Über die Konvergenz verallgemeinerter HILLscher Determinanten

Von R. MENNICKEN und E. WAGENFÜHRER in Regensburg

(Eingegangen am 12. 8. 1974)

Einleitung

Um die Determinante einer unendlichen Matrix

$$A=(\alpha_{ij})_0^\infty \quad \text{bzw.} \quad A=(\alpha_{ij})_{-\infty}^{+\infty}$$

zu definieren, betrachtet POINCARÉ in [10] zu A die endlichen „Abschnittsmatrizen“

$$A_n=(\alpha_{ij})_0^n \quad \text{bzw.} \quad A_n=(\alpha_{ij})_{-n}^n$$

und hierzu die Folge $(\det A_n)_0^\infty$ der Determinanten dieser endlichen Matrizen A_n. Konvergiert diese Folge, so bezeichnet POINCARÉ diesen Grenzwert mit det A und spricht von der „unendlichen Determinante“ der Matrix A.

Speziell für die Klassen unendlicher Matrizen, deren Elemente der Bedingung

$$\sum_{i,j} |\alpha_{ij}-\delta_{ij}|<\infty \tag{0.1}$$

genügen, beweist POINCARÉ in [10] die Existenz dieses Grenzwertes, also die Existenz der unendlichen Determinante det A. Derartige unendliche Matrizen nennt VON KOCH, der hierzu in einer Reihe von Arbeiten – vgl. etwa [5], [6] – eine zur Theorie endlicher Matrizen völlig analoge Determinantentheorie entwickelt, normal; genauer spricht er nahezu ausschließlich von normalen unendlichen Determinanten. Wegen ihrer Bedeutung im Zusammenhang mit der HILLschen Differentialgleichung – siehe z. B. [8] oder [14] – bezeichnet sie MENNICKEN in [9] als (unendliche) HILLsche Matrizen bzw. Determinanten.

Die Ergebnisse von VON KOCH werden von BOBR in [1] und COHEN in [2], [3] auf die umfangreichere Klasse unendlicher Matrizen verallgemeinert, deren Elemente mit $1\leqq p,\ q\leqq\infty,\ 1/p+1/q=1$ die Summierbarkeitsbedingungen

$$\sum_i |\alpha_{ii}-1|<\infty, \qquad \sum_i \Big(\sum_j |\alpha_{ij}-\delta_{ij}|^p\Big)^{\frac{q}{p}}<\infty \tag{0.2}$$

erfüllen. Da (0.1) die Beziehungen (0.2) für beliebige zugelassene p, q nach sich zieht, bezeichnen die Verfasser derartige Matrizen als verallgemeinerte HILLsche Matrizen bzw. Determinanten.

Ausgehend von der Theorie FREDHOLMscher Integralgleichungen, entwickeln RUSTON [12], GROTENDIECK [4], LEZANSKI [7] und SIKORSKI [13] eine Determinantentheorie für gewisse lineare beschränkte Operatoren in (abstrakten) BANACHräumen. Wie LEZANSKI und SIKORSKI zeigen, umfaßt diese Theorie insbesondere die auf POINCARÉ und VON KOCH zurückgehende Determinantentheorie HILLscher Matrizen. Eine Spezialisierung auf die durch verallgemeinerte HILLsche Matrizen in l_q definierten linearen beschränkten Abbildungen wird nicht angegeben; sie scheint auch nicht ohne weiteres möglich.

Von besonderem Interesse für die Anwendung sind Kenntnisse über die Konvergenzeigenschaften unendlicher Determinanten, d. h. über die Konvergenzgeschwindigkeit der Folge $(\det A_n)_0^\infty$.

In [9] gibt MENNICKEN recht scharfe, für die Anwendung brauchbare Abschätzungen der Konvergenzgüte bei HILLschen Matrizen an. Ferner ermittelt er dort im Spezialfall HILLscher Bandmatrizen das asymptotische Verhalten der Folge der Abschnittsdeterminanten, was durch Abspalten geeigneter unendlicher Produkte die Möglichkeit der Konvergenzverbesserung schafft.

Ziel der vorliegenden Note ist die Ausdehnung der Ergebnisse aus [9] auf die umfangreichere Klasse der verallgemeinerten HILLschen Matrizen.

Hierzu werden in Abschnitt 1 einfache funktionalanalytische Eigenschaften derartiger Matrizen zusammengestellt.

Abschnitt 2 hat eine neue, nach Ansicht der Verfasser durchsichtigere Darstellung des aus [1] bzw. [2] bekannten Satzes über die Beschränktheit der Folge $(\det A_n)_0^\infty$, aus dem die Existenz der zugehörigen unendlichen Determinanten nahezu unmittelbar folgt, zum Inhalt.

Abschnitt 3 ist das Kernstück der Arbeit. Hier finden sich die bisher anscheinend unbekannten Abschätzungen der Konvergenzgüte der Determinanten verallgemeinerter HILLscher Matrizen, die im Fall HILLscher Matrizen gegebenenfalls sogar eine Verschärfung der Abschätzungen aus [9] darstellen.

In Abschnitt 4 sind einige elementare, auf den Ergebnissen von Abschnitt 3 gründende Bemerkungen zur Lösungstheorie der zu verallgemeinerten HILLschen Matrizen zugehörigen (unendlichen) Gleichungssysteme notiert.

In Abschnitt 5 studieren die Verfasser speziell verallgemeinerte HILLsche Bandmatrizen. Durch Verfeinerung der Beweismethode aus Abschnitt 3 wird für derartige unendliche Matrizen das asymptotische Verhalten der zugehörigen Folge der Abschnittsdeterminanten ermittelt. Die Art der Herleitung ist wesentlich durchsichtiger als die Methode, die MENNICKEN in [9] im Spezialfall HILLscher Matrizen angewandt hat; zusätzlich ist das Ergebnis sogar in diesem Spezialfall weit allgemeiner.

Aufgrund dieser Resultate werden in Abschnitt 6 ähnlich wie in [9] Möglichkeiten der Konvergenzverbesserung diskutiert, die über die in [9] gewonnenen noch hinausgehen.

Anwendungen auf die HILLsche Differentialgleichung werden nachfolgende Arbeiten von WAGENFÜHRER bringen. Dort werden zunächst die von MENNICKEN in [9] angegebenen Verfahren zur Berechnung der charakteristischen Exponenten ergänzt und numerisch diskutiert; ferner wird für die MATHIEUsche Differentialgleichung ein Verfahren höherer Konvergenzordnung mitgeteilt.

1. Verallgemeinerte HILLsche Matrizen

Es sei $1 \leqq p \leqq \infty$, n eine natürliche Zahl. Dann ist für $c = (\gamma_i)_{i=1}^n \in \boldsymbol{C}^n$ durch

$$(1.1) \qquad |c|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |\gamma_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

eine Norm im $\boldsymbol{C}^n$ definiert, wobei für $p = \infty$ der in (1.1) rechts stehende Ausdruck als $\sup \{|\gamma_i| : i = 1, \ldots, n\}$ zu interpretieren ist. Wir bezeichnen

$$(1.2) \qquad l_p^n = (\boldsymbol{C}^n, |\ |_p) .$$

Für das Folgende seien p, q gegeben mit

$$(1.3) \qquad 1 \leqq q \leqq p \leqq \infty ; \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 .$$

Es sei nun $B = (\beta_{ij})_{(m,n)}$ eine komplexe (m, n)-Matrix, $c = (\gamma_i)_{i=1}^n \in l_q^n$, als Matrix mit einer Spalte aufgefaßt. Dann gilt

$$(1.4) \qquad Bc \in l_q^m, \ |Bc|_q \leqq |B|_q |c|_q, \quad \text{mit}$$

$$|B|_q = \left[\sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} |\beta_{ij}|^p \right)^{\frac{q}{p}} \right]^{\frac{1}{q}} .$$

Zum Beweis benutzen wir die HÖLDERsche Ungleichung, wonach für die i-te Komponente von Bc gilt $(i = 1, \ldots, m)$:

$$\left| \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} \gamma_j \right| \leqq \left(\sum_{j=1}^{n} |\beta_{ij}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} |\gamma_j|^q \right)^{\frac{1}{q}} = |c|_q \left(\sum_{j=1}^{n} |\beta_{ij}|^p \right)^{\frac{1}{p}} .$$

Ebenso schließen wir für $d \in l_p^m$ — mit B^τ = der zu B transponierten Matrix —:

$$(1.5) \qquad B^\tau d \in l_p^n, \ |B^\tau d|_p \leqq |B|_p \, |d|_p, \quad \text{mit}$$

$$|B|_p = \left[\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} |\beta_{ij}|^q \right)^{\frac{p}{q}} \right]^{\frac{1}{p}} .$$

Definiert man $r = \frac{p}{q}$, so ist wegen (1.3) $r \geqq 1$. Unter Benutzung der Dreiecksungleichung im l_r^n folgt, daß

$$|B|_p^q = \left[\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} |\beta_{ij}|^q \right)^r \right]^{\frac{1}{r}} \leqq \sum_{i=1}^{m} \left[\sum_{j=1}^{n} |\beta_{ij}|^{q\,r} \right]^{\frac{1}{r}} = |B|_q^q ,$$

also wegen $q < \infty$

(1.6) $\qquad |B|_p \leqq |B|_q$.

Wie allgemein üblich, bezeichne für $1 \leqq p \leqq \infty$

$$l_p = \left\{ c = (\gamma_i)_{i=0}^{\infty} \in \boldsymbol{C}^{\boldsymbol{N}} : \left(\sum_{i=0}^{\infty} |\gamma_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}$$

mit

$$|c|_p = \left(\sum_{i=0}^{\infty} |\gamma_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} .$$

p und q mögen die Voraussetzung (1.3) erfüllen. Dann bezeichnen wir mit $\tilde{\boldsymbol{M}}_q$ die Gesamtheit aller unendlichen Matrizen $A = (\alpha_{ij})_{i,j=0}^{\infty}$ mit $\alpha_{ij} \in \boldsymbol{C}$ und

$$(1.7) \qquad \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{\infty} |\alpha_{ij}|^p \right)^{\frac{q}{p}} < \infty \quad \text{und} \quad \sum_{i=0}^{\infty} |\alpha_{ii}| < \infty .$$

Dazu bemerken wir

$$(1.8) \qquad A \in \tilde{\boldsymbol{M}}_q \Leftrightarrow \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} |\alpha_{ii}| < \infty , \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{\infty} |\alpha_{ij}|^p \right)^{\frac{q}{p}} < \infty . \end{cases}$$

Wir brauchen nur die rechte Seite von (1.8) aus (1.7) herzuleiten. Die Dreiecksungleichung im l_p liefert:

$$\left(\sum_{j=0}^{\infty} |\alpha_{ij}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leqq \left(\sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{\infty} |\alpha_{ij}|^p \right)^{\frac{1}{p}} + |\alpha_{ii}| ,$$

und die Dreiecksungleichung im l_q weiter:

$$\left[\sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{\infty} |\alpha_{ij}|^p \right)^{\frac{q}{p}} \right]^{\frac{1}{q}} \leqq \left[\sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{\infty} |\alpha_{ij}|^p \right)^{\frac{q}{p}} \right]^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{i=0}^{\infty} |\alpha_{ii}|^q \right)^{\frac{1}{q}} < \infty ,$$

letzteres wegen

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} |\alpha_{ii}|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leqq \sum_{i=0}^{\infty} |\alpha_{ii}| < \infty .$$

Wir definieren für $A \in \tilde{\boldsymbol{M}}_q$

$$(1.9) \qquad |A|_q = \left[\sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{\infty} |\alpha_{ij}|^p \right)^{\frac{q}{p}} \right]^{\frac{1}{q}}, \quad |A|_p = \left[\sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{\infty} |\alpha_{ij}|^q \right)^{\frac{p}{q}} \right]^{\frac{1}{p}} .$$

Dem Beweis von (1.6) ist zu entnehmen, daß für $A \in \tilde{M}_q$

$$|A|_p \leqq |A|_q \, .$$

Wie man sofort nachrechnet, ist $\tilde{M}_q$ bezüglich $|\ |_q$ und $|\ |_p$ normierter Vektorraum und sogar BANACH-Raum.

Jeder unendlichen Matrix $A \in \tilde{M}_q$ entspricht vermöge

$$Ac = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \alpha_{ij}\gamma_j\right)_{i=0}^{\infty} \quad - \quad \text{für} \quad c = (\gamma_i)_{i=0}^{\infty} \in l_q \; -$$

ein linearer, beschränkter Operator vom l_q in sich, wobei

(1.10) $\qquad |Ac|_q \leqq |A|_q \, |c|_q \quad (c \in l_q)$.

Ebenso definieren wir für $A \in \tilde{M}_q$ durch

$$A^\tau d = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_{ij}\delta_i\right)_{j=0}^{\infty} \quad - \quad \text{für} \quad d = (\delta_i)_{i=0}^{\infty} \in l_p \; -$$

einen linearen, beschränkten Operator im l_p, für den gilt

(1.11) $\qquad |A^\tau d|_p \leqq |A|_p \, |d|_p \quad (d \in l_p)$.

Die Beweise zu (1.10) und (1.11) entnehmen wir den Ausführungen zu (1.4) und (1.5). – Von $A \in \tilde{M}_q$ sei bezeichnet $a_i' = (\alpha_{ij})_{j=0}^{\infty}$ als i-te Zeile, $a_j = (\alpha_{ij})_{i=0}^{\infty}$ als j-te Spalte. Offensichtlich ist

$$a_i' \in l_p, \quad \text{und} \quad \left(\sum_{i=0}^{\infty} |a_i'|_p^q\right)^{\frac{1}{q}} = |A|_q;$$

$$a_j \in l_q, \quad \text{und} \quad \left(\sum_{j=0}^{\infty} |a_j|_q^p\right)^{\frac{1}{p}} = |A|_p \, .$$

Wir zeigen nun, daß $\tilde{M}_q$ Algebra ist, genauer

1.12. Hilfssatz. *Voraussetzung:* $A, B \in \tilde{M}_q$, $C = A \cdot B$, d. h.

$$C = (\gamma_{ij})_{i,j=0}^{\infty} \quad \text{mit} \quad \gamma_{ij} = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{ik}\beta_{kj} \, .$$

Behauptung:

1. $C \in \tilde{M}_q$,
2. $|C|_q \leqq |A|_q |B|_p \leqq |A|_q |B|_q$,
3. $\sum_{i=0}^{\infty} |\gamma_{ii}| \leqq |A|_q |B|_p$.

Beweis: Wie man sofort nachrechnet, ist die i-te Zeile von C, $c_i' = B^\tau a_i'$, daher nach (1.11) $c_i' \in l_p$, und $|c_i'|_p \leqq |B|_p |a_i'|_p$. Aufsummieren liefert:

$$|C|_q = \left(\sum_{i=0}^{\infty} |c_i'|_p^q\right)^{\frac{1}{q}} \leqq |B|_p \left(\sum_{i=0}^{\infty} |a_i'|_p^q\right)^{\frac{1}{q}} = |B|_p \cdot |A|_q \, .$$

Zum Beweis der 3. Ungleichung benutzen wir zweimal die HÖLDERsche Ungleichung: zunächst

$$|\gamma_{ii}| \leqq \left(\sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_{ik}|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} |\beta_{ki}|^q\right)^{\frac{1}{q}} = |a_i'|_p \, |b_i|_q ;$$

und daher

$$\sum_{i=0}^{\infty} |\gamma_{ii}| \leqq \left(\sum_{i=0}^{\infty} |a_i'|_p^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=0}^{\infty} |b_i|_q^p\right)^{\frac{1}{p}} = |A|_q \, |B|_p .$$

Nach Kriterium (1.8) liegt damit C in $\tilde{M}_q$.

1.13. Definition. Es bezeichne M_q die Menge aller unendlichen Matrizen $A = (\alpha_{ij})_{i,j=0}^{\infty}$ der Gestalt $A = I + \tilde{A}$, wobei $I = (\delta_{ij})_{i,j=0}^{\infty}$, $\tilde{A} \in \tilde{M}_q$.

Als wichtigste Eigenschaften von M_q notieren wir:

$$(1.14) \qquad A \in M_q \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{\infty} |\alpha_{ij} - \delta_{ij}|^p\right)^{\frac{q}{p}} < \infty , \\ \sum_{i=0}^{\infty} |\alpha_{ii} - 1| < \infty . \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{\infty} |\alpha_{ij}|^p\right)^{\frac{q}{p}} < \infty , \\ \sum_{i=0}^{\infty} |\alpha_{ii} - 1| < \infty . \end{cases}$$

Der Beweis der zweiten Äquivalenz folgt unmittelbar aus (1.8). Nach MENNICKEN [9] heißt eine Matrix $(\alpha_{ij})_{i,j=0}^{\infty}$ vom „HILLschen Typ" genau dann, wenn

$$\sum_{i,j=0}^{\infty} |\alpha_{ij} - \delta_{ij}| < \infty .$$

Matrizen vom HILLschen Typ liegen offensichtlich für jedes hier betrachtete q in M_q; man wird sie meistens in den besonders einfachen Fall $q = 2$ einordnen. Einer Matrix $A \in M_q$ entspricht eine lineare, beschränkte Abbildung vom l_q in sich, deren Operatornorm sich durch $(1 + |\tilde{A}|_q)$ abschätzen läßt.

Definiert man für $A \in M_q$, $A = I + \tilde{A}$,

$$\|A\| = 1 + |\tilde{A}|_q ,$$

so folgt aus 1.12 unmittelbar

1.14. Satz.

1. $A \in M_q$, $B \in \tilde{M}_q \Rightarrow A + B \in M_q$;
2. A, $B \in M_q \Rightarrow A \cdot B \in M_q$, $\|A \cdot B\| \leqq \|A\| \cdot \|B\|$.

2. Beschränktheit der Abschnittsdeterminanten

Zu $A \in M_q$ bezeichne $A_n = (\alpha_{ij})_{i,j=0}^{n}$ die n-te Abschnittsmatrix. Wir zerlegen A in

$$A = D + \tilde{A} \quad \text{mit} \quad D = \operatorname{diag}(\alpha_{ii})_{i=0}^{\infty},$$

so daß nach (1.14) $\tilde{A} \in \tilde{M}_q$.

Die Beschränktheit der Folge $(\det A_n)_{n=0}^{\infty}$ wird im wesentlichen für $|\tilde{A}|_q < 1$ gezeigt; den allgemeinen Fall wollen wir zunächst auf $|\tilde{A}|_q \leqq \frac{1}{2}$ zurückführen.

Falls $|\tilde{A}|_q \leqq r$ mit $r > \frac{1}{2}$, so existiert ein $m \in N$ mit

$$\left[\sum_{i=m}^{\infty}\left(\sum_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{\infty}|\alpha_{ij}|^p\right)^{\frac{q}{p}}\right]^{\frac{1}{q}} \leqq \frac{1}{4}. \tag{2.1}$$

Für die Restsumme in $|\tilde{A}|_q$ gilt, etwa mit $M = 4r$, sicher

$$\left[\sum_{i=0}^{m-1}\left(\sum_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{\infty}|\alpha_{ij}|^p\right)^{\frac{q}{p}}\right]^{\frac{1}{q}} \leqq \frac{1}{4} M.$$

Daher dividieren wir in A die Zeilen der Nummern 0 bis $m-1$ jeweils durch M; die entstandene Matrix heiße B, also

$$B = (\beta_{ij})_{i,j=0}^{\infty} \quad \text{mit} \quad \beta_{ij} = \begin{cases} \dfrac{\alpha_{ij}}{M} & (i = 0, \ldots, m-1) \\ \alpha_{ij} & (i \geqq m). \end{cases} \tag{2.2}$$

B sei wieder aufgeteilt in

$$B = E + \tilde{B}, \quad E = \operatorname{diag}(\beta_{ii})_{i=0}^{\infty}.$$

Dann haben wir erreicht, daß

$$|\tilde{B}|_q \leqq \frac{1}{2}, \quad \text{und es gilt}$$

$$\det A_n = M^m \det B_n \quad \text{für alle} \quad n \geqq m-1; \tag{2.3}$$

daher ist mit $(\det B_n)_{n=0}^{\infty}$ auch $(\det A_n)_{n=0}^{\infty}$ beschränkt.

2.4. Satz. *Es sei* $A \in M_q$, $A = D + \tilde{A}$ *mit* $D = \operatorname{diag}(\alpha_{ii})_{i=0}^{\infty}$.

1. *Falls* $|\tilde{A}|_q < 1$, *so gilt für jedes natürliche* n

$$|\det A_n| \leqq \exp\left(\sum_{i=0}^{\infty}|\alpha_{ii}-1| + |\tilde{A}|_q \cdot \frac{|\tilde{A}|_p}{1-|\tilde{A}|_p}\right).$$

2. *Falls* $|\tilde{A}|_q \leqq r$, $r \geqq \frac{1}{2}$, *so gilt mit* $M = 4r$, m *gemäß* (2.1):

$$|\det A_n| \leqq M^m \cdot \exp\left(2 \cdot \sum_{i=0}^{\infty}|\alpha_{ii}-1| + m + \frac{1}{2}\right).$$

Zum Beweis setzen wir

$$\alpha_{\nu\mu} = \delta_{\nu\mu} + \tilde{\alpha}_{\nu\mu} \qquad (\nu,\ \mu = 0, 1, 2, \ldots)$$

und zeigen:

2.5. Hilfssatz.

$$|\det A_n| \leqq \prod_{\nu=0}^{n} (1 + |\tilde{\alpha}_{\nu\nu}|) \cdot \prod_{\substack{\nu_0,\nu_1=0 \\ \nu_0 \neq \nu_1}}^{n} (1 + |\tilde{\alpha}_{\nu_0\nu_1}|\,|\tilde{\alpha}_{\nu_1\nu_0}|)$$

$$\times \prod_{\substack{\nu_0,\nu_1,\nu_2 \\ \text{verschieden}}} (1 + |\tilde{\alpha}_{\nu_0\nu_1}|\,|\tilde{\alpha}_{\nu_1\nu_2}|\,|\tilde{\alpha}_{\nu_2\nu_0}|) \cdot \ldots \cdot \prod_{\substack{\nu_0,\nu_1,\ldots,\nu_n \\ \text{verschieden}}} (1 + |\tilde{\alpha}_{\nu_0\nu_1}|\,|\tilde{\alpha}_{\nu_1\nu_2}| \cdots |\tilde{\alpha}_{\nu_n\nu_0}|).$$

Dazu bezeichne S_n die Menge der Permutationen von $\{0, 1, \ldots, n\}$; für $\sigma \in S_n$ sei

$$\beta_\sigma = \prod_{\nu=0}^{n} (\delta_{\nu,\sigma(\nu)} + |\tilde{\alpha}_{\nu,\sigma(\nu)}|)\,. \tag{2.6}$$

Nach Definition der Determinante gilt:

$$|\det A_n| \leqq \sum_{\sigma\in S_n} \left| \prod_{\nu=0}^{n} \alpha_{\nu,\sigma(\nu)} \right| \leqq \sum_{\sigma\in S_n} \beta_\sigma\,. \tag{2.7}$$

Eine Permutation $\zeta \in S_n$ heißt Zyklus der Länge $m+1$ $(m \geqq 1)$, wenn es paarweise verschiedene $\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_m \in \{0, 1, \ldots, n\}$ mit $\nu_0 < \nu_i$ $(i = 1, \ldots, m)$ gibt, so daß

$$\zeta(\nu_\mu) = \nu_{\mu+1} \ (\mu = 0, \ldots, m-1),\ \zeta(\nu_m) = \nu_0\,,$$

$$\zeta(\nu) = \nu \quad \text{für} \quad \nu \notin \{\nu_0, \ldots, \nu_m\}\,.$$

Den so definierten Zyklus ζ schreiben wir kurz als

$$\zeta = (\nu_0\nu_1 \cdots \nu_m);$$

$V(\zeta) = \{\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_m\}$ sei die Vertauschungsmenge zu ζ.

Die Identität rechnen wir als Zyklus der Länge Null oder 1, mit $V(\mathrm{id}) = \emptyset$. Zwei Zyklen ζ, ζ' heißen elementfremd, wenn $V(\zeta) \cap V(\zeta') = \emptyset$. In diesem Fall ist $\zeta \circ \zeta' = \zeta' \circ \zeta$.

Bekannt ist der Satz. *Jede Permutation $\sigma \in S_n$ läßt sich (bis auf die Reihenfolge der Faktoren) eindeutig als Produkt elementfremder Zyklen schreiben.*

Wir definieren für $m = 0, 1, \ldots, n$

$$S_n^{(m)} = \{\sigma \in S_n : \sigma \text{ Produkt elementfremder Zyklen der Länge } \leqq m+1\},$$

so daß

$$S_n^{(0)} = \{\mathrm{id}\},\ S_n^{(n)} = S_n\,.$$

Zum Beweis des Hilfssatzes zeigen wir mit Induktion über m:

$$\sum_{\sigma\in S_n^{(m)}} \beta_\sigma \leqq \prod_{\nu=0}^{n} (1 + |\tilde{\alpha}_{\nu\nu}|) \cdot \ldots \cdot \prod_{\substack{\nu_0,\nu_1,\ldots,\nu_m \\ \text{verschieden}}} (1 + |\tilde{\alpha}_{\nu_0\nu_1}|\,|\tilde{\alpha}_{\nu_1\nu_2}| \cdot \ldots \cdot |\tilde{\alpha}_{\nu_m\nu_0}|)\,. \tag{2.8}$$

Der Induktionsanfang ist wegen $\beta_{\mathrm{id}} = \prod_{\nu=0}^{n} (1 + |\tilde{\alpha}_{\nu\nu}|)$ klar. Für $1 \leqq m \leqq n$ läßt sich $\sigma \in S_n^{(m)}$ eindeutig zerlegen in

$$\sigma = \tilde{\sigma} \cdot \prod_{\varkappa=1}^{k} \zeta_\varkappa, \quad \text{wobei}$$

$$\tilde{\sigma} \in S_n^{(m-1)},$$

$$0 \leqq k \leqq \left[\frac{n+1}{m+1}\right],$$

$\zeta_\varkappa$ $(\varkappa = 1, \ldots, k)$ elementfremde Zyklen der Länge $m+1$, und

$$\tilde{\sigma}(\nu) = \nu \quad \text{für} \quad \nu \in \bigcup_{\varkappa=1}^{k} V(\zeta_\varkappa) := V. \tag{2.9}$$

Definiert man für $\zeta = (\nu_0 \nu_1 \cdots \nu_m)$ $\quad \gamma_\zeta = |\tilde{\alpha}_{\nu_0\nu_1}|\, |\tilde{\alpha}_{\nu_1\nu_2}| \cdot \ldots \cdot |\tilde{\alpha}_{\nu_m\nu_0}|$, so wird nach (2.9)

$$\beta_\sigma = \prod_{\substack{\nu=0 \\ \nu \notin V}}^{n} (\delta_{\nu,\tilde{\sigma}(\nu)} + |\tilde{\alpha}_{\nu,\tilde{\sigma}(\nu)}|) \cdot \prod_{\varkappa=1}^{k} \gamma_{\zeta_\varkappa} \leqq \beta_{\tilde{\sigma}} \cdot \prod_{\varkappa=1}^{k} \gamma_{\zeta_\varkappa}.$$

Daraus schließen wir – mit $l = \left[\frac{n+1}{m+1}\right]$ –:

$$\sum_{\sigma \in S_n^{(m)}} \beta_\sigma \leqq \Big(\sum_{\tilde{\sigma} \in S_n^{(m-1)}} \beta_{\tilde{\sigma}} \Big) \Big(1 + \sum_{\zeta \in Z_m} \gamma_\zeta + \cdots + \sum_{\substack{\zeta_1, \ldots, \zeta_l \in Z_m \\ \text{elementfremd}}} \gamma_{\zeta_1} \cdot \ldots \cdot \gamma_{\zeta_l} \Big),$$

wobei $Z_m := \{\zeta \in S_n : \zeta \text{ Zyklus der Länge } m+1\}$. Unter Benutzung von (2.8) für $m-1$ als Induktionsannahme wollen wir den Faktor $\sum_{\tilde{\sigma} \in S_n^{(m-1)}} \beta_{\tilde{\sigma}}$ abschätzen; der zweite Faktor wird majorisiert durch

$$\prod_{\substack{\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_m = 0 \\ \text{verschieden}}}^{n} (1 + |\tilde{\alpha}_{\nu_0\nu_1}| \cdot |\tilde{\alpha}_{\nu_1\nu_2}| \cdots |\tilde{\alpha}_{\nu_m\nu_0}|),$$

womit (2.8) auch für m gezeigt ist.

Mit der bekannten Ungleichung

$$1 + x \leqq e^x \quad (x \geqq 0)$$

gewinnen wir aus (2.5) weiter die Abschätzung

$$|\det A_n| \leqq \exp\Bigg(\sum_{\nu=0}^{n} |\tilde{\alpha}_{\nu\nu}| + \sum_{\substack{\nu_0, \nu_1 = 0 \\ \nu_0 \neq \nu_1}}^{n} |\alpha_{\nu_0\nu_1}|\, |\alpha_{\nu_1\nu_0}| + \cdots + \sum_{\substack{\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_n \\ \text{verschieden}}} |\alpha_{\nu_0\nu_1}|\, |\alpha_{\nu_1\nu_2}| \cdots |\alpha_{\nu_n\nu_0}| \Bigg),$$

wobei benutzt wurde, daß für $\nu \neq \mu$ $\alpha_{\nu\mu} = \tilde{\alpha}_{\nu\mu}$. Mit der Matrix aus den Beträgen der Elemente von $\tilde{A}_n$,

$$\mathring{A}_n = (|\alpha_{ij} - \delta_{ij} \cdot \alpha_{ii}|)_{i,j=0}^{n} = (\mathring{\alpha}_{ij})_{i,j=0}^{n},$$

gilt für $m \geqq 1$:

$$\sum_{\substack{\nu_0,\nu_1,\ldots,\nu_m=0\\ \text{verschieden}}}^{n} |\alpha_{\nu_0\nu_1}|\,|\alpha_{\nu_1\nu_2}|\cdot\ldots\cdot|\alpha_{\nu_m\nu_0}| \leqq \operatorname{spur} \mathring{A}_n^{m+1}\,.$$

Man rechnet nämlich leicht nach, daß

$$\operatorname{spur} \mathring{A}_n^{m+1} = \sum_{\nu_0,\nu_1,\ldots,\nu_m=0}^{n} \mathring{\alpha}_{\nu_0\nu_1}\mathring{\alpha}_{\nu_1\nu_2}\cdot\ldots\cdot\mathring{\alpha}_{\nu_m\nu_0}\,.$$

Weiter benutzen wir die Abschätzungen aus (1.12), wonach

$$\operatorname{spur} \mathring{A}_n^{m+1} \leqq |\mathring{A}_n|_p^m \cdot |\mathring{A}_n|_q = |\bar{A}_n|_p^m \cdot |\bar{A}_n|_q \leqq |\bar{A}|_p^m\,|\bar{A}|_q\,.$$

Mit $|\tilde{\alpha}_{\nu\nu}| = |\alpha_{\nu\nu} - 1|$ gilt schließlich für jedes natürliche n:

$$\begin{aligned}|\det A_n| &\leqq \exp\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} |\alpha_{\nu\nu}-1| + |\bar{A}|_q \sum_{m=1}^{\infty} |\bar{A}|_p^m\right)\\ &= \exp\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} |\alpha_{\nu\nu}-1| + \frac{|\bar{A}|_q|\bar{A}|_p}{1-|\bar{A}|_p}\right), \quad \text{falls} \quad |\bar{A}|_p < 1\,.\end{aligned}$$

Da stets $|\bar{A}|_p \leqq |\bar{A}|_q$, ist damit die erste Aussage von (2.4) bewiesen.

Zum Beweis der 2. Aussage sei B durch (2.2) definiert; aus dem ersten Beweisteil folgt mit (2.3) zusammen, daß

$$|\det A_n| \leqq M^m \exp\left(\sum_{i=0}^{\infty} |\beta_{ii}-1| + |\bar{B}|_q \frac{|\bar{B}|_p}{1-|\bar{B}|_p}\right), \tag{2.10}$$

wobei zunächst

$$|\bar{B}|_p \leqq |\bar{B}|_q \leqq \frac{1}{2}\,, \quad \text{also } |\bar{B}|_q \frac{|\bar{B}|_p}{1-|\bar{B}|_p} \leqq \frac{1}{2}\,, \tag{2.11}$$

außerdem für $i = 0, 1, \ldots, m-1$

$$|\beta_{ii}-1| = |\beta_{ii}-\alpha_{ii}+\alpha_{ii}-1| \leqq |\alpha_{ii}-1| + |\alpha_{ii}|\left(1-\frac{1}{M}\right); \quad |\alpha_{ii}| \leqq 1 + |\alpha_{ii}-1|\,,$$

und daher

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{\infty} |\beta_{ii}-1| &\leqq \sum_{i=0}^{\infty} |\alpha_{ii}-1| + \sum_{i=0}^{m-1} |\alpha_{ii}-1| \cdot \left(1-\frac{1}{M}\right) + m\left(1-\frac{1}{M}\right)\\ &\leqq 2\sum_{i=0}^{\infty} |\alpha_{ii}-1| + m\,.\end{aligned}$$

Dies und (2.11) in (2.10) eingesetzt, liefert die zweite Aussage des Satzes.

2.12. Folgerung. *Für $A \in M_q$ ist* $(\det A_n)_{n=0}^{\infty}$ *konvergent.*
Es bezeichne

$$\det A = \lim_{n\to\infty} \det A_n\,.$$

Wegen (2.3) genügt es, den Beweis für $|\bar{A}|_q < 1$ zu führen. Gemäß (2.6) und (2.7) definieren wir für $n \in \boldsymbol{N}$:

(2.13) $$p_n(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \beta_\sigma^{(n)} \quad \text{mit} \quad \beta_\sigma^{(n)} = \prod_{\nu=0}^{n} (\delta_{\nu,\sigma(\nu)} + |\tilde{\alpha}_{\nu,\sigma(\nu)}|) .$$

Wir hatten gesehen, daß mit

$$P = \exp\left(\sum_{i=0}^{\infty} |\alpha_{ii} - 1| + |\bar{A}|_q \cdot \frac{|\bar{A}|_p}{1 - |\bar{A}|_p}\right) \text{ gilt:}$$

$$p_n(A) \leqq P \quad (n \in \boldsymbol{N}) .$$

Zum Beweis von 2.12. bleibt zu zeigen, daß

(2.14) $$|\det A_{n+1} - \det A_n| \leqq p_{n+1}(A) - p_n(A) .$$

Mit der zu S_n isomorphen Untergruppe von S_{n+1},

$$S'_n = \{\sigma \in S_{n+1} : \sigma\,(n+1) = n+1\} ,$$

schreiben wir

$$\det A_{n+1} - \det A_n$$
$$= \sum_{\sigma \in S_{n+1} \setminus S'_n} \operatorname{sign} \sigma \prod_{\nu=0}^{n+1} \alpha_{\nu,\sigma(\nu)} + (\alpha_{n+1,n+1} - 1) \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign} \sigma \prod_{\nu=0}^{n} \alpha_{\nu,\sigma(\nu)} ,$$

und daher

$$|\det A_{n+1} - \det A_n| \leqq \sum_{\sigma \in S_{n+1} \setminus S'_n} \beta_\sigma^{(n+1)} + |\tilde{\alpha}_{n+1,n+1}| \cdot \sum_{\sigma \in S_n} \beta_\sigma^{(n)} .$$

Andererseits ist

$$p_{n+1}(A) = \sum_{\sigma \in S_{n+1} \setminus S'_n} \beta_\sigma^{(n+1)} + (1 + |\tilde{\alpha}_{n+1,n+1}|) \cdot \sum_{\sigma \in S_n} \beta_\sigma^{(n)} ,$$

woraus unmittelbar (2.14) folgt.

Wegen $p_n(A) \leqq P$ ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (\det A_{n+1} - \det A_n)$ absolut konvergent, und damit existiert $\lim_{n \to \infty} \det A_n$.

Für $p = q = 2$ läßt sich die Beschränktheit von $\det A_n$ wesentlich einfacher aus der Hadamardschen Ungleichung ableiten:

$$|\det A_n|^2 \leqq \prod_{i=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{n} |\alpha_{ij}|^2\right) \leqq \prod_{i=0}^{n} \left[\sum_{j=0}^{n} (\delta_{ij} + |\alpha_{ij} - \delta_{ij}|)^2\right].$$

Mit dem konvergenten unendlichen Produkt

(2.15) $$P^2 = \prod_{i=0}^{\infty} \left[\sum_{j=0}^{\infty} (\delta_{ij} + |\alpha_{ij} - \delta_{ij}|)^2\right], \quad P > 0$$

gilt daher

(2.16) $$|\det A_n| \leqq P \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) .$$

Die Konvergenz von P^2 folgt aus

$$\sum_{j=0}^{\infty} (\delta_{ij} + |\alpha_{ij} - \delta_{ij}|)^2 = 1 + 2\,|\alpha_{ii} - 1| + \sum_{j=0}^{\infty} |\alpha_{ij} - \delta_{ij}|^2 ,$$

wobei

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left(2|\alpha_{ii} - 1| + \sum_{j=0}^{\infty} |\alpha_{ij} - \delta_{ij}|^2 \right) < \infty .$$

Aus dieser Abschätzung läßt sich die Konvergenz von $\det A_n$ nicht wie oben herleiten: statt dessen ergibt sich, wie auch im allgemeinen Fall, die Konvergenz aus den Überlegungen des folgenden Kapitels, das sich mit der Konvergenzgüte beschäftigt.

3. Konvergenzgüte

Zu $A \in M_q$ sei $N_0 \in \mathbf{N}$ so gewählt, daß

$$\left[\sum_{j=N_0+1}^{\infty} \left(\sum_{i=N_0+1}^{\infty} |\alpha_{ij} - \delta_{ij}|^p \right)^{\frac{q}{p}} \right]^{\frac{1}{q}} = \eta < 1 . \tag{3.1}$$

Für $N \geqq N_0 + 2$ berechnet man

$$\begin{cases} \det A_N - \det A_{N-1} = \det \Delta_N, \quad \text{wobei} \\ \Delta_N = \left(\begin{array}{c|c} A_{N-1} & \begin{matrix} \alpha_{0N} \\ \vdots \\ \alpha_{N-1,N} \end{matrix} \\ \hline \alpha_{N0} \; \cdots \; \alpha_{N,N-1} & \delta_N \end{array} \right), \quad \delta_N = \alpha_{NN} - 1 . \end{cases} \tag{3.2}$$

Wir unterteilen Δ_N in Blöcke

$$\Delta_N = \left(\begin{array}{c|c|c} A_{N_0} & R_N & s_N^1 \\ \hline L_N & D_N & s_N^2 \\ \hline z_N^{1\tau} & z_N^{2\tau} & \delta_N \end{array} \right), \tag{3.3}$$

wobei
$$\begin{aligned} & D_N = (\alpha_{ij})_{i,j=N_0+1}^{N-1} \\ & s_N^1 = (\alpha_{iN})_{i=0}^{N_0}, \quad s_N^2 = (\alpha_{iN})_{i=N_0+1}^{N-1} \\ & z_N^1 = (\alpha_{Nj})_{j=0}^{N_0}, \quad z_N^2 = (\alpha_{Nj})_{j=N_0+1}^{N-1} \\ & R_N = (\alpha_{ij})_{\substack{i=0,\dots,N_0 \\ j=N_0+1,\dots,N-1}} \quad ; \quad L_N = (\alpha_{ij})_{\substack{i=N_0+1,\dots,N-1 \\ j=0,\dots,N_0}} . \end{aligned}$$

Wegen (3.1) läßt sich D_N schreiben als

$$D_N = I_{N-N_0-1} + F_N, \quad F_N = (\alpha_{ij} - \delta_{ij})_{i,j=N_0+1}^{N-1} , \tag{3.4}$$

wobei nach (3.1) $|F_N|_q \leqq \eta < 1$. Folglich ist D_N invertierbar; und für die Operatornorm im $l_q^{N-N_0-1}$ von D_N^{-1} gilt

$$|D_N^{-1}| \leqq \frac{1}{1-\eta} . \tag{3.5}$$

Da $|F_N|_p \leqq |F_N|_q$, gilt (3.5) auch für die Operatornorm von $(D_N^{-1})^\tau$ im $l_p^{N-N_0-1}$.

Gemäß der Blockaufteilung (3.3) definieren wir Transformationsmatrizen

$$A_N = \left(\begin{array}{c|c|c} I_{N_0+1} & 0 & 0 \\ \hline 0 & I_{N-N_0-1} & 0 \\ \hline 0 & -z_N^{2\tau} D_N^{-1} & 1 \end{array}\right); \quad \mathsf{P}_N = \left(\begin{array}{c|c|c} I_{N_0+1} & 0 & 0 \\ \hline 0 & I_{N-N_0-1} & -D_N^{-1} s_N^2 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

und erhalten durch einfache Rechnung

$$A_N \Delta_N \mathsf{P}_N = \left(\begin{array}{c|c|c} A_{N_0} & R_N & s_N' \\ \hline L_N & D_N & 0 \\ \hline z_N'^\tau & 0 & \varepsilon_N \end{array}\right) = \Delta_N',$$

wobei

$$s_N' = s_N^1 - R_N D_N^{-1} s_N^2 := (\sigma_{iN})_{i=0}^{N_0},$$

$$z_N'^\tau = z_N^{1\tau} - z_N^{2\tau} D_N^{-1} L_N := (\zeta_{Nj})_{j=0}^{N_0},$$

$$\varepsilon_N = (\alpha_{NN} - 1) - z_N^{2\tau} D_N^{-1} s_N^2.$$

Wegen $\det A_N = \det \mathsf{P}_N = 1$ wird $\det \Delta_N = \det \Delta_N'$. Es sei für $i, j = 0, \ldots, N-1$ definiert

(3.6) $\left(\begin{array}{c|c} i \\ j \end{array} A_{N-1}\right) =$ Unterdeterminante, die aus A_{N-1} durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte entsteht.

Durch Entwickeln von $\det \Delta_N'$ nach der letzten Zeile und anschließend nach der letzten Spalte erhalten wir

$$\det \Delta_N = \varepsilon_N \det A_{N-1} + \sum_{i,j=0}^{N_0} \zeta_{Nj} \sigma_{iN} (-1)^{i+j} \left(\begin{array}{c|c} i \\ j \end{array} A_{N-1}\right) \tag{3.7}$$

$$= \{(\alpha_{NN} - 1) - z_N^{2\tau} D_N^{-1} s_N^2\} \cdot \det A_{N-1} + z_N'^\tau U_N s_N',$$

mit der Matrix

$$U_N = \left((-1)^{i+j} \left(\begin{array}{c|c} j \\ i \end{array} A_{N-1}\right)\right)_{i,j=0}^{N_0}.$$

Wir benutzen nun, daß für $N \geqq N_0 + 2$

$$\det A - \det A_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} (\det A_n - \det A_{n-1}) = \sum_{n=N+1}^{\infty} \det \Delta_n, \tag{3.8}$$

und wollen die $|\det \Delta_n|$ mit Hilfe von (3.7) abschätzen. Zunächst ist nach Satz 2.4. bzw. (2.16) die Folge $(\det A_N)_{N=0}^\infty$ beschränkt, es sei etwa

$$|\det A_N| \leqq P \quad (N \in \mathbf{N}). \tag{3.9}$$

Für $i, j \in \{0, \ldots, N_0\}$ ist die durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte aus A entstandene Matrix auch aus M_q (ab dem Index N_0 spätestens stimmen die Diagonalelemente mit denen von A überein), daher sind sämtliche $(N_0 + 1)^2$

Elemente von U_N beschränkt; es gilt also mit einem gewissen P' $(0 < P' < \infty)$:

$$(3.10) \qquad |U_N|_q \leqq P' \quad (N \geqq N_0 + 1).$$

Als Abschätzung für ε_N erhalten wir

$$\varepsilon_N \leqq |\alpha_{NN} - 1| + |z_N^{2\tau} D_N^{-1} s_N^2|,$$

wobei nach der HÖLDERschen Ungleichung

$$(3.11) \qquad |z_N^{2\tau} D_N^{-1} s_N^2| \leqq |z_N^2|_p \cdot |D_N^{-1} s_N^2|_q \leqq \frac{1}{1-\eta} |z_N^2|_p \, |s_N^2|_q .$$

Ebenso wird

$$(3.12) \qquad |z_N'^{\tau} U_N s_N'| \leqq P' \cdot |z_N'|_p \cdot |s_N'|_q .$$

Nach Definition von M_q zerlegen wir A in $A = I + \tilde{A}$, wobei $\tilde{A} \in \tilde{M}_q$, also $|\tilde{A}|_q < \infty$. Es bezeichne

$$(3.13) \qquad \tilde{a}_N = \begin{pmatrix} s_N^1 \\ s_N^2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{b}_N = \begin{pmatrix} z_N^1 \\ z_N^2 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$|z_N^2|_p, \ |z_N^1|_p \leqq |\tilde{b}_N|_p; \ |s_N^2|_q, \ |s_N^1|_q \leqq |\tilde{a}_N|_q;$$

$$|R_N|_q \leqq |\tilde{A}|_q; \ |L_N|_p \leqq |\tilde{A}|_p \leqq |\tilde{A}|_q;$$

letzteres, da R_N und L_N keine Diagonalelemente von A enthalten. Aus der Definition von s_N' folgern wir

$$(3.14) \qquad |s_N'|_q \leqq |s_N^1|_q + |R_N|_q \frac{1}{1-\eta} |s_N^2|_q \leqq \left(1 + \frac{|\tilde{A}|_q}{1-\eta}\right) \cdot |\tilde{a}_N|_q$$

und ebenso

$$(3.15) \qquad |z_N'|_p \leqq \left(1 + \frac{|\tilde{A}|_p}{1-\eta}\right) |\tilde{b}_N|_p .$$

Diese Abschätzungen sind in (3.12) einzusetzen; außerdem wird nach (3.9) und (3.11)

$$(3.16) \qquad |\varepsilon_N \cdot \det A_{N-1}| \leqq P\left(|\alpha_{NN} - 1| + \frac{1}{1-\eta} |\tilde{a}_N|_q \cdot \tilde{b}_N|_p\right),$$

so daß insgesamt

$$(3.17) \qquad |\det \Delta_N| \leqq P|\alpha_{NN} - 1| + Q \cdot |\tilde{a}_N|_q \, |\tilde{b}_N|_p \quad \text{mit}$$

$$Q = \frac{P}{1-\eta} + P'\left(1 + \frac{|\tilde{A}|_q}{1-\eta}\right)\left(1 + \frac{|\tilde{A}|_p}{1-\eta}\right).$$

Da nach (3.8)

$$|\det A - \det A_N| = \sum_{n=N+1}^{\infty} |\det \Delta_n| \quad (N \geqq N_0 + 2),$$

notieren wir

3.18. Satz. *Für* $A \in M_q$ *existiert* $\det A = \lim_{n\to\infty} \det A_n$; *definiert man* N_0, η *mit den Eigenschaften* (3.1), *so gilt für* $N \geqq N_0 + 2$

$$|\det A - \det A_N| \leqq P \cdot \sum_{n=N+1}^{\infty} |\alpha_{nn} - 1| + Q \cdot \sum_{n=N+1}^{\infty} |\tilde{a}_n|_q \, |\tilde{b}_n|_p \,,$$

wobei P *durch* (3.9), Q *durch* (3.17) *definiert ist.*

Zum Beweis und zur Anwendbarkeit des Satzes benötigen wir die Konvergenz von $\sum |\tilde{a}_n|_q \, |\tilde{b}_n|_p$. Nach der Hölderschen Ungleichung gilt:

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |\tilde{a}_n|_q \, |\tilde{b}_n|_p \leqq \left(\sum_{n=N+1}^{\infty} |\tilde{a}_n|_q^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=N+1}^{\infty} |\tilde{b}_n|_p^q \right)^{\frac{1}{q}} \leqq |\tilde{A}|_p |\tilde{A}|_q < \infty ;$$

und selbst im Fall $p = \infty$ strebt wenigstens

$$\left(\sum_{n=N+1}^{\infty} |\tilde{b}_n|_p^q \right)^{\frac{1}{q}} \text{ gegen Null für } N \to \infty \,.$$

Falls $A \in M_2$, ist die Konstante P' mit $|U_N|_2 \leqq P'$ leicht anzugeben. Die Anwendung der Hadamardschen Ungleichung liefert mit dem in (2.15) definierten P sofort:

(3.19) $\quad \left| \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} \middle| A_{N-1} \right| \leqq P$ für jedes natürliche N und $i, j \leqq N$, daher

(3.20) $\quad |U_N|_2 \leqq (N_0 + 1) \, P$

als mögliche Abschätzung.

4. Zur Lösungstheorie

Für $A \in M_q$ wollen wir die Abhängigkeit von $\det A$ als Funktion der Spalten untersuchen. Dazu beweisen wir einige Vorbemerkungen:

(4.1) Ersetzt man in $A \in M_q$ die j-te Spalte ($j \in \mathbf{N}$ beliebig) durch eine beliebige Folge $c_j \in l_q$, so liegt die abgeänderte Matrix A' wieder in M_q, und es gilt

(4.2) $\quad \begin{cases} |A' - I|_q \leqq |A - I|_q + |c_j - e_j|_q ; \\ e_j = (\delta_{ij})_{i=0}^{\infty} \text{ sei die } j\text{-te Einheitsspalte.} \end{cases}$

(4.3) $\det A$ als Funktion der j-ten Spalte ist lineares Funktional, definiert in l_q.

(4.4) Vertauscht man in $A \in M_q$ zwei verschiedene Spalten, geht der Wert von $\det A$ ins Negative über.

(4.5) Der Wert von $\det A$ ändert sich nicht, wenn man zu einer festen Spalte von A eine endliche Linearkombination anderer Spalten addiert.

In Verschärfung von (4.3) gilt außerdem

4.6. Satz. $\det A$ *ist stetiges lineares Funktional bezüglich jeder Spalte von* A.

Zum Beweis von (4.1) definieren wir $A_0=(\alpha_{ij}^{(0)})_{i,j=0}^{\infty}$ durch Ersetzen der j-ten Spalte von A durch e_j. Wegen

$$\sum_{i=0}^{\infty}|\alpha_{ii}^{(0)}-1|=\sum_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{\infty}|\alpha_{ii}-1|\leqq\sum_{i=0}^{\infty}|\alpha_{ii}-1|<\infty \quad \text{und}$$

$$(4.7)\qquad |A_0-I|_q\leqq|A-I|_q$$

liegt A_0 sicher in M_q. Die Matrix C_j, definiert durch c_j-e_j in der j-ten Spalte, sonst durch Nullen, liegt in $\tilde{M}_q$, mit

$$(4.8)\qquad |C_j|_q=|c_j-e_j|_q\,.$$

A' hat nun die Gestalt $A'=A_0+C_j$, was mit Satz 1.14. unmittelbar (4.1), mit (4.7) und (4.8) sofort (4.2) liefert. Die Eigenschaften (4.3) bis (4.5) folgen unmittelbar aus

$$\det A=\lim_{N\to\infty}\det A_N\,,$$

da die entsprechenden Aussagen für alle A_N ab einer gewissen Nummer gelten.

Für den Satz 4.6. wollen wir zwei Beweise angeben; wegen (4.4) genügt es, die Abhängigkeit von der 0-ten Spalte zu untersuchen.

Der 1. Beweis benutzt den funktionalanalytischen Satz über die gleichmäßige Beschränktheit. – Zunächst ist für jedes natürliche N die Zuordnung $a_0\to(\alpha_{i0})_{i=0}^{N}$ stetige, lineare Abbildung vom l_q in l_q^{N+1}, daher ist det A_N als Funktional in l_q stetig. Nach dem Satz über die gleichmäßige Beschränktheit ist nun det A als punktweiser Grenzwert stetiger linearer Funktionale im Banachraum l_q selbst stetig.

Zu einem 2. Beweis benutzen wir die Anfangsüberlegungen des 2. Kapitels: Es seien $a_1, a_2, a_3, \ldots\in l_q$ vorgegeben; zu $c\in l_q$ bezeichne $A(c)$ die Matrix mit den Spalten $c, a_1, a_2, a_3, \ldots$. Die Spaltenfolge $(a_j)_{j=1}^{\infty}$ habe die Eigenschaft, daß

$$(4.9)\qquad A_0:=A(e_0)\in M_q\,,$$

was nach (4.1) damit äquivalent ist, daß für jedes $c\in l_q$ $A(c)\in M_q$.

Wir suchen im folgenden eine positive Konstante K, so daß für alle $c\in l_q$ gilt:

$$(4.10)\qquad |c|_q\leqq\frac{1}{8}\Rightarrow|\det A(c)|\leqq K;$$

dann folgt aus der Linearität in c die Stetigkeit von det $A(c)$. Es sei also

$$c=(\gamma_j)_{j=0}^{\infty}\in l_q,\quad |c|_q\leqq\frac{1}{8}\,.$$

Wir zerlegen, wie im 2. Kapitel

$$A(c)=D(c)+\bar{A}(c),\quad A_0=D_0+\bar{A}_0\,,$$

mit $D(c)$ und D_0 als Matrizen aus den Diagonalelementen von $A(c)$ bzw. A_0. Es sei $|\tilde{A}_0|_q \leqq r_0$; dann gilt, wie in den Überlegungen zu (4.1), mit

(4.11) $$r = r_0 + \frac{1}{8}$$

die Ungleichung $|\tilde{A}(c)|_q \leqq r$.

Wir beachten, daß wegen $|\gamma_0| \leqq |c|_q \leqq \frac{1}{8}$ für das erste Diagonalelement von $A(c)$ gilt:

(4.12) $$|\gamma_0 - 1| \leqq \frac{9}{8}.$$

Für den Fall, daß in (4.11) $r < 1$, gewinnen wir aus dem 1. Teil von Satz 2.4. die Aussage (4.10), nämlich

$$c \in l_q,\ |c|_q \leqq \frac{1}{8} \Rightarrow |\det A(c)| \leqq \exp\left(\frac{9}{8} + \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_{ii} - 1| + \frac{r^2}{1-r^2}\right).$$

Für den allgemeineren Fall, daß $r \geqq 1$, definieren wir $m \geqq 1$ so, daß

$$\left[\sum_{i=m}^{\infty}\left(\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{\infty} |\alpha_{ij}|^p\right)^{\frac{q}{p}}\right] \leqq \frac{1}{8}. \quad \text{Wegen} \quad \left(\sum_{i=m}^{\infty} |\gamma_i|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leqq |c|_q \leqq \frac{1}{8}$$

wird nach Anwendung der Dreiecksungleichung in der p- und der q-Norm:

$$\left[\sum_{i=m}^{\infty}\left(|\gamma_i|^p + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{\infty} |\alpha_{ij}|^p\right)^{\frac{q}{p}}\right]^{\frac{1}{q}} \leqq \left[\sum_{i=m}^{\infty}\left(|\gamma_i| + \left(\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{\infty} |\alpha_{ij}|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)^{q}\right]^{\frac{1}{q}} \leqq \frac{1}{4},$$

außerdem mit $M = 4r$

$$\left[\sum_{i=0}^{m-1}\left(|(1-\delta_{i0})\,\gamma_i|^p + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{\infty} |\alpha_{ij}|^p\right)^{\frac{q}{p}}\right]^{\frac{1}{q}} \leqq |\tilde{A}(c)|_q \leqq \frac{1}{4} M.$$

Damit haben wir für alle betrachteten $A(c)$ gemeinsame Größen m und M gefunden, mit denen der 2. Teil von Satz 2.4. anwendbar ist. Unter Benutzung von (4.12) erhalten wir die für alle $c \in l_q$ mit $|c|_q \leqq \frac{1}{8}$ geltende Abschätzung:

$$|\det A(c)| \leqq M^m \cdot \exp\left(2 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_{ii} - 1| + m + 3\right).$$

Aus den notierten Eigenschaften folgern wir über die Lösbarkeit des zu A gehörenden unendlichen Gleichungssystems

4.13. Satz. *Ist* $A \in M_q$, $c = (\gamma_k)_{k=0}^{\infty} \in l_q$ *mit* $c \neq 0$, $Ac = 0$, *so gilt*

$$\det A = 0.$$

Zum Beweis sei $j \in N$ die Nummer einer Komponente von c mit $\gamma_j \neq 0$; ohne Einschränkung sei angenommen, daß $\gamma_j = -1$. Dann bedeutet die Gleichung

$Ac=0$ für die Spalten von A:

$$a_j = \sum_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{\infty} \gamma_k a_k ,$$

wobei die Reihe zunächst in jeder Komponente konvergiert. Definiert man für $l\in \mathbf{N}$ die Matrix A_l durch Abänderung von A in der j-ten Spalte in

$$a_j^{(l)} = a_j - \sum_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{l} \gamma_k a_k ,$$

so gilt nach (4.5)

(4.14) $\forall\ l\in \mathbf{N} \quad \det A_l = \det A$.

Wenn man gezeigt hat, daß

(4.15) $|a_j^{(l)}|_q \to 0 \quad \text{für} \quad l\to\infty$,

dann liefert Satz 4.6. mit (4.14) zusammen unsere Behauptung. Zu (4.15) müssen wir zeigen, daß $\sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k a_k$ in l_q konvergiert. Wir haben

$$\sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k a_k = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k (a_k - e_k) + \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k e_k .$$

Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k e_k$ konvergiert gegen c, da $q<\infty$; weiter gilt nach der Hölderschen Ungleichung

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\gamma_k|\ |a_k - e_k|_q \leqq \left(\sum_{k=0}^{\infty} |\gamma_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k - e_k|_q^p\right)^{\frac{1}{p}} = |c|_q\, |A - I|_p .$$

Daß $\sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k a_k$ gegen Null konvergiert, folgt aus der komponentenweise Konvergenz gegen Null.

4.16. Zusatz. *Falls A Matrix vom* Hillschen *Typ, d. h.* $\sum_{i,j=0}^{\infty} |\alpha_{ij} - \delta_{ij}| < \infty$,

$$c = (\gamma_k)_{k=0}^{\infty} \in l_\infty \quad \textit{mit} \quad c \neq 0, \quad Ac = 0 ,$$

so gilt

1. $c\in l_1$;
2. $\det A = 0$.

Zunächst ist für jedes natürliche i

$$\sum_{j=0}^{\infty} \alpha_{ij}\gamma_j \quad \text{konvergent, da} \sum_{j=0}^{\infty} |\alpha_{ij}| < \infty ,$$

Ac ist also komponentenweise erklärt. Wir folgern aus $\sum_{j=0}^{\infty} \alpha_{ij}\gamma_j = 0$:

$$-\gamma_i = \sum_{j=0}^{\infty} (\alpha_{ij} - \delta_{ij})\, \gamma_j$$

und daher

$$|\gamma_i| \leqq |c|_\infty \cdot \sum_{j=0}^{\infty} |\alpha_{ij} - \delta_{ij}| .$$

Summation über i liefert

$$\sum_{i=0}^{\infty} |\gamma_i| \leqq |c|_\infty \cdot \sum_{i,j=0}^{\infty} |\alpha_{ij} - \delta_{ij}| .$$

Die 2. Behauptung folgt, wenn wir nunmehr den Satz 4.13. auf ein beliebiges q mit $1 \leqq q \leqq 2$ anwenden.

5. Konvergenzverhalten der Determinanten von Bandmatrizen

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit unendlichen Bandmatrizen der Ordnung k und beweisen dazu

5.1. Satz. *Es sei* $1 \leqq q \leqq p \leqq \infty$ *mit* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$; $k \in \boldsymbol{N}, \geqq 1$;

$A \in M_q$ *Bandmatrix der Ordnung* k, *d. h.*

$\alpha_{ij} = 0$ *für* $|i-j| > k$.

Dann gilt:

$$A \in M_2, \quad \textit{und} \quad |A - I|_2 \leqq \sqrt{2k+1}\, |A - I|_q .$$

Beweis: Aus der bekannten Tatsache

$$(5.2) \qquad c = (\gamma_i)_{i=0}^{\infty} \in l_1 \Rightarrow \forall r \geqq 1 \quad c \in l_r \quad \text{und} \quad |c|_r \leqq |c|_1$$

folgt mit $1 \leqq q \leqq q'$

$$(5.3) \qquad d = (\delta_i)_{i=0}^{\infty} \in l_q \Rightarrow d \in l_{q'}, \quad |d|_{q'} \leqq |d|_q .$$

Dazu wendet man nämlich (5.2) an auf

$$c = (|\delta_i|^q)_{i=0}^{\infty} \in l_1, \quad r = \frac{q'}{q} \geqq 1$$

und erhält

$$|d|_{q'}^q = \left(\sum_{i=0}^{\infty} |\delta_i|^{q'} \right)^{\frac{q}{q'}} = \left(\sum_{i=0}^{\infty} |\delta_i|^{qr} \right)^{\frac{1}{r}} \leqq \sum_{i=0}^{\infty} |\delta_i|^q = |d|_q^q .$$

Nach Definition von M_q gilt nun für $\mathfrak{z}_i = i$-te Zeile von $A - I$:

$$|A - I|_q = \left(\sum_{i=0}^{\infty} |\mathfrak{z}_i|_p^q \right)^{\frac{1}{q}} < \infty, \quad \text{also} \quad (|\mathfrak{z}_i|_p)_{i=0}^{\infty} \in l_q .$$

Wegen $q \leqq 2$ folgt aus (5.3), daß

$$(|\mathfrak{z}_i|_p)_{i=0}^{\infty} \in l_2, \quad \text{und} \quad \left(\sum_{i=0}^{\infty} |\mathfrak{z}_i|_p^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leqq |A - I|_q .$$

Da jedes $\tilde{b}_i$ höchstens $2k+1$ von Null verschiedene Komponenten besitzt, schließen wir für $i=0, 1, 2, \ldots$

$$\tilde{b}_i \in l_2, \quad |\tilde{b}_i|_2 \leqq \sqrt{2k+1}\, |\tilde{b}_i|_\infty \leqq \sqrt{2k+1}\, |\tilde{b}_i|_p$$

und daraus unmittelbar die Aussage des Satzes.

Für die beiden folgenden Kapitel setzen wir stets voraus: $A=(\alpha_{ij})_{i,j=0}^{\infty}$ sei Bandmatrix der Ordnung k aus M_2, d. h.

$$\text{(5.4)} \qquad \begin{cases} \alpha_{ij}=0, \quad \text{sobald } |i-j|>k\,, \\ \sum\limits_{i=0}^{\infty} |\alpha_{ii}-1| < \infty\,, \\ \sum\limits_{i,j=0}^{\infty} |\alpha_{ij}-\delta_{ij}|^2 < \infty\,. \end{cases}$$

Am Ende des 2. Kapitels hatten wir mit

$$P^2 = \prod_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (\delta_{ij} + |\alpha_{ij}-\delta_{ij}|)^2$$

die Abschätzung bewiesen

$$|\det A_n| \leqq P \quad \text{für alle natürlichen } n;$$

ebenso folgt für alle natürlichen n, $i, j \leqq n$:

$$\text{(5.5)} \qquad \left|\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} A_n\right| \leqq P\,.$$

Um die Konvergenzgeschwindigkeit einer Folge an der Matrix A zu messen, definieren wir, ähnlich wie MENNICKEN [9]:

5.6. Definition. *Falls $(\gamma_N)_{N=0}^{\infty}$ komplexe Zahlenfolge, m natürliche Zahl, $\geqq 1$, so heißt „$(\gamma_N)_{N=0}^{\infty}$ konvergent gegen Null von der Ordnung m bezüglich A" genau dann, wenn $\exists \gamma>0\, \exists n \in \boldsymbol{N}$, $N' \in \boldsymbol{N}$, so daß für alle $N \geqq N'$*

$$|\gamma_N| \leqq \gamma \cdot \Biggl(\sum_{\substack{i,j=N-n \\ i\neq j}}^{N} |\alpha_{ij}|^2\Biggr)^{\frac{m}{2}}.$$

Es sei nun eine natürliche Zahl $l \geqq 1$ vorgegeben, N_0 sei so gewählt, daß

$$\text{(5.7)} \qquad \begin{cases} \sum\limits_{i,j=N_1}^{\infty} |\alpha_{ij}-\delta_{ij}|^2 < 1 \quad \text{für} \quad N_1 = N_0 - lk - 1\,; \\ N_0 \geqq (l+1)\,k\,. \end{cases}$$

Für $N \geqq N_0$ berechnen wir $\det A_N - \det A_{N-1} = \det \Delta_N$ mit der in (3.2) angegebenen Matrix Δ_N. Abweichend vom 3. Kapitel, zerlegen wir hier Δ_N folgendermaßen:

$$\text{(5.8)} \qquad \Delta_N = \left(\begin{array}{cc|c|c} \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{A_{N-lk-1}}} & 0 & 0 \\ \cline{3-4} & & R_N^{(l)} & 0 \\ \hline 0 & L_N^{(l)} & D_N^{(l)} & s_N^{(l)} \\ \hline 0 & 0 & z_N^{(l)\tau} & \delta_N \end{array}\right),$$

wobei die Matrizen $L_N^{(l)}$, $D_N^{(l)}$, $R_N^{(l)}$ folgende Elemente α_{ij} von A besitzen:

$D_N^{(l)}$ für $i, j = N - lk, \ldots, N-1$;

$R_N^{(l)}$ für $i = N-(l+1)k, \ldots, N-lk-1$; $j = N-lk, \ldots, N-1$;

$L_N^{(l)}$ für $i = N-lk, \ldots, N-1$; $j = N-(l+1)k, \ldots, N-lk-1$.

Außerdem ist definiert

$$\delta_N = \alpha_{NN} - 1\,,$$

$$s_N^{(l)} = (\alpha_{iN})_{i=N-lk}^{N-1}, \quad z_N^{(l)} = (\alpha_{Nj})_{j=N-lk}^{N-1}\,.$$

Aufgrund der Bandstruktur von A zerlegen wir weiter

$$R_N^{(l)} = (R_{N-(l-1)k} \,|\, 0 \,|\, \cdots \,|\, 0)$$

$$D_N^{(l)} = \left(\begin{array}{c|c|c} D_{N-(l-1)k} & R_{N-(l-2)k} & 0 \\ \hline L_{N-(l-2)k} & D_{N-(l-2)k} & \\ \hline 0 & 0 & \ddots \\ & & \begin{array}{c|c} \cdot & R_N \\ \hline L_N & D_N \end{array} \end{array}\right), \quad L_N^{(l)} = \begin{pmatrix} L_{N-(l-1)k} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.9}$$

mit (k, k)-Matrizen D_ν, L_ν, R_ν, definiert wie $D_\nu^{(l)}$, $L_\nu^{(l)}$ bzw. $R_\nu^{(l)}$ für $l = 1$. Ebenso haben wir

$$z_N^{(l)^\tau} = (0 \,|\, 0 \,|\, \cdots \,|\, z_N^\tau), \quad s_N^{(l)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ s_N \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad s_N, z_N \in C^k.$$

Gemäß der Aufteilung (5.8) definieren wir Transformationsmatrizen wie im 3. Kapitel durch

$$\Lambda_N^{(l)} = \left(\begin{array}{c|c|c} I_{N-lk} & 0 & 0 \\ \hline 0 & I_{lk} & 0 \\ \hline 0 & -z_N^{(l)^\tau} D_N^{(l)^{-1}} & 1 \end{array}\right); \quad \mathsf{P}_N^{(l)} = \left(\begin{array}{c|c|c} I_{N-lk} & 0 & 0 \\ \hline 0 & I_{lk} & -D_N^{(l)^{-1}} s_N^{(l)} \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Es ergibt sich

$$\Lambda_N^{(l)} A_N^{(l)} \mathsf{P}_N^{(l)} = \left(\begin{array}{cc|c|c} \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{A_{N-lk-1}}} & 0 & 0 \\ \cline{3-4} & & R_N^{(l)} & s_N' \\ \hline 0 & L_N^{(l)} & D_N^{(l)} & 0 \\ \hline 0 & z_N'^\tau & 0 & \varepsilon_N \end{array}\right)$$

mit

$$\begin{cases} \varepsilon_N = (\alpha_{NN} - 1) - z_N^{(l)^\tau} D_N^{(l)^{-1}} s_N^{(l)}\,, \\ z_N'^\tau = -z_N^{(l)^\tau} D_N^{(l)^{-1}} L_N^{(l)}\,, \\ s_N' = -R_N^{(l)} D_N^{(l)^{-1}} s_N^{(l)}\,. \end{cases} \tag{5.10}$$

Aus Gründen der Übersichtlichkeit ist die Abhängigkeit von l in s'_N und z'_N nicht markiert. Definiert man die Matrix $U_N^{(l)}$ durch

$$U_N^{(l)} = \left((-1)^{i+j} \begin{pmatrix} j \\ i \end{pmatrix} A_{N-1} \right) \right)_{i,j=N-(l+1)k}^{N-lk-1},$$

so folgt in Analogie zu (3.7)

5.11. Satz. 1. det $A_N -$ det $A_{N-1} = \{(\alpha_{NN}-1) - z_N^{(l)\tau} D^{(l)^{-1}} s_N^{(l)}\}$ det $A_{N-1} + \varrho_N^{(l)}$, *mit* $\varrho_N^{(l)} = z_N'^{\tau} U_N^{(l)} s_N'$.

2. $\varrho_N^{(l)}$ *strebt gegen Null von der Ordnung* $2l+2$ *bezüglich* A.

Beweis. Als erste Abschätzung erhalten wir:

(5.13) $\quad |\varrho_N^{(l)}| \leqq |z'_N|_2 \, |U_N^{(l)}|_2 \, |s'_N|_2$,

wobei nach (5.5) für alle natürlichen N

(5.14) $\quad |U_N^{(l)}|_2 \leqq k \cdot P$

gilt. Zur Untersuchung von z'_N und s'_N definieren wir Projektionsmatrizen, die der Zerlegung eines Vektors des C^{kl} in l Blöcke des C^k entsprechen, nämlich für $\mu = 1, \ldots, l$

$$J_\mu = \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & 0 & & & 0 & \\ & & \ddots & & & \\ & 0 & & I_k & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}_{(kl,kl)},$$

also mit der k-zeiligen Einheitsmatrix in der μ-ten Blockzeile und -spalte. Mit diesen J_μ gilt nun:

$$z_N^{(l)\tau} = z_N^{(l)\tau} J_l, \quad s_N^{(l)} = J_l s_N^{(l)}; \quad L_N^{(l)} = J_1 L_N^{(l)}, \quad R_N^{(l)} = R_N^{(l)} J_1$$

und daher wegen (5.10)

$$z'_N = -z_N^{(l)\tau} (J_l D_N^{(l)^{-1}} J_1) \, L_N^{(l)}; \quad s'_N = -R_N^{(l)} (J_1 D_N^{(l)^{-1}} J_l) \, s_N^{(l)}.$$

Demnach haben wir die Abschätzungen

$$\text{(5.15)} \qquad \begin{cases} |z'_N|_2 \leqq |z_N^{(l)}|_2 \cdot |L_N^{(l)}|_2 \cdot |J_l D_N^{(l)^{-1}} J_1|, \\ |s'_N|_2 \leqq |s_N^{(l)}|_2 \cdot |R_N^{(l)}|_2 \, |J_1 D_N^{(l)^{-1}} J_l|, \end{cases}$$

wobei wir als nichtindizierte Norm die Operatornorm bezüglich der $|\ |_2$-Norm im C^{lk} wählen. Wir setzen

(5.16) $\quad D_N^{(l)} = E_N^{(l)} + F_N^{(l)} = E_N^{(l)} \, (I - V_N^{(l)})$, wobei

$\quad E_N^{(l)} = \operatorname{diag} \, (\alpha_{ii})_{i=N-lk}^{N-1}$.

Wegen (5.7) ist die Größe

$$\alpha_N^{(l)} := \min \{|\alpha_{ii}| : i = N-lk, \ldots, N-1\} \text{ positiv, und}$$

$$\alpha_N^{(l)} \to 1 \quad \text{für} \quad N \to \infty;$$

daher gilt

$$|V_N^{(l)}| \leqq \frac{1}{\alpha_N^{(l)}} \Bigg(\sum_{\substack{i,j=N-lk \\ i \neq j}}^{N-1} |\alpha_{ij}|^2 \Bigg)^{\frac{1}{2}},$$

strebt also gegen Null von der Ordnung 1 bezüglich A. Da $E_N^{(l)}$ Diagonalmatrix ist, besitzt mit $D_N^{(l)}$ auch $V_N^{(l)}$ eine Blockeinteilung (5.9), läßt sich also schreiben als

$$V_N^{(l)} = \sum_{\mu=1}^{l} J_\mu V_N^{(l)} J_\mu + \sum_{\mu=2}^{l} (J_\mu V_N^{(l)} J_{\mu-1} + J_{\mu-1} V_N^{(l)} J_\mu) . \tag{5.17}$$

Für genügend große N wird $|V_N^{(l)}| < 1$; dann läßt sich $D_N^{(l)^{-1}}$ gemäß (5.16) als NEUMANNsche Reihe schreiben; wir erhalten

$$J_1 D_N^{(l)^{-1}} J_l = \sum_{n=0}^{\infty} J_1 V_N^{(l)^n} E_N^{(l)^{-1}} J_l = \sum_{n=0}^{\infty} J_1 V_N^{(l)^n} J_l E_N^{(l)^{-1}} . \tag{5.18}$$

Dazu zeigen wir, daß

$$J_\varkappa V_N^{(l)^n} J_\lambda = 0, \quad \text{sobald} \quad |\varkappa - \lambda| \geqq n+1 . \tag{5.19}$$

Den Beweis von (5.19) führen wir mit Induktion über n, wobei der Fall $n=0$ klar ist. Für $n \geqq 0$ ist

$$J_\varkappa V_N^{(l)^{n+1}} J_\lambda = J_\varkappa V_N^{(l)^n} V_N^{(l)} J_\lambda ,$$

und nach (5.17)

$$V_N^{(l)} J_\lambda = (J_\lambda V_N^{(l)} + J_{\lambda+1} V_N^{(l)} + J_{\lambda-1} V_N^{(l)}) J_\lambda - \text{mit } J_{l+1} = J_0 = 0 ,$$

daher

$$J_\varkappa V_N^{(l)^{n+1}} J_\lambda = J_\varkappa V_N^{(l)^n} (J_\lambda + J_{\lambda+1} + J_{\lambda-1}) V_N^{(l)} J_\lambda .$$

Nach Induktionsannahme für n ist

$$J_\varkappa V_N^{(l)^n} (J_\lambda + J_{\lambda+1} + J_{\lambda-1}) = 0 \quad \text{sicher dann, wenn}$$
$$|\varkappa - \lambda| \geqq n+1 \quad \text{und} \quad |\varkappa - \lambda + 1| \geqq n+1 \quad \text{und} \quad |\varkappa - \lambda - 1| \geqq n+1 .$$

Letztere Bedingungen sind für $|\varkappa - \lambda| \geqq n+2$ erfüllt.

In der Reihe (5.18) bleibt stehen

$$J_1 D_N^{(l)^{-1}} J_l = \sum_{n=l-1}^{\infty} J_1 V_N^{(l)^n} J_l E_N^{(l)^{-1}} ,$$

daher gilt

$$|J_1 D_N^{(l)^{-1}} J_l| \leqq \frac{1}{\alpha_N^{(l)}} \sum_{n=l-1}^{\infty} |V_N^{(l)^n}| \leqq \frac{1}{\alpha_N^{(l)}} \frac{|V_N^{(l)}|^{l-1}}{1 - |V_N^{(l)}|} .$$

Es folgt, daß

$|J_1 D_N^{(l)^{-1}} J_l|$ von der Ordnung $l-1$ bzgl. A gegen Null konvergiert, falls $l \geqq 2$,

$|J_1 D_N^{(l)^{-1}} J_l|$ beschränkt bleibt, falls $l = 1$.

Die analoge Aussage gilt für $J_l D_N^{(l)^{-1}} J_1$.

Nimmt man hinzu, daß

$$|z_N^{(l)}|_2, \quad |L_N^{(l)}|_2, \quad |s_N^{(l)}|_2, \quad |R_N^{(l)}|_2 \text{ jeweils von der Ordnung 1}$$

bezüglich A gegen Null gehen, folgt aus (5.13), (5.14) und (5.15) die 2. Behauptung des Satzes.

6. Ein Prinzip der Konvergenzverbesserung

Es sei für $A=(\alpha_{ij})_{i,j=0}^{\infty}$ wieder die Voraussetzung (5.4) erfüllt. Wir schicken als Bemerkung voraus:

6.1. Hilfssatz. *Falls ε_N komplexe Zahlenfolge, $\varepsilon_N \to 0$ von der Ordnung $m \geqq 2$ bezüglich A, so $\sum\limits_{N=0}^{\infty} |\varepsilon_N| < \infty$.*

Zum Beweis benutzen wir die Definition (5.6), wonach ab einem gewissen N':

$$|\varepsilon_N| \leqq \gamma \sum_{\substack{i,j=N-n \\ i \neq j}}^{N} |\alpha_{ij}|^2 \leqq \gamma \sum_{i=N-n}^{N} \left(\sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{\infty} |\alpha_{ij}|^2 \right).$$

Daher gilt

$$\sum_{N=N'}^{\infty} |\varepsilon_N| \leqq (n+1)\ \gamma \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{\infty} |\alpha_{ij}|^2 \right) < \infty .$$

Als Prinzip der Konvergenzverbesserung notieren wir

6.2. Satz. *Es seien l, m natürliche Zahlen mit $2 \leqq m \leqq 2l+2$, $l \geqq 1$, $N_0 \in \boldsymbol{N}$ mit Eigenschaft* (5.7), $(\beta_N)_{N=0}^{\infty}$, $(\gamma_N)_{N=0}^{\infty}$ *komplexe Zahlenfolgen mit $\beta_N \neq 1$ für alle N,*

$$\beta_N = (1-\alpha_{NN}) + z_N^{(l)\tau} D_N^{(l)^{-1}} s_N^{(l)} + \gamma_N \quad \text{für} \quad N \geqq N_0 ,$$

wobei $\gamma_N \to 0$ von der Ordnung m bezüglich A.

Dann gilt:

1. $\prod\limits_{N=0}^{\infty} (1-\beta_N)$ *ist absolut konvergent*;
2. *die unendliche Matrix*

$$B = (\beta_{ij}) = \left(\frac{\alpha_{ij}}{1-\beta_i} \right)_{i,j=0}^{\infty}$$

erfüllt die Voraussetzung (5.4);

3. $\det A = \prod\limits_{N=0}^{\infty} (1-\beta_N) \cdot \det B$;
4. $\det B_N - \det B_{N-1} \to 0$ *von der Ordnung m bezüglich A bzw. B.*

Beweis.

Um zu zeigen, daß $\sum\limits_{N=0}^{\infty} |\beta_N| < \infty$, benutzen wir (5.4), wonach $\sum\limits_{N=0}^{\infty} |\alpha_{NN}-1| < \infty$. Außerdem konvergieren $z_N^{(l)\tau} D_N^{(l)^{-1}} s_N^{(l)}$ von der Ordnung 2, γ_N von der Ordnung

$m \geqq 2$ bezüglich A gegen Null, was mit Hilfssatz 6.1. unmittelbar die 1. Behauptung liefert. Wegen $\beta_N \neq 1$, $\lim_{N\to\infty} \beta_N = 0$, ist

$$\beta_I := \inf_{N\in\mathbf{N}} |1-\beta_N| > 0, \quad \beta_{II} := \sup_{N\in\mathbf{N}} |1-\beta_N| < \infty$$

und daher für alle $i, j \in \mathbf{N}$

$$|\beta_{ij}| \leqq \frac{1}{\beta_I} |\alpha_{ij}|, \quad |\alpha_{ij}| \leqq \beta_{II} |\beta_{ij}| .$$

Es folgt, daß $\sum\limits_{\substack{i,j=0\\ i\neq j}}^{\infty} |\beta_{ij}|^2 < \infty$; außerdem ist die Konvergenzordnung einer beliebigen Zahlenfolge bezüglich A und B stets die gleiche. Schließlich wird

$$|1-\beta_{ii}| = \frac{1}{|1-\beta_i|} \cdot |1-\alpha_{ii}-\beta_i| \leqq \frac{1}{\beta_I} \cdot (|1-\alpha_{ii}| + |\beta_i|)$$

und daher

$$\sum_{i=0}^{\infty} |1-\beta_{ii}| < \infty .$$

Aus den Voraussetzungen (5.4) folgt die Konvergenz von $\det B_N$ und damit Aussage 3.

Zum Beweis von 4. wollen wir die in B auftretenden Teilmatrizen mit einem $\tilde{}$ versehen, um sie von den Teilmatrizen von A zu unterscheiden. Satz 5.11., auf B angewendet, liefert für $N \geqq N_0$

$$\det B_N - \det B_{N-1} = \{(\beta_{NN}-1) - \tilde{z}_N^{(l)\tau} \tilde{D}_N^{(l)^{-1}} \tilde{s}_N^{(l)}\} \cdot \det B_{N-1} + \tilde{\varrho}_N^{(l)} . \tag{6.3}$$

Wir beachten, daß mit der invertierbaren Matrix

$$K_N^{(l)} = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{1-\beta_i}\right)_{i=N-lk}^{N-1} \quad \text{gilt:}$$

$$\tilde{D}_N^{(l)} = K_N^{(l)} D_N^{(l)}, \quad \tilde{s}_N^{(l)} = K_N^{(l)} s_N^{(l)}, \quad \tilde{z}_N^{(l)\tau} = \frac{1}{1-\beta_N} z_N^{(l)\tau} \tag{6.4}$$

und daher

$$\tilde{z}_N^{(l)\tau} \tilde{D}_N^{(l)^{-1}} \tilde{s}_N^{(l)} = \frac{1}{1-\beta_N} z_N^{(l)\tau} D_N^{(l)^{-1}} s_N^{(l)} . \tag{6.5}$$

Mit der Definition von β_N wird

$$\beta_{NN} - 1 = \frac{1}{1-\beta_N} (\alpha_{NN} - 1 + \beta_N) = \frac{1}{1-\beta_N} (z_N^{(l)\tau} D_N^{(l)^{-1}} s_N^{(l)} + \gamma_N) .$$

Dies mit (6.5) zusammen in (6.3) eingesetzt, liefert

$$\det B_N - \det B_{N-1} = \frac{1}{1-\beta_N} \gamma_N \det B_{N-1} + \tilde{\varrho}_N^{(l)} . \tag{6.6}$$

An dieser Stelle ist der eigentliche Beweis des Satzes beendet, da nach Satz 5.11. $\tilde{\varrho}_N^{(l)} \to 0$ von der Ordnung $2l+2$ bezüglich B, nach dem 2. Beweisteil also auch bezüglich A.

Zum Zweck einer Fehlerabschätzung wollen wir $\tilde{\varrho}_N^{(l)}$ durch $\varrho_N^{(l)}$ ausdrücken. Dazu beachtet man, daß für $i, j = 0, \ldots, N-1$

$$\begin{pmatrix} j \\ i \end{pmatrix} B_{N-1} = \prod_{\nu=0}^{N-1} \frac{1}{1-\beta_\nu} \cdot (1-\beta_j) \begin{pmatrix} j \\ i \end{pmatrix} A_{N-1}$$

und deshalb

$$\tilde{U}_N^{(l)} = \left(\prod_{\nu=0}^{N-1} \frac{1}{1-\beta_\nu} \right) U_N^{(l)} K_{N-lk}^{(1)^{-1}} . \tag{6.7}$$

Wir benutzen außerdem, daß

$$\tilde{L}_N^{(l)} = K_N^{(l)} L_N^{(l)}, \quad \tilde{R}_N^{(l)} = K_{N-lk}^{(1)} R_N^{(l)} ,$$

und erhalten aus (5.10) mit (6.4) zusammen

$$\tilde{z}_N'^{\tau} = -\frac{1}{1-\beta_N} z_N^{(l)\tau} D_N^{(l)^{-1}} L_N^{(l)} = \frac{1}{1-\beta_N} z_N'^{\tau} ;$$

$$\tilde{s}_N' = -K_{N-lk}^{(1)} R_N^{(l)} D_N^{(l)^{-1}} s_N^{(l)} = K_{N-lk}^{(1)} s_N' .$$

Für $\tilde{\varrho}_N^{(l)} = \tilde{z}_N'^{\tau} \tilde{U}_N^{(l)} \tilde{s}_N'$ ergibt sich mit (6.7) nunmehr

$$\tilde{\varrho}_N^{(l)} = \left(\prod_{\nu=0}^{N} \frac{1}{1-\beta_\nu} \right) \cdot \varrho_N^{(l)} . \tag{6.8}$$

Setzt man in (6.6) auf der rechten Seite $\det B_{N-1} = \left(\prod_{\nu=0}^{N-1} \frac{1}{1-\beta_\nu} \right) \cdot \det A_{N-1}$ ein, so erhält man insgesamt

6.9. Korollar. $\det B_N - \det B_{N-1} = \left(\prod_{\nu=0}^{N} \frac{1}{1-\beta_\nu} \right) \cdot (\gamma_N \det A_{N-1} + \varrho_N^{(l)})$ *für* $N \geqq N_0$.

Zur praktischen Anwendung von Satz 6.2. wird man versuchen, die β_ν so zu wählen, daß $\prod_{\nu=0}^{\infty} (1-\beta_\nu)$ in geschlossener Form darstellbar ist. Als Näherung für $\det A$ wählt man bei geeignetem $N \geqq N_0$ die Zahl

$$\alpha_N = \prod_{\nu=0}^{\infty} (1-\beta_\nu) \cdot \det B_N .$$

Zur Fehlerabschätzung benutzen wir 6.9., wonach

$$\begin{aligned} \det A - \alpha_N &= \prod_{\nu=0}^{\infty} (1-\beta_\nu) \cdot (\det B - \det B_N) \\ &= \prod_{\nu=0}^{\infty} (1-\beta_\nu) \sum_{n=N+1}^{\infty} (\det B_n - \det B_{n-1}) \\ &= \sum_{n=N+1}^{\infty} \left(\prod_{\nu=n+1}^{\infty} (1-\beta_\nu) \right) (\gamma_n \det A_{n-1} + \varrho_n^{(l)}) \end{aligned}$$

und daher

$$(6.10)\qquad |\det A - \alpha_N| \leqq \sup_{\mu \geqq N+2} \left| \prod_{\nu=\mu}^{\infty} (1-\beta_\nu) \right| \left(\sup_{\nu \geqq N} |\det A_\nu| \cdot \sum_{n=N+1}^{\infty} |\gamma_n| + \sum_{n=N+1}^{\infty} |\varrho_n^{(l)}| \right).$$

Die Produkte $\left| \prod_{\nu=\mu}^{\infty} (1-\beta_\nu) \right|$ lassen sich mit der Exponentialfunktion im allgemeinen einfach und recht gut abschätzen; $|\det A_\nu|$ wird man zuerst durch P abschätzen; dann berücksichtigt man, daß (6.10) auch für alle $\det A_\nu$ mit $\nu \geqq N$ gilt, so daß die im allgemeinen recht grobe Schranke P verbessert werden kann. Wegen der groben Abschätzung von $|U_N^{(l)}|$ in (5.14) werden die Schranken für $\varrho_N^{(l)}$ ziemlich grob ausfallen: daher sollte man zu vorgegebenem m das l so groß wählen, daß $m < 2l+2$; dann strebt $\varrho_n^{(l)}$ schneller als γ_n gegen Null und erhält geringeres Gewicht in der Fehlerabschätzung.

Als unmittelbare Folgerung aus Satz 6.2. wollen wir die bei Mennicken ([9], Satz 2.21 und 2.30) für Hillsche Bandmatrizen angegebenen Sätze beweisen.

6.11. Satz. *Es sei* $A = (\alpha_{ij})_{i,j=0}$ *unendliche Matrix mit Voraussetzung* (5.4), $N_0' = \min\{N \in \boldsymbol{N}\colon \forall n \geqq N\ \alpha_{nn} \neq 0\}$, $\beta_N, \gamma_N' \in \boldsymbol{C}$ *so definiert, daß alle* $\beta_N \neq 1$ *und für* $N \geqq N_0' + k + 1$ *entweder*

$$(\mathrm{I})\quad \begin{cases} \beta_N = (1-\alpha_{NN}) + \displaystyle\sum_{\varkappa=1}^{k} \frac{\alpha_{N-\varkappa,N}\alpha_{N,N-\varkappa}}{\alpha_{N-\varkappa,N-\varkappa}} + \gamma_N', \\ \gamma_N' \to 0 \text{ von der Ordnung 3 bezüglich } A, \end{cases}$$

oder

$$(\mathrm{II})\quad \begin{cases} \beta_N = (1-\alpha_{NN}) + \displaystyle\sum_{\varkappa=1}^{k} \frac{\alpha_{N-\varkappa,N}\alpha_{N,N-\varkappa}}{\alpha_{N-\varkappa,N-\varkappa}} - \sum_{\substack{\varkappa,\mu=1\\ \varkappa\neq\mu}}^{k} \frac{\alpha_{N-\varkappa,N}\alpha_{N,N-\mu}\alpha_{N-\mu,N-\varkappa}}{\alpha_{N-\varkappa,N-\varkappa}\alpha_{N-\mu,N-\mu}} + \gamma_N', \\ \gamma_N' \to 0 \quad \text{von der Ordnung 4 bezüglich } A. \end{cases}$$

Dann sind mit geeignet gewählten γ_N *die Voraussetzungen von Satz* 6.2. *erfüllt, und es gilt für*

$$B = \left(\frac{\alpha_{ij}}{1-\beta_i} \right)_{i,j=0}^{\infty}:$$

$\det B_N - \det B_{N-1}$ *konvergiert gegen Null von der Ordnung* 3 *bezüglich* A *im Fall* (I), *von der Ordnung* 4 *bezüglich* A *im Fall* (II).

Zum Beweis wollen wir geeignete γ_N angeben. Wir zerlegen gemäß (5.16) für $N \geqq N_0$

$$D_N^{(l)} = E_N^{(l)} (I - V_N^{(l)}), \quad E_N^{(l)} = \operatorname{diag} (\alpha_{ii})_{i=N-lk}^{N-1}$$

Wir hatten bereits gesehen, daß

$$|V_N^{(l)}| \to 0 \quad \text{von der Ordnung 1 bzgl. } A.$$

Für genügend große N wird daher

$$(6.12)\qquad D_N^{(l)^{-1}} = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} V_N^{(l)^\varkappa} E_N^{(l)^{-1}}.$$

Diese Reihe setzen wir in den Ausdruck $z_N^{(l)\tau} D_N^{(l)^{-1}} s_N^{(l)}$ ein. Dazu wählen wir im Fall (I) $l=1$ und brechen nach dem 1. Glied ab:

$$z_N^\tau D_N^{-1} s_N = z_N^\tau E_N^{-1} s_N + z_N^\tau (D_N^{-1} - E_N^{-1}) s_N$$
$$= \sum_{\varkappa=1}^{k} \frac{\alpha_{N-\varkappa,N}\alpha_{N,N-\varkappa}}{\alpha_{N-\varkappa,N-\varkappa}} + z_N^\tau (D_N^{-1} - E_N^{-1}) s_N$$

Wir setzen nun

$$\gamma_N = \gamma_N' - z_N^\tau (D_N^{-1} - E_N^{-1}) s_N , \tag{6.13}$$

wobei

$$|D_N^{-1} - E_N^{-1}| \leqq \frac{|V_N|}{1-|V_N|} |E_N^{-1}| \to 0 \quad \text{von Ordnung 1 bzgl. A,}$$

daher strebt $\gamma_N \to 0$ von der Ordnung 3 bzgl. A. Wegen $\beta_N = (1-\alpha_{NN}) + z_N^\tau D_N^{-1} s_N + \gamma_N$ ist mit $l=1$, $m=3$ die Voraussetzung von 6.2. erfüllt.

Für den Fall (II) könnten wir auch $l=1$ wählen; zur besseren Fehlerabschätzung sollte aber $\varrho_N^{(l)}$ schneller als γ_N konvergieren, daher setzen wir hier $l=2$ und teilen die Reihe (6.12) nach dem 2. Glied ab. Danach haben wir

$$z_N^{(2)\tau} D_N^{(2)^{-1}} s_N^{(2)} = z_N^{(2)\tau} E_N^{(2)^{-1}} s_N^{(2)} + z_N^{(2)\tau} V_N^{(2)} E_N^{(2)^{-1}} s_N^{(2)} + z_N^{(2)\tau} \left[\sum_{\varkappa=2}^{\infty} V_N^{(2)^\varkappa} E_N^{(2)^{-1}} \right] s_N^{(2)}$$
$$= \sum_{\varkappa=1}^{k} \frac{\alpha_{N-\varkappa,N}\alpha_{N,N-\varkappa}}{\alpha_{N-\varkappa,N-\varkappa}} - \sum_{\substack{\mu,\nu=1\\ \mu\neq\nu}}^{k} \frac{\alpha_{N-\mu,N}\alpha_{N,N-\nu}\alpha_{N-\nu,N-\mu}}{\alpha_{N-\mu,N-\mu}\alpha_{N-\nu,N-\nu}}$$
$$+ z_N^{(2)\tau} \left[\sum_{\varkappa=2}^{\infty} V_N^{(2)^\varkappa} E_N^{(2)^{-1}} \right] s_N^{(2)} .$$

Hier setzt man

$$\gamma_N = \gamma_N' - z_N^{(2)\tau} \left[\sum_{\varkappa=2}^{\infty} V_N^{(2)^\varkappa} E_N^{(2)^{-1}} \right] s_N^{(2)} , \tag{6.14}$$

wobei wegen

$$\left| \sum_{\varkappa=2}^{\infty} V_N^{(2)^\varkappa} E_N^{(2)^{-1}} \right| \leqq \left| E_N^{(2)^{-1}} \right| \frac{|V_N^{(2)}|^2}{1-|V_N^{(2)}|}$$

$\gamma_N \to 0$ von der Ordnung 4 bezüglich A.

Hier ist mit $m=4$ die Voraussetzung von 6.2. erfüllt. –

Mit den Beweisideen zu diesem Satz lassen sich unschwer weitere Formeln für mögliche β_N, γ_N angeben, wenn man eine noch höhere Konvergenzordnung von $(\det B_N - \det B_{N-1})$ erreichen möchte. – Allerdings steigt mit der Konvergenzordnung der Aufwand, die β_N geeignet zu bestimmen und das unendliche Produkt $\prod_{N=0}^{\infty} (1-\beta_N)$ zu berechnen.

Literatur

[1] St. Bobr, Eine Verallgemeinerung des von Koch'schen Satzes über die absolute Konvergenz der unendlichen Determinanten. Math. Z. **10**, 1–11 (1921).

[2] L. W. Cohen, A note on a system of equations with infinite many unknowns. Bull. A. M. S. **36** (2), 563–572 (1930).

[3] –, Transformations on spaces of infinitely many dimensions. Annals of Math. **37** (2), 326–335 (1936).

[4] A. Grotendieck, La théorie de Fredholm. Bull. Soc. math. France **84**, 319–384 (1956).

[5] H. von Koch, Sur les déterminants infinis et les équations différentielles linéaires. Acta math. **16**, 271–295 (1892).

[6] –, Sur les systèmes d'une infinité d'équations linéaires à une infinité d'inconnues. Comptes Rendues du Congrès de Stockholm, 43–61 (1910).

[7] T. Lezanski, The Fredholm theory of linear equations in Banach spaces. Studia Matematica **13**, 244–276 (1953).

[8] W. Magnus, Infinite determinants associatet with Hill's equation. Pacific Journal of Math. **5**, Suppl. 2, 941–951 (1955).

[9] R. Mennicken, On the convergence of infinite Hill-type determinants. Arch. for Rat. Mech. and Anal. **30** (1), 12–37 (1968).

[10] H. Poincaré, Sur les déterminants d'ordre infini. Bull. Soc. math. France **14**, 77–90 (1886).

[11] F. Riesz, Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues. Paris 1913.

[12] A. F. Ruston, Operators with a Fredholm theory. Journal of London Math. Society **29**, 318–326 (1954).

[13] R. Sikorski, The determinant theory in Banach spaces. Colloquium Mathematicum **8**, 141–198 (1961).

[14] E. T. Whittaker and G. N. Watson, A course of modern analysis. Cambridge 1962.

In den zitierten Arbeiten finden sich zahlreiche weitere Literaturhinweise.

Fachbereich Mathematik d. Univ. Regensburg
84 Regensburg
Universitätsstr. 31
BRD