Rosemarie Rheinwald: *Der Formalismus und seine Grenzen. Untersuchungen zur neueren Philosophie der Mathematik*, 204 S., Hain Verlag (Reihe: Philosophie – Analyse und Grundlegung Bd. 11), Königstein/Ts. 1984.

Das Buch, deklariert als „Versuch einer systematischen Diskussion neuerer formalistischer und nominalistischer Tendenzen in der Philosophie der Mathematik" (11, 17), stößt in eine Forschungslücke. Mit „neueren Tendenzen" hebt Rosemarie Rheinwald insbesondere auf solche Entwicklungen ab, die nach der Rezeption der Gödelschen Sätze entstanden sind; damit geht die Darstellung schon über das hinaus, was üblicherweise als „Formalismus" in der mathematischen Grundlagentheorie diskutiert (nicht: vertreten) wird, nämlich Hilberts Programm. Dies ist zu begrüßen, da dieses Programm bekanntlich gescheitert ist und Hilbert eben *kein* Formalist im eigentlichen Sinne war (vgl. dazu 24 f.). Eine „systematische Diskussion" meint bei der Autorin ein erstens nicht-historisches und zweitens akribisch argumentierendes Vorgehen. Denn zum einen bieten sich keine jüngeren Zentralfiguren des Formalismus an, an denen eine historisch orientierte Betrachtung aufzuhängen wäre (wenn einem auch Bourbaki, Curry, Cohen und Robinson als exponierte Vertreter einfallen); und zum anderen tut dem Gestrüpp der zahlreichen Thesen formalistischen Anstrichs eine systematische Sichtung dringend not. Zu diesem Zweck unterteilt Rheinwald, nach einer einleitenden Begriffsbestimmung des Formalismus in Kapitel I, ihre Arbeit in vier Teile: im zweiten und dritten Kapitel werden die (tendenziell) formalistischen Positionen mit den Namen „Implikationismus" und „Modalismus" behandelt, im vierten und fünften Kapitel die (tendenziell) formalistischen Thesen „Konsistenz ist eine hinreichende Bedingung für Wahrheit und Existenz" bzw. „die Axiome einer Theorie sind implizite Definitionen (Konventionen, Postulate, nützliche Fiktionen)".

Kapitel I widmet sich der Frage, was denn „formal" sei am Formalismus, der zunächst nur negativ als Gegenposition zu Platonismus (Realismus) und Konstruktivismus mit „antiontologischer Stoßrichtung" (21) gekennzeichnet wird. Mit der Losung „Betonung der Form im Vergleich zum Inhalt" werden „Grade des Formalen" und die Bezugnahme dieses Schlagwortes auf Sprache, Ontologie (Nominalismus = Formalismus bzgl. der Ontologie) oder Methoden der Mathematik unterschieden. Diese Kreuzklassifikation kommt im weiteren aber nicht zum Tragen, umso entscheidender ist die folgende, laut Rheinwald für formalistische und nominalistische Standpunkte typische Antwort auf die Frage nach der Struktur mathematischer Aussagen: „Mathematische Aussagen sind Implikationsaussagen". Gemäß der Interpretation von „Implikation" als syntaktische, semantische oder notwendige (strikte) Folgerung kennzeichnet Rheinwald den syntaktischen und den semantischen Implikationismus und den Modalismus als (die wichtigsten?) Beispiele formalistischer Auffassungen.

Den Implikationismus charakterisiert die These, daß „p folgt aus T" (wobei p eine Formel und T eine axiomatisierte Theorie ist) die allgemeine Struktur mathematischer Aussagen sei. In der syntaktischen Lesart ist dies eine metatheoretische Existenzaussage („Es gibt einen Beweis von p in T."), in der semantischen Lesart eine Allaussage ohne Existenzverpflichtung („Alle Strukturen, welche die Axiome von T erfüllen, erfüllen auch p."). Zu kritisieren sind beide Versionen, wenn man – wie etwa für Konsistenz- und Unterscheidbarkeitsfragen nötig – auch negierte Implikationsaussagen als wahre mathematische Aussagen zulassen will. Der syntaktische Implikationist muß für eine geeignete Metatheorie eine realistische Theorie der Bedeutung mit einer Ontologie syntaktisch-linguistischer Entitäten anerkennen, während der semantische Implikationist zum Nachweis der Existenz eines bestimmten Modells sich auf ein Universum modelltheoretische Strukturen verpflichtet. Damit aber, so Rheinwald, werden streng formalistische Positionen definitiv verlassen.

Unter dem Titel „Modalismus" werden Ideen aus Putnams Artikel *Mathematics Without Foundations* untersucht. Zum Glück folgt Rheinwald nicht der „Pointe des Modalismus" (127), daß nämlich der Begriff der (logischen oder mathematischen) Notwendigkeit primitiv und grundlegend für mathematische Begriffe sei, sondern prüft die Plausibilität und Verallgemeinerbarkeit der Interpretation von „notwendig" als ableitbar (v. a. ableitbar in der Prädikatenlogik erster Stufe). Dabei markiert schon der Beweis von Gödels Unvollständigkeitstheorem die Grenze der Äquivalenzbehauptung von platonistischer und „modaler" Sehweise der Mathematik: es gibt einen intuitiv wahren zahlentheoretischen Satz der Form

„für alle x P(x)" mit primitiv rekursivem Prädikat P, der nicht beweisbar ist (in der elementaren Zahlentheorie). Versuche, dem Modalismus den Folgerungsbegriff in der Zahlentheorie zweiter Stufe zugrundezulegen, helfen entweder (in der syntaktischen Version) nicht aus der Unvollständigkeit heraus oder machen (in der semantischen Version) vom Begriff des Standardmodells Gebrauch und verlassen damit formalistische Gefilde.

War schon in diesen Kapiteln die Frage, ob eine Theorie mit einer intendierten Interpretation ausgestattet ist (d. h. ob es Standardmodelle gibt) oder nicht, des öfteren (besonders 59, 69, 96) entscheidend, so rückt sie bei der Beurteilung der oben angeführten Konsistenz- bzw. Definitionsthesen in den Kapiteln IV und V gänzlich in den Vordergrund. Auch bei diesen spezielleren Thesen kommt Rheinwald zu Schlußfolgerungen, die denen der ersten Kapitel entsprechen. Ohne hier auf Einzelheiten einzugehen, kann man Rheinwalds Fazit so formulieren: Formalistische Anschauungen sind, mit gewissen Einschränkungen, bezüglich Theorien ohne intendierte Interpretation vertretbar; hat man es aber – wie bei der Zahlentheorie plausibel und bei der Mengenlehre strittig (vgl. 158–162) – mit Theorien mit intendierter Interpretation zu tun, sind platonistische oder konstruktivistische Grundeinstellungen unumgänglich.

Gerade dieses Gewicht der Begriffe „intendierte Interpretation" und „Standardmodell", welche en passant eingeführt und kaum problematisiert werden, gibt Anlaß zu Kritik am Aufbau des Buches. Erst eine systematische Diskussion hätte Antwort etwa auf folgende Fragen geben können: Wie verträgt es sich mit dem Absolutheitsanspruch obiger Begriffe, daß Theorien die (eine?) intendierte Interpretation verlieren (durch Abstraktion) oder gewinnen (z. B. durch neubewiesene Theoreme) können? Wie verhalten sich Standardmodelle der Arithmetik zu Standardmodellen der Logik zweiter Stufe, wo „standard" „in einem etwas anderen Sinn ... benutzt wird" (129)? Oder im Zusammenhang mit Rheinwalds These, daß Theorien erster Stufe in gewissem Sinn gleichzusetzen seien mit Theorien ohne intendierte Interpretation (14, 151, 155): Wie ist zu erklären, daß es oft subtiler logischer Studien bedarf, um nachzuweisen, daß ein Begriff erster oder höherer Stufe ist? Und wie ist die (von Rheinwald nicht angesprochene, aber vielerseits akzeptierte) These Hilberts zu beurteilen, daß alle Annahmen, die der Mathematiker machen muß, in der ersten Stufe formalisierbar sind? (Für diese letzten beiden Fragen vgl. den Einführungsartikel von Barwise im *Handbook of Mathematical Logic.*) Sicher wäre Rheinwalds Intentionen eher gedient gewesen, wenn sie nach einer grundlegenden Unterscheidung von syntaktischen und semantischen Spielarten des Formalismus innerhalb der letzteren (nominalistische Ansichten über) intendierte Interpretationen von vornherein thematisiert hätte.

Eine weitere Einteilungsfrage: Es wird nicht klar, worin sich der Modalismus, für dessen Charakterisierung die Autorin Putnam mit „mathematics ... simply tells us what follows from what" zitiert (103), signifikant vom Implikationismus unterscheidet. Gleichgültig, ob man „notwendig" als allgemeingültig (103), als ableitbar in der Prädikatenlogik oder in der (Robinson-)Arithmetik (107–126), als ableitbar in einer „akzeptablen" Theorie (128 f.) oder als wahr (in allen Standardmodellen) (130 f.) interpretiert – interpretiert wird schließlich immer. Die modalen Begriffe sind mithin ohne eigene Leistung, haben bei Rheinwald wie bei Putnam offenbar Alibifunktion und tragen keineswegs zu größerer Klarheit bei.

Auf zwei Punkte sei noch hingewiesen. Zum einen wäre die wohl auf Curry zurückgehende These, daß eine inkonsistente Theorie für einen syntaktischen Implikationisten nicht unbedingt inakzeptabel sei (60 f.), mindestens einer ausführlicheren Begründung bedürftig. Zum anderen soll die Behauptung, „daß wir keine zahlentheoretische Aussage *im engeren Sinn* (d. h. in [der elementaren Zahlentheorie] N formalisierbare) kennen, von der wir glauben, daß sie weder in N noch auf informaler Ebene entscheidbar ist" (159), als Indiz für die Existenz genau eines Standardmodells der Arithmetik dienen – ein sehr schwaches Indiz, wenn man bedenkt, daß viele schon glauben, daß wir eine zahlentheoretische Aussage i. e. S. kennen, die weder in N noch auf informaler Ebene entscheidbar ist.

Daß das Gewirr formalistischer Thesen und Ismen nicht ganz in Ordnung gebracht werden konnte, mag am undankbaren Thema liegen. Rheinwalds Arbeit räumt jedenfalls mit zahlreichen Mißverständnissen und Vereinfachungen auf. Insbesondere wird deutlich, wie schwer eine konsequent formalistische Position durchzuhalten ist und wie häufig philosophische Anschauungen über die Mathematik in *ad hominem*-Argumenten fundiert sind. Unter Zuhilfenahme elementarer Beispiele hat Rosemarie Rheinwald explizit analysiert, was mancher Meinungsführer des Fachs mit beiläufigen Bemerkungen glaubt abtun zu können. Deshalb wird sich das Buch auch Philosophen ohne mathematische Erfahrung erschließen; daß die angesprochenen Grundlagenprobleme selbst für praktizierende Mathematiker wichtig sind und diese beeinflussen, hat ja schon Gödel betont.

Hans Rott, München