

# Einbettungsprobleme und Galoisstruktur lokaler Körper

Von *Uwe Jannsen* in Hamburg und *Kay Wingberg* in Berlin

Sei  $K/k$  eine endliche galoissche Erweiterung lokaler Körper mit Galoisgruppe  $G$ . Die multiplikative Gruppe  $K^*$  wird unter der Operation der Galoisgruppe zu einem  $G$ -Modul. Die Struktur und die Zerlegung dieses Moduls in unzerlegbare Bestandteile wurden von den Autoren für  $p$ -Erweiterungen  $p$ -adischer Zahlkörper in [11] und [4] untersucht. In der vorliegenden Arbeit soll gezeigt werden, daß das Zerlegungsverhalten mit der Lösbarkeit von Einbettungsproblemen zusammenhängt. Davon ausgehend sollen die Körpererweiterungen lokaler Körper charakterisiert werden, über denen jedes Einbettungsproblem eine Lösung besitzt.

## 1. Über das Einbettungsproblem lokaler Körper

Sei  $k$  ein Körper und  $K$  eine endliche galoissche Erweiterung von  $k$  mit Galoisgruppe  $G$ . Sei ferner  $\hat{k}$  der separable Abschluß von  $k$  und  $G_k = \text{Gal}(\hat{k}/k)$  die absolute Galoisgruppe von  $k$ . Unter einem Einbettungsproblem (EBP) für  $K/k$  mit Kern  $A$  versteht man das Diagramm

$$(*) \quad \begin{array}{ccccccc} & & & & G_k & & \\ & & & & \downarrow \varphi & & \\ 1 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & E & \xrightarrow{\varrho} & G \longrightarrow 1 \end{array}$$

von proendlichen Gruppen mit exakter Zeile, in dem  $\varphi$  die kanonische Surjektion von  $G_k$  auf  $G$  ist. Eine (eigentliche) Lösung dieses Einbettungsproblems ist ein (surjektiver) Homomorphismus  $\psi: G_k \rightarrow E$ , der das Diagramm kommutativ ergänzt. Die Existenz einer eigentlichen Lösung bedeutet also, daß eine galoissche Erweiterung  $L/K$  existiert mit  $L \cong K$  und  $E \cong \text{Gal}(L/k)$  derart, daß die kanonische Projektion  $\text{Gal}(L/k) \rightarrow \text{Gal}(K/k)$  mit dem Homomorphismus  $\varrho$  übereinstimmt. Wir zitieren das EBP (\*) im folgenden auch häufig durch die exakte Sequenz

$$1 \rightarrow A \rightarrow E \rightarrow G \rightarrow 1.$$

Eine befriedigende Theorie gibt es bisher nur für EBPe mit abelscher Gruppe  $A$ ; wir werden uns im folgenden auch auf diese beschränken. Ohne Einschränkung dagegen kann man  $A$  als endliche Gruppe annehmen, da man leicht zum projektiven Limes übergehen kann.

Grundlegend für das weitere ist folgender Satz von Hochschild [3], der für beliebige Körper gilt:

**Satz 1.1.** Sei  $A$  endlich abelsch und  $\varepsilon \in H^2(G, A)$  das Element, das der Gruppen-erweiterung

$$1 \rightarrow A \rightarrow E \rightarrow G \rightarrow 1$$

zugeordnet ist. Dann besitzt das EBP (\*) genau dann eine Lösung, wenn  $\varepsilon$  bei der von  $\varphi$  induzierten Inflation

$$\text{Inf}: H^2(G, A) \rightarrow H^2(G_k, A)$$

auf die Null abgebildet wird.

**Corollar 1.2.** Sei die endliche abelsche Gruppe  $A$  fest vorgegeben. Genau dann ist das EBP (\*) für jede Erweiterung von  $G$  mit  $A$  lösbar, wenn

$$\text{Inf}: H^2(G, A) \rightarrow H^2(G_k, A)$$

die Nullabbildung ist.

Sei nun  $k$  ein lokaler Körper, also im Fall, daß die Charakteristik von  $k$  null ist, ein  $p$ -adischer Zahlkörper, andernfalls der Körper der formalen Potenzreihen in einer Variablen mit Koeffizienten im Restklassenkörper. Man erhält aus dem lokalen Dualitätssatz von Tate (siehe z.B. [9]) folgenden, in etwas anderer Form ebenfalls von Hochschild stammenden Satz:

**Satz 1.3.** Sei  $k$  ein lokaler Körper,  $A$  ein endlicher  $G_k$ -Modul,  $\mu$  die Gruppe aller in  $\hat{k}$  enthaltenen Einheitswurzeln und  $\hat{A} = \text{Hom}(A, \mu)$  der Dualmodul von  $A$ . Sei ferner  $X = H^0(G_k, \hat{A}) = \text{Hom}_{G_k}(A, \mu)$  die Gruppe aller  $G_k$ -Homomorphismen von  $A$  in  $\mu$ . Dann ist die Abbildung

$$\prod_{\chi \in X} \chi^*: H^2(G_k, A) \hookrightarrow \prod_{\chi \in X} H^2(G_k, \mu),$$

die von den  $\chi: A \rightarrow \mu$  induziert wird, injektiv.

*Beweis.* Für  $\text{Char } k = p > 0$  ist die kohomologische  $p$ -Dimension  $\text{cd}_p G_k \leq 1$  ([9], II 2. 2.) und daher gilt  $H^2(G_k, A) = 0$  für einen  $p$ -primären Modul  $A$ . Wir können also annehmen, daß  $\text{Char } k$  die Ordnung von  $A$  nicht teilt. Nach dem Dualitätssatz gibt es dann für ein  $\varepsilon \in H^2(G_k, A)$ ,  $\varepsilon \neq 0$ , ein  $\chi \in H^0(G_k, \hat{A})$  mit  $\varepsilon \cup \chi \neq 0$ . Es gilt aber gerade  $\varepsilon \cup \chi = \chi^*(\varepsilon)$ , wenn  $\chi^* = H^2(G_k, \chi)$  die von  $\chi$  induzierte Abbildung bezeichnet.

Das folgende Lemma ergibt sich leicht aus der Galoiskohomologie.

**Lemma 1.4.** *Sei  $k$  ein lokaler Körper,  $\mu$  die Gruppe aller in  $\hat{k}$  enthaltenen Einheitswurzeln,  $\mu_n$  die Untergruppe der  $n$ -ten Einheitswurzeln in  $k$  (ohne Einschränkung gelte  $\text{Char}(k) \nmid n$ ), dann sind für  $n \mid m$  die von den Inklusionen  $\mu_n \subseteq \mu_m \subseteq \mu \subseteq \hat{k}^*$  induzierten Abbildungen*

$$H^2(G_k, \mu_n) \hookrightarrow H^2(G_k, \mu_m) \hookrightarrow H^2(G_k, \mu) \hookrightarrow H^2(G_k, \hat{k}^*)$$

injektiv, weiter ist für eine endliche separable Erweiterung  $K/k$  die Corestriktion

$$\text{Cor: } H^2(G_K, \mu_n) \xrightarrow{\sim} H^2(G_k, \mu_n)$$

ein Isomorphismus.

Für einen lokalen Körper  $K$  sei mit  $\mu_K$  die Gruppe der in  $K$  enthaltenen Einheitswurzeln bezeichnet. Der folgende Satz ist grundlegend für die weiteren Untersuchungen:

**Satz 1.5.** *Sei  $K/k$  eine galoissche Erweiterung lokaler Körper mit Galoisgruppe  $G$ , dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

- a) Für  $K/k$  ist jedes EBP (\*) mit abelschem Kern  $A$  lösbar.
- b) Für alle endlichen  $G$ -Moduln  $A$  ist  $\text{Inf}: H^2(G, A) \rightarrow H^2(G_k, A)$  trivial.
- c)  $\text{Inf}: H^2(G, \mu_K) \rightarrow H^2(G_k, \mu_K)$  ist trivial.
- d) Die von der Inklusion  $\mu_K \subseteq K^*$  induzierte Abbildung  $H^2(G, \mu_K) \rightarrow H^2(G, K^*)$  ist trivial.
- e) Für  $K/k$  ist jedes EBP (\*) mit  $A \cong \mu_K$  lösbar.

*Beweis.* Die Äquivalenz von a) und b) bzw. c) und e) folgt aus Satz 1.1. oder Corollar 1.2; c) folgt trivial aus b). Sei umgekehrt  $A$  ein endlicher  $G$ -Modul, dann ist folgendes Diagramm kommutativ

$$\begin{array}{ccc} \prod_{\chi \in X} \chi^*: H^2(G_k, A) & \hookrightarrow & \prod_{\chi \in X} H^2(G_k, \mu) \\ \uparrow \text{Inf} & & \uparrow \text{Inf} \\ \prod_{\chi \in X} \chi^*: H^2(G, A) & \longrightarrow & \prod_{\chi \in X} H^2(G, \mu_K). \end{array}$$

Dabei ist  $X = H^0(G_k, \hat{A}) = \text{Hom}_{G_k}(A, \mu) = \text{Hom}_G(A, \mu_K)$ . Wenn nun c) gilt, ist die rechte Abbildung im Diagramm trivial, also auch die linke, da die obere Abbildung nach Satz 1.3. injektiv ist.

Die Äquivalenz von c) und d) folgt aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 H^2(G_k, \mu_K) & \hookrightarrow & H^2(G_k, \hat{k}^*) \\
 \uparrow \text{Inf} & & \uparrow \text{Inf} \\
 H^2(G, \mu_K) & \xrightarrow{\text{Cor}} & H^2(G, K^*),
 \end{array}$$

in dem die rechte Abbildung nach Klassenkörpertheorie und die obere nach Lemma 1. 4. injektiv ist.

**Corollar 1. 6.** Sei  $K/k$  eine zyklische Erweiterung lokaler Körper, dann ist genau dann jedes EBP (\*) mit abelschem Kern lösbar, wenn  $\mu_k \subseteq N_{K/k}(K^*)$  gilt.

*Beweis.* Nach der Kohomologie für zyklische Gruppen ist die Aussage d) aus dem vorherigen Satz äquivalent zur Trivialität der Abbildung

$$\mu_k / N_{K/k}(\mu_K) = \hat{H}^0(G, \mu_K) \rightarrow \hat{H}^0(G, K^*) = k^* / N_{K/k}(K^*)$$

mit den Tate'schen Kohomologiegruppen nullter Dimension.

Das Verhalten beim Übergang zu Zwischenkörpern ergibt sich aus

**Satz 1. 7.** Sei  $K/k$  eine endliche galoissche Erweiterung lokaler Körper und  $L$  ein Zwischenkörper,  $K \supseteq L \supseteq k$ . Wenn für  $K/k$  jedes EBP mit abelschem Kern lösbar ist, dann ist dies auch der Fall für  $K/L$  und, wenn  $L/k$  galoissch ist, auch für  $L/k$ .

*Beweis.* Sei  $G = \text{Gal}(K/k)$  und  $U = \text{Gal}(K/L)$ ; in dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 H^2(G_L, \mu_K) & \xleftarrow{\text{Cor}} & H^2(G_k, \mu_K) \\
 \uparrow \text{Inf} & & \uparrow \text{Inf} \\
 H^2(U, \mu_K) & \xrightarrow{\text{Cor}} & H^2(G, \mu_K)
 \end{array}$$

folgt wegen der Injektivität der oberen Corestriktion aus der Trivialität der rechten Abbildung auch die der linken. Dies liefert mit dem Kriterium c) aus Satz 1. 5. die erste Behauptung. Der Rest folgt ebenso aus dem kommutativen Quadrat

$$\begin{array}{ccc}
 H^2(G_k, \mu_L) & \hookrightarrow & H^2(G_k, \mu_K) \\
 \uparrow \text{Inf} & & \uparrow \text{Inf} \\
 H^2(G|U, \mu_L) & \xrightarrow{\text{Inf}} & H^2(G, \mu_K).
 \end{array}$$

q. e. d.

Sei  $p$  die Charakteristik des Restklassenkörpers von  $k$ . Für eine endliche galoissche Erweiterung  $K/k$  mit Galoisgruppe  $G$  ist der  $G$ -Modul  $\mu_K$  das direkte Produkt des zu  $p$  primen Teils  $\mu_K^0$  und der Gruppe  $\mu_K^p$  der Einheitswurzeln von  $p$ -Potenzordnung.

$$\mu_K = \mu_K^0 \times \mu_K^p.$$

Die Inflation spaltet sich daher auf in die Anteile

$$\text{Inf}_0: H^2(G, \mu_K^0) \rightarrow H^2(G_k, \mu_K^0), \quad \text{Inf}_p: H^2(G, \mu_K^p) \rightarrow H^2(G_k, \mu_K^p).$$

**Satz 1.8.**  $\text{Inf}_0$  ist genau dann die Nullabbildung, wenn  $K/k$  keinen rein-zahm-verzweigten Anteil enthält.

$\text{Inf}_p$  ist genau dann die Nullabbildung, wenn für eine  $p$ -Sylow-Gruppe  $G_p$  von  $G$ , deren Fixkörper mit  $K_p$  bezeichnet sei, die Abbildung

$$\text{Inf}: H^2(G_p, \mu_{K_p}^p) \longrightarrow H^2(G_{K_p}, \mu_{K_p}^p)$$

die Nullabbildung ist, d.h. wenn für  $K/K_p$  jedes EBP (\*) mit abelscher Gruppe  $A$  lösbar ist.

*Beweis.* Sei  $T$  der Trägheitskörper und  $V$  der Verzweigungskörper von  $K/k$  mit den Galoisgruppen  $G_0 = \text{Gal}(K/T)$  und  $G_1 = \text{Gal}(K/V)$ . Ist  $\text{Inf}_0$  die Nullabbildung, so folgt wie in Satz 1.7., daß  $\text{Inf}: H^2(G_0/G_1, \mu_V^0) \rightarrow H^2(G_T, \mu_V^0)$  trivial ist. Da  $V/T$  zyklisch ist, gilt wie in Corollar 1.6.  $\mu_T^0 \subseteq N_{V/T}(V^*)$ , also ist die gesamte Einheitsgruppe von  $T$  in der Normengruppe von  $V/T$  enthalten. Dies bedeutet aber, daß  $V/T$  unverzweigt ist, also  $V=T$  gilt. Sei umgekehrt  $V=T$ ; da  $G_1$  eine  $p$ -Gruppe ist, ist  $\mu_K^0 = \mu_V^0$  kohomologisch trivial unter  $G_1$ . Aus der Hochschild-Serre-Sequenz folgt daher, daß in dem kommutativen Dreieck

$$\begin{array}{ccc} & & H^2(G_k, \mu_K^0) \\ & \nearrow \text{Inf} & \uparrow \text{Inf}_0 \\ H^2(G/G_1, \mu_K^0) & \xrightarrow[\sim]{\text{Inf}} & H^2(G, \mu_K^0) \end{array}$$

die untere Abbildung ein Isomorphismus ist. Da  $G/G_1 = G/G_0$  zyklisch ist und  $\mu_K \subseteq N_{T/k}(T^*)$  gilt, folgt aus Corollar 1.6. die Trivialität der linken Abbildung, also auch die der rechten. Die zweite Aussage des Satzes folgt aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H^2(G_{K_p}, \mu_K^p) & \xrightarrow{\text{Cor}} & H^2(G_k, \mu_K^p) \\ \uparrow \text{Inf} & & \uparrow \text{Inf}_p \\ H^2(G_p, \mu_K^p) & \xrightarrow{\text{Cor}} & H^2(G, \mu_K^p) \end{array}$$

in dem die untere Abbildung surjektiv und die obere Abbildung nach Lemma 1.4. injektiv ist. Der Zusatz ergibt sich aus Satz 1.5.

Ein  $p$ -adischer Zahlkörper über  $\mathbb{Q}_p$  heißt regulär, wenn er die  $p$ -ten Einheitswurzeln nicht enthält, und sonst irregulär.

**Satz 1.9.** Sei  $K/k$  eine endliche galoissche Erweiterung lokaler Körper. Gilt  $\text{Char } k = p > 0$  oder ist  $K$  ein regulärer  $p$ -adischer Zahlkörper, so ist genau dann jedes EBP (\*) mit abelschem Kern  $A$  lösbar, wenn  $K/k$  keinen rein-zahmverzweigten Anteil enthält.

*Beweis.* In beiden Fällen gilt  $\mu_k^p = \{1\}$ .

Wegen Satz 1.8 und Satz 1.9. können wir uns bei den folgenden Untersuchungen auf  $p$ -Erweiterungen irregulärer  $p$ -adischer Zahlkörper beschränken.

## 2. $p$ -Erweiterungen irregulärer $p$ -adischer Zahlkörper

Sei  $k$  ein irregulärer  $p$ -adischer Zahlkörper mit Irregularitätsexponenten  $s \geq 1$  und vom Grad  $n$  über  $\mathbb{Q}_p$ ;  $K/k$  sei eine endliche galoissche  $p$ -Erweiterung von  $k$  mit Galoisgruppe  $G$ . In einem EBP (\*) mit pro- $p$ -Gruppen  $A$  und  $E$  faktorisiert sich  $\varphi$  und bei Existenz einer Lösung auch der Lösungshomomorphismus  $\psi$  über  $D = G_k(p)$ , die maximale pro- $p$ -Faktorgruppe von  $G_k$ . Es ist  $D = \text{Gal}(k(p)/k)$  mit der maximalen  $p$ -Erweiterung  $k(p)$  von  $k$ .

Wir bezeichnen für eine pro- $p$ -Gruppe  $X$  mit  $d(X) = \dim X/X^* = \dim H^1(X)$  die minimale Erzeugendenanzahl von  $X$ , wobei  $X^* = X^p[X, X]$  die Frattinigruppe von  $X$  ist, zur Abkürzung  $H^n(X) = H^n(X, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$  gesetzt ist und die Dimension über  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  gemeint ist.

Während  $D$  für einen regulären  $p$ -adischen Zahlkörper  $k$  eine freie pro- $p$ -Gruppe mit  $n+1$  Erzeugenden ist und daher jedes EBP (\*) mit  $p$ -Gruppe  $E$  lösbar ist (eigentlich lösbar, wenn  $d(E) \leq n+1$ ), ist  $D$  für irreguläres  $k$  eine Demuškingruppe und nicht jedes EBP lösbar. Wir werden zeigen, daß die Lösbarkeit mit der  $G$ -Struktur der multiplikativen Gruppe  $K^*$  zusammenhängt.

Sei  $S = \text{Gal}(k(p)/K)$ , dann wird durch die exakte Sequenz

$$1 \rightarrow S \rightarrow D \rightarrow G \rightarrow 1$$

die Faktorkommutatorgruppe  $S^{ab} = S/[S, S]$  zu einem  $\mathbb{Z}_p[G]$ -Modul, wobei  $\mathbb{Z}_p$  der Ring der ganzen  $p$ -adischen Zahlen ist. Die pro- $p$ -Vervollständigung  $A(K)$  von  $K^*$  ist über das universelle Normrestsymbol als  $\mathbb{Z}_p[G]$ -Modul isomorph zu  $S^{ab}$ .

Das Cupprodukt

$$\cup: H^1(D) \times H^1(D) \rightarrow H^2(D) \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$

bildet eine nicht-ausgeartete antisymmetrische Bilinearform auf  $H^1(D)$ . Sei  $t$  die Dimension des Radikals des Teilraums  $H^1(G)$  von  $H^1(D)$  oder äquivalent dazu, die Dimension des Radikals des Teilraums  $K^{*p} \cap k^*/k^{*p}$  von  $k^*/k^{*p}$  bezüglich der nicht-ausgearteten antisymmetrischen Bilinearform, die durch das Hilbertsymbol

$$(\cdot, \cdot): k^{*p} \times k^*/k^{*p} \rightarrow \mu_p \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$

gegeben ist. Es gilt  $0 \leq t \leq d = d(G)$ .

Sei schließlich

$$1 \rightarrow R_d \rightarrow F_d \rightarrow G \rightarrow 1$$

eine (minimale) Darstellung von  $G$  durch eine freie pro- $p$ -Gruppe mit  $d$  Erzeugenden.  $R_d^{ab}$  ist ein  $\mathbb{Z}_p[G]$ -Modul, dessen Struktur in [11] beschrieben wurde.

In [4] wurde die Struktur von  $A(K)$  zu dem Modul  $R_d^{ab}$  in Beziehung gesetzt:

**Satz 2.1.** *Es gilt die  $\mathbb{Z}_p[G]$ -Isomorphie*

$$A(K) \cong M \times \mathbb{Z}_p[G]^{n+2-(d+t)-\delta}, \quad \delta = \begin{cases} 0, & \mu_K^p \not\subseteq N_{K/k}(K^*)K^{*p}, \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$$

und eine exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}_p[G] \rightarrow R_d^{ab} \times \mathbb{Z}_p[G]^{t+\delta} \rightarrow M \rightarrow 0;$$

$M$  ist entweder unzerlegbar als  $\mathbb{Z}_p[G]$ -Modul oder es gilt  $M = R_d^{ab} \times M'$  mit einem kohomologisch trivialen, unzerlegbaren  $\mathbb{Z}_p[G]$ -Modul  $M'$ . Genauer gibt es eine exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}_p[G] \rightarrow \mathbb{Z}_p[G]^{d+\delta} \rightarrow M' \rightarrow 0.$$

Im letzteren Fall gilt notwendig  $t=d$  und  $\mu_K \subseteq N_{K/k}(K^*)$ .

Es gilt nun der

**Satz 2.2.** *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

- Es gilt  $A(K) \cong R_d^{ab} \times N$  mit einem  $\mathbb{Z}_p[G]$ -Modul  $N$ .
- Für  $K/k$  ist jedes EBP mit abelschem Kern lösbar.
- Das EBP  $1 \rightarrow R_d^{ab} \rightarrow F_d/[R_d, R_d] \rightarrow G \rightarrow 1$  ist lösbar.
- Inf:  $H^2(G, \mu_K^p) \rightarrow H^2(D, \mu_K^p)$  ist die Nullabbildung.

*Beweis.* a)  $\Rightarrow$  b). In der Theorie der Klassenformationen zeigt man die Beziehung  $\hat{H}^r(G, A(K)) \cong \hat{H}^r(G, S^{ab}) \cong \hat{H}^r(G, K^*) \cong \hat{H}^{r-2}(G, \mathbb{Z}) \cong \hat{H}^r(G, R_d^{ab})$  für alle  $r \in \mathbb{Z}$  für die Tate'schen Kohomologiegruppen (siehe Kawada [5]). In einer Zerlegung  $A(K) \cong R_d^{ab} \times N$  muß daher  $\hat{H}^r(G, N) = 0$  für alle  $r \in \mathbb{Z}$  gelten. Weiter ist wegen der Torsionsfreiheit von  $R_d^{ab}$  der Modul  $\mu_K^p$  in  $N$  enthalten. In dem von den Inklusionen induzierten kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H^r(G, K^*) & \xrightarrow{\sim} & H^r(G, A(K)) \\ \uparrow & & \uparrow \\ H^r(G, \mu_K^p) & \longrightarrow & H^r(G, N) = 0 \end{array}$$

ist die obere Abbildung ein Isomorphismus, da  $G$  eine  $p$ -Gruppe ist. Daraus folgt die Trivialität der linken Abbildung und damit auch die der Abbildung

$$H^r(G, \mu_K) \rightarrow H^r(G, K^*).$$

Für  $r=2$  erhalten wir aus Satz 1. 5. die Behauptung.

b)  $\Rightarrow$  c) ist trivial.

c)  $\Rightarrow$  a). Eine Lösung  $\psi: G_k \rightarrow F_d/[R_d, R_d]$  des EBP's aus c) faktorisiert sich über  $D$  und ist notwendigerweise eigentlich, da  $d(F_d/[R_d, R_d])=d=d(G)$  gilt, siehe [3], Satz 2. 3. Wir erhalten daraus ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
 1 & \longrightarrow & S^{ab} & \longrightarrow & D/[S, S] & \longrightarrow & G \longrightarrow 1 \\
 & & \downarrow \varphi & & \downarrow \bar{\psi} & & \parallel \\
 1 & \longrightarrow & R_d^{ab} & \longrightarrow & F_d/[R_d, R_d] & \longrightarrow & G \longrightarrow 1
 \end{array}$$

mit einem surjektiven  $\mathbb{Z}_p[G]$ -Homomorphismus  $\varphi$ . Sei  $\chi_1 \in H^2(G, S^{ab})$  der oberen und  $\chi_2 \in H^2(G, R_d^{ab})$  der unteren Gruppenerweiterung zugeordnet, so erzeugen beide Elemente gerade diese Kohomologiegruppen, die zyklisch von der Ordnung der Gruppe  $G$  sind (siehe [5]). Da die induzierte Abbildung  $\varphi^*$  gerade  $\chi_1$  auf  $\chi_2$  abbildet, ist sie ein Isomorphismus. Setzen wir  $N:=\text{Ker } \varphi$ , so folgt aus der langen exakten Kohomologie-sequenz

$$0 \longrightarrow H^2(G, N) \longrightarrow H^2(G, S^{ab}) \xrightarrow{\varphi^*} H^2(G, R_d^{ab}) \longrightarrow H^3(G, N) \longrightarrow 0$$

$H^2(G, N)=H^3(G, N)=0$ , also die kohomologische Trivialität nach einem Satz von Nakayama [7] über  $p$ -Gruppen. Aus dieser folgt wiederum das Zerfallen der exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow S^{ab} \xrightarrow{\varphi} R_d^{ab} \longrightarrow 0$$

wegen  $\text{Ext}_{\mathbb{Z}_p[G]}(R_d^{ab}, N) = H^1(G, \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(R_d^{ab}, N)) = 0$ ; wir erhalten somit

$$A(K) \cong S^{ab} \cong R_d^{ab} \times N.$$

Die Äquivalenz von b) und d) folgt aus Satz 1. 5. und Satz 1. 8. und aus der Tatsache, daß die Inflation  $\text{Inf}: H^2(D, \mu_k^p) \xrightarrow{\sim} H^2(G_k, \mu_k^p)$  ein Isomorphismus ist, siehe [9], II 5. 6.

Um auch Aussagen über eigentliche Lösungen von EBPen zu erhalten, beweisen wir das

**Lemma 2. 3.** *Sei  $G$  eine endliche  $p$ -Gruppe und seien*

$$1 \longrightarrow R_h \longrightarrow F_h \longrightarrow G \longrightarrow 1$$

$$1 \longrightarrow R_r \longrightarrow F_r \longrightarrow G \longrightarrow 1$$

zwei beliebige Darstellungen von  $G$  durch freie pro- $p$ -Gruppen  $F_h$  und  $F_r$ , vom Rang  $h \geq r \geq d(G)$ , dann gilt die  $\mathbb{Z}_p[G]$ -Isomorphie:

$$R_h^{ab} \cong R_r^{ab} \times \mathbb{Z}_p[G]^{h-r}.$$

*Beweis.* Aus den exakten Sequenzen (siehe [11], Satz 1. 1.)

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow R_h^{ab} \longrightarrow \mathbb{Z}_p[G]^h \longrightarrow I_G \longrightarrow 0 \\ 0 &\longrightarrow R_r^{ab} \longrightarrow \mathbb{Z}_p[G]^r \longrightarrow I_G \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

mit dem Augmentationsideal  $I_G$  von  $\mathbb{Z}_p[G]$  folgt mit dem Lemma von Schanuel, siehe Gruenberg [1], § 8 Lemma 11:

$$R_h^{ab} \times \mathbb{Z}_p[G]^r \cong R_r^{ab} \times \mathbb{Z}_p[G]^h.$$

Da für  $\mathbb{Z}_p[G]$  ein Kürzungssatz gilt, siehe [1], § 10 Theorem 1, folgt die Behauptung.

Insbesondere folgt aus dem Lemma, daß die Struktur von  $R_m^{ab}$  nur von  $G$  und der natürlichen Zahl  $m$  abhängt, d.h. der Ausdruck  $R_m^{ab}$  ist ohne Erwähnung der zugehörigen Darstellung wohldefiniert.

**Satz 2. 4.** *Ist für  $K|k$  eine der äquivalenten Bedingungen aus Satz 2. 2. erfüllt, so gilt*

a)  $d = d(G) \leq \frac{n+2}{2}$ .

b) *Jedes EBP  $1 \rightarrow A \rightarrow E \rightarrow G \rightarrow 1$  mit abelscher pro- $p$ -Gruppe  $A$  ist eigentlich lösbar, wenn  $d(E) \leq \frac{n+2}{2}$  gilt.*

*Beweis.* Sei  $A(K) \cong R_d^{ab} \times N$ , dann folgt aus Satz 2. 1.  $t = d$ , also

$$2d = d + t \leq \dim H^1(D) = n + 2$$

nach Sätzen über nicht-ausgeartete Bilinearformen (vergl. auch Satz 3. 7. in [4]). Weiter gilt nach Satz 2. 1. mit  $\delta \leq 1$

$$A(K) \cong R_d^{ab} \times \mathbb{Z}_p[G]^{n+2-2d-\delta} \times M'.$$

Wegen  $n + 2 - 2d - \delta \geq \frac{n+2}{2} - d$  für  $d < \frac{n+2}{2}$  und der Isomorphie

$$R_m^{ab} \cong R_d^{ab} \times \mathbb{Z}_p[G]^{m-d} \quad \text{mit} \quad m = \frac{n+2}{2}$$

gilt daher

$$S^{ab} \cong A(K) \cong R_m^{ab} \times N,$$

wobei  $N$  ein kohomologisch trivialer  $\mathbb{Z}_p[G]$ -Modul ist. Daraus erhalten wir eine Surjektion  $\varphi: S^{ab} \rightarrow R_m^{ab}$ , die einen Isomorphismus der Kohomologiegruppen induziert. Sind wieder  $\chi_1 \in H^2(G, S^{ab})$  und  $\chi_2 \in H^2(G, R_m^{ab})$  wie im Beweis von Satz 2. 2. gewählt, so gilt ohne Einschränkung  $\varphi^*(\chi_1) = \chi_2$ . Das bedeutet, daß es einen Homomorphismus  $\psi: D/[S, S] \rightarrow F_m/[R_m, R_m]$  gibt, der das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & S^{ab} & \longrightarrow & D/[S, S] & \longrightarrow & G \longrightarrow 1 \\ & & \downarrow \varphi & & \downarrow \psi & & \parallel \\ 1 & \longrightarrow & R_m^{ab} & \longrightarrow & F_m/[R_m, R_m] & \longrightarrow & G \longrightarrow 1 \end{array}$$

kommutativ ergänzt. Mit  $\varphi$  muß auch  $\psi$  surjektiv und stetig sein und ergibt eine eigentliche Lösung des unteren EBP.

Ist nun ein beliebiges EBP  $1 \longrightarrow A \longrightarrow E \xrightarrow{\pi} G \longrightarrow 1$  gegeben, so erhalten wir wegen der Freiheit von  $F_m$  eine surjektive Liftung  $\varrho: F_m \rightarrow E$  von  $\pi$ . Die Komposition  $G_k \rightarrow D \rightarrow D/[S, S] \rightarrow F_m/[R_m, R_m] \rightarrow E$  ist dann eine eigentliche Lösung des EBP.

Der folgende Reduktionssatz für zyklotomische Erweiterungen erweist sich als nützlich.

**Lemma 2. 5.** *Sei  $K' = K(\mu_{p^m})$ ; ist  $p \neq 2$  oder enthält  $K$  die vierten Einheitswurzeln, so ist für  $K|k$  jedes EBP mit abelschem Kern lösbar genau dann, wenn dies für  $K'|k$  der Fall ist.*

*Beweis.* Sei  $G' = \text{Gal}(K'|k)$ ,  $U' = \text{Gal}(K'/K)$ ,  $G = \text{Gal}(K|k)$  und ohne Einschränkung  $\mu_k^p \subseteq \mu_{p^m}$ . Unter der angegebenen Einheitswurzelaussetzung ist die Gruppe  $\mu_{p^m}$  kohomologisch trivial bezüglich der Gruppe  $U'$ , siehe Neukirch [8], Satz 4. 8. Aus der Hochschild-Serre-Sequenz folgt daher, daß in dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 H^2(G_k, \mu_k^p) & \hookrightarrow & H^2(G_k, \mu_{p^m}) \\
 \uparrow \text{Inf} & & \uparrow \text{Inf} \\
 H^2(G, \mu_k^p) & \xrightarrow{\text{Inf}} & H^2(G', \mu_{p^m})
 \end{array}$$

die untere Inflation ein Isomorphismus ist. Da die obere Abbildung nach Lemma 1. 4. injektiv ist, ist die Trivialität der linken Inflation gleichbedeutend mit der der rechten. Aus den Sätzen 1. 5. und 1. 8. folgt wegen  $\mu_{K'} = \mu_{p^m}$  die Behauptung.

### 3. Der Fall einer abelschen $p$ -Gruppe

Sei  $k$  ein irregulärer  $p$ -adischer Zahlkörper über  $\mathbb{Q}_p$  mit Irregularitätsexponenten  $s \geq 1$ ,  $K|k$  eine endliche abelsche  $p$ -Erweiterung mit Galoisgruppe  $G$ . Wir haben in Satz 2. 2. gezeigt, daß jedes EBP mit abelschem Kern genau dann lösbar ist, wenn die Inflation  $\text{Inf}: H^2(G, \mu_k^p) \rightarrow H^2(D, \mu_k^p)$  trivial ist. Es ist jedoch schwierig, diese Bedingung nachzuweisen, wenn  $\mu_k^p$  kein trivialer  $G$ -Modul ist. Um das Problem auf den Fall  $\mu_k^p = \mu_k^p$  zurückzuführen, benötigen wir den

**Satz 3. 1.** *Sei  $p^s \neq 2$ ; dann gibt es eine zyklotomische Erweiterung  $K' = K(\mu_{p^m})$  von  $K$  mit  $m \geq s$  derart, daß  $K'$  das Kompositum der zyklotomischen Erweiterung  $k' = k(\mu_{p^m})$  und einer zu  $k'$  linear disjunkten abelschen Erweiterung  $L|k$  ist. Mit  $G' = \text{Gal}(K'|k)$  sind folgende Aussagen äquivalent:*

- a)  $\text{Inf}: H^2(G, \mu_k^p) \longrightarrow H^2(D, \mu_k^p)$  ist die Nullabbildung.
- b)  $\text{Inf}: H^2(G', \mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(D, \mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z})$  ist trivial.
- c)  $\text{Inf}: H^2(G(L|k), \mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(D, \mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z})$  ist trivial.

**Zusatz.** *Ist der Exponent von  $G$  gleich  $p^l$ , so kann  $m = s + l$  gewählt werden.*

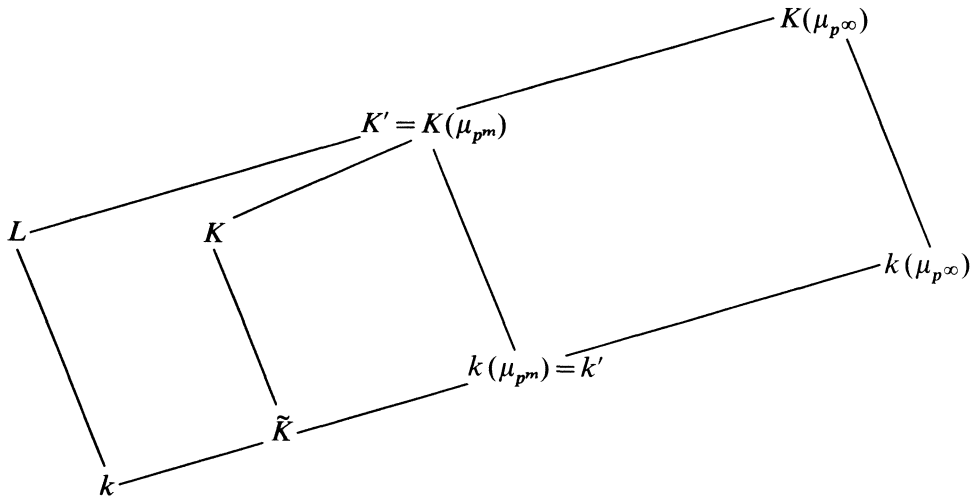
*Beweis.* Es seien mit  $K(\mu_{p^\infty})$  bzw.  $k(\mu_{p^\infty})$  die Erweiterungen von  $K$  bzw.  $k$  bezeichnet, die durch Adjunktion aller Einheitswurzeln von  $p$ -Potenzordnung entstehen. Sei  $G_\infty$  die Galoisgruppe der abelschen Erweiterung  $K(\mu_{p^\infty})/k$  und

$$U = \text{Gal}(K(\mu_{p^\infty})/k(\mu_{p^\infty})),$$

dann zerfällt die kanonische exakte Sequenz

$$1 \rightarrow U \rightarrow G_\infty \rightarrow \text{Gal}(k(\mu_{p^\infty})/k) \rightarrow 1,$$

da wegen  $p^s \neq 2$   $\text{Gal}(k(\mu_{p^\infty})/k) \cong \mathbb{Z}_p$  gilt. Es gibt also eine abelsche Erweiterung  $L/k$  mit  $\text{Gal}(L/k) = U$  derart, daß  $L \cdot k(\mu_{p^\infty}) = K(\mu_{p^\infty})$  und  $L \cap k(\mu_{p^\infty}) = k$  gilt. Für  $\tilde{K} = K \cap k(\mu_{p^\infty})$  gilt  $U \cong \text{Gal}(K/\tilde{K})$ .



Ist nun  $p^l$  der Exponent von  $G$ , so ist  $K$  in dem Fixkörper  $K'$  von  $G_\infty^{p^l}$  enthalten. Wegen  $L \subseteq K'$  und  $K' \cap k(\mu_{p^\infty}) = k(\mu_{p^{s+l}}) =: k'$  gilt offenbar  $K' = L \cdot k' = K(\mu_{p^{s+l}})$  und

$$k' \cap L = k.$$

Nach Lemma 2. 5. ist a) äquivalent zu der Aussage

$$a') \text{ Inf: } H^2(G', \mu_{k'}^p) \longrightarrow H^2(D, \mu_{k'}^p) \text{ ist trivial.}$$

Aus letzterer folgt b) mit den Sätzen 2. 2. und 1. 5. Die Implikation von b) nach c) ist trivial und c) ist nach Lemma 2. 5. äquivalent zu a)', da  $\mu_L^p = \mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}$  und  $K' = L(\mu_{k'}^p)$  ist.

Der letzte Satz gibt Motivation genug, für eine abelsche  $p$ -Gruppe die Kohomologiegruppe  $H^2(G, \mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z})$  zu untersuchen. Wir schreiben im folgenden auch  $H^n(G, p^r)$  für  $H^n(G, \mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})$ ; dabei soll  $\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}$  trivialer  $G$ -Modul sein.

**Lemma 3. 2.** Sei  $G = \prod_{i=1}^d G_i$  mit zyklischen  $p$ -Gruppen  $G_i = \langle \sigma_i \rangle$  der Ordnung  $p^{m_i}$ ,

und  $s$  eine natürliche Zahl sowie für  $i < j$ :  $r_{ij} = \min(m_i, m_j, s)$ . Dann wird  $H^2(G, p^s)$  von den Bildern der Abbildungen

$$\begin{aligned} \varphi_i: H^2(G_i, p^s) &\xrightarrow{\text{Inf}} H^2(G, p^s) && i = 1, \dots, d, \\ \varphi_{ij}: H^1(G_i, p^{r_{ij}}) \times H^1(G_j, p^{r_{ij}}) &\xrightarrow{\text{Inf} \times \text{Inf}} H^1(G, p^{r_{ij}}) \times H^1(G, p^{r_{ij}}) \\ &\xrightarrow{\cup} H^2(G, p^{r_{ij}}) \xrightarrow{i^*} H^2(G, p^s) && 1 \leq i < j \leq d, \end{aligned}$$

erzeugt. Dabei seien die Inflationen von den kanonischen Projektionen  $G \twoheadrightarrow G_i$ , das Cupprodukt von der Multiplikation im Ring  $\mathbb{Z}/p^{r_{ij}}\mathbb{Z}$  und  $i^*$  von der Inklusion  $\mathbb{Z}/p^{r_{ij}}\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}$  induziert.

*Beweis.* Sei  $F$  eine freie pro- $p$ -Gruppe mit der Basis  $x_1, \dots, x_d$  und

$$1 \rightarrow R \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow 1$$

die minimale Darstellung von  $G$  mit  $x_i \rightarrow \sigma_i$ . Dann wird  $R$  als Normalteiler in  $F$  von den Elementen  $x_i^{p^{m_i}}$ ,  $i=1, \dots, d$ , und  $[x_i, x_j]$ ,  $1 \leq i < j \leq d$ , erzeugt, und es gilt

$$R/[F, R] = \prod_{i=1}^d V_i \times \prod_{i < j} U_{ij}$$

mit

$$V_i = \langle x_i^{p^{m_i}} \bar{R} \rangle \cong \mathbb{Z}_p, \quad \bar{R} = [F, R],$$

$$U_{ij} = \langle [x_i, x_j] \bar{R} \rangle \cong \mathbb{Z}/p^{m_{ij}}\mathbb{Z}, \quad m_{ij} = \min(m_i, m_j).$$

Daher wird  $H^1(R, p^s)^F = \text{Hom}_F(R, \mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}) = \text{Hom}(R/[F, R], \mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z})$  erzeugt durch die Elemente

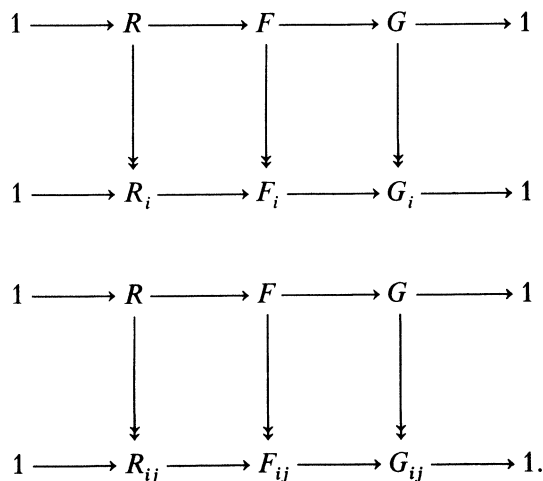
$$\xi_i \quad \text{mit} \quad \xi_i(x_i^{p^{m_i}} \bar{R}) = 1 \in \mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z} \quad \text{und sonst } 0, \quad 1 \leq i \leq d,$$

$$\xi_{ij} \quad \text{mit} \quad \xi_{ij}([x_i, x_j] \bar{R}) = p^{s-r_{ij}} \in \mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z} \quad \text{und sonst } 0, \quad 1 \leq i < j \leq d,$$

und  $H^2(G, p^s)$  durch die Bilder dieser Elemente bei der surjektiven Transgression

$$H^1(R, p^s)^F \xrightarrow{\text{Tra}} H^2(G, p^s).$$

Seien  $F_i$  bzw.  $F_{ij}$  die freien Faktorgruppen von  $F$ , die durch Wegdividieren aller Erzeugenden  $x_k$  für  $k \neq i$  bzw.  $k \neq i, j$  entstehen. Ist noch  $G_{ij} = G_i \times G_j$  gesetzt, so erhalten wir kommutative Diagramme



mit freien minimalen Darstellungen der  $G_i$  bzw.  $G_{ij}$ . Bilden wir  $\tilde{\xi}_i \in H^1(R_i, p^s)^{F_i}$  und  $\tilde{\xi}_{ij} \in H^1(R_{ij}, p^{r_{ij}})^{F_{ij}}$  entsprechend den obigen Überlegungen, so gilt in den kommutativen Diagrammen

$$\begin{array}{ccc}
 & & H^1(R, p^s)^F \xrightarrow{\text{Tra}} H^2(G, p^s) \\
 & & \uparrow i^* \\
 & & H^1(R, p^{r_{ij}})^F \xrightarrow{\text{Tra}} H^2(G, p^{r_{ij}}) \\
 & & \uparrow \text{Inf} \\
 H^1(R, p^s)^F & \xrightarrow{\text{Tra}} & H^2(G, p^s) \\
 \uparrow \text{Inf} & & \uparrow \text{Inf} = \varphi_i \\
 H^1(R_i, p^s)^{F_i} & \xrightarrow{\text{Tra}} & H^2(G_i, p^s) \\
 & & \uparrow \text{Inf} \\
 & & H^1(R_{ij}, p^{r_{ij}})^{F_{ij}} \xrightarrow{\sim \text{Tra}} H^2(G_{ij}, p^{r_{ij}})
 \end{array}$$

offenbar  $\text{Inf } \tilde{\xi}_i = \xi_i$  also  $\text{Tra } \xi_i \in \text{im } \varphi_i$  und  $\xi_{ij} = i^*(\text{Inf } \tilde{\xi}_{ij})$ , da im  $\xi_{ij} \subseteq \mathbb{Z}/p^{r_{ij}}\mathbb{Z}$  gilt und der Kern der Abbildung  $p_{ij}: R \rightarrow R_{ij}$  im Kern von  $\xi_{ij}$  liegt, es folgt

$$\text{Tra } \xi_{ij} = i^*(\text{Inf } \text{Tra } \tilde{\xi}_{ij}).$$

Da  $H^1(G_{ij}, p^{r_{ij}}) \xrightarrow{\sim \text{Inf}} H^1(F_{ij}, p^{r_{ij}})$  nach Definition der  $r_{ij}$  bijektiv ist, ist die Transgression ein Isomorphismus. Nach einem Satz von Serre, der Cupprodukt und Relationenstruktur verknüpft (siehe Labute [6], Prop. 3), gilt

$$\text{Tra } \tilde{\xi}_{ij} = \tilde{\chi}_i \cup \tilde{\chi}_j,$$

wobei  $\tilde{\chi}_i, \tilde{\chi}_j \in H^1(G_{ij}, p^{r_{ij}}) = \text{Hom}(G_{ij}, \mathbb{Z}/p^{r_{ij}}\mathbb{Z})$  die Dualbasis zu den Erzeugenden  $\sigma_i$  und  $\sigma_j$  von  $G_{ij}$  bilden, mit  $\chi_\nu(\sigma_\mu) = \delta_{\nu\mu}$ . Es gilt aber gerade  $\tilde{\chi}_i = \text{Inf } \chi_i$  für das erzeugende Element von  $H^1(G_i, p^{r_{ij}})$  mit  $\chi_i(\sigma_i) = 1$  und aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 H^1(G, p^{r_{ij}}) \times H^1(G, p^{r_{ij}}) & \xrightarrow{\cup} & H^2(G, p^{r_{ij}}) \\
 \uparrow \text{Inf} & & \uparrow \text{Inf} \\
 H^1(G_{ij}, p^{r_{ij}}) \times H^1(G_{ij}, p^{r_{ij}}) & \xrightarrow{\cup} & H^2(G_{ij}, p^{r_{ij}}) \\
 \uparrow \text{Inf} & & \uparrow \text{Inf} \\
 H^1(G_i, p^{r_{ij}}) \times H^1(G_j, p^{r_{ij}}) & & 
 \end{array}$$

folgt  $\text{Inf } \text{Tra } \tilde{\xi}_{ij} = \text{Inf } \tilde{\chi}_i \cup \tilde{\chi}_j = \text{Inf } \chi_i \cup \text{Inf } \chi_j$ , wir erhalten also  $\text{Tra } \xi_{ij} \in \text{im } \varphi_{ij}$ . Da die Elemente  $\text{Tra } \xi_i$  und  $\text{Tra } \xi_{ij}$  die Gruppe  $H^2(G, p^s)$  erzeugen, folgt die Behauptung.

**Corollar 3.3.** Sei  $G$  eine endliche abelsche  $p$ -Gruppe vom Exponenten  $p^l$ ,  $G$  das direkte Produkt der zyklischen Gruppen  $G_i$ ,  $i=1, \dots, d$ , und  $s$  eine natürliche Zahl. Dann wird  $H^2(G, p^s)$  von den Bildern der Abbildungen

$$\varphi_i: H^2(G_i, p^s) \xrightarrow{\text{Inf}} H^2(G, p^s) \quad \text{für } 1, \dots, d$$

sowie

$$\psi_k: H^1(G, p^r) \times H^1(G, p^r) \xrightarrow{\cup} H^2(G, p^r) \xrightarrow{i^*} H^2(G, p^s) \quad \text{für } r=1, \dots, \min(s, l)$$

erzeugt. Dabei sind die Inflationen von den Projektionen  $G \rightarrow G_i$  und die Abbildungen  $i^*$  von den Inklusionen  $\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}$  induziert.

Wir wenden nun diese rein gruppentheoretischen Aussagen auf abelsche Erweiterungen an:

**Satz 3.4.** Sei  $k$  ein irregulärer  $p$ -adischer Zahlkörper über  $\mathbb{Q}_p$  mit Irregularitätsexponenten  $s \geq 1$  und  $K/k$  eine endliche abelsche  $p$ -Erweiterung mit Galoisgruppe  $G$ . Ist  $G$  vom Exponenten  $p^l$ , so ist äquivalent:

a)  $\text{Inf}: H^2(G, \mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}) \rightarrow H^2(D, \mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z})$  ist die Nullabbildung.

b) Es gilt  $\mu_k^p \subseteq N_{K/k}(K^*)$  und für alle  $r=1, \dots, \min(s, l)$  ist  $H^1(G, \mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})$  total isotroper Teilraum von  $H^1(D, \mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})$  bezüglich der nicht-ausgearteten Bilinearform .

$$\cup: H^1(D, \mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}) \times H^1(D, \mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}) \rightarrow H^2(D, \mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}.$$

c) Es gilt  $\mu_k^p \subseteq N_{K/k}(K^*)$  und für alle  $r=1, \dots, \min(s, l)$  ist  $K^{*p^r} \cap k^*/k^{*p^r}$  total isotroper Teilraum von  $k^*/k^{*p^r}$  bezüglich des Hilbertsymbols  $p^r$ -ter Stufe

$$(\cdot, \cdot)_{p^r}: k^*/k^{*p^r} \times k^*/k^{*p^r} \rightarrow \mu_{p^r} \cong \mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}.$$

d) Es gilt  $\mu_k^p \subseteq N_{K/k}(K^*)$  sowie für alle  $r=1, \dots, \min(s, l)$

$$K^{*p^r} \cap k^* \subseteq N_{K/k}(K^*) \cdot k^{*p^r}.$$

*Beweis.* Sei  $G = \prod_{i=1}^d G_i$  mit zyklischen  $p$ -Gruppen  $G_i = \text{Gal}(k_i/k)$ ,  $K \supseteq k_i \supseteq k$ . Nach

Corollar 3.3. ist die Inflation in a) genau dann Null, wenn alle Abbildungen  $\text{Inf} \circ \varphi_i$ ,  $i=1, \dots, d$ , und  $\text{Inf} \circ \psi_r$ ,  $r=1, \dots, \min(s, l)$ , Null sind. Da die von der Inklusion  $\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z} = \mu_k^p \subseteq \mu_{k_i}^p$  induzierte Abbildung  $\hat{H}^0(G_i, \mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}) \rightarrow \hat{H}^0(G_i, \mu_{k_i}^p)$  surjektiv ist, ist in dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} H^2(D, \mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\sim} & H^2(G_k, \mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}) & \hookrightarrow & H^2(G_k, \mu_{k_i}^p) \\ \uparrow \text{Inf} \circ \varphi_i & & & & \uparrow \text{Inf} \\ H^2(G_i, \mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}) & \longrightarrow & & \twoheadrightarrow & H^2(G_i, \mu_{k_i}^p) \end{array}$$

die untere Abbildung surjektiv. Daher ist die Trivialität von  $\text{Inf} \circ \varphi_i$  gleichbedeutend mit der der rechten Inflation, nach Corollar 1.6. also gleichbedeutend mit

$$\mu_k^p \subseteq N_{k_i/k}(k_i^*).$$

Daher gilt  $\text{Inf} \circ \varphi_i = 0$  für alle  $i$  genau dann, wenn  $\mu_k^p \subseteq \bigcap N_{k_i/k}(k_i^*) = N_{K/k}(K^*)$  gilt. Weiter ist in dem Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
 H^1(D, \mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}) \times H^1(D, \mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\cup} & H^2(D, \mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}) & \xrightarrow{i^*} & H^2(D, \mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}) \\
 \uparrow & & \uparrow & \nearrow e & \uparrow \text{Inf} & & \uparrow \text{Inf} \\
 \psi_r: H^1(G, \mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}) \times H^1(G, \mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^2(G, \mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}) & \xrightarrow{i^*} & H^2(G, \mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z})
 \end{array}$$

die Abbildung  $i^*$  in der oberen Zeile injektiv; dies folgt aus Lemma 1.4. und der Isomorphie  $H^2(D, \mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H^2(G_k, \mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})$ . Daher ist  $\text{Inf} \circ \psi_r$  genau dann Null, wenn dies für  $e_r$  gilt. Damit ist die Äquivalenz von a) und b) gezeigt.

Die Äquivalenz der Bedingungen b) und c) folgt aus der wohlbekannten Beziehung zwischen Cupprodukt und Hilbertsymbol, siehe Serre [10], XIV, Prop. 5; dabei entspricht  $H^1(G, \mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})$  der Kummergruppe  $K^{*p^r} \cap k^*/k^{*p^r}$ .

Die Äquivalenz der Bedingung c) und d) folgt daraus, daß ein Unterraum  $U$  genau dann isotrop ist, wenn er in seinem orthogonalen Komplement  $U^\perp$  enthalten ist, und da nach den Eigenschaften des Hilbertsymbols gerade

$$(K^{*p^r} \cap k^*/k^{*p^r})^\perp = N_{K/k}(K^*)k^{*p^r}/k^{*p^r}$$

gilt, vergl. [4], Lemma 3.1.

Zusammen mit dem Satz 3.1. erhalten wir nun folgendes Kriterium:

**Satz 3.5.** *Sei  $k$  ein irregulärer  $p$ -adischer Zahlkörper über  $\mathbb{Q}_p$  mit Irregularitätsexponenten  $s \geq 1$  und  $K/k$  eine endliche abelsche  $p$ -Erweiterung vom Exponenten  $p^l$ . Ist  $p^s \neq 2$  oder enthält  $K$  nicht die vierten Einheitswurzeln, so ist äquivalent:*

(i) *Für  $K/k$  ist jedes EBP mit abelschem Kern lösbar.*

(ii) *Es gilt  $\mu_k^p \subseteq N_{K/k}(K^*)$  und für  $r = 1, \dots, \min(s, l)$  ist  $K^{*p^r} \cap k^*/k^{*p^r}$  total isotroper Teilraum von  $k^*/k^{*p^r}$  bezüglich des Hilbertsymbols  $p^r$ -ter Stufe.*

*Beweis.* Ist  $p = 2$  und  $\mu_k^p = \{\pm 1\} = \mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}$ , so folgt die Behauptung aus den Sätzen 2.2. und 3.4. Sei also  $p^s \neq 2$  und  $K' = K(\mu_{p^s+1})$ ; dann ist nach Satz 3.1. und Satz 2.2. genau dann jedes EBP mit abelschem Kern für  $K/k$  lösbar, wenn für  $G' = \text{Gal}(K'/k)$  die Inflation

$$\text{Inf}: H^2(G', \mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}) \rightarrow H^2(D, \mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z})$$

die Nullabbildung ist. Ist dies der Fall, so folgt trivialerweise Bedingung a) aus Satz 3.4. und damit (ii).

Sei umgekehrt (ii) erfüllt und  $k' = k(\mu_{p^s+1})$ , so gilt wegen  $\mu_k^p \subseteq N_{K'/k}(K'^*)$  für  $p^s \neq 2$  ebenfalls

$$\mu_k^p \subseteq N_{K/k}(K^*) \cap N_{K'/k}(K'^*) = N_{K'/k}(K'^*).$$

Weiter ist für  $r = 1, \dots, \min(s, l)$  auch

$$K'^{*p^r} \cap k^*/k^{*p^r} = \mu_k^p \cdot K^{*p^r} \cap k^*/k^{*p^r}$$

total isotrop, da  $\mu_k^p \cdot k^{*p^r}/k^{*p^r} \subseteq N_{K/k}(K^*)k^{*p^r}/k^{*p^r}$  und das Hilbertsymbol für  $p^s \neq 2$  alternierend ist. Der Exponent von  $G'$  ist ebenfalls  $p^l$ , so daß wir mit Satz 3.4. die Trivialität der obigen Inflation erhalten.

**Beispiel.** Sei  $k = \mathbb{Q}_2(i)$ , dann gilt: Über  $K = k(\sqrt[4]{2}, \sqrt{3})$  ist jedes EBP mit abelschem Kern lösbar.

Die Galoisgruppe von  $K/k$  ist vom Exponenten 4, so daß wir nach Satz 3.5 folgende Aussagen zu zeigen haben:

1.  $i \in N_{K/k}(K^*)$ ,
2.  $K^{*2^r} \cap k^*/k^{*2^r}$  ist total isotroper Teilraum von  $k^*/k^{*2^r}$  bezüglich des Hilbertsymbols  $(, )_{k, 2^r}$   $2^r$ -ter Stufe,  $r = 1, 2$ .

Die erste Aussage gilt aber wegen

$$(i, 2)_{k, 4} = (i(1-i)^2 \cdot i)_{k, 4} = (i, 1-i)_{k, 4}^2 \cdot (i, i)_{k, 4} = 1,$$

$$(i, 3)_{k, 2} = (N_{k/\mathbb{Q}_2}(i), 3)_{\mathbb{Q}_2} = (1, 3)_{\mathbb{Q}_2} = 1,$$

und die zweite ist richtig, wegen

$$(2, 3)_{k, 2} = (4, 3)_{\mathbb{Q}_2} = 1$$

und da  $K^{*4} \cap k^*/k^{*4}$  zyklisch ist.

### Zusatz bei der Korrektur

Für  $p$ -Erweiterungen  $p$ -adischer Zahlkörper hat Herr Nguyen-Quang-Do aus Paris inzwischen ähnliche Resultate erhalten. Durch ihn wurden wir auf einen Artikel von B. B. Lur'e (Problem of immersion of local fields with a non-abelian kernel, J. Soviet Math. 6, no. 3 (1976), 298—306) aufmerksam gemacht, nach dem in diesem Fall die Einschränkung auf abelsche Kerne entfallen kann. Nach Lur'e gilt hier nämlich für pro- $p$ -Gruppen  $A, E$  und  $G$ :

Das EBP

$$1 \longrightarrow A \longrightarrow E \longrightarrow G \longrightarrow 1$$

ist genau dann lösbar, wenn das EBP

$$1 \longrightarrow A^{\text{ab}} \longrightarrow E/[A, A] \longrightarrow G \longrightarrow 1$$

lösbar ist.

**Literaturverzeichnis**

- [1] *K. Gruenberg*, Cohomological topics in group theory, Lecture notes in math. **143**, Berlin-Heidelberg-New York 1970.
- [2] *H. Hasse*, Zahlentheorie, Berlin 1963.
- [3] *K. Hoechsmann*, Zum Einbettungsproblem, J. reine angew. Math. **229** (1968), 81—106.
- [4] *U. Jannsen, K. Wingberg*, Die  $p$ -Vervollständigung der multiplikativen Gruppe einer  $p$ -Erweiterung eines irregulären  $p$ -adischen Zahlkörpers, J. reine angew. Math. **307/308** (1979), 399—410.
- [5] *Y. Kawada*, On the structure of the Galois group of some infinite extensions. II, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo **7** (1954), 87—106.
- [6] *J. Labute*, Classification of Demushkin groups, Canad. J. Math. **19** (1967), 106—132.
- [7] *T. Nakayama*, On modules of trivial cohomology over a finite group, Illinois J. Math. **1** (1957), 36—43.
- [8] *J. Neukirch*, Über das Einbettungsproblem der algebraischen Zahlentheorie, Inventiones math. **21** (1973), 59—116.
- [9] *J.-P. Serre*, Cohomologie galoisienne, Lecture notes in math. **5**, Berlin-Heidelberg-New York 1964.
- [10] *J.-P. Serre*, Corps locaux, Paris 1968.
- [11] *K. Wingberg*, Die Einseinheitengruppe von  $p$ -Erweiterungen regulärer  $p$ -adischer Zahlkörper als Galoismodul, J. reine angew. Math. **305** (1979), 206—214.

---

Universität Hamburg, Mathematisches Seminar, Bundesstraße 55, D-2000 Hamburg 13

Technische Universität Berlin, FB 3-Mathematik, Straße des 17. Juni 135, D-1000 Berlin 12

Eingegangen 27. September 1979, revidierte Fassung 5. Februar 1980