Numer. Math. 35, 405–420 (1980)

Numerische Mathematik

Die Determinantenmethode zur Berechnung des charakteristischen Exponenten der endlichen Hillschen Differentialgleichung

E. Wagenführer

Universität Regensburg, Fakultät für Mathematik, Postfach 397, D-8400 Regensburg, Germany (Fed. Rep.)

On the Determinantal Method for Calculating the Characteristic Exponent of the Finite Hill Differential Equation

Summary. The characteristic exponent ν of the finite Hill differential equation

$$y''(x)+\left(\lambda+\sum_{\kappa=1}^{k}(2t_\kappa)\cos(2\kappa x)\right)y(x)=0$$

can be evaluated from the relations

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\nu\right)=\frac{\pi^2}{4}\det C^{(0)}\det S^{(0)}$$

or

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\nu\right)=\det C^{(1)}\det S^{(1)},$$

where $S^{(\mu)}$ and $C^{(\mu)}$ are certain infinite band matrices. According to Mennicken [3] the convergence of the infinite determinants can be accelerated by splitting up suitable infinite products. In the present paper this method is discussed under numerical aspects, moreover the formulas for the infinite products are simplified in such way that the complex Gamma-function is no longer needed. Finally, the presented determinental method is compared with other methods by means of some numerical examples.

Subject Classifications: AMS(MOS): 65L05; CR: 5.16.

Einleitung

Eine unendliche Matrix $A=(\alpha_{n,m})_0^\infty$ nennen wir „vom Hillschen Typ", wenn sie die Eigenschaften

$$\sum_{n=0}^{\infty}|\alpha_{n,n}-1|<\infty,\qquad \sum_{\substack{n,m=0\\ n\neq m}}^{\infty}|\alpha_{n,m}|^2<\infty \tag{1}$$

0029-599X/80/0035/0405/$03.20

oder stärker

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} |\alpha_{n,m} - \delta_{n,m}| < \infty \tag{1'}$$

besitzt. Für eine solche Matrix konvergiert die Folge der Determinanten ihrer Abschnittsmatrizen

$$A_N := (\alpha_{n,m})_{n,m=0}^{N} \qquad (N \in \mathbb{N}), \tag{2}$$

den Grenzwert der $\det A_N$ bezeichnen wir mit $\det A$. Das Konvergenzverhalten der $\det A_N$ ist in [3] und [4] eingehend untersucht, insbesondere im Fall einer Bandmatrix A. Hierfür ist eine Konvergenzverbesserung in folgender Weise möglich: unter gewissen Voraussetzungen an die komplexe Folge $(\beta_n)_0^\infty$ konvergieren die Abschnittsdeterminanten von

$$B := \left(\frac{\alpha_{n,m}}{1-\beta_n}\right)_{n,m=0}^{\infty} \tag{3}$$

schneller als die $\det A_N$. Falls das unendliche Produkt der $(1-\beta_n)$ elementar darstellbar ist, läßt sich $\det A$ über $\det B$ mittels

$$\det A = \prod_{n=0}^{\infty} (1-\beta_n) \det B \tag{4}$$

numerisch berechnen.

Für die speziellen Matrizen, die im Zusammenhang mit der endlichen Hillschen Differentialgleichung auftreten, hat Mennicken in [3] die β_n so gewählt, daß die Folge der $\det B_N$ wie eine Reihe mit Gliedern $O(N^{-8})$ konvergiert. Das hieraus resultierende Verfahren zur Berechnung des charakteristischen Exponenten der endlichen Hillschen Differentialgleichung ist bisher nicht numerisch diskutiert; entsprechende Untersuchungen sind (als Nr. 15 des Literaturverzeichnisses in [3]) lediglich angekündigt.

In der vorliegenden Arbeit wird die numerische Diskussion durchgeführt und gleichzeitig das Verfahren in einigen wesentlichen Punkten verbessert. Der 1. Abschnitt beschreibt den Zusammenhang zwischen dem charakteristischen Exponenten und den zu berechnenden Determinanten. Hierbei erweist es sich als zweckmäßig, andere Matrizen A als in [3] zu verwenden; die Matrizen B stimmen jedoch im wesentlichen mit denen in [3] überein. Im 2. Abschnitt wird das asymptotische Verhalten der $\det B_N$ genauer als bisher untersucht: hieraus ergibt sich die Möglichkeit, die $\det B_N$ als Näherungswerte für $\det B$ durch eine Art Extrapolation zu verbessern. Der 3. Abschnitt geht auf die numerische Berechnung der $\det B_N$ ein, der 4. Abschnitt behandelt die unendlichen Produkte der $1-\beta_n$. Letztere sind in [3] unter Benutzung der Gamma-Funktion mit komplexem Argument ausgedrückt, was in der Praxis einigen Aufwand verursacht. In den hier angegebenen Darstellungen hingegen treten nur trigonometrische Funktionen auf. Im 5. Abschnitt wird die Determinantenmethode an Hand einiger Beispiele mit dem von Wagenführer/Lang [8] angegebenen Verfahren der numerischen Integration verglichen.

In dieser Arbeit ist der Fall der Mathieuschen Differentialgleichung nicht mehr berücksichtigt: für diesen Spezialfall hat der Autor in [7] bereits ein Verfahren höherer Konvergenzordnung entwickelt, das der hier diskutierten Methode (die mit der von Schäfke/Schmidt [6] angegebenen übereinstimmt) deutlich überlegen ist.

1. Grundlagen

Zur Hillschen Differentialgleichung

$$y''(x)+(\lambda+g(x))\,y(x)=0 \tag{1.1}$$

mit

$$g(x)=\sum_{\kappa=1}^{\infty}(2t_\kappa)\cos(2\kappa x),\qquad \sum_{\kappa=1}^{\infty}|t_\kappa|<\infty \tag{1.2}$$

definieren wir für $\mu=0$, 1 die unendlichen Matrizen

$$D^{(\mu)}=(d^{(\mu)}_{n,m})_{n,m\in\mathbb{Z}}$$

durch

$$d^{(0)}_{n,m}=\begin{cases}\delta_{n,m}\left(1-\dfrac{\lambda}{4n^2}\right)-\dfrac{t_{n-m}}{4n^2} & (n\in\mathbb{Z},\ \neq 0,\ m\in\mathbb{Z}),\\ \delta_{0,m}\cdot\lambda+t_m & (n=0,\ m\in\mathbb{Z}),\end{cases}$$

$$d^{(1)}_{n,m}=\delta_{n,m}\left(1-\frac{\lambda}{(2n+1)^2}\right)-\frac{t_{n-m}}{(2n+1)^2}\qquad (n,m\in\mathbb{Z}),$$

wobei die $t_{-n}:=t_n$ $(n\in\mathbb{N})$, $t_0:=0$ definiert seien. Die $D^{(\mu)}$ sind zweiseitig-unendliche Matrizen vom Hillschen Typ, d.h. sie besitzen die Eigenschaften (1) – hier sogar (1′) – bezüglich Summation über $\mathbb{Z}$ statt über $\mathbb{N}$. Nach [3], S. 16 lassen sich solche Matrizen auf einseitig-unendliche Matrizen vom Hillschen Typ zurückführen. Die Abschnittsdeterminanten der $D^{(\mu)}$ sind für λ aus beliebigen kompakten Teilmengen von $\mathbb{C}$ gleichmäßig konvergent, wie man beispielsweise an Hand von [4], Abschnitt 3 zeigt: folglich existieren die Determinanten der $D^{(\mu)}$ und sind bezüglich λ in ganz $\mathbb{C}$ holomorph.

Der charakteristische Exponent ν von (1.1) ist durch die Existenz einer Lösung $y\neq 0$ von (1.1) mit der Eigenschaft

$$y(x+\pi)=e^{i\pi\nu}y(x)\qquad (x\in\mathbb{R}) \tag{1.3}$$

charakterisiert. Wir notieren den

Satz. *Äquivalent sind folgende Aussagen:*

(i) *ν ist charakteristischer Exponent von* (1.1),

(ii) $\sin^2\left(\dfrac{\pi}{2}\nu\right)=\dfrac{\pi^2}{4}\det D^{(0)}$, (1.4)

(iii) $\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2}\nu\right)=\det D^{(1)}$.

Beweis. Zunächst sei $\lambda \neq n^2$ ($n \in \mathbb{N}$) angenommen. Dann ist – wie man im wesentlichen nach Whittaker-Watson [9], S. 416 zeigt $-\nu$ genau dann charakteristischer Exponent von (1.1), wenn

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\nu\right) = \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda}\right) \det \tilde{D}^{(0)}, \tag{1.5}$$

wobei

$$\tilde{D}^{(0)} = \left(\delta_{n,m} + \frac{t_{n-m}}{\lambda - 4n^2}\right)_{n,m \in \mathbb{Z}}.$$

Offenbar gilt

$$\det D^{(0)} = \lambda \cdot \left[\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda}{4n^2}\right)\right]^2 \det \tilde{D}^{(0)} = \frac{4}{\pi^2} \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda}\right) \det \tilde{D}^{(0)},$$

womit wegen (1.5) die Äquivalenz von (i) und (ii) für alle $\lambda \neq n^2$ ($n \in \mathbb{N}$) klar ist. Auf Grund der Beziehung - vgl. [8], (1.2′) -

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\nu\right) = -y_2\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right) y_1'\left(\frac{\pi}{2}, \lambda\right),$$

in der $y_1(x,\lambda)$, $y_2(x,\lambda)$ die kanonischen Fundamentallösungen von (1.1) bezeichne, ist $\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\nu\right)$ in Abhängigkeit von λ ebenso wie $\det D^{(0)}$ eine ganze Funktion und daher auch in $\lambda = n^2$ ($n \in \mathbb{N}$) stetig. Die Äquivalenz von (i) und (iii) wird analog bewiesen.

Welche der Gleichungen (ii) oder (iii) aus Satz (1.4) zur Berechnung von ν geeigneter ist, hängt von den jeweiligen Parametern ab: Liegt ν nahe bei Null, sollte man aus Gründen der numerischen Stabilität nur (ii) verwenden, im Fall $\nu \approx 1$ die Gleichung (iii). Zur Bestimmung von $\det D^{(\mu)}$ benutzt man folgende Produktzerlegungen, die im wesentlichen wie in [2], S. 945 zu beweisen sind:

Satz. $\det D^{(\mu)} = \det C^{(\mu)} \det S^{(\mu)} \quad (\mu = 0, 1),$ (1.6)

hierbei

$$C^{(0)} = (c^0_{n,m})^{\infty}_{n,m=0},$$

$$c^{(0)}_{n,m} = \begin{cases} \delta_{0,m}\lambda + t_m & (n = 0,\ m \in \mathbb{N}), \\ \delta_{n,m}\left(1 - \frac{\lambda}{4n^2}\right) - \frac{t_{n-m} + t_{n+m}}{4n^2} & (n \neq 0,\ m \in \mathbb{N}), \end{cases}$$

ferner

$$S^{(0)} = \left(\delta_{n,m}\left(1 - \frac{\lambda}{4n^2}\right) - \frac{t_{n-m} - t_{n+m}}{4n^2}\right)^{\infty}_{n,m=1},$$

$$C^{(1)} = \left(\delta_{n,m}\left(1 - \frac{\lambda}{(2n+1)^2}\right) - \frac{t_{n-m} + t_{n+m+1}}{(2n+1)^2}\right)^{\infty}_{n,m=0},$$

$$S^{(1)} = \left(\delta_{n,m}\left(1 - \frac{\lambda}{(2n+1)^2}\right) - \frac{t_{n-m} - t_{n+m+1}}{(2n+1)^2}\right)^{\infty}_{n,m=0}.$$

Die Sätze (1.4) und (1.6) lassen sich - unter Verwendung der in [4] bereitgestellten Hilfsmittel - ebenso beweisen, wenn $g \in \mathfrak{L}^2[0,\pi]$ die schwächere Bedingung

$$\sum_{\kappa=1}^{\infty} |t_\kappa|^2 < \infty$$

erfüllt: in diesem Fall besitzen nämlich die auftretenden Matrizen noch die Eigenschaft (1). - Wir betrachten hier jedoch den Fall der endlichen Hillschen Differentialgleichung, d.h. mit

$$g(x) = \sum_{\kappa=1}^{k} (2t_\kappa)\cos(2\kappa x), \tag{1.7}$$

also $t_\kappa = 0$ für $\kappa \geqq k+1$. Dann sind $S^{(\mu)}$ und $C^{(\mu)}$ unendliche Bandmatrizen der Bandbreite $2k+1$, ab der Zeile Nr. $k+1$ stimmen $S^{(\mu)}$ und $C^{(\mu)}$ miteinander überein. - Aus technischen Gründen ergänzt man in $S^{(0)}$ als Zeile und Spalte Nr. 0 die erste Einheitszeile bzw. -spalte, so daß dann auch in $S^{(0)}$ die Indizierung mit Null beginnt. - Zur Berechnung der Determinanten definieren wir B zu $A = S^{(\mu)}$ bzw. $C^{(\mu)}$ gemäß (3), wobei wir nach Mennicken [3] folgende konvergenzverbessernde Faktoren verwenden:

$$1-\beta_n := (1-\eta_n)\prod_{\kappa=1}^{k}(1-\beta_{n,\kappa})\prod_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{k}(1-\xi_{n,p,q}) \tag{1.8}$$

mit

$$1-\eta_n := 1-\frac{\lambda}{4n'^2} \qquad (n \geqq 1-\mu),$$

$$1-\beta_{n,\kappa} := 1-\frac{t_\kappa^2}{((2n'-2\kappa)(2n')-\lambda)^2} \qquad \left(n \geqq \left[\frac{\kappa-\mu}{2}\right]+1\right)$$

$$1-\xi_{n,p,q} := 1-\frac{\xi_{p,q}}{\left(n'-\frac{p+q}{3}\right)^6} \qquad \left(n \geqq \left[\frac{p+q-2}{3}\right]+1\right);$$

hierbei seien für $n \in \mathbb{N}$

$$n' := n + \frac{\mu}{2}$$

sowie

$$\xi_{p,q} := \frac{t_p t_q t_{q-p}}{2^5} \qquad (1 \leqq p < q \leqq k) \tag{1.9}$$

definiert. Für die nicht aufgeführten kleineren n sind die genannten Faktoren gleich 1 zu setzen. Falls der Nenner in einem $1-\beta_{n,\kappa}$ zu klein wird oder $1-\beta_n$ nahe bei Null liegt, so sind für die betroffenen n Modifikationen anzuwenden, wie sie in Abschnitt 4 beschrieben werden; dort werden auch die unendlichen Produkte der $(1-\beta_n)$ angegeben.

2. Konvergenzverhalten der Abschnittsdeterminanten

Die Konvergenzgeschwindigkeit der $\det B_N$ wird durch Satz (6.11), (II) in [4] beschrieben. Die dort definierten γ'_N besitzen nämlich im hier betrachteten Fall die Eigenschaft $\gamma'_N = O(N^{-8})$ $(N \to \infty)$, wie an Hand von [3], S. 29 und S. 33/34 nachzurechnen ist. Aus diesem Grund konvergieren die gemäß [4], Satz (6.2) definierten

$$\gamma_N := (\alpha_{N,N} - z_N^{(2)t} D_N^{(2)^{-1}} s_N^{(2)}) - (1 - \beta_N) \tag{2.1}$$

für $N \to \infty$ mit der Geschwindigkeit $O(N^{-8})$. Offensichtlich sind die γ_N rationale Funktionen in N und daher mit einer Konstanten c in der Form

$$\gamma_N = c N^{-8} + O(N^{-9}) \tag{2.2}$$

darstellbar. Nach [4], (6.6) gilt für hinreichend große N

$$\det B_N - \det B_{N-1} = \frac{1}{1-\beta_N} \gamma_N \det B_{N-1} + \tilde{\rho}_N^{(2)}, \tag{2.3}$$

wobei $\tilde{\rho}_N^{(2)} = O(N^{-10})$ $(N \to \infty)$. Hieraus folgt – da die Folge der $\det B_{N-1}$ beschränkt ist – zunächst

$$\det B - \det B_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} (\det B_n - \det B_{n-1}) = O(N^{-7}) \qquad (N \to \infty), \tag{2.4}$$

und weiter wegen (2.2), (2.3)

$$\det B_N - \det B_{N-1} = c \cdot \det B \cdot N^{-8} + O(N^{-9}) \qquad (N \to \infty). \tag{2.5}$$

Wenn wir beachten, daß

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} n^{-8} = \tfrac{1}{7} N^{-7} + O(N^{-8}).$$

so liefert (2.4) in Verbindung mit (2.5) das Konvergenzverhalten

$$\det B - \det B_N = \frac{c}{7} \det B \cdot N^{-7} + O(N^{-8}) \qquad (N \to \infty). \tag{2.6}$$

Unter Benutzung von (2.5) folgt hieraus die asymptotische Darstellung

$$\det B = \det B_N + \frac{N}{7} (\det B_N - \det B_{N-1}) + O(N^{-8}) \tag{2.7}$$

Ein Vergleich mit (2.4) zeigt, daß die Werte

$$\det B_N + \frac{N}{7} (\det B_N - \det B_{N-1}) \tag{2.8}$$

wenigstens für größere N bessere Näherungswerte für $\det B$ als die $\det B_N$ selbst liefern: dies wird auch durch die Beispiele in Abschnitt 5 bestätigt.

Fehlerabschätzungen für die Näherungswerte $\det B_N$ von $\det B$ lassen sich ohne prinzipielle Schwierigkeiten aus (2.3) und (2.4) herleiten – vgl. auch die Ungleichung (6.10) in [4]. Eine konkrete Fehlerrechnung ist in [7] für den Fall der Mathieuschen Differentialgleichung durchgeführt. Hier jedoch werden die Fehlerschranken wegen der komplizierten Form der γ_N formelmäßig sehr lang und bei kleinerem N ziemlich grob: daher soll auf eine Durchführung verzichtet werden.

3. Numerische Berechnung der Abschnittsdeterminanten

Wegen der Bandstruktur von B lassen sich die $\det B_n$ theoretisch über gewisse mehrgliedrige Rekursionen bestimmen. Diese sind für die numerische Rechnung jedoch nur im Fall $k=1$, also der Mathieuschen Differentialgleichung zu empfehlen (vgl. [6, 7]), da sie sonst formelmäßig zu kompliziert und möglicherweise numerisch instabil sind. Für den Fall $k \geqq 2$ schlagen wir daher Gauß-Elimination mit einer unten genauer beschriebenen Spaltenpivotsuche vor, bei der bekanntlich nur Zeilenvertauschungen auftreten. In Anlehnung an [5], S. 34 bzw. S. 36 bezeichnen wir für $n \in \mathbb{N}$ die nach n Eliminationsschritten aus B entstandene Matrix mit

$$C^{(n)} = (c_{i,j}^{(n)})_{i,j=0}^{\infty} = (\gamma_{\pi_n(i),j}^{(n)})_{i,j=0}^{\infty}.$$

Wie man auf Grund der Bandstruktur von B induktiv zeigt, verändert der $(n+1)$-te Eliminationsschritt nur die $(k+1, 2k+1)$-Teilmatrix

$$\tilde{C}^{(n)} := (c_{i,j}^{(n)})_{\substack{n \leqq i \leqq n+k \\ n \leqq j \leqq n+2k}}$$

von $C^{(n)}$. Es ergibt sich die

Folgerung. *Jeder Eliminationsschritt erfordert $k \cdot (2k+1)$ Multiplikationen bzw. Divisionen.* (3.1)

Die Pivotelemente verwendet man für die rekursive Berechnung von

$$\delta_n := \operatorname{sign} \pi_{n+1} \prod_{\kappa=0}^{n} \gamma_{\pi_{\kappa+1}(\kappa),\kappa}^{(\kappa+1)} \qquad (n \in \mathbb{N}). \tag{3.2}$$

Nach Durchführung des $(n+1)$-ten Eliminationsschrittes und Bestimmung von δ_n erhält man $\tilde{C}^{(n+1)}$ durch Weglassen der Pivotzeile und Ergänzung der Zeile Nr. $(n+k+1)$ von B: So benötigt das gesamte Eliminationsverfahren im wesentlichen $(k+1)(2k+1)$ Speicherplätze.

Die angekündigte Variante der Spaltenpivotwahl dient dem Zweck, die $\det B_n$ möglichst einfach aus den δ_n herleiten zu können, ohne daß das Verfahren – wie bei diagonaler Pivotwahl – numerisch instabil wird. Wir wenden hierzu in den ersten (n_1+1) Eliminationsschritten die übliche halbmaximale Pivotwahl an, wozu wir $n_1 \in \mathbb{N}$ – wie unten näher erläutert wird – geeignet wählen. Für die folgenden $k-1$ Eliminationsschritte, also für die Schritte Nr.

$$n+1 = n_1 + 1 + \kappa \qquad (\kappa = 1, 2, \ldots, k-1)$$

wählen wir als Pivotelement jeweils das betragliche Maximum der Komponenten

$$n, n+1, \dots, n+k-\kappa \quad (=n_1+k)$$

der Spalte Nr. n; danach berücksichtigen wir, wie bereits beim Schritt Nr. n_1+k, nur noch die Komponenten n und $n+1$ der n-ten Spalte. Die resultierenden Zeilenpermutationen besitzen folgende Eigenschaften: Für alle $1 \leqq n+1 \leqq n_1+1$ gilt

$$\{\pi_{n+1}(0), \dots, \pi_{n+1}(n)\} \subset \{\pi_{n+1}(0), \dots, \pi_{n+1}(n+k)\} = \{0, 1, \dots, n+k\}, \tag{3.3.1}$$

ferner für alle $n_1+2 \leqq n+1 \leqq n_1+k$

$$\{\pi_{n+1}(0), \dots, \pi_{n+1}(n)\} \subset \{\pi_{n+1}(0), \dots, \pi_{n+1}(n_1+k)\} = \{0, 1, \dots, n_1+k\} \tag{3.3.2}$$

und schließlich für alle $n+1 \geqq n_1+k$

$$\{\pi_{n+1}(0), \dots, \pi_{n+1}(n)\} \subset \{\pi_{n+1}(0), \dots, \pi_{n+1}(n+1)\} = \{0, 1, \dots, n+1\}. \tag{3.3.3}$$

Auf Grund der letzteren Gleichung und wegen der oberen Dreiecksgestalt der aus den Zeilen $0.1, \dots, n+1$ von $C^{(n+1)}$ gebildeten Matrix hat man für jedes $n+1 \geqq n_1+k$

$$\det B_{n+1} = \operatorname{sign} \pi_{n+1} \prod_{\kappa=0}^{n+1} c_{\kappa,\kappa}^{(n+1)} = \delta_n \cdot \gamma_{\pi_{n+1}(n+1),n+1}^{(n+1)}. \tag{3.4}$$

Dies bedeutet, daß man für alle $n \geqq n_1+k$ die $\det B_n$ durch jeweils eine zusätzliche Multiplikation aus den δ_{n-1} erhält. Offenbar sind die in den Eliminationsschritten $n+1 \geqq n_1+2$ bei der Pivotwahl nicht berücksichtigten Koeffizienten der n-ten Spalte aus Außerdiagonalelementen von B entstanden und daher erwartungsgemäß klein: aus diesem Grund sollte das beschriebene Verfahren numerisch gutartig sein. Hierzu beweisen wir den folgenden

Satz. *Es sei* $\det B \neq 0$ *vorausgesetzt. Falls dann* n_1 *genügend groß gewählt ist, liefert das beschriebene Eliminationsverfahren von Null verschiedene Pivotelemente, und es gilt für hinreichend große* n

$$\delta_n = \det B_n. \tag{3.5}$$

Beweis. Zur Matrix $B = (b_{i,j})_{i,j=0}^{\infty}$ definieren wir $P > 0$ durch

$$P^2 := \prod_{j=0}^{\infty} \left\{ \prod_{i=0}^{\infty} (\delta_{i,j} + |b_{i,j} - \delta_{i,j}|)^2 \right\},$$

ferner seien $\tilde{b}_j$ ($j \in \mathbb{N}$) die Spalten von $\tilde{B} := (b_{i,j} - \delta_{i,j} b_{i,i})_{i,j=0}^{\infty}$. Dann gewinnen wir aus der Hadamardschen Determinantenabschätzung für $n \in \mathbb{N}$, $m \in \{0, 1, \dots, n\}$ folgende Ungleichung, in der wir die Bezeichnungen aus [4] verwenden,

$$\left| \left(\begin{matrix} m \\ n+1 \end{matrix} \middle| B_{n+1} \right) \right| \leqq P \, |\tilde{b}_{n+1}|_2. \tag{3.6}$$

Es sei $0<\eta<|\det B|$ vorgegeben. Wegen der Konvergenz der $\det B_n$ und wegen $|\tilde{b}_n|_2 \to 0$ existiert ein $N_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n \geqq N_0$, $m \in \{0, 1, \ldots, n\}$

$$\left|\left(\begin{matrix} m \\ n+1 \end{matrix}\middle| B_{n+1}\right)\right| < \eta \leqq |\det B_n|. \tag{3.7}$$

Wir zeigen, daß für jedes n_1 mit $n_1+k \geqq N_0$ sowie für alle $n+1 \geqq n_1+k$ die Behauptungen des Satzes gelten. Zunächst betrachten wir $n+1 := n_1+k$ $(\geqq N_0)$. Nach Konstruktion entsprechen die ersten $n+1$ Eliminationsschritte dem üblichen Gauß-Eliminationsverfahren mit halbmaximaler Pivotwahl bezüglich der Matrix B_{n+1}, durchgeführt bis zum vorletzten Schritt. Wegen $\det B_{n+1} \neq 0$ sind die ersten $n+1$ Pivotelemente und somit δ_n – zunächst für $n+1=n_1+k$ – von Null verschieden. Zum Nachweis von

$$\delta_{n+1} = \det B_{n+1} \qquad (\neq 0) \tag{3.8}$$

für jedes $n+1 \geqq n_1+k$ genügt es wegen (3.2) und (3.4) zu zeigen, daß

$$\pi_{n+2}(n+1) = \pi_{n+1}(n+1). \tag{3.9}$$

Letzteres ist wegen (3.3.3) und der Tatsache $\pi_{n+2}(n+1) \in \{\pi_{n+1}(n+1), n+2\}$ damit äquivalent, daß

$$\{\pi_{n+2}(0), \ldots, \pi_{n+2}(n+1)\} = \{0, 1, \ldots, n+1\}.$$

Wäre (3.9) verletzt, so existierte demnach ein $m \in \{0, 1, \ldots, n+1\}$ mit

$$\{m\} = \{0, 1, \ldots, n+2\} \setminus \{\pi_{n+1}(0), \ldots, \pi_{n+2}(n+1)\}.$$

Mit diesem m wäre dann wegen (3.7)

$$|\delta_{n+1}| = \left|\left(\begin{matrix} m \\ n+2 \end{matrix}\middle| B_{n+2}\right)\right| < |\det B_{n+1}|$$

und daher wegen (3.2), (3.4)

$$|\gamma^{(n+1)}_{\pi_{n+2}(n+1), n+1}| < |\gamma^{(n+1)}_{\pi_{n+1}(n+1), n+1}|,$$

dies steht jedoch im Widerspruch zur Pivotwahl. – Ergänzend vermerken wir, daß für alle $n+1 \geqq n_1+k$ wegen (3.9) $\pi_{n+2}(n+2) = n+2$ folgt; hiermit ergibt sich, wiederum aus (3.9), für alle $n+1 \geqq n_1+k+1$ schärfer $\pi_{n+2}(n+1) = n+1$, die Pivotelemente liegen also schließlich diagonal. Ferner läßt sich mit einer ähnlichen Determinantenabschätzung wie (3.6) zeigen, daß für die Eliminationsschritte $n+1 \geqq n_1+k+1$ die bei der Pivotwahl nicht berücksichtigten Koeffizienten der Spalte Nr. n kleiner als das Pivotelement sind: Daher sind die Eliminationsschritte numerisch stabil.

In der Praxis wird man n_1 so wählen, daß ab der Zeile Nr. n_1 in B die Diagonalelemente dominieren. In den meisten Fällen ist

$$n_1 = \max\{2k, [\sqrt{\lambda_+}]\} \qquad (\lambda_+ := \max\{0, \mathrm{Re}(\lambda)\}) \tag{3.10}$$

geeignet. Die Berechnung der $\det B_n$ wird beendet, sobald sich aufeinanderfolgende Werte nur noch wenig unterscheiden. In den Beispielen ist die folgende Stopbedingung verwendet:

$$|\det B_N - \det B_{N-1}| < \varepsilon \cdot \max\{|\det B_N|, 10^{-2}\}, \tag{3.11}$$

hierbei ist $\varepsilon \geqq 10^2\,\tau$ ($\tau := $ Rechengenauigkeit) vorzugeben.

4. Berechnung der unendlichen Produkte

Im Folgenden werden geschlossene Ausdrücke für die unendlichen Produkte der in (1.8) definierten Faktoren anzugeben. Zunächst sind die Gleichungen

$$\prod_{n=0}^{\infty} (1-\eta_n) = \begin{cases} \left(\dfrac{\pi}{2}\sqrt{\lambda}\right)^{-1} \sin\left(\dfrac{\pi}{2}\sqrt{\lambda}\right), & \text{fall } \mu=0, \\ \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\sqrt{\lambda}\right), & \text{falls } \mu=1, \end{cases} \tag{4.1}$$

bekannt. Bezüglich der $1-\beta_{n,\kappa}$ beachten wir, daß

$$(2n'-2\kappa)(2n') - \lambda = (2n'-\kappa)^2 - (\lambda+\kappa^2).$$

Dies führt für $n \geqq \left[\dfrac{\kappa-\mu}{2}\right] + 1$ zu der Faktorzerlegung

$$1-\beta_{n,\kappa} = \left(1 - \frac{\lambda+\kappa^2+t_\kappa}{(2n'-\kappa)^2}\right)\left(1 - \frac{\lambda+\kappa^2-t_\kappa}{(2n'-\kappa)^2}\right)\left(1 - \frac{\lambda+\kappa^2}{(2n'-\kappa)^2}\right)^{-2} \tag{4.2}$$

und daher -vgl. [3], S. 30 - zu folgenden Beziehungen

$$\begin{aligned} &\prod_{n=0}^{\infty} (1-\beta_{n,\kappa}) \\ &= \frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\sqrt{\lambda+\kappa^2-t_\kappa}\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\sqrt{\lambda+\kappa^2+t_\kappa}\right)}{\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2}\sqrt{\lambda+\kappa^2}\right)}, \quad \text{falls } \mu-\kappa \text{ ungerade,} \\ &= \frac{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\sqrt{\lambda+\kappa^2-t_\kappa}\right)}{\sqrt{\lambda+\kappa^2-t_\kappa}} \; \frac{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\sqrt{\lambda+\kappa^2+t_\kappa}\right)}{\sqrt{\lambda+\kappa^2+t_\kappa}} \; \frac{\lambda+\kappa^2}{\sin^2\left(\dfrac{\pi}{2}\sqrt{\lambda+\kappa^2}\right)} \quad \text{sonst.} \end{aligned} \tag{4.3}$$

Für die Behandlung der $(1-\xi_{n,p,q})$ stellen wir folgende Hilfssätze bereit:

Hilfssatz. *Für* $x \in \mathbb{C}$ *gilt*

$$\text{(i)} \quad \prod_{\kappa=1}^{2} \sin\left(x e^{\frac{\kappa\pi i}{3}}\right) = \tfrac{1}{2}(\cos x - \operatorname{Cosh}(\sqrt{3}x))$$

$$= -\left(\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) + \operatorname{Sinh}^2\left(\sqrt{3}\frac{x}{2}\right)\right), \tag{4.4}$$

$$\text{(ii)} \quad \prod_{\kappa=1}^{2} \cos\left(x e^{\frac{\kappa\pi i}{3}}\right) = \tfrac{1}{2}(\cos x + \operatorname{Cosh}(\sqrt{3})).$$

Beweis. Die 1. Gleichung ist wegen

$$\sin\left(x e^{\frac{\pi i}{3}}\right)\sin\left(x e^{\frac{2\pi i}{3}}\right) = \tfrac{1}{2}\cos\left(x\left(e^{\frac{\pi i}{3}} - e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)\right) - \tfrac{1}{2}\cos\left(x\left(e^{\frac{\pi i}{3}} + e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)\right)$$

sowie

$$e^{\frac{\pi i}{3}} - e^{\frac{2\pi i}{3}} = 1, \qquad e^{\frac{\pi i}{3}} + e^{\frac{2\pi i}{3}} = i \cdot \sqrt{3}$$

klar; analog wird Gleichung (ii) bewiesen. Die zweite unter (i) notierte Identität, die sich aus

$$\cos x - \operatorname{Cosh}(\sqrt{3}\,x) = (1 - \cos(i\sqrt{3}\,x)) - (1 - \cos x)$$
$$= 2\sin^2\left(i\sqrt{3}\frac{x}{2}\right) - 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

ergibt, liefert einen auch für kleine x numerisch stabilen Ausdruck.

Hilfssatz. *Für* $x \in \mathbb{C}$ *gilt*

$$\text{(i)} \quad \prod_{n=1}^{\infty} \cdot \left\{\left(1 - \frac{x^2}{(n-\frac{1}{3})^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{(n-\frac{2}{3})^2}\right)\right\} = \frac{1}{3}\,\frac{\sin(3\pi x)}{\sin(\pi x)} = \tfrac{1}{3}(4\cos^2(\pi x) - 1),$$
$$\text{(ii)} \quad \prod_{n=1}^{\infty} \left\{\left(1 - \frac{x^2}{(n-\frac{5}{6})^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{(n-\frac{1}{6})^2}\right)\right\} = \frac{\cos(3\pi x)}{\cos(\pi x)} = 4\cos^2(\pi x) - 3. \tag{4.5}$$

Beweis. Mit $y := 3x$ ist im Fall $x \notin \mathbb{Z}$ die linke Seite von (i) gleich

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left\{\left(1 - \frac{y^2}{(3n-1)^2}\right)\left(1 - \frac{y^2}{(3n-2)^2}\right)\right\} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{y^2}{n^2}\right)\left\{\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{y^2}{(3n)^2}\right)\right\}^{-1}$$
$$= \frac{\sin(\pi y)}{\pi y}\left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right)^{-1} = \frac{1}{3}\,\frac{\sin(3\pi x)}{\sin(\pi x)} = \tfrac{1}{3}(4\cos^2(\pi x) - 1).$$

Aus Stetigkeitsgründen ist der letztere Ausdruck auch im Fall $x \in \mathbb{Z}$ verwendbar. - Die linke Seite von (ii) lautet

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left\{\left(1 - \frac{y^2}{(3n-\frac{5}{2})^2}\right)\left(1 - \frac{y^2}{(3n-\frac{1}{2})^2}\right)\right\},$$

dieser Ausdruck läßt sich auf Grund der Tatsache

$$\{(3n-\tfrac{5}{2}) \colon n \in \mathbb{N}_+\} \cup \{(3n-\tfrac{1}{2}) \colon n \in \mathbb{N}_+\} = \{n-\tfrac{1}{2} \colon n \in \mathbb{N}_+\} \setminus \{3(n-\tfrac{1}{2}) \colon n \in \mathbb{N}_+\}$$

analog dem Fall (i) behandeln.

Zu den in (1.9) definierten $\xi_{p,q}$ – dabei interessieren nur die von Null verschiedenen – definieren wir $\eta_{p,q}$ als 6. Wurzeln wie folgt:

$$\eta_{p,q}=\begin{cases}\sqrt[6]{\xi_{p,q}}_{+}, & \text{falls } \xi_{p,q}>0,\\ i\sqrt[6]{-\xi_{p,q}}_{+}, & \text{falls } \xi_{p,q}<0,\\ \sqrt[6]{\xi_{p,q}} & \text{mit betragskleinstem Argument } \in]-\pi,\pi], \\ & \text{falls } \xi_{p,q}\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}.\end{cases} \tag{4.6}$$

Hiermit wird dann

$$1-\xi_{n,p,q}=\prod_{\kappa=0}^{2}\left(1-\frac{(\eta_{p,q}e^{\frac{\kappa\pi i}{3}})^2}{\left(n'-\frac{p+q}{3}\right)^2}\right)\qquad\left(n\geqq\left[\frac{p+q-2\mu}{3}\right]+1\right) \tag{4.7}$$

Die Indizes (p,q) verteilen wir auf folgende Mengen:

$$K_j:=\{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\colon 1\leqq p<q\leqq k,\ p+q\equiv j \bmod k\}\qquad (j=0,1,2). \tag{4.8}$$

Dann gilt im Fall $(p,q)\in K_0$ auf Grund von (4.7)

$$\prod_{n=0}^{\infty}(1-\xi_{n,p,q})=\prod_{\kappa=0}^{2}\left\{\prod_{n=1-\mu}^{\infty}\left(1-\frac{(\eta_{p,q}e^{\frac{\kappa\pi i}{3}})^2}{n'^2}\right)\right\},$$

hierzu liefert uns Hilfssatz (4.4) die

Folgerung. *Für* $(p,q)\in K_0$ *hat man*

$$\prod_{n=0}^{\infty}(1-\xi_{n,p,q})=\begin{cases}\dfrac{\sin(\pi\eta_{p,q})}{(\pi\eta_{p,q})^3}\left\{\sin^2\left(\dfrac{\pi}{2}\eta_{p,q}\right)+\operatorname{Sinh}^2\left(\dfrac{\pi}{2}\sqrt{3}\,\eta_{p,q}\right)\right\} & (\mu=0),\\ \frac{1}{2}\cos(\pi\eta_{p,q})\{\cos(\pi\eta_{p,q})+\operatorname{Cosh}(\pi\sqrt{3}\,\eta_{p,q})\} & (\mu=1).\end{cases} \tag{4.9}$$

Wir kommen zur Behandlung der $(p,q)\in K_1\cup K_2$, die übrigens nur im Fall $k\geqq 3$ auftreten. Zunächst ist auf Grund der Definitionen (1.8), (1.9)

$$\prod_{n=0}^{\infty}(1-\xi_{n,p,q})=\begin{cases}\prod\limits_{n=1-\mu}^{\infty}\left(1-\dfrac{\xi_{p,q}}{(n'-\frac{1}{3})^6}\right) & ((p,q)\in K_1)\\ \prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{\xi_{p,q}}{(n'-\frac{2}{3})^6}\right) & ((p,q)\in K_2),\end{cases}$$

ferner überzeugt man sich leicht, daß

$$K_2=\{(q-p,q)\colon (p,q)\in K_1\},$$

und schließlich gilt nach der in (1.9) gegebenen Definition

$$\xi_{q-p,q}=\xi_{p,q} \qquad (1\leqq p<q\leqq k).$$

Dies zusammen liefert folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned}
&\prod_{(p,q)\in K_1\cup K_2}\left\{\prod_{n=0}^{\infty}(1-\xi_{n,p,q})\right\}\\
&=\prod_{(p,q)\in K_1}\left(\prod_{n=0}^{\infty}(1-\xi_{n,p,q})\right)\prod_{(p,q)\in K_1}\left(\prod_{n=0}^{\infty}(1-\xi_{n,q-p,q})\right)\\
&=\prod_{(p,q)\in K_1}\left\{\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\xi_{p,q}}{(n-\frac{1}{3})^6}\right)\left(1-\frac{\xi_{p,q}}{(n-\frac{2}{3})^6}\right)\right\}, \qquad \text{falls } \mu=0,\\
&=\prod_{(p,q)\in K_1}\left\{\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\xi_{p,q}}{(n-\frac{5}{6})^6}\right)\left(1-\frac{\xi_{p,q}}{(n-\frac{1}{6})^6}\right)\right\}, \qquad \text{falls } \mu=1.
\end{aligned}$$

Die hierin auftretenden Faktoren sind zu zerlegen, wie es vor (4.9) durchgeführt ist, anschließend sind die Hilfssätze (4.5) und (4.4) anzuwenden; das Ergebnis ist die

Folgerung.

$$\begin{aligned}
&\prod_{(p,q)\in K_1\cup K_2}\left\{\prod_{n=0}^{\infty}(1-\xi_{n,p,q})\right\}\\
&=\prod_{(p,q)\in K_1}\left\{\tfrac{1}{27}(4\cos^2(\pi\eta_{p,q})-1)\frac{\sin^2\left(3\frac{\pi}{2}\eta_{p,q}\right)+\operatorname{Sinh}^2\left(3\sqrt{3}\frac{\pi}{2}\eta_{p,q}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\eta_{p,q}\right)+\operatorname{Sinh}^2\left(\sqrt{3}\frac{\pi}{2}\eta_{p,q}\right)}\right\} \quad (\mu=0),\\
&=\prod_{(p,q)\in K_1}\left\{(4\cos^2(\pi\eta_{p,q})-3)\frac{\cos(3\pi\eta_{p,q})+\operatorname{Cosh}(3\sqrt{3}\,\pi\eta_{p,q})}{\cos(\pi\eta_{p,q})+\operatorname{Cosh}(\sqrt{3}\,\pi\eta_{p,q})}\right\} \quad (\mu=1).
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Durch die in (4.6) getroffene Auswahl der $\eta_{p,q}$ im Fall $\xi_{p,q}\neq 0$ ist gewährleistet, daß die in Hilfssatz (4.4) bezüglich $x=\pi\eta_{p,q}$ auftretenden Größen und daher auch die Nenner in (4.10) von Null verschieden sind. Darüberhinaus sind im Fall $\xi_{p,q}\in\mathbb{R}$ die in (4.9) und (4.10) auftretenden Ausdrücke reell berechenbar.

Für kleinere $n\in\mathbb{N}$ ist nicht auszuschließen, daß die nach (1.8) definierten $(1-\beta_n)$ nahe bei Null liegen oder daß in den $(1-\beta_{n,\kappa})$ kleine Nenner auftreten: Beide Effekte verursachen große relative Fehler in den Koeffizienten von B und daher numerische Instabilität bei der Berechnung von $\det A$ mittels (4). Aus diesem Grund gibt man sich ein geeignetes $0<\sigma\leqq\frac{1}{2}$ vor und untersucht – wenigstens für alle kleineren n –, ob einzelne Faktoren der Zerlegungen (1.8), (4.2) und (4.7) betraglich kleiner als σ werden bzw. ob der Nenner von $1-\beta_{n,\kappa}$ und damit das Inverse des 3. Faktors in (4.2) klein wird. Die so ermittelten Faktoren sind dann durch 1 zu ersetzen. Bei geeignet gewähltem σ kann nach Hilfssatz (22) in [7] jeder der erwähnten Faktoren für höchstens ein $n_0\in\mathbb{N}$ kleiner als σ werden. Die unendlichen Produkte der so modifizierten $1-\beta_n$ werden unter

Benutzung der in [7], Formel (24) angegebenen numerisch stabilen Ausdrücke für

$$P(n_0, b, \mu) := \prod_{\substack{n=1 \\ n \neq n_0}}^{\infty} \left(1 - \frac{b}{\left(n - \frac{\mu}{2}\right)^2}\right) \qquad (b \in \mathbb{C},\ n_0 \in \mathbb{N},\ \mu \in \{0, 1\}) \tag{4.11}$$

bestimmt. Hiermit sind die Modifikationen von (4.1) und (4.3) unmittelbar klar. In der Produktzerlegung (4.7) der $1 - \xi_{n,p,q}$ kann auf Grund der Wahl (4.6) von $\eta_{p,q}$ höchstens der mit $\kappa = 0$ indizierte Faktor kleiner als σ ($\leqq \frac{1}{2}$) werden. Somit sind – zunächst im Fall $(p, q) \in K_0$ – die Modifikationen von (4.9) leicht aufzuschreiben. Zu untersuchen bleibt der Fall $(p, q) \in K_1 \cup K_2$: wir nehmen speziell an, es sei $(p, q) \in K_1$, $\mu = 0$, und es gelte mit einem $n_0 \in \mathbb{N}$

$$\left| 1 - \frac{9\eta_{p,q}^2}{(3n_0 - 1)^2} \right| < \sigma. \tag{4.12}$$

Bei hinreichend kleinem σ ist dann für alle $3n_0 - 1 \neq n \in \mathbb{N}$ die linke Seite von (4.12) mit dem Nenner n^2 an Stelle von $(3n_0 - 1)^2$ nicht kleiner als σ. Folglich gibt es unter den $1 - \xi_{n,q-p,q}$ ($n \in \mathbb{N}$) – hier treten Nenner $(3n-2)^2$ auf – keinen zu kleinen Wert, außerdem gilt $\eta_{p,q} \notin \mathbb{Z}$. In (4.10), Zeile $\mu = 0$, ist somit für das betrachtete (p, q) der Faktor $\frac{1}{3}(4\cos^2(\pi\eta_{p,q}) - 1)$ zu ersetzen durch

$$\prod_{\substack{n=1 \\ n \neq n_0}}^{\infty} \left(1 - \frac{9\eta_{p,q}^2}{(3n-1)^2}\right) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{9\eta_{p,q}^2}{(3n-2)^2}\right)$$

$$= P(3n_0 - 1, 9\eta_{p,q}^2, 0) \frac{\pi\eta_{p,q}}{\sin(\pi\eta_{p,q})}.$$

Analog werden die Modifikationen in den Fällen $(p, q) \in K_2$ oder $\mu = 1$ behandelt.

5. Beispiele

Das beschriebene Verfahren wurde in FORTRAN programmiert; hiermit wurden auf der TR 440 des Rechenzentrums der Universität Regensburg unter Benutzung der eingebauten doppeltgenauen Arithmetik, die etwa einer 25-stelligen Dezimal-Arithmetik entspricht, zahlreiche Beispiele gerechnet. Wir erläutern hier die Ergebnisse folgender Beispiele (vgl. auch [8]):

Beispiel I (Hill [1])

$k = 3$

$\lambda = 1{,}1588439396$

$t_1 = -0{,}05704401875$

$t_2 = 0{,}00028323800$

$t_3 = -0{,}00000917329$

Beispiel II

$k = 2, 4, 10$

$\lambda = 17{,}2$

$t_\kappa = \frac{1}{\kappa^2}$ ($\kappa = 1, 2, \ldots, k$)

Da im Beispiel I der charakteristische Exponent ziemlich nahe bei 1 liegt, werden zu seiner Berechnung die Determinanten von $S^{(1)}$, $C^{(1)}$ herangezogen, während in den Beispielen II die Verwendung von $S^{(0)}$, $C^{(0)}$ günstiger ist. In der folgenden Tabelle ist zum vorgegebenen ε jeweils dasjenige $N \geqq n_1 + k$ – hierbei ist n_1 gemäß (3.10) gewählt – angegeben, mit dem für die zu $S^{(\mu)}$ und $C^{(\mu)}$ gehörenden Folgen von $\det B_n$ die Stopbedingung (3.11) zum erstenmal gleichzeitig erfüllt ist. Die unter a) angegebenen Werte für v sind unter Verwendung der $\det B_N$ berechnet, während für b) die verbesserten Näherungen (2.8) von $\det B$ benutzt sind; die signifikanten Dezimalstellen sind unterstrichen. Die Spalte RZ enthält die gemessene Rechenzeit in Sekunden.

Zum Vergleich wurde auch das in [8] diskutierte Taylor-Verfahren auf die Beispiele angewendet. In der Tabelle angegeben sind die Zahl N der benutzten Teilintervalle, ferner die Ordnung p, zum vorgegebenen ε ermittelt nach der auf S. 40 in [8] angegebenen Vorschrift, und schließlich die benötigte Rechenzeit. Die über das Taylor-Verfahren berechneten Werte für v sind hier nicht aufgeführt, ihre Genauigkeit entspricht etwa den Werten b).

Tabelle 1

Beispiel	ε	Determinantenmethode			Taylor-Verfahren		
		N	v	RZ	N	p	RZ
I	10^{-11}	9	a) 0,928416722605 b) 0,928416722561	0,17	5	14	0,24
	10^{-19}	72	a) 0,9284167225828297330037 b) 0,928416722582829733105	0,86	6	21	0,34
II, 2	10^{-11}	24	a) 0,143367405297042 b) 0,143367405293142	0,20	15	13	0,43
	10^{-19}	217	a) 0,14336740529398548282 b) 0,1433674052939854823 77	1,48	20	18	0,76
II, 4	10^{-11}	25	a) 0,143209726738 44 b) 0,14320972673479	0,51	15	14	0,48
	10^{-19}	225	a) 0,1432097267355812275 61 b) 0,1432097267355812271 02	3,63	20	20	0,94
II, 10	10^{-11}	30	a) 0,143198013405981 b) 0,143198013404890	2,92	15	19	0,79
	10^{-19}	225	a) 0,1431980134051061056 38 b) 0,1431980134051061051 78	17,3	24	23	1,41

Folgende Tatsachen werden an Hand der Tabelle bestätigt: die v-Werte unter b) sind in keinem Fall schlechter als die Werte a), daher ist die Anwendung von (2.8) generell zu empfehlen. Eine spürbare Verbesserung der Genauigkeit tritt jedoch nur in Fällen $N \geqq 50$ ein. Beim Übergang von $\varepsilon = 10^{-11}$ auf $\varepsilon = 10^{-19}$ wird in der Determinantenmethode die Stopbedingung bei etwa 10fachem N erreicht – entsprechend verlängert sich hier die Rechenzeit –, während sich beim Taylor-Verfahren die Rechenzeit höchstens verdoppelt. Letzteres ist ein Vorzug der variablen Konvergenzordnung des Taylor-Verfahrens. Außerdem wächst in der Determinantenmethode der Rechenaufwand pro Eliminationsschritt gemäß (3.1) mit k^2, wobei k die Anzahl der Parameter t_κ bedeutet, und auch die Zahl der konvergenzerzeugenden Faktoren $1-\zeta_{n,p,q}$ ist proportional zu k^2. Im Taylor-Verfahren hingegen hängt lediglich der Rechenaufwand bei Berechnung der $g^{(\kappa)}(x)$, und zwar linear, von k ab. Hierzu vergleiche man die Rechenzeiten der Beispiele II, 2), II, 4) und II, 10)!

Hinsichtlich der erreichbaren Genauigkeit erweist sich die Determinantenmethode dem Taylor-Verfahren als durchaus ebenbürtig. Bei größerer Anzahl k der Parameter oder bei einer gewünschten Genauigkeit von mehr als 10 Dezimalstellen ist das Taylor-Verfahren jedoch deutlich schneller. Für den Fall der Mathieuschen Differentialgleichung ist hingegen die in [7] angegebene Determinantenmethode höherer Konvergenzordnung durchweg schneller als das Taylor-Verfahren.

Das zur Berechnung des charakteristischen Exponenten inverse Problem besteht darun, bei festem $g(x)$ zu vorgegebenem ν (meistens $\nu=0$ oder 1) solche λ zu bestimmen, daß ν charakteristischer Exponent von (1.1) wird. Zur Lösung dieser Eigenwertaufgabe sind - in Verbindung mit einem Verfahren der Nullstellenbestimmung - sowohl die Determinantenmethode wie auch das Taylor-Verfahren geeignet. Näheres hierzu soll in einer folgenden Arbeit diskutiert werden.

Der Autor dankt Herrn Mennicken für die Anregung zu der vorliegenden Arbeit.

Literatur

1. Hill, G.W.: On the part of the motion of the lunar perigee, which is a function of the mean motions of the sun and the moon. Acta Math. **8**, 1–36 (1886)
2. Magnus, W.: Infinite determinants associated with Hill's equation. Pacific J. Math. **5**, Suppl. 2, 941–951 (1955),
3. Mennicken, R.: On the convergence of infinite Hill-type determinants. Arch. Rational Mech. Anal. **30**, 12–37 (1968)
4. Mennicken, R., Wagenführer, E.: Über die Konvergenz verallgemeinerter Hillscher Determinanten. Math. Nachr. **72**, 21–49 (1976)
5. Mennicken R., Wagenführer, E.: Numerische Mathematik 1. Reinbek: Rowohlt-Vieweg 1976
6. Schäfke, F.W., Schmidt, D.: Ein Verfahren zur Berechnung des charakteristischen Exponenten der Mathieuschen Differentialgleichung, III. Numer. Math. **8**, 68–71 (1966)
7. Wagenführer, E.: Ein Verfahren höherer Konvergenzordnung zur Berechnung des charakteristischen Exponenten der Mathieuschen Differentialgleichung. Numer. Math. **27**, 53–65 (1976)
8. Wagenführer, E., Lang, H.: Berechnung des charakteristischen Exponenten der endlichen Hillschen Differentialgleichung durch Numerische Integration Numer. Math. **32**, 31-50 (1979)
9. Whittaker, E.T., Watson, G.N.: A course of modern analysis. 4th ed., Cambridge: Cambridge University Press 1965

Received October 15, 1979/July 7, 1980