

Ob in der Raumfahrt, der Automobilindustrie oder in Haushaltsgeräten, thermoelektrische Effekte finden Anwendung in vielen Bereichen der Technik. Diese Arbeit befasst sich mit der Untersuchung einer speziellen Form dieser Effekte, dem transversalen Seebeck- und Peltier-Effekt. Mit Hilfe von Modellierungen unter Variation der Probenparameter werden die Kühlleffizienzen, die erzielbaren Temperaturdifferenzen und die Figures of merit optimiert und nach diesen Vorgaben die entsprechenden Proben hergestellt. Bei diesen verkippten Metall-Halbleiter Multilagenstrukturen aus Blei und Bismuttellurid wird ein transversaler Peltier-Effekt beobachtet. Außerdem wird die Generation elektrischer Leistung mit Hilfe des transversalen Seebeck-Effekts untersucht. An verkippten Pb-Bi<sub>2</sub>Te<sub>3</sub> Multilagen wird der Wirkungsgrad bei der Umsetzung von Wärme in elektrische Leistung gemessen und mit Modellrechnungen verglichen.

Dissertationsreihe Physik - Band 26

Christina Reitmaier

Christina Reitmaier

Transversaler Seebeck- und  
Peltier-Effekt in verkippten  
Metall-Halbleiter-  
Multilagenstrukturen

Universitätsverlag Regensburg

Universitätsverlag Regensburg

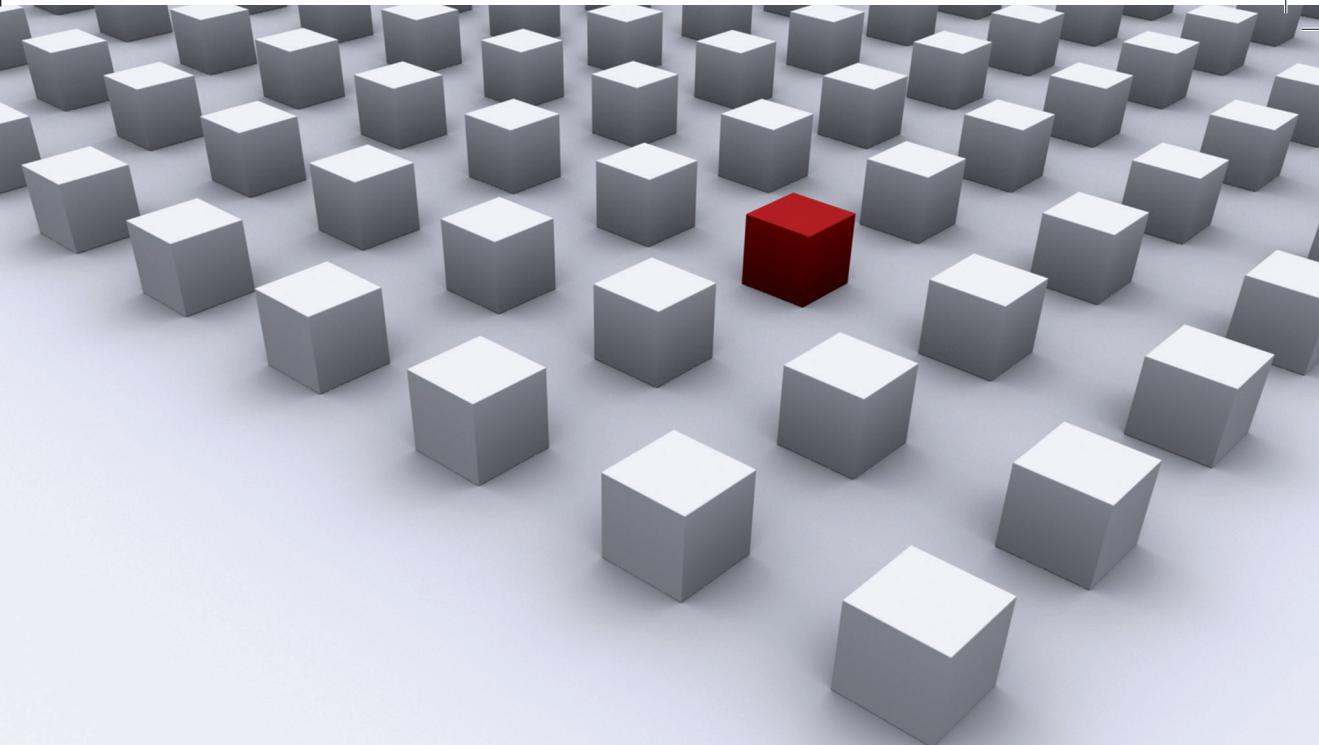


ISBN 978-3-86845-087-3

gefördert von:



Universität Regensburg



26

Dissertationsreihe  
Physik



Christina Reitmaier



Transversaler Seebeck- und  
Peltier-Effekt in verkippten  
Metall-Halbleiter-  
Multilagenstrukturen

# **Transversaler Seebeck- und Peltier-Effekt in verkippten Metall-Halbleiter-Multilagenstrukturen**

Dissertation zur Erlangung des Doktorgrades der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)  
der Fakultät für Physik der Universität Regensburg  
vorgelegt von  
Dipl.-Phys. Christina Reitmaier  
Oktober 2011

Die Arbeit wurde von Prof. Dr. Hans Lengfellner angeleitet.  
Das Promotionsgesuch wurde am 07.07.2011 eingereicht.

Prüfungsausschuss: Vorsitzender: Prof. Dr. Ingo Morgenstern  
1. Gutachter: Prof. Dr. Hans Lengfellner  
2. Gutachter: Prof. Dr. Sergey D. Ganichev  
weiterer Prüfer: Prof. Dr. Christoph Strunk



**Dissertationsreihe der Fakultät für Physik der Universität Regensburg,  
Band 26**

Herausgegeben vom Präsidium des Alumnivereins der Physikalischen Fakultät:  
Klaus Richter, Andreas Schäfer, Werner Wegscheider, Dieter Weiss

**Christina Reitmaier**

**Transversaler Seebeck- und**  
**Peltier-Effekt in verkippten**  
**Metall-Halbleiter-**  
**Multilagenstrukturen**

**Universitätsverlag Regensburg**

Bibliografische Informationen der Deutschen Bibliothek.  
Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation  
in der Deutschen Nationalbibliografie. Detaillierte bibliografische Daten  
sind im Internet über <http://dnb.ddb.de> abrufbar.

1. Auflage 2012

© 2012 Universitätsverlag, Regensburg  
Leibnizstraße 13, 93055 Regensburg

Konzeption: Thomas Geiger

Umschlagentwurf: Franz Stadler, Designcooperative Nittenau eG

Layout: Christina Reitmaier

Druck: Docupoint, Magdeburg

ISBN: 978-3-86845-087-3

Alle Rechte vorbehalten. Ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlags ist es  
nicht gestattet, dieses Buch oder Teile daraus auf fototechnischem oder  
elektronischem Weg zu vervielfältigen.

Weitere Informationen zum Verlagsprogramm erhalten Sie unter:  
[www.univerlag-regensburg.de](http://www.univerlag-regensburg.de)

---

# Transversaler Seebeck- und Peltier-Effekt in verkippten Metall-Halbleiter-Multilagenstrukturen

---



## DISSERTATION

zur Erlangung des Doktorgrades der Naturwissenschaften  
doctor rerum naturarum  
(Dr. rer. nat.)  
der Fakultät für Physik  
Universität Regensburg  
im Oktober 2011

vorgelegt von  
Dipl.-Phys. Christina Reitmaier

Die Arbeit wurde von Prof. Dr. Hans Lengfellner angeleitet.  
Das Promotionsgesuch wurde am 07.07.2011 eingereicht.

Prüfungsausschuss: Vorsitzender: Prof. Dr. Ingo Morgenstern  
1. Gutachter: Prof. Dr. Hans Lengfellner  
2. Gutachter: Prof. Dr. Sergey D. Ganichev  
weiterer Prüfer: Prof. Dr. Christoph Strunk

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Einleitung</b>	<b>7</b>
<b>2 Thermoelektrische Effekte in isotropen Materialien</b>	<b>11</b>
2.1 Seebeck-Effekt . . . . .	11
2.1.1 Empirische und experimentelle Beschreibung des Seebeck-Effekts . . . . .	11
2.1.2 Beschreibung des Seebeck-Effekts anhand des Drudemodells . . . . .	13
2.1.3 Darstellung des Seebeck-Effekts mit Hilfe der Boltzmann - Transport - Gleichung . . . . .	16
2.2 Peltier-Effekt . . . . .	24
<b>3 Anisotrope Transporteigenschaften in Multilagenstrukturen</b>	<b>27</b>
3.1 Transporteigenschaften senkrecht zur Schichtung . . . . .	29
3.2 Transporteigenschaften parallel zur Schichtung . . . . .	33
3.3 Tensorielle Beschreibung in verkippten Strukturen . . . . .	37
<b>4 Herstellung und Charakterisierung der Proben</b>	<b>43</b>
4.1 Herstellungsprozess der Multilagenstrukturen . . . . .	43
4.2 Präparation der Proben . . . . .	47
4.3 Experimentelle Bestimmung der Transporteigenschaften . . . . .	51
4.3.1 Messung der Wärmeleitfähigkeit . . . . .	51
4.3.2 Messung der Thermokraft . . . . .	55
4.3.3 Messung der elektrischen Leitfähigkeit . . . . .	59
<b>5 Transversaler Peltier-Effekt in verkippten Blei-Bismuttellurid-Multilagenstrukturen</b>	<b>63</b>
5.1 Transversaler Peltier-Effekt in langen Proben . . . . .	70
5.2 Transversaler Peltier-Effekt in kurzen Proben . . . . .	81
5.3 Transversaler Peltier-Effekt in langen Proben: Experimente . . .	86
<b>6 Leistungsgeneration in verkippten Blei-Bismuttellurid-Multilagenstrukturen</b>	<b>91</b>
6.1 Berechnung der Leistung und des Wirkungsgrades . . . . .	91

6.2	Messungen der Leistung und des Wirkungsgrades . . . . .	97
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>103</b>
<b>8</b>	<b>Anhang: Messung von Temperaturunterschieden mit einem Thermoelement</b>	<b>105</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>107</b>

# 1 Einleitung

Der deutsche Physiker Thomas Johann Seebeck entdeckte den nach ihm benannten „Seebeck-Effekt“. Er beobachtete eine Kompassnadel in der Nähe eines Stromkreises aus zwei verschiedenen Leitern und erkannte, dass in einem solchen geschlossenen Leiterkreis ein Strom erzeugt wird, wenn zwischen den beiden Verbindungsstellen der verschiedenen Materialien eine Temperaturdifferenz besteht.

Diese Erscheinung wirkt sich auch auf die moderne Industrie aus. Thermoelektrische Generatoren werden seit einigen Jahrzehnten in der Raumfahrt verwendet. Sowohl in der russischen Raumfahrt als auch bei der NASA nutzt man Radionuklidbatterien zur Stromerzeugung in Raumsonden. Als Wärmequelle dient ein radioaktives Nuklid wie z.B. Plutonium. Der große Vorteil dieser Generatoren ist, dass sie sichere und günstige Energie zur Verfügung stellen. Die Lebensdauer wird im Wesentlichen von dem gewählten Nuklid bestimmt. Um auf dem Mond arbeiten zu können, bezogen die dort aufgestellten automatischen Messstationen ihre Energie ebenfalls von Radionuklidbatterien. Sogar für die Versorgung von Herzschrittmachern wurden Radionuklidbatterien eingesetzt, bevor es kleine, langlebige Batterien gab. Meist wurde als Nuklid der Alphastrahler Plutonium verwendet, da dieser leicht abzuschirmen ist.

In den vergangenen Jahren wurde dem Seebeck-Effekt vermehrt Aufmerksamkeit geschenkt. Er findet in einem integrierten thermoelektrischen Generator seit kurzem Anwendung in modernen Automobilen. Der Generator wird in den Abgasstrang eingebaut, um die ansonsten ungenutzte Abwärme, die bei der Verbrennung entsteht, zur Stromerzeugung zu verwenden.

Etwa zehn Jahre nach der Entdeckung des Seebeck-Effekts beobachtete Jean Peltier, dass beim Stromfluss durch einen Leiterkreis aus zwei verschiedenen Materialien an den Grenzflächen je nach Stromrichtung Wärme absorbiert oder emittiert wird. Dieser nach ihm benannte Effekt wird heutzutage in Peltier-Elementen zur Kühlung, Heizung und Temperaturregelung verwendet. Der Peltier-Effekt findet z.B. Anwendung bei der Kühlung elektronischer Bauelemente oder als Temperaturstabilisierung von Laserdioden. Außerdem werden Peltier-Elemente in Kühlschränken, Klein-Klimaanlagen und gekühlten Hand-

schuhfächern in Automobilen verwendet. Als Heizung werden Peltier-Elemente unter anderem in Babyflaschenwärmern und Sitzheizungen genutzt.

Für mobile Anwendungen werden schon seit langer Zeit Peltierkühlboxen hergestellt. Trotz des geringen Wirkungsgrades hat das Peltier-Element als Kühler gewisse Vorteile gegenüber herkömmlichen Kompressor-Kühlsystemen. Peltier-Kühler zeichnen sich zum einen durch ihre kompakte Bauweise aus. Außerdem gibt es keine beweglichen Teilchen und somit kaum Verschleiß. Die Kühlung erfolgt geräuschlos. Der jedoch entscheidende Vorteil ist wohl die kostengünstige Bauweise.

In den frühen 90er Jahren wurde in einer natürlich gewachsenen, verkippten  $YBa_2Cu_3O_{7-\delta}$ -Struktur [1, 2, 3, 4] ein transversaler Seebeck-Effekt beobachtet [5, 6]. In Experimenten wurde gezeigt, dass ein in der Probe erzeugter Temperaturgradient eine große transversale Thermospannung zwischen den Schichträndern der Dünnschichten verursacht [7, 8]. Die natürliche Schichtung des Materials hat eine anisotrope Thermokraft zur Folge. Aufgrund der Anisotropie verlaufen Wärmestrom und thermoelektrischer Strom nicht parallel zueinander.

In dieser Arbeit wird untersucht, ob anisotrope thermoelektrische Effekte auch in verkippten Proben aus künstlich geschichteten Materialien nachgewiesen werden können. In einer verkippten Multilagenstruktur aus einem Halbleiter und einem Metall erhält man eine relativ große Anisotropie [9]. Im Rahmen dieser Arbeit wird eine Multilagenstruktur [10, 11] aus Blei und Bismuttellurid verwendet, um den transversalen Peltier-Effekt [12, 13] und den transversalen Seebeck-Effekt zu untersuchen.

Im folgenden werden zunächst Seebeck- und Peltier-Effekt in isotropen Materialien beschrieben. Daraufhin werden die anisotropen thermoelektrischen Effekte behandelt, sowie die Berechnung der Transporteigenschaften in einer Multilagenstruktur durchgeführt. Der transversale Peltier-Effekt wird für lange und kurze Proben differenziert betrachtet und es werden die theoretisch erzielbaren Temperaturdifferenzen zwischen kalter und warmer Probenseite berechnet.

Im experimentellen Teil der Arbeit wird die Herstellung der Proben beschrieben. Die Proben werden anhand der Transporteigenschaften charakterisiert und die gemessenen Transporteigenschaften werden mit den berechneten Werten verglichen. Danach wird der transversale Peltier-Effekt in verschiedenen

Proben untersucht. Auch hier werden die Ergebnisse mit den Berechnungen verglichen. Des weiteren wird gezeigt, wie diese verkippten Multilagenstrukturen als thermoelektrische Generatoren genutzt werden können. Es wird die generierte Leistung und die Effizienz, sowohl theoretisch als auch experimentell bestimmt.



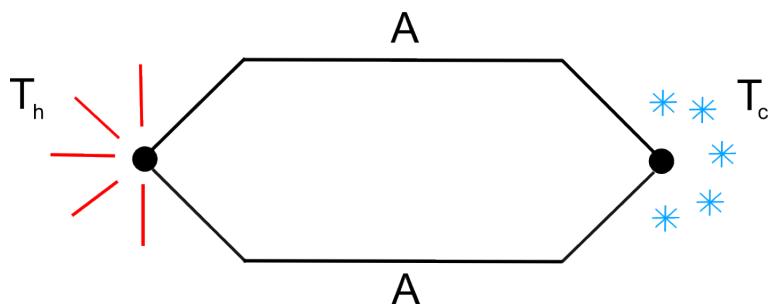
## 2 Thermoelektrische Effekte in isotropen Materialien

In diesem Kapitel werden die thermoelektrischen Effekte in isotropen Materialien beschrieben, beginnend mit dem Seebeck-Effekt. Dieser wird in drei Schritten erklärt, angefangen mit der empirischen Beschreibung. Darauf folgt eine Beschreibung anhand des Drudemodells und schließlich eine Darstellung mit Hilfe der Boltzmann-Transport-Gleichung. Anschließend wird der Peltier-Effekt behandelt.

### 2.1 Seebeck-Effekt

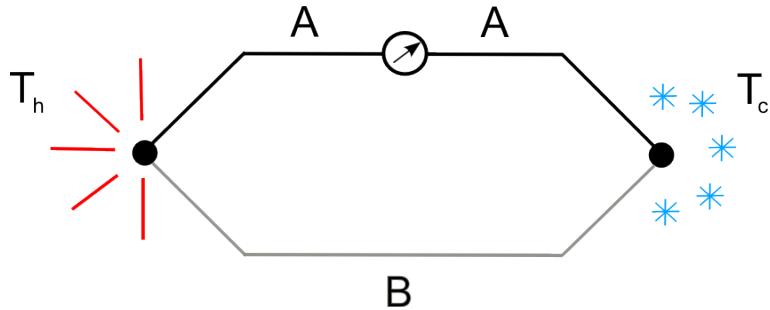
#### 2.1.1 Empirische und experimentelle Beschreibung des Seebeck- Effekts

Legt man an ein elektrisch leitendes Material einen Temperaturgradienten an (ohne ein elektrisches Feld), so führt dies im Allgemeinen nicht nur zu einem Wärmestrom sondern auch zu einem thermoelektrischen Effekt, dem sogenannten Seebeck-Effekt. Zur Beobachtung verwendet man einen geschlossenen Leiterkreis. Die Kontaktstellen (siehe Abb. 1) werden gekühlt bzw. erhitzt. Betrachtet man zunächst einen symmetrischen Kreis aus nur einem Material A (siehe Abb. 1), so ist ersichtlich, dass kein elektrischer Strom fließen kann [14].



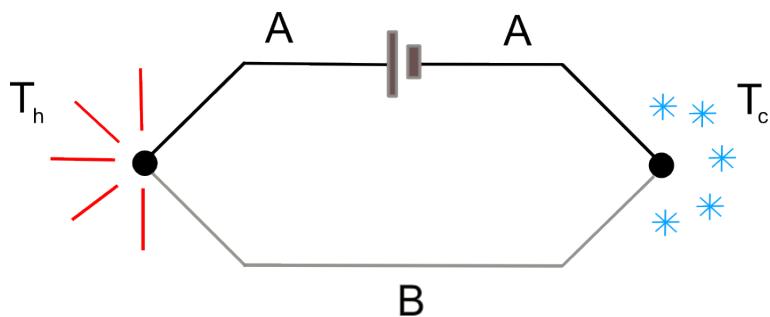
**Abbildung 1:** Leiterkreis aus nur einem Material A mit einer heißen Kontaktstelle der Temperatur  $T_h$  und einer kalten Kontaktstelle der Temperatur  $T_c$ .

Um einen thermoelektrischen Strom zu beobachten, ist es notwendig einen geschlossenen Kreis aus zwei verschiedenen Materialien A und B zu betrachten (siehe Abb. 2) [14].



**Abbildung 2:** Schematische Darstellung des Seebeck-Effekts (geschlossener Kreis).

Dabei ist die entstehende Stromstärke von den Materialien und deren Thermokraft, von der Temperaturdifferenz zwischen  $T_h$  (Temperatur an der warmen Seite des Leiterkreises) und  $T_c$  (Temperatur an der kalten Seite des Leiterkreises) und den Widerständen der Leiter abhängig [14]. Betrachtet man einen offenen Kreis wie in Abb. 3 gezeigt, so entsteht eine Potentialdifferenz  $\Delta U_{AB}$  an der offenen Stelle.



**Abbildung 3:** Schematische Darstellung des Seebeck-Effekts (offener Kreis).

Die Potentialdifferenz ist nur abhängig von dem Temperaturunterschied zwischen  $T_h$  und  $T_c$  und den Materialien A und B, nicht aber von der Form oder den Abmessungen der Leiter selbst [14]. Diese Anordnung kann auch als Thermoelement bezeichnet werden [14]. Liegt am Thermoelement eine Tempera-

turdifferenz  $\Delta T$  an, dann beschreibt der Quotient  $\frac{\Delta U_{AB}}{\Delta T}$  die Thermokraft und es gilt

$$S_A - S_B \equiv \frac{dU_{AB}}{dT}, \quad (1)$$

wobei  $S_{AB} = S_A - S_B$  [15] als differentielle Thermokraft bezeichnet wird. Will man die absolute Thermokraft  $S_A$  eines Materials A bestimmen, so verwendet man als Referenzmaterial B ein Material mit einer bereits bekannten Thermokraft. Dafür eignet sich zum Beispiel Blei oder ein Supraleiter, da diese eine vernachlässigbar kleine bzw. verschwindende Thermokraft haben.

### 2.1.2 Beschreibung des Seebeck-Effekts anhand des Drudemodells

Die folgende Erklärung der Thermokraft anhand des Drudemodells beruht im Wesentlichen auf den Beschreibungen, wie sie in [16, 17, 18] zu finden sind. In diesem Modell wird angenommen, dass in einem Leiter die von den Metallatomen abgegebenen Leitungselektronen ein freies Elektronengas bilden und die Elektronen im Mittel nach der Zeit  $\tau$  gestreut werden. Legt man ein elektrisches Feld  $\vec{E}$  an, so wirkt eine Kraft  $\vec{F} = -e\vec{E}$  auf jedes Elektron, welche zu einer Beschleunigung führt. Der durch die Beschleunigung der Elektronen entstehende elektrische Strom kann aufgrund der Streuung nicht unendlich groß werden, da die Elektronen bei jedem Stoß abgebremst werden. Somit stellt sich eine mittlere Geschwindigkeit der Elektronen ein. Diese wird als Driftgeschwindigkeit [16, 19]

$$\vec{v}_D = \frac{e\tau}{m} \vec{E} \quad (2)$$

bezeichnet.

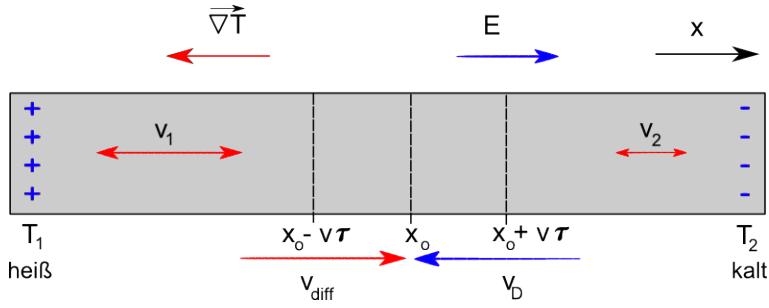
Wenn nun an Stelle des elektrischen Feldes ein Temperaturgradient  $\vec{\nabla}T$  anliegt, stellt sich im Rahmen des Drudemodells eine mittlere Elektronengeschwindigkeit in Richtung zum kälteren Ende hin ein [16], wie im folgenden dargestellt wird. Dieser Geschwindigkeit entspricht ein elektrischer Strom. Ein Strom fließt

jedoch nur solange bis sich an den Enden so viel elektrische Ladung angesammelt hat, dass das dadurch aufgebaute Gegenfeld einen weiteren Stromfluss verhindert und sich ein stationäres Gleichgewicht einstellt. Dieses thermoelektrische Feld aufgrund des Temperaturgradienten wird in isotropen Materialien durch [16]

$$\vec{E} = S \cdot \vec{\nabla} T \quad (3)$$

beschrieben, wobei  $S$  die Thermokraft bezeichnet.

Um die Thermokraft herzuleiten, wird das eindimensionale Modell in Abb. 4 betrachtet.



**Abbildung 4:** Eindimensionales Modell zur Beschreibung der Thermokraft [17].

Der Mittelwert der Teilchengeschwindigkeit bei  $x_0$  ist nicht mehr Null, da  $v_1 \neq v_2$ . Die durch den Temperaturgradienten hervorgerufene mittlere Diffusionsgeschwindigkeit  $v_{diff}$  ist gegeben durch

$$v_{diff} = \frac{1}{2}[v(x - l) - v(x + l)]. \quad (4)$$

Mit Hilfe einer Taylorentwicklung um  $x_0$  ( $v[T(x)] \approx v(x_0) + \frac{dv}{dx}(x - x_0)$ ) erhält man

$$\begin{aligned} v_{diff} &= \frac{1}{2}[v(x_0) + \frac{dv}{dx}(-v\tau) - v(x_0) - \frac{dv}{dx}(v\tau)] = -v\tau \frac{dv}{dx} \\ &= -\tau \frac{d}{dx} \left( \frac{v^2}{2} \right) = -\frac{\tau}{2} \frac{dv^2}{dT} \frac{dT}{dx}, \end{aligned} \quad (5)$$

dabei bezeichnet  $\tau$  die mittlere Stoßzeit und  $l = v\tau$  die mittlere freie Weglänge. Berücksichtigt man die Verallgemeinerung auf drei Dimensionen so erhält man

$$\vec{v}_{diff} = -\frac{\tau}{6} \frac{dv^2}{dT} \vec{\nabla} T. \quad (6)$$

Wie bereits erklärt verschwindet die Summe aus Driftgeschwindigkeit  $\vec{v}_D$  und  $\vec{v}_{diff}$  im stationären Fall:

$$\vec{v}_D + \vec{v}_{diff} = 0. \quad (7)$$

Setzt man  $\vec{v}_{diff}$  und  $\vec{v}_D$  in Gl. 7 ein, so erhält man

$$\frac{e\tau}{m} \vec{E} - \frac{\tau}{6} \frac{dv^2}{dT} \vec{\nabla} T = 0. \quad (8)$$

Aus Gl. 8 und Gl. 3 folgt nun für die Thermokraft

$$S = -\frac{m}{6e} \frac{dv^2}{dT} = -\frac{1}{3e} \frac{d}{dT} \left( \frac{mv^2}{2} \right) = -\frac{1}{3e} \frac{d\epsilon}{dT}, \quad (9)$$

wobei  $\epsilon$  die kinetische Energie der Elektronen beschreibt.

In der klassischen statistischen Mechanik gilt  $\epsilon = \frac{3}{2}kT$ . Daraus ergibt sich für die Thermokraft

$$S = -\frac{1}{3e} \frac{d\epsilon}{dT} = -\frac{k}{2e} = -43\mu \frac{\text{V}}{\text{K}}. \quad (10)$$

Experimentell beobachtet man bei Metallen Thermokräfte in der Größenordnung  $\mu\text{V}$  pro  $\text{K}$ . Diese liegen somit um einen Faktor 10-100 unter dem abgeschätzten Wert [16]. Dies liegt z. T. daran, dass die Fermistatistik nicht berücksichtigt wird. Eine genauere Betrachtung der Thermokraft wird mit Hilfe der Boltzmann-Transport-Gleichung ermöglicht, wie im folgenden Kapitel dargestellt wird.

### 2.1.3 Darstellung des Seebeck-Effekts mit Hilfe der Boltzmann - Transport - Gleichung

Um die Thermokraft detaillierter zu betrachten, wird die Boltzmann-Transport-Gleichung zur Herleitung verwendet. Diese Herleitung folgt im Wesentlichen der Beschreibung aus [20, 15, 14, 16]. Fließt ein elektrischer Strom in einem Festkörper, so wirken zwei entgegengesetzte, charakteristische Mechanismen: treibende Einflüsse von äußeren Feldern und Kräften, und eine hemmende Wirkung durch Stöße der Ladungsträger an Phononen und Störstellen. Die Boltzmann-Gleichung beschreibt das Zusammenwirken dieser beiden Mechanismen.

In einem Leiter der Temperatur  $T$ , der sich im thermischen Gleichgewicht befindet, wird die Verteilung der Elektronen durch die Fermi-Dirac-Funktion [20]

$$f_0 = \frac{1}{\exp \frac{\epsilon - \epsilon_F}{kT} + 1} \quad (11)$$

beschrieben, wobei  $\epsilon$  die Energie der Elektronen und  $\epsilon_F$  die Fermi-Energie ist. Wird dieses Gleichgewicht durch ein angelegtes elektrisches Feld oder einen Temperaturgradienten gestört, so stellt sich eine von  $f_0$  abweichende Verteilung  $f$  ein. Im stationären Zustand wird jede durch elektrische Felder oder Temperaturgradienten hervorgerufene Änderung von  $f$  durch Stöße kompensiert. Daraus folgt die Boltzmann-Gleichung [15]

$$\left[ \frac{df}{dt} \right]_{Felder} = \left[ \frac{df}{dt} \right]_{Stoesse}. \quad (12)$$

Diese Gleichung erklärt, dass in einem Leiter mit einem angelegten elektrischen Feld ein konstanter Strom fließt. Die Relaxationszeitnäherung wird beschrieben durch [15]

$$\left[ \frac{df}{dt} \right]_{Stoesse} = -\frac{f - f_0}{\tau}, \quad (13)$$

wobei  $\tau$  eine Zeitkonstante ist, welche als unabhängig von der Art der Auslenkung  $f - f_0$  angenommen wird.

Die Verteilungsfunktion  $f$  für den „Feldterm“ ist abhängig von der Elektronengeschwindigkeit  $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$ , dem Ort der Elektronen  $\vec{r} = (x, y, z)$  und der Zeit [15]:

$$\left[ \frac{df}{dt} \right]_{Felder} = \frac{\partial f}{\partial u_x} \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial u_y} \frac{\partial u_y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial u_z} \frac{\partial u_z}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t}. \quad (14)$$

Dieser Term wird verursacht durch das Anlegen eines elektrischen Feldes  $E_x$ , wodurch die Elektronen beschleunigt werden. Aus  $F_x = ma_x$  erhält man die Bewegungsgleichung [20]

$$\frac{du_x}{dt} = -\frac{eE_x}{m}, \quad (15)$$

dabei ist  $e$  die Elementarladung und  $m$  die Elektronenmasse. Setzt man Gl. 15 in Gl. 14 ein, so erhält man allgemein

$$\left[ \frac{df}{dt} \right]_{Felder} = \frac{\partial f}{\partial u_x} \frac{eE_x}{m} + \frac{\partial f}{\partial u_y} \frac{eE_y}{m} + \frac{\partial f}{\partial u_z} \frac{eE_z}{m} + \frac{\partial f}{\partial x} u_x + \frac{\partial f}{\partial y} u_y + \frac{\partial f}{\partial z} u_z. \quad (16)$$

Mit Gl. 12 und Gl. 13 ergibt sich die Boltzmann-Transport-Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial u_x} \frac{eE_x}{m} + \frac{\partial f}{\partial u_y} \frac{eE_y}{m} + \frac{\partial f}{\partial u_z} \frac{eE_z}{m} + \frac{\partial f}{\partial x} u_x + \frac{\partial f}{\partial y} u_y + \frac{\partial f}{\partial z} u_z = -\frac{f - f_0}{\tau}. \quad (17)$$

Liegt das elektrische Feld nur in x-Richtung an, reduziert sich Gl. 17 zu

$$\frac{\partial f}{\partial u_x} \frac{eE_x}{m} + \frac{\partial f}{\partial x} u_x = -\frac{f - f_0}{\tau}. \quad (18)$$

Für  $f$  ergibt sich damit

$$f = f_0 - \tau \left( \frac{\partial f}{\partial u_x} \frac{eE_x}{m} + \frac{\partial f}{\partial x} u_x \right). \quad (19)$$

Die Störungen durch elektrische Felder und Temperaturgradienten sind im allgemeinen sehr klein, so dass  $f$  von  $f_0$  nur wenig abweicht [15]. Daher kann man auf der rechten Seite von Gl. 19  $f = f_0$  setzen und es ergibt sich

$$f = f_0 - \tau \left( \frac{\partial f_0}{\partial u_x} \frac{eE_x}{m} + \frac{\partial f_0}{\partial x} u_x \right). \quad (20)$$

Beachtet man in Gl. 20, dass für den Elektronenimpuls  $dp_x = m \cdot du_x = \hbar \cdot dk_x$  gilt, so erhält man

$$f = f_0 - \tau \left( \frac{\partial f_0}{\partial k_x} \frac{eE_x}{\hbar} + \frac{\partial f_0}{\partial x} u_x \right). \quad (21)$$

Die beiden Terme aus Gl. 21 werden nun in Abhängigkeit der Elektronenenergie  $\epsilon$  ausgedrückt:

$$\frac{\partial f_0}{\partial k_x} = \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial k_x} \quad (22)$$

und

$$\frac{\partial f_0}{\partial x} = \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial x} + \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon_F} \frac{\partial \epsilon_F}{\partial x} + \frac{\partial f_0}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x}. \quad (23)$$

Nimmt man an, dass die Elektronenenergie und die Fermi-Energie ortsunabhängig sind, so gilt:

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial x} = \frac{\partial \epsilon_F}{\partial x} = 0. \quad (24)$$

Außerdem gilt:

$$\frac{\partial f_0}{\partial T} = -\frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} \frac{\epsilon - \epsilon_F}{T}, \quad (25)$$

damit ergibt sich:

$$\frac{\partial f_0}{\partial x} = -\frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} \frac{\epsilon - \epsilon_F}{T} \frac{\partial T}{\partial x}. \quad (26)$$

Setzt man Gl. 26 und Gl. 22 in Gl. 21 ein, so erhält man

$$f = f_0 - \tau \left( \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial k_x} \frac{eE_x}{\hbar} - \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} \frac{\epsilon - \epsilon_F}{T} \frac{\partial T}{\partial x} u_x \right). \quad (27)$$

Für die Stromdichte im Impulsraum in x-Richtung gilt [15]

$$j_{el_x} = \frac{e}{4\pi^3} \iiint u_x f dk^3. \quad (28)$$

Anstelle von  $u_x$  wird nun die Gruppengeschwindigkeit [15]

$$u_x = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial \epsilon}{\partial k_x} \quad (29)$$

der Wellenfunktion der Elektronen in Gl. 27 eingefügt und man erhält unter Berücksichtigung dass der Zustand  $f_0$  keinen Beitrag zum elektrischen Strom liefert ( $\iiint u_x f_0 dk^3 = 0$ )

$$\begin{aligned} j_{el_x} &= -\frac{e}{4\pi^3 \hbar^2} \iiint \frac{\partial \epsilon}{\partial k_x} \tau \left( eE_x \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial k_x} - \frac{\partial \epsilon}{\partial k_x} \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} \frac{\epsilon - \epsilon_F}{T} \frac{\partial T}{\partial x} \right) dk^3 \\ &= -\frac{e}{4\pi^3 \hbar^2} \iiint \tau \left( \frac{\partial \epsilon}{\partial k_x} \right)^2 \left( \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} \right) \left( eE_x - \frac{\epsilon - \epsilon_F}{T} \frac{\partial T}{\partial x} \right) dk^3. \end{aligned} \quad (30)$$

Dieses Integral über das Volumenelement  $dk^3 = dk_x dk_y dk_z$  kann durch ein Integral über die Energie  $\epsilon$  ausgedrückt werden. Zunächst wird das Flächenelement  $dA$  aus einer Fläche konstanter Energie durch  $dk_y dk_z$  ersetzt [15]

$$dk^3 = dk_x dk_y dk_z = dA dk_x, \quad (31)$$

dabei ist  $dk_x$  die zu  $dA$  senkrechte Impulskomponente. Weiter gilt

$$dk^3 = dA \frac{\partial k_x}{\partial \epsilon} d\epsilon = \frac{dA d\epsilon}{\nabla_k \epsilon}, \quad (32)$$

in Gl. 30 eingesetzt ergibt dies

$$j_{el_x} = -\frac{e}{4\pi^3 \hbar^2} \iiint \tau \left( \frac{\partial \epsilon}{\partial k_x} \right)^2 \left( \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} \right) \left( eE_x - \frac{\epsilon - \epsilon_F}{T} \frac{\partial T}{\partial x} \right) \frac{dA d\epsilon}{\nabla_k \epsilon}. \quad (33)$$

Mit Hilfe von

$$M_n = -\frac{1}{4\pi^3 \hbar^2} \int (\epsilon - \epsilon_F)^n \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} \left[ \iint \left( \frac{\partial \epsilon}{\partial k_x} \right)^2 \frac{\tau}{\nabla_k \epsilon} dA \right] d\epsilon \quad (34)$$

für  $n = 0, 1, 2, \dots$  lässt sich Gl. 33 verkürzen zu

$$j_{el_x} = e^2 M_0 E_x - e \frac{M_1}{T} \frac{\partial T}{\partial x}. \quad (35)$$

Für den Fall dass die Temperatur gleichmäßig, also isotherm über den Ort verteilt ist gilt  $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$  und Gl. 33 vereinfacht sich zu

$$j_{el_x} = e^2 M_0 E_x. \quad (36)$$

Laut Definition folgt damit für die elektrische Leitfähigkeit [15]

$$\sigma = e^2 M_0 = -\frac{e^2}{4\pi^3 \hbar^2} \int \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} \left[ \iint \left( \frac{\partial \epsilon}{\partial k_x} \right)^2 \frac{\tau}{\nabla_k \epsilon} dA \right] d\epsilon. \quad (37)$$

Fließt kein Strom ( $j_{el_x} = 0$ ), so wird durch einen angelegten Temperaturgradienten ein thermoelektrisches Feld  $E_x$  erzeugt für das aus Gl. 35 folgt

$$E_x = \frac{1}{eT} \frac{M_1}{M_0} \frac{\partial T}{\partial x} = S \nabla_x T. \quad (38)$$

Daraus folgt für die Thermokraft

$$S = \frac{1}{eT} \frac{M_1}{M_0}. \quad (39)$$

Aus Gl. 34 ergibt sich

$$M_1 = \frac{\pi^2}{3} (kT)^2 \left[ \frac{\partial M_0}{\partial \epsilon} \right]_{\epsilon=\epsilon_F}. \quad (40)$$

Zusammen mit Gl. 37 erhält man

$$M_1 = \frac{\pi^2}{3e^2} (kT)^2 \left[ \frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \right]_{\epsilon=\epsilon_F}. \quad (41)$$

Setzt man in Gl. 39 für  $M_0$  und  $M_1$  Gl. 37 und Gl. 41 ein, so erhält man

$$S = \frac{e}{\sigma T} \frac{\pi^2}{3e^2} (kT)^2 \left[ \frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \right]_{\epsilon=\epsilon_F} = \frac{\pi^2 k^2 T}{3e} \left[ \frac{\partial \ln \sigma}{\partial \epsilon} \right]_{\epsilon=\epsilon_F}. \quad (42)$$

In dieser Gleichung steigt die Thermokraft linear mit der Temperatur  $T$  an. Die Leitfähigkeit  $\sigma$  hängt von der Elektronenenergie  $\epsilon$  ab. Größe und Vorzeichen der Thermokraft werden von der Abhängigkeit  $\sigma(\epsilon)$  der Leitfähigkeit von der

Fermifläche bestimmt. Im allgemeinen nimmt die Leitfähigkeit mit der Energie zu und es gilt [15]

$$\sigma(\epsilon) = \text{const.} \cdot \epsilon^\xi, \quad (43)$$

wobei  $\xi$  eine kleine Zahl der Größenordnung eins ist und als thermoelektrischer Parameter [15] bezeichnet wird. Setzt man Gl. 43 in Gl. 42 ein, so erhält man

$$S = \frac{\pi^2 k^2 T}{3e\epsilon_F} \xi = \frac{\pi^2 k}{3e} \frac{T}{T_F} \xi. \quad (44)$$

Dabei wurde  $\epsilon_F = kT_F$  verwendet. Gl. 44 gilt für gute Leiter bzw. Metalle. Diese haben eine Thermokraft im Bereich von einigen  $\mu V/K$  [21]. Für Silber ( $\epsilon_F = 5,48 eV$ ) beispielsweise ergibt sich nach Gl. 44 eine Thermokraft von  $1,34 \mu V/K$ . Der Literaturwert für die Thermokraft von Silber liegt bei  $1,3 \mu V/K$ . Mit dieser Gleichung lässt sich für Metalle die richtige Größenordnung der Thermokräfte bestimmen. Dies liegt daran, dass im Gegensatz zu der Abschätzung der Thermokraft mit Hilfe des Drudemodels hier die Fermienergien der jeweiligen Metalle berücksichtigt werden. Somit ist eine genauere und individuelle Berechnung der Thermokraft möglich.

Um die Thermokraft für Halbleiter abzuschätzen, kann man eine Betrachtung des Peltier-Koeffizienten  $\Pi$  heranziehen [20]. Ist die elektrische Stromdichte sowie die Wärmestromdichte bekannt, so kann man den Peltier-Koeffizienten  $\Pi$  mit Hilfe von  $\Pi = j_\Pi / j_{el}$  angeben und aus  $\Pi$  die Thermokraft mit Hilfe der Kelvin-Relation berechnen [15].

Für die Stromdichte der Elektronen, erzeugt durch ein elektrisches Feld, gilt

$$\vec{j}_{el} = n(-e)(-\mu_{el})\vec{E} = ne\mu_{el}\vec{E}. \quad (45)$$

Dabei ist  $\mu_{el}$  die Beweglichkeit der Elektronen. Ein Elektron transportiert im Mittel die Energie [20]

$$\epsilon_c - \epsilon_F + \frac{3}{2}kT \quad (46)$$

bezogen auf das Ferminiveau.  $\epsilon_c$  bezeichnet die Energie an der Leitungsbandkante. Für die Wärmestromdichte gilt damit

$$\vec{j}_\Pi = n \left[ \epsilon_c - \epsilon_F + \frac{3}{2}kT \right] (-\mu_{el}) \vec{E}. \quad (47)$$

Der Peltier-Koeffizient  $\Pi$  ist definiert durch

$$\Pi = \frac{\vec{j}_\Pi}{\vec{j}_{el}} = -\frac{3kT}{2e} - \frac{\epsilon_c - \epsilon_F}{e}. \quad (48)$$

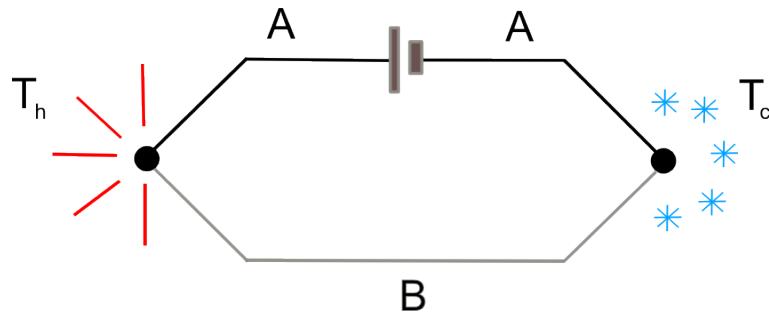
Mit Hilfe der Kelvin-Relation  $\Pi = ST$  erhält man die Thermokraft

$$S = -\frac{3k}{2e} - \frac{\epsilon_c - \epsilon_F}{eT}. \quad (49)$$

Der zweite Term sorgt für die Materialabhängigkeit der Thermokraft. Für Si mit  $(\epsilon_c - \epsilon_F) \approx 0,5\text{eV}$  ergibt sich bei Zimmertemperatur  $S \approx 1\text{mV/K}$ .

## 2.2 Peltier-Effekt

Während beim Seebeck-Effekt eine elektrische Spannung aufgrund eines Temperaturgradienten entsteht, wird beim Peltier-Effekt ein Wärmestrom [22] aufgrund eines elektrischen Stromes erzeugt. Man betrachte zwei isotrope Materialien A und B, die wie in Abb. 5 in elektrischem und thermischem Kontakt stehen und anfangs überall die gleiche Temperatur haben. Fließt nun ein elektrischer Strom der Dichte  $j_{el}$  durch die Anordnung, so wird je nach Stromrichtung an einem Kontakt die Wärmemenge  $Q$  pro Zeiteinheit und Querschnittsfläche absorbiert bzw. am anderen Kontakt emittiert. Eine Kontaktstelle wird also erwärmt und die andere abgekühlt.



**Abbildung 5:** Schematische Darstellung des Peltier-Effekts [23].

Dreht man die Stromrichtung um, so wird der warme Kontakt kalt und umgekehrt. Die Wärmestromdichte  $j_{\Pi} = \frac{Q}{A\Delta t} = \frac{\dot{Q}}{A}$  ist proportional zur Stromdichte  $j_{el}$  [24]. Beide Größen sind verknüpft durch den differentiellen Peltier-Koeffizienten

$$\Pi_{AB} = \frac{j_{\Pi}}{j_{el}} \quad (50)$$

der beiden Materialien A und B [25].

Der Peltier-Koeffizient  $\Pi_{AB}$  lässt sich auch mit Hilfe der Thermokraft bestimmen durch [26]

$$\Pi_{AB} = S_{AB}T. \quad (51)$$

Wie auch die differentielle Thermokraft hängt der differentielle Peltier - Koefizient  $\Pi_{AB}$  von der Temperatur und den beiden verwendeten Materialien ab. Mit Hilfe der Onsager-Relationen [27] ergibt sich folgender Zusammenhang zwischen dem absoluten Peltier-Koeffizienten  $\hat{\Pi}$  und der absoluten Thermokraft  $\hat{S}$ :

$$\hat{\Pi} = \hat{S}T. \quad (52)$$

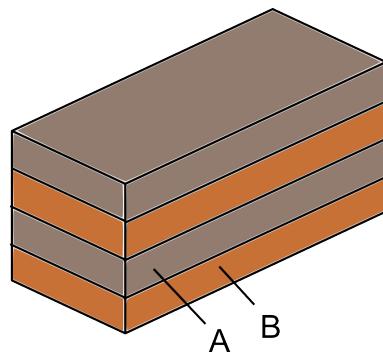
Der Peltier-Effekt tritt nicht in isotropen Materialien auf, man kann ihn nur in Materialien beobachten, die eine Diskontinuität in ihren thermoelektrischen Eigenschaften aufweisen, bzw. an Grenzflächen zwischen zwei verschiedenen Materialien.

Um den anisotropen Peltier- und Seebeck-Effekt zu beschreiben, werden zunächst die Transporteigenschaften für anisotope Materialien benötigt. Diese werden im nächsten Kapitel behandelt.



### 3 Anisotrope Transporteigenschaften in Multilagenstrukturen

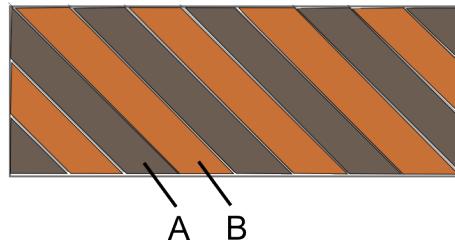
In diesem Kapitel werden anisotrope Transporteigenschaften beschrieben, wie sie in künstlich hergestellten Multilagenstrukturen beobachtet werden. Abb. 6 zeigt eine Multilagenstruktur aus zwei verschiedenen Materialien A und B.



**Abbildung 6:** Multilagenstruktur aus zwei verschiedenen Materialien A und B zur Erzeugung künstlicher thermoelektrischer Anisotropie.

Um den Seebeck- und den Peltier-Effekt in verkippten Proben (siehe Abb. 7) beschreiben zu können, muss man die Transporteigenschaften, elektrische Leitfähigkeit, Wärmeleitfähigkeit und Thermokraft bestimmen.

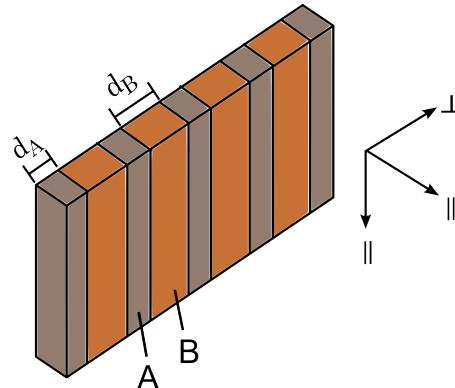
Aufgrund der durch die Schichtung erzeugten Anisotropie ergeben sich für die Transporteigenschaften für die verschiedenen Raumrichtungen unterschiedliche Werte [28]. Im Rahmen dieser Arbeit wurden verkippte Multilagenstrukturen (Abb. 7) hergestellt (siehe Kap. 4), zunächst wird daher die Berechnung der Transporteigenschaften verkippter Proben aus den Materialeigenschaften der isotropen Schichtmaterialien dargestellt.



**Abbildung 7:** Verkippte Multilagenstruktur.

Die Transporteigenschaften, Wärmeleitfähigkeit, elektrische Leitfähigkeit und Thermokraft in anisotropen Strukturen können durch Tensoren 2. Stufe beschrieben werden. Diese vereinfachen sich zu einer Matrix in Hauptachsenform, wenn man die Koordinatenachsen parallel zu den Kristallachsen wählt [29](siehe Abb. 8). In Kapitel 3.3 werden diese Tensoren berechnet.

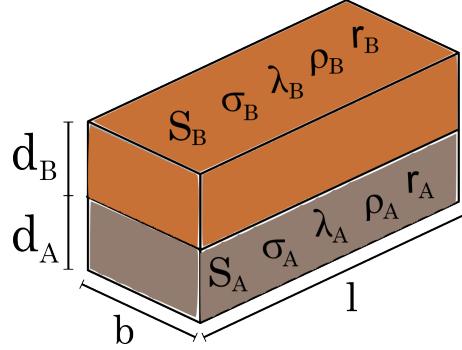
Zunächst werden die Transporteigenschaften senkrecht und parallel zur Schichtung bestimmt. Diese werden für die Berechnung der Tensoren benötigt. Die Transporteigenschaften senkrecht ( $\perp$ ) zur Schichtung werden durch eine Reihenschaltung der Materialien berechnet und die parallel ( $\parallel$ ) zur Schichtung durch eine Parallelschaltung [14](siehe Abb.8).



**Abbildung 8:** Multilagenstapel aus den Materialien A und B.

Dazu betrachtet man zunächst einen Multilagenstapel aus zwei verschiedenen, elektrisch leitenden Materialien A und B, die abwechselnd aufeinander gestapelt werden. Dabei können die Schichtdicken der Materialien voneinander ab-

weichen. Da sich die Schichtungen periodisch wiederholen, genügt es ein Modell aus nur zwei Schichten A und B zu betrachten (siehe Abb. 9).



**Abbildung 9:** Vereinfachter Multilagenstapel.

In Abb. 9 beschreiben  $S_A$  bzw.  $S_B$  die Thermokräfte der als isotrop angenommenen Materialien A bzw. B,  $\sigma_A$  und  $\sigma_B$  die elektrischen Leitfähigkeiten,  $\lambda_A$  und  $\lambda_B$  die Wärmeleitfähigkeiten,  $\rho_A$  und  $\rho_B$  die spezifischen elektrischen Widerstände und  $r_A$  und  $r_B$  die spezifischen thermischen Widerstände.  $d_A$  und  $d_B$  beschreiben die Dicken der Materialien A und B.

In den nächsten beiden Kapiteln werden zunächst die senkrechten und parallelen Transporteigenschaften berechnet, um daraus dann in Kap. 3.1.3 die kompletten Tensoren für den verkippten Multilagenstapel zu bestimmen.

### 3.1 Transporteigenschaften senkrecht zur Schichtung

Wie bereits erwähnt, werden die Transporteigenschaften senkrecht zur Schichtung durch eine Reihenschaltung der Materialien A und B beschrieben. In einer Reihenschaltung addieren sich nach den Kirchhoff'schen Regeln die Widerstände der einzelnen Komponenten zum Gesamtwiderstand. Für den elektrischen Widerstand der Probe erhält man dadurch [30]

$$R_{el\perp} = R_{elA} + R_{elB}. \quad (53)$$

Der elektrische Widerstand wird allgemein durch

$$R_{el} = \frac{1}{\sigma} \frac{d}{lb} \quad (54)$$

beschrieben, wobei  $\sigma$  die elektrische Leitfähigkeit,  $d$  die Dicke,  $l$  die Länge und  $b$  die Breite des verwendeten Materials ist. Aus Gl.53 und Gl.54 erhält man für einen Stapel aus zwei Schichten

$$R_{el\perp} = \frac{1}{lb} \left( \frac{d_A}{\sigma_A} + \frac{d_B}{\sigma_B} \right). \quad (55)$$

Die elektrische Leitfähigkeit der Probe berechnet sich mit Hilfe von Gl.54 und Gl.55 zu

$$\begin{aligned} \sigma_{\perp} &= \frac{1}{R_{el\perp}} \frac{d_A + d_B}{lb} \\ &= \frac{(d_A + d_B)}{\frac{d_A}{\sigma_A} + \frac{d_B}{\sigma_B}} \\ &= \frac{\sigma_A \sigma_B (d_A + d_B)}{d_A \sigma_B + d_B \sigma_A} \\ &= \frac{\sigma_A \sigma_B (1 + p)}{p \sigma_A + \sigma_B}, \end{aligned} \quad (56)$$

wobei  $p = \frac{d_B}{d_A}$  das Dickenverhältnis ist. Der spezifische elektrische Widerstand wird damit zu

$$\begin{aligned}
\rho_{\perp} &= \frac{1}{\sigma_{\perp}} \\
&= \frac{p\sigma_A + \sigma_B}{\sigma_A\sigma_B(1+p)} \\
&= \frac{\frac{p}{\sigma_B} + \frac{1}{\sigma_A}}{1+p} \\
&= \frac{\rho_A + p\rho_B}{1+p}.
\end{aligned} \tag{57}$$

Für den Wärmewiderstand eines Körpers gilt:

$$R_{th} = \frac{1}{\lambda} \frac{d}{lb}. \tag{58}$$

Nach demselben Prinzip erhält man für den Wärmewiderstand in senkrechter Richtung [30]

$$R_{th\perp} = \frac{1}{lb} \left( \frac{d_A}{\lambda_A} + \frac{d_B}{\lambda_B} \right), \tag{59}$$

für die Wärmeleitfähigkeit

$$\lambda_{\perp} = \frac{\lambda_A \lambda_B (1+p)}{p\lambda_A + \lambda_B} \tag{60}$$

und für den spezifischen thermischen Widerstand

$$r_{\perp} = \frac{r_A + pr_B}{1+p}. \tag{61}$$

Die Thermokraft in senkrechter Richtung lässt sich über die Temperaturdifferenz  $(\Delta T)_{\perp} = (\Delta T_A + \Delta T_B)_{\perp}$  senkrecht zur Schichtung errechnen. Die gesamte

Temperaturdifferenz ist über die einzelnen Schichten, gewichtet nach Wärme-widerständen, verteilt und man erhält

$$\begin{aligned} (\Delta T_A)_\perp &= \frac{R_{th_A}}{R_{th_A} + R_{th_B}} (\Delta T)_\perp \\ (\Delta T_B)_\perp &= \frac{R_{th_B}}{R_{th_A} + R_{th_B}} (\Delta T)_\perp. \end{aligned} \quad (62)$$

Die Thermokraft erzeugt senkrecht zu den Schichten das elektrische Feld  $\vec{E} = S \vec{\nabla} T$  [24, 29]. Der Temperaturgradient verläuft in jeder einzelnen Schicht linear, so dass  $|\vec{\nabla} T| = \frac{(\Delta T)_\perp}{d}$  gilt. Daraus ergibt sich für die Thermospannung:

$$U_{th} = Ed = S(\Delta T)_\perp. \quad (63)$$

Aufgrund der Reihenschaltung kann man mit Hilfe von Gl. 63 und Gl. 62 die Spannung auch folgendermaßen ausdrücken [14]:

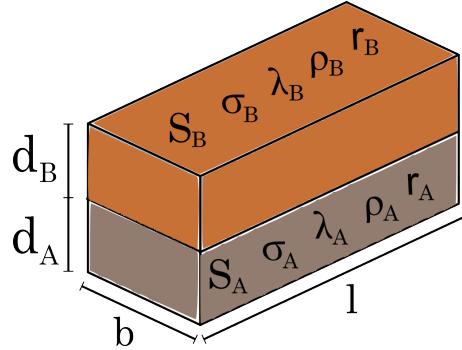
$$\begin{aligned} U_{th} &= U_{th_A} + U_{th_B} \\ &= S_A(\Delta T_A)_\perp + S_B(\Delta T_B)_\perp \\ &= \left( S_A \frac{R_{th_A}}{R_{th_A} + R_{th_B}} + S_B \frac{R_{th_B}}{R_{th_A} + R_{th_B}} \right) (\Delta T)_\perp \\ &= S_\perp(\Delta T)_\perp. \end{aligned} \quad (64)$$

Daraus folgt für den Seebeck-Koeffizienten in senkrechter Richtung:

$$\begin{aligned}
S_{\perp} &= S_A \frac{R_{th_A}}{R_{th_A} + R_{th_B}} + S_B \frac{R_{th_B}}{R_{th_A} + R_{th_B}} \\
&= S_A \frac{\frac{d_A}{\lambda_A}}{\frac{d_A}{\lambda_A} + \frac{d_B}{\lambda_B}} + S_B \frac{\frac{d_B}{\lambda_B}}{\frac{d_A}{\lambda_A} + \frac{d_B}{\lambda_B}} \\
&= \frac{S_A \lambda_B + p S_B \lambda_A}{\lambda_B + p \lambda_A}.
\end{aligned} \tag{65}$$

### 3.2 Transporteigenschaften parallel zur Schichtung

Die Transporteigenschaften parallel zur Schichtung werden durch eine Parallelschaltung der Widerstände der einzelnen Schichten berechnet. Es werden, wie im Fall senkrecht zur Schichtung, die Materialschichten aus Abb. 10 betrachtet.



**Abbildung 10:** Vereinfachter Multilagenstapel.

Für den elektrischen Widerstand eines Stapels aus zwei Schichten A und B in paralleler Richtung [30] erhält man

$$\frac{1}{R_{el\parallel}} = \frac{1}{R_{el_A}} + \frac{1}{R_{el_B}}. \tag{66}$$

Den elektrischen Widerstand berechnet man, wie in Kap. 3.1 bereits beschrieben, mit Hilfe von Gl. 54 und so gilt für den gesamten elektrischen Widerstand einer Parallelschaltung aus zwei Materialien A und B

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_{el\parallel}} &= \frac{1}{\frac{1}{d_A} \frac{l}{b\sigma_A}} + \frac{1}{\frac{1}{d_B} \frac{l}{b\sigma_B}} \\ &= (d_A\sigma_A + d_B\sigma_B) \frac{b}{l} \\ &\equiv \sigma_{\parallel} \frac{(d_A + d_B)b}{l}. \end{aligned} \tag{67}$$

Für die elektrische Leitfähigkeit parallel zur Schichtung erhält man somit

$$\begin{aligned} \sigma_{\parallel} &= \frac{1}{R_{el\parallel}} \frac{l}{(d_A + d_B)b} \\ &= (d_A\sigma_A + d_B\sigma_B) \frac{b}{l} \frac{l}{(d_A + d_B)b} \\ &= \frac{d_A\sigma_A + d_B\sigma_B}{d_A + d_B} \\ &= \frac{\sigma_A + p\sigma_B}{1 + p}, \end{aligned} \tag{68}$$

wobei  $p = \frac{d_B}{d_A}$  ist. Der spezifische elektrische Widerstand parallel zur Schichtung ergibt sich zu

$$\begin{aligned}
\rho_{\parallel} &= \frac{1}{\sigma_{\parallel}} \\
&= \frac{1+p}{\sigma_A + p\sigma_B} \\
&= \frac{\frac{1}{\sigma_A\sigma_B}(1+p)}{\frac{1}{\sigma_B} + p\frac{1}{\sigma_A}} \\
&= \frac{\rho_A\rho_B(1+p)}{\rho_B + p\rho_A}.
\end{aligned} \tag{69}$$

Analog dazu berechnet man für den thermischen Widerstand [30]

$$\frac{1}{R_{th\parallel}} = (d_A\lambda_A + d_B\lambda_B)\frac{b}{l}. \tag{70}$$

Für die thermische Leitfähigkeit parallel zu den Schichten gilt:

$$\lambda_{\parallel} = \frac{\lambda_A + p\lambda_B}{1+p} \tag{71}$$

und für den spezifischen thermischen Widerstand  $r_{\parallel}$  ergibt sich:

$$r_{\parallel} = \frac{r_A r_B (1+p)}{r_B + p r_A}. \tag{72}$$

Um den Seebeck-Koeffizienten  $S_{\parallel}$  parallel zur Schichtung zu bestimmen, betrachtet man wieder einen Temperaturgradienten, diesmal jedoch parallel zu den Schichten A und B. Für den Gradienten gilt  $|\vec{\nabla}T| = \frac{(\Delta T)_{\parallel}}{l}$ , wobei der Temperaturunterschied  $(\Delta T)_{\parallel} = (\Delta T_A)_{\parallel} = (\Delta T_B)_{\parallel}$  ist. Diese Temperaturdifferenzen in den Materialien A bzw. B verursachen eine Thermospannung

$$\begin{aligned}
U_{th\parallel} &= El \\
&= S_{\parallel} l \frac{(\Delta T)_{\parallel}}{l} \\
&= S_{\parallel} (\Delta T)_{\parallel}.
\end{aligned} \tag{73}$$

Mit Hilfe der Kirchhoff'schen Regeln ergibt sich für die Thermospannung in paralleler Richtung

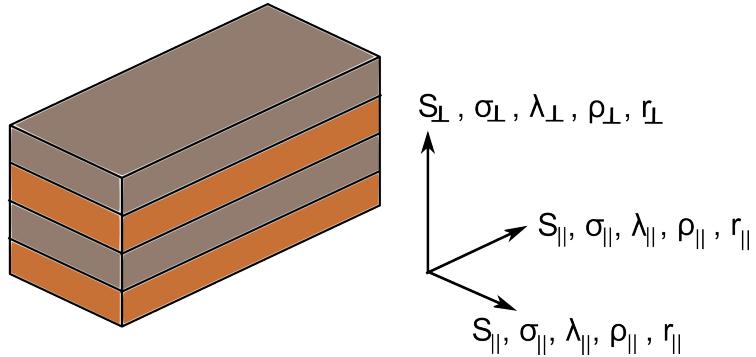
$$\begin{aligned}
U_{th\parallel} &= (I_A + I_B) R_{el\parallel} \\
&= (I_A + I_B) \frac{R_A R_B}{R_A + R_B} \\
&= \frac{U_A R_B + U_B R_A}{R_A + R_B} \\
&= \frac{U_A \frac{1}{d_B} \frac{l}{b\sigma_B} + U_B \frac{1}{d_A} \frac{l}{b\sigma_A}}{\frac{1}{d_A} \frac{l}{b\sigma_A} + \frac{1}{d_B} \frac{l}{b\sigma_B}} \\
&= \frac{\frac{U_A}{d_B \sigma_B} + \frac{U_B}{d_A \sigma_A}}{\frac{1}{d_A \sigma_A} + \frac{1}{d_B \sigma_B}} \\
&= \frac{U_A \sigma_A + p U_B \sigma_B}{\sigma_A + p \sigma_B} \\
&= \frac{S_A \sigma_A + p S_B \sigma_B}{\sigma_A + p \sigma_B} (\Delta T)_{\parallel}.
\end{aligned} \tag{74}$$

Aus Gl. 73 und Gl. 74 folgt für die Thermokraft in paralleler Richtung

$$S_{\parallel} = \frac{S_A \sigma_A + p S_B \sigma_B}{\sigma_A + p \sigma_B}. \tag{75}$$

### 3.3 Tensorielle Beschreibung in verkippten Strukturen

In den Kap. 3.1 und 3.2 wurden die elektrische Leitfähigkeit, die Wärmeleitfähigkeit, sowie die elektrischen und thermischen Widerstände und die Thermo-kraft senkrecht und parallel zur Schichtstruktur berechnet. Diese Richtungen bezeichnen die Hauptanisotropieachsen (siehe Abb. 11).



**Abbildung 11:** Darstellung der Hauptanisotropieachsen.

Diese oben genannten physikalischen Eigenschaften einer verkippten Struktur können durch Tensoren 2. Stufe [31, 32, 29] beschrieben werden. Wählt man die Koordinatenachsen parallel zu den Kristallachsen, vereinfachen sich diese Matrizen zu Matrizen in Hauptachsenform [29]. Für die Transporteigenschaften gilt somit im einzelnen [33]

$$\begin{aligned} \hat{S} &= \begin{pmatrix} S_{\parallel} & 0 & 0 \\ 0 & S_{\parallel} & 0 \\ 0 & 0 & S_{\perp} \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{\parallel} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\parallel} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\perp} \end{pmatrix}, \quad \hat{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_{\parallel} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{\parallel} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{\perp} \end{pmatrix}, \\ \hat{\rho} &= \begin{pmatrix} \rho_{\parallel} & 0 & 0 \\ 0 & \rho_{\parallel} & 0 \\ 0 & 0 & \rho_{\perp} \end{pmatrix}, \quad \hat{r} = \begin{pmatrix} r_{\parallel} & 0 & 0 \\ 0 & r_{\parallel} & 0 \\ 0 & 0 & r_{\perp} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{76}$$

Will man nun die Transporteigenschaften einer verkippten Probe beschreiben, so wird ein neues Koordinatensystem benötigt, in dem die Achsen parallel zu den Rändern der Probe liegen (siehe gestrichelte Linie in Abb. 12).

Die Transformation von einem orthogonalen Koordinatensystem ( $x, y, z$ ) zu einem anderem orthogonalen Koordinatensystem ( $x', y', z'$ ) ist gegeben durch die Transformationsmatrix [29]

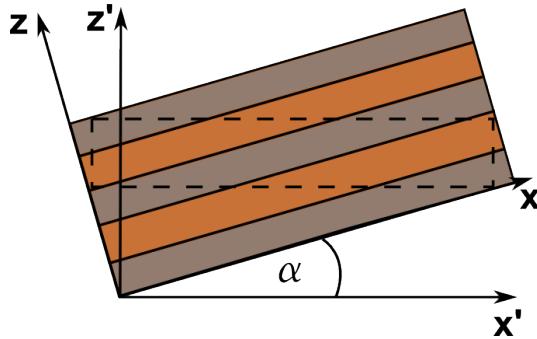
$$\hat{U} = \begin{pmatrix} U_{x'x} & U_{x'y} & U_{x'z} \\ U_{y'x} & U_{y'y} & U_{y'z} \\ U_{z'x} & U_{z'y} & U_{z'z} \end{pmatrix}, \quad (77)$$

wobei ( $x, y, z$ ) von den Hauptanisotropieachsen aufgespannt wird. Um das zweite Koordinatensystem ( $x', y', z'$ ) [34] eindeutig zu bestimmen sind im allgemeinen zwei Winkel nötig [29]. Da in dieser Arbeit jedoch nur die Drehung um eine feste Achse bzw. um einen Winkel von Bedeutung ist, wird hier nur dieser Fall betrachtet. Der Winkel  $\alpha_{ij}$  beschreibt also den Winkel zwischen der i-ten Achse des Koordinatensystems ( $x, y, z$ ) und der j-ten Achse des Koordinatensystems ( $x', y', z'$ ) [35]. Das bedeutet, die Matrixeinträge werden beschrieben durch [35]

$$U_{ji} = \vec{e}_j \cdot \vec{e}_i = \cos \alpha_{ji}, \quad (78)$$

wobei  $\vec{e}_j$  der Basisvektor im Koordinatensystem ( $x', y', z'$ ) und  $\vec{e}_i$  der Basisvektor im Koordinatensystem ( $x, y, z$ ) ist.

Dreht man die Struktur um einen Winkel  $\alpha$  um die y-Achse (siehe Abb. 12), so müssen die Tensoren für die Transporteigenschaften (siehe Gl. 76) transformiert werden.



**Abbildung 12:** Verkippte Multilagenstruktur im Koordinatensystem

In diesem Fall ergibt sich für die Einträge des Tensors

$$U_{y'y} = \cos 0^\circ = 1, \quad (79)$$

$$U_{x'y} = U_{y'x} = U_{z'y} = U_{y'z} = \cos 90^\circ = 0, \quad (80)$$

da  $y' = y$  senkrecht auf allen anderen Achsen stehen. Für die restlichen Komponenten ergibt sich

$$U_{x'x} = \cos \alpha, \quad (81)$$

$$U_{x'z} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha, \quad (82)$$

$$U_{z'x} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha \quad (83)$$

und

$$U_{z'z} = \cos \alpha. \quad (84)$$

Daraus ergibt sich für die Transformationsmatrix [34]:

$$\widehat{U} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix}. \quad (85)$$

Für die Transformation benötigt man zusätzlich die inverse Matrix  $\widehat{U}^{-1}$ . Für diese gilt:

$$\widehat{U} \cdot \widehat{U}^{-1} = \widehat{U}^{-1} \cdot \widehat{U} = \widehat{E}, \quad (86)$$

wobei  $\widehat{E}$  die Einheitsmatrix

$$\widehat{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (87)$$

ist. Damit wird der Seebeck-Tensor im neuen Koordinatensystem für eine verkippte Struktur beschrieben durch  $\widehat{S}' = \widehat{U} \cdot S \cdot \widehat{U}^{-1}$  [34] und man erhält [36]:

$$\begin{aligned} \widehat{S}' &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_{\parallel} & 0 & 0 \\ 0 & S_{\parallel} & 0 \\ 0 & 0 & S_{\perp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} S_{\parallel} \cos^2 \alpha + S_{\perp} \sin^2 \alpha & 0 & \frac{1}{2} (S_{\parallel} - S_{\perp}) \sin(2\alpha) \\ 0 & S_{\parallel} & 0 \\ \frac{1}{2} (S_{\parallel} - S_{\perp}) \sin(2\alpha) & 0 & S_{\parallel} \sin^2 \alpha + S_{\perp} \cos^2 \alpha \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (88)$$

Analog berechnet man für die elektrische Leitfähigkeit, die Wärmeleitfähigkeit und den elektrischen und thermischen Widerstand in einer verkippten Struktur

$$\begin{aligned}\widehat{\sigma}' &= \begin{pmatrix} \sigma_{\parallel} \cos^2 \alpha + \sigma_{\perp} \sin^2 \alpha & 0 & \frac{1}{2} (\sigma_{\parallel} - \sigma_{\perp}) \sin(2\alpha) \\ 0 & \sigma_{\parallel} & 0 \\ \frac{1}{2} (\sigma_{\parallel} - \sigma_{\perp}) \sin(2\alpha) & 0 & \sigma_{\parallel} \sin^2 \alpha + \sigma_{\perp} \cos^2 \alpha \end{pmatrix}, \\ \widehat{\lambda}' &= \begin{pmatrix} \lambda_{\parallel} \cos^2 \alpha + \lambda_{\perp} \sin^2 \alpha & 0 & \frac{1}{2} (\lambda_{\parallel} - \lambda_{\perp}) \sin(2\alpha) \\ 0 & \lambda_{\parallel} & 0 \\ \frac{1}{2} (\lambda_{\parallel} - \lambda_{\perp}) \sin(2\alpha) & 0 & \lambda_{\parallel} \sin^2 \alpha + \lambda_{\perp} \cos^2 \alpha \end{pmatrix}, \\ \widehat{\rho}' &= \begin{pmatrix} \rho_{\parallel} \cos^2 \alpha + \rho_{\perp} \sin^2 \alpha & 0 & \frac{1}{2} (\rho_{\parallel} - \rho_{\perp}) \sin(2\alpha) \\ 0 & \rho_{\parallel} & 0 \\ \frac{1}{2} (\rho_{\parallel} - \rho_{\perp}) \sin(2\alpha) & 0 & \rho_{\parallel} \sin^2 \alpha + \rho_{\perp} \cos^2 \alpha \end{pmatrix}, \\ \widehat{r}' &= \begin{pmatrix} r_{\parallel} \cos^2 \alpha + r_{\perp} \sin^2 \alpha & 0 & \frac{1}{2} (r_{\parallel} - r_{\perp}) \sin(2\alpha) \\ 0 & r_{\parallel} & 0 \\ \frac{1}{2} (r_{\parallel} - r_{\perp}) \sin(2\alpha) & 0 & r_{\parallel} \sin^2 \alpha + r_{\perp} \cos^2 \alpha \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{89}$$

Für die nachfolgenden Betrachtungen werden ausschließlich die transformierten Tensoren verwendet. Aus diesem Grund wird bei den Matrizen der Strich als Zeichen der Transformierung weggelassen.



## 4 Herstellung und Charakterisierung der Proben

In den letzten Kapiteln wurden die Transporteigenschaften für verkippte Multilagenstapel, ohne spezielle Materialkombinationen, diskutiert. In diesem Kapitel wird nun explizit auf eine bestimmte Probenart eingegangen. Dabei sind die verwendeten Materialien von großer Bedeutung. Die Bestimmung geeigneter Materialien ist keineswegs trivial. Die beiden Materialien müssen thermisch verbindbar sein und zudem müssen sie so gewählt werden, dass der „figure of merit“ (siehe Gl. 139 in Kapitel 5.1) möglichst groß wird. Dies ist der Fall bei möglichst großer thermoelektrischer Anisotropie  $\Delta S = |S_{\parallel} - S_{\perp}|$  (siehe Gln. 139 und 140), zudem sollte die parallele und senkrechte elektrische Leitfähigkeit möglichst groß, jedoch die parallele und senkrechte Wärmeleitfähigkeit möglichst klein sein (siehe Gl. 139).

Als besonders geeignet für die Herstellung der Multilagenstapel erweist sich eine Kombination aus Halbleiter- und Metallschichten [37], da hier die oben genannten Bedingungen erfüllt sind und damit eine hohe Temperaturdifferenz  $\Delta T_{max}$  erzielt wird. Aus Berechnungen mit Hilfe eines Computerprogrammes (siehe Anhang) bzw. durch das Einsetzen von Transporteigenschaften, jeweils zweier verschiedener Materialien, in das Programm und mit Hilfe von experimentellen Versuchen hat sich eine Materialkombination aus Blei und Bismuttellurid als optimal herausgestellt.

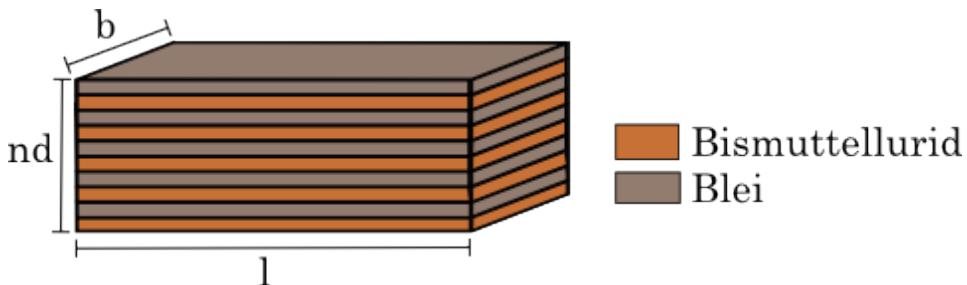
Es wird im Folgenden die Herstellung und die Präparation der Proben diskutiert. Außerdem werden die bereits rechnerisch bestimmten Transporteigenschaften experimentell nachgewiesen.

### 4.1 Herstellungsprozess der Multilagenstrukturen

Wie bereits erwähnt werden die verwendeten Proben aus Blei- und Bismuttelluridschichten produziert. Aus Plättchen mit einer Dicke von 0,1cm, einer Länge von 2cm und einer Breite von 1cm wird ein Stapel hergestellt. Die Bleiplättchen wurden aus einer Bleiplatte augestanzt. Das Blei wurde von der Firma Rohr+Stolberg erworben. Es weist eine Reinheit von 99,94% auf. Die Verun-

reinigung besteht im wesentlichen aus Kupfer. Von der Firma Peltron GmbH wurden die n-dotierten Bismuttelluridplättchen bezogen.

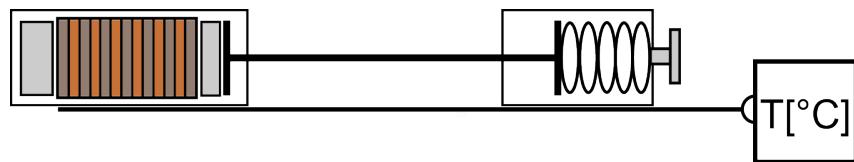
Für einen Stapel werden zehn Blei- und neun  $Bi_2Te_3$ -Plättchen verwendet. Zuerst werden die Plättchen mit Schleifpapier abgerieben, um die Oxidschichten zu entfernen. Danach werden sie mit Isopropanol gereinigt. Wenn alle sichtbaren Rückstände entfernt sind, werden die Blei- und  $Bi_2Te_3$ -Plättchen abwechselnd gestapelt (siehe Abb. 13).



**Abbildung 13:** Multilagenstapel aus Blei und Bismuttellurid bestehend aus n-Schichten.

Zwischen die einzelnen Schichten wird ein Flussmittel (Degussa Soldaflux Z, Type F-SW 1, 150-450 °C) zum Weichlöten, bestehend aus verschiedenen Säuren und Zinkchlorid, aufgetragen.

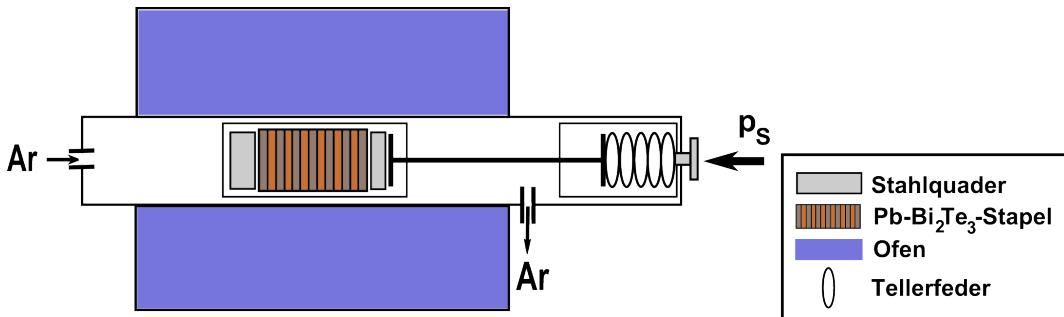
Das Flussmittel wird benötigt, um eine bessere Verbindung der beiden Materialien bei der anschließenden thermischen Behandlung zu erhalten. Bei der thermischen Behandlung werden die losen, aufeinandergeschichteten Plättchen in einem Ofen erhitzt. Durch zusätzliche Druckausübung werden die Plättchen zu einem formstabilen Stapel verbunden [38, 39, 40]. Dazu legt man den Stapel in eine speziell angefertigte Halterung (siehe Abb. 14) die in das Glasrohr eines 3-Zonen-Hochtemperaturofens (siehe Abb. 15) geschoben wird.



**Abbildung 14:** Probenhalterung für den Ofen.

Mit Hilfe einer Schraube, die über Tellerfedern und einen Stab mit der Probe

verbunden ist, wird der benötigte axiale Druck bei der thermischen Behandlung erzeugt. Die Probenhalterung wird so weit in den Ofen geschoben, dass die Probe mittig im Ofen liegt und die Temperaturverteilung über die gesamte Probe möglichst konstant ist.



**Abbildung 15:** Schematische Darstellung des Ofens.

Um die optimalen Einstellungen der Ofentemperatur und des Drucks auf die Probe zu finden, werden Tests mit jeweils zwei Blei- und einem Bismuttelluridplättchen gemacht. Dabei ist zu beachten, dass bei zu niedriger Temperatur der Stapel bei der weiteren Bearbeitung den mechanischen Einflüssen nicht standhält und bei zu hoher Temperatur das Blei schmilzt (Schmelztemperatur von Blei: 327 ° C, [41]). Auch bei zu wenig Druck weist die Probe nicht genügend mechanische Festigkeit auf, bei zu viel Druck hingegen bricht das Bismuttellurid. Außerdem beeinflussen sich Temperatur und Druck gegenseitig, das heißt zum Beispiel, dass bei höherer Temperatur der Druck geringer gewählt werden muss. Es stellt sich heraus, dass es mehrere Möglichkeiten gibt gute Proben zu erhalten. Für diese Arbeit wurden Proben verwendet, welche bei verschiedenen Temperaturen und konstantem Druck hergestellt wurden. Die Toleranzbreite für Druck und Temperatur ist jedoch gering. Die Herstellung geeigneter Proben erweist sich daher als schwierig. Um die Temperatur der Probe genauer zu messen, wurde an der Unterseite der Probenhalterung, wie in Abb. 14 zu sehen ist, ein Messfühler angebracht, der nun mit Hilfe eines elektronischen Thermometers (Volcraft 502 Types K,J, Fehler  $\pm 0,05\%$ ) die Temperatur misst. Während der thermischen Behandlung wird der Ofen mit Argon gespült (siehe Abb. 15), um Oxidationsprozesse zu verhindern. Nach der Aufheizphase wird der Druck  $p_s$  durch Drehen an der Schraube erzeugt (siehe Abb. 14 und

Abb. 15) und dadurch der Probenstapel zusammengedrückt. Um den Druck zu bestimmen, wurde ein Gewicht der Masse  $m$  an einen an der Schraube der Probenhalterung befestigten Hebelarm der Länge  $l=15\text{cm}$  gehängt. Der Druck wurde über das Drehmoment an der Einstellschraube abgeschätzt auf  $p \approx 10\text{bar}$ .

Nachdem die Ofentemperatur erreicht wurde, bleibt die Probe eine Stunde bei konstanter Temperatur im Ofen. Danach schaltet man den Ofen ab und lässt die Probe langsam über Nacht abkühlen. Bei zu schneller Abkühlung könnten Spannungen auftreten und das Bismuttellurid würde brechen. Für diese Arbeit wurden Stapel nach drei verschiedenen Herstellungsprozessen angefertigt und auf ihre Eigenschaften hin untersucht. Die Stapel unterscheiden sich durch die Herstellung bei verschiedenen Ofentemperaturen. In Tab. 1 sind die Herstellungsparameter der Stapel aufgelistet.

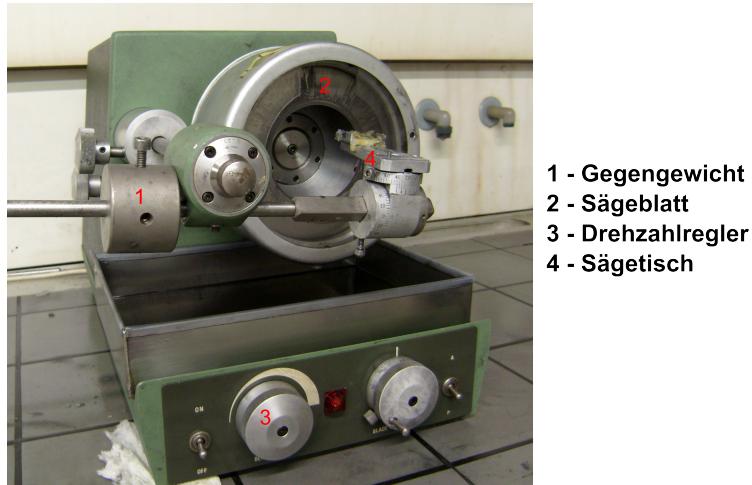
**Tabelle 1:** Herstellungsparameter der Stapel.

Herstellung	Stapel 1	Stapel 2	Stapel 3
Anzahl Bleiplättchen	9	9	9
Anzahl Bismuttellurid-plättchen	8	8	8
Flussmittel	Degussa Flux Z	Degussa Flux Z	Degussa Flux Z
$T_{Ofen}$ [°C]	279,5	311	314
Druck $p$ [bar]	ca. 10	ca. 10	ca. 10

Im nächsten Kapitel wird beschrieben wie aus diesen Stapeln Proben präpariert werden. Die Proben werden mit Probe 1 bis 3 bezeichnet. Dabei wird Probe 1 aus Stapel 1, Probe 2 aus Stapel 2 und Probe 3 aus Stapel 3 präpariert. Die Proben für die Leistungsgeneration wurden aus Stapeln, die wie Stapel 2 hergestellt wurden, präpariert, da sich diese bei der Messung des Peltier-Effekts als die mit den höchsten Temperaturdifferenzen herausgestellt haben. Die Proben wurden mit Probe A bis D bezeichnet.

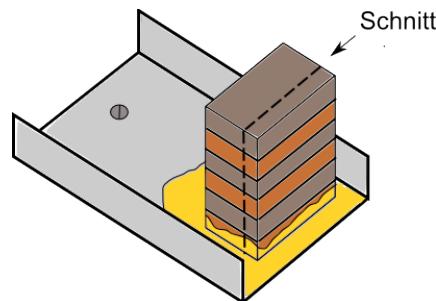
## 4.2 Präparation der Proben

Nach der thermischen Behandlung wird der Multilagenstapel mit Hilfe einer Innenlochkreissäge (Microslice 2, Metals Research, Cambridge, UK, siehe Abb. 16) in ca. 3mm dicke Stapel geschnitten.



**Abbildung 16:** Innenlochkreissäge.

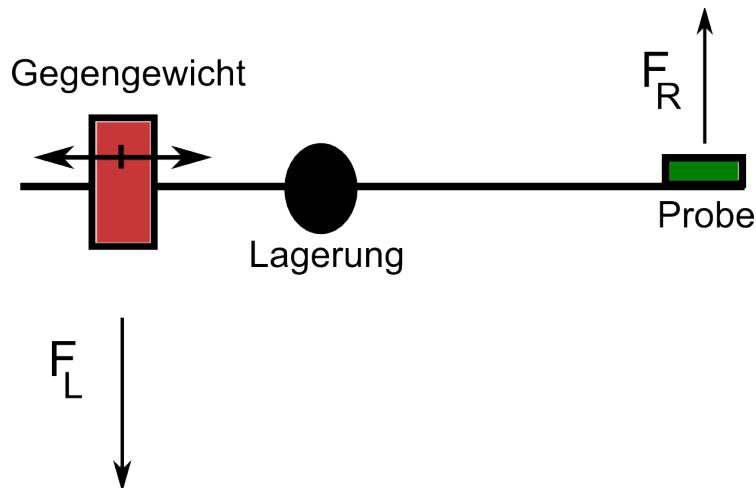
Dazu wird der Stapel mit Hilfe von Bienenwachs auf einem Träger befestigt.



**Abbildung 17:** Träger mit Multilagenstapel für Innenlochsäge.

Das Wachs wird erhitzt und in flüssigem Zustand auf den Träger getropft, dann setzt man den Stapel wie in Abb. 17 auf das Wachs und wartet bis es erkaltet ist. Außerdem ist darauf zu achten, dass der Träger vor dem Aufwachsen der Probe sauber und frei von öligen Rückständen oder altem Wachs ist. Danach

wird der Träger so auf dem Sägetisch (siehe Nr. 4 in Abb. 16) befestigt, dass das Sägeblatt (siehe Nr. 3 in Abb. 16) auf der gestrichelten Linie (siehe Abb. 17) durch den Stapel schneidet. Man stellt das Gegengewicht (siehe Nr. 1 in Abb. 16) der Säge so ein, dass das Sägeblatt langsam durch die Multilagenstruktur gleitet. Dabei ist darauf zu achten, dass der Auflagedruck auf die Probe weder zu groß noch zu klein ist, da sonst die Probe durch das Sägeblatt beschädigt wird. Die Kraft auf die Probe wird durch Variation der Länge des Hebelarms bestimmt, indem man das Gewicht auf der Stange hin und her verschiebt. In Abb. 18 ist die Hebelvorrichtung der Säge vereinfacht schematisch dargestellt.



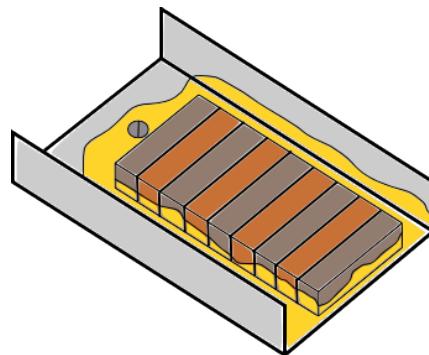
**Abbildung 18:** Schematische Darstellung der Hebelvorrichtung der Innenlochsäge.

Aus der optimalen Länge des linken Hebelarms  $l_L = 8,5\text{cm}$  kann über das Hebelgesetz die Kraft, die auf die Probe wirkt, berechnet werden. Für die Kraft auf den linken Hebelarm ergibt sich  $F_L \approx 6\text{N}$ . Der rechte Hebelarm hat eine vorgegebene Länge von  $l_R = 12,7\text{cm}$ . Damit lässt sich die Kraft auf die Probe bzw. auf den rechten Hebelarm berechnen zu  $F_R \approx 4\text{N}$ .

Nachdem das Gewicht an der richtigen Stelle positioniert, der Träger am Sägetisch befestigt und die Probe ausgerichtet wurde, schaltet man die Säge an und stellt die Drehzahl, mit der das Sägeblatt rotiert, auf ca.  $1200 \frac{\text{U}}{\text{min}}$  (siehe Nr. 3 in Abb. 16), da bei dieser Einstellung die gleichmäßigste Schnittkante entsteht. Bei diesen Einstellungen dauert der Schneidevorgang ca. 60 Minuten.

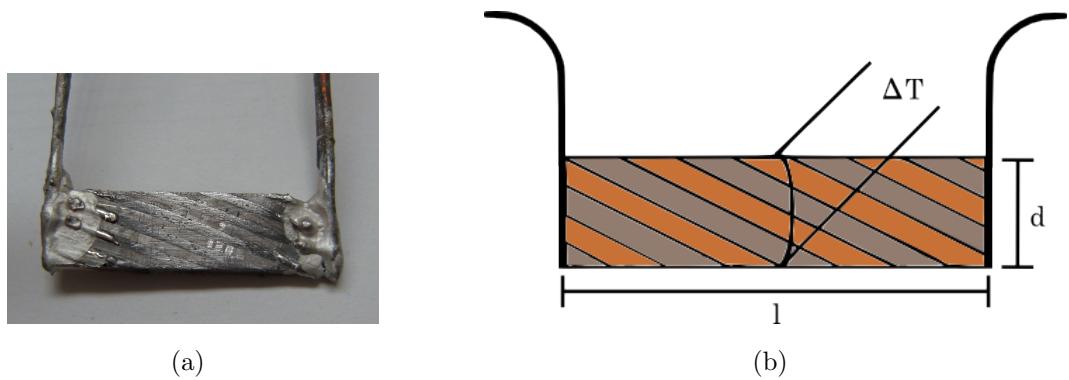
Alle 10 Minuten tropft man Paraffinöl auf das Sägeblatt, um es zu kühlen und die Reibung zwischen Probe und Sägeblatt zu minimieren. Dadurch wird die Lebensdauer des Sägeblatts erhöht und gleichzeitig verhindert, dass Bleistaub in die Umgebung gelangt.

Nach dem Schneidevorgang trennt man den dabei entstandenen Multilagenstapel vom Träger ab und reinigt Träger und Stapel mit Isopropanol. Anschließend wird er wie in Abb. 19 auf den Träger aufgewachst.



**Abbildung 19:** Träger mit aufgewachster Probe.

Aus diesem Multilagenstapel soll nun eine verkippte Probe herausgeschnitten werden. Dazu ist es von Vorteil auf die Probe eine zusätzliche Schicht Wachs zu gießen, damit man die Linien auf denen gesägt wird in das Wachs einritzen kann. Aus den Berechnungen in Kap. 5 geht hervor, dass bei einer langen Probe ein Winkel von  $\alpha = 25^\circ$  (siehe Abb. 35) die größtmögliche Temperaturdifferenz liefert. Dann misst man den gewünschten Winkel ab und zeichnet die Probe, die herausgeschnitten werden soll auf und schneidet sie anschließend nach den vorgegebenen Linien aus. Die verkippte Probe wird nun gesäubert und es wird an den Enden ein ca. 2mm dicker Kupferdraht mit Hilfe eines Weichlötflussmittels (Tinol Lötöl) angelötet (siehe Abb. 20), um Strom in die Probe einspeisen zu können.



**Abbildung 20:** (a) Foto und (b) schematische Darstellung einer verkippten Probe mit angelöteten Kontaktdrähten.

In Abb. 20(a) ist auch zu sehen, dass die Kontakte zusätzlich mit Leitsilber (Ami Doduco Auromal Leitsilber) bestrichen wurden, um den Widerstand zwischen dem Draht und der Probe weiter zu minimieren.

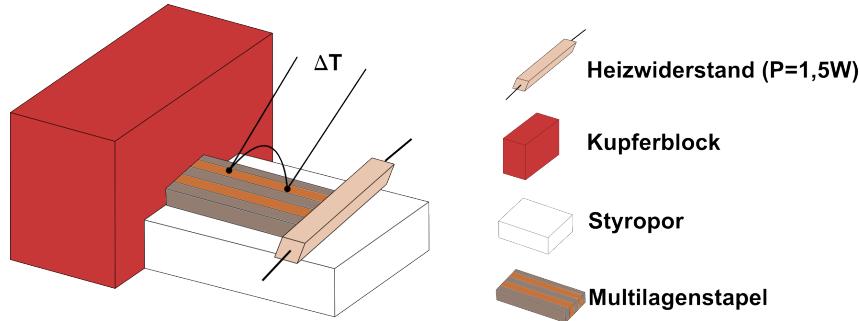
## 4.3 Experimentelle Bestimmung der Transporteigenschaften

In diesem Kapitel werden die Transporteigenschaften der hergestellten Proben bestimmt. Man verwendet dazu die Multilagenstapel (siehe Kap. 4.2) bevor verkippte Strukturen daraus geschnitten werden. Es werden die Transporteigenschaften parallel und senkrecht zur Schichtung gemessen. Im folgenden werden die Wärmeleitfähigkeit, die elektrische Leitfähigkeit und die Thermokraft experimentell bestimmt.

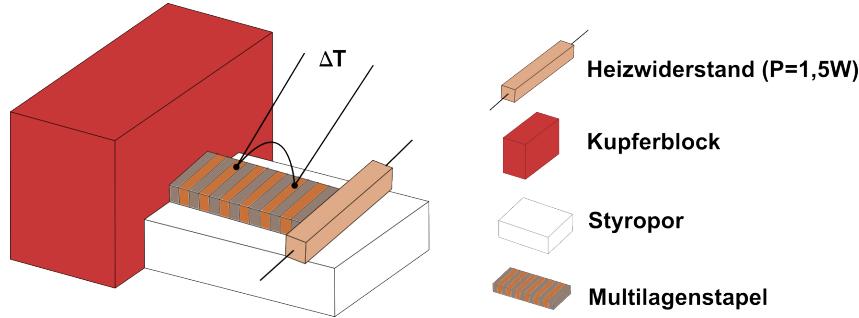
### 4.3.1 Messung der Wärmeleitfähigkeit

Für die Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit benötigt man einen Temperaturgradienten längs der Probe. Dieser wird mit Hilfe eines Heizwiderstandes und eines Kupferblocks, welcher als Wärmesenke dient, erzeugt. Der Temperaturunterschied wird mit einem Thermoelement, bestehend aus Kupfer und Konstantandrähten, gemessen (siehe Anhang). Um die Wärmeleitfähigkeit zu bestimmen, benötigt man außerdem noch die in die Probe eingespeiste Heizleistung  $P$ . Diese Leistung ist nicht einfach zu bestimmen, da nicht die komplette Leistung des Heizwiderstandes in die Probe übergeht, sondern auch Verluste an die Umgebung erfolgen. Deshalb ist es wichtig den Heizwiderstand und die Probe möglichst gut thermisch zu koppeln und außerdem Wärmeverluste durch Isolation zu minimieren.

Für die Messung der Wärmeleitfähigkeit parallel zu den Schichten verwendet man den Aufbau aus Abb. 21. Will man die Wärmeleitfähigkeit senkrecht zur Schichtung messen, dreht man den Multilagenstapel um  $90^\circ$  (siehe Abb. 22). Um einen möglichst großen Wärmestrom in die Probe zu erhalten, werden sowohl Heizwiderstand als auch Kupferblock mit Wärmeleitpaste (R+S Components Wärmeleitpaste Plus mit  $\lambda = 2,9 \frac{W}{mK}$  [42]) bestrichen und an die Probe angedrückt. Dabei ist darauf zu achten, dass stets ein guter Wärmekontakt zwischen Heizwiderstand, Probe und Kupferblock vorhanden ist. Mit Hilfe einer Klammer werden Heizwiderstand und Kupferblock an die Probe gedrückt. Die Temperaturdifferenz entlang der Probe (vgl. Abb. 21, 22) wird mit einem Thermoelement gemessen (siehe Anhang). Die Kontakte des Thermoelements



**Abbildung 21:** Messaufbau zur Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit parallel zur Schichtung.



**Abbildung 22:** Messaufbau zur Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit senkrecht zur Schichtung.

werden mit Wärmeleitpaste am Stapel wie in Abb. 21 und 22 angebracht. Die Probe wird mit Styropor isoliert. Der Heizwiderstand wird an den drei nicht mit der Probe kontaktierten Seiten mit Steinwolle umgeben, um die Wärmeabgabe an die Umgebung zu minimieren. Es wurde hier Steinwolle verwendet, da Styropor der Hitze des Heizwiderstandes nicht standhalten kann.

Nun speist man Strom in den Heizwiderstand ein, dadurch erwärmt sich dieser und somit auch die mit dem Widerstand verbundene Probenseite. Für die Wärmestromdichte aufgrund von Wärmeleitung erhält man  $\vec{j}_{th} = -\hat{\lambda} \vec{\nabla} T$  [43, 27, 24]. In diesem Fall gilt

$$j_{th} = \lambda \frac{\Delta T}{a_{Kontakte}}. \quad (90)$$

Die Temperaturdifferenz wird zwischen den beiden Kontaktpunkten des Thermoelements gemessen, daher wird der Abstand der Kontakte  $a_{Kontakte}$  verwendet und nicht die komplette Probenlänge. Für  $\lambda$  gilt mit  $j_{th} = \frac{P}{A}$

$$\lambda = \frac{Pa_{Kontakte}}{A\Delta T}, \quad (91)$$

wobei A der Probenquerschnitt ist durch den Wärme strömt und P die Heizleistung des Widerstands ist, die sich durch den gemessenen Strom  $I$  und die Spannung  $U$  am Widerstand ergibt.

Mit Hilfe der gemessenen Werte aus Gl. 91 kann die Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$  experimentell bestimmt werden. In Tabelle 2 sind die Wärmeleitfähigkeiten für die drei Proben (siehe Kap. 4.1 Tab. 1) aufgelistet. Bei diesen Messungen wurde angenommen, dass die komplette Wärme des Heizwiderstands in die Probe gelangt. Der tatsächliche Wärmestrom in die Probe ist jedoch schwer zu bestimmen, wie bereits am Anfang dieses Kapitels diskutiert. Der Fehler der verwendeten Geräte beträgt unter 1% und ist daher zu vernachlässigen.

**Tabelle 2:** Experimentell bestimmte Wärmeleitfähigkeiten.

Wärmeleitfähigkeit	Probe 1	Probe 2	Probe 3
$\lambda_{\parallel} [\frac{W}{mK}]$	21,2	25,7	24,9
$\lambda_{\perp} [\frac{W}{mK}]$	6,0	7,6	8,6

Andererseits können die Wärmeleitfähigkeiten auch aus den Materialeigenschaften (siehe Tab. 3) und den Gln. 60 und 71 bestimmt werden:

$$\lambda_{\parallel, theo} = \frac{\lambda_{Pb} + p\lambda_{Bi_2Te_3}}{1 + p} = 18,7 \frac{W}{mK} \quad (92)$$

$$\lambda_{\perp, theo} = \frac{\lambda_{Pb}\lambda_{Bi_2Te_3}(1 + p)}{p\lambda_{Pb} + \lambda_{Bi_2Te_3}} = 4,3 \frac{W}{mK}. \quad (93)$$

Hier wurde  $p = 1$  gesetzt, da die Schichtdicken der beiden Materialien gleich sind.

**Tabelle 3:** Transporteigenschaften von Blei und Bismuttellurid [44].

Material	$\lambda \left[ \frac{\text{W}}{\text{mK}} \right]$	$\sigma \left[ \frac{1}{\Omega \text{m}} \right]$	$\rho [\Omega \text{m}]$	$S \left[ \frac{\mu\text{V}}{\text{K}} \right]$
Pb	$35^a$	$5 \cdot 10^{6a}$	$2 \cdot 10^{-7a}$	$\approx 0^a$
$\text{Bi}_2\text{Te}_3$	$2,3^b$	$10^{5c}$	$10^{-5c}$	$145^d$

<sup>a</sup> Referenz: [45]

<sup>b</sup> Referenz: [46]

<sup>c</sup> Referenz: [47]

<sup>d</sup> Referenz: [48]

Vergleicht man die experimentellen Ergebnisse für die Wärmeleitfähigkeit mit den berechneten, so erkennt man, dass die gemessenen Werte größer sind. Dies liegt zum Teil daran, dass nicht die komplette Heizleistung in die Probe fließt, sondern ein Teil der Wärme trotz Isolation an die Umgebung abgegeben wird. Auch an der Probe treten trotz Isolation Wärmeverluste auf. Außerdem führt ein nicht optimaler thermischer Kontakt zwischen Probe und Heizwiderstand zu reduziertem Wärmefluß in die Probe. Nimmt man an, dass etwa 80% der Heizleistung des Widerstands in die Probe fließen, so erhält man für die Wärmeleitfähigkeiten die in Tab. 4 angegebenen Werte.

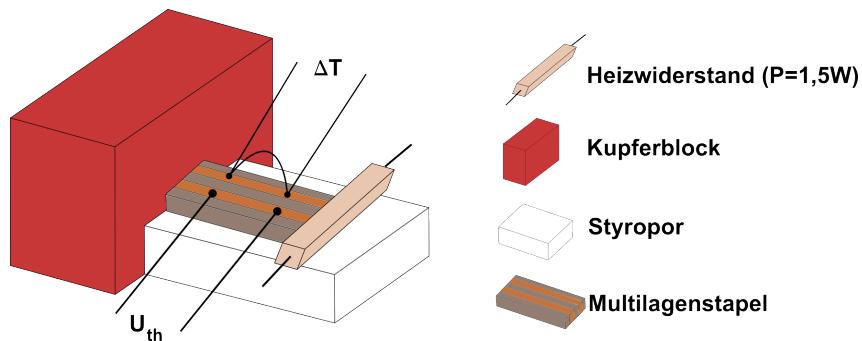
**Tabelle 4:** Experimentelle Wärmeleitfähigkeiten mit 80% der Heizleistung.

Wärmeleitfähigkeit	Probe 1	Probe 2	Probe 3
$\lambda_{\parallel} \left[ \frac{\text{W}}{\text{mK}} \right]$	17,0	20,6	19,9
$\lambda_{\perp} \left[ \frac{\text{W}}{\text{mK}} \right]$	4,8	6,1	6,9

Aus dem Ergebnis ist zu schließen, dass die Wärmeverluste über Heizwiderstand und Probe berücksichtigt werden müssen. Diese hängen unter anderem von der Geometrie der Probe und des Heizwiderstandes ab. Des Weiteren sind die Ergebnisse auch von der Probengüte abhängig, dies erkennt man an den Abweichungen zwischen den drei Proben. Es muss also bei der Probenherstellung sehr genau auf die richtige Temperatur und den richtigen Druck geachtet werden (siehe Kap. 4.1). Die beste Übereinstimmung von Messungen und berechneten Werten für die Wärmeleitfähigkeit liefert Probe 1.

### 4.3.2 Messung der Thermokraft

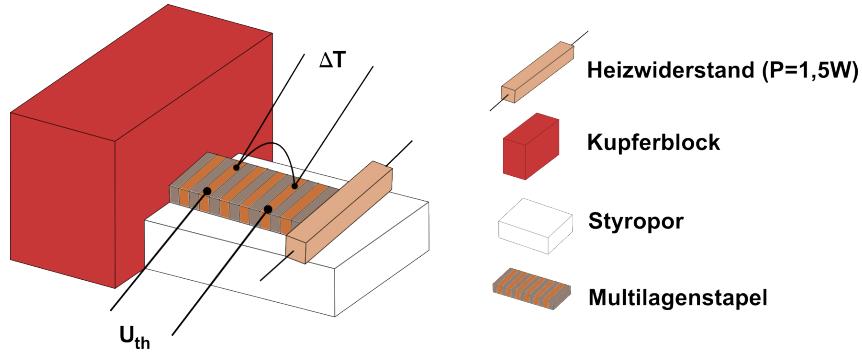
Zur Bestimmung der Thermokraft  $S$  parallel und senkrecht zur Schichtung benötigt man neben der Temperaturdifferenz  $\Delta T$  zwischen zwei Punkten auf der Probe auch die Thermospannung  $\Delta U$  zwischen diesen Punkten. Dabei ist darauf zu achten, dass sich die Drähte zur Spannungsmessung und die des Thermoelements nicht berühren, aber möglichst nahe zusammen liegen. Die Temperaturdifferenz wird wieder mit Hilfe des Thermoelements, welches mit Wärmeleitpaste auf der Probe angebracht wird, gemessen (siehe Anhang). Die Drähte zur Spannungsmessung werden mit Leitsilber auf der Probe befestigt. Ansonsten ist der Messaufbau identisch mit dem Messaufbau zur Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit. Abb. 23 zeigt den Aufbau für die Messung der Thermokraft parallel zur Schichtung. Will man die Thermokraft senkrecht zur Schichtung



**Abbildung 23:** Messaufbau zur Bestimmung der Thermokraft parallel zur Schichtung.

tung messen dreht man den Multilagenstapel um  $90^\circ$  (siehe Abb. 24).

Da für  $S = \frac{\Delta U}{\Delta T}$  gilt, stellt man in Abb. 25 die Thermospannung in Abhängigkeit von der Temperaturdifferenz dar.



**Abbildung 24:** Messaufbau zur Bestimmung der Thermokraft senkrecht zur Schichtung.

Die Steigung der Graphen beschreibt die Thermokraft parallel und senkrecht zur Schichtung

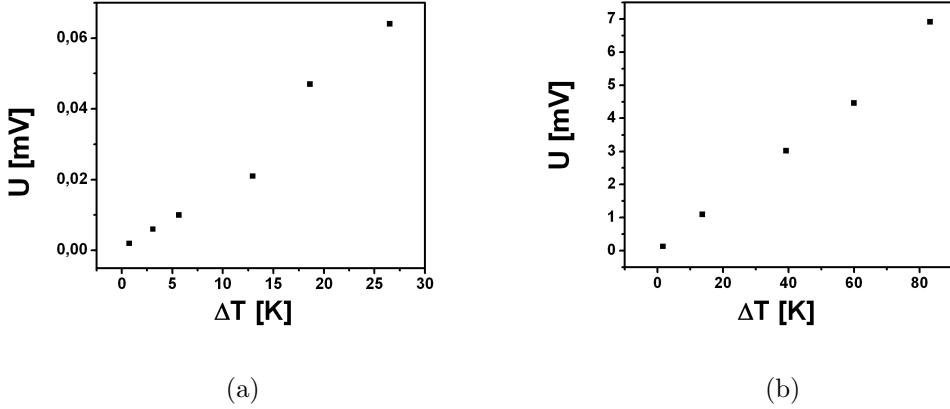
$$S_{\parallel,gem} = \frac{\Delta U}{\Delta T} = 2,3 \frac{\mu V}{K} \quad (94)$$

$$S_{\perp,gem} = \frac{\Delta U}{\Delta T} = 78,4 \frac{\mu V}{K}. \quad (95)$$

Sind die Kontakte der Spannungsmessung und des Thermoelements nicht dicht genug zusammen oder nicht ausreichend gut an die Probe kontaktiert, verursacht dies einen Messfehler. Die Messfehler der verwendeten Multimeter liegen unter 1% und sind damit zu vernachlässigen. Die zur Messung verwendeten Kupferdrähte haben auch eine Thermokraft, die im Experiment mitgemessen wird. Es gilt:

$$|S_{Probe} - S_{Cu}| = \frac{\Delta U}{\Delta T}. \quad (96)$$

Die absolute Thermokraft von Kupfer beträgt  $S_{Cu} \approx 2 \frac{\mu V}{K}$ . Die Thermokräfte der drei gemessenen Proben sind in Tabelle 5 zusammengefasst. Bei den Messungen wurde die Thermokraft von Kupfer bereits berücksichtigt.



**Abbildung 25:**  $\Delta U / \Delta T$  (a) parallel und (b) senkrecht zur Schichtung für Probe 3.

**Tabelle 5:** Experimentell bestimmte Thermokräfte.

Thermokraft	Probe 1	Probe 2	Probe 3
$S_{\parallel} [\frac{\mu V}{K}]$	2,0	3,8	2,3
$S_{\perp} [\frac{\mu V}{K}]$	56,0	98,0	78,4

Die Berechnungen für die Thermokräfte senkrecht und parallel zur Schichtung folgen aus Gl. 75 und 65 in Kap. 3. Zusammen mit den Transporteigenschaften der beiden Materialien aus Tab. 3 und  $p = 1$  ergibt sich für die Werte für  $S_{\parallel}$  und  $S_{\perp}$

$$S_{\parallel, theo} = \frac{S_{Bi_2Te_3}\sigma_{Bi_2Te_3} + pS_{Pb}\sigma_{Pb}}{\sigma_{Bi_2Te_3} + p\sigma_{Pb}} = 2,8 \frac{\mu V}{K} \quad (97)$$

$$S_{\perp, theo} = \frac{S_{Bi_2Te_3}\lambda_{Pb} + pS_{Pb}\lambda_{Bi_2Te_3}}{\lambda_{Pb} + p\lambda_{Bi_2Te_3}} = 136,1 \frac{\mu V}{K}. \quad (98)$$

Die gemessenen Thermokräfte sind kleiner als die berechneten, lediglich  $S_{\parallel}$  für Probe 2 ist etwas größer.

Die Abweichungen der gemessenen Werte von den berechneten röhren möglicherweise daher, dass die Wärmeleitfähigkeit von Bismuttellurid tatsächlich

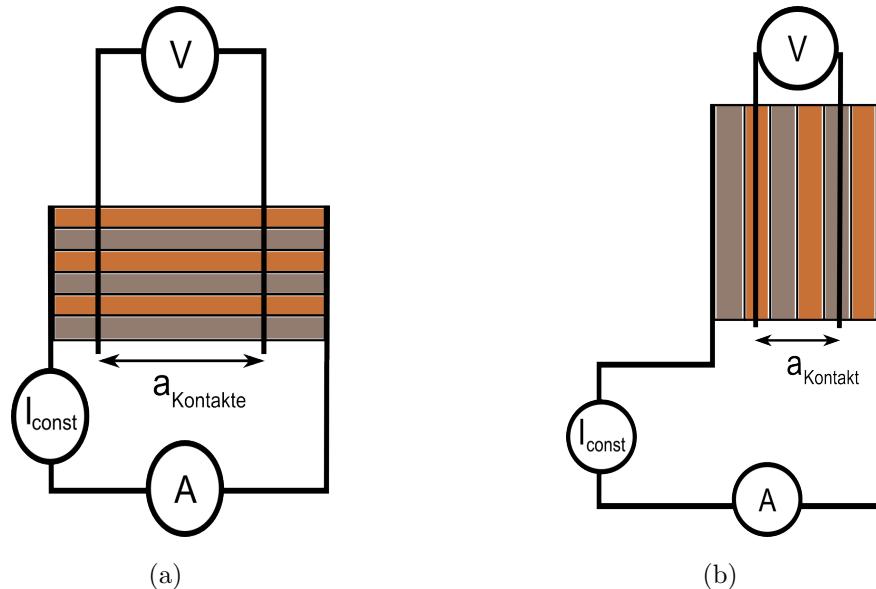
etwas größer sein könnte als der für die Berechnungen verwendete Literaturwert. Setzt man in Gl. 98 einen größeren Wert für  $\lambda_{Bi_2Te_3}$  ein, so wird  $S_{\perp}$  kleiner. Dies würde auch erklären, dass die Werte für  $S_{\parallel}$  wesentlich besser mit den berechneten Werten übereinstimmen, da diese nicht von  $\lambda_{Bi_2Te_3}$  abhängen, sondern von  $\sigma_{Bi_2Te_3}$  und  $\sigma_{Pb}$ . Probe 2 liefert für  $S_{\parallel}$  und  $S_{\perp}$  die beste Übereinstimmung zwischen den experimentellen und den berechneten Werten.

### 4.3.3 Messung der elektrischen Leitfähigkeit

Die elektrische Leitfähigkeit wird mit Hilfe von Vierpunktmeßung bestimmt, da der Innenwiderstand der Probe sehr klein ist. Bei der Messung mit einem Widerstandsmessgerät würde der Zuleitungswiderstand der Probe mitgemessen werden.

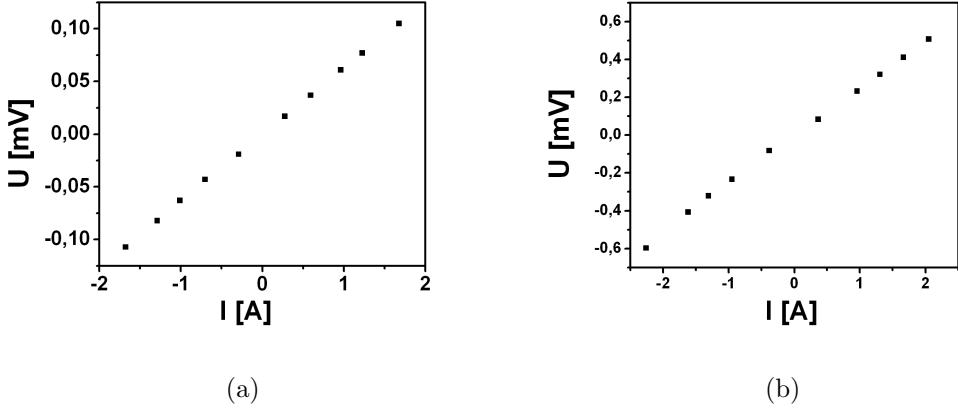
Um Strom in die Probe einzuspeisen, wurden Kupferdrähte an die Enden der Probe gelötet. Dabei ist zu beachten, dass bei der Messung senkrecht zur Schichtung die äußeren beiden Schichten aus Blei sind, da sich  $Bi_2Te_3$  nur sehr schlecht löten lässt. Die Spannungsmessung erfolgt mit Hilfe von zwei Kupferdrähten, die an ein Multimeter angeschlossen werden und mit Leitsilber auf der Probe befestigt werden. Auf diese Weise wird der Widerstand  $R = \frac{U}{I_{const}}$  der Probe bestimmt.

Der Versuchsaufbau für die Messungen der elektrischen Leitfähigkeit parallel und senkrecht zur Schichtung ist in Abb. 26 gezeigt.



**Abbildung 26:** Vierpunktmeßung (a) parallel zur Schichtung und (b) senkrecht zur Schichtung.

Die Graphen in Abb. 27 zeigen die gemessenen U-I-Kennlinien der Probe 2 für den elektrischen Widerstand senkrecht und parallel zur Schichtung.



**Abbildung 27:**  $U(I)$  (a) parallel und (b) senkrecht zur Schichtung für Probe 2.

Daraus lassen sich die Widerstände parallel und senkrecht zur Schichtung bestimmen:

$$R_{\parallel} = 63 \mu\Omega \quad (99)$$

$$R_{\perp} = 241 \mu\Omega. \quad (100)$$

Aus dem elektrischen Widerstand lässt sich dann die elektrische Leitfähigkeit  $\sigma$  und der spezifische elektrische Widerstand  $\rho$  berechnen durch

$$\sigma = \frac{1}{R} \frac{a_{Kontakte}}{A} \quad (101)$$

$$\rho = R \frac{A}{a_{Kontakte}}. \quad (102)$$

Mit Hilfe der gemessenen Widerstände und der Gln. 101 und 102 folgt für die elektrischen Leitfähigkeiten und die spezifischen elektrischen Widerstände parallel und senkrecht zur Schichtung für Probe 2:

$$\sigma_{\parallel} = 2,3 \cdot 10^6 \frac{1}{\Omega m} \quad (103)$$

$$\sigma_{\perp} = 2,7 \cdot 10^5 \frac{1}{\Omega m} \quad (104)$$

$$\rho_{\parallel} = 4,3 \cdot 10^{-7} \Omega m \quad (105)$$

$$\rho_{\perp} = 3,7 \cdot 10^{-6} \Omega m. \quad (106)$$

Der Fehler, der bei der Messung durch die Geräte zustandekommt, liegt unter 1% und ist damit zu vernachlässigen. In Tab. 6 sind die experimentell bestimmten Leitfähigkeiten und Widerstände für alle drei Proben zusammengefasst.

**Tabelle 6:** Experimentell bestimmte elektrische Leitfähigkeiten und spezifische Widerstände.

elektrische Leitfähigkeiten und Widerstände	Probe 1	Probe 2	Probe 3
$\sigma_{\parallel} [\frac{1}{\Omega m}]$	$2,5 \cdot 10^6$	$2,3 \cdot 10^6$	$2,7 \cdot 10^6$
$\sigma_{\perp} [\frac{1}{\Omega m}]$	$2,2 \cdot 10^5$	$2,7 \cdot 10^5$	$2,0 \cdot 10^5$
$\rho_{\parallel} [\Omega m]$	$4,0 \cdot 10^{-7}$	$4,3 \cdot 10^{-7}$	$3,7 \cdot 10^{-6}$
$\rho_{\perp} [\Omega m]$	$4,5 \cdot 10^{-6}$	$3,7 \cdot 10^{-6}$	$5,0 \cdot 10^{-6}$

Die Werte für die elektrischen Transporteigenschaften können mit Hilfe der Gln. 56, 68, 69 und 57 und den Materialeigenschaften aus Tab. 3 berechnet werden:

$$\sigma_{\parallel, \text{theo}} = \frac{\sigma_{Bi_2Te_3} + p\sigma_{Pb}}{1 + p} = 2,6 \cdot 10^6 \frac{1}{\Omega m} \quad (107)$$

$$\sigma_{\perp, \text{theo}} = \frac{\sigma_{Bi_2Te_3}\sigma_{Pb}(1 + p)}{p\sigma_{Bi_2Te_3} + \sigma_{Pb}} = 2,0 \cdot 10^5 \frac{1}{\Omega m} \quad (108)$$

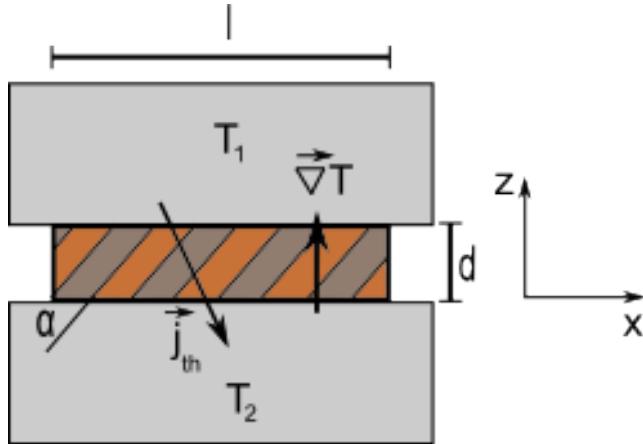
$$\rho_{\parallel, \text{theo}} = \frac{\rho_{Bi_2Te_3}\rho_{Pb}(1 + p)}{\rho_{Pb} + p\rho_{Bi_2Te_3}} = 3,9 \cdot 10^{-7} \Omega m \quad (109)$$

$$\rho_{\perp, \text{theo}} = \frac{\rho_{Bi_2Te_3} + p\rho_{Pb}}{1 + p} = 5,1 \cdot 10^{-6} \Omega m. \quad (110)$$

Die gemessenen Werte stimmen mit den berechneten Werten gut überein, wobei Probe 3 die beste Übereinstimmung liefert. Abweichungen können durch das schwierige Verfahren der thermischen Verbindung der Schichten entstehen.

## 5 Transversaler Peltier-Effekt in verkippten Blei-Bismuttellurid-Multilagenstrukturen

In Kap. 3 wurden die anisotropen Transporteigenschaften beschrieben. Diese benötigt man nun, um den anisotropen Peltier-Effekt in verkippten Multilagenstrukturen zu beschreiben. Für isotrope Materialien wurde der Peltier-Effekt bereits in Kap. 2.2 erklärt. In verkippten Multilagenstrukturen hängt der Peltier-Effekt von der Probengeometrie ab. Es ist zu unterscheiden zwischen einer langen Probe, bei der der Temperaturgradient senkrecht zur Auflagefläche der Wärmereservoirs verläuft (also  $\vec{\nabla}T = \hat{z}\nabla_z T$ , vgl. Abb. 28)

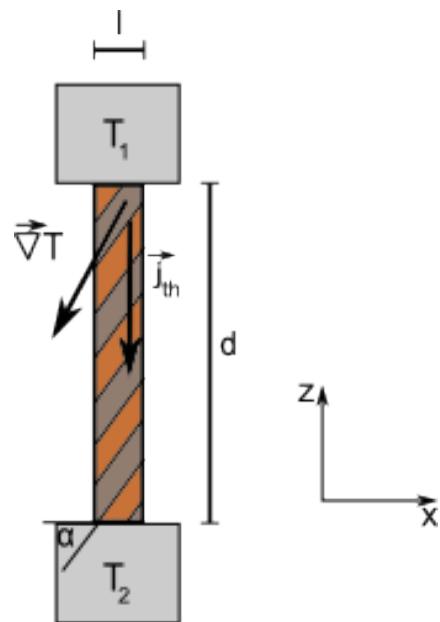


**Abbildung 28:** Lange Multilagenstruktur ( $l \gg d$ ) zwischen zwei Wärmereservoirs  $T_1$  und  $T_2$  (grau).  $\vec{\nabla}T$  beschreibt den Temperaturgradienten und  $j_{th}$  die Wärmestromdichte aufgrund von Wärmeleitung durch die Probe.

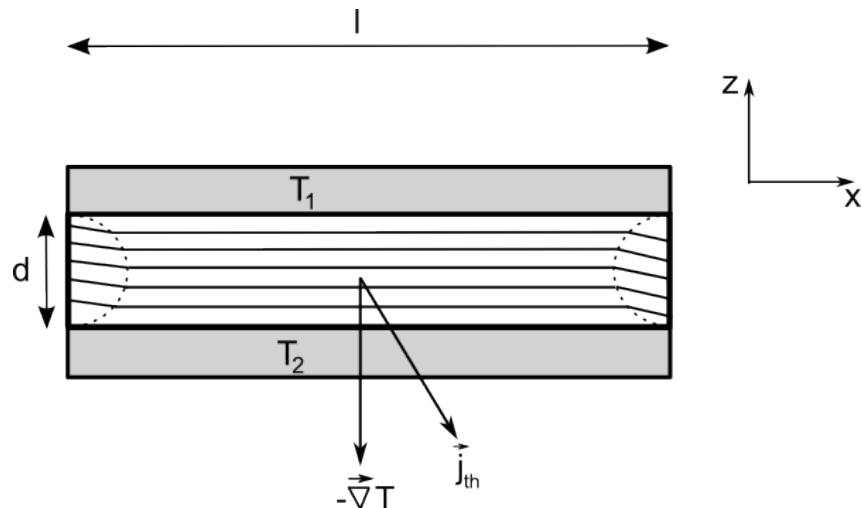
und einer kurzen Probe, bei der der Wärmestrom aufgrund der Geometrie gezwungen ist entlang der Probe in z-Richtung zu fließen (vgl. Abb. 29).

Im folgenden wird zunächst der Wärmetransport in einer langen Probe, bei der Ober- und Unterseite mit Wärmereservoirs  $T_1$  und  $T_2$  verbunden sind, betrachtet (Abb. 30).

Da die Länge  $l$  (siehe Abb. 28) im Vergleich zur Dicke  $d$  und auch zur Breite  $b$  (in der Abbildung nicht sichtbar wegen der zweidimensionalen Betrachtung) groß ist, liegen die isothermen Flächen parallel zu den kontaktierten Flächen



**Abbildung 29:** Kurze Multilagenstruktur ( $l \ll d$ ) zwischen zwei Wärmereservoiren  $T_1$  und  $T_2$  (grau).  $\vec{\nabla}T$  beschreibt den Temperaturgradienten und  $j_{th}$  die Wärmestromdichte durch die Probe.



**Abbildung 30:** Wärmestrom quer durch ein langes ( $l \gg d$ ) anisotropes Material. Die isothermen Flächen (schwarze Linien) verlaufen senkrecht zur  $z$ -Richtung.

(siehe Abb. 30) [29]. Dies bedeutet, dass der Temperaturgradient senkrecht zu diesen isothermen Flächen verläuft. Der Wärmestrom  $\vec{j}_{th}$  ist bei anisotropen Materialien im allgemeinen nicht parallel zum Temperaturgradienten, sondern verläuft in eine andere Richtung

$$j_{th_k} = -\lambda_{ki} \frac{dT}{di}. \quad (111)$$

Diese und folgende Gleichungen beschreiben eine Summe über i und k, wobei  $k, i \in x, y, z$ . Jede Komponente von  $\vec{j}_{th}$  hängt von allen drei Komponenten des Temperaturgradienten ab und nicht nur von einer wie bei isotropen Materialien. Diese Koeffizienten  $\lambda_{ki}$  bilden einen Tensor zweiter Stufe, den Wärmeleitfähigkeitstensor. Es kann gezeigt werden, dass dieser symmetrisch ist und es gilt [29]

$$\lambda_{ki} = \lambda_{ik}. \quad (112)$$

Der Wärmeleitfähigkeitstensor wird beschrieben durch

$$\begin{pmatrix} \lambda_{xx} & \lambda_{xy} & \lambda_{zx} \\ \lambda_{xy} & \lambda_{yy} & \lambda_{yz} \\ \lambda_{zx} & \lambda_{yz} & \lambda_{zz} \end{pmatrix}, \quad (113)$$

oder in Hauptachsenform durch

$$\begin{pmatrix} \lambda_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{zz} \end{pmatrix}. \quad (114)$$

In Richtung der Hauptachsen wird Gl. 111 vereinfacht zu

$$j_{th_x} = -\lambda_x \frac{dT}{dx}, \quad j_{th_y} = -\lambda_y \frac{dT}{dy}, \quad j_{th_z} = -\lambda_z \frac{dT}{dz}. \quad (115)$$

Für die thermische Leitfähigkeit gilt [29]

$$\lambda_{ki}ik = 1. \quad (116)$$

Diese Gleichung beschreibt eine Summe über i und k, wobei  $i,k \in x,y,z$ . In Hauptachsenform ergibt sich folgende Gleichung

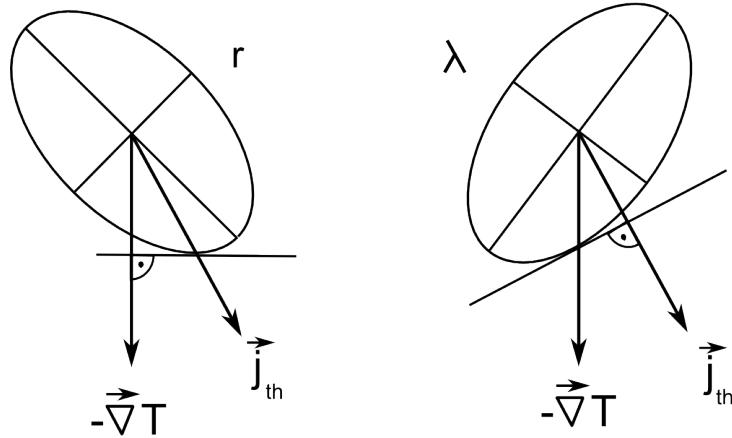
$$\lambda_x x^2 + \lambda_y y^2 + \lambda_z z^2 = 1. \quad (117)$$

Diese Gleichung beschreibt ein Ellipsoid, es wird als Wärmeleitfähigkeitsellipsoid bezeichnet. Die Form und Orientierung hängt von den jeweiligen Materialien ab. Analoge Überlegungen gelten für das Widerstandsellipsoid [29]. Abb. 31 zeigt schematisch in zweidimensionaler Form wie Wärmestrom und Temperaturgradient im thermischen Widerstands- und Leitfähigkeitsellipsoid angeordnet sind. Man sieht, dass für unterschiedliche Richtungen im Material unterschiedliche thermische Leitfähigkeiten bzw. Widerstände gelten. Außerdem zeigt die Abb. 31 wie Wärmestrom und Temperaturgradient zueinander liegen müssen. Dies lässt sich einfach konstruieren, indem man in das Leitfähigkeitsellipsoid eine beliebige Richtung für den Temperaturgradienten vom Mittelpunkt aus einzeichnet. Durch den entstehenden Schnittpunkt auf der Ellipse wird eine Tangente gelegt. Die Mittelsenkrechte der Tangente, die durch den Mittelpunkt der Ellipse geht, gibt die Richtung für den Wärmestrom vor. Analoges gilt für das Widerstandsellipsoid.

Der Zusammenhang zwischen der Wärmestromdichte  $\vec{j}_{th}$  und dem Temperaturgradienten  $\vec{\nabla}T$  lässt sich über den Wärmeleitfähigkeitstensor  $\hat{\lambda}$  oder den thermischen Widerstandstensor  $\hat{r}$  formulieren (siehe Kap. 3.3) [29]:

$$j_{th_x} = -\lambda_{xz} \frac{dT}{dz}, \quad j_{th_y} = -\lambda_{yz} \frac{dT}{dz}, \quad j_{th_z} = -\lambda_{zz} \frac{dT}{dz}, \quad (118)$$

$$\frac{dT}{dx} = -r_{xz} j_{th_z}, \quad \frac{dT}{dy} = -r_{yz} j_{th_z}, \quad \frac{dT}{dz} = -r_{zz} j_{th_z}. \quad (119)$$



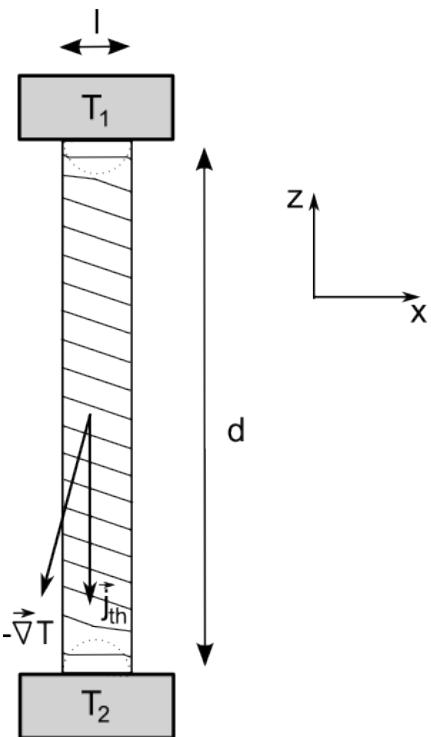
**Abbildung 31:** Thermisches Widerstandsellipsoid  $r$  (links) und Leitfähigkeitsellipsoid  $\lambda$  (rechts) eines langen anisotropen Materials.

Ist  $\vec{\nabla}T$  parallel zur z-Achse, wie es für lange Proben der Fall ist, so verwendet man im allgemeinen die Gln. 118. Für kurze Proben ist  $\vec{j}_{th}$  parallel zur z-Achse und man verwendet die Gln. 119.

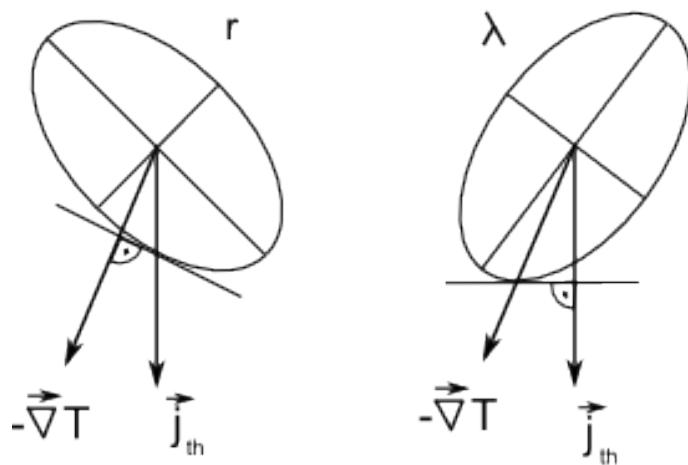
An den Seitenflächen in Abb. 30 ist der Wärmestrom gezwungen parallel zur z-Richtung zu fließen, das bedeutet, dass die Isothermalfächen hier nicht parallel zu den Kontaktflächen verlaufen können, da der Wärmestrom  $\vec{j}_{th}$  und der Temperaturgradient nicht parallel sind. Dieser Randeffekt ist durch die gestrichelte Linie in Abb. 30 dargestellt. Die Ausrichtung dieser beiden Größen an den Randzonen der Seitenflächen ergibt sich deshalb ähnlich wie bei der kurzen Probe in Abb. 32.

Bei der kurzen Probe ist die Dicke  $d$  im Vergleich zur Länge  $l$  und Breite  $b$  groß (Abb. 32). Liegt nun eine Temperaturdifferenz zwischen Ober- und Unterseite der Probe an, so ist der Wärmestrom aufgrund der Abmessungen der Probe gezwungen in z-Richtung zu fließen. Der Temperaturgradient zeigt im allgemeinen in eine andere Richtung. Der Zusammenhang zwischen den beiden Größen ist in den Ellipsen in Abb. 33 dargestellt [29].

An den Enden der kurzen Probe tritt ein ähnlicher Effekt auf wie bei der langen Probe, falls die Enden rechteckig und gut kontaktiert sind. Die Isothermen an den Enden müssen senkrecht zur z-Achse sein, da die Kontaktstelle überall



**Abbildung 32:** Wärmestrom durch ein kurzes ( $l \ll d$ ) anisotropes Material. Der Temperaturgradient  $\vec{\nabla}T$  verläuft senkrecht zu den isothermen Flächen (schwarze Linien).



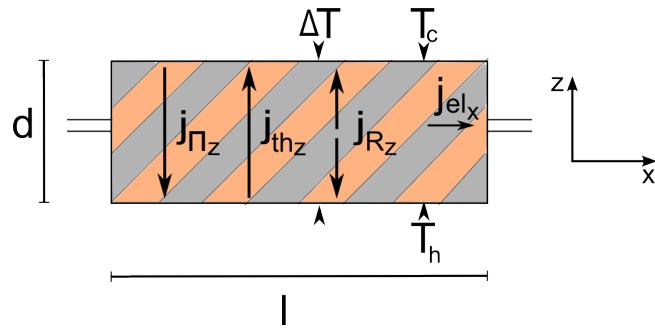
**Abbildung 33:** Thermisches Widerstandsellipsoid  $r$  (links) und Wärmeleitfähigkeitsellipsoid  $\lambda$  (rechts) eines kurzen anisotropen Materials.

auf gleicher Temperatur ist und die Wärme gleichmäßig in die Probe fließt. Das heißt die Richtung von  $\vec{j}_{th}$  ist an der Ober- und Unterseite der Probe wie in Abb. 30. Die Zonen sind auch hier durch eine gestrichelte Linie markiert. In diesem Kapitel wurde die Wärmeausbreitung in Abhängigkeit von der Probengeometrie beschrieben. Diese Darstellung war nötig für die nachfolgenden Berechnungen zum anisotropen transversalen Peltier-Effekt in langen und kurzen Proben.

## 5.1 Transversaler Peltier-Effekt in langen Proben

Im folgenden wird der Peltier-Effekt für lange Proben betrachtet. Für lange Proben mit  $l \gg d$  (siehe Abb. 28) gilt aufgrund der Probengeometrie:

$$\vec{j}_{el} = \begin{pmatrix} j_{elx} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (120)$$



**Abbildung 34:** Wärmeströme in einer verkippten Multilagenstruktur. Dabei ist  $\vec{j}_\Pi$  die Peltierwärmestromdichte,  $\vec{j}_{th}$  die Wärmestromdichte aufgrund von Wärmeleitung und  $\vec{j}_R$  die Joulsche Wärmestromdichte. Aufgrund der Probengeometrie gilt  $\vec{j}_{el} = \hat{x}j_{elx}$ . Für die Temperaturdifferenz gilt  $\Delta T = T_h - T_c$ , wobei  $T_h$  die Temperatur der warmen Probenseite und  $T_c$  die Temperatur der kalten Probenseite beschreibt.

Elektrische Stromdichte und Peltierwärmestromdichte sind über den Peltier-tensor miteinander verbunden

$$\vec{j}_\Pi = \hat{\Pi} \vec{j}_{el}. \quad (121)$$

In Abb. 34 sind nur die Komponenten in  $z$ -Richtung dargestellt. Longitudinale Temperaturdifferenzen werden aufgrund der Ankopplung der Probenunterseite an ein Wärmebad  $T_h$  unterdrückt. Außerdem sind die Seitenflächen und Stirnflächen der Probe thermisch isoliert. Für den Peltier-Tensor gilt analog zum

Peltier-Koeffizient  $\widehat{\Pi} = \widehat{S}T_c$  [27, 36], wobei für die Temperatur die der kalten Probenseite  $T_c$  verwendet wird.  $\widehat{S}$  beschreibt den Seebeck-Tensor der verwendeten verkippten Multilagenstruktur, welcher nach Gl. 88 folgende Form hat [49]:

$$\widehat{S} = \begin{pmatrix} S_{xx} & 0 & S_{xz} \\ 0 & S_{yy} & 0 \\ S_{zx} & 0 & S_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{\parallel} \cos^2 \alpha + S_{\perp} \sin^2 \alpha & 0 & \frac{1}{2} (S_{\parallel} - S_{\perp}) \sin(2\alpha) \\ 0 & S_{\parallel} & 0 \\ \frac{1}{2} (S_{\parallel} - S_{\perp}) \sin(2\alpha) & 0 & S_{\parallel} \sin^2 \alpha + S_{\perp} \cos^2 \alpha \end{pmatrix}. \quad (122)$$

Fügt man dies in Gl. 121 ein so erhält man:

$$\begin{aligned} \vec{j}_{\Pi} &= \widehat{\Pi} \vec{j}_{el} = T_c \widehat{S} \vec{j}_{el} \\ &= T_c \begin{pmatrix} S_{\parallel} \cos^2 \alpha + S_{\perp} \sin^2 \alpha & 0 & \frac{1}{2} (S_{\parallel} - S_{\perp}) \sin(2\alpha) \\ 0 & S_{\parallel} & 0 \\ \frac{1}{2} (S_{\parallel} - S_{\perp}) \sin(2\alpha) & 0 & S_{\parallel} \sin^2 \alpha + S_{\perp} \cos^2 \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_{el_x} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (123) \\ &= T_c \begin{pmatrix} (S_{\parallel} \cos^2 \alpha + S_{\perp} \sin^2 \alpha) j_{el_x} \\ 0 \\ (\frac{1}{2} (S_{\parallel} - S_{\perp}) \sin(2\alpha)) j_{el_x} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Diese Peltierwärmestromdichte wird durch zwei nicht verschwindene Komponenten beschrieben. Die x-Komponente parallel zum elektrischen Strom beschreibt einen longitudinalen Peltier-Effekt, welcher jedoch durch die Ankopplung an ein Wärmebad unterdrückt wird. Die zweite Komponente verläuft senkrecht zum elektrischen Strom und beschreibt einen transversalen Peltier-Effekt, welcher in dieser Arbeit untersucht wird. Der Peltier-Effekt tritt an den Grenzflächen der Probe auf und führt zu einer Temperaturdifferenz  $\Delta T = T_h - T_c$  zwischen Probenober- und Unterseite [29].

Zusätzlich zum Peltierwärmestrom entstehen auch noch zwei andere Ströme (siehe Abb. 34). Der ausgleichende Wärmestrom  $\vec{j}_{th}$  infolge von Wärmeleitung,

welcher durch den Temperaturgradienten erzeugt wird, wirkt dem Peltierwärmestrom entgegen. Auf die zusätzlich entstehende Joulsche Wärme wird später eingegangen. Für die Dichte des ausgleichenden Wärmestroms gilt [43]:

$$\begin{aligned} \vec{j}_{th} &= \hat{\lambda} \vec{\nabla} T \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_{xx} & 0 & \lambda_{xz} \\ 0 & \lambda_{yy} & 0 \\ \lambda_{zx} & 0 & \lambda_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \nabla_z T \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_{xz} \nabla_z T \\ 0 \\ \lambda_{zz} \nabla_z T \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (124)$$

Die Matrixeinträge von  $\hat{\lambda}$  sind in Gl. 89 dargestellt.

Außerdem muss berücksichtigt werden, dass ein elektrischer Strom, der durch einen Leiter fließt, aufgrund des elektrischen Widerstands  $R$  Joulsche Wärme erzeugt, welche quadratisch mit der Stromstärke ansteigt. Sie wird zu gleichen Teilen an Probenober- und Unterseite abgegeben [50, 21]. An den Stirn- und Seitenflächen der Probe kann keine Wärme entweichen, da diese thermisch isoliert sind. Die Joulsche Wärme wird beschrieben durch

$$\vec{j}_R = \frac{1}{2} \frac{V}{A} P \quad (125)$$

wobei  $V$  das Volumen,  $A$  die Oberfläche und  $P$  die elektrische Leistungsdichte bezeichnet. Die Leistungsdichte ergibt sich aus dem Skalarprodukt aus elektrischer Stromdichte und elektrischer Feldstärke

$$P = \langle \vec{j}_{el}, \vec{E} \rangle = \rho_{xx} j_{el_x}^2, \quad (126)$$

da  $\vec{E} = \hat{\rho} \vec{j}_{el}$  ist ( für  $\hat{\rho}$  siehe Gl. 89).

Aus den eben genannten Wärmeströmen lässt sich die gesamte Wärmestromdichte  $j_{Q_z}$  in z-Richtung bestimmen [36]:

$$-j_{\Pi_z} + j_{th_z} + \frac{1}{2}j_{R_z} = j_{Q_z}. \quad (127)$$

Nach dem Einschalten des Stroms (siehe Abb. 34) in x-Richtung ist  $j_{Q_z} \neq 0$ . Aufgrund des Peltierwärmestroms baut sich ein Temperaturgradient auf. Der dadurch entstehende Temperaturunterschied führt zu einem ausgleichenden Wärmestrom infolge von Wärmeleitung. Nach Erreichen eines stationären Zustands gilt  $j_{Q_z} = 0$ . Setzt man die berechneten Größen für die verschiedenen Wärmeströme in Gl. 127 ein, so erhält man [36]:

$$0 = -T_c S_{zx} j_{el_x} + \lambda_{zz} \frac{\Delta T}{d} + \frac{1}{2} \frac{V}{A} \rho_{xx} j_{el_x}^2. \quad (128)$$

Löst man diese Gleichung nach  $\Delta T$  auf, so ergibt sich

$$\Delta T(j_{el_x}) = \left( T_c S_{zx} - \frac{1}{2} d \rho_{xx} j_{el_x} \right) j_{el_x} \frac{d}{\lambda_{zz}}. \quad (129)$$

Mit Hilfe der Maximalwertbestimmung kann man die maximale Temperatur  $\Delta T_{max}$  berechnen. Dazu leitet man Gl. 129 nach  $j_{el_x}$  ab und setzt das Ergebnis gleich Null:

$$\frac{\partial(\Delta T)}{\partial j_{el_x}} = (T_c S_{zx} - d \rho_{xx} j_{el_x}) \frac{d}{\lambda_{zz}} \equiv 0. \quad (130)$$

Daraus erhält man für die optimale Stromdichte bei der die Temperaturdifferenz maximal wird [36]

$$j_{el_x, opt} = \frac{T_c S_{zx}}{d \rho_{xx}}. \quad (131)$$

Um die maximal erreichbare Temperatur  $\Delta T_{max}$  zu berechnen setzt man  $j_{el_x, opt}$  in Gl. 129 ein und man erhält [36]:

$$\Delta T_{max} = \frac{1}{2} \frac{S_{zx}^2}{\lambda_{zz}\rho_{xx}} T_c^2. \quad (132)$$

Für klassische Peltierelemente gilt

$$\Delta T_{max} = \frac{1}{2} Z T_c^2, \quad (133)$$

wobei  $Z$  als „figure of merit“ (Leistungszahl) bezeichnet wird. In diesem Fall erhält man für den figure of merit  $Z = \frac{S_{zx}^2}{\lambda_{zz}\rho_{xx}}$  [36], indem man Gl. 132 und Gl. 133 zusammenfügt. Dieser „figure of merit“ wurde für den transversalen Peltier-Effekt erstmals berechnet. Je höher  $Z$  umso höher ist die Effektivität des Peltier-Elements und umso besser ist dieses als thermoelektrischer Kühler geeignet.

Da man die Probe auch als Kühlmaschine betrachten kann, ist es sinnvoll die Effizienz  $\Phi$  anzugeben. Auch diese wird für den transversalen Peltier-Effekt zum ersten mal berechnet. Sie ist definiert durch den Quotienten aus entzogener Wärme  $Q$  und aufgewendeter Energie  $p_{el}$ . Die an der Probenoberseite entzogene Wärme pro Zeiteinheit ist gegeben durch

$$Q = \left[ T_c S_{zx} j_{el_x} - \lambda_{zz} \frac{\Delta T}{d} - \frac{1}{2} d \rho_{xx} j_{el_x}^2 \right] bl, \quad (134)$$

dabei ist  $bl$  die Fläche durch die die Wärme strömt. In der Probe entsteht die Joulsche Wärme  $j_{el_x}^2 \rho_{xx} dbl$ . Außerdem muss die Energie  $E_x j_{el_x} bdl = S_{zx} \nabla_z T j_{el_x} bdl$  aufgrund des elektrischen Feldes  $E_x = S_{zx} \nabla_z T$  aufgewendet werden. Die gesamte aufgewendete Energie ist somit  $p_{el} = j_{el_x}^2 \rho_{xx} dbl + S_{zx} \Delta T j_{el_x} bl$ . Damit ergibt sich [36]

$$\Phi = \frac{Q}{p_{el}} = \frac{T_c S_{zx} j_{el_x} - \lambda_{zz} \frac{\Delta T}{d} - \frac{1}{2} d \rho_{xx} j_{el_x}^2}{j_{el_x}^2 \rho_{xx} d + S_{zx} \Delta T j_{el_x}}. \quad (135)$$

Die Effizienz ist von der Dicke der Probe abhängig. Um die maximale Effizienz zu erhalten, wird aus  $\frac{\partial \Phi}{\partial d} = 0$  die optimale Dicke der Probe  $d_{opt}$  berechnet [36] und diese in Gl. 135 eingesetzt. Für die optimale Dicke erhält man

$$\begin{aligned} d_{opt}(j_{el_x}) &= \frac{T_h - T_c}{\bar{T}} \frac{\lambda_{zz}}{j_{el_x} S_{zx}} \left[ 1 + \left( 1 + \frac{S_{zx}^2}{\lambda_{zz} \rho_{xx}} \bar{T} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \\ &= \frac{T_h - T_c}{\bar{T}} \frac{\lambda_{zz}}{j_{el_x} S_{zx}} \left[ 1 + (1 + Z\bar{T})^{\frac{1}{2}} \right], \end{aligned} \quad (136)$$

wobei  $\bar{T} = \frac{T_h + T_c}{2}$  [36] ist und  $T_h$  die Temperatur der warmen Probenseite und  $T_c$  die Temperatur der kalten Probenseite darstellt. Setzt man  $d_{opt}$  in Gl. 135 für  $d$  ein, so erhält man

$$\Phi_{max} = \frac{T_c}{T_h - T_c} \frac{(Z\bar{T} + 1)^{\frac{1}{2}} - \frac{T_h}{T_c}}{(Z\bar{T} + 1)^{\frac{1}{2}} + 1}. \quad (137)$$

Nachdem sich ein stationärer Zustand eingestellt hat, wird die Temperaturdifferenz  $\Delta T$  maximal und die Effizienz verschwindet. Somit gilt [36]:

$$\begin{aligned} \Phi_{max} &= 0 \\ T_c \left[ (Z\bar{T} + 1)^{\frac{1}{2}} - \frac{T_h}{T_c} \right] &= 0 \\ Z\bar{T} + 1 &= \frac{T_h^2}{T_c^2} \\ \frac{1}{2} Z T_c^2 (T_h + T_c) &= T_h^2 - T_c^2 = (T_h - T_c)(T_h + T_c) \\ \frac{1}{2} Z T_c^2 &= \frac{1}{2} \frac{S_{zx}^2}{\lambda_{zz} \rho_{xx}} T_c^2 = \Delta T_{max}. \end{aligned} \quad (138)$$

Beide Berechnungen von  $\Delta T_{max}$  führen zum gleichen Ergebnis. Wie bereits in Gl. 88 und Gl. 89 berechnet gilt für  $S_{zx} = \frac{1}{2} (S_{||} - S_{\perp}) \sin(2\alpha)$ ,  $\lambda_{zz} = \lambda_{||} \sin^2 \alpha + \lambda_{\perp} \cos^2 \alpha$  und  $\rho_{xx} = \rho_{||} \cos^2 \alpha + \rho_{\perp} \sin^2 \alpha = \frac{1}{\sigma_{||}} \cos^2 \alpha + \frac{1}{\sigma_{\perp}} \sin^2 \alpha$ . Für  $\rho_{||}$  und  $\rho_{\perp}$  ist  $\rho_{||} = \frac{1}{\sigma_{||}}$  und  $\rho_{\perp} = \frac{1}{\sigma_{\perp}}$ . Dies gilt jedoch nur in paralleler und senkrechter

Richtung zur Schichtung. In anisotropen Materialien gilt im Allgemeinen  $\rho \neq \frac{1}{\sigma}$ . Für  $\Delta T_{max}$  ergibt sich:

$$\Delta T_{max} = \frac{1}{2} \frac{\frac{1}{4} (S_{||} - S_{\perp})^2 \sin^2(2\alpha)}{(\lambda_{||} \sin^2 \alpha + \lambda_{\perp} \cos^2 \alpha) \left( \frac{1}{\sigma_{||}} \cos^2 \alpha + \frac{1}{\sigma_{\perp}} \sin^2 \alpha \right)} T_c^2 \quad (139)$$

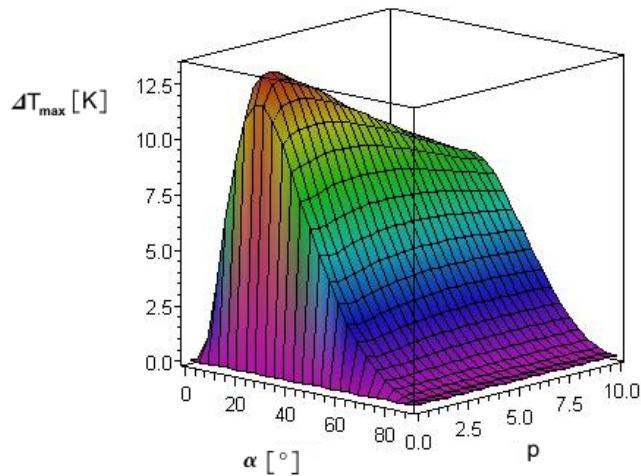
Ersetzt man nun die senkrechten bzw. parallelen Transporteigenschaften durch die Gln. 56, 60, 65, 68, 71 und 75 so erhält man:

$$\Delta T_{max} = \frac{1}{8} \frac{\left( \frac{S_A \sigma_A + p S_B \sigma_B}{\sigma_A + p \sigma_B} - \frac{S_A \lambda_B + p S_B \lambda_A}{\lambda_B + p \lambda_A} \right)^2 \sin^2(2\alpha)}{\left( \frac{\lambda_A + p \lambda_B}{1+p} \sin^2 \alpha + \frac{\lambda_A \lambda_B (p+1)}{p \lambda_A + \lambda_B} \cos^2 \alpha \right) \left( \frac{1+p}{\sigma_A + p \sigma_B} \cos^2 \alpha + \frac{p \sigma_A + \sigma_B}{\sigma_A \sigma_B (1+p)} \sin^2 \alpha \right)} T_c^2. \quad (140)$$

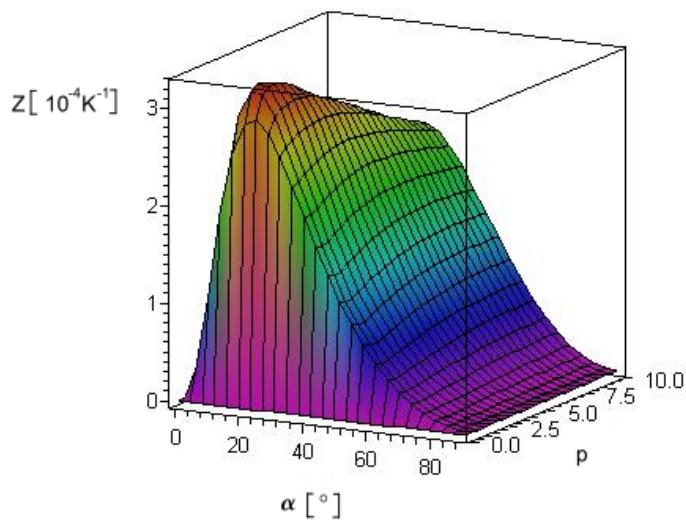
Es zeigt sich, dass  $\Delta T_{max}$  von den Transporteigenschaften der beiden Schichtmaterialien A und B, dem Kippwinkel  $\alpha$  der Probe und dem Dickenverhältnis  $p$  der Schichten abhängt.

In Abb. 35 ist die maximale Temperaturdifferenz in Abhängigkeit von  $\alpha$  und  $p$  für eine Multilagenstruktur aus Blei und Bismuttellurid nach Gl. 140 dargestellt. Hierfür wurden die Transporteigenschaften für Pb und  $\text{Bi}_2\text{Te}_3$  nach Tab. 7 verwendet (siehe auch Kap. 4.3.1). Aus dem Graphen ist zu sehen, dass sich die größtmögliche Temperaturdifferenz für  $\alpha = 25^\circ$  und  $p = 1$  ergibt. Verwendet man die Transporteigenschaften aus Tab. 7, so ergibt sich für diese Materialkombination eine maximal erreichbare Temperaturdifferenz von ca. 13K. Dieses  $\Delta T_{max}$  sollte beispielsweise für Probe 1 (siehe Tab.9) mit einer optimalen Stromdichte von  $j_{el,x,opt} = \frac{T_c S_{zx}}{d \rho_{xx}} = 146,7 \frac{\text{A}}{\text{cm}^2}$  (siehe Gl. 131) erreicht werden, wobei für die Berechnung von  $S_{zx}$  und  $\rho_{xx}$  die Werte aus Tab. 7 verwendet wurden.

Für  $Z = \frac{S_{zx}^2}{\lambda_{zz} \rho_{xx}}$  ergibt sich in Abhängigkeit vom Kippwinkel und dem Dickenverhältnis für eine  $\text{Pb}-\text{Bi}_2\text{Te}_3$  Multilagenstruktur Abb. 36. Den Maximalwert für Z von  $3,4 \cdot 10^{-4} \frac{1}{\text{K}}$  erhält man für einen Winkel  $\alpha = 25^\circ$  und ein Schichtdickenverhältnis von  $p = 1$ .



**Abbildung 35:**  $\Delta T_{max}$  in Abhängigkeit vom Kippwinkel  $\alpha$  und dem Dickenverhältnis  $p$  für eine  $Pb - Bi_2Te_3$  Multilagenstruktur.



**Abbildung 36:**  $Z$  in Abhängigkeit vom Kippwinkel  $\alpha$  und dem Dickenverhältnis  $p$  für eine  $Pb - Bi_2Te_3$  Multilagenstruktur.

**Tabelle 7:** Transporteigenschaften von Blei und Bismuttellurid [44](vgl. Tab. 3).

Material	$\lambda[\frac{W}{mK}]$	$\sigma[\frac{1}{\Omega m}]$	$\rho[\Omega m]$	$S[\frac{\mu V}{K}]$
Pb	$35^a$	$5 \cdot 10^{6a}$	$2 \cdot 10^{-7a}$	$\approx 0^a$
$Bi_2Te_3$	$2,3^b$	$10^{5c}$	$10^{-5^c}$	$145^d$

<sup>a</sup> Referenz: [45]

<sup>b</sup> Referenz: [46]

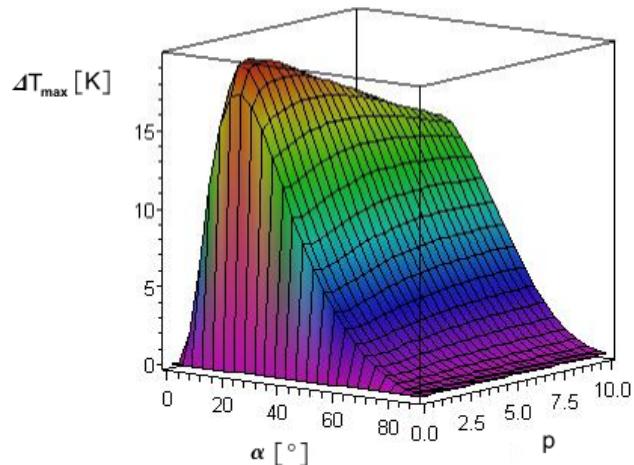
<sup>c</sup> Referenz: [47]

<sup>d</sup> Referenz: [48]

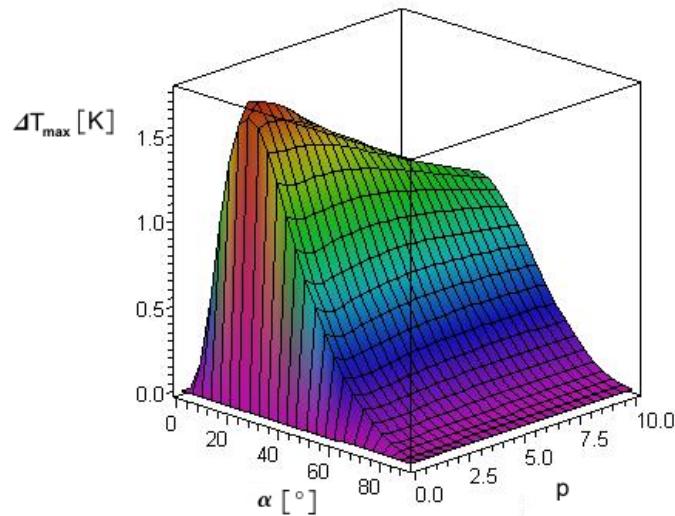
Die Temperaturdifferenz könnte noch vergrößert werden, indem man  $Bi_2Te_3$ -Material mit einer höheren Thermokraft von  $180 \mu V/K$ , wie oft in der Literatur angegeben, verwendet. Setzt man diesen Wert in die Rechnung ein, so erhält man den Verlauf der maximalen Temperatur, welcher in Abb. 37 gezeigt wird.

Andere Materialkombinationen ergeben im Allgemeinen niedrigere  $\Delta T_{max}$ -Werte. Verwendet man beispielsweise eine Materialkombination aus zwei Metallen, so erhält man sehr niedrige Werte für die maximale Temperaturdifferenz. Dies liegt daran, dass Metalle kleine Thermokräfte im Bereich von einigen  $\mu V/K$  haben und so  $\Delta S$  und damit auch  $\Delta T_{max}$  sehr klein ist. In Abb. 38 ist  $\Delta T_{max}$  für die Kombination aus Konstantan und Kupfer gezeigt. Die maximal erreichbare berechnete Temperaturdifferenz liegt hier bei 1.5K.

Rechnerisch können durch das Einsetzen günstigerer Transporteigenschaften in das Programm (siehe Anhang) höhere Temperaturdifferenzen erzielt werden und es können damit Materialkombinationen gesucht werden, mit denen ein noch höherer maximaler Temperaturunterschied erzeugt werden kann [51, 52]. Um größere Temperaturdifferenzen zu erhalten muss  $\Delta S$  vergrößert werden, das heißt die Differenz  $S_{||} - S_{\perp}$  muss betragsmäßig möglichst groß sein (siehe Gl. 139). Des Weiteren sollte die elektrische Leitfähigkeit für beide Materialien groß sein und die Wärmeleitfähigkeiten sollten möglichst klein sein. Es ist jedoch nicht einfach, Materialkombinationen mit diesen Eigenschaften zu finden, da z.B. Materialien mit einer großen elektrischen Leitfähigkeit meist auch eine große Wärmeleitfähigkeit besitzen. Ein weiteres Problem ist die thermische Verbindung dieser beiden Materialien. Werden jedoch Materialien gefunden,



**Abbildung 37:**  $\Delta T_{max}$  in Abhängigkeit vom Kippwinkel  $\alpha$  und dem Dickenverhältnis  $p$  für eine  $Pb - Bi_2Te_3$  Multilagenstruktur für eine Thermokraft für  $Bi_2Te_3$  von  $180\mu V/K$ .



**Abbildung 38:**  $\Delta T_{max}$  in Abhängigkeit vom Kippwinkel  $\alpha$  und dem Dickenverhältnis  $p$  für eine Konstantan-Kupfer Multilagenstruktur.

die derartige Eigenschaften besitzen, so lassen sich hohe Temperaturdifferenzen erzeugen.

Im nächsten Abschnitt werden erste Rechnungen für kurze Proben vorgestellt. Die Rechnungen deuten an, dass hier höhere Temperaturdifferenzen erzielt werden.

## 5.2 Transversaler Peltier-Effekt in kurzen Proben

Bei der kurzen Probe ändert sich die Betrachtung aufgrund der veränderten Probengeometrie (siehe Abb. 29). Infolge der geringen räumlichen Ausdehnung in x-Richtung ( $l \ll d$ ) gilt:

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (141)$$

Mit Hilfe dieser Gleichung,  $\hat{\sigma}$  (siehe Gl. 89) und der ohmschen Beziehung  $\vec{j}_{el} = \hat{\sigma} \vec{E}$  folgt für die elektrische Stromdichte

$$\vec{j}_{el} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & 0 & \sigma_{xz} \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ \sigma_{zx} & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} E_x \\ 0 \\ \sigma_{zx} E_x \end{pmatrix}. \quad (142)$$

Dadurch wird in der Probe ein Peltierwärmestrom  $\vec{j}_{\Pi}$  erzeugt

$$\begin{aligned} \vec{j}_{\Pi} &= \hat{\Pi} \vec{j}_{el} = \hat{S} T_c \vec{j}_{el} = T_c \begin{pmatrix} S_{xx} & S_{xy} & S_{xz} \\ S_{yx} & S_{yy} & S_{yz} \\ S_{zx} & S_{zy} & S_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} E_x \\ 0 \\ \sigma_{zx} E_x \end{pmatrix} \\ &= T_c \begin{pmatrix} S_{xx}\sigma_{xx}E_x + S_{xz}\sigma_{zx}E_x \\ 0 \\ S_{zx}\sigma_{xx}E_x + S_{zz}\sigma_{zx}E_x \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (143)$$

Aufgrund des Peltierwärmestroms wird der Probenoberseite die Wärme  $T_c S_{zx} \sigma_{xx} E_x + T_c S_{zz} \sigma_{zx} E_x$  pro Zeit und Flächeneinheit entzogen. Der dadurch entstehende Temperaturgradient verursacht einen ausgleichenden Wärmestrom  $\vec{j}_{th}$ , welcher dem Peltierwärmestrom entgegenwirkt [36]. Dieser ist gegeben durch

$$\vec{j}_{th} = \hat{\lambda} \vec{\nabla} T \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ j_{th_z} \end{pmatrix}, \quad (144)$$

wobei der Temperaturgradient durch den thermischen Widerstandstensor  $\hat{r}$  (siehe Gl. 89) ausgedrückt werden kann

$$\vec{\nabla} T = \hat{r} \cdot \vec{j}_{th}. \quad (145)$$

Für die z-Komponente des Ausgleichswärmestroms gilt

$$j_{th_z} = \frac{\nabla_z T}{r_{zz}} = \frac{\Delta T}{dr_{zz}}. \quad (146)$$

Für die Summe der Wärmeströme im stationären Fall gilt

$$-j_{\Pi_z} + j_{th_z} + \frac{1}{2} j_{R_z} = 0. \quad (147)$$

Setzt man in diese Gleichung die Gln. 125, 146 und 143 ein, so ergibt sich

$$0 = -T_c(\sigma_{xx}S_{zx} + \sigma_{zx}S_{zz})E_x + \frac{\Delta T}{r_{zz}d} + \frac{1}{2} \frac{V}{A} \sigma_{xx} E_x^2 \\ \Delta T = \left[ T_c(\sigma_{xx}S_{zx} + \sigma_{zx}S_{zz}) - \frac{1}{2} d\sigma_{xx} E_x \right] E_x r_{zz} d. \quad (148)$$

Analog zu den Berechnungen für die lange Probe erhält man die maximale Temperaturdifferenz mit Hilfe der Maximalwertbestimmung:

$$\begin{aligned}
\frac{d(\Delta T)}{dE_x} &= [T_c(\sigma_{xx}S_{zx} + \sigma_{zx}S_{zz}) - d\sigma_{xx}E_x] r_{zz}d \equiv 0 \\
E_{x_{opt}} &= \frac{T_c(\sigma_{xx}S_{zx} + \sigma_{zx}S_{zz})}{\sigma_{xx}d} \\
\Delta T_{max} &= \Delta T(E_{x_{opt}}) \\
&= \frac{1}{2} \frac{(\sigma_{xx}S_{zx} + \sigma_{zx}S_{zz})^2}{\sigma_{xx}} r_{zz} T_c^2 \\
&= \frac{1}{2} Z T_c^2.
\end{aligned} \tag{149}$$

Hier ist  $Z$  der „figure of merit“, welcher bei dieser Probengeometrie folgende Form hat:

$$Z = \left( S_{zx} + S_{zz} \frac{\sigma_{zx}}{\sigma_{xx}} \right)^2 \sigma_{xx} r_{zz}. \tag{150}$$

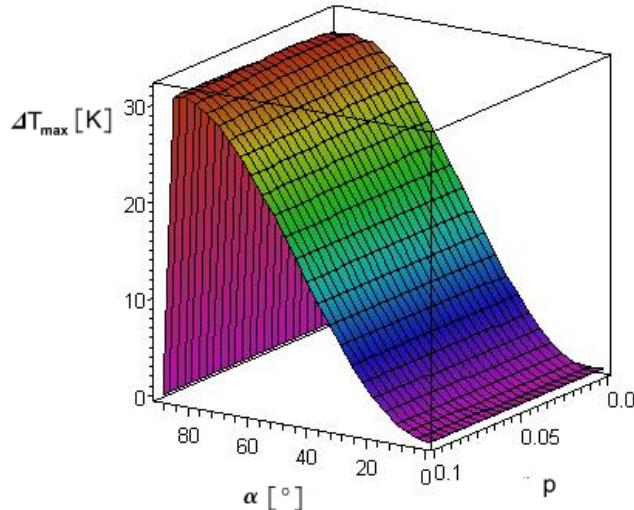
Der eingeklammerte Teil wird zu  $S_{eff} = S_{zx} + S_{zz} \frac{\sigma_{zx}}{\sigma_{xx}}$  zusammengefasst und man erhält  $Z = S_{eff}^2 \sigma_{xx} r_{zz}$ .

Setzt man in Gl. 149 die Tensorkomponenten  $\sigma_{xx}$ ,  $S_{zx}$ ,  $\sigma_{zx}$ ,  $S_{zz}$  und  $r_{zz}$  aus Gl. 89 ein, so erhält man

$$\begin{aligned}
\Delta T_{max} &= \frac{1}{2} \frac{(r_{\parallel} \sin^2 \alpha + r_{\perp} \cos^2 \alpha) T_c^2}{(\sigma_{\parallel} \cos^2 \alpha + \sigma_{\perp} \sin^2 \alpha)} \\
&\cdot ((\sigma_{\parallel} \cos^2 \alpha + \sigma_{\perp} \sin^2 \alpha) (\frac{1}{2} (S_{\parallel} - S_{\perp}) \sin(2\alpha)) + \\
&+ (\frac{1}{2} (\sigma_{\parallel} - \sigma_{\perp}) \sin(2\alpha)) (S_{\parallel} \sin^2 \alpha + S_{\perp} \cos^2 \alpha))^2.
\end{aligned} \tag{151}$$

In dieser Gleichung können nun die senkrechten und parallelen Transporteigenschaften durch die entsprechenden Gleichungen aus Kap. 3 ersetzt werden und  $\Delta T_{max}$  kann in Abhängigkeit von den Transporteigenschaften der beiden Materialien A und B, dem Kippwinkel und dem Schichtdickenverhältnis der Probe ausgedrückt werden. Die erzielbaren Temperaturdifferenzen für die kurze Probe, bestehend aus  $Bi_2Te_3$  und einem schlechten Leiter, kann man aus

Abb. 39 ablesen. Die maximale Temperaturdifferenz erhält man für  $\alpha = 80^\circ$  und  $p = 0,025$ . Für den schlechten Leiter wurden fiktive Werte für die Wärmeleitfähigkeit, die elektrische Leitfähigkeit und die Thermokraft verwendet (siehe Tab. 8). Diese Materialkombination liefert durch Einsetzen der Transporteigenschaften in das Mapleprogramm (siehe Anhang) eine höhere maximale Temperaturdifferenz als bei der langen Probe.



**Abbildung 39:**  $\Delta T_{max}$  in Abhängigkeit vom Kippwinkel  $\alpha$  und dem Dickenverhältnis  $p$ .

Für diese Betrachtung existieren jedoch aufgrund mangelnder geeigneter Materialien noch keine Messungen.

Erste vorläufige Versuche wurden mit  $Bi_2Te_3$  als Halbleitermaterial und Leitsilber als schlechter Leiter unternommen. Dazu wurden die  $Bi_2Te_3$ -Plättchen mit einer dünnen Schicht Leitsilber zusammengeklebt. Diese Proben konnten jedoch den mechanischen Einflüssen bei der Probenbearbeitung nicht standhalten. Außerdem wurde als schlechter Leiter eine Leitsilber-Kleber-Mischung getestet, aber auch hier konnten die Proben den mechanischen Einflüssen nicht standhalten. Aufgrund dessen wurde die Konzentration des Zweikomponentenklebers erhöht, dies führte jedoch dazu, dass die Leitsilber-Kleber-Mischung

isolierend wurde.

**Tabelle 8:** Transporteigenschaften von Bismuttellurid und einem schlechten Leiter [44].

Material	$\lambda[\frac{\text{W}}{\text{mK}}]$	$r[\frac{\text{mK}}{\text{W}}]$	$\sigma[\frac{1}{\Omega\text{m}}]$	$\rho[\Omega\text{m}]$	$S[\frac{\mu\text{V}}{\text{K}}]$
schlechter Leiter	1	1	1	1	1
$\text{Bi}_2\text{Te}_3$	$2,3^b$	$0,43^b$	$10^{5c}$	$10^{-5c}$	$145^d$

<sup>a</sup> Referenz: [45]

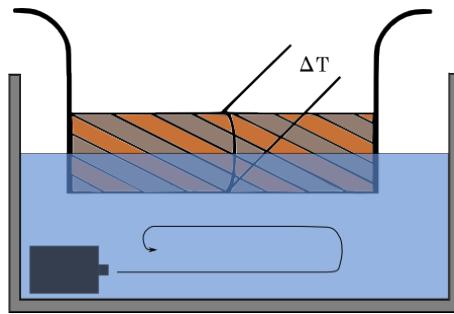
<sup>b</sup> Referenz: [46]

<sup>c</sup> Referenz: [47]

<sup>d</sup> Referenz: [48]

### 5.3 Transversaler Peltier-Effekt in langen Proben: Experimente

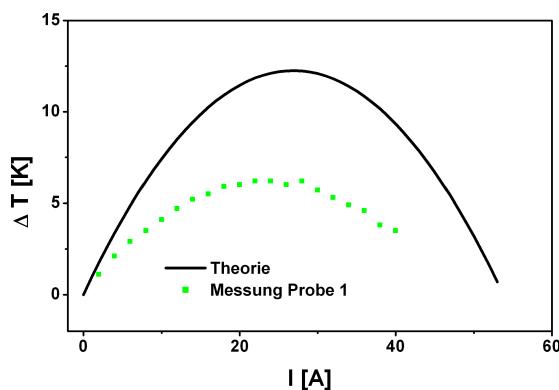
Die Transporteigenschaften wurden, wie in Kapitel 3 beschrieben, an einem Multilagenstapel senkrecht und parallel zur Schichtung gemessen. Für die Untersuchungen zum Peltier-Effekt verwendet man nun die verkippte Probe (siehe Abb. 20). Zum Nachweis des transversalen Peltier-Effekts speist man in die Probe in x-Richtung Strom ein und untersucht, ob sich in z-Richtung eine Temperaturdifferenz bildet (siehe Abb. 40). Die Temperaturdifferenz wird mit Hilfe eines Thermoelements (siehe Anhang) gemessen. Die an die Probe angelöteten Kupferdrähte werden mit den Stromzuführungen eines Netzgerätes verbunden. Die Stromrichtung wird so gewählt, dass die Unterseite der Probe warm wird und durch ein Wasserbad gekühlt werden kann ( $T_{H_2O} \approx T_{Zimmer}$ ).



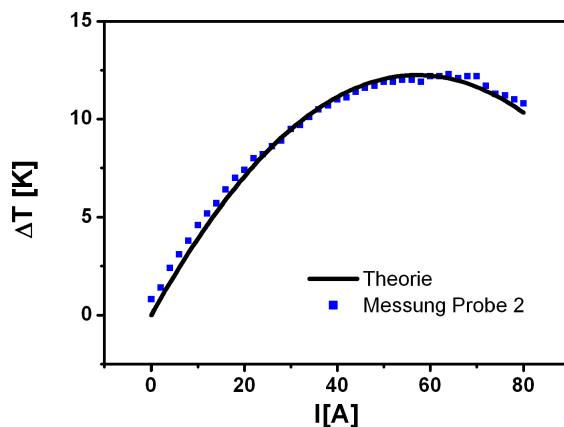
**Abbildung 40:** Messaufbau: Probe im Wasserbad (blau) mit Wasserpumpe (schwarz).

Das Thermoelement, bestehend aus Kupfer- und Konstantandrähten, zur Messung der Temperaturdifferenz wird mit Hilfe eines Zwei-Komponenten-Thermoklebers (Wärmeleitkleber Arctic Silver,  $\lambda = 8 \frac{W}{mK}$  [53], elektrisch isolierend) an der Probenober- und Unterseite befestigt. Nachdem der Kleber vollständig ausgehärtet ist, wird die Probe in eine Halterung eingespannt und in ein Wasserbad abgesenkt. Die Probe sollte optimalerweise bis zur Hälfte im Wasserbad sein, da so die besten Ergebnisse erzielt werden. Um das erwärmte Wasser um die Probe abzutransportieren und im Wasserbad zu verteilen, wird eine Wasserpumpe angebracht, durch die das Wasser im Becken zirkuliert (siehe Abb. 40). In die Probe wird nun der Strom  $I$  eingespeist und es wird, nachdem sich ein stationärer Zustand eingestellt hat, die Temperaturdifferenz  $\Delta T$  zwi-

schen Probenober- und Probenunterseite gemessen. In den Abb. 41-43 sind die berechneten und gemessenen Temperaturdifferenzen  $\Delta T$  als Funktion des eingespeisten Stroms  $I$  für drei verschiedene Proben dargestellt. Bei kleinen Strömen steigt  $\Delta T$  linear an, erreicht dann ein Maximum und fällt danach wieder ab. Dieser Kurvenverlauf ist darauf zurückzuführen, dass die Joulsche Wärme quadratisch in die Gleichung für  $\Delta T$  eingeht und somit für hohe Ströme den Peltierwärmestrom überwiegt.

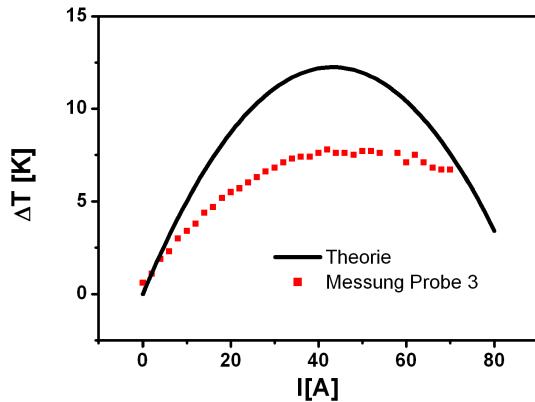


**Abbildung 41:**  $\Delta T$  in Abhängigkeit vom Strom  $I$  für Probe 1 mit berechnetem Kurvenverlauf.



**Abbildung 42:**  $\Delta T$  in Abhängigkeit vom Strom  $I$  für Probe 2 mit berechnetem Kurvenverlauf.

Die Temperaturdifferenzen (siehe Gl. 129) wurden entsprechend der Proben-



**Abbildung 43:**  $\Delta T$  in Abhängigkeit vom Strom  $I$  für Probe 3 mit berechnetem Kurvenverlauf.

struktur für einen Kippwinkel  $\alpha = 25^\circ$ , ein Schichtdickenverhältnis  $p = 1$  und für eine Probendicke von  $0,23\text{cm}$  (Probe 1, siehe Abb. 41),  $0,32\text{cm}$  (Probe 3, siehe Abb. 43) und  $0,42\text{cm}$  (Probe 2, siehe Abb. 42) mit Hilfe des Rechenprogramms (siehe Anhang) und den Transporteigenschaften aus Tab. 7 berechnet. Die Probenabmessungen sind in Tab. 9 dargestellt.

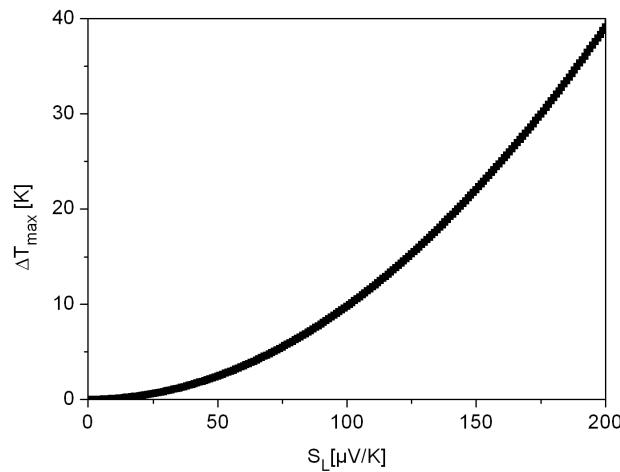
**Tabelle 9:** Probendaten

Probenangaben	Probe 1	Probe 2	Probe 3
$\Delta T_{max,gem}[\text{K}]$	6,2	12,3	7,8
$l \times d \times b [\text{cm} \times \text{cm} \times \text{cm}]$	$2,65 \times 0,79 \times 0,23$	$2,1 \times 0,69 \times 0,49$	$3,02 \times 0,85 \times 0,37$

Die gemessenen Temperaturdifferenzen sind für Probe 1 und 3 etwas kleiner als die berechneten. Dies liegt zum Teil daran, dass die gemessenen Thermokräfte der Proben etwas kleiner sind als die berechneten Werte. Um den theoretischen Verlauf der Kurve  $\Delta T(I)$  zu bestimmen, wurden die Transporteigenschaften nach Tab. 7 und die unterschiedlichen Probenbreiten in das Rechenprogramm (siehe Anhang) eingesetzt. Die experimentellen Werte  $\Delta T(I)$  für Probe 2 stimmen gut mit dem theoretisch erwarteten Verlauf überein, größere Abweichungen ergeben sich bei Probe 1 und 3. Die Abweichungen sind auf unterschiedliche Probengüte zurückzuführen.

Der Zusammenhang zwischen der Thermokraft und der maximalen Tempe-

raturdifferenz  $\Delta T_{max} \approx \frac{1}{8} \frac{S_\perp^2}{\lambda_{zz} \rho_{xx}} T_c^2 (\sin 2\alpha)^2$  (siehe Gl. 132 mit der Näherung  $S_\parallel \ll S_\perp$ ) wurde in Kap. 5 bereits berechnet. In Abb. 44 ist die maximale Temperaturdifferenz in Abhängigkeit von der Thermokraft  $S_\perp$  bei konstantem  $\lambda_{zz}$  und  $\rho_{xx}$  dargestellt. Um  $\lambda_{zz}$  und  $\rho_{xx}$  zu berechnen wurden Gln. 89, 71, 69, 57, 60 und Tab. 7 verwendet. Man sieht, dass die maximale Temperaturdifferenz sehr stark von der Thermokraft  $S_\perp$  abhängt, da eine quadratische Abhängigkeit vorliegt.



**Abbildung 44:** Temperaturdifferenz  $\Delta T_{max}$  in Abhängigkeit von  $S_\perp$ .

Der berechnete Verlauf  $\Delta T_{max}(S_\perp)$  in Abb. 44 bestätigt den Zusammenhang zwischen den gemessenen Temperaturdifferenzen der Proben und den dazugehörigen senkrechten Thermokräften  $S_\perp$ . So weist Probe 1 mit der kleinsten Thermokraft  $S_\perp$  auch die kleinste Temperaturdifferenz auf. Bei Probe 2 mit der größten Temperaturdifferenz wurde auch die größte senkrechte Thermokraft  $S_\perp$  gemessen. Kleine Abweichungen des Zusammenhangs zwischen den senkrechten Thermokräften und den gemessenen Temperaturdifferenzen der Proben lassen sich durch die anderen leicht variierenden Transporteigenschaften, die ebenfalls in die Gleichung mit einwirken, erklären.

Herkömmliche Peltierelemente aus n und p Bismuttellurid liefern Temperaturdifferenzen von über 50K, dies liegt jedoch zum Teil daran, dass hier Bismuttellurid mit einer höheren Thermokraft verwendet wurde. Außerdem erhält man laut Rechnungen für eine Materialkombination aus Metall und Halbleiter ein

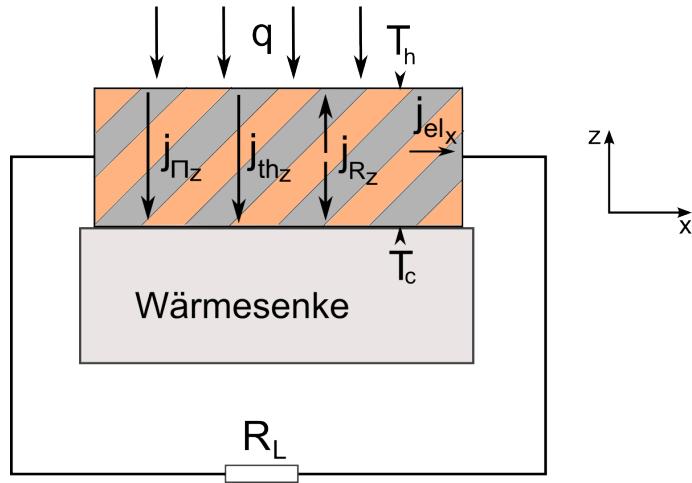
kleineres  $\Delta S$  und somit auch eine kleinere Temperaturdifferenz als für Strukturen aus einem n und p Halbleiter, da Metalle eine sehr kleine Thermokraft besitzen. Die Thermokräfte von n und p Halbleitern hingegen unterscheiden sich in ihrem Vorzeichen. Dadurch entsteht ein größeres  $\Delta S$ , sofern die n und p Halbleiter in ihren elektrischen Leitfähigkeiten voneinander abweichen. Um Multilagenstrukturen mit dieser Materialkombination herzustellen, muss also die Leitfähigkeit des einen Halbleiters geändert werden. Außerdem ist das Problem der Verbindung dieser beiden Materialien noch nicht gelöst.

Die zukünftige Aufgabe wird sein neue interessante Materialkombinationen zu testen und den „figure of merit“ weiter zu erhöhen, indem man versucht die Materialeigenschaften in geeigneter Weise zu verändern.

## 6 Leistungsgeneration in verkippten Blei-Bismuttellurid-Multilagenstrukturen

### 6.1 Berechnung der Leistung und des Wirkungsgrades

In diesem Kapitel wird untersucht, ob und mit welcher Effizienz man in einer verkippten Multilagenstruktur aufgrund einer anisotropen Thermokraft [54] elektrische Leistung generieren kann. Für diese Untersuchungen wird die lange Probe, wie sie bei den Messungen zum Peltier-Effekt in Kap. 5 verwendet wurde, gewählt. Der schematische experimentelle Aufbau ist in Abb. 45 gezeigt.



**Abbildung 45:** Versuchsaufbau zur Leistungsgeneration. Der Probenoberseite wird die Wärmestromdichte  $q$  zugeführt, die Unterseite wird mit Hilfe einer Wärmesenke gekühlt, dies führt zu einer Temperatur  $T_h$  auf der Oberseite der Probe und zu einer Temperatur  $T_c$  auf der Unterseite. Durch die Wärmezufuhr wird in der Probe die Peltierwärmestromdichte  $j_{\Pi z}$  erzeugt, falls ein geschlossener Stromkreis vorliegt. Aufgrund von Wärmeleitung tritt eine Wärmestromdichte  $j_{thz}$  auf. Die Joulsche Wärmestromdichte wird durch  $j_{Rz}$  bezeichnet. Durch den Peltierwärmestrom wird ein elektrischer Strom  $j_{elx}$  generiert.  $R_L$  bezeichnet den Lastwiderstand.

Bei der Leistungsgeneration wird der transversale Seebeck-Effekt zur Stromerzeugung genutzt. Es wird eine Temperaturdifferenz zwischen Probenober- und

Unterseite erzeugt, indem der Probenoberseite die Wärmestromdichte  $q$  zugeführt wird. Die Probenunterseite wird an eine Wärmesenke gekoppelt und somit auf konstanter Temperatur gehalten. Dadurch wird ein Temperaturgradient  $\vec{\nabla}T = \nabla_z T \hat{z}$  erzeugt. Es entsteht eine Peltierwärmestromdichte  $T_h S_{zx} j_{el_x}$  und eine Wärmestromdichte  $\lambda_{zz} \nabla T = \lambda_{zz} \frac{\Delta T}{d}$  aufgrund von Wärmeleitung, wobei  $\Delta T = T_h - T_c$  ist. Außerdem muss die entstehende Joulsche Wärmestromdichte  $d\rho_{xx}(j_{el_x})^2$  berücksichtigt werden. Man kann zeigen, dass sie zu gleichen Teilen an die Ober- bzw. Unterseite der Probe strömt [50]. Für die an der warmen Probenseite zugeführte Wärmestromdichte  $q$  ergibt sich damit [36, 55]

$$q = T_h S_{zx} j_{el_x} + \lambda_{zz} \frac{\Delta T}{d} - \frac{1}{2} d \rho_{xx} (j_{el_x})^2. \quad (152)$$

Man benötigt einen Lastwiderstand  $R_L$ , an dem Leistung abgegriffen werden kann. Um die maximale Leistung zu erhalten, wählt man den Lastwiderstand genauso groß wie den Generatorwiderstand  $R_L = \rho_{xx} l / (bd)$ . Die nutzbare Leistung ergibt sich zu [36, 55]

$$W = \frac{U_G^2}{4R_L}, \quad (153)$$

wobei

$$U_G = E_x l = S_{xz} \frac{\Delta T}{d} l \quad (154)$$

die Leerlaufspannung beschreibt, welche durch den transversalen Seebeck-Effekt generiert wird [36, 55]. Aus Gl. 153 und 154 folgt

$$W = \frac{S_{xz}^2 \Delta T^2 l b}{4 \rho_{xx} d}. \quad (155)$$

Der Wirkungsgrad für diese Anordnung lässt sich berechnen durch den Quotient aus nutzbarer Leistung  $W$  und eingespeister Wärmeleistung  $P = qlb$ :

$$\begin{aligned}\eta &= \frac{W}{P} \\ &= \frac{S_{zx}^2 \Delta T^2}{4\rho_{xx}d} \left[ T_h S_{zx} j_{elx} + \lambda_{zz} \frac{\Delta T}{d} - \frac{d}{2} \rho_{xx} (j_{elx})^2 \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (156)$$

Um den maximalen Wirkungsgrad zu berechnen, benötigt man die durch den Lastwiderstand bestimmte Stromdichte  $j_{elx} = U_G/(2l\rho_{xx})$  [36, 55], sowie die aus Gl. 154 hervorgehende Formel  $\Delta TS_{zx} = U_G d/l$ . Setzt man dies in Gl. 156, erhält man für den maximalen Wirkungsgrad

$$\begin{aligned}\eta_{max} &= \frac{S_{zx}^2 \Delta T^2}{4\rho_{xx}d \left[ T_h S_{zx} \frac{\Delta TS_{zx}}{2d\rho_{xx}} + \lambda_{zz} \frac{\Delta T}{d} - \frac{d}{2} \rho_{xx} \frac{\Delta T^2 S_{zx}^2}{4d^2 \rho_{xx}^2} \right]} \\ &= \frac{\Delta T}{\frac{4\rho_{xx}\lambda_{zz}}{S_{zx}^2} + 2T_h - \frac{\Delta T}{2}} = \frac{\Delta T}{\frac{4}{Z} + 2T_h - \frac{\Delta T}{2}}. \end{aligned} \quad (157)$$

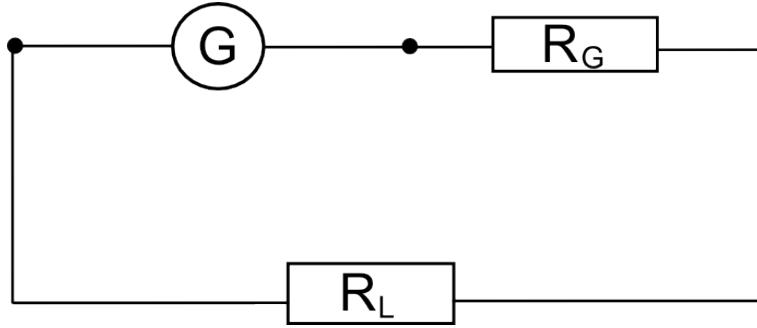
Dabei ist  $Z = S_{zx}^2/(\lambda_{zz}\rho_{xx})$  der „figure of merit“ der Leistungsgeneration. Der „figure of merit“ der Leistungsgeneration entspricht demjenigen des transversalen Peltier-Effekts. Für den transversalen Seebeck-Effekt wurde der Wirkungsgrad erstmals bestimmt.

Der Wirkungsgrad und die erzeugte Leistung hängen vom Quotienten  $a$  aus Lastwiderstand und Generatorwiderstand ab

$$a = \frac{R_L}{R_G}. \quad (158)$$

Im folgenden Abschnitt werden die Auswirkungen dieses Verhältnisses dargestellt. Wie bereits erwähnt, erwartet man für  $R_L = R_G$  bzw. für  $a = 1$  die größte generierte Leistung (siehe Abb. 47). Abb. 46 zeigt ein Ersatzschaltbild, um die Abhängigkeit der erzeugten Leistung  $W$  vom Verhältniskoeffizienten  $a$  darstellen zu können.

Mit Hilfe des Ohmschen Gesetzes kann der Strom in diesem Stromkreis berechnet werden zu



**Abbildung 46:** Ersatzschaltbild zur Leistungsgeneration.

$$I = \frac{U}{R} = \frac{U_G}{R_G + R_L}. \quad (159)$$

Für die erzeugte Leistung gilt:

$$W = I^2 \cdot R_L \quad (160)$$

Ersetzt man  $R_L$  durch Gl. 158 und die Stromstärke in Gl. 161 durch Gl. 159, so erhält man

$$W = \frac{U_G^2 a R_G}{(R_G + a R_G)^2} = \frac{U_G^2 a}{R_G (1 + a)^2}. \quad (161)$$

Um nun die Leistung, die am Lastwiderstand abgegriffen werden kann, bestimmen zu können, benötigt man die Leerlaufspannung  $U_G$  und den Generatorwiderstand  $R_G$ . Die Leerlaufspannung ist in Gl. 154 bereits angegeben. Die darin enthaltene Thermokraft kann noch genauer angegeben werden. Dazu setzt man den Tensoreintrag aus dem Seebecktensor aus Gl. 88 ein. Für die Thermokräfte senkrecht und parallel zur Schichtung benötigt man die Gln. 75 und 65 und es ergibt sich für die Leerlaufspannung

$$U_G = \frac{1}{2} \left( \frac{S_A \sigma_A + p S_B \sigma_B}{\sigma_A + p \sigma_B} - \frac{S_A \lambda_B + p S_B \lambda_A}{\lambda_B + p \lambda_A} \right) \sin(2\alpha) \frac{\Delta T}{d} l. \quad (162)$$

Für den Generatorwiderstand gilt:

$$R_G = \rho_{xx} \frac{l}{bd}. \quad (163)$$

Dabei ist  $l$  die Länge und  $bd = A$  die durchströmte Fläche der Probe.  $\rho_{xx}$  wird auf dieselbe Weise berechnet wie  $S_{zx}$  mit Hilfe der Gln. 89, 69 und 57. Damit wird der Generatorwiderstand zu

$$R_G = \left( \frac{\rho_A \rho_B (1 + p)}{\rho_B + p \rho_A} \cdot \cos^2 \alpha + \frac{\rho_A + p \rho_B}{1 + p} \cdot \sin^2 \alpha \right) \frac{l}{bd}. \quad (164)$$

Die beiden Gleichungen für  $U_G$  und  $R_G$  sind nur noch von den Materialeigenschaften, den Probenabmessungen, dem Kippwinkel und dem Temperaturunterschied abhängig und können daher leicht berechnet werden. Man wählt für die Probenabmessungen  $l = 2\text{cm}$ ,  $b = 0,4\text{cm}$ ,  $d = 1\text{cm}$ , für den Kippwinkel  $\alpha = 25^\circ$  und für den Temperaturunterschied  $\Delta T = 100K$ . Die benötigten Materialeigenschaften sind in Tab. 10 (siehe auch Kap. 4.3.1) angegeben.

**Tabelle 10:** Transporteigenschaften von Blei und Bismuttellurid [44](vgl. Tab. 3).

Material	$\lambda[\frac{\text{W}}{\text{mK}}]$	$\sigma[\frac{1}{\Omega\text{m}}]$	$\rho[\Omega\text{m}]$	$S[\frac{\mu\text{V}}{\text{K}}]$
Pb	$35^a$	$5 \cdot 10^{6a}$	$2 \cdot 10^{-7a}$	$\approx 0^a$
$\text{Bi}_2\text{Te}_3$	$2,3^b$	$10^{5c}$	$10^{-5}$	$145^d$

<sup>a</sup> Referenz: [45]

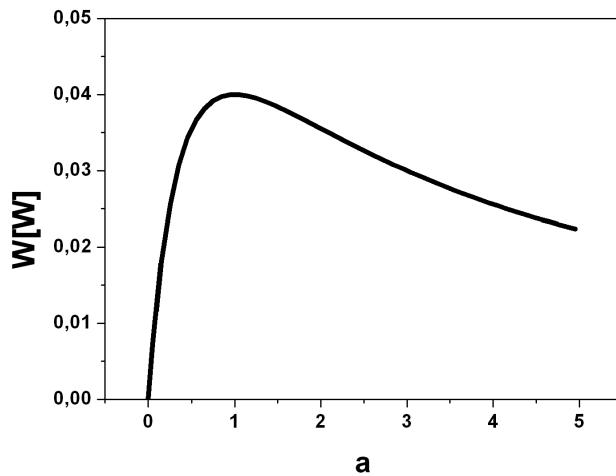
<sup>b</sup> Referenz: [46]

<sup>c</sup> Referenz: [47]

<sup>d</sup> Referenz: [48]

Damit berechnet man für die Leerlaufspannung einen Wert  $U_G = 0,01V$  und für den Generatorwiderstand  $R_G = 0,62m\Omega$ . Setzt man diese Werte in Gl. 161 ein, so erhält man die erzeugte Leistung in Abhängigkeit von a:

$$W = 0,16 \frac{V^2}{\Omega} \frac{a}{(1 + a)^2}. \quad (165)$$

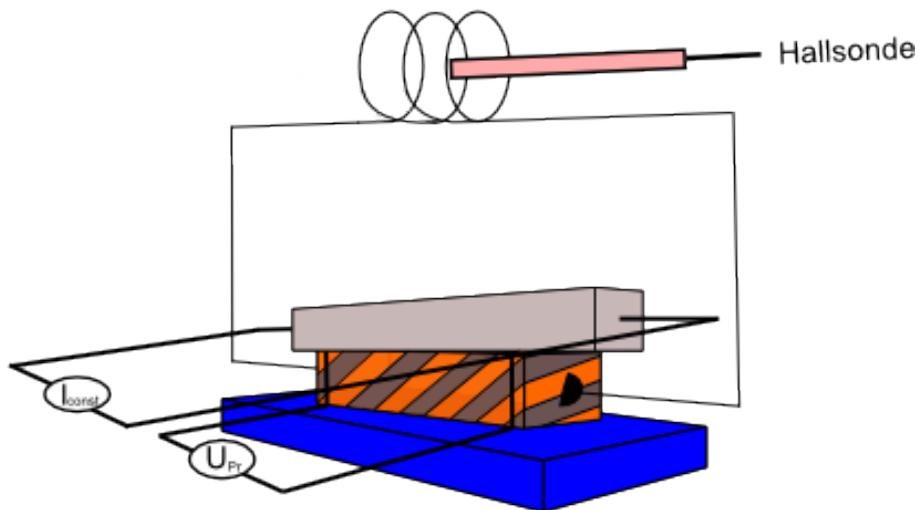


**Abbildung 47:** Berechnete Abhängigkeit der generierten Leistung vom Verhältnis der Widerstände  $a = \frac{R_L}{R_G}$ .

Graphisch dargestellt ergibt Gl. 165 Abb. 47. Die maximale Leistung von ca.  $0,04W$  erhält man für  $a = 1$  bzw. für  $R_L = R_G$ . Bei einem Lastwiderstand der viermal so groß ist wie der Generatorwiderstand nimmt die Leistung um 33% ab. Die Wahl des Lastwiderstandes hat also Einfluss auf die generierte Leistung.

## 6.2 Messungen der Leistung und des Wirkungsgrades

Im letzten Kapitel wurden die Berechnungen für die Leistungsgeneration einer verkippten Multilagenstruktur dargestellt. Nun werden die dazugehörigen Messungen behandelt. Es wird zwischen Probenober- und Unterseite ein Temperaturunterschied mit Hilfe eines Heizwiderstandes erzeugt (siehe Abb. 48). Die Unterseite der Probe ist an eine Wärmesenke, in diesem Fall an einen Kupferblock gekoppelt. Durch diese Temperaturdifferenz wird aufgrund des transversalen Seebeck-Effekts in der Probe ein Thermostrom erzeugt. Wie bereits im letzten Kapitel diskutiert, muss der Generatorwiderstand  $R_G$  dem Lastwiderstand  $R_L$  entsprechen, um die maximale Leistung zu erzielen. Da dieser sehr klein ist und damit der Innenwiderstand  $R_i$  eines Strommessgeräts zu groß ist, um den Thermostrom damit zu messen, wird er mit Hilfe einer Hallsonde über das vom Strom verursachte Magnetfeld bestimmt. An die Probe wird ein Kupferdraht, welcher zu einer Spule ( $R_{Spule} = 0,75\text{cm}$ ,  $l_{Spule} = 2,4\text{cm}$ ) mit drei Windungen gewickelt wurde, angelötet. Durch diese Spule wird der generierte Strom über das Magnetfeld mit Hilfe einer Hallsonde gemessen.



**Abbildung 48:** Messaufbau für die Leistungsgeneration.

Der Zusammenhang zwischen Spulenfeld und Strom ist durch die folgende Relation gegeben:

$$B = \mu_0 \frac{nI_{Pr}}{\sqrt{l^2 + 4R^2}} \quad I_{Pr} = \frac{B\sqrt{l^2 + 4R^2}}{\mu_0 n}, \quad (166)$$

wobei B die magnetische Flussdichte,  $\mu_0$  die magnetische Feldkonstante, n die Anzahl der Windungen, l die Länge und R der Radius der Spule ist.

Bevor die Spule an die Probe gelötet wurde, wurde sie geeicht. Es wurde überprüft, ob über das gemessene B bei bekanntem Spulenstrom mit der Gl. 166 derselbe Strom wieder erhalten wird. Mit den Abmessungen der Spule ergibt sich aus Gl. 166

$$I_{berechnet} = B \frac{\sqrt{(2,4cm)^2 + 4(0,75cm)^2}}{4\pi 10^{-7} \frac{Vs}{Am} 3}. \quad (167)$$

In Tab. 11 werden die eingespeiste Stromstärke und die aus der Gl. 167 berechnete verglichen. Man erkennt, dass die beiden Werte sehr gut übereinstimmen.

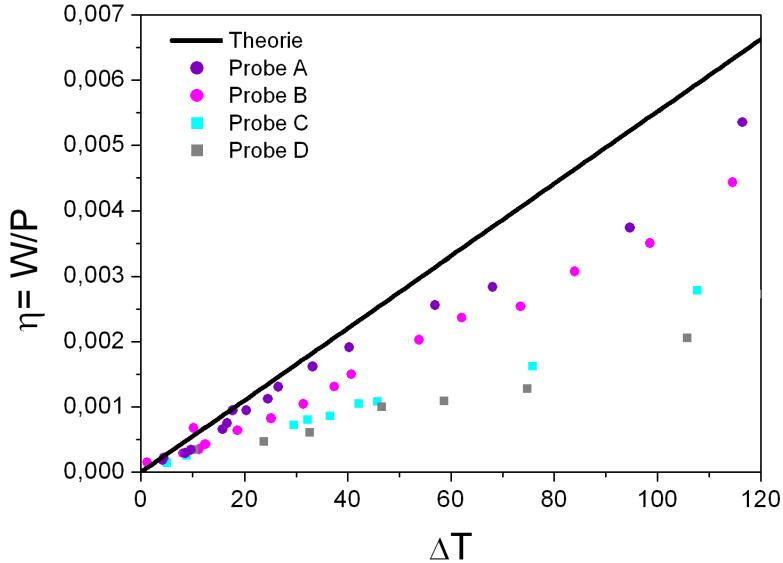
**Tabelle 11:** Eichung der Spule.

$B[mT]$	$I_{eingespeist}[A]$	$I_{berechnet}[A]$
0,06	0,45	0,45
0,09	0,65	0,67
0,12	0,86	0,90
0,14	1,01	1,05
0,16	1,21	1,20
0,20	1,52	1,50

Die von der Probe erzeugte Thermospannung  $U_{Pr}$  wird über die an der Probe angebrachten Spannungsdrähte (siehe Abb. 48) bestimmt. Dadurch lässt sich die erzeugte Leistung  $W = U_{Pr}I_{Pr}$  und der Wirkungsgrad  $\eta = \frac{W}{P}$  angeben.

Durch Variation des Stroms durch den Heizwiderstand ändert sich die eingebrachte Leistung P und somit auch die generierte Leistung W. Die eingebrachte Leistung P wird durch die Heizleistung des Heizwiderstands bestimmt, wobei angenommen wird, dass die Leistung vollständig an die Probe abgegeben wird.

Die Abmessungen der verwendeten Proben sind in Tabelle 12 gezeigt.



**Abbildung 49:** Wirkungsgrad für die transversale thermoelektrische Leistungsgeneration in Abhängigkeit von der Temperaturdifferenz für verschiedene Proben. Für nicht zu großes  $\Delta T$  zeigt sich ein linearer Verlauf (siehe Gl. 157).

Es wurden lange Proben mit  $l > d$  hergestellt (Proben A und B) und fast quadratische Proben mit  $l \approx d$  (Proben C und D). Die Breite  $b$  der Proben variiert von 3,8 bis 5mm.

Da die Probe nach dem Herstellungsprozess für Stapel 2 (vgl. Tab. 1) die größte senkrechte Thermokraft lieferte, wurden für die Leistungsgeneration Proben entsprechend diesem Herstellungsverfahren verwendet (siehe Kap. 4.1).

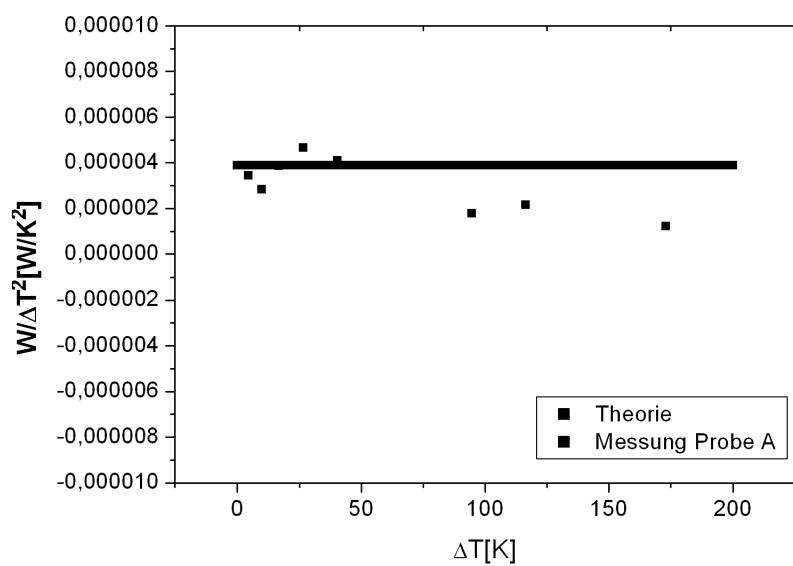
In Abb. 49 ist der experimentell ermittelte Wirkungsgrad  $\eta = \frac{W}{P}$  für verschiedene Proben in Abhängigkeit von der Temperaturdifferenz  $\Delta T = T_h - T_c$  zwischen Probenober- und Unterseite dargestellt. Zusätzlich zu den experimentellen Werten wird auch der theoretische Wirkungsgrad  $\eta_{max} = \frac{\Delta T}{\frac{4}{Z} + 2T_h - \frac{\Delta T}{2}}$  (siehe Gl. 157) gezeigt. Zur Berechnung von  $Z = \frac{S_{zx}^2}{\rho_{xx}\lambda_{zz}}$  wurden die in Tab. 10 angegebenen Transporteigenschaften verwendet. Man sieht in Abb. 49, dass sich die Messwerte der Proben A und B dem berechneten Kurvenverlauf annähern, wobei die kürzeren Proben C und D einen kleineren Wirkungsgrad aufweisen. Der

**Tabelle 12:** Probenabmessungen.

	Abmessungen $l \times b \times d$ in mm
Probe A	$17,8 \times 5 \times 11$
Probe B	$28 \times 4,3 \times 9$
Probe C	$10,3 \times 3,8 \times 12$
Probe D	$11 \times 4,9 \times 12,5$

Rückgang des Wirkungsgrades für einen abnehmenden  $l/d$ -Wert der Proben stimmt mit den Berechnungen des „figure of merit“ für kurze Proben überein (vgl. Kap. 5.2) [36, 55]. Vorläufige Rechnungen lassen erwarten, dass für verkippte  $Pb - Bi_2Te_3$  Multilagenstrukturen mit  $l \ll d$  ein kleinerer „figure of merit“ zu einem kleineren Wirkungsgrad führt als für lange Proben. Die Abweichung der Messpunkte für jede einzelne Probe vom linearen Verlauf, liegt an einer möglicherweise nicht optimalen Ankopplung des Heizwiderstands an die Probe. Der Fehler der verwendeten Geräte liegt im Prozentbereich und trägt daher nicht wesentlich zur Messgenauigkeit bei.

Die Leistung  $W$  wurde bereits in Gl. 155 berechnet zu  $W = \frac{S_{zx}^2 \Delta T^2 bl}{4\rho_{xx}d}$ . Stellt man  $\frac{W}{\Delta T^2} = \frac{S_{zx}^2 bl}{4\rho_{xx}d}$  in Abhängigkeit von  $\Delta T$  dar, so erhält man eine Konstante (siehe Abb. 50). Diese Konstante wurde für die Transportdaten von Blei und Bismuttellurid aus Tab. 10 für Probe A (Tab. 12) berechnet (Linie in Abb. 50). Die schwarzen Punkte zeigen die Messwerte für Probe A. Abb. 50 zeigt, dass die erzeugte Leistung gut mit den theoretischen Berechnungen übereinstimmt. In diesem Kapitel wurde die Generation elektrischer Leistung durch den transversalen Seebeck-Effekt modellmäßig beschrieben und experimentell untersucht. Es deutet sich an, dass die „figures of merit“ aufgrund anisotroper Thermokraft in Metall-Halbleiter Multilagenstrukturen etwas kleiner sind als in konventionellen Thermoelementen [56], welche aus n- und p-Typ Halbleitermaterialien hergestellt werden. Diese Thermoelemente weisen einen „figure of merit“ von ca.  $2 \cdot 10^{-3} 1/K$  auf [25]. Die kompakte Probenstruktur und die leicht zugängliche kalte und warme Probenseite wirken sich jedoch vorteilhaft gegenüber den herkömmlichen Thermoelementen aus.



**Abbildung 50:** Darstellung von  $W/(\Delta T)^2$ .



## 7 Zusammenfassung

Diese Arbeit brachte neue interessante Ergebnisse hervor. Es wurden anisotrope Multilagenstrukturen aus einem Leitermaterial A und einem Halbleitermaterial B künstlich hergestellt. Daraus wurden verkippte Proben präpariert und die durch den transversalen Peltier-Effekt erzeugten Temperaturdifferenzen senkrecht zur Stromrichtung untersucht. Des Weiteren wurde geprüft, wie gut sich diese Strukturen als thermoelektrische Generatoren eignen.

Um die für die Arbeit nötigen Grundkenntnisse zu erhalten, wurde zunächst der Seebeck-Effekt und der Peltier-Effekt in isotropen Materialien behandelt. Da es sich bei den verwendeten Proben jedoch um anisotrope Strukturen handelt, wurden die thermoelektrischen Effekte auch für diese Strukturen beschrieben. Die Transporteigenschaften wurden zunächst senkrecht und parallel zu den Schichten der Multilagenstruktur berechnet. Anschließend wurden sie für verkippte Strukturen ermittelt.

In dieser Arbeit wurden Multilagenstrukturen aus Blei und Bismuttellurid untersucht, da sich diese Materialkombination als besonders effizient herausstellte. Die Blei- und Bismuttelluridschichten wurden durch eine thermische Behandlung in einem Hochtemperatur-Rohrfen verbunden. Die Proben wurden durch drei unterschiedliche Verfahren hergestellt. Diese unterscheiden sich durch die Temperaturen, bei denen sie gefertigt wurden. Anschließend wurden verkippte Proben präpariert.

Die Messungen der Transporteigenschaften ergaben eine gute Übereinstimmung mit den berechneten Werten. Es wurde die Wärmeleitfähigkeit, die elektrische Leitfähigkeit und die Thermokraft für drei verschiedene Proben gemessen und mit den berechneten Werten verglichen.

An den verkippten Proben wurde der transversale Peltier-Effekt beobachtet. Hierbei wurden maximale Temperaturdifferenzen von bis zu 13K erreicht. Die durch den transversalen Peltier-Effekt erzielbaren Temperaturdifferenzen und Kühleffizienzen wurden außerdem mit Hilfe eines Wärmetransportmodells berechnet und mit den experimentellen Ergebnissen verglichen. Zwischen berechneten und experimentellen Werten ergab sich eine gute Übereinstimmung.

In einem weiteren Teil der Arbeit wurde untersucht, ob sich verkippte Proben als Leistungsgeneratoren eignen. Durch Widerstandsheizung wurde eine Tem-

peraturdifferenz zwischen Probenober- und Unterseite hergestellt. Hierdurch wurde mit Hilfe des transversalen Seebeck-Effekts ein elektrischer Strom senkrecht zum Temperaturgradienten erzeugt. Es wurde erstmals der Wirkungsgrad dieses Generators experimentell ermittelt. Der Wirkungsgrad wurde für verschiedene Probengeometrien untersucht. Die Proben, bei denen die Länge im Vergleich zur Breite am größten war, lieferten die besten Ergebnisse. Zusätzlich wurde der Wirkungsgrad anhand des Wärmetransportmodells rechnerisch bestimmt. Die experimentellen Ergebnisse stimmen sehr gut mit den berechneten Werten überein.

## 8 Anhang: Messung von Temperaturunterschieden mit einem Thermoelement

Thermoelemente bieten eine Möglichkeit Temperaturunterschiede präzise zu messen. Ein Thermoelement besteht aus zwei verschiedenen Metallen. Ein Metalldraht aus Material A wird an beiden Enden mit jeweils einem Metalldraht aus Material B zusammengeschweißt (siehe Abb. 168). In dieser Arbeit wurden für die Materialien A und B Konstantan und Kupfer verwendet. Es sind jedoch auch andere Materialkombinationen möglich, wie z.B. Chrom und Nickel oder Platin und Rhodium.

Der Konstantandraht wird an beiden Enden mit Kupferdrähten verdrillt. Die verdrillte Stelle wird mit Hilfe einer Flamme erhitzt und es entsteht ein Tropfen in dem beide Materialien verschmelzen (siehe Abb. 51).

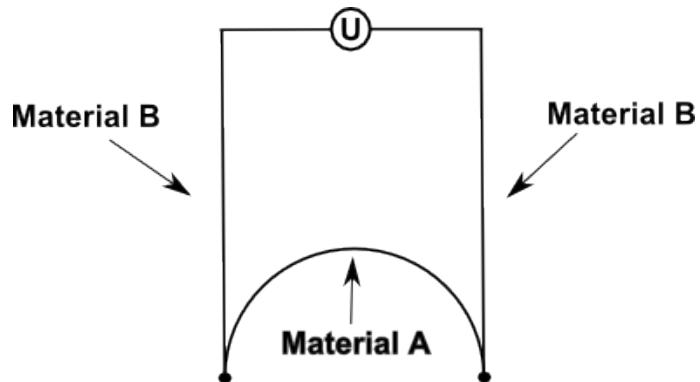


Abbildung 51: Thermoelement.

Besteht ein Temperaturunterschied zwischen diesen beiden Kontaktpunkten, so entsteht eine Thermospannung

$$U = |S_{Ko} - S_{Cu}| \cdot \Delta T = \left| -42 \frac{\mu V}{K} + 2 \frac{\mu V}{K} \right| \cdot \Delta T = (40 \frac{\mu V}{K}) \cdot \Delta T. \quad (168)$$

Wie aus der Formel zu sehen ist, lässt sich die gemessene Spannung so als Temperaturdifferenz angeben. Metalle haben im Normalfall einen temperaturabhängigen Seebeck-Koeffizienten. Deshalb muss berücksichtigt werden, dass der

Temperaturunterschied nur in einem Bereich gemessen werden kann, in dem der Seebeck-Koeffizient möglichst konstant bleibt. Diese Methode der Temperaturmessung wird bei Messungen angewandt, bei denen herkömliche Thermometer mit großen Temperaturlühlern der Probe zu viel Energie entziehen würden und so die Messung verfälschen würden.

## Literatur

- [1] L. R. Testardi. Appl. Phys. Lett. 64, 1994. 2347.
- [2] Q. Y. Li Y. Y. Luo Z. H. He, Z. G. Ma und J. X. Zhang. Appl. Phys. Lett. 69, 1996. 3587.
- [3] S. Zeuner H. Lengfellner K. F. Renk, J. Betz und W. Prettl. , Physica C 235, 1994. 37.
- [4] K. Goller H. Lengfellner P. G. Huggard, S. Zeuner und W. Prettl. J. Appl. Phys. 75, 1994. 616.
- [5] A. Schnellbögl J. Betz K. F. Renk W. Prettl H. Lengfellner, G. Kremb, *Giant voltages upon surface heating in normal  $YBa_2Cu_3O_{7-\delta}$  films suggesting an atomic layer thermopile.* Appl. Phys. Lett. 60, s.501, 1992.
- [6] J. Hutfless J. Betz S. Zeuner M. Kauf, S. Schuberth und H. Lengfellner. Laser Magazin 5, 1994. 12.
- [7] W. Prettl S. Zeuner und H. Lengfellner. Appl. Phys. Lett. 66, 1995. 1833.
- [8] H. Lengfellner S. Zeuner und W. Prettl. Phys. Rev. B 51, 1995. 11903.
- [9] A. Kyarad und H. Lengfellner, *Al-Si multilayers A synthetic material with large thermoelectric anisotropy.* Appl. Phys. Lett. 85, S. 5613, 2004.
- [10] R. Förg Th. Zahner und H. Lengfellner. Appl. Phys. Lett. 73, 1998. 1361.
- [11] A. Kyarad und H. Lengfellner. Appl. Phys. Lett. 87, 2005. 182113.
- [12] Z. M. Dashevskii L. D. Dudkin E. K. Iordanishvilli V. I. Kaidanov N. V. Kolomoets O. M. Narva V. P. Babin, T. S. Gudkin und L. S. Stilbans. Sov. Phys. Semicond., Vol 8, No. 4, 1974.
- [13] E. K. Jordanishvilli T. S. Gudkin und E. E. Fiskind. Sov. Tech. Phys. Lett. 4(5), 1978.

- [14] D.K.C. MacDonald, *Thermoelectricity*. John Wiley & Sons, 1962.
- [15] R. D. Barnard, *Thermoelectricity in Metals and Alloys*. Taylor and Francis Ltd., 1972.
- [16] N. W. Ashcroft und N. D. Mermin, *Festkörperphysik*. Oldenbourg, München, 2007.
- [17] H. B. Callen, *Thermodynamics and an introduction to Thermostatistics*. John Wiley Sons, 1985. 2. Ausgabe.
- [18] R. Gross und A. Marx, *Das freie Elektronengas*. Garching, 2004.
- [19] S. M. Sze, *Physics of Semiconductor Devices*. John Wiley Sons, New York, 1981.
- [20] Ch. Kittel, *Einführung in die Festkörperphysik*. Oldenbourg, München, 1991.
- [21] H. Vogel, *Gerthsen Physik*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1995.
- [22] K. Froböse, *Der Peltier-Effekt*. <http://www.uni-konstanz.de/FuF/Physik/Jaeckle/papers/thermospannung/node2.html>, 1999.
- [23] S. Schaad, *Peltier-Element kurz erklärt*.  
[http://www.deltron.ch/produkte/peltier/Peltier – Element\\_kurz\\_erklaert\\_d.pdf](http://www.deltron.ch/produkte/peltier/Peltier – Element_kurz_erklaert_d.pdf), 2006.
- [24] P. A. Schroeder F. J. Blatt und C. L. Foiles, *Thermoelectric Power of Metals*. Premium Press, New York and London, 1976.
- [25] H. J. Goldsmid, *Applications of Thermoelectricity*. Butler and Tanner Ltd., New York and London, 1960.
- [26] D. Meschede C. Gerthsen, *Gerthsen Physik*. Springer Verlag, 2004. 2. Auflage.

- [27] G. Fritsch, *Transport*. Akademische Verlagsgesellschaft, Wiesbaden, 1979.
- [28] A. Kyarad H. Lengfellner K. Fischer, C. Stoiber. Appl. Phys. A 78, 2004. 323.
- [29] J. F. Nye, *Physical Properties of Crystals*. Oxford University Press, 1957.
- [30] P.A. Tipler, *Physik*. Spektrum Verlag, 1994.
- [31] W. Kleber, *Einführung in die Kristallographie*. Berlin Verlag Technik, 1970.
- [32] A. Stoffel, *Finite Elemente und Wärmeleitung*. Wiley VCH, 1992.
- [33] W. Prettl H. Lengfellner, S. Zeuner und K. F. Renk, *Thermoelectric Effect in Normal-State  $YBa_2Cu_3O_{7-\delta}$  Films*. Europhys. Lett. 25, 1994. S. 375.
- [34] G. Fischer, *Lineare Algebra*. Vieweg, 2002.
- [35] W. Nolting, *Grundkurs theoretische Physik*. Springer Verlag, Berlin, 1997.
- [36] C. Reitmaier, F. Walther, und H. Lengfellner, *Transverse Thermoelectric Devices*. Appl Phys A, 99, 2010. 717-722.
- [37] A. Kyarad und H. Lengfellner, *Al-Si multilayers a synthetic material with large thermoelectric anisotropy*. Appl. Phys. Lett. 85, 2004. 5613.
- [38] R. E. Smallman, *Modern Physical Metallurgy*. Butterworth Co Ltd., London, 1970.
- [39] A. G. Guy, *Elements of Physical Metallurgy*. Addison-Wesley Publishing Company, 1951.
- [40] M. Hansen, *Metallurgy and Metallurgical Engineering Series*.

- [41] V. Dietrich L. Engelmann G. Fanghänel Ch. Ernst H. Höhne R. Lenertat G. Liesenberg L. Meyer Ch. Pews-Hocke G. D. Schmidt R. Stamm K. Weber F. M. Becker, G. Boorts, *Formeln und Tabellen für die Sekundarstufe I und II*. Paetec, Ges. für Bildung und Technik, Berlin, 1999. 7. Auflage.
- [42] R+S Components GmbH, “Wärmeleitpaste.” <http://de.rs-online.com/web/search/searchBrowseAction.html?method=searchProductssearchTerm=217-3835x=45y=17>, August, 2009.
- [43] K. H. Hellwege, *Einführung in die Festkörperphysik*. Springer Verlag, 1994.
- [44] K. H. Hellwege, *Landolt-Börnstein: Numerical data and functional relationships in science and technology. Groupe III. Cristal and solid state physics*. Springer Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1981. Bd. 15a.
- [45] Landolt-Börnstein, *Crystal and Solid State Physics*. Springer, New York, 1982. Vol. 15, Pt. A, p. 9.
- [46] H. J. Goldsmid. Proc. Phys. Soc. London, 1955. Sect. B 69, 203.
- [47] H. J. Goldsmid. Proc. Phys. Soc. London 71, 1958. 633.
- [48] obtained from a measurement of the Seebeck-coefficient.
- [49] A. Kyarad und H. Lengfellner, *Transverse Peltier effect in tilted  $PbBi_2Te_3$  multilayer structures*. Appl. Phys. Lett., 89, 2006. 192103.
- [50] R. R. Heikes und R. W. Ure, *Thermoelectricity: Science and Engineering*. Interscience Publisher, New York, London, 1961.
- [51] H. J. Goldsmid, *Porous Thermoelectric Materials*. Materials, 2, 2009. 903-910.
- [52] G.S. Nolas, J. Sharp, und H.J. Goldsmid, *In Thermoelectrics: Basic Principles and New Materials Development*. Springer, Berlin, 2001. 8-12.

- [53] Thermalforce.de, *Wärmeleitmittel und Zubehör*.  
[http://www.thermalforce.de/de/product/  
waermeleitmittel\\_zubehoer/index.php?uid =  
f424da00ee049609fd2030a888e38a3e&ref =](http://www.thermalforce.de/de/product/waermeleitmittel_zubehoer/index.php?uid=f424da00ee049609fd2030a888e38a3e&ref=), 2009.
- [54] T. Zahner. S. Roderer Verlag, 2001.
- [55] C. Reitmaier, F. Walther, und H. Lengfellner, *Power Generation by the Transverse Seebeck Effect in Pb - Bi<sub>2</sub>Te<sub>3</sub> multilayers*. Appl. Phys. A 339, 2011. in press.
- [56] P. H. Egli, *Thermoelectricity*. John Wiley Sons, Inc., New York London, 1960.

## **Danksagung**

Ich möchte mich an dieser Stelle recht herzlich bei all denen bedanken, die mir geholfen haben diese Doktorarbeit zu verfassen.

Besonders bedanken möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr. Lengfellner, der mir dieses interessante Thema zur Verfügung gestellt hat. Die engagierte Betreuung hat entscheidend zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen.

Desweiteren möchte ich mich bei Franziska Walther bedanken, die mir bei den Messungen zur Seite stand.

Kristina Frank und Daniel Reich danke ich fürs Korrekturlesen meiner Arbeit. Bei den Lehrstuhltechnikern bedanke ich mich für die gute Zusammenarbeit und die Unterstützung in technischen Fragen.

Ein herzliches Dankeschön geht auch an die Mechanikwerkstatt, die auch oft nicht ganz einfache Aufträge immer zur vollsten Zufriedenheit ausführten. An dieser Stelle möchte ich mich auch bei Markus Hollnberger bedanken fürs Bleiwalzen und diverse andere Tätigkeiten.

Auch bei der Elektronikwerkstatt bedanke ich mich recht herzlich für die Geräte und die Materialien die mir zur Verfügung gestellt wurden.

Auch bei meinen Eltern möchte ich mich ganz herzlich bedanken, da sie mir mein Studium und damit auch meine Promotion ermöglicht haben.

Der deutschen Forschungsgemeinschaft danke ich für die finanzielle Unterstützung.