Reine Variablen-Prüfung und gemischte Attribut-Variablen-Prüfung in der statistischen Qualitätskontrolle

Dissertation
zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Wirtschaftswissenschaft des
Fachbereiches Wirtschaftswissenschaft der
Universität Regensburg

Vorgelegt von

Alfred Hamerle

aus Marktoberdorf

Regensburg 1975

Berichterstatter: Prof. Dr. E. Schaich
Prof. Dr. W. Oberhofer

Tag der Disputation: 10. 7. 1975

Inhaltsverzeichnis

0. Einleitung 1

1. Grundlagen, Definitionen und Bezeichnungen 6

2. Variablenkontrolle (messende Prüfung) 11

2.1 Einstufige Tests 11

2.1.1 Normalverteilung mit bekannter Varianz 14

2.1.1.a Test für μ mit $\bar{X}$ als Statistik 14

2.1.1.b Test für μ mit dem Median als Statistik 19

2.1.1.c Test für den Ausschußanteil p mit $\bar{X}$ als Statistik 26

2.1.2 Normalverteilung mit unbekannter Varianz 30

2.1.3 Cauchy-Verteilung 33

2.1.4 "Kupierte" (truncated) Normalverteilung 50

2.2 Zweistufige Tests 61

2.2.1 Normalverteilung 70

2.2.2 Exponentialverteilung 74

2.2.3 Cauchy-Verteilung 80

2.3 k-stufige Tests 87

3. Gemischte Attribut-Variablen-Prüfung bei normalverteilter Grundgesamtheit 95

3.1 Einstufige Tests bei einseitiger Toleranzgrenze 95

3.2 Zweistufige Tests bei einseitiger Toleranzgrenze 119

Literaturverzeichnis 127

Lebenslauf 132

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als Verwalter der Dienstgeschäfte eines wissenschaftlichen Assistenten am Lehrstuhl für Statistik der Universität Regensburg. Herrn Professor Dr. E. Schaich danke ich, daß er mich bei der Abfassung der Arbeit in großzügiger Weise gefördert und mir bei vielen Einzelproblemen weitergeholfen hat. Außerdem danke ich Herrn Professor Dr. W. Oberhofer für sein Interesse an der Arbeit und für viele wertvolle Hinweise. Nicht zuletzt gebührt mein Dank Frau R. Meier-Reusch für die sorgfältige Niederschrift des Manuskripts.

0. EINLEITUNG

Statistische Kontrollverfahren erlebten in ihrer Anwendung den größten Aufschwung während des Zweiten Weltkrieges in der militärischen Rüstungsindustrie der USA. Doch schon im Jahre 1931 wurde die Statistische Qualitätskontrolle im Buch von Shewhart "Economic Control of Quality of Manufactured Products" vorgestellt. In den europäischen Ländern mit Ausnahme von England fand die Qualitätskontrolle erst ab etwa 1950 Anwendung. Heute gehören ihre Verfahren zu den gebräuchlichen Methoden eines jeden größeren Betriebes. Sie beinhalten die Festlegung und Überwachung des Qualitätsniveaus nach feststehenden Normen, Richtlinien der Unternehmensleitung und Vereinbarungen mit dem Abnehmer.

In der Nachkriegsliteratur erschienen dann auch zahlreiche Monographien in deutscher Sprache, die sich im wesentlichen nach zwei Richtungen gliedern. Den überwiegenden Anteil stellen die Werke für den Praktiker, deren Beispiele einfach und betriebsnah sind und die nicht nur die statistischen Methoden beschreiben, sondern auch Probleme der Qualitätsfestlegung sowie die organisatorischen Fragen bei der Einführung der Qualitätskontrolle behandeln. Hier wären ohne Anspruch auf Vollständigkeit die Bücher von N.L. Enrick (19), Schaafsma-Willemze (42) und Schindowski-Schürz (44) zu nennen. Für den anderen Teil ist es das Ziel, aus der Sicht des Theoretikers, etwa des Mathematikers, an Hand der wichtigen Verfahren darzustellen, wie man für ein gegebenes praktisches Problem ein statistisches Verfahren aufstellt und die Eigenschaften dieses Verfahrens untersucht. In diesem Zusammenhang ist etwa das Werk von Uhlmann (54) zu nennen. Wesentlich mehr Gesamtdarstellungen oder Artikel in den relevanten Zeitschriften finden wir jedoch in der englischsprachigen Literatur, so z.B. Duncan (16), Dudley and Cowden (15), Juran (28) und viele weitere anwendungsorientierte Werke.

In der statistischen Qualitätskontrolle lassen sich zwei Hauptaufgaben unterscheiden (vgl. Uhlmann (54) S. 82 ff):

1. Die Kontrolle der Annahme und ebenso der Auslieferung von Waren (Eingangs- und Endkontrolle)

2. Die laufende Kontrolle einer Produktion

zu 1.:

Hier besteht das Ziel der Kontrolle darin, für den Empfänger bzw. Lieferanten zu prüfen, ob die Qualität der Ware den vereinbarten Bedingungen entspricht oder daß sie den zu stellenden Anforderungen für die Weiterverarbeitung genügt. Zur Beurteilung der vorgelegten Liefermengen verwendet man Stichprobenprüfpläne. Darunter versteht man im allgemeinen statistische Tests und zwar Alternativtests, da als Ergebnis der Kontrolle die Partie entweder angenommen oder abgelehnt werden muß. Wegen der Verluste bei falschen Entscheidungen setzen fast alle Prüfvorschriften dieser Art einen bestimmten Verlauf der Gütefunktion bzw. Operationscharakteristik der Tests voraus.

zu 2.:

Mit Hilfe häufig gezogener Stichproben soll durch die laufende Kontrolle erreicht werden, daß gar nicht erst in nennenswertem Maße Ausschuß produziert wird, indem rechtzeitig ungenaue Maschineneinstellungen behoben oder etwaige Beschädigungen sowie Veränderungen des Materials bemerkt werden. All diese Ursachen sollen möglichst schnell erkannt und ihr Weiterwirken verhindert werden,um den entstehenden Ausschuß einzuschränken. Die laufende Kontrolle verwendet die verschiedenartigsten Tests. Ihnen gemeinsam ist die aus organisatorischen Gründen gewählte äußere Form der Kontrollkarte. In regelmäßigen Zeitabständen wird der Produktion eine Stichprobe entnommen und die Ergebnisse sind in die Kontrollkarte einzutragen. Sie sollte auch angeben, was im Fall der Ablehnung der Nullhypothese geschehen soll, wie also z.B. in den Produktionsprozeß eingegriffen werden soll oder welche übergeordnete Instanz zu benachrichtigen ist.

Außerdem sind für beide Verfahren gewisse Kosteneinflußgrößen zu berücksichtigen. Neben einigen fixen Kosten, die durch Prüfanlagen und -personal bei der Ermittlung des Ausschußanteils verursacht werden, entstehen noch in Abhängigkeit von der Fertigungsgüte veränderliche Kosten. So steigt beispielsweise mit verschlechterter Produktion die Zahl der Reklamationen und eine Festlegung übertrieben enger Toleranzgrenzen wird überhöhte Fertigungskosten zur Folge haben. Dodge und Romig gaben bereits 1941 eine Prüfplansammlung für Gut-Schlecht-Prüfung heraus, in der wirtschaftliche Faktoren berücksichtigt wurden. Sie weisen schon in der Einleitung darauf hin, daß für die Wahl des Prüfplanes Kostengesichtspunkte maßgebend sein müssen: "The variety of sampling plans, procedures and tables that can be constructed is almost unlimited. The advantages and disadvantages of each of several possible choices need to be carefully weighed from both theoretical and practical standpoints. More often than not, the engineering considerations weigh more heavily than the statistical because over-all costs and ease of application under hurried shop conditions are of first importance." (veröffentlicht in: The Bell System Technical Journal 1941 oder vgl. H.F. Dodge, H.G. Romig: Sampling inspection tables, New York-London 1959). Eine gute Darstellung von Prüfplänen unter Berücksichtigung von wirtschaftlichen Gesichtspunkten finden wir mit weiteren Literaturhinweisen bei Uhlmann (55): "Kostenoptimale Prüfpläne".

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich ausschließlich mit der Eingangs- und Endkontrolle von großen Warenlieferungen. Im ersten Teil beschäftigen wir uns mit der Kontrolle meßbarer Größen, der sogenannten Variablenkontrolle, wo bisher nur unter ganz speziellen Voraussetzungen Pläne ausgearbeitet wurden, während die sogenannte Attribut-Kontrolle oder Gut-Schlecht-Prüfung einen sehr weiten Anwendungskreis gefunden hat und Prüfpläne verschiedenster Art erstellt wurden. Beachtet man jedoch, daß bei der Gut-Schlecht-Prüfung wesentliche Informationen, welche die Qualität der Erzeugnisse beeinflussen, verloren gehen, so erscheint es wohl sinnvoll, sich einer genaueren theoretischen Untersuchung der Variablenkontrolle zuzuwenden, zumal viele Merkmale von Erzeugnissen quantitativ erfaßbar sind. Als Beispiele hierfür seien nur Durchmesser, Länge, Gewicht, Dehnbarkeit, Reißfestigkeit, Widerstand, Brenndauer genannt.

Hier sollen die Überlegungen in den Werken von Bowker and Goode (8), Duncan (16), Bowker and Lieberman (9) sowie Uhlmann (54) zu den ein- und mehrfachen Stichprobenplänen für quantitative Merkmale weiterentwickelt werden, wobei wir im Verlauf dieses ersten Teils der Arbeit auch auf die stets gemachte Annahme der zugrundeliegenden Normalverteilung verzichten und die zwar in der Praxis wohl nicht so häufig auftretenden aber dennoch wichtigen Klassen der Cauchy- bzw. Exponentialverteilungen sowie die für die Anwendung sehr wichtige "kupierte" Normalverteilung untersuchen. Unser Anliegen ist hierbei, die relevanten Tests exakt zu beschreiben und die für deren Güte kennzeichnenden Operationscharakteristiken formal herzuleiten. Selbstverständlich ist evident, daß für die endgültige Anwendung im Betrieb noch umfangreiches Tabellenwerk erforderlich ist. Im Rahmen dieser theoretischen Arbeit wird jedoch auf dessen Herstellung verzichtet.

Der zweite Teil der Arbeit behandelt ein neues Gebiet der statistischen Qualitätskontrolle, die sogenannte gemischte Attribut-Variablenkontrolle. Hier gehen wir davon aus, daß einerseits meßbare Merkmale vorliegen, aber auf der anderen Seite auch eine Einteilung der geprüften Werkstücke in Gut-Schlecht erfolgen kann (möglicherweise durch vorgegebene Toleranzgrenzen). Wir wollen versuchen, beide Informationen in den Stichprobenplan aufzunehmen. Ansätze hierfür finden wir bei Bowker and Goode (8). Nach der theoretischen Herleitung der in Frage kommenden Verteilungen wollen wir eine Reihe von ein- und mehrstufigen Prüfplänen entwickeln und ihre Eigenschaften untersuchen. Auch stehen Kostengesichtspunkte in dieser Arbeit im Hintergrund. Sie finden gelegentlich Berücksichtigung.

1. GRUNDLAGEN, DEFINITIONEN UND BEZEICHNUNGEN

Bevor wir auf die einzelnen Modelle eingehen und die Testverfahren diskutieren, wollen wir in diesem Kapitel einige grundlegende Sachverhalte und Definitionen festhalten. In der statistischen Qualitätskontrolle steht man oft vor folgender Situation:

Eine große Partie von Werkstücken wird angeliefert und der Abnehmer oder auch der Produzent stellt sich die Frage, ob die Partie den Qualitätsanforderungen genügt und angenommen bzw. weitergegeben werden kann. Eine Totalerhebung, d. h. die Prüfung jedes einzelnen Werkstückes sei nicht möglich. Also ist der Kontrolleur gezwungen, aufgrund des Ergebnisses einer Stichprobe zu entscheiden, ob die Partie angenommen oder zurückgewiesen wird. Er wird statistische Methoden anwenden, um sich Entscheidungshilfen zu verschaffen, wobei natürlich gewisse einschränkende Annahmen getroffen werden müssen, um ein mathematisches Modell erstellen zu können. Den für diese Arbeit relevanten Teil der Begriffe und Voraussetzungen wollen wir kurz zusammenstellen und erläutern.

Zunächst gehen wir aus von der Grundgesamtheit der Werkstücke. Hier interessieren uns gewisse Merkmale (z. B. Durchmesser, Dehnbarkeit), die stochastischer Natur sind. In unserem Modell sind diese Merkmale dann Zufallsvariablen. Wir bezeichnen sie stets mit Großbuchstaben, etwa X, ihre Ausprägungen mit kleinen Buchstaben, etwa x, und fordern ihre Meßbarkeit.

Dabei betrachten wir eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ wie üblich als (Borel-) meßbar, wenn gilt:

$$f^{-1}(B) \in \mathfrak{B}^n \quad \text{für alle } B \in \mathfrak{B}$$

$\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}^n$ sind die σ-Körper der Borelschen Mengen von $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{R}^n$.

Weiterhin unterstellen wir für sämtliche vorkommenden Merkmale der Grundgesamtheit bestimmte Klassen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen p_μ, die von einem eindimensionalen reellen Parameter μ abhängen und auf $\mathcal{B}$ definiert sind. Damit erhalten wir die Wahrscheinlichkeitsräume $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, p_\mu)$, $\mu \in \mathbb{R}$.

Die Wahrscheinlichkeitsmaße p_μ, welche die Zufallsvorgänge beschreiben, sollen alle vom Lebesgue-Maß λ dominiert werden. Dabei heißt ein Maß p über $(\mathbb{R},\mathcal{B})$ vom Maß λ dominiert (bzgl. λ totalstetig), wenn gilt:

$$\text{für } B \in \mathcal{B} \text{ und } \lambda(B) = 0 \Rightarrow p(B) = 0$$

Diese Annahme verschafft uns den Vorteil, daß die Abhängigkeit der Wahrscheinlichkeitsmaße vom Parameter μ nicht nur durch Mengenfunktionen, sondern auch durch reelle Punktfunktionen, den Wahrscheinlichkeitsdichten, erfaßt werden kann. Denn nach dem Satz von Radon-Nikodym existiert unter der Voraussetzung der Dominiertheit stets eine nichtnegative meßbare Funktion f_μ mit

$$(1.1) \qquad p_\mu(B) = \int_B f_\mu \, d\lambda \quad \text{für alle } B \in \mathcal{B}$$

Die Existenz und Eindeutigkeit der λ-Dichten f_μ ist bis auf eine Menge vom Lebesgue-Maß Null gesichert. Gleichfalls gelten Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen im weiteren Verlauf nur bis auf eine Menge vom Lebesgue-Maß Null, was jedoch den späteren Aufbau der Tests sowie die Berechnung der benötigten Wahrscheinlichkeiten in keiner Weise beeinträchtigt und für praktische Anwendungen keine Rolle spielt. Außerdem haben wir es nur mit stetigen Funktionen zu tun, so daß gelegentlich auf den Hinweis der Meßbarkeit sowie auf die Aussage "λ-

fast überall" verzichtet wird.

Die Wahrscheinlichkeitsdichte einer Zufallsvariablen X in Abhängigkeit vom eindimensionalen Parameter μ bezeichnen wir meist mit $f_{X;\mu}(x)$, nur wenn Verwechslungen ausgeschlossen sind, charakterisieren wir die Dichte bisweilen durch das Argument. So schreiben wir beispielsweise für die Dichte des arithmetischen Mittels $\bar{X}$ $f_\mu(\bar{x})$.

Weiterhin berücksichtigen wir, daß jede Borel-meßbare Funktion f auf $\mathbb{R}$ mit absolut konvergentem uneigentlichen Riemann-Integral auch Lebesgue-integrierbar ist mit dem gleichen Integralwert (vgl. etwa Bauer (5) S.84, Richter (40) S. 183). Aus diesem Grunde stehen uns viele Resultate aus der Theorie der Riemann-Integrale auch hier zur Verfügung.

Bezüglich der Dominiertheit haben wir noch folgende Aussage:

Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige Zufallsvariablen mit Verteilungen $p_1, \ldots, p_n$, die jeweils durch das Lebesgue-Maß λ dominiert werden, so wird die gemeinsame Verteilung $p = p_1 \otimes \ldots \otimes p_n$ durch $\lambda_n := \lambda \otimes \ldots \otimes \lambda$ dominiert. Die Lebesgue-Dichte der gemeinsamen Verteilung ist das Produkt der jeweiligen λ-Dichten (vgl. Witting (58) S. 49 Spezialfall des Satzes 2.3).

Weiterhin garantiert uns die Voraussetzung, daß die λ-Dichten existieren, daß wir statt der Klasse von Wahrscheinlichkeitsmaßen $\{p_\mu: \mu \in K \subseteq \mathbb{R}\}$ auch die Klasse $\{f_\mu: \mu \in K \subseteq \mathbb{R}\}$ betrachten können. Der Parameter μ ist in unseren Modellen unbekannt und aufgrund einer "uneingeschränkten Zufallsstichprobe" $(X_1, \ldots, X_n)$ (bzgl. dieses Begriffes vgl. etwa Schaich u. a. (43), Kap. 5) wollen wir über μ eine Aussage machen. Der Stichprobenraum ist also der $\mathbb{R}^n$. Wir treffen jedoch die Entscheidung mit Hilfe einer meßbaren Schätzfunktion (Statistik) $T(\underline{x})$, an die wir die Forderung stellen:

$$T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ mit}$$

$$E_\mu(T(\underline{x})) = \int T(\underline{x})\, dp_\mu \text{ ist Funktion von } \mu$$

Die Verwendung einer Schätzfunktion $T(\underline{x})$ entspricht einer Zusammenfassung des Beobachtungsmaterials und bringt eine Verringerung der Dimension des Stichprobenraums. Andererseits soll durch $T(\underline{x})$ möglichst keine Information der Stichprobe verloren gehen. Deshalb verwenden wir wenn möglich suffiziente und vollständige Statistiken, welche gerade diese Eigenschaft besitzen (vgl. hierzu etwa Witting (58) S. 113 ff).

Jede Annahme über den unbekannten Parameter $\mu \in K \subseteq \mathbb{R}$ nennen wir eine Hypothese H_o und bezeichnen die nichtleere Teilmenge von K, für die H_o erfüllt ist, mit dem gleichen Symbol. Eine Menge H_1 mit $H_o \cap H_1 = \emptyset$ ist die Gegenhypothese. Die Menge aller möglichen Entscheidungen sei D. Über D wird noch der mathematischen Exaktheit wegen eine σ-Algebra definiert. Für unsere Belange ist D stets endlich, so daß wir problemlos D mit $\mathfrak{P}(D)$ zu einem Maßraum ergänzen können.

Die Entscheidung über den unbekannten Parameter μ treffen wir mit Hilfe von nicht-randomisierten statistischen Tests, worunter wir stets eine Abbildung des Stichprobenraums in den Entscheidungsraum verstehen.

Im weiteren Verlauf der Arbeit machen wir bei der Berechnung von Wahrscheinlichkeiten häufig Gebrauch von einem wichtigen Satz der Wahrscheinlichkeitsrechnung über die Transformation von Wahrscheinlichkeitsdichten. Viele unserer Ergebnisse sind Anwendungen dieses Theorems und deshalb bringen wir den Satz bereits hier unter diesen einleitenden Bemerkungen (vgl. Richter (40) S. 228, Schmetterer (45) S. 53).

<u>(1.2) Satz:</u>

Sei $\underline{X}$ eine n-dimensionale Zufallsvariable mit der λ_n-Dichte $f_{\underline{X}}(\underline{x})$ und sei $g(\underline{x})$ eine stetig differenzierbare, umkehrbar eindeutige Abbildung des $\mathbb{R}^n$ in sich mit nicht verschwindender Funktionaldeterminante $\frac{\partial(y_1,\ldots,y_n)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}$.
Dann besitzt die Zufallsvariable $g(\underline{X})$ die λ_n-Dichte

$$f_{g(\underline{X})}(\underline{y}) = f_{\underline{X}}(g^{-1}(\underline{y})) \quad \frac{\partial(x_1,\ldots,x_n)}{\partial(y_1,\ldots,y_n)}$$

für $\underline{y} \in g(\mathbb{R}^n)$ und 0 sonst.

2. VARIABLENKONTROLLE (messende Prüfung)

2.1. Einstufige Tests

Zur Einführung in die Problemstellung dienen zwei Beispiele:

Beispiel 1:

Bei der Herstellung von Elektronenröhren werden in eine Metallplatte kleine Löcher gestanzt. Das Spiel zwischen Stempel und Matrize, Unterschiede in der Dicke und Qualität des Metalls sowie Verschleißerscheinungen beeinflussen unabhängig voneinander den Durchmesser der Löcher. Aus langen Versuchsreihen weiß man, daß der Durchmesser in sehr guter Näherung normalverteilt ist mit einer Standardabweichung von 0,02 mm. Die Messungen an den gestanzten Löchern werden mit Hilfe optischer Vergrößerung in einem Projektionsapparat vorgenommen, wobei aus Kosten- und Zeitgründen eine Untersuchung aller Metallplatten unmöglich ist. Zur Weiterverarbeitung ist es jedoch notwendig, daß der Durchmesser der Löcher höchstens 0,8 mm beträgt.

Beispiel 2:

Eine Partie von 2400 Widerständen wird angeliefert. Seitens des Herstellers wird behauptet, daß der durchschnittliche Widerstand 720 Ohm betrage. Aus langjähriger Erfahrung weiß der Abnehmer, daß bei der Produktion von einer Normalverteilung mit Varianz $\sigma^2 = 32$ ausgegangen werden kann. Eine Totalüberprüfung sei auch hier ausgeschlossen.

In beiden eben geschilderten Anwendungsfällen sucht der Kontrolleur nach statistischen Verfahren, die ihm auf Stichprobenbasis eine Aussage über den unbekannten Lageparameter μ (hier: Erwartungswert) erlauben.

In der allgemeinen Theorie setzen wir nur voraus, daß der Typ der Verteilung des Merkmals bekannt ist, wobei wir nur solche Verteilungen zulassen, die vom Lebesgue-Maß dominiert werden und von einem eindimensionalen Lageparameter μ abhängen. Die in Frage kommende Klasse der Wahrscheinlichkeitsdichten sei

$$P = \{f_{X;\mu}(x) : \mu \in K \subseteq \mathbb{R}\}$$

Bei der einseitigen Fragestellung, wie sie etwa in Beispiel 1 zugrundeliegt, machen wir eine Annahme über μ in Form der Hypothese H_o: $\mu \leq \mu_o$, μ_o const., und haben die Gegenhypothese H_1: $\mu > \mu_o$.

(Für H_o: $\mu \geq \mu_o$ ist die Verfahrensweise völlig analog)

Der Stichprobenraum S ist die Menge der reellen Zahlen, da wir die Stichprobe $(X_1,\ldots,X_n)$ mit Hilfe einer geeigneten Statistik T auf $\mathbb{R}$ abbilden.

Für den Aufbau eines statistischen Tests konstruieren wir uns einen meßbaren "kritischen Bereich" C, so daß gilt:

(2.1) $\quad p_\mu \ (T(\underline{x}) \in C) \leq \alpha \quad$ für alle $\mu \in H_o \quad (0 < \alpha < 1)$

Die Zahl α aus (2.1), die in der Praxis vorgegeben wird, heißt Signifikanzniveau des Tests.

Der Entscheidungsraum D wird präzisiert zu $D = \{d_o, d_1\}$ mit

d_o = Annahme der Partie

d_1 = Ablehnung der Partie

und der Test φ kann unter Berücksichtigung von (2.1) folgendermaßen festgelegt werden:

(2.2) $\varphi : S \to D$ mit

$$\varphi(T(\underline{x})) = \begin{cases} d_o & \text{für } T(\underline{x}) \in \bar{C} \\ d_1 & \text{für } T(\underline{x}) \in C \end{cases}$$

Die Operationscharakteristik (im Sprachgebrauch der Qualitätskontrolle: OC-Kurve) ergibt sich dann als Wahrscheinlichkeit der Annahme in Abhängigkeit von μ:

$$\text{(2.3)} \qquad L(\mu) = p_\mu\ (T(\underline{x}) \in \bar{C}) = \int_{\bar{C}} f_{T(\underline{x});\mu}(x)dx$$

Im Falle der zweiseitigen Fragestellung (Beispiel 2) haben wir es mit einer einpunktigen Nullhypothese H_o: $\mu = \mu_o$ zu tun gegenüber der Alternative H_1: $\mu \neq \mu_o$

Der Test φ wird dann wie in (2.2) aufgebaut, wobei man den kritischen Bereich stets so wählen kann, daß gilt:

$$\text{(2.4)} \qquad p_\mu\ (T(\underline{x}) \in C) = \alpha \quad \text{für } \mu \in H_o, \text{ d.h. } \mu = \mu_o$$

Bemerkungen

1. Die Entscheidung $d_o \in D$ steht eigentlich im Widerspruch zur klassischen Testtheorie, wo man im Falle $T(\underline{x}) \in \bar{C}$ im allgemeinen keine Aussage über μ macht. Man beachte jedoch, daß die Praxis stets erfordert, daß man sich für Annahme oder Ablehnung der Warenlieferung ausspricht.

2. Die Tests sollen gewöhnlich gewisse Eigenschaften besitzen. Unter der Nebenbedingung, daß es sich um Tests

zum Niveau α handelt, wird in der Praxis der Stichprobenumfang n häufig so festgelegt, daß die Operationscharakteristik der Tests vorgegebene Eigenschaften aufweist. So wird etwa verlangt, daß der Graph der OC-Kurve durch vorgeschriebene Punkte verläuft oder daß die Steilheit der Kurve für bestimmte Punkte einen gewissen Wert annimmt (vgl. auch (2.7)).

3. Häufig tritt in der Praxis der Fall ein, daß bei der Fertigung von Werkstücken für das Qualitätsmerkmal gewisse Toleranzgrenzen nicht überschritten werden dürfen. Es wird hier im allgemeinen ein unvermeidbarer Ausschußprozentsatz vorhanden sein, etwa bei großer Standardabweichung der produzierenden Maschinen. Bei der definitiven Erstellung von Prüfplänen ist dieser Sachverhalt stets zu berücksichtigen, wir wollen jedoch bei unseren theoretischen Untersuchungen nicht näher darauf eingehen, da es sich hierbei um konstruktionstechnische Probleme oder Fragen der Ablaufplanung handelt (siehe hierzu Schaafsma-Willemze (42), S. 282 ff)

2.1.1. Normalverteilung mit bekannter Varianz

2.1.1.a Test für μ mit $\bar{X}$ als Statistik

Als einfachsten Fall zur Anwendung des in Kap. 2.1 beschriebenen Tests, der auch zur Behandlung der einführenden Beispiele geeignet ist, betrachten wir die Normalverteilung als Verteilung der Grundgesamtheit. Diese Tests werden auch in der Literatur beschrieben (vgl.: Uhlmann (54), S. 145 ff, Duncan (16) S. 219 ff u.a.).

Für unsere Belange sei die Klasse der Normalverteilungen gekennzeichnet durch den unbekannten Mittelwert μ. Die Varianz sei vorgegeben und gleich einem konstanten

Wert σ_o^2. Damit erhalten wir für die Klasse P der Wahrscheinlichkeitsdichten

$$P = \{f_\mu(x): f_\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma_o} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma_o^2}}, \mu \in K \subseteq \mathbb{R}\}$$

Im Parameterraum K ist ein Sollwert μ_o (für Beispiel 2 etwa $\mu_o = 760$) möglichst gut einzuhalten und Abweichungen nach beiden Seiten sollen erkannt werden. Wir haben also die zweiseitige Fragestellung und formulieren:

$$H_o: \mu = \mu_o$$

$$H_1: \mu \neq \mu_o$$

Als Schätzfunktion benützen wir die für die Klasse der Normalverteilungen suffiziente und vollständige Statistik

$$T(\underline{x}) = \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Die Verteilung von $T(\underline{x}) = \bar{X}$ ist bekannt und wir legen unter Beachtung von (2.4) den "kritischen Wert" c so fest, daß gilt:

Kritischer Bereich $C = (-\infty; \mu_o - c) \cup (\mu_o + c, \infty)$ und

$$(2.5) \quad p_{\mu_o}(-c \leq T(\underline{x}) - \mu_o \leq c) = 1 - \alpha$$

$$p_{\mu_o}\left(-\frac{c}{\sigma_o}\sqrt{n} \leq \frac{T(\underline{x})-\mu_o}{\sigma_o}\sqrt{n} \leq \frac{c}{\sigma_o}\sqrt{n}\right) = 1 - \alpha$$

$$\Phi\left(\frac{c}{\sigma_o}\cdot\sqrt{n}\right) - \Phi\left(-\frac{c}{\sigma_o}\sqrt{n}\right) = 1 - \alpha$$

$$\text{mit } \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Die Entscheidung wird nun gemäß (2.2) getroffen.

Die Eigenschaften des Tests können aus der Operationscharakteristik $L(\mu)$ abgeleitet werden. Es gilt:

$$\begin{aligned}(2.6)\qquad L(\mu) &= p_\mu(-c \leq T(\underline{x}) - \mu_o \leq c) = \\ &= p_\mu\left(\frac{\mu_o-\mu-c}{\sigma_o}\cdot\sqrt{n} \leq \frac{T(\underline{x})-\mu}{\sigma_o}\cdot\sqrt{n} \leq \frac{\mu_o-\mu+c}{\sigma_o}\cdot\sqrt{n}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{\mu_o-\mu+c}{\sigma_o}\sqrt{n}\right) - \Phi\left(\frac{\mu_o-\mu-c}{\sigma_o}\sqrt{n}\right)\end{aligned}$$

(mit $\Phi(x)$ wie in (2.5))

Aus (2.6) erkennt man sofort:

$$L(\mu_o-\mu) = L(\mu_o+\mu) \text{ und } \lim_{\mu\to\pm\infty} L(\mu) = 0$$

Außerdem gilt:

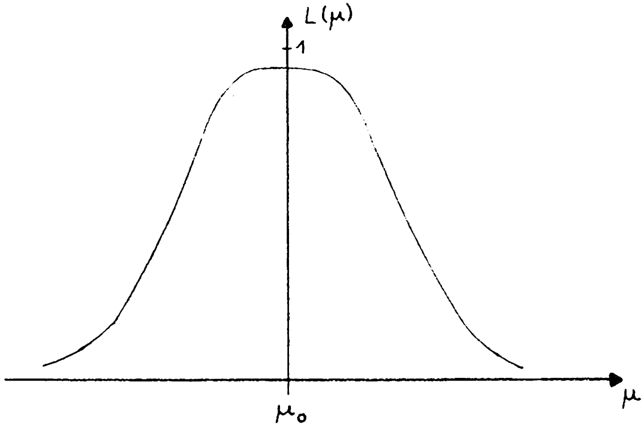
$$\frac{dL(\mu)}{d\mu} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(\mu_o-\mu+c)^2\cdot n}{2\sigma_o^2}}\cdot\left(-\frac{\sqrt{n}}{\sigma_o}\right) +$$

$$+\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma_o}\cdot e^{-\frac{(\mu_o-\mu-c)^2\cdot n}{2\sigma_o^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma_o}\cdot e^{-\frac{(\mu_o-\mu-c)^2\cdot n}{2\sigma_o^2}}\left[1 - e^{\frac{2c(\mu-\mu_o)\cdot n}{\sigma_o^2}}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{dL(\mu)}{d\mu} = \begin{cases} > 0 & \text{für } \mu < \mu_o \\ = 0 & \text{für } \mu = \mu_o \\ < 0 & \text{für } \mu > \mu_o \end{cases}$$

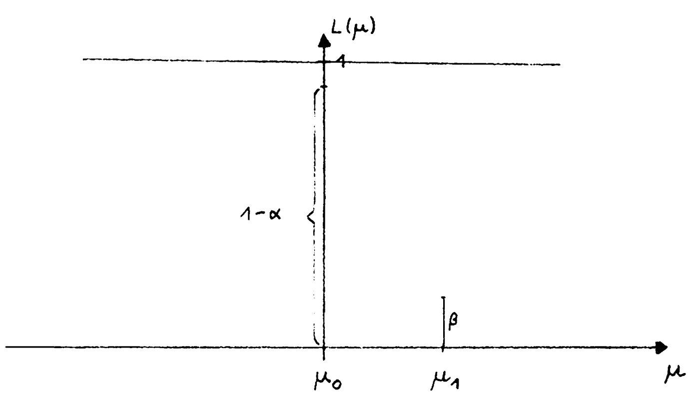
$\Rightarrow$ $L(\mu)$ ist maximal für $\mu = \mu_o$



In der Literatur werden der Stichprobenumfang n und der "kritische Wert" c wie bei der Attribut-Kontrolle festgelegt, nämlich durch Maßgabe vorbestimmter Punkte der Operationscharakteristik. Man wählt einen weiteren Punkt μ_1, etwa $\mu_1 > \mu_o$, führt Test φ aus (2.2) durch und legt dabei die den kritischen Bereich kennzeichnenden Größen n und c so fest, daß gilt

(2.7) (1) $p_\mu(T(\underline{x}) \in C) = \alpha$ für $\mu=\mu_o$

(2) $p_\mu(T(\underline{x}) \in C) = 1 - \beta$ für $\mu=\mu_1$ und $\beta < 1-\alpha$



Nun hat man auf alle Fälle erreicht, daß Lieferungen mit Mittelwert μ_o mit Wahrscheinlichkeit $1-\alpha$, hingegen Lieferungen mit Mittelwert μ_1 nur mit Wahrscheinlichkeit β angenommen werden. Die Werte μ_1, α und β richten sich nach dem konkreten Anwendungsfall, je nachdem welche Abweichung vom Sollwert μ_o mit Wahrscheinlichkeit $1-\beta$ erkannt werden soll. Jedoch ist für praktische Zwecke zu beachten, daß n nur ganzzahlig gewählt werden kann. Deshalb kann man in (2.7) nur die ungefähre Gleichheit erreichen. Für die Operationscharakteristik bedeutet dies:

(1) $L(\mu_o) \approx 1 - \alpha$

(2) $L(\mu_1) \approx \beta$

Wegen der Symmetrie von $L(\mu)$ beschränken wir uns auf den Fall $\mu > \mu_o$. Nach Uhlmann (54) S. 149 kann man in erster Näherung den Ausdruck $\Phi(\frac{\mu_o-\mu-c}{\sigma_o}\sqrt{n})$ vernachlässigen und man erhält:

$$\Phi(\frac{c}{\sigma_o}\sqrt{n}) \approx 1 - \alpha$$

$$\Phi(\frac{\mu_o-\mu_1+c}{\sigma_o}\sqrt{n}) \approx \beta\ , \quad \text{also:}$$

$$\frac{c}{\sigma_o}\sqrt{n} \approx \psi(1 - \alpha)$$

$$\mu_o - \mu_1 + c \approx \frac{\sigma_o}{\sqrt{n}}\psi(\beta)$$

wobei ψ die Umkehrfunktion der Verteilungsfunktion $\Phi(x)$ der Normalverteilung ist. Es ergibt sich:

$$\sqrt{n} \approx \frac{\sigma_o(\psi(\beta) - \psi(1-\alpha))}{\mu_o - \mu_1}$$

$$c \approx \frac{(\mu_o - \mu_1)}{\psi(\beta) - \psi(1-\alpha)} \cdot \psi(1-\alpha)$$

Falls diese Näherungslösung für (2.7) zu ungenau ist, kann man sie noch mit der exakten Form (2.6) der Operationscharakteristik verbessern.

2.1.1.b Test für μ mit dem Median als Statistik

Bei dem eben beschriebenen Test wurde vorausgesetzt, daß die Streuung des Merkmals bekannt ist und gleich einem konstanten Wert σ_o^2. Unter dieser Voraussetzung wollen wir in diesem Abschnitt noch ein weiteres Verfahren vorstellen, bei dem anstelle des arithmetischen Mittels der Median als Schätzfunktion verwendet wird. Ist das Merkmal wie in unserem Fall normalverteilt, so besitzt $\bar{X}$ stets eine kleinere Varianz als der Median und der Test mit Verwendung des Medians ist nicht so trennscharf wie der in 2.1.1.a beschriebene Test. Jedoch ist es in der Praxis in einigen Fällen bequemer und kostensparend, mit dem Median anstatt $\bar{X}$ zu arbeiten, etwa bei zeitaufwendiger und zerstörender Prüfung. Deshalb wird der Test hier kurz skizziert und einige Aussagen über den Median hergeleitet, die auch in Kap. 2.1.3. benötigt werden.

Den Stichprobenumfang setzen wir der Einfachheit halber als ungerade voraus, also sei

$$n = 2k + 1 , \quad k \in \mathbb{N}$$

P sei wieder die Klasse der Normalverteilungen mit Mittelwert μ und bekannter Varianz σ_o^2, d. h.

$$P = \{f_\mu(x): f_\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma_o} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma_o^2}} , \mu \in K \subseteq \mathbb{R}\}$$

Ordnet man die Komponenten eines jeden Punktes $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ nach wachsender Größe $x_{i_1} \leq \ldots \leq x_{i_n}$, so bezeichnet man die durch $T(\underline{x}) = (x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$ gegebene Abbildung des $\mathbb{R}^n$ in den $\mathbb{R}^n$ als Rangstatistik. Diese Abbildung schreiben wir:

$$T(\underline{x}) := X_{(\cdot)} := (X_{(1)}, \ldots, X_{(n)})$$

Weiterhin nennen wir

$$X_{(j)} := T_j(\underline{x})$$

die j-te order-statistic

(2.8) <u>Def.</u>:

Sei $n = 2k + 1 \quad , \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

Die Zufallsvariable

$$X_{(\frac{n+1}{2})} = T_{\frac{n+1}{2}}(\underline{x}) \text{ heißt Median.}$$

Bevor wir die Klasse P explizit in unsere Betrachtungen einbeziehen, wollen wir zunächst allgemein die Verteilungsfunktion $F_{X_{(\frac{n+1}{2})}}(x)$ und Dichtefunktion $f_{X_{(\frac{n+1}{2})}}(x)$ des Medians herleiten. Dabei setzen wir voraus, daß die $X_1, \ldots, X_n$ der Stichprobe unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen mit der Verteilungsfunktion $F(x)$ und der existierenden λ-Dichte $f(x)$ sind.

$F_{X_{(\frac{n+1}{2})}}(x)$ ist dann die Wahrscheinlichkeit, daß wenigstens $\frac{n+1}{2}$ der X_i kleiner oder gleich x sind. Daraus folgt:

$$F_{X_{(\frac{n+1}{2})}}(x) = \sum_{i=\frac{n+1}{2}}^{n} \binom{n}{i} [F(x)]^{i} [1 - F(x)]^{n-i}$$

$$\text{für } -\infty < x < \infty$$

Wegen der Identität

$$\sum_{r=k}^{n} \binom{n}{r} p^{r} (1 - p)^{n-r} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \int_{0}^{p} x^{k-1}(1-x)^{n-k}dx$$

$$(0 < p < 1)$$

gilt:

$$F_{X_{(\frac{n+1}{2})}}(x) = \frac{\Gamma(n+1)}{\left[\Gamma(\frac{n+1}{2})\right]^{2}} \int_{0}^{F(x)} t^{\frac{n-1}{2}} (1-t)^{\frac{n-1}{2}} dt$$

$$\text{für } -\infty < x < \infty$$

(2.9) $F_{X_{(\frac{n+1}{2})}}(x) =$

$$= \frac{\Gamma(n+1)}{\left[\Gamma(\frac{n+1}{2})\right]^{2}} \int_{0}^{F(x)} t^{\frac{n-1}{2}} \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{\frac{n-1}{2}}{i} \cdot (-1)^{\frac{n-1}{2} - i} \quad t^{\frac{n-1}{2} - i} dt =$$

$$= \frac{\Gamma(n+1)}{\left[\Gamma(\frac{n+1}{2})\right]^{2}} \cdot \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{\frac{n-1}{2}}{i} (-1)^{\frac{n-1}{2} - i} \cdot \int_{0}^{F(x)} t^{n-1-i} dt =$$

$$= \frac{\Gamma(n+1)}{\left[\Gamma(\frac{n+1}{2})\right]^{2}} \cdot \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{\frac{n-1}{2}}{i} (-1)^{\frac{n-1}{2} - i} \cdot \frac{[F(x)]^{n-i}}{n-i}$$

$$\text{für } -\infty < x < \infty$$

Und für die Wahrscheinlichkeitsdichte erhält man durch Differentiation des obigen Ausdrucks:

$$(2.10) \qquad f_{X_{(\frac{n+1}{2})}}(x) = \frac{\Gamma(n+1)}{\left[\Gamma(\frac{n+1}{2})\right]^2} \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{\frac{n-1}{2}}{i} (-1)^{\frac{n-1}{2} - i} \cdot$$

$$\cdot \; [F(x)]^{n-i-1} \cdot f(x)$$

$$\text{für } -\infty < x < \infty$$

Schließlich wollen wir noch eine wünschenswerte Eigenschaft für Verteilungen der $\frac{n+1}{2}$ -ten order-statistic zeigen.

(2.11) Lemma

Seien $X_1,\ldots,X_n$ unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariable mit der Verteilungsfunktion $F(x)$ und es existiere $\mu \in \mathbb{R}$, so daß

$$F(\mu-x) = 1 - F(\mu+x) \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

Dann gilt:

$$F_{X_{(\frac{n+1}{2})}}(\mu-x) = 1 - F_{X_{(\frac{n+1}{2})}}(\mu+x) \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

Beweis:

$$F_{X_{(\frac{n+1}{2})}}(\mu-x) = \sum_{i=\frac{n+1}{2}}^{n} \binom{n}{i} [F(\mu-x)]^i [1 - F(\mu-x)]^{n-i} =$$

$$= \sum_{i=\frac{n+1}{2}}^{n} \binom{n}{i} [1 - F(\mu+x)]^i [F(\mu+x)]^{n-i}$$

$$= 1 - \sum_{i=o}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{i} [1 - F(\mu+x)]^i [F(\mu+x)]^{n-i}$$

Beachtet man, daß gilt (n ungerade):

$$\sum_{r=\frac{n+1}{2}}^{n} \binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r} = \sum_{r=o}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{r} (1-p)^r p^{n-r}$$

so folgt:

$$F_{X_{(\frac{n+1}{2})}}(\mu-x) = 1 - \sum_{i=\frac{n+1}{2}}^{n} \binom{n}{i} [F(\mu+x)]^i [1 - F(\mu+x)]^{n-i} =$$

$$= 1 - F_{X_{(\frac{n+1}{2})}}(\mu+x)$$

<u>Bemerkung</u>

Falls der Erwartungswert einer symmetrisch zu $x=\mu$ verteilten Zufallsvariablen X existiert, ist er gleich μ.

Beweis:

Sei $Y = X-\mu$

$$F_y(y) = 1 - F_y(-y) \qquad \text{(Symmetrie)}$$

Nach Vogel (56), S.53 gilt für beliebige Zufallsvariable mit existierendem Erwartungswert:

$$EX = -\int_{-\infty}^{o} F(x)\, dx + \int_{o}^{\infty} [1-F(x)]\, dx$$

$$EY = -\int_{-\infty}^{o} F_y(y)\, dy + \int_{o}^{\infty} [1-F_y(y)]dy =$$

$$= -\int_{-\infty}^{o} F_y(y)\, dy + \int_{o}^{\infty} F_y(-y)\, dy =$$

$$= - \int_{-\infty}^{0} F_Y(y)\, dy + \int_{-\infty}^{0} F_Y(y)\, dy = 0$$

Nach diesen allgemeinen Überlegungen kommen wir nun wieder auf unsere Problemstellung zurück. Legen wir für die λ-Dichten der nach Voraussetzung unabhängigen Zufallsvariablen X_i $(i=1,\dots,n)$ speziell ein Element unserer Klasse P zugrunde, so erhalten wir für die Dichte der Schätzfunktion $X_{(\frac{n+1}{2})}$:

(2.12.)

$$f_{X_{(\frac{n+1}{2})}}(x) = \frac{\Gamma(n+1)}{\left[\Gamma(\frac{n+1}{2})\right]^2} \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{\frac{n-1}{2}}{i} (-1)^{\frac{n-1}{2} - i} \left[\Phi(\frac{x-\mu}{\sigma_o})\right]^{n-i-1} \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma_o} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma_o^2}} \qquad \text{für } -\infty < x < \infty$$

$$\text{und } \Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Mit der Bemerkung nach Lemma (2.11) haben wir sofort:

(2.13) $$E\, X_{(\frac{n+1}{2})} = \mu$$

Ist nun wieder ein Sollwert μ_o vorgegeben und Abweichungen von μ_o sollen erkannt werden, so ist:

$$H_o: \mu = \mu_o$$

$$H_1: \mu \neq \mu_o$$

Zur Berechnung des kritischen Werts c, welche den kritischen Bereich $C = (-\infty, \mu_o - c) \cup (\mu_o + c, \infty)$ festlegt, ist bei Verwendung des Medians als Teststatistik die Beziehung (2.12) heranzuziehen.

Bei vorgegebenem Signifikanzniveau α $(0 < \alpha < 1)$ muß gelten:

$$p_{\mu_o}(X_{(\frac{n+1}{2})} \in [\mu_o - c, \mu_o + c]) = 1-\alpha$$

$$\int_{\mu_o-c}^{\mu_o+c} f_{X_{(\frac{n+1}{2})};\mu_o}(x)\,dx = 1-\alpha$$

Für die Operationscharakteristik ergibt sich:

$$L(\mu) = \int_{\mu_o-c}^{\mu_o+c} f_{X_{(\frac{n+1}{2})};\mu}(x)\,dx$$

Da für die exakte Dichte (2.12) bei zugrundeliegender Normalverteilung keine Tabellenwerke verfügbar sind, macht man sich in der Praxis die Tatsache zunutze, daß die Verteilungen der order-statistics (wie z.B. $X_{(\frac{n+1}{2})}$) für zunehmendes n gegen eine Grenzverteilung streben (vgl. etwa: Fisz (20) S. 443).

Es gilt, daß für unabhängige Zufallsvariablen X_i mit bedian μ und existierender Dichte f(x) (hier: Dichte der Normalverteilung) mit $f(\mu) > 0$ die Zufallsvariable

$$Y_{(\frac{n+1}{2})} = \sqrt{4n} \cdot f(\mu)\,(X_{(\frac{n+1}{2})} - \mu)$$

$$\left(\text{hier:} \quad Y_{(\frac{n+1}{2})} = \frac{X_{(\frac{n+1}{2})} - \mu}{\sqrt{\frac{\pi}{2n}} \cdot \sigma_o} \right)$$

verteilungskonvergent ist gegen die Standardnormalverteilung (bezüglich der Verteilungskonvergenz siehe z.B. Vogel (56) S. 245 ff).

Für praktische Zwecke wird dann für größere Stichprobenumfänge statt der exakten Verteilung (2.12) die Normalverteilung mit Mittelwert μ und Varianz $\frac{\pi}{2}\frac{\sigma_o^2}{n}$ verwendet.

2.1.1.c. Test für den Ausschußanteil p mit $\bar{X}$ als Statistik

Zum Abschluß bringen wir noch eine Methode, die von Lieberman und Resnikoff vorgestellt wurde (vgl. (32)). Wir gehen wieder aus von der Klasse P von Wahrscheinlichkeitsdichten

$$P = \{f_\mu(x) : f_\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma_o} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma_o^2}}, \; -\infty < x < \infty, \; \mu \in K \subseteq \mathbb{R}\}$$

Außerdem seien noch Toleranzgrenzen u und v gegeben, die uns eine Attribut-Prüfung erlauben. Ein Stück ist "gut", falls sein Merkmalswert innerhalb der Toleranzen liegt, d.h. wenn gilt: $u \leq x \leq v$.

Ist nur eine obere oder eine untere Toleranzgrenze vorgegeben, so ist u gleich $-\infty$ bzw. v gleich ∞ zu setzen.

Damit stellt sich der Ausschußanteil p wie folgt dar

$$\text{(2.14)} \quad p = p_u + p_v = \int_{-\infty}^{u} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma_o} e^{-\frac{(t-\mu)}{2\sigma_o^2}} dt + \int_{v}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma_o} \cdot e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma_o^2}} dt$$

Ist nur eine Toleranzschranke vorgegeben, so ergibt sich

$$p = p_u = \int_{-\infty}^{u} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma_o} \cdot e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma_o^2}}\, dt$$

bzw.

$$p = p_v = \int_{v}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma_o} \cdot e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma_o^2}}$$

Für den zweiseitigen Fall, den wir in diesem Zusammenhang untersuchen wollen, läßt sich (2.13)noch weiterbehandeln.

(2.15) $$p = 1 - \int_{u}^{v} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma_o} \cdot e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma_o^2}}\, dt$$

p ist eine Funktion des unbekannten Parameters μ. Wir wollen nun eine erwartungstreue Statistik für p konstruieren, welche möglichst kleine Varianz besitzt. Hierzu helfen uns zwei Sätze aus der mathematischen Statistik.

(2.16) Satz von Blackwell (vgl.(6))

Sei X eine Zufallsvariable mit existierender Dichte $f_\mu(x)$ und $g(\underline{x})$ eine erwartungstreue Statistik, $T(\underline{x})$ eine suffiziente Statistik für μ. Dann gilt:

1) $E(g|T(\underline{x}))$ ist erwartungstreu

2) $\text{Var } E(g|T(\underline{x})) \leq \text{Var } g(\underline{x})$

(2.17) Satz von Lehmann und Scheffé (vgl. (58))

Voraussetzung wie in (2.16) und sei $T(\underline{x})$ zusätzlich noch vollständig, d. h. aus $E_\mu(f(T(\underline{x})) = 0$ für alle μ folgt $f(T(\underline{x})) = 0$ bis auf eine Menge vom Maß 0.

Dann gilt:

Für jeden eindimensionalen schätzbaren Parameter $\gamma(\mu)$ existiert eine erwartungstreue Schätzfunktion der Form $h(T(x))$, die unter allen erwartungstreuen gleichmäßig kleinste Varianz besitzt und die einzige erwartungstreue Statistik in Abhängigkeit von $T(\underline{x})$ ist.

Einen Parameter $\gamma(\mu)$ nennen wir schätzbar, wenn er eine erwartungstreue Schätzfunktion besitzt. Erläuternd bemerken wir noch, daß die Vollständigkeit der suffizienten Statistik $T(\underline{x})$ heuristisch gesehen bedeutet, daß, falls eine Funktion von T mit Erwartungswert 0 existiert, diese Funktion identisch gleich 0 sein muß für alle $T(\underline{x})$, an denen die Funktion positive Dichte besitzt.

Nun wollen wir den Sachverhalt aus (2.15) und (2.16) auf unser Problem anwenden und definieren für eine Stichprobe $(X_1,\ldots,X_n)$

$$g(x_1,\ldots,y,\ldots,x_n) = \begin{cases} 0 \text{ falls } u \leq y \leq v \\ 1 \text{ sonst} \end{cases}$$

wobei y ein beliebiges Element der Stichprobe, etwa x_k, ist.

Da wir Normalverteilung mit unbekanntem Mittelwert und bekannter Varianz σ_0^2 vorliegen haben, ist das arithmetische Mittel $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$ eine suffiziente Statistik für μ. Berücksichtigt man weiterhin, daß suffiziente Statistiken für die Normalverteilung auch vollständig sind, so erhält man mit den Aussagen der Sätze (2.15) und (2.16):

$\hat{P} = E(g|\bar{x})$ ist die erwartungstreue Statistik mit gleichmäßig kleinster Varianz für den Ausschußanteil p.

(2.18)

$$E(g|\bar{x}) = 1 - p(u \leq Y \leq v/_{\bar{x}}) = 1 - \int_u^v \frac{h(y,\bar{x})}{\ell(\bar{x})}\, dy$$

wobei $h(y,\bar{x})$ die gemeinsame Dichte von Y und $\bar{X}$ und $\ell(\bar{x})$ die Dichte von $\bar{X}$ ist.

$h(y,\bar{x})$ berechnen wir mit Hilfe der Dichte der Zufallsvariablen Y und $\bar{X}' = \frac{1}{n-1} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} X_i$

Es gilt:

$$f(y,\bar{x}') = \frac{\sqrt{n-1}}{2\pi\sigma_o^2}\, e^{-\frac{1}{2\sigma_o^2}\left[(y-\mu)^2+(n-1)(\bar{x}'-\mu)^2\right]}$$

Die lineare Transformation ψ liefert:

$$\psi:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\ ,\quad \underline{x} \to A\underline{x}$$

$$\begin{pmatrix} y \\ \bar{x}' \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{n} & \frac{n-1}{n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ \bar{x}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ \bar{x} \end{pmatrix}$$

Für det A gilt:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{n} & \frac{n-1}{n} \end{vmatrix} = \frac{n-1}{n}$$

und $\bar{x}' = \frac{n}{n-1}\bar{x} - \frac{y}{n-1}$. Daraus folgt:

$$h(y,\bar{x}) = |A|^{-1} \cdot f\left(y, \frac{n}{n-1}\bar{x} - \frac{y}{n-1}\right)$$

$$= \frac{n}{n-1} \cdot \frac{\sqrt{n-1}}{2\pi \cdot \sigma_o^2} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma_o^2}\left[(y-\mu)^2+(n-1)\left(\frac{n}{n-1}\bar{x} - \frac{y}{n-1} - \mu\right)^2\right]}$$

$$h(y,\bar{x}) = \frac{n}{2\pi \cdot \sigma_o^2 \sqrt{n-1}} \, e^{-\frac{1}{2\sigma_o^2}\left[(y-\mu)^2 + (n-1)\left(\frac{n}{n-1}\bar{x} - \frac{y}{n-1} - \mu\right)^2\right]}$$

Dies läßt sich in einigen Rechenschritten umformen zu

$$h(y,\bar{x}) = \frac{n}{2\pi \cdot \sigma_o^2 \sqrt{n-1}} \, e^{-\frac{n}{2\sigma_o^2}\left[(\bar{x}-\mu)^2 + \frac{1}{n-1}(y-\bar{x})^2\right]}$$

und für unseren Schätzer aus (2.17) ergibt sich schließlich:

$$(2.19) \quad \hat{P} = E(g|\bar{x}) = 1 - \int_u^v \sqrt{\frac{n}{n-1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_o} \cdot e^{-\frac{n}{2(n-1)\sigma_o^2} \cdot (y-\bar{x})^2} \, dy$$

Mit (2.18) haben wir die Schätzfunktion für den Ausschußanteil p mit gleichmäßig kleinster Varianz gefunden. $E(g|\bar{x})$ hängt natürlich ab von $\bar{x}$.

Mit diesen Ergebnissen läßt sich nun in einfacher Weise ein Test für den Ausschußanteil p konstruieren unter Verwendung von (2.19). Der Aufbau ist ähnlich dem in 2.1.1.a beschriebenen Test. Aus diesem Grunde wollen wir hier auf die genauen Details verzichten und verweisen auf (32), S.465 ff., wo auch die OC-Kurven für verschiedene Parameterwerte berechnet und graphisch dargestellt wurden. Es wurden dort auch Tests erarbeitet, für den Fall, daß die Varianz σ^2 unbekannt ist.

2.1.2. Normalverteilung mit unbekannter Varianz

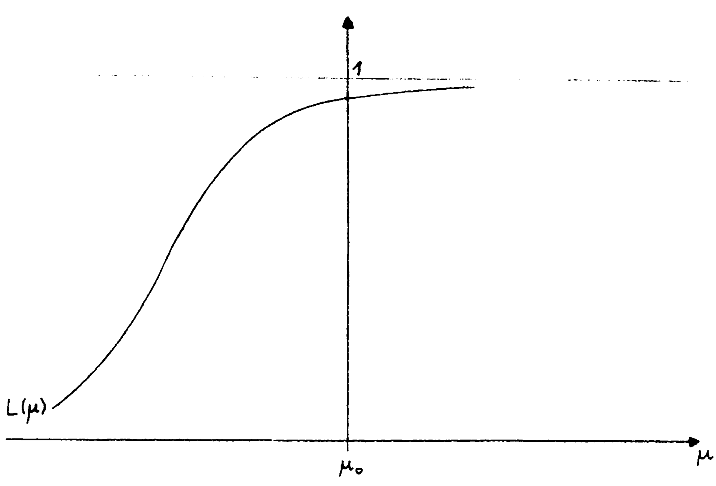
Natürlich ist es auch möglich Tests zu konstruieren, falls die Varianz der Grundgesamtheit unbekannt ist und durch die Varianz der Stichprobe

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

geschätzt werden muß. Da wir aber einerseits im Rahmen dieser Arbeit stets voraussetzen, daß die Varianz der Grundgesamtheit bekannt ist und andererseits dieses Problem in der Literatur ausführlich behandelt wird, wollen wir hier auf eine detaillierte Darstellung verzichten (vgl. hierzu etwa: Uhlmann (54), S. 151 ff oder Duncan (16), S. 239 ff).

Bemerkung:

Wir haben bisher nur zweiseitige Tests behandelt, jedoch läßt sich bei einseitiger Fragestellung völlig analog verfahren. Die Nullhypothese lautet dann etwa H_o: $\mu \geq \mu_o$ gegenüber der Alternative H_1: $\mu < \mu_o$. Die Verfahrensweise zur Konstruktion der entsprechenden Tests ist die gleiche, der einzige Unterschied liegt in der Berechnung des kritischen Bereichs, der für dieses H_o die Gestalt $(-\infty, \mu_o - c)$ hat. Die Operationscharakteristik hat dann etwa folgendes Aussehen:



Abschließend zu den Kapiteln 2.1.1 und 2.1.2 geben wir noch einen Auszug aus der weiterführenden Literatur zu diesem Problemkreis.

Eine Erweiterung der Tests von 2.1.1.c finden wir bei A.J. Duncan (vgl. (17)), der auch die Spannweite $R: = X_{max} - X_{min}$ zur Schätzung der Varianz in seine Prüfpläne aufnimmt.

Weitere Testpläne zur Überprüfung des Ausschußanteils p bei unbekanntem Mittelwert und unbekannter Varianz der zugrundeliegenden Normalverteilung beschreibt D. B. Owen in einem Aufsatz in der Zeitschrift Technometrics (siehe (36)).

Ist die Standardabweichung zwar unbekannt, jedoch eine obere Schranke für σ angebbar, so können zur Überprüfung der Qualität Tests verwendet werden, wie sie T. Colton in seinem Artikel "A Test Procedure with a Sample from a Normal Population when an Upper Bound to the Standard Deviation is Known" behandelt (vgl. (11)). Die kritischen Werte und die Gütefunktionen sind dort tabelliert und werden mit dem t-Test verglichen.

Betrachtet man nur eine einfache Nullhypothese H_o: $\mu = \mu_o$ gegenüber einer einfachen Alternative H_1: $\mu = \mu_1$ und will man anstelle der Schätzfunktion $\bar{X}$ Quantile als Teststatistik verwenden, so kann man einen Test aufbauen, wie er von I. Eisenberger (18) beschrieben wird.

Vom Verteidigungsministerium der USA wurde zur Variablenkontrolle das Vorschriftenwerk "Sampling Procedures and Tables for Inspection by Variables for Percent Defective" herausgegeben, dessen neueste Fassung die Bezeichnung "Military Standard 414" trägt. Eine Beschreibung findet sich beispielsweise bei Duncan (16).

Schließlich finden wir weitere Prüfpläne für messende Prüfung mit Berücksichtigung von Kostenparametern sowie Literaturhinweise bei K. Stange (50).

2.1.3 Cauchy-Verteilung

In diesem Abschnitt wollen wir die Annahme, daß die Grundgesamtheit des interessierenden Merkmals einer Normalverteilung genügt, fallen lassen. Zwar besitzt die Normalverteilung wegen ihrer zentralen Bedeutung in der Statistik einen sehr großen Anwendungsbereich sie reicht jedoch nicht aus, um allen Situationen in der Praxis gerecht zu werden. Deswegen behandeln wir hier noch einige andere Verteilungsklassen. Als erstes betrachten wir eine Klasse von Verteilungen, die in der Form den Normalverteilungen sehr ähnlich sind. Sie wird wiederum vom Lebesgue-Maß dominiert und die Lebesgue-Dichten sind gegeben durch

$$(2.14)\quad f(x) = \frac{1}{\pi\cdot\lambda}\cdot\frac{\lambda^2}{\lambda^2+(x-\mu)^2} \quad \text{für } -\infty < x < \infty,\ \mu \in \mathbb{R},\ \lambda > 0$$

Diese Verteilungen sind Spezialfälle von Wahrscheinlichkeitsmaßen vom sog. Pearson-Typ und heißen Cauchy-Verteilungen (siehe Cauchy (10): "Sur les résultats moyens d'observations de même nature et sur résultats les plus probables".).

Durch Integration erhält man die zugehörigen Verteilungsfunktionen

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan \left(\frac{x-\mu}{\lambda}\right) \text{ für } -\infty < x < \infty$$

Die Dichtefunktionen $f(x)$ sind symmetrisch zur Achse $x=\mu$ und durch Differentiation erhält man:

$$f'(x) = -\frac{2(x-\mu)}{\pi \cdot \lambda^3} \cdot \left[1 + \left(\frac{x-\mu}{\lambda}\right)^2\right]^{-2}$$

$$f''(x) = -\frac{2}{\pi \cdot \lambda^3} \left[1 + \left(\frac{x-\mu}{\lambda}\right)^2\right]^{-2} + \frac{8(x-\mu)^2}{\pi \lambda^5} \left[1 + \left(\frac{x-\mu}{\lambda}\right)^2\right]^{-3}$$

Hieraus errechnet man, daß $f(x)$ ein Maximum bei $x=\mu$ und Wendepunkte bei $x = \mu \pm \frac{1}{3}\sqrt{3}\,\lambda$ besitzt. Die Dichte der Normalverteilung hat im Vergleich dazu ein Maximum bei $x=\mu$ und Wendepunkte bei $x = \mu \pm \sigma$.

Die charakteristische Funktion der Cauchy-Verteilung ist:

$$\varphi(t) = E(e^{itX}) = e^{it \cdot \mu - \lambda |t|}$$

$\varphi(t)$ ist an der Stelle $t=0$ nicht differenzierbar, also existiert kein endliches Moment der Cauchy-Verteilung. Wir können also nicht von einer Standardisierung einer Zufallsvariablen mit Cauchy-Verteilung im üblichen Sinn sprechen, wir erhalten aber eine sog. Standard-Form, indem wir $\lambda = 1$ und $\mu = 0$ setzen:

$$(2.15) \qquad f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2} \qquad -\infty < x < \infty$$

Der Unterschied zur Normalverteilung besteht darin, daß die Dichte der Cauchy-Verteilung flacher verläuft und die Verteilung für von μ entfernte Bereiche höhere Wahrscheinlichkeiten aufweist. Dies ist unmittelbar einleuchtend, wenn man berücksichtigt, daß der Spezialfall (2.14) eine t-Verteilung mit einem Freiheitsgrad darstellt. Die nachstehenden Tabellen sollen dies noch verdeutlichen.

x	f(x)		F(x)	
	Cauchy	Normal	Cauchy	Normal
0	0,3180	0,3989	0,5000	0,5000
0,5	0,2540	0,3521	0,6576	0,6915
1	0,1590	0,2420	0,7500	0,8413
1,5	0,0978	0,1295	0,7908	0,9332
2	0,0639	0,0540	0,8524	0,9772
3	0,0318	0,0044	0,8976	0,9987

Tab. 1: Vergleich von f(x) und F(x) einer N(0,1)-Verteilung mit einer Cauchy-Verteilung entsprechend (2.14).

x	F(x)	
	Cauchy	Normal
0	0.5000	0.5000
0.2	0.5628	0.5537
0.6	0.6720	0.6571
1.0	0.7500	0.7500
1.4	0.8026	0.8275
2.0	0.8524	0.9113
3.0	0.8976	0.9785

Tab. 2: Vergleich von F(x) einer $N(0;1{,}483^2)$-Verteilung mit einer Cauchy-Verteilung von (2.14).

In beiden Tabellen wurden wegen der Symmetrie zu x = 0 nur positive x-Werte betrachtet. In Tabelle 2 haben die Verteilungen dieselben unteren und oberen Quartile bei $\pm$ 1.

Selbstverständlich hat die Cauchy-Verteilung keinen so weiten Anwendungsbereich wie die Normalverteilung, muß aber durchaus für bestimmte Merkmale in Betracht gezogen werden. Wir beschreiben nun einige Situationen, wo sie eine Rolle spielt.

Die Cauchy-Verteilung ist die Verteilung des Quotienten von zwei unabhängigen standard-normalverteilten Zufallsvariablen X_1 und X_2, jedoch braucht die ursprüngliche Verteilung der Zufallsvariablen nicht unbedingt normal zu sein. So hat Laha (31) etwa gezeigt, daß, wenn X_1 und X_2 die Dichten

$$f_{X_1}(x) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{1}{1+x^4} \qquad -\infty < x < \infty$$

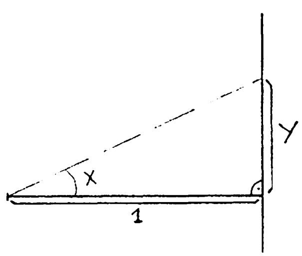
bzw.

$$f_{X_2}(x) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{1}{1+x^4} \qquad -\infty < x < \infty$$

besitzen, der Quotient X_1/X_2 ebenfalls einer Cauchy-Verteilung genügt und gab in einem anderen Artikel (vgl.: (30)) noch weitere Beispiele.

Weiterhin spielt die Cauchy-Verteilung auch als Grenzverteilung eine Rolle. So besitzt z.B. das harmonische Mittel unter sehr allgemeinen Voraussetzungen der ursprünglichen Verteilungen die Cauchy-Verteilung als Grenzverteilung (siehe: Pitman, Williams (38)).

Auch in einem anderen Zusammenhang spielt die Cauchy-Verteilung eine Rolle. Wir wollen dies anhand einer Zeichnung verdeutlichen:



Der Winkel X sei gleichverteilt im Intervall $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ mit der Dichtefunktion:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Zufallsvariable Y errechnet sich als:

$$Y = g(X) = \tan X$$

Für $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ist die Umkehrfunktion eindeutig definiert und man erhält:

$$X = g^{-1}(Y) = \arctan Y$$

Damit ergibt sich für die Dichte der Zufallsvariablen Y:

$$h(y) = \left| \frac{dg^{-1}(y)}{dy} \right| \quad f(g^{-1}(y))$$

$$h(y) = \frac{1}{1+y^2} \cdot \frac{1}{\pi}$$

$$\text{für } -\infty < y < \infty$$

h(y) ist die Cauchy-Verteilung von (2.15).

Weitere Situationen, wo als relevantes Verteilungsgesetz die Cauchy-Verteilung in Betracht gezogen werden muß, findet man bei Spitzer (49), Steck (51) oder Williams (57).

Für die weiteren Ausführungen interessieren wir uns nur für den Lokalisationsparameter μ. Der zweite Parameter λ charakterisiert die Höhe des Maximums ($f(\mu) = \frac{1}{\pi \cdot \lambda}$) und die Lage der Wendepunkte von $f(x)$. Vergrößert man λ, so verläuft die Dichtefunktion (2.14) flacher. Wenn auch die Cauchy-Verteilung keine endliche Varianz besitzt, so hat doch λ für die Cauchy-Verteilung eine ähnliche Bedeutung wie die Standardabweichung σ für die Normalverteilung. Da wir im Rahmen dieser Arbeit nur Tests für μ betrachten wollen, setzen wir den Parameter λ als bekannt voraus und nehmen der Einfachheit der Darstellung halber an: $\lambda_o = 1$.

Damit erhalten wir als Klasse P von Lebesgue-Dichten, welche die entsprechenden Wahrscheinlichkeitsverteilungen kennzeichnen:

$$P = \{f_\mu : f_\mu(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+(x-\mu)^2}, -\infty < x < \infty, \mu \in \mathbb{R}\}$$

Die charakteristische Funktion $\varphi(t)$ eines Elements der Klasse P ist:

$$\varphi(t) = E(e^{itX}) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx}\, d\lambda = e^{it\cdot\mu - |t|}$$

Für n unabhängige Zufallsvariable $X_1, \ldots, X_n$ mit den Dichten

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+(x-\mu_i)^2} \qquad -\infty < x < \infty \qquad \mu_i \in \mathbb{R}$$

erhalten wir als charakteristische Funktion für $S_n = \sum_{i=r}^{n} X_i$:

$$\varphi_{S_n}(t) = e^{it\cdot\sum_{i=1}^{n} \mu_i - |t| \cdot n}$$

und noch allgemeiner bekommt man für $S_n' = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i$:

$$\varphi_{S'_n}(t) = e^{it\,\Sigma\,\alpha_i\mu_i \,-\, |t|\,\cdot\,\Sigma\,|\alpha_j|}$$

Setzen wir voraus, daß die X_i unabhängige Zufallsvariable mit identischen Verteilungen aus der Klasse P sind, d. h. $\mu_1 = \ldots = \mu_n = \mu$, so erhalten wir die charakteristische Funktion der Zufallsvariablen $T(\underline{x}) = \bar{X}$, wenn wir $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = n^{-1}$ setzen:

$$\varphi_{\bar{X}}(t) = e^{it\cdot\mu \,-\, |t|}$$

Dies ist die charakteristische Funktion eines Elements der Klasse P. Also hat die Schätzfunktion $\bar{X}$ die gleiche Verteilungsfunktion wie ein beliebiges X_i. Dies bedeutet, man gewinnt durch die Statistik $\bar{X}$ keine weitere Information als bei der Ziehung eines einzigen Elements. Aus diesem Grunde ist die Statistik $\bar{X}$ für Tests mit zugrundeliegender Cauchy-Verteilung nicht geeignet. Wir verwenden daher den in (2.8) definierten Median $X_{(\frac{n+1}{2})}$ als Schätzfunktion. Der Einfachheit halber setzen wir den Stichprobenumfang n als ungerade voraus.

Mit den Beziehungen (2.9) und (2.10) resultiert.

(2.16)
$$F_{X_{(\frac{n+1}{2})}}(x) = \frac{\Gamma(n+1)}{\left[\Gamma(\frac{n+1}{2})\right]^2} \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{\frac{n-1}{2}}{i} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}-i}}{n-i} \frac{1}{\pi^{n-i}}$$

$$\left[\arctan\,(x-\mu) + \frac{\pi}{2}\right]^{n-i} \qquad -\infty < x < \infty,\ \mu \in \mathbb{R}$$

(2.17)

$$f_{X_{(\frac{n+1}{2})}}(x) = \frac{\Gamma(n+1)}{\left[\Gamma(\frac{n+1}{2})\right]^2} \cdot \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{\frac{n-1}{2}}{i} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}-i}}{\pi^{n-i}}$$

$$[\arctan(x-\mu) + \tfrac{\pi}{2}]^{n-i-1} \frac{1}{1+(x-\mu)^2}$$

$$-\infty < x < \infty \ , \ \mu \in \mathbb{R}$$

Bei einer numerischen Auswertung von (2.17) wurden die Stichprobenumfänge $n = 1$, $n = 9$ und $n = 19$ sowie $\mu = 0$ gewählt. Im Fall $n = 1$ erhält man die Cauchy-Verteilung selbst. Da $f_{X_{(\frac{n+1}{2})}}(x)$ für $\mu = 0$ symmetrisch zur y-Achse ist (siehe Lemma (2.11)), wurden nur Argumente $x \geq 0$ betrachtet und die Funktionswerte in einer Tabelle gegenübergestellt.

x	0	0,5	1	1,5	2	3
$f(x)$	0,3180	0,2540	0,1590	0,0978	0,0639	0,0318
$f_{X_{(5)}}(x)$	0,7830	0,4350	0,1240	0,0331	0,0102	0,0015
$f_{X_{(10)}}(x)$	1,1220	0,3950	0,0421	0,0039	0,0005	0,0000

Tab. 3: Vergleich der Dichtefunktionen des Medians für $n = 1,9$ und 19.

Schreiben wir die Verteilungsfunktion des Medians $X_{(\frac{n+1}{2})}$ in der Form (vgl. (2.9))

$$F_{X_{(\frac{n+1}{2})}}(x) = \frac{\Gamma(n+1)}{\left[\Gamma(\frac{n+1}{2})\right]^2} \cdot \int_0^{F(x)} t^{\frac{n-1}{2}} (1-t)^{\frac{n-1}{2}} dt \,, \qquad -\infty < x < \infty$$

so können wir die Dichte auch in einer anderen Weise als (2.17) berechnen, nämlich durch Differentiation des obigen Ausdrucks:

(2.18)

$$f_{X_{(\frac{n+1}{2})}}(x) = \frac{\Gamma(n+1)}{\left[\Gamma(\frac{n+1}{2})\right]^2} \cdot \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan\,(x-\mu)\right]^{\frac{n-1}{2}} \cdot \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arctan\,(x-\mu)\right]^{\frac{n-1}{2}}$$

$$\frac{1}{\pi}\,\frac{1}{1+(x-\mu)^2} \qquad -\infty < x < \infty$$

$$f_{X_{(\frac{n+1}{2})}}(x) = \frac{\Gamma(n+1)}{\left[\Gamma(\frac{n+1}{2})\right]^2} \cdot \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{\pi^2} \arctan^2(x-\mu)\right]^{\frac{n-1}{2}} \cdot \frac{1}{1+(x-\mu)^2} \qquad -\infty < x < \infty$$

Der Erwartungswert der Statistik $X_{(\frac{n+1}{2})}$ ergibt sich zu:

(2.19)

$$E\,X_{(\frac{n+1}{2})} = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_{X_{(\frac{n+1}{2})}}(x)\, dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+(x-\mu)^2}\, \frac{\Gamma(n+1)}{\left[\Gamma(\frac{n+1}{2})\right]^2 \cdot \pi} \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{\pi} \arctan^2(x-\mu)\right]^{\frac{n-1}{2}} dx$$

Durch die Substitution

$$y := \arctan (x-\mu)$$

erhalten wir:

$$E(X_{(\frac{n+1}{2})}) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\tan y+\mu) \cdot \frac{\Gamma(n+1)}{\left[\Gamma(\frac{n+1}{2})\right]^2 \cdot n} \cdot (\tfrac{\pi}{2}+y)^{\frac{n-1}{2}} (\tfrac{\pi}{2}-y)^{\frac{n-1}{2}} dy$$

Für n = 1 erhalten wir die Cauchy-Verteilung selbst und der Erwartungswert existiert nicht, er existiert jedoch für $n \geq 3$ (siehe (4)). Wir können ihn ohne weitere Rechnung angeben, aufgrund der Bemerkung nach Lemma (2.11) gilt nämlich

$$(2.20) \qquad E\, X_{(\frac{n+1}{2})} = \mu \qquad\qquad n \geq 3$$

Die letzten Ergebnisse fassen wir zusammen zu:

<u>(2.21) Lemma</u>

Sei $P = \{f_\mu(x) : f_\mu(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+(x-\mu)^2}, \quad -\infty < x < \infty, \ \mu \in \mathbb{R}\}$

und sei $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$

Dann gilt:

$T(\underline{x}) = X_{(\frac{n+1}{2})}$ ist eine erwartungstreue Statistik für den unbekannten Lokalisationsparameter μ.

Für die Varianz von $X_{(\frac{n+1}{2})}$ errechnet man analog:

$$\mathrm{Var}\, X_{(\frac{n+1}{2})} = \int_{-\infty}^{\infty} (x-EX)^2 \, f(x)dx \ , \ u \geq 3$$

$$(2.22) \quad \mathrm{Var}\, X_{(\frac{n+1}{2})} = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \, f(x)dx$$

$$= \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(\frac{n+1}{2})^2 \cdot \pi^n} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} \tan^2 y \cdot (\tfrac{\pi}{2} + y)^{\frac{n-1}{2}} \cdot (\tfrac{\pi}{2} - y)^{\frac{n-1}{2}} dy$$

Das Integral von (2.22) konvergiert für $n \geq 5$ (siehe (4)). Da wir für die Zwecke der Qualitätskontrolle ohne weiteres einen Stichprobenumfang größer oder gleich 5 voraussetzen können, besitzt $X_{(\frac{n+1}{2})}$ stets endliche Momente erster und zweiter Ordnung.

Nach dem Satz über die Grenzverteilung von order - statistics strebt die Verteilung der Zufallsvariablen

$$Y_{(\frac{n+1}{2})} = \sqrt{4n} \cdot \frac{1}{\pi} \, (X_{(\frac{n+1}{2})} - \mu)$$

für wachsendes n gegen die Standardnormalverteilung Also ist es wohl gerechtfertigt, für große Stichprobenumfänge die Varianz des Medians gleich $\frac{\pi^2}{4n}$ zu setzen. Jedoch stimmt die exakte Varianz aus (2.22) für kleine n nicht gut mit $\frac{\pi^2}{4n}$ überein, wie folgende Tabelle beweist:

n	$\operatorname{Var} X_{(\frac{n+1}{2})}$ aus (2.22)	$\pi^2/4n$
5	1,2213	0,4935
7	0,6121	0,3525
9	0,4087	0,2742
11	0,3068	0,2243
13	0,2456	0,1898
15	0,2048	0,1645
21	0,1367	0,1175
29	0,0947	0,0851

Tab. 4: Vergleich der exakten Varianz des Medians aus (2.22) mit der asymptotischen Varianz $\pi^2/4n$.

Nach diesen Ausführungen kommen wir zurück auf unsere Problemstellung:

Eine Warenpartie wird angeliefert und es ist ein Merkmal zu untersuchen, welches einer Cauchyverteilung mit $\lambda_o = 1$ unterliegt. Dabei sei der Parameter μ unbekannt. Wir ziehen eine Stichprobe vom Umfang n und suchen einen geeigneten Test, der Verschiebungen des vorgegebenen Verteilungszentrums μ_o aufzeigen soll.

Zugrunde liegt die Verteilungsklasse P, welche durch ihre Dichten gekennzeichnet ist:

$$P = \{f_\mu(x): f_\mu(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+(x-\mu)^2} \; ; \quad -\infty < x < \infty, \; \mu \in \mathbb{R}\}$$

Außerdem berücksichtigen wir, daß nur ungerade Stichprobenumfänge in Frage kommen. Der Stichprobenraum ist der $\mathbb{R}^n$.

Als Teststatistik verwenden wir den Median der Stichprobe $X_{(\frac{n+1}{2})}$, d. h. wir ordnen die Stichprobenelemente $(x_1,\ldots,x_n)$ der Größe nach und nehmen das $\frac{n+1}{2}$-te Stück. Der Stichprobenraum R^n wird durch diese Vorschrift abgebildet auf den R^1.

Als Signifikanzniveau wählen wir α mit $0 < \alpha < 1$ und betrachten die Nullhypothese:

$$H_o: \mu = \mu_o$$

gegenüber der Alternative

$$H_1: \mu \neq \mu_o$$

Es stehen uns wieder zwei Entscheidungsmöglichkeiten zur Verfügung, nämlich:

$$d_o = \text{Annahme der Partie}$$

$$d_1 = \text{Ablehnung der Partie}$$

Den Test φ legen wir nun als (meßbare) Abbildung von R in D fest, so daß gilt:

(2.23) $$\varphi : R \rightarrow D = \{d_o, d_1\}$$

mit

$$\varphi(X_{(\frac{n+1}{2})}) = \begin{cases} d_1 & \text{für } X_{(\frac{n+1}{2})} \in C \\ d_o & \text{für } X_{(\frac{n+1}{2})} \in \bar{C} \end{cases}$$

wobei der kritische Bereich $C = (-\infty, \mu_o - c) \cup (\mu_o + c, \infty)$ so eingerichtet wird, daß gilt:

(2.24) $\quad p_\mu(X_{(\frac{n+1}{2})} \in C) = \alpha \qquad$ für $\mu \in H_o$

Daraus folgt:

$$p_{\mu_o}(X_{(\frac{n+1}{2})} \in C) = \alpha$$

$$\int_C f_{X_{(\frac{n+1}{2})};\,\mu_o}(x)\,dx = \alpha$$

$$\frac{\Gamma(n+1)}{\left[\Gamma(\frac{n+1}{2})\right]^2} \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \int\limits_{(-\infty,c)\cup(c,\infty)} [\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{\pi^2} \arctan^2 y]^{\frac{n-1}{2}} \cdot \frac{1}{1+y^2}\,dy = \alpha$$

oder:

$$\frac{\Gamma(n+1)}{\left[\Gamma(\frac{n+1}{2})\right]^2} \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \int_c^\infty [\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{\pi^2} \arctan^2 y]^{\frac{n-1}{2}} \cdot \frac{1}{1+y^2}\,dy = \frac{\alpha}{2}$$

Dies ist die Bestimmungsgleichung für den kritischen Wert c bei vorgegebenem Signifikanzniveau α.

Die Operationscharakteristik des Tests (2.23) ergibt sich wiederum als Wahrscheinlichkeit der Annahme in Abhängigkeit vom unbekannten Parameter μ.

$$L(\mu) = p_\mu(X_{(\frac{n+1}{2})} \in \bar{C}) = \int_{\bar{C}} f_{X_{(\frac{n+1}{2})};\,\mu}(x)\,dx =$$

$$= \frac{\Gamma(n+1)}{\left[\Gamma(\frac{n+1}{2})\right]^2} \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \int_{\mu_o-c}^{\mu_o+c} [\frac{1}{4} - \frac{1}{\pi^2} \arctan^2(x-\mu)]^{\frac{n-1}{2}} \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{1+(x-\mu)^2}\, dx$$

Mit y: = arctan (x-μ) folgt

$$(2.30)\quad L(\mu) = \frac{\Gamma(n+1)}{\left[\Gamma(\frac{n+1}{2})\right]^2} \cdot \frac{1}{\pi^n} \int_{\arctan(\mu_o-c-\mu)}^{\arctan(\mu_o+c-\mu)} (\frac{\pi}{2} + y)^{\frac{n-1}{2}} \cdot$$

$$\cdot (\frac{\pi}{2} - y)^{\frac{n-1}{2}}\, dy$$

$$= \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(\frac{n+1}{2})^2} \cdot \frac{1}{\pi^n} \int_{\arctan(\mu_o-c-\mu)}^{\arctan(\mu_o+c-\mu)} (\frac{\pi^2}{4} - y^2)^{\frac{n-1}{2}}\, dy$$

Setzen wir bei L(μ) als Argument $\mu_o + \mu$ ein, so ergeben sich als Integrationsgrenzen auf der rechten Seite von (2.30) y_1: = arc tan (-c-μ) und y_2: = arc tan (c-μ).

Nehmen wir $\mu_o - \mu$ als Argument, so erhalten wir arc tan (-c+μ) und arc tan (c+μ) als untere bzw. obere Integrationsgrenze. Diese Grenzen sind aber $- y_2$ und $- y_1$ wegen arc tan x = - arc tan (-x).

Da die Funktion $g(y) = (\frac{\pi^2}{4} - y^2)^{\frac{n-1}{2}}$ zur Geraden y = O symmetrisch ist, d. h. g(y) = g(-y), folgt:

$$\int_{y_1}^{y_2} g(y)dy = \int_{-y_2}^{-y_1} g(y)dy$$

Damit haben wir:

$$L(\mu_o + x) = L(\mu_o - x)$$

Die Operationscharakteristik $L(\mu)$ aus (2.30) ist also symmetrisch zur Geraden $\mu = \mu_o$.

Auch hier können wir eine Alternative entsprechend (2.7) konstruieren. Hierzu wählen wir einen weiteren Punkt μ_1 und legen den Stichprobenumfang n und den "kritischen Wert" c so fest, daß gilt

$$(1) \quad P_\mu(X_{(\frac{n+1}{2})} \in C = (-\infty, \mu_o - c) \cup (\mu_o + c, \infty)) = \alpha$$

$$\text{für } \mu = \mu_o$$

$$(2) \quad P_\mu(X_{(\frac{n+1}{2})} \in C) = 1 - \beta \text{ für } \mu = \mu_1, \ \beta < 1 - \alpha$$

Dies garantiert uns wiederum, daß bei vorliegendem Mittelwert μ_o die Entscheidung d_o mit Wahrscheinlichkeit $1 - \alpha$ getroffen wird, während bei einem Mittelwert μ_1 die gleiche Entscheidung nur mit Wahrscheinlichkeit β getroffen wird.

Für die Operationscharakteristik gilt:

$$(1) \quad L(\mu_o) = 1 - \alpha$$

$$(2) \quad L(\mu_1) = \beta$$

Man beachte, daß obige Beziehungen wieder nur ungefähr erfüllt werden können, da n ganzzahlig und ungerade gewählt werden muß.

Beispiel:

In einem Betrieb wird täglich eine Partie von Stahlrohren hergestellt und an eine andere Abteilung zur Weiterverarbeitung übergeben. Aus langjährigen statistischen Auswertungen der Produktionsergebnisse sowie mehreren Tests weiß man, daß der Innendurchmesser der Rohre in guter Näherung eine Cauchy-Verteilung mit $\lambda = 1$ besitzt. Der Sollwert des Durchmessers ist 110 mm.

Zwischen der herstellenden und der abnehmenden Abteilung wurde folgende Vereinbarung getroffen: Über Annahme oder Zurückweisung einer Warenpartie wird aufgrund eines Stichprobenplanes entschieden, wobei Partien mit einem mittleren Innendurchmesser von 110 mm mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,98 angenommen werden sollen, Abweichungen von 1,25 mm vom Sollwert 110 mm hingegen sollen mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,95 erkannt werden.

Die Aufgabe ist nun, einen geeigneten Prüfplan zu entwerfen, der diesem praktischen Sachverhalt gerecht wird. Nach unseren theoretischen Ausführungen in diesem Kapitel müssen die den Test charakterisierenden Größen n und c so gewählt werden, daß für die Operationscharakteristik des Tests gilt:

$$L(\mu_o) = 0{,}98$$

$$L(\mu_1) = 0{,}05$$

mit $\mu_o = 110$, $\mu_1 = 111{,}25$

Da n ganzzahlig und ungerade gewählt werden muß, kann man nur die ungefähre Gleichheit erreichen. Mit Hilfe von Berechnungen an einer elektronischen Rechenanlage ergab sich:

$$n = 29, \quad c = 0{,}75$$

Die exakten Werte von $L(\mu)$ sind in nachstehender Tabelle wiedergegeben. Wegen der Symmetrie von $L(\mu)$ sind nur Argumente größer oder gleich μ_o angegeben.

μ	110,00	110,25	110,50	110,75	111,00	111,25	111,50
$L(\mu)$	0,9801	0,9477	0,8027	0,4999	0,1970	0,0505	0,0099

2.1.4 "Kupierte" Normalverteilung

In diesem Paragraphen behandeln wir die für praktische Belange ebenfalls wichtige kupierte ("truncated") Normalverteilung. Die Annahme der Normalverteilung stellt ein idealisiertes Modell dar, denn in der Praxis kommen Realisationen im gesamten Bereich der reellen Zahlen nicht vor. Speziell in der Qualitätskontrolle bedingt die Natur der Maschinen stets, daß bei jeder Fertigung die Ausprägungen der Merkmale nur in gewissen Grenzen schwanken können.

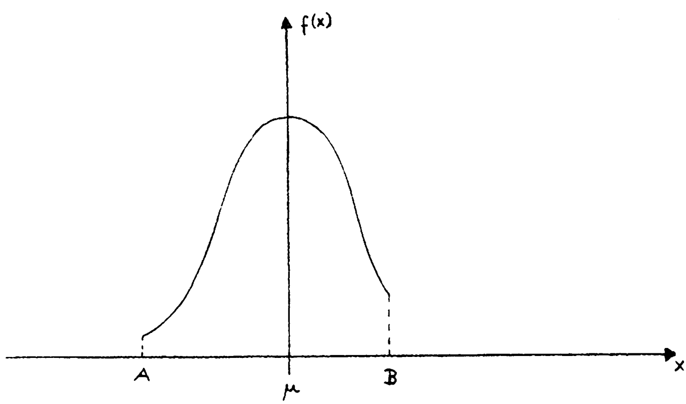
Betrachten wir als Beispiel eine automatische Abfüllmaschine, die Zucker in Ein-Kilo-Behälter füllt. Das Füllgewicht wird zwar unterhalb der 1 kg - Grenze Schwankungen unterliegen, jedoch ist aufgrund der genormten Behälter ausgeschlossen, Packungen mit mehr als 1 kg Füllgewicht zu erhalten.

Um solchen Sachverhalten gerecht zu werden, untersuchen wir in unserer Theorie den Fall, daß die Grenzen fixiert werden können und bezeichnen sie mit A und B. Der Fertigungsvorgang sei zufallsabhängig, wobei aber jetzt sämtliche Realisationen des interessierenden Merkmals X mit Wahrscheinlichkeit Eins in das Intervall [A,B] fallen. Dann besitzt das Merkmal X eine abgeschnittene oder kupierte Normalverteilung, wenn sich seine Wahrscheinlichkeitsdichte wie folgt angeben läßt:

$$(2.33)\quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} \cdot [\hat{p}([A,B];\mu)]^{-1} & \text{für } A \leq x \leq B, (A < B) \\ 0 & \text{für } x < A \text{ oder } x > B \end{cases}$$

$$\text{mit } \hat{p}([A,B];\mu) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} \int_A^B e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(t-\mu)^2}\, dt$$

Graphisch hat f(x) etwa folgende Gestalt:



Als Erwartungswert der Zufallsvariablen X erhalten wir:

$$E\,X = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{\hat{p}([A,B];\mu)} \int_A^B \frac{x}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx$$

Daraus folgt

(2.34)

$$E\,X = \frac{1}{\hat{p}([A,B];\mu)} \int_A^B \left(\frac{x-\mu}{\sigma^2}\right) \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx \; +$$

$$+ \frac{1}{\hat{p}([A,B];\mu)} \int_A^B \mu\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx$$

Der zweite Summand auf der rechten Seite von (2.34) ist gleich μ; der erste ist mit $y := \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}$ gleich

$$\frac{1}{\hat{p}([A,B];\mu)} \cdot \sigma \cdot \int_{\frac{(A-\mu)^2}{2\sigma^2}}^{\frac{(B-\mu)^2}{2\sigma^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-y}\, dy \qquad \text{für } |A-\mu| \leq |B-\mu|$$

und

$$-\frac{1}{\hat{p}([A,B];\mu)}\, \sigma \cdot \int_{\frac{(B-\mu)^2}{2\sigma^2}}^{\frac{(A-\mu)^2}{2\sigma^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-y}\, dy \qquad \text{für } |A-\mu| > |B-\mu|$$

Wir erhalten schließlich für den Erwartungswert:

$$E\,X = \sigma \cdot \frac{\varphi(\frac{A-\mu}{\sigma}) - \varphi(\frac{B-\mu}{\sigma})}{\hat{p}([A,B];\mu)} + \mu$$

$$\text{mit } \varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{t^2}{2}}$$

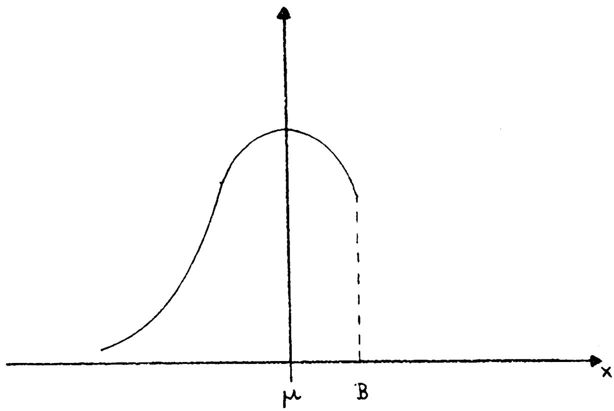
(2.35) Bemerkung:

Gilt $A - \mu = - B + \mu \Rightarrow EX \quad = \mu$

Wird A durch $-\infty$ oder B durch ∞ ersetzt, so spricht man von einseitig kupierten Verteilungen. Im Rahmen dieser Arbeit wollen wir nur diesen Fall betrachten. Es sei also etwa eine obere Schranke B für die Ausprägungen des Merkmals X gegeben. (Für eine untere Grenze A verlaufen die Überlegungen völlig analog). Außerdem sei σ bekannt und gleich einer Konstanten σ_o. Unbekannt sei der Lokalisationsparameter μ der Verteilung, wobei wir jedoch voraussetzen, daß μ ebenfalls kleiner als die Schranke B ist. Dies gewährleistet, daß das Maximum der Verteilungsdichte auch im Bereich $(-\infty,B)$ liegt. Die kupierte Verteilung soll gegenüber der entsprechenden Normalverteilung nicht zu sehr "entartet" sein. Die in Frage kommende Klasse P hat also hier die Form:

$$P = \{f_\mu(x):\ f_\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma_o}\cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma_o^2}} \cdot \frac{1}{\hat{p}((-\infty,B];\mu)}$$

$$\text{für } -\infty < x \leq B,\ \mu < B\}$$



Der Erwartungswert einer Zufallsvariablen X mit einer Wahrscheinlichkeitsdichte aus P ist:

$$E\,X = \mu - \frac{\varphi\left(\frac{B-\mu}{\sigma_o}\right)}{\hat{P}((-\infty,B];\mu)} \cdot \sigma_o =$$

$$= \mu - \frac{\varphi\left(\frac{B-\mu}{\sigma_o}\right)}{\Phi\left(\frac{B-\mu}{\sigma_o}\right)} \cdot \sigma_o \quad \text{mit } \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,dt$$

Bevor wir einen Test für den unbekannten Parameter μ konstruieren können, benötigen wir eine geeigente Schätzfunktion. Wir wählen wieder

$$T(\underline{x}) := \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Zwar ist bekannt, daß bei n unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvaraiblen $X_1, \ldots, X_n$ mit existierenden Momenten zweiter Ordnung stets gilt

(a) $E\,\bar{X} = E\,X$

(b) $\mathrm{Var}\,\bar{X} = \frac{\mathrm{Var} X}{n}$

aber zur Festlegung der kritischen Region C sowie zur Berechnung der Operationscharakteristik benötigt man die exakte Verteilung von $\bar{X}$, etwa bei der Bedingung

$$\int_C f_{\bar{X}}(x)\,dx \leq \alpha \qquad \text{für } \mu \in H_o$$

Aus diesem Grunde wollen wir ein konstruktives Verfahren angeben, wie man die Dichtefunktion der Statistik $\bar{X}$ numerisch berechnen kann, wenn jedes der X_i der gleichen einseitig kupierten Normalverteilung genügt. Zur Vereinfachung der numerischen Berechnungen betrachten wir die transformierten Variablen

$$Z_i = \frac{X_i-\mu}{\sigma_o} \qquad i = 1, \ldots, n$$

Die Zufallsvariablen $Z_1, \ldots, Z_n$ sind nach Voraussetzung unabhängig und besitzen die Dichtefunktion

$$(2.36) \quad f(z) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} \frac{1}{\Phi(B')} & \text{für } z \leq B' \quad (B' = \frac{B-\mu}{\sigma_o}) \\ 0 & \text{für } z > B' \end{cases}$$

Die Verteilung von $\bar{Z}$ gewinnen wir rekursiv durch n-fache Faltung. Betrachten wir zunächst $Z_1 + Z_2$

$$f_{Z_1+Z_2}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,f(z-x)\,dx$$

Der Integrand verschwindet für

(1) $x > B'$

(2) $z - x > B'$

$$f_{Z_1+Z_2}(z) = \int_{z-B'}^{B'} f(x)\cdot f(z-x)\,dx$$

Für $z > 2\,B'$ ist $f_{Z_1+Z_2}(z)$ gleich 0, denn dann ist für $x \leq B'$:

$$z - x \geq z - B' > 2\,B' - B' = B'$$

so daß nach Bedingung (2) der Integrand verschwindet

$$(2.37)\quad f_{Z_1+Z_2}(z) = \begin{cases} \int_{z-B'}^{B'} f(x)\cdot f(z-x)dx & \text{für } -\infty < z \leq 2B' \\ 0 & \text{für } z > 2B' \end{cases}$$

Für drei unabhängige Zufallsvariable Z_1, Z_2, Z_3 erhält man:

$$f_{Z_1+Z_2+Z_3}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{Z_1+Z_2}(x)\ f(z-x)dx$$

Jetzt verschwindet der Integrand für

(1) $x > 2\,B'$

(2) $z - x > B'$

und im Falle $z > 3\,B'$ gilt für $x \leq 2\,B'$

$$z - x \geq z - 2B' > 3B' - 2B' = B'$$

so daß aufgrund von Bedingung (2) $f_{Z_1+Z_2+Z_3}(z)$
Null wird

$$f_{Z_1+Z_2+Z_3}(z) = \begin{cases} \int\limits_{z-B'}^{2B'} f_{Z_1+Z_2}(x) \cdot f(z-x)\,dx & \text{für } -\infty < z \leq 3B' \\ 0 & \text{für } z > 3B' \end{cases}$$

Sei $S_n := \sum\limits_{i=1}^{n} Z_i$, $n \in \mathbb{N}$

Wendet man sukzessive n-mal die Faltungsformel an, so ergibt sich:

$$(2.38)\quad f_{S_n}(z) = \begin{cases} \int\limits_{z-B'}^{(n-1)B'} f_{S_{n-1}}(x) \cdot f(z-x)\,dx & \text{für } -\infty < z < n \cdot B' \\ 0 & \text{für } z > n \cdot B' \end{cases}$$

Auf diese Weise kann man nacheinander in der Reihenfolge $f_{S_1}(z)$, $f_{S_2}(z)$, $f_{S_3}(z)$ etc. die Dichtefunktion berechnen.

$f_{S_2}(z)$ aus (2.37) läßt sich noch analytisch auswerten.
Es gilt:

$$f_{S_2}(z) = \frac{1}{\Phi^2(B')} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \int\limits_{z-B'}^{B'} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot e^{-\frac{(z-x)^2}{2}}\,dx$$

$$= \frac{1}{\Phi^2(B')} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot e^{-\frac{1}{2}z^2} \int\limits_{z-B'}^{B'} e^{-(x^2-zx)}\,dx$$

$$= \frac{1}{\Phi^2(B')} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot e^{-\frac{1}{4}z^2} \cdot \int_{z-B'}^{B'} e^{-(x-\frac{1}{2}z)^2} dx$$

mit $y: = x - \frac{1}{2}z$ erhält man:

$$f_{S_2}(z) = \frac{1}{\Phi^2(B')} \cdot e^{-\frac{1}{4}z^2} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{1/2Z-B'}^{B'-\frac{1}{2}Z} e^{-y^2} dy$$

$$= \frac{1}{\Phi^2(B')} \cdot e^{-\frac{1}{4}z^2} \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \int_{0}^{B'-\frac{1}{2}z} e^{-y^2} dy$$

$$f_{S_2}(z) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\Phi^2(B')} \cdot e^{-\frac{1}{4}z^2} \cdot g(B'-\tfrac{1}{2}z)$$

$$\text{mit } g(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-y^2} dy$$

Für $n > 2$ ist zur Berechnung von (2.38) bereits numerische Integration erforderlich.

Hat man für vorgegebenes n die Dichte $f_{S_n}(z)$ dann ermittelt, so ergibt sich die Dichte von $\bar{Z}$ in einfacher Weise:

(2.39) $\quad f_{\bar{Z}}(x) = n \cdot f_{S_n}(nx).$

Aus (2.38) ersieht man sofort, daß die Dichte $f_{\bar{Z}}(x)$

Null wird für $x > B'$.

Betrachten wir nun etwa die einseitige Nullhypothese H_o: $\mu \geq \mu_o$ gegenüber H_1: $\mu < \mu_o$. Sei

$$P = \{f_\mu(x) : f_\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma_o} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma_o^2}} \frac{1}{\Phi(B)}, -\infty < z \leq B, \quad \mu \in (-\infty, B)\}$$

Mit den in Kap. 2.1. beschriebenen Voraussetzungen und Definitionen konstruieren wir einen Test unter Verwendung der Statistik $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum X_i$.

(2.40) $\varphi: \mathbb{R} \to D$

$$\text{mit } \varphi(\bar{x}) = \begin{cases} d_o & \text{für } \frac{1}{\sigma_o}(\bar{x}-\mu_o) \in \bar{C} \\ d_1 & \text{für } \frac{1}{\sigma_o}(\bar{x}-\mu_o) \in C \end{cases}$$

wobei wir jetzt den kritischen Bereich $C = (-\infty, c)$ so festlegen, daß gilt:

(2.41) $p_{\mu_o}(\frac{1}{\sigma_o}(\bar{X}-\mu_o) \in C) = p_{\mu_o}(\bar{Z} \in C) =$

$$= \int_{-\infty}^{c} f_{\bar{Z};\mu_o}(x)\, dx = \alpha \qquad (0 < \alpha < 1)$$

(2.41) ist die Bestimmungsgleichung für den kritischen Wert c. Für seine exakte Berechnung benötigt man die numerische Auswertung von (2.38) bzw. (2.39).

Als Operationscharakteristik des Tests erhalten wir

$$L(\mu) = p_\mu(\varphi(\bar{x}) = d_o) = p_\mu(\frac{1}{\sigma_o}(\bar{X}-\mu_o) \geq c) =$$

$$= p_\mu(\bar{X} \geq c \cdot \sigma_o + \mu_o) = p_\mu(\frac{1}{\sigma_o}(\bar{X}-\mu) \geq c + \frac{\mu_o-\mu}{\sigma_o})$$

$$L(\mu) = \int_{c+\frac{\mu_o-\mu}{\sigma_o}}^{B'=\frac{B-\mu}{\sigma_o}} f_{\bar{Z};\mu}(x)\, dx$$

Damit haben wir einen Test für die einseitige Hypothese $\mu \geq \mu_o$ ermittelt. Für zweiseitige Fragestellungen oder für H_o: $\mu \leq \mu_o$ verläuft der Aufbau entsprechend.

Abschließend zu diesem Kapitel sei noch darauf hingewiesen, daß es bei zweiseitig kupierter Normalverteilung möglich ist, Tests für den Lageparameter μ zu konstruieren. Die Verteilung der Statistik $\bar{X}$ muß man sich in ähnlicher Weise durch n-fache Faltungen verschaffen. Wir wollen an dieser Stelle jedoch auf nähere Einzelheiten verzichten.

2.2. Zweistufige Tests

Auch jetzt ist wieder ein meßbares Merkmal zu untersuchen und es soll ein vorgeschriebener Mittelwert μ_o möglichst gut eingehalten oder nicht unter- bzw. überschritten werden. Dabei wird das Verteilungsgesetz des Merkmals bis auf den Parameter μ als bekannt angesehen. So wird beispielsweise im Falle der Normalverteilung die Standardabweichung als gegeben und konstant vorausgesetzt. Im Unterschied zu den bisherigen Ausführungen soll die Entscheidung jetzt aber in zwei Stufen getroffen werden. Es ergibt sich etwa folgende Situation:

Eine Warenpartie wird angeliefert und der Kontrolleur untersucht erst eine Stichprobe vom Umfang n_1. Er berechnet eine geeignete Prüfgröße (etwa den Mittelwert der Stichprobenrealisationen). Fällt der Wert dieser Prüfgröße in einen "Indifferenzbereich", so trifft er noch keine Entscheidung, sondern prüft noch weitere n_2 Stück und entscheidet sich erst jetzt endgültig für Annahme oder Ablehnung der Partie. Fällt die Prüfgröße der ersten n_1 geprüften Stücke nicht in den "Indifferenzbereich", so wird sofort entschieden und die Untersuchung ist bereits auf der ersten Stufe beendet.

Für diesen Sachverhalt wollen wir im folgenden eine mathematische Theorie entwickeln.

Die Nullhypothese H_o besteht wiederum aus einer Teilmenge des Parameterraumes, die Gegenhypothese H_1 ebenfalls, wobei gilt: $H_o \cap H_1 = \emptyset$.

Auf der ersten Stufe des Tests ziehen wir eine Stichprobe vom Umfang n_1 und verwenden als Statistik eine

Abbildung des $\mathbb{R}^{n_1}$ in $\mathbb{R}$, die wir mit $T_{n_1}(\underline{x})$ bezeichnen. Dann unterteilen wir den Stichprobenraum $S_1 \subseteq \mathbb{R}$ der ersten Stufe in drei disjunkte, meßbare Mengen A_1, A_2, A_3 mit der Eigenschaft

$$\bigcup_{i=1}^{3} A_i = S_1$$

Mit dem Entscheidungsraum

$$D_1 := \{d_o, d_1, d_2\}$$

$$\begin{aligned} \text{mit } d_o &= \text{Annahme} \\ d_1 &= \text{Ablehnung} \\ d_2 &= \text{Ziehung einer 2. Stichprobe und Anwendung von Testvorschrift } \varphi_2 \end{aligned}$$

definieren wir für die Testvorschrift φ_1 der ersten Stufe:

<u>(2.42) Definition</u>:

$$\varphi_1 : S_1 \to D_1$$

$$\varphi_1(T_{n_1}(x_1,\ldots,x_{n_1})) = \begin{cases} d_o & \text{für } T_{n_1}(x_1,\ldots,x_{n_1}) \in A_1 \\ d_1 & \text{für } T_{n_1}(x_1,\ldots,x_{n_1}) \in A_2 \\ d_2 & \text{für } T_{n_1}(x_1,\ldots,x_{n_1}) \in A_3 \end{cases}$$

Wird bei (2.42) die Entscheidung d_2 getroffen, so ziehen wir eine weitere Stichprobe vom Umfang n_2. Um die Information aus beiden Stichproben verwenden zu können, nehmen wir bei der Bildung der neuen Statistik die erhaltenen Werte der ersten Stichprobe mit hinzu. Wir bezeichnen sie mit $T_{n_1+n_2}(\underline{x})$, wobei das Argument $\underline{x}$ diesmal ein Vektor aus dem $\mathbb{R}^{n_1+n_2}$ ist. Als Beispiel nehme man den Mittelwert $\bar{X}_{n_1}$ der ersten Stichprobe und das arithmetische Mittel aus beiden Stichproben $\bar{X}_{n_1+n_2}$. Diese beiden Schätzfunktionen werden an späterer Stelle auch Verwendung finden.

Der Stichprobenraum $S_2 \subseteq \mathbb{R}$ der zweiten Stufe wird nun aufgeteilt in zwei disjunkte meßbare Mengen B_1 und B_2 mit $B_1 \cup B_2 = S_2$.

Mit dem Entscheidungsraum $D_2 = \{d_o, d_1\}$ (d_o, d_1 wie bei D_1) definieren wir nun die Testvorschrift φ_2 der zweiten Stufe.

(2.43) Definition:

$$\varphi_2 : S_2 \to D_2$$

mit

$$\varphi_2(T_{n_1+n_2}(x_1,\ldots,x_{n_1+n_2})) = \begin{cases} d_o & \text{für } T_{n_1+n_2}(x_1,\ldots,x_{n_1+n_2}) \in B_1 \\ d_1 & \text{für } T_{n_1+n_2}(x_1,\ldots,x_{n_1+n_2}) \in B_2 \end{cases}$$

Der Gesamttest φ ist also definiert durch die beiden Teilvorschriften φ_1 und φ_2 der einzelnen Entscheidungsphasen.

Da es sich um einen Test zum Niveau α handeln soll, stellen wir an die Mengen A_1, A_2, A_3 sowie B_1 und B_2 noch eine weitere Forderung. Es muß gelten:

(2.44)

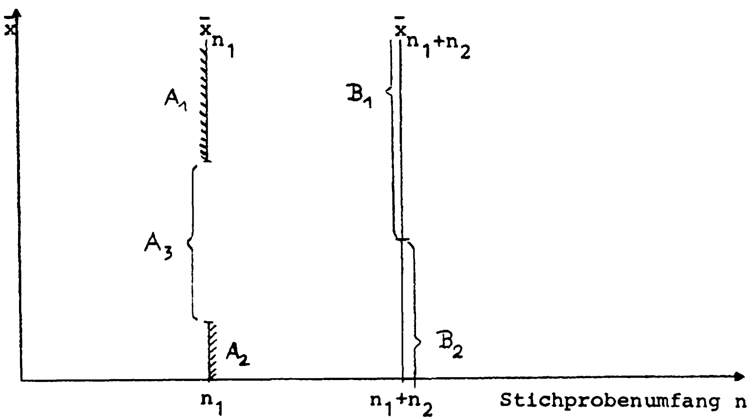
$$P_\mu(\{\varphi_1 = d_1\}) + P_\mu(\{\varphi_1 = d_2\} \cap \{\varphi_2 = d_1\}) \le \alpha \text{ für alle } \mu \in H_o$$

$$\int_{A_2} f_{(T_{n_1}(\underline{x});\mu)}(x)\,dx + \int_{B_2}\int_{A_3} f_{(T_{n_1}(\underline{x}),T_{n_1+n_2}(\underline{x}));\mu}(x_1,x_2)\,dx_1 dx_2 \le \alpha$$

$$\text{für alle } \mu \in H_o$$

Die Rolle des kritischen Bereichs C im einstufigen Fall haben nun die Mengen A_2 und B_2 übernommen. Außerdem ist jetzt noch auf der ersten Stufe ein "Indifferenzbereich" A_3 vorhanden.

Zur Erläuterung des Tests φ dient auch folgende graphische Übersicht:



Die Skizze eignet sich etwa zur Veranschaulichung des Verfahrens zur Prüfung von H_o: $\mu \geq \mu_o$ gegen die Alternative H_1: $\mu < \mu_o$. Zunächst zieht man n_1 Stück und berechnet die Prüfgröße $\bar{x}_{n_1}$. Fällt der Befund in die Bereiche A_1 oder A_2, so entscheidet man sich sofort für die Annahme bzw. Ablehnung von H_o. Nur im Fall, daß die gewonnene Realisation $\bar{x}_{n_1}$ Element des Indifferenzbereiches A_3 ist, ziehen wir weitere n_2 Stück und wählen als Prüfgröße den Gesamtmittelwert aus beiden Stichproben. Bei $\bar{x}_{n_1+n_2} \in B_1$ entscheiden wir uns für d_o, bei $\bar{x}_{n_1+n_2} \in B_2$ für d_1.

Als Maßstab für die Güte des Tests nehmen wir wieder seine Operationscharakteristik. Betrachten wir die Ereignisse, welche zur Annahme führen, so ergibt sich für $L(\mu)$:

$$(2.45)\quad L(\mu) = p_\mu(\{\varphi_1 = d_o\}) + p_\mu(\{\varphi_1 = d_2\}\cap\{\varphi_2 = d_o\})$$

$$L(\mu)=\int_{A_1} f_{T_{n_1}(\underline{x});\mu}(x)\,dx+\int_{B_1}\int_{A_3} f_{(T_{n_1}(\underline{x});T_{n_1+n_2}(\underline{x}));\mu}(x_1,x_2)\,dx_1dx_2$$

Bei mehrstufigen Testverfahren spielt noch eine weitere Größe eine Rolle, nämlich der durchschnittliche Stichprobenumfang (average sample number). Aus den Ausführungen von (2.42) und (2.43) ersieht man sofort, daß jetzt der Stichprobenumfang eine Zufallsvariable ist, deren Erwartungswert sich folgendermaßen angeben läßt:

(ASN = average sample number = durchschnittlicher Stichprobenumfang)

(2.46) $ASN = E_\mu(n) = n_1 + p_\mu(\{\varphi_1 = d_2\})\cdot n_2$

$$ASN = n_1 + n_2\cdot\int_{A_3} f_{T_{n_1}(\underline{x});\mu}(x)dx$$

Auch der durchschnittliche Stichprobenumfang hängt selbstverständlich vom unbekannten Parameter μ ab.

Einseitige und zweiseitige Tests

Bei der einseitigen Fragestellung etwa zur Prüfung der Nullhypothese H_o: $\mu \geq \mu_o$ gegen H_1: $\mu < \mu_o$ wählen wir als Prüfgrößen $\bar{X}_{n_1} = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} X_i$ und $\bar{X}_{n_1+n_2} = \frac{1}{n_1+n_2} \sum_{j=1}^{n_1+n_2} X_j$ und konkretisieren die Mengen A_1, A_2, A_3 sowie B_1 und B_2 zur Festlegung des kritischen Bereichs und der Indifferenzzone.

Die Entscheidungsregel lautet dann: $u_1<v_1$; $u_1,v_1 \in \mathbb{R}$

$\bar{X}_{n_1} \in A_1 := [v_1,\infty)$: Annahme der Partie

$\bar{X}_{n_1} \in A_2 := (-\infty,u_1]$: Ablehnung der Partie

$\bar{X}_{n_1} \in A_3 := (u_1,v_1)$: Zweite Stichprobe

und

$\bar{X}_{n_1+n_2} \in B_1 := [v_2;\infty)$: Annahme $\qquad (v_2 \in \mathbb{R})$

$$\bar{x}_{n_1+n_2} \in B_2 := (-\infty, v_2): \text{ Ablehnung}$$

wobei berücksichtigt wird, daß (2.44) gelten muß. Hier bedeutet dies:

(2.47)

$$\int_{-\infty}^{u_1} f_\mu(\bar{x}_{n_1})d\bar{x}_{n_1} + \int_{-\infty}^{v_2}\int_{u_1}^{v_1} f_\mu(\bar{x}_{n_1}, \bar{x}_{n_1+n_2})d\bar{x}_{n_1}d\bar{x}_{n_1+n_2} \leq \alpha$$

$$\text{für } \mu \geq \mu_o .$$

Die Operationscharakteristik welche in (2.45) formal dargestellt wurde, wird jetzt zu:

(2.48)

$$L(\mu) = \int_{v_1}^{\infty} f_\mu(\bar{x}_{n_1})d\bar{x}_{n_1} + \int_{v_2}^{\infty}\int_{u_1}^{v_1} f_\mu(\bar{x}_{n_1}, \bar{x}_{n_1+n_2})d\bar{x}_{n_1}d\bar{x}_{n_1+n_2}$$

Beim zweiseitigen Test zur Prüfung der Nullhypothese H_o: $\mu = \mu_o$ gegen H_1: $\mu \neq \mu_o$ verwenden wir die gleichen Teststatistiken und die Entscheidungsvorschrift lautet:

$$(u_1' < v_1',\ u_1',\ v_1' \in \mathbb{R})$$

$$\bar{x}_{n_1} \in A_1 := [\mu_o - u_1',\ \mu_o + u_1']: \text{ Annahme der Partie}$$

$$\bar{x}_{n_1} \in A_2 := (-\infty, \mu_o - v_1'] \cup [\mu_o + v_1', \infty): \text{ Ablehnung der Partie}$$

$$\bar{x}_{n_1} \in A_3 := (\mu_o - v_1', \mu_o - u_1') \cup (\mu_o + u_1', \mu_o + v_1'): \text{ zweite Stichprobe}$$

und

$\bar{x}_{n_1+n_2} \in B_1 := [\mu_o - v_2', \mu_o + v_2']$: Annahme

$\bar{x}_{n_1+n_2} \in B_2 := (-\infty, \mu_o - v_2') \cup (\mu_o + v_2', \infty)$: Ablehnung

u_1', v_1' sowie v_2' sind reelle Zahlen und werden so festgelegt, daß gilt:

(2.49)

$$\int\limits_{|\bar{x}_{n_1}-\mu_o|>v_1'} f_\mu(\bar{x}_{n_1})d\bar{x}_{n_1} + \int\limits_{\substack{|\bar{x}_{n_1+n_2}-\mu_o|\\>v_2'}} \int\limits_{\mu_o-v_1'}^{\mu_o-u_1'} f_\mu(\bar{x}_{n_1},\bar{x}_{n_1+n_2}) d\bar{x}_{n_1} d\bar{x}_{n_1+n_2} +$$

$$+ \int\limits_{\substack{|\bar{x}_{n_1+n_2}-\mu_o|\\>v_2'}} \int\limits_{\mu_o+u_1'}^{\mu_o+v_1'} f_\mu(\bar{x}_{n_1},\bar{x}_{n_1+n_2}) \, d\bar{x}_{n_1} d\bar{x}_{n_1+n_2} \leq \alpha$$

für $\mu \in H_o$.

Da es sich hier um eine einpunktige Nullhypothese handelt, können wir auch wie schon beim einstufigen Test (vgl. (2.4)) fordern:

$$\int\limits_{|\bar{x}_{n_1}-\mu_o|>v_1'} f_\mu(\bar{x}_{n_1})d\bar{x}_{n_1} + \int\limits_{|\bar{x}_{n_1+n_2}-\mu_o|>v_2'} \int\limits_{\mu_o-v_1'}^{\mu_o-u_1'} f_\mu(\bar{x}_{n_1},\bar{x}_{n_1+n_2}) d\bar{x}_{n_1} d\bar{x}_{n_1+n_2} +$$

$$+ \int\limits_{|\bar{x}_{n_1+n_2} - \mu_o| > v_2'} \int\limits_{\mu_o+u_1'}^{\mu_o+v_1'} f_\mu(\bar{x}_{n_1}, \bar{x}_{n_1+n_2})\, d\bar{x}_{n_1}\, d\bar{x}_{n_1+n_2} = \alpha$$

$$\text{für } \mu = \mu_o$$

Für den zweiseitigen Test erhalten wir als Operationscharakteristik:

(2.50)

$$L(\mu) = \int\limits_{\mu_o-u_1'}^{\mu_o+u_1'} f_\mu(\bar{x}_{n_1})d\bar{x}_{n_1} + \int\limits_{\mu_o-v_2'}^{\mu_o+v_2'} \int\limits_{\mu_o-v_1'}^{\mu_o-u_1'} f_\mu(\bar{x}_{n_1}, \bar{x}_{n_1+n_2})d\bar{x}_{n_1} d\bar{x}_{n_1+n_2}$$

$$+ \int\limits_{\mu_o-v_2'}^{\mu_o+v_2'} \int\limits_{\mu_o+u_1'}^{\mu_o+v_1'} f(\bar{x}_{n_1}, \bar{x}_{n_1+n_2})d\bar{x}_{n_1} d\bar{x}_{n_1+n_2}$$

Mit diesen Ergebnissen können wir auch den durchschnittlichen Stichprobenumfang herleiten. Es gilt:

(2.51)

$$ASN = E_\mu(n) = n_1 + p_\mu(\{\varphi_1 = d_2\}) \cdot n_2 =$$

$$= n_1 + \int\limits_{u_1}^{v_1} f_\mu(\bar{x}_{n_1})d\bar{x}_{n_1} \cdot n_2$$

Dies ist die Formel für den einseitigen Test. Für die zweiseitige Fragestellung erhält man:

(2.52)

$$ASN = E_\mu(n) = n_1 + \int\limits_{\bar{x}_{n_1} \in A_3} f_\mu(\bar{x}_{n_1})d\bar{x}_{n_1} \cdot n_2 =$$

$$= n_1 + \left(\int_{\mu_o - v_1'}^{\mu_o - u_1'} f_\mu(\bar{x}_{n_1})\,d\bar{x}_{n_1} + \int_{\mu_o + u_1'}^{\mu_o + v_1'} f_\mu(\bar{x}_{n_1})\,d\bar{x}_{n_1} \right) \cdot n_2$$

Es ist zu beachten, daß die Größen u_1, v_1 und v_2 beim einseitigen Test sowie u_1', v_1' und v_2' beim zweiseitigen Test durch (2.47) bzw. (2.49) nicht eindeutig festgelegt sind. Entsprechend den Ausführungen in Kap. 2.1 kann man Punkte der OC-Kurve vorgeben und diese Größen sowie die Stichprobenumfänge n_1 und n_2 so bestimmen, daß die Operationscharakteristik ungefähr durch diese Punkte verläuft. Ebenso kann man eine Forderung an den durchschnittlichen Stichprobenumfang stellen.

Nach dieser theoretischen Herleitung eines zweistufigen Testverfahrens präzisieren wir nun die Verteilungsannahmen des betreffenden Merkmals, um die Wahrscheinlichkeiten in (2.47) und (2.49) sowie die Funktionsgleichungen der Operationscharakteristik und des durchschnittlichen Stichprobenumfangsunter Zugrundelegung dieser speziellen Verteilungen formal angeben zu können.

2.2.1 Normalverteilung

Als Voraussetzung nehmen wir wie zu Beginn des Kapitels 2.1.1 an, daß die Varianz bekannt ist, etwa gleich einem Wert σ_o^2. Der unbekannte Parameter ist der Mittelwert μ. Damit erhalten wir:

$$P = \{f_\mu(x):\ f_\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma_o}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma_o^2}}\ ,\ \mu \in R\}$$

als Verteilungsklasse des Merkmales X.

Es soll an dieser Stelle nicht wieder der gesamte Ablauf des Testverfahrens (2.42) - (2.46) für den Fall der Normalverteilung durchgeführt werden, sondern wir beschränken uns darauf, die für die Operationscharakteristik und Beziehung (2.44) relevanten Wahrscheinlichkeitsverteilungen zu ermitteln, da die Testprozedur stets gleich bleibt und nur die kritische Region aus (2.44) jeweils mit anderen Verteilungen bestimmt wird. Diese Verteilungen müssen dann auch zur expliziten Berechnung von $L(\mu)$ herangezogen werden. Als Teststatistiken verwenden wir $\bar{X}_{n_1}$ und $\bar{X}_{n_1+n_2}$.

Neben der bekannten Verteilung von $\bar{X}_{n_1}$ benötigen wir hier die gemeinsame Verteilung von $\bar{X}_{n_1}$ und $\bar{X}_{n_1+n_2}$, was wegen der Totalstetigkeit der Normalverteilung bezüglich des Lebesque-Maßes auf die Bestimmung der gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsdichte von $\bar{X}_{n_1}$ und $\bar{X}_{n_1+n_2}$ hinausläuft. Hierfür beweisen wir zunächst einen einfachen Satz.

(2.53) <u>Satz:</u>

Seien $X_1,\dots,X_{n_1}$, $X_{n_1+1},\dots,X_{n_1+n_2}$ unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariable mit $E(X_i) = \mu$ und Var $X_i = 1$ und seien

$$\bar{X}_{n_1} := \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} X_i$$

$$\bar{X}_{n_1+n_2} := \frac{1}{n_1+n_2} \sum_{i=1}^{n_1+n_2} X_i$$

Dann ist der Korrelationskoeffizient ρ zwischen den Zufallsvariablen $\bar{X}_{n_1}$ und $\bar{X}_{n_1+n_2}$ gleich $\sqrt{\frac{n_1}{n_1+n_2}}$.

<u>Beweis:</u>

Zum Beweis des Lemmas zerlegen wir die Zufallsvariable $\bar{X}_{n_1+n_2}$

$$\bar{X}_{n_1+n_2} = \frac{1}{n_1+n_2} \sum_{i=1}^{n_1+n_2} X_i = \frac{1}{n_1+n_2} \left[\sum_{i=1}^{n_1} X_i + \sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2} X_i \right]$$

$$= \frac{n_1}{n_1+n_2} \cdot \bar{X}_{n_1} + \frac{n_2}{n_1+n_2} \bar{X}_{n_2}$$

mit $\bar{X}_{n_2} := \frac{1}{n_2} \sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2} X_i$ und unabhängigen Zufallsvariablen $\bar{X}_{n_1}$ und $\bar{X}_{n_2}$.

Dann gilt:

$$\mathrm{Cov}\,(\bar{X}_{n_1}, \bar{X}_{n_1+n_2}) = E(\bar{X}_{n_1} \cdot \bar{X}_{n_1+n_2}) - \mu^2 =$$

$$= E\left[\bar{X}_{n_1} \cdot \left(\frac{n_1}{n_1+n_2} \bar{X}_{n_1} + \frac{n_2}{n_1+n_2} \bar{X}_{n_2}\right)\right] - \mu^2 =$$

$$= E\left(\frac{n_1}{n_1+n_2} \bar{X}_{n_1}^2 + \frac{n_2}{n_1+n_2} \bar{X}_{n_1} \cdot \bar{X}_{n_2}\right) - \mu^2$$

$$\mathrm{Cov}\,(\bar{X}_{n_1}, \bar{X}_{n_1+n_2}) = \frac{n_1}{n_1+n_2} E(\bar{X}_{n_1}^2) + \frac{n_2}{n_1+n_2} E(\bar{X}_{n_1} \cdot \bar{X}_{n_2}) - \mu^2$$

$$= \frac{n_1}{n_1+n_2} \left(\frac{1}{n_1} + \mu^2\right) + \frac{n_2}{n_1+n_2} \cdot \mu^2 - \mu^2$$

$$= \frac{1}{n_1+n_2}$$

Hiermit ergibt sich für den Korrelationskoeffizienten:

$$\rho = \frac{\operatorname{Cov}(\bar{X}_{n_1}, \bar{X}_{n_1+n_2})}{\sigma_{\bar{X}_{n_1}} \cdot \sigma_{\bar{X}_{n_1+n_2}}} = \frac{\frac{1}{n_1+n_2}}{\sqrt{\frac{1}{n_1(n_1+n_2)}}} = \sqrt{\frac{n_1}{n_1+n_2}} \qquad \text{qed.}$$

Daß hier Var $X_i = 1$ gesetzt wurde, bedeutet keine Einschränkung. Für jede konstante Standardabweichung $\sigma_o > 0$ gilt ebenfalls

$$\rho = \sqrt{\frac{n_1}{n_1+n_2}}$$

was aus dem Beweis sofort ersichtlich ist.

Mit dem Ergebnis aus (2.53) ist für unsere Verteilungsklasse P der Normalverteilungen mit konstanter Varianz σ_o^2 die gemeinsame Dichte von $\bar{X}_{n_1}$ und $\bar{X}_{n_1+n_2}$ nun leicht anzugeben. Es gilt

(2.54)

$$f_\mu(\bar{x}_{n_1}, \bar{x}_{n_1+n_2}) = \frac{n_1+n_2}{2\pi \cdot \sigma_o^2} \cdot \sqrt{\frac{n_1}{n_2}} \cdot \exp\left(\frac{n_1+n_2}{2\sigma_o^2 n_2} [n_1(\bar{x}_{n_1}-\mu)^2 - \right.$$

$$\left. -2n_1 \cdot (\bar{x}_{n_1}-\mu)(\bar{x}_{n_1+n_2}-\mu) + (n_1+n_2)(\bar{x}_{n_1+n_2}-\mu)^2] \right)$$

Dies ist eine zweidimensionale Normalverteilung mit dem Korrelationskoeffizienten $\rho = \sqrt{\frac{n_1}{n_1+n_2}}$ sowie $\sigma_1 = \frac{\sigma_o}{\sqrt{n_1}}$,

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_o}{\sqrt{n_1+n_2}} \text{ und } EX_1 = EX_2 = \mu.$$

Beachten wir noch, daß

$$f_\mu(\bar{x}_{n_1}) = \frac{\sqrt{n_1}}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma_o} e^{-\frac{n_1(\bar{x}_{n_1}-\mu)^2}{2\sigma_o^2}} \qquad -\infty < \bar{x}_{n_1} < \infty$$

ist, so haben wir alle Verteilungen, die zur Berechnung der Operationscharakteristik $L(\mu)$ aus (2.48) oder (2.50) sowie des durchschnittlichen Stichprobenumfanges aus (2.51) bzw. (2.52) erforderlich sind, hergeleitet. Für praktische Anwendungen sind umfangreiche Tabellenwerke der bivariaten Normalverteilung verfügbar, etwa bei Abramowitz, Stegun (1), Owen (35) oder Pearson and Hartley (37).

2.2.2. Exponentialverteilung

Die Exponentialverteilung hat wie die Normalverteilung einen sehr weiten Anwendungsbereich in der Qualitätskontrolle. Vor allem sind hier die sog. "Lebensdauer-Verteilungen" zu nennen. In der Literatur findet sich eine große Zahl von Beiträgen zur Anwendung oder Charakterisierung der Exponentialverteilung. Eine kleine Auswahl ist etwa Albert (2), Aroian, Robison (3), Desu (14), Gupta and Groll (24), Hoem (26) und Takeuchi (53).

Wir wollen nun unseren Test (2.42) - (2.44) unter Zugrundelegung der Exponentialverteilung behandeln. Der Testablauf selbst wird daher nicht hergeleitet, sondern nur die relevanten Verteilungen. Entscheidend sind wiederum die Wahrscheinlichkeitsdichten der Zufallsvariablen $\bar{X}_{n_1}$ und des Zufallsvektors $(\bar{X}_{n_1}, \bar{X}_{n_1+n_2})$, welche uns die exakte Festlegung der kritischen Region sowie die Berechnung der Operationscharakteristik und des durchschnittlichen Stichprobenumfanges ermöglichen.

Wir nehmen also in Analogie zu den vorhergehenden Ausführungen an, die Klasse der in Frage kommenden Wahrscheinlichkeitsverteilungen sei gekennzeichnet durch:

$$P = \{f_\mu(x) : f_\mu(x) = \mu\, e^{-\mu x},\ 0 \leq x < \infty,\ \mu > 0\}$$

1. Ermittlung der Wahrscheinlichkeitsdichte von $\bar{X}_{n_1}$.

Diese Dichte ist einfach zu berechnen. Wir verwenden die charakteristische Funktion der Exponentialverteilung. Es ist

$$\varphi(t) = \frac{1}{1-\frac{it}{\mu}}$$

Damit erhält man für die Summe von n_1 unabhängigen Zufallsvariablen mit identischen Wahrscheinlichkeitsdichten aus der Klasse P:

$$\hat{X}_{n_1} := X_1 + X_2 + \ldots + X_{n_1}$$

$$\varphi_{\hat{X}_{n_1}}(t) = \frac{1}{(1-\frac{it}{\mu})^{n_1}}$$

Mit $\bar{X}_{n_1} = \frac{1}{n_1} \hat{X}_{n_1}$ erhält man schließlich:

$$\varphi_{\bar{X}_{n_1}}(t) = \varphi_{\hat{X}_{n_1}}\left(\frac{t}{n_1}\right) = \frac{1}{\left(1-\frac{it}{n_1\mu}\right)^{n_1}}$$

Dies ist aber die charakteristische Funktion einer Gamma-Verteilung mit den Parametern $n_1\mu$ und n_1

$$f(\bar{x}_{n_1}) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n_1)} \cdot (n_1\mu)^{n_1} \; \bar{x}_{n_1}^{\;n_1-1} \cdot e^{-n_1\mu\bar{x}_{n_1}} & \text{für } \bar{x}_{n_1} \geq 0 \\ 0 \text{ sonst} & \end{cases}$$

2. Die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichte von $\bar{X}_{n_1}$ und $\bar{X}_{n_1+n_2}$.

In diesem Fall hilft uns der Korrelationskoeffizient wie bei vorliegender Normalverteilung nicht weiter. Aus diesem Grunde verfolgen wir hier eine andere Vorgehensweise und zerlegen $\bar{X}_{n_1+n_2}$ in zwei Terme (vgl. Beweis zu Lemma (2.53)):

$$\bar{X}_{n_1+n_2} = \frac{n_1}{n_1+n_2}\bar{X}_{n_1} + \frac{n_2}{n_1+n_2}\bar{X}_{n_2}$$

$$= a\,\bar{X}_{n_1} + b\,\bar{X}_{n_2}$$

mit $a: = \frac{n_1}{n_1+n_2}$, $b: = \frac{n_2}{n_1+n_2}$ und unabhängigen Zufallsvariablen $\bar{X}_{n_1}$ und $\bar{X}_{n_2}$.

Damit ist die Dichte des Zufallsvektors $(\bar{X}_{n_1}, \bar{X}_{n_2})$ gegeben durch:

$$(2.55) \qquad f_\mu(\bar{x}_{n_1},\bar{x}_{n_2}) = f_\mu(\bar{x}_{n_1}) \cdot f_\mu(\bar{x}_{n_2})$$

Die lineare Transformation g liefert:

$$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$\underline{z} = g(\bar{x}_{n_1},\bar{x}_{n_2}) := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}_{n_1} \\ \bar{x}_{n_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x}_{n_1} \\ a\bar{x}_{n_1}+b\bar{x}_{n_2} \end{pmatrix}$$

Die Funktionaldeterminante der Abbildung g ist:

$$|J| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial \bar{x}_{n_1}} & \dfrac{\partial g_1}{\partial \bar{x}_{n_2}} \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial \bar{x}_{n_1}} & \dfrac{\partial g_2}{\partial \bar{x}_{n_2}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{vmatrix} = b > 0$$

und es gilt:

$$|J|^{-1} = \frac{1}{b} = \frac{n_1+n_2}{n_2}$$

Damit erhält man nach einem Satz der Wahrscheinlichkeitsrechnung (vgl. (1.2))

$$f_\mu(\underline{z}) = f_\mu(\bar{x}_{n_1},\bar{x}_{n_1+n_2}) = |J|^{-1}\, f_\mu(g^{-1}(\underline{z}))$$

$$(2.56) \quad f_\mu(\bar{x}_{n_1},\bar{x}_{n_1+n_2}) = \frac{n_1+n_2}{n_2} \cdot f_\mu\left(\bar{x}_{n_1}, \frac{\bar{x}_{n_1+n_2}-a\bar{x}_{n_1}}{b}\right)$$

wobei auf der rechten Seite der Beziehung die Dichte aus (2.55) einzusetzen ist.

Wenden wir diese Ergebnisse nun speziell auf die Exponentialverteilung an, so ergibt sich zunächst für (2.55):

$$f_\mu(\bar{x}_{n_1},\bar{x}_{n_2}) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n_1)\cdot\Gamma(n_2)}(n_1\mu)^{n_1}(n_2\mu)^{n_2}\bar{x}_{n_1}^{\,n_1-1}\bar{x}_{n_2}^{\,n_2-1}\cdot \\ \qquad\cdot e^{-n_1\mu\bar{x}_{n_1}-n_2\mu\bar{x}_{n_2}} \\ \qquad \text{für } \bar{x}_{n_1},\bar{x}_{n_2} \geq 0 \\ 0 \qquad \text{sonst} \end{cases}$$

Aus der Transformation ergibt sich

$$f_\mu(\bar{x}_{n_1},\bar{x}_{n_1+n_2}) = \frac{n_1+n_2}{n_2}\,\frac{1}{\Gamma(n_1)\cdot\Gamma(n_2)}\,(n_1\mu)^{n_1}(n_2\mu)^{n_2}\cdot$$

$$\cdot\ \bar{x}_{n_1}^{\,n_1-1}\left(\frac{\bar{x}_{n_1+n_2}-\frac{n_1}{n_1+n_2}\bar{x}_{n_1}}{\frac{n_2}{n_1+n_2}}\right)^{n_2-1}\cdot$$

$$\cdot\exp\{-n_1\mu\bar{x}_{n_1}-\mu(n_1+n_2)(\bar{x}_{n_1+n_2}-\frac{n_1}{n_1+n_2}\bar{x}_{n_1})\}$$

$$\text{für } \bar{x}_{n_1} \geq 0 \text{ und } \frac{n_1}{n_1+n_2}\bar{x}_{n_1} \leq \bar{x}_{n_1+n_2}$$

Daraus folgt

$$f_\mu(\bar{x}_{n_1},\bar{x}_{n_1+n_2}) = \frac{(n_1+n_2)(n_1\mu)^{n_1}(n_2\mu)^{n_2}}{n_2\Gamma(n_1)\cdot\Gamma(n_2)}\cdot\bar{x}_{n_1}^{\,n_1-1}\cdot$$

$$\cdot\ \exp\{-\mu(n_1+n_2)\bar{x}_{n_1+n_2}\}$$

$$\text{für } \bar{x}_{n_1} \geq 0 \text{ und } \frac{n_1}{n_1+n_2}\,\bar{x}_{n_1} \leq \bar{x}_{n_1+n_2}$$

Sonst ist $f_\mu(\bar{x}_{n_1}, \bar{x}_{n_1+n_2})$ identisch gleich Null.

Damit haben wir die zur Berechnung von $L(\mu)$ und ASN erforderlichen Wahrscheinlichkeitsverteilungen hergeleitet. Da bei zugrundeliegender Exponentialverteilung im wesentlichen nur einseitige Fragestellungen eine Rolle spielen (z.B. Lebensdauer), sind nur die Beziehungen (2.49) und (2.51) von Bedeutung, wobei eben jetzt die Wahrscheinlichkeitsdichten aus (2.55) bzw. (2.57) einzusetzen sind.

Ergänzend sei noch erwähnt, daß die Vorgehensweise unter 2.2.2 selbstverständlich auch für die Normalverteilung zulässig ist. Man erhält auch die gleichen Ergebnisse, jedoch auf umständlichere Weise. Weitere vereinfachte Beziehungen ergeben sich aus der geeigneten Wahl der Stichprobenumfänge.

Setzt man z.B.

$$n_1 = n_2 = n$$

so ist (2.54) eine zweidimensionale Normalverteilung mit

$$\rho = \frac{1}{2}\sqrt{2},\ \sigma_1 = \frac{\sigma_o}{\sqrt{n}},\ \sigma_2 = \frac{\sigma_o}{\sqrt{2n}} \text{ und } E\bar{X}_n = E\bar{X}_{2n} = \mu\ .$$

Für (2.57) ergibt sich:

$$f(\bar{x}_n, \bar{x}_{2n}) = \begin{cases} \dfrac{2}{[\Gamma(n)]^2} \cdot (n\mu)^{2n}\, \bar{x}_n^{n-1} \cdot (2\,\bar{x}_{2n} - \bar{x}_n)^{n-1} \cdot e^{-2\mu n \bar{x}_{2n}} & \text{für } \bar{x}_n \geq 0 \text{ und } \frac{1}{2}\bar{x}_n \leq \bar{x}_{2n} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

2.2.3. Cauchy-Verteilung

Als zugrundeliegende Verteilung betrachten wir jetzt die Cauchy-Verteilung mit unbekanntem Lageparameter μ und $\lambda = \lambda_o = 1$. Also ist

$$P = \{f_\mu(x):\ f_\mu(x) = \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{1+(x-\mu)^2}\ ,\quad -\infty < x < \infty\ ,\quad \mu \in \mathbb{R}\}$$

Die zweistufige Entscheidung wird auch hier gemäß (2.42) - (2.44) getroffen, zum Unterschied verwenden wir aus bekannten Gründen als Prüfgrößen nicht die arithmetischen Mittel $\bar{X}_{n_1}$ bzw. $\bar{X}_{n_1+n_2}$, sondern die Mediane $X_{(\frac{n_1+1}{2})}$ aus der ersten Stichprobe und $X_{(\frac{n_1+n_2+1}{2})}$ aus beiden Stichproben. Deshalb setzen wir voraus:

$$n_1 = 2\cdot k_1 + 1$$

$$n_2 = 2\cdot k_2 \qquad\qquad k_1, k_2 \in \mathbb{N}$$

Auf den Test braucht nicht näher eingegangen zu werden, notwendig ist aber wieder die Herleitung der Verteilungen zur Berechnung der Operationscharakteristik $L(\mu)$ sowie des durchschnittlichen Stichprobenumfangs ASN. Es handelt sich um die Verteilung von $X_{(\frac{n_1+1}{2})}$ und die gemeinsame Verteilung von $X_{(\frac{n_1+1}{2})}$ und $X_{(\frac{n_1+n_2+1}{2})}$. Erstere ist kein Problem, sie wurde bereits in Paragraph 2.1.2 angegeben. Es gilt:

(2.58)
$$f_{X_{(\frac{n_1+1}{2})}}(x) = \frac{\Gamma(n_1+1)}{\left[\Gamma(\frac{n_1+1}{2})\right]^2}\cdot\frac{1}{\pi}\cdot\left[\frac{1}{4}-\frac{1}{\pi^2}\arctan^2(x-\mu)\right]^{\frac{n_1-1}{2}}.$$

$$\cdot \frac{1}{1+(x-\mu)^2}$$

$$\text{für } -\infty < x < \infty \quad .$$

Mehr Schwierigkeiten bereitet die gemeinsame Verteilung von $X_{(\frac{n_1+1}{2})}$ und $X_{(\frac{n_1+n_2+1}{2})}$, da die beiden Zufallsvariablen natürlich nicht unabhängig sind.

Bei der Herleitung dieser Verteilung gehen wir nochmals aus von unserem ursprünglichen Wahrscheinlichkeitsmodell. Eine Stichprobe vom Umfang n nehmen wir an als Realisationen von n unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen X_j, welche auf einem uns in der Regel nicht bekannten Wahrscheinlichkeitsraum Ω definiert sind (wir können für unsere Belange immer $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ annehmen).

$$X_j: \Omega \to \mathbb{R}$$

Die X_j sollen alle die gleiche streng monotone Verteilungsfunktion $F_{X_j}(x)$ besitzen mit

$$F_{X_j}: \mathbb{R} \to [0,1]$$

und $$F_{X_j}(x) = p(\{\omega: X_j(\omega) \leq x\})$$

Betrachten wir nun die Abbildung

$$U_j: \Omega \to [0,1]$$

$$U_j(\omega) := F_{X_j}(X_j(\omega))$$

so haben diese neuen Zufallsvariablen U_j die Verteilungsfunktion

$$F_{U_j}(\alpha) = p(\{\omega: U_j(\omega) \leq \alpha\}) = p(\{\omega: F_{X_j}(X_j(\omega)) \leq \alpha\}) =$$

$$= p(\{\omega: X_j(\omega) \leq F_{X_j}^{-1}(\alpha)\}) = F_{X_j}(F_{X_j}^{-1}(\alpha)) = \alpha$$

für $\alpha \in [0,1]$

und

$$\alpha < 0 \Rightarrow F_{U_j}(\alpha) = 0$$

$$\alpha > 1 \Rightarrow F_{U_j}(\alpha) = 1$$

Zusammen mit Satz 31.3 aus Bauer (5) haben wir folgendes Ergebnis:

Die U_j sind unabhängige, im Intervall [0,1] gleichverteilte Zufallsvariablen.

Wir bezeichnen die order-statistics von $U_1, \ldots, U_n$ mit $U_{(j)}$, $j = 1, \ldots, n$ und definieren:

$U_{k,n} := U_{(k)}$ aus einer Stichprobe vom Umfang n

$U_{k+s,n+m} := U_{(k+s)}$ aus einer Stichprobe vom Umfang n + m.

Nun hilft uns ein Ergebnis von M.M. Siddiqui (47), S. 417 ff, der die gemeinsame Verteilung von $U_{k,n}$ und $U_{k+s,n+m}$ berechnet hat.

Es gilt:

(2.59)

für $0 \leq u < v \leq 1$:

$$f_{(U_{k,n};U_{k+s,n+m})}(u,v) = \sum_{j=0}^{s-1} n(n+m-k-s+1)\binom{n-1}{k-1}\binom{m}{j}\binom{n+m-k-j}{s-j-1} \cdot$$

$$\cdot\ u^{k+j-1}\ (v-u)^{s-j-1}\,(1-v)^{n+m-s-k}$$

für $0 \leq u = v \leq 1$:

$$f_{(U_{k,n};U_{k+s,n+m})}(u,v) = n\binom{n-1}{k-1}\binom{m}{s}u^{k+s-1}\,(1-u)^{n+m-k-s}$$

für $0 \leq v < u \leq 1$:

$$f_{(U_{k,n};U_{k+s,n+m})}(u,v) = \sum_{j=s+1}^{m} n(k+s)\binom{n-1}{k-1}\binom{m}{j}\binom{k+j-1}{j-s-1}(1-u)^{n+m-k-j}$$

$$\cdot\,(u-v)^{j-s-1}\cdot v^{s+k-1}$$

für $u,\ v < 0$ oder $u,\ v > 1$:

$$f_{(U_{k,n};U_{k+s,n+m})}(u,v) = 0$$

Um (2.59) auf unsere Situation anwenden zu können, setzen wir

$$n = n_1$$

$$m = n_2$$

$$k = \frac{n_1+1}{2}$$

$$s = \frac{n_2}{2}$$

Die Zufallsvariablen X_j haben nun alle die gleiche Verteilungsfunktion:

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan (x-\mu) \qquad \text{für } -\infty < x < \infty,\ \mu \in \mathbb{R}$$

und gleiche Dichte bezüglich des Lebesque-Maßes.

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+(x-\mu)^2} \qquad \text{für } -\infty < x < \infty,\ \mu \in \mathbb{R}$$

Dann gehen wir aus von (2.64) und definieren die Abbildung

$$g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} F^{-1}(u) \\ F^{-1}(v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

und erhalten nach dem Transformationssatz:

$$f_{(X_{k,n}, X_{k+s,n+m})}(x_1,x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2) \cdot$$

$$\cdot\ f_{(U_{k,n}, U_{k+s,n+m})}(F(x_1), F(x_2))$$

mit $f(x)$ bzw. $F(x)$ der Cauchy-Verteilung.

Damit ergibt sich für die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichte der Zufallsvariablen $X_{\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)}$ und $X_{\left(\frac{n_1+n_2+1}{2}\right)}$

(2.60)

Für $-\infty < x_1 < x_2 < \infty$:

$$f_{\left[X_{\left(\frac{n_1+1}{2}\right)}; X_{\left(\frac{n_1+n_2+1}{2}\right)}\right]}(x_1,x_2) = \sum_{j=0}^{\frac{n_2}{2}-1} \left[n_1 \frac{n_1+n_2+1}{2} \begin{pmatrix} n_1-1 \\ \frac{n_1-1}{2} \end{pmatrix} \cdot \right.$$

$$\binom{n_2}{j}\binom{\frac{n_1-1}{2}+n_2-j}{\frac{n_2}{2}-j-1} F(x_1)^{\frac{n_1-1}{2}+j}\cdot\left(F(x_2)-F(x_1)\right)^{\frac{n_2}{2}-j-1}$$

$$\cdot\left(1-F(x_2)\right)^{\frac{n_1+n_2-1}{2}}\cdot f(x_1)\cdot f(x_2)\Big]$$

für $-\infty < x_1 = x_2 < \infty$:

$$f_{\left(X_{(\frac{n_1+1}{2})};\,X_{(\frac{n_1+n_2+1}{2})}\right)}(x_1,x_2) = n_1\binom{n_1-1}{\frac{n_1-1}{2}}\binom{n_2}{\frac{n_2}{2}}F(x_1)^{\frac{n_1+n_2-1}{2}}$$

$$\cdot\left(1-F(x_1)\right)^{\frac{n_1+n_2-1}{2}}\cdot\left(f(x_1)\right)^2$$

für $-\infty < x_2 < x_1 < \infty$:

$$f_{\left(X_{(\frac{n_1+1}{2})};\,X_{(\frac{n_1+n_2+1}{2})}\right)}(x_1,x_2) = \sum_{j=\frac{n_2}{2}+1}^{n_2}\Big[n_1\frac{n_1+n_2+1}{2}\binom{n_1-1}{\frac{n_1-1}{2}}$$

$$\binom{n_2}{j}\binom{\frac{n_1-1}{2}+j}{j-\frac{n_2}{2}-1}\left(1-F(x_1)\right)^{\frac{n_1-1}{2}+n_2-j}\left(F(x_1)-F(x_2)\right)^{j-\frac{n_2}{2}-1}$$

$$\cdot\ F(x_2)^{\frac{n_1+n_2-1}{2}}\ f(x_1)\cdot f(x_2)\Big]$$

$F(x)$ und $f(x)$ in (2.60) sind Verteilungs- und Dichtefunktion der Cauchy-Verteilung.

Mit (2.58) und (2.60) lassen sich nun alle Wahrscheinlichkeiten zur Berechnung der Operationscharakteristik sowie des durchschnittlichen Stichprobenumfangs ermitteln.

2.3. k-stufige Verfahren

Schließlich wollen wir in diesem Paragraphen die Ausführungen von 2.2.1 und 2.2.2 auf den k-stufigen Fall verallgemeinern.

Die Situation ist wie die gleiche wie in 2.2. Eine Warenpartie wird angeliefert, ein stetig veränderliches Merkmal liegt vor und der Lageparameter μ der zugrundeliegenden Verteilung ist unbekannt. Der Kontrolleur soll überprüfen, ob ein Sollwert (etwa $\mu = \mu_o$) eingehalten oder ob dieser Sollwert nicht unterschritten wurde (H_o: $\mu \geq \mu_o$). Die endgültige Entscheidung über Annahme oder Ablehnung der Warenpartie wird jetzt aber unter Umständen erst nach k-maligem Ziehen einer Stichprobe getroffen.

Bevor wir jedoch das mathematische Modell für die Verallgemeinerung von (2.42) - (2.44) herleiten, führen wir einige Bezeichnungen zur vereinfachenden Schreibweise ein.

(2.61) Definition

(1) Stichprobenumfänge $n_1,\ldots,n_k$ mit $n_i \geq 1$ für $i = 1,\ldots,k$

(2) $N_i := n_1 +\ldots+ n_i$ für $i = 1,\ldots,k$

(3) Stichprobenräume $S_i \subseteq \mathbb{R}$, $i = 1,\ldots,k$

(4) Entscheidungsräume D_i mit

$$D_i := \{d_o, d_1, d_2\}$$

d_o = Annahme d. Partie

d_1 = Ablehnung

d_2 = Ziehung einer weiteren Stichprobe vom Umfang n_{i+1} und Anwendung von φ_{i+1}

für $i = 1,\ldots,k-1$

und

$$D_k := \{d_o, d_1\}$$

(5) Nullhypothese H_o, Gegenhypothese H_1 mit $H_o \cap H_1 = \phi$

Die Stichprobenräume $S_i,\ldots,S_{k-1}$ werden wieder jeweils in drei disjunkte Teilmengen zerlegt, nämlich in

den Annahmebereich der i-ten Stufe $A_1^{(i)}$

den Ablehnungsbereich der i-ten Stufe $A_2^{(i)}$

den Indifferenzbereich der i-ten Stufe $A_3^{(i)}$

wobei gilt: $\bigcup_{j=1}^{3} A_j^{(i)} = S_i,\ i = 1,\ldots,k-1$

Auf der k-ten Stufe muß auf jeden Fall eine Entscheidung zugunsten H_o oder H_1 getroffen werden, deshalb entfällt hier der Indifferenzbereich und S_k wird nur zerlegt in $A_1^{(k)}$ und $A_2^{(k)}$ mit $A_1^{(k)} \cup A_2^{(k)} = S_k$ und $A_1^{(k)} \cap A_2^{(k)} = \phi$.

Als Teststatistik auf der i-ten Stufe verwenden wir wieder eine Schätzfunktion, welche alle vorhergehenden Stichprobeninformationen beinhaltet und bezeichnen sie mit $T_{N_i}(\underline{x})$. $T_{N_i}(\underline{x})$ ist eine Abbildung von $\mathbb{R}^{N_i}$ in $\mathbb{R}$.

Jetzt können wir ein k-stufiges Verfahren als ein System von Abbildungen φ_i definieren.

<u>(2.62) Definition</u>

Sei für $i = 1,\ldots,k-1$

$$\varphi_i(T_{N_i}(\underline{x})) = \begin{cases} d_o & \text{für } T_{N_i}(x_1,\dots,x_{N_i}) \in A_1^{(i)} \\ d_1 & \text{für } T_{N_i}(x_1,\dots,x_{N_i}) \in A_2^{(i)} \\ d_2 & \text{für } T_{N_i}(x_1,\dots,x_{N_i}) \in A_3^{(i)} \end{cases}$$

und

$$\varphi_k(T_{N_k}(\underline{x})) = \begin{cases} d_o & \text{für } T_{N_k}(x_1,\dots,x_{N_k}) \in A_1^{(k)} \\ d_1 & \text{für } T_{N_k}(x_1,\dots,x_{N_k}) \in A_2^{(k)} \end{cases}$$

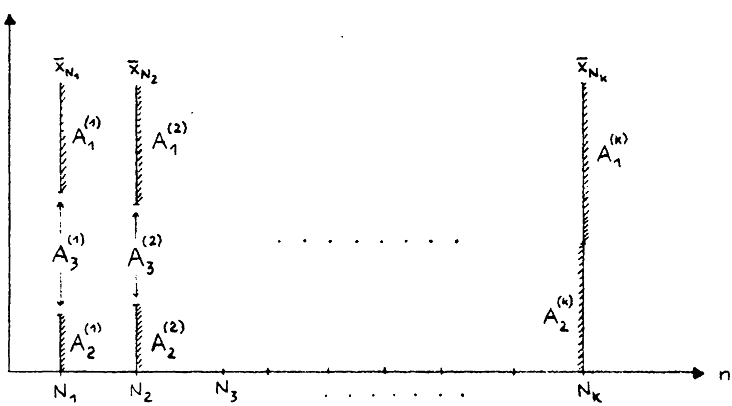
so daß gilt:

(2.63)

$$p_\mu(\{\varphi_1 = d_1\}) + \sum_{i=2}^{k} p_\mu\left(\bigcap_{j=1}^{i-1} \{\varphi_j = d_2\} \cap \{\varphi_i = d_1\}\right) \leq \alpha$$

für alle $\mu \in H_o$

Als graphische Veranschaulichung haben wir folgendes Schaubild:



Nach der ersten Stichprobe von $N_1 = n_1$ Stück gelangen wir zu keiner Entscheidung, falls $\bar{x}_{n_1} \in A_3^{(1)}$ resultiert. Dann wird eine zweite Stichprobe vom Umfang n_2 gezogen und das arithmetische Mittel aus $N_2 = n_1 + n_2$ Stück errechnet. Fällt dies in den Bereich $A_3^{(2)}$, so wird weitergeprüft. Die endgültige Entscheidung fällt auf jeden Fall auf der k-ten Stufe.

Die Operationscharakteristik des Tests läßt sich als Wahrscheinlichkeit der Annahme angeben als:

(2.64)

$$L(\mu) = p_\mu(\{\varphi_1 = d_o\}) + p_\mu(\{\varphi_1 = d_2\} \cap \{\varphi_2 = d_o\}) +$$

$$+ p_\mu(\{\varphi_1 = d_2\} \cap \{\varphi_2 = d_2\} \cap \ldots \cap \{\varphi_{k-1} = d_2\} \cap \{\varphi_k = d_o\})$$

$$= p_\mu(\{\varphi_1 = d_o\}) + \sum_{i=2}^{k} p_\mu(\bigcap_{j=1}^{i-1} \{\varphi_j = d_2\} \cap \{\varphi_i = d_o\})$$

Der gesamte Stichprobenumfang n ist im k-stufigen Fall für $k > 1$ eine Zufallsvariable mit den Ausprägungen N_1, $N_2, \ldots, N_k$. Sein Erwartungswert ist:

(2.65)

$$ASN = E_\mu(n) = n_1 + p(\{\varphi_1 = d_2\}) \cdot n_2 + p(\{\varphi_1 = d_2\} \cap \{\varphi_2 = d_2\}) \cdot$$

$$\cdot n_3 + \ldots + p(\{\varphi_1 = d_2\} \cap \ldots \cap \{\varphi_{k-1} = d_2\}) \cdot n_k$$

$$= n_1 + \sum_{i=1}^{k-1} p(\bigcap_{j=1}^{i} \{\varphi_j = d_2\}) \cdot n_{i+1}$$

Nach dieser theoretischen Herleitung des k-stufigen Verfahrens mit Operationscharakteristik und durchschnittlichem Stichprobenumfang, legen wir nun wieder konkrete Verteilungen für das untersuchte Merkmal zugrunde. Als erstes beschäftigen wir uns mit Merkmalen, die einer Normalverteilung mit konstanter Varianz σ_o^2 gehorchen. Die Klasse P von Wahrscheinlichkeitsverteilungen ist also die gleiche wie unter 2.2.1, interessant ist die gemeinsame Verteilung der Zufallsvektoren $(\bar{X}_{N_1},\ldots,\bar{X}_{N_\ell})$ mit $\ell = 1,\ldots,k$. Hierzu beweisen wir eine Verallgemeinerung von Lemma (2.53).

<u>(2.66) Lemma:</u>

Sei $i < j$

$X_1, X_2,\ldots, X_{N_j}$ unabh., identisch verteilt mit $EX_i = \mu$ und $\operatorname{Var} X_i = 1$

$$\bar{X}_{N_i} = \frac{1}{N_i} \sum_{r=1}^{N_i} X_r$$

$$\bar{X}_{N_j} = \frac{1}{N_j} \sum_{r=1}^{N_j} X_r, \text{ dann gilt}$$

Korrelationskoeffizient $\rho_{ij} = \sqrt{\frac{N_i}{N_j}}$

<u>Beweis:</u>

Wir zerlegen wieder $\bar{X}_{N_j}$ $(i < j)$

$$\bar{X}_{N_j} = \frac{1}{N_j}\left[\sum_{r=1}^{N_i} X_r + \sum_{r=N_i+1}^{N_j} X_r\right] =$$

$$= \frac{1}{N_j}\left[N_i \bar{X}_{N_i} + (N_j-N_i)\bar{X}_{N_j-N_i}\right]$$

$$= \frac{N_i}{N_j} \bar{X}_{N_i} + \frac{N_j - N_i}{N_j} \bar{X}_{N_j - N_i}$$

$$\text{Cov}\,(\bar{X}_{N_i}, \bar{X}_{N_j}) = E(\bar{X}_{N_i} \cdot \bar{X}_{N_j}) - \mu^2 =$$

$$= \frac{N_i}{N_j} E(\bar{X}^2_{N_i}) + \frac{N_j - N_i}{N_j} E(\bar{X}_{N_i}) \cdot E(\bar{X}_{N_j}) - \mu^2$$

$$= \frac{N_i}{N_j} \left(\frac{1}{N_i} + \mu^2\right) + \frac{N_j - N_i}{N_j} \mu^2 - \mu^2$$

$\text{Cov}\,(\bar{X}_{N_i}, \bar{X}_{N_j}) = \frac{1}{N_j}$. Damit erhält man für ρ:

$$\rho = \frac{\frac{1}{N_j}}{\frac{1}{\sqrt{N_i\, N_j}}} = \sqrt{\frac{N_i}{N_j}} \qquad \text{qed.}$$

Lemma (2.66) liefert auch bereits die Verteilung des Zufallsvektors $(X_{N_1}, \ldots, X_{N_\ell})$, $\ell = 2, \ldots, k$. Wir erhalten eine ℓ-dimensionale Normalverteilung mit $E(X_{N_i}) = \mu$, $i = 1, \ldots, \ell$ und Varianz-Kovarianzmatrix

$$M_\ell = \sigma_0^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{N_1} & \frac{1}{N_2} & \cdots & \frac{1}{N_\ell} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \frac{1}{N_\ell} & & \cdots & \frac{1}{N_\ell} \end{pmatrix}$$

Daraus folgt:

$$(2.67)\; f_\mu(\bar{x}_{N_1}, \ldots, \bar{x}_{N_\ell}) = \frac{1}{(2\pi)^{\ell/2}} (\det M_\ell)^{-1/2} \exp \left[\frac{1}{2} (\bar{x}_{N_1} - \mu, \ldots, \bar{x}_{N_\ell} - \mu)\, M_\ell^{-1} \begin{pmatrix} \bar{x}_{N_1} - \mu \\ \vdots \\ \bar{x}_{N_\ell} - \mu \end{pmatrix} \right]$$

Mit Hilfe von (2.67) lassen sich sämtliche Wahrscheinlichkeiten aus (2.64) bzw. (2.65) bestimmen. Aus dem Aufbau des Tests und der Form von (2.67) ersieht man jedoch, daß der Anwendung des k-stufigen Tests in der Praxis Grenzen gesetzt sind, da man komplizierte Integrationen für eine Vielzahl von Parametern durchführen und tabellieren müßte. Bestimmt man auch hier Konstante $u_1, v_1, \ldots,$ wie im zweistufigen Fall, so kann man z.B. nachprüfen, daß zur Berechnung des durchschnittlichen Stichprobenumfanges

$$ASN = n_1 + \sum_{i=1}^{k-1} P_\mu\left(\bigcap_{j=1}^{i} \{\varphi_j = d_2\}\right) \cdot n_{i+1}$$

bei der Ermittlung des ℓ-ten Summanden im zweiseitigen Test über $2^{\ell-1}$ Quader des $\mathbb{R}^\ell$ zu integrieren ist, was erheblichen Aufwand erfordert. Ähnliches gilt für die explizite Berechnung der OC-Kurve. Aus diesen Gründen wird sich die Anwendung wohl auf zweistufige Teste beschränken oder man versucht, durch geeignete Wahl des Stichprobenumfangs Vereinfachungen zu erzwingen.

Ebenfalls läßt sich das Verfahren für die Exponentialverteilung ohne Schwierigkeit auf den k-stufigen Fall ausdehnen. Die Transformation

$$g: \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}^\ell$$

$$\begin{pmatrix} \bar{x}_{n_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \bar{x}_{n_\ell} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \bar{x}_{n_1} \\ \frac{n_1}{N_2}\bar{x}_{n_1} + \frac{n_2}{N_2}\bar{x}_{n_2} \\ \vdots \\ \frac{n_1}{N_\ell}\bar{x}_{n_1} + \ldots + \frac{n_\ell}{N_\ell}\bar{x}_{n_\ell} \end{pmatrix}$$

und ansonsten völlig analoges Vorgehen wie in 2.2.2 verschafft uns die Dichten der Zufallsvektoren $(\bar{X}_{N_1},\ldots,\bar{X}_{N_\ell})$. Diese werden aber sehr kompliziert, so daß für praktische Anwendungen auch umfangreiche Integrationen erforderlich sind. Deshalb erscheint eine detaillierte Darstellung nicht sinnvoll und es wird darauf verzichtet.

3. Gemischte Attribut-Variablen-Prüfung bei normalverteilter Grundgesamtheit

3.1. Einstufige Tests bei einseitiger Toleranzgrenze

Bisher haben wir ausschließlich Prüfpläne behandelt, denen als Testgröße nur eine Abbildung des $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}$ zugrundelag, wie z.B. die Statistik $\bar{X}$ oder $X_{(\frac{n+1}{2})}$. In vielen Fällen können bei einem quantitativen Merkmal aber noch Toleranzgrenzen vorgegeben sein, die zusätzlich eine qualitative Einteilung in Gut-Schlecht erlauben. Dann stehen zwei Testgrößen zur Verfügung, nämlich die Prüfgröße der messenden Prüfung, etwa $\bar{X}$, und die Prüfgröße der Attributkontrolle, etwa die Anzahl der Ausschußstücke $\hat{P}$. Zur Veranschaulichung betrachten wir zwei einfache Beispiele.

Beispiel 1:

Kleine Unterschiede in den verwendeten Materialien und andere Faktoren bewirken Schwankungen im Gewicht eines durch Fließbandfertigung hergestellten Geräts. Das genaue Durchschnittsgewicht kennt man nicht, nur die Standardabweichung von 0,4 kg. Jedes Gerät wird in einen Behälter verpackt, dessen mittleres Gewicht 3 kg mit einer Standardabweichung von 0,3 kg beträgt. Man weiß aus Erfahrung, daß das Gesamtgewicht des Geräts in sehr guter Näherung normalverteilt ist mit schwankendem Mittelwert μ und einer Standardabweichung von 0,5 kg. Die Geräte sind Exportartikel und dürfen im Zusammenhang mit Zolltarifen höchstens 16,2 kg wiegen. Geräte mit einem größeren Gesamtgewicht als 16,2 kg sind für den Export unbrauchbar. Die Partiegröße sei 1500 Stück und die Kontrolle jedes einzelnen Geräts ausgeschlossen.

Es muß also aufgrund einer Stichprobe entschieden werden, ob die Partie für den Export tauglich ist.

Beispiel 2:

Es wird eine Partie Draht angeliefert. Das den Abnehmer interessierende Merkmal ist der Ausdehnungskoeffizient bei Bruch. Es wurde mit dem Lieferanten vereinbart, daß der Ausdehnungskoeffizient bei Bruch mindestens 20% betragen soll. Die absolute untere Grenze ist für den Abnehmer ein Ausdehnungskoeffizient von 15%. Unterhalb dieser Toleranzgrenze sind die Drähte für ihn Ausschuß. Mit den Meßergebnissen einer Stichprobe soll entschieden werden, ob die Partie angenommen oder als nicht den Anforderungen entsprechend zurückgegeben wird.

Aus diesen einfachen Beispielen ersehen wir, daß aus der Stichprobe zwei Informationen gewonnen werden können.
Bei Beispiel 1 können etwa das durchschnittliche Gesamtgewicht der geprüften Geräte und die Anzahl der unbrauchbaren Stücke (= Anzahl d. Ausschußstücke) ermittelt werden. Entsprechendes gilt für Beispiel 2. Wir wollen nun versuchen, eine Theorie der Testpläne zu entwickeln, wo beide Prüfgrößen Verwendung finden. Wir sprechen dann von gemischter Attribut-Variablenkontrolle. In der Literatur wurden Pläne dieser Art bisher wenig behandelt. Einen Ansatz finden wir bei Bowker and Goode (8). In dieser Arbeit gilt das besondere Interesse wiederum der Herleitung der Wahrscheinlichkeitsverteilungen zur Berechnung der Operationscharakteristik und des durchschnittlichen Stichprobenumfangs bei mehrstufigen Verfahren. Dabei setzen wir immer voraus, daß die Grundgesamtheit der Merkmale normalverteilt ist und untersuchen in beiden Paragraphen 3.1 bzw. 3.2 stets die Hypothese H_o: $\mu \leq \mu_o$ gegenüber H_1: $\mu > \mu_o$ (trifft etwa zu auf Beispiel 1).

Ausgangspunkt unserer Überlegungen ist also wieder eine Zufallsvariable, die wir hier mit Y bezeichnen, mit existierender Lebesque-Dichte

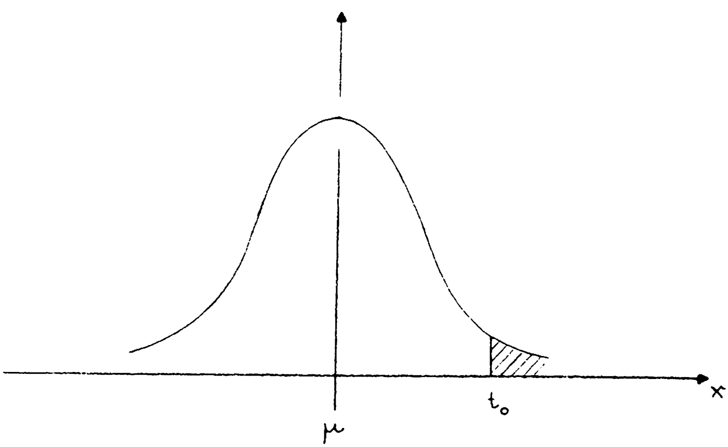
(3.1)

$$f_{Y;\mu}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma_o} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma_o^2}}, \quad -\infty < x < \infty, \ \mu \in \mathbb{R}, \ \sigma_o^2 \in \mathbb{R}_+$$

wobei die Varianz σ_o^2 bekannt sei.

Die für das Problem in Frage kommenden Parameterwerte $\mu \in \mathbb{R}$ legen die Klasse $P = \{f_{Y;\mu}(x)\}$ fest.

Wir ziehen eine uneingeschränkte Zufallsstichprobe vom Umfang n und betrachten ein geprüftes Stück als Ausschuß, wenn sein Merkmalswert eine gewisse Toleranzgrenze t_o überschreitet.



Daß wir eine obere Toleranzschranke gewählt haben, bedeutet keine Einschränkung, denn für eine untere Schranke verlaufen die Überlegungen völlig analog.

Bevor wir den Test explizit definieren, wollen wir noch einige grundsätzliche Vorbemerkungen zur gemischten Attribut-Variablen-Prüfung machen. In der Praxis erfordert die Attributkontrolle in vielen Fällen wesentlich weniger Aufwand an technischen Einrichtungen und Prüfarbeit. Als Beispiel diene etwa das Merkmal "Brenndauer einer Neonröhre", wobei wir eine Röhre als den Anforderungen entsprechend betrachten, wenn sie länger als 1000 Stunden brennt. Zieht man eine Stichprobe aus der Produktion, so ist bei der Gut-Schlecht-Prüfung die Kontrolle nach höchstens 1000 Stunden beendet, während die Variablenkontrolle etwa zur Berechnung des arithmetischen Mittels den genauen Meßwert jedes einzelnen Stückes der Stichprobe erfordern würde. Dieser geringere Aufwand geht allerdings zu Lasten der Trennschärfe der angewendeten Tests. Dies bedeutet, man benötigt für einen Test der Variablenkontrolle mit derselben Operationscharakteristik wie bei einem Test der Attributkontrolle einen wesentlich geringeren Stichprobenumfang. Auf die näheren Einzelheiten wollen wir an dieser Stelle nicht eingehen. Aus der Anschauung wird dies völlig klar, wenn man bedenkt, daß in den genauen Meßwerten der geprüften Stücke der Stichprobe mehr Information steckt als in der qualitativen Einteilung. Aus diesem Grunde erscheint es wohl sinnvoll, eine Kombination von beiden Testverfahren zu versuchen, die diesen Gesichtspunkten Rechnung trägt. Die eben ausgeführten Überlegungen liegen deshalb der Konstruktion der Tests der gemischten Attribut-Variablen-Prüfung zugrunde. Wir werden also die Tests so konstruieren, daß die Attributkontrolle bevorzugt wird und in einigen Fällen die Variablenkontrolle überhaupt nicht erforderlich ist. Auf der anderen Seite wird durch die Einbeziehung der Variablenkontrolle eine Herabsetzung des Stichprobenumfangs bei einer vorgegebenen Operationscharakteristik erreicht.

<u>(3.2) Definition:</u>

1) Ausschuß der Stichprobe

$$\hat{P} = \sum_{i=1}^{n} z_i \qquad \text{mit}$$

$$z_i = \begin{cases} 1 & \text{für } y_i > t_o \\ 0 & \text{für } y_i \leq t_o \end{cases} \qquad i = 1,\ldots,n$$

2) $z_o := \frac{t_o - \mu}{\sigma_o}$, $z_1 := z + \frac{\mu_o - \mu}{\sigma_o}$

3) Prüfgröße $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$ mit $X_i = \frac{Y_i - \mu_o}{\sigma_o}$

4) $X_i' := X_i + \frac{\mu_o - \mu}{\sigma_o} = \frac{Y_i - \mu}{\sigma_o}$

5) $H_o: \mu \leq \mu_o$ $\quad H_1: \mu > \mu_o$

Da wir beide Teststatistiken $\bar{X}$ und $\hat{P}$ verwenden, ist der Stichprobenraum S das kartesische Produkt von $\mathbb{R}$ und der Menge aller möglichen Ergebnisse von $\hat{P}$, nämlich $\{0,1,\ldots,n\}$. Der Entscheidungsraum D enthält die beiden Elemente

d_o = Annahme der Partie

d_1 = Ablehnung der Partie

Damit definieren wir unsere Entscheidungsfunktion φ.

<u>(3.3) Definition:</u>

Test $\varphi: S \rightarrow D$

$$\text{mit } \varphi(\hat{p},\bar{x}) = \begin{cases} d_1 & \text{für } (\hat{p},\bar{x}) \in \{c+1,\dots,n\} \times \mathbb{R} \\ & \phantom{\text{für }} (\hat{p},\bar{x}) \in \{0,1,\dots,c\} \times (z,\infty) \\ d_o & \text{für } (\hat{p},\bar{x}) \in \{0,1,\dots,c\} \times (-\infty,z] \end{cases}$$

Dabei sind die Grenze z und die Annahmezahl c so einzurichten, daß gilt:

(3.4)

$$p_\mu(\{\varphi(\hat{p},\bar{x}) = d_1\}) \leq \alpha \qquad \text{für } \mu \in H_o$$

α ist das Signifikanzniveau des Tests.

(3.5) Bemerkung

Für die praktische Durchführung ist es zweckmäßig, die Attributkontrolle zuerst durchzuführen, denn der Test ist gemäß unseren Vorüberlegungen so angelegt, daß bei einer Realisation $\hat{p} > c$ die Variablenkontrolle keinen Einfluß auf die Entscheidung hat und sich in einem solchen Fall erübrigt. Da in der Stichprobe bereits "zuviele" schlechte Stücke gefunden wurden, wird die Partie abgelehnt. Falls jedoch die Zahl der schlechten Stücke in der Stichprobe die Annahmezahl c nicht überschreitet, ist die Variablenprüfung erforderlich.

Selbstverständlich ist es möglich, den Test φ dahingehend abzuändern, bei einer besonders kleinen Ausschußquote die Partie sofort zu akzeptieren und erst bei $\hat{p} > c$ die Variablenkontrolle durchzuführen. Außerdem sind auch weitere Varianten möglich, was etwa folgendermaßen aussehen könnte:

$\hat{p} \leq c_1$: Annahme

$\hat{p} > c_2$: Ablehnung $\qquad (c_1 < c_2)$

$c_1 < \hat{P} \leq c_2$: Variablenkontrolle:

$\bar{X} \leq z$: Annahme

$\bar{X} > z$: Ablehnung

Dabei ist nur darauf zu achten, daß die Größen c_1, c_2 und z für ein vorgegebenes α die Beziehung (3.4) erfüllen.

Für welche dieser Varianten man sich entscheidet, hängt natürlich ab vom jeweiligen Anwendungsfall.

Die Brauchbarkeit dieses Tests untersuchen wir jetzt wieder mit Hilfe seiner Operationscharakteristik. Untersucht man die Ereignisse, welche zur Entscheidung d_o führen, so ergibt sich:

$$(3.6) \qquad L(\mu) = \sum_{i=0}^{c} p_\mu(\{\hat{P} = i\} \cap \{\bar{X} \leq z\})$$

Durch die Einführung der Zufallsvariablen X_i' sowie der Grenze z_1 aus Definition (3.2) erhält man:

$$(3.7) \qquad L(\mu) = \sum_{i=0}^{c} p_\mu(\{\hat{P} = i\} \cap \{\bar{X}' \leq z_1\})$$

Zur Rechtfertigung dieses Schritts noch eine Bemerkung:

Die Zufallsvariablen Y_i sind verteilt nach $N(\mu,\sigma_o^2)$, wobei μ nicht bekannt ist. Als Prüfgröße verwenden wir nach Maßgabe der Nullhypothese H_o: $\mu \leq \mu_o$ die Zufallsvariable $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{Y_i - \mu_o}{\sigma_o}$. $\bar{X}$ ist für $\mu = \mu_o$ verteilt nach $N(0,\frac{1}{n})$.

Die $X_i = \frac{Y_i - \mu_o}{\sigma_o}$ sind standard-normalverteilt für $\mu = \mu_o$, jedoch nicht für $\mu \neq \mu_o$. Deshalb machen wir die Transformation

$$X_i' := X_i + \frac{\mu_o - \mu}{\sigma_o}$$

Die X_i' sind standardnormalverteilt und wir betrachten ein Stück X_i' als Ausschuß, wenn sein Merkmalswert die Schranke $z_o = \frac{t_o-\mu}{\sigma_o}$ überschreitet. Außerdem sind die Ereignisse $\{\bar{X} \leq z\}$ und $\{\bar{X}' \leq z_1\}$ identisch. Das gleiche gilt für $\{\bar{X} > z\}$ und $\{\bar{X}' > z_1\}$.

Die Schwierigkeit besteht nun darin, die Wahrscheinlichkeiten auf der rechten Seite von (3.7) zu ermitteln, wobei wir nach den eben gemachten Bemerkungen standardnormalverteilte Zufallsvariable voraussetzen dürfen. Jedoch sind die Ereignisse $\{P = i\}$ und $\{\bar{X}' \leq z_1\}$ nicht unabhängig, wie man sich leicht überlegt. Falls etwa $\{\hat{P} = n\}$ eintritt, gilt für $z_1 < z_o$: $p_\mu(\bar{X}' \leq z_1) = 0$. Im weiteren Verlauf des Kapitels 3.1 wollen wir diese Wahrscheinlichkeiten herleiten und kommen nach der recht umfangreichen Herleitung wieder auf Beziehung (3.7) zurück und können dann die Funktionsgleichung der Operationscharakteristik exakt angeben.

Die Wahrscheinlichkeit $p_\mu(\{\hat{P} = i\} \cap \{\bar{X}' \leq z_1\})$

1. Die Wahrscheinlichkeit $p_\mu(\{\hat{P} = 0\} \cap \{\bar{X}' \leq z_1\})$

Hier betrachten wir die Situation, daß in der Stichprobe kein Ausschuß enthalten ist, d.h. kein geprüftes Stück überschreitet die Toleranzgrenze t_o, wobei die Stichprobe als Realisation von n unabhängigen nach $N(\mu,\sigma_o^2)$ verteilten Zufallsvariablen aufgefaßt wird. Mit den vorangegangenen Überlegungen können wir das Problem zurückführen auf den Fall, daß n unabhängige standardnormalverteilte Zufallsvariable vorliegen, die alle eine Toleranzgrenze $z_o = \frac{t_o-\mu}{\sigma_o}$ nicht überschreiten. Wir bezeichnen diese Zufallsvariablen im Rahmen dieser Herleitung wieder mit $X_i, (i = 1,\ldots,n)$.

Da die Ereignisse $\{\hat{P} = 0\}$ und $\{\bar{X} \leq z_1\}$ abhängig sind und wir auch die bedingten Wahrscheinlichkeiten nicht angeben können, benötigen wir zwei Zufallsvariable, deren Verteilung wir einerseits kennen und mit deren Hilfe wir andererseits die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse $\{\hat{P} = 0\}$ bzw. $\{\bar{X} \leq z_1\}$ berechnen können. Als eine der beiden Zufallsvariablen wählen wir $\bar{X}$. $\bar{X}$ ist verteilt nach $N(0;\frac{1}{n})$. Für die andere Zufallsvariable, welche das Ereignis $\{\hat{P} = 0\}$ kennzeichnet, betrachten wir die geordneten Variablen $X_{(1)},\ldots,X_{(n)}$ (vgl. hierzu Ausführungen in 2.1.1.b) und die Bedingung für das Ereignis $\{\hat{P} = 0\}$. Es muß gelten:

$$X_{(n)} \leq z_0$$

$$\Leftrightarrow \quad W := X_{(n)} - \bar{X} \leq z_0 - \bar{X}$$

$$\Leftrightarrow \quad W + \bar{X} \leq z_0$$

Aus dieser Bedingung folgt, daß wir zur Beschreibung des Ereignisses $\{\hat{P} = 0\}$ die beiden Zufallsvariablen $W = X_{(n)} - \bar{X}$ und $\bar{X}$ verwenden können. Die Verteilung der Zufallsvariablen $\bar{X}$ ist klar. Wesentlich mehr Aufwand erfordert die Verteilung der Zufallsvariablen W. Bevor wir diese Verteilung herleiten, wollen wir eine wichtige Eigenschaft der beiden zufälligen Größen W und $\bar{X}$ zeigen, nämlich ihre Unabhängigkeit.

<u>(3.8) Satz</u>

$X_1,\ldots,X_n$ seien unabhängige, standardnormalverteilte Zufallsvariable und $X_{(1)},\ldots,X_{(n)}$ seien die entsprechenden geordneten Variablen. Dann gilt:

$\bar{X}$ und $X_{(n)} - \bar{X}$ sind unabhängig.

Beweis:

Nach Daly (13) gilt:

Voraussetzungen wie im Satz und sei

$$Y: = g(x_1,\dots,x_n)$$

eine Borel-meßbare Funktion mit der Eigenschaft

$$g(x_1 + a,\dots,x_n + a) = g(x_1,\dots,x_n) \qquad , a \in \mathbb{R}$$

Dann sind $\bar{X}$ und Y unabhängig.

Diesen Sachverhalt können wir direkt auf unser Problem anwenden:

$W = X_{(n)} - \bar{X}$ ist als Funktion von $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}$ Borel-meßbar und es gilt:

$$X_{(n)} - \bar{X} = \max_{1\leq i\leq n} (X_i-\bar{X})$$

mit der Eigenschaft:

$$\max_i (X_i + a - \frac{1}{n} \sum(X_i + a)) = \max_i (X_i + a - \frac{1}{n} (\sum X_i + na)) =$$

$$= \max_i (X_i - \bar{X}), \text{ d. h.}$$

$\bar{X}$ und $X_{(n)} - \bar{X}$ sind unabhängig.

qed.

Im nächsten Schritt wollen wir die Wahrscheinlichkeitsverteilung von W ermitteln. Sie spielt auch eine Rolle bei sog. "Ausreißer"-Tests (vgl. Nair (34)). Man geht dabei aus von n unabhängigen standardnormalverteilten Zufallsvariablen. Die geordneten Variablen $X_{(1)},\dots,X_{(n)}$ haben dann die gemeinsame Dichte

$$f(x_{(1)},\dots,x_{(n)}) = \frac{n!}{(\sqrt{2\pi})^n}\, e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n} x_{(i)}^2} \qquad x_{(1)} \leq \dots \leq x_{(n)}$$

Der Zufallsvektor $\underline{X}_{(.)} = (X_{(1)},\dots,X_{(n)})$ wird nun einer Transformation unterworfen; die Transformationsmatrix ist das Produkt aus einer $(n\times n)$-Diagonalmatrix B und einer orthogonalen $(n\times n)$-Matrix A. Wir bezeichnen den Bildvektor mit $\underline{Z}$ und setzen

$$\underline{Z} = BA\underline{X}_{(\cdot)}$$

Dabei ist die orthogonale Matrix

$$\begin{array}{cc}
A = \begin{pmatrix}
-\frac{1}{\sqrt{1\cdot 2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
-\frac{1}{\sqrt{2\cdot 3}} & -\frac{1}{\sqrt{2\cdot 3}} & \ddots & & & \vdots \\
\vdots & & \ddots & \frac{i-1}{\sqrt{(i-1)i}} & & \vdots \\
-\frac{1}{\sqrt{i(i+1)}} & -\frac{1}{\sqrt{i(i+1)}} & -\frac{1}{\sqrt{i(i+1)}} & \frac{i}{\sqrt{i(i+1)}} & & \vdots \\
\vdots & & \ddots & & \ddots & 0 \\
-\frac{1}{\sqrt{(n-1)n}} & & & & -\frac{1}{\sqrt{(n-1)n}} & \frac{n-1}{\sqrt{(n-1)n}} \\
\frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{n}} & & \cdots & & \frac{1}{\sqrt{n}}
\end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow \text{i-te} \\ \text{Zeile} \\ \\ \\ \end{array} \\
\begin{array}{c} \uparrow \\ \text{i-te Spalte} \end{array} &
\end{array}$$

und die Diagonalmatrix

$$B = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & & & & & \\ & \sqrt{2\cdot 3} & & & 0 & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \sqrt{i(i+1)} & & \\ & & & & \ddots & \\ & 0 & & & & \sqrt{(n-1)n} \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Um die Dichte des Zufallsvektors $\underline{Z}$ zu erhalten, berechnen wir zunächst das Skalarprodukt $\sum_{i=1}^{n} X_{(i)}^2$.

$$\underline{Z} = B\,A\,\underline{X}_{(\cdot)}$$

$$\Rightarrow \underline{X}_{(\cdot)} = A^{-1}\,B^{-1}\,\underline{Z}$$

Bezeichnen wir die Transponierte einer Matrix M mit M^T und entsprechend das Transponierte eines Spaltenvektors $\underline{X}$ mit $\underline{X}^T$, so gilt:

$$X_{(\cdot)}^T\,\underline{X}_{(\cdot)} = (A^{-1}B^{-1}\underline{Z})^T(A^{-1}B^{-1}\underline{Z})$$

$$= \underline{Z}^T B^{-1T}\underbrace{A^{-1T}A^{-1}}_{=E_n}B^{-1}\underline{Z}$$

$$= \underline{Z}^T\,(B^{-1})^2\,\underline{Z}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} X_{(i)}^2 = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{Z_i^2}{i(i+1)} + Z_n^2$$

Da A orthogonal ist, gilt:

$$|\det A| = 1$$

Somit erhält man

$$|\det (BA)| = |\det B| = (n-1)!\ \sqrt{n}$$

und für die gemeinsame Dichte von $(Z_1,\ldots,Z_n)$:

$$f(z_1,\ldots,z_n) = |\det(BA)|^{-1} \frac{n!}{(\sqrt{2\pi})^n} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{z_i^2}{i(i+1)} + z_n^2\right)} =$$

$$= \frac{\sqrt{n}}{(\sqrt{2\pi})^n}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{z_i^2}{i(i+1)} + z_n^2\right)}$$

Um den genauen Definitionsbereich der Dichte von $\underline{Z}$ zu finden, betrachten wir nochmals unsere Transformation und sehen:

(3.9) (1) $Z_i = i \cdot X_{(i+1)} - \sum_{k=1}^{i} X_{(k)}$ $\qquad i=1,\ldots,n-2$

(2) $Z_{n-1} = (n-1) \cdot X_{(n)} - \sum_{k=1}^{n-1} X_{(k)} = n(X_{(n)} - \bar{X})$

(3) $Z_n = \sqrt{n}\ \bar{X}$

Aus (1) und (2) folgt:

a) $Z_{i+1} = (i+1)X_{(i+2)} - \sum_{k=1}^{i+1} X_{(k)} - [i \cdot X_{(i+1)} - \sum_{k=1}^{i} X_{(n)}]$

$$= (i+1)X_{(i+2)} - X_{(i+1)} - i \cdot X_{(i+1)}$$

$$= (i+1)(X_{(i+2)} - X_{(i+1)}) \geq 0 \qquad \text{für } i=1,\ldots,n-2$$

b) $Z_1 = X_{(2)} - X_{(1)} \geq 0$, da $X_{(1)} \leq X_{(2)}$

Mit (3) aus (3.9) ergibt sich für den Vektor $(Z_1,\ldots,Z_n)$ die gemeinsame Dichte

$$f(z_1,\ldots,z_n) = \frac{\sqrt{n}}{(\sqrt{2\pi})^n}\, e^{-\frac{1}{2} z_n^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1} \frac{z_i^2}{i(i+1)}}$$

$$\text{für } 0 \leq z_1 \leq \ldots \leq z_{n-1},\ -\infty < z_n < \infty$$

z_n läßt sich herausintegrieren und man erhält für die Dichte des Zufallsvektors $(Z_1,\ldots,Z_{n-1})$

$$f(z_1,\ldots,z_{n-1}) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{n}}{(\sqrt{2\pi})^{n-1}}\, e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1} \frac{z_i^2}{i(1+1)}} & \text{für } 0 \leq z_1 \leq \ldots \leq z_{n-1} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Wir benötigen jedoch die Dichte der Zufallsvariablen $X_{(n)} - \bar{X} = W$. Vergleicht man mit (3.9), so sieht man

$$W = \frac{Z_{n-1}}{n}$$

Zur Ermittlung der Dichte von Z_{n-1} müssen wir die Randdichte berechnen und $f(z_1,\ldots,z_{n-1})$ über $z_1,\ldots,z_{n-2}$ integrieren im Bereich $0 \leq z_1 \leq z_2 \leq \ldots \leq z_{n-2} \leq z_{n-1}$. Hierzu führen wir die von Godwin definierten G-Funktionen ein, welche rekursiv definiert sind:

$$G_1(x) = 1$$

$$G_2(x) = \int_0^x e^{-\frac{t^2}{4}} \cdot G_1(t)dt$$

$$\vdots$$

$$G_{i+1}(x) = \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2i(i+1)}} \cdot G_i(t)dt$$

Jetzt können wir die Randverteilung von Z_{n-1} berechnen und erhalten:

$$f(z_{n-1}) = \begin{cases} \frac{\sqrt{n}}{(\sqrt{2\pi})^{n-1}} e^{-\frac{z_{n-1}^2}{2(n-1)\cdot n}} \int_0^{z_{n-1}} e^{-\frac{z_{n-2}}{2(n-2)(n-1)}} \cdots \int_0^{z_2} e^{-\frac{z_1^2}{4}} \\ \qquad dz_1 \ldots dz_{n-2} \quad \text{für } 0 \leq z_{n-1} \\ 0 \qquad \text{sonst} \end{cases}$$

$$f(z_{n-1}) = \begin{cases} \frac{\sqrt{n}}{(\sqrt{2\pi})^{n-1}} e^{-\frac{z_{n-1}^2}{2n(n-1)}} \cdot G_{n-1}(z_{n-1}) & \text{für } 0 \leq z_{n-1} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Mit der Variablentransformation

$$W = X_{(n)} - \bar{X} = \frac{1}{n} Z_{n-1}$$

ergibt sich als Dichte der Zufallsvariablen W:

$$(3.10)\quad f_W(x) = \begin{cases} \dfrac{n\sqrt{n}}{(\sqrt{2\pi})^{n-1}}\, e^{-\frac{nx^2}{2(n-1)}}\, G_{n-1}(nx) & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(3.11) Bemerkung

Die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen W läßt sich leicht durch Integration von (3.10) berechnen. Es gilt für $x \geq 0$

$$F_W(x) = \int_0^x \frac{n\sqrt{n}}{(\sqrt{2\pi})^{n-1}}\, e^{-\frac{(nw)^2}{2n(n-1)}} \cdot G_{n-1}(nw)\,dw =$$

$$= \int_0^{nx} \frac{\sqrt{n}}{(\sqrt{2\pi})^{n-1}}\, e^{-\frac{t^2}{2n(n-1)}} \cdot G_{n-1}(t)\,dt = \frac{\sqrt{n}}{(\sqrt{2\pi})^{n-1}} \cdot G_n(nx)$$

Damit erhalten wir:

$$F_W(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ \dfrac{\sqrt{n}}{(\sqrt{2\pi})^{n-1}}\, G_n(nx) & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$

Nachdem wir nun Dichte- und Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen $W = X_{(n)} - \bar{X}$ hergeleitet haben, betrachten wir jetzt im letzten Schritt wieder das Ereignis $\{\bar{X} \leq z_1\} \cap \{\hat{P} = 0\}$. Es gilt:

$$p(\{\bar{X} \leq z_1\} \cap \{\hat{P} = 0\}) = p(\{\bar{X} \leq z_1\} \cap \{W + \bar{X} \leq z_o\})$$

Man erhält

$$p(\{\bar{X} \leq z_1\} \cap \{\hat{P} = 0\}) = \int_{-\infty}^{z_1} p(\{W \leq z_o - x|_{\bar{X}=x}\})dF_{\bar{X}}(x)$$

und wegen der Unabhängigkeit von W und $\bar{X}$ (Satz (3.8))

$$p(\{\bar{X} \leq z_1\} \cap \{\hat{P} = 0\}) = \int_{-\infty}^{z_1} p(W \leq z_o - x)dF_{\bar{X}}(x)$$

Beachten wir noch, daß der Integrand verschwindet für $x > z_o$, so ergibt sich:

$$(3.12)\quad p(\{\bar{X} \leq z_1\} \cap \{\hat{P} = 0\}) = \int_{-\infty}^{\min(z_1,z_o)} \frac{n}{(\sqrt{2\pi})^n} e^{-\frac{nx^2}{2}} \cdot G_n(n(z_o-x))dx$$

<u>(3.13) Bemerkung</u>

Die Herleitung obiger Wahrscheinlichkeit, daß der Mittelwert $\bar{X}$ in ein bestimmtes Intervall fällt, während gleichzeitig kein Merkmalswert größer als die Schranke z_o ist, erfaßt auch den Fall i=n. $\{\hat{P} = n\}$ bedeutet, daß alle Stücke der Stichprobe Ausschuß sind, d.h.

$$X_{(1)} > z_o .$$

Zunächst kann man völlig analog zu Satz (3.8) zeigen, daß $\bar{X}$ und $\bar{X}-X_{(1)}$ unabhängig sind und außerdem haben die Zufallsvariablen $X_{(n)} - \bar{X}$ und $\bar{X} - X_{(1)}$ die gleiche Verteilung, falls die X_i unabhängig und standardnormalverteilt sind (vgl. Nair (34), Grubbs (22)). Daraus folgt:

$$p(\{\bar{X} \leq z_1\} \cap \{\hat{P} = n\}) = \int_{-\infty}^{z_1} F_W(x-z_o)\,dF_{\bar{X}}(x)$$

$F_W(x-z_o)$ wird gleich Null für $x < z_o$ und man erhält für $z_o \leq z_1$:

$$(3.14) \quad p(\{\bar{X} \leq z_1\} \cap \{\hat{P} = n\} = \int_{z_o}^{z_1} \frac{n}{(\sqrt{2\pi})^n}\, e^{-\frac{nx^2}{2}}\, G_n(n(x-z_o))\,dx$$

Für $z_1 < z_o$ sind die beiden Ereignisse $\{\bar{X} \leq z_1\}$ und $\{\hat{P} = n\}$ unvereinbar, die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist dann gleich Null.

2. Die Wahrscheinlichkeit $p_\mu(\{\bar{X}' \leq z_1\} \cap \{\hat{P} = i\}), (0 < i < n)$

Sei i eine fest vorgegebene Zahl aus der Menge $\{1,\ldots,n-1\}$. Wir betrachten jetzt die Situation, daß n-i Merkmalswerte unterhalb der Schranke z_o und i Merkmalswerte oberhalb von z_o liegen, wobei wir n unabhängige standardnormalverteilte Zufallsvariable, deren Mittelwert wir für den Verlauf dieser Herleitung wieder mit $\bar{X}$ bezeichnen wollen, voraussetzen. Außerdem definieren wir:

$$\hat{P} = \sum_{i=1}^{n} Z_i$$

$$\text{mit } Z_i = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x_i > z_o \\ 0 & \text{für} \quad x_i \leq z_o \end{cases}$$

Um bei der Berechnung der gesuchten Wahrscheinlichkeit die vorherigen Ergebnisse anwenden zu können, machen wir zunächst einige Überlegungen über das Zustandekommen des Ereignisses $\{\bar{X} \leq z_1\} \cap \{\hat{P} = i\}$.

Um genau i Ausschußstücke in der Stichprobe zu erhalten, muß folgendes eintreten: Genau i der n unabhängigen Stichprobenvariablen $X_1,\ldots,X_n$ müssen größer als die Schranke z_o ausfallen, etwa $X_{k_1},\ldots,X_{k_i}$. Hierzu gibt es $\binom{n}{i}$ Möglichkeiten. Für eine beliebige Kombination $X_{k'_1},\ldots,X_{k'_{n-i}}$ und $X_{k_1},\ldots,X_{k_i}$ bezeichnen wir die arithmetischen Mittel bzw. die Anzahl der Ausschußstücke mit $\bar{X}_1^{(k)}$, $\bar{X}_2^{(k)}$ bzw. $\hat{P}_1^{(k)}$, $\hat{P}_2^{(k)}$. Zunächst gilt für alle $\binom{n}{i}$ Möglichkeiten

$$\bar{X} = \frac{n-i}{n}\,\bar{X}_1^{(k)} + \frac{i}{n}\,\bar{X}_2^{(k)}$$

und außerdem gilt:

$$\{\bar{X} \leq z_1\}\cap\{\hat{P}=i\} = \bigcup_k\{(\bar{X}_1^{(k)},\ \bar{X}_2^{(k)}) \in A\}\cap\{\hat{P}_1^{(k)} = 0, \hat{P}_2^{(k)} = i\}$$

mit $\binom{n}{i}$ disjunkten Ereignissen $\{(\bar{X}_1^{(k)},\bar{X}_2^{(k)}) \in A\}\cap\{\hat{P}_1^{(k)} = 0,$ $\hat{P}_2^{(k)} = i\}$ und einem noch zu bestimmenden geeigneten $A \subset \mathbb{R}^2$.

Wir haben also die Gesamtstichprobe aufgeteilt in $\binom{n}{i}$ Paare von unabhängigen Unterstichproben, wobei die erste keinen Ausschuß und die zweite nur Ausschuß enthält.

In einem weiteren Schritt berechnen wir nun die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse $\{(\bar{X}_1^{(k)},\bar{X}_2^{(k)}) \in A\}\cap\{\hat{P}_1^{(k)} = 0;$ $\hat{P}_2^{(k)} = i\}$. Zunächst gilt:

$$p(\{\bar{X}_1^{(k)},\bar{X}_2^{(k)}) \in A\}\cap\{\hat{P}_1^{(k)} = 0,\ \hat{P}_2^{(k)} = i\}) = \int_A p\left(\{\hat{P}_1^{(k)} = 0,\right.$$

$$\left.\hat{P}_2^{(k)} = i\}\,\middle|_{\bar{X}_1^{(k)} = x_1,\bar{X}_2^{(k)} = x_2}\right)\, dF_{\bar{X}_1^{(k)}\bar{X}_2^{(k)}}(x_1,x_2)$$

$$= \int_A p\left(X_{(n-i)}^{(k)} \leq z_o,\ X_{(1)}^{(k)} > z_o \middle| \bar{X}_1^{(k)}=x_1, \bar{X}_2^{(k)}=x_2\right) dF_{\bar{X}_1^{(k)}\bar{X}_2^{(k)}}(x_1,x_2)$$

wobei $X_{(n-i)}^{(k)}$ aus $X_{k_1'},\dots,X_{k_{n-i}'}$ und $X_{(1)}^{(k)}$ aus $X_{k_1},\dots,X_{k_i}$ zu bilden ist.

Mit $W_1^{(k)} = X_{(n-i)}^{(k)} - \bar{X}_1^{(k)}$ aus $X_{k_1'},\dots,X_{k_{n-i}'}$

$W_2^{(k)} := \bar{X}_2^{(k)} - X_{(1)}^{(k)}$ aus $X_{k_1},\dots,X_{k_i}$

ergibt sich

$$p(\{(\bar{X}_1^{(k)},X_2^{(k)})\in A\}\cap\{\hat{P}_1^{(k)}=0,\hat{P}_2^{(k)}=i\}) = \int_A p\left(W_1^{(k)} \leq z_o - x_1,\ W_2^{(k)} < x_2 - z_o \middle| \bar{X}_1^{(k)}= x_1, \bar{X}^{(k)}= x_2\right) dF_{\bar{X}_1^{(k)}\bar{X}_2^{(k)}}(x_1,x_2)$$

Nun gilt aber:

1. $\bar{X}_1^{(k)}$ ist unabhängig von $W_1^{(k)}$, $\bar{X}_2^{(k)}$ ist unabhängig von $W_2^{(k)}$ (vgl. Satz (3.8))

2. $\bar{X}_1^{(k)}$ und $\bar{X}_2^{(k)}$ sowie $W_1^{(k)}$ und $W_2^{(k)}$ sind ebenfalls unabhängig, da die entsprechenden Größen aus zwei verschiedenen unabhängigen Gruppen von Zufallsvariablen gebildet werden.

Somit sind alle betrachteten Zufallsvariablen voneinander unabhängig. Daraus folgt:

$$p(\{(\bar{X}_1^{(k)},\bar{X}_2^{(k)})\in A\}\cap\{\hat{P}_1^{(k)}=0,\hat{P}_2^{(k)}=i\}) =$$

$$= \int_A F_{W_1^{(k)}}(z_o - x_1) \cdot F_{W_2^{(k)}}(x_2 - z_o)\, dF_{\bar{X}_1^{(k)}\bar{X}_2^{(k)}}(x_1, x_2)$$

Die Verteilungsfunktionen von $W_1^{(k)}$ und $W_2^{(k)}$ hängen nur ab von n-i bzw. i (siehe (3.10)) und damit nicht von k. Ebenso hängt $F_{\bar{X}_1^{(k)}\bar{X}_2^{(k)}}(x_1,x_2)$ nur von n-i bzw. i ab. Es gilt wegen der Unabhängigkeit von $\bar{X}_1^{(k)}$ und $\bar{X}_2^{(k)}$ (siehe oben 2.).

$$F_{\bar{X}_1^{(k)}\bar{X}_2^{(k)}}(x_1,x_2) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \frac{\sqrt{n-i}\cdot\sqrt{i}}{2\pi} \cdot e^{-\frac{(n-i)t_1^2}{2} - \frac{it_2^2}{2}}\, dt_2 dt_1$$

Berücksichtigen wir außerdem noch, daß ganz allgemein bei m unabhängigen standardnormalverteilten Zufallsvariablen die beiden Zufallsvariablen $X_{(m)} - \bar{X}$ und $\bar{X} - X_{(1)}$ die gleiche Verteilung besitzen, so erhalten wir schließlich für die gesuchte Wahrscheinlichkeit

(3.14)

$$p(\{\bar{X} \leq z_1\} \cap \{\hat{P} = i\}) = \binom{n}{i} \int_A \frac{i(n-i)}{(\sqrt{2\pi})^n} G_{n-i}\,((n-i)(z_o - x_1)) \cdot$$

$$\cdot\ G_i(i(x_2 - z_o))\ e^{-\frac{(n-i)x_1^2}{2} - \frac{ix_2^2}{2}}\, dx_1 dx_2$$

mit einem geeigneten $A \subset R^2$. Diesen Integrationsbereich wollen wir jetzt im letzten Schritt näher bestimmen:

Es gilt:

(1) $\bar{X} \leq z_1$

(2) $\bar{X} = \frac{n-i}{n}\, \bar{X}_1^{(k)} + \frac{i}{n}\, \bar{X}_2^{(k)}$ für alle $k=1,\ldots,\binom{n}{i}$

Daraus ergibt sich für das Integrationsgebiet A:

$$A = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : \frac{n-i}{n} x_1 + \frac{i}{n} x_2 \leq z_1\}$$

Beachten wir noch, daß der Integrand auf der rechten Seite von (3.14) verschwindet für $x_1 > z_o$ und $x_2 < z_o$, so folgt:

(3.15)

$$A = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \leq \min(z_o, \frac{nz_1 - ix_2}{n-i}),\ x_2 \geq z_o\}$$

Zur Übersicht fassen wir die Ergebnisse der gesamten Herleitung nochmals zusammen.

<u>(3.16) Satz:</u>

Seien $X_1,\ldots,X_n$ standardnormalverteilte, unabhängige Zufallsvariable und

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$\hat{P} = \sum_{i=1}^{n} Z_i$$

$$\text{mit } Z_i = \begin{cases} 1 & \text{für } x_i > z_o \\ 0 & \text{für } x_i \leq z_o \end{cases}$$

Dann gilt:

(a) $z_1 \leq z_o$

$$p(\{\bar{X} \leq z_1\} \cap \{\hat{P} = 0\}) = \int_{-\infty}^{z_1} \frac{n}{(\sqrt{2\pi})^n} e^{-\frac{nx^2}{2}} G_n(n(z_o - x))dx$$

$$p(\{\bar{X} \leq z_1\} \cap \{\hat{P} = n\}) = 0$$

$$p(\{\bar{X} \leq z_1\} \cap \{\hat{P} = i\}) = \int_A \frac{i(n-i)}{(\sqrt{2\pi})^n} e^{-\frac{1}{2}((n-i)x_1^2 + ix_2^2)} \cdot$$

$$\cdot G_{n-i}((n-i)(z_o - x_1)) \; G_i(i(x_2 - z_o))\,dx_1 dx_2$$

mit A aus (3.15)

$i = 1,2,\ldots,n-1$

b) $z_o < z_1$

$$p(\{\bar{X} \leq z_1\} \cap \{\hat{P} = 0\}) = \int_{-\infty}^{z_o} \frac{n}{(\sqrt{2\pi})^n} e^{-\frac{nx^2}{2}} \; G_n(n(z_o - x))\,dx$$

$$p(\{\bar{X} \leq z_1\} \cap \{P = n\}) = \int_{z_o}^{z_1} \frac{n}{(\sqrt{2\pi})^n} e^{-\frac{nx^2}{2}} \; G_n(n(x - z_o))\,dx$$

$$p(\{\bar{X} \leq z_1\} \cap \{P = i\}) = \int_A \frac{i(n-i)}{(\sqrt{2\pi})^n} e^{-\frac{1}{2}((n-i)x_1^2 + ix_2^2)}$$

$$G_{n-i}((n-i)(z_o - x_1)) \cdot G_i(i(x_2 - z_o))\,dx_1 dx_2$$

mit A aus (3.15)

$i = 1,2,\ldots,n-1$

Nach dieser doch recht umfangreichen Herleitung kommen wir jetzt wieder auf unser ursprüngliches Problem zurück und betrachten den Test φ von (3.3). Mit Satz (3.16) sind wir nun in der Lage, die Operationscharakteristik des Tests φ exakt anzugeben. Nach (3.7) gilt:

$$L(\mu) = \sum_{i=0}^{c} p_\mu(\{\hat{P} = i\} \cap \{\bar{X}' \leq z_1\})$$

Die einzelnen Summanden auf der rechten Seite dieser Funktionsgleichung lassen sich nun mit Satz (3.16) berechnen, wenn man dort $\bar{X}'$ statt $\bar{X}$ setzt. Die Abhängigkeit von μ kommt dadurch zustande, daß die Grenzen z_o und z_1 Funktionen vom wahren Parameter μ sind ($z_o = \frac{t_o - \mu}{\sigma_o}$ und $z_1 = z + \frac{\mu_o - \mu}{\sigma_o}$).

3.2. Zweistufige Tests bei einseitiger Toleranzgrenze

Auch bei der gemischten Attribut-Variablen-Prüfung ist es möglich, das Verfahren von 3.1 zu erweitern und zweistufige Tests anzuwenden. Hierfür gibt es allerdings viele Möglichkeiten, je nachdem, ob die Attribut- oder die Variablenkontrolle im Vordergrund der Interessen steht. Ein solches zweistufiges Verfahren wurde von Bowker and Goode (8) vorgeschlagen, wobei jedoch die Operationscharakteristik nur näherungsweise ermittelt werden konnte. Wir wollen diesen Test in der mathematischen Theorie entwickeln und können dann auch die Operationscharakteristik exakt angeben. Außerdem werden wir noch ein weiteres Testverfahren vorstellen, welches nach unserer Auffassung für praktische Anwendungen besser geeignet ist.

Wir übernehmen sämtliche Voraussetzungen aus Kapitel 3.1 und gehen aus, wie stets bei zweistufigen Verfahren, von einer Stichprobe vom Umfang n_1 und falls wir in der ersten Phase zu keiner Entscheidung gelangen, ziehen wir noch eine weitere Stichprobe vom Umfang n_2. Die Anzahl der Ausschußstücke der ersten Stichprobe bezeichnen wir mit $\hat{P}_1$, die der zweiten Stichprobe mit $\hat{P}_2$. Der Gesamtausschuß $\hat{P}$ setzt sich dann zusammen aus der Summe von $\hat{P}_1$ und $\hat{P}_2$. Die Prüfgrößen der Variablenkontrolle seien $\bar{X}_{n_1}$ bzw. $\bar{X}_{n_2}$, wobei gelte:

$$X_i = \frac{Y_i - \mu_o}{\sigma_o} \qquad \text{für alle } i$$

und Y_i wie in 3.1 verteilt ist nach $N(\mu;\sigma_o^2)$. Wir testen die Hypothese H_o: $\mu \leq \mu_o$ gegen H_1: $\mu > \mu_o$.

Außerdem sei:

1) Entscheidungsraum $D := \{d_o, d_1, d_2\}$ mit

d_o = Annahme d. Partie

d_1 = Ablehnung d. Partie

d_2 = Ziehung einer 2. Stichprobe vom Umfang n_2

2) Entscheidungsraum $D_2 := \{d_o, d_1\}$

Nach diesen einführenden Definitionen können wir den Test, der von Bowker und Goode beschrieben wird, angeben.

(3.17) Testplan $\varphi^{(1)}$

Die Stichprobenräume der beiden Stufen sind

$$S_1 = \mathbb{R}$$
$$S_2 = \{0,1,2,\dots,n_1+n_2\}$$

und der Test $\varphi^{(1)}$ wird festgelegt durch die beiden Abbildungen $\varphi^{(1)}$ und $\varphi_2^{(1)}$, wobei $\bar{X}_{n_1}$ als Teststatistik für die messende und $\hat{P}$ als Teststatistik für die Gut-Schlecht-Prüfung verwendet wird

$$\varphi_1^{(1)}: S_1 \to D$$

mit

$$\varphi_1^{(1)}(\bar{x}_{n_1}) = \begin{cases} d_o & \text{für } \bar{x}_{n_1} \in (-\infty, z] \\ \\ d_2 & \text{für } \bar{x}_{n_1} \in (z, \infty) \end{cases}$$

$$\varphi_2^{(2)}: S_2 \to D_2$$

$$\text{mit } \varphi_2^{(1)}(\hat{p}) = \begin{cases} d_o & \text{für } \hat{p} \in \{0,1,\ldots,c\} \\ \\ d_1 & \text{für } \hat{p} \in \{c+1,\ldots,n_1+n_2\} \end{cases}$$

z und die Annahmezahl c sind dabei so zu wählen, daß

$$P_\mu(\{\varphi_2 = d_1\}) \leq \alpha \qquad \forall\, \mu \in H_o$$

für ein vorgegebenes Signifikanzniveau $0 < \alpha < 1$ erfüllt ist.

<u>(3.18) Bemerkung</u>

1. Selbstverständlich ist die Grenze z sowie die Annahmezahl c bei Test $\varphi^{(1)}$ in (3.17) eine andere als beim Test φ in (3.3). Jedoch um unnötig viele Bezeichnungen zu vermeiden und aufgrund ihrer gleichen Bedeutung verwenden wir für diese Größen in allen Tests in Kapitel 3 die selben Symbole.

2. Man beachte, daß Test $\varphi^{(1)}$ auf der ersten Stufe in keinem Fall zur Ablehnung der Partie führt. Außerdem spielt für die Entscheidung auf der zweiten Stufe nur der Gesamtausschuß aus beiden Stichproben eine Rolle.

Mit den Ausführungen aus Kap. 3.1 können wir jetzt den

Plan von Bowker and Goode vervollständigen und die Operationscharakteristik exakt angeben.

Sei $z_1 = z + \frac{\mu_o - \mu}{\sigma_o}$ und $X_i' := X_i + \frac{\mu_o - \mu}{\sigma_o}$,

dann ist:

(3.19)

$$L(\mu) = p_\mu(\{\varphi_1^{(1)} = d_o\}) + p_\mu(\{\varphi_2^{(1)} = d_o\}) =$$

$$= p_\mu(\{\bar{X}'_{n_1} \leq z_1\}) + \sum_{i=0}^{c} \sum_{j=0}^{c-i} p_\mu(\{\bar{X}_{n_1} > z_1\} \cap \{\hat{P}_1 = i\}) \cdot p_\mu(\{\hat{P}_2 = j\})$$

Hierbei gilt:

1. $p_\mu(\{\bar{X}_{n_1} \leq z_1\}) = \int_{-\infty}^{z_1} \frac{\sqrt{n_1}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{n_1 x^2}{2}} dx$

2. $p_\mu(\{\bar{X}'_{n_1} > z_1\} \cap \{\hat{P}_1 = i\})$ kann ganz analog zu Satz (3.16) berechnet werden.

3. $p_\mu(\{\hat{P}_2 = j\}) = \binom{n_2}{j} \theta^j (1-\theta)^{n_2-j}$

$$\text{mit } \theta = 1 - \Phi(z_o) \quad , \quad z_o = \frac{t_o - \mu}{\sigma_o}$$

Die Berechnung des durchschnittlichen Stichprobenumfangs ASN benötigt nur die einfach zu berechnende Wahrscheinlichkeit $p_\mu(\{\varphi_1^{(1)} = d_2\})$. Es gilt:

(3.20)

$$ASN = E_\mu(n) = n_1 + p_\mu(\{\bar{X}_{n_1} > z_1\}) \cdot n_2$$

Zu dem Prüfplan von Bowker and Goode wollen wir noch anmerken, daß er in der ersten Stufe des Tests nur die messende Prüfung und im zweiten Schritt ausschließlich die Attributkontrolle berücksichtigt. Dies bedeutet, die Variablenkontrolle ist bei diesem Verfahren unumgänglich, was jedoch weniger wünschenswert ist, da die Variablenprüfung, wie bereits an früherer Stelle erläutert, in der Praxis stets mit erheblich größerem Aufwand verbunden ist als die Attributkontrolle. Aus diesem Grunde stellen wir zum Abschluß noch ein weiteres zweistufiges Verfahren vor, welches auf der ersten Stufe der Attributkontrolle den Vorzug gibt und außerdem so angelegt ist, daß die Variablenkontrolle sich in vielen Fällen erübrigt.

<u>(3.21) Testplan $\varphi^{(2)}$</u>

$S_1 = \{0,1,\ldots,n_1\}$

$S_2 = \mathbb{R} \times \{0,1,\ldots,n_1+n_2\}$

Als Testgröße werden in der ersten Stufe $\hat{P}_1$, in der zweiten Stufe sowohl $\hat{P} = \hat{P}_1 + \hat{P}_2$ als auch $\bar{X}_{n_2}$ verwendet.

H_o: $\mu \leq \mu_o$; H_1: $\mu > \mu_o$

Der Test $\varphi^{(2)}$ wird wieder definiert durch die beiden Abbildungen $\varphi_1^{(2)}$ und $\varphi_2^{(2)}$

$\varphi_1^{(2)}: S \to D_1$

$$\text{mit } \varphi_1^{(2)}(\hat{p}_1) = \begin{cases} d_o & \text{für } \hat{p}_1 \in \{0,1,\ldots,c_1\} \\ d_1 & \text{für } \hat{p}_1 \in \{c_2+1,\ldots,n_1\} \\ d_2 & \text{für } \hat{p}_1 \in \{c_1+1,\ldots,c_2\} \end{cases}$$

$$\varphi_2^{(2)}(\hat{p},\bar{x}_{n_2}) = \begin{cases} d_0 & \text{für } (\hat{p},\bar{x}_{n_2}) \in \{0,1\ldots,c_1'\} \times \mathbb{R} \\ & \phantom{\text{für }} (\hat{p},\bar{x}_{n_2}) \in \{c_1' + 1,\ldots,c_2'\} \times (-\infty,z] \\ d_1 & \text{für } (\hat{p},\bar{x}_{n_2}) \in \{c_2' + 1,\ldots,n_1+n_2\} \times \mathbb{R} \\ & \phantom{\text{für }} (\hat{p},\bar{x}_{n_2}) \in \{c_1' + 1,\ldots,c_2'\} \times (z,\infty) \end{cases}$$

Um ein echtes zweistufiges Verfahren zu erhalten, setzen wir in Bezug auf die Annahmezahlen voraus:

$$c_1 < c_2 \leq c_2' \quad , \; c_1 \leq c_1' < c_2' \qquad c_{1,2}, c_{1,2}' \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Außerdem muß für ein vorgegebenes Signifikanzniveau $0 < \alpha < 1$ die Bedingung

$$P_\mu(\{\varphi_1^{(2)} = d_1\}) + P_\mu(\{\varphi_2^{(2)} = d_1\}) \leq \alpha \qquad \text{für alle } \mu \in H_0$$

erfüllt sein.

(3.22) Bemerkung

Werden in der ersten Stichprobe bereits zu viele schlechte Stücke gefunden, so wird die Partie sofort abgelehnt. Auf der anderen Seite wird sie auch sofort akzeptiert, falls die Stichprobe "gut" ausgefallen ist. Zweckmäßigerweise wird man bei praktischen Anwendungen die Attributkontrolle zeitlich zuerst machen, da auch in der zweiten Stufe die exaktere aber aufwendigere Variablenkontrolle erst erforderlich wird, falls sich ein Gesamtausschuß zwischen c_1' und c_2' realisiert. Da die Stücke der ersten Stichprobe in der Praxis in einigen Fällen nicht mehr verfügbar sind, haben wir nur das arithmetische Mittel der zweiten Stichprobe als Prüfgröße der Variablenkontrolle herangezogen.

Die Operationscharakteristik des Tests erhält man wieder als Wahrscheinlichkeit der Annahme in Abhängigkeit vom wahren Parameter μ. Es ergibt sich:

(3.23)
$$L(\mu) = \sum_{i=0}^{c_1} p_\mu(\{\hat{P}_1 = i\}) + \sum_{i=c_1+1}^{\min(c_1',c_2)} \sum_{j=0}^{c_1'-i} p_\mu(\{\hat{P}_1 = i\}) \cdot$$
$$\cdot p_\mu(\{\hat{P}_2 = j\}) + \sum_{i=c_1+1}^{c_2} \sum_{j=\max(0;c_1'+1-i)}^{c_2'-i} p_\mu(\{\hat{P}_1 = i\}) \cdot$$
$$\cdot\ p_\mu(\{\hat{P}_2 = j\} \cap \{\bar{X}'_{n_2} \leq z_1\})$$

Die Wahrscheinlichkeiten auf der rechten Seite von (3.23) lassen sich wie folgt ermitteln:

1. $p_\mu(\{\hat{P}_1 = i\}) = \binom{n_1}{i}\ \theta^i\ (1-\theta)^{n_1-i}$

   mit $\theta = (1-\Phi(z_o))$, $\quad z_o = \dfrac{t_o-\mu}{\sigma_o}$

   $p_\mu(\{\hat{P}_2 = j\}) = \binom{n_2}{j}\ \theta^j\ (1-\theta)^{n_2-j}$

   mit θ w.o.

2. $p_\mu(\{\hat{P}_2 = j\} \cap \{\bar{X}_{n_2} \leq z_1\}$ läßt sich wieder mit Satz (3.16) berechnen, wenn man dort $\bar{X}$ durch $\bar{X}'_{n_2}$ und n durch n_2 ersetzt.

Der durchschnittliche Stichprobenumfang ist auch bei diesem Test einfach zu ermitteln, es gilt:

$$\text{(3.24)}\quad ASN = E_\mu(n) = n_1 + n_2 \sum_{i=c_1+1}^{c_2} p_\mu(\{\hat{P}_1 = i\})$$

Abschließend zu diesem Kapitel sei noch erwähnt, daß die beiden vorgestellten Testverfahren selbstverständlich nicht die einzigen sind, die für dieses Problem existieren. So kann man beispielsweise die Reihenfolge der Attribut- und Variablenkontrolle in den einzelnen Stufen vertauschen, was jedoch für die Zwecke der Anwendung nicht so günstig erscheint, oder man kann in den einzelnen Phasen unter Verwendung der gleichen Prüfgrößen andere Entscheidungen treffen, so daß etwa die Partie in der ersten Stufe in keinem Fall angenommen wird, etc.

Die Grenze z und die Annahmezahlen unterliegen nur der Nebenbedingung, daß es sich um einen Test zum Niveau α handeln muß. Man kann sie eindeutig festlegen, indem man wieder zusätzliche Forderungen an die Operationscharakteristik oder an den durchschnittlichen Stichprobenumfang stellt und auf diese Weise für den jeweiligen Anwendungsfall gewünschte Eigenschaften erhält.

Weiterhin sei noch bemerkt, daß wir nur den Fall einer oberen Toleranzgrenze betrachtet haben. Es ist jedoch ohne größere Schwierigkeiten möglich, diese Überlegungen auf den Fall von Tests mit einer unteren Schranke zu übertragen, etwa für die Hypothese H_o: $\mu \geq \mu_o$ gegen H_1: $\mu < \mu_o$. Der Aufbau der Verfahren verläuft dabei analog und auch die erforderlichen Wahrscheinlichkeiten lassen sich völlig entsprechend herleiten.

Literaturverzeichnis

(1) Abramowitz, M., Stegun, I.A.: Handbook of Mathematical Tables, New York 1965

(2) Albert, G.E.: "Accurate sequential test on the mean of an exponential distribution". Annals of Mathematical Statistics 27 (1952) S. 460 - 470

(3) Aroian, L.A., Robison, D.E.: "Sequential life tests for the exponential distribution with changing parameters". Technometrics 8 (1966) S. 217 ff

(4) Bahadur, R.R.: "Sufficiency and statistical decision functions". Ann. Math. Statistics 25 (1954), S. 423 - 462

(5) Bauer, H.: Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Maßtheorie, 2.Aufl., Berlin-NewYork 1974

(6) Blackwell, D.: "Conditional expactation and unbiased sequential estimation". Annals of Math. Statistics 18 (1947), S. 105 - 110.

(7) Bland, R.P., Owen, D.B.: "A note on singular normal distributions". Annals of the Institute of Statistical Mathematics 18 (1966) S.113 ff

(8) Bowker, A.H., Goode, H.P.: Sampling Inspection by Variables, New York 1952

(9) Bowker, A.H., Lieberman, G.J.: Handbook of Industrial Statistics, Englewood Cliffs N.J. 1961

(10) Cauchy, A.L. (1853): "Sur les résultats moyens d'observations de même nature, et sur les résultats les plus probables". Comptes Rendues de l'Académie des Sciences 37, S. 198 - 206.

(11) Colton, Th.: "A test procedure with a sample from a normal population when an upper bound to the standard deviation is known". Journal of the American Statistical Association 55 (1960) S.94 ff

(12) Cowden, D.J.: Statistical Methods in Quality Control, Englewood Cliffs, N.J. 1957

(13) Daly, J.F.: "On the use of the range in an analogue of Student's t-test". Annals of Math. Statistics 17 (1946) S.71 ff

(14) Desu, M.M.: "A characterization of the exponential distribution by order statistics". Annals of Mathematical Statistics 40 (1971) S. 837 ff

(15) Dodge, H.F., Romig, H.: Sampling Inspection Tables, New York 1959

(16) Duncan, A.J.: Quality Control and Industrial Statistics, Homewood Ill. 1962

(17) Duncan, A.J.: "Design and operation of a double-limit variables sampling plan". Journal of the American Statistical Association 53 (1958) S. 543 ff

(18) Eisenberger, J.: "Testing the mean and standard deviation of a normal distribution using quantiles". Technometrics 10 (1968) S.781 ff

(19) Enrick, N.L.: Qualitätskontrolle im Industriebetrieb, München 1961

(20) Fisz, M.: Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik, 6.Aufl. Berlin 1974

(21) Grant, E.L.: Statistical Quality Control, New York - Toronto - London 1952

(22) Grubbs, F.: "Sample criteria for testing outlying observations. "Annals of Mathematical Statistics 21 (1950) S. 27 - 58

(23) Gumbel, E.J.: Statistics of Extremes, New York 1958

(24) Gupta, S., Groll, Ph.: "Gamma-distribution in acceptance sampling based on life tests". Journal of the Amer.Stat. Ass. 56 (1961) S. 942 ff

(25) Hald, A.: Statistical theory with engineering applications, New York - London 1952

(26) Hoem, J.M.: "The sampling distribution of an estimator arising in connection with the truncated exponential distribution". Ann. of Math. Stat. 40 (1969) S. 702 ff

(27) Johnson, N.L., Kotz, S.: Continuous univariate distributions, New York 1970

(28) Juran, J.M.: Quality Control Handbook, New York 1963

(29) Kendall, M.G., Stuart, A.: The advanced theory of statistics, Vol. 1, London 1961

(30) Laha, R.G.: "On the law of Cauchy and Gauss". Ann. of Math. Stat. 30 (1959), S. 1165 - 1174

(31) Laha, R.G.: "On a class of distribution functions where the quotient follows the Cauchy law". Transactions of the Amer. Math. Society 93 (1959), S. 205-215

(32) Lieberman, G.L., Resnikoff, G.J.: "Sampling plans for inspection by varaibles". Journal of the Amer. Stat. Ass. 50 (1955) S. 457 - 516

(33) Miller, K.S.: Multidimensional Gaussian distributions, New York 1964

(34) Nair, K.R.: "The distribution of the extreme deviate from the sample mean and its studentized form". Biometrika 35 (1948) S.118-144

(35) Owen, D.B.: Handbook of Statistical Tables, Massachusetts 1962

(36) Owen, D.B.: "Variables sampling plans based on the normal distribution". Technometrics 9 (1967), S. 417 - 423

(37) Pearson, E.S., Hartley, H.: Biometrika Tables for Statisticans, Vol. 2 Cambridge 1972

(38) Pitman, E.J.G., Williams, E. J.: "Cauchy-distributed functions of Cauchy variates". Ann. of Math. Stat. 38 (1967) S.916-918

(39) Resnikoff, G.J., Lieberman, G.J.: Tables of the non-central t-distribution Stanford 1957

(40) Richter, H.: Wahrscheinlichkeitstheorie, 2.Aufl. Berlin-Heidelberg-New York 1966

(41) Robbins, H.: "Convergence of distributions". Annals of Math. Statistics 19 (1948) S.72 ff

(42) Schaafsma, A.H., Willemze, F.G.: Moderne Qualitätskontrolle, Eindhaon 1959

(43) Schaich, E. u.a.: Statistik II, München 1975

(44) Schindowski, Schürz: Statistische Qualitätskontrolle Berlin 1964

(45) Schmetterer, L.: Einführung in die mathematische Statistik Wien 1956

(46) Shewhart, W.A.: Economic Control of Quality of Manufactured Product, New York 1931

(47) Siddiqui, M.M.: "Order statistics of a sample and of an extended sample". In: Nonparametric Techniques in Statistical Inference, Cambridge 1970 S. 417 ff

(48) Smirnow, N.W., Dunin-Barkowski, J.W.: Mathematische Statistik in der Technik, Berlin 1963

(49) Spitzer, F.: "Some theorems concerning 2-dimensional Brownian motion". Transactions of the Am. Math. Soc. 87 (1958) S. 187 ff

(50) Stange, K.: "Prüfpläne für messende Prüfung". Metrika 1968 S. 71 ff

(51) Steck, G.P.: "A uniqueness property not enjoyed by the normal distributions". Annals of Math. Stat. 29 (1958) S. 604 - 606

(52) Steck, G.P., Owen, D.B.: "A note on the equicorrelated multivariate normal distribution". Biometrika 49 (1962) S. 269 ff

(53) Takeuchi, K.: "A note on the test for the location parameter of an exponential distribution". Annals of Mathematical Stat. 40 (1969), S. 1838 ff

(54) Uhlmann, W.: Statistische Qualitätskontrolle, Stuttgart 1966

(55) Uhlmann, W.: Kostenoptimale Prüfpläne, Würzburg-Wien 1970

(56) Vogel, W.: Wahrscheinlichkeitstheorie. Göttingen 1970

(57) Williams, E.J.: "Cauchy-distributed functions and a characterization of the Cauchy-distribution". Annals of Math. Stat. 40 (1969) S. 1083 ff

(58) Witting, H.: Mathematische Statistik, Stuttgart 1966

Lebenslauf

Geburt:	9.9.1947
Eltern:	Johann Hamerle, Ingenieur Maria Hamerle, geb. Ruß
Schulen:	1953-1957 Volksschule in Marktoberdorf 1957-1966 Staatliches Gymnasium in Kaufbeuren
Studium:	Nov. 1966 - April 1972 Studium der Mathematik an der Universität München
Weitere Ausbildung:	1.11.1970 - 30.9.1972 Wissenschaftliche Hilfskraft am Seminar für Spezialgebiete der Statistik der Universität München Seit 1.10.1972 Verwalter der Dienstgeschäfte eines wissenschaftlichen Assistenten am Lehrstuhl für Statistik der Universität Regensburg