wird folgende Notation verwandt:

k-Jet-Bündel der Abbildungen:  $X \longrightarrow Y : J^k(X, Y)$

k-Jet von  $f: X \longrightarrow Y : j^k f: X \longrightarrow J^k(X, Y)$

$$\Delta X^s := \{(x, x, \dots, x) \in X^s \mid x \in X\}$$

$$X^{(s)} := X^s - \Delta X^s$$

s-faches k-Jet-Bündel:  $J_S^k(X, Y)$

s-facher k-Jet:  $j_S^k f: X^{(s)} \longrightarrow J_S^k(X, Y)$

Außerdem bezeichne  $0^k$  die Null im  $\mathbb{R}^k$ .

Die Transversalitätssätze werden in der in [2] angegebenen Form angewandt.

Weiter sei für

$$f: \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f_{x_i}^{\uparrow} x_j^s := \frac{\partial^{\uparrow+s} f}{\partial^{\uparrow} x_i \partial^s x_j} \quad \text{us.w}$$

Der Einfachheit halber werden auf  $J^k(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$  bzw.  $J_S^k(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$  Koordinaten wie folgt eingeführt und benannt:

$$j^k f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow J^k(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{m^k} \quad m^k := \dim J^k(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$$

$$\xi \longmapsto (\xi, f(\xi), f_x(\xi), f_y(\xi), f_z(\xi), f_{xx}(\xi), f_{xy}(\xi), \dots)$$

Analog zu dieser Darstellung werden die Koordinaten in  $J^k(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$  dann mit

$$J^k(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) \ni (\xi, f, f_x, f_y, f_z, f_{xx}, f_{xy}, f_{xz}, f_{yy}, f_{yz}, f_{zz}, \dots)$$

benannt. Ebenso:

$$j_S^k f: (\mathbb{R}^3)^{(s)} \longrightarrow J_S^k(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{m_s^k} \quad m_s^k := \dim J_S^k(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$$

$$(\xi_i)_{i=1}^s \longmapsto (\xi_i, f(\xi_i), f_x(\xi_i), f_y(\xi_i), f_z(\xi_i), \dots)_{i=1}^s$$

Die Koordinaten werden mit

$$J_S^k(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) \ni (\xi_i, f^i, f_x^i, f_y^i, f_z^i, f_{xx}^i, f_{xy}^i, f_{xz}^i, f_{yy}^i, f_{yz}^i, f_{zz}^i, \dots)_{i=1}^s$$

bezeichnet.

### §1 Die sichtbare Kontur einer Fläche

Sei  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $C^\infty$ -Funktion. Dann ist für residual fast alle  $f$   $\text{grad}(f)$  auf  $f^{-1}(0)$  nirgends Null.

Bew.: Betrachte den 1-Jet von  $f$

$$j^1 f: \mathbb{R}^3 \rightarrow J^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$$

$\xi \mapsto (\xi, f(\xi), \text{grad } f(\xi))$ . Die Behauptung besagt gerade, daß für den 1-Jet von  $f$  nie  $f(\xi)$  und  $\text{grad } f(\xi)$  gleichzeitig Null sein dürfen, d.h.

$$j^1 f(\mathbb{R}^3) \cap \{(\xi, f, f_x, f_y, f_z) \mid f=f_x=f_y=f_z=0\} = \emptyset.$$

Da  $\text{kodim} \{f=f_x=f_y=f_z=0\} = 4 > 3 = \dim \mathbb{R}^3$  ist dies äquivalent zu  $j^1 f \not\cap \{f=f_x=f_y=f_z=0\}$ , und damit folgt die Behauptung aus dem Transversalitätssatz. ✓

Für solche  $f$  ist dann  $f^{-1}(0) =: S$  eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit  $\subset \mathbb{R}^3$ . Sei

$$p: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z) \mapsto (x, y)$$

die kanonische Projektion. Die Menge  $C$  der kritischen Punkte von  $p|_S$  ist dann gegeben durch

$$C = \underline{f^{-1}(0) \cap f_z^{-1}(0)}.$$

Der singuläre Ort  $p(C)$  von  $p|_S$  ist dann die sichtbare Kontur von  $S$ , wenn man  $S$  in  $z$ -Richtung betrachtet.

Wie oben ist natürlich auch  $f_z^{-1}(0)$  für residual fast alle  $f$  eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^3$ . Die Menge  $C$  wird also "im Allgemeinen" eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit von  $S \subset \mathbb{R}^3$  sein:

Satz 1: Für residual fast alle  $f$  sind  $f^{-1}(0)$  und  $f_z^{-1}(0)$  transversale Untermannigfaltigkeiten des  $\mathbb{R}^3$ .

Insbesondere ist ihr Schnitt  $C$  eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit in  $S \subset \mathbb{R}^3$

Bew.: Daß  $f^{-1}(0)$  und  $f_z^{-1}(0)$  transversal sind, bedeutet gerade, daß die zweidimensionalen Tangentialräume von  $f^{-1}(0)$  und  $f_z^{-1}(0)$  auf  $C$  nirgends gleich sind. Das heißt aber, daß die darauf senkrechten Gradienten von  $f$  bzw.  $f_z$  auf  $C$  nirgends parallel sind, oder äquivalent, daß ihr Vektorprodukt

$\text{grad } f \times \text{grad } f_z$  auf  $C$  nirgends verschwindet. Betrachte nun

$$j^2 f: \mathbb{R}^3 \rightarrow J^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{13}$$

Sei

$$g: \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^4, (f, \text{grad } f, \text{grad } f_z) \mapsto (f_z, \text{grad } f \times \text{grad } f_z)$$

wobei  $\mathbb{R}^6$  und  $\mathbb{R}^4$  als die entsprechenden Unterräume von  $J^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$  zu verstehen sind, und  $\text{grad } f := (f_x, f_y, f_z)$  sowie

$$\text{grad } f_z := (f_{zx}, f_{zy}, f_{zz})$$

Nun ist nach Definition von  $C$  und  $g$   $\text{grad } f(\xi) \times \text{grad } f_z(\xi)$  auf  $C$  genau dann Null, wenn  $f(\xi)=0$  und  $g(\text{grad } f(\xi), \text{grad } f_z(\xi))=0$ , d.h. wenn  $j^2 f$  die Menge

$$W := \left\{ (\xi, f, f_x, f_y, \dots) \in J^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) \mid f=0, g(\text{grad } f, \text{grad } f_z)=0 \right\} \cap \left\{ (\xi, f, \dots) \in J^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) \mid f=0, f_z=0, (f_x, f_y) \neq 0 \right\}$$

nicht trifft, denn der Fall daß auf  $C$   $f$  und  $\text{grad } f$  gleichzeitig verschwinden, braucht nicht betrachtet zu werden, da er für residual fast alle  $f$  nicht auftritt (s.o.), also kann man mit  $\{f=0, f_z=0, (f_x, f_y) \neq 0\}$  schneiden.

Nun ist  $g: \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^4$  gerade die Abbildung

$$(f_x, f_y, f_z, f_{zx}, f_{zy}, f_{zz}) \mapsto (f_z, f_y f_{zz} - f_z f_{zy}, f_z f_{zx} - f_x f_{zz}, f_x f_{zy} - f_y f_{zx})$$

Die Jacobische von  $g$  ist also:

$$Dg = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f_{zz} & -f_{zy} & 0 & -f_z & f_y \\ -f_{zz} & 0 & f_{zx} & f_z & 0 & -f_x \\ f_{zy} & -f_{zx} & 0 & -f_y & f_x & 0 \end{pmatrix}$$

mit den Unterdeterminanten

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ f_{zx} & 0 & -f_x \\ 0 & f_x & 0 \end{vmatrix} = f_x^2 \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -f_{zy} & 0 & f_y \\ 0 & -f_y & 0 \end{vmatrix} = f_y^2.$$

Da  $(f_x, f_y) \neq 0$  ist, ist mindestens eine davon nicht Null, also ist der Rang von  $Dg$  mindestens 3.  $W$  ist damit als algebraische Menge disjunkte Vereinigung von Mannigfaltigkeiten der Kodimension  $\geq 3+1 = 4 > 3 = \dim \mathbb{R}^3$ . Also ist  $j^2 f(\mathbb{R}^3) \cap W = \emptyset \Leftrightarrow j^2 f \not\subset W$ , und die Behauptung folgt aus dem Transversalitätssatz. ✓ Daß  $C$  generisch eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^3$  ist sieht man auch einfacher:

Betrachte im 1-Jet-Bündel  $J^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$  die Untermenge  $\{f=0, f_z=0\}$ .



Sie ist offenbar Untermannigfaltigkeit der Kodimension 2 und nach dem Transversalitätssatz ist für residual fast alle  $f$   $j^1 f$  transversal dazu, d.h.  $(j^1 f)^{-1}(\{f=0, f_z=0\})$  ist Untermannigfaltigkeit der Kodimension 2 im  $\mathbb{R}^3$ , und andererseits ist aber gerade  $C = (j^1 f)^{-1}(\{f=0, f_z=0\})$ . ✓

Interessant ist nun natürlich die Gestalt von  $S$  in der Nähe von  $C$ . Hierüber geben die beiden folgenden Sätze Auskunft. Sie besagen, daß die Menge  $C$  der kritischen Punkte von  $p|S$  generisch nur aus Kuspen- und Faltenpunkten besteht.

Satz 2: Für residual fast alle  $f$  gilt auf  $C$  entweder:

a)  $f_{zz} \neq 0$

oder:

b)  $f_{zz} = 0, f_{zzz} \neq 0$ ; dies jedoch nur auf isolierten Punkten von  $C$ .

Bew.: Die Behauptung besagt gerade, daß der 3-Jet von  $f$  die Untermannigfaltigkeit

$$W := \{(\xi, f, f_x, f_y, \dots) \in J^3(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) \mid f = f_z = f_{zz} = f_{zzz} = 0\}$$

nicht trifft. Wegen  $\text{kodim } W = 4 > 3 = \dim \mathbb{R}^3$  ist dies äquivalent zu  $j^3 f \bar{\cap} W$  und die Behauptung folgt bis auf die Isoliertheitsaussage in b) aus dem Transversalitätssatz.

Zur Isoliertheit von Punkten mit  $f_{zz}=0$  auf  $C$ :

Betrachte im 3-Jet-Raum die Untermannigfaltigkeit

$$W := \{(\xi, f, f_x, \dots) \in J^3(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) \mid f = f_z = f_{zz} = 0\}$$

Offenbar ist  $\text{kodim } W = 3$  und für residual fast alle  $f$  ist nach dem Transversalitätssatz  $j^3 f \bar{\cap} W$ , also ist  $(j^3 f)^{-1}(W)$  Untermannigfaltigkeit der Kodimension 3 im  $\mathbb{R}^3$ , d.h. isoliert. Andererseits sind das aber gerade die Punkte auf  $C$  mit  $f_{zz}=0$ . ✓

Um das Ergebnis von Satz 2 geometrisch interpretieren zu können, muß man für die Situationen a) und b)  $C^\infty$ -äquivalente lokale Modelle von

$$(S, (x_0, y_0, z_0)) \xrightarrow{p|_S} (\mathbb{R}^2, (x_0, y_0))$$

angeben, d.h. offene Mengen  $U, V \subset \mathbb{R}^2$  (bzw. Mengenkeime), lokale Diffeomorphismen  $h: S \rightarrow U$ ,  $k: \mathbb{R}^2 \rightarrow V$  und eine lokale  $C^\infty$ -Abbildung  $q: U \rightarrow V$ , sodaß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{p|_S} & \mathbb{R}^2 \\ h \downarrow & & \downarrow k \\ U & \xrightarrow{q} & V \end{array}$$

lokal um  $(x_0, y_0, z_0) \in S$  kommutiert. Zusätzlich soll aber das

Modell  $U \xrightarrow{q} V$  ebenfalls von der Gestalt

$$g^{-1}(0) \xrightarrow{p|_{g^{-1}(0)}} \mathbb{R}^2, \quad g \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$$

sein, und  $g$  soll sinnvollerweise aus  $f$  durch Koordinatentransformation im  $\mathbb{R}^3$  und Multiplikation mit einer Einheit hervorgehen. Man hat also bestimmte lokale Modellfunktionen  $g$  um einen Punkt  $(\xi_0, \eta_0, \zeta_0) \in \mathbb{R}^3$  für die Situationen a) und b), sowie für jedes  $f$  lokale Diffeomorphismen

$$\varphi: (\mathbb{R}^3, (\xi_0, \eta_0, \zeta_0)) \rightarrow (\mathbb{R}^3, (x_0, y_0, z_0))$$

$$\tilde{\varphi}: (\mathbb{R}^2, (\xi_0, \eta_0)) \rightarrow (\mathbb{R}^2, (x_0, y_0))$$

und eine Einheit

$$\varepsilon: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

anzugeben, sodaß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & \begin{array}{c} \mathbb{R} \\ \times \\ \mathbb{R} \end{array} & \\ & \uparrow \varepsilon & \\ & \mathbb{R}^3 & \\ \begin{array}{c} \text{mult.} \\ \longrightarrow \end{array} & & \mathbb{R} \\ \begin{array}{c} \downarrow g \\ (\mathbb{R}^3, (\xi_0, \eta_0, \zeta_0)) \end{array} & \xrightarrow{\varphi} & (\mathbb{R}^3, (x_0, y_0, z_0)) \\ \begin{array}{c} \downarrow p \\ (\mathbb{R}^2, (\xi_0, \eta_0)) \end{array} & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & (\mathbb{R}^2, (x_0, y_0)) \\ & & \begin{array}{c} \uparrow f \\ \mathbb{R} \\ \downarrow p \end{array} \end{array}$$

kommutiert, denn mit  $\varphi$  ist auch  $\varphi|_{g^{-1}(0)}: g^{-1}(0) \rightarrow f^{-1}(0) = \varphi(g^{-1}(0))$  ein Diffeomorphismus.

Bemerkung: Die Kommutativität von  $\star$  ist äquivalent dazu, daß:

- i)  $g \circ \varepsilon = f \circ \varphi$   
 ii)  $\varphi(\xi, \eta, \zeta) = (\tilde{\varphi}(\xi, \eta), \psi(\xi, \eta, \zeta))$ , wobei  
 $\psi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\psi_z(\xi_0, \eta_0, \zeta_0) \neq 0$ .

Bew.: i) klar; ii)  $\tilde{\varphi} \circ p = p \circ \varphi$  ist äquivalent zu:

$$(\tilde{\varphi}_1(\xi, \eta), \tilde{\varphi}_2(\xi, \eta)) = (\varphi_1(\xi, \eta, \zeta), \varphi_2(\xi, \eta, \zeta)); \text{ und } \psi_z \neq 0$$

besagt gerade, daß  $\varphi$  ein Diffeomorphismus ist.  $\checkmark$

Definition: Zwei lokale Gleichungen  $(f(x, y, z) = 0; (x_0, y_0, z_0))$   
 und  $(g(\xi, \eta, \zeta) = 0; (\xi_0, \eta_0, \zeta_0))$  ( $f, g \in C^k(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ ,  $k \leq \infty$ )  
 heißen geometrisch  $C^k$ -äquivalent, falls es  $C^k$ -Ab-  
 bildungen  $\varphi, \tilde{\varphi}, \varepsilon$  wie oben gibt, sodaß das Diagramm  $\star$   
 kommutiert.

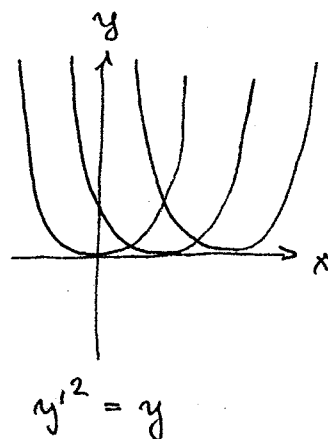
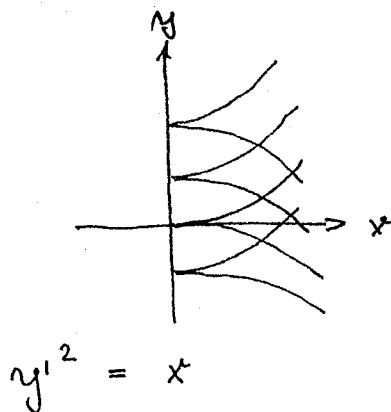
Bemerkung: Dies ist offenbar eine Äquivalenzrelation, die mit  
 der Geometrie von

$$f^{-1}(0) \xrightarrow{p} \mathbb{R}^2$$

verträglich ist, i.A. jedoch nicht mit der Geometrie  
 der Lösungen von  $f(x, y, y') = 0$ , wie folgendes  
 Beispiel zeigt:

$$\varphi: (x, y, z) \rightarrow (y, x, z); \quad \varepsilon = 1; \quad f(x, y, z) = z^2 - x.$$

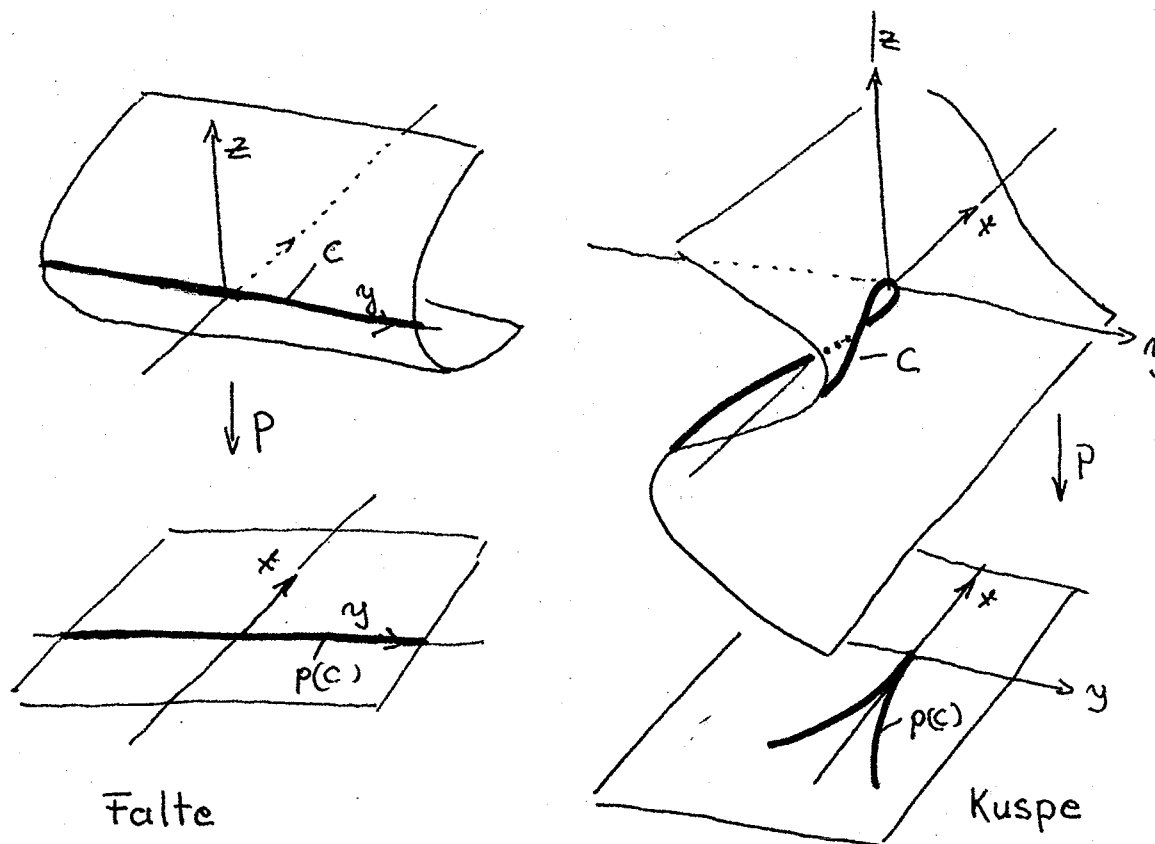
Dann ist  $(f \circ \varphi)(x, y, z) = z^2 - y$ , und die zu beiden Gleichungen  
 gehörigen Differentialgleichungen haben wesentlich verschiede-  
 nes Lösungsverhalten:



Satz 3: Für residual fast alle  $f$  gilt:

- a) Die Punkte von  $C$  mit  $f_{zz} \neq 0$  sind Faltenpunkte,  
d.h.  $f$  ist lokal um diese Punkte geometrisch  
 $C^\infty$ -äquivalent zu  $z^2 + x$  um Null.
- b) Die Punkte von  $C$  mit  $f_{zz} = 0, f_{zzz} \neq 0$  sind  
Kuspenpunkte, d.h.  $f$  ist lokal um diese Punkte  
geometrisch  $C^\infty$ -äquivalent zu  $z^3 - yz - x$  um Null.

Bemerkung: Das Bild einer Falte unter  $p$  ist natürlich ein  
reguläres  $C^\infty$ -Kurvenstück im  $\mathbb{R}^2$ , da  $p|_C$  dort regu-  
lär ist. Das Bild der Kuspe ist eine Neilsche Pa-  
rabel, hat also in der Projektion des Kuspenpunk-  
tes einen Umkehrpunkt.



Bew.: a) Nach dem Vorbereitungssatz von Weierstrass-Malgrange  
kann man  $f$  (nach Translation in den Ursprung) in der

Form  $f(x,y,z) = \varepsilon(x,y,z)[z^2 + a_2(x,y)z + a_1(x,y)]$   
mit  $\varepsilon$  Einheit,  $a_i \in \mathcal{M}(2)$   $i=1,2$

schreiben, d.h. oBdA kann man  $f$  in der Form

$$z^2 + a_2(x,y)z + a_1(x,y) =: g(x,y,z)$$

annehmen. Wähle nun folgende Transformation:

- 1.7 -

$$\begin{aligned}x &= x \\y &= y \\z &= z + a_2(x, y)/2\end{aligned}$$

Sie erfüllt offenbar die in der Bemerkung 1.5 oben gefundene Bedingung und führt  $f$  in

$$\zeta^2 - a_2(x, y)^2/4 + a_1(x, y)$$

über. Für residual fast alle  $f$  ist  $\text{grad } f$  auf  $S$  nirgends Null, also auch  $\text{grad } g$  auf  $S$  nirgends Null, denn:

$f = \xi g \Rightarrow (\text{grad } f)|_S = ((\text{grad } \xi)g)|_S + (\xi(\text{grad } g))|_S = (\xi(\text{grad } g))|_S$ ,  
weil  $g|_S = 0$ . Wegen  $g_z(0) = 0$  ist damit insbesondere

$$\left(\frac{\partial a_1}{\partial x}, \frac{\partial a_1}{\partial y}\right)(0) \neq 0.$$

OBdA sei daher  $\partial a_1/\partial x \neq 0$  in unserem Fall. Wähle nun die Transformation:

$$\begin{aligned}\xi &= -a_2(x, y)^2/4 + a_1(x, y) \\y &= y \\z &= z\end{aligned}$$

Auch sie erfüllt oben zitierte Bedingung und transformiert  $f$  in:

$$\underline{\zeta^2 + \xi} \quad \checkmark$$

b) Wie in a) hat man nach dem Vorbereitungssatz von Weierstrass-Malgrange  $f$  oBdA in der Form:

$$z^3 + a_1(x, y)z^2 + a_2(x, y)z + a_3(x, y); \quad a_i \in \mathcal{M}(2) \quad i=1, 2, 3$$

Transformiert man nun

$$\begin{aligned}x &= x \\y &= y \\z &= z + a_3(x, y)/3\end{aligned}$$

so erhält man statt  $f$ :

$$\zeta^3 + b_2(x, y)\zeta + b_1(x, y) =: g(x, y, \zeta); \quad b_i \in \mathcal{M}(2) \quad i=1, 2$$

Für residual fast alle  $f$  gilt Satz 1, also oBdA auch hier, denn Koordinatenwechsel sind Homöomorphismen in  $C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ . Es ist aber

$$\begin{aligned}(\text{grad } g)(0) &= (\partial b_1(0)/\partial x, \partial b_1(0)/\partial y, 0) \quad \text{und} \\(\text{grad } g_\zeta)(0) &= (\partial b_2(0)/\partial x, \partial b_2(0)/\partial y, 0).\end{aligned}$$

Beide Vektoren sind nach Satz 1 nicht parallel, also

$$\det(\partial(b_1, b_2)/\partial(x, y)) \neq 0$$

Damit kann man  $b_1$  und  $b_2$  lokal um Null als Koordinaten im  $\mathbb{R}^2$  verwenden. Wähle also folgende Transformation:

$$\begin{aligned}\xi &= -b_1(x,y) \\ \eta &= -b_2(x,y) \\ \zeta &= \zeta\end{aligned}$$

Damit erhält  $f$  schließlich die gewünschte Gestalt:

$$\zeta^3 - \eta \zeta - \xi.$$

Satz 4: Für residual fast alle  $f$  hat  $p(C)$  als Singularitäten höchstens:

- i) Gewöhnliche Kreuzungspunkte mit verschiedenen Tangenten
- ii) Bilder von Kuspenpunkten

Bew.: Der Beweis wird in drei Teile zerlegt:

- a) für residual fast jedes  $f$  haben alle Punkte  $\xi \in p(C)$  höchstens 2 Urbilder unter  $p$ .
- b) für residual fast alle  $f$  ist  $p|_C$  an Punkten mit  $f = f_z = f_{zz} = 0$  injektiv.
- c) für residual fast alle  $f$  enthält  $p(C)$  nur Kreuzungspunkte mit verschiedenen Tangenten.

Aus a), b), c) folgt dann sofort der Satz.

a) bedeutet für den dreifachen 1-Jet von  $f$  gerade, daß er die Menge

$$W := \left\{ (x_i, y_i, z_i, f^i, f_x^i, f_y^i, f_z^i)_{i=1}^3 \in J_3^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) \mid \begin{array}{l} f^i = f_z^i = 0; \quad i=1,2,3 \\ \text{und } (x_i, y_i) = (x_j, y_j); \quad z_i \neq z_j \quad \text{für alle } i \neq j \end{array} \right\}$$

nicht trifft. Wegen  $\text{kodim } W = 3+3+4 = 10 > 9 = \dim(\mathbb{R}^3)^{(3)}$

ist dies äquivalent zu  $j_3^1 f \not\subset W$ , und die Behauptung folgt aus dem Multijettransversalitätssatz. ✓

b) ist äquivalent dazu, daß der doppelte 2-Jet von  $f$  die Menge

$$W := \left\{ (x_i, y_i, z_i, f^i, f_x^i, \dots)_{i=1}^2 \in J_2^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) \mid \begin{array}{l} f^i = f_z^i = 0; \quad i=1,2 \\ \text{und } (x_1, y_1) = (x_2, y_2) \text{ und } f_{zz}^1 = 0 \end{array} \right\}$$

nicht trifft. Wegen  $\text{kodim } W = 2+2+2+1 = 7 > 6 = \dim(\mathbb{R}^3)^{(2)}$

ist dies äquivalent zu  $j_2^2 f \not\subset W$ , und die Behauptung folgt aus dem Multijettransversalitätssatz. ✓

c) gilt genau dann, wenn es keine Punkte  $(x_i, y_i, z_i) \in \mathbb{R}^3$ ;  $i=1,2$  gibt mit:

i)  $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$  und  $z_1 \neq z_2$

ii)  $f(x_i, y_i, z_i) = f_z(x_i, y_i, z_i) = 0$ ;  $i=1,2$

iii)  $(f_x(x_i, y_i, z_i), f_y(x_i, y_i, z_i))_{i=1,2}$  sind linear abhängig,

denn die Tangentialebenen von  $C$  stehen gerade senkrecht auf dem Gradienten  $(f_x, f_y, f_z)$  an der betreffenden Stelle, die Tangenten von  $p(C)$  also senkrecht auf  $(f_x, f_y)$ .

Diese drei Bedingungen sind äquivalent dazu, daß der doppelte 1-Jet von  $f$  die Menge

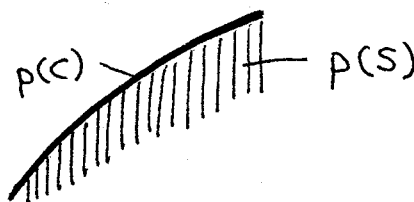
$$W := \left\{ (x_i, y_i, z_i, f^i, \dots) \in J_2^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) \mid (x_1, y_1) = (x_2, y_2), z_1 \neq z_2, \det\left(\left(f_x^i, f_y^i\right)_{i=1}^2\right) = 0, f^i = f_z^i = 0 \ i=1,2 \right\}$$

nicht trifft. Wegen  $\text{codim } W = 2+1+2+2 = 7 > 6 = \dim(\mathbb{R}^3)^{(2)}$  ist dies wieder äquivalent zu  $j_2^1 f \notin W$ , und die Behauptung folgt aus dem Multijettransversalitätssatz. ✓

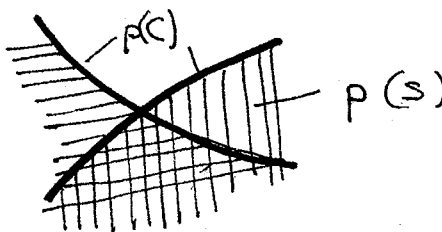
### Zusammenfassung:

Für residual fast alle  $f$  hat  $p(C)$  lokal immer folgende Gestalt:

a) reguläres Kurvenstück:



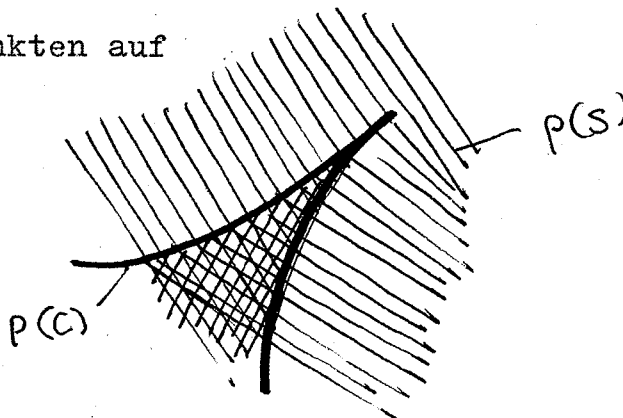
b) Kreuzung zweier Kurvenstücke mit verschiedenen Tangenten:



a) und b) treten an Faltenpunkten auf

c) Umkehrpunkt:

tritt an Kuspenpunkten auf



## §2 Der singuläre Ort einer impliziten Differentialgleichung

Der singuläre Ort einer impliziten Differentialgleichung  $f(x,y,y') = 0$ ;  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$  ist die Menge der  $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ , für die sich  $f$  lokal nichtdifferenzierbar nach  $y'$  auflösen läßt. Mit den Bezeichnungen von §1 also gerade die sichtbare Kontur  $p(C)$  von  $f^{-1}(0)$  unter der Projektion  $p$ .

Definition: Sei  $f(x,y,y') = 0$  eine implizite Differentialgleichung,  $S := f^{-1}(0)$  eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit im  $\mathbb{R}^3$ , und  $y(x)$  eine Lösung der Differentialgleichung. Dann heißt die Kurve

$$x \longmapsto \underline{(x, y(x), y'(x)) \in S}$$

die zur Lösung  $y(x)$  gehörige, geliftete Lösung der Differentialgleichung.

Der singuläre Ort von  $f(x,y,y') = 0$  heißt

Pseudoenveloppe der Lösungen der Differentialgleichung, falls für alle Punkte von  $C$ , mit Ausnahme einer diskreten Menge, gilt:

Die Projektion jeder gelifteten Lösung, die  $C$  trifft, ist transversal zu  $p(C)$ .

Satz 1: Für residual fast alle  $f$  ist der singuläre Ort von  $f(x,y,y') = 0$  Pseudoenveloppe der Lösungen der Differentialgleichung.

Bew.: Sei  $\xi_0 = (x_0, y_0, z_0) \in C$ , dann steht  $(f_x(\xi_0), f_y(\xi_0))$  senkrecht auf  $p(C)$ . (Nach §1 kann man oBdA annehmen, daß  $p(C)$  1-dimensionale Untermannigfaltigkeit im  $\mathbb{R}^2$  ist, bis auf die isolierten Kuppen- und Kreuzungspunkte, und daß  $(f_x, f_y)|_C$  nirgends verschwindet, denn  $(\text{grad } f)|_S$  verschwindet nirgends, und  $C = S \cap f_z^{-1}(0)$ ). Die Lösungen von  $f(x,y,y') = 0$  zu den Anfangsbedingungen  $(x_0, y_0, z_0)$  haben bei  $x_0$  gerade die Richtung

$$\left. \frac{d}{dx} (x, y(x)) \right|_{x=x_0} = (1, y'(x_0)) = (1, z_0).$$



Sie sind also genau dann transversal an  $p(C)$ , wenn

$$0 \neq \langle (1, z_0), (f_x(\xi_0), f_y(\xi_0)) \rangle = f_x(\xi_0) + z_0 f_y(\xi_0).$$

Es genügt daher zu zeigen, daß  $f_x + z f_y$  auf  $C$  nur einfache Nullstellen hat, und das besagt gerade der folgende Satz:

Satz 2: Für residual fast alle  $f$  hat  $f_x + z f_y$  auf  $C$  nur einfache Nullstellen und an Kuspunkten nie Nullstellen.

Bew.: Nach §1 ist oBdA  $C$  der transversale Schnitt der Untermannigfaltigkeiten  $f^{-1}(0)$  und  $f_z^{-1}(0)$ . Da weiter oBdA  $(\text{grad } f)|_S$  und  $(\text{grad } f_z)|_S$  nirgends verschwinden, steht der Tangentialraum von  $C$  senkrecht auf  $\text{grad } f$  und  $\text{grad } f_z$  an der betreffenden Stelle, ist also parallel zu

$$\text{grad } f \times \text{grad } f_z = (f_y f_{zz} - f_z f_{zy}, f_z f_{zx} - f_x f_{zz}, f_x f_{zy} - f_y f_{zx}).$$

Weiter ist

$$\text{grad}(f_x + z f_y) = (f_{xx} + z f_{xy}, f_{xy} + z f_{yy}, f_{xz} + z f_{yz} + f_y).$$

Also ist die (nicht normierte) Ableitung von  $f_x + z f_y$  in Richtung  $C$  gegeben durch:

$$\begin{aligned} \langle \text{grad}(f_x + z f_y), \text{grad } f \times \text{grad } f_z \rangle &= \\ &= f_y f_{xx} f_{zz} + z f_y f_{xy} f_{zz} - f_z f_{xx} f_{zy} - z f_z f_{xy} f_{zy} + \\ &+ f_z f_{xy} f_{zx} + z f_z f_{yy} f_{zx} - f_x f_{xy} f_{zz} - z f_x f_{yy} f_{zz} + \\ &+ f_x f_{zx} f_{zy} + f_x f_y f_{zy} + z f_x f_{zy}^2 - f_y f_{zx}^2 - f_y^2 f_{zx} - z f_y f_{zx} f_{zy} = \\ &=: A(z, f_x, f_y, f_z, f_{xx}, f_{xy}, f_{yy}, f_{zx}, f_{zy}, f_{zz}). \end{aligned}$$

Betrachtet man  $A$  als Abbildung von dem entsprechenden Teilraum des 2-Jetraumes  $J^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$  in die reellen Zahlen, so ist:

$$\partial A / \partial f_{xx} = f_y f_{zz} - f_z f_{zy}$$

$$\partial A / \partial f_{xy} = z f_y f_{zz} - z f_z f_{zy} - f_x f_{zz} + f_z f_{zx}$$

Sei  $g: \mathbb{R}^{11} \rightarrow \mathbb{R}^4$  definiert durch:

$$\begin{aligned} g(f, z, f_x, f_y, f_z, f_{xx}, f_{xy}, f_{zx}, f_{yy}, f_{zy}, f_{zz}) &:= \\ &= (f, f_z, f_x + z f_y, A(z, \dots, f_{zz})) \end{aligned}$$

Wobei  $\mathbb{R}^{11}$  als der entsprechende Unterraum von  $J^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$  zu verstehen ist. Offenbar ist  $\{(x, y)\} \times g^{-1}(0)$  gerade die Menge all der Punkte im 2-Jetraum, die  $f$  genau dann nicht trifft, wenn es den ersten Teil des Satzes erfüllt.

- 2.3 -

Die Jacobische von  $g$  ist nun:

$$Dg = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & f_y & 1 & z & 1 \\ 0 & * & * & * & * \\ \frac{\partial A}{\partial f_{xx}} & \frac{\partial A}{\partial f_{xy}} & * & \dots & * \end{pmatrix}$$

Sie enthält als Unterdeterminanten:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & * & * & \frac{\partial A}{\partial f_{xx}} \end{vmatrix} = -\frac{\partial A}{\partial f_{xx}} \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & * & * & \frac{\partial A}{\partial f_{xy}} \end{vmatrix} = -\frac{\partial A}{\partial f_{xy}}.$$

Auf  $g^{-1}(0)$  verschwindet  $f_z$ , also ist:

$$\frac{\partial A}{\partial f_{xx}} \Big|_{g^{-1}(0)} = f_y f_{zz} \quad \text{und} \quad \frac{\partial A}{\partial f_{xy}} \Big|_{g^{-1}(0)} = z f_y f_{zz} - f_x f_{zz}.$$

Schränkt man sich nun vorerst auf den Beweis des ersten Teils ein, so kann man oBdA alles auf

$$\{(x, y, z, f, f_x, \dots) \in J^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) \mid f_{zz} \neq 0, (f_x, f_y) \neq 0\}$$

betrachten. (Für residual fast alle  $f$  ist  $(\text{grad } f)|_S \neq 0$ ).

Setze

$$M := g^{-1}(0) \cap \{(z, f, f_x, \dots, f_{zz}) \mid f_{zz} \neq 0, (f_x, f_y) \neq 0\}.$$

Auf  $M$  ist mindestens eine der beiden obigen Unterdeterminanten nicht Null, also hat  $g$  auf  $M$  vollen Rang, d.h.  $\text{kodim } M = 4$ . Der erste Teil des Satzes ist nun gleichbedeutend damit, daß der 2-Jet von  $f$  die Menge

$$W := \{(x, y)\} \times M$$

nicht trifft. Da aber  $\text{kodim } W = 4 > 3 = \dim \mathbb{R}^3$ , heißt dies nichts anderes als:  $j^2 f \not\cap W$ . Damit folgt die Behauptung aus dem Transversalitätssatz.  $\checkmark$

Im Fall der Kuspunkte, also  $f_{zz} = 0$ , setze

$$W := \{(x, y, z, f, \dots) \in J^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) \mid f = \dot{f}_z = f_{zz} = 0, f_x + z f_y = 0\}$$

Der zweite Teil des Satzes ist äquivalent zu:  $j^2 f(\mathbb{R}^3) \cap W = \emptyset$ Wegen  $\text{kodim } W = 4 > 3 = \dim \mathbb{R}^3$  ist dies das Gleiche wie:

$j^2 f \not\cap W$ , und die Behauptung folgt aus dem Transversalitätssatz.  $\checkmark$

Satz 3: Für residual fast alle  $f$  hat  $f_x + zf_y$  über Kreuzungspunkten von  $p(C)$  keine Nullstellen auf  $C$

Bew.: Satz 3 ist äquivalent dazu, daß der doppelte 1-Jet von  $f$  die Menge

$$W := \left\{ (x_i, y_i, z_i, f^i, \dots) \in J_2^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) \mid \begin{aligned} &(x_1, y_1) = (x_2, y_2), \\ &f^i = f_z^i = 0 \quad i=1,2, \quad f_x^1 + z_1 f_y^1 = 0 \end{aligned} \right\}$$

nicht trifft. Wegen  $\text{codim } W = 2+2+2+1 = 7 > 6 = \dim(\mathbb{R}^3)^{(2)}$  bedeutet dies gerade  $j_2^1 f \not\subset W$  und die Behauptung folgt aus dem Multijettransversalitätssatz.  $\checkmark$

Definition: Faltenpunkte mit  $f_x + zf_y \neq 0$  werden reguläre Faltenpunkte, solche mit  $f_x + zf_y = 0$  singuläre Faltenpunkte genannt.

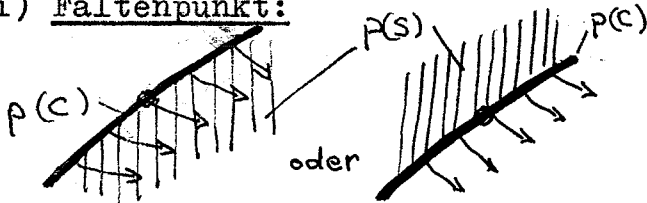
Bemerkung: i) Für residual fast alle  $f$  ist bei singulären Faltenpunkten die Nullstelle von  $f_x + zf_y$  einfach.  
 ii)  $\left( (f_x + zf_y) / \sqrt{(1+z^2)(f_x^2 + f_y^2)} \right) \Big|_C$  ist gerade der Sinus des Winkels zwischen dem singulären Ort  $p(C)$  und den dort beginnenden bzw. endenden Lösungen von  $f(x, y, y') = 0$  mit Anfangswerten auf  $C$ . (vgl. Bew. Satz 1).

Zusammenfassung:

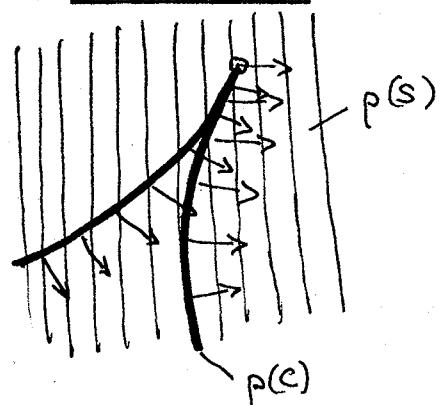
Für residual fast alle  $f$  hat das Richtungsfeld von  $f(x, y, y') = 0$  auf  $p(C)$  lokal folgende Gestalt:

a) Das Richtungsfeld ist lokal transversal zu  $p(C)$  ( $f_x + zf_y$  verschwindet auf  $C$  nicht.)

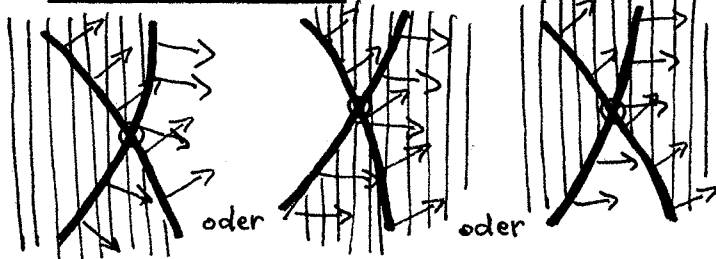
i) Faltenpunkt:



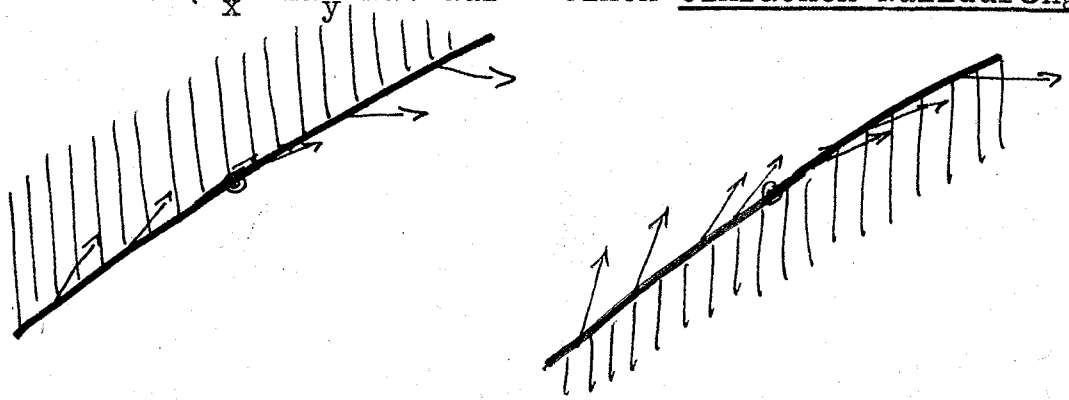
ii) Kuspenpunkt:



iii) Kreuzungspunkt:



b) Die Richtungsvektoren wandern von einer Seite von  $p(C)$  auf die andere. ( $f_x + z f_y$  hat auf  $C$  einen einfachen Nulldurchgang)



### §3 Die geliftete implizite Differentialgleichung

Anstelle der Differentialgleichung  $f(x,y,y') = 0$  mit ihren Lösungen  $y(x)$  kann man auch das Verhalten der gelifteten Lösungen  $(x,y(x),y'(x))$  auf  $S$  untersuchen. Hierzu betrachtet man z.B.  $f(x,y,y') = 0$  als Spezialfall einer partiellen Differentialgleichung. Dieser ist das System

$$\dot{x} = f_z, \quad \dot{y} = z f_z, \quad \dot{z} = -f_x - z f_y$$

der Hamiltonschen Gleichungen zugeordnet, und  $f$  ist ein erstes Integral dieses Systems, d.h. die Niveaulflächen  $f^{-1}(c)$ , also insbesondere auch  $S = f^{-1}(0)$ , haben die Eigenschaft, daß Lösungen der Hamiltongleichungen, die darauf beginnen, immer darauf verlaufen. Die Lösungen der Hamiltonschen Gleichungen auf  $S$  projizieren sich dann mit  $p$  auf die Integralkurven von  $f(x,y,y') = 0$  in der  $(x,y)$ -Ebene. (Vgl. [4], S. 16 ff.).

Satz 1: Die Lösungen von  $f(x,y,y') = 0$  erhält man (in Parameterform) durch Projektion der Lösungen von

$$* \left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_z \\ z f_z \\ -(f_x + z f_y) \end{pmatrix} =: \mathcal{H}_f \\ \text{mit Anfangswerten auf } S \end{array} \right.$$

auf die  $(x,y)$ -Ebene mit  $p$ .

Dabei ist für jede Lösung die Abbildung

$$t \longmapsto x(t)$$

ein lokaler Diffeomorphismus, falls  $(x(t), y(t), z(t)) \notin C$ .

Definition:  $\mathcal{H}_f|_S$  bzw. (\*) werde die zu  $f(x,y,y') = 0$  gehörige, geliftete Differentialgleichung genannt.

Bew.: Betrachte  $f(x,y,y') = 0$  als partielle Differentialgleichung. Dann ist nach [4] alles klar.  $\checkmark$

Insbesondere ist  $\mathcal{H}_f|_S : S \longrightarrow TS$ , denn

$$\langle \mathcal{H}_f, \text{grad } f \rangle = f_z f_x + z f_z f_y - (f_x + z f_y) f_z = 0.$$

Also definiert  $\mathcal{H}_f|_S$  ein globales Vektorfeld auf  $S$ .

Bemerkung: Da  $(\text{grad } f)|_S$  für residual fast alle  $f$  nirgends verschwindet, kann man  $f(x,y,y') = 0$  lokal immer nach einer der drei Variablen auflösen, also entweder als

$$\begin{aligned} x &= h(y,y') \quad \text{oder} \\ y &= k(x,y') \quad \text{oder} \\ y' &= l(x,y) \quad \text{schreiben.} \end{aligned}$$

Es genügt daher lokal anstelle von  $\mathcal{H}_f|_S$  eine der drei folgenden Differentialgleichungen zu lösen:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_z \\ -k_x + z \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -zh_z \\ -1 + zh_y \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad y' = l(x,y).$$

Die Lösungen der gelifteten Differentialgleichung bzw. von  $f(x,y,y') = 0$  ergeben sich in offener Weise durch Einsetzen in die aufgelöste Differentialgleichung.

Satz 2:  $\mathcal{H}_f|_S$  verschwindet höchstens auf  $C$ , und für residual fast alle  $f$  auch nur an den isolierten Punkten von  $C$ , an denen  $f_x + zf_y$  verschwindet.

Bew.: klar nach §2 Satz 1,2,3 und nach Definition von  $\mathcal{H}_f$ . ✓

Bemerkungen: i) Eine nicht konstante Lösung  $(x(t), y(t), z(t))$  von  $\mathcal{H}_f|_S$ , die die singuläre Menge  $C$  trifft, hat dort einen nichtverschwindenden Tangentialvektor parallel zur  $z$ -Achse.

ii) Eine Lösung  $y(x)$  von  $f(x,y,y') = 0$ , deren zugehörige geliftete Lösung  $(x, y(x), y'(x))$  die singuläre Menge  $C$  im Punkt  $\xi_0 = (x_0, y_0, z_0)$ , mit  $f_x(\xi_0) + z_0 f_y(\xi_0) \neq 0$ , trifft, hat am singulären Ort  $p(C)$  eine 2. Ableitung  $+\infty$  oder  $-\infty$ .

Bew.: i)  $(x,y,z)(t)$  nicht konstant, d.h. der Tangentialvektor  $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})(t)$  verschwindet nie. Auf  $C$  gilt dann (wegen  $f_z|_C = 0$ ):  $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = (0, 0, -(f_x + zf_y))$ , und da der Tangentialvektor nie verschwindet, ist  $f_x + zf_y \neq 0$  an dieser Stelle. ✓

ii) folgt aus i), denn nach Satz 1 kann man sich  $(x, y(x))$  als Projektion einer Lösung  $(x, y, z)(t)$  von  $\mathcal{H}_f|_S$  vorstellen, und offenbar ist

- 3.3 -

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} = \frac{d}{dx} y'(x) = \frac{d}{dx} z(t(x)) = \frac{dz}{dt} \frac{dt}{dx} = \dot{z} / \dot{x}.$$

Und es ist  $f_z|_C = 0$ , also  $\dot{x} = 0$  und  $\dot{z} = -(f_x + z f_y) \neq 0$  nach Voraussetzung.  $\checkmark$

iii) Zu  $\mathcal{H}_f$  kann man auch wie folgt gelangen:

Man betrachtet  $\omega := dy - z dx: \mathbb{T}\mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ .

Sei  $TS \subset \mathbb{T}\mathbb{R}^3$  in kanonischer Weise eingebettet. Ist  $\gamma(t) = (x, y, z)(t)$  eine  $C^\infty$ -Kurve in  $S$ , so ist ihr durch  $\gamma \mapsto (\dot{\gamma}, \dot{\gamma})$  eine  $C^\infty$ -Kurve in  $TS$  zugeordnet. Dann ist

$$\omega(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = 0 \Leftrightarrow \dot{y}(t) = z(t)\dot{x}(t), \text{ d.h.:}$$

Falls  $\omega(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = 0$ , so lösen die Komponenten  $(x, y)(t)$  von  $\gamma(t)$  die Differentialgleichung  $f(x, y, y') = 0$ . Andererseits liefert jede Lösung  $y(x)$  von  $f(x, y, y') = 0$  eine Kurve  $(x, y(x), y'(x))$  in  $S$  und es ist

$$\omega((x, y(x), y'(x)), (1, y'(x), y''(x))) = y'(x) - y'(x) = 0.$$

Also hat man:

(1) Das Lösen von  $f(x, y, y') = 0$  ist äquivalent dazu, Kurven  $\gamma$  auf  $S$  zu finden, die  $\omega(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = 0$  erfüllen.

Weiter ist:

(2)  $\omega|_{\mathbb{T}(x, y, z)S} = 0$  genau dann, wenn:

$(x, y, z) \in C$  und  $f_x(x, y, z) + z f_y(x, y, z) = 0$ , d.h. für residual fast alle  $f$  verschwindet  $\omega|_{TS}$  nur an den isolierten Nullstellen von  $(f_x + z f_y)|_C$ .

Bew.: (2) sieht man leicht geometrisch ein, oder man rechnet wie folgt:

$$TS = \ker \langle (\text{grad } f)|_S, \cdot \rangle$$

$$\ker \omega = \{((x, y, z), (\xi, \eta, \zeta)) \mid \eta - z\xi = 0\}.$$

Also ist

$$\ker \omega|_{\mathbb{T}(x, y, z)S} = \mathbb{T}(x, y, z)S \Leftrightarrow$$

$f_x(x, y, z)\xi + f_y(x, y, z)\eta + f_z(x, y, z)\zeta = 0$  für alle  $(\xi, \eta, \zeta)$  mit:  $\eta - z\xi = 0$ , und das ist äquivalent zu:  $f_z(x, y, z) = 0$  und  $f_x(x, y, z) + z f_y(x, y, z) = 0$ .  $\checkmark$

Sei  $V$  die (für residual fast alle  $f$  diskrete) Menge der Punkte auf  $C$  auf denen  $f_x + z f_y$  verschwindet. Nach (2) ist also

$\omega|_{\mathbb{T}(S-V)}$  nirgends verschwindende 1-Form auf  $S-V$ . Wegen  $\dim \ker \omega|_{\mathbb{T}_\xi \mathbb{R}^3} = 2$ ,  $\dim \mathbb{T}_\xi(S-V) = 2$  und dem Obigen gilt:  $\dim \ker \omega|_{\mathbb{T}_\xi(S-V)} = \dim ((\ker \omega|_{\mathbb{T}_\xi \mathbb{R}^3}) \cap \mathbb{T}_\xi(S-V)) = 1$ .

Damit ist  $\text{Ker } \omega|_{T(S-V)}$  ein integrables Unterbündel von  $T(S-V)$  (da eindimensional), und ein Vektorfeld  $X$  auf  $T(S-V)$  liegt genau dann in  $\text{ker } \omega|_{T(S-V)}$ , wenn für seine Komponenten  $X = (x_1, x_2, x_3)$  gilt:

$$f_x x_1 + f_y x_2 + f_z x_3 = 0 \quad \text{und} \quad x_2 - z x_1 = 0,$$

und das ist genau dann der Fall, wenn

$$(3) \quad X = \alpha(f_z, z f_z, -(f_x + z f_y)), \quad \alpha \in C^\infty(S-V, \mathbb{R}) \text{ beliebig.}$$

Das zeigt endlich, daß die Bedingung aus (1), Kurven  $\gamma$  auf  $S$  mit  $\omega(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = 0$  zu finden, äquivalent dazu ist, Kurven  $\xi$  auf  $S$  zu finden, die

$$\dot{\xi} = \mathcal{H}_f(\xi) \quad \text{erfüllen.}$$

### Zusammenfassung und Satz:

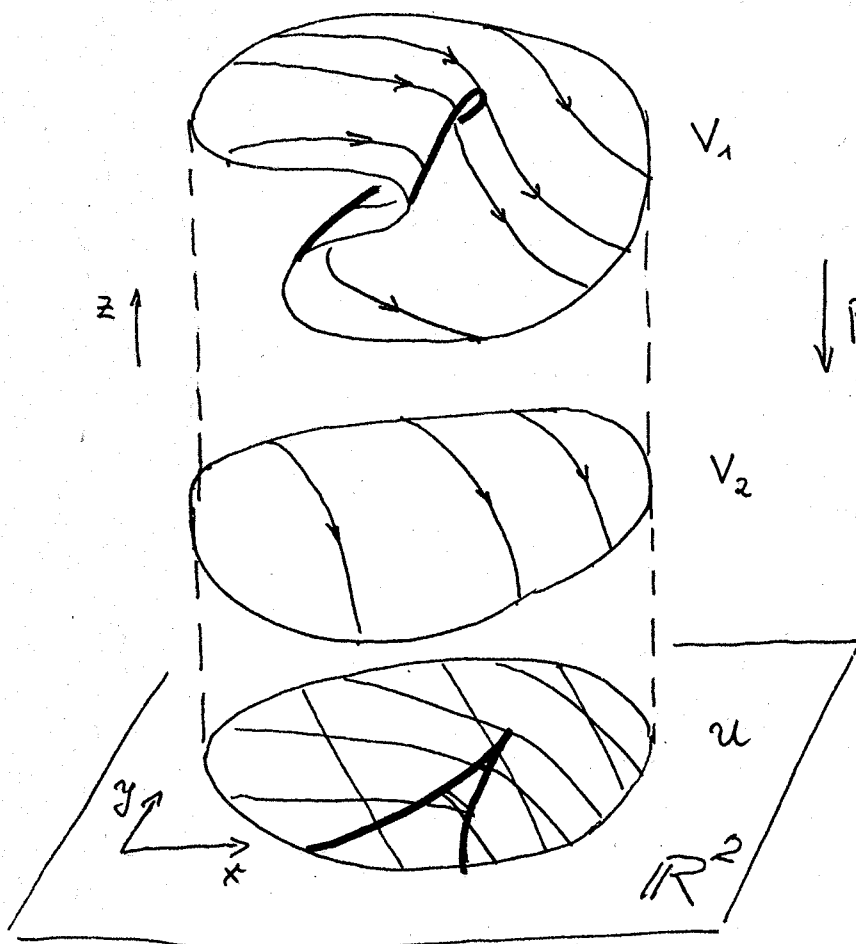
Satz 3: Für residual fast alle  $f$  hat man folgende lokale Situation, falls  $p|S$  eigentlich ist:

Für alle  $(x, y) \in p(S)$  gibt es eine Umgebung  $U$ , sodaß  $p^{-1}(U)$  in endlich viele disjunkte Umgebungen  $V_i$  ( $i=1, \dots, k$ ) der Elemente von  $p^{-1}(x, y)$  zerfällt, sodaß genau eine der drei folgenden Aussagen erfüllt ist:

- $(x, y) \notin p(C)$ :  $p|V_i: V_i \rightarrow U$  ist für alle  $i=1, \dots, k$  ein Diffeomorphismus.  $\mathcal{H}_f$  verschwindet auf  $p^{-1}(U)$  nie.
- $(x, y) \in p(C)$ , kein Kreuzungspunkt:  $p|V_i: V_i \rightarrow U$  ist für alle  $i=2, \dots, k$  ein Diffeomorphismus,  $p|V_1: V_1 \rightarrow U$  ist eine Falte oder eine Kuspé und  $\mathcal{H}_f$  verschwindet auf  $p^{-1}(U)$  höchstens im Punkt  $p^{-1}(x, y) \cap V_1$ , im Fall der Kuspé nie.
- $(x, y) \in p(C)$ , gewöhnlicher Kreuzungspunkt:  
 $p|V_i: V_i \rightarrow U$  ist für alle  $i=3, \dots, k$  ein Diffeomorphismus,  $p|V_1: V_1 \rightarrow U$ ,  $p|V_2: V_2 \rightarrow U$  sind Falten, deren Konturen transversal sind.  $\mathcal{H}_f$  verschwindet auf ganz  $p^{-1}(U)$  nie.

Lösungen von verschiedenen  $V_i$ 's sind in allen 3 Fällen transversal.





Bew.: Da  $p|_S$  eigentlich ist, ist  $p^{-1}(x,y)$  kompakt und für residual fast alle  $f$  eine 0-dimensionale Mannigfaltigkeit, also endlich; damit zerfällt  $p^{-1}(U)$  oBdA wie angegeben. a), b), c) folgen dann sofort aus den Ergebnissen von §1, §2 und §3. Lösungen, die von verschiedenen  $V_i$ 's stammen, haben an ihren eventuellen Schnittpunkten notwendig verschiedene Steigungen, sonst wären die  $V_i$ 's nicht disjunkt, also sind die Lösungen transversal.

#### §4 Lokale Transformationen einer impliziten Differentialgleichung

Nach §3 Satz 3 kann man sich bei der Untersuchung des lokalen Lösungsverhaltens impliziter Differentialgleichungen auf das Verhalten von Differentialgleichungen der Art

$$f|_{V_i}: V_i \longrightarrow \mathbb{R}, \quad V_i \text{ wie in §3 Satz 3}$$

beschränken. Man wird also für  $(x_0, y_0, z_0) \in S = f^{-1}(0)$  statt  $f$  nur den Keim  $(f, (x_0, y_0, z_0))$  von  $f$  um  $(x_0, y_0, z_0)$  bzw. die dadurch definierte lokale implizite Differentialgleichung

$$(f(x, y, y') = 0; (x_0, y_0, z_0))$$

betrachten. Für die weiteren Untersuchungen soll nun für lokale implizite Differentialgleichungen eine mit dem Lösungsverhalten und der lokalen geometrischen Situation

$$(S; (x_0, y_0, z_0)) \xrightarrow{p|_S} \mathbb{R}^2$$

verträgliche Äquivalenzrelation zwischen lokalen Differentialgleichungen eingeführt werden:

Definition: Zwei lokale implizite Differentialgleichungen

$$(f(x, y, y') = 0; (x_0, y_0, z_0)) \text{ \& } (g(\xi, \eta, \eta') = 0; (\xi_0, \eta_0, \zeta_0))$$

heißen  $C^k$ -äquivalent (als Differentialgleichungen)

( $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ ), wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- i)  $(f(x, y, y') = 0, (x_0, y_0, z_0))$  und  $(g(\xi, \eta, \eta') = 0; (\xi_0, \eta_0, \zeta_0))$  sind geometrisch  $C^k$ -äquivalent (vgl. §1), d.h. wenn es lokale  $C^k$ -Diffeomorphismen

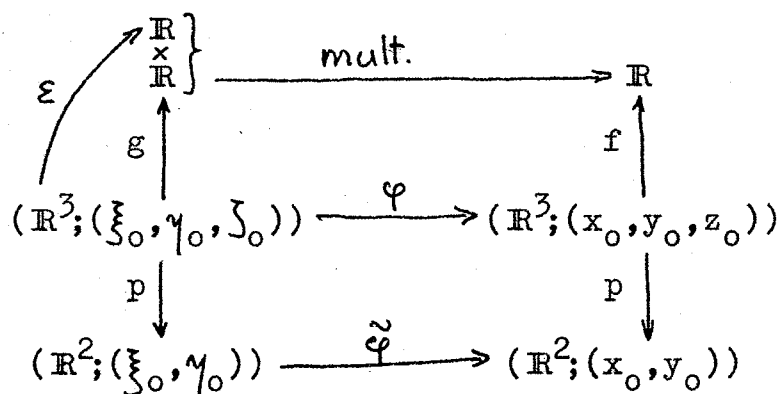
$$\varphi: (\mathbb{R}^3; (\xi_0, \eta_0, \zeta_0)) \longrightarrow (\mathbb{R}^3; (x_0, y_0, z_0))$$

$$\tilde{\varphi}: (\mathbb{R}^2; (\xi_0, \eta_0)) \longrightarrow (\mathbb{R}^2; (x_0, y_0))$$

und eine lokale  $C^k$ -Einheit

$$\varepsilon: (\mathbb{R}^3; (\xi_0, \eta_0, \zeta_0)) \longrightarrow \mathbb{R}$$

gibt, sodaß das Diagramm



kommutiert.

- ii) Der Diffeomorphismus  $\tilde{\varphi}$  führt die Integralkurven von  $(g(\xi, \eta, \eta')=0; (\xi_0, \eta_0, \zeta_0))$  in die Integralkurven von  $(f(x, y, y')=0; (x_0, y_0, z_0))$  über, unter der zusätzlichen Bedingung, daß

$$\partial \tilde{\varphi}_1(\xi_0, \eta_0) / \partial \xi + \zeta_0 \partial \tilde{\varphi}_1(\xi_0, \eta_0) / \partial \eta \neq 0 \text{ ist.}$$

$(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$  bzw.  $(\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2)$  bezeichne die Komponenten von  $\varphi$  bzw.  $\tilde{\varphi}$

Bemerkungen: a) Zur zusätzlichen Bedingung in ii):

Sei  $\eta(\xi)$  eine Lösung von  $(g(\xi, \eta, \eta')=0; (\xi_0, \eta_0, \zeta_0))$ . Dann soll die Kurve  $\tilde{\varphi}(\xi, \eta(\xi))$  Integralkurve von  $(f(x, y, y')=0; (x_0, y_0, z_0))$  sein, und man wird sinnvollerweise wünschen, daß  $d[\tilde{\varphi}_1(\xi, \eta(\xi))] / d\xi \neq 0$  ist, da  $\tilde{\varphi}_1(\xi, \eta(\xi))$  die Aufgabe der x-Koordinate übernehmen soll. Nun ist aber

$$d[\tilde{\varphi}_1(\xi, \eta(\xi))] / d\xi = \partial \tilde{\varphi}_1(\xi, \eta(\xi)) / \partial \xi + \eta'(\xi) \partial \tilde{\varphi}_1(\xi, \eta(\xi)) / \partial \eta$$

und die Zusatzbedingung ist offenbar äquivalent dazu, daß diese Ableitung lokal um  $(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)$  nicht verschwindet.

b) Invarianz der singulären Menge und der singulären Faltenpunkte unter  $\varphi$ :

$\varphi$  bildet die singuläre Menge  $g^{-1}(0) \cap g_z^{-1}(0)$  von  $g$  auf die singuläre Menge  $f^{-1}(0) \cap f_z^{-1}(0)$  von  $f$ , sowie die singulären Faltenpunkte  $g^{-1}(0) \cap g_z^{-1}(0) \cap (g_\xi + \zeta g_\eta)^{-1}(0)$  von  $g$  auf die singulären Faltenpunkte  $f^{-1}(0) \cap f_z^{-1}(0) \cap (f_x + \zeta f_y)^{-1}(0)$  von  $f$  ab.

Bew.: Wegen ii) und §2 Bem. ii) folgt die Aussage über die singulären Faltenpunkte aus der Aussage über die singuläre Menge.

$$\text{Es ist } \varepsilon g = f \circ \varphi; (\varepsilon g)_\zeta = \varepsilon_\zeta g + \varepsilon g_\zeta, (f \circ \varphi)_\zeta = (f_z \circ \varphi) \varphi_{\zeta 3}$$

Also ist:  $(f(\varphi(\xi, \eta, \zeta)))=0$  und  $f_z(\varphi(\xi, \eta, \zeta))=0$

$$\Leftrightarrow ((f \circ \varphi)(\xi, \eta, \zeta)=0 \text{ und } (f \circ \varphi)_\zeta(\xi, \eta, \zeta)=0)$$

$$\Leftrightarrow (g(\xi, \eta, \zeta)=0 \text{ und } (\varepsilon_\zeta g + \varepsilon g_\zeta)(\xi, \eta, \zeta)=0)$$

$$\Leftrightarrow (g(\xi, \eta, \zeta)=0 \text{ und } g_\zeta(\xi, \eta, \zeta)=0). \quad \checkmark$$

Satz 1: (über universelle Transformationen)

Sei  $\tilde{\varphi}: (\mathbb{R}^2; (x_0, y_0)) \longrightarrow (\mathbb{R}^2; \tilde{\varphi}(x_0, y_0))$  ein lokaler  $C^\infty$ -Diffeomorphismus und  $z_0 \in \mathbb{R}$  so, daß

i)  $\partial \tilde{\varphi}_1(x_0, y_0)/\partial x + z_0 \partial \tilde{\varphi}_1(x_0, y_0)/\partial y \neq 0$  und

ii)  $\frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial \tilde{\varphi}_2(x, y)/\partial x + z \partial \tilde{\varphi}_2(x, y)/\partial y}{\partial \tilde{\varphi}_1(x, y)/\partial x + z \partial \tilde{\varphi}_1(x, y)/\partial y} \right] \Big|_{(x_0, y_0, z_0)} \neq 0$

Dann ist  $\varphi: (\mathbb{R}^3; (x_0, y_0, z_0)) \longrightarrow (\mathbb{R}^3; \varphi(x_0, y_0, z_0))$

definiert durch

$$\varphi_1(x, y, z) := \tilde{\varphi}_1(x, y)$$

$$\varphi_2(x, y, z) := \tilde{\varphi}_2(x, y)$$

$$\varphi_3(x, y, z) := \frac{\partial \tilde{\varphi}_2(x, y)/\partial x + z \partial \tilde{\varphi}_2(x, y)/\partial y}{\partial \tilde{\varphi}_1(x, y)/\partial x + z \partial \tilde{\varphi}_1(x, y)/\partial y}$$

ein lokaler Diffeomorphismus, und für alle  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$  sind die Differentialgleichungen

$$((f \circ \varphi)(x, y, y')=0; (x_0, y_0, z_0)) \text{ \& } (f(\xi, \eta, \eta')=0; \varphi(x_0, y_0, z_0))$$

$C^\infty$ -äquivalent.

Bew.: ii) besagt gerade, daß  $\varphi$  ein Diffeomorphismus ist, denn  $\tilde{\varphi}$  war nach Voraussetzung ein Diffeomorphismus. Nach Konstruktion von  $\varphi$  sind dann  $((f \circ \varphi)(x, y, z)=0; (x_0, y_0, z_0))$  und  $(f(\xi, \eta, \zeta)=0; \varphi(x_0, y_0, z_0))$  geometrisch  $C^\infty$ -äquivalent (§1, Bem. 1.5 o.). Wegen i) ist automatisch die Zusatzbedingung erfüllt. Sei nun  $y(x)$  eine Lösung von  $((f \circ \varphi)(x, y, y')=0; (x_0, y_0, z_0))$ , dann ist:

$$d\tilde{\varphi}(x, y(x))/dx = \partial \tilde{\varphi}(x, y(x))/\partial x + y'(x) \partial \tilde{\varphi}(x, y(x))/\partial y.$$

Mit  $\xi(x) := \tilde{\varphi}_1(x, y(x))$  und  $\eta(x) := \tilde{\varphi}_2(x, y(x))$  gilt wegen i):

$$d\xi/dx \neq 0, \text{ und es ist:}$$

$$d\eta/d\xi = (d\eta/dx)/(d\xi/dx) = \varphi_3(x, y, y') \text{ nach Definition von } \varphi. \quad \checkmark$$

Bemerkung:  $\varphi^{-1}$  erhält man aus  $\tilde{\varphi}^{-1}$  auf die selbe Art wie  $\varphi$  aus  $\tilde{\varphi}$ .

Bew.: Mit  $(\xi, \eta, \zeta) := \varphi(x, y, z)$  gilt:  $(x, y) = \tilde{\varphi}^{-1}(\xi, \eta) =: \tilde{\psi}(\xi, \eta)$ .  
und durch Auflösen nach  $z$  erhält man:

$$z = \frac{\partial \tilde{\varphi}_2(x, y) / \partial x - \varphi_3(x, y, z) \partial \tilde{\varphi}_1(x, y) / \partial x}{\varphi_3(x, y, z) \partial \tilde{\varphi}_1(x, y) / \partial y - \partial \tilde{\varphi}_2(x, y) / \partial y}$$

Das ist aber das gleiche wie:

$$z = \frac{\partial y / \partial \tilde{\varphi}_1 + \varphi_3 \partial y / \partial \tilde{\varphi}_2}{\partial x / \partial \tilde{\varphi}_1 + \varphi_3 \partial x / \partial \tilde{\varphi}_2} = \frac{\partial \tilde{\psi}_2 / \partial \xi + \zeta \partial \tilde{\psi}_2 / \partial \eta}{\partial \tilde{\psi}_1 / \partial \xi + \zeta \partial \tilde{\psi}_1 / \partial \eta}$$

Wie man unter Berücksichtigung von

$$(\partial \tilde{\varphi} / \partial (x, y)) (\partial (x, y) / \partial \tilde{\varphi}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

durch Ausmultiplizieren leicht beweist. ✓

Satz 2: (Translation in den Ursprung)

Jede lokale implizite Differentialgleichung

$(f(x, y, y')=0; (x_0, y_0, z_0))$  ist  $C^\infty$ -äquivalent zu einer lokalen Differentialgleichung  $(g(\xi, \eta, \eta')=0; (0, 0, 0))$  um den Ursprung, vermittelt der durch folgende Affinität gegebenen Transformation  $\varphi$ :

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} \xrightarrow{\varphi} \begin{pmatrix} \xi & + x_0 \\ \eta + z_0 \xi & + y_0 \\ \zeta & + z_0 \end{pmatrix}$$

Bew.: Klar nach Satz 1. ✓

Satz 3: (Parallelisieren des Richtungsfeldes an Falten)

Jede lokale implizite Differentialgleichung

$(f(x, y, y')=0; (x_0, y_0, z_0))$ , für die  $(x_0, y_0, z_0)$  ein Faltenpunkt ist, ist  $C^\infty$ -äquivalent zu einer lokalen impliziten Differentialgleichung  $(g(\xi, \eta, \eta')=0; (0, 0, 0))$  um den Ursprung, für die die Faltenlinie  $C$  gerade in der  $(x, y)$ -Ebene liegt, d.h.: für die das Richtungsfeld am singulären Ort  $p(C)$  parallel zur  $x$ -Achse ist.

Bew.: Nach Satz 2 ist  $\text{oBdA } (x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$ , und nach dem Vorbereitungssatz von Weierstrass-Malgrange kann man  $f$  in der Form

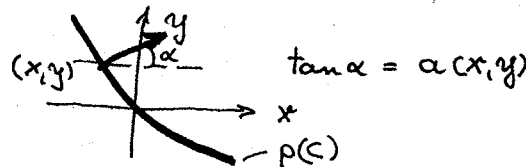
$$f(x, y, z) = \varepsilon(x, y, z) [z^2 - 2za(x, y) + b(x, y)]$$

mit  $a, b \in \mathcal{M}(2)$ ;  $\varepsilon: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  Einheit.

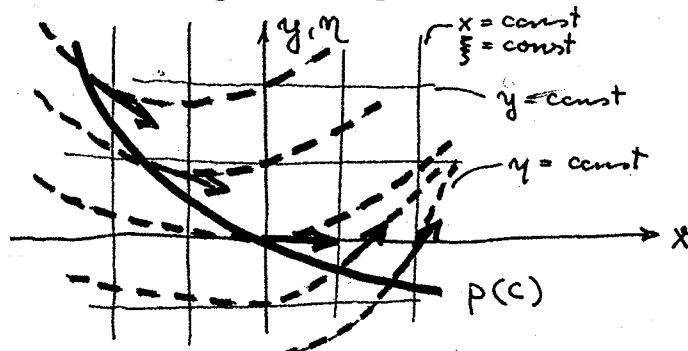
lokal um Null schreiben. Also kann man  $\text{oBdA}$

$$f(x, y, z) = z^2 - 2za(x, y) + b(x, y) \quad a, b \in \mathcal{M}(2)$$

annehmen.  $f_z = 0$  heißt folglich hier:  $z = a(x, y)$ . Das Richtungsfeld dieser impliziten Differentialgleichung hat daher am singulären Ort  $p(C)$  gerade die Richtung  $a(x, y)$ ,  $(x, y) \in p(C)$ :



Man führt nun auf  $\mathbb{R}^2$  neue Koordinaten  $(\xi(x, y), \eta(x, y))$  so ein, daß die "Parallelen" zur  $\xi$ -Achse ( $\eta = \text{const.}$ ) den singulären Ort  $p(C)$  unter dem selben Winkel treffen, wie das Richtungsfeld der Differentialgleichung. Dann ist man fertig:



Hierzu soll ein Diffeomorphismus wie in Satz 1 verwendet werden, der zusätzlich die  $\xi$ -Koordinate fest läßt:

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} \xrightarrow{\varphi} \begin{pmatrix} \xi \\ \psi(\xi, \eta) \\ \psi_\xi(\xi, \eta) + \zeta \psi_\eta(\xi, \eta) \end{pmatrix} \quad \text{mit } \psi_\eta(0, 0) \neq 0$$

Ein solcher Diffeomorphismus erfüllt offenbar die Voraussetzungen für Satz 1. Es ist damit nur noch ein geeignetes  $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  zu finden, sodaß

$$\partial(f \circ \varphi)(\xi, \eta, \zeta) / \partial \zeta = 0 \iff \zeta = 0 \quad \text{für alle } (\xi, \eta, \zeta) \in (\mathbb{R}^3, 0).$$

(Das ist etwas mehr als eigentlich nötig ist, es würde schon genügen, wenn dies für alle Faltenpunkte von  $f \circ \varphi$  erfüllt wäre)

Nun ist:

$$\begin{aligned} f \circ \varphi &= (\psi_\xi + \zeta \psi_\eta)^2 - 2(\psi_\xi + \zeta \psi_\eta) a(\xi, \psi) + b(\xi, \psi) \\ &= \psi_\eta^2 \left[ \zeta^2 + 2\zeta \frac{\psi_\xi - a(\xi, \psi)}{\psi_\eta} + \frac{b(\xi, \psi) + \psi_\xi^2 - 2\psi_\xi a(\xi, \psi)}{\psi_\eta^2} \right] \\ &=: \psi_\eta^2 \cdot g \end{aligned}$$

Denn  $\psi_\eta$  soll ja um Null nicht verschwinden.

Also ist

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} (f \circ \varphi) = \frac{\partial}{\partial \zeta} (\psi_\eta^2 \cdot g) = \psi_\eta^2 g_\zeta, \text{ denn } \frac{\partial}{\partial \zeta} \psi_\eta = 0.$$

und damit

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \zeta} (f \circ \varphi)(\xi, \eta, \zeta) = 0 &\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial \zeta} g(\xi, \eta, \zeta) = 0. \\ \Leftrightarrow \zeta &= \frac{\psi_\xi - a(\xi, \psi)}{\psi_\eta} \end{aligned}$$

Also ist  $[(f \circ \varphi)_\zeta = 0 \Leftrightarrow \zeta = 0]$  genau dann erfüllt, wenn

$$\psi_\xi - a(\xi, \psi) = 0,$$

d.h. für festes  $\eta$  muß  $\psi(\cdot, \eta)$  die gewöhnliche Differentialgleichung

$$y' = a(x, y) \text{ lösen.}$$

Fordert man noch zusätzlich  $\psi(0, \eta) = \eta$ , so ist automatisch  $\psi_\eta \neq 0$  lokal um Null erfüllt, und man erhält  $\psi$  aus der allgemeinen Lösung  $Y(x, x_0, y_0)$  obiger Differentialgleichung zu den Anfangswerten  $(x_0, y_0)$  durch:

$$\psi(\xi, \eta) := Y(\xi, 0, \eta)$$

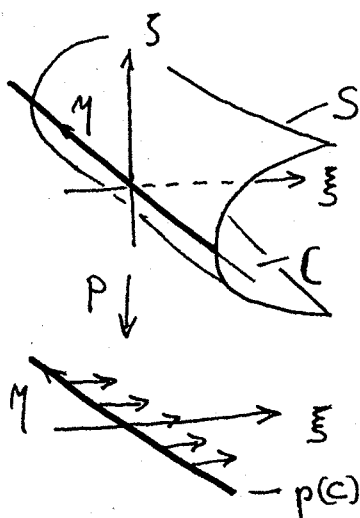
Da  $Y \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$  ([5] S.83 ff, [6]) ist auch  $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  und man ist fertig. ✓

Bemerkung: Eine derartige Transformation ist an Kuspunkten in differenzierbarer Weise nicht möglich.

Bew.: Der Tangentialraum von  $C$  in einem Kuspunkt ist immer die  $z$ -Achse, denn er wird erzeugt von  $(\text{grad } f) \times (\text{grad } f_z) = (0, 0, f_x f_{zy} - f_y f_{zx})$  (an Kuspunkten ist  $f_z = f_{zz} = 0$ ). Hier bekäme man aber durch Transformation eine Kuppe, bei der der Tangentialraum von  $C$  in der  $(x, y)$ -Ebene liegt. ✓

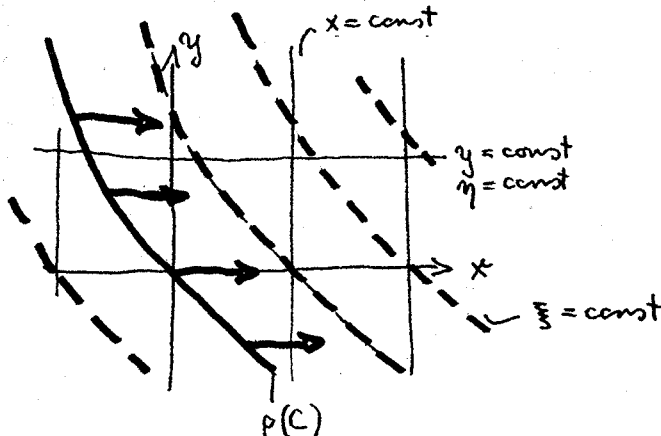
Satz 4: (Linearisieren der Falte an regulären Faltenpunkten)

Jede lokale implizite Differentialgleichung  $(f(x,y,y')=0; (x_0,y_0,z_0))$ , für die  $(x_0,y_0,z_0)$  regulärer Faltenpunkt ist, ist  $C^\infty$ -äquivalent zu einer lokalen impliziten Differentialgleichung  $(g(\xi,\eta,\eta')=0; (0,0,0))$  um den Ursprung, für die die  $\eta$ -Achse  $\subset \mathbb{R}^3$  die Falte ist.



Bew.: Nach Satz 1 und Satz 3 kann man schon oBdA annehmen, daß  $(x_0,y_0,z_0)=(0,0,0)$ , und daß das Richtungsfeld parallel zur  $x$ -Achse ist. Dann heißt  $(f_x + zf_y)(0) \neq 0$  gerade, daß  $f_x(0) \neq 0$  ist.  $p(C)$  steht senkrecht auf  $(f_x, f_y)$ , ist also transversal zur  $x$ -Achse und damit lokal durch eine Gleichung  $x = g(y)$ ,  $g \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  beschrieben.

Zur Linearisierung der Falte führt man nun auf  $\mathbb{R}^2$  neue Koordinaten  $(\xi(x,y), \eta(x,y))$  so ein, daß die  $\eta$ -Achse gerade  $p(C)$  wird. Läßt man die  $y$ -Koordinate dabei noch unverändert, so bleibt das Richtungsfeld auch weiterhin parallel zur  $\xi$ -Achse:





Hierzu soll wieder ein Diffeomorphismus wie in Satz 1 dienen:

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} \xrightarrow{\varphi} \begin{pmatrix} \xi + g(\eta) \\ \eta \\ \zeta / (1 + \zeta g'(\eta)) \end{pmatrix}$$

erfüllt alle Voraussetzungen von Satz 1, insbesondere auch:

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} [\zeta / (1 + \zeta g'(\eta))] \Big|_{\xi=\eta=\zeta=0} = 1 \neq 0$$

Und es ist weiter  $\varphi(0, \eta, 0) = (g(\eta), \eta, 0)$ .  $\varphi$  bildet also die  $\eta$ -Achse auf  $C$  ab. Nach Bem. b) 4.2 ist damit die  $\eta$ -Achse singuläre Menge von  $f \circ \varphi$ . ✓

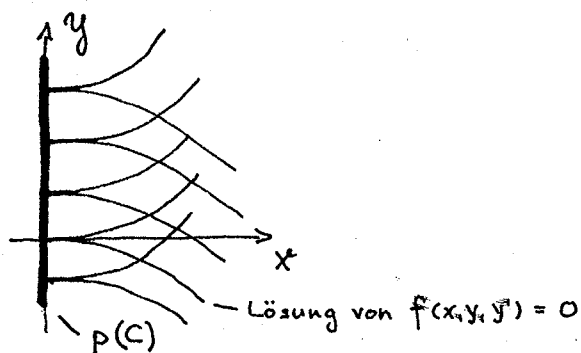
#### Zusammenfassung:

oBdA kann man bei allgemeinen (d.h. mit  $C^\infty$ -Äquivalenz verträglichen) Betrachtungen über das lokale Lösungsverhalten impliziter Differentialgleichungen immer annehmen, daß:

- i) die lokale implizite Differentialgleichung in einer Umgebung des Ursprungs im  $\mathbb{R}^3$  zu betrachten ist,
- ii) an Faltenpunkten die singuläre Menge  $C$  lokal in der  $(x, y)$ -Ebene liegt, also durch  $z = 0$  als Teilmenge von  $S$  beschrieben ist,
- iii) an regulären Faltenpunkten die singuläre Menge  $C$  gerade die  $y$ -Achse  $\subset \mathbb{R}^3$  ist.

### § 5 Lösungen in der Nähe eines regulären Faltenpunktes

Nach §4 Satz 4 kann man oBdA annehmen, daß in der Nähe des zu untersuchenden Faltenpunktes die Faltenlinie gerade die  $y$ -Achse ist, der Faltenpunkt selbst der Ursprung. Weiter gibt es genau zwei verschiedene Lösungen, die die Falte in ein und demselben Punkt treffen, deren eine eine 2.Ableitung von  $+\infty$ , die andere eine 2.Ableitung von  $-\infty$  hat. (vgl. §3, insbes. Bem. nach Satz 2; außerdem folgt dies aus nachstehendem Satz) Man bekommt also in der Situation des regulären Faltenpunktes bis auf  $C^\infty$ -Äquivalenz folgendes lokale Lösungsverhalten:



Genauer gilt:

**Satz 1:** Jede lokale implizite Differentialgleichung

$(f(x,y,y')=0; (x_0, y_0, z_0))$ , für die  $(x_0, y_0, z_0)$  ein regulärer Faltenpunkt ist, ist  $C^\infty$ -äquivalent zu einer lokalen impliziten Differentialgleichung  $(g(x,y,y')=0; 0)$  um den Ursprung mit der  $y$ -Achse als singulärem Ort, für deren lokale Lösungsschar gilt:

Es gibt eine  $C^\infty$ -Einheit  $\xi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(t, y_0) \mapsto \xi(t, y_0)$ , sodaß die Lösungen von  $g(x,y,y')=0$  lokal um  $(0,0,0)$  die Parameterform

$$\left. \begin{aligned} x(t, y_0) &= t^2 \\ y(t, y_0) &= t^3 \xi(t, y_0) + y_0 \end{aligned} \right\} t \in \mathbb{R}; y_0 := y(0)$$

haben, d.h. bis auf Terme höherer Ordnung Neilsche Parabeln mit Umkehrpunkten auf der  $y$ -Achse sind.

Bew.: Nach §4 Satz 4 ist oBdA  $(x_0, y_0, z_0) = 0$  und die Faltenlinie gerade die  $y$ -Achse. Es genügt nun zu zeigen, daß es  $C^\infty$ -Einheiten  $\mu, \nu: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  gibt, sodaß

$$\begin{aligned}x(t, y_0) &= t^2 \mu(t, y_0) \\y(t, y_0) &= t^3 \nu(t, y_0) + y_0.\end{aligned}$$

Daraus erhält man nämlich den Satz wie folgt:

Betrachte den  $C^\infty$ -Diffeomorphismus

$$\begin{pmatrix} t \\ y_0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} t \sqrt{|\mu(t, y_0)|} \\ y_0 \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} \tau \\ y_0 \end{pmatrix} \quad (C^\infty, \text{ da } \mu \text{ Einheit})$$

(für festes  $y_0$  ist dies gerade eine Umparametrisierung  $t \mapsto \tau(t, y_0)$ )

Er liefert:

$$\begin{aligned}x(\tau, y_0) &= \tau^2 \\y(\tau, y_0) &= \tau^3 \varepsilon(\tau, y_0) + y_0\end{aligned} \quad \varepsilon: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad C^\infty\text{-Einheit. } \checkmark$$

Zum eigentlichen Beweis:

Nach dem Vorbereitungssatz von Weierstrass-Malgrange kann man oBdA annehmen, daß

$$f(x, y, z) = z^2 - 2za(x, y) + b(x, y); \quad a, b \in \mathcal{M}(2).$$

Dann ist  $f_x(0) \neq 0 \Leftrightarrow b_x(0) \neq 0$ . Da die  $y$ -Achse  $C$  sein soll, gilt  $\underline{a(0, \cdot) = 0}$ , denn es ist  $f_z = 2(z - a(x, y))$ . Da auf  $C$  natürlich auch  $f$  verschwindet, gilt auch noch:  $\underline{b(0, \cdot) = 0}$ .

Betrachte jetzt die geliftete Differentialgleichung:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2z - 2a(x, y) \\ \dot{y} &= 2z^2 - 2za(x, y) \\ \dot{z} &= 2za_x(x, y) - b_x(x, y) + 2z^2 a_y(x, y) - zb_y(x, y)\end{aligned}$$

Sei  $(x, y, z)(t, y_0)$  die dazugehörige allgemeine Lösung zu den Anfangswerten

$$x(0, y_0) = z(0, y_0) = 0, \quad y(0, y_0) = y_0.$$

(Das sind gerade die Lösungen von  $\mathcal{X}_f|_S$ , die bei  $t=0$  die  $y$ -Achse treffen)

Da  $b_x(0) \neq 0$  ist, folgt sofort, daß  $z_t(0, y_0) \neq 0$  ist, also kann man nach dem Vorbereitungssatz von Weierstrass-Malgrange schreiben:

$$z(t, y_0) = t\alpha(t, y_0), \quad \alpha: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad C^\infty\text{-Einheit.}$$

Damit erhält man aus der gelifteten Differentialgleichung:

$$x_t(t, y_0) = 2t\alpha(t, y_0) - 2a(x, y), \text{ also wegen } a(0, y) = 0 :$$

$$x_t(0, \cdot) = 0$$

$$x_{tt}(t, y_0) = 2\alpha(t, y_0) + 2t\alpha_t(t, y_0) - 2a_x(x, y)x_t(t, y_0) - 2a_y(x, y)y_t(t, y_0), \text{ also:}$$

$$x_{tt}(0, \cdot) = 2\alpha(0, \cdot) \neq 0, \text{ denn es ist } y_t(0, \cdot) = 0, \text{ wie sofort gezeigt wird.}$$

Nach dem Vorbereitungssatz von Weierstrass-Malgrange kann man daher schreiben:

$$x(t, y_0) = t^2 \mu(t, y_0), \quad \mu: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \text{ } C^\infty\text{-Einheit.}$$

Weiter ist:

$$y_t = zx_t = 2t\alpha x_t, \text{ also:}$$

$$y_t(0, \cdot) = 0$$

$$y_{tt} = 2t\alpha x_{tt} + (2\alpha + 2t\alpha_t)x_t, \text{ also:}$$

$$y_{tt}(0, \cdot) = 0$$

Schließlich ist:

$$y_{ttt} = 2\alpha x_{ttt} + 2t\alpha_t x_{tt} + (2\alpha + 2t\alpha_t)x_{tt} + (2\alpha + 2t\alpha_t)_t x_t, \text{ also:}$$

$$y_{ttt}(0, \cdot) = (4\alpha x_{tt})(0, \cdot) \neq 0$$

Und man kann nach dem Vorbereitungssatz schreiben:

$$y(t, y_0) = t^3 \nu(t, y_0) + y_0, \quad \nu: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \text{ } C^\infty\text{-Einheit. } \checkmark$$

Bemerkung: Die Neilschen Parabeln

$$x(t, y_0) = t^2$$

$$y(t, y_0) = 2t^3/3 + y_0$$

sind gerade die Lösungen von  $y'^2 - x = 0$ . Umgekehrt besagt folgender Satz, daß dies bis auf  $C^1$ -Transformationen in der  $(x, y)$ -Ebene auch die einzige auftretende Lösungsschar lokal um einen regulären Faltenpunkt ist.

Satz 2: Sei  $(x_0, y_0, z_0)$  ein regulärer Faltenpunkt von  $(f(x, y, y')=0, (x_0, y_0, z_0))$ . Dann gibt es einen lokalen  $C^1$ -Diffeomorphismus

$$\tilde{\varphi}: (\mathbb{R}^2, (x_0, y_0)) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, \tilde{\varphi}(x_0, y_0)),$$

der die Lösungen von  $f(x, y, y')=0$  um  $(x_0, y_0, z_0)$  in die Lösungen von  $y'^2 - x = 0$  um 0 überführt.

Bew.: Zur Vereinfachung kann man statt  $y'^2 - x = 0$  auch die Differentialgleichung  $4y'^2 - 9x = 0$  betrachten. Die Lösungen dieser Differentialgleichung haben dann die Form:

$$x(t, y_0) = t^2, \quad y(t, y_0) = t^3 + y_0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Nach Satz 1 und §4 kann man oBdA annehmen, daß  $(x_0, y_0, z_0) = 0$  und  $C$  die  $y$ -Achse ist, (Man muß dann nur noch  $\tilde{\varphi}$  mit den verwendeten Transformationen des  $\mathbb{R}^2$  aus §4 komponieren.) und weiter:

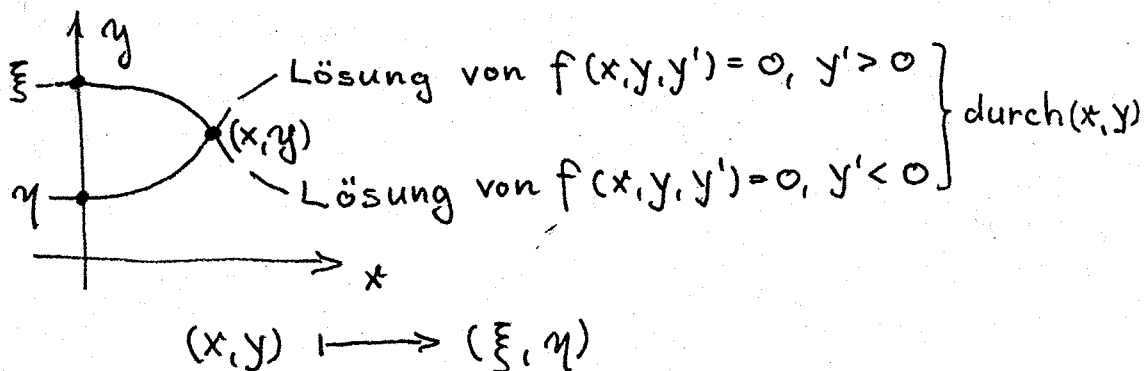
$$x(t, y_0) = t^2, \quad y(t, y_0) = t^3 \varepsilon(t, y_0) + y_0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon \in C^\infty\text{-Einheit.}$$

für die Lösungsschär von  $f(x, y, y') = 0$  um 0 gilt.

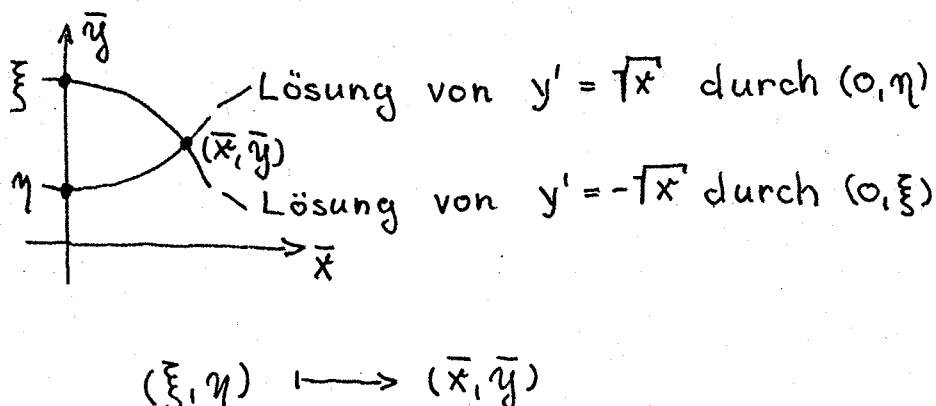
Konstruktion von  $\tilde{\varphi}: (x, y) \longmapsto (\bar{x}, \bar{y})$ :

Es gibt im Wesentlichen nur eine Möglichkeit,  $\tilde{\varphi}$  zu konstruieren, und zwar als Komposition der beiden folgenden Abbildungen:

i)



ii)



zu i):  $(x, y) \mapsto (\xi, \eta)$  ist dadurch beschrieben, daß  $\xi$  und  $\eta$  Lösungen von

$$* \begin{cases} t^3 \varepsilon(t, \xi) + \xi = y \\ -t^3 \varepsilon(-t, \eta) + \eta = y \end{cases} \quad t \geq 0, \quad t^2 = x \quad \text{sind.}$$

Nach dem impliziten Funktionentheorem kann man nahe  $t=0$  ( $\Leftrightarrow x=0$ )

\* nach  $(\xi, \eta)$  auflösen. Bei  $t=0$  ist trivialerweise  $\xi = \eta = y$ .

Man erhält so  $C^\infty$ -Funktionen  $\xi(t, y), \eta(t, y)$ .

Durch die Transformation  $(t, y) \mapsto (t^2, y) =: (x, y)$  schließlich:  $\xi(x, y), \eta(x, y)$ ;  $C^\infty$  falls  $x \neq 0$ .

Für spätere Überlegungen werden nun einige Grenzwerte berechnet:

Differenziert man die erste Zeile von \* nach  $t$ , so erhält man:

$$3t^2 \varepsilon_t(t, \xi) + t^3 (\varepsilon_{tt}(t, \xi) + \varepsilon_{t\eta}(t, \xi) \xi_t) + \xi_t = 0, \text{ also:}$$

$$\xi_t(t, y) / (3t^2) \xrightarrow{t \rightarrow 0} -\varepsilon(0, y), \text{ denn } \xi(0, y) = y.$$

Analog ergibt sich:

$$\eta_t(t, y) / (3t^2) \xrightarrow{t \rightarrow 0} \varepsilon(0, y)$$

Wegen

$$\xi_t / t^2 = \xi_{xx} x_t / t^2 = 2 \xi_{xx} / \sqrt{x}, \quad (\text{da } y_t = 0, x_t = 2t, t = \sqrt{x})$$

bedeutet dies gerade:

$$(1) \begin{cases} 2 \xi_{xx} / (3\sqrt{x}) \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\varepsilon(0, y) \quad \text{und analog} \\ 2 \eta_{xx} / (3\sqrt{x}) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \varepsilon(0, y). \end{cases}$$

Außerdem ist trivialerweise:

$$(2) \quad \xi_y \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1 \quad \text{und} \quad \eta_y \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$$

Und es ist wegen \*:

$$\xi_y - \eta_y = t^3(\dots), \text{ also:}$$

$$(3) \quad (\xi_y - \eta_y) / \sqrt{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

zu ii):  $(\xi, \eta) \mapsto (\bar{x}, \bar{y})$  ist beschrieben durch:

$$\left. \begin{aligned} \bar{y} &= (\xi + \eta) / 2 \\ \bar{x} &= ((\eta - \xi) / 2)^{2/3} \end{aligned} \right\} \text{ oder äquivalent: } \begin{cases} \xi = \bar{y} - \sqrt[3]{\bar{x}}^3 \\ \eta = \bar{y} + \sqrt[3]{\bar{x}}^3 \end{cases}$$

Für später werden wieder einige Grenzwerte berechnet:

Offensichtlich ist:

$$(4) \quad \begin{aligned} \bar{y}_\xi &= \bar{y}_\eta = 1/2 \quad \text{und} \\ -\bar{x}_\xi &= \bar{x}_\eta = ((\eta - \xi) / 2)^{-1/3} / 3 \end{aligned}$$

Weiter ist:

$(\eta - \xi) = -t^3(\xi(t, \xi) + \xi(-t, \eta))$ , also nach Obigem:

$-\bar{x}_\xi \sqrt[3]{x} = \bar{x}_\eta \sqrt[3]{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} -(\xi(0, y))^{2/3}/3$ , und damit:

$$(5) \quad \bar{x}_\xi \xi_x + \bar{x}_\eta \eta_x = \bar{x}_\eta (\eta_x - \xi_x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\xi(0, y)^{2/3} \quad \text{nach (1)}$$

Sowie:

$$(6) \quad \bar{x}_\xi \xi_y + \bar{x}_\eta \eta_y = \bar{x}_\eta (\eta_y - \xi_y) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \quad \text{wegen (3)}.$$

Für die Jacobische von  $\tilde{\varphi}$  erhält man folglich:

$$\begin{pmatrix} \bar{x}_\xi & \bar{x}_\eta \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{pmatrix} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \begin{pmatrix} -(\xi(0, y))^{2/3} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

wegen (1), (2), (5), (6).

Damit ist  $\tilde{\varphi}$  ein  $C^1$ -Diffeomorphismus  $\tilde{\varphi}: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ , den man offensichtlich durch:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -(\xi(0, y))^{2/3} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

auf ganz  $\mathbb{R}^2$  erweitern kann.  $\checkmark$

Bemerkung: Außerhalb der  $y$ -Achse ist  $\tilde{\varphi}$  nach Konstruktion sogar  $C^\infty$ .

Nach §4 Satz 1 kann man zu  $\tilde{\varphi}$  ein passendes  $\varphi$  konstruieren, das dann außerhalb der  $(y, z)$ -Ebene ebenfalls  $C^\infty$  ist, ansonsten aber nur mindestens homöomorph. Der Satz beinhaltet dann insbesondere die  $C^0$ -Äquivalenz von  $(f(x, y, y') = 0; (x_0, y_0, z_0))$  und  $(y' - x = 0; 0)$ .

### §6 Lösungen in der Nähe eines singulären Faltenpunktes

Sei  $(x_0, y_0, z_0)$  singulärer Faltenpunkt von  $(f(x, y, y')=0; (x_0, y_0, z_0))$ , so kann man nach §4 bis auf  $C^\infty$ -Äquivalenz annehmen, daß:

$$(x_0, y_0, z_0) = 0 \quad \text{und} \quad C \subset (x, y)\text{-Ebene} \quad \text{ist.}$$

Nach §2 Satz 2 hat  $(f_x + zf_y)|_C$  für residual fast alle  $f$  eine einfache Nullstelle bei 0, was unter obigen Annahmen äquivalent zu:

$$f_x(0) = 0, \quad f_{xx}(0) \neq 0 \quad \text{ist.}^*$$

Bew.: Der Tangentialraum von  $C$  im Ursprung ist gerade die  $x$ -Achse, da im Ursprung das Richtungsfeld einmal tangential zu  $C$  sein muß (singulärer Faltenpunkt), und zum anderen gerade parallel zur  $x$ -Achse ist ( $z_0=0$ ). Also ist die Richtungsableitung von  $(f_x + zf_y)$  in Richtung  $C$  bei 0 proportional zur Ableitung in Richtung der  $x$ -Achse bei 0, und das ist gerade  $(f_{xx} + zf_{xy})(0) = f_{xx}(0)$ , und nach §2 Satz 2 ist diese Ableitung für residual fast alle  $f$  von Null verschieden. ✓

Weiter ist  $\text{grad } f(0) \neq 0$  für generisches  $f$ , also  $f_y(0) \neq 0$ , da schon  $f_x(0) = f_z(0) = 0$  ist. Damit gibt es nach dem Vorbereitungssatz von Weierstrass-Malgrange eine  $C^\infty$ -Funktion

$$g: (\mathbb{R}^2, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}, 0)$$

und eine  $C^\infty$ -Einheit

$$\varepsilon: (\mathbb{R}^3, 0) \longrightarrow \mathbb{R}$$

sodaß

$$f(x, y, z) = \varepsilon(x, y, z)(g(x, z) + y) .$$

Nach §4 kann man dann immer annehmen, daß bis auf  $C^\infty$ -Äquivalenz

$$f(x, y, z) = g(x, z) + y ,$$

wobei für  $g$  gilt:

- i)  $g_z(0) = 0, \quad g_{zz}(0) \neq 0$  (Faltenpunkt)
- ii)  $g_x(0) = 0, \quad g_{xx}(0) \neq 0$  (Einfache Nullstelle von  $(f_x + zf_y)|_C$ )
- iii)  $C \subset (x, y)$ -Ebene, d.h.:  $C = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid y = -g(x, 0)\}$

Sei

$$\bar{\pi}: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2; \quad (x, y, z) \longmapsto (x, z)$$

die kanonische Projektion auf die  $(x, z)$ -Ebene. Offenbar ist

\*) Daß die Einfachheit der Nullstelle mit  $C^\infty$ -Äquivalenz verträglich ist, wird für den Fall univ. Transf. in Satz 3 gezeigt



## - 6.2 -

$S = \text{graph}(g)$ , und  $\pi|_S$  ein Diffeomorphismus, sowie  $\pi(C)$  die  $x$ -Achse.

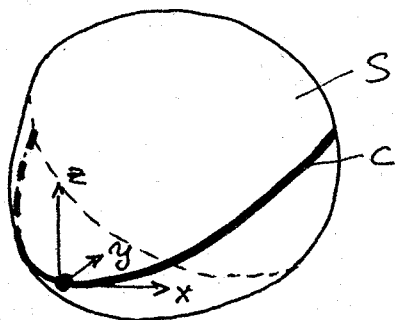
Bemerkung: Unter obigen Voraussetzungen i), ii), iii) gilt:

$$g_{zx}(x,0) = 0 \text{ (lokal um } x=0\text{)}$$

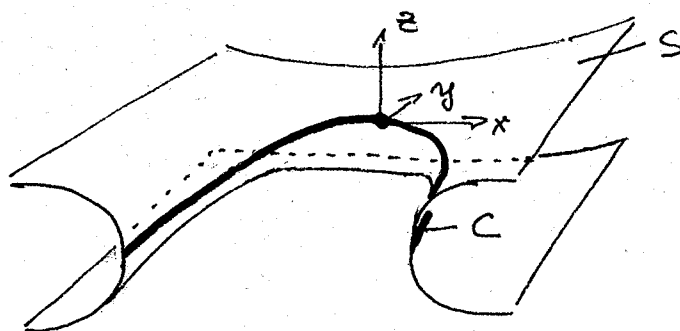
Bew.: Es ist  $g_z|_{\pi(C)} = 0$  nach Definition von  $C$ , also verschwindet die Ableitung von  $g_z$  in Richtung  $\pi(C)$ , und dies ist gerade die  $x$ -Achse.  $\checkmark$

Je nachdem, ob die Determinante der Hessematrix von  $g$  positiv oder negativ ist, erhält man für die Gestalt von  $S = \text{graph}(g)$  eine der beiden Möglichkeiten:

a)  $(g_{xx}g_{zz} - g_{zx}^2)(0) > 0$ :  $S$  hat bei  $0$  ein Extremum



b)  $(g_{xx}g_{zz} - g_{zx}^2)(0) < 0$ :  $S$  hat bei  $0$  einen Sattelpunkt



Bemerkung: OBdA ist dabei wieder  $g_{zx}(0) = 0$  und  $g_{xx}(0) > 0$ .

Bew.: Betrachte im Fall  $g_{xx}(0) < 0$  statt  $g(x,z) + y$  die mittels

$$\varphi : (x,y,z) \mapsto (x,-y,-z)$$

transformierte Differentialgleichung. Sie ist nach §4 Satz 1  $C^\infty$ -äquivalent zur ersten, und es ist

$$(g \circ \varphi)_{xx}(0) > 0. \quad \checkmark$$

Es kann also für  $g$  immer angenommen werden:

- i)  $g_z(0) = 0, g_{zz}(0) \neq 0$
- ii)  $g_x(0) = 0, g_{xx}(0) \neq 0$
- iii)  $C = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid y = -g(x, 0)\}$
- iv)  $g_{zx}(x, 0) = 0$
- v)  $g_{xx}(0) > 0,$

falls man nicht gerade Aussagen über  $g$  machen will, bei denen die angegebenen Transformationen nicht oBdA gemacht werden dürfen, z.B.: Für residual fast alle  $f$  hat das zugehörige  $g$  die Gestalt ...,; wie dies in Satz 2 der Fall sein wird. Bis dort sei also  $g$  noch so allgemein wie nötig angenommen.

Satz 1: Das Lösen von  $(g(x, y') + y = 0; 0) \quad (g \in C^\infty(\mathbb{R}^2, 0), (\mathbb{R}, 0))$   
ist äquivalent zum Lösen von

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_z \\ -z - g_x \end{pmatrix} =: \tilde{\mathcal{H}}_g(x, z).$$

Die gelifteten Lösungen von  $g(x, y') + y = 0$  erhält man dann als

$$(\pi|_S)^{-1}(x, z)(t) = (x, g(x, z), z)(t)$$

Bew.: Klar nach §3 Satz 1 Bemerkung. ✓

Bemerkungen: i) Durch Zurückholen von  $(dy - zdx)|_S$  mittels der Karte  $(x, z) \mapsto (x, g(x, z), z) \in S$  erhält man dieselbe Differentialgleichung wie in Satz 1:

$(dy - zdx)|_S = 0$  ist äquivalent zu:  $-dg(x, z) - z dx = 0$ ,  
und das ist das Gleiche wie:  $-g_x dx - g_z dz - z dx = 0$ .

Letztere Differentialform verschwindet aber genau auf den Vektorfeldern der Form  $\alpha \cdot (g_z, -z - g_x), \alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ . ✓

ii)  $\dot{x} = g_z, \dot{z} = -g_x$  ist die Differentialgleichung der Höhenlinien von  $S$ . Da man sich in der Nähe des Ursprungs befindet, kann man annehmen, daß gewisse Ähnlichkeiten zwischen den Integralkurven von  $\tilde{\mathcal{H}}_g$  und den Höhenlinien von  $S$  bestehen. Für den Sattel erweist sich das auch als richtig, nicht aber für den Fall des Extremums, denn lokal um 0 tre-

ten keine periodischen Lösungen für  $\tilde{\mathcal{H}}_g$  auf.

Bew.: Es ist  $\operatorname{div}(g_z - z - g_x) = -1$ , und im Fall periodischer Lösungen würden diese ein nichtleeres Gebiet  $G$  beranden, und es wäre nach dem Satz von Gauß:

$$0 \neq -\operatorname{vol}(G) = \int_G \operatorname{div}(g_z - z - g_x) = \int_{\partial G} \underbrace{\langle (g_z - z - g_x), \mathcal{N} \rangle}_{=0, \text{ da } \partial G \text{ Integralkurve}} = 0$$

wobei  $\mathcal{N} :=$  äußerer Normaleneinheitsvektor auf  $G$ .

Statt  $\tilde{\mathcal{H}}_g$  zu untersuchen, kann man sich teilweise auch auf das linearisierte Problem

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{zx} & g_{zz} \\ -g_{xx} & -1 - g_{zx} \end{pmatrix} (0) \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} =: H_g \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}$$

(das sich unter Annahme der Bedingungen i)...iv) zu

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & g_{zz} \\ -g_{xx} & -1 \end{pmatrix} (0) \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \quad \text{vereinfacht.})$$

beschränken, denn es gilt folgender

Linearisierungssatz von P.Hartman [7], [8]

Sei

$$\dot{x} = Ax + F(x)$$

ein autonomes reelles Differentialgleichungssystem mit

$$A \in M(n \times n, \mathbb{R}), \quad F \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n),$$

sodaß für die Eigenwerte  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  von  $A$

$$\operatorname{Re} \lambda_i \neq 0 \quad \text{für } i=1, \dots, n$$

und für  $F$

$$F(x) = o(|x|) \quad \text{für } x \rightarrow 0 \quad \text{gilt.}$$

Sei weiter

$$\Phi(t, x) = e^{At} x + X(t, x)$$

der zu obigem System gehörige Fluß.

( $e^{At} x$  ist der zu  $\dot{x} = Ax$  gehörige Fluß)

Dann ist für festes  $t$

$$X(t, x) = o(|x|) \quad \text{für } x \rightarrow 0$$

und es gibt einen Homöomorphismus

$$H: (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$$

sodaß

$$H(\Phi(t, H^{-1}(x))) = e^{At} x.$$

Außerhalb der invarianten Mannigfaltigkeiten ist  $H$  sogar diffeomorph.

Bemerkungen: i) Der Linearisierungssatz läßt sich auf

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \tilde{\mathcal{H}}_g \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = H_g \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} + [\tilde{\mathcal{H}}_g \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} - H_g \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}]$$

anwenden, denn  $\tilde{\mathcal{H}}_g$  ist  $C^\infty$ , und  $H_g$  ist gerade die Jacobische von  $\tilde{\mathcal{H}}_g$  im Ursprung, also

$$[\tilde{\mathcal{H}}_g \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} - H_g \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}] = o(\| \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \|) \quad \text{für} \quad \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \longrightarrow 0.$$

Die Bedingung für die Eigenwerte ist ebenfalls erfüllt, wie man den nachfolgenden Untersuchungen entnimmt.

ii) Die Richtungen der stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten im Ursprung sind im linearisierten und im ursprünglichen System gleich ([6] S.371 ff).

iii) Das linearisierte System

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = H_g \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad H_g = \begin{pmatrix} 0 & g_{zz}(0) \\ -g_{xx}(0) & -1 \end{pmatrix}$$

entspricht gerade der impliziten Differentialgleichung

$$(y^2 g_{zz}(0) + x^2 g_{xx}(0))/2 + y = 0.$$

Die Eigenwerte und Eigenvektoren von  $H_g$ :

Das charakteristische Polynom von

$$H_g = \begin{pmatrix} g_{zx} & g_{zz} \\ -g_{xx} & -1 - g_{zx} \end{pmatrix} (0) \quad \text{ist}$$

$$P_g(\lambda) := (g_{zx}(0) - \lambda)(-1 - g_{zx}(0) - \lambda) + g_{xx}(0)g_{zz}(0).$$

Die Eigenwerte  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  von  $H_g$  sind dann:

$$\lambda_{1,2} = (-1 \pm \sqrt{1 - 4[g_{zx}(0)(1 - g_{zx}(0)) + g_{xx}(0)g_{zz}(0)]})/2$$

Und die Eigenvektoren haben die Gestalt:

$$v_\lambda = (g_{zz}(0), \lambda - g_{zx}(0)), \text{ falls } H_g v_\lambda = \lambda v_\lambda$$

Bew.: Eigenwerte: Klar. Eigenvektoren: Sei  $g_{xx} := g_{xx}(0)$  usf.,

$v = (v_1, v_2)$  Eigenvektor zum Eigenwert  $\lambda$ . Offenbar folgt aus  $v_1=0$  daß  $v=0$ , also ist oBdA  $v_1 \neq 0$ , z.B.  $v_1 = g_{zz}$ . Also:

$$\begin{pmatrix} g_{zx} & g_{zz} \\ g_{xx} & -1-g_{zx} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{zz} \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda g_{zz} \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{zz}g_{zx} + v_2g_{zz} \\ \dots \end{pmatrix}$$

Woraus sofort  $v_2 = \lambda - g_{zx}$  folgt.  $\checkmark$

Offenbar sind die Eigenvektoren von  $H_g$  genau dann verschieden, wenn es die Eigenwerte sind. Man wird annehmen, daß im Allgemeinen die Eigenwerte auch tatsächlich verschieden sind:

Satz 2: Für residual fast alle  $f$  gilt:

Ist  $(x_0, y_0, z_0)$  singulärer Faltenpunkt von  $f(x, y, y') = 0$ ,

an dem  $(f_x + zf_y) \Big|_C$  eine einfache Nullstelle hat

(dies stellt nach §2 Satz 2 keine Einschränkung dar),

so gilt für die lokale Differentialgleichung

$$(g(x, y') + y = 0; 0),$$

die aus

$$(f(x, y, y') = 0; (x_0, y_0, z_0))$$

durch Translation in den Ursprung und Parallelisieren des Richtungsfeldes gemäß §4 Satz 2 und Satz 3 hervorgeht, daß die Eigenwerte  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  von  $H_g$  verschieden sind.

Bemerkung:  $g$  erfüllt dann die Bedingungen i)...iv)

Zum Beweis des Satzes benötigt man genauere Aussagen über das Verhalten von  $\mathcal{H}_f$  in der Nähe von Singularitäten gegenüber  $C^\infty$ -Äquivalenz:

Lemma: Sei  $\varphi: (\xi, \eta, \zeta) \mapsto (x, y, z)$  eine universelle Transformation wie in §4 Satz 1 angegeben.

$$\text{Sei } \varepsilon_\varphi := \varphi_{33} \cdot (\varphi_{1\xi} + \zeta \varphi_{1\eta}) \quad (\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3))$$

( $C^\infty$ -Einheit, vgl. §4 Satz 1)

Dann gilt:

$$(1) \mathcal{H}_{f \circ \varphi} = \varepsilon_\varphi \cdot (D\varphi)^{-1} \cdot (\mathcal{H}_f \circ \varphi)$$

Ist weiter  $\sigma \in \mathbb{R}^3$  mit  $\mathcal{H}_{f \circ \varphi}(\sigma) = 0$ , so gilt für die zu  $\mathcal{H}_f$  bzw.  $\mathcal{H}_{f \circ \varphi}$  gehörigen linearisierten Differentialgleichungen  $\dot{x} = H_f x$  bzw.  $\dot{x} = H_{f \circ \varphi} x$  :

$$(2) H_{f \circ \varphi} = \varepsilon_\varphi(\sigma) (D\varphi)^{-1}(\sigma) \cdot H_f \cdot D\varphi(\sigma)$$

Sei weiter  $i: (x, z) \mapsto (x, 0, z)$  die kanonische Einbettung des  $\mathbb{R}^2$  in die  $(x, z)$ -Ebene des  $\mathbb{R}^3$  und

$f(x, y, z) = \varepsilon(x, y, z)(g(x, z) + y)$ ,  $\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$  Einheit mit  $g_x(0) = g_z(0) = g(0) = 0$  lokal um 0. Dann ist

$$(3) \varepsilon(0) \cdot H_g = \bar{\pi} \cdot H_f \cdot i, \text{ wobei } \bar{\pi} \text{ und } i \text{ als die Matrizen der entsprechenden linearen Abbildungen zu verstehen sind.}$$

Genauer gilt sogar:

$$H_f = \varepsilon(0) \begin{pmatrix} g_{zx}(0) & * & g_{zz}(0) \\ 0 & 0 & 0 \\ -g_{xx}(0) & * & -1 - g_{zx}(0) \end{pmatrix} .$$

Bew.: Zu (3):  $f_x = \varepsilon g_x + \varepsilon_x (g+y)$

$$f_y = -\varepsilon + \varepsilon_y y$$

$$f_z = \varepsilon g_z + \varepsilon_z (g+y)$$

Wegen  $g(0) = g_x(0) = g_z(0) = 0$  gilt dann:

$$f_{zx}(0) = \varepsilon(0) g_{zx}(0)$$

$$f_{zz}(0) = \varepsilon(0) g_{zz}(0)$$

$$(f_x + z f_y)_x(0) = \varepsilon(0) g_{xx}(0)$$

$$(f_x + z f_y)_z(0) = \varepsilon(0) + \varepsilon(0) g_{zx}(0)$$

$$\text{grad}(z f_z)(0) = 0; \text{ dies da } z(0) = 0, f_z(0) = 0.$$

Daraus folgt sofort die Behauptung.  $\checkmark$

- 6.8 -

Zu (2): Dies folgt aus (1) durch Differenzieren:

(1)  $\Leftrightarrow D\varphi \mathcal{H}_{f \circ \varphi} = \varepsilon_\varphi(\mathcal{H}_f \circ \varphi)$ . Differenzieren liefert:  
 $D\varphi(\sigma) \cdot H_{f \circ \varphi} = \varepsilon_\varphi(\sigma) \cdot H_f \cdot D\varphi(\sigma)$ , denn es ist  $\mathcal{H}_{f \circ \varphi}(\sigma) = \mathcal{H}_f(\varphi(\sigma)) = 0$ ,  
 da die Nullstellen von  $\mathcal{H}_f$  Invarianten gegenüber  $C^\infty$ -Äquivalenz sind (§4 Bem b) zur Definition).  $\checkmark$

Zu (1): (vgl. Bew. zur Bem. zu §4 Satz 1)

$$D\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_{1\xi} & \varphi_{1\eta} & 0 \\ \varphi_{2\xi} & \varphi_{2\eta} & 0 \\ \varphi_{3\xi} & \varphi_{3\eta} & \varphi_{3\zeta} \end{pmatrix} \quad \text{also,}$$

$$(\mathcal{H} \circ \varphi)_\xi = f_x \varphi_{1\xi} + f_y \varphi_{2\xi} + f_z \varphi_{3\xi}$$

$$(\mathcal{H} \circ \varphi)_\eta = f_x \varphi_{1\eta} + f_y \varphi_{2\eta} + f_z \varphi_{3\eta}$$

$$(\mathcal{H} \circ \varphi)_\zeta = f_z \varphi_{3\zeta}$$

(hierin ist zur Abkürzung für  $f_x \circ \varphi$  nur  $f_x$  usf. geschrieben)

Nun ist:

$$\mathcal{H}_{f \circ \varphi} = \begin{pmatrix} (\mathcal{H} \circ \varphi)_\zeta \\ \mathcal{J}(\mathcal{H} \circ \varphi)_\zeta \\ -[(\mathcal{H} \circ \varphi)_\xi + \mathcal{J}(\mathcal{H} \circ \varphi)_\eta] \end{pmatrix}$$

Also:

$$D\varphi \mathcal{H}_{f \circ \varphi} = \varphi_{3\zeta} \begin{pmatrix} (\varphi_{1\xi} + \mathcal{J}\varphi_{1\eta}) f_z \\ (\varphi_{2\xi} + \mathcal{J}\varphi_{2\eta}) f_z \\ -(f_x(\varphi_{1\xi} + \mathcal{J}\varphi_{1\eta}) + f_y(\varphi_{2\xi} + \mathcal{J}\varphi_{2\eta})) \end{pmatrix}$$

zur. letzten Zeile:

$$\begin{aligned} & \langle (\varphi_{3\xi}, \varphi_{3\eta}, \varphi_{3\zeta}), (f_z \varphi_{3\zeta}, \mathcal{J} f_z \varphi_{3\zeta}, -(f_x \varphi_{1\xi} + f_y \varphi_{2\xi} + f_z \varphi_{3\xi} + \mathcal{J}(f_x \varphi_{1\eta} + f_y \varphi_{2\eta} + f_z \varphi_{3\eta}))) \rangle \\ &= f_z \varphi_{3\zeta} (\varphi_{3\xi} + \mathcal{J}\varphi_{3\eta}) - \varphi_{3\zeta} \{ f_x(\varphi_{1\xi} + \mathcal{J}\varphi_{1\eta}) + f_y(\varphi_{2\xi} + \mathcal{J}\varphi_{2\eta}) + f_z(\varphi_{3\xi} + \mathcal{J}\varphi_{3\eta}) \} \\ &= -\varphi_{3\zeta} (f_x(\varphi_{1\xi} + \mathcal{J}\varphi_{1\eta}) + f_y(\varphi_{2\xi} + \mathcal{J}\varphi_{2\eta})). \quad \checkmark \end{aligned}$$

Damit ist wegen

$$z = (\varphi_{2\xi} + \mathcal{J}\varphi_{2\eta}) / (\varphi_{1\xi} + \mathcal{J}\varphi_{1\eta})$$

und nach Def v.  $\varepsilon_\varphi$ :

$$D\varphi \cdot \mathcal{H}_{f \circ \varphi} = \varepsilon_\varphi \begin{pmatrix} f_z \\ z f_z \\ -f_x - z f_y \end{pmatrix} = \varepsilon_\varphi(\mathcal{H}_f \circ \varphi) \quad \checkmark$$

Beweis von Satz 2: Das Lemma besagt, daß man unter den für (3) angegebenen Bedingungen für  $g$  (diese entsprechen der Bedingung, daß  $f$  bei 0 einen singulären Faltenpunkt hat (vgl. weiter vorn in diesem Paragraphen)) die Matrix  $H_g$  auf die angegebene Weise aus  $H_f$  gewinnen kann, und daß, falls  $\varphi$  die in §4 Satz 3 Bew. zur Parallelisierung des Richtungsfeldes um den Ursprung angegebene Transformation ist, sich die Eigenwerte der zu  $f$  bzw.  $f \circ \varphi$  gehörigen Matrizen  $H_g$  nur um einen konstanten Faktor  $\varepsilon_\varphi(0) \neq 0$  unterscheiden. Damit braucht man in unserem Fall nur noch zu zeigen, daß für residual fast alle  $f$  gilt:

(\*) Sei  $(x_0, y_0, z_0)$  singulärer Faltenpunkt von  $f(x, y, y') = 0$ ,  
und

$$(g(x, y') + y = 0; 0)$$

die implizite Differentialgleichung, die aus

$$(f(x, y, y') = 0; (x_0, y_0, z_0))$$

nur durch Translation in den Ursprung gemäß §4 Satz 2 und Multiplikation mit einer Einheit hervorgeht. Dann sind die Eigenwerte von  $H_g$  verschieden.

Bew. von (\*): Es ist

$$H_g = \begin{pmatrix} g_{zx} & g_{zz} \\ -g_{xx} & -1-g_{zx} \end{pmatrix}(0)$$

wobei  $g(0) = g_z(0) = g_x(0) = 0$ . Mit

$$f(x, y, z) := \varepsilon(x, y, z)(g(x, z) + y), \quad \varepsilon \in C^\infty\text{-Einheit}$$

gilt dann wegen  $f_y(0) = \varepsilon(0)$  nach Lemma (3):

$$1/f_y(0) \begin{pmatrix} f_{xz} & f_{zz} \\ -f_{xx} & -f_{xz} - f_y \end{pmatrix}(0) = H_g$$

Nun sind die Eigenwerte von  $H_g$  genau dann verschieden, wenn die Diskriminante von  $P_g$  nicht verschwindet. Diese ist aber gerade:

$$1 - 4\det(H_g),$$

denn  $P_g(t) = \det(H_g - t \text{id}) = t^2 - \text{Sp}(H_g)t + \det H_g = t^2 - t + \det(H_g)$

Nach Obigem ist  $1 - 4\det(H_g) \neq 0$  äquivalent zu:

$$-4\det \begin{pmatrix} f_{zx} & f_{zz} \\ -f_{xx} & -f_{xz} - f_y \end{pmatrix}(0) \neq f_y(0).$$



- 6.10 -

Sei nun  $\varphi$  gemäß §4 Satz 2 die Translation in den Ursprung.

Sei:  $F := f \circ \varphi^{-1}$ , also  $F \circ \varphi = f$ ,  $\varphi(0) =: (x_0, y_0, z_0)$

$\varphi$  hat die Jacobische

$$D\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ z_0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und es ist:

$$f_x = F_x \circ \varphi + z_0 F_y \circ \varphi$$

$$f_y = F_y \circ \varphi$$

$$f_z = F_z \circ \varphi$$

(Wenn man

unter  $x, y, z$  sowohl die transformierten als auch die nicht transformierten Koordinaten versteht, je nachdem ob sie als Index bei  $f$  oder bei  $F$  stehen.)

Weiter ergibt sich im Ursprung:

$$f_{xx}(0) = (F_{xx} + 2z_0 F_{xy} + z_0^2 F_{yy})(x_0, y_0, z_0)$$

$$f_{zx}(0) = (F_{zx} + z_0 F_{zy})(x_0, y_0, z_0)$$

$$f_{zz}(0) = F_{zz}(x_0, y_0, z_0)$$

(\*) ist also für  $F$  genau dann erfüllt, wenn

$$0 \neq \left\{ \det \begin{pmatrix} F_{zx} + z_0 F_{zy} & F_{zz} \\ -(F_{xx} + 2z_0 F_{xy} + z_0^2 F_{yy}) & -(F_{zx} + z_0 F_{zy}) - F_y \end{pmatrix} + 4F_y \right\} (x_0, y_0, z_0) \\ =: A(x, y, z, F, F_x, \dots, F_{zz}) (x_0, y_0, z_0).$$

Wobei  $A$  als Abbildung

$$A: J^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

zu verstehen ist. Definiere

$$\tilde{A} := (A, F, F_z, F_x + zF_y) : J^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^4,$$

so ist (\*) äquivalent dazu, daß der 2-Jet von  $F$  die Menge

$$W := \tilde{A}^{-1}(0) \text{ nicht trifft.}$$

Nun ist  $\text{Rang}(\tilde{A}) = 4$ , denn:

$$D\tilde{A} = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & * & 0 & 0 & -(4 + F_{zx} + zF_{zy}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & F_y & 0 & 1 & z & 0 \end{array} \right) *$$

(Wie man der Definition von A und der expliziten Form von A:  
 $A = -(F_{zx} + z_0 F_{zy} + F_y)(F_{zx} + z_0 F_{zy}) + F_{zz}(F_{xx} + 2z_0 F_{xy} + z_0^2 F_{yy}) + 4F_y$   
 entnimmt.)

Die Determinante der eingerahmten Untermatrix von  $\tilde{D}A$  ist gerade

$$4 + F_{zx} + zF_{zy}.$$

Dies kann man obdA als  $\neq 0$  annehmen, denn für residual fast alle F trifft nach dem Transversalitätssatz  $j^2 F$  die Menge  $\{F = F_z = F_x + zF_y = 4 + F_{zx} + zF_{zy} = 0\} \subset J^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$  nicht, denn sie hat Kodimension  $4 > 3 = \dim \mathbb{R}^3$ .

Damit ist aber  $\text{Kodim } W = 4 > 3 = \dim \mathbb{R}^3$ , und somit wieder  $j^2 F(\mathbb{R}^3) \cap W = \emptyset \Leftrightarrow j^2 F \bar{\cap} W$ , und der Satz folgt aus dem Transversalitätssatz.  $\checkmark$

Satz 2, der Linearisierungssatz, sowie die Charakterisierung der Singularitäten zweidimensionaler autonomer Systeme ([6], S. 371ff) liefern nun für die Lösungen der zu  $f(x, y, y') = 0$  gehörigen gelifteten Differentialgleichung an singulären Faltenpunkten folgende

### Lokale Charakterisierung der Singularitäten von $\mathcal{H}_f$ :

Satz 3: Für residual fast alle f gilt an jedem singulären Faltenpunkt  $(x_0, y_0, z_0)$ :

Sei

$$(g(x, y') + y = 0; 0)$$

die aus

$$(f(x, y, y') = 0; (x_0, y_0, z_0))$$

durch Translation in den Ursprung und Parallelisieren des Richtungsfeldes nach §4, sowie Multiplikation mit einer  $C^\infty$ -Einheit entstandene lokale Differentialgleichung (g erfüllt dann automatisch die Bedingungen i)...iv)), so hat man folgende lokale Charakterisierung für das Phasenportrait der entsprechenden gelifteten Differentialgleichung

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \tilde{\mathcal{H}}_g \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} :$$

- 6.12 -

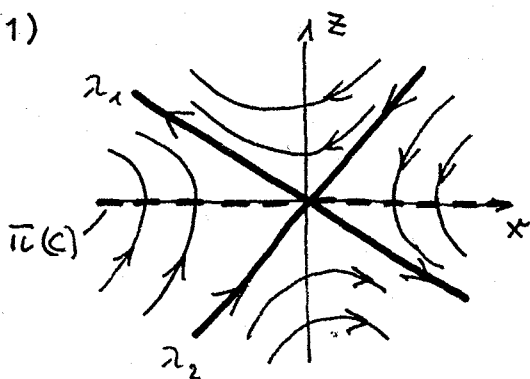
Es tritt genau einer der drei folgenden Fälle auf:

- (1)  $\det H_g < 0$ , Sattelpunkt:  $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$
- (2)  $0 < \det H_g < 1/4$ , stabiler Knoten:  $0 > \lambda_1 > \lambda_2$
- (3)  $\det H_g > 1/4$ , stabile Spirale:  $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2 \notin \mathbb{R}, \operatorname{Re}(\lambda_1) = -1/2$ .

Bemerkungen und Bilder:

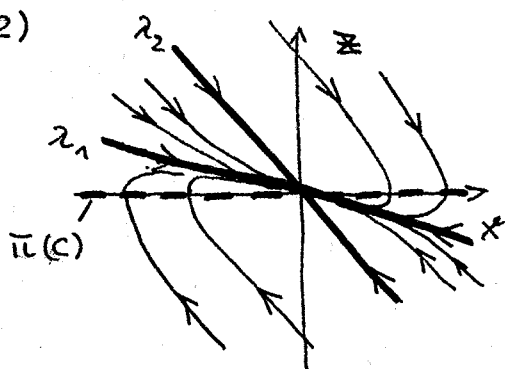
Da  $g$  die Bedingungen i)...iv) erfüllt, ist  $\det H_g = (g_{xx}g_{zz})(0)$ . Mit der zusätzlichen Normierung v):  $g_{xx}(0) > 0$  erhält man dann für (1),(2),(3) folgende Bilder:

(1)



Der Eigenvektor zu  $\lambda_1$  liegt im II. Quadranten, der zu  $\lambda_2$  im III. Die instabile Mannigfaltigkeit fñglich im II. und IV., die stabile im I. und III. Quadranten.

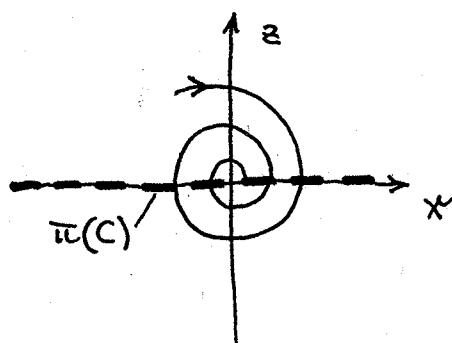
(2)



Beide Eigenvektoren liegen im IV. Quadranten, der "flachere", zu  $\lambda_1$  gehörige Eigenvektor gibt die Limesrichtung aller Orbits bei 0 an, mit Ausnahme der zu  $\lambda_2$  gehörigen stabilen Mannigfaltigkeit.

([6], S.371ff)

(3)



Die Spirale ist rechtsdrehend.

([6], S.371ff)

(=  $\pi(C)$ )

Lösungen, die die  $x$ -Achse nicht bei 0 treffen, schneiden diese senkrecht (bzw. garnicht) (vgl. §3 Bem.i) zu Satz 2).

Bew.: Zum Beweis des Satzes benötigt man offenbar nur noch

Die Invarianz der Einfachheit der Nullstellen von  $(f_x + zf_y)|_{\mathbb{C}}$  unter universellen Transformationen

Bew. hiervon: Sei  $\varphi : (\xi, \eta, \zeta) \mapsto (x, y, z)$  eine universelle Transformation nach §4 Satz 1. Dann ist:

$$(f \circ \varphi)_{\xi} + \zeta (f \circ \varphi)_{\eta} = ((f_x + zf_y) \circ \varphi) \cdot (\varphi_{1\xi} + \zeta \varphi_{1\eta}) + (f_z \circ \varphi) (\varphi_{3\xi} + \zeta \varphi_{3\eta}).$$

Dabei ist  $(\varphi_{1\xi} + \zeta \varphi_{1\eta})$  eine Einheit. (vgl. Bew. zum Lemma)

$$=: \varepsilon \cdot ((f_x + zf_y) \circ \varphi) + \alpha \cdot (f_z \circ \varphi).$$

Also gilt an einer Nullstelle  $s = \varphi(\sigma)$  von  $(f, f_z, f_x + zf_y)$ :

$$\text{grad}((f \circ \varphi)_{\xi} + \zeta (f \circ \varphi)_{\eta}) = \varepsilon(\sigma) \cdot (\text{grad}(f_x + zf_y)(s)) \cdot D\varphi(\sigma) + \alpha(\sigma) (\text{grad}(f_z)(s)) \cdot D\varphi(\sigma).$$

Weiter ist:

$$\text{grad}(f \circ \varphi)(\sigma) = \text{grad}(f)(s) \cdot D\varphi(\sigma), \quad \text{grad}(f \circ \varphi)_{\zeta}(\sigma) = \text{grad}(f_z)(s) \cdot D\varphi(\sigma)_{3\zeta}$$

(Letzteres wieder nach dem Bew. zum Lemma). Also gilt:

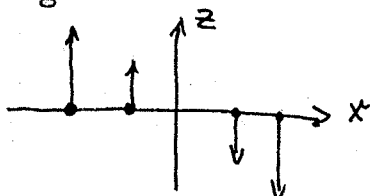
$$\langle \text{grad}((f \circ \varphi)_{\xi} + \zeta (f \circ \varphi)_{\eta}), \text{grad}(f \circ \varphi) \times \text{grad}(f \circ \varphi)_{\zeta} \rangle(\sigma) = \det(D\varphi(\sigma)) \cdot \varepsilon(\sigma) \cdot \varphi_{3\zeta}(\sigma) \langle \text{grad}(f_x + zf_y), \text{grad}(f) \times \text{grad}(f_z) \rangle(s),$$

$$\text{denn } \langle \text{grad}(f_z), \text{grad}(f) \times \text{grad}(f_z) \rangle = 0.$$

Damit ist man fertig. (vgl. §2 Satz 2 Beweis). ✓

Bemerkung: Hieraus folgt auch allgemein die Invarianz der Einfachheit der Nullstelle von  $(f_x + zf_y)|_{\mathbb{C}}$  bezüglich  $C^{\infty}$ -Äquivalenz, wenn man bedenkt, daß alle mit  $C^{\infty}$ -Äquivalenz verträglichen Transformationen  $\varphi$  zumindest infinitesimal an der entsprechenden Stelle  $(x_0, y_0, z_0)$  mit einer universellen Transformation übereinstimmen müssen (vgl. §4 Satz 1 Bew.)

Der Satz und die Bemerkungen zu den Bildern folgen jetzt unmittelbar aus Satz 2, dem Linearisierungssatz, [6]S.371ff und den expliziten Formen von  $H_g$ , sowie deren Eigenwerte und Eigenvektoren. Daß es sich bei (3) im Fall  $g_{xx}(0) > 0$  um eine rechtsdrehende Spirale handelt, folgt aus dem Richtungsfeld von  $H_g$  auf der x-Achse:



✓

Aus Satz 3 läßt sich nun für generisches  $f$  das Lösungsverhalten von  $f(x,y,y') = 0$  an singulären Faltenpunkten ableiten. Da die Diffeomorphismen  $\varphi$ , die zur Normierung von  $f$  in die Form  $(g(x,y') + y = 0; 0)$ , wie in Satz 3, erforderlich sind, entsprechende Diffeomorphismen  $\tilde{\varphi}$  der  $(x,y)$ -Ebene induzieren, die mit den Integralkurven von  $f(x,y,y') = 0$  verträglich sind (§4), kann man sich bei der Beschreibung natürlich wieder auf den normierten Fall

$$(g(x,y') + y = 0; 0), \quad g \text{ wie in Satz 3, } g_{xx}(0) > 0$$

beschränken. Im Folgenden erfülle  $g$  immer diese Bedingungen (bzw.  $f$  die entsprechenden Bedingungen), ohne daß dies ausdrücklich erwähnt wird.

### Vorbemerkungen:

i) Die Lösungen der impliziten Differentialgleichung

$$f(x,y,y') = g(x,y') + y = 0$$

setzen sich aus zwei, außerhalb  $p(C)$  transversalen, Lösungsscharen gewöhnlicher Differentialgleichungen zusammen, von denen eine Schar ausschließlich Lösungen positiver, die andere nur Lösungen negativer Steigung beinhaltet (außerhalb  $p(C)$  echt positiv bzw. negativ), nämlich den Scharen, die zu

$$\begin{aligned} S^+ &:= S \cap \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \geq 0\} \quad \text{und} \\ S^- &:= S \cap \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \leq 0\} \quad \text{gehören.} \end{aligned}$$

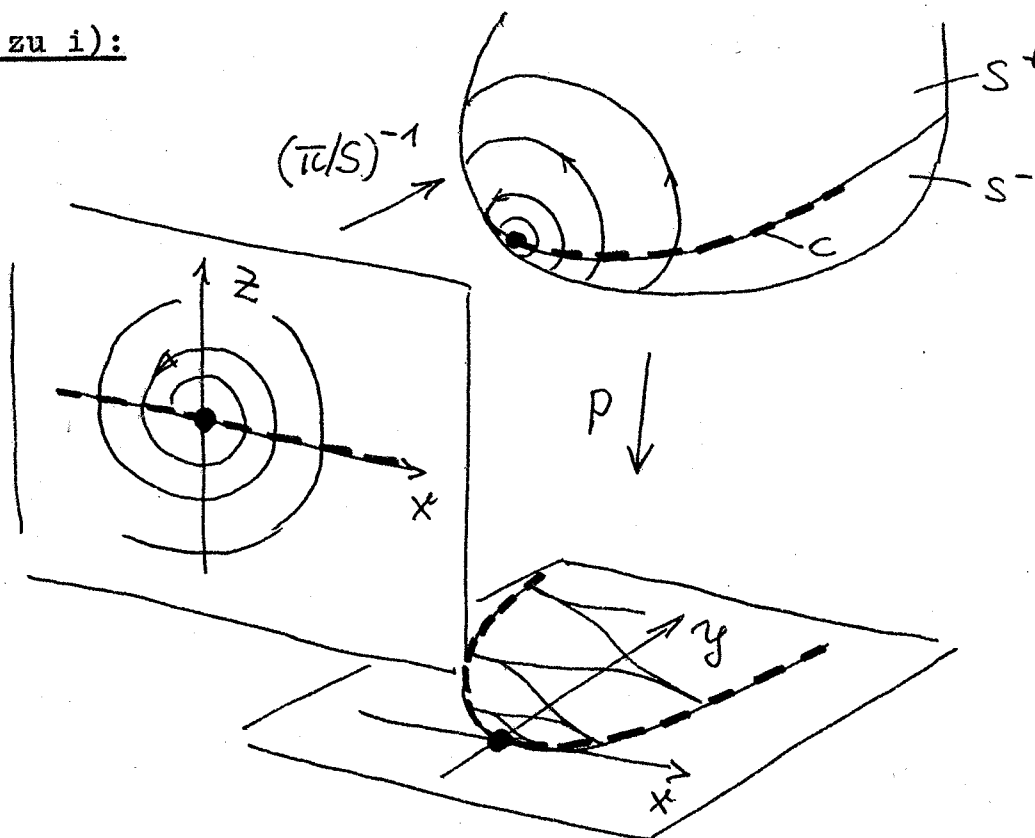
( $S^+$  bzw.  $S^-$  definieren natürlich in kanonischer Weise gewöhnliche Differentialgleichungen auf  $p(S)$ .)

Die entsprechenden Teile der Flußlinien von  $\mathcal{H}_f|_{S^+}$  ( $\mathcal{H}_f|_{S^-}$ ) bzw. äquivalent  $\mathcal{H}_g|_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+}$  ( $\mathcal{H}_g|_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^-}$ ) projizieren sich mit  $p$  bzw.  $p \circ (\pi|_S)^{-1}$  homöomorph zu den Lösungen von  $f(x,y,y') = 0$ , außerhalb  $C$  bzw.  $\overline{\pi}(C)$  (=  $x$ -Achse) sogar diffeomorph.

ii) Alle Lösungen die  $p(C)$  nicht im Ursprung treffen, haben bei  $p(C)$  als 2. Ableitung  $+\infty$  oder  $-\infty$ , und wegen der Normierung Steigung 0 bei  $p(C)$ .

Bew.: klar nach §5 Satz 1 bzw. §3 Bem. nach Satz 2. ✓

Bild zu i):



iii) Ist  $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$  eine  $C^1$ -Kurve in  $S$  mit nirgends verschwindendem  $\dot{\gamma}_1$ , nicht notwendig Lösung von  $\mathcal{H}_f$ , aber doch so, daß es eine  $C^2$ -Lösung  $y(x)$  der impliziten Differentialgleichung  $f(x, y, y') = 0$  gibt, mit  $\gamma_2 = y(\gamma_1)$ ,  $\gamma_3 = y'(\gamma_1)$ .  
Dann ist:

$$\dot{\gamma}_3 / \dot{\gamma}_1 = y''(\gamma_1).$$

Bew.:  $\gamma_3 = y'(\gamma_1) \Rightarrow \dot{\gamma}_3 = y''(\gamma_1) \dot{\gamma}_1. \checkmark$

iv) Wendepunkte von Lösungen:

- Lokal um Null haben  $C^2$ -Lösungen von  $g(x, y') + y = 0$ , die auf einem zusammenhängenden Intervall definiert sind, und nicht den Ursprung treffen, höchstens einen Wendepunkt.
- Lokal um Null haben genau folgende  $C^2$ -Lösungen von  $g(x, y') + y = 0$  einen Wendepunkt:  
Im Fall
  - alle Lösungen, die Projektionen von Lösungen von  $\mathcal{H}_f|_{S^+}$  ( $\mathcal{H}_f|_{S^-}$ ) sind, welche  $C$  nicht treffen.
  - alle Lösungen, die Projektionen von Lösungen von  $\mathcal{H}_f|_{S^+}$  ( $\mathcal{H}_f|_{S^-}$ ) sind, die bei 0 beginnen und auf  $C$  enden bzw. umgekehrt.

(3) alle Lösungen.

Dabei ist unter Lösung immer Lösung mit maximalem, zusammenhängendem Definitionsbereich zu verstehen.

Bew.: a)  $\Rightarrow$  b): Falls a) gilt, haben genau die Lösungen von  $g(x, y') + y = 0$  einen Wendepunkt, die mindestens zweimal die gleiche Steigung haben. Mit Satz 3 und [6], S.371ff folgt sofort die Behauptung.  $\checkmark$

a) Sei  $(x, y, z)(t)$  Lösung von  $\mathcal{H}_f|S$ , so ist  $y''(x) = \dot{z}/\dot{x}$ . Außerhalb  $\bar{U}(C)$  ist  $\dot{x} = g_z(x, z) \neq 0$ , denn  $g_z(x, z) = 0 \Leftrightarrow z = 0$ . Also ist  $y''(x(t)) = 0 \Leftrightarrow \dot{z}(t) = 0$ , und es ist  $\ddot{z} = d\dot{z}/dt = d(-z - g_x)/dt = -\dot{z} - \dot{x}g_{xx} - \dot{z}g_{zx}$ . An den Stellen mit  $y''(x) = 0$  ist also  $\ddot{z} = -\dot{x}g_{xx} \neq 0$  (an  $p(C)$  ist  $y'' = \pm\infty$ ), hat also für den Fall, daß sich  $(x, y, z)(t)$  zu einer Lösung projiziert, an all diesen Stellen immer gleiches Vorzeichen. Wenn  $z$  aber mehr als eine Nullstelle hätte, müßte dieses Vorzeichen nach dem Mittelwertsatz alternieren.  $\checkmark$

v) Unter einer Schar  $\Gamma$  von Lösungen einer impliziten Differentialgleichung  $(f(x, y, y') = 0; (x_0, y_0, z_0))$  werde in der folgenden Beschreibung immer eine stetige Schar von Lösungen

$$\Gamma = \{y_\alpha: I_\alpha \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(x, y_\alpha, y'_\alpha) = 0, \alpha \in A\}, \quad A, I_\alpha \text{ Intervalle}$$

verstanden, die folgenden Bedingungen genügt:

- I)  $y_\alpha$  hängt stetig von  $\alpha$  ab.
- II) Evtl. Randpunkte von  $I_\alpha$  hängen stetig von  $\alpha$  ab.
- III) Die Lösungen aus  $\Gamma$  treffen sich paarweise nicht:  
 $y_\alpha(x) \neq y_{\alpha'}(x)$  für alle  $\alpha \neq \alpha'$ ,  $x \in I_\alpha \cap I_{\alpha'}$ .
- IV)  $I_\alpha$  erfüllt für alle  $\alpha$  genau eine der folgenden Bedingungen:
  - a)  $I_\alpha = \mathbb{R}$
  - b)  $I_\alpha = [a_\alpha, +\infty)$
  - c)  $I_\alpha = (-\infty, a_\alpha]$
  - d)  $I_\alpha = [a_\alpha, b_\alpha]$

Wobei  $I_\alpha$  immer noch mit der entsprechenden lokalen Umgebung von  $x_0$  zu schneiden ist, in der auch  $a_\alpha$  und  $b_\alpha$  liegen sollen.

Im Folgenden werden immer nur die evtl. vorhandenen Anfangs- und Endpunkte von  $I$  angegeben.

- 6.17 -

V) Es soll

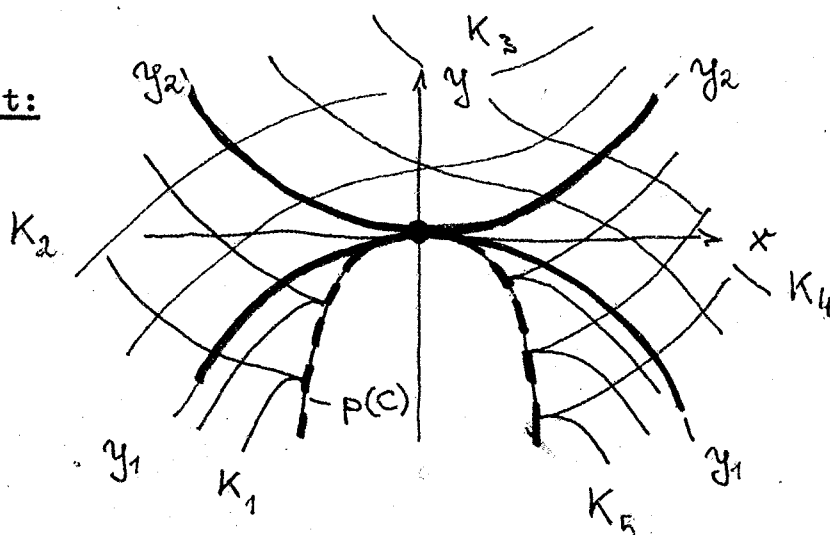
$$\partial \Gamma := \partial \bigcup_{\substack{x \in I_\alpha \\ \alpha \in A}} \{(x, y_\alpha(x))\} - p(C)$$

Graph einer Lösung  $y(x)$  von  $f(x, y, y') = 0$ , bzw disjunkte Vereinigung von solchen Graphen sein. Diese Lösungen werden dann Rand von  $\Gamma$  genannt.

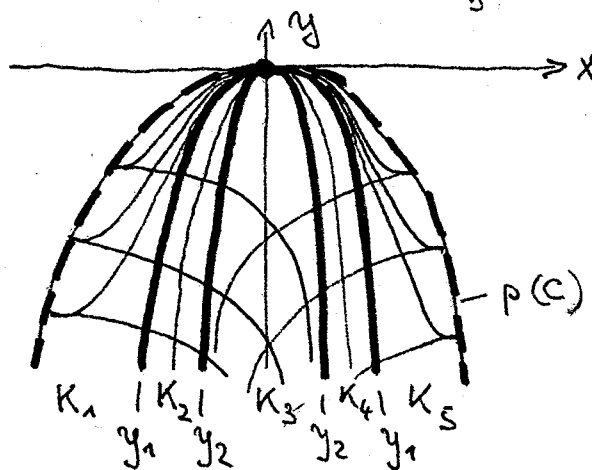
Beschreibung der Lösungen von  $g(x, y') + y = 0$  für  $g$  gemäß Satz 3 und  $g_{xx}(0) > 0$ :

Bilder:

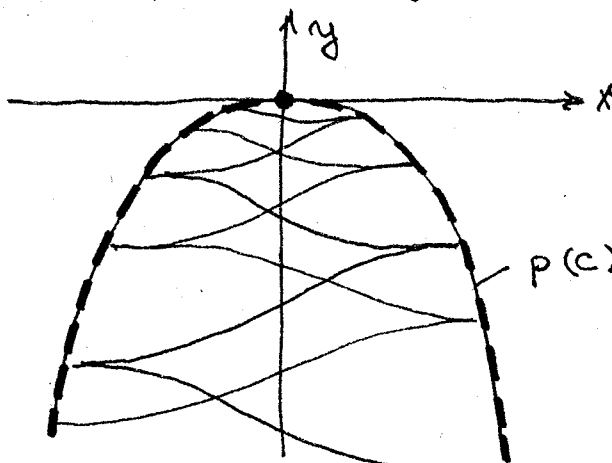
(1) Sattelpunkt:



(2) Knoten:



(3) Spirale:





Beschreibung:(1) Sattelpunkt und (2) Knoten

Die beiden invarianten Mannigfaltigkeiten der gelifteten Differentialgleichung liefern zwei sich im Ursprung von erster Ordnung berührende Lösungen  $y_1$  und  $y_2$ , die dort eine 2. Ableitung

$$y_i''(0) = \lambda_i / g_{zz}(0) \neq 0 \quad \text{haben.}$$

(Da die invarianten Mannigfaltigkeiten im Ursprung die Richtung der Eigenvektoren  $(g_{zz}(0), \lambda_i)$  von  $H_g$  haben, folgt dies aus Vorbemerkung iii).)

Beim Sattelpunkt haben diese verschiedenes Vorzeichen, beim Knoten gleiches Vorzeichen (neg., da  $g_{xx}(0) > 0$ ), und es ist beim Sattelpunkt  $y_1''(0) < y_2''(0)$ , und beim Knoten  $y_1''(0) > y_2''(0)$ , da  $\lambda_1 > \lambda_2$ .

Lokal um den Ursprung zerfällt damit der Definitionsbereich  $p(S)$  der Differentialgleichung ohne die kritische Menge  $p(C)$  und ohne die Graphen von  $y_1$  und  $y_2$  ( $= p(S) - p(C) - \text{graph}(y_1) - \text{graph}(y_2) =: K$ ) in fünf offene Zusammenhangskomponenten:

$$K = \bigcup_{i=1}^5 K_i,$$

die im Fall des Sattelpunktes im Uhrzeigersinn, im Fall des Knotens im Gegenuhrzeigersinn nummeriert seien.

$$\begin{aligned} \text{Sei weiter:} \quad p(C)^+ &:= \{(x, y) \in p(C) \mid x \geq 0\} \\ p(C)^- &:= \{(x, y) \in p(C) \mid x \leq 0\} \end{aligned}$$

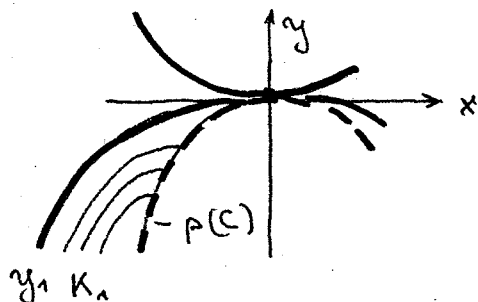
Damit gilt für die topologischen Ränder dieser Zusammenhangskomponenten  $K_1, \dots, K_5$  in beiden Fällen:

$$\begin{aligned} \partial K_1 &= p(C)^- \cup \text{graph}(y_1 \mid \mathbb{R}^-) \\ \partial K_2 &= \text{graph}(y_1 \mid \mathbb{R}^-) \cup \text{graph}(y_2 \mid \mathbb{R}^-) \\ \partial K_3 &= \text{graph}(y_2) \\ \partial K_4 &= \text{graph}(y_2 \mid \mathbb{R}^+) \cup \text{graph}(y_1 \mid \mathbb{R}^+) \\ \partial K_5 &= \text{graph}(y_1 \mid \mathbb{R}^+) \cup p(C)^+ \end{aligned}$$

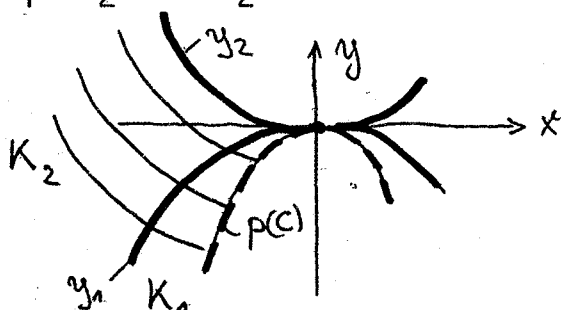
Neben  $y_1$  und  $y_2$  erhält man folgende 6, untereinander und zu  $y_1$  und  $y_2$  transversale Lösungsscharen (Transversalität natürlich immer nur außerhalb  $p(C)$  zu verstehen):

(1) Sattelpunkt

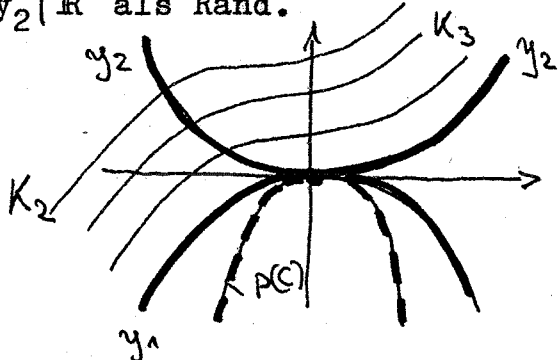
(i) bei  $p(C)^-$  endende, streng monoton steigende Schar in  $\bar{K}_1$  mit  $y_1 | \mathbb{R}^-$  als Rand.



(ii) bei  $p(C)^-$  endende, streng monoton fallende Schar in  $\bar{K}_1 \cup \bar{K}_2$  mit  $y_2 | \mathbb{R}^-$  als Rand.

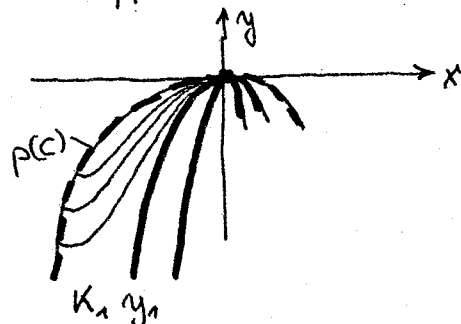


(iii) streng monoton wachsende Schar in  $\bar{K}_2 \cup \bar{K}_3$  mit einem Wendepunkt und  $y_1 | \mathbb{R}^-$ , sowie  $y_2 | \mathbb{R}^+$  als Rand.

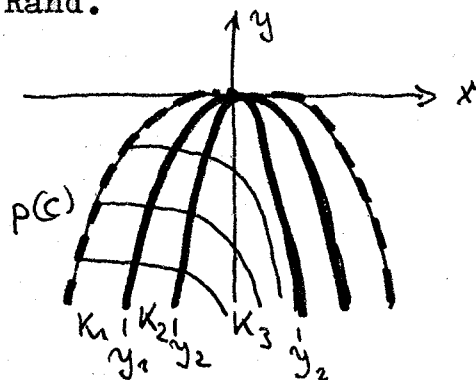


(2) Knoten

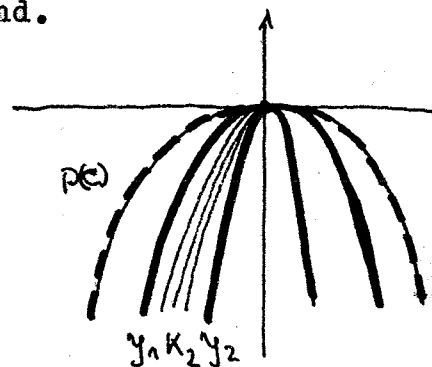
(i) bei  $p(C)^-$  beginnende und bei 0 endende, streng monoton steigende Schar in  $\bar{K}_1$  mit Rand  $y_1 | \mathbb{R}^-$



(ii) bei  $p(C)^-$  beginnende, streng monoton fallende Schar in  $\bar{K}_1 \cup \bar{K}_2 \cup \bar{K}_3$  mit  $y_2 | \mathbb{R}^+$  als Rand.



(iii) bei 0 endende, streng monoton wachsende Schar in  $\bar{K}_2$  mit  $y_1 | \mathbb{R}^-$  und  $y_2 | \mathbb{R}^+$  als Rand.

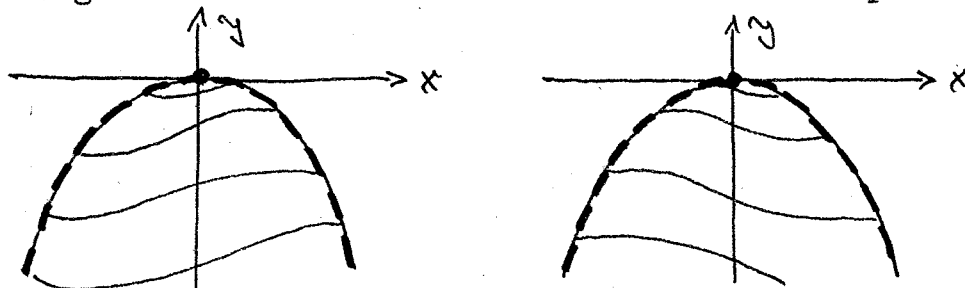


Sowie je drei weitere Scharen (i'), (ii'), (iii') mit den entsprechenden, bzgl. der y-Achse spiegelbildlichen Eigenschaften.

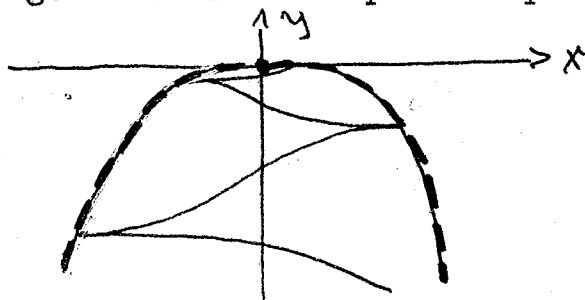
### (3) Spirale

Man erhält genau folgende zwei, außerhalb  $p(C)$  transversale, Lösungsscharen, die bei  $p(C)^-$  beginnen und bei  $p(C)^+$  enden:

- (i) streng monoton steigende Schar mit einem Wendepunkt
- (i') streng monoton fallende Schar mit einem Wendepunkt.



Alternativ erhält man folgende, näherliegende Beschreibung: Die Lösungen von  $\mathcal{H}_f|S$  projizieren sich zu zwischen  $p(C)^-$  und  $p(C)^+$  pendelnden Kurven ohne Doppelpunkt, die alle transversal zueinander sind, und zwischen ihren Umkehrpunkten alternierend streng monoton fallende und streng monoton steigende Funktionen mit jeweils genau einem Wendepunkt repräsentieren.



Die eben beschriebene Einteilung der Lösungen am singulären Faltenpunkt in obige drei Fälle ist sogar eine Einteilung in Homöomorphieklassen:

**Satz 4:** Für residual fast alle  $f$  ist die Schar der Lösungen von  $f(x, y, y') = 0$  an einem singulären Faltenpunkt homöomorph zur Lösungsschar genau einer der drei folgenden Differentialgleichungen lokal um den Ursprung:

$$(1) \quad x^2 - y'^2 + y = 0 \quad (\text{Sattel})$$

$$(2) \quad (x^2 + y'^2)/8 + y = 0 \quad (\text{Knoten})$$

$$(3) \quad x^2 + y'^2 + y = 0 \quad (\text{Spirale})$$

- 6.21 -

Bew.: Daß die drei angegebenen Typen nicht untereinander homöomorphe Lösungsscharen liefern, ist klar nach der vorangegangenen Beschreibung.

zu(3): Sei  $f(x,y,z)$  in die Form  $g(x,z) + y$ ,  $g$  wie in (3) Satz 3, transformiert. Weiter seien im Folgenden alle Formulierungen immer nur lokal um  $0 \in \mathbb{R}^2$  zu verstehen, bzw. in einer entsprechenden induzierten Umgebung.

Definiere:

$\alpha^+, \alpha^- : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ , stetige Parametrisierungen von  $p(C)^+$  bzw.  $p(C)^-$  mit  $\alpha^+(0) = \alpha^-(0) = 0$ .

$\beta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ , Projektion einer fest gewählten Lösung von  $\mathcal{K}_f|S$  um 0. OBdA sei dabei nach evtl. Umparametrisierung:  $\beta(t) \longrightarrow 0$  für  $t \longrightarrow -\infty$

und  $\beta(t) \in p(C) \iff t \in \mathbb{Z}$ ,  $\beta(t) \in p(C)^+ \iff t \in 2\mathbb{Z}$ .

$a_k^+ := \beta(2k)$ ,  $a_k^- := \beta(2k+1)$  für  $k \in \mathbb{Z}$

Für  $x^2 + y'^2 + y = 0$  definiere analog:  $\hat{\alpha}^+, \hat{\alpha}^-, \hat{\beta}, \hat{a}_k^+, \hat{a}_k^-$ .  
Außerdem analog zu  $C$  und  $S$ :  $\hat{C}, \hat{S}$ .

Nun wird ein Homöomorphismus

$$h: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

wie folgt konstruiert:

$$1) \quad h: \hat{a}_k^+ \longmapsto a_k^+, \hat{a}_k^- \longmapsto a_k^- \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z}$$

Mittels der Lösungsscharen der Differentialgleichungen, die durch  $S^+$  und  $S^-$  für  $f$  bzw. durch  $y' = \sqrt{-x^2 - y}$  und  $y' = -\sqrt{-x^2 - y}$  gegeben sind, kann man  $h$  als Homöomorphismus auf  $p(C)$  fortsetzen:

Seien  $t_0, t_1$  so, daß  $\alpha^+(t_i) = a_i^+$ ,  $i=0,1$ , analog  $\hat{t}_0, \hat{t}_1$ . OBdA sei dabei  $t_0 = \hat{t}_0$ ,  $t_1 = \hat{t}_1$ . Dann definiere:

$$2) \quad h|_{\alpha^+([\hat{t}_0, \hat{t}_1])}: \alpha^+([\hat{t}_0, \hat{t}_1]) \longrightarrow \hat{\alpha}^+([\hat{t}_0, \hat{t}_1]) \\ \alpha^+(t) \longmapsto \hat{\alpha}^+(t).$$

Dies ist ein Homöomorphismus und mit 1) verträglich.

Seien nun  $Y^+(x_0, y_0; x)$ ,  $Y^-(x_0, y_0; x)$  die allgemeinen Lösungen der zu  $S^+$ ,  $S^-$  gehörigen Differentialgleichungen;  $\hat{Y}^+, \hat{Y}^-$  die allgemeinen Lösungen von  $y' = \pm \sqrt{-x^2 - y}$ . Dies sind stetige (bezüglich  $x$  sogar differenzierbare) Funktionen (stetige Abhängigkeit von den Anfangswerten), und man hat einen Homöomorphismus

$$\psi : [t_0, t_1] \longrightarrow [a_0^-, a_1^-] \subset p(C)^-$$

$$t \longmapsto \text{Schnitt von } Y^+(\alpha^+(t); \cdot) \text{ mit } p(C)^-$$

(Dabei sei  $[a_0^-, a_1^-]$  derjenige zusammenhängende Teil von  $p(C)$  mit Rand  $\{a_0^-, a_1^-\}$ ), sowie einen analogen Homöomorphismus  $\hat{\psi}$ .

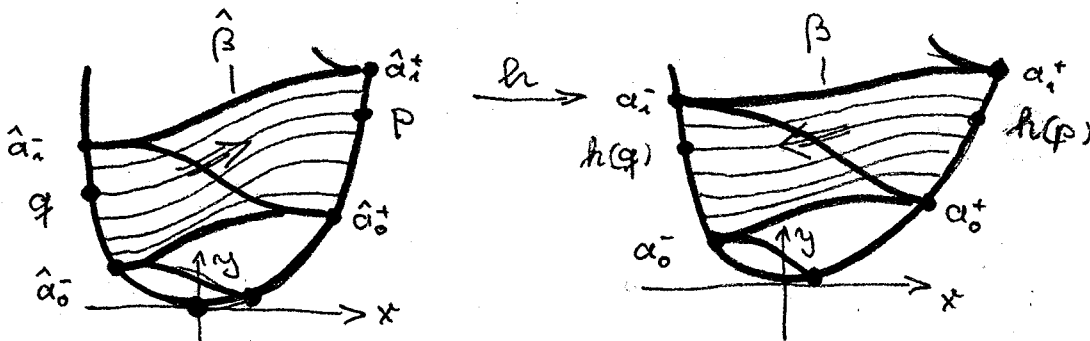
(Stetigkeit ist klar, und ebenfalls die Existenz einer stetigen Umkehrabbildung, die man nach demselben Prinzip wie  $\psi$  konstruieren kann.).

Damit kann man nun

$$3) \quad h|_{[\hat{a}_0^-, \hat{a}_1^-]} : [\hat{a}_0^-, \hat{a}_1^-] \longrightarrow [a_0^-, a_1^-] \quad \text{durch}$$

$$h|_{[\hat{a}_0^-, \hat{a}_1^-]} := \psi \circ \hat{\psi}^{-1} \quad \text{erweitern.}$$

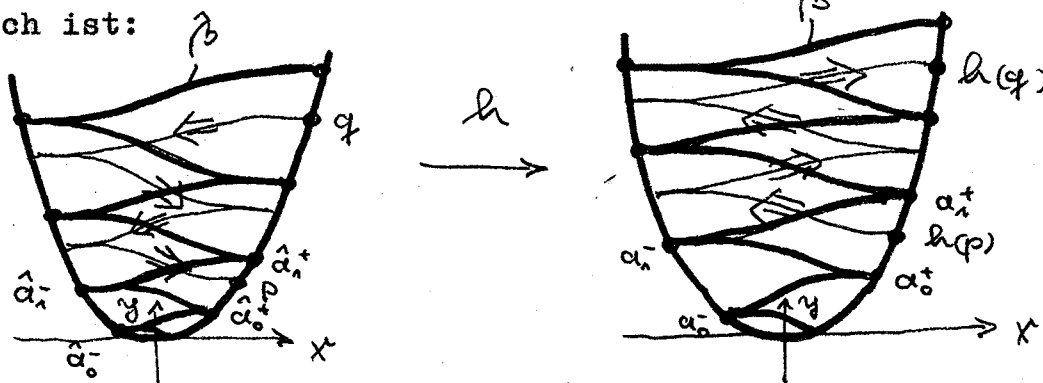
Dies liefert als Komposition von Homöomorphismen wieder einen Homöomorphismus, der mit 1) und 2) nach Konstruktion verträglich ist.



Dieses Verfahren wird induktiv fortgesetzt, und man erhält schließlich einen Homöomorphismus

$$4) \quad h|_{p(\hat{C})} : p(\hat{C}) \longrightarrow p(C), \quad \text{der nach Konstruktion mit den}$$

Lösungsscharen von  $f(x, y, y') = 0$  bzw.  $x^2 + y'^2 + y = 0$  verträglich ist:



Jetzt kann man  $h$  auf der gesamten Lösungsschar erklären, und zwar analog §5 Satz 2 Beweis:

Durch jeden Punkt von  $p(S)$  geht genau eine monoton fallende und eine monoton steigende Lösung von  $f(x, y, y') = 0$ . Diese Lösungen haben je einen Schnittpunkt mit  $p(C)^-$ , man hat also eine stetige Abbildung

- 6.23 -

$$\varphi: p(S) \longrightarrow p(C) \times p(C)^-, \quad \xi \mapsto (\text{Fußpkt der } \downarrow \text{Lsg}, \text{Fußpkt der } \uparrow \text{Lsg})$$

Da sich jedoch eine fallende und eine steigende Lösung immer nur in höchstens einem Punkt schneiden, auch eine Umkehrabbildung

$$\varphi^{-1}: \text{Im}(\varphi) \longrightarrow p(S),$$

die in offener Weise genau andersherum konstruiert wird, und ebenfalls stetig ist. Analog findet man  $\hat{\varphi}, \hat{\varphi}^{-1}$ .

Definiere nun

$$5) \quad h|_{p(\hat{S})}: p(\hat{S}) \longrightarrow p(S) \quad \text{durch}$$

$$h := \varphi^{-1} \circ (h|_{p(\hat{C})} \times h|_{p(\hat{C})}) \circ \hat{\varphi},$$

so ist dies ein wohldefinierter Homöomorphismus, der mit 1), 2), 3), 4) verträglich ist.

Hierzu: a) Wohldefiniertheit: klar, denn  $h|_{p(\hat{C})} \times h|_{p(\hat{C})}$  bildet nach Konstruktion  $\text{Im}(\hat{\varphi})$  auf  $\text{Im}(\varphi)$  homöomorph ab.

b) Homöomorphismus: Wegen a) kann  $h|_{p(\hat{S})}$  als Komposition von Homöomorphismen aufgefasst werden.

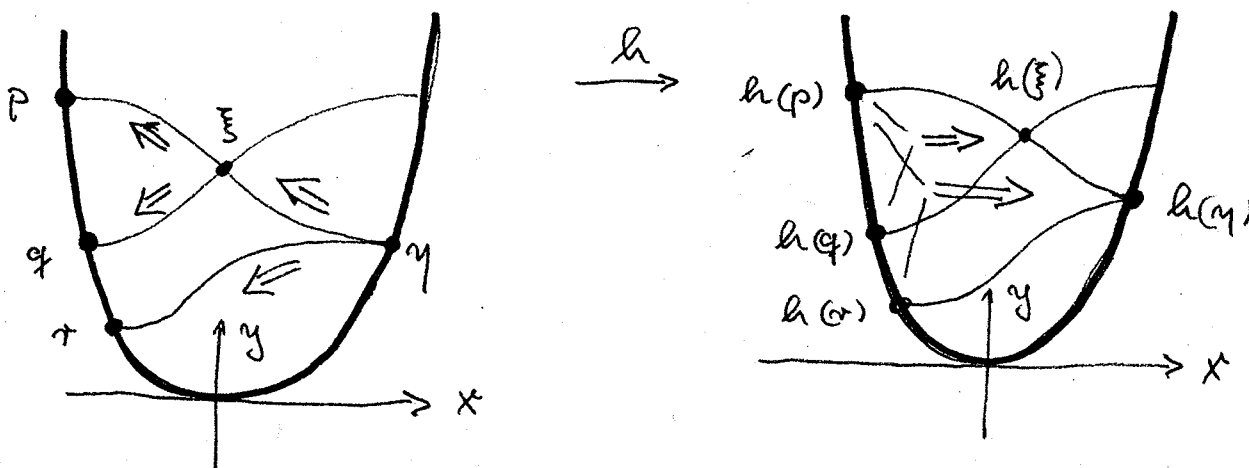
c) Verträglichkeit: Nach Definition von  $\varphi, \hat{\varphi}$  ist:

$$\hat{\varphi}|_{p(\hat{C})} = \text{id}_{p(\hat{C})} \times \text{id}_{p(\hat{C})} \quad \text{und}$$

$$\varphi^{-1}|_{\Delta(p(C) \times p(C))} = \text{pr}_1 \quad (\text{Projektion auf den ersten Faktor})$$

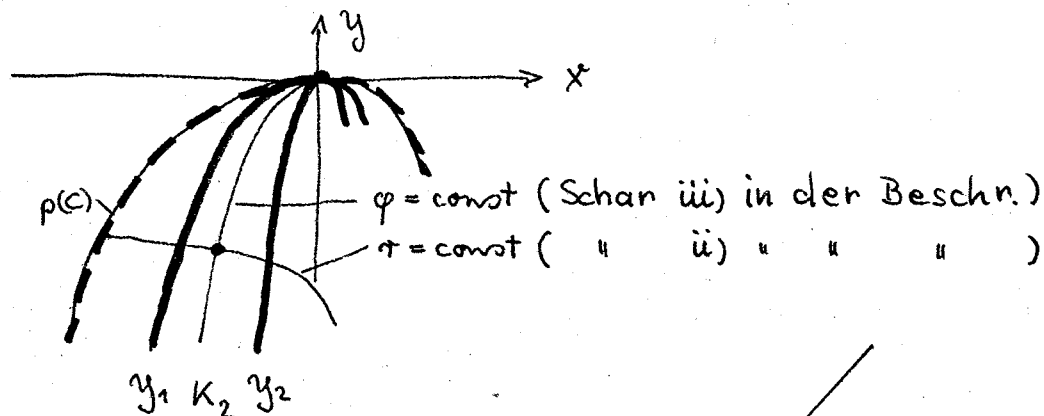
Daraus folgt die Verträglichkeit mit 1), ... 4).

Diesen Homöomorphismus kann man schließlich auf ganz  $\mathbb{R}^2$  erweitern, wenn man bedenkt, daß  $(p(S), \mathbb{R}^2) \cong (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R}^2)$  ist.



- 6.24 -

zu (1) und (2): Den Homöomorphismus konstruiert man hier, z.B. bei  $\bar{K}_1$  beginnend analog §5 Satz 2 Beweis. Es treten, im Gegensatz zu (3), keine Schwierigkeiten mit der Verträglichkeit mit den Lösungsscharen auf. Den so gefundenen Homöomorphismus erweitert man dann wieder auf  $\mathbb{R}^2$ . Im Fall (2) des Knotens ist in  $\bar{K}_2$  und  $\bar{K}_4$  die Einführung von Polarkoordinaten nötig:



### §7 Lösungen in der Nähe eines Kuspunktes

Für residual fast alle  $f$  ist an Kuspunkten  $(x_0, y_0, z_0)$

$$\text{grad}(f)(x_0, y_0, z_0) \neq 0, \text{grad}(f_z)(x_0, y_0, z_0) \neq 0 \text{ und}$$

$$(f_x + z f_y)(x_0, y_0, z_0) \neq 0. \quad (\S 1 \text{ und } \S 2 \text{ Satz } 2)$$

Nach §4 kann man dabei bis auf  $C^\infty$ -Äquivalenz  $(x_0, y_0, z_0) = 0$  annehmen (§4 Satz 2: Translation in den Ursprung, und §4 Bem. b) zur Def.: Invarianz der Nullstellen von  $\mathcal{H}_f|_S$  unter  $C^\infty$ -Äquiv.). Man hat dann:  $f_x(0) \neq 0$ , und kann nach dem Vorbereitungs-satz von Weierstrass-Malgrange schreiben:

$$f(x, y, z) = \varepsilon(x, y, z)(x + h(y, z)), \quad \varepsilon \text{ } C^\infty\text{-Einheit.}$$

Bis auf  $C^\infty$ -Äquivalenz kann man daher immer annehmen, daß

$$f(x, y, z) = x + h(y, z), \text{ mit}$$

$$h(0) = h_z(0) = h_{zz}(0) = 0 \text{ und}$$

$$h_{zzz}(0) \neq 0, h_{zy}(0) \neq 0$$

Letzteres, da  $\text{grad}(f_z) = (0, h_{zy}, h_{zz})$ , und bei 0 auch  $h_{zz}$  verschwindet, andererseits dieser Gradient aber  $\neq 0$  sein soll.

Im Folgenden habe  $f$  immer die eben angegebene Gestalt.

Sei

$$P : (x, y, z) \longmapsto (y, z)$$

die kanonische Projektion auf die  $(y, z)$ -Ebene. Damit ist

$$S = \text{graph}(-h), \text{ und}$$

$$(P|_S)^{-1}: \mathbb{R}^2 \longrightarrow S$$

$$(y, z) \longmapsto (-h(y, z), y, z)$$

eine lokale Karte von  $S$  um den Ursprung.

Satz 1: Das Lösen von

$$(x + h(y, y') = 0; 0)$$

ist äquivalent zum Lösen von

$$dy/dz = -zh_z / (1 + zh_y) \quad \text{lokal um } (0, 0)$$

Die Lösungen der impliziten Differentialgleichung ergeben sich dann in Parameterform als:

$$x = x(z) = -h(y(z), z), \quad y = y(z)$$

mit  $z = y'$  als Parameter.



- 7.2 -

Bew.: Nach §3 Satz 1 Bem. ist das Lösen von  $x + h(y, y') = 0$  äquivalent zum Lösen von

$$\dot{y} = zh_z, \quad \dot{z} = -1 - zh_y.$$

Da man sich lokal um Null befindet, verschwindet  $\dot{z}$  nie, und obiges System wird dadurch äquivalent zu

$$dy/dz = -zh_z/(1+zh_y). \quad \checkmark$$

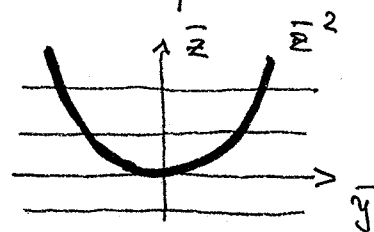
Satz 2: Lokal um 0 gibt es einen  $C^\infty$ -Diffeomorphismus  $\varphi$  der  $(y, z)$ -Ebene, der die Lösungen von

$$dy/dz = -zh_z/(1+zh_y)$$

auf die Lösungen von

$$dy/dz = 0,$$

und  $P(C)$  auf  $\{(z^2, z) \in \mathbb{R}^2\}$  abbildet, mit  $D\varphi(0) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$



Bew.: i) Lokal um 0 gibt es einen Diffeomorphismus, der die Lösungen von  $dy/dz = -zh_z/(1+zh_y)$  in die Lösungen von  $dy/dz = 0$ , und  $P(C)$  in  $\{(l(z), z) \in \mathbb{R}^2\}$ , überführt, wobei  $l(0) = l'(0) = 0$ ,  $l''(0) \neq 0$  ist.

Bew von i):  $C = \{(x, y, z) \mid -x = h(y, z), h_z(y, z) = 0\}$ , also  $P(C) = \{(y, z) \mid h_z(y, z) = 0\}$ . Wegen  $h_{zy}(0) \neq 0$  kann man  $h_z(y, z) = 0$  lokal um 0 nach  $y$  auflösen, und erhält:

$$h_z(y, z) = 0 \Leftrightarrow y = c(z), \text{ und es ist} \\ c(0) = c'(0) = 0, c''(0) = -h_{zy}(0)/h_{zzz}(0) \neq 0$$

Bew. von Letzterem:  $h_z(c, z) = 0 \Rightarrow h_{zy}c' + h_{zz} = 0 \Rightarrow$   
 $h_{zy}c'' + (h_{zyy}c' + h_{zyz})c' + h_{zzy}c' + h_{zzz} = 0.$

Daraus folgt unmittelbar die Behauptung.  $\checkmark$

Sei nun  $Y(y_0, z)$  die Lösung von  $dy/dz = -zh_z/(1+zh_y)$  zu der Anfangsbedingung  $Y(y_0, 0) = y_0$ . Betrachte den lokalen Diffeomorphismus  $(y, z) \mapsto (Y(y, z), z)$ , der bei 0 als Jacobische die Identität hat. Seine Umkehrung bildet nach Konstruktion die Lösungsschar von  $dy/dz = -zh_z/(1+zh_y)$  auf die Lösungsschar von  $dy/dz = 0$  ab. Da sie im Ursprung ebenfalls die Identität als Jacobische hat, wird  $(c(z), z)$  auf  $(l(z), z)$  mit  $l(0) = l'(0) = 0$ ,  $l''(0) \neq 0$  abgebildet. Also i)  $\checkmark$

ii) Lokal um 0 gibt es einen Diffeomorphismus, der die Lösungen von  $dy/dz = 0$  in Lösungen von  $dy/dz = 0$ , und  $\{(l(z), z) \in \mathbb{R}^2\}$  auf  $\{(z^2, z) \in \mathbb{R}^2\}$  abbildet.

- 7.3 -

Bew. von ii): Betrachte die Abbildung

$$(y, z) \mapsto (y, z \cdot \sqrt{l(z)} / |z|), \quad (l(z) \geq 0 \text{ oBdA}).$$

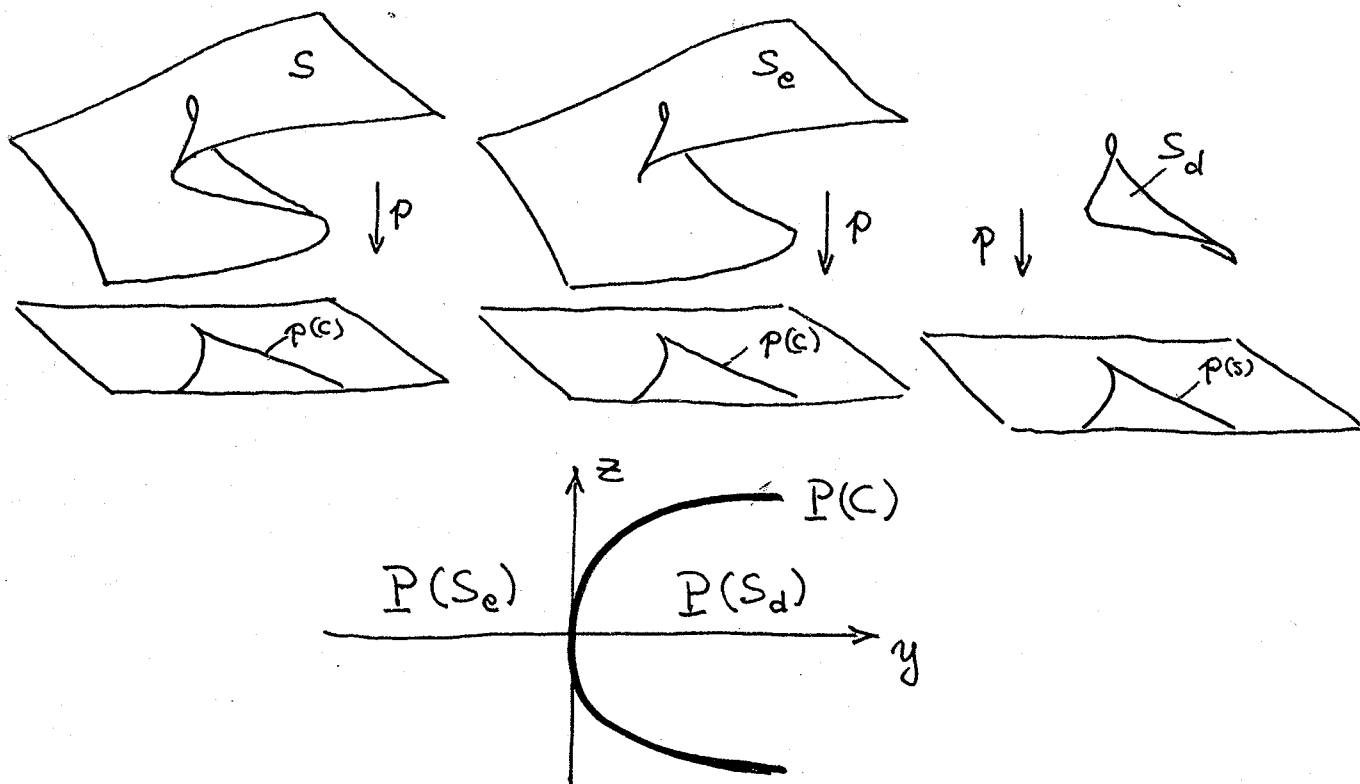
Falls dies ein Diffeomorphismus ist, hat er offenbar die gewünschten Eigenschaften. Nun ist  $l(0) = l'(0) = 0$ ,  $l''(0) \neq 0$ . Also gibt es eine  $C^\infty$ -Einheit  $\varepsilon$ , sodaß nach dem Vorbereitungssatz:  $l(z) = \varepsilon(z) \cdot z^2$ , und es ist  $z \sqrt{l(z)} / |z| = z \sqrt{\varepsilon(z)}$ , und letzteres ist  $C^\infty$  mit nicht verschwindender Steigung bei  $z=0$ . ✓  
Aus i) und ii) folgt dann unmittelbar der Satz. ✓

Definitionen:  $S - C$  zerfällt in zwei Zusammenhangskomponenten, deren abgeschlossene Hüllen mit  $S_e$  (eigentliche Kuppenfläche) und  $S_d$  (duale Kuppenfläche) bezeichnet werden, und die durch:

$$p|_{S_d} : S_d \longrightarrow p(S_d)$$

ist ein Homöomorphismus.

eindeutig unterschieden sind.



Insbesondere ist  $\partial S_e = \partial S_d = S_e \cap S_d = C$ , und  $\text{sign}(h_z|_{S_d}) = -\text{sign}(h_z|_{S_e}) = \text{const.}$ , da  $h_z|_S$  genau auf  $C$  verschwindet.

- 7.4 -

Beschreibung der Lösungen von  $dy/dz = -zh_z/(1+zh_y)$ :

Die 1. Ableitung jeder Lösung verschwindet genau an den Schnitten der Lösung mit der  $y$ -Achse und mit  $P(C)$ , denn man befindet sich lokal um den Ursprung, also ist  $dy/dz = 0 \Leftrightarrow z = 0$  oder  $h_z = 0$ . Durch diese beiden Kurven wird die  $(y,z)$ -Ebene in 4 zusammenhängende offene Bereiche unterteilt, in denen die Steigungen der Lösungen nie verschwinden und deren Vorzeichen alternieren.

Für die 2. Ableitung jeder Lösung gilt:

$$d^2y/dz^2 = d(-zh_z/(1+zh_y))/dz = -h_z/(1+zh_y) + z(\dots).$$

Sie verschwindet also insbesondere im Ursprung.

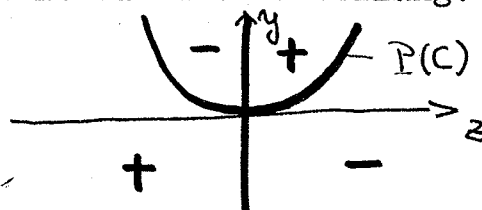
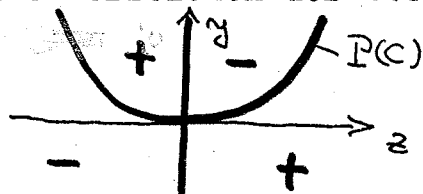
Normierung: Bis auf Spiegelung an der  $z$ -Achse (was in der ursprünglichen gelifteten Differentialgleichung einer Spiegelung an der  $(x,z)$ -Ebene, und in der impliziten Differentialgleichung einer Spiegelung an der  $x$ -Achse entspricht) kann man immer verlangen, daß  $P(C)$  nur Punkte mit positiven  $y$ -Werten enthält.

Mit dieser Normierung, die im Folgenden immer gelten soll, hat man zwei Fälle zu unterscheiden:

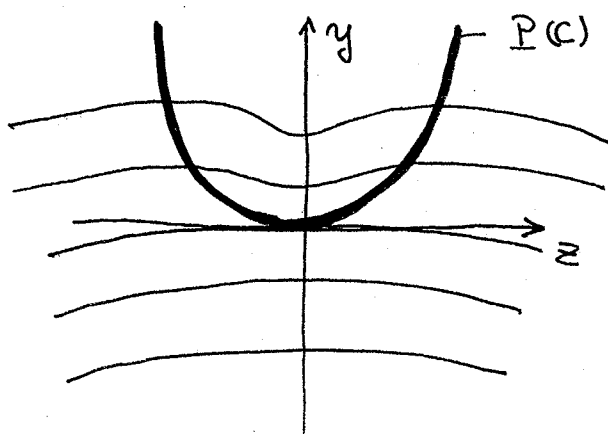
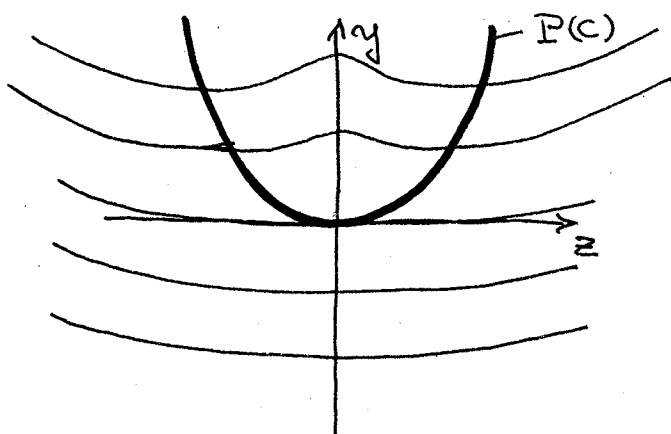
i)  $h_z|_{S_e} \geq 0$ :

ii)  $h_z|_{S_e} \leq 0$ :

Für die Vorzeichen der Steigungen erhält man die Einteilung:



Und damit für die Lösungen selbst das Bild:



- 7.5 -

Beschreibung der Lösungen von  $(x + h(y, y')) = 0; 0$ :

Die Lösungen von  $x + h(y, y') = 0$  erhält man aus den Lösungen von  $dy/dz = -zh_z/(1+h_y)$  in Parameterform als:

$$x = x(z) = -h(y(z), z)$$

$$y = y(z)$$

mit  $y' = z$  als Parameter. Und es ist:

$$dx(z)/dz = dx(z)/dy(z) \cdot dy(z)/dz = -h_z/(1+h_y).$$

D.h.:  $dx(z)/dz \neq 0$ , falls  $(y(z), z) \notin P(C)$ .

Weil  $z = y'(x(z))$  ( $y' := dy/dx$ ) erhält man daraus zugleich:

$$y''(x(z)) = -((1+h_y)/h_z)(y(z), z).$$

Die zweiten Ableitungen der Lösungen haben also gerade entgegengesetztes Vorzeichen wie  $h_z$ .

Die Nullstellen der 1. Ableitung liegen in der  $(x, y)$ -Ebene genau auf der Kurve  $\gamma(y) := (-h(y, 0), y)$ , die im Ursprung gerade tangential zum singulären Ort  $p(C)$  verläuft.

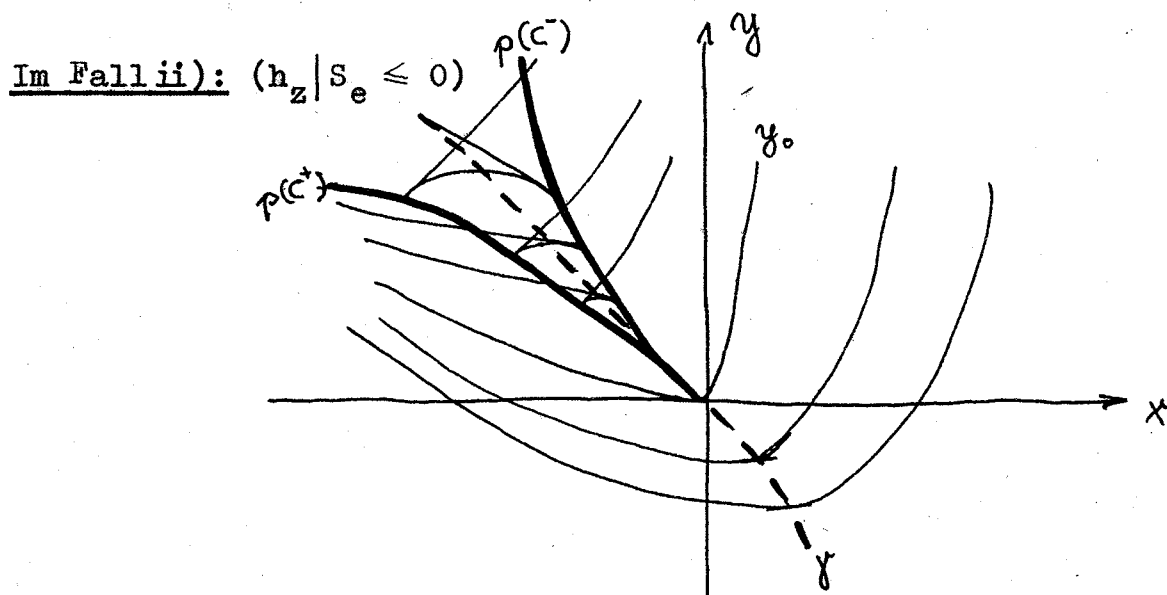
Bew.: Die Richtung von  $C$  im Ursprung ist senkrecht zu:

$\text{grad}(x+h(y, z))(0) = (1, h_y(0), 0)$ , die Richtung von  $p(C)$  ist daher senkrecht zu  $(1, h_y(0))$ , d.h. parallel zu  $(-h_y(0), 1)$ . ✓

Sei  $C^+ := \{(x, y, z) \in C \mid z \geq 0\}$ ;  $C^- := \{(x, y, z) \in C \mid z \leq 0\}$ .

Weiter werde Schar wieder wie in der Beschreibung in §6 verstanden.

Für die Lösungen von  $(x + h(y, y')) = 0; 0$  ergeben sich nun die beiden folgenden Möglichkeiten:

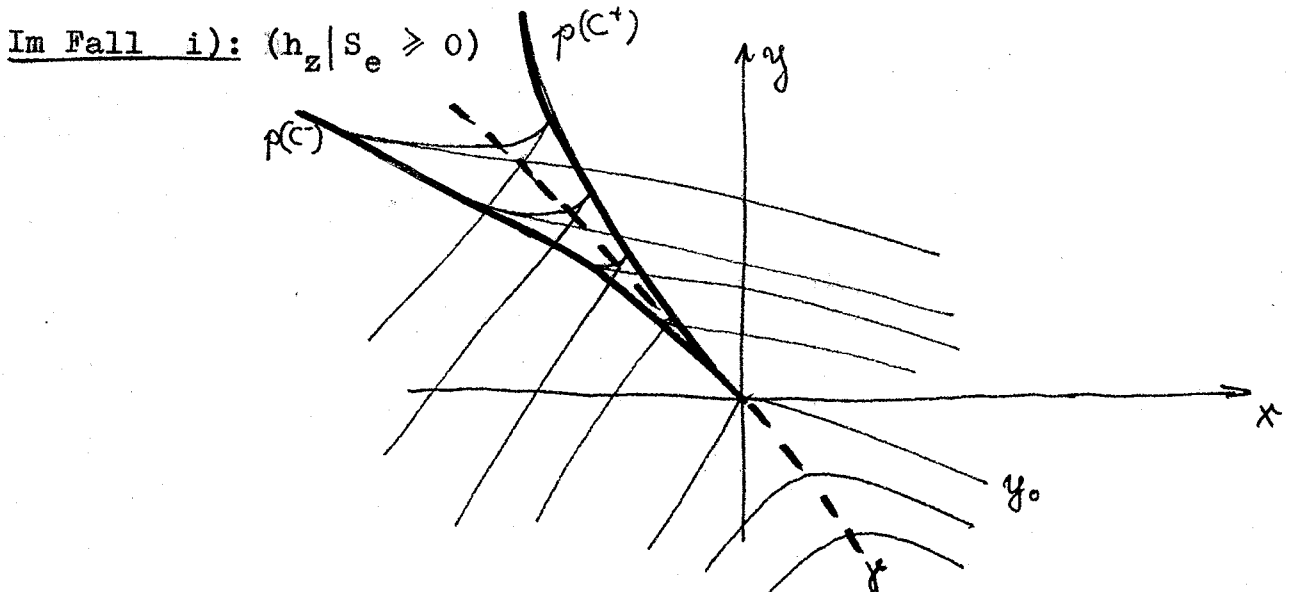


Lösungen, die von  $S_e$  stammen:

- (i) Durch den Nullpunkt verläuft eine  $C^1$ -Lösung  $y_0$  von  $x + h(y, y') = 0$ , die außerhalb 0  $C^\infty$ -Lösung ist, und im Ursprung eine gegen  $+\infty$  strebende 2. Ableitung hat.
- (ii) Unterhalb  $y_0$  verläuft eine Schar von  $C^\infty$ -Lösungen mit echt positiver 2. Ableitung und Minimum auf  $\gamma$  und Rand  $y_0$ .
- (iii) Überhalb  $y_0$  verläuft eine Schar, die bei  $p(C^+)$  beginnt, streng monoton steigt und echt positive 2. Ableitung hat, die bei  $p(C^+)$  gegen  $+\infty$  strebt. Rand dieser Schar ist  $y_0|_{\mathbb{R}^+}$ .
- (iv) Überhalb  $y_0$  verläuft eine weitere, zu (iii) transversale Schar, die bei  $p(C^-)$  endet, streng monoton fällt und echt positive 2. Ableitung hat, die bei  $p(C^-)$  gegen  $+\infty$  strebt. Rand dieser Schar ist  $y_0|_{\mathbb{R}^-}$ .

Lösungen, die von  $S_d$  stammen:

- (v) Zwischen  $p(C^+)$  und  $p(C^-)$  verläuft eine Schar mit echt negativer 2. Ableitung, die bei  $p(C)$  gegen  $-\infty$  strebt. Die Maxima der Lösungen dieser Schar liegen auf  $\gamma$ .



Es ergibt sich eine völlig analoge Beschreibung wie im Fall ii).

+                    +  
+                    +  
+