Dieter Bartmann · Martin J. Beckmann

Lagerhaltung

Modelle und Methoden

Mit 51 Abbildungen

Springer-Verlag
Berlin Heidelberg New York
London Paris Tokyo

Professor Dr. Dieter Bartmann
Fakultät Sozial- und Wirtschafts-
wissenschaften
Universität Bamberg
Postfach 15 49
D-8600 Bamberg

Professor Dr. Martin J. Beckmann
Institut für Angewandte Mathematik
und Statistik
Technische Universität München
Arcisstraße 21
D-8000 München 2

ISBN 3-540-51187-3 Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York
ISBN 0-387-51187-3 Springer-Verlag New York Berlin Heidelberg

Druck: Weihert-Druck GmbH, Darmstadt
Bindearbeiten: T. Gansert GmbH, Weinheim-Sulzbach
2142/7130-543210

VORWORT

Die Lagerhaltung ist eine Hauptdisziplin des Operations Research. Die Beschäftigung mit Problemen der optimalen Bestandsführung auf wissenschaftlichem Niveau geht bis in die Anfänge des 20. Jahrhunderts zurück. Die wichtigsten Impulse erfuhr diese Disziplin allerdings erst nach dem 2. Weltkrieg, als sich Wissenschaftler vom Range eines Jakob Marschak, Kenneth Arrow, S. Karlin, u.a. mit den Problemen der optimalen Bevorratung bei zufälliger Nachfrage befaßten. Es war kennzeichnend für diese Disziplin, daß Methoden zur Lösung derartiger Probleme entwickelt wurden, noch ehe die zu Ihrer Umsetzung notwendige kommerzielle elektronische Datenverarbeitung zur Verfügung stand.

Der Stellenwert der Lagerhaltung im Unternehmen änderte sich schlagartig mit dem wachsenden Zinsniveau der siebziger Jahre. Es war das Gebot der Stunde, das in überhöhten Beständen gebundene überflüssige Umlaufvermögen freizusetzen und die so gewonnene Liquidität zur Finanzierung neuer Investitionen zu verwenden. Es entstand ein Bedarf für intelligente Problemlösungen. Leider gingen bereits derzeit die Fachleute des Operations Research und die Entwickler von Anwendungslösungen in den Softwarehäusern getrennte Wege. So wurde die Chance, im Zusammenwirken von Theorie, Problemkenntnis und Erfahrungswissen die besten Lösungen zu finden, nicht optimal genutzt.

Heute stehen wir vor der Entwicklung und Realisierung anspruchsvoller CIM-Konzepte und es ist dringend geboten, die Weichen neu zu stellen. Das vorliegende Buch soll dazu einen Beitrag leisten. Darin wird dargestellt, wie Lagerhaltung nach den heutigen Erkenntnissen mit Hilfe von OR rational gestaltet werden kann. Selbstverständlich ist eine komplette Behandlung des umfangreichen Stoffes nicht möglich und auch nicht beabsichtigt. Der Stoff beschränkt sich auf Standardmodelle und wichtige Erweiterungen. Besonderer Wert wird auf das Methodische gelegt. Zum einen wird dem Leser vermittelt, wie die Modelle geeignet formuliert und auf spezielle Problemstellungen hin erweitert bzw. modifiziert werden. Zum anderen werden die benötigten mathematischen Ableitungen vollständig und verständlich beschrieben, so daß der Leser insgesamt in die Lage versetzt wird, ein in diesem Buch nicht behandeltes Modell mit Hilfe der erlernten Methoden selbständig zu bearbeiten.

Einen eigenen Schwerpunkt bilden die für komplizierte Fälle der zufallabhängigen Nachfrage notwendigen numerischen Lösungsverfahren. Auch hier werden die wichtigsten Algorithmen so ausführlich hergeleitet, daß die auf spezielle Situationen notwendigen Zuschnitte gemacht werden können.

So wendet sich das Buch sowohl an Wirtschaftswissenschaftler als auch an Wirtschaftsinformatiker, die in anwendenden Unternehmen, Softwarehäusern oder bei DV-Herstellern moderne DV-Systeme zur Lagerhaltung entwickeln.

Bei der Abfassung des Buches wurden die Autoren tatkräftig unterstützt. Die beiden Diplommathematikerinnen Ingrid Riedlbeck und Susanna Spielvogel haben in großer Geduld die mathematischen Herleitungen nachgerechnet und wertvolle Detailkritik geübt. Herr Dipl.-Math. Robert Hackl hat den gesamten Text korrekturgelesen und die Reinzeichnungen erstellt. Frau Karola Treiber und Frau Bernarda Schwarzwälder trugen durch ihre sorgfältige und geduldige Anfertigung der Druckvorlagen entscheidend dazu bei, daß das Buch kostengünstig erstellt werden konnte. Ihnen allen gebührt dafür unser herzlicher Dank.

München/Regensburg, Januar 1989

Dieter Bartmann Martin Beckmann

ÜBERSICHT

Das Buch ist in sechs Kapitel gegliedert. Das erste befaßt sich mit Lagerhaltung bei deterministischer Nachfrage. Die Kapitel zwei bis fünf handeln von zufallsabhängigen Lagerhaltungsmodellen. Das sechste Kapitel ist den Rechenverfahren gewidmet.

Im **ersten Kapitel** wird, der historischen Linie folgend, nach einer kurzen Einleitung (§1) in §2 zunächst das Losgrößenmodell von WILSON (bzw. HARRIS, bzw. ANDLER) vorgestellt. Obwohl die Modellvoraussetzungen von allereinfachster Art sind, erweist sich die daraus abgeleitete Formel der optimalen Losgröße als sehr robust hinsichtlich praxisgerechter Verallgemeinerungen, insbesondere beim Übergang von der konstanten Nachfragerate zur Poisson Nachfrage (wie sich im zweiten Kapitel zeigen wird).

In §3 werden Kosten und Sensitivität untersucht. Es stellt sich heraus, daß die Kosten bei optimalem Bestellverhalten Skaleneffekte besitzen. Mit zunehmendem Umsatz werden die Stückkosten der Lagerhaltung geringer. Bei der Dezentralisierung der Läger geht der Effekt zunehmender Skalenerträge aber teilweise wieder verloren. Die entsprechende Formel wird hergeleitet. Mit der Sensitivitätsanalyse werden die Fragen untersucht, welche Auswirkungen auf die Gesamtkosten zu erwarten sind, wenn erstens die Nachfragerate falsch eingeschätzt wird oder die Einzelkosten mit Fehlern behaftet sind, wenn man zweitens die optimale Bestellmenge wegen spezieller Verpackungseinheiten oder Transportgegebenheiten nicht realisierten kann, oder wenn drittens aus unternehmensinternen organisatorischen Gründen (oder vom Lieferanten vorgeschrieben, wie das z.T. bei pharmazeutischen Produkten der Fall ist) eine besondere Periodenlänge zwischen den Bestellungen gewünscht wird.

Die nächsten beiden Abschnitte, §4 und §5, sind den Sortimentslägern gewidmet. §4 liefert die theoretische Rechtfertigung für die Klasseneinteilung nach der ABC-Analyse anhand des Umsatzvolumens, gemessen an den Einkaufspreisen. §5 befaßt sich mit der Frage der Sortimentsbereinigung. Wie hoch muß die kritische Nachfragerate sein, ab der es sich überhaupt lohnt, einen Artikel im Sortiment zu halten?

Um Fehlentscheidungen zu vermeiden, ist es wichtig, die Nachfrage möglichst gut zu schätzen. Leider stehen die Absatzzahlen in nichtaggregierter Form, also keine Monats-, Quartals- oder Jahresabsatzzahlen, selten zur Verfügung. In §6 wird deshalb gezeigt, wie man aus den **Bestelldaten** die Nachfragerate gewinnen kann.

Wie ändert sich die optimale Lagerhaltungspolitik, wenn das Lager von einer Firma betrieben wird, deren Ziel Gewinnmaximierung statt Kostenminimierung ist? In diesem Zusammenhang tritt auch die Frage auf, wie die Lagerbestände einer solchen Firma zu bewerten sind. Diese Fragen werden in den Abschnitten 7 und 8 untersucht.

Eine Modifikation des Standardmodells ist bei der Gewährung von Mengenrabatt notwendig. In §9 werden die zwei Fälle diskutiert: a) der Mengenrabatt wird nur auf eine die Rabattschwelle überschreitende Menge gewährt; b) er wird bei Überschreiten der Rabattschwelle auf die gesamte Bestellmenge eingeräumt.

In §10 wird ein Kriterium zur Entscheidung der Frage hergeleitet, wann eine Sammelbestellung gegenüber einer Einzelbestellung vorteilhafter ist.

War bisher stets von Handelslägern oder Rohmateriallägern die Rede, so werden in §11 Produktionsläger bzw. Fertigwarenläger bei Eigenproduktion betrachtet. Wie groß ist die optimale Auflegung bei offener Produktion, d.h. bei laufender Lagerentnahme mit konstanter Rate?

In §12 werden die Konsequenzen von Lagerdefiziten diskutiert. Bei Unternehmen mit Monopolcharakter geht auch bei Lieferengpässen die Nachfrage nicht verloren (sog. backorder case). In der Regel wird es zwar etwas kosten, wenn Lagerdefizite auftreten, weil dann auch die Gewinne später als möglich realisiert werden. Falls diese Kosten aber nicht zu hoch sind, können sich Lagerfehlmengen durchaus lohnen. Optimale Bestellzyklen und Bestellmengen werden berechnet.

In §13 wird die Forderung nach der Ganzzahligkeit der Lose berücksichtigt. Dies ist insbesondere bei kleinen Losen und bei Waren mit großen Versandeinheiten wichtig.

In §14 werden die Stellflächen im Lager in die Überlegungen einbezogen. Im ersten Fall wird für ein Gut eine feste Stellfläche reserviert.
Im zweiten Fall gilt es, die beiden Bestellzeitpunkte zweier Güter so gegeneinander zu versetzen, daß die maximal benötigte Gesamtstellfläche möglichst gering ist. Neben Raumbeschränkungen können auch Budgetbeschränkungen wirksam werden. In §15 wird die Frage untersucht, welchen Einfluß Raum- oder Kapitalknappheit auf die optimalen Bestellmengen ausübt.

§16 befaßt sich mit der Situation zeitlich schwankender Nachfrage, wobei die Nachfragerate in den nächsten Perioden genau bekannt und in der weiteren Zukunft unbekannt ist. Die Losgrößenoptimierung geschieht unter der Annahme einer rollierenden Planung.

In §17 wird eine feste Lieferzeit betrachtet. Es wird die Frage untersucht, wann es überhaupt sinnvoll ist, Güter auf Lager zu halten und wann es vorteilhafter ist, als "Verkäufer mit Katalog" aufzutreten.

In §18 werden zufällige Schwankungen der Lieferzeit mit berücksichtigt und Formeln zur geeigneten Dimensionierung von Sicherheitsbeständen hergeleitet. Dabei wird insbesondere Bezug auf die Situation der Just-In-Time Produktion genommen.

Das **zweite Kapitel** bringt eine Erweiterung des einfachen WILSON-Lagerhaltungsmodelles auf den Fall zufälliger Nachfrage, deren Auftreten einen Poissonprozeß beschreibt. (Weitere Verallgemeinerungen, wie z.B. Lieferzeiten oder beliebig verteilte Nachfrage werden in Kapitel 4 behandelt.) Die Paragraphen 19 und 20 geben eine Einführung in den Poissonprozeß nebst seinen Verallgemeinerungen und stellen das bei Entscheidungsprozessen unter Risiko verwendete Entscheidungskriterium des erwarteten Nutzens vor. Ebenfalls zur Vorbereitung dient §21. Er behandelt die kontinuierliche Verzinsung und unendliche Zahlungsströme.

In §22 und §23 wird das Lagerhaltungsmodell mit Poissonnachfrage im diskontierten und nichtdiskontierten Fall mit Hilfe des BELLMANschen "Prinzips der Optimalität" formuliert. In §24 erfährt das Modell eine weitere Verallgemeinerung auf den Fall zufallsabhängiger Nachfrage vom Typ eines SEMI-MARKOV PROZESSES. In Paragraph 25 wird mit Hilfe der Entscheidungsiteration der Dynamischen Optimierung der Beweis dafür erbracht, daß trotz stochastischer Nachfrage die optimale Bestellmenge identisch ist mit der Wilsonschen Losgröße des deterministischen Modelles.

In **Kapitel 3** werden die Einperiodenmodelle behandelt. Derartige Lagerhaltungsprobleme treten z.B. bei Modeartikeln oder Kartenkontingenten für Großveranstaltungen auf, oder bei der Vorratsausstattung von Schiffen, Expeditionen etc. In §26 wird das als Zeitungsjungenproblem bekannte Grundmodell vorgestellt. Dabei wird auch auf die Frage eingegangen, ab wann es sich überhaupt lohnt, sich auf ein Einperiodengeschäft einzulassen.

In §27 wird die Abhängigkeit der optimalen Losgröße von den Parametern der Nachfrageverteilung und den Lager- und Fehlmengenkosten diskutiert. Mit Hilfe der Entropie wird gezeigt, daß die Kosten aus dem Einperiodengeschäft um so mehr steigen, je weniger sich Lager- und Fehlmengenkosten voneinander unterscheiden.

Eine wichtige Verallgemeinerung stellen die in §28 und §29 formulierten Modelle mit zeitlicher Periodenlänge dar. Insbesondere wird nach der optimalen Periodenlänge gefragt.

Ebenfalls auf das Zeitungsjungenproblem läßt sich das "Überbuchen bei Reservierung" zurückführen (§30). Da in den seltensten Fällen alle Reservierungen auch tatsächlich in Anspruch genommen werden, kann es für den Veranstalter lohnend sein, einen Teil des reservierten Kontingentes ein zweites Mal zu verkaufen.

Im **vierten Kapitel** werden stochastische Modelle mit kontinuierlicher Überwachung behandelt. Ein wichtiges Verfahren neben der Dynamischen Optimierung ist die Methode der Zustandswahrscheinlichkeiten. Sie wird in §31 erläutert und auf das Modell mit geometrisch verteilter Nachfrage sowie auf das Modell mit Poisson Nachfrage und exponentieller Lieferzeit (§32) angewandt. Als Variante wird auch der Fall betrachtet, bei dem die Lagerhaltungskosten am Maximalbestand gemessen werden. Diese Situation findet man z.B. vor, wenn man auf ein eigenes Lager verzichtet und externe Lagerfläche anmietet.

Die Paragraphen 33, 34 und 35 sind den Modellen mit Lieferzeit gewidmet. Bei vollkommener Konkurrenz ist die Liefertreue ein wichtiger Faktor im Wettbewerb. In vielen Fällen kann man deshalb die Lieferzeit als zuverlässige, d.h. als konstante Größe ansehen. In §33 wird ein Modell mit fester Lieferzeit besprochen. In Monopolsituationen oder dort, wo Güter zugeteilt werden, liegt die Unsicherheit nicht so sehr in der Nachfrage, sondern in der Lieferzeit. Insbesondere ist dies in Entwicklungsländern zu beobachten. Speziell wird auch auf die Situation bei Eigenproduktion oder Just-In-Time Lieferabrufen eingegangen, denn dort können sich Lieferverzögerungen sehr störend auswirken.

Im **fünften Kapitel** werden stochastische Lagerhaltungsmodelle mit periodischer Überwachung behandelt. Obwohl mit Einführung der elektronischen Datenverarbeitung eine kontinuierliche Bestandsfortschreibung meist kein Problem mehr ist, halten dennoch viele Unternehmer an einer periodischen Inspektion und Bestellentscheidung fest. Periodenmodelle treten auch dort auf, wo mit den Lieferanten Absprachen getroffen wurden, daß Bestellungen immer nur zu bestimmten (meist gleichabständigen) Zeitpunkten vorzunehmen sind. Zunächst wird das grundlegende Modell mit endlichem (§36) und unendlichem Planungshorizont (§37) formuliert. Generell läßt sich über die Modelle in dieser Klasse sagen, daß sie schwierig zu optimieren sind. Besondere Bedeutung gewinnt deshalb die in §38 vorgenommene Zurückführung des Modelles auf eine standardisierte Form. Die optimalen Bestellpolitiken bei verschiedenen Erwartungswerten und Streuungen der Nachfrageverteilung lassen sich unmittelbar von der optimalen Lösung des Standardmodells ablesen.

In den folgenden Paragraphen werden die Fragen untersucht: Wie läßt sich bei speziellen Modellen eine Lösung gewinnen und wie sieht die Struktur der optimalen Bestellregel aus, falls überhaupt eine Struktur vorliegt? Das erste spezielle Modell (§39) ist das AHM-Modell mit exponentialverteilter Nachfrage. Dies ist das Perioden-Analogon zum kontinuierlichen Modell mit Poisson Nachfrage.

In den Paragraphen 40 bis 44 werden Untersuchungen zur Optimalität der (s,S)-Politik angestellt und für einen Spezialfall eine Methode zur Berechnung von s und S angegeben.

In §45 wird das Modell mit Lieferzeit formuliert. Es zeigt sich, daß es den Rahmen des AHM-Typs nicht sprengt. Es wird das interessante Ergebnis hergeleitet, daß die Bestandsfluktuation bei Modellen mit Lieferzeit größer als bei Modellen ohne Lieferzeit ist. Dies gilt auch dann, wenn die Lieferzeit fest, d.h. verläßlich ist. Im allgemeinen verteuert die Lieferzeit die Lagerhaltung.

Für die Praxis ist die Voraussetzung eines stationären Nachfrageprozesses oftmals nicht gegeben. Das Nachfrageniveau unterliegt zeitlichen Schwankungen. Meist liegt aber Information über den zukünftigen Verlauf vor, aufgrund derer man kurzfristige Prognosen erstellen kann. Diese Information gilt es, in den Modellen zu berücksichtigen. Das geschieht in den folgenden beiden Paragraphen. In §46 wird eine autokorrelierte Nachfrage unterstellt. In §47 werden endogene und exogene Prognosemechanismen in das Modell eingeführt, so z.B. die exponentielle Glättung. Dies verlangt eine Neuformulierung des Optimalitätsprinzips.

Eine spezielle Betrachtung wird bei Gütern angestellt, die einer normalverteilten Nachfrage unterliegen, ein sehr geringes Marktwachstum besitzen und deren Absatz mit Hilfe exogener Variabler prognostiziert wird, wobei die aufeinanderfolgenden Prognosen nicht autokorreliert sein dürfen. Ist z.B. die exogene Variable die Änderung des Bruttosozialprodukts, so ist dieser Ansatz geeignet für Güter, die dem Akzelerationsprinzip unterliegen, z.B. Investitionsgüter und Ersatzteile. Jedoch darf die Nachfrage die Prognose nicht beeinflussen. Damit sind Güter ausgeschlossen, deren Output stellvertretend für eine Schlüsselindustrie steht.

In den vorangegangenen Kapiteln wurde stets versucht, zu jedem Lagerhaltungsmodell für die optimnale Losgröße bzw. Bestellregel einen expliziten Ausdruck herzuleiten. Dort wo dies nicht möglich ist, kann man auf die Rechenverfahren der Dynamischen Optimierung zurückgreifen. Sie bilden den Inhalt des **sechsten Kapitels**. In §48 wird das Verfahren der Wertiteration behandelt. Es ist die allgemeinste Methode der Dynamischen Optimiertung und kann auch bei Lagerhaltungsmodellen angewendet werden, die wegen einer sehr komplizierten Kostenstruktur von den vorgestellten Grundmodellen wesentlich abweichen. Es werden Vorteile und Schwächen dieser Methode aufgezeigt und eine Möglichkeit zur Rechenzeitverkürzung angegeben.

In §49 wird die Entscheidungsiteration vorgestellt. Sie stellt eine Alternative zur Wertiteration bei Lagerhaltungsproblemen mit unendlichem Planungshorizont dar. Für derartige Problemstellungen lassen sich Wert- und Entscheidungsiteration zu einem dritten Verfahren, der sog. Politik-Wertiteration, kombinieren.

Hierauf wird jedoch nicht eingegangen, denn die in §50 vorgestellte Methode der Bisektion in Verbindung mit der Dynamischen Optimierung zeigt sich diesem Verfahren in der Regel überlegen.

Im letzten Paragraphen wird speziell auf das AHM-Modell im BACKORDER-Fall ohne Diskontierung eingegangen. Für dieses Modell wurde zwar eine standardisierte Form hergeleitet (§38), die aber einer Einschränkung bezüglich der Verteilungsannahme der Nachfrage unterliegt. Es ist deshalb wichtig, daß auch für Modelle mit allgemeiner Nachfrageverteilung schnelle Rechenverfahren zur Verfügung stehen. Ein derartiges Verfahren haben Federgruen/Zipkin entwickelt. Es wird in §51 vorgestellt.

Da bis auf geringe Ausnahmen alle Ergebnisse in diesem Buch ausführlich hergeleitet werden, sind im Text nur wenige Literaturhinweise und Quellenangaben verwendet worden.

I N H A L T S V E R Z E I C H N I S

KAPITEL I: DETERMINISTISCHE LAGERHALTUNGSMODELLE

§1 EINLEITUNG

J.M. Keynes hat drei Motive für die Geldhaltung unterschieden, die sich auch auf die Lagerhaltung anwenden lassen.

1. Das Transaktionsmotiv
   Weil die Ausgangsströme nicht synchron sind mit den Eingangsströmen, muß ein Lager die zeitlichen Diskrepanzen überbrücken. Üblicherweise geht ein Gut in größeren Zeitabständen und größeren Mengen ein als aus.
2. Das Vorsichtsmotiv
   Wenn eine Bestellung aufgegeben ist, muß man ein Reservelager unterhalten, um die Nachfrage während der Lieferzeit zu befriedigen.
3. Das Spekulationsmotiv
   Wenn erwartet wird, daß die Preise steigen, lohnt es sich, auf Vorrat einzulagern.

Im OR der Lagerhaltung wird typischerweise auf die beiden ersten Motive abgestellt. Das dritte wird gelegentlich in der Linearen Optimierung als das sogenannte Lagerhausproblem (warehousing problem) behandelt.

Die Lagerhaltungstheorie gehört den ersten und damit "klassischen" Anwendungsgebieten des OR an. Sie wurde in den 50-er Jahren vor allem von der US Navy stark gefördert.
Wissenschaftler vom Rang eines OSKAR MORGENSTERN, JAKOB MARSCHAK, KENNETH ARROW, HERBERT SCARF, THOMAS WHITIN, JACK KIEFER und andere haben sich damals intensiv mit der Anwendung von OR und Statistik auf Lagerprobleme beschäftigt (die Anfänge gehen allerdings viel weiter zurück, etwa auf den mythischen WILSON um die Jahrhundertwende).

Lange umstritten war die Frage nach den optimalen Lagerhaltungsstrategien. An dieser Aufgabe hat sich zuerst die Theorie der Dynamischen Optimierung herausgebildet (durch RICHARD BELLMAN).

§2 OPTIMALE LOSGRÖßEN

Im Englischen: Economic Order Quantities **EOQ**
Der Standardfall für das Losgrößenproblem ist eine Handelsfirma, die ein Gut bestellt, um den Lagerbestand aufzustocken. Die Kundennachfrage wird über die Lagerbestände befriedigt. Wir nehmen an, daß die Nachfrage mit einer konstanten Rate auftritt. Sei

λ: Nachfragerate
y: Bestand im Lager

Im Groß- und Einzelhandel ist die Annahme einer konstanten Nachfragerate oftmals eine starke Idealisierung. Hingegen trifft sie häufig zu bei Rohmateriallägern eines Produktionsbetriebes mit Sortenfertigung oder Fertigung sehr großer Chargen.

Kostenstruktur des Lagerhaltungsmodells

Bestellkosten: Für die Bestellkosten unterstellen wir einen linearen Zusammenhang (Abb. 2.1).

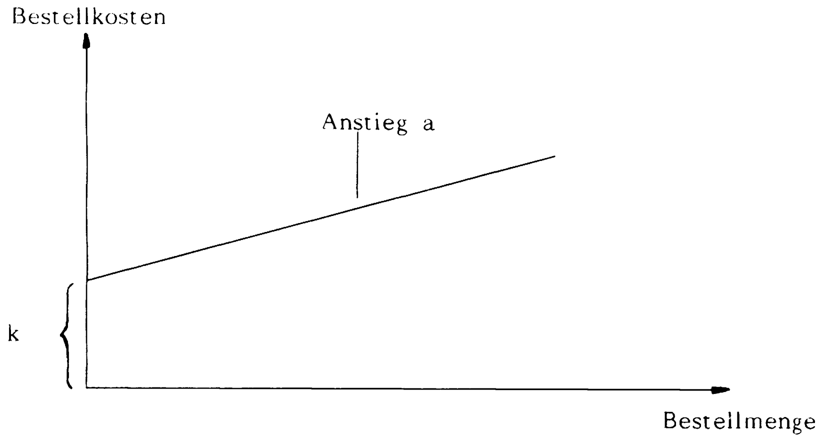


Abbildung 2.1: Bestellkostenkurve

k: fixe Bestellkosten. Hierunter fallen die Kosten für Büroarbeit (10 - 50 DM; ein Geschäftsbrief kostet ca. 10 DM), für Mängelrügen usw.

a: proportionale Bestellkosten, z.B. Transportkosten, Kosten für die Wareneingangskontrolle; in unserem Modell hauptsächlich der Einkaufspreis.

Lagerkosten: Die Lagerkosten bestehen aus den Zinskosten, den Handhabungskosten und den Kosten für die Miete des Stellplatzes (auch wenn man Eigentümer der Lagerhalle ist; hier sind die Mietkosten Opportunitätskosten; die Möglichkeit einer anderen Lagernutzung wird aufgegeben). Darüber hinaus können auch noch Kosten für Schwund (in Indien wird ca. 1/4 der Getreideernte von Ratten aufgefressen), Abnutzung oder Verschlechterung (DEPRECIATION) und Wertabnahme durch technisches Veraltern (OBSOLESCENCE) auftreten. All diese Kosten werden zusammengefaßt zu den Lagerkosten.

h: Lagerkosten pro Stück und Zeiteinheit (Lagerkostensatz)

Fehlmengenkosten: Falls zuwenig auf Lager ist und man deshalb die Nachfrage nicht voll befriedigen kann, entstehen Fehlmengen. Sie werden mit Strafkosten belegt.

g: Fehlmengenkosten pro Stück und Zeiteinheit

z: fehlende Menge (Defizit, Neinverkauf)

G: Fehlmengenkosten

Üblicherweise werden die Fehlmengenkosten proportional zur Menge angenommen.

$$G = g \cdot z .$$

Es ist aber auch der Fall denkbar, daß die Fehlmengenkosten unabhängig von der Höhe des Defizits z angesetzt werden

$$G = g \cdot \delta(z), \qquad \delta(z) = \begin{cases} 0, & \text{für } z = 0, \\ 1, & \text{für } z > 0. \end{cases}$$

δ ist das sog. Kroneckersymbol. Diese zweite Art der Fehlmengenkostenbewertung wurde z.B. bei der amerikanischen Flotte angewendet. Das Lagerhaltungsproblem bestand darin, wieviele (Ersatz-) Teile einem auslaufenden Schiff zur Deckung seines Bedarfes während der Seefahrt mitzugeben waren. Ein Nachschub auf See war nur selten möglich. Wenn mehr Ersatzteile des gleichen Typs benötigt wurden als mitgenommen worden waren, dann war es unerheblich, wieviele fehlten. Wenn auch nur ein einziges Teil zu wenig war, entstanden hohe Kosten.

In Handelslägern und Rohmateriallägern können Defizite auftreten, wenn der Bestand nicht permanent erfaßt wird (periodische Inspektion), zu spät bestellt wird oder die Lieferung einer bestellten Menge unpünktlich eingeht.

Die hier beschriebene Kostenstruktur ist von sehr einfacher Form. In der betriebswirtschaftlichen Literatur findet man jedoch eine ausführliche Diskussion über differenzierte Kostenbetrachtungen.

<u>Die WILSONsche Losgrößenformel (auch ANDLERsche Formel, Formel von HARRIS)</u>

Wir betrachten den einfachen Fall eines Lagers mit obiger Kostenstruktur, konstanter Nachfragerate und permanenter Bestandskontrolle. Lagerdefizite werden nicht zugelassen (hierzu §10). Dann wird das Lager nach folgender Operationscharakteristik geführt (Abb. 2.2).

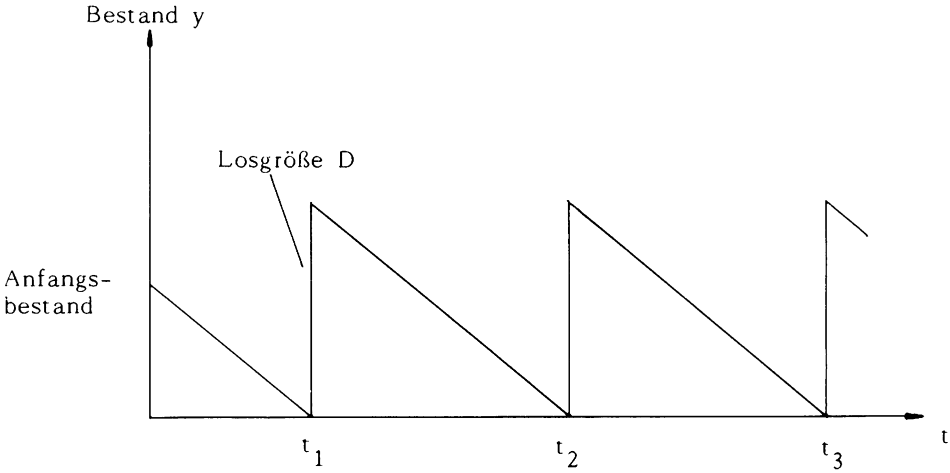


Abb. 2.2: Operationscharakteristik der Bestandsführung

Es ist offensichtlich, daß sich wegen der Lieferzeit Null eine Bestellung erst dann rentiert, wenn das Lager leer ist ($t = t_1$). Die Bestellmenge heißt

D: Losgröße.

Ist das Lager erneut leer geworden ($t = t_2$), wird eine zweite Bestellung aufgegeben. Da das System wegen λ = const. stationär ist, gibt es keinen Grund, hier eine andere Bestellmenge zu wählen als beim erstenmal. Da die Situation zum Zeitpunkt t_1 dieselbe ist wie zur Zeit t_2, muß auch bei t_2 optimal sein, was bei t_1 optimal war.

Die Nachfragerate λ ist fest vorgegeben, d.h. unabhängig von unserem Verhalten. Somit liegt der Optimierungsspielraum in der Losgröße. Es ist eine kostenminimale Bestellmenge zu finden!

Die Zielfunktion "Kosten pro Zyklus ($t_i - t_{i-1}$)" ist ungeeignet, denn die Minimierung dieser Kosten

$$k + aD + h\,\underbrace{\frac{D}{2}}_{\text{mittlerer Bestand}} \cdot \underbrace{\frac{D}{\lambda}}_{\text{Zykluslänge } t_i - t_{i-1}} \to \min_D$$

führt zu dem unsinnigen Ergebnis: optimale Losgröße $D^* = 0$.

Eine mögliche Zielfunktion wäre die Minimierung der durchschnittlichen Stückkosten

$\bar{C}$: durchschnittliche Stückkosten

$$\bar{C} = \frac{k + aD + h\cdot\frac{D}{2}\cdot\frac{D}{\lambda}}{D} \to \min_D \quad .$$

Eine andere mögliche Zielfunktion sind die Zykluskosten pro Zeiteinheit

C: Kosten während eines Zyklus pro Zeiteinheit

$$C = \frac{k + aD + h\cdot\frac{D}{2}\cdot\frac{D}{\lambda}}{\frac{D}{\lambda}} \to \min_D \quad . \tag{2.1}$$

Wegen der Proportionalität $C = \lambda\bar{C}$ und $\lambda = \text{const.}$ erweist es sich als gleichgültig, ob wir $\bar{C}$ oder C verwenden. Beide sind konvex in D.

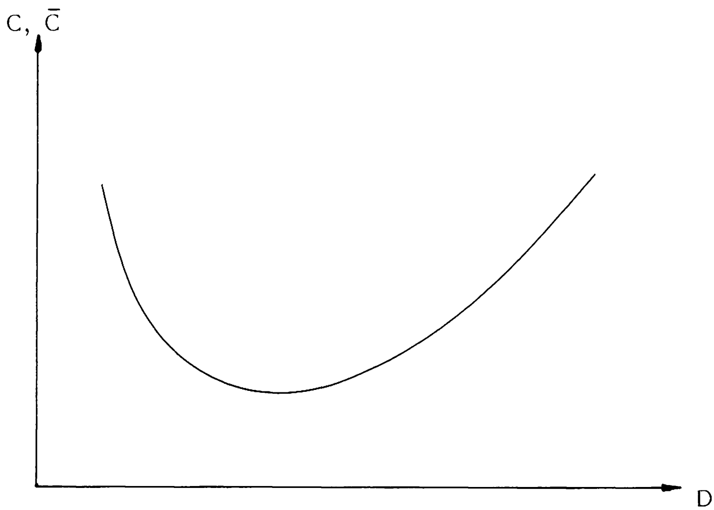


Abb. 2.3: konvexe Zielfunktion C bzw. $\bar{C}$

Deshalb erhalten wir die optimale Losgröße D^* durch Differentiation der Zielfunktion C

$$\min_{D} C(D) \Leftrightarrow \frac{dC}{dD} = 0$$

$$\frac{dC}{dD} = 0: \quad -\frac{k\lambda}{D^2} + \frac{h}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{D^* = \sqrt{\frac{2\lambda k}{h}}} \quad . \tag{2.2}$$

Im Englischen heißt (2.2) die WILSONsche Losgrößenformel oder HARRIS-Formel, im deutschen Sprachraum die ANDLERsche Losgrößenformel (vgl. HOCHSTÄDTER (1972)).

Diese Formel ist in der Tat sinnvoll, wie eine kurze Sensitivitätsanalyse bestätigt. Die optimale Losgröße D^* nimmt sowohl bei wachsender Nachfragerate λ als auch bei wachsenden fixen Bestellkosten k zu.

Intervall zwischen zwei Bestellungen

Sei

T: Intervall zwischen zwei Bestellungen.

Aus (2.2) läßt sich sofort ableiten

$$\boxed{T = \sqrt{\frac{2k}{\lambda h}}} \quad . \tag{2.3}$$

Durchschnittliche Lagerreichweite

Eine wichtige Kennzahl ist der Quotient durchschnittliches Lager/Absatz pro Zeiteinheit (engl.: inventory/sales ratio). Er sagt etwas aus über die langfristige Effizienz eines Bestandsführungssystems. Bei optimaler Bestellpolitik ist

$$\frac{\text{durchschnittl. Lager}}{\text{Absatz}} = \frac{D^*}{2\lambda} = \sqrt{\frac{k}{2h\lambda}} \quad . \tag{2.4}$$

Untersuchungen haben gezeigt, daß trotz Operations Research die durchschnittliche Reichweite der Bestände in den letzten zwei Jahrzehnten zunahm. Es lassen sich hierfür zwei Gründe angeben:

1. Die Lohnkosten sind so stark angestiegen, daß trotz steigender Zinskosten (h wird größer) und Senkung eines Teiles der Fixkosten durch EDV die Rate k/h anstieg.

2. Durch Dezentralisierung wurde die Zahl der Läger vermehrt und darüberhinaus die Vielfalt der Varianten erhöht, so daß pro Variante und Lagerort die Nachfragerate λ gesunken ist, was gemäß (2.4) eine Erhöhung der durchschnittlichen Bestände gemessen in Reichweiten zur Folge hat.

Aus (2.4) lassen sich auch Skalenerträge ablesen. Mit wachsendem Umsatzvolumen eines Unternehmens wird das Lager/Absatz-Verhältnis günstiger. Dies sagt jedoch noch nichts über die Kosten aus. Eine Kostenbetrachtung liefert der folgende Paragraph.

§3 KOSTEN UND SENSITIVITÄT

Kosten

Die Kostenfunktion C von Gleichung (2.1) enthält u.a. die proportionalen Bestellkosten $\lambda \cdot a$. Es war zu sehen, daß dieser Term auf die Bestimmung der optimalen Losgröße keinen Einfluß ausübt. Bei Durchschnittsbetrachtungen über einen längeren Zeitraum hinweg sind diese Bestellkosten unvermeidlich und in ihrer Höhe nicht manipulierbar. Sie werden deshalb bis auf weiteres als nicht beeinflußbarer Term aus der Optimierung herausgegenommen. Die so entstehende, um die proportionalen Bestellkosten bereinigte neue Kostenfunktion sei c.

$$c = C - \lambda a .$$

Bei einem Zyklus der Länge t ist

$$c = \frac{k}{t} + \frac{hD}{2} . \qquad (3.1)$$

Bei optimaler Bestellmenge D^* wird daraus

$$c = \sqrt{2k\lambda h} . \qquad (3.2)$$

Wie zu erwarten ist, nehmen die Kosten eines Bestellzyklus pro Zeiteinheit mit wachsendem Geschäftsvolumen zu. Das Wachstum ist jedoch sublinear:

$$c \sim \sqrt{\lambda} .$$

Für die Stückkosten $\bar{c} = c/\lambda$ pro Zeit gilt

$$\bar{c} = \sqrt{\frac{2kh}{\lambda}} . \qquad (3.3)$$

Sie fallen also mit zunehmendem Umsatz

$$\bar{c} \sim \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \quad .$$

Hier zeigt sich ein Effekt zunehmender Skalenerträge (Vorteil großer Unternehmen)! Man kann die Ursache dafür, wie sonst auch, in der INDIVISIBILITY (Unteilbarkeit) sehen, hier in der Unteilbarkeit einer Bestellung. Ist auch die Bestellmenge noch so klein, es fallen stets die fixen Bestellkosten in voller Höhe an.

Bei großen Unternehmen kann man jedoch häufig beobachten, daß die Läger dezentralisiert sind. Dadurch geht der Skaleneffekt teilweise wieder verloren, wie die folgende Überlegung zeigt. Bei m Lägern treffe auf ein einzelnes Lager eine Nachfrage mit der Rate λ/m. Die Gesamtnachfrage sei λ. Dann sind die Gesamtkosten pro Zyklus bei Dezentralisierung

$$m\sqrt{2kh\lambda/m} \;=\; \sqrt{m}\; c \;,$$

d.h. um den Faktor $\sqrt{m}$ größer als bei Zentralisierung. Die Dezentralisierung ist oft unternehmenshistorisch begründet und es bedarf deshalb eines energischen Anstoßes, überkommene Strukturen aufzubrechen und die Logistik neu zu organisieren. Einen derartigen Anstoß gab in der Bundesrepublik Deutschland das hohe Zinsniveau Ende der siebziger, Anfang der achtziger Jahre, als man angestrengt versuchte, durch Rationalisierung aus dem Umlaufvermögen des Unternehmens Liquiditätsreserven freizusetzen. In der Folge kam es zu zahlreichen Zentralisierungen der Läger.

Es soll aber nicht übersehen werden, daß die Dezentralisierung auch einen Vorteil besitzt: man kommt dem Kunden buchstäblich entgegen. Dies drückt sich in den obigen Formeln (3.2), (3.3) nicht aus (etwa die Kosten der Transportlogistik).

Sensitivität

Die partielle Ableitung $\frac{\partial c}{\partial x}$ gibt darüber Auskunft, wie sich eine Änderung der Variable x auf die Kosten c auswirkt. Es ist

$$\frac{\partial c}{\partial \lambda} = \sqrt{\frac{kh}{2\lambda}}\ ; \quad \frac{\partial c}{\partial k} = \sqrt{\frac{\lambda k}{2k}}\ ; \quad \frac{\partial c}{\partial h} = \sqrt{\frac{\lambda k}{2h}}\ .$$

Diese Werte sind jedoch von den gewählten Maßeinheiten abhängig.

Eine von den Maßeinheiten unabhängige Kennzahl ist die Elastizität ϵ.

Sie mißt das Verhältnis der relativen Veränderungen zweier Größen

$$\epsilon_{c,\lambda} = \frac{\frac{\partial c}{c}}{\frac{\partial \lambda}{\lambda}}\ . \tag{3.4}$$

Die Elastizität läßt sich auch als logarithmische Ableitung darstellen

$$\epsilon_{c,\lambda} = \frac{\partial \ln c}{\partial \ln \lambda}\ .$$

Für die Elastizitäten von c in Bezug auf k, h gilt entsprechend

$$\epsilon_{c,k} = \frac{\partial \ln c}{\partial \ln k}\ ,$$

$$\epsilon_{c,h} = \frac{\partial \ln c}{\partial \ln h}\ .$$

Mit $c = \sqrt{2k\lambda h}$ erhält man

$$\boxed{\epsilon_{c,\lambda} = \epsilon_{c,k} = \epsilon_{c,h} = \frac{1}{2}}\ .$$

Die Elastizität der Kosten pro Zeit in Bezug auf λ, k, h ist stets $\frac{1}{2}$. Steigen z.B. die Kosten von k oder h um p%, dann steigen die Gesamtkosten c pro Zeit um $\frac{p}{2}$%. Ähnliches gilt für die Stückkosten $\bar{c}$. Es ist wichtig, sich über die Sensitivität von c bzw. $\bar{c}$ klar zu werden, denn man kann in der Praxis nur selten davon ausgehen, daß k und h genau bekannt sind.

Interessant ist auch $\frac{\partial c}{\partial D}$, die Sensitivität der Kosten bezüglich Änderungen der Losgrößen. So ist es nicht immer möglich, die minimalen

Kosten c zu realisieren. Ursache hierfür können technische Bedingungen sein (Container, Lastwagen, Tank), oder spezielle Verpackungseinheiten, oder es wird eine besondere Periodenlänge zwischen den Bestellungen gewünscht: Woche, Monat, Vierteljahr. Seien für einen Augenblick die mit einem Stern versehenen Größen die Optimalwerte. Mit Hilfe einer Taylorentwicklung um c^* berechnen wir die Kostendifferenz $c - c^*$. Es ist

$$c = c(D) = \frac{k\lambda}{D} + \frac{hD}{2} \qquad \text{(vgl. (3.1))}$$

$$\frac{\partial c}{\partial D} = -\frac{k\lambda}{D^2} + \frac{h}{2}$$

$$\frac{\partial^2 c}{\partial D^2} = \frac{2k\lambda}{D^3} \quad ,$$

und damit

$$c - c^* = \underset{\llcorner\ \text{der lineare Term verschwindet, da } \left.\frac{\partial c}{\partial D}\right|_{D^*} \overset{!}{=} 0}{0} + \frac{(D - D^*)^2}{2} \cdot \frac{2k\lambda}{(D^*)^3} + \ldots$$

Unter Vernachlässigung höherer Terme erhalten wir

$$c - c^* = \lambda k \frac{(D - D^*)^2}{(D^*)^3} \quad .$$

Wieviel das ausmacht, muß im Einzelfall geprüft werden.

<u>Beispiel:</u>

Sei $k = 8$ DM, $h = 0.01$ DM/Tag und Stück, $\lambda = 1$ Stück/Tag. Dann ist $D^* = \sqrt{2\lambda k/h} = 40$ Stück. Dieses Los reicht für 40 Tage. Die Kosten c^* pro Tag sind $c^* = \sqrt{2k\lambda h} = 0.40$ DM.
Das Gut ist jedoch nur in der kleinsten Einheit von 50 Stück zu haben: $D = 50$. Um wieviel steigen die Kosten pro Tag?

$$c - c^* \approx \lambda k \frac{(D - D^*)^2}{(D^*)^3} = \frac{1}{80} \text{ DM} = 0.0125 \text{ DM}.$$

Dies ist eine Überschätzung. Die tatsächliche Kostendifferenz, wobei c nach (3.1) berechnet wird, beträgt 0.01 DM. Das bedeutet $\Delta c/c = 2.5\%$ bei einer Änderung $\Delta D/D$ von 20%. Mittlere Abweichungen von der optimalen Losgröße machen sich also nur wenig bemerkbar. Grund: Δc ist in erster Näherung quadratisch in ΔD.

§4 RM-SYSTEME (ABC-ANALYSE)

Die Abkürzung RM steht für den lateinischen Ausdruck "reductio ad maximum". In einem RM-System werden die Güter nach ihrer Wichtigkeit angeordnet. Diese Methode wurde von zwei amerikanischen Firmen entwickelt. Als Wichtigkeit eines Gutes i betrachtet man dessen Umsatzvolumen $\lambda_i a_i$, gemessen an den <u>Einkaufspreisen</u> (und nicht an den Verkaufspreisen, da wir Kosten messen). Die Einkaufspreise sind in unserem Modell die proportionalen Bestellkosten a_i.

Frühe Untersuchungen ergaben, daß sich die Güter grob in drei Klassen einteilen lassen

Klasse	Anzahl	Umsatz $\sum \lambda_i a_i$
A	20%	etwa 65%
B	40%	etwa 27%
C	40%	etwa 9%

Für eine derartige Dreiklasseneinteilung hat sich der Name ABC-Analyse eingebürgert.

Ist λa überhaupt das richtige Kriterium für eine Einteilung nach Kostengesichtspunkten? Die Kostenfunktion lautet $c = \sqrt{2k\lambda h}$. Demnach wäre das Kriterium λkh. Falls jedoch k konstant für alle Güter und $h \sim a$ ist (Zinskosten!), dann ist

$$\lambda a \sim \lambda k h.$$

Dies liefert die theoretische Rechtfertigung, λa als Maßzahl für die Kosten zu verwenden, die die Lagerhaltung verursacht.

Der Sinn der Klasseneinteilung besteht darin, Lagerführungskosten zu sparen. Nur die Güter der Klasse A (größte Wichtigkeit) werden nach der bestmöglichen Methode geführt. Beachte: hierzu ist oft eine kontinuierliche Bestandkontrolle notwendig! Für die Güter der Klassen B und C verwendet man die einfachsten Lagerhaltungsmodelle. Man verläßt sich hier oft auf Daumenregeln.

§5 SORTIMENTSENTSCHEIDUNG

Eine ABC-Analyse kann zu der Entscheidung führen, das Sortiment zu bereinigen und einige Artikel überhaupt nicht mehr im Lager zu führen. Dies werden Güter mit hohem Kostengrad oder geringer Nachfrage sein, sog. Langsamdreher.

Seien

p_i: Verkaufspreis pro Stück des Gutes i,

a_i: Einkaufspreis pro Stück des Gutes i,

beide vom Wettbewerb vorgegeben. Der Gewinn pro Bestellzyklus der Länge T ist dann

$$\lambda_i \, T(p_i - a_i) - k_i - h_i D_i \frac{T}{2} .$$

Die <u>Gewinnrate G_i</u> = Erlös minus Kosten pro Zeit lautet

$$G_i = \lambda_i (p_i - a_i) - \frac{k_i + h_i D_i \frac{T}{2}}{T}$$

$$= \lambda_i (p_i - a_i) - \sqrt{2 k_i \lambda_i h_i} .$$

Das optimale Sortiment führt alle Güter mit positiver Gewinnrate. Der Schwellenwert $\bar{\lambda}_i$ der Nachfrage, bei dem $G_i = 0$ ist, heißt BREAK EVEN POINT. Für $\lambda_i < \bar{\lambda}_i$ liegt das Gut i in der Verlustzone, für $\lambda_i > \bar{\lambda}_i$ in der Gewinnzone.

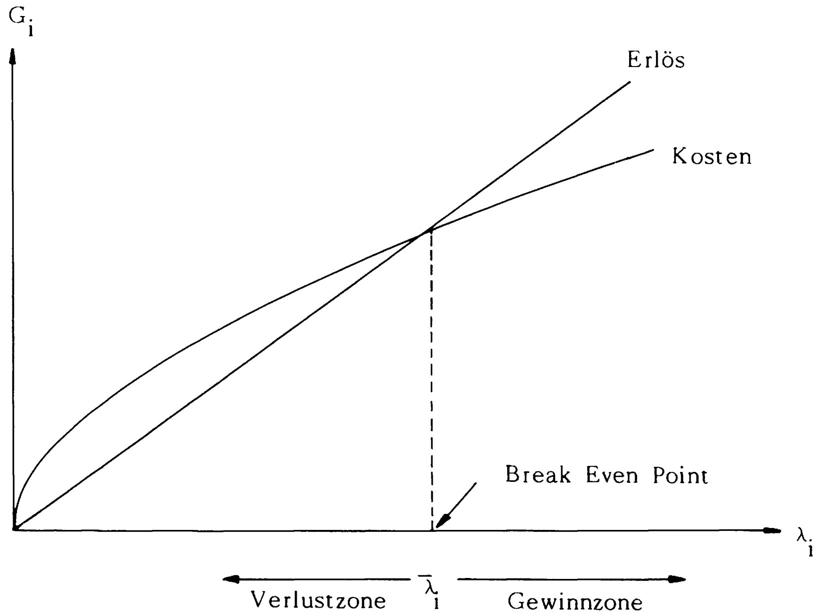


Abb. 5.1: Break Even Analyse

Der Break Even Point liegt bei $\bar{\lambda}_i = \dfrac{2k_i h_i}{(p_i - a_i)^2}$.

Eine systematische Sortimentsbereinigung wird oftmals bei Büchern durchgeführt. Falls die Absatzrate unter einen kritischen Wert fällt, wird das Buch nicht mehr aufgelegt und die Restbestände werden billig abgestoßen. Um der Gefahr eines zu frühen Verramschens zu begegnen, ist es wichtig, λ_i möglichst genau zu kennen.

§6 SCHÄTZUNG DER NACHFRAGERATE λ

Absatzdaten in nichtaggregierter Form (also keine Monats-, Quartals- oder Jahresabsatzzahlen) stehen nicht immer zur Verfügung. Leichter sind die Bestelldaten der Vergangenheit zu erhalten. Zur Schätzung der Nachfragerate greifen wir deshalb auf diese zurück. Seien

t_i: Intervall zwischen der (i+1)-tletzten und der i-tletzten Bestellung (beachte: es wird in die Vergangenheit gezählt, d.h. t_i ist die i-te zurückliegende Periode)

D_i: Bestellmenge bei der i-tletzten Bestellung (Nachschubbestellung!)

l_i: i-tletzter Hilfswert für λ; $l_i = D_i/t_i$ (beachte: die Bestellung D_i ist der Ersatz für die Nachfrage vor der i-tletzten Bestellung)

Im Losgrößenmodell ist unterstellt, daß λ konstant ist. Es ist deshalb zu prüfen, ob die Beobachtungen diese Annahme überhaupt stützen. Eine sehr schnelle erste Antwort liefert eine visuelle Überprüfung der Reihe $\{l_i\}_{i\in\mathbb{N}}$.

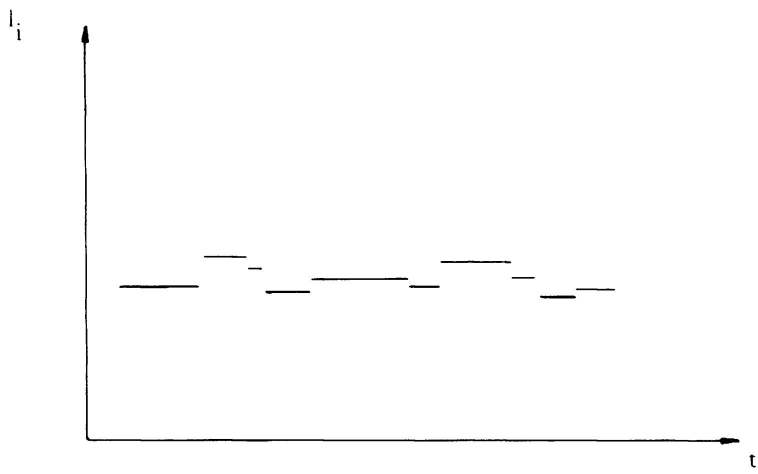


Abb. 6.1: Zeitreihe der Beobachtungen l_i

Falls wie in Abb. 6.1 gezeichnet, die Beobachtungen l_i um einen langfristigen konstanten Mittelwert schwanken, dann ist das arithmetische Mittel aus den n vorhandenen Beobachtungen ein geeigneter Schätzwert für das wahre λ

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} l_i \; . \tag{6.1}$$

Wählt man nur die jeweils m letzten Beobachtungen, m fest, so spricht man von einem gleitenden Durchschnitt.

Erstrecken sich die Beobachtungen über einen längeren Zeitraum hinweg, werden in der Regel Verschiebungen des Nachfrageprozesses auftreten, etwa hervorgerufen durch Sortimentsveränderungen, Kundenwanderung usw. Es ist dann sinnvoll, den jüngeren Daten ein größeres Gewicht zu verleihen als den älteren. Bei geometrischer Gewichtung erhält man für $n \to \infty$:

$$\hat{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \rho^{i-1} l_i}{\sum_{i=1}^{\infty} \rho^{i-1}} = (1 - \rho) \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \rho^{i-1} l_i \; , \quad |\rho| < 1. \tag{6.2}$$

ρ ist der Gewichtungsfaktor.

Diese Gewichtung besitzt den Vorteil, daß sich $\hat{\lambda}$ rekursiv leicht bestimmen läßt. Es ist

$$\hat{\lambda}_{t+1} = (1 - \rho) l_1 + \rho \hat{\lambda}_t , \qquad t = 1,2,\ldots \tag{6.3}$$

Wir ersetzen ρ durch $1 - \rho$ und erhalten die in der Zeitreihentheorie übliche Darstellung

$$\boxed{\hat{\lambda} \quad = \rho l_1 + (1 - \rho) \hat{\lambda}_1} \; . \tag{6.4}$$

l_1 ist die jeweils letzte Beobachtung, $\hat{\lambda}_1$ der alte und $\hat{\lambda}$ der neue Schätzwert für λ. Die Äquivalenz zwischen (6.2) und (6.3) zeigt man leicht durch sukzessives Auflösen der Rekursion (6.3).

Das Schätzverfahren (6.3) bzw. (6.4) heißt exponentielle Glättung erster Ordnung. Die Vergangenheitswerte werden mit wachsendem Alter exponentiell gedämpft. Dadurch liegt die Adaptionsgeschwindigkeit bei plötzlich Fall auftretenden Niveauverschiebungen wesentlich höher als mit der Methode des arithmetischen Mittels. Das wird besonders deutlich, wenn man letzteres ebenfalls rekursiv formuliert

$$\hat{\lambda}_{t+1} = \frac{1}{t+1} l_1 + \frac{t}{t+1}\hat{\lambda}_t \tag{6.5}$$

und t sehr groß werden läßt. Die jüngste Beobachtung geht mit dem Gewicht 1/(t+1) in den neuen Schätzwert für λ ein. Mit zunehmender Zeit wird dieser Einfluß immer geringer. Bei der exponentiellen Glättung hingegen bleibt er konstant.

Die theoretische Begründung der exponentiellen Glättung erster Ordnung liegt in der Modellierung einer adaptiven Erwartungshaltung nach der Formel

$$E\{\lambda_{t+1}\} - E\{\lambda_t\} = \rho(l_1 - E\{\lambda_t\}) \quad ,$$

woraus

$$E\{\lambda_{t+1}\} = \rho l_1 + (1 - \rho)E\{\lambda_t\} \tag{6.6}$$

folgt. Sie beschreibt die Struktur von Zeitreihen, die um ein konstantes Niveau schwanken, wobei dieses Niveau selbst zufälligen Verschiebungen ausgesetzt ist.

E $\{\cdot\}$ ist der Erwartungswert-Operator

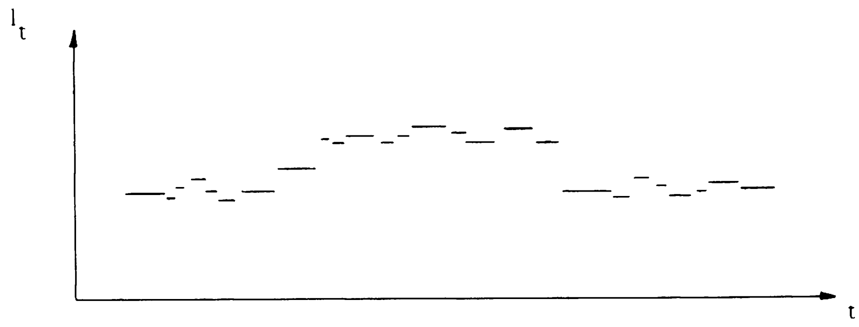


Abb. 6.2: Zeitreihe mit Niveauverschiebungen

Die exponentielle Glättung ist bei derartigen Zeitreihen ein passendes Prognoseverfahren. Die Zeitreihentheorie liefert allgemeine Aussagen darüber, für welche Strukturen von Zeitreihen dieses Prognoseverfahren sogar optimal ist. Hierüber und über ausgefeiltere Varianten der exponentiellen Glättung findet man mehr in SCHLITTGEN/STREITBERG (1984) und MERTENS (1978).

Gebräuchliche Werte für ρ liegen zwischen 0.01 und 0.1. Die Wahl eines geeigneten Wertes ρ ist selbst wieder ein Entscheidungsproblem, bei dem die Vorstellung über die Geschwindigkeit der Adaption ins Spiel kommt.

§7 GEWINNMAXIMIERUNG

Angenommen, das Gut wird zum Preis p pro Einheit verkauft, zum Preis a eingekauft, und die übrigen Daten sind wie bisher. Das Ziel ist Gewinnmaximierung. Der Durchschnittsgewinn pro Zeiteinheit beträgt offenbar

$$g = \frac{pD - aD - k - h\,\frac{D}{2}\cdot\frac{D}{\lambda}}{D/\lambda}\;, \qquad (7.1)$$

wenn die in einem Lagerzyklus anfallenden Erlöse und Kosten durch die Dauer eines Zyklus dividiert werden.

$$g = \lambda(p - a) - \frac{\lambda k}{D} - \frac{h}{2}\,D$$

$$g = \lambda(p - a) - c \qquad (7.2)$$

wo c wie bisher die Durchschnittskosten der Lagerhaltung (vgl. § 3) pro Zeiteinheit darstellen. Weiterhin ist

$$\max_D g = \lambda(p - a) + \max_D\left(-\frac{\lambda k}{D} - \frac{h}{2}\,D\right)$$

$$= \lambda(p - a) - \underset{D}{\mathrm{Min}}\left(\frac{\lambda k}{D} + \frac{h}{2} D\right) \quad . \tag{7.3}$$

Das Gewinnmaximierungsproblem ist also bis auf die additive Konstante $\lambda(p - a)$ identisch mit dem Kostenminimierungsproblem der Standardlagerhaltungstheorie.

§8 BEWERTUNG EINES LAGERS

Ein Betrieb habe die Lizenz, das Lagergeschäft bis zum Zeitpunkt T zu betreiben. Der Lagerbestand sei y, der gegebene Zeitpunkt t. Wie groß ist der wirtschaftliche Wert des Betriebs? Anders ausgedrückt, wie ist das Lager y zu bewerten?

Der Wert des Betriebs ist offenbar eine Funktion sowohl des Lagerbestandes y wie der verbleibenden Zeit $T - t$. Er werde mit

$$v(y, T - t)$$

bezeichnet. Während eines kleinen Zeitraums Δt entwickelt er sich wie folgt

$$v(y, T - t) = p\,\lambda\Delta t - hy\Delta t + v(y - \lambda\Delta t, T - t - \Delta t) \ , \qquad y > 0 \tag{8.1}$$

denn der laufende Erlös ist $p\lambda\Delta t$, die laufenden Kosten sind $hy\Delta t$ und das Lager nimmt ab um $-\lambda\Delta t$.

Wenn $y = 0$, dann gilt

$$v(0, T - t) = -k - aD + v(D, T - t) \ , \qquad y = 0 \tag{8.2}$$

weil das Lager auf D aufgefüllt werden muß, und das die Kosten $k + aD$ verursacht.

Für $v(y - \lambda\Delta t, T-t - \Delta t)$ in (8.1) gilt die Taylor-Approximation

$$v(y - \lambda\Delta t, T - t - \Delta t) = v(y, T - t) - v_y \cdot \lambda\Delta t - v_t \cdot \Delta t$$

Einsetzen in (8.1) und Division durch Δt ergibt die partielle Differentialgleichung für v

$$\lambda v_y + v_t = \lambda p - hy \tag{8.3}$$

mit der Randbedingung (8.2) und der Endbedingung

$$v(y, 0) = 0 \tag{8.4}$$

Damit die Endbedingung trivial erfüllt ist, sei angenommen, daß

$$y(T) = 0$$

d.h., daß ein Endlager von Null geplant worden ist.

Es ist nicht unvernünftig zu versuchen, die Bewertungsfunktion v zu zerlegen in einen rein zeitabhängigen und einen rein mengenabhängigen Teil

$$v(y, T - t) = w(y) + g \cdot (T - t) . \tag{8.5}$$

Der zeitabhängige Teil ist außerdem hier als proportional zur verbleibenden Zeit angesetzt. Der Proportionalitätsfaktor ist dann als die Gewinnrate pro Zeiteinheit zu interpretieren. Mit dem Ansatz (8.5) wird aus der partiellen Differentialgleichung (8.3) eine gewöhliche Differentialgleichung in y

$$\lambda w'(y) + g = \lambda p - hy \tag{8.6}$$

Integration von 0 nach y ergibt

$$w(y) - w(0) = (p - \frac{g}{\lambda})\, y - \frac{h}{2\lambda}\, y^2 . \tag{8.7}$$

Insbesondere

$$w(0) = 0 \ .$$

Für $y = D$ erhält man bei Verwendung der Randbedingung (8.2)

$$w(D) - w(0) = k + aD = (p - \frac{g}{\lambda})\ D - \frac{h}{2\lambda}\ D^2 \ .$$

Daraus bestimmt sich die Gewinnrate g als

$$g = \lambda[p - a - \frac{k}{D} - \frac{h}{2\lambda}\ D] \ . \tag{8.8}$$

Mit der Rate λ wird die Gewinnspanne von

$$p - a - \frac{k}{D} - \frac{h}{2\lambda}\ D = p - a - \bar{c}$$

verdient. $\bar{c}$ sind die Stückkosten pro Zeit (vgl. (3.3)). Einsetzen von (8.8) und $w(0) = 0$ in (8.7) ergibt den Wert eines Lagers y zu

$$w(y) = [a + \frac{k}{D} + \frac{h}{2\lambda}\ D]\ y - \frac{h}{2\lambda}\ y^2 \ . \tag{8.9}$$

Der Wert des Unternehmens setzt sich zusammen aus dem Wert des Lagers (8.9) und dem Wert der verbleibenden Zeit $g \cdot (T - t)$. Der Wert des Lagers ist eine quadratische und nicht eine lineare oder proportionale Funktion des Lagerbestands. Er erreicht sein Maximum bei

$$y^* = \frac{\lambda(a + \frac{k}{D} + \frac{h}{2\lambda}\ D)}{h} \ .$$

$$y^* = \lambda\ \frac{a}{h} + D \tag{8.10}$$

unter Verwendung der Wilsonschen Losgrößenformel für D. Der Wert des Lagers steigt also mit dem Bestand im ganzen Bereich $0 \leq y \leq D$.

Betrachtet man nur den Mehrwert des Lagers m(y), d.h. den Überschuß über dem Einkaufspreis a, dann ist gemäß (8.9)

$$m(y) = (\frac{k}{D} + \frac{h}{2\lambda} D)\ y - \frac{h}{2\lambda} y^2$$

$$m(y) = \sqrt{\frac{2kh}{\lambda}} \cdot y - \frac{h}{2\lambda} y^2 \quad . \tag{8.11}$$

Dieser Mehrwert nimmt sein Maximum an, wenn

$$\frac{dm}{dy} \overset{!}{=} 0 \ , \quad \Rightarrow \sqrt{\frac{2kh}{\lambda}} - \frac{h}{\lambda}\ y = 0$$

$$\Rightarrow y = \sqrt{\frac{2k\lambda}{h}} = D \ .$$

Die optimale Bestellmenge ist also zugleich diejenige, die den Mehrwert eines Lagers maximiert.

Die Bewertung von Lagerbeständen und ihre saubere Trennung von dem Zeitwert eines Unternehmens sind ein betriebswirtschaftlich aktuelles Problem (GRUBBSTRÖM).

§9 MENGENRABATT

Eine Modifikation des Standardmodells ist notwendig bei einer Gewährung von Mengenrabatt. Wir unterscheiden zwei Fälle:

1. Fall

Mengenrabatt wird nur für die q_o überschreitende Menge gewährt.

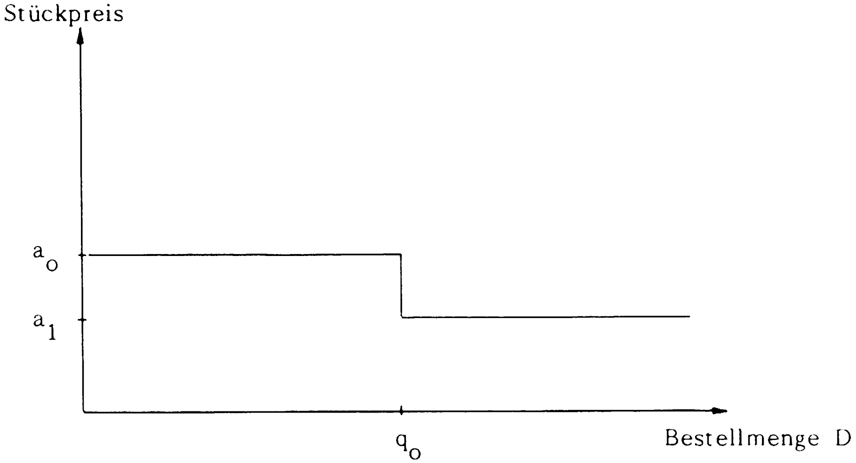


Abb. 9.1: Rabattstaffel

$D^* \geq q_o$ ist kein interessanter Fall. Wir nehmen deshalb $D^* < q_o$ an und fragen zunächst nach der optimalen Bestellmenge $\hat{D}$, falls mehr als q_o bestellt wird.

Die durchschnittlichen Stückkosten sind

$$\bar{C} = \frac{k + q_o a_o + (D-q_o)a_1 + h \cdot \frac{D}{2} \cdot \frac{D}{\lambda}}{D}$$

$$= \frac{K}{D} + \frac{h}{2\lambda}D + a_1 , \qquad D \geq q_o . \tag{9.1}$$

wobei $K = k + q_o(a_o - a_1)$. $\bar{C}$ ist konvex. Wir lassen die Bedingung $D \geq q_o$ im Augenblick außer acht und erhalten über $d\bar{C}/dD \overset{!}{=} 0$ als minimierende Losgröße

$$\hat{D} = \sqrt{\frac{2K\lambda}{h}} .$$

Es ist zu prüfen, ob $\hat{D} > q_o$ ist. Für $\hat{D} \leq q_o$ ist $\bar{C}(D^*)$ das globale Minimum. Für $\hat{D} > q_o$ sind $\bar{C}(\hat{D})$ und $\bar{C}(D^*)$ zwei relative Minima und es bleibt festzustellen, welches von beiden das globale Minimum ist. Der Stückkostenvergleich liefert (beachte: $\bar{C} = \bar{c} + a$)

$$\underset{\text{Fall } D^*}{\sqrt{\frac{2kh}{\lambda}} + a_o} \quad \lesseqgtr \quad \underset{\text{Fall } \hat{D}}{\sqrt{\frac{2Kh}{\lambda}} + a_1} \quad . \tag{9.2}$$

<u>Beispiel:</u>

Sei $k = 8$, $h = 0.01$, $\lambda = 1$, $q_o = 100$, $D^* = 40$.

Wie groß muß der Mengenrabatt $x = a_o - a_1$ sein, damit es sich gerade noch lohnt, ihn in Anspruch zu nehmen?

Der Vorteil hebt sich auf bei

$$0.4 + x = \sqrt{\frac{2(8 + 100x) \cdot 0.01}{1}}$$

$$\Rightarrow \quad x = 1.2 \ .$$

Ist auch sicher $\hat{D} > q_q$?

$$\hat{D} = \sqrt{\frac{2(8 + 120)}{0.01}} = 160 > q_o \ .$$

<u>2. Fall</u>

Der niedrigere Preis a_1 wird für die gesamte Bestellmenge D gewählt, sobald $D \geq q_o$ ist.

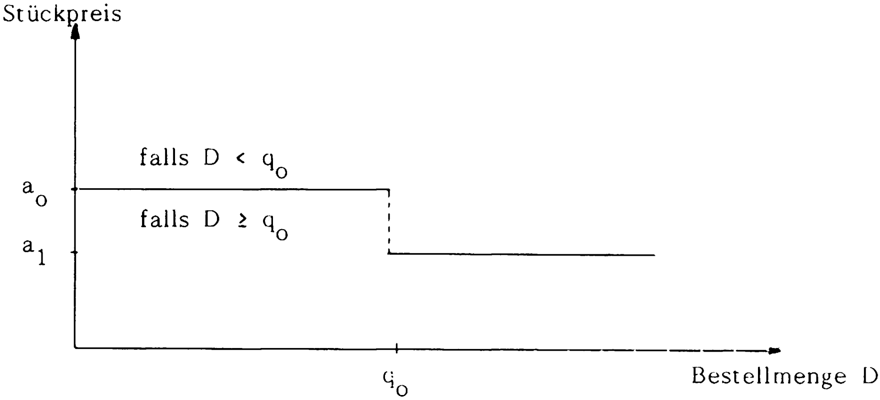


Abb. 9.2 Stückpreis mit Rabatt ($D \geq q_o$)
und ohne Rabatt ($D < q_o$)

Sei wieder $D^* < q_o$. Dann wird sich eine Bestellmenge $D > q_o$ sicher nicht rentieren. Vielleicht aber $D = q_o$? Dazu wieder der Kostenvergleich als Kriterium

$$\underbrace{\sqrt{\frac{2kh}{\lambda}} + a_o}_{\text{Fall } D^*} \lesseqgtr \underbrace{\frac{k}{q_o} + \frac{h}{2\lambda} \cdot q_o + a_1}_{\text{Fall } D = q_o} . \tag{9.3}$$

<u>Beispiel:</u>

Mit denselben Kostenwerten wie vorher liefert das Kriterium (9.3)

$$0.4 + x \lesseqgtr \frac{8}{100} + \frac{0.01}{2} \cdot 100 .$$

Indifferenz herrscht bei $x = 0.18$. Der Rabattsprung ist jetzt wesentlich geringer als im ersten Fall.

§10 SAMMEL- ODER EINZELBESTELLUNG ?

Bezieht man mehrere Güter vom gleichen Lieferanten, so kann sich unter Umständen eine Sammelbestellung lohnen. Seien

k_i, h_i, λ_i : fixe Bestellkosten, Lagerkostensatz und Nachfragerate von Gut i

k_o : fixe Bestellkosten bei Sammelbestellung.

Einzelbestellung:

Die Kosten pro Zeiteinheit (ohne proportionale Bestellkosten) betragen im Durchschnitt (vgl. (3.2))

$$c_e = \sum_i \sqrt{2k_i h_i \lambda_i} \; . \tag{10.1}$$

Sammelbestellung:

Die Wiederbestellzeit muß für alle Güter dieselbe sein. Bei einem Bestellzyklus der Länge t erfordert dies Einzellose $D_i = \lambda_i \cdot t$. Die Kosten eines Zyklus pro Zeiteinheit (wiederum ohne proportionale Bestellkosten) sind (vgl. (3.1))

$$c_s = \frac{k_o + \frac{1}{2}\sum h_i D_i t}{t} \; . \tag{10.2}$$

Deshalb lautet die Zielfunktion

$$\frac{k_o}{t} + \sum_i \frac{h_i \lambda_i t}{2} \to \min_t$$

$$\Rightarrow \boxed{T_{opt} = \sqrt{\frac{2k_o}{\sum_i h_i \lambda_i}}} \; .$$

Wir setzen die optimale Zykluslänge T in (10.2) ein und erhalten als minimale Kosten c_s für die Sammelbestellung

$$c_s = \sqrt{\frac{k_o}{2}\sum_i h_i\lambda_i} + \sum_i \sqrt{\frac{k_o}{2}\frac{h_i^2\lambda_i^2}{\sum_j h_j\lambda_j}} =$$

$$= \sqrt{\frac{k_o}{2}}\sqrt{\sum_i h_i\lambda_i} + \sqrt{\frac{k_o}{2}}\sum_i h_i\lambda_i \sqrt{\frac{1}{\sum_j h_j\lambda_j}} =$$

$$= \sqrt{\frac{k_o}{2}}\left\{\sqrt{\sum_i h_i\lambda_i} + \sqrt{\frac{\left[\sum_i h_i\lambda_i\right]^2}{\sum_j h_j\lambda_j}}\right\} \text{ , d.h.}$$

$$c_s = \sqrt{2k_o\sum_i h_i\lambda_i} \; .$$

<u>Vergleich:</u> $c_e \overset{<}{\underset{>}{=}} c_s$?

Beim Kostenvergleich kann man gemeinsame Faktoren kürzen, so daß die Frage lautet:

$$\boxed{\sum_i \sqrt{k_i h_i\lambda_i} \overset{?}{\overset{<}{\underset{>}{=}}} \sqrt{k_o\sum_i h_i\lambda_i}} \; .$$

<u>1. Fall:</u>

$k_o = \sum k_i$, d.h. bei den fixen Bestellkosten weist die Sammelbestellung gegenüber der Einzelbestellung keinen Vorteil auf. Die Rechnung zeigt

$$\sum_i \underbrace{\sqrt{k_i}}_{=:\,K_i} \; \underbrace{\sqrt{h_i\lambda_i}}_{=:\,A_i} \overset{?}{\overset{<}{\underset{>}{=}}} \sqrt{\sum_i k_i}\sqrt{\sum_i h_i\lambda_i}$$

$$\sum_i K_i \cdot A_i \quad \overset{?}{\gtreqless} \quad \sqrt{\sum_i K_i^2}\,\sqrt{\sum_i A_i^2} \quad .$$

Links steht das Skalarprodukt der beiden Vektoren K, A und rechts das Produkt ihrer Beträge. Es ist deshalb

$$\sum_i K_i A_i \quad (\overset{<}{=}) \quad \sqrt{\sum_i K_i^2}\,\sqrt{\sum_i A_i{}^2} \quad .$$

Um triviale Fälle auszuschließen, können wir in der Regel $K, A > 0$ voraussetzen. Dann entfällt das Gleichheitszeichen und die Einzelbestellung ist demnach günstiger als die Sammelbestellung. Grund: Bei der Einzelbestellung werden die individuell verschiedenen optimalen Lose D_i^* bestellt. Bei der Sammelbestellung ist das nicht möglich.

2. Fall:

$k_o = k_i = k$. Hier erwartet man von der Sammelbestellung einen Kostenvorteil. Die Rechnung bestätigt das. Es ist

$$\sum \sqrt{h_i \lambda} \quad \overset{?}{\gtreqless} \quad \sqrt{\sum h_i \lambda_i}$$

$$\sum A_i \quad \overset{?}{\gtreqless} \quad \sqrt{\sum A_i^2} \quad .$$

Quadrieren auf beiden Seiten liefert die eindeutige Aussage

$$\left(\sum A_i\right)^2 > \sum A_i^2 \qquad \text{für } A_i > 0 \; .$$

3. Fall:

$k_i = k + \eta_i$; $k_o = k + \sum\limits_i \eta_i$; d.h. die fixen Bestellkosten setzen sich aus einem Grundwert k und einem produktabhängigen Wert η_i zusammen.

Hier kann sowohl $c_e < c_s$ als auch $c_e > c_s$ sein.

§11 OPTIMALE AUFLEGUNG BEI EIGENPRODUKTION

Losgrößen treten nicht nur bei Handelslagern auf, sondern auch in der Fertigung. Wir betrachten den einfachen Fall der sog. "offenen Produktion", d.h. Produktion bei laufender Entnahme aus dem Fertigteillager.

Ein Beispiel ist die Motorenfertigung in einer Automobilfirma. Das Produktionsprogramm für das nächste Halbjahr sieht die Herstellung von Vierzylinderfahrzeugen mit konstanter Rate vor. An der Montagestraße werden diese Fahrzeuge täglich montiert. Wie groß sind die Fertigungslose der Motoren?

Sei

μ: Produktionsrate, $\mu > \lambda$

$\bar{D}$: Losgröße abzüglich der laufenden Entnahmen während der Produktionszeit eines Loses (Nettolosgröße).

Der Lagerverlauf hat die folgende Charakteristik

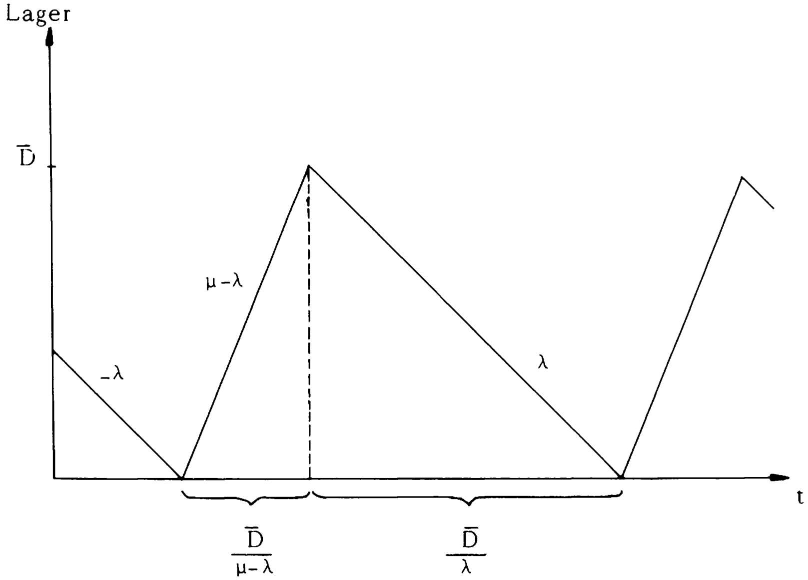


Abb. 11.1: Lagerverlauf bei Eigenproduktion

Die Kosten pro Zeiteinheit lauten

$$c = \frac{k + h\cdot\frac{\bar{D}}{2}\cdot\bar{D}(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu - \lambda})}{\bar{D}(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu - \lambda})} \to \underset{\bar{D}}{\mathrm{Min}} \ . \tag{11.1}$$

Die optimale Nettolosgröße ist

$$\bar{D} = \sqrt{\frac{2k}{h} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu - \lambda}}} \ . \tag{11.2}$$

Anstelle der Rate λ in (2.2) tritt jetzt das harmonische Mittel aus λ und $\mu - \lambda$ auf:

$$1/(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu - \lambda}).$$

Die Losgröße der Auflegung ist (unter Berücksichtigung der laufenden Entnahme während der Produktion)

$$D = \mu \cdot \frac{\bar{D}}{\mu - \lambda} = \sqrt{\frac{2k\lambda}{h} \cdot \frac{\mu}{\mu - \lambda}} \ .$$

Die fixen Bestellkosten k sind im vorliegenden Fall die Kosten für das Einstellen und Reinigen der Produktionslager und die Anlaufkosten (Ausschußproduktion zu Beginn der Auflegung).

§12 LAGERDEFIZITE ERLAUBT

Bisher betrachteten wir das Lagerhaltungsmodell stets unter der Nebenbedingung: Bestand $y \geq 0$. Jetzt seien auch Lagerdefizite erlaubt.
Wir unterscheiden zwei Fälle:

a) LOST SALES CASE. Nicht befriedigte Nachfrage geht verloren.
b) BACKORDER CASE. Nicht befriedigte Nachfrage wird zurückgestellt, bis wieder Lieferfähigkeit vorliegt.

Wir betrachten den BACKORDER CASE. Ihn kann sich in der Praxis nur ein konkurrenzloses Unternehmen leisten, also ein Monopolist (mit der Einstellung "the public be damned"). Anders ist es bei stochastischer Nachfrage. Dort kann man selbst bei bestem Willen nicht in jedem Fall eine 100%-ige Liefererfüllung garantieren.
In der Regel wird es etwas kosten, wenn Fehlmengen auftreten. Falls diese Kosten nicht zu hoch sind, können sich Lagerdefizite durchaus lohnen.

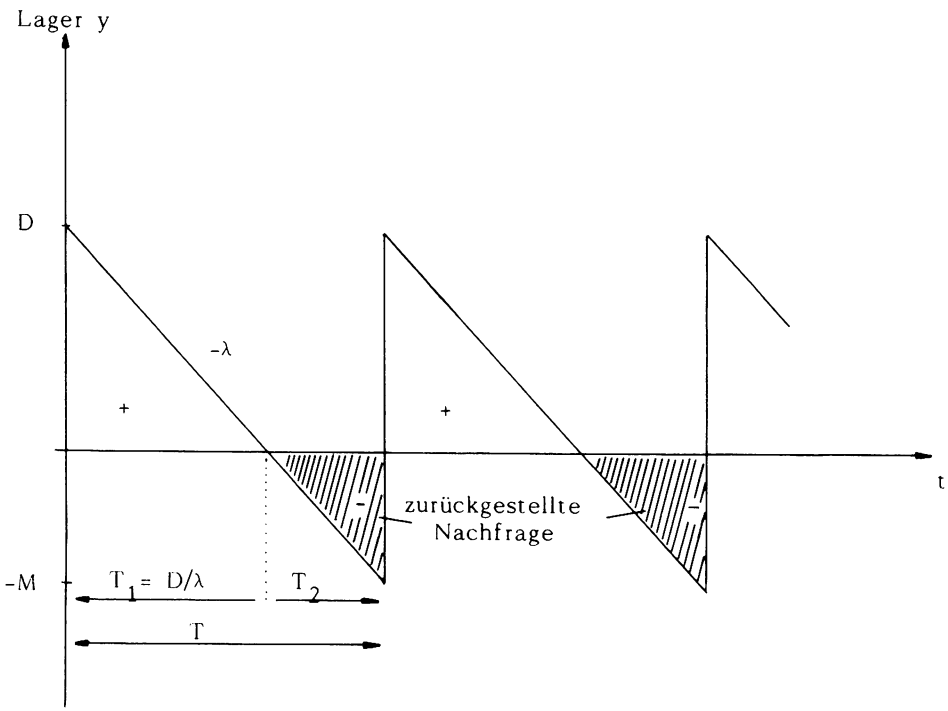


Abb. 12.1: Operationscharakteristik eines Lagers mit Fehlmengen (BACKORDER CASE)

Die Lagerdefizite M werden mit dem proportionalen Fehlmengenkostensatz g bewertet.
Die Kosten pro Zeit lauten

$$c = \frac{k + h \cdot \frac{D}{\lambda} \cdot \frac{D}{2} + g \cdot \frac{M}{\lambda} \cdot \frac{M}{2}}{(D + M)/\lambda} \to \min_{D,M} \quad . \tag{12.1}$$

c(D,M) ist konvex. Aus

$$\frac{\partial c}{\partial M} : -\frac{k\lambda}{(D+M)^2} - \frac{\frac{h}{2} D^2}{(D+M)^2} + \frac{gM(D+M) - \frac{gM^2}{2}}{(D+M)^2} \overset{!}{=} 0$$

$$\frac{\partial c}{\partial D} : -\frac{k\lambda}{(D+M)^2} - \frac{\frac{gM^2}{2}}{(D+M)^2} + \frac{hD(D+M) - \frac{h}{2} D^2}{(D+M)^2} \overset{!}{=} 0$$

$\Rightarrow$ Gleichheit der Zählerterme
$hD(D+M) = gM(D+M)$

folgt

$$\boxed{\frac{D}{M} = \frac{g}{h}} \quad . \tag{12.2}$$

Das Defizit ist also stets größer Null, egal wie hoch die Fehlmengenkosten sind.

Grund: Die Fehlmengenkosten steigen, falls man die Bestellung über T_1 hinauszögert, quadratisch mit der Zeit $(t - T_1)$. Für kleine $\Delta t = t-T_1$ ist die Kostenparabel sehr flach. Die zurückgestellte Nachfragemenge Δq verursacht keine Lagerkosten. Würde man sich aber so eindecken, daß man auch noch Δq befriedigen könnte, müßte man Δq für den ganzen Zeitraum T_1 lagern.

Aus (12.2) folgt:

$$T_1 = \frac{g}{h+g} T;$$

$$T_2 = \frac{h}{g+h} T .$$

Damit wird die Kostenfunktion zu

$$c = \frac{1}{T} [k + h \frac{\lambda T_1}{2} T_1 + g \frac{\lambda T_2}{2} T_2] =$$

$$= \frac{1}{T} [k + h \frac{\lambda}{2} (\frac{g}{g+h})^2 T^2 + g \frac{\lambda}{2} (\frac{h}{g+h})^2 T^2].$$

$$c \to \underset{T}{\mathrm{Min}} \Leftrightarrow \frac{dc}{dT} = - \frac{k}{T^2} + h \frac{\lambda}{2} (\frac{g}{g+h})^2 + g \frac{\lambda}{2} (\frac{h}{g+h})^2 \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{T = \sqrt{\frac{2k}{\lambda} (\frac{1}{h} + \frac{1}{g})}} \quad . \tag{12.3}$$

Die optimale Bestellung ist

$$\boxed{D + M = \sqrt{2k\lambda(\frac{1}{h} + \frac{1}{g})}} \quad . \tag{12.4}$$

Für $g \to \infty$ reduzieren sich diese beiden Ergebnisse auf die bekannten Formeln (2.2), (2.3).

§13 GANZZAHLIGKEIT DES LOSES

In unserem Lagerhaltungsmodell war die Bestellmenge bisher eine reelle Zahl. Bei kleinen Losen jedoch darf die Forderung nach der Ganzzahligkeit nicht mehr vernachlässigt werden. Die Lagerkosten pro Zyklus sind jetzt

$$\frac{1}{\lambda} \cdot h \sum_{i=0}^{D-1} (D - i) = \frac{h}{\lambda} \sum_{j=1}^{D} j = \frac{h}{\lambda} \frac{D(D + 1)}{2} \quad .$$

Hier ist $\frac{1}{\lambda}$ die Zeitdauer, während der das Lager auf dem jeweiligen Stand bleibt, d.h. die Zeit zwischen zwei Nachfragen.

Die Zielfunktion c (Kosten eines Bestellzyklus pro Zeiteinheit, ohne proportionale Bestellkosten) ist

$$c = \frac{\lambda k}{D} + \frac{h}{2} (D + 1) \to \underset{D \in \mathbb{N}}{\mathrm{Min}} \quad . \tag{13.1}$$

Die Bedingung für das Minimum einer konvexen Funktion c_n in ganzen Zahlen n lautet (siehe die folgende Abbildung 13.1)

$$c_{n*} = \underset{n \in \mathbb{N}}{\mathrm{Min}} \{c_n\} \Rightarrow c_{n*-1} \geq c_{n*} \leq c_{n*+1} \quad .$$

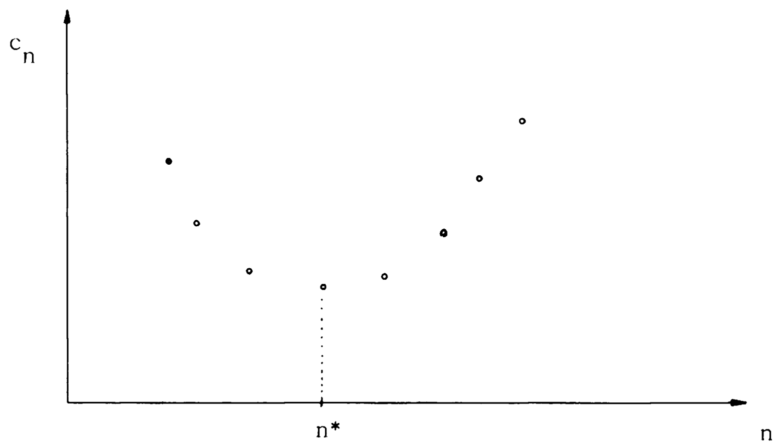


Abb. 13.1: konvexe Funktion c_n mit ganzzahligem Argument

Man betrachtet die ersten Differenzen

$$\Delta_n := c_n - c_{n-1} \quad .$$

Bei n* schlagen sie vom Negativen ins Positive um.

Beispiel:

Für $\lambda = 1$, $h = 1$, $k = 1$ wäre die optimale Losgröße D nach der WILSONschen Formel (2.1) $D = \sqrt{2}$.
Soll man nun auf- oder abrunden? Besser ist es, nicht von D auszugehen, sondern D^* mit Hilfe der ersten Differenzen zu berechnen.

Für die Zielfunktion (11.1) ist

$$\Delta_1 = \frac{1}{1} + 1 - \frac{1}{0} < 0;$$

$$\Delta_2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 2 = 0; \quad \Rightarrow \text{ das Minimum tritt an den zwei Stellen } n = 1 \text{ und } n = 2 \text{ auf}$$

$$\Delta_3 = \frac{1}{3} + 2 - 2 > 0 .$$

Also sind $D^* = 1$ und $D^* = 2$ zwei gleichberechtigte Lösungen.

§14 BERÜCKSICHTIGUNG VON STELLFLÄCHEN IM LAGER

Reservierte Stellfläche

Um in einem Mehrproduktlager auf ein bestimmtes Gut schnell zugreifen zu können, wird für dieses Gut immer ein und dieselbe Stellfläche vorgesehen. Die Lagerflächenkosten hängen dann von der reservierten Fläche ab. Sie ist gleichbedeutend mit der maximalen Lagermenge, also mit D.

Sei

h_1: mengenproportionaler Lagerkostensatz

h_2: flächenproportionaler Lagerkostensatz.

Die Kosten pro Zeiteinheit für einen Lagerzyklus der Länge D/λ lauten

$$c = \frac{k + h_1 \frac{D}{2} \cdot \frac{D}{\lambda} + h_2 D \cdot \frac{D}{\lambda}}{D/\lambda} .$$

Sie werden minimal bei der Losgröße

$$\boxed{D = \sqrt{\frac{2k\lambda}{h_1 + 2h_2}}} \quad . \tag{14.1}$$

Die effektiven Lagerkosten setzen sich also zusammen aus den Lagerkosten h_1 und den doppelten Flächenkosten.

Zeitliche Abstimmung von Bestellmengen

Es werden zwei Güter gelagert. Stellflächen werden nicht reserviert. Der Bestellrhythmus ist bei beiden Gütern gleich. Die Zykluslänge sei T. Man kann die beiden Bestellzeitpunkte so gegeneinander versetzen, daß die maximal benötigte Gesamtstellfläche möglichst gering wird. Wir bezeichnen

τ: Phasenverschiebung der Bestellungen von Gut 2.

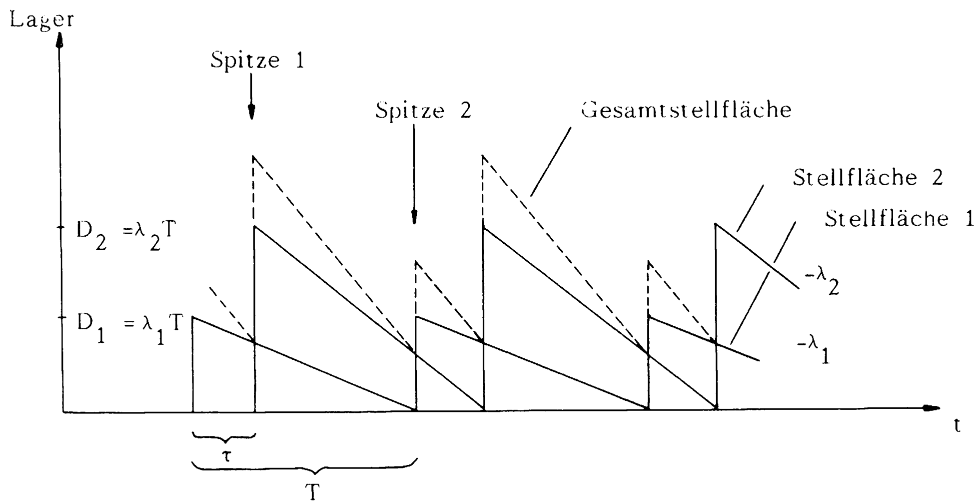


Abb. 14.1: Zeitlicher Bestandsverlauf, einzeln und gesamt

Der Gesamtbestand weist zwei Spitzen auf.

Spitze 1: Bei Bestellung von Gut 2.

Spitze 2: Bei Bestellung von Gut 1.

Die optimale Phasenverschiebung ergibt sich aus der Bedingung

$$\min_{\tau} \{\text{Max} \{\text{Spitze } 1 | \text{Spitze } 2\}\} .$$

Das Minimum wird angenommen, wenn die beiden Spitzen gleich hoch sind:

$$\lambda_2 T + \lambda_1 (T - \tau) = \lambda_1 T + \lambda_2 \tau \tag{14.2}$$

$$\boxed{\tau = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} T} \quad . \tag{14.3}$$

Setzen wir τ in (12.2) ein, erhalten wir den Maximalbestand

$$\boxed{\text{Max } \{y_1 + y_2\} = \frac{\lambda_1^2 + \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2^2}{\lambda_1 + \lambda_2} \cdot T} \quad . \tag{14.4}$$

Er ist symmetrisch in λ und proportional zu $T/(\lambda_1 + \lambda_2)$.

Bei konstantem Wert der Gesamtrate $\lambda_1 + \lambda_2$ nimmt der Ausdruck

$$\frac{\lambda_1^2 + \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2^2}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

ein Minimum für $\lambda_1 = \lambda_2$ an. Der Beweis bleibt dem Leser überlassen.

§15 BUDGETBESCHRÄNKUNG

In einem Mehrproduktlager konkurrieren die einzelnen Güter um den Stellplatz. Bei knappem Lagerraum kann man deshalb nicht erwarten, daß jedem Gut i die gesamte Fläche zur Lagerung der optimalen Losgröße D_i aus (14.1) eingeräumt wird. In der Regel muß man mit einem Bruchteil von D_i auskommen. Dies führt zu einem Lagerhaltungsmodell mit Kapazitätsrestriktion. Anstelle des begrenzten Lagerraumes kann auch das zur Verfügung stehende Kapital limitiert sein: entweder das Umlaufvermögen im Lager oder das Girovermögen, begrenzt durch die Kreditlinie, falls alle Bestellungen innerhalb eines Lagerzyklus gleichzeitig bezahlt werden. Seien

b_i: Raumbedarf oder Preis pro Einheit von Gut i

b_o: Gesamtlagerkapazität oder Budget

x_i: Losgröße

Wir minimieren die Kosten $\sum\limits_i c_i$ eines Zyklus pro Zeiteinheit (vgl. (2.1)):

$$\min_{x_1,\ldots,x_N} \left\{ \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{k_i \lambda_i}{x_i} + \frac{h_i}{2} x_i \right] \right\} \tag{15.1}$$

unter der Nebenbedingung

$$\sum_{i=1}^{N} b_i x_i \leq b_o \tag{15.2}$$

mittels der Methode der Lagrange Multiplikatoren:
Die Nebenbedingung (15.2) wird vermöge des Lagrange-Multiplikators β an die Zielfunktion angekoppelt. Die so erweiterte Funktion heißt Lagrange Funktion L

$$L = -\Bigg[\underbrace{\sum_i \frac{k_i\lambda_i}{x_i} + \sum_i \frac{h_i}{2} x_i}_{\uparrow \text{ wegen Min!}}\Bigg] + \beta\Big[\underbrace{b_o - \sum_i b_i x_i}_{\overset{!}{\geq} 0}\Big] \quad . \tag{15.3}$$

L ist eine konkave Funktion, deshalb ist für ein Extremum hinreichend

$$\frac{dL}{dx_i} \overset{!}{=} 0: \frac{k_i\lambda_i}{x_i^2} - \frac{h_i}{2} - \beta b_i = 0,$$

$$\boxed{x_i = \sqrt{\frac{k_i\lambda_i}{\frac{h_i}{2} + \beta b_i}} \quad .} \tag{15.4}$$

Für $\beta = 0$, d.h. wenn die Budgetbeschränkung nie wirksam ist, wird aus (13.4) wieder die alte WILSON-Formel (2.2). Der Vergleich dieser beiden Formeln zeigt, daß sich die Budgetbeschränkung in Form erhöhter Lagerkosten auswirkt. Wenn man als Lagerkosten nur den Zins ansetzt, zu dem sich das Kapital rentiert, und wenn b_i der Kapitaleinsatz pro Einheit von Gut i ist, dann führt die Budgetbeschränkung zu einer Erhöhung der nominalen Zinsen.

Interpretiert man die Nebenbedingung (15.2) als Platzbeschränkung, dann ist ihre Auswirkung eine zusätzliche Platzmiete von 2β pro Einheitsfläche.

Wann findet bei allen Gütern eine Reduktion der Bestellmenge (und damit des Lagers) um dieselben Proportionen statt? Dafür ist hinreichend

$$b_i \sim h_i \quad ,$$

denn mit $b_i = \alpha h_i$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $i = 1,2,\dots,N$ wird (15.4) zu

$$x_i = \sqrt{\frac{2k_i\lambda_i}{h_i(1+2\alpha\beta)}} \quad .$$

Das Optimierungsproblem (15.1), (15.2) läßt sich auch als Nichtlineares Programm formulieren

$$\underset{x_1,\ldots,x_N}{\text{Min}} \left\{ \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{k_i\lambda_i}{x_i} + \frac{h_i}{2} x_i \right] \right\} \quad ;$$

NB: 1) $\sum_{i=1}^{N} b_i x_i \leq b_o$;

2) $x_i \geq 0, \quad i = 1,2\ldots,N.$

Da jetzt der Optimierungsbereich auf $x_i \geq 0$ eingeschränkt ist, könnte auch ein Randextremum auftreten, aber das ist in der obigen Zielfunktion nie der Fall.

Bestimmung von β: Es gilt $\frac{\partial L}{\partial \beta} \geq 0$. Da alle $x_i > 0$, ist sogar $\frac{\partial L}{\partial \beta} = 0$. Daraus folgt

$$b_o = \sum_{i=1}^{N} \sqrt{\frac{\lambda_i k_i b_i^2}{\frac{h_i}{2} + \beta b_i}} \quad .$$

Je größer b_o, d.h. je schwächer die Nebenbedingung wirkt, desto kleiner wird β.

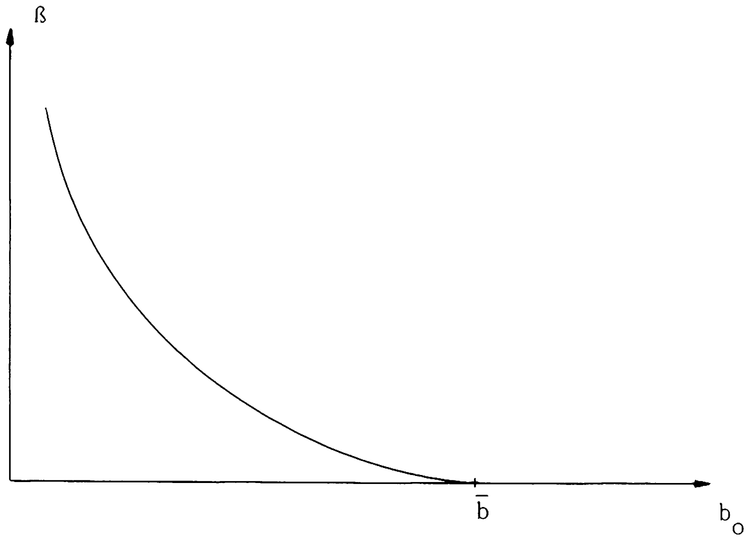


Abb. 15.1: Zusätzliche Kosten β in Abhängigkeit vom Budget

Bei $b_o > \bar{b}$ wird das Budget nicht mehr voll beansprucht.

<u>Beispiel:</u> Lagerkosten

r	:	Zinsen
$h_i = ra_i$	:	Kapitalbindungskosten
$b_i = a_i$	:	prop. Bestellkosten
$\sum a_i x_i \leq b_o$	:	Budgetbeschränkung

Es ist

$$x_i = \sqrt{\frac{\lambda_i k_i}{r\frac{a_i}{2} + \beta a_i}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{r}{2} + \beta}} \sqrt{\frac{\lambda_i k_i}{a_i}} \; .$$

β ist die Knappheitsrente, die auf das Kapital gezahlt wird.

$$b_o = \sum_{i=1}^{N} a_i x_i = \frac{1}{\sqrt{\frac{r}{2} + \beta}} \sum_{i=1}^{N} \sqrt{\lambda_i k_i a_i}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\frac{r}{2} + \beta}} = \frac{b_o}{\sum_{i=1}^{N} \sqrt{\lambda_i k_i a_i}}$$

$$\Rightarrow x_i = \frac{b_o \sqrt{\frac{\lambda_i k_i}{a_i}}}{\sum_{j=1}^{N} \sqrt{\lambda_j k_j a_j}}$$

$$\Rightarrow a_i x_i = \frac{\sqrt{\lambda_i k_i a_i}}{\sum_{j=1}^{N} \sqrt{\lambda_j k_j a_j}} b_o \quad .$$

Aus der letzten Gleichung ist ersichtlich, daß sich hier die Verhältnisse $a_i x_i / a_j x_j$ der einzelnen Losgrößen zueinander nicht ändern, wenn man das Budget b_o erhöht.

§16 BEKANNTE NICHTKONSTANTE NACHFRAGE

Bis jetzt wurde die Nachfrage als ausschließlich konstant über einen unendlich langen Zeitraum betrachtet. Bei Handelslägern trifft dies nur in Ausnahmefällen zu. Eher ist eine derartige Situation bei Fertigungslägern gegeben, wo z. B. Kaufteile auf Lager gehalten werden, die zum Einbau in ein Serienprodukt dienen. Aber auch dort ist eine konstante Produktionsrate selten. Wir lassen deshalb diese einschneidende Voraussetzung fallen. Sei

λ_i: Nachfragen in den vor uns liegenden Perioden $i = 1,2...,n$.

Die Nachfrage ist also bis zur Periode n bekannt.

Beispiel: Automobilwerk

Auf Käuferwunsch kann der PKW mit einem hölzernen Sportlenkrad ausgerüstet werden. Aus der Stücklistenauflösung des Fahrzeugprogrammes für das vorliegende Quartal ergibt sich der tägliche Bedarf an obigen Lenkrädern. Sie werden beim Zulieferer bestellt. Was ist die optimale Losgröße?

Man könnte dieses Problem als ganzzahliges Optimierungsproblem mit Planungshorizont n formulieren. Dies wäre jedoch eine Fehlspezifikation, denn bereits nach einem Bruchteil des Planungshorizonts liegt neue Information über den Bedarf für die Zeit nach n vor. Wir haben es genau genommen mit einem rollierenden Planungshorizont zu tun. Es wäre deshalb eine vergebliche Mühe, dieses Problem exakt lösen zu wollen. Für eine problemgerechte Modellierung gibt es zwei Möglichkeiten:

a) Entweder man weiß, wie sich das Problem in der Zukunft verhält, d.h. man kann zumindest Wahrscheinlichkeiten für zukünftige Nachfragen angeben. Derartige Modelle werden später behandelt.

b) Oder man betrachtet es als ein endloses Problem. Man fragt, wie lange eine Bestellung ausreichen soll. Diesen Zeitraum T wählt man so, daß die Durchschnittskosten minimal werden. Jedesmal, wenn der Bestand auf Null abgesunken ist, wiederholt man diesen Vorgang. Im nachhinein betrachtet ist diese Methode sicher nicht optimal, aber sie ist praktikabler als die exakte Methode, weil man mit einer neuen Entscheidung nicht zu warten braucht, bis der ganze Planungshorizont abgelaufen ist. In der Literatur ist diese Methode als SILVER-MEAL Heuristik bekannt (SILVER & MEAL (1973)).

Die Zielfunktion lautet also "minimiere die Durchschnittskosten des ersten Bestellzyklus"

$$c(T) \to \min_T \qquad (16.1)$$

$$c(T) = \frac{k}{T} + \frac{h}{T}[\lambda_T T + \lambda_{T-1}(T-1) + \ldots + \lambda_1] \quad . \tag{16.2}$$

Beachte: die Menge λ_i wird i Perioden lang gelagert. Die Minimierung geschieht in der diskreten Variablen T. Die Optimalitätsbedingungen lauten

$$\begin{aligned} c(T) - c(T-1) &\leq 0 \; ; \\ c(T+1) - c(T) &\geq 0 \; . \end{aligned} \tag{16.3}$$

Sie sind jedoch nur notwendig, aber nicht hinreichend, da (16.2) i.a. nicht konvex ist.

Die Konvexität ist gesichert, falls $\frac{h}{T} \sum_{i=1}^{T} i\lambda_i$ monoton ist, d.h. für

$$(T+1)\lambda_{T+1} > \sum_{i=1}^{T} i\lambda_i \; ; \quad T = 1,2,\ldots,n.$$

<u>Beispiel:</u> Sie k = 12, h = 0.1, n = 8

T	1	2	3	4	5	6	7	8
λ_T	5	3	6	2	4	3	4	7
k/T	12	6	4	3	2.4	2	1.7	1.5
$\sum i\lambda_i$	5	11	29	37	57	75	103	159
$\frac{h}{T}\sum i\lambda_i$	0.5	0.55	0.97	0.93	1.14	1.25	1.47	1.99
$c(T)$	12.5	6.55	4.97	3.93	3.54	3.25	<u>3.18</u>	3.49
							T = 7	

für h = 1 ergeben sich zwei lokale Minima!

$c(T)$	17	<u>11.5</u>	13.7	<u>12.3</u>	13.8	14.5	16.4	21.4
		T = 2						

Jetzt betrachten wir das Problem in kontinuierlicher Zeit.

$$c(T) = \frac{1}{T}\left[k + h \int_0^T t\lambda(t)dt\right] \quad .$$

Minimierung bezüglich T:

$$\frac{dc}{dT} \stackrel{!}{=} 0: \qquad -\frac{k}{T^2} + h\,\frac{T^2\lambda(T) - \int_0^T t\lambda(t)dt}{T^2} = 0$$

$$\frac{k}{T} = h\left[T\lambda(T) - \frac{1}{T}\int_0^T t\lambda(t)dt\right]$$

$$\boxed{\underbrace{\frac{1}{T}\left[k + \int_0^T t\lambda(t)dt\right]}_{\text{Durchschnittskosten bezogen auf die Zeit, für die die Bestellung ausreichen soll}} = \underbrace{hT\lambda(T)}_{\text{Grenzkosten des Bestellzyklus}} \quad .}$$

> Diese Gleichung offenbart das ökonomische Prinzip:
> Im Kostenminimum müssen die Durchschnittskosten gleich den Grenzkosten sein.

Andere Verfahren sind z.B. das Verfahren der gleitenden wirtschaftlichen Losgröße (Minimierung der Stückkosten eines Loses) und das "Part-Period-Verfahren" von DeMATTEIS & MENDOZA (1968) (Minimierungskriterium: bei der optimalen Losgröße sind die Bestell- und die Lagerkosten gleich groß). Letzteres liefert in der Regel bessere Ergebnisse (vgl. OHSE (1970)).

Untersuchungen von KNOLMAYER (1985) haben gezeigt, daß bei Nachfrageraten, die um einen konstanten Mittelwert schwanken, die von SILVER und MEAL angegebene Heuristik die besten Ergebnisse liefert.

Von SILVER und MILTENBURG (1984) stammen zwei Modifikationen dieses Verfahrens. Die eine wurde für den Fall monoton fallender Nachfrage entwickelt und die andere für den Fall sporadischer Nachfrage.

Es gibt natürlich auch Situationen, in denen es sinnvoll ist, das Losgrößenproblem exakt zu lösen, z.B. wenn ein Zweigwerk in naher Zukunft geschlossen werden soll. Das Produktionsprogramm in dieser Auslaufphase liegt fest und damit auch die Bedarfsrate von Rohmaterialien in den verschiedenen Perioden. Eine rollierende Planung ist hier nicht angebracht. Als Lösungsverfahren kommt die Dynamische Optimierung in Frage - für diese Problemstellung formuliert von WAGNER & WHITIN (1958).

Im allgemeinen schneidet jedoch der Algorithmus von WAGNER und WHITIN schlechter ab als die SILVER-MEAL Heuristik (BLACKBURN & MILLEN (1980)). Jedoch hat ihn CHAND (1982) soweit modifiziert, daß er nach eigenen Angaben der SILVER-MEAL Heuristik überlegen wird.

§17 FESTE LIEFERZEIT τ

Ist die Lieferzeit τ nicht Null, sondern positiv, aber konstant und bekannt, so ist zwischen den Zeitpunkten der Bestellung und den Zeiten des maximalen Lagerbestandes zu unterscheiden. Offenbar muß die Bestellung jetzt τ Zeiteinheiten vor dem Leerwerden des Lagers erfolgen. Der Lagerbestand ist zum optimalen Bestellzeitpunkt

$$y = \lambda \cdot \tau.$$

Wenn die Lieferzeit τ länger ist als die Dauer eines Zyklus

$$t = \frac{1}{\lambda} D ,$$

dann werden zu jedem Zeitpunkt Bestellungen ausstehen und zu bestimmten Zeiten mehr als eine. Wenn das nicht erlaubt ist, muß man stets die Menge $\lambda\tau$ bestellen, und zwar in dem Augenblick, wo die letzte Bestellung eingetroffen ist. Die Kosten erhöhen sich dadurch gegenüber dem Fall mit mehreren ausstehenden Bestellungen. Firmen lehnen im allgemeinen vorzeitige Lieferungen ebenso ab wie sie verspätete Lieferungen durch Vertragsstrafe u.ä. auszuschalten versuchen. Die Pünktlichkeit und Zuverlässigkeit von Lieferanten in Japan wird von den USA-Automobilfirmen als ein Produktionsvorteil ihrer japanischen Konkurrenten angeführt.

Seltene Nachfrage

Bei einem selten nachgefragten Gut stellt sich die Frage, ob man dieses Gut überhaupt auf Lager halten soll.

a) nicht auf Lager halten: Es entstehen die Strafkosten pro Absatz in Höhe von $g\tau$

b) auf Lager halten: Es entstehen die Lagerkosten pro Absatz in Höhe von h/λ.

Fixe Bestellkosten bleiben für den Vergleich außer acht. Das Gut wird nicht bevorratet für $g\tau < h/\lambda$, d.h.

$$\boxed{\lambda\tau < \frac{h}{g}} \quad . \tag{17.1}$$

Eine derartige Situation ist im Versandhandel gegeben. Jeder Sammelbesteller kann als Verkaufsstelle angesehen werden. In dieser Extremform der Dezentralisierung ist die Verkaufsrate pro Verkaufsstelle und Gut sehr gering. Die eingesparten Lagerhaltungskosten werden teilweise als Preisvorteil an den Kunden weitergegeben.

Auch im Arzneimittelhandel trifft dieses Modell zu. Die Nachfrage nach einer bestimmten Arznei bei einer Verkaufsstelle (Apotheke) ist gering und die Lieferzeit ist sehr kurz (wenige Stunden). Aus diesem Grund halten die Apotheken nur ein Kernsortiment auf Lager.

§18 SICHERHEITSBESTAND BEI STOCHASTISCHER LIEFERZEIT (AUCH JUST-IN-TIME PRODUKTION)

Wir setzen die Behandlung des Falles konstanter und bekannter Nachfrage fort. Es sei jetzt die Lieferzeit τ eine Zufallsvariable mit Erwartungswert μ_τ. Würde man den Bestellpunkt $s_1 = \lambda\mu_\tau$ festlegen (dies ist gerade die Nachfrage während der erwarteten Lieferzeit μ_τ), dann hätte man bei symmetrischer Lieferzeitverteilung unmittelbar vor dem Eintreffen der Lieferung genauso oft positive Bestände wie Fehlbestände. Dies ist nur dann optimal, wenn Lagerkostensatz h und Fehlmengensatz g gleich groß sind. Durch Anheben des Bestellpunktes auf $s_2 > s_1$ wird man das Fehlmengenrisiko reduzieren. Die Menge $s_2 - s_1$ ist der Sicherheitsbestand. Er dient dazu, die Abweichungen der Lieferzeiten um die erwartete Lieferzeit hinaus abzufangen.

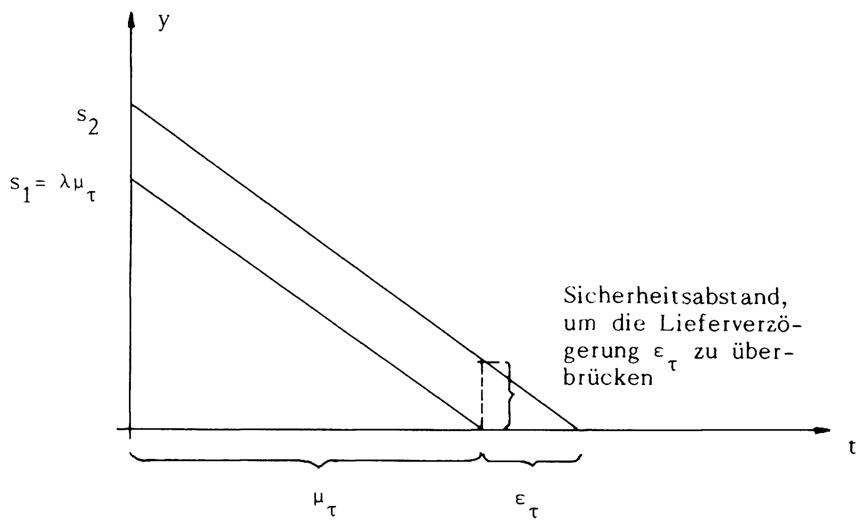


Abb. 18.1: Lagerverlauf mit und ohne Sicherheitsbestand

Wir nehmen an, daß mit dem Lieferanten eine Lieferzeit μ_T vereinbart wurde. Durch unvorhergesehene Situationen kann es jedoch zu Verzögerungen kommen (z.B. bei Produktionsengpaß, schleppender Zollabfertigung) oder zu frühzeitigen Lieferungen (infolge der Tourenplanung des Spediteurs). Auch die Bearbeitung der Lieferung im Wareneingang und in der Qualitätskontrolle kann Schwankungen unterliegen. Diese Abweichungen sind unvorhersehbar und werden deshalb im Modell als Realisation einer zufälligen Störgröße ϵ_T betrachtet.

ϵ_T: zufällige Abweichungen vom vereinbarten Liefertermin, Zufallsgröße mit Verteilungsfunktion $P(\epsilon_T)$

Die gesamte Lieferzeit τ

$$\tau = \mu_T + \epsilon_T \qquad (18.1)$$

ist dann eine zufällige Größe.

Das Problem der unsicheren Lieferzeit wird meist heuristisch gelöst. Man legt einen prozentualen SERVICEGRAD fest

$$\text{SERVICEGRAD } \beta = \frac{E\{\text{befriedigte Nachfrage einer Periode}\}}{E\{\text{Gesamtnachfrage einer Periode}\}} \times 100,$$

z.B. $\beta = 97\%$. Die Fehlmengenwahrscheinlichkeit ist

$$\text{Wkeit}(y < 0) = 1 - \beta/100. \qquad (18.2)$$

Der Sicherheitsbestand $s_2 - s_1$ soll gerade so groß sein, daß der vorgegebene Servicegrad bzw. die gewünschte Fehlmengenwahrscheinlichkeit erreicht wird.

Kennt man die Verteilungsfunktion $P(\epsilon_T)$ der Störvariablen ϵ_T, so läßt sich aus (18.2) der Sicherheitsbestand ableiten. Der Wert $s_1 = \lambda\mu_T$ ist bekannt. Fehlmengen treten auf, falls die Lieferzeit länger als die Bevorratungsreichweite ist

$$\mu_T + \epsilon_T > \frac{s_2}{\lambda} \quad ,$$

d.h.

$$\epsilon_T > \frac{s_2}{\lambda} - \mu_T .$$

Bei festem s_2 ist die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von Fehlmengen

$$\text{Wkeit}(y < 0) = \text{Wkeit}(\epsilon_T > \frac{s_2}{\lambda} - \mu_T), \tag{18.3}$$

$$= 1 - P(\frac{s_2}{\lambda} - \mu_T).$$

Wir wählen s_2 so, daß diese Fehlmengenwahrscheinlichkeit den gewünschten Wert annimmt, d.h., daß sie (18.2) erfüllt. Es muß also gelten

$$1 - \beta/100 = 1 - P(\frac{s_2}{\lambda} - \mu_T),$$

bzw.

$$\beta/100 = P(\frac{s_2}{\lambda} - \mu). \tag{18.4}$$

Den Bestellpunkt s_2 erhält man aus der β%-Quantilen der Verteilungsfunktion $P(\epsilon_T)$. Ist z. B. die Störgröße $N(0,\sigma_T)$-normalverteilt, dann wird aus (18.4)

$$\beta/100 = N(\frac{s_2}{\lambda} - \mu_T)$$

und durch Standardisierung auf die $N(0,1)$-Normalverteilung

$$\beta/100 = N_{(0,1)}(\frac{s_2}{\lambda\sigma_T} - \frac{\mu_T}{\sigma_T}).$$

Sei $\epsilon_{\beta\%}$ die $\beta\%$-Quantile der $N(0,1)$-Normalverteilung, dann ergibt sich für s_2 die Bedingung

$$\epsilon_{\beta\%} = \frac{s_2}{\lambda\sigma_T} - \frac{\mu_T}{\sigma_T}$$

$$\Rightarrow \boxed{s_2 = \underbrace{\epsilon_{\beta\%}\,\lambda\sigma_T}_{SB} + \underbrace{\lambda\mu_T}_{s_1}} \,. \qquad (18.5)$$

Da $\lambda\mu_T = s_1$ ist, erhalten wir für den Sicherheitsbestand SB den Ausdruck

$$\boxed{SB = \epsilon_{\beta\%}\,\lambda\sigma_T .} \qquad (18.6)$$

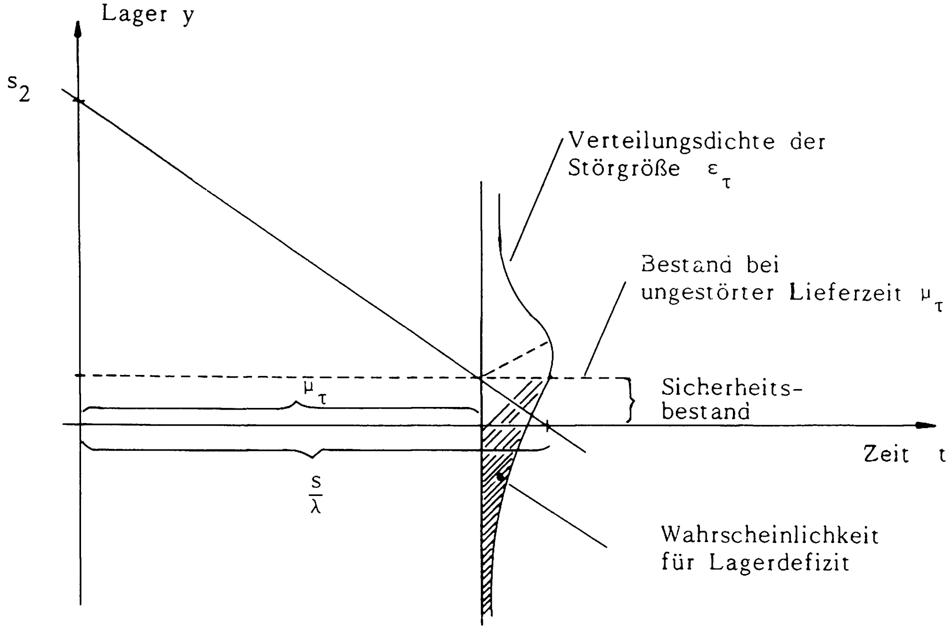


Abb. 18.2: Sicherheitsbestand und Defizitwahrscheinlichkeit bei Bestellpunkt s_2. Die Dichtefunktion von ϵ_T ist aus der Zeichenebene herausgeklappt.

Für einige Servicegrade werden die zugehörigen Fraktilen bei normalverteilter Lieferzeit angegeben.

Tabelle 18.1:

Servicegrad β%	$\epsilon_{\beta\%}$
90	1.2816
95	1.6449
96	1.7507
97	1.8808
98	2.0537
99	2.3263
99.5	2.5758
99.6	2.6521
99.7	2.7478
99.8	2.8782
99.9	3.0902

Nur Lieferverzögerungen

Oftmals werden durch die Störeinflüsse nur Verlängerungen der Lieferzeit hervorgerufen und keine Verkürzungen. Die Gesamtlieferzeit ist dann

$$\tau = \mu + \epsilon_{\tau} ,$$

wobei μ die vereinbarte Lieferzeit und ϵ_{τ} eine Zufallsvariable ist, die nur nichtnegative Werte annehmen kann mit einer Verteilungsdichte, die z.B. folgenden Verlauf hat

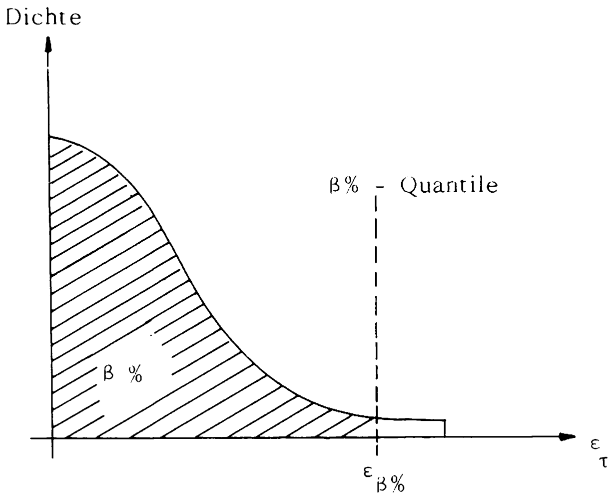


Abb. 18.3: Verteilungsdichte einer zufälligen Lieferverzögerung ϵ_T

Will man sich gegen $\beta\%$ aller Verzögerungsfälle absichern, hat man einen Sicherheitsbestand anzulegen, der für den Zeitraum bis zur $\beta\%$-Quantile ausreicht, d.h. bis zu $\epsilon_{\beta\%}$.

$$\boxed{SB = \lambda\epsilon_{\beta\%}} \tag{18.7}$$

Beachte: Im Gegensatz zu (18.6) ist hier die Verteilung der Lieferverzögerung nicht normiert. Deshalb tritt in (18.7) der Term σ_T nicht als Multiplikator auf.

Sicherheitsbestand bei Just-In-Time Produktion

Betrachten wir als Güter jetzt Einbauteile, die von einer Zulieferfirma hergestellt und auf dem Endmontageband eingebaut werden. Falls es wirtschaftlich oder wegen der beengten Platzverhältnisse in der Montagehalle gar nicht anders möglich ist, wird die Produktion der Fremdteile so auf den Einbauzeitpunkt ausgerichtet, daß sie spätestmöglich begonnen wird, die Teile ohne Zeitverzug speditiert werden und am Montageband "gerade rechtzeitig" bereitstehen. Die zeitliche Planung verläuft im Prinzip nach folgenden Schema

Zulieferer:	Materialbeschaffung Grobplanung	Feinplanung	Steuerung	
→ Zeit				
Hersteller:	Bekanntgabe des Produktionsprogramms	Meldung des Wochenbedarfs	Meldung des Tagesbedarfs, genaue Festlegung der Varianten	

Die wichtige letzte Phase erfordert eine enge Kommunikation und hohe Disziplin bei der Einhaltung der Produktion und Transporte:

Arbeitsvorbereitung	Produktion und Kontrolle	Transport		
→ Zeit				
endgültige Festlegung aller Teiledaten, Abruftermin			Bereitstellung am Montageband	Einbau

Dennoch kann es zu Lieferverzögerungen kommen. Sie müssen durch einen Sicherheitsbestand am Montageband abgefangen werden. Er berechnet sich wie vorhin nach der Formel (18.7). Es ist jedoch zu beachten, daß hier im Gegensatz zu Lagerhaltungsmodellen die Abruftermine nicht bestandsgesteuert sind, sondern vom Produktionsfluß beim Hersteller abgeleitet werden. Man will deshalb als Sicherheit kein Mengen- sondern ein Zeitpolster. Anstelle des Sicherheitsbestandes tritt eine Vorverlegung des Abruftermins um die Zeitspanne $\epsilon_{\beta\%}$. Natürlich ergibt sich als Konsequenz des frühzeitigen Abrufs auch eine frühzeitige Anlieferung und damit ein Bestand am Montageband.

Viele in der Praxis realisierten Modelle arbeiten mit einem vorgegebenen Servicegrad, der kostenminimal einzuhalten ist. In der OR-Literatur findet man auch auf kompliziertere stochastische Sachverhalte erweiterte Servicegradmodelle, so z.B. von H. SCHNEIDER, CH. SCHNEEWEIß, J.ALSCHER und M. KÜHN (siehe ALSCHER & KÜHN & SCHNEEWEIß (1986) und die dort angegebene Literatur).

Der Servicegrad muß jedoch sehr sorgfältig gewählt werden, weil er die erwarteten Gesamtkosten beeinflußt. Streng genommen müßte die Fixierung des Servicegrades auf einen bestimmten Wert selbst wieder das Ergebnis einer Optimierungsrechnung sein (was ist der optimale Servicegrad?). Letztendlich hängt der Servicegrad bei einem Lagerhaltungsproblem, bei dem die Kosten minimiert werden sollen, davon ab, wie teuer Lagerdefizite sind. Es ist deshalb sinnvoll, wo immer es möglich ist, anstatt mit einem vorgegebenen Servicegrad gleich mit Fehlmengenkosten zu arbeiten. Das bedeutet auch keine Einschränkung der Allgemeinheit, denn Servicegrad und Fehlmengenkosten sind zueinander äquivalent. Einem gegebenen Fehlmengenkostensatz ist ein bestimmter Servicegrad bei optimalen Losgrößen zugeordnet und umgekehrt.

In den folgenden Kapiteln werden ausschließlich stochastische Lagerhaltungsmodelle diskutiert, in denen mit Fehlmengenkosten gearbeitet wird. Der Anwender sollte sich nicht dem heilsamen Zwang entziehen, sich genaue Gedanken über seine Kosten zu machen. Manchesmal ist es nicht möglich, die Fehlmengenkosten exakt zu erheben. In diesen Fällen ist aber die Festlegung eines Servicegrades ebenso willkürlich wie die willkürliche Bestimmung der Fehlmengenkosten. In diesen Situationen ist es sinnvoller, Servicegrad bzw. Fehlmengenkostensatz in Simulationsrechnungen als Parameter zu variieren und sich dann anhand der Ergebnisse auf einen konkreten Wert als plausiblen Wert festzulegen.

KAPITEL II: DAS WILSON MODELL MIT POISSON NACHFRAGE

§19 POISSON PROZEß

Vorbereitend zu den nachfolgenden Lagerhaltungsmodellen mit stochastischer Nachfrage wird der POISSON PROZESS eingeführt. Er geht zurück auf BORTKIEWITZ, der die Zahl der durch Hufschläge getöteten Leutnants in der preußischen Armee untersuchte.

Wir leiten den Poisson Prozeß am Beispiel der Nachfrage nach Ersatzteilen her. Eine derartige Nachfrage entsteht immer dann, wenn ein Teil ausfällt.

Ein einziges Teil:

Wahrscheinlichkeit eines Ausfalles während Δt: $p \cdot \Delta t$;
Wahrscheinlichkeit, kein Ausfall während Δt: $1 - p \cdot \Delta t$.

n Teile:

Unter den Annahmen

a) die Teile beeinflussen sich gegenseitig nicht

b) die Ausfallwahrscheinlichkeit p ist bei jedem Teil gleich

ist die
Wahrscheinlichkeit, u Ausfälle in Δt: $\binom{n}{u}(p\Delta t)^u(1 - p\Delta t)^{n-u}$.

Sehr viele Teile:

Annahme:
$n \to \infty$, $p \to 0$, aber $n \cdot p$ endlich: $n \cdot p = \lambda = \text{const.}$
Wahrscheinlichkeit, kein Ausfall in Δt: $p_o(\Delta t)$

$$p_o(\Delta t) = \lim_{n\to\infty} \binom{n}{o}(p\Delta t)^o(1 - p\Delta t)^n$$

$$= \lim_{n\to\infty} (1 - \frac{\lambda}{n} \cdot \Delta t)^n = e^{-\lambda\Delta t} .$$

Beobachtung der Ausfälle über die Zeit:

Annahmen:

a) unendliche Grundgesamtheit

b) die Wahrscheinlichkeit, daß ein beliebiges Teil im Zeitraum Δt ausfällt, sei $\lambda \Delta t$,

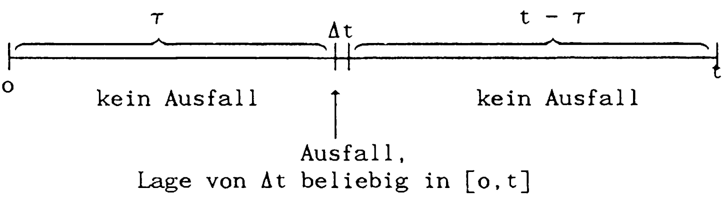
c) die Wahrscheinlichkeit, daß mehrere Teile in Δt ausfallen ($\Delta t << \epsilon$), sei vernachlässigbar gering,

d) einzelne Ausfälle sind voneinander unabhängig.

Wir wissen bereits

$$\boxed{p_o(t) = e^{-\lambda t}} \tag{19.1}$$

und berechnen jetzt die Wahrscheinlichkeit von u Ausfällen in $[o,t]$, $u = 1,2,\dots$:



$$P_1(t) = \int_o^t e^{-\lambda\tau}\lambda e^{-\lambda(t-\tau)}d\tau = \int_o^t \lambda e^{-\lambda t}d\tau = \lambda t e^{-\lambda t}$$

$$p_2(t) = \int_o^t p_o(\tau)\lambda p_1(t-\tau)d\tau =$$

$$= \int_o^t e^{-\lambda\tau}\lambda\cdot\lambda(t-\tau)e^{-\lambda(t-\tau)}d\tau = \frac{(\lambda t)^2}{2}\, e^{-\lambda t}$$

$$\vdots$$

allgemein u Ausfälle in $[o,t]$:

$$\boxed{p_u(t) = \frac{(\lambda t)^u}{u!} e^{-\lambda t}} \quad , \quad u \in \mathbb{N}_0 \; . \qquad (19.2)$$

POISSON PROZESS

Wenn also das zeitliche Auftreten der Nachfrage durch einen Poisson Prozeß beschrieben wird (sog. Poisson Nachfrage), dann bedeutet das: Nachfrage nach jeweils einem Stück, wobei die Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Nachfragen exponentialverteilt ist (19.1). Es ist (wie bisher)

λ: konstante Nachfragerate

Wichtige Eigenschaft der Poisson Nachfrage

Eine konstante Nachfragerate bedeutet, daß die Wahrscheinlichkeit für eine Nachfrage im nächsten Augenblick unabhängig davon ist, wieviel Zeit seit der letzten Nachfrage verstrichen ist. Diese "Gedächtnislosigkeit" ist bei kontinuierlicher Zeitbetrachtung einmalig. Es gibt keinen weiteren stochastischen kontinuierlichen Nachfragetyp mit dieser Eigenschaft. Die Gedächtnislosigkeit bedeutet nämlich

$$p_o(t + \Delta t) = p_o(t)p_o(\Delta t). \qquad (19.3)$$

Dies ist die definierende Funktionalgleichung der Exponentialfunktion.

Verwendung:

Aus der Herleitung ist unmittelbar ersichtlich, daß die Annahme einer Poisson Nachfrage vor allem bei einem sehr großen Kundenstamm zutrifft, wo der einzelne Kunde sporadisch und unabhängig von den anderen Kunden bestellt. Hierunter fällt auch die sog. seltene Nachfrage (lumpy demand).

Poisson Verteilung:

Beschreibt die Nachfrage einen Poisson Prozeß, so ist die in einer Zeiteinheit $t = 1$ auftretende Nachfrage Poisson verteilt

$$\boxed{p_u = \frac{\lambda^u}{u!} e^{-\lambda}} \qquad , \ u \in \mathbb{N}_o . \tag{19.4}$$

Die Poisson Verteilung gehört zur sog. FAMILIE DER BINOMIALVERTEILUNGEN. Hierzu zählen die

Bernoulli Verteilung: $p_o = 1 - p;\ p_1 = p;\ 0 < p < 1;$

Die Binomialverteilung: $p_{u,n} = \binom{n}{u} p^u (1 - p)^{n-u}$;

die negative Binomialverteilung: $p_{u,n} = \binom{-n}{u}(-p)^u (1 - p)^n$;

die geometrische Verteilung: $p_u = (1 - p)p^u$.

Zur bequemen Berechnung von Erwartungswert μ und Varianz σ^2 benützen wir die Methode der erzeugenden Funktion.

Methode der erzeugenden Funktion

Sei $p_1, p_2, \ldots$ eine diskrete Verteilung mit einem positiven Träger. Die Funktion

$$G(x) = \sum_{u=o}^{\infty} p_u x^u$$

heißt ERZEUGENDE FUNKTION. Es ist

$$G'(x)|_{x=1} = \sum u p_u = m_1 = \mu \qquad \text{Erwartungswert}$$

$$\boxed{G'(x)|_{x=1} = \mu} \tag{19.5}$$

$$G''(x)|_{x=1} = \sum u^2 p_u - \sum u p_u = m_2 - m_1 .$$

Da $\sigma^2 = m_2 - m_1^2$, erhält man für die Varianz σ^2

$$\boxed{\sigma^2 = G''(x)|_{x=1} + G'(x)|_{x=1} - [G'(x)|_{x=1}]^2} \quad . \tag{19.6}$$

Bei der Poisson Verteilung ist

$$G(x) = \sum_{u=o}^{\infty} \frac{\lambda^u}{u!} e^{-\lambda} x^u = e^{\lambda(x-1)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mu = \lambda} \; \boxed{\sigma^2 = \lambda} \; .$$

Beim Poisson Prozeß ist

$$G(x,t) = \sum_{u=o}^{\infty} \frac{(\lambda t)^u}{u!} e^{-\lambda t} x^u = e^{\lambda t(x-1)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mu_t = \lambda t}$$

$$\boxed{\sigma_t^2 = \lambda t} \; .$$

Bei der Binomialverteilung ist

$$G(x) = (1 - p + px)^n \Rightarrow \boxed{\mu = np} \; \boxed{\sigma^2 = np(1 - p)} \; .$$

Bei der negativen Binomialverteilung ist

$$G(x) = \left(\frac{1 - p}{1 - px}\right)^k \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mu = \frac{np}{1 - p}} \; \boxed{\sigma^2 = \frac{np}{1 - p}\left(1 + \frac{p}{1 - p}\right)} \; .$$

Bei der geometrischen Verteilung ist

$$G(x) = \frac{1 - p}{1 - px} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mu = \frac{p}{1 - p}} \; \boxed{\sigma^2 = \frac{p}{(1 - p)^2}} \; .$$

Die erzeugende Funktion besitzt die Eigenschaften:

a) Die Zuordnung einer Verteilung φ zu ihrer erzeugenden Funktion ist eineindeutig.

b) Die Faltung der Verteilungen φ_1, φ_2 zweier unabhängiger Zufallsvariablen hat als erzeugende Funktion das Produkt der erzeugenden Funktionen der einzelnen Verteilungen

$$\varphi_1 \otimes \varphi_2 \quad \rightarrow \quad G_{\varphi_1}(x) \cdot G_{\varphi_2}(x)$$

c) Sei $v = f(w)$, w Zufallsvariable mit Verteilung φ_w, dann ist die erzeugende Funktion der Verteilung φ_v die Funktion $G_v(x)$

$$G_v(x) = G_w(f(x))$$

Mit Hilfe dieser Eigenschaften lassen sich die Verwandtschaften innerhalb der Familie der Binomialverteilungen aufzeigen. Die letzte Eigenschaft benützen wir zur Herleitung der ersten beiden Momente des stotternden Poisson Prozesses.

Zusammengesetzter Poisson Prozeß

Beim Poisson Prozeß bedeutet ein Ereignis "Nachfrage nach einem Stück". Beim zusammengesetzten Poisson Prozeß können pro Ereignis auch mehrere (oder kein) Stück nachgefragt werden. Die Zeit zwischen zwei Ereignissen ist wie vorher exponentialverteilt. Die Anzahl der nachgefragten Stücke pro Ereignis gehorcht selbst einer Verteilung.

Beispiel:

Ein Bierfahrer verkauft von seinem Lastkraftwagen aus Bier. Dazu führt er an den Haustüren Verkaufsgespräche. Die Dauer eines Gespräches ist exponentialverteilt. Als Ereignis betrachten wir die Beendigung eines Verkaufsgespräches.Sie hat den Verkauf von u Kästen Bier, $u = 0,1,2,...,$ zum Ergebnis. Sei

w_u: Wahrscheinlichkeit, daß aufgrund eines Verkaufsgespräches u Kästen Bier verkauft werden.

1. Fall:

Sei w_u Bernoulli verteilt, d.h.

w_1: Gespräch erfolgreich, Verkauf eines Kastens

w_o: Gespräch vergebens, kein Verkauf

$$w_1 = 1 - w_o =: w$$

$w_u^{(n)}$: Wahrscheinlichkeit, daß von n Gesprächen u erfolgreich sind

$$w_u^{(n)} = (1 - w)w_u^{(n-1)} + w \cdot w_{u-1}^{(n-1)}$$

$$w_u^{(n)} = \binom{n}{u} w^u (1 - w)^{n-u} \qquad \text{Binomialverteilung}$$

$p_u(t)$: Wahrscheinlichkeit, daß bis zur Zeit t u Kästen verkauft sind

$$p_u(t) = \sum_{n=u}^{\infty} w_u^{(n)} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$$

↑
da mindestens u Gespräche notwendig sind

$$= \sum_{n=u}^{\infty} e^{-\lambda \cdot t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \binom{n}{u} w^u (1 - w)^{n-u}$$

$$= \frac{e^{-\lambda t} w^u (\lambda t)^u}{u!} \underbrace{\sum_{n=u}^{\infty} \frac{(1 - w)^{n-u}}{(n - u)!} (\lambda t)^{n-u}}_{= e^{(1 - w)\lambda t}}$$

$$\boxed{p_u(t) = \frac{(w\lambda t)^u}{u!} e^{-w\lambda t}} \quad , \; u \in \mathbb{N}_0 \; . \tag{19.7}$$

Diese Wahrscheinlichkeiten beschreiben einen zusammengesetzten POISSON PROZESS (mit Bernoulli Verteilung).
Die erzeugende Funktion lautet

$$\begin{aligned} G(x, t)_{P.Bern.} &= G_{P.}(G_{Bern.}(x), t) \\ &= e^{\lambda t[G_{Bern.}(x) - 1]} \\ &= e^{\lambda t[1 - w + wx - 1]} \\ &= e^{w\lambda t[x - 1]} \qquad \Rightarrow \boxed{\mu_t = \sigma_t^2 = \lambda w t} \; . \end{aligned}$$

Die zugehörige Verteilung ist die zusammengesetzte POISSON VERTEILUNG (mit Bernoulli Verteilung)

$$\boxed{p_u = \frac{(w\lambda)^u}{u!} e^{-w\lambda}} \qquad \boxed{\mu = \sigma^2 = \lambda w} \; .$$

2. Fall:

Sei w_u geometrisch verteilt:

$w_u = (1 - w)w^u, \quad 0 < w < 1.$

Der zusammengesetzte Prozeß heißt dann stotternder Poisson Prozeß $w_u^{(n)}$, d.h. die Wahrscheinlichkeit, daß in n Gesprächen u Kästen Bier verkauft werden, berechnen wir über die erzeugende Funktion

$$G(x)_{geom.} = \frac{1 - w}{1 - wx} .$$

Die erzeugende Funktion der n-fachen Faltung der geometrischen Verteilung ist

$$[G(x)_{geom.}]^n = [\frac{1 - w}{1 - wx}]^n \quad .$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit der erzeugenden Funktion der negativen Binomialverteilung, so sieht man: die n-fache Faltung bei geometrischer Verteilung liefert eine negative Binomialverteilung mit der Potenz -n.

$$\text{NR: } (1 - z)^{-n} = 1 + \frac{nz}{1!} + \frac{n(n + 1)z^2}{2!} + \ldots + \frac{(n + u - 1)!z^u}{(n - 1)!u!} + \ldots$$

$$= \sum_{u=o}^{\infty} \binom{n+u-1}{u} z^u .$$

Also ist

$$(1 - wx)^{-n} = \sum_{u=o}^{\infty} \binom{n+u-1}{u} w^u x^u \quad ,$$

und deshalb

$$[G(x)_{geom.}]^n = \sum_{u=o}^{\infty} \underbrace{\binom{n+u-1}{u}(1 - w)^n w^u}_{= w_u^{(n)}} x^u \quad .$$

$$p_u(t) = \sum_{n=u}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} \binom{n+u-1}{u} (1 - w)^n w^u$$

$$\boxed{p_u(t) = \frac{e^{-\lambda t} w^u (1 - w)\lambda t}{u!} \sum_{n=u}^{\infty} \frac{[\lambda t(1 - w)]^{n-1}}{(n - 1)!n!} (n + u - 1)!} \quad . \quad (19.8)$$

STOTTERNDER POISSON PROZESS
(mit geometrischer Verteilung)

Die erzeugende Funktion lautet

$$G(x,t)_{\substack{st.P.\\ geom.}} = e^{\lambda w t(\frac{x - 1}{1 - wx})} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mu_t = \frac{w\lambda t}{1 - w}}$$

$$\boxed{\sigma_t^2 = \frac{w(1 + w)\lambda t}{(1 - w)^2}} \quad .$$

Anders als im Fall des reinen Poisson Prozesses ($\sigma^2 = \mu$) ist hier $\sigma^2 > \mu$.

Falls der Bedingungskomplex auf eine Poisson Verteilung hinweist, die empirischen Daten aber auf $\sigma^2 < \mu$ schließen lassen, kann es sich um eine gemischte Poisson Verteilung handeln.

Gemischte Poisson Verteilung

Bei der gemischten Poisson Verteilung ist die Rate λ selbst wieder verteilt mit

$\varphi(\lambda)\,d\lambda$: (verallgemeinerte) Wahrscheinlichkeitsdichte von λ.

Dann ist

$$\boxed{p_u = \int_0^{\infty} \frac{\lambda^u}{u!} e^{-\lambda} \varphi(\lambda)\,d\lambda} \quad , \quad u \in \mathbb{N}_0 \quad . \quad (19.9)$$

GEMISCHTE POISSON VERTEILUNG

Die erzeugende Funktion lautet

$$G(x)_{gem.P.} = \int_0^{\infty} e^{\lambda(x - 1)} G(\lambda)\,d\lambda \quad .$$

$G(\lambda)$ ist die erzeugende Funktion der Verteilung von λ.

$$\mu = \int_{o}^{\infty} \lambda G(\lambda)\, d\lambda$$

$$\sigma^2 = \int \lambda G^2(\lambda)\, d\lambda < \mu, \quad \text{weil} \quad G^2 < G \quad \text{für} \quad o < G < 1.$$

§20 ALLGEMEINE BEMERKUNG ZUM ZUFALL

Landläufig wird auf Zufall mit Aberglaube oder Flucht ins Irrationale reagiert. Wissenschaftlich wird der Zufall durch den Begriff der Wahrscheinlichkeit erfasst. Den Anstoß zu strengen mathematischen Betrachtungen gab CHEVALIER DE MÉRÉ, als er PASCAL in einem Brief bat, Aussagen über die Gewinnaussichten eines vorzeitig abgebrochenen Kartenspiels zu machen (RÉNYI (1969)).

Für die Lagerhaltung ergibt sich eine neue Situation: die bisherigen Entscheidungskriterien Kosten und Gewinn für die Wahl der besten Handlungsweise sind jetzt vom Zufall abhängig. Dadurch ist es möglich, daß sich die Entscheidung eines Dummkopfes im Nachhinein als die beste erwiesen hat und die Entscheidung eines Verständigen falsch lag. Dies wird jedoch die Ausnahme sein. Auf lange Sicht wird sich eine qualifizierte Entscheidungsregel stets als die bessere erweisen (nach dem Gesetz der großen Zahlen). "Glück hat auf die Dauer nur der Tüchtige." Darin liegt die wesentliche Rechtfertigung des Operations Research im Risikobereich!

Für einen Prozeß, dessen Fortentwicklung einem zufälligen Einfluß unterliegt, ist es geradezu typisch, daß auch bei der Festlegung auf eine bestimmte Verhaltensweise (Aktion) das zu erzielende Ergebnis, d.h. die über die gewählte Aktion gesteuerte zukünftige Entwicklung des Prozesses, eine zufällige Größe ist. Deren Wahrscheinlichkeitsverteilung sei bekannt.

Die Wahl einer Aktion läßt sich somit zurückführen auf die Wahl der Wahrscheinlichkeitsverteilung des zugehörigen Ergebnisses. Deshalb wird jetzt ein Kriterium für die Präferenz einer Verteilung vor einer zweiten gesucht. Ursprünglich verwendete man das ERWARTUNGSWERT-KRITERIUM. Sei

P_a: zu Aktion a gehörige Verteilung des Ergebnisses x

Dann ist beim Erwartungswertkriterium

$$a_1 \text{ besser als } a_2, \text{ falls } E_{P_{a_1}}\{x\} > E_{P_{a_2}}\{x\} .$$

Ein Einwand gegen dieses Kriterium ist das sog. PETERSBURGER PARADOX: Man werfe eine Münze so oft, bis zum erstenmal "Wappen" erscheint. Ist dies beim n-ten Wurf, so erhalte man von der Bank den Gewinn $x = 2^n$. Bei prob(Wappen) = prob(Kopf) = 0.5 besitzt die Verteilung ϕ des Gewinns bei der Aktion a_1 = 'spiele das Spiel' den unendlichen Erwartungswert

$$E_{P_{a_1}}\{x\} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\tfrac{1}{2}\right)^n \cdot 2^n = 1 + 1 + \dots .$$

Die Aktion a_2 = 'spiele nicht' bringt keinen Ertrag. Nach dem Erwartungswertkriterium müßte ein Spieler auch bei einer noch so hoch von der Bank geforderten Teilnahmegebühr zum Spiel bereit sein. Tatsächlich ist aber niemand bereit, einen auch nur mäßig hohen Einsatz zu bezahlen.

Mit Hilfe des von DANIEL BERNOULLI (1738) eingeführten und nach ihm benannten Kriteriums der Nutzenerwartung kann das obige Paradox aufgelöst werden. Anstelle der Gewinnauszahlung in Geld bewertet man den NUTZEN des Geldes.

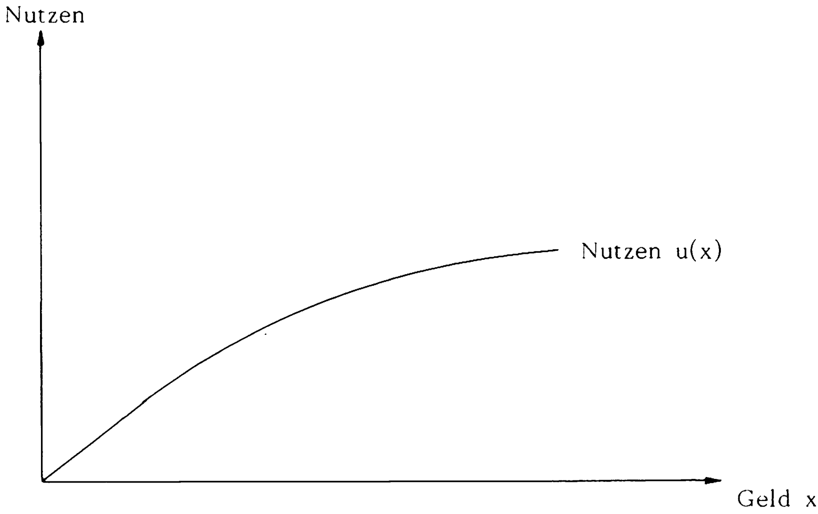


Abb. 20.1: Nutzenfunktion u

u(x): Nutzen des Ergebnisses x

Eine Nutzenfunktion wird, wenn überhaupt, nur bei kleinen Auszahlungen linear sein. Insgesamt ist sie nach oben beschränkt. Solange sie unbeschränkt bliebe, ließen sich immer neue Paradoxen konstruieren. Nach allgemeinen ökonomischen Überlegungen wird die Nutzenfunktion als konkav angenommen.

Der erwartete Nutzen ist

$$E_{P_a}\{u(x)\} = \int u(x) dP_a(x) \; ,$$

und nach dem Nutzenkriterium ist

$$a_1 \text{ besser als } a_2, \text{ falls } E_{P_{a_1}}\{u(x)\} > E_{P_{a_2}}\{u(x)\} \; .$$

Woher weiß man, daß die Entscheidungen anhand des BERNOULLI-PRINZIPS gut sind? Zunächst versucht man, einige möglichst einleuchtende Konsequenzen aus diesem Prinzip herzuleiten. Je mehr plausible Konsequenzen man findet, umso plausibler wird das Bernoulli-Prinzip selbst.

JOHN V. NEUMANN und OSKAR MORGENSTERN haben ein Axiomensystem für rationales Verhalten begründet, die das Bernoulli-Prinzip implizieren, die sog. Nutzenaxiomatik. Diese Axiome sind selbst plausibel, obwohl es auch hier Zweifler gibt (ALLAIS).
Eine ausführliche Darstellung der Entscheidungstheorie unter Risiko bzw. Unsicherheit findet man in H. SCHNEEWEISS (1967) und DE GROOT (1970).

§21 ZINS, KONTINUIERLICHE VERZINSUNG, GEGENWARTSWERT

Zins

Warum gibt es einen Zins? Offensichtlich ist auch bei Inflationsrate Null eine Geldeinheit heute mehr wert als in einem Jahr. Der Grund hierfür liegt darin, daß die Verfügung über Geld einen Ertrag einbringt, der dann als Zins i ausgezahlt werden kann. Bei Zeitumkehrung wird aus der Verzinsung die Diskontierung.

$$\begin{array}{ccc} \text{heute} & & \text{in einem Jahr} \\ 1 & \xrightarrow{\text{Verzinsung}} & 1 + i \\ \rho := \dfrac{1}{1+i} & \xleftarrow{\text{Diskontierung}} & 1 \end{array}$$

i: Zins;
$1 + i$: Zinsfaktor;
$1/(1+i)$: Diskontfaktor ρ; zur Berechnung des Gegenwartswertes eines zukünftigen Ertrages.

Kontinuierliche Verzinsung

i ist üblicherweise der Jahreszins. Bei halbjährlicher Auszahlung wächst das Kapital um den Faktor $(1 + i/2)^2$, bei n Auszahlungen pro

Jahr um $(1 + i/n)^n$. Im Grenzübergang erhält man die kontinuierliche Wachstumsrate des Kapitals

kontinuierliche Verzinsung: $\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{i}{n})^n = e^i$.

Wegen

$$e^i = 1 + i + \frac{i^2}{2} + \ldots > 1 + i$$

ist die kontinuierliche Verzinsung höher als die diskrete. Umgekehrt entspricht einem Jahreszins i eine Zinsintensität $r < i$.

Zinsintensität r: $\boxed{1 + i = e^r}$ (21.1)

$$r = \ln(1 + i) = i - \frac{i^2}{2} + \frac{i^3}{3} \mp \ldots$$

Der Diskontfaktor ρ ergibt sich aus (21.1) zu

$$\boxed{\rho = \frac{1}{1 + i} = e^{-r}} \quad . \tag{21.2}$$

Gegenwartswert

Wir betrachten jetzt einen Strom zukünftiger Zahlungen, die zu äquidistanten Zeitpunkten (Jahresende) $t = 0,1,2,3,\ldots$ eingehen. Für das Entscheidungsproblem ist es notwendig, den Zahlungsstrom in Bezug auf einen bestimmten Zeitpunkt zu bewerten. Üblicherweise wählt man dazu den Endpunkt oder (häufiger) den Gegenwartszeitpunkt. Im letzten Fall errechnet man den sog. Gegenwartswert (sonst den Endwert). Der Gegenwartswert wird i.a. vorgezogen, weil wir jetzt handeln müssen. Sei

z_t: Zahlungsstrom, $t = 0,1,\ldots,T$

G: Gegenwartswert. Er ist definiert als

$$G_\rho = \sum_{t=o}^{T} \frac{z_t}{(1 + i)^t} = \sum_{t=o}^{T} z_t \rho^t$$

Neben dem Geldvolumen ist auch die durchschnittliche Zahlung

C: Durchschnittswert

eine wichtige Kenngröße des Zahlungsstromes. C ist die durchschnittliche Zahlung pro Zeiteinheit

$$C = \frac{1}{T+1} \sum_{t=o}^{T} z_t \ .$$

Zwischen C und G besteht ein Zusammenhang.

$$C = \lim_{\rho\to 1} \frac{G_\rho}{1 + \rho + \rho^2 + \ldots + \rho^T} =$$

$$\lim_{\rho\to 1} \frac{1-\rho}{1-\rho^{T+1}} G_\rho \ .$$

Bei stationären Modellen mit unendlichem Planungshorizont ist der Zahlungsstrom unendlich lang. Dann ist

$$\boxed{C_{(T=\infty)} = \lim_{\rho\to 1} (1-\rho) G_\rho} \ . \tag{21.3}$$

§22 LAGERHALTUNG BEI POISSON NACHFRAGE UND SOFORTIGER LIEFERUNG

Eines der einfachsten stochastischen Lagerhaltungsmodelle ist die Lagerhaltung bei Poisson Nachfrage und sofortiger Lieferung. Dieses Modell ist vor allem deshalb interessant, weil es mit Methoden behandelt wird, die sich von den bisherigen völlig unterscheiden (Dynamische Optimierung). Da für die Nachfrage ein Poisson-Prozeß unterstellt wird, spielt die Zeit vor der letzten Nachfrage keine Rolle.

Die Lagerhaltung wird als ein Geschäft betrachtet, das einen Gewinn abwirft. Der Gegenwartswert zukünftiger Gewinne ist abhängig vom Anfangsbestand y: G = G(y). Wir formulieren G(y) rekursiv in der Zeit, indem wir die Zukunft in eine unmittelbar vor uns liegende kleine Zeitspanne Δt und die Restspanne zerlegen. Wegen der Poisson Nachfrage braucht t nicht explizit als Argument von G geführt zu werden. Es ist für alle y

$$G(y) = \underbrace{-hy\Delta t}_{1)} + \underbrace{(1 - \lambda\Delta t)}_{2)}\underbrace{G(y)e^{-r\Delta t}}_{3)} +$$

$$+ \underbrace{\lambda\Delta t}_{4)}[\underset{5)}{\underset{\uparrow}{b}} + \text{Max}\ \{\underbrace{-k - a(D - y + 1)}_{6)} + \underbrace{G(D)e^{-r\Delta t}}_{7)} \mid \underbrace{G(y-1)e^{-r\Delta t}}_{8)}\}] \qquad (22.1)$$

1) Lagerkosten während Δt
2) Wahrscheinlichkeit, daß keine Nachfrage in Δt aufgetreten ist
3) Gegenwartswert nach Δt
4) Wahrscheinlichkeit, daß Nachfrage in Δt aufgetreten ist
5) Gewinn aus dem Verkauf
6) Bestellkosten
7) Gegenwartswert nach Δt, falls Bestellung
8) Gegenwartswert nach Δt, falls keine Bestellung

Beachte: Bei Poisson Nachfrage wird pro Ereignis nur eine Einheit nachgefragt.

Die Rekursion (22.1) formuliert das "Prinzip der Optimalität" der Dynamischen Optimierung (BELLMAN's PRINCIPLE OF OPTIMALITY, BELLMAN (1957), BECKMANN (1968)).

Diese Gleichung kommt so zustande:
Der gegenwärtige Lagerbestand ist y. Der Gegenwartswert G(y) ist der auf die Gegenwart bezogene Wert aller zukünftigen Kosten und Erträge. Sie stehen auf der rechten Seite von (22.1), aber jetzt aufgeteilt in die Zeitspanne Δt und die Restspanne. Zunächst fallen für eine kleine Zeitspanne Δt die Lagerkosten an (Term 1). Am Ende von Δt Zeiteinheiten addieren wir zu den bis dahin angefallenen Lagerkosten die Gewinne der Restspanne. Deren Wert hängt davon ab, ob nach Δt eine Nachfrage auftritt oder nicht und ob man, falls eine aufgetreten ist, bestellt oder nicht.

Fall 1: keine Nachfrage aufgetreten: Terme 2) und 3)

Fall 2: Nachfrage aufgetreten mit Wahrscheinlichkeit $\lambda\Delta t$

Fall 2a: Losgröße D bestellen: Terme 6) und 7)

Fall 2b: nichts bestellen: Term 8)

In jedem Fall müssen auch die Kosten und Gewinne der Restspanne auf die Gegenwart diskontiert werden; deshalb der Faktor $e^{-r\Delta t}$. Die Diskontierung der Lagerkosten hy innerhalb des Zeitraumes Δt wird nicht durchgeführt (man kann die Lagerkosten so interpretieren, daß die Diskontierung, d.h. die Zinskosten, bereits in h enthalten ist).

Die Lösung dieser Funktionalgleichung (22.1) bestimmt für jedes y eine zugehörige optimale Entscheidung. Das ist diejenige Aktion, die das Maximum auf der rechten Seite von (22.1) liefert. Da die Funktionalgleichung für alle zulässigen y gelöst wird, erhält man zu jedem y eine optimale Handlungsanweisung und damit insgesamt eine Entscheidungsregel oder Strategie.

Im vorliegenden Fall ist die Entscheidungsregel bereits vorstrukturiert. D ist jetzt nicht die Losgröße, sondern der Bestand, auf den das Lager aufgefüllt wird. Wie eine kurze Überlegung zeigt, rentiert sich eine Bestellung erst dann, wenn das Lager auf Null abgesunken ist. Würde man nämlich bei $y_o > 0$ bestellen, dann würde man einen konstanten "Bodensatz" y_o im Lager halten, den man nie angreifen würde. Aufgrund dieser Überlegung wird D doch wieder die Losgröße und aus (22.1) wird

$$G(y) = -hy\Delta t + (1 - \lambda\Delta t)\, G(y)e^{-r\Delta t} + \lambda\Delta t(b + G(y-1)e^{-r\Delta t}),\ y > 1, \quad (22.2)$$

$$G(1) = -h\Delta t + (1 - \lambda\Delta t)\, G(1)e^{-r\Delta t} + \lambda\Delta t(b - k - aD + G(D)e^{-r\Delta t}). \quad (22.3)$$

(22.3) ist die Randbedingung zur Differenzengleichung (22.2).
Approximiert man
$e^{-r\Delta t}$ durch $1 - r\Delta t$, erhält man

$$\begin{aligned} G(y) = {} & -hy\Delta t + G(y) - G(y)(\lambda + r)\Delta t + \lambda\Delta tb + \\ & + \lambda\Delta tG(y - 1) + o(\Delta t)^2 \end{aligned}$$

$$G(1) = -h\Delta t + G(1) - G(1)(\lambda + r)\Delta t + \lambda\Delta t(b - k - aD) + \\ + G(D)\lambda\Delta t + o(\Delta t)^2 ,$$

und daraus mit der Abkürzung $\rho := \frac{\lambda}{\lambda + r}$ und unter Vernachlässigung der Terme $o(\Delta t)^2$

$$G(y) = -\frac{\rho}{\lambda} hy + \rho b + \rho G(y - 1) \quad , \tag{22.4}$$

$$G(1) = -\frac{\rho}{\lambda} h + \rho b + \rho(-k - aD + G(D)) \quad . \tag{22.5}$$

(22.4) ist eine Differenzengleichung 1. Ordnung mit der Randbedingung (22.5). Die Lösung dieser Differenzengleichung erhält man durch sukzessives Einsetzen

$$G(D) = \rho b - \frac{\rho hD}{h} + \rho(\rho b - \frac{\rho h(D - 1)}{\lambda} + \rho(\rho b - \frac{\rho h(D - 2)}{\lambda} + \\ + \ldots + \rho(\rho b - \frac{\rho}{\lambda}h \cdot 2 + \rho G(1))\ldots)) =$$

$$= \frac{1}{1 - \rho^D}\left\{\rho b \, \frac{1 - \rho^D}{1 - \rho} - \frac{h\rho}{\lambda} \sum_{i=o}^{D-1} (D - i)\rho^i - \rho^{D-1}(k + aD)\right\} =$$

$$= \frac{\rho b}{1 - \rho} - \frac{\rho}{1 - \rho^D}\left\{\frac{h}{\lambda} \sum_{i=o}^{D-1} (D - i)\rho^i + \rho^{D-1}(k + aD)\right\}. \tag{22.6}$$

Wir interpretieren diese Formel. Es ist

$\frac{1}{\lambda}$	: mittleres Intervall zwischen zwei Nachfragen
$\frac{r}{\lambda}$	: der auf das Intervall $\frac{1}{\lambda}$ anwendbare Zinssatz
$\rho = \frac{1}{1 + \frac{r}{\lambda}}$	: Diskontfaktor für das Zeitintervall $\frac{1}{\lambda}$
ρ^D	: Diskontfaktor für einen Zyklus
$\frac{b}{1 - \rho^D}$	: Gegenwartswert aller Gewinne

$\frac{1}{1-\rho^D}\{\quad\}$: Gegenwartswert aller Zyklenkosten

$\frac{h}{\lambda}\sum_{i=o}^{D-1}(D-i)\rho^i$: mittlere Lagerkosten eines Zyklus (innerhalb des Zyklus diskontiert)

Legen wir jetzt den Entscheidungszeitpunkt ganz an den Anfang, wo noch kein Bestand vorhanden ist. Dort gilt

$$G(0) = -k - aD + G(D).$$

Wir setzten G(D) aus (20.6) ein und erhalten

$$G(0) = \frac{-k - aD - \frac{h\rho}{\lambda}\sum (D-i)\rho^i}{1-\rho^D} + \rho\frac{b}{1-\rho} . \qquad (22.7)$$

Der Zähler Z des ersten Bruchs auf der rechten Seite von (22.7) repräsentiert die Kosten pro Zyklus. $Z/(1-\rho^D) = Z(1+\rho^D+(\rho^D)^2+\dots)$ ist der Gegenwartswert aller Zyklenkosten. Der Term $\rho b/(1-\rho)$ ist der Gegenwartswert aller Gewinne. (Beachte: es geht keine Nachfrage verloren.) Er ist unabhängig von D.
Nur die Kosten sind von D abhängig. Das läßt darauf schließen, daß man das Problem auch einfacher hätte formulieren können, nämlich als Kostenminimierungsproblem anstatt als Gewinnmaximierungsproblem.
Wie das Kostenminimierungsproblem genau lautet, wollen wir jetzt aus (22.7) entwickeln.

Die Summe $\sum_{i=o}^{D-1}(D-i)\rho^i$ läßt sich umformen

$$\sum_{i=o}^{D-1}(D-i)\rho^i = \sum_{j=o}^{D-1}\rho^j + \sum_{j=o}^{D-2}\rho^j + \dots + \sum_{j=o}^{o}\rho^j =$$

$$= \frac{1-\rho^D}{1-\rho} + \frac{1-\rho^{D-1}}{1-\rho} + \dots + \frac{1-\rho}{1-\rho} =$$

$$= \frac{1}{1 - \rho}\left(D - \frac{\rho}{1 - \rho}(1 - \rho^D)\right).$$

Damit wird (20.7) zu

$$G(0) = \underbrace{\rho\frac{b}{1 - \rho}}_{\text{const.}} - \frac{k + aD}{1 - \rho^D} - \frac{h\rho}{\lambda}\frac{D}{(1 - \rho)(1 - \rho^D)} + \underbrace{\frac{h\rho^2}{\lambda}\frac{1}{(1 - \rho)^2}}_{\text{const.}} \quad . \qquad (22.8)$$

Der letzte Term in dieser Gleichung ist eine Konstante, ebenso der Gegenwartswert der Gewinne $\rho b/(1 - \rho)$, so daß (22.8) die Form

$$G(0) = \text{Konstante} - C_1$$

annimmt. Der von D abhängige Term C_1 subsummiert alle negativen Glieder in der Gewinnfunktion G(0). Er repräsentiert deshalb alle Kosten.

Mit $k + aD =: K$ lautet das so erhaltene Kostenminimierungsproblem

$$C_1 = \frac{K\lambda(1 - \rho) + h\rho D}{\lambda(1 - \rho)(1 - \rho^D)} \to \underset{D}{\text{Min}} \quad ,$$

bzw. nach Vereinfachung

$$\boxed{C = \frac{K\lambda(1 - \rho) + h\rho D}{1 - \rho^D} \to \underset{D}{\text{Min}}} \quad . \qquad (22.9)$$

C ist konvex. Deshalb wird das Minimum bestimmt durch $\frac{dC}{dD} = 0$. Wir substituieren

$$\rho := e^{-r}$$

und erhalten

$$\frac{dC}{dD} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$[a\lambda(1 - \rho) + h\rho](1 - \rho^D) - r\rho^D[(k + aD)\lambda(1 - \rho) + h\rho D] \stackrel{!}{=} 0$$

$$a\lambda(1 - \rho)[1 - \rho^D - rD\rho^D] + h\rho[1 - \rho^D - rD\rho^D] = r\rho^D k\lambda(1 - \rho)$$

$$[a\lambda(1-\rho)+h\rho][1-\rho^D-rD\rho^D] = r\rho^D k\lambda(1-\rho)$$

$$\rho^{-D} - 1 - rD = \frac{rk\lambda}{a\lambda + h\dfrac{\rho}{1-\rho}}$$

$$\boxed{e^{rD} - 1 - rD = \frac{rk\lambda}{a\lambda + h\dfrac{1}{e^r - 1}}} \quad . \tag{22.10}$$

Wir entwickeln e^{rD} in eine Taylorreihe

$$\frac{r^2D^2}{2} + \frac{r^3D^3}{3!} + \ldots = \frac{rk\lambda}{a\lambda + h\dfrac{1}{e^r - 1}} \quad .$$

Für $r \ll 1$ ist $e^r - 1 \approx r$ und man erhält die Näherung

$$\frac{r^2D^2}{2} \approx \frac{r^2k\lambda}{a\lambda r + h}$$

$$\boxed{D \approx \sqrt{\frac{2\lambda k}{a\lambda r + h}}} \quad . \tag{22.11}$$

Dieses Ergebnis zeigt, daß sich der durch den Zins hervorgerufene Effekt als Erhöhung des Lagerkostensatzes von h auf $a\lambda r + h$ interpretieren läßt. Die optimale Losgröße wird umso kleiner, je höher die Zinsen sind.

Im Limes $\rho \to 1$ ist

$$D = \sqrt{\frac{2\lambda k}{h}} \quad . \tag{22.12}$$

Das Ergebnis im nichtdiskontierten Fall läßt sich auch direkt aus (22.8) herleiten. Aus (21.3) wissen wir

$$C_{(T=\infty)} = \lim_{\rho\to 1} (1-\rho)G_\rho .$$

Also wird

$$\lim_{\rho\to 1} (1 - \rho)G_\rho(0) = \lim_{\rho\to 1} (1 - \rho) \cdot \left[\frac{\rho b}{1 - \rho} - \frac{k + aD + \frac{h}{\lambda} \sum\limits_{i=o}^{D-1} (D-i)\rho^i}{1 - \rho^D} \right] .$$

$$(1 - \rho)G_\rho(0) = \rho b - \frac{k + aD + \frac{h}{\lambda} \sum\limits_{i=o}^{D-1} (D - i)\rho^i}{1 + \rho + \rho^2 + \ldots + \rho^{D-1}}$$

$$\lim_{\rho\to 1} (1 - \rho)G_\rho(0) = b - \frac{k}{D} - a - \frac{h}{\lambda} \cdot \frac{(D + 1)}{2}$$

$$= \text{Konstante} - C_{1,\rho = 1} \quad ,$$

und wir erhalten das zum deterministischen Modell äquivalente Problem der Kostenminimierung

$$\min_D C_{1,\rho = 1} = \min_D \left\{ \frac{k}{D} + \frac{h(D + 1)}{2\lambda} \right\} \quad ,$$

woraus ebenfalls (22.12) folgt.

§23 POISSON NACHFRAGE, KEINE DISKONTIERUNG

Im vorigen Paragraphen haben wir den Fall ohne Diskontierung gewissermaßen "über die Hintertüre" durch die Grenzwertbildung $\rho \to 1$ mitbehandelt. Jetzt wollen wir das entsprechende Modell mit Hilfe des Prinzips der Optimalität formulieren.

Der Fall ohne Diskontierung enthält begriffliche Schwierigkeiten, da sämtliche Gegenwartswerte von Erlös und Kosten unendlich groß werden. Es zeigt sich, daß in diesem Fall die Minimierung der Kostenzuwachsrate eine geeignete Zielfunktion darstellt. Das daraus entstehende Modell wird in diesem Abschnitt behandelt.

Unter der bisherigen Annahme, daß keine Fehlmengen zugelassen werden, ist es vernünftig, die Gewinne aus den Verkäufen außer acht zu lassen. Wegen fehlender Diskontierung wirken sich Verschiebungen bei den Realisierungszeitpunkten der Gewinne sowieso nicht aus. Wichtig ist nur der Gesamtgewinn. Da der Gesamterlös von der Lagerhaltungspolitik nicht beeinflußt wird, wählen wir einen Kostenansatz. Sei

Θ : Planungshorizont

$l_\Theta(y)$: Kostenfunktion (engl. LOSS FUNCTION) bei Lageranfangsbestand y und Planungshorizont Θ

$l(y)$: $\lim\limits_{\Theta\to\infty} l_\Theta(y)$, falls er existiert.

Da im nichtdiskontierten Fall die Kosten auf lange Sicht proportional zur Zeit t sind, wird $l_\Theta(y)$ für sehr große Θ asymptotisch linear wachsen.

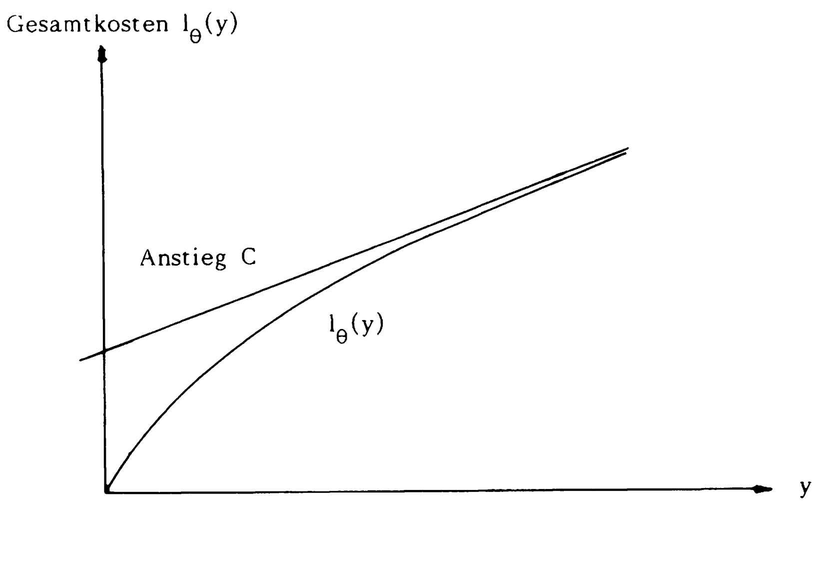


Abb. 23.1: asymptotisch lineare Gesamtkosten

Im stationären Fall ist deshalb

C: Kostenzuwachs pro Zeiteinheit

eine konstante Größe. Es gilt für $\Theta \to \infty$:

$$l_\Theta(y) = C\Delta t + l_{\Theta-\Delta t}(y) \ . \tag{23.1}$$

Aus dem rekursiven Ansatz (beachte: mit zunehmender Kalenderzeit verkürzt sich der Planungshorizont)

$$\begin{aligned} l_\Theta(y) &= hy\Delta t + (1 - \lambda\Delta t) l_{\Theta-\Delta t}(y) + \lambda\Delta t l_{\Theta-\Delta t}(y-1) \ , \qquad y > 1 \\ l_\Theta(1) &= h\Delta t + (1 - \lambda\Delta t) l_{\Theta-\Delta t}(1) + \lambda\Delta t[k + aD + l_{\Theta-\Delta t}(D)] \ , \end{aligned} \tag{23.2}$$

wird dann

$$\begin{aligned} C\Delta t + l_{\Theta-\Delta t}(y) &= hy\Delta t + (1 - \lambda\Delta t) l_{\Theta-\Delta t}(y) + \lambda\Delta t l_{\Theta-\Delta t}(y-1) \ , \\ & \qquad y > 1 \\ C\Delta t + l_{\Theta-\Delta t}(1) &= h\Delta t + (1 - \lambda\Delta t) l_{\Theta-\Delta t}(1) + \lambda\Delta t[k + aD + l_{\Theta-\Delta t}(D)] \ . \end{aligned} \tag{23.3}$$

Hier ist wieder unterstellt, daß erst bei y = 0 bestellt wird. Der Versuch muß zeigen, ob dieser naive Ansatz gelungen ist, d.h. ob sich daraus vernünftige Resultate für l und D ableiten lassen.

Wir stellen (23.3) in der Form dar

$$\begin{aligned} C\Delta t + \lambda\Delta t l_{\Theta-\Delta t}(1) &= h\Delta t + \lambda\Delta t(k + aD) + \lambda\Delta t l_{\Theta-\Delta t}(D) \\ C\Delta t + \lambda\Delta t l_{\Theta-\Delta t}(2) &= 2h\Delta t + \lambda\Delta t l_{\Theta-\Delta t}(1) \\ &\vdots \\ C\Delta t + \lambda\Delta t l_{\Theta-\Delta t}(D) &= Dh\Delta t + \lambda\Delta t l_{\Theta-\Delta t}(D-1) \ . \end{aligned} \tag{23.4}$$

Bei Summierung dieser Gleichungen fallen die l-Terme weg. Es bleibt

$$DC = h \sum_{i=1}^{D} i + \lambda(k + aD) \ ,$$

also

$$C = \frac{h(D+1)}{2} + \frac{\lambda k}{D} + \lambda a \quad . \tag{23.5}$$

Dies ist die stationäre Kostenrate (Kosten eines Zyklus pro Zeiteinheit). Sie gilt es zu minimieren:

$$\frac{h(D+1)}{2} + \frac{\lambda k}{D} + \lambda a \rightarrow \underset{D}{\mathrm{Min}} \quad .$$

Dieselbe Zielfunktion hatten wir schon im deterministischen Modell. Es gilt also auch bei Poisson Nachfrage ohne Diskontierung die WILSON Formel

$$\boxed{D^* = \sqrt{\frac{2\lambda k}{h}}} \quad . \tag{23.6}$$

Wie läßt sich C im stochastischen Sinne interpretieren?

Die verschiedenen Lagerbestände $y = 1,2,\ldots,D$ sind die möglichen Zustände des Systems. Die Wahrscheinlichkeit π_y, das System im Zustand y zu finden, ist wegen der konstanten Nachfragerate λ = const für alle Zustände gleich

$$\pi_y = \frac{1}{D}, \qquad y = 1,2,\ldots,D.$$

Schreiben wir nun (23.5) in der Form

$$C = h \underbrace{\sum_{y=1}^{D} y \frac{1}{D}}_{1)} + \underset{\uparrow\,2)}{\frac{1}{D}} \underset{\uparrow\,3)}{\lambda}(k + aD) \quad . \tag{23.7}$$

1) mit Wahrscheinlichkeit 1/D ist der Lagerbestand y
2) Wahrscheinlichkeit, das System im Zustand y = 1 zu finden
3) mit Rate λ wird y = 0 und es ist die Zahlung k + aD fällig,

so läßt sich (23.7) als der Erwartungswert der Kosten eines Zyklus interpretieren

$$C = \sum_{y=1}^{D} c_y \pi_y$$

c_y: mittlere Kosten eines Zyklus pro Zeiteinheit im Zustand y.

Die Zustandswahrscheinlichkeiten π_y (im vorliegenden Fall ist $\pi_y = \frac{1}{D}$) sind abhängig von der Losgröße D.

Die Methode, das optimale D über die Minimierung von (23.7) zu finden, nennt man die METHODE DER ZUSTANDSWAHRSCHEINLICHKEITEN. (Darüber mehr in §31.)
Interessant ist, daß im vorliegenden Fall beide Ansätze zur selben Zielfunktion, nur in verschiedener Gestalt, führen.

§24 REKURRENTER PROZEß

Sei jetzt $\lambda = \lambda(t)$ von der Zeit abhängig, die seit dem letzten Ereignis verstrichen ist. Diese Situation kann z.B. auf einen Zeitungskiosk zutreffen, der an einer Straßenbahnhaltestelle steht. Die Kundschaft bilden hauptsächlich die Straßenbahnfahrer. In der Regel ist die Straßenbahn unpünktlich. Das Intervall zwischen zwei Ankünften ist dann stochastisch. Unter der obigen Annahme ist die Ankunftswahrscheinlichkeit abhängig von der seit der letzten Ankunft verstrichenen Zeit.

Je länger die Straßenbahn auf sich warten läßt, desto größer wird die Wahrscheinlichkeit, daß sie im nächsten Augenblick kommt.

Der Zustandsraum ist jetzt zweidimensional:
Lager y und Zeit t seit der letzten Nachfrage. Es ist

$l_\Theta(y,t)$: Kostenfunktion bei Lageranfangsbestand y und Planungshorizont Θ, wobei seit der letzten Nachfrage die Zeit t verstrichen ist.

Wir nehmen wieder an, daß die Kostenfunktion bei festem y für $\Theta \to \infty$ linear mit der Zeit wächst, und zwar mit der Rate C. Dann führt der Ansatz "Gesamtkosten morgen = Gesamtkosten heute + C" analog zu (23.1) auf die Gleichung

$$l_{\Theta}(y,\ t + \Delta t) = l_{\Theta-\Delta t}(y,t) + C\Delta t \ . \tag{24.1}$$

Entsprechend (23.2) lautet der rekursive Ansatz

$$l_{\Theta}(y,t + \Delta t) = hy\Delta t + [1 - \lambda(t)\Delta t]l_{\Theta-\Delta t}(y,t + \Delta t) +$$

$$+ \lambda(t)\Delta t \ \mathrm{Min}\{l_{\Theta-\Delta t}(y - 1,0),\ \underset{x>0}{\mathrm{Min}}\{k + ax + l_{\Theta-\Delta t}(x,0)\}\}_{y>1} \ , \tag{24.2}$$

da jetzt eine Nachfrage aufgetreten ist

$$l_{\Theta}(1,t + \Delta t) = h\Delta t + [1 - \lambda(t)\Delta t]l_{\Theta-\Delta t}(1,t + \Delta t) +$$

$$+ \lambda(t)\Delta t \ \underset{x>0}{\mathrm{Min}}\ \{k + ax + l_{\Theta-\Delta t}(x,0)\} \ . \tag{24.3}$$

Wegen der Stationarität der Kostenzuwächse ($\Theta \to \infty$) brauchen wir den Planungshorizont Θ nicht mehr explizit zu berücksichtigen und verzichten deshalb von nun an auf den Index Θ bzw. $\Theta - \Delta t$.

Die Funktionalgleichungen (24.2) (24.3) sind diskret in y und kontinuierlich in t. Es wird im folgenden durch Rechnung gezeigt, daß sie sich für $\Delta t \to 0$ so umformen lassen, daß die Kostenfunktion l nur noch in Abhängigkeit von y im Zeitpunkt t = 0 auftritt. Der Prozeß interessiert demnach nur zu den Übergangszeitpunkten (für die Funktion $\lambda(t)$ sind dies die Erneuerungszeitpunkte, dort wird $\lambda(t)$ auf den Startwert $\lambda(0)$ zurückgesetzt) Ein derartiger Prozeß heißt rekurrenter Prozeß.

Wir treffen wieder die Annahme: Bestellmenge $x(y) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad y > 0 \ , \\ D & \text{für} \quad y = 0 \ . \end{cases}$

Dann wird aus (24.2) unter Verwendung von (24.1):

$$\frac{-l(y,\ t + \Delta t) + l(y,t)}{\Delta t} + \lambda(t)l(y,t + \Delta t) = hy - C + \lambda(t)l(y - 1,0)$$

und für $\Delta t \to 0$ wird daraus die lineare Differentialgleichung

$$-\frac{\partial l(y,t)}{\partial t} + \lambda(t)l(y,t) = hy - C + \lambda(t)l(y-1,0) \quad . \tag{24.4}$$

Zwischenrechnung: Wir lösen (24.4) durch Integration. Nochmals (24.4):

$$-\dot{l} + \lambda(t)l = hy - C + \lambda(t)l(y-1,0).$$

Die Integration wird leicht, wenn die linke Seite die Ableitung eines Produktes $l \cdot f$ ist.

Um dies zu erreichen, multiplizieren wir (24.4) mit $f(t)$, dem sog. <u>integrierenden Faktor</u>

$$f(t) = e^{-\int_0^t \lambda(x)dx} \quad .$$

Die linke Seite der obigen Gleichung wird damit zu

$$-\dot{l}f + l\lambda f,$$

und das ist wegen der speziellen Gestalt von f identisch mit der Ableitung von lf

$$-\dot{l}f + l\lambda f = -\frac{\partial}{\partial t}(lf) \quad .$$

Damit wird (24.4) zu

$$-\frac{\partial}{\partial t}(lf) = [hy - C + \lambda(t)l(y-1,0)]f \quad ,$$

und es bleibt nur noch die rechte Seite zu integrieren. Man erhält mittels partieller Integration

$$\int_0^\infty f(t)dt = \int_0^\infty 1\cdot \underbrace{e^{-\int_0^t \lambda(x)dx}}_{1)} = tf(t)\Big|_0^\infty + \underbrace{\int_0^\infty \underbrace{t\lambda(t)e^{-\int_0^t \lambda(x)dx}}_{2)} dt}_{3) =:\ \alpha} .$$

1) Wahrscheinlichkeit, daß kein Ereignis bis zur Zeit t eintritt

2) Wahrscheinlichkeit, daß ein Ereignis zur Zeit t eintritt

3) Erwartungswert des Zeitintervalles bis zum nächsten Ereignis

Die Integration der gesamten Gleichung ergibt

$$-lf\Big|_0^\infty = (hy - C)\alpha + l(y - 1{,}0) \int_0^\infty \lambda(t)e^{-\int_0^t \lambda(x)dx}$$

$$-lf\Big|_0^\infty = (hy - C)\alpha + l(y - 1{,}0)(-1)e^{-\int_0^t \lambda(x)dx}\Big|_0^\infty .$$

Wir setzen $l(y,\infty)\cdot 0 = 0$ voraus und erhalten als Lösung von (24.4)

$$l(y,0) = (hy - C)\alpha - l(y - 1{,}0) .$$

Damit ist jetzt die Zeit t eliminiert und wir erhalten das Zwischenergebnis

$$l(y) = (hy - C)\alpha - l(y - 1) . \tag{24.5}$$

Schreibt man die Rekursion (24.5) aus, erhält man

$l(y) = \alpha(hy - C) + l(y - 1) =$

$$= \alpha(hy - C) + (h(y - 1) - C) + [\ldots + \alpha(2h - C + l(1))] \ldots]] ,$$

und deshalb gilt insgesamt

$$l(y) = \alpha \cdot \sum_{i=2}^{y} (hi - C) + l(1) \quad , \qquad 1 < y \leq D \qquad (24.6)$$

$$l(1) = \alpha(h - C) + k + aD + l(D) \; .$$

(24.6) ist ein System von D Gleichungen in den D + 1 Unbekannten $l(1), l(2), \ldots, l(D), C$. Die Losgröße D wird als gegeben angesehen und später durch Minimieren bestimmt. Aus dem gewählten Optimierungskriterium "minimiere den stationären Kostenzuwachs pro Zeiteinheit" folgt, daß das optimale D nur von den relativen Werten von l zueinander abhängt. Da deshalb eines der l(y) willkürlich gewählt werden kann, setzen wir

$$l(1) := \alpha(h - C)$$

und erhalten

$$l(y) = \alpha \sum_{i=1}^{y} (hi - C)$$

bzw.

$$\boxed{\begin{aligned} l(y) &= \frac{\alpha h y(y + 1)}{\lambda} - \alpha y C \\ l(1) &= \alpha(h - C) \end{aligned}} \quad , \; 1 < y \leq D \; . \qquad (24.7)$$

Bei Poisson Nachfrage ist

$$\alpha = \int_{0}^{\infty} t\lambda e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda} \quad ,$$

und (24.7) wird zu

$$l(y) = \frac{hy(y + 1)}{2\lambda} - \frac{yC}{\lambda} \; , \; 1 < y \leq D \quad , \qquad (24.8)$$

$$l(1) = \frac{1}{\lambda}(h - C) .$$

Diese Spezialisierung ist jedoch nicht wesentlich.

$l(y)$ heißt WERTFUNKTION der Dynamischen Optimierung. Durch Summieren der Gleichungen (24.6) eliminiert man die $l(y)$ und gelangt damit auch in diesem Fall (vgl. (23.5)) zur Kostenfunktion

$$C = \frac{h(D + 1)}{2} + \frac{\lambda k}{D} + \lambda a \quad , \tag{24.9}$$

woraus sich die optimale Losgröße

$$\boxed{D^* = \sqrt{\frac{2\lambda k}{h}}} \tag{24.10}$$

ergibt.

§25 OPTIMALITÄTSBEWEIS

Obige Ergebnisse wurden unter der Annahme einer fest vorgegebenen Struktur der optimalen Bestellregel von der Form "bestelle D, falls y = 0" hergeleitet. Nur innerhalb dieses Typs einer Bestellregel wurde optimiert. Annahmen und auch Ergebnisse scheinen plausibel. Es fehlt jedoch noch der Beweis, daß die optimale Bestellregel auch die vorgegebene Struktur besitzt.

Die nicht von vorneherein auf einen bestimmten Typ von Bestellregel festgelegte optimale Wertfunktion gehorcht den Funktionalgleichungen

$$l(y) + C\Delta t = hy\Delta t + [1 - \lambda\Delta t]l(y) + \lambda\Delta t \mathrm{Min}\,\{l(y - 1), \underset{x}{\mathrm{Min}}\,\{k + ax + l(x)\}\}, \quad y>1, \tag{25.1}$$

$$l(1) + C\Delta t = h\Delta t + [1 - \lambda\Delta t]l(1) + \lambda\Delta t \underset{x}{\mathrm{Min}}\,\{k + ax + l(x)\} \; .$$

Wir zeigen nun, daß unsere Resultate (24.8), (24.9), (24.10) diese Funktionalgleichungen erfüllen. Dazu setzen wir l, C und D aus (24.8), (24.9) und (24.10) in (25.1) ein.

<u>$l(x)$ eingesetzt:</u> Die Minimierung $\underset{x}{\mathrm{Min}}\{\ \}$ liefert

$$\underset{x}{\mathrm{Min}}\{k + ax + \frac{h(x+1)x}{2\lambda} - \frac{xC}{\lambda}\} \qquad \text{(konvex!)}$$

$$\frac{d}{dx} \overset{!}{=} 0: \quad a + \frac{h}{\lambda}x + \frac{h}{2\lambda} - \frac{C}{\lambda} = 0$$

$$x = \frac{C}{h} - \frac{1}{2} - a\frac{\lambda}{h} \quad .$$

<u>C aus (24.9) eingesetzt:</u>

$$x = \frac{D+1}{2} + \frac{\lambda a}{h} + \frac{\lambda k}{hD} - \frac{1}{2} - \frac{\lambda}{h}a$$

$$x = \frac{1}{2}(D + \frac{2k\lambda}{hD}) \quad . \tag{25.2}$$

D aus (24.10) eingesetzt:

$$x = \frac{1}{2}(D + \frac{D^2}{D}) = D \quad .$$

Damit wird

$$\underset{x}{\mathrm{Min}}\ \{k + ax + l(x)\} = 0$$

und

$$\mathrm{Min}\ \{l(y-1), 0\} = l(y-1) \ , \qquad y > 1 \ ,$$

denn

$$l(y) = \frac{y}{\lambda}\ [\underbrace{\frac{h(y+1)}{2} - C}_{<\,0}] \ , \qquad y > 1 \ .$$

Also erfüllt die Bestellregel "bestelle D, falls y = 0" insgesamt das Prinzip der Optimalität (25.1). Es bleibt noch zu zeigen, daß sie die einzige Lösung der Funktionalgleichungen (25.1) ist.

Sei $x = D' < \sqrt{\frac{2\lambda k}{h}}$ eine weitere Bestellmenge. D' in (25.2) eingesetzt

$$D' = \frac{1}{2}(D' + \frac{D^2}{D'}) \ , \qquad D' < D$$

führt zu dem Widerspruch

$$D' = \frac{D^2}{D'} > D \ . \tag{25.3}$$

Ebenso führt die Annahme $x = D' > D$ zum Widerspruch.

<u>Bemerkung 1:</u> $D^* = \sqrt{\frac{2\lambda k}{h}}$ ist die einzige reelle Lösung von (25.1). Da aber y und D auf ganzzahlige Werte eingeschränkt sind, können zwei benachbarte Bestellmengen D_1, D_2, $(D_2 = D_1 + 1)$ optimal sein.

<u>Bemerkung 2:</u> Es läßt sich zeigen, daß die Rechenschritte

1) Wähle D'

2) berechne damit $l(y)|_{D'}$ und $C(D')$
   aus (24.8), (24.9) und (24.10)

3) berechne damit $x = x(D')$ aus (25.2)

zu einer Verbesserung ''$x(D')$ ist besser als D' '' führen, d.h. $C(x(D')) < C(D')$, solange $D' \neq D^*$ ist. Die optimale Lösung D^* erhält man nach endlich vielen Verbesserungsschritten (einzige Voraussetzung: h, k, a sind alle nichtnegativ).
Diese Methode der Dynamischen Optimierung nennt man ENTSCHEIDUNGSITERATION. Eine sehr ausführliche Darstellung dieser Methode findet man in BECKMANN (1968) und HOWARD (1965).

KAPITEL III: STOCHASTISCHE EINPERIODEN-MODELLE

§26 DAS ZEITUNGSJUNGENPROBLEM

Modell mit proportionalen Fehlmengenkosten

Bis jetzt waren die Lagerhaltungsmodelle durch eine kontinuierliche Bestandsüberwachung gekennzeichnet. Zu jedem beliebigen Zeitpunkt konnte eine Bestellung aufgegeben werden. Im Gegensatz dazu stehen die Periodenmodelle. Bestandsinspektion und/oder Bestellung sind nur zu diskreten Zeitpunkten, d.h. zu Beginn einer Periode möglich. Sofern nichts anderes gesagt wird, sind die Perioden alle gleich lang.

Das einfachste Periodenmodell ist das Einperiodenmodell. Hier erstreckt sich das Entscheidungsproblem nur über eine einzige Periode. Derartige Lagerhaltungsprobleme treten auf, wenn man die Güter nach Ablauf der Periode nicht mehr verkaufen kann. Hierzu zählen z.B. Modeartikel, Reiseangebote und Kartenkontingente für Großveranstaltungen und auch Tageszeitungen. Für letztere formulieren wir das als Zeitungsjungenproblem bekannte Grundmodell.

Der Zeitungsjunge kauft frühmorgens einen Stoß Tageszeitungen und versucht, sie während des Tages zu verkaufen. Die übrig gebliebenen kann er nur mit einem Verlust zurückgeben. Hat er sich mit zuwenig Zeitungen eingedeckt, entgeht ihm ein Gewinn. Die Nachfrage ist ungewiß, jedoch sei ihre Verteilung bekannt. Sein Entscheidungsproblem lautet: Wieviele Zeitungen kaufe ich, um meine Gewinnerwartung zu maximieren?

Seien

x: Bestand an Zeitungsexemplaren, den sich der Zeitungsjunge frühmorgens zulegt

p_u: Wahrscheinlichkeit, daß u Exemplare verkauft werden

$P(u)$: Wahrscheinlichkeit, daß die Nachfrage (echt) kleiner als u ist

μ: Erwartungswert von u

h: Verlust pro nichtverkauftem aber bevorratetem Exemplar

g: Verlust pro Exemplar bei Fehlmenge (entgangener Gewinn und Kundenärger).

In typischen Entscheidungssituationen ist $g \gg h$.

Die Entscheidungsvariable ist der Anfangsbestand x. Unter der (nicht einschränkenden) Annahme, daß alle evtl. entstehenden Fehlmengen erst am Ende der Periode auftreten, läßt sich das Problem vereinfachen. Es genügt dann, die Situation am Ende der Periode zu betrachten. Die zeitliche Verteilung des Gewinnes während der Periode kann außer acht bleiben. Die Größe x ist so zu wählen, daß der erwartete Nutzen aus der Situation am Periodenende maximal wird:

$$\underset{x}{\mathrm{Max}}\ E\{\text{Nutzen am Periodenende}\}\ .$$

Die Nutzenfunktion hat hier die folgende Gestalt:

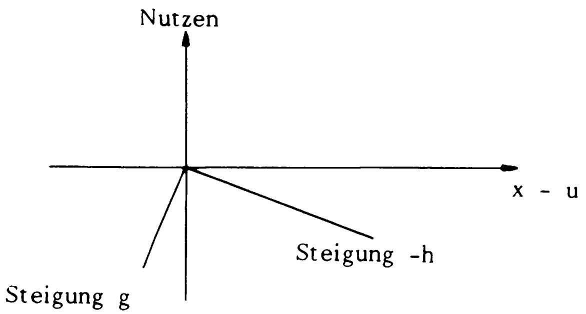


Abb. 26.1 Nutzenfunktion des Zeitungsjungen am Periodenende

Die Zielfunktion ist demnach

$$\underset{x}{\mathrm{Max}}\ \{-h \sum_{u=o}^{x} (x - u)p_u - g \sum_{u=x+1}^{\infty} (u - x)p_u\}$$

oder

$$\underset{x}{\mathrm{Min}} \; \{ \; h \sum_{u=o}^{x} (x - u)p_u + g \sum_{u=x+1}^{\infty} (u - x)p_u \}. \tag{26.1}$$

Da man in der Praxis nicht gerne mit unendlichen Summen arbeitet, ist es nützlich, die Zielfunktion umzuschreiben. Wir verwenden die Integraldarstellung

$$\underset{x}{\mathrm{Min}} \; \{ \; h \int_{o}^{x} (x - u)dP(u) + g \int_{x}^{\infty} (u - x)dP(u)\} =$$

$$\underset{x}{\mathrm{Min}} \; \{ \; (h + g) \int_{o}^{x} (x - u)p_u du + g(\mu - x)\} \; .$$

Mittels partieller Integration

$$(h + g) \int_{o}^{x} (x - u)p_u du = \underbrace{(h + g)(x - u)P(u)}_{= 0, \text{ da } P(u) = 0} \Big|_{o}^{x} + (h + g) \int_{o}^{x} P(u)du$$

erhält man die Zielfunktion

$$\boxed{\underset{x}{\mathrm{Min}}\{ \; (h + g) \int_{o}^{x} P(u)du + g(\mu - x)\}} \; . \tag{26.2}$$

Sie ist konvex, da $\frac{d^2}{dx^2} \int_{o}^{x} P(u)du = p_x \geq 0$ ist.

Aus $\frac{d}{dx} \{ \quad \} \overset{!}{=} 0$ folgt

$$(h + g)P(x) - g = 0$$

$$\boxed{x = P^{-1}(\frac{g}{h + g})} \; . \tag{26.3}$$

Diese Lösung ist leicht zu ermitteln. Dazu muß man nicht die ganze Verteilungsfunktion P kennen. Es genügt die Information über P in der

Umgebung des Punktes $\frac{g}{h+g}$. Der einfachste Weg zur Bestimmung von x ist folgender:

Wegen $$P(x) = \frac{g}{h+g}$$

ist $$1 - P(x) = \frac{h}{h+g}\ .$$

Sei $g = 10h$. Dann ist $1 - P(x) = \frac{1}{11} = 9\%$. Also muß x so gewählt werden, daß man an 9% aller Tage zuwenig Zeitungen hat.

Wir fragen nun:
Wie muß die Nachfrage beschaffen sein, daß sich die Eindeckung mit einem Anfangsbestand $x > 0$ lohnt? Eine Eckenlösung $x = 0$ tritt auf, wenn $g/(h + g)$ gerade den kritischen Wert $P(0)$ erreicht.
Das Geschäft lohnt sich erst bei

$$\frac{g}{h+g} > P(0).$$

Wenn also im obigen Beispiel an höchstens 91% aller Tage überhaupt eine Nachfrage auftritt, soll man das Geschäft aufgeben.

Modell mit nichtproportionalen Fehlmengenkosten

Um die Rechnung zu vereinfachen, wurde das zu lagernde Gut wie eine kontinuierliche Variable behandelt (z.B Öl). Wir wollen dies beibehalten. Tatsächlich bezogen sich die ersten Anwendungen von Operations Research und Statistik auf Lagerhaltungsprobleme bei der Versorgung von Schiffen u.a. mit Treibstoff für eine längere Seefahrt. In diesen Fällen hat es wenig Sinn, Fehlmengen mit proportionalen Kosten zu bewerten. Wenn auf hoher See drei oder fünf Einheiten eines wichtigen Gutes fehlen, ist dies beide Male gleich schlimm. Deshalb ist hier der Ansatz angebracht:

$$\min_x \left\{ h \int_o^x (x - u)dP(u) + G \int_x^\infty dP(u)\right\}\ . \tag{26.4}$$

G: konstanter Kostenwert für das Auftreten von Fehlmengen in beliebiger Höhe.

Die optimale Losgröße x bestimmt sich aus der Bedingung $\frac{d}{dx}\{\ \} \overset{!}{=} 0$, d.h.

$$hP(x) - Gp_x = 0 .$$

Sei die Nachfrage z.B. exponentialverteilt mit dem Erwartungswert $1/\lambda$: $P(x) = 1 - e^{-\lambda x}$. Dann ist

$$h(1 - e^{-\lambda x}) - G\lambda e^{-\lambda x} = 0$$

$$h = (h + G\lambda)e^{-\lambda x}$$

$$x = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\ln(h + G\lambda)}{\ln h} . \tag{26.5}$$

Durch geeignete Wahl der Einheit läßt sich stets $h > 1$ erreichen. Deshalb besagt (26.5), daß die Bevorratungsmenge stets größer sein muß als der erwartete Verbrauch.

§27 AUSWERTUNG VON $P(x) = \frac{g}{h + g}$

Eine der wichtigsten in der Praxis auftretenden Nachfrageverteilungen ist die Poissonverteilung (siehe §19). Betrachtet man das Auftreten der Nachfrage in großen Zeiträumen, geht die Poissonverteilung in eine Normalverteilung über mit der Dichte

$$p(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}} dx$$

μ: Erwartungswert

σ^2: Varianz.

Im mittleren Bereich läßt sich die Normalverteilung gut approximieren durch die

LOGISTIK: $P(x) = \dfrac{1}{1+e^{-mx}}$; $m \approx 1.6$.

$$P(x,\mu,\sigma) = \frac{1}{1+e^{-\frac{m(x-\mu)}{\sigma}}} \quad . \tag{27.1}$$

Der Wert $m \approx 1.6$ kommt so zustande: Die Dichte der Standardnormalverteilung bei $x = 0$ ist $1/\sqrt{2\pi}$. Die Dichte der Standardlogistik bei $x = 0$ ist

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{1+e^{-mx}}\bigg|_{x=0} = \frac{me^{-mx}}{(1+e^{-mx})^2}\bigg|_{x=0} = \frac{m}{4} \ .$$

Da beide Dichten gleich groß sein sollen, folgt daraus

$$m = \frac{4}{\sqrt{2\pi}} \approx 1.6 \ .$$

Für das Zeitungsjungenproblem lautet die Bedingung für die optimale Losgröße bei Verwendung dieser Approximation

$$\frac{1}{1+e^{-\frac{m(x-\mu)}{\sigma}}} = \frac{g}{h+g} = \frac{1}{1+\frac{h}{g}}$$

und deshalb

$$e^{\frac{m(x-\mu)}{\sigma}} = \frac{g}{h} \ ,$$

$$\boxed{x = \mu + \frac{\sigma}{m}\ln\frac{g}{h}} \quad . \tag{27.2}$$

Die optimale Losgröße x ist eine lineare Funktion von μ und σ und eine zunehmende Funktion von $\frac{g}{h}$. Man sieht

$$g \left\{ \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} \right\} h \Rightarrow x \left\{ \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} \right\} \mu . \tag{27.3}$$

Untersuchen wir nun die Kosten. Sei

$l(x)$: Erwartungswert der Kosten des Einperiodenmodells bei optimaler Losgröße x.

Beim Modell mit proportionalen Fehlmengenkosten sind die erwarteten Kosten gemäß (26.2)

$$l(x) = (h + g) \int_{o}^{x} P(u)du + g(\mu - x) , \tag{27.4}$$

und speziell bei logistisch verteilter Nachfrage

$$l(x) = (h + g) \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{1 + e^{-\frac{m}{\sigma}(y-\mu)}} dy + g(\mu - x) =$$

$$= (h + g) \frac{\sigma}{m} \int_{o}^{x} \frac{\frac{m}{\sigma} e^{\frac{m}{\sigma}(y-\mu)}}{1 + e^{\frac{m}{\sigma}(y-\mu)}} dy + g(\mu - x) =$$

$$= (h + g) \frac{\sigma}{m} \ln[1 + e^{\frac{m}{\sigma}(x-\mu)}] + g(\mu - x) .$$

Man geht bei der Verwendung der Logistik davon aus, daß eine negative Nachfrage vernächlässigt werden kann.
Setzt man jetzt für das optimale x den Ausdruck (27.2) ein, erhält man

$$l(x) = (h + g) \frac{\sigma}{m} \ln[1 + e^{\ln \frac{g}{h}}] - g \frac{\sigma}{m} \ln \frac{g}{h} =$$

$$= \frac{\sigma}{m} [(h + g) \ln\frac{h + g}{h} - g \ln\frac{g}{h}] =$$

$$= \frac{\sigma}{m} [h \ln\frac{h + g}{h} + g \ln\frac{h + g}{g}]$$

und schließlich

$$l(x) = (h + g)\,\frac{\sigma}{m}\,\Big[-\frac{h}{h+g}\ln\frac{h}{h+g} - \frac{g}{h+g}\ln\frac{g}{h+g}\Big]\ . \qquad (27.5)$$

Nun weiß man, daß die ENTROPIE einer Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$e(p_1, p_2, \ldots, p_n) = -\sum p_i \ln p_i \quad ,$$

$p_i \geq 0$, $\sum p_i = 1$, am größten wird bei Gleichverteilung $p_1 = \ldots = p_n$.

Deshalb nimmt die Kostenfunktion $l(x)$ bei festem σ ihren maximalen Wert an, falls

$$\frac{h}{h+g} = \frac{g}{h+g}$$

d.h. für $h = g$, und man kann allgemein feststellen:

Der Erwartungswert der Kosten $l(x)$ steigt an, falls $h \to g$ bei festgehaltenem $h + g$.	(27.6)

Außerdem ist für $g \geq h$

$$\frac{\partial l}{\partial h} > 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial l}{\partial g} > 0\ .$$

Wir zeigen nur $\frac{\partial l}{\partial h} > 0$ durch Differenzieren von (27.5).

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial h}\, l = {} & \frac{\sigma}{m}\Big[-\frac{h}{h+g}\ln\frac{h}{h+g} - \frac{g}{h+g}\ln\frac{g}{h+g}\Big] \\ & + (h+g)\,\frac{\sigma}{m}\Big[-\frac{g}{(h+g)^2}\ln\frac{h}{h+g} + \frac{g}{(h+g)^2}\ln\frac{g}{h+g}\Big] \\ = {} & \frac{\sigma}{m}\ \underbrace{[\qquad]}_{>0} \\ & + \underbrace{\frac{\sigma}{m}\,\frac{g}{h+g}\ln\frac{g}{h}}_{\geq 0}\ .\end{aligned}$$

Da die Funktion $l(x)$ bei Vertauschen von h und g unverändert bleibt, gilt auch

$$\frac{\partial l}{\partial g} > 0.$$

Dazu ein Beispiel. Sei $\sigma = 1$ und

a) $h = g = 1$;

b) $h = 0.1$; $g = 10$.

In beiden Fällen ist das geometrische Mittel von h und g gleich Eins, aber

a) $l(x) = 0.77$;

b) $l(x) = 0.317$.

$h \neq g$ bedeutet, es gibt für das Einperiodenmodell günstige und ungünstige Eindeckungen. Das Ergebnis (27.6) der obigen Untersuchung besagt nun: je deutlicher sich die günstigen von den ungünstigen in den Kosten unterscheiden, desto größer ist die Effizienz einer optimalen Bestellregel. Dies gilt bei jeder beliebigen Nachfrageverteilung.

§28 ZEITLICHE STRUKTUR DES ZEITUNGSJUNGENPROBLEMS

Optimale Periodenlänge

Betrachten wir anstelle des Zeitungsjungen einen Eisverkäufer in einem Fußballstadion. Er verkauft während des Spieles und auch schon vorher Eis, das er in einem Bauchladen mit sich führt. Durch die freie Wahl des Verkaufbeginns kann er (in Grenzen) die Länge der Verkaufsperiode frei wählen. Gibt es für ihn eine optimale Periodenlänge in diesem Einperiodenproblem?

Wir hatten vorhin Poisson Nachfrage unterstellt, die wir dann mittels der Logistik approximierten. Beim Poisson Prozeß sind Erwartungswert und Streuung proportional zur Zeit (vgl. §19)

$$\mu_T = \sigma_T^2 = \lambda T, \quad \text{d.h. } \sigma_T = \sigma_o \sqrt{T} .$$

Die Lager- und Fehlmengenkosten sind ebenfalls proportional zu T

$$h_T = hT; \qquad g_T = gT.$$

Damit erhält man für die Einperiodenkosten bei logistisch verteilter Nachfrage (27.5) den zeitabhängigen Ausdruck

$$l_T(x) = (h + g)T \frac{\sigma_o}{m} \sqrt{T} \exp[- \frac{h}{h + g} \ln \frac{h}{h + g} - \frac{g}{h + g} \ln \frac{g}{h + g}]$$

Die erwarteten Gesamtkosten pro Zeit sind

$$C = \frac{l_T(x)}{T} + \frac{k}{T} = (h + g) \frac{\sigma_o}{m} \sqrt{T} \exp[- \frac{h}{h + g} \ln \frac{h}{h + g} - \frac{g}{h + g} \ln \frac{g}{h + g}] + \frac{k}{T}.$$

Die optimale Periodenlänge bei logistisch verteilter Nachfrage ist

$$\boxed{T^* = \left[\frac{2k}{(h_o + g_o)\frac{\sigma_o}{m} \exp[- \frac{h}{h + g} \ln \frac{h}{h + g} - \frac{g}{h + g} \ln \frac{g}{h + g}]}\right]^{\frac{2}{3}}} .$$

Hierbei wurde jedoch eine grobe Vereinfachung vorgenommen: Das zufällige Ereignis "eine Nachfrage tritt auf" wird exakt auf das Periodenende gelegt.

Genauer wäre es, das zeitliche Auftreten der Nachfrage innerhalb der Periode zu berücksichtigen.

<u>Genauerer Ansatz</u>

Wir unterstellen wieder eine Poisson Nachfrage. Im Modell mit fester Periodenlänge (genau eine Zeiteinheit) war

$$l(x) = (h + g) \sum_{u=0}^{x} P(u) + g(\mu - x) \ .$$

Jetzt ist $P(u) = P_t(u)$ und $\mu = \mu_t$, und die Kostenfunktion lautet

$$l_T(x) = \int_0^T \{(h + g) \sum_{u=0}^{x} P_t(u) + g(\mu_t - x)\}dt \quad . \tag{28.1}$$

Bei Poisson Nachfrage mit Rate λ ist

$$P_T(u) = \sum_{j=o}^{u} \frac{(\lambda t)^j}{j!} e^{-\lambda t} \ ;$$

$$\mu_t = \lambda t \quad .$$

Mit diesen Ausdrücken wird die Zielfunktion (28.1) zu

$$l_T(x) = \int_o^T \left\{(h + g) \sum_{u=o}^{x} \sum_{j=o}^{u} \frac{(\lambda t)^j}{j!} e^{-\lambda t}\right\}dt + g \int_o^T \lambda t \ dt - g \ x \ T \ . \tag{28.2}$$

Zwischenrechnung: Es ist

$$\int_o^T \underbrace{\frac{(\lambda t)^j}{j!}}_{u} \underbrace{e^{-\lambda t}}_{v'} dt = - \frac{1}{\lambda} \frac{(\lambda T)^j}{j!} e^{-\lambda T} + \int_o^T \frac{(\lambda t)^{j-1}}{(j-1)!} e^{-\lambda t} dt =$$

$= \ldots$ (fortgesetzte partielle Integration) $\ldots =$

$$= \frac{1}{\lambda} \left[1 - \sum_{r=o}^{j} \frac{(\lambda T)^r}{r!} {}^{-\lambda T}\right] =$$

$$= \frac{1}{\lambda} [1 - P_T(j)] \ .$$

Mit Hilfe dieser Zwischenrechnung wird aus (28.2)

$$l_T(x) = \frac{(h + g)}{\lambda} \sum_{u=o}^{x} \sum_{j=0}^{u} [1 - P_T(j)] + g\lambda \frac{T^2}{2} - g\,x\,T \qquad (28.3)$$

Näherung

Wir approximieren die Poisson Verteilung für große λT durch die Logistik

$$P_T(u) = \frac{1}{1 + e^{-\frac{m}{\sigma_T}(u - \mu_T)}} \; . \qquad (28.4)$$

Dann wird aus (28.3)

$$l_T(x) = \frac{h + g}{\lambda} \int_{u=o}^{x} \int_{r=o}^{u} \left[1 - \frac{1}{1 + e^{-\frac{m}{\sigma_T}(r - \mu_T)}} \right] dr\, du + g\lambda \frac{T^2}{2} - g\,x\,T \; . \qquad (28.5)$$

Wir setzen

$$\int_{-\infty}^{u} \left[1 - \frac{e^{\frac{m}{\sigma}(r - \mu_T)}}{1 + e^{\frac{m}{\sigma}(r - \mu_T)}} \right] dr = u - \frac{\sigma}{m} \ln \left[1 + e^{\frac{m}{\sigma}(u - \mu_T)} \right]$$

in (28.5) ein und erhalten

$$l_T(x) = \frac{h + g}{\lambda} \int_{u=o}^{x} \left\{ u - \frac{\sigma}{m} \ln \left[1 + e^{\frac{m}{\sigma}(u - \mu_T)} \right] \right\} du + g\lambda \frac{T^2}{2} - g\,x\,T \; . \qquad (28.6)$$

Nun wird diese Kostenfunktion bezüglich x (bei festem T) minimiert.

$\frac{dl}{dx} \overset{!}{=} 0$ liefert

$$\frac{h + g}{\lambda} \left[x - \frac{\sigma}{m} \ln \left[1 + e^{\frac{m}{\sigma}(x - \mu_T)} \right] \right] - gT = 0 \; ;$$

$$\frac{g\lambda T}{h+g} = x - \frac{\sigma}{m} \ln \left[1 + e^{\frac{m}{\sigma}(x - \mu_T)}\right] =$$

$$= x - \frac{\sigma}{m} \ln \left\{ \left[e^{-\frac{m}{\sigma}(x - \mu_T)} + 1\right] e^{\frac{m}{\sigma}(x - \mu_T)} \right\} =$$

$$= - \frac{\sigma}{m} \ln \left[1 + e^{-\frac{m}{\sigma}(x - \mu_T)}\right] + \mu_T \quad .$$

Es ist $\mu_T = \lambda T$ und $\sigma = \sqrt{\lambda T}$, deshalb

$$\lambda T \frac{h}{h+g} = \frac{\sqrt{\lambda T}}{m} \ln \left[1 + e^{-\frac{m}{\sqrt{\lambda T}}(x - \lambda T)}\right]$$

Die Auflösung nach x liefert die optimale Losgröße

$$\boxed{x = \frac{\sqrt{\lambda T}}{m} \ln \frac{1}{e^{m\sqrt{\lambda T} \cdot \frac{1}{1 + g/h}} - 1} + \lambda T} \tag{28.7}$$

Eine Plausibilitätsbetrachtung zeigt:
Wächst g/h, so wächst auch die optimale Losgröße x.

Man kann die Poisson Verteilung in der Zielfunktion (28.2) auch durch die Normalverteilung approximieren:

$$\sum_{j=o}^{u} \frac{(\lambda t)^j}{j!} e^{-\lambda t} \approx N(\frac{u - \mu}{\sigma})$$

mit $\mu = \lambda t$; $\sigma = \sqrt{\lambda t}$. Die optimale Losgröße x läßt sich dann jedoch nicht mehr explizit angeben.

§29 EXAKTER ANSATZ

Wir wollen jetzt den exakten Ansatz bei Poisson Nachfrage herleiten. Seien wie vorhin

u: Nachfrage innerhalb T

$p_u(T)$: Wahrscheinlichkeit, daß u Stück nachgefragt werden in [o,T]

$$p_u(T) = \frac{(\lambda T)^u}{u!} e^{-\lambda T}$$

x: Anfangsbestand

Es treten 2 Fälle auf: $u \leq x$ und $u > x$

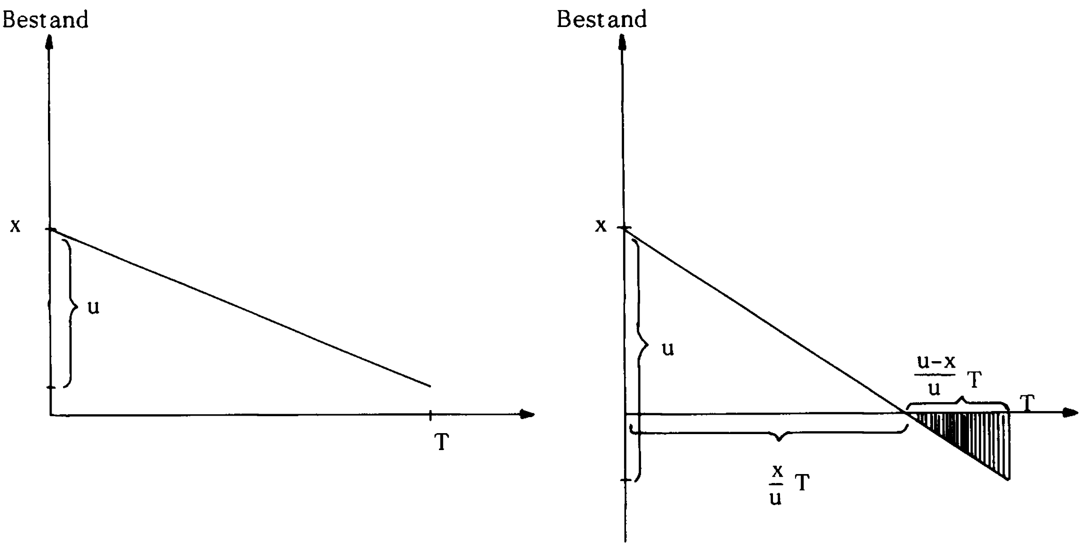


Abb. 29.1: Lagersituationen für die zwei Fälle

Für die Lager- und Fehlmengenkosten während der Periode T ergibt sich der Ausdruck

$$f_u(x) = \begin{cases} h \cdot T \cdot \dfrac{x + x - u}{2}, & \text{für } u \leq x, \\[2ex] \dfrac{hx}{2} \cdot \dfrac{x}{u} T + \dfrac{g(u-x)}{2} \cdot \dfrac{u-x}{u} \cdot T, & \text{für } u > x. \end{cases} \tag{29.1}$$

Der Erwartungswert dieser Einperiodenkosten bei Anfangsbestand x ist

$$l(x) = \sum_{u=o}^{\infty} f_u(x) \frac{(\lambda T)^u}{u!} e^{-\lambda T} \tag{29.2}$$

$$l(x) = hT \sum_{u=o}^{x} (x - \frac{u}{2}) p_u(T) + \frac{hT}{2} x^2 \sum_{u=x+1}^{\infty} \frac{p_u(T)}{u}$$

$$+ \frac{gT}{2} \sum_{u=x+1}^{\infty} \frac{(u-x)^2}{u} p_u(T) \quad , \tag{29.3}$$

wobei $\Delta l(x)$ die erste Differenz $l(x+1) - l(x)$ bedeutet.

Es ist jetzt $\Delta l(x)$ zu berechnen. Diese Aufgabe stellt sich bei vielen Lagerhaltungsproblemen, bei denen der Lagerbestand eine diskrete Variable ist. Falls $l(x)$ nicht in verschiedenen Intervallen unterschiedlich definiert ist und falls die Summationsgrenzen nicht von x abhängen, läßt sich der Differenzenoperator Δ unter das Summenzeichen ziehen. Diese Voraussetzungen sind jedoch wegen (29.1) nicht gegeben. Wir zeigen, daß man hier dennoch so verfahren kann (vgl. SASIENI et. al. S. 305 ff).

Die Funktion f der Lager- und Fehlmengenkosten setzt sich stückweise aus den beiden für alle x-Werte definierten Teilfunktionen f_1 und f_2 zusammen

$$f_u(x) = \begin{cases} f_{1,u}(x) & , \text{ für } \quad u \leq x \ , \\ f_{2,u}(x) & , \text{ für } \quad u > x \ . \end{cases}$$

Mit der Abkürzung

$$\tilde{f}_u(x) = f_u(x) \frac{(\lambda T)^u}{u!} e^{-\lambda T}$$

läßt sich (29.2) schreiben als

$$l(x) = \sum_{u=o}^{\infty} \tilde{f}_u(x) \ .$$

Nun gilt bei beliebigen monoton wachsenden Summationsgrenzen a(x) und b(x)

$$l(x+1) = \sum_{u=a(x+1)}^{b(x+1)} \tilde{f}_u(x+1)$$

$$= \sum_{a(x)}^{b(x)} \tilde{f}_u(x+1) + \sum_{b(x)+1}^{b(x+1)} \tilde{f}_u(x+1) - \sum_{a(x)}^{a(x+1)-1} \tilde{f}_u(x+1) \; ,$$

und deshalb auch

$$\Delta l(x) = \sum_{a(x)}^{b(x)} \Delta\tilde{f}_u(x) + \sum_{b(x)+1}^{b(x+1)} \tilde{f}_u(x+1) - \sum_{a(x)}^{a(x+1)-1} \tilde{f}_u(x+1) \; . \quad (29.4)$$

Wegen

$$\tilde{f}_u(x) = \begin{cases} \tilde{f}_{1,u}(x) \; , & \text{für} \quad u \leq x \; , \\ \tilde{f}_{2,u}(x) \; , & \text{für} \quad u > x \; , \end{cases}$$

ist

$$l(x) = \sum_{u=o}^{b(x)} f_{1,u}(x) + \sum_{u=b(x)+1}^{\infty} f_{2,u}(x) \quad ,$$

wobei hier b(x) = x.

Zur Ermittlung von Δl wenden wir (29.4) auf die beiden Summen der rechten Seite an und erhalten

$$\Delta l(x) = \sum_{u=o}^{b(x)} \Delta\tilde{f}_{1,u}(x) + \sum_{u=b(x)+1}^{\infty} \Delta\tilde{f}_{2,u}(x)$$

$$+ \sum_{b(x)+1}^{b(x+1)} [\tilde{f}_{1,u}(x+1) - \tilde{f}_{2,u}(x+1)]$$

Da b(x) = x ist, beschränkt sich die letzte Summe auf

$$\tilde{f}_{1,x+1}(x+1) - \tilde{f}_{2,x+1}(x+1) .$$

Sie besitzt den Wert Null, denn wie man aus (29.1) erkennt, gilt für $u = x + 1$ die Gleichung $f_{1,u}(x) = f_{2,u}(x)$.
Man darf also den Differenzenoperator unter das Summenzeichen ziehen.
Die Optimalitätsbedingung für dieses diskrete Problem lautet

$$\Delta l(x-1) < 0 < \Delta l(x) .$$

Dies führt zu

$$\Delta l(x) = (h + g)T \left\{ \sum_{u=o}^{x} p_u(T) + (x + \tfrac{1}{2}) \sum_{u=x+1}^{\infty} \frac{p_u(T)}{u} \right\} - gT . \qquad (29.5)$$

Die Minimierung der erwarteten Einperiodenkosten bedeutet:
wähle den geringsten ganzzahligen Wert x, der die Bedingung erfüllt

$$\boxed{M(x) > \frac{g}{h + g}} , \qquad (29.6)$$

wobei

$$M(x) = \sum_{u=o}^{x} p_u(T) + (x + \tfrac{1}{2}) \sum_{u=x+1}^{\infty} \frac{p_u(T)}{u}$$

und speziell bei Poisson Nachfrage

$$M(x) = \sum_{u=o}^{x} \frac{(\lambda T)^u}{u!} e^{-\lambda T} + (x + \tfrac{1}{2}) \sum_{u=x+1}^{\infty} \frac{(\lambda T)^u}{u \cdot u!} e^{-\lambda T} . \qquad (29.7)$$

Will man neben der optimalen Losgröße auch den Zielfunktionswert $l(x)$ selbst ermitteln, startet man am besten bei $k = 0$ und berechnet der Reihe nach den Wert $M(k)$ für $k = 1,2,...$ solange, bis die Bedingung (29.6) zum erstenmal erfüllt ist. Das zugehörige k ist die optimale Losgröße x. Die Werte $M(k)$ verwendet man zur Berechnung von $l(x)$.

Es ist

$$\Delta l(x) = (h + g)TM(x) - gT \quad .$$

Daraus erhält man sehr leicht $l(x)$:

$$l(x) = l(0) + \sum_{k=o}^{x-1} \Delta l(k) \quad .$$

Da

$$l(0) = \frac{gT}{2} \sum_{u=o}^{\infty} up_u(T) = \frac{gT}{2} E\{u\} \overset{(\text{Poisson})}{=} \frac{gT}{2}\lambda T \ ,$$

ist

$$l(x) = \frac{g\lambda T^2}{2} + \sum_{k=o}^{x-1} \Delta l(k). \tag{29.8}$$

Dies ist der Erwartungswert der Lager- und Knappheitskosten für eine Periode der Länge T.

Optimale Periodenlänge

Bis jetzt war die Periodenlänge T fest. Nun berechnen wir näherungsweise im letzten Schritt die minimalen Durchschnittskosten einer Periode pro Zeiteinheit.

$$\underset{T}{\text{Min}}\ c(T) = \underset{T}{\text{Min}} \left\{ \frac{k}{T} + \frac{l_T(x)}{T} \right\} \tag{29.9}$$

Einfachster Weg: Es ist $c(T)$ eine konvexe Funktion mit $\lim_{T\to\infty} c(T) = \infty$.

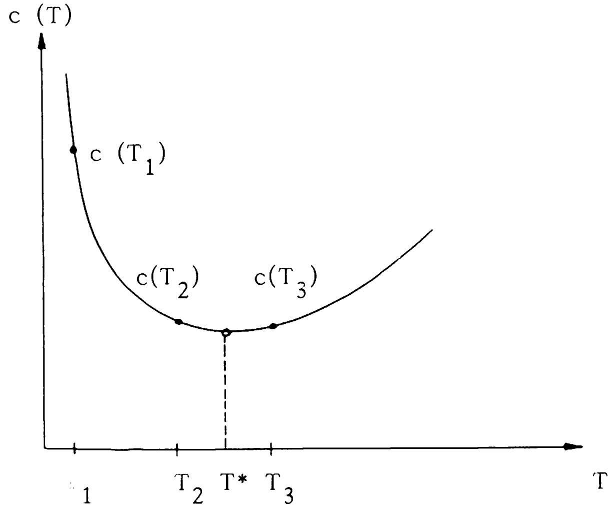


Abb. 29.2: Optimale Periodenlänge

Wir berechnen für drei verschiedene Werte T_1, T_2, T_3, die in der Nähe von T^* liegen sollen, die Durchschnittskosten $c(T_1)$, $c(T_2)$, $c(T_3)$ und approximieren c(T) durch eine Funktion vom Typ $f(T) = \frac{\alpha}{T} + \beta + \gamma \cdot T$. Diese ist durch die drei Punkte $(T_1, c(T_1))$, $(T_2, c(T_2))$, $(T_3, c(T_3))$ eindeutig bestimmt. Das Minimum liegt bei

$$\boxed{T^* = \sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}} \quad . \tag{29.10}$$

§30 ÜBERBUCHEN BEI RESERVIERUNG

Ein Standardbeispiel für Überbuchen ist die Hotelreservierung: In einem großen Hotel soll während der Hochsaison eine Tagung abgehalten werden. Die Besucher melden ihre Teilnahme beim Veranstalter an. Dieser handelt beim Hotelmanager eine Preisermäßigung aus und bucht für die angemeldeten Teilnehmer die Übernachtungen.

Der Hotelmanager weiß aus Erfahrung, daß bei größeren Veranstaltungen stets einige angemeldete Teilnehmer ohne vorherige Absage nicht erscheinen (sog. no shows). Es kann für ihn deshalb rentabel sein, weniger Zimmer freizuhalten als gebucht sind. Sei

b: gebuchte Zimmer (jeder Teilnehmer bucht ein Einzelzimmer)

x: freigehaltene Zimmer (Kapazität)

h: Kosten für die Freihaltung eines Zimmers bei Nichterscheinen. Der nicht erschienene Gast zahlt nur den ermäßigten Preis. Hätte man gewußt, daß er nicht kommt, hätte man das Zimmer zum normalen Preis vermieten können. h ist gleich dem Tagungsrabatt.

g: Fehlmengenkosten. Der angemeldete Gast trifft ein, aber das Zimmer ist bereits an jemand anderen vermietet. Das Hotel muß die Kosten für die externe Unterbringung des Gastes, i.a. in einer höheren Preisklasse, übernehmen.

u: Zahl der tatsächlich erscheinenden Tagungsteilnehmer

q: Wahrscheinlichkeit für das Nichterscheinen eines Gastes

Bei b Buchungen lautet die Wahrscheinlichkeit, daß u Gäste kommen

$$p_{u;b} = \binom{b}{u}(1 - q)^u q^{1-u} \tag{30.1}$$

und die kumulierte Wahrscheinlichkeit P(u;b) = Wahrscheinlichkeit, Nachfrage $\leq$ u bei b Buchungen

$$P(u;b) = \sum_{y=o}^{u} \binom{b}{y}(1 - q)^y q^{1-y} \quad . \tag{30.2}$$

Das vorliegende Optimierungsproblem ist vom Typ des Zeitungsjungenproblems. Die Entscheidungsvariable x ist der vorzuhaltende Bestand an Zimmern für die Tagung (Lagerbestand). Der optimale Bestand ist laut (26.3)

$$x = P^{-1}\left(\frac{g}{h + g}\right) \quad . \tag{30.3}$$

Die oben zugrunde gelegte Binomialverteilung besitzt den Erwartungswert und die Streuung

$$\mu = b(1 - q) \ ;$$
$$\sigma^2 = bq(1 - q) \ .$$

Wenn b groß ist, approximiert man diese Verteilung durch die Normalverteilung (sog. Normalapproximation). Dann wird aus (30.3)

$$N\left(\frac{x - b(1 - q)}{\sqrt{bq(1 - q)}}\right) = \frac{g}{g + h} \ .$$

N ist die Verteilungsfunktion der standardisierten Normalverteilung. Approximiert man die Normalverteilung durch die Logistik, erhält man aus der obigen Beziehung

$$\frac{1}{1 + e^{\frac{-m}{\sqrt{bq(1-q)}}[x - b(1-q)]}} = \frac{1}{1 + \frac{h}{g}}$$

$$e^{\frac{-m}{\sqrt{bq(1-q)}}[x - b(1-q)]} = \frac{h}{g} \ .$$

Wir lösen diese Gleichung nach x auf und erhalten für die optimale Losgröße folgende Formel

$$\boxed{x = \frac{\sqrt{bq(1-q)}}{m} \ln \frac{g}{h} + b(1 - q)} \ .$$

Auch hier gilt wieder

$$x \ \left\{ \begin{smallmatrix} > \\ = \\ < \end{smallmatrix} \right\} \ \mu \iff \frac{g}{h} \ \left\{ \begin{smallmatrix} > \\ = \\ < \end{smallmatrix} \right\} \ 1 \ ,$$

d.h. überwiegen die Fehlmengenkosten, wird die Bevorratung größer sein als der erwartete Absatz. Sind hingegen die Lagerhaltungskosten größer als die Fehlmengenkosten, ist es umgekehrt.

KAPITEL IV: STOCHASTISCHE MODELLE MIT KONTINUIERLICHER ÜBERWACHUNG

§31 METHODE DER ZUSTANDSWAHRSCHEINLICHKEITEN

In §23 ist uns bereits ein Lagerhaltungsmodell mit kontinuierlicher Überwachung begegnet. Dort wurde eine Poisson Nachfrage unterstellt. Es zeigte sich, daß unter dieser speziellen Annahme die optimale Bestellmenge D dieselbe war wie beim deterministischen Modell mit konstanter Nachfragerate. D wurde durch die WILSON Formel bestimmt. Die Interpretation der Zielfunktion C im stochastischen Sinn führte zur Methode der Zustandswahrscheinlichkeiten.

Wir wollen in diesem Kapitel das Modell mit kontinuierlicher Überwachung bezüglich Nachfrageprozeß und Lieferzeit verallgemeinern. Dabei verwenden wir u.a. wieder die Methode der Zustandswahrscheinlichkeiten. Die Grundidee dieser Methode läßt sich in drei Schritten skizzieren.

1. Schritt: Festlegung der Struktur der optimalen Bestellregel in parametrisierter Form (hier z.B. "bestelle D, falls y = 0"; D ist der Parameter mit noch unbekanntem Optimalwert).

2. Schritt: Herleitung der stationären Zustandswahrscheinlichkeiten. Sei $\pi_y(t)$ die Wahrscheinlichkeit, daß sich das System zur Zeit t im Zustand y befindet. Dann heißt

$$\pi_y^{(D)} := \lim_{t\to\infty} \pi_y^{(D)}(t)$$

die Wahrscheinlichkeit des Zustands y unter Verwendung der fixen Losgröße D.

Im allgemeinen hängt die stationäre Verteilung $\pi^{(D)}$ von der Anfangsverteilung $\pi^{(D)}(0)$ und vom Parameter D der Bestellregel ab. Es läßt sich zeigen, daß bei dem vorliegenden Lagerhaltungsmodell und der

Bestellregel "bestelle D, falls $y = 0$" die Grenzverteilung $\pi^{(D)}$ existiert und unabhängig von der Anfangsverteilung $\pi^{(D)}(0)$ ist.

<u>3. Schritt:</u> Minimierung der erwarteten Kosten pro Zeiteinheit, d.h. des stationären Erwartungswertes

$$\sum_y C_y \pi_y^{(D)} \to \underset{D}{\mathrm{Min}} \quad . \tag{31.1}$$

C_y: Kosten pro Zeiteinheit im Zustand y.

Im Fall der Poisson Nachfrage ist in zufällig herausgegriffener Zeit der Lagerbestand gleichverteilt (vgl. §23).

Jetzt verallgemeinern wir den Nachfrageprozeß. Wir nehmen an, daß nacheinander Kaufinteressenten eintreffen. Sei

p_u: Wahrscheinlichkeit, daß ein Kunde u Einheiten kauft, $u = 0,1,2,\ldots$

Für die Kundenankünfte unterstellen wir einen Poisson Prozeß. Damit beschreibt der Nachfrageprozeß einen zusammengesetzten Poisson Prozeß (vgl. §19).

Eine zeitliche Betrachtung, d.h. eine Kostenrekursion $t \to t + \Delta t$ ist kompliziert. Da es bei der Zielfunktion aber nur auf die Erwartungswerte ankommt, kann man so tun, als ob die Kundenankünfte genau $1/\lambda$ Zeiteinheiten auseinander liegen. Dies ist der Erwartungswert eines Zwischenankunftsintervalls. Dadurch vereinfacht sich der stochastische Prozeß zu einer Markovkette, bei der zu jedem Ereignis ein Übergang von einem Lagerzustand in einen anderen (bei $u = 0$ in denselben) stattfindet.

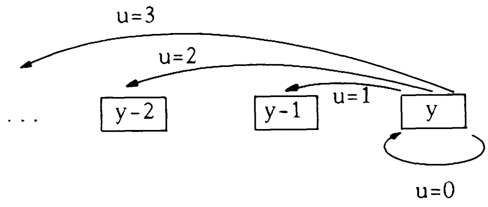


Abb. 31.1: Zustands - Übergangsdiagramm

Ist die Nachfrage größer als der Bestand, dann ist der neue Zustand $y = 0$ und die nichtbefriedigte Nachfrage geht verloren.
Für die Bestellregel legen wir wieder die bekannte Struktur zugrunde

$$\text{Bestellmenge } z(y) = \begin{cases} 0, & \text{für } y > 0 \,, \\ D, & \text{für } y = 0 \,. \end{cases}$$

In diesem Markovkettenmodell finden die Übergänge nach jeweils $1/\lambda$ Zeiteinheiten statt. Für den Zustand $y = 0$ gilt folgende Vereinbarung: Das System verharrt $1/\lambda$ Zeiteinheiten in diesem Zustand und die Bestellung wird erst am Ende der Periode aufgegeben (bei sofortiger Lieferung!). Somit entstehen in dieser Periode keine Lagerkosten.

Für die stationären Zustandwahrscheinlichkeiten gelten die Bestimmungsgleichungen:

$$\pi_D = \sum_{i=o}^{D} \pi_i \sum_{u=i}^{\infty} p_u \; ; \tag{31.2}$$

$$\pi_y = \sum_{i=y}^{D} \pi_i p_{i-y} \; ; \qquad 0 \leq y \leq D-1 \tag{31.3}$$

$$\sum_{i=o}^{D} \pi_i = 1 \qquad \text{(Normierungsgleichung)} \tag{31.4}$$

Das sind D+2 Gleichungen für D+1 Unbekannte; eine Gleichung ist jedoch linear abhängig, denn (31.2), (31.3) legen die Werte π_y, $y = 0,1,2,\dots,D$ nur relativ zueinander fest. Deshalb benötigt man noch die Normierungsgleichung (31.4).

Geometrische Verteilung der Nachfrage

Sei die Nachfrage u eines Kunden geometrisch verteilt:

$$p_u = (1 - p)p^u; \qquad 0 < p < 1 \quad , \qquad u = 0,1,2,\dots \quad .$$

Dann ist

$$\pi_D = (1 - p) \sum_{i=o}^{D} \pi_i \sum_{u=i}^{\infty} p^u$$

$$= (1 - p) \sum_{i=o}^{D} \pi_i p^i \sum_{u=o}^{\infty} p^u \Rightarrow \boxed{\pi_D = \sum_{i=o}^{D} \pi_i p^i}$$

$$\pi_y = (1 - p) \sum_{i=y}^{D} \pi_i p^{i-y}$$

$$= (1 - p)\pi_y + p(1 - p) \underbrace{\sum_{i=y+1}^{D} \pi_i p^{i-(y+1)}}_{= \pi_{y+1}} \Rightarrow \boxed{\pi_y = \pi_{y+1}}$$

$$y = 0,1,\dots,D-2$$

$$\pi_o = (1 - p) \underbrace{\sum_{i=o}^{D} \pi_i p^i}_{= \pi_D} \Rightarrow \boxed{\pi_o = (1 - p)\pi_D} \quad .$$

Insgesamt:

$$\pi_y = \begin{cases} \pi_D & , \text{ für } y = D, \\ (1 - p)\pi_D, & \text{für } 0 \leq y \leq D-1. \end{cases}$$

Mit Hilfe der Normierungsbedingung (31.4) kann jetzt π_D berechnet werden:

$$\sum_{i=o}^{D} \pi_i = 1 \quad \Rightarrow \quad \pi_D = \frac{1}{1 + D - Dp} \quad .$$

Die stationären Zustandswahrscheinlichkeiten lauten also

$$\boxed{\pi_y = \begin{cases} \dfrac{1}{1 + D - Dp} & , \text{ für } y = D \ , \\[2ex] \dfrac{1 - p}{1 + D - Dp} & , \text{ für } 0 \leq y \leq D-1 \ . \end{cases}} \qquad (31.5)$$

Jetzt kann die Zielfunktion in Abhängigkeit von D formuliert werden. Die Kosten C_y im Zustand y sind

$$C_y = \begin{cases} hy & , \text{ für } 1 \leq y \leq D \ , \\ k + aD & , \text{ für } y = 0 \ . \end{cases} \qquad (31.6)$$

Die erwarteten Kosten pro Zeiteinheit (31.1) werden im vorliegenden Fall zu

$$hD\pi_D + h \sum_{y=1}^{D-1} y\pi_y + (k + aD)\pi_o \rightarrow \underset{D}{\text{Min}} \ .$$

Setzt man für die Zustandswahrscheinlichkeiten die gefundenen Werte (31.5) ein, erhält man die Zielfunktion

$$\boxed{\frac{k + aD + h\,\dfrac{D(D-1)}{2}}{\dfrac{1}{1-p} + D} + \frac{hD}{1 + D(1-p)} \rightarrow \underset{D}{\text{Min}}} \quad . \qquad (31.7)$$

Der erste Bruch besitzt eine Ähnlichkeit zur Zielfunktion (2.1) des WILSON Modells. Für die optimale Losgröße D^* läßt sich aus (31.7) kein geschlossener Ausdruck angeben. Die Zielfunktion (31.7) läßt sich aber leicht auswerten. Es wird empfohlen, die Auswertung mit der ganzzahligen WILSON Losgröße zu beginnen und in einer ganzzahligen Umgebung fortzusetzen, bis man den minimalen Wert gefunden hat.

§32 POISSON NACHFRAGE, EXPONENTIELLE LIEFERZEIT

Nun betrachten wir Modelle mit Lieferzeit.
Sei die Nachfrage Poisson verteilt und die Lieferzeit exponentialverteilt.

λ: Nachfragerate

μ: Lieferrate

Da die Lieferzeit größer Null ist, wird es i.a. nicht mehr optimal sein, erst bei $y = 0$ zu bestellen. Man wird eine Bestellung bereits bei $y = s > 0$ aufgeben.
Die Losgröße sei D. Dann ist ab dem Zeitpunkt, zu dem Bestand zum erstenmal den Wert s annimmt, die Größe

$S = s + D$

der maximale Lagerbestand.

Da der Lagerbestand kontinuierlich überwacht wird, wird eine Bestellung genau bei $y = s$ aufgegeben. Bis zu ihrem Eintreffen kann das Lager zwischenzeitlich weiter abgesunken sein. Es ist aber nicht erlaubt, eine weitere Bestellung vorzunehmen, ehe die letzte Bestellung eingetroffen ist.

Die Bestellregel ist vom Typ einer sogenannten

$$(s,D) - \text{Politik} ,$$

auch Zwei-Behälter-Regel (Two-Bin-Policy) genannt.

Sie wurde früher von den Heringsverkäufern praktiziert. Sie hatten ein offenes Faß und ein noch geschlossenes Faß in Reserve. Sobald das offene Faß leer war, wurde das zweite Faß geöffnet und gleichzeitig ein neues Faß bestellt.

Bei Modellen mit Lieferzeit ist sinnvollerweise

$$D \geq s \, . \tag{32.1}$$

Denn wäre $D < s$ und das Lager bis zum Eintreffen der Lieferung auf $y = 0$ abgesunken, dann wäre der neue Lagerbestand nach Eintreffen der Lieferung $y = D < s$ und man müßte sofort wieder bestellen.

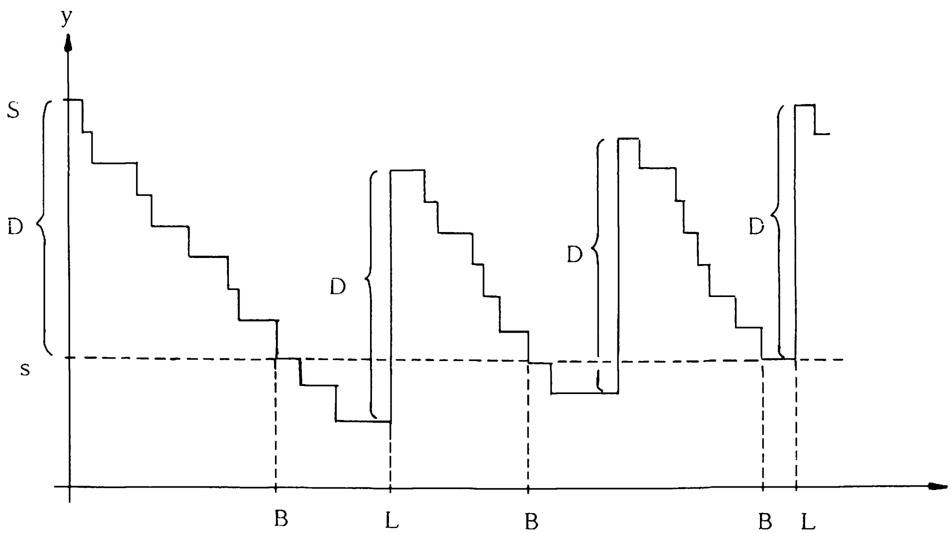


Abb. 32.1: Operationscharakteristik eines Lagers bei (s,D) - Politik. B = Bestellung; L = Lieferung; L - B = Lieferzeit.

Der infolge von Lagerdefiziten entgangene Umsatz gehe verloren (LOST SALES).

Wie groß sind die Zustandswahrscheinlichkeiten in diesem Modell? Wir zerlegen den Lagerbereich in einzelne Teilbereiche:

<u>1. Teilbereich:</u> $y = 0$

Der Zustand $y = 0$ nimmt als Randpunkt eine besondere Stellung ein.

Das Zustand-Übergangsdiagramm bezogen auf einen kleinen Zeitraum Δt sieht wie folgt aus

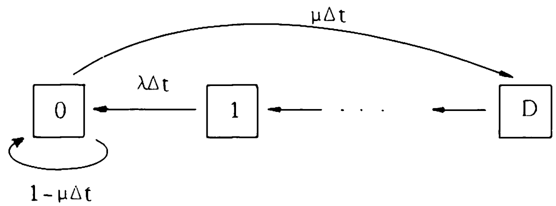


Abb. 32.2

Die Pfeilbewertungen sind die Übergangswahrscheinlichkeiten. Die Wahrscheinlichkeit, sich nach einer kleinen Zeitspanne Δt im Zustand $y = 0$ zu befinden, ist unter Berücksichtigung der Übergänge innerhalb Δt

$$\pi_o(t + \Delta t) = [1 - \mu\Delta t]\pi_o(t) + \lambda\Delta t\pi_1(t) \ . \tag{32.2}$$

Mit $\Delta t \to 0$ wird daraus

$$\frac{d\pi_o(t)}{dt} = -\mu\pi_o(t) + \lambda\pi_1(t) \ . \tag{32.3}$$

Im stationären Fall ist $\lim\limits_{t\to\infty} \dot{\pi}_o(t) = 0$, d.h.

$$\pi_1 = \frac{\mu}{\lambda}\pi_o \ . \tag{32.4}$$

2. Teilbereich: $1 \leq y \leq s$.

Das Zustands - Übergangsdiagramm besitzt die Gestalt

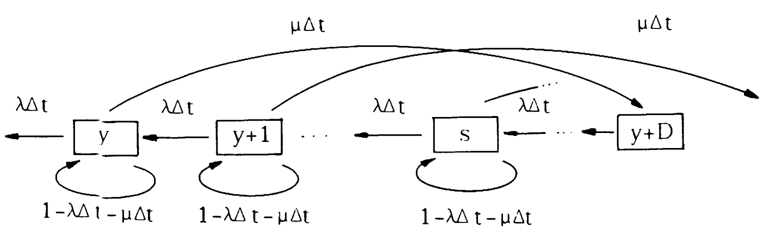


Abb. 32.3

Die Wahrscheinlichkeit des Verharrens in einem Zustand ist hier $1 - \lambda\Delta t - \mu\Delta t$, d.h. weder die ausstehende Bestellung ist eingetroffen, noch eine Nachfrage ist aufgetreten. Das gilt auch für den Zustand $y = s$. Dort wurde eine Bestellung spätestens zu Beginn des Intervalls Δt gemacht. Es ist

$$\pi_y(t + \Delta t) = [1 - \lambda\Delta t - \mu\Delta t]\pi_y(t) + \lambda\Delta t\pi_{y+1}(t) \ . \tag{32.5}$$

Daraus wird im stationären Fall

$$\pi_{y+1} = \frac{\lambda + \mu}{\lambda}\pi_y \ , \quad 1 \leq y \leq s \ . \tag{32.6}$$

<u>3. Teilbereich:</u> $s < y < D$.

Auch diese Zustände können nur von höheren Beständen aus erreicht werden, wie das Zustands-Übergangsdiagramm zeigt

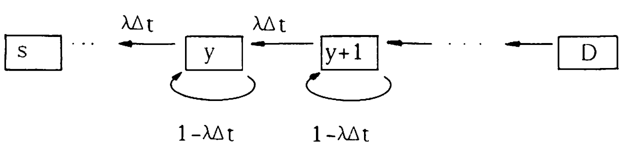


Abb. 32.4

Die Rekursionsgleichung für die Zustandswahrscheinlichkeiten lautet

$$\pi_y(t + \Delta t) = [1 - \lambda\Delta t]\pi_y(t) + \lambda\Delta t\pi_{y+1}(t) \ . \tag{32.7}$$

Die stationäre Lösung ist

$$\pi_{y+1} = \pi_y \ . \tag{32.8}$$

4. Teilbereich: $D \leq y < S$

Diese Zustände können sowohl infolge einer Nachfrage als auch aufgrund eines Bestelleinganges angenommen werden:

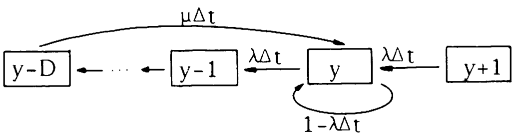


Abb. 32.5

Demnach gilt

$$\pi_y(t + \Delta t) = [1 - \lambda\Delta t]\pi_y(t) + \lambda\Delta t\pi_{y+1}(t) + \mu\Delta t\pi_{y-D}(t) \ , \quad (32.9)$$

woraus folgt

$$\pi_y = \pi_{y+1} + \frac{\mu}{\lambda}\pi_{y-D} \ . \quad (32.10)$$

5. Teilbereich: $y = S$.

Der obere Randpunkt des Zustandsraumes kann nur über einen Wareneingang erreicht werden.

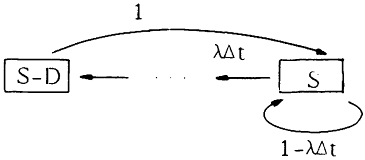


Abb. 32.6

Es ist

$$\pi_S(t + \Delta t) = [1 - \lambda\Delta t]\pi_S(t) + \mu\Delta t\pi_{S-D}(t) \tag{32.11}$$

und

$$\pi_S = \frac{\mu}{\lambda}\,\pi_{S-D} \quad . \tag{32.12}$$

Zusammenfassend gilt

$$\pi_1 = \frac{\mu}{\lambda}\,\pi_o \; ; \qquad y = 0$$

$$\pi_{y+1} = \left(\frac{\lambda + \mu}{\lambda}\right)\pi_y \; ; \qquad 0 < y \leq s$$

$$\pi_{y+1} = \pi_y \; ; \qquad s < y < D$$

$$\pi_y = \pi_{y+1} + \frac{\mu}{\lambda}\,\pi_{y-D} \; ; \qquad D \leq y < S$$

$$\pi_S = \frac{\mu}{\lambda}\,\pi_{S-D} \; ; \qquad y = S \; .$$

Wir setzen

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$\alpha = \frac{1 + \rho}{\rho}$$

und stellen die Zustandswahrscheinlichkeiten in Abhängigkeit von π_o dar.

$$\boxed{\begin{array}{ll} \pi_y = \dfrac{\alpha^{y-1}}{\rho}\,\pi_o \; ; & 0 < y \leq s \\ \pi_y = \dfrac{\alpha^{s}}{\rho}\,\pi_o \; ; & s < y \leq D \\ \pi_y = \dfrac{1}{\rho}\,[\alpha^{s} - \alpha^{y-D-1}]\pi_o \; ; & D < y \leq S-1 \\ \pi_S = \dfrac{\alpha^{s-1}}{\rho^{2}}\,\pi_o \; ; & y = S \quad . \end{array}} \tag{32.13}$$

Über die Normierungsbedingung $\sum_y \pi_y = 1$ wird schließlich π_o festgelegt

$$\pi_o = \frac{1}{D\,\frac{\alpha^s}{\rho} + 1} \quad . \tag{32.14}$$

Im nächsten Schritt werden mit Hilfe der Zustandswahrscheinlichkeiten die Durchschnittskosten C pro Zeiteinheit im stationären Fall berechnet.

$$C = \pi_o\lambda g + \pi_{s+1}\lambda[k + aD] + h \sum_{y=1}^{S} y\pi_y \tag{32.15}$$

$$= \pi_o\lambda g + \pi_o \frac{\alpha^s}{\rho} \lambda[k + aD] + h\pi_o\beta \ ,$$

wobei

$$\beta = \frac{\alpha^s}{2\rho}\,[D^2 + 2Ds - 2s - D] + \alpha^s[\alpha(s + D) - s - 2D] + D \ . \tag{32.16}$$

π_o aus (32.14) eingesetzt, ergibt schließlich

$$C = \frac{k\lambda}{D} + a\lambda + \frac{(g - a)\lambda - \frac{k\lambda}{D} + \beta h}{D\,\frac{\alpha^s}{\rho} + 1} \quad . \tag{32.17}$$

Nun versuchen wir, die optimalen Werte s^*, D^* zu bestimmen. Am ehesten ist dies noch im Grenzfall $\mu >> \lambda$ möglich.

<u>Grenzfall:</u> $\mu >> \lambda$

Aus $\mu >> \lambda$ folgt $\rho << 1$ und daraus $\alpha >> 1$. Die Zielfunktion (32.17) geht über in

$$C \to \frac{k\lambda}{D} + a\lambda + \frac{h}{D}\left\{\frac{1}{2}[D^2 + 2Ds - 2s - D] + \frac{\alpha(s + D) - s - 2D}{(\alpha - 1)}\right\}$$

$$\lim_{\alpha\to\infty} C_\alpha = C^* = \frac{k\lambda}{D} + a\lambda + \frac{h}{2}(D + 2s + 1) \ . \tag{32.18}$$

Die notwendigen Bedingungen für ein Optimum liefern

$$\frac{\partial C^*}{\partial D} \stackrel{!}{=} 0 : \qquad \boxed{D = \sqrt{\frac{2k\lambda}{h}} \; ;} \tag{32.19}$$

$$\frac{\partial C^*}{\partial s} > 0 : \qquad \boxed{s = 0 \; .} \tag{32.20}$$

Bezüglich s liegt ein Randextremum vor. Wir erhalten also im Grenzfall $\mu >> \lambda$ wie erwartet die Resultate des Modells ohne Lieferzeit aus §22.

<u>Reservierter Lagerraum</u>

In allen anderen Fällen muß man die Lösungen D, s entweder mit numerischen Methoden bestimmen oder das Modell so vereinfachen, daß auch hier analytische Methoden zum Ziele führen. Die Quelle der Schwierigkeiten ist der Term β.

Die Durchschnittskosten C in (32.15) hängen von allen Lagerbeständen $y = 0,1,2,\ldots,S$ ab. Wesentlich einfacher wird das Problem, wenn die Lagerhaltungskosten am Maximalbestand gemessen werden: $h(s + D)$. Das kann z.B. der Fall sein, wenn man kein eigenes Lager unterhält, sondern in einem externen Lager Stellfläche reserviert. Sie muß so groß sein, daß sie den Maximalbestand aufnehmen kann. Dann lautet die Zielfunktion

$$C = \pi_0 g\lambda + \pi_{s+1}\lambda[k + aD] + h(s + D) \; .$$

Nach kurzer Zwischenrechnung erhält man

$$\boxed{C = \lambda a + \frac{\lambda(g - a)\rho + k\lambda\alpha^s}{\rho + D\alpha^s} + h(s + D) \; .} \tag{32.21}$$

Hier tritt der Term β nicht mehr auf. Dadurch wird die Minimierung von C bezüglich s und D einfacher, aber man kann auf numerische Verfahren nicht verzichten.

§33 POISSON NACHFRAGE, FESTE LIEFERZEIT τ

Wir betrachten ein Lagerhaltungsmodell mit kontinuierlicher Überwachung, Poisson Nachfrage und fester Lieferzeit τ. Zur Formulierung des Modells verwenden wir jetzt BELLMANs Prinzip der Optimalität. Künftige Kosten werden nicht diskontiert.

Beobachten wir im Zeitpunkt t den Lagerbestand y, so können wir mit einer augenblicklichen Aktion den Bestand frühestens ab dem Zeitpunkt t + τ beeinflussen. Auf das, was vorher geschieht, besitzen wir keinen Einfluß mehr. Deshalb setzen wir diejenigen Kosten l(y) an, die mit einer Aktion verbunden sind, die im Zeitpunkt t + τ entstehen. Zwischen t und t + τ können aber noch ausstehende alte Bestellungen eintreffen. Der Lagerbestand $y_{t+\tau}$ ist also zum einen von y_t, zum andern von den noch ausstehenden Mengen und zum dritten von der Entscheidung im Zeitpunkt t abhängig. Wir definieren deshalb im vorliegenden Modell als ZUSTANDSGRÖßE y

y: Bestand plus ausstehende Bestellungen
(engl.: stock on hand plus on order)

Nichtbefriedigte Nachfrage wird zurückgestellt (BACKORDER CASE).

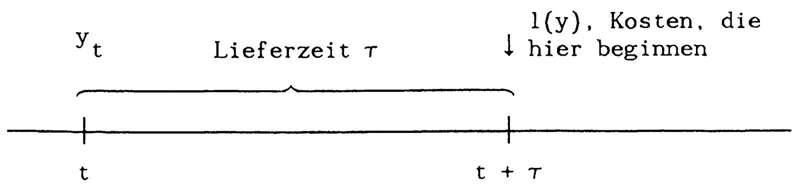


Abb. 33.1: Kosten werden bei Lieferzeit τ auf die Zeit t + τ bezogen

Der Lagerbestand y zur Zeit t + τ ist eine Zufallsgröße.

Es ist die Wahrscheinlichkeit (Lager = y - u zur Zeit t + τ | Lager = y zur Zeit t)

= Wahrscheinlichkeit (Nachfrage = u in der Zeit τ)

$= \frac{(\lambda\tau)^u}{u!} e^{-\lambda\tau}$ bei Poisson Nachfrage.

Die erwarteten Lager- und Fehlmengenkosten zur Zeit $t + \tau$ sind

$$f(y) = h \sum_{u=o}^{y} (y - u) \frac{(\lambda\tau)^u}{u!} e^{-\lambda\tau} + g \sum_{u=y+1}^{\infty} (u-y) \frac{(\lambda\tau)^u}{u!} e^{-\lambda\tau} . \tag{33.1}$$

Wie in §26 gezeigt wurde (vgl. (26.1), (26.2)), läßt sich dieser Ausdruck umformen zu

$$f(y) = (h + g) \sum_{u=o}^{y} P_u + g(\mu - y) ,$$

wobei

$$P_u = \sum_{i=o}^{u-1} \frac{(\lambda\tau)^i}{i!} e^{-\lambda\tau} .$$

Beachte: Damit der mit Hilfe der Integraldarstellung gewonnene Ausdruck (26.2) auch bei diskreter Nachfrage verwendet werden kann, ist die diskrete Verteilungsfunktion in der Form $P_x = P(u < x)$ entgegen der üblichen Konvention $P_x = P(u \leq x)$ festgelegt.

Um die Schreibweise zu vereinfachen, definieren wir für das folgende die Nachfragerate λ als Nachfrage pro Zeiteinheit τ. Dann brauchen wir τ in der Notation nicht explizit aufzuführen.

Prinzip der Optimalität

Seien

C: Durchschnittskosten pro Zeiteinheit.

Bei stationärem Kostenzuwachs werden aus den Gesamtkosten 1, wenn man den Gegenwartszeitpunkt um Δt in die Vergangenheit zurückverlegt, die Kosten $1 + C\Delta t$. Nach dem Optimalitätsprinzip von BELLMAN gilt die Rekursion

$$l(y) + C\Delta t = f(y)\Delta t + [1 - \lambda\Delta t]l(y) + \tag{33.2}$$

$$+ \lambda\Delta t \min_{x \geq y-1} \{k\delta(x - y + 1) + a(x - y + 1) + l(x)\} \; .$$

für $s < y \leq S$. Streicht man $l(y)$ auf beiden Seiten und dividiert durch Δt, erhält man

$$\lambda l(y) + C = f(y) + \lambda \min_{x \geq y-1} \{k\delta(x - y + 1) + a(x - y + 1) + l(x)\} \tag{33.3}$$

für $s < y \leq S$.

Struktur der optimalen Politik

Wir beginnen unsere Betrachtung beim Anfangslagerbestand $y = S$. Im Laufe der Zeit sinkt er ab. Früher oder später, wenn überhaupt ein Lager geführt wird, muß wieder bestellt werden. Dies geschieht bei $y = s$. Die Bestellmenge ist $S - s = D$. Die Struktur der Bestellregel ist also vom Typ (s,D). Demzufolge kann man (33.3) aufgliedern in

$$\begin{aligned}
\lambda l(S) + C &= f(S) + \lambda l(S - 1) \\
\lambda l(S - 1) + C &= f(S - 1) + \lambda l(S - 2) \\
&\vdots \\
\lambda l(s + 1) + C &= f(s + 1) + \lambda[k + aD + l(S)] \; .
\end{aligned}$$

Die Addition dieser Einzelgleichungen liefert

$$DC = \sum_{y=s+1}^{S} f(y) + \lambda k + \lambda aD \; . \tag{33.4}$$

Hier sind die Durchschnittskosten C pro Zeiteinheit eine Funktion der Strukturparameter s und D. Das Optimierungsproblem lautet

$$C = \frac{1}{D} \sum_{y=s+1}^{s+D} f(y) + \frac{\lambda k}{D} + \lambda a \quad \rightarrow \quad \min_{s,D} \tag{33.5}$$

Die Konstante λa beeinflußt s und D nicht. Wir gehen deshalb zu den um die proportionalen Bestellkosten bereinigten Durchschnittskosten c über und verwenden der Einfachheit halber für die Summe die Integraldarstellung

$$c = \left\{ \frac{1}{D} \int_{s}^{s+D} f(x)dx + \frac{\lambda k}{D} \right\} \rightarrow \underset{s,D}{\mathrm{Min}} \tag{33.6}$$

Die für ein Optimum notwendigen Bedingungen $\frac{\partial c}{\partial s} = 0$ und $\frac{\partial c}{\partial D} = 0$ liefern

$$f(s + D) = f(s)$$

$$D \cdot f(s + D) - \int_{s}^{s+D} f(x)dx - \lambda k = 0.$$

Sezt man die erste in die zweite Gleichung ein, wird daraus

$$(s + D)f(s + D) - sf(s) - \int_{s}^{s+D} f(x)dx = \lambda k$$

$$xf\Big|_{x = s}^{x = s+D} - \int_{s}^{s+D} f(x)dx = \lambda k .$$

Die Partielle Integration $\int f\, dx = xf - \int xf'\, dx$ führt schließlich zu den notwendigen Optimalitätsbedingungen

$$\boxed{\begin{aligned} &\int_{s}^{s+D} xf'(x)dx = \lambda k \qquad (33.7)\\ &f(s + D) = f(s) . \qquad (33.8)\end{aligned}}$$

Man kann diese zwei Gleichungen numerisch lösen. Eine Näherungslösung auf analytischem Weg erhält man, wenn man die obigen beiden Optimalitätsbedingungen in eine Taylorreihe entwickelt und das Gleichungssystem in s und D löst. Man erhält explizite Formeln für s und D. Zu demselben Resultat, jedoch bei geringerem Rechenaufwand, gelangt man, wenn man die Zielfunktion (33.6) erst durch eine Taylorreihe approximiert und dann die partiellen Ableitungen zu Null setzt. Es ist

$$f(x) = f(\lambda) + (x - \lambda)f'(\lambda) + (x - \lambda)^2 \frac{f''(\lambda)}{2!} + \ldots \tag{33.9}$$

Wir integrieren gliedweise

$$\int_s^{s+D} f(x)dx = Df(\lambda) + f'(\lambda) \int_s^{s+D} (x - \lambda)dx + \frac{f''(\lambda)}{2} \int_s^{s+D} (x - \lambda)^2 dx + \ldots$$

$$= Df(\lambda) + \frac{f'(\lambda)}{2} D[D + 2(s - \lambda)] +$$

$$+ \frac{f''(\lambda)}{6} D[D^2 + 3D(s - \lambda) + 3(s - \lambda)^2] + \ldots ,$$

brechen nach dem Glied 2. Ordnung in x ab und erhalten als angenäherte Zielfunktion $\tilde{c}$

$$\tilde{c} = \frac{k\lambda}{D} + f(\lambda) + \frac{f'(\lambda)}{2} [D + 2(s - \lambda)] +$$

$$+ \frac{f''(\lambda)}{6} [D^2 + 3D(s - \lambda) + 3(s - \lambda)^2]. \tag{33.10}$$

Die Bedingung $\frac{\partial \tilde{c}}{\partial s} = 0$ liefert

$$D + 2(s - \lambda) = -2 \frac{f'(\lambda)}{f''(\lambda)} \quad . \tag{33.11}$$

Die Bedingung $\frac{\partial \tilde{c}}{\partial D} = 0$ ergibt

$$- \frac{k\lambda}{D^2} + \frac{f'(\lambda)}{2} + D \frac{f''(\lambda)}{3} + \frac{f''(\lambda)}{2} (s - \lambda) = 0. \tag{33.12}$$

Setzt man hier die Gleichung (33.11), aufgelöst nach $s - \lambda$, ein, erhält man für D einen von s unabhängigen Ausdruck

$$\boxed{D = \sqrt[3]{\frac{12k\lambda}{f''(\lambda)}}} \tag{33.13}$$

(33.11) liefert

$$\boxed{s = -\frac{f'(\lambda)}{f''(\lambda)} - \frac{D}{2} + \lambda} \tag{33.14}$$

Beachte: Die Poisson-Verteilungsannahme steckt in der Formulierung des Prinzips der Optimalität (33.2). Da die Poisson Verteilung eine diskrete Verteilung ist, müßte man anstelle von f', f'' die ersten bzw. zweiten Differenzenquotienten von f verwenden. Einfacher ist die Approximation durch eine stetige Verteilung.

Approximation durch die Normalverteilung

Für große λ läßt sich die Poisson Verteilung gut durch eine Normalverteilung approximieren. Sei

$N(\frac{x - \lambda}{\sqrt{\lambda}})$: Verteilungsfunktion der standardisierten Normalverteilung, falls die Poisson Verteilung den Erwartungswert λ besitzt.

Dann ist

$$f'(x) = (h + g)N(\frac{x - \lambda}{\sqrt{\lambda}}) - g;$$

$$f'(\lambda) = \frac{h - g}{2};$$

$$f''(\lambda) = \frac{h + g}{\sqrt{\lambda}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}};$$

$$D = \sqrt[3]{\frac{12k\sqrt{2\pi}}{h + g}\sqrt{\lambda}}; \tag{33.15}$$

$$s = \frac{g - h}{g + h} \cdot \frac{\sqrt{2\pi\lambda}}{2} - \frac{D}{2} + \lambda . \tag{33.16}$$

Wegen $\sigma = \sqrt{\lambda}$ folgt aus (33.15)

$$D \sim \sigma . \tag{33.17}$$

Approximation durch die Logistik

Wir approximieren nun die Poisson Verteilung durch die Logistik. Sei

$$L(x;\lambda,\sigma) = \frac{1}{1 + e^{-\frac{m(x-\lambda)}{\sigma}}} \quad ; \quad m = \frac{4}{\sqrt{2\pi}} \tag{33.18}$$

die Verteilungsfunktion einer nach der Logistik verteilten Zufallsvariablen mit Erwartungswert λ und Standardabweichung σ. Es ist dann

$$f(x) = (h + g)\,\frac{\sigma}{m}\,\ln\left\{1 + e^{\frac{m}{\sigma}(x-\lambda)}\right\} + g(\lambda - x) \;;$$

$$f'(x) = \frac{h + g}{1 + e^{-\frac{m(x-\lambda)}{\sigma}}} - g \;;$$

$$f'(\lambda) = \frac{h - g}{2} \;;$$

$$f''(\lambda) = \frac{h + g}{\sigma}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \;.$$

Da $f'(\lambda)$ und $f''(\lambda)$ bei Normalverteilung und Logistik identisch sind, erhalten wir für D wieder die Formel (33.15).

Setzen wir nun $f(x)$ in die notwendige Optimalitätsbedingung (33.8) ein, wird daraus

$$(h + g)\,\frac{\sigma}{m}\,\ln\left\{\frac{1 + e^{\frac{m}{\sigma}(s+D-\lambda)}}{1 + e^{\frac{m}{\sigma}(s-\lambda)}}\right\} = gD \;. \tag{33.19}$$

D ist aus (33.15) bekannt. Dann kann man den Ausdruck

$$A = e^{\frac{m}{\sigma}\frac{D}{2}}$$

berechnen, und mit der weiteren Abkürzung

$$V = e^{\frac{m}{\sigma}(s + \frac{D}{2} - \lambda)} \tag{33.20}$$

wird aus (33.19)

$$\frac{1 + A \cdot V}{1 + \frac{V}{A}} = A^{\frac{2g}{h+g}} =: Z ,$$

woraus folgt

$$V = \frac{Z - 1}{A - \frac{Z}{A}} .$$

Nachdem nun V berechnet ist, kann man den Wert von s bestimmen. Wir lösen (33.20) nach s auf und erhalten

$$\boxed{s = \frac{\sigma}{m} \ln V + \lambda - \frac{D}{2}} \tag{33.21}$$

mit $\sigma = \sqrt{\lambda}$ und $m = \frac{4}{\sqrt{2\pi}}$.

Wie ausführliche Beispielrechnungen zeigen, liefern die beiden Näherungsformeln (33.16) und (33.21) gute Schätzwerte für den optimalen Wert s^*. Die Näherungsformel (33.15) für D jedoch führt in den überwiegenden Fällen zu einer <u>Unterschätzung</u> des optimalen Wertes D^*.

Es empfiehlt sich deshalb eine Nachkorrektur von D. Sie kann auf folgende Weise geschehen:

Es ist zu erwarten, daß die Funktion f ihr Minimum in der Nähe von $s + \frac{D}{2}$ annimmt. Der Wert λ, um den f(x) in eine Taylorreihe entwickelt wurde (33.9), kann weit von der Minimumstelle entfernt sein. In der Hoffnung auf eine bessere Approximation kann man f(x) anstatt im Punkt λ im Punkt $s + \frac{D}{2}$ in eine Taylorreihe entwickeln. Die Rechnung führt jedoch auf komplizierte Ausdrücke.

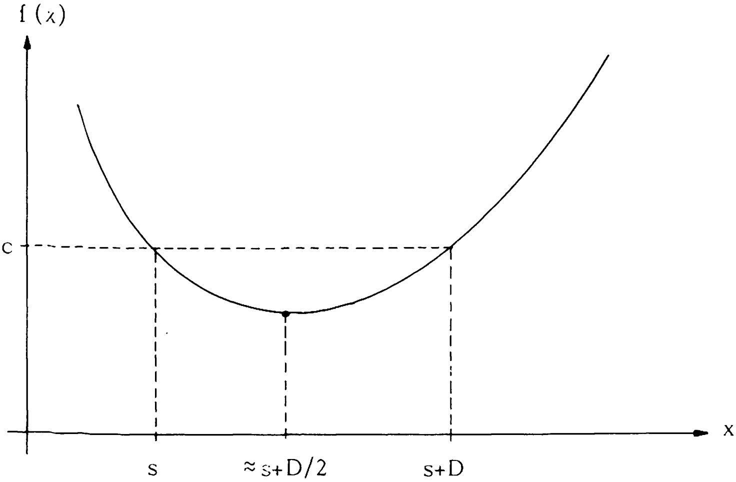


Abb. 33.1

Man kann jedoch im Sinne einer Nachkorrektur den Wert von D verbessern, wenn man, nachdem man D und s mittels (33.15) und (33.16) oder (33.21) bereits berechnet hat, ein verbessertes $D = D_{neu}$ berechnet nach der Formel

$$\boxed{D_{neu} = \sqrt[3]{\frac{12k\lambda}{f''(s + \frac{D}{2})}}}\ .$$

<u>Kostenfunktion</u>

Für die Kostenfunktion gilt

$$c = \frac{k\lambda}{D} + \frac{1}{D}\int_s^{s+D} f(x)dx =$$

$$= \frac{k\lambda}{D} + \frac{1}{D}[xf(x)\ \Big|_s^{s+D} - \int_s^{s+D} x\ f'(x)dx] =$$

$$= \frac{k\lambda}{D} + \frac{(s + D)f(s + D) - sf(s)}{D} - \underbrace{\frac{1}{D}\int_s^{s+D} x\ f'(x)dx}_{= \frac{k\lambda}{D}\quad (\text{vgl. } (33.7))}\ .$$

Mit (33.8) wird daraus

$$\boxed{c = f(s) = f(s + D)}\,. \tag{33.22}$$

§34 POISSON NACHFRAGE, STOCHASTISCHE LIEFERZEIT, EINE BESTELLUNG

Bei vollkommener Konkurrenz ist die Liefertreue ein wichtiger Faktor im Wettbewerb. Der Lieferant wird bemüht sein, Liefertermine möglichst einzuhalten. Für die Lagerhaltung liegt deshalb die Stochastik hauptsächlich in der Nachfrage. In Monopolsituationen oder dort, wo Güter zugeteilt werden, ist es eher umgekehrt. Die Stochastik liegt nur zum geringen Teil in der Nachfrage, zum größeren Teil aber in der Lieferzeit. Häufig ist dies in Entwicklungsländern zu beobachten.

Wir stellen nun ein Modell mit stochastischer Lieferzeit auf. Der Bestand wird kontinuierlich überwacht. Solange eine Bestellung noch aussteht, darf keine weitere Bestellung aufgegeben werden. Lieferzeit und Nachfrage seien unabhängig voneinander. Beide bilden einen Poisson Prozeß. Dieses Lagerhaltungsmodell wurde bereits in §30 behandelt. Dort wurde die Methode der Zustandswahrscheinlichkeiten angewendet. Man versuchte, Formeln für s und D herzuleiten, was aber nicht gelang. In diesem Paragraphen wird der Weg über das Optimalitätsprinzip eingeschlagen. Seien

$\mu\Delta t$: Wahrscheinlichkeit, daß eine ausstehende Lieferung im Zeitraum Δt eintrifft

$\lambda\Delta t$: Wahrscheinlichkeit, daß im Zeitraum Δt eine Einheit des Gutes nachgefragt wird

t: Zeit seit der letzten Bestellung

$t = 0$: es steht keine Bestellung aus

$l(y,t)$: Wertfunktion im stationären Fall.

Nichtdiskontierter Fall

Wir formulieren nun das Prinzip der Optimalität für den undiskontierten stationären Fall.

Sei $t = 0$:

$$l(y,0) + C\Delta t = hy\Delta t + [1 - \lambda\Delta t]\, l(y,0) + \\ + \lambda\Delta t \operatorname{Min} \{\underbrace{\operatorname*{Min}_{D} \{k + aD + l(y-1,\Delta t)\}}_{\text{bestellen}} \mid \underbrace{l(y-1,0)}_{\text{nicht bestellen}}\},$$

woraus

$$\lambda l(y,0) + C = hy + \lambda \operatorname{Min} \{\operatorname*{Min}_{D} \{\ .\ \} \mid l(y-1,0)\} \tag{34.1}$$

folgt.

Bei einem hohen Lageranfangsbestand wird sich eine Bestellung nicht lohnen. Je niedriger jedoch der Lageranfangsbestand ist, desto geringer wird der Kostenvorteil der Entscheidung 'nicht bestellen'. Ab einem Punkt $y = s$ wird es günstiger sein zu bestellen. Da das Lager kontinuierlich überwacht wird, bestellt man sofort bei $y = s$ die Menge D. Mit dieser Plausibilitätsbetrachtung rechtfertigen wir also auch bei diesem Modell mit Lieferzeit die (s,D) - Politik.

Sei $t > 0$:

Solange eine Lieferung noch aussteht, darf man keine erneute Bestellung aufgeben. Diese Situation birgt deshalb keinen Entscheidungsspielraum. Man braucht nicht das Prinzip der Optimalität anzuwenden. Die Kostenrekursion lautet (siehe §23)

$$l(y,t) + C\Delta t = hy\Delta t + [1 - \lambda\Delta t - \mu\Delta t]\, l(y,t + \Delta t) + \\ + \lambda\Delta t\, l(y-1,t+\Delta t) + \mu\Delta t\, l(y+D,0) \quad . \tag{34.2}$$

Die Randbedingung für $y = 0$ ist im LOST SALES Fall gegeben durch

$$l(0,t) + C\Delta t = \lambda\Delta t G + [1 - \lambda\Delta t - \mu\Delta t]\, l(0,t+\Delta t) +$$

$$+ \lambda\Delta t\, l(0,t+\Delta t) + \mu\Delta t\, l(D,0) \quad . \tag{34.3}$$

Hierbei sind

G: Strafkosten für die Enttäuschung eines nicht belieferten Kunden; unabhängig von der Zeit (Dimension: Kosten).

Im Limes $\Delta t \to 0$ wird aus (34.2) die Differentialgleichung

$$-\frac{\partial l(y,t)}{\partial t} + [\lambda + \mu]\, l(y,t) = hy + \lambda l(y-1,t) - C + \mu l(y+D,0), \qquad t > 0 \tag{34.4}$$

mit der Randbedingung

$$-\frac{\partial l(0,t)}{\partial t} = -C + \lambda G - \mu[l(0,t) - l(D,0)] \quad . \tag{34.5}$$

Das Optimierungsproblem läßt sich also in Form eines linearen Differentialgleichungssystems beschreiben, das man durch Integration lösen kann.

Diskontierter Fall

Wir interessieren uns für $l(s,0)$. Sei r die Zinsintensität und e^{-rt} der Abzinsungsfaktor vom Zeitpunkt t auf den Zeitpunkt Null (siehe §21). Mit

$q(\tau)d\tau$: Dichte der Lieferzeitverteilung

erhält man

$$l(s,0) = k + aD + \underbrace{\int_{\tau=0}^{\infty} q(T) \int_{t=0}^{\tau} \sum_{u=0}^{s} f(s-u)\, \frac{(\lambda t)^u}{u!}\, e^{-\lambda t} e^{-rt} dt\, d\tau}_{=:\ F(s)} +$$

$$+ \int_0^\infty q(\tau) \sum_{u=0}^{s} \frac{(\lambda\tau)^u}{u!} e^{-(\lambda+r)\tau} l(s - u + D,0)d\tau +$$

$$+ \int_0^\infty q(\tau) \sum_{u=s+1}^{\infty} \frac{(\lambda\tau)^u}{u!} e^{-(\lambda+r)\tau} l(D,0)d\tau \ . \qquad (34.6)$$

Für $y > s$ gilt die folgende Überlegung: Die mittlere Verweilzeit des Systems im Zustand y ist $\frac{1}{\lambda}$. Für diese Zeit fallen die Lagerkosten hy an. Danach sinkt das Lager auf $y - 1$. Die ab dann entstehenden Kosten $l(y-1,0)$ werden mit dem Faktor $e^{-r\lambda} =: \rho$ diskontiert:

$$l(y,0) = \frac{hy}{\lambda} + \rho l(y-1,0) \ ; \qquad y > s \ . \qquad (34.7)$$

Spezialfall: Eigenproduktion oder Just-In-Time Lieferabrufe

Wenn wir selber produzieren, unterliegt die Liefermenge unserer Kontrolle. Wir nehmen an, daß das Gut vom Produktionslager zum Vertriebslager speditiert wird.

Die Lieferzeit entsteht dadurch, daß sich die Bestellung als Auslieferungsauftrag in eine Warteschlange von bereits vorliegenden Auslieferungsaufträgen einreihen muß und deshalb eine Zeit unbearbeitet bleibt. Die zur Auslieferung kommende Menge kann im letzten Augenblick noch abgeändert werden. Dann kann man die Bestellmenge im letzten Augenblick stets so aktualisieren, daß mit dem Eintreffen der Lieferung das Lager auf $y = S$ aufgefüllt wird. Unter dieser Annahme verändert sich die Gleichung (34.6) zu

$$l(s,0) = k + aD + F(s) + l(S,0) \underbrace{\int_0^\infty q(\tau)e^{-r\tau}d\tau}_{=:\ \alpha} \ . \qquad (34.8)$$

α: Erwartungswert des Diskontfaktors über die Lieferzeit.

Die Gleichung (34.7) bleibt unverändert. Insbesondere gilt für $y = S$

$$l(S,0) = \frac{h}{\lambda} \sum_{y=s+1}^{S} y + \rho^D l(s,0) \ . \tag{34.9}$$

Setzt man hier $l(s,0)$ gemäß Gleichung (34.8) ein und wertet die Summe aus, erhält man

$$l(S) = \frac{1}{1 - \rho^D \alpha} \left\{ \frac{h}{\lambda} \left[\frac{S(S+1)}{2} - \frac{s(s+1)}{2}\right] + \rho^{S-s}[k + aD + F(s)] \right\} \ . \tag{34.10}$$

Das zweite Argument $\tau = 0$ in der Kostenfunktion l wird nicht mehr mitgeführt, weil die Rekursionen (34.9) und (34.10) sich stets auf $\tau = 0$ beziehen.
Auch hier ist es nicht möglich, Formeln für die optimalen Werte s^*, S^* anzugeben. Man gewinnt sie durch Minimierung von (34.10)

$$\frac{1}{1 - \rho^D \alpha} \{\frac{h}{\lambda} \left[\frac{S(S+1)}{2} - \frac{s(s+1)}{2}\right] + \rho^{S-s}[k + aD + F(s)] \rightarrow \underset{s,S}{\mathrm{Min}} \ ,$$

wobei man sich wieder auf ganzzahlige Werte s,S beschränken kann.

§35 POISSON NACHFRAGE, STOCHASTISCHE LIEFERZEIT, MEHRERE BESTELLUNGEN

Wir weiten jetzt das Lagerhaltungsmodell auf den Fall aus, daß eine neue Bestellung aufgegeben werden darf, noch bevor eine zu diesem Zeitpunkt noch ausstehende Lieferung eingetroffen ist. Zunächst behandeln wir den Fall:

Die Lieferzeit τ ist exponentialverteilt

Die Lieferzeitverteilung besitzt die Dichte

$$q(\tau)d\tau = \mu e^{-\mu\tau} d\tau \ .$$

Die Exponentialverteilung hat den Vorteil, daß man nicht zu wissen braucht, wie lange eine Lieferung schon aussteht. Wir unterstellen, daß alle Lieferzeiten identisch verteilt sind (gleicher Lieferant).

Wegen der Poisson Nachfrage sind alle Bestellungen voneinander stochastisch unabhängig. Aus diesem Grunde ist die Wahrscheinlichkeit des Eintreffens von Bestellungen

a) falls eine Bestellung aussteht: $\mu\Delta t$,

b) falls m Bestellungen ausstehen: $m\mu\Delta t$.

Die Zahl

m: ausstehende Bestellungen

wird neben dem Bestand y die zweite Zustandsgröße in diesem Lagerhaltungsmodell. Deshalb brauchen wir die ausstehenden Bestellungen nicht dem Bestand hinzuzuschlagen.

y: jetzt wieder physikalischer Bestand (bzw. Fehlmengen).

Die Lager- bzw. Fehlmengenkosten sind

$$\varphi(y) = \begin{cases} hy, & \text{für } y \geq 0; \\ -gy, & \text{für } y < 0; \end{cases} \quad \text{oder} \quad \varphi(y) = \begin{cases} hy, & \text{für } y \geq 0; \\ -G\lambda, & \text{für } y < 0. \end{cases} \tag{35.1}$$

Jede einzelne Bestellung besitze die Losgröße D. Das Prinzip der Optimalität lautet ohne Diskontierung

$$l(y,m) + C\Delta t = \varphi(y)\Delta t + m\mu\Delta t l\,(y+D,m-1) + [1 - m\mu\Delta t - \lambda\Delta t]l(y,m) +$$
$$+ \lambda\Delta t \text{ Min } \{k + aD + l(y-1,m+1) \mid l(y-1,m)\} \tag{35.2}$$

bzw. nach Umstellung, Kürzen und Division durch Δt

$$(\lambda + m\mu)l(y,m) + C = \varphi(y) + m\mu l(y + D,m - 1) +$$
$$+ \lambda \text{ Min } \{k + aD + l(y-1,m+1) \mid l(y-1,m)\} . \tag{35.3}$$

Dies ist eine schwierige Differenzengleichung. Wir weichen deshalb auf eine heuristische Lösung aus, z.B. indem wir äquidistante Bestellpunkte $s_1, s_2, \ldots$ einführen.

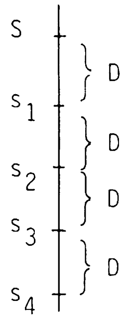


Abb. 35.1: mehrere äquidistante Bestellpunkte

und uns auf eine maximale Zahl von Bestellmengen M festlegen, S = MD.

Das Problem "bestimme M und D" kann mit Hilfe der Zustandswahrscheinlichkeiten gelöst werden.

Lieferzeit τ beliebig verteilt - keine Überkreuzungen

Die Lieferzeit sei jetzt beliebig verteilt. Keine Überkreuzungen bedeutet: was eher bestellt wurde, kommt eher an.
Bei fester Lieferzeit τ benützten wir die Idee, die Lagerkosten auf den Zeitpunkt τ zu beziehen. Wir wollen auch hier so vorgehen. Da τ stochastisch ist, wird auch die Nachfrage u innerhalb von τ eine Zufallsvariable. Sei

p(u): Wahrscheinlichkeit, daß innerhalb der Lieferzeit die Nachfrage u auftritt.

Bei Poisson Nachfrage mit der Rate λ ist

$$p(u) = \int_0^\infty \frac{(\lambda\tau)^u}{u!} e^{-\lambda\tau} q(\tau)d\tau \ . \tag{35.4}$$

Beispiel: τ ist Gamma verteilt:

$$q(\tau)d\tau = \frac{\mu^{j+1}\tau^{j}e^{-\mu\tau}}{j!}\,d\tau \quad ;$$

$$p(u) = \frac{1}{(\lambda+\mu)^{u+j+1}} \int_{0}^{\infty} \frac{1}{u!}\,\frac{1}{j!}\,\lambda^{u}\mu^{j+1}(\lambda+\mu)^{u+j+1}\tau^{u+j}e^{-(\lambda+\mu)}d\tau$$

NR: $\int_{0}^{\infty} \beta^{i+1}T^{i}e^{-\beta T}d\tau = i!$

$$p(u) = \frac{(u+j)!}{u!j!}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^{u}\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{j+1} =$$

$$= \binom{-(j+1)}{u}(-\rho)^{u}(1-\rho)^{j+1} \; . \tag{35.5}$$

Dies ist eine negative Binomialverteilung mit Exponent $-(j+1)$ und Wahrscheinlichkeit $\rho = \lambda/(\lambda+\mu)$. Bei Poisson Nachfrage wird also die Nachfrage innerhalb der Lieferzeit τ, wobei τ Gamma verteilt ist, zu einer exponentialverteilten Zufallsgröße.

Der Erwartungswert der Lager- und Fehlmengenkosten $f(y)$ bezogen auf den Erwartungswert von τ ist

$$f(y) = h\sum_{u=o}^{y}(y-u)p(u) + g\sum_{u=y+1}^{\infty}(u-y)p(u) \; . \tag{35.6}$$

Das Prinzip der Optimalität lautet

$$l(y) + C\Delta t = f(y)\Delta t + [1-\lambda\Delta t]l(y) +$$

$$+ \lambda\Delta t \min_{x\geq y-1}\{k\delta(x-y+1) + a(x-y+1) + l(x)\} \; . \tag{35.7}$$

Es ist jetzt viel einfacher geworden, verglichen mit (34.2). Das liegt daran, daß jetzt alle bis auf die letzte noch ausstehende Bestellung ignoriert werden. Die erwarteten Kosten hängen nur von der letzten Bestellung ab (keine Überkreuzung!). Dafür ist jetzt f komplizierter geworden. Im Grenzfall "feste Lieferzeit" wird $q(\tau)$ zu einer uneigentlichen Verteilung.

Nachdem (35.7) mit dem Prinzip der Optimalität (33.2) identisch ist, führt die Minimierung der Kosten pro Zyklus auf dieselben Formeln wie beim Modell mit fester Lieferzeit (§33), aber mit der anderen Formel (35.5) für $p(u)$.

Beispiel mit Diskontierung

Wir betrachten in diesem Beispiel den diskontierten Fall. Seien

r : Zinsintensität;

e^{-rt}: Diskontfaktor;

$e^{-r\Delta t} \approx (1 - r\Delta t)$ für $\Delta t \ll 1$.

Im diskontierten Fall lautet das Optimalitätsprinzip für kleines Δt

$$l(y) = f(y)\Delta t + (1 - \lambda\Delta t)(1 - r\Delta t)l(y) + $$

$$+ \lambda\Delta t(1 - r\Delta t) \min_{x \geq y-1} \{k\delta(x-y+1) + a(x-y+1) + l(x)\} .$$

Vernächlässigt man die Terme höherer Ordnung in Δt, wird daraus

$$l(y) = \frac{1}{\lambda+r} f(y) + \frac{\lambda}{\lambda+r} \min_{x \geq y-1} \{k\delta(x - y + 1) + a(x - y + 1) + l(x)\}. \tag{35.8}$$

Diese Formulierung weist formal keine Unterschiede mehr auf zu Lagerhaltungsmodellen mit periodischer Überwachung (vgl. dazu das Optimalitätsprinzip in der Formulierung (36.4)).

Solchen Modellen ist das nächste Kapitel gewidmet.

KAPITEL V: STOCHASTISCHE MODELLE MIT PERIODISCHER ÜBERWACHUNG

Dieses Kapitel kann unabhängig von den vorangehenden Kapiteln gelesen werden.

§36 ARROW-HARRIS-MARSCHAK MODELL

Mit der Einführung der elektronischen Datenverarbeitung ist eine kontinuierliche Bestandsfortschreibung meist kein Problem mehr. Dennoch halten viele Unternehmer an einer periodischen Inspektion und Entscheidung fest. Manchmal liegt das daran, daß Absprachen mit dem Lieferanten getroffen wurden, die eine Bestellung immer nur zu bestimmten (meist gleichabständigen) Zeitpunkten erlauben. Zwei aufeinanderfolgende mögliche Bestellzeitpunkte definieren eine Periode. Hier ist es dann überflüssig, den Bestand während der Periode zu verfolgen, weil man diese Information nicht ausnützen kann. Es genügt eine Bestandsinspektion (physikalisch oder buchmäßig) jeweils zu Periodenbeginn.

Mehrperiodenmodelle mit stochastischer Nachfrage erfordern eine flexiblere Bestellregel als Modelle mit kontinuierlicher Überwachung. Man wird die Losgröße in Abhängigkeit vom vorgefundenen Lagerbestand wählen. Deshalb erfordern derartige Modelle als Lösungsweg die Dynamische Optimierung. Bei der strengen Behandlung dieses Problems ist die Dynamische Optimierung erstmalig angewendet worden. Das folgende ist zugleich eine Einführung in die Denkweise der Dynamischen Optimierung. (Das der DO zugrunde liegende Prinzip der Optimalität wurde in den vorangegangenen Paragraphen bereits mehrmals formuliert; eine Rechenmethode der DO wurde schon in §25 verwendet.) Einige Algorithmen der stochastischen DO sind im Kapitel VI beschrieben.

Das Grundmodell der Lagerhaltung mit periodischer Überwachung wurde von den Amerikanern KENNETH ARROW, TED HARRIS und JACOB MARSCHAK formuliert und ist nach ihnen AHM-Modell benannt. (ARROW & HARRIS & MARSCHAK (1951)).

Es gelten die folgenden Voraussetzungen:

1. Periodische Inspektion und Entscheidung
2. Die Nachfrage ist zufällig und in allen Perioden unabhängig und identisch verteilt.
3. Unbefriedigte Nachfrage am Ende einer Periode
   a) geht verloren (LOST SALES)
   b) wird vorgemerkt (BACKORDER)
4. Lieferungen erfolgen sofort. Die Lieferzeit ist Null.
5. Endlicher oder unendlicher Planungshorizont.
6. Diskontierung

Seien

ρ	:	Diskontfaktor für eine Periode
n	:	Planungshorizont
y	:	Lagerbestand zu Beginn einer Periode, unmittelbar vor der Entscheidung
x	:	Bestand zu Beginn der Periode unmittelbar nach der Entscheidung
x - y	:	Bestellmenge
u	:	Nachfrage, Zufallsvariable
P(u)	:	Verteilungsfunktion der Nachfrage mit Dichte $p_u du$
f(x)	:	Erwartungswert der Lager- und Fehlmengenkosten für eine Periode
a	:	proportionaler Bestellkostensatz
k	:	fixe Bestellkosten.

Bisher wurde die Kostenfunktion mit l bezeichnet. In der Dynamischen Optimierung ist es üblich, die Wertfunktion mit v zu benennen. Da bei Periodenmodellen die DO eine überragende Rolle spielt, übernehmen wir diese Schreibweise. An die Stelle von l tritt jetzt v:

v	:	Wertfunktion (bisher l)
v_o	:	Kosten, die nach dem Ende des Planungshorizonts entstehen

$v_o \equiv 0$: nach Voraussetzung (solange nichts anderes festgelegt ist).

Die folgende Abbildung zeigt die Operationscharakteristik des Lagers bei Anwendung der sog. (s,S)-Politik (vgl. 39.1). Die durchgezogene Linie stellt den zeitlichen Lagerverlauf dar. Die gestrichelten Linien geben weitere mögliche Lagerverläufe an.
Der Wert s ist die Bestellgrenze und S ist der Auffüllpunkt des Lagers. Die (s,S)-Politik besagt: Ist zum Inspektionszeitpunkt $y \leq s$, dann wird der Lagerbestand durch eine Bestellung auf S angehoben. (Lieferzeiten werden im Augenblick vernachlässigt.)

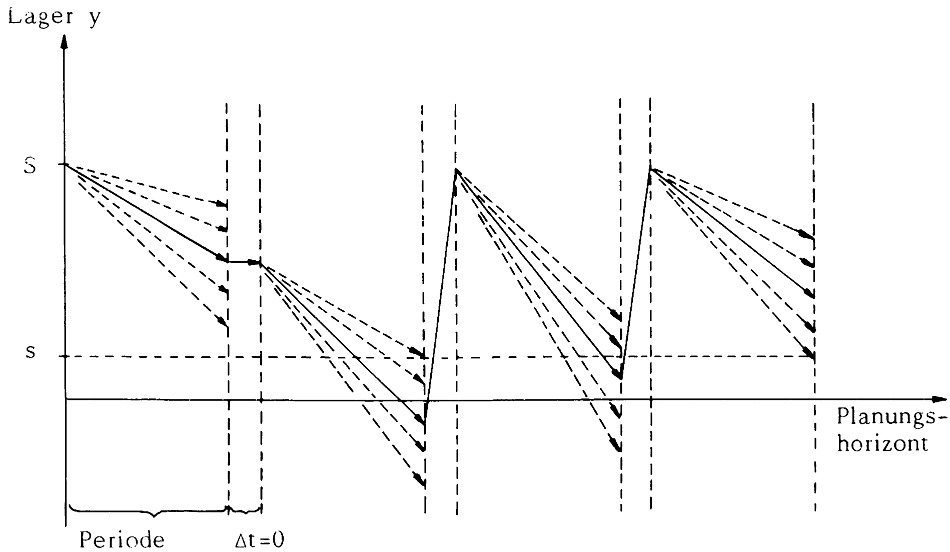


Abb. 36.1: Operationscharakteristik im AHM - Modell

Bei Lagerkostensatz h und Fehlmengenkostensatz g sind die erwarteten Lager- und Fehlmengenkosten

$$f(x) = h \int_0^x (x-u)dP(u) + g \int_x^\infty (u-x)dP(u) =$$

$$\stackrel{(\S 26)}{=} \quad (h + g) \int_0^x P(u)du + g(\mu - x) \quad . \tag{36.1}$$

μ ist der Erwartungswert der Nachfrage.

Als Zielfunktion wählen wir wieder gemäß dem BERNOULLI-Prinzip den Erwartungswert aller Kosten während des gesamten Planungshorizonts. Wir zerlegen diese Kosten in die Kosten der unmittelbar vor uns liegenden Periode (Einperiodenkosten) und die Kosten des Restproblems. Dessen Planungshorizont ist um eine Periode vermindert und der Anfangsbestand für das Restproblem ist identisch mit dem Bestand am Ende der ersten Periode. Für

$v_n(y)$: Erwartungswert aller Kosten bei Anfangslagerbestand y, Planungshorizont n und optimaler Bestandsführung

gilt die Rekursion (bei gegebener Randbedingung $v_o(y) = v_o = 0$)

a) im BACKORDER Fall: $n = 1,2,3,...$

$$\boxed{v_n(y) = \min_{x \geq y} \{k\delta(x - y) + a(x - y) + f(x) + \rho \int_0^\infty v_{n-1}(x - u)dP(u)\}} \tag{36.2}$$

b) im LOST SALES Fall: $n = 1,2,3,...$

$$\boxed{\begin{aligned} v_n(y) = \min_{x \geq y} \{k\delta(x - y) + a(x - y) + f(x) + \rho \int_0^x v_{n-1}(x - u)dP(u) + \\ + [1 - P(x)]v_{n-1}(0)\} \quad . \end{aligned}} \tag{36.3}$$

An dem AHM - Modell hat sich erstmals die Theorie der Dynamischen Optimierung herausgebildet (durch RICHARD BELLMAN). Man nennt deshalb den obigen Rekursionsansatz das BELLMANsche PRINZIP DER OPTIMALITÄT und die beiden Gleichungen (36.2), (36.3) die BELLMANschen Funktionalgleichungen.

Es ist y der Lagerbestand unmittelbar vor der Entscheidung. Man kann die Funktionalgleichungen auch bezogen auf einen Zustand

z: Lagerbestand nach der Entscheidung

formulieren (BECKMANN (1968)):

$$v_n(z) = f(z) + \rho \int_o^\infty \operatorname*{Min}_{x-y} \{k\delta(x - y) + a(x - y) + v_{n-1}(z + x - y - u)\}dP(u) \quad . \quad (36.3)$$

Für numerische Zwecke ist diese Form u.U. vorteilhafter, weil der Zustandsraum kleiner ist. Das wird aber hier nicht weiter verfolgt.

§37 DAS AHM - MODELL IM STATIONÄREN FALL

Im stationären Fall wird das AHM - Modell einer analytischen Behandlung leichter zugänglich. Außerdem vereinfachen sich die Funktionalgleichungen, weil der Iterationsindex n wegfällt.

Wir hatten bisher im stationären Fall schon einige Male den Ansatz benutzt, die proportionalen Bestellkosten aus der zu minimierenden Kostenfunktion herauszunehmen. Auf lange Sicht muß nämlich der Wareneingangsstrom gleich dem Warenausgangsstrom sein, d.h. die erwartete stationäre Bestellmenge im BACKORDER - Fall ist gleich dem Erwartungswert μ der Nachfrage in einer Periode und damit unabhängig von der Bestellregel.

Diese Überlegung wollen wir nun auf das stationäre AHM - Modell übertragen. Die Wertfunktion lautet (BACKORDER - Fall) zunächst

$$v(y) = \operatorname*{Min}_{x \geq y} \{k\delta(x - y) + a(x - y) + f(x) + \rho \int_o^\infty v(x - u)dP(u)\} \quad . \quad (37.1)$$

Um den Gegenwartswert aller Kosten endlich zu halten, wurde mit $\rho < 1$ diskontiert.

Wir bereinigen nun v um den Erwartungswert aller proportionalen Bestellkosten. In guter Näherung wird angenommen, daß zu Beginn einer jeden Periode der erwartete Absatz μ der Vorperiode bestellt wird. Dann ist der Erwartungswert aller proportionalen Bestellkosten

$$a\mu \frac{\rho}{1-\rho} - ay \; . \tag{37.2}$$

Wir setzen die bereinigte Wertfunktion $\hat{v}(y)$

$$\hat{v}(y) := v(y) - a\left(\frac{\mu\rho}{1-\rho} - y\right) \tag{37.3}$$

in die Funktionalgleichung (37.1) ein

$$\hat{v}(y) + a\left(\frac{\mu\rho}{1-\rho} - y\right) = \min_{x \geq y} \Big\{k\delta(x-y) + a(x-y) + f(x) + \rho \int_0^\infty \Big[\hat{v}(x-u) + a\left(\frac{\mu\rho}{1-\rho} - x + u\right)\Big]dP(u)\Big\}$$

$$= \min_{x \geq y} \Big\{k\delta(x-y) + \underbrace{ax - \rho ax + f(x)}_{=:\, \hat{f}(x)} + \underbrace{a\mu \frac{\rho^2}{1-\rho} + \rho a\mu - ay}_{= a\left(\frac{\mu\rho}{1-\rho} - y\right)} + \rho \int_0^\infty \hat{v}(x-u)dP(u)\Big\}$$

und erhalten (im BACKORDER Fall)

$$\boxed{\hat{v}(y) = \min_{x \geq y} \Big\{k\delta(x-y) + \hat{f}(x) + \rho \int_0^\infty \hat{v}(x-u)dP(u)\Big\}} \tag{37.4}$$

mit

$$\hat{f}(x) = ax(1-\rho) + f(x) \; . \tag{37.5}$$

Im LOST SALES - Fall läßt sich dieser Trick nicht anwenden, da dort die mittlere Bestellmenge pro Periode geringer ist als die erwartete Nachfrage.

In den folgenden Paragraphen beschäftigen uns die beiden Fragen:

1. Wie läßt sich im Einzelfall eine konkrete Lösung gewinnen?
2. Wie sieht die Struktur der optimalen Lösung aus, falls man überhaupt von einer Struktur sprechen kann?

§38 STANDARDISIERUNG

Unter gewissen Voraussetzungen läßt sich das AHM - Modell standardisieren.

Voraussetzung (V1):

Die Nachfrage u besitze eine standardisierbare Wahrscheinlichkeitsverteilung von der Form $P(u;\mu,\sigma) = Q(\frac{u-\mu}{\sigma})$.

Dann setzen wir

$$u = \mu + \sigma\epsilon \tag{38.1}$$

μ: Erwartungswert der Nachfrage u

σ: Standardabweichung von u

ϵ: Zufallsvariable mit $\mu = 0$, $\sigma = 1$ (stochastische Komponente der Nachfrage)

$$q(\frac{u-\mu}{\sigma}) = p(\epsilon).$$

Voraussetzung (V2):

Die fixen Bestellkosten k seien von der Form

$$k = k_o\sigma \; . \tag{38.2}$$

Das Prinzip der Optimalität läßt sich folgendermaßen formulieren

$$v(y) = \min_{x \geq y} \{k\delta(x-y) + a(x-y) + h\int_{u=o}^{x}(x-u)q(\frac{u-\mu}{\sigma})d(\frac{u}{\sigma}) + $$

$$+ g\int_{x}^{\infty}(u-x)q(\frac{u-\mu}{\sigma})d(\frac{u}{\sigma})\} + \rho\int v(x-u)q(\frac{u-\mu}{\sigma})d(\frac{u}{\sigma}). \tag{38.3}$$

Die rechte Seite wird unter der Voraussetzung (V2) proportional zu σ. Um dies zu zeigen, führen wir folgende Variablentransformation durch

$$\xi := \frac{x - \mu}{\sigma} ; \tag{38.4}$$

$$\eta := \frac{y}{\sigma} . \tag{38.5}$$

Außerdem ist $d\epsilon = d(\frac{u}{\sigma})$ und wir definieren

$$\sigma \upsilon(\eta) := v(y) . \tag{38.6}$$

Dann wird aus (38.3)

$$\sigma\upsilon(\eta) = \underset{\xi \geq \eta}{\text{Min}} \{k_o \sigma \delta(\xi - \eta) + a\sigma(\xi - \eta) + \sigma f(\xi) + \\ + \rho \int \sigma\upsilon(\xi - \epsilon)p(\epsilon)\, d\epsilon\} . \tag{38.7}$$

Der Faktor σ kürzt sich weg, und man erhält die STANDARDISIERTE GLEICHUNG

$$\boxed{\upsilon(\eta) = \underset{\xi > \eta}{\text{Min}} \{k_o \delta(\xi-\eta) + a(\xi-\eta) + f(\xi) + \\ + \rho \int \upsilon(\xi-\epsilon)p(\epsilon)d\epsilon\} .} \tag{38.8}$$

Die Herleitung zeigt:

1. Die erwarteten Lager- und Knappheitskosten sind proportional zur Standardabweichung der Nachfrage und unabhängig von deren Erwartungswert. Mit wachsendem σ nimmt f zu.
2. Man löst ein für allemal das standardisierte Problem für verschiedene Kostensätze $\frac{h}{g}$, $\frac{k_o}{g}$ und leitet aus der optimalen Politik s^*, S^* mit Hilfe der Rücktransformation

$$x = \mu + \sigma\xi$$

die optimale Politik des gegebenen Problems ab:

$$\boxed{\begin{aligned} s &= \mu + \sigma s^* \ ; \\ S &= \mu + \sigma S^* \ . \end{aligned}}$$

Dabei sind jedoch die Voraussetzungen (V1) und (V2) zu prüfen.

§39 EXPONENTIALVERTEILTE NACHFRAGE

Wir versuchen, unser bisheriges Lösungsschema beizubehalten:

1. Die Struktur der optimalen Bestellregel in parametrisierter Form vorgeben;

2. Herleitung der Kostenfunktion v;

3. Die Minimierung von v bezüglich der Parameter der Bestellregel legt die optimale Bestellregel fest.

Es wird jedoch nur dann zum Ziel führen, wenn die zwei Voraussetzungen erfüllt sind:

- stationäres Modell,
- die optimale Bestellregel besitzt die angenommene parametrisierte Struktur.

Zunächst postulieren wir wieder die Struktur der Bestellregel und optimieren nur innerhalb dieser Struktur. (Später wird sich zeigen, daß die global optimale Bestellregel die unterstellte Struktur besitzt.)

Annahme: die Bestellregel sei eine (s,S) - Politik

$$\boxed{\begin{array}{ll} s < y \leq S: & \text{tue nichts} \ ; \\ y \leq s: & \text{fülle auf } S \text{ auf} \ . \end{array}} \qquad (39.1)$$

Falls der Anfangsbestand $y > S$ ist, wartet man solange, bis der Bestand auf S gefallen ist. Von da ab gilt die (s,S) - Politik und S ist der maximale Lagerbestand. Die Wertfunktion, eingeschränkt auf die Klasse der (s,S) - Politiken, lautet (im BACKORDER - Fall)

$$\hat{v}(y) = \begin{cases} \hat{f}(y) + \rho \int_0^\infty \hat{v}(y-u)dP(u) \quad , & \text{für } \; y \geq s : \qquad (39.2) \\ \\ k + \hat{f}(S) + \rho \int_0^\infty \hat{v}(S-u)dP(u) \quad , & \text{für } \; y \leq s . \qquad (39.3) \end{cases}$$

Die proportionalen Bestellkosten werden in diesem Modell außer acht gelassen. Es hat sich in §37 gezeigt, daß dies keine relevante Einschränkung bedeutet. Den Zustandsraum setzen wir als kontinuierlich voraus, so daß im Punkt $y = s$ die beiden Alternativen (bestellen, nicht bestellen) gleich gut sind. Für $y = s$ sind also (39.2) und (39.3) identisch.

Für $y \leq s$ ist die Wertfunktion (39.3) unabhängig von y. Insbesondere gilt

$$\hat{v}(y) = \hat{v}(s) \quad , \qquad y \leq s.$$

Deshalb läßt sich (39.2) auch schreiben als

$$\boxed{\hat{v}(y) = \hat{f}(y) + \rho \int_0^{y-s} \hat{v}(y-u)dP(u) + \rho\hat{v}(s)[1 - P(y-s)] \; , \quad y \geq s \; .} \qquad (39.4)$$

Für $y = s$ wird daraus $\hat{v}(s) = \hat{f}(s) + \rho\hat{v}(s)$, oder

$$\hat{v}(s) = \frac{\hat{f}(s)}{1-\rho} \; . \qquad (39.5)$$

Soweit gelten die Überlegungen allgemein. Nun versuchen wir, die Integralgleichung (39.4) für exponentialverteilte Nachfrage zu lösen. Hier ist

$$P(u) = 1 - e^{-\alpha u} ,$$

$$p(u)du = \alpha e^{-\alpha u}\, du,$$

$$E\{u\} = \mu = \frac{1}{\alpha} .$$

Die erwarteten Lager- und Fehlmengenkosten sind

$$\hat{f}(x) = f(x) + ax(1 - \rho)$$

$$f(x) = (h + g)[x - \frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha x})] + g(\frac{1}{\alpha} - x) . \tag{39.6}$$

Wir setzen sie in (39.4) ein, führen dort im Integral die Variablentransformation $\xi = y - u$ durch und multiplizieren die Gleichung mit $e^{\alpha y}$. Das ergibt

$$\hat{v}(y)e^{\alpha y} = (h + g)[ye^{\alpha y} - \frac{1}{\alpha}(e^{\alpha y} - 1)] + \frac{g}{\alpha}\, e^{\alpha y} + (a - g - \rho)ye^{\alpha y} +$$

$$+ \alpha\rho \int_s^y \hat{v}(\xi)e^{\alpha\xi}\, d\xi + \alpha\rho\hat{v}(s)e^{\alpha s} . \tag{39.7}$$

Mit der Definition

$$w(y) := \hat{v}(y)e^{\alpha y}$$

wird daraus

$$w(y) = (h + g)[ye^{\alpha y} - \frac{1}{\alpha}(e^{\alpha y} - 1)] + \frac{g}{\alpha}\, e^{\alpha y} + (a - g - \rho)ye^{\alpha y} +$$

$$+ \alpha\rho \int_s^y w(\xi)d\xi + \alpha\rho w(s) .$$

Durch Differentiation führen wir diese Integralgleichung in eine Differentialgleichung der folgenden Form über

$$w'(y) - \alpha\rho w(y) = [\alpha y(h + a - \rho) + a - \rho]e^{\alpha y} .$$

Mit dem integrierenden Faktor $e^{-\alpha\rho y}$ wird daraus die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dy}(w(y)e^{-\alpha\rho y}) = [\alpha y(h + a - \rho) + (a - \rho)]e^{\alpha(1 - \rho)y} . \qquad (39.8)$$

Wir integrieren (39.8) und gewinnen durch Multiplikation mit $\exp(\alpha\rho y - \alpha y)$ die ursprüngliche Kostenfunktion $\hat{v}$ zurück. Im zweiten Schritt setzen wir die Randbedingung (39.5) ein und erhalten die gesuchte Lösung für $\hat{v}$.

Im dritten Schritt ist $\hat{v}$ bezüglich $y = S$ und s zu minimieren

$$\min_y \hat{v}(y) = \hat{v}(S) \quad \Rightarrow \quad S$$

$$\min_s \hat{v}(y) \quad \Rightarrow \quad s .$$

Die für die Minima notwendigen Bedingungen $\frac{d\hat{v}}{dy} = 0$ und $\frac{d\hat{v}}{ds} = 0$ führen jedoch auf transzendente Gleichungen, so daß keine expliziten Lösungen für s und S angegeben werden können.

Um dieses Ziel dennoch zu erreichen, modifizieren wir die Kostenstruktur. Sei jetzt

$$f(x) = hx + g \int_x^\infty (\xi - x)e^{-\xi}\, d\xi = hx + ge^{-x} . \qquad (39.9)$$

Außerdem sei der Erwartungswert der Nachfrage $\mu = 1$, was sich durch eine Umskalierung der Nachfrageeinheiten ohne Einschränkung erreichen läßt. Dann ist $\alpha = 1$. Die Lagerkosten werden auf den Anfang der Periode bezogen und die Fehlmengenkosten auf das Ende. Lagermengen $y > 0$ werden also mit höheren Kosten bewertet als bisher. Anstelle von (39.7) erhalten wir nun

$$\hat{v}(y) = hy + ge^{-y} + \frac{\rho}{1-\rho}(hse^{s} + g)e^{-y} + \rho \int_{s}^{y} \hat{v}(\xi)e^{\xi-y}\, d\xi \,. \tag{39.10}$$

Die Lösung dieser Gleichung lautet

$$\hat{v}(y) = \frac{hy}{1-\rho} - \frac{\rho h}{(1-\rho)^2} + \left[\frac{\rho h}{(1-\rho)^2} + \frac{ge^{-s}}{1-\rho}\right] e^{(\rho-1)(y-s)} \,. \tag{39.11}$$

$\hat{v}$ ist konvex in y und s. S = y ist der optimale Anfangsbestand, deshalb liegt das Minimum von $\hat{v}$ bei S

$$\hat{v}'(S) = 0. \tag{39.12}$$

Setzt man in (39.2), (39.3) einmal y = S und einmal y = s ein und subtrahiert man die beiden Ausdrücke, so erhält man

$$\hat{v}(s) - \hat{v}(S) = k. \tag{39.13}$$

Wir verwenden diese beiden Gleichungen (39.12), (39.13) zur Berechnung von s und S bzw. D = S - s. Es ist für y = S

$$\hat{v}'(S) = \frac{h}{1-\rho} + (\rho - 1)\left[\frac{\rho h}{(1-\rho)^2} + \frac{ge^{-s}}{1-\rho}\right] e^{(\rho - 1)(S - s)} \,.$$

Wegen v'(S) = 0 folgt

$$D = S - s = \frac{1}{1-\rho} \ln\left[\rho + (1-\rho)\frac{g}{h} e^{-s}\right] \,. \tag{39.14}$$

Aus (39.13) wird

$$\frac{\rho h}{(1-\rho)^2} + \frac{ge^{-s}}{1-\rho} - \frac{hD}{1-\rho} - \left[\frac{\rho h}{(1-\rho)^2} + \frac{ge^{-s}}{1-\rho}\right] e^{(\rho-1)D} = k \tag{39.15}$$

oder

$$[\rho + (1 - \rho)\frac{g}{h}e^{-s}] - (1 - \rho)D - [\frac{(1 - \rho)g}{h}e^{-s} + \rho]e^{(\rho-1)D}$$
$$= \frac{(1 - \rho)^2}{h}k \; . \qquad (39.16)$$

Mit der Abkürzung

$$q := \rho + (1 - \rho)\frac{g}{h}e^{-s}$$

wird aus (39.14)

$$D = \frac{1}{1 - \rho}\ln q$$

und (39.16) nimmt die Form an

$$q = 1 + \frac{(1 - \rho)^2}{h}k + \ln q \; . \qquad (39.17)$$

Die Werte s, D können nun wie folgt gefunden werden: Zuerst wird q iterativ aus Gleichung (39.17) bestimmt. Dann ist s, S und D gegeben durch

$$\boxed{\begin{aligned} s &= \ln\frac{g\cdot(1 - \rho)}{h\cdot(q - \rho)}\;; && (39.18)\\ D &= \frac{1}{1 - \rho}\ln q\;; && (39.19)\\ S &= s + D. && (39.20)\end{aligned}}$$

§40 OPTIMALITÄT DER (s_n,S_n) - POLITIK

Bei den Modellen mit kontinuierlicher Bestandsüberwachung lag die Optimalität einer (s,D) - Politik (S = s + D) auf der Hand. Dadurch vereinfachte sich die analytische Lösungsfindung beträchtlich. Gilt Entsprechendes auch für AHM - Modelle?

Wir betrachten das AHM - Modell im BACKORDER Fall. Das Prinzip der Optimalität lautet

$$v_n(y) = \min_{x \geq y} \{k\delta(x - y) + a(x - y) + f(x) + \rho \int_0^\infty v_{n-1}(x - u)dP(u)\}, \quad (40.1)$$

u = 1,2...,N.

Durch Auswertung dieser Rekursion läßt sich stets eine Lösung finden. Man startet mit einem vom Problem her zu definierenden Anfangswert v_o und berechnet nacheinander die Kette

$$v_o \Rightarrow v_1 \Rightarrow v_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow v_n \Rightarrow \ldots \Rightarrow v_N \quad .$$

Man nennt dies die WERTITERATION der Dynamischen Optimierung. Für jede Periode erhält man eine eigene optimale Bestellregel. Bei unendlichem Planungshorizont ist noch ein geeignetes Abbruchkriterium zu definieren. (Beim stationären Modell wird man jedoch auf andere Verfahren ausweichen.) Die Wertiteration ist numerisch sehr aufwendig. Variiert z.B. y zwischen -1000 und +1000, so muß für jedes n die Minimierungsoperation 2001 mal durchgeführt werden. Bei einem einzigen Minimierungsschritt wird die rechte Seite von (40.1) durchschnittlich 1000 mal ausgewertet.

Bei vorgegebener Struktur der optimalen Bestellregel läßt sich aber der Rechenaufwand beträchtlich reduzieren. Bei einer (s_n,S_n) - Struktur z.B. würde man zuerst die Minimierung bei y = -1000 vornehmen. Dort weiß man, daß sicher bestellt wird. Dieser Minimierungsschritt liefert S_n. Für alle restlichen Bestände y = -999,-998,... reduziert sich dann die Minimierung auf den Vergleich der beiden Alternativen "bestelle nicht" und "fülle das Lager auf S_n auf". Sobald s_n bekannt ist, entfällt für die noch verbleibenden y - Werte $y = s_{n+1}, s_{n+2}, \dots, S_n$ die Minimierung ganz.

Unter diesem Gesichtspunkt gewinnt die Frage "Wann ist eine (s_n, S_n) - Politik optimal" an Bedeutung. Sie soll im folgenden untersucht werden. Um das Problem transparenter zu gestalten, schreiben wir (40.1) um. Wir ziehen die Kosten -ay vor die Minimierung und erhalten

$$v_n(y) = -ay + \underset{x \geq y}{\mathrm{Min}} \{k\delta(x - y) + \underbrace{ax + f(x) + \rho \int v_{n-1}(x - u)dP(u)}_{=:\ H_n(x)}\}. \quad (40.2)$$

Jetzt spalten wir die Funktionalgleichung in die beiden Alternativen (I) und (II) auf

$$v_n(y) = -ay + \begin{cases} H_n(y)\ , & \text{falls keine Bestellung (I) ;} \\ k + \underset{x \geq y}{\mathrm{Min}}\ H_n(x)\ , & \text{falls Bestellung (II) ;} \end{cases} \quad (40.3)$$

und gewinnen die Entscheidungsregel

$$\text{Falls } H_n(y) - \underset{x \geq y}{\mathrm{Min}}\ H_n(x) =: \Delta H_n \begin{cases} < k \Rightarrow \text{ tue nichts ;} \\ > k \Rightarrow \text{bestelle } x - y\ . \end{cases} \quad (40.4)$$

Für $\Delta H_n = k$ sind beide Alternativen gleich gut und man kann eine von beiden beliebig wählen. In dieser Form bietet sich eine physikalische Interpretation des Modells an. Um den Bestand y durch einen Eingriff von außen (Bestellung) zu bewegen, ist der Kraftaufwand k zur Überwindung der Haftung nötig. Ein Eingriff lohnt sich nur, falls dieser Aufwand geringer ist als die durch die in Gang gekommene Bewegung freigesetzte Energie ΔH.

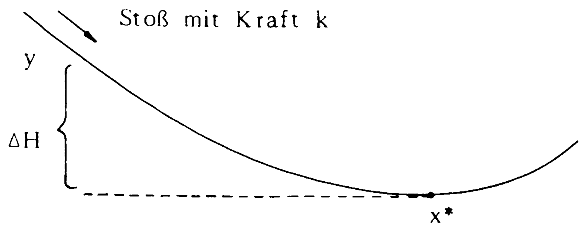


Abb. 40.1: Physikalische Interpretation:
Zur Überwindung seiner Haftreibung erfährt der Massepunkt y einen Stoß k und rutscht nach x*. Dabei wird die potentielle Energie ΔH freigesetzt.

Für welche y sich eine Bestellung lohnt, hängt von der Gestalt von H_n ab. Dazu die zwei folgenden Beispiele Abb. 40.2 und Abb. 40.3. Die Bestellbereiche sind jeweils schraffiert. Das globale Minimum von H_n bei S_n bestimmt -abgesehen von einem eventuell höheren Anfangsbestand- das Lagermaximum.

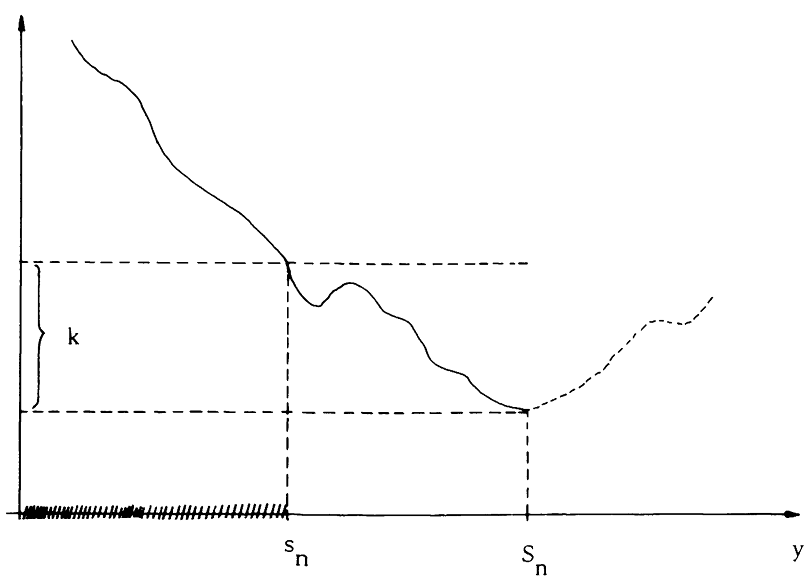


Abb. 40.2: (s_n, S_n)-Politik

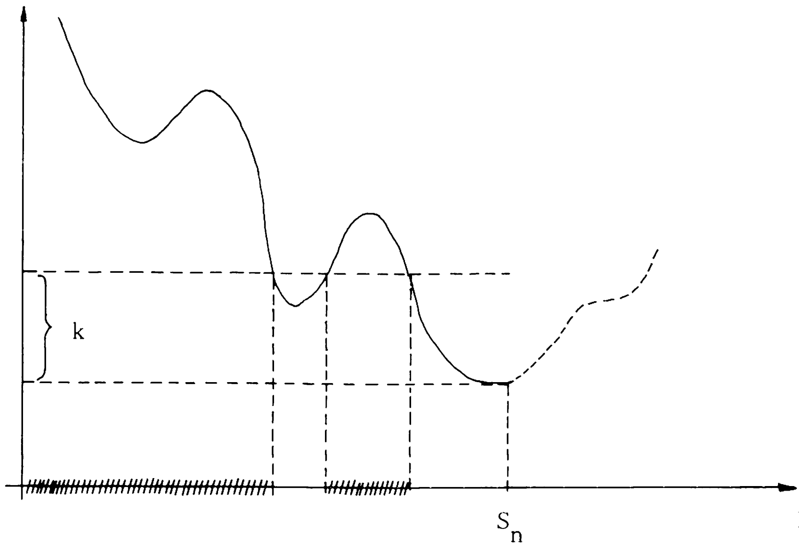


Abb. 40.3: kompliziertere Politik

Diese Überlegung macht zwei Dinge deutlich

1. Falls $k = 0$ ist, wird man bei <u>jeder</u> Bestandsinspektion den Bestand auf den optimalen Wert hochsetzen, falls er davon abgewichen ist, auch wenn die Abweichung sehr gering ist.
2. Ist H_n konvex, dann besitzt die optimale Politik eine (s_n, S_n) - Struktur.

Die Konvexitätsforderung von H_n ist jedoch ungeeignet, weil sie erstens restriktiver ist als notwendig (siehe Abb. 40.2; dort ist H_n nicht konvex und dennoch ist eine (s_n, S_n)-Politik optimal) und weil sich zweitens die Konvexität nicht auf H_{n+1} vererbt. Dies sieht man an dem folgenden Beispiel.

Für $n = 1$ ist

$$v_1(y) = -ay + \begin{cases} H_1(y) & \text{(I)} \\ k + H_1(S_1) & \text{(II)} \end{cases}$$

Ist f(x) konvex $\Rightarrow H_1 = ay + f(y)$ ebenfalls konvex.

v_1 hat z.B. den Verlauf

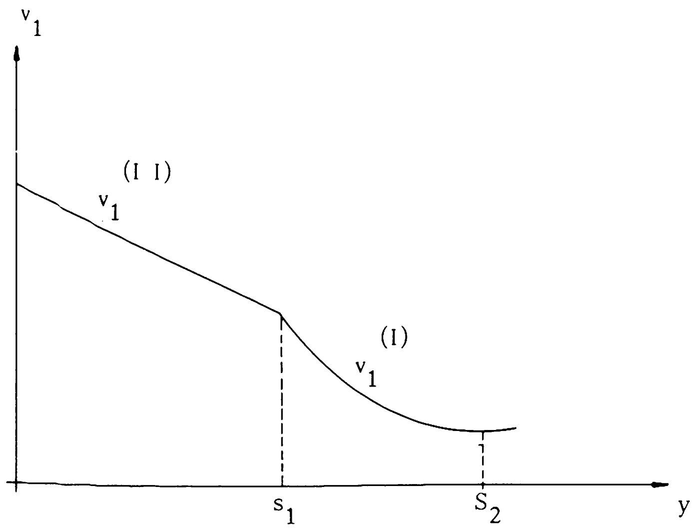


Abb. 40.4: Beispiel für nichtkonvexes, aber k-konvexes v_1

$v_1^{(I)}$ ist konvex, $v_1^{(II)}$ ist eine lineare Funktion mit Steigung -a. Für manche Werte von a ist v_1 nicht konvex für alle y. Damit ist aber auch

$$H_2(y) = ay + f(y) + \rho \int v_1(y - u)dP(u)$$

nicht mehr konvex für alle y.

Man kommt jedoch zum Ziel, wenn man den Konvexitätsbegriff in geeigneter Weise verallgemeinert.

Def. 40.1: Eine auf dem reellen Intervall $[y^-;y^+]$ definierte Funktion $H(y)$ heißt k-KONVEX, falls für alle $y \in [y^-;y^+]$ und beliebige α, $k \geq 0$ gilt:
$H(y + \alpha) - H(y) - \alpha H'(y) + k \geq 0$.

Def. 40.2: Eine auf dem reellen Intervall $[y^-;y^+]$ definierte nicht-differenzierbare Funktion $H(y)$ heißt k-KONVEX, falls für alle $y \in [y^-;y^+]$, $\beta > 0$ und beliebige α, $k \geq 0$ gilt:
$H(y + \alpha) - H(y) + \alpha[\frac{H(y) - H(y - \beta)}{\beta}] + k \geq 0$.

Zunächst ist zu zeigen, daß bei festem n die optimale Bestellregel eine (s_n,S_n) - Struktur besitzt, falls $H_n(y)$ k-konvex ist. Wie man in Abb. 40.2 sieht, liegt eine optimale Politik vom Typ (s_n,S_n) genau dann vor, wenn $H_n(y)$ links von $y = s_n$ nie mehr unter das Niveau $H_n(S_n) + k$ fällt oder es erreicht:

$$H_n(y) \begin{cases} < k + H_n(S_n), & \text{für } s_n < y < S_n \ ; \\ > k + H_n(S_n), & \text{für } y < s_n \ . \end{cases} \qquad (40.5)$$

Dies entspricht genau der Entscheidungsregel (40.4). Die Bedingung (40.5) ist mit Sicherheit erfüllt, wenn $H_n(y)$ monoton fällt für alle $y \leq s_n$, d.h. wenn

$$H_n'(y) < 0 \quad \text{für} \quad y \leq s_n. \qquad (40.6)$$

k-konvexe Funktionen $H_n(y)$ erfüllen diese Forderung (40.6). Den Beweis hierfür führen wir durch Widerspruch: Dazu nehmen wir das Gegenteil an: Die k-konvexe Funktion $H_n(y)$ besitze links von s_n ein relatives Maximum $H_n(y_1)$, $y_1 < s_n$, $H_n(y_1) > k + H_n(S_n)$ (siehe die folgende Abbildung (40.5).

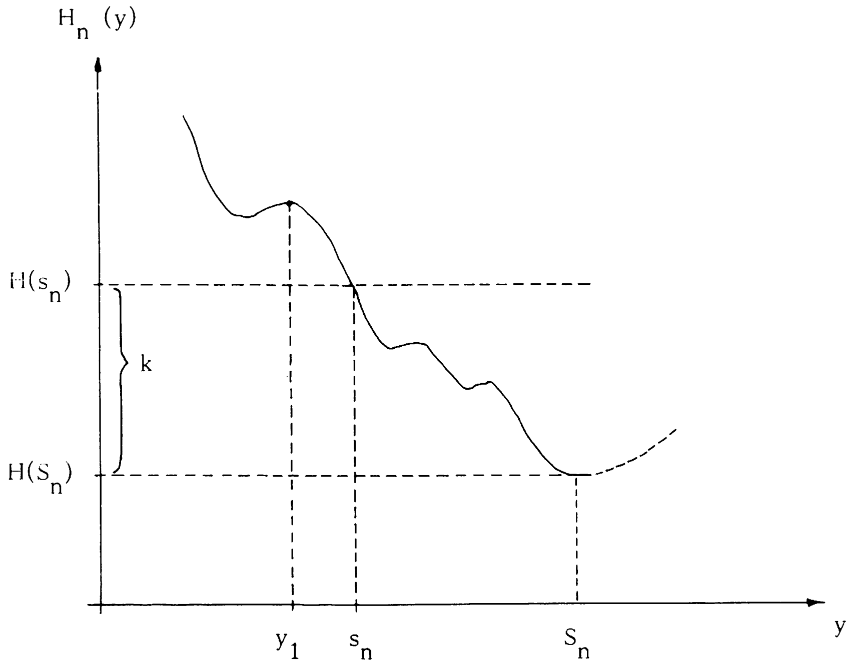


Abb. 40.5: Zum Beweis der opt. (s_n, S_n) - Politik, falls H_n k-konvex ist.

s_n sei der größte y-Wert, bei dem $H_n(y)$ das Niveau $H(s_n) = H(S_n) + k$ überschreitet $(H_n'(s_n) < 0)$. Wegen des relativen Maximums bei y_1 kann H_n nicht k-konvex sein, denn die Definitionsungleichung ist nicht erfüllt. Wählen wir $S_n = y_1 + \alpha$, so gilt nämlich

$$\underbrace{H_n(S_n) - H_n(y_1)}_{< -k} - \underbrace{\alpha H_n'(y_1)}_{= 0} + k < 0 \quad .$$

Es ergibt sich also ein Widerspruch zur Voraussetzung der k-Konvexität von H_n. Deshalb kann eine k-konvexe Funktion H_n für $y < s_n$ kein relatives Extremum besitzen. Wegen $H_n'(s_n) < 0$ ist also $H_n(y)$ monoton fallend für alle $y \leq s_n$, d.h. die (s_n, S_n) - Politik ist optimal.

Im weiteren Schritt wird nun gezeigt, daß die k-Konvexität von H_n auf H_{n+1} vererbt wird.

Satz 40.1: Es liege das oben beschriebene Modell zugrunde. Sei $H_1(y)$ k-konvex. Dann ist $H_n(y)$ k-konvex für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis:

$n = 1$: $H_1(y)$ k-konvex nach Voraussetzung

$n > 1$: Sei $H_n(y)$ k-konvex

$\Rightarrow$ (s_n, S_n) - Politik ist optimal, d.h. zur Berechnung von $v_n(y)$ können wir die (s_n, S_n) - Politik benützen. Danach ist

$$(*) \qquad v_n(y) = -ay + \begin{cases} H_n(y), & \text{für } y > s_n \,; \\ k + H_n(S_n), & \text{für } y \leq s_n \,. \end{cases}$$

Wir berechnen $v_n(y)$.

1. $s_n < y \leq S_n$: $v_n(y) = -ay + H_n(y)$ ist k-konvex.

2. $y \leq s_n < y + \alpha \leq S_n$: Es muß gezeigt werden, daß gilt

$v_n(y + \alpha) - v_n(y) - \alpha v_n'(y) + k \geq 0$.

(*) eingesetzt liefert

$-a(y + \alpha) + H_n(y + \alpha) + ay - k - H_n(S_n) + \alpha a + k \geq 0$

$H_n(y + \alpha) - H_n(S_n) \geq 0$. Dies ist stets richtig, da

$H_n(S_n) = \operatorname{Min}_y H_n(y)$.

3. $y < y + \alpha < s_n$: $v_n(y) = -ay + k + H_n(S_n)$ ist linear,

also auch k-konvex.

$\Rightarrow$ $v_n(y)$ ist k-konvex

$\Rightarrow$ $\int_0^\infty v_n(x - u)dP(u)$ ist k-konvex

$\Rightarrow$ $H_{n+1}(y) = -ay + f(x) + \int v_n(x-u)dP(u)$ ist k-konvex, da ay und f(x) konvex sind.

Da $H_1(x) = ax + f(x)$ k-konvex ist, wurde damit insgesamt gezeigt:

Das in § 36 entwickelte AHM - Modell (BACKORDER Fall) besitzt für <u>jede</u> Periode eine optimale Bestellregel vom Typ einer (s_n,S_n) - Politik.

Der entscheidende Punkt hierbei ist die Gestalt der erwarteten Lager- und Fehlmengenkosten. Sie sei nochmals angegeben:

$$f(y) = h \int_0^y (y - u)dP(u) + g \int_y^\infty (u - y)dP(u) .$$

Sowohl die Lagerbestände als auch die Fehlmengen werden mit einem proportionalen Kostensatz h bzw. g belegt. Ursprünglich arbeiteten ARROW, HARRIS, MARSHAK, KARLIN, SCARF, BECKMANN u.a. mit Fehlmengenkosten, die für alle Fehlmengen gleich hoch waren (zugeschnitten auf die Situation in der NAVY, vgl. §26.2). Zwangsläufig schlugen hier alle Bemühungen um optimale (s_n,S_n) - Politiken fehl.

Später wurden zahlreiche Verallgemeinerungen der obigen Funktion f(y) angegeben, unter denen dennoch die (s_n,S_n) - Politiken optimal bleiben (z.B. VEINOTT (1966), SCHÄL (1976)).

§41 ELIMINATION DER PROPORTIONALEN BESTELLKOSTEN BEI ENDLICHEM PLANUNGSHORIZONT

Wir versuchen, die proportionalen Bestellkosten $a(x - y)$ in die Lager- und Fehlmengenkosten zu integrieren. Das wäre sofort möglich, wenn die proportionalen Bestellkosten eine lineare Funktion des Bestandes x wären, wie das bei den Lager- bzw. Fehlmengenkosten hx, $-gx$ der Fall ist. Um dies zu erreichen wählen wir den

Ansatz: $\hat{v}_n(y) = v_n(y) + ay - a\mu$, $\mu = E\{u\}$.

Bei $\hat{v}_n(y)$ sind jetzt die proportionalen Bestellkosten

$$a(x - y) + ay - a\mu . \tag{41.1}$$

Idee: Der Term ay fällt weg und es bleibt ax. $a\mu$ ist ein konstanter Korrekturterm. Mit diesem Ansatz formulieren wir das Prinzip der Optimalität. In den Funktionen $v_n(y)$ gehorcht es der Gleichung (36.2). Daraus wird mit dem obigen Ansatz

$$\hat{v}_n(y) = \min_{x \geq y} \{k\delta(x - y) + ax - ay + f(x) + \rho \int [\hat{v}_{n-1}(x - u) - a(x - u) + a\mu]dP(u)\} + ay - a\mu$$

$$= \min_{x \geq y} \{k\delta(x - y) + a(1 - \rho)(x - \mu) + f(x) + \rho \int \hat{v}_{n-1}(x - u)dP(u)\} + \rho a\mu$$

Es bleibt rechts noch ein Restterm $\rho a\mu$ stehen. Um ihn auch noch eliminieren zu können, erweitern wir den Ansatz um einen variablen Korrekturterm,

erweiterter Ansatz: $\underline{\hat{v}_n(y) = v_n(y) + a(y - \mu) + b_n}$, (41.2)

und gehen damit erneut in die Funktionalgleichung (36.2):

$$\hat{v}_n(y) = \underset{x \geq y}{\mathrm{Min}} \{k\delta(x - y) + a(x - \mu) + b_n + f(x)$$

$$+ \rho \int [\hat{v}_{n-1}(x - u) - a(x - u) + a\mu - b_{n-1}]dP(u)\}$$

$$= \mathrm{Min} \{k\delta(x - y) + a(1 - \rho)(x - \mu) + f(x)$$

$$+ \rho \int \hat{v}_{n-1}(x - u)dP(u)\} + \underbrace{b_n + \rho a\mu - \rho b_{n-1}}_{\overset{!}{=} 0} .$$

Der Restterm $b_n + \rho a\mu - \rho b_{n-1}$ muß zum Verschwinden gebracht werden. Dazu muß gelten

$$\begin{aligned} b_n &= \rho(b_{n-1} - a\mu) \\ &= \rho[\rho b_{n-2} - a\mu) - a\mu] \\ &\vdots \\ &= \rho^n b_o - \rho a\mu \frac{1 - \rho^n}{1 - \rho} . \end{aligned}$$

Wir wählen als Startwert $b_o = 0$ und erhalten

$$\boxed{b_n = -\rho a\mu \frac{1 - \rho^n}{1 - \rho} .} \tag{41.3}$$

Damit ist der Restterm eliminiert.

Im letzten Schritt integrieren wir die Bestellkosten in die Kosten $f(x)$. Die neu entstehende Funktion sei $\hat{f}(x)$.

$$\hat{f}(x) := a(1 - \rho)(x - \mu) + f(x) . \tag{41.4}$$

Es war

$$f(x) = (h + g) \int_o^x P(u)du + g(\mu - x) .$$

Also ist

$$\hat{f}(x) = (h + g) \int_0^x P(u)du + \underbrace{[g - a(1 - \rho)]}_{=: \hat{g}}(\mu - x) \quad . \tag{41.5}$$

Wir definieren

$$\hat{h} := h + a(1 - \rho) \ ; \tag{41.6}$$

$$\hat{g} := g - a(1 - \rho) \tag{41.7}$$

als neue Kostensätze für die Lager- bzw. Fehlmengen und erhalten das Ergebnis

$$\boxed{f_{\hat{g},\hat{h}}(x) = \hat{f}(x)} \tag{41.8}$$

$$\boxed{\hat{v}_n(y) = v_n(y) + a(y - \mu) - \rho a \mu \frac{1 - \rho^n}{1 - \rho}} \tag{41.9}$$

$$\boxed{\hat{v}_n(y) = \min_{x \geq y} \{k\delta(x - y) + \hat{f}(x) + \rho \int_0^\infty \hat{v}_{n-1}(x - u)dP(u)\} \ .} \tag{41.10}$$

<u>Vergleich mit der Elimination der proportionalen Bestellkosten beim stationären Modell (§37)</u>

Die obige Methode läßt sich auch auf den Fall $n = \infty$ ausdehnen. Für $n \to \infty$ wird aus (41.3)

$$\lim_{n \to \infty} b_n =: b = \frac{-\rho a \mu}{1 - \rho} \ , \tag{41.11}$$

und aus (41.2)

$$\hat{v}(y) := v(y) + a(y - \mu) + b$$

$$= v(y) + ay - \frac{a\mu}{1 - \rho} \quad . \tag{41.12}$$

Beim stationären Modell in §(37) verwendeten wir eine Transformation

$$\hat{\hat{v}}(y) := v(y) + ay - \frac{\rho a\mu}{1 - \rho} \; .$$

Dort war

$$\hat{\hat{f}}(x) := f(x) + a(1 - \rho)x \; .$$

Der Unterschied der beiden Ansätze besteht darin, daß beim stationären Modell die mittleren Bestellkosten $a\mu$ jeweils auf das Ende der Periode bezogen sind, so daß sie diskontiert werden.
Deshalb der konstante Korrekturterm

$$\frac{\rho a\mu}{1 - \rho} \; .$$

Bei dem im vorliegenden Paragraphen gewählten Ansatz sind die mittleren Bestellkosten pro Periode auf den Anfang der Periode bezogen, deshalb hier der Korrekturterm

$$\frac{a\mu}{1 - \rho} \quad .$$

Der Unterschied bei den Gesamtkosten in beiden Modellen besteht letztlich darin, daß bei dem vorliegenden Modell die mittleren Bestellkosten $a\mu$ einmal öfter auftreten, nämlich zur Bevorratung für die erste Periode. Dies zeigt auch die folgende formale Betrachtung.

Der Vergleich der beiden Transformationen zeigt

$$\Delta v := \hat{\hat{v}}(y) - \hat{v}(y) = a\mu \; ;$$

$$\Delta f := \hat{\hat{f}}(y) - \hat{f}(y) = a\mu(1 - \rho) \; .$$

Der Unterschied Δv der Wertfunktionen erklärt sich vollständig aus den unterschiedlichen Einperiodenkosten. Es ist nämlich der Gegenwartswert der in allen Perioden auftretenden Differenzen Δf

$$\Delta f \sum_{n=o}^{\infty} \rho^n = a\mu$$

exakt die Differenz Δv.

Der Vorteil des in diesem Paragraphen gewählten Ansatzes liegt darin, daß sich die Elimination der proportionalen Bestellkosten sehr schön interpretieren läßt als eine Modifikation der Lager- und Fehlmengenkostensätze h und g.

§42 SCHRANKEN FÜR (s_n, S_n)

Es werden in diesem Paragraphen Schranken für die (s_n, S_n) - Politiken hergeleitet.

$$\underline{s} \leq s \leq \bar{s} < \underline{S} \leq S \leq \bar{S} \quad . \tag{42.1}$$

Dies ist für numerische Zwecke nützlich. Man kann sich bei der Minimumsuche $\underset{x \geq y}{\mathrm{Min}}\ \{\ \}$ auf x - Werte beschränken, die innerhalb der Intervalle $[\underline{s}, \bar{s}]$ bzw. $[\underline{S}, \bar{S}]$ liegen. Außerdem werden die Schranken für den Beweis einer optimalen (s,S) - Politik des stationären Modells verwendet. Davon aber später.

1. Schranke $\underline{S}$:

Der Auffüllpunkt S_1 des Einperiodenmodells wird eine untere Schranke $\underline{S}$ für die Auffüllpunkte S_n aller Mehrperiodenmodelle, $n > 1$, sein.

Dafür läßt sich eine plausible Begründung angeben:
Wegen der Fixkosten $k > 0$ wird man sich bei einem Mehrperiodenmodell bereits zu Beginn der ersten Periode für die fernere Zukunft bevorraten. Bei einem Einperiodenmodell fällt diese Bevorratung weg.
Daß diese plausible Annahme richtig ist, wird jetzt streng bewiesen. Es ist bereits gezeigt, daß für alle Perioden eine (s_n, S_n) - Politik optimal ist, d.h.

$$v_n(y) = -ay \begin{cases} + H_n(y) & , \quad \text{für } y > s_n ; \\ + k + H_n(S_n) & , \quad \text{für } y \le s_n . \end{cases} \tag{42.2}$$

Wir führen den Beweis am Modell mit proportionalen Bestellkosten durch. $v_n(y)$ ist differenzierbar mit Ausnahme an der Stelle $y = s_n$.
Für $n = 1$ ist

$$H_1(y) = \underbrace{ay + f(y)}_{=: \, G(y)} \tag{42.3}$$

$G(y)$ sind die Einperiodenkosten. Sie sind unabhängig von n. Nehme H_1 sein Minimum an der Stelle S_1 an, d.h.

$$G'(y) < 0 \quad \text{für alle } y < S_1 . \tag{42.4}$$

Wir zeigen nun induktiv: $H_n'(y) < 0$ für alle $y < S_1$, $n \in \mathbb{N}$.

$H_1'(y) < 0$ für alle $y < S_1$ ist bereits gezeigt.

Sei $H_n'(y) < 0$ für alle $y < S_1$. Dann ist wegen (42.2)

$$v_n'(y) = \left\{ \begin{array}{l} -a + H_n'(y) \\ -a \end{array} \right\} \le -a < 0 \quad \text{für alle } y < S_1 .$$

Mit

$$H'_{n+1}(y) = G'(y) + \rho \int v'_n(x - u)dP(u)$$

erhält man

$$H'_{n+1}(y) \leq G'(y) - \rho a < 0 \quad \text{für alle } y < S_1. \tag{42.5}$$

Also nimmt $H_n(y)$ sein Minimum bei $y \geq S_1$ an für alle $n \in \mathbb{N}$. Der minimierende Wert von H_n ist der optimale Auffüllpunkt S_n in der n-ten Periode rückwärts gezählt (d.h. erste Periode eines n - Periodenmodells). Es ist also

$$S_1 \leq S_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

(Schranke von IGLEHART).

Berechnung von S_1:

$$H_1(S_1) = \underset{x}{\mathrm{Min}}\, H_1(x) \iff ax + f(x) \to \underset{x}{\mathrm{Min}}$$

$$\iff ax + (h + g) \int_0^x P(u)du + g(\mu - x) \to \underset{x}{\mathrm{Min}}$$

$$\iff a + (h + g)P(x) - g = 0$$

$$S_1 = P^{-1}\left(\frac{g - a}{g + h}\right) \quad .$$

Die Schranke $\underline{S}$ läßt sich jedoch noch verbessern, wenn man zum Modell mit eliminierten proportionalen Bestellkosten übergeht. Dort ist

$$\hat{H}_1(y) = \hat{f}(y)$$

$$\hat{v}'_n(y) = \begin{Bmatrix} \hat{H}'_n(y) \\ 0 \end{Bmatrix} \leq 0 \quad \text{für alle } y < \hat{S}_1 .$$

$\hat{S}_1$ ist der Minimierer von $\hat{H}_1(y) = \hat{f}(y)$. Nach obigem Beweisschema erhält man

$$\hat{H}_n(y) \leq \hat{f}'(y) < 0 \quad \text{für alle } y < \hat{S}_1 \ .$$

Also ist auch $\hat{S}_1$ eine untere Schranke für S_n

$$\hat{S}_1 \leq S_n \ , \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \ ;$$

(Schranke von VEINOTT), jedoch ist $\hat{S}_1$ schärfer als S_1, wie die Berechnung zeigt:

$$\hat{H}_1(\hat{S}_1) = \underset{x}{\mathrm{Min}}\ \hat{H}_1(x) \iff \hat{f}(x) \to \underset{x}{\mathrm{Min}}$$

$$\iff f(x) + a(1 - \rho)(x - \mu) \to \underset{x}{\mathrm{Min}}$$

$$\iff (h + g)P(x) - g + a(1 - \rho) = 0$$

$$\boxed{\underline{S} = \hat{S}_1 = P^{-1}\left(\frac{g - a(1 - \rho)}{g + h}\right) \ .} \tag{42.6}$$

Da die Verteilungsfunktion P(u) der Nachfrage stets monoton wächst, ist $\hat{S}_1 \geq S_1$.

Hier zeigt sich der Vorteil der von BECKMANN vorgeschlagenen Elimination der proportionalen Bestellkosten (vgl. §36).

In der Abb. 42.1 wird der Sachverhalt graphisch dargestellt. Die Funktion $\hat{f}$ hat ihr Minimum weiter rechts als f, fällt aber dafür links davon flacher als f
(Grund: $\hat{g} = g - a(1 - \rho) < g$, d.h. die Fehlmengenkosten sind geringer).

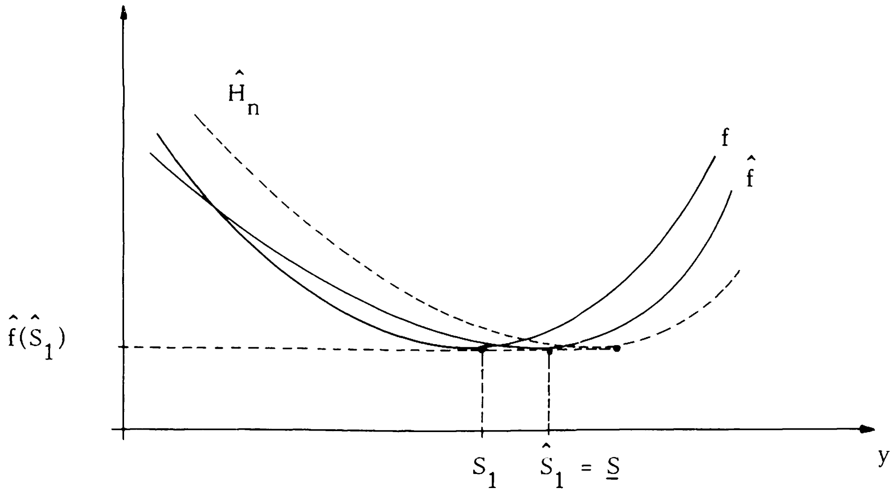


Abb. 42.1: untere Schranke $\underline{S}$

$\hat{H}_n$ fällt links von $\hat{S}_1$ steiler ab als $\hat{f}$.

Da es nur auf die Niveaudifferenzen ΔH bzw. Δf, $\Delta\hat{f}$ ankommt, sind $\hat{H}_n$ und f in der obigen Abbildung so verschoben, daß deren Minima auf gleicher Höhe mit $\hat{f}(\hat{S}_1)$ liegen. Dann liegt $\hat{H}_n$ über $\hat{f}$ für alle $y < \hat{S}_1$. Ebenso liegt dann auch H_n über f für alle $y < S_1$.

2. Schranke $\bar{s}$:

Wir schreiben das Prinzip der Optimalität in der Form

$$\hat{v}_n(y) = \operatorname{Min}\{\hat{H}_n(y)\ k + \operatorname*{Min}_{x \geq y} \hat{H}_n(x)\}$$

und zeigen zunächst

$$\hat{v}_n(y) \leq \hat{v}_n(y') + k\ , \quad \text{für } y \leq y'\ . \tag{42.7}$$

Es ist $\hat{v}_n(y) \leq k + \underset{x \geq y}{\mathrm{Min}}\ \hat{H}_n(x) \leq k + \underset{x \geq y'}{\mathrm{Min}}\ \hat{H}_n(y') \leq k + \hat{v}_n(y')$ für $y \leq y'$.

Mit Hilfe dieser Ungleichung erhalten wir

$$\hat{H}_n(y) - \hat{H}_n(y') = \hat{f}(y) - \hat{f}(y') + \rho \int \underbrace{[\hat{v}_{n-1}(y - u) - \hat{v}_{n-1}(y' - u)]dP(u)}_{\leq k}$$

für $y \leq y'$, also

$$\hat{H}_n(y) - \hat{H}_n(y') \leq \hat{f}(y) - \hat{f}(y') + \rho k, \qquad y \leq y' . \tag{42.8}$$

Wir setzen $y = s_n$, $y' = S_n$:

$$\underbrace{\hat{H}_n(s_n) - \hat{H}_n(S_n)}_{= k,\ \text{d.h. bestellen}} \leq \hat{f}(s_n) - \hat{f}(S_n) + \rho k$$

$$k(1 - \rho) \leq \hat{f}(s_n) - \hat{f}(S_n) ;$$

bestellen:

$$\boxed{\hat{f}(s_n) \geq \hat{f}(S_n) + (1 - \rho)k} . \tag{42.9}$$

Mit dieser von VEINOTT angegebenen Ungleichung ist es gelungen, den Zusammenhang zwischen s_n und S_n, der aus der Niveaudifferenz $\Delta H_n = k$ der rekursiven Funktionen H_n resultiert, auf die Niveaudifferenz $\Delta\hat{f} = (1 - \rho)k$ der von n unabhängigen Kosten f zurückführen.

$$\Delta\hat{H}_n = k \quad \Rightarrow \quad \Delta\hat{f} = (1 - \rho)k \qquad \text{bei } s_n, S_n .$$

Damit wird bei gegebenem $\underline{S}$ über (42.9) auch eine obere Schranke $\bar{s}$ bestimmt

$$\boxed{\begin{array}{l}\bar{s} \text{ ist die kleinste Zahl } < \underline{S}, \text{ für die gilt:} \\[2ex] \qquad f(\bar{s}) \leq f(\underline{S}) + (1-\rho)k \quad .\end{array}} \tag{42.10}$$

Dazu die folgende Abbildung.

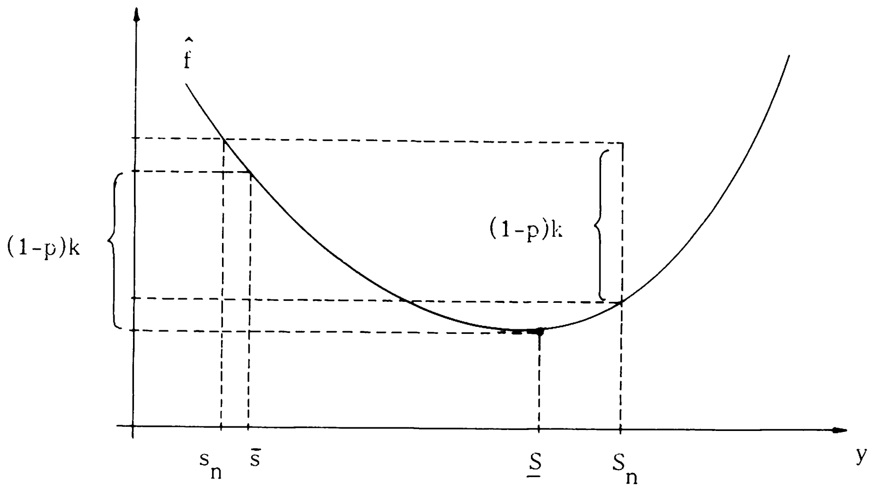


Abb. 42.2: Schranke $\bar{s}$

Da $(1 - \rho)k > 0$ im diskontierten Fall und außerdem $\hat{f}'(y) < 0$ für alle $y < \underline{S}$, erhält man zusätzlich das Ergebnis

$$\boxed{\bar{s} < \underline{S} \;.} \tag{42.11}$$

3. Schranke $\underline{s}$:

Es war $\hat{H}'_n(y) \leq \hat{f}'(y)$ für alle $y < \underline{S}$, $n \in \mathbb{N}$ (vgl. (42.5)). Daraus folgt

$$\hat{H}_n(y) - \hat{H}_n(\underline{S}) \geq \hat{f}(y) - \hat{f}(\underline{S}) \quad , \quad y < \underline{S} \; ,$$

d.h. zur Erzeugung der Niveaudifferenz k ist bezüglich $\hat{H}_n$ die dazu notwendige Spanne $[y,\underline{S}]$ kleiner als die bezüglich $\hat{f}$. Dies wird auch in Abb. 42.3 ersichtlich

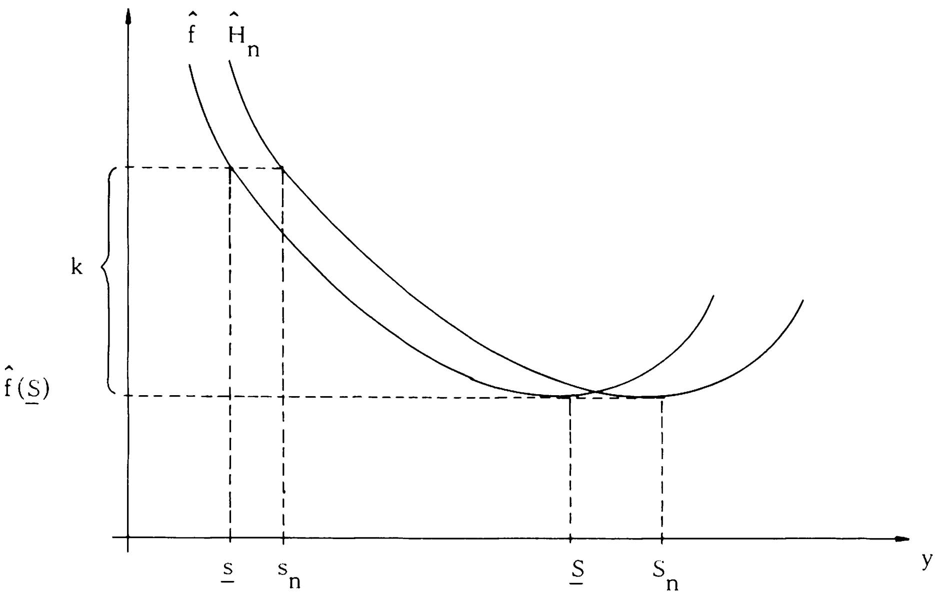


Abb. 42.3: untere Schranke $\underline{s}$

Es ist deshalb $\underline{s}$ in der obigen Abbildung eine untere Schranke für s_n.

$$\boxed{\begin{array}{l} \underline{s} \text{ ist die kleinste Zahl } < \underline{S}, \text{ für die gilt:} \\[2ex] \qquad \hat{f}(\underline{s}) \leq \hat{f}(\underline{S}) + k \; . \end{array}} \tag{42.12}$$

4. Schranke $\bar{S}$:

Zunächst kann unmittelbar eine obere Schranke $\tilde{S}$ für S_n abgeleitet werden aus: $f(\tilde{S}) = f(\underline{S}) + k$. Es läßt sich aber eine noch schärfere Schranke finden. Da die Spanne $[\underline{s}, \bar{s}]$ definiert ist durch die Niveaudifferenz ρk bezüglich $\hat{f}$, muß auch die Spanne $[\underline{S}, \bar{S}]$ durch diese Niveaudifferenz bezüglich $\hat{f}$ festgelegt sein. Also erhalten wir $\bar{S}$ aus: $\hat{f}(\bar{S}) = \hat{f}(\underline{S}) + \rho k$.

$$\boxed{\begin{array}{l} \bar{S} \text{ ist die kleinste Zahl} > \underline{S}\text{, für die gilt:} \\[1em] \qquad \hat{f}(\bar{S}) \geq \hat{f}(\underline{S}) + \rho k \;. \end{array}} \qquad (42.13)$$

Zusammenfassung:

Die Parameter s_n, S_n sind definiert über die Funktionen $\hat{H}_n$:

$\hat{H}_n(S_n) = \operatorname{Min}_x \hat{H}_n(x) \quad \Rightarrow \quad S_n$,

$\hat{H}_n(s_n) = \hat{H}_n(S_n) + k \quad \Rightarrow \quad s_n$.

Bestelle für alle $y \leq S_n$, die die Ungleichung erfüllen

$$\hat{H}_n(y) - \hat{H}_n(S_n) \geq k \quad .$$

Schwierigkeiten bereiten die rekursiv definierten Funktionen $\hat{H}_n$. Es ist gelungen, die über die Differenzen in H_n bestimmten Werte s_n, S_n abzuschätzen über Differenzen in den Einperiodenkosten $\hat{f}$. Mit Hilfe der letzteren können Schranken $\underline{s}$, $\bar{s}$, $\underline{S}$, $\bar{S}$ angegeben werden:

$\underline{s}$ = kleinste ganze Zahl, für die gilt: $\hat{f}(\underline{s}) \leq \hat{f}(\underline{S}) + k$;

$\bar{s}$ = kleinste ganze Zahl $< \underline{S}$, für die gilt: $\hat{f}(\bar{s}) \leq \hat{f}(\underline{S}) + k(1 - \rho)$;

$\underline{S}$ = kleinste ganze Zahl, die $\hat{f}(\underline{S}) = \operatorname{Min}_y \hat{f}(y)$ minimiert ;

$\bar{S}$ = kleinste ganze Zahl $> \underline{S}$, für die gilt: $\hat{f}(\bar{S}) \geq \hat{f}(\underline{S}) + \rho k$.

Die graphische Darstellung dieser Ergebnisse sieht wie folgt aus

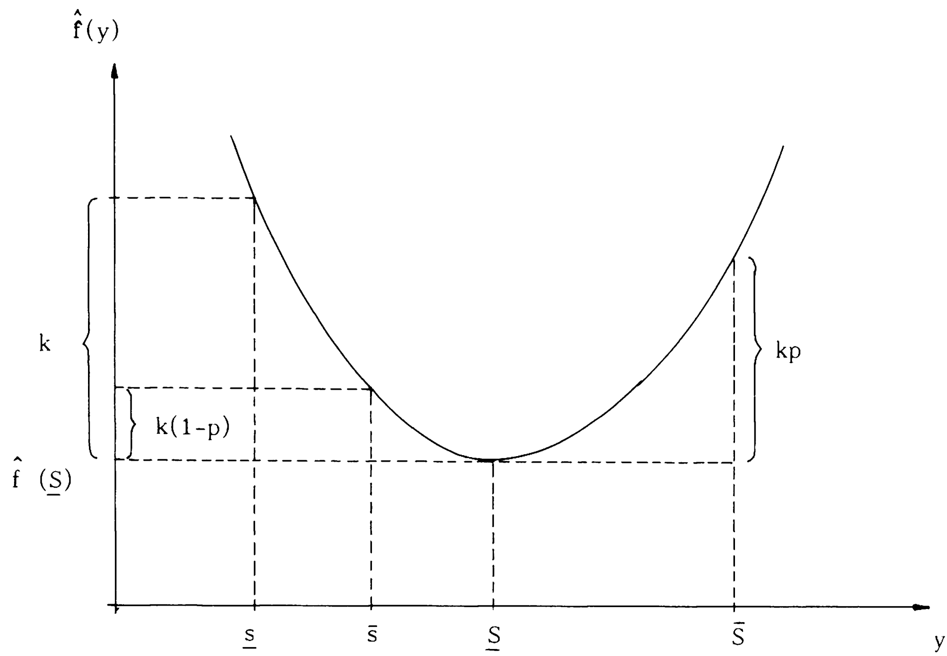


Abb. 42.4: Schranken der (s_n, S_n) - Politiken

Als Nebenprodukt lieferten die Beweise die Ergebnisse

$$\bar{s} < \underline{S},$$

$$\hat{f}(s_n) \geq \hat{f}(S_n) + (1 - \rho)k.$$

Bemerkung: Bei den Beweisen wurde von f bzw. $\hat{f}$ nur vorausgesetzt, daß ein einziges Minimum existiert (an der Stelle S_1 bzw. $\hat{S}_1$) und daß die Funktionen links vom Minimum monoton fallen und rechts davon monoton steigen. Funktionen dieser Art heißen unimodal.

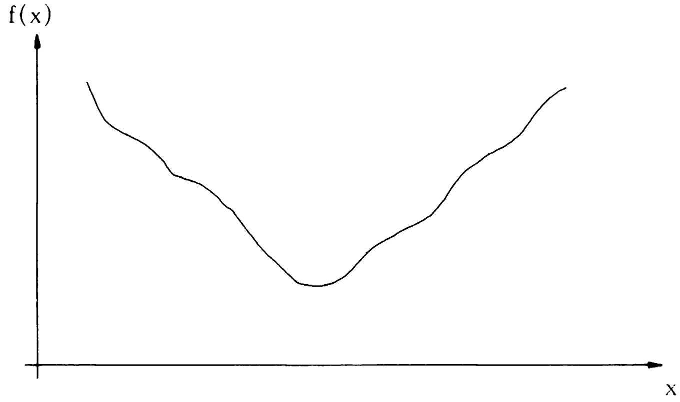


Abb. 42.5: Graph einer unimodalen Funktion f(x) mit einem Minimum als Extremwert

Deshalb gelten die obigen Resultate nicht nur für Modelle mit konvexen Einperiodenkosten (Spezialfall von unimodal), sondern allgemein mit unimodalen Kosten. Streng genommen sind die Lagerkosten auch nicht proportional zur Menge y. Proportional sind nur die Zinskosten. Die Handhabungskosten, z.B. die Zugriffskosten, steigen bei einer effizienten Lagerorganisation degressiv. Der typische Verlauf der Lagerkosten sieht dann so aus

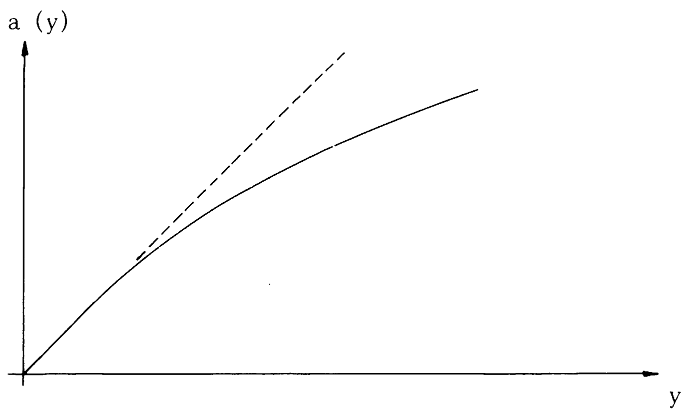


Abb. 42.6: degressive Lagerkosten.

Dies führt auf eine nichtkonvexe aber unimodale Funktion des Erwartungswertes der Lagerungs- und Fehlmengenkosten $\hat{f}$.

In der Originalarbeit von VEINOTT und WAGNER ist die Herleitung der Schranken für s_n, S_n an einem AHM-Modell für den diskontierten und nichtdiskontierten Fall ($\rho = 1$) sowie für den Fall mit konstanter Lieferzeit durchgeführt. Es gelten stets dieselben Gleichungen für die Schranken.

§43 OPTIMALITÄT DER (s,S) - POLITIK IM STATIONÄREN MODELL

Mit den vorbereitenden Untersuchungen der letzten Paragraphen ist es jetzt möglich zu beweisen, daß für das stationäre AHM - Modell mit Fixkosten eine (s,S) - Politik optimal ist. Beim AHM - Modell ohne fixe Bestellkosten berechnet man die optimale Bestellregel vom Typ einer (S) - Politik über die Minimierung der Einperiodenkosten. Da diese nicht vom Planungshorizont n abhängen, ist die (S) - Politik auch optimale Politik im stationären Modell.

Beim AHM - Modell mit fixen Bestellkosten hängt die optimale Bestellregel vom Typ einer (s_n,S_n) - Politik von der Periodenzahl n ab.
Deshalb ist der Beweis, daß auch im stationären Fall eine (s,S) - Politik optimal ist, hier schwieriger zu führen. Wir wollen an dieser Stelle nur die wesentlichen Schritte erwähnen (der Beweis basiert auf dem Banachschen Fixpunktsatz, vgl. COLLATZ (1968)).

1. Der Limes $v(y) := \lim_{n\to\infty} v_n(y)$ existiert; die Folge $\{v_n\}$ konvergiert gleichmäßig auf jedem endlichen Intervall. Es gilt nämlich

$$\max_{\underline{s}\leq y\leq \bar{S}} \{|v_{n+1}(y) - v_n(y)|\} \leq \rho \max_{\underline{s}\leq y\leq \bar{S}} \{|v_n(y) - v_{n-1}(y)|\} \tag{43.1}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ (KONTRAKTIONSBEDINGUNG), und deshalb auch

$$\max_{\underline{s}\leq y\leq \bar{S}} \{|v_{n+1}(y) - v_n(y)|\} \leq \rho^n \max_{\bar{s}\leq y\leq \bar{S}} \{|v_1(y)|\} . \qquad (43.2)$$

Es genügt, die Maximierung auf den Bereich $\underline{s} \leq y \leq \bar{S}$ einzuschränken, denn für $y < \underline{s}$ ist $v_n(y)$ linear mit Steigung $-a$ für alle n, und Lagerbestände $y > \bar{S}$ können im stationären Fall nicht auftreten.

2. Unter der weithin getroffenen Voraussetzung $v_o \equiv 0$ ist $\{v_n\}$ eine monoton wachsende Folge, d.h.

$$v_{n+1}(y) \geq v_n(y) \quad \text{für alle } y,n \quad . \qquad (43.3)$$

3. Die Funktion v(y) erfüllt das Prinzip der Optimalität. Es ist

$$L(x,y,v) := a(x - y) + f(x) + \rho \int_o^\infty v(x - u)dP(u)$$

die rechte Seite der BELLMANschen Funktionalgleichung. Wegen der Monotonie der Folge $\{v_n\}$ ist

$$v_n(y) = \min_{x\geq y} \{L(x,y,v_{n-1})\} \leq \min_{x\geq y} \{L(x,y,v)\} .$$

Für $n \to \infty$ gilt also

$$v(y) \leq \min_{x\geq y} L(x,y,v) . \qquad (43.4)$$

Andererseits läßt sich aus der Monotonie von $\{v_n\}$ ebenfalls folgern

$$v(y) \geq \min_{\bar{S}\geq x\geq y} L(x,y,v_n)$$

$$\geq \min_{\bar{S}\geq x\geq y} \{\lim_{n\to\infty} L(x,y,v_n\} .$$

Aufgrund des LEBESGUEschen Satzes von der monotonen Konvergenz darf man die Grenzwertbildung unter das Integral ziehen und erhält

$$v(y) \geq \underset{\bar{S}\geq x\geq y}{\mathrm{Min}} \{L(x,y,v)\} = \underset{x\geq y}{\mathrm{Min}} \{L(x,y,v)\} \; . \tag{43.5}$$

Zusammen mit (43.4) bedeutet dies

$$v(y) = \underset{x\geq y}{\mathrm{Min}} \{L(x,y,v)\} \; . \tag{43.6}$$

4. v(y) ist die einzige Lösung der BELLMANschen Funktionalgleichung (43.6).

5. Die Folgen $\{s_n\}$, $\{S_n\}$ sind auf $[\underline{s},\bar{s}]$, $[\underline{S},\bar{S}]$ beschränkt. Sie enthalten deshalb konvergente Teilfolgen. Jeder Limes s, S dieser Teilfolgen beschreibt eine optimale Bestellregel für das stationäre Modell.

§44 EINE METHODE ZUR BERECHNUNG VON s UND S

Diskontierter Fall

Wir schreiben das Prinzip der Optimalität in der Form

$$\hat{v}(y) = \begin{cases} \hat{f}(y) + \rho \int_0^\infty \hat{v}(y-u)dP(u), & \text{für} \quad y > s; \\ k + \hat{f}(S) + \rho \int_0^\infty \hat{v}(S-u)dP(u), & \text{für} \quad y \leq s. \end{cases}$$

Die so definierte Funktionalgleichung für $\hat{v}$ läßt sich auch iterativ wie folgt entwickeln (der Anfangsbestand sei S):

$$\hat{v}(S) = \underset{\text{der 1. Periode}}{\text{erwartete Kosten}} + \underset{\text{der 2. Periode}}{\text{erwartete Kosten}} + \underset{\text{der 3. Periode}}{\text{erwartete Kosten}} + \ldots \; .$$

Solange der Lagerbestand nicht auf bzw. unter s abgesunken ist, d.h. solange die kumulierte Nachfrage den Betrag D nicht erreicht bzw. überschritten hat, entstehen in den einzelnen Perioden nur die erwarteten Lager- und Fehlmengenkosten $\hat{f}$.
Erst bei $y \leq s$ fallen die fixen Bestellkosten k unmittelbar und danach die Folgekosten $\hat{v}(S)$ an. Seien

$p_x^{(n)}$: Wahrscheinlichkeit, daß innerhalb von n Perioden genau die Nachfrage $u = x$ auftritt;

$P^{(n)}(x)$: Verteilungsfunktion der Nachfrage in n Perioden, d.h. die Wahrscheinlichkeit, daß innerhalb von n Perioden höchstens die Nachfrage $u < x$ auftritt.

$P^{(n)}$ ist die n-fache Faltung von P

$$P^{(n)}(D) = \int_0^D P(D - u)dP^{(n-1)}(u).$$

Sei ferner

$Q^{(n)}(D)$: Wahrscheinlichkeit, daß die kumulierte Nachfrage genau in der (n + 1)-ten Periode den Betrag D mindestens erreicht

$$Q^{(n)}(D) = \int_0^D [1 - P(D - u)]dP^{(n-1)}(u) \ . \tag{44.1}$$

Dann ist

$$\hat{v}(S) = \hat{f}(S) + \underbrace{\rho \int_0^D \hat{f}(S - u)dP(u) + \rho^2 \int_0^D \hat{f}(S - u)dP^{(2)}(u) + \ldots}_{\text{y bleibt über s in Periode 1,2,3,...}}$$

$$+ \rho \underbrace{[k + \hat{v}(S)]\, Q^{(1)}(D) + \rho^2[k + \hat{v}(S)]Q^{(2)}(D) + \ldots}_{y \leq s \text{ in Periode 1,2,3,...}}$$

Unter Verwendung der folgenden Definition für die nullte Faltung

$$p_u^{(o)}\,du := \begin{cases} 1\,du, & \text{für } u = 0; \\ 0\quad, & \text{für } u > 0; \end{cases} \tag{44.2}$$

ist

$$\hat{f}(S) = \rho^o \int_o^D \hat{f}(S)dP^{(o)}{}_u\ ,$$

und man erhält

$$\hat{v}(S) = \sum_{n=o}^{\infty} \rho^n \int_o^D \hat{f}(S-u)dP^{(n)}(u) + [k + \hat{v}(S)] \sum \rho^n Q^{(u)}(D) \quad . \tag{44.3}$$

Unter der Annahme, daß bestellt wird, noch ehe Fehlmengen auftreten, ist

$$\hat{v}(0) = k + \hat{v}(S)$$

und (44.3) läßt sich nach $\hat{v}(0)$ auflösen

$$\hat{v}(0) = \frac{k + \sum\limits_{n=o}^{\infty} \rho^n \int\limits_o^D \hat{f}(S-u)dP^{(n)}(u)}{1 - \sum\limits_{n=1}^{\infty} \rho^n Q^{(n)}(D)} \quad .$$

Jetzt führen wir die im Nenner auftretenden Terme $Q^{(n)}(D)$, $n = 1,2,3\ldots$, noch auf Verteilungsfunktionen $P^{(n)}(D)$ zurück. Aus (44.1) wird

$$\begin{aligned} Q^{(n)}(D) &= \int_o^D dP^{(n-1)}(u) - \int_o^D P(D-u)dP^{(n-1)}(u) \\ &= P^{(n-1)}(D) - P^{(n)}(D)\ . \end{aligned}$$

Deshalb wird der Nenner zu

$$1 - \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n Q^{(n)}(D) = 1 - \sum_{n=o}^{\infty} \rho^{n+1}[P^{(n)}(D) - P^{(n+1)}(D)]$$

$$= 1 - \rho P^{(o)}(D) - \sum_{n=1}^{\infty} P^{(n)}(D)\ (\rho^{n+1} - \rho^n)$$

$$= 1 - \rho P^{(o)}(D) + (1 - \rho) \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n P^{(n)}(D)$$

$$= (1 - \rho) \sum_{n=o}^{\infty} \rho^n P^{(n)}(D) \quad ,$$

und für $\hat{v}(0)$ erhalten wir

$$\boxed{\hat{v}(0) = \frac{k + \sum_{n=o}^{\infty} \rho^n \int_o^D \hat{f}(S - u)dP^{(n)}(u)}{(1 - \rho) \sum_{n=o}^{\infty} \rho^n \int_o^D dP^{(n)}(u)}} \quad . \tag{44.4}$$

Die Minimierung der Zielfunktion

$$\min_{S,D} \hat{v}_{S,D}(0)$$

liefert die optimalen Werte S und D, s = S - D, der stationären (s,S) - Politik.

Nichtdiskontierter Fall

Im nichtdiskontierten Fall ist $\hat{v} := \lim_{n\to\infty} \hat{v}_n$ bekanntlich unbeschränkt und als Optimierungskriterium treten anstelle des Gegenwartswertes der Gesamtkosten die Durchschnittskosten C bzw. c pro Periode, falls man die proportionalen Bestellkosten außer acht läßt. Im §21 wurde gezeigt, daß zwischen diesen beiden Kriterien folgender Zusammenhang besteht (21.3):

$$c = \lim_{\rho \to 1} (1 - \rho)\hat{v}_\rho \; ,$$

$$C = \lim_{\rho \to 1} (1 - \rho) v_\rho \; .$$

Angewandt auf die Zielfunktion $\hat{v}_\rho$ in (44.4) erhält man das Kostenkriterium für den nichtdiskontierten Fall

$$\boxed{c = \frac{k + \sum\limits_{n=o}^{\infty} \int\limits_{o}^{D} \hat{f}(S - u)dP^{(n)}(u)}{\sum\limits_{n=o}^{\infty} \int\limits_{o}^{D} dP^{(n)}(u)} \; .} \tag{44.5}$$

<u>Nichtdiskontierter Fall mit diskreter Nachfrage</u>

Wenn wir bisher mit Durchschnittskosten pro Periode (d.h. pro Zeiteinheit) im stationären Fall gerechnet hatten, dann waren stets Zustandswahrscheinlichkeiten mit im Spiel. Das trifft auch jetzt wieder zu. Aus der obigen Zielfunktion (44.5) läßt sich das zwar nicht ersehen. Wir werden sie aber im Fall diskreter Nachfragen so umformen, daß anstelle der Faltungen nur noch Zustandswahrscheinlichkeiten auftreten.

Zunächst wird (44.5) für den diskreten Fall formuliert. Sei

$p_u^{(n)}$: Wahrscheinlichkeit, daß die Nachfrage über n Perioden u ist;

$P^{(n)}(D)$: Wahrscheinlichkeit, daß die Nachfrage über n Perioden kleiner als D ist.

Mit diesen Bezeichnungen wird aus (44.5)

$$c = \frac{k + \sum\limits_{u=o}^{D-1} \hat{f}(S - u) \sum\limits_{n=o}^{\infty} p_u^{(n)}}{\sum\limits_{n=o}^{\infty} P^{(n)}(D)} \; . \tag{44.6}$$

Jetzt werden die Zustandswahrscheinlichkeiten π_y bestimmt.

π_y: Wahrscheinlichkeit, daß im stationären Fall der Lageranfangsbestand den Wert y besitzt.

Nach dem Eintreffen einer evtl. aufgegebenen Bestellung kann der Lageranfangsbestand zwischen s und S liegen: $s + 1 \leq y \leq S$.

Betrachten wir zuerst die Situation $y = S$. Sie kann nur vorliegen, wenn entweder der Anfangsbestand in der Vorperiode bereits S war und keine Nachfrage aufgetreten ist

$$\pi_S p_o ,$$

oder es trat in der Vorperiode eine Nachfrage auf, und der Bestand fiel dadurch auf s oder darunter; hierfür ist die Wahrscheinlichkeit

$$\sum_{y=s+1}^{S} \pi_y [1 - P(y - s)] .$$

Da diese beiden Ereignisse unabhängig voneinander sind, ist die Zustandswahrscheinlichkeit π_S die Summe aus beiden obigen Wahrscheinlichkeiten

$$\pi_S = \pi_S p_o + \sum_{y=s+1}^{S} \pi_y [1 - P(y - s)]. \tag{44.7}$$

Nun zur Berechnung der Zustandswahrscheinlichkeiten π_y, $y < S$. Wir nehmen an, daß $S - s \geq 2$. Nur in diesem Fall existiert ein Anfangsbestand $y < S$. Zum Anfangsbestand $y < S$ gelangt man vom Anfangsbestand $y + u$ der Vorperiode und Nachfrage u aus.

$$\pi_y = \sum_{i=y}^{S} \pi_i p_{i-y} ; \qquad \text{für } s < y < S . \tag{44.8}$$

Die Lösung dieser Gleichungen (44.7) und (44.8) erhält man durch folgende Überlegung. In den Zustand y < S gelang man zum ersten Mal nach n Perioden von S aus mit Wahrscheinlichkeit

$$p_{S-y}^{(n)} \qquad \text{für } 1 \leq y < s \ .$$

Deshalb ist

$$\pi_y = \pi_S \sum_{n=1}^{\infty} p_{S-y}^{(n)} \ , \text{ für } s < y < S \ . \tag{44.9}$$

Mit

$$p_u^{(o)} = \begin{cases} 1, & \text{für } u = o \ ; \\ o, & \text{für } u > o \ ; \end{cases}$$

darf die Summe bei n = o beginnen, und unter Verwendung der Normierungsbedingung

$$\sum_{y=s+1}^{S} \pi_y = 1$$

erhalten wir die Lösung

$$\pi_y = \pi_{S-u} = \frac{\sum\limits_{n=o}^{\infty} p_u^{(n)}}{\sum\limits_{n=o}^{\infty} P^{(n)}(D)} \quad , \text{ für } u = 0, \ldots, s. \tag{44.10}$$

Dabei ist

$$\sum_{n=o}^{\infty} p_o^{(n)} = \frac{1}{1 - p_o} \ ,$$

so daß π_S einfach geschrieben werden kann

$$\pi_S = \frac{1}{1 - p_o} \cdot \frac{1}{\sum\limits_{n=o}^{\infty} p^{(n)}(D)} \quad . \tag{44.11}$$

Setzt man diese beiden Ergebnisse in die Zielfunktion(44.6) ein, gewinnt man die Darstellung

$$\boxed{c = k(1 - p_o)\pi_S + \sum_{y=s+1}^{S} \pi_y \hat{f}(y)} \tag{44.12}$$

Spezialfall: geometrische Nachfrageverteilung

Bei geometrischer Nachfrageverteilung ist

$$p_u = qp^u \ , \qquad 0 < p < 1 \ , \quad q = 1 - p \ , \quad u \in \mathbb{N}_o \ .$$

Die erzeugende Funktion (vgl. §19) lautet

$$G(x)_{geom} = \frac{q}{1 - px} \quad ,$$

und die erzeugende Funktion der n-fachen Faltung ist

$$[G(x)]^n = (\frac{q}{1 - px})^n \ .$$

Wir wollen nun die Zustandswahrscheinlichkeiten berechnen. Es ist nach Definition

$$\sum_{u=o}^{\infty} p_u^{(n)} x^u = [G(x)]^n \ .$$

Bildet man mit dieser Gleichung die Summe über alle Faltungen $n = 1,2,3,\dots,$ erhält man

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{u=o}^{\infty} p_u^{(n)} x^u = \sum_{n=1}^{\infty} [G(x)]^n$$

$$= \frac{1}{1 - G(x)} - 1$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{q}{1 - px}} - 1$$

$$= \frac{q}{p} \frac{1}{1 - x} ,$$

also

$$\sum_{u=o}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_u^{(n)} x^u = \sum_{u=o}^{\infty} \frac{q}{p} x^u \quad . \tag{44.13}$$

Der Koeffizientenvergleich liefert

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_u^{(n)} = \frac{q}{p} = \text{const.} \tag{44.14}$$

Einsetzen in (44.9) ergibt

$$\pi_y = \pi_S[1 - p_o] \frac{q}{p}$$

$$\pi_y = \pi_S q = \text{const.} \quad , \qquad s < y < S. \tag{44.15}$$

Aus der Normierungsbedingung

$$1 - \pi_S = \sum_{y=s+1}^{S-1} \pi_y$$

erhält man

$$\pi_S = \frac{1}{1 + (D - 1)q} \tag{44.16}$$

$$\pi_y = \frac{q}{1 + (D - 1)q} \quad , \qquad s < y < S \quad . \tag{44.17}$$

Damit wird die Zielfunktion (44.12) zu

$$c = \frac{k(1 - q) + \hat{f}(S)}{1 + (D - 1)q} + \frac{q}{1 + (D - 1)q} \sum_{y=s+1}^{S-1} \hat{f}(y) \ .$$

Als Lager- und Fehlmengenkosten $\hat{f}$ wählen wir

$$\hat{f}(y) = hy + g \sum_{u=y+1}^{\infty} (u - y)p_u \ . \tag{44.18}$$

Die Funktion $\hat{f}(y)$ ist konvex, so daß weiterhin eine optimale (s,S) - Politik garantiert bleibt, veranschlagt aber bei den Lagerungskosten den ungünstigsten Fall.
Mit der geometrischen Verteilung wird daraus

$$f(y) = hy + \frac{gp^{y+1}}{q} \ .$$

Wir setzen diesen Wert in die Zielfunktion ein und erhalten

$$c = \frac{kp + hS + g\,\frac{p^{S+1}}{q} + qh \sum\limits_{y=s+1}^{S-1} y + qg \sum\limits_{y=s+1}^{S-1} \frac{p^{y+1}}{q}}{1 + (D - 1)q}$$

$$c = \frac{kp + h[S + q(D - 1)s + qD(\frac{D-1}{2})] + g[\frac{p^{S+1}}{q} + \frac{p^{S+2} - p^{S+1}}{1 - p}]}{1 + (D - 1)q}$$

$$c = h(s + \frac{D}{2}) + \frac{kp + h\,\frac{D}{2} + g\,\frac{p^{s+2}}{q}}{1 + (D - 1)q} \ . \tag{44.19}$$

Bestimmung von s:
s ist die kleinste ganze Zahl, für die die erste Differenz von c in s größer oder gleich Null ist:

$$\Delta_s c = h + \frac{g\,\frac{p^s}{q}\,(p-1)}{1+(D-1)q}\;.$$

Das ist gleichbedeutend mit

$$p^s \geq \frac{h}{g}\,[1+(D-1)q] > p^{s+1}\;. \tag{44.20}$$

Daraus erhalten wir

$$\boxed{s = \frac{\log \frac{h}{g}\,[1+(D-1)q]}{\log p}\;.} \tag{44.21}$$

Bestimmung von D: D ist die kleinste ganze Zahl, für die die erste Differenz von c in D größer oder gleich Null ist. Nach einigen Rechenschritten erhält man

$$h[\frac{q^2 D}{2}\,(D-1) + q(D-1) + 1] \geq qpk + gp^{s+1}\;.$$

Ersetzt man p^{s+1} durch die Approximation (44.20), wird daraus

$$D(D-1) = \frac{2pk}{qh}\;.$$

Bedenkt man, daß p/q gerade der Erwartungswert μ der Nachfrage ist, ergibt sich

$$\boxed{D(D-1) = \frac{2k\mu}{h}\;.} \tag{44.22}$$

Dieses Ergebnis ist ähnlich der Wilson Formel $D = \sqrt{\frac{2k\mu}{h}}$ für den Fall mit deterministischer Nachfragerate μ .

> Die obigen Ergebnisse basieren darauf, daß die Zustandswahrscheinlichkeiten π_y für $y < S$ identisch sind (siehe (44.17)). Dies ist nur bei der geometrischen Nachfrageverteilung und der Binomialverteilung richtig. Ist μ klein, so sind die Wahrscheinlichkeiten π_y auch bei anderen Verteilungen fast identisch und die Formeln (44.21), (44.22) stellen gute Näherungen dar.

§45 AHM - MODELL MIT LIEFERZEIT

Bisher wurde davon ausgegangen, daß der Lagerbestand zu Beginn einer Periode ohne Zeitverlust aufgefüllt werden konnte. Diese Idealisierung ist nur bei großen Periodenlängen vertretbar. In der Regel muß man mit Lieferzeiten rechnen, selbst wenn die Ware aus dem eigenen Haus kommt. Was wir mit Lieferung bezeichnen, umfaßt eine Reihe von Einzelaktivitäten, von der Kommissionierung über das Beladen, den Transport, das Entladen, die Wareneingangskontrolle bis zur Einlagerung, die alle eine gewisse Zeitspanne benötigen.

Wir verallgemeinern deshalb das AHM - Modell auf den Fall mit nicht vernachlässigbarer Lieferzeit. Es wird sich zeigen, daß das erweiterte Modell den Rahmen des AHM - Typs nicht sprengt. Das ist jedoch (bei einer einzigen Ausnahme) nur um den Preis der Vergrößerung des Zustandsraumes um mindestens eine Dimension möglich. Sei

τ : Lieferzeit.

Grundlegend für alle Modelle mit Lieferzeit ist die Überlegung, daß die Kosten erst auf den Zeitpunkt bezogen werden, zu dem die (evtl.) bestellte Menge eintrifft. Auf den Lagerverlauf vor diesem Zeitpunkt hat man keinen Einfluß, weil sich eine gegenwärtige Aktion erst nach τ Perioden auswirkt.

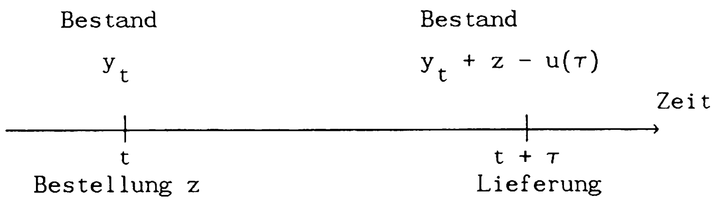


Abbildung 45.1

Die in der obigen Abbildung angegebene Mengenbilanz $y_{t+\tau} = y_t + z - u(\tau)$ ist richtig, wenn man die noch ausstehenden Bestellmengen dem physischen Lagerbestand hinzuschlägt. Das ist auch sinnvoll, denn zur Zeit $t + \tau$ ist auch das verfügbar, was zur Zeit t noch ausstand. Deshalb bezeichnen wir in Modellen mit Lieferzeit

y: vorhandener plus ausstehender Bestand (STOCK ON HAND PLUS ON ORDER)

z: Bestellmenge .

<u>1. Fall: Lieferzeit $\tau = 1$</u>

Die bestellte Menge wird zu Beginn der nächsten Periode geliefert.
BACKORDER - Fall:

$$\hat{v}_n(y) = \underset{z \geq 0}{\mathrm{Min}} \{k\delta(z) + \hat{f}(y) + \rho \int_o^\infty \hat{v}_{n-1}(y + z - u)dP(u)\}.$$

Wegen $z = x - y$ wird daraus

$$\hat{v}_n(y) = \underset{x \geq y}{\mathrm{Min}} \{k\delta(x - y) + \hat{f}(y) + \rho \int_o^\infty \hat{v}_{n-1}(x - u)dP(u)\} . \quad (45.1)$$

LOST SALES - Fall:

$$\hat{v}_n(y) = \underset{x \geq y}{\mathrm{Min}} \{k\delta(x - y) + \hat{f}(y) + \rho \int_o^y \hat{v}_{n-1}(x - u)dP(u)$$

$$+ \rho\hat{v}_{n-1}(x - y)[1 - P(y)]\} . \quad (45.2)$$

Hier ist zu beachten, daß Fehlmengen auftreten können, noch bevor die Lieferung eintrifft. Deshalb ist eine Fehlmenge gegeben bei $y - u < 0$ und nicht bei $x - u < 0$. Wegen $x \geq y$ treten also Fehlmengen mit einer größeren Wahrscheinlichkeit ein als beim Modell mit Lieferzeit $\tau = 0$

$$1 - P(y) \geq 1 - P(x) .$$

Das besagt, die Bestandsfluktuation wird bei Modellen mit Lieferzeit größer als bei Modellen ohne Lieferzeit. Dies gilt auch dann, wenn die Lieferzeit fest, d.h. verläßlich ist. Die Lieferzeit verteuert i.a. (d.h. wenn $g > h$ ist) die Lagerhaltung.

<u>2. Fall: $\tau = 2$.</u>

Beträgt die Lieferzeit zwei Perioden, muß man sich die Bestellmenge der Vorperiode merken. Sei

y: Lagerbestand plus ausstehende Bestellmenge der vorletzten Periode

z_1: Bestellmenge der Vorperiode

z: aktuelle Bestellmenge, $z = x - y$.

Die Entscheidung über die aktuelle Bestellmenge hängt von den zwei Zustandsgrößen y und z_1 ab. Das Prinzip der Optimalität lautet

im BACKORDER - Fall:

$$\hat{v}_n(y,z_1) = \operatorname*{Min}_z \{k\delta(z) + \hat{f}(y) + \rho \int_0^\infty \hat{v}_{n-1}(y + z_1 - u,z)dP(u)\} , \qquad (45.3)$$

im LOST SALES - Fall:

$$\hat{v}_n(y,z_1) = \operatorname*{Min}_z \{k\delta(z) + \hat{f}(y) + \rho \int_0^y \hat{v}_{n-1}(y + z_1 - u,z)dP(u)$$
$$+ \rho\, \hat{v}_{n-1}(z_1,z)[1 - P(y)]\} . \qquad (45.4)$$

3. Fall: $\tau = m$

Die Lieferzeit τ sei jetzt allgemein m Perioden lang, $m \in \mathbb{N}$.
Wir bezeichnen mit

y: Lagerbestand plus ausstehende Bestellmenge der m-ten Vorperiode

z_i: Bestellmenge der i-ten Vorperiode.

Zur Zustandsbeschreibung des Systems reicht die insgesamt ausstehende Bestellmenge als eigene Zustandsvariable nicht aus. Um die Entwicklung des Lagerbestandes $y_t \rightarrow y_{t+1}$ angeben zu können, muß jede einzelne Bestellung z_i notiert werden, die bis zum Eintreffen der ältesten Bestellung z_m aufgegeben wurde. Wir haben deshalb einen Vektor von m Zuständen

$$(y, z_1, z_2, \ldots, z_{m-1}) \ .$$

Sie werden rekursiv fortgeschrieben nach den Formeln

$$y \rightarrow y + z_{m-1} - u \qquad \text{(Lagerbilanz)}$$

$$(z_1, z_2, \ldots, z_{m-1}) \rightarrow (z, z_1, \ldots, z_{m-2}) \ .$$

Das Prinzip der Optimalität lautet
im BACKORDER - Fall:

$$\hat{v}_n(y, z_1, \ldots, z_{m-1}) = \underset{z}{\mathrm{Min}} \ \{k\delta(z) + \\ + \hat{f}(y) + \rho \int_0^{\infty} \hat{v}_{n-1}(y + z_{m-1} - u, z, z_1, \ldots, z_{m-2}) dP(u)\} \ , \tag{45.5}$$

im LOST SALES - Fall:

$$\hat{v}_n(y, z_1, \ldots, z_{m-1}) = \underset{z}{\mathrm{Min}} \ \{k\delta(z) + \\ + \hat{f}(y) + \rho \int_0^{y} \hat{v}_{n-1}(y + z_{m-1} - u, z, z_1, \ldots, z_{m-2}) dP(u) \\ + \rho \ \hat{v}_{n-1}(z_{m-1}, z, z_1, \ldots, z_{m-2})[1 - P(y)]\} \ . \tag{45.6}$$

4. Fall: Lieferzeit τ nicht ganzzahlig

Die Lieferzeit τ muß keine ganze Zahl sein. Für $0 < \tau < 1$ bzw. $m - 1 < \tau < m$ ändert sich im BACKORDER - Fall nichts. Die Formeln (45.1), (45.3) und (45.5) bleiben gültig. Man rundet die Lieferzeit auf. Im LOST SALES - Fall ergibt sich jedoch ein Unterschied.
Da die älteste noch ausstehende Lieferung bereits vor dem Ende der gegenwärtigen Periode eintrifft, kann sie zum verkaufbaren Bestand zugeschlagen werden. Anstelle von (45.6) muß es dann heißen

$$\hat{v}_n(y, z_1, \ldots, z_{m-1}) = \operatorname*{Min}_z \{k\delta(z) + \hat{f}(y)$$

$$+ \rho \int_0^{y+z_{m-1}} \hat{v}_{n-1}(y + z_{m-1} - u, z_1, \ldots, z_{m-2}) dP(u)$$

$$+ \rho\, \hat{v}_{n-1}(0, z, z_1, \ldots, z_{m-2})[1 - P(y + z_{m-1})] \} \tag{45.7}$$

Bereits für $\tau = 2$ wird die Zahl der möglichen Zustände sehr groß. Deswegen sind auch hier Näherungen notwendig.

Näherung

Wir ändern die Periodenlänge so ab, daß sie identisch ist mit der Lieferzeit. Damit haben wir ein Modell mit Lieferzeit eine (lange) Periode. Durch diese Umskalierung der Zeit ändert sich auch die Verteilung der Nachfrage. Bei einer Lieferzeit von $\tau = m$ Perioden tritt als Gesamtnachfrage über m Perioden die Nachfrage $u_1 + u_2 + \ldots + u_m$ auf. Da die Nachfragen in den einzelnen Perioden stochastisch als unabhängig angenommen werden, ist die Verteilungsfunktion der Gesamtnachfrage die m - fache Faltung der Verteilungsfunktion P(u).

$P^{(m)}(u)$: Verteilungsfunktion der Nachfrage innerhalb der Periode τ (bei Lieferzeit m).

Die Lagerungs- und Fehlmengenkosten sind dann definiert als

$$\hat{f}^{(m)}(y) = (\hat{h} + \hat{g}) \int_0^y P^{(m)}(u)du + \hat{g}(m\mu - x)$$

und die Wertfunktion erfüllt die Rekursion im BACKORDER - Fall:

$$\hat{v}_n(y) = \underset{x \geq y}{\mathrm{Min}} \; \{k\delta(x - y) + \hat{f}^{(m)}(y) + \rho \int_0^\infty \hat{v}_{n-1}(x - u)dP^{(m)}(u)\} \; , \tag{45.8}$$

im LOST SALES - Fall:

$$\hat{v}_n(y) = \underset{x \geq y}{\mathrm{Min}} \; \{k\delta(x - y) + \hat{f}^{(m)}(y) + \rho \int_0^y \hat{v}_{n-1}(x - u)dP^{(m)}(u)$$

$$+ \rho \, \hat{v}_{n-1}(x - y)[1 - P^{(m)}(y)]\} \; . \tag{45.9}$$

Bei diesem Näherungsmodell ist folgendes zu beachten: Durch die Verlängerung der Periodendauer wird sowohl S als auch D größer werden. Dadurch steigen die mengenabhängigen Kosten. Die fixen Bestellkosten k sind davon unberührt. Sie bleiben konstant. Deshalb besitzt eine Verlängerung der Periodendauer den Effekt einer relativen Verkleinerung der fixen Bestellkosten und es ist im Einzelfall zu prüfen, ob man dann nicht besser ganz auf die fixen Bestellkosten im Modell verzichtet. Falls m groß und k im ursprünglichen Modell bereits klein ist, empfiehlt sich ein Modell ohne fixe Bestellkosten als Näherung. Dort ist eine $S^{(m)}$-Politik optimal mit

$$S^{(m)} = P^{(m)^{-1}}\left(\frac{\hat{g}}{\hat{h} + \hat{g}}\right) \; . \tag{45.10}$$

Soweit es geht, sollte man jedoch Vergrößerungen der Periode vermeiden, denn damit wird auch die Varianz der Periodennachfrage größer, was wiederum die Lagerhaltungskosten in die Höhe treibt (vgl. §38).

Stochastische Lieferzeit τ

Wir betrachten hier nur den einfachsten Fall: es steht immer nur höchstens eine Bestellung aus. Sei

q_τ: Wahrscheinlichkeit, daß die Lieferzeit gleich τ ist;

$Q(\tau)$: Verteilungsfunktion der Lieferzeit;

$\hat{v}_n(y,\tau,z_1)$: Wertfunktion bei Planungshorizont n Perioden, Lagerbestand y und seit τ Perioden ausstehender Bestellmenge z_1.

τ ist jetzt eine zusätzliche Zustandsgröße.

Für die Funktionalgleichung der Wertfunktion benötigt man die Übergangswahrscheinlichkeiten

$\varphi_{\tau+1}$: Übergangswahrscheinlichkeit vom Zustand "nach τ Perioden noch ausstehend" zum Zustand "in Periode τ+1 geliefert".

Es ist

$$\varphi_{\tau+1} = \frac{q_{\tau+1}}{Q(\tau)}, \qquad \tau > 0; \tag{45.11}$$

$$\varphi_1 = q_1, \qquad \tau = 0. \tag{45.12}$$

Solange eine Bestellung noch unterwegs ist, darf keine neue Bestellung aufgegeben werden. Letzteres ist erst bei $z_1 = 0$ erlaubt. Deshalb gliedert sich das Prinzip der Optimalität in die beiden Gleichungen

$$\hat{v}_n(y,z_1,\tau) = \hat{f}(y) + \rho\varphi_{\tau+1} \int_0^\infty \hat{v}_{n-1}(y + z_1 - u,0,0)dP(u)$$

$$+ \rho[1 - \varphi_{\tau+1}] \int_0^\infty \hat{v}_{n-1}(y - u,z_1,\tau +1)dP(u) \tag{45.13}$$

$$\hat{v}_n(y,0,0) = \underset{x \geq y}{\text{Min}} \{k\delta(x - y) + \hat{f}(y)$$

$$+ \rho\varphi_1 \int_0^\infty \hat{v}_{n-1}(x - u,0,0)dP(u)$$

$$+ \rho[1 - \varphi_1] \int_0^\infty \hat{v}_{n-1}(y - u,x - y,1)dP(u)\} \tag{45.14}$$

im BACKORDER - Fall und in die zwei Gleichungen (45.15), (45.16)

$$\hat{v}_n(y,z_1,\tau) = \hat{f}(y) + \rho\varphi_{\tau+1} \int_0^y \hat{v}_{n-1}(y + z_1 - u,0,0)dP(u)$$

$$+ \rho\varphi_{\tau+1}[1 - P(y)]\hat{v}_{n-1}(z_1,0,0)$$

$$+ \rho[1 - \varphi_{\tau+1}] \int_0^y \hat{v}_{n-1}(y - u,z_1,\tau + 1)dP(u)$$

$$+ \rho[1 - \varphi_{\tau+1}][1 - P(y)]\hat{v}_{n-1}(0,z_1,\tau + 1) \ , \tag{45.15}$$

$$\hat{v}_n(y,0,0) = \underset{x \geq y}{\text{Min}} \{k\delta(x - y) + \hat{f}(y)$$

$$+ \rho\varphi_1 \int_0^y \hat{v}_{n-1}(x - u,0,0)dP(u)$$

$$+ \rho\varphi_1[1 - P(y)] \hat{v}_{n-1}(x - y ,0,0)$$

$$+ \rho[1 - \varphi_1] \int_0^y \hat{v}_{n-1}(y - u,x - y,1)dP(u)$$

$$+ \rho[1 - \varphi_1][1 - P(y)] \hat{v}_{n-1}(0,x - y,1)\} \tag{45.16}$$

im LOST SALES -Fall.

§46 AUTOKORRELIERTE NACHFRAGE

Zwar hat die Planning Research Corporation der US Navy AHM - Modelle mit konstantem Erwartungswert der Nachfrage akzeptiert. Von M.J. BECKMANN wurde ein Rechenschieber entwickelt, auf dem sich die (s,S) - Politik einstellen läßt. Parameter sind μ, g/h und k. (Siehe hierzu §38: Standardisierung.) Modelle, zu deren Lösung jedesmal ein stochastisches Dynamisches Programm zu lösen ist, waren zum damaligen Zeitpunkt noch sehr rechenaufwendig. Für manche Anwendungen ist jedoch die Annahme einer stationären Nachfrageverteilung zu unrealistisch.

Mit wachsender Leistungsfähigkeit der Computer wird es zunehmend leichter, realistischere, aber auch rechenintensivere Lagerhaltungsmodelle zu verwenden. Hierher gehört auch der Fall, daß die Nachfrage u durch ihre Vorgeschichte bedingt ist, also eine bedingte Dichte besitzt

$$p(u)du = p(u|u_1, u_2, \ldots, u_k)du$$

u_i: Nachfrage der i-ten Vorperiode.

Speziell betrachten wir den MARKOV Fall

$$p(u)du = p(u|u_1)du \, . \tag{46.1}$$

Die letzte Beobachtung u_1 wird als Zustandsvariable in die Optimalitätsgleichungen aufgenommen. Sie lauten

$$v_n(y,u_1) = \min_{x \geq y} \{k\delta(x - y) + a(x - y) + f(x,u_1) + $$

$$+ \rho \int_0^\infty v_{n-1}(x - u,u)dP(u|u_1)\} \, , \; n = 1,2,\ldots \, , \tag{46.2}$$

wobei

$$f(x,u_1) = h\int_{-\infty}^{x}(x-u)dP(u|u_1) + g\int_{x}^{\infty}(u-x)dP(u|u_1) . \qquad (46.3)$$

Was gewinnt man durch die Hinzunahme der letzten Beobachtung? Um diese Frage zu beantworten, fassen wir den MARKOV Prozeß enger.
Sei

1) $p(u|u_1)du = \Psi(u - \mu(u_1))$,

   d.h. der Erwartungswert μ wird durch die letzte Beobachtung bedingt.

2) μ linear: $\mu = \mu_o + \alpha(u_1 - \mu_o)$

   μ_o langfristiger Mittelwert.

Ein in der Zeitreihenanalyse häufig unterstellter Nachfrageprozeß ist der sich hieraus ergebende Spezialfall des autokorrelierten Prozesses erster Ordnung, der sog. AR(1) - Prozeß. Er genügt der Prozeßgleichung

$$u_t - \mu_o = \alpha(u_{t-1} - \mu_o) + \epsilon_t , \qquad (46.4)$$

$|\alpha| < 1$, ϵ_t für alle t unabhängig und identisch $(0,\sigma_\epsilon)$ - normalverteilt mit Verteilungsfunktion $\Psi(\epsilon)$. Es ist

$$u_t = \alpha^k(u_{t-k} - \mu_o) + \sum_{i=o}^{k-1}\alpha^i\epsilon_{t-i} + \mu_o .$$

Im eingeschwungenen Zustand, d.h. für $t \to \infty$ ist

$$u_t = \sum_{i=o}^{\infty}\alpha^i\epsilon_{t-i} + \mu_o , \qquad (46.5)$$

$$E\{u_t\} = \frac{1}{1-\alpha}E\{\epsilon_t\} + \mu_o = \mu_o ,$$

$$\sigma_u^2 = E\{(u_t - \mu_o)^2\}$$

$$= E\{[\sum_{i=o}^{\infty} \alpha^i \epsilon_{t-i} + \mu_o - \mu_o]^2\}$$

$$= \frac{1}{1 - \alpha^2} \sigma_\epsilon^2$$

$$\Rightarrow \quad \sigma_u^2 > \sigma_\epsilon^2 \quad \text{für} \quad |\alpha| < 1 . \qquad (46.6)$$

Beachte, daß für $|\alpha| < 1$ auch der nichtbedingte Prozeß $\{u_t\}$ stationär ist mit $E\{u_t\} = \mu_o$ und $E\{[u_t - \mu_o]^2\} = \sigma_u^2$. Aber durch die Aufnahme der letzten Beobachtung u_1 in ein Gedächtnis, d.h. durch die Formulierung als AR(1) - Prozeß, wird die Streuung der Nachfrage in der vorliegenden Periode geringer, wie (46.6) zeigt.

§47 LAGERHALTUNG MIT PROGNOSE

Die Einführung des AHM - Lagerhaltungsmodells kann manchmal daran scheitern, daß im Modell ein stationärer Nachfrageprozeß unterstellt wird. Meist liegt aber Information über den zukünftigen Verlauf der Nachfrage vor, aufgrund derer man Kurzfristprognosen erstellt. Diese Prognosen gilt es im Modell zu berücksichtigen. Derartige Situationen findet man z.B. vor, wenn mit einem Hauptkunden Abrufvereinbarungen getroffen wurden.

In der Praxis geht man häufig so vor, daß man im ersten Schritt die Nachfrageprognosen erstellt, im zweiten Schritt einen Sicherheitsbestand festlegt, im dritten Schritt die Prognose als deterministische Nachfrage festlegt und anhand eines deterministischen Modells die optimale Bestellregel berechnet. Dieses stufenweise Vorgehen führt allerdings zu Lösungen, die in der Regel suboptimal sind.

Optimale Lösungen erhält man, wenn man die Prognosen in den Dynamischen Programmierungsansatz integriert. Dies verlangt eine Neuformulierung des Optimalitätsprinzips.

Wir unterscheiden zwei verschiedene Prognosearten: die exogene und die endogene Prognose. Bei der endogenen Prognose leitet man die Prognosewerte alleine aus der in der Vergangenheit beobachteten Nachfrage ab. Hierher gehört auch das autoregressive Schema als Spezialfall. Wir fassen die zurückliegenden Beobachtungen u_1, $u_2, \dots$ zu einer suffizienten Statistik w_1 zusammen und rechnen statt mit der bedingten Dichte

$$p(u | u_1, u_2, \dots)$$

mit der bedingten Dichte

$$p(u | w_1) \ .$$

Die aus den Vergangenheitswerten $u_1, u_2, \dots$ extrahierte Information w_1 wird als Prognose für die in der gegenwärtigen Periode auftretende Nachfrage u angesehen. Wenn dann am Ende der Periode der exakte Wert für u bekannt ist, wird mit Hilfe einer Prognoseformel

$$w = g(u, w_1) \tag{47.1}$$

eine neue Prognose errechnet. Wichtig ist, daß sich die neue Prognose w rekursiv aus der alten Prognose w_1 und der aktuellen Beobachtung der Nachfrage u gewinnen läßt. Damit ist es möglich, den Prozeß des Prognostizierens in das Prinzip der Optimalität zu integrieren. Es lautet

$$v_n(y, w_1) = \min_x \{k\delta(x - y) + a(x - y) + f(x, w_1) + \rho \int v_{n-1}(x - u, w) dP(u | w_1)\} \ . \tag{47.2}$$

Beispiel: Exponentielle Glättung erster Ordnung

Die suffiziente Statistik w ist ein gewichtetes Mittel aller Beobachtungen $u_1, u_2, \ldots$, wobei die k Perioden zurückliegende Beobachtung mit dem Faktor α^k, $0 < \alpha < 1$, gewichtet wird:

$$p(u|\underbrace{u_1, u_2, \ldots}_{})$$

$$w_1 = (1 - \alpha) \sum_{k=o}^{\infty} u_{k+1}\alpha^k \tag{47.3}$$

Die Prognoseformel lautet (vgl. §6)

$$w = \alpha w_1 + (1 - \alpha)u \ . \tag{47.4}$$

Formuliert man sie abhängig von t

$$w_{t+1} = \alpha w_t + (1 - \alpha)u_{t+1} \ ,$$

so erkennt man, daß im stationären Zustand

$$w = u$$

ist und sich deshalb w vernünftigerweise als Prognose eines nichtperiodischen stationären Prozesses interpretieren läßt.

Die Prognose ist bei stationärem Nachfrageprozeß $\{u_t\}$ erwartungstreu:

$$E\{w\} = (1 - \alpha) \sum_{k=o}^{\infty} \alpha^k E\{u_{t-k-1}\} = \mu = E\{u\}$$

und besitzt eine Varianz

$$\mathrm{Var}\{w\} = (1 - \alpha)^2 \sum_{k=o}^{\infty} \alpha^{2k}\sigma_u^2$$

$$= \frac{(1 - \alpha)^2}{1 - \alpha^2}\sigma_u^2 < \sigma_u^2 \ ,$$

die geringer ist als σ_u^2 .

Bedingter Erwartungswert als Prognose

Die obige Prognose ist zwar erwartungstreu, aber nicht varianzminimal. Prognosen mit minimaler Varianz bekommt man, wenn man als Prognoseformel den bedingten Erwartungswert wählt, was z.B. im autoregressiven Schema geschehen ist.

Exogene Prognose

Bei der exogenen Prognose liegt die Quelle der Information außerhalb des Modells. Diese Situation liegt z.B. vor, wenn Prognose und Bestandsführung in verschiedenen Abteilungen eines Unternehmens durchgeführt werden. Die Prognoseabteilung erstellt ihre Prognosedaten auf der Grundlage von betriebswirtschaftlichen und volkswirtschaftlichen Rahmendaten. Für den Lagerhalter hat die Prognose den Charakter einer Zufallsvariablen:

w_1 ist die jüngste Prognose. Sie bezieht sich auf die Nachfrage der vorliegenden Periode.

u hat die Dichte $p(u|w_1)du$.

w ist die noch zu erstellende Prognose für die zukünftige Periode. w ist in den Augen des Lagerhalters eine Zufallsvariable, da ihm der Prognosemechanismus verborgen ist.

$\Psi(w)dw$ ist die Dichte von w.

Das Dynamische Programm lautet

$$v_n(y,w_1) = \min_{x \geq y} \{k\delta(x-y) + a(x-y) + f(x, w_1) + \rho \iint v_{n-1}(x-u,w)p(u|w_1)\Psi(w)du\, dw\}. \quad (47.5)$$

Der Vorteil dieses Modells gegenüber dem Modell ohne Prognose liegt darin, daß sich jetzt vermöge w_1 die Verteilung der Nachfrage mehr um ihren kurzfristigen Erwartungswert konzentrieren läßt (falls die Prognose gut ist!). Dieser Gewinn geht aber teilweise wieder verloren, da bezüglich w neue Unsicherheit ins Modell getragen wird. Das drückt sich im Doppelintegral in (47.5) aus. Die äußere Integration glättet die Kostenunterschiede zwischen günstigen und ungünstigen Zuständen. Die Kostenkurve v wird flacher.

Reduktion des Zustandsraumes

Unter den zwei Voraussetzungen

V1) $p(u|w_1) = \varphi(u - w_1) = \varphi(\epsilon)$ mit konstanter Varianz,

V2) w unabhängig von u und w_1

läßt sich das Dynamische Programm in nur einer einzigen Zustandsvariablen formulieren.

Wir schreiben das Prinzip der Optimalität neu, indem wir die Variable

$$\epsilon := u - w_1 \qquad (= \text{Prognosefehler})$$

verwenden.

$$v_n(y,w_1) = \min_{x \geq y} \{k\delta[x - w_1 - (y - w_1)] + a[x - w_1 - (y - w_1)] +$$

$$+ h \int_{-\infty}^{x-w_1} (x - w_1 - \epsilon)\varphi(\epsilon)d\epsilon + g \int_{x-w_1}^{\infty} [\epsilon - (x - w_1)]\varphi(\epsilon)d\epsilon$$

$$+ \rho \iint v_{n-1}[x - w_1 - \epsilon, w]\varphi(\epsilon)\Psi(w)d\epsilon\, dw\} \ . \tag{47.6}$$

Wir gehen zu den neuen Zustandsgrößen

$$r := y - w_1 \ ; \tag{47.7}$$

$$\xi := x - w_1 \ ; \tag{47.8}$$

über. r und ξ sind Nettobestände, d.h. Bestände, bereinigt um den Schätzwert w_1 der Nachfrage u.

r: Nettoanfangsbestand vor der Bestellung

ξ: Nettoanfangsbestand nach der Bestellung, d.h.

$$\xi = r + z \ .$$

Mit diesen neuen Zustandsgrößen wird aus (47.6)

$$\underbrace{v_n(\underbrace{y,w_1}_{})}_{\underbrace{y - w_1}_{r}} = \underset{\xi \geq r}{\mathrm{Min}} \{k\delta(\xi - r) + a(\xi - r)$$

$$+ h \int_{-\infty}^{\xi} (\xi - \epsilon)\varphi(\epsilon)d\epsilon + g \int_{\xi}^{\infty} (\epsilon - \xi)\varphi(\epsilon)d(\epsilon)$$

$$+ \rho \iint v_{n-1}[\underbrace{\xi - \epsilon, w}_{\xi - \epsilon - w}]\varphi(\epsilon)\Psi(w)d\epsilon\, dw\} \,. \tag{47.9}$$

Die rechte Seite hängt nicht mehr von w_1 ab. Deshalb kann man auf die zweite Zustandsvariable w_1 verzichten und das Prinzip der Optimalität in der einzigen Zustandsvariablen "Nettobestand" formulieren

$$\boxed{\begin{aligned} v_n(r) = \underset{\xi \geq r}{\mathrm{Min}} \{&k\delta(\xi - r) + a(\xi - r) \\ &+ h \int_{-\infty}^{\xi} (\xi - \epsilon)\varphi(\epsilon)d\epsilon + g \int_{\xi}^{\infty} (\epsilon - \xi)\varphi(\epsilon)d(\epsilon) \\ &+ \rho \iint v_{n-1}(\xi - \epsilon - w)\varphi(\epsilon)\Psi(w)d\epsilon\, dw\} \,. \end{aligned}} \tag{47.10}$$

Wie realistisch sind die beiden Voraussetzungen V1 und V2?
Die Normalverteilung erfüllt V1, denn es ist

$$n(u|w_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(u - w_1)^2} = n(u - w_1) \,.$$

Eine konstante Varianz σ_u^2 wird in V1 ebenfalls verlangt. Dies wird in der Regel akzeptiert bei Gütern mit sehr geringem Marktwachstum. Bei großem Marktwachstum würde sich auch σ_u^2 vergrößern.

Außerdem dürfen die Prognosen w und w_1 nicht autokorreliert sein.

Als drittes darf die Nachfrage u nicht die Prognose beeinflussen. Damit sind Güter ausgeschlossen, deren Output stellvertretend für eine Schlüsselindustrie ist.

Ist w z.B. die Änderung des Bruttosozialprodukts, so ist der obige Ansatz geeignet für Güter, die dem Akzelerationsprinzip unterliegen, z.B. Investitionsgüter und Ersatzteile.

Exogene Prognose mit Selbstanpassung

Für manche Güter, welche die obigen Bedingungen nicht erfüllen, wird die Prognose w von der alten Prognose w_1 und von der augenblicklichen Nachfrage u abhängen. w besitzt dann eine bedingte Dichte

$$\Psi(w|w_1,u)dw \ .$$

Mit ihr läßt sich das Prinzip der Optimalität in der Form schreiben

$$\begin{aligned} v_n(y,w_1) = \min_{x \geq y} \{ & k\delta(x - y) + a(x - y) + \\ & + h \int_{-\infty}^{x} (x - u)p(u|w_1) + g \int_{x}^{\infty} (u - x)p(u|w_1) + \\ & + \rho \iint v_{n-1}(x - u,w)p(u,w_1)\Psi(w|w_1,u)du\ dw\} \ . \end{aligned} \tag{47.11}$$

Auf diese Weise ist ein Adaptionsmechanismus ins Dynamische Programm aufgenommen.

Kapitel VI: N U M E R I S C H E   V E R F A H R E N

In den vorangegangenen Kapiteln wurden zahlreiche Grundmodelle der Lagerhaltung - insbesondere der stochastischen Lagerhaltung - vorgestellt. In der Praxis müssen diese Modelle meist den speziellen Bedürfnissen entsprechend modifiziert werden. Dadurch können sie sich so verändern, daß die vorgeschlagenen Lösungsmethoden ungeeignet werden, z.B. bei komplizierten Rabattstaffeln und Transportkosten. Es werden deshalb in diesem Kapitel numerische Verfahren vorgestellt, mit deren Hilfe man mit Ausnahme des letzten Verfahrens (FEDERGRUEN & ZIPKIN (1984)) sehr allgemeine Modelle berechnen kann.

§48 WERTITERATION

Alle Lagerhaltungsmodelle, die sich mit Hilfe des BELLMANschen Prinzips der Optimalität formulieren lassen, können mit der Methode der Wertiteration der Dynamischen Optimierung gelöst werden. Sie ist die rekursive Auswertung der Funktionalgleichungen der Dynamischen Optimierung.

<u>Allgemeines Schema der Wertiteration</u>

<u>1. Schritt:</u> Starte mit $v_o \equiv 0$ oder einem dem Probelm angemessenen anderen Vektor, n = 1 und einer Abbruchschranke.

<u>2. Schritt:</u> Berechne v_n aus dem Prinzip der Optimalität.

<u>3. Schritt:</u> Abbruchkriterium erfüllt?

nein: setze $n := n+1$ und gehe nach 2;

ja: gehe nach 4.

<u>4. Schritt:</u> Stop.

Abbruchkriterien können sein

a) bei endlichem Planungshorizont das Erreichen dieses Horizonts

b) bei unendlichem Planungshorizont:

- eine maximale Iterationszahl
- die Unterschreitung eines absoluten Mindestzuwachses
  $\| v_{n+1} - v_n \| < \epsilon_{abs}$
- die Unterschreitung eines relativen Mindestzuwachses
  $\| v_{n+1} - v_n \| / \| v_{n+1} \| < \epsilon_{rel}$
- die Unterschreitung einer Mindeständerung des Zuwachses (speziell im undiskontierten Fall)
  $| \, \| v_{n+1} - v_n \| - \| v_n - v_{n-1} \| \, | < r$.

Unendlicher Planungshorizont

Für die folgenden Überlegungen innerhalb dieses Paragraphen wird ein unendlicher Planungshorizont vorausgesetzt.
Lagerhaltungsmodelle mit identischer Nachfrageverteilung in den einzelnen Perioden lassen sich als homogene MARKOVsche Entscheidungsprozesse formulieren. Für numerische Zwecke müssen wir den diskreten Fall voraussetzen. Seien

i: Zustand, $i = 1,2,\ldots,N$

d: Entscheidung, d_i ist die Entscheidung im Zustand i

δ: Bestellregel $\delta = (d_1,\ldots,d_N)$ (δ ist jetzt nicht mehr das Kroneckersymbol!)

p_{ij}^d: Übergangswahrscheinlichkeit von i nach j bei Entscheidung d_i

a_i^d: Erwartungswert der Einperiodenkosten, ausgehend vom Zustand i bei Entscheidung d_i .

Wir setzen die Kosten als negative Größen an und erhalten damit ein Maximierungsproblem

$$v_n(i) = \max_d \left\{ a_i^d + \rho \sum_{j=1}^{N} p_{ij}^d v_{n-1}(j) \right\} , \tag{48.1}$$

$n = 1,2,3,\ldots,$ v_o gegeben, $\rho \leq 1$,

bzw. in vektorieller Schreibweise

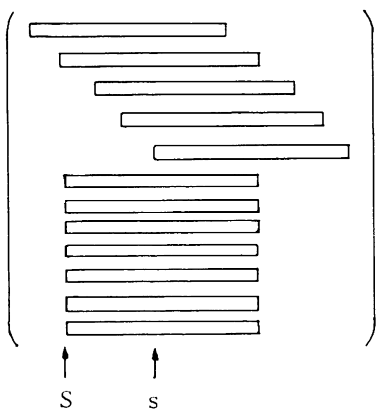
$$v_n = \max_{\delta} \{a_\delta + \rho P_\delta v_{n-1}\} \tag{48.2}$$

mit

$$a_\delta = \begin{bmatrix} a_1^{d_1} \\ a_2^{d_2} \\ \vdots \\ a_N^{d_N} \end{bmatrix} \quad ; \quad P_\delta = \begin{bmatrix} p_{11}^{d_1} & p_{12}^{d_1} & p_{1N}^{d_1} \\ \vdots & & \\ p_{N1}^{d_N} & p_{N2}^{d_N} & p_{NN}^{d_N} \end{bmatrix} .$$

Bei einer (s,S) - Bestellregel ist P_δ von folgender Gestalt

$P_{s,S} =$



Der Kasten bedeutet die Verteilung $(p(1), p(2), \ldots, p(u_{max}))$ der Nachfrage u. Alle anderen Positionen der Matrix sind mit Null besetzt.

Zur Vereinfachung führen wir folgende abkürzende Schreibweisen ein

a) falls die Entscheidung im jeweiligen Zustand fest ist und nicht maximiert wird, dann tritt anstelle der Wertfunktion v die Funktion w

$$w_n(i) = a_i^d + \rho \sum_j p_{ij}^d w_{n-1}(j) \ ,$$

und wir kürzen diese Gleichung wie folgt ab

$$w_n(i) = l(d,i,w_{n-1})$$

bzw. in vektorieller Schreibweise

$$w_n = L(\delta,w_{n-1}) \quad ;$$

b) beim Maximierungsschritt schreiben wir anstelle von

$$v_n(i) = \max_d \{a_i^d + \rho \sum_j p_{ij}^d v_{n-1}(j)\}$$

jetzt

$$v_n(i) = \max_d l(d,i,v_{n-1}) \quad ;$$

bzw. vektoriell:

$$v_n = \max_\delta L(\delta,v_{n-1}) \quad ;$$

woraus unter Verwendung von

$$U := \max_\delta L$$

die Kurzform

$$v_n = Uv_{n-1}$$

entsteht.

Mit dieser Schreibweise wird das allgemeine Schema der Wertiteration im diskontierten Fall, d.h. für $\rho < 1$ und bei unendlichem Planungshorizont zu folgendem Algorithmus:

Wertiteration im diskontierten Fall, unendlicher Planungshorizont

1. Schritt: Starte mit v_o ($\equiv 0$), $\epsilon_{abs} > 0$.

2. Schritt: Berechne Uv (Maximierungsschritt).

3. Schritt: $\| Uv - v\| > \epsilon_{abs}$?

ja: setze v := Uv und gehe nach 2;

nein: gehe nach 4.

4. Schritt: Stop.

Als Norm wird die Supremumnorm $\|v\| = \max\limits_i \{v(i)\}$ verwendet.

Für die Konvergenz der obigen Wertiteration ist hinreichend, wenn die Iterationsmatrix ρP einen betragsgrößten Eigenwert besitzt, der dem Betrag nach kleiner ist als eins.

Lemma 46.1: Die Matrix ρP besitzt einen betragsgrößten Eigenwert

$$|\lambda|_{max} = \rho.$$

Beweis:

Es ist $(1,\dots,1) =: e^T$ Eigenvektor von P zum Eigenwert 1. Wegen

$$|\lambda| \leq \max_i \sum_j |p_{ij}| = 1 \quad \text{(Eigenwertabschätzung)}$$

ist $\lambda = 1$ betragsgrößter Eigenwert von P. Damit ist ρ betragsgrößter Eigenwert von ρP. q.e.d.

Bei diskontierten Optimierungsproblemen ist die Konvergenz der Wertiteration demnach gesichert.

Außerdem gilt das

Lemma 46.2: Für $\rho < 1$ ist L kontrahierend, d.h. für alle $u,v \in \mathbb{R}^N$ und für alle δ gilt

$$\| L(\delta,u) - L(\delta,v) \| \leq \rho \| u - v \| , \qquad 0 < \rho < 1 .$$

<u>Beweis:</u> $\| L(\delta,u) - L(\delta,v) \| = \| a_\delta + \rho P_\delta u - a_\delta - \rho P_\delta v \|$

$$= \| \rho P_\delta (u-v) \| \le \rho \| P_\delta \| \| u - v \|$$

$$= \rho \| u - v \| . \quad \text{q.e.d.}$$

Als Nächstes wird gezeigt, daß sich die Kontraktionseigenschaft von L auf U überträgt.

<u>Lemma 46.3:</u> Für $\rho < 1$ ist U kontrahierend, d.h. für alle $u,v \in \mathbb{R}^N$ gilt

$$\| Uu - Uv \| \le \rho \|u - v\|, \qquad 0 < \rho < 1.$$

<u>Beweis:</u>

Sei i eine beliebige Komponente des Vektors v (d.h. wir greifen einen beliebigen Zustand heraus). Es gelte für $u,v, \in \mathbb{R}^N$: $(Uu)_i = (Uv)_i + k$. Sei o.B.d.A. $k > 0$ und sei $\tilde{d}$ die maximierende Entscheidung bezüglich u in i, d.h.

$$(Uu)_i = l(\tilde{d},i,u) \ge (Uv)_i = (Uu)_i - k.$$

Nach Definition von U ist $(Uv)_i \ge l(\tilde{d},i,v)$. Also gilt insgesamt

$$(Uu)_i = l(\tilde{d},i,u) \ge (Uv)_i \ge l(\tilde{d},i,v) \ ,$$

woraus folgt

$$\begin{aligned}(Uu)_i - (Uv)_i &\le l(\tilde{d},i,u) - l(\tilde{d},i,v) \\ &\le \rho \| u - v \| ,\end{aligned}$$

da L kontrahierend ist. Dies gilt für alle i, also ist

$$\| Uu - Uv \| \le \rho \| u - v \| . \quad \text{q.e.d.}$$

Damit sind die Voraussetzungen des BANACHschen Fixpunktsatzes erfüllt. Aus ihm folgt, daß es zu jeder Entscheidungsregel δ einen Fixpunkt w_δ gibt. Dieser erfüllt die Fixpunktgleichung

$$w_\delta = L(\delta, w_\delta) \ . \tag{48.3}$$

Ebenso gibt es genau einen Fixpunkt v^* als Lösung der Fixpunktgleichung

$$v^* = Uv^* \ . \tag{48.4}$$

Die Wertiteration ist eine von mehreren Möglichkeiten, v^* zu bestimmen. Welche Mögichkeit man verwendet, hängt hauptsächlich vom Rechenaufwand ab.

Untersuchen wir das Konvergenzverhalten der Wertiteration. Hat man bereits n Iterationen durchgeführt, so verkleinert sich durch zusätzlich R Iterationen die Norm des Residuums um den Faktor ρ^R, denn es ist

$$\| v_{n+R} - v^* \| \le \rho^R \| v_n - v^* \| \ . \tag{48.5}$$

Wieviele Iterationen R sind erforderlich, um die augenblickliche Genauigkeit der Näherung v_n um eine Dezimalstelle zu verbessern? Dazu muß gelten

$$\frac{\| v_{n+R} - v^* \|}{\| v_n - v^* \|} = \frac{1}{10} \ .$$

Mit (48.5) erhält man

$$\rho^R = \frac{1}{10}$$

$$\boxed{R = \frac{-1}{\log \rho}} \ .$$

R ist eine Konstante. Man sagt, das Verfahren konvergiert linear. Vom numerischen Standpunkt aus gesehen sind derartige Verfahren aufwendig. Das trifft hier insbesondere dann zu, wenn der Diskontfaktor ρ nahe bei eins liegt. Bei einem Jahreszins von 10% ist z.B.

Periode	ρ	R
Jahr	0.91	24
Monat	0.99	277
Woche	0.998	1198

Konvergenzbeschleunigung im diskontierten Fall, unendlicher Planungshorizont

Zur Beschleunigung der Konvergenz bieten sich verschiedene Möglichkeiten.

1) Einzelschritt - Iteration.
   Angenommen, wir berechnen $v_{n+1}(i)$. Bei der dazu notwendigen Summenbildung können wir für $k < i$ anstelle der $v_n(k)$ gleich die "besseren" Werte $v_{n+1}(k)$ verwenden. Dies führt zur sog. Einzelschritt-Iteration. Die Rekursionsformel lautet

$$v_{n+1}(i) = \max_d \left\{ a_i^d + \rho \sum_{j=1}^{i-1} p_{ij}^d v_{n+1}(j) + \rho \sum_{j=i}^{N} p_{ij}^d v_n(j) \right\} .$$

2) Eine weitere Verbesserung bringt die folgende Variante:
   Bei der Maximierung bezüglich d wird die rechte Seite nacheinander für verschiedene d ausgewertet. Führt dabei eine Auswertung zu einer Verbesserung, so verwendet man bei der nächsten Auswertung anstelle von $v_n(i)$ gleich die Verbesserung $w_{n+1}(i)$.

$$v_{n+1}(i) = \max_d \left\{ a_i^d + \rho \sum_{j=1}^{i-1} p_{ij}^d v_{n+1}(j) + \rho p_{ii}^d \max\{v_n(i) | w_{n+1}(i)\} + \right.$$
$$\left. + \rho \sum_{j=i+1}^{N} p_{ij}^d v_n(j) \right\}.$$

3) Durchdividierte Form.
   Herleitung: Wir iterieren nur in der i-ten Komponente:

$$w_{n,1}(i) := a_i^d + \rho \sum_{j \neq i} p_{ij}^d w_n(j) + \rho p_{ii}^d w_n(i)$$

$$w_{n,2}(i) := a_i^d + \rho \sum_{j \neq i} p_{ij}^d w_n(j) + \rho p_{ii}^d w_{n,1}(i)$$

$$\vdots$$

$$w_{n,k}(i) := [a_i^d + \rho \sum_{j \neq i} p_{ij}^d w_n(j)] \sum_{r=o}^{k-1} (\rho p_{ii}^d)^r + (\rho p_{ii}^d)^k w_n(i)$$

Wegen $\rho p_{ii}^d < 1$ ist

$$\lim_{k\to\infty} w_{n,k}(i) = \frac{1}{1 - \rho p_{ii}^d} [a_i^d + \rho \sum_{j \neq i} p_{ij}^d w_n(j)].$$

Dies führt zur Iterationsvorschrift

$$w_n := (I - \rho P_{\delta,D})^{-1}[a_\delta + \rho(P_{\delta,L} + P_{\delta,U})w_{n-1}] \, , \tag{48.6}$$

wobei die Matrix P_δ in eine untere Dreiecksmatrix $P_{\delta,L}$, eine obere Dreiecksmatrix $P_{\delta,U}$ und eine Diagonalmatrix $P_{\delta,D}$ zerlegt ist

$$P_\delta = P_{\delta,L} + P_{\delta,D} + P_{\delta,U} \quad .$$

I ist die Einheitsmatrix.

Die Iteration (48.6) konvergiert ebenfalls zum Fixpunkt w_δ, wie man sich durch Einsetzen leicht überzeugt. Somit konvergiert auch die Wertiteration in durchdividierter Form

$$v_n(i) = \max_d \left\{ \frac{1}{1 - \rho p_{ii}^d} [a_i^d + \rho \sum_{j \neq i} p_{ij}^d v_{n-1}(j)] \right\} \tag{48.7}$$

gegen die Lösung v^* des Optimierungsproblems. Die Wertiteration in durchdividierter Form kann auch in den obigen Varianten 1) und 2) durchgeführt werden, was zu einer zusätzlichen Konvergenzbeschleunigung führt.

Wertiteration im undiskontierten Fall, unendlicher Planungshorizont

Bei fester Politik δ erzeugt die Iteration $w_n = L(\delta, w_{n-1})$, startend mit $w_o \equiv 0$, eine nicht konvergierende Folge

$$w_n = a_\delta + P_\delta a_\delta + \ldots + P_\delta^{n-1} a_\delta .$$

Die Zuwächse $\Delta_n = w_n - w_{n-1}$ streben jedoch gegen einen konstanten Vektor. Es ist nämlich

$$\Delta_n = P_\delta^{n-1} a_\delta \qquad (48.8)$$

und es existiert bei stochastischen Matrizen der Grenzwert Π_δ für jedes δ

$$\lim_{n\to\infty} P_\delta^n = \Pi_\delta ,$$

so daß auch die Zuwächse Δ_n einen Limes besitzen

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \Delta_n &= \lim_{n\to\infty} P_\delta^{n-1} a_\delta \qquad (48.9)\\ &= \Delta\end{aligned}$$

Δ ist der stationäre Periodenertrag, auch DURCHSCHNITTSERTRAG genannt. Die numerische Aufgabe besteht darin, diejenige Entscheidungsregel δ^* zu finden, die den höchsten Durchschnittsertrag Δ^* liefert ($\Delta^* \geq \Delta_\delta$ für alle δ, komponentenweise)

$$\Delta^* = \max_\delta \Delta_\delta .$$

Dies leistet die

Wertiteration im undiskontierten Fall

1. Schritt: Starte mit $v_o \equiv 0$, $r > 0$.

2. Schritt: Berechne $v := Uv_o$;

berechne $\Delta_{alt} := v - v_o$.

<u>3. Schritt:</u> Berechne Uv;

berechne $\Delta_{neu} := Uv - v$.

<u>4. Schritt:</u> Ist $| \, \| \Delta_{alt} \| - \| \Delta_{neu} \| \, | > r$?

ja: setze $\Delta_{alt} := \Delta_{neu}$

$v := Uv$

und gehe nach s;

nein: gehe nach 5.

<u>5. Schritt:</u> Stop.

Grundsätzlich erreicht man bei unendlichem Planungshorizont mit der Wertiteration nie den optimalen Wert v^* sondern nur eine Näherung. Deswegen kann man auch nie sicher sein, die optimale Politik δ^* gefunden zu haben. Vielleicht wäre man bei einer noch besseren Näherung auch auf eine noch bessere Politik gestoßen.
Es gibt jedoch Möglichkeiten, suboptimale Entscheidungsregeln teilweise von vorne herein und teilweise während der Iteration zu erkennen und auszusondern (vgl. McQUEEN (1967), BARTMANN (1976)). Bleibt dann nur noch eine einzige Politik übrig, dann kann man sicher sein, daß dies auch die optimale ist.

§49 ENTSCHEIDUNGSITERATION

Kehren wir zurück zum diskontierten Fall $\rho < 1$ bei unendlichem Planungshorizont. Das Verfahren der Entscheidungsiteration läuft nach folgendem Schema ab:

Wähle eine Entscheidungsregel δ_1;

berechne w_{δ_1};

suche eine Entscheidungsregel δ_2, die auch im Punkt w_{δ_1} noch eine Verbesserung bringt;

berechne hierzu w_{δ_2};

suche eine Entscheidungsregel δ_3, die auch im Punkt w_{δ_2} noch eine Verbesserung bringt; usw.

Es wird auf diese Weise eine Folge von Fixpunkten w_{δ_i} berechnet, die monoton wächst. Da es im diskreten Fall nur endlich viele Entscheidungsregeln gibt, bricht diese Kette mit dem maximalen Fixpunkt w_{δ_m} nach endlich vielen Schritten ab.

$$w_{\delta_1} < w_{\delta_2} < \ldots < w_{\delta_m} = \max_{\delta} w_{\delta} \; .$$

Ist die Wertiteration vorteilhaft, wenn man als Startvektor eine gute Näherung für v^* angeben kann (daß man mit beliebigen Startvektoren $v_o \in \mathbb{R}^N$ beginnen kann, zeigt der BANACHsche Fixpunktsatz), so empfiehlt sich die Entscheidungsiteration, wenn man als Start - Entscheidungsregel eine gute Näherung für δ^* findet.

Entscheidungsiteration im diskontierten Fall

1. Schritt: Starte mit δ.

2. Schritt: Berechne w_δ als Lösung des Gleichungssystems $w_\delta = L(\delta, w_\delta)$.

3. Schritt: Test auf Optimalität von δ :

a: Berechne Uw_δ. Die maximierende Entscheidungsregel sei δ'.

b: Ist $\delta \neq \delta'$?

ja: setze $\delta := \delta'$ und gehe nach 2;

nein: setze $\delta^* := \delta$; $v^* := w_\delta$, und gehe nach 4.

4. Schritt: Stop.

Das Abbruchkriterium liefert die optimale Entscheidungsregel δ^*. (Bei der Wertiteration ist dies nicht garantiert!) Es bleibt jedoch noch zu beweisen, daß auf diese Weise tatsächlich der optimale Wert v^* des Dynamischen Programms gefunden wird.

Lemma 49.1: Unter den optimalen Strategien eines Markovschen Entscheidungsproblems vom obigen Typ bei einer endlichen Menge von Entscheidungen befindet sich auch eine stationäre Entscheidungsregel δ^*.

Beweis:

Eine optimale Strategie des obigen Problems ist eine (wegen des unendlichen Planungshorizonts) unendliche Sequenz $\ldots \delta_n \delta_{n+1} \ldots$ von Entscheidungsregeln (für jede Periode genau eine). Entweder eine stationäre Strategie $\ldots \delta\delta \ldots$ ist bereits optimal, oder es existiert wegen der Monotonie von L eine stationäre Verbesserung $\hat{\delta}$

$$\ldots \delta \; \delta \; \hat{\delta} \; \hat{\delta} \ldots$$

Da die Menge der Entscheidungsregeln endlich ist, existiert eine stationäre Strategie, zu welcher es keine stationäre Verbesserung gibt.

q.e.d.

Nichtdiskontierter Fall

Hier wird die Entscheidungsiteration i.a. etwas schwieriger. Wir beschränken uns deshalb auf den sog. vollständig ergodischen Fall. Er besagt, daß die Zustandswahrscheinlichkeiten

$\pi_{n,\delta}(i)$: Wahrscheinlichkeit, daß sich das System nach n Perioden im Zustand i befindet bei Verwendung von Politik δ

für $n \to \infty$ unabhängig vom Anfangszustand sind.
Sei $\pi_{n,\delta} = (\pi_n(1), \pi_n(2), \ldots, \pi_n(N))_\delta$ die Verteilung der Zustandswahrscheinlichkeiten des Systems nach n Perioden, startend mit der Anfangsverteilung $\pi_{o,\delta}$. Es ist

$$\pi_{n,\delta} = \pi_{o,\delta} P_\delta^n . \tag{49.1}$$

Im vollständig ergodischen Fall ist der Grenzwert

$$\pi_\delta = \lim_{n\to\infty} \pi_{n,\delta}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \pi_{o,\delta} P_\delta^n \tag{49.2}$$

unabhängig von $\pi_{o,\delta}$. Da $\lim_{n\to\infty} P_\delta^n = \Pi_\delta$, wird aus (49.2)

$$\pi_{o,\delta}\Pi_\delta = \pi_\delta \ . \tag{49.3}$$

Da diese Beziehung auch für die uneigentlichen Anfangsverteilungen (1,0,...,0), (0,1,0,...,0),...,(0,...,0,1) gelten muß, folgt daraus, daß die Matrix Π_δ identische Zeilen besitzt. Dann wird aber der Durchschnittsertrag Δ zu einem Vektor mit lauter identischen Komponenten (48.9)

$$\Delta_\delta = \Pi_\delta a_\delta = \bar{a}_\delta e \ , \tag{49.4}$$

$e^T = (1,\dots,1)$. Der Durchschnittsertrag ist dann unabhängig vom Anfangszustand eine skalare Größe $\bar{a}_\delta$.

$\bar{a}_\delta$: Durchschnittsertrag (stationärer Periodenertrag) eines nichtdiskontierten vollständig ergodischen Markovschen Entscheidungsprozesses.

Im Folgenden unterdrücken wir den Subskript δ.
Der Gesamtertrag $v_n(i)$ genügt asymptotisch der linearen Beziehung

$$v_n(i) = n\bar{a} + V(i) \ , \quad n \text{ sehr groß.} \tag{49.5}$$

Nun vergleichen wir die Differenz V_n zwischen erwartetem Gesamtertrag nach n Perioden und dem n-maligen Durchschnittsertrag $n\bar{a}$. Der erwartete Ertrag in einer Periode, startend im Zustand i ist a_i, derjenige in n Perioden ist

$$a_i + \sum_j p_{ij}a_j + \ldots + \sum_j p_{ij}^{(n-1)}a_j \ .$$

Die Differenz schreiben wir in der Form

$$\begin{aligned} V_n(i) &= a_i + \sum_j p_{ij}a_j + \ldots + \sum_j p_{ij}^{(n-1)}a_j - (n-1)\bar{a} - \bar{a} \\ &= a_i + \sum_k p_{ik}\{a_k + \sum_j p_{kj}a_j + \ldots + \sum p_{kj}^{(n-2)}a_j\} - (n-1)\bar{a} - \bar{a} \\ &= a_i + \sum_k p_{ik}v_{n-1}(k) - (n-1)\bar{a} - \bar{a} \\ &= a_i + \sum_k p_{ik}\underbrace{[v_{n-1}(k) - (n-1)\bar{a}]}_{= V_{n-1}(k)} - \bar{a} \end{aligned}$$

woraus sich schließlich die folgende Rekursion formulieren läßt:

$$V_n(i) + \bar{a} = a_i + \sum_j p_{ij}V_{n-1}(j) \ . \tag{49.6}$$

Für $n \to \infty$ wird daraus

$$\boxed{V(i) + \bar{a} = a_i + \sum_j p_{ij}V(j) \ .} \tag{49.7}$$

Die so erhaltene Wertfunktion V mißt also die totale Abweichung zwischen Gesamtertrag und kumuliertem Durchschnittsertrag. Die Werte $V(i)$ in (49.7) sind bis auf einen gemeinsamen Faktor festgelegt. Zur Normierung setzen wir eine beliebige Komponente Null, z.B. $V(N) = 0$. Dann lassen sich die restlichen Werte $V(j)$, $j \neq i$ und $\bar{a}$ berechnen, indem man das Gleichungssystem (49.7) löst.

Wie läßt sich die beste Entscheidungsregel finden?
Sie muß den stationären Einperiodenzuwachs maximieren. Bei Planungsho-

rizont n lautet die Forderung

$$\max_d \left\{a_i^d + \sum_j p_{ij}^d v_{n-1}(j)\right\} .$$

Dafür läßt sich auch schreiben

$$\max_d \left\{a_i^d + \sum_j p_{ij}^d [n\bar{a} + V_{n-1}(j)]\right\} . \tag{49.8}$$

Das maximierende d bleibt dasselbe, wenn man den von d unabhängigen Wert $n\bar{a}$ subtrahiert. Die Testgröße ist dann

$$\max_d \left\{a_i^d + \sum p_{ij}^d V_{n-1}(j)\right\}$$

und bei unendlichem Planungshorizont

$$\max_d \left\{a_i^d + \sum p_{ij}^d V(j)\right\} . \tag{49.9}$$

<u>Entscheidungsiteration bei $\rho = 1$, vollständig ergodischer Fall, unendlicher Planungshorizont</u>

<u>1. Schritt:</u> Starte mit Entscheidungregel δ.

<u>2. Schritt:</u> Setze $V(N) = 0$;

berechne V und $\bar{a}$ als Lösung des Gleichungssystems

$V + \bar{a}e = a_\delta + P_\delta V$

<u>3. Schritt:</u> Test auf Optimalität von δ:

a: Berechne $\max_\delta \{a_\delta + P_\delta V\}$. Die maximierende Entscheidungsregel sei δ'.

b: Ist $\delta \neq \delta'$?

ja: setze $\delta := \delta'$ und gehe nach 2;

nein: setze $\delta^* := \delta$; $\bar{a}^* := \bar{a}$ und gehe nach 4.

<u>4. Schritt:</u> Stop.

§50 BISEKTIONSMETHODE UND DYNAMISCHE OPTIMIERUNG

Die Entscheidungsiteration besitzt den Nachteil, daß sich der Rechenaufwand apriori nur schlecht abschätzen läßt. Der Nachteil der Wertiteration liegt in der sehr langsamen Konvergenz, sobald der Diskontfaktor nahe bei eins liegt. Es wird deshalb ein drittes Verfahren angegeben: Die Bisektionsmethode in Verbindung mit der Dynamischen Optimierung (BARTMANN (1979)).

Die Bisektionsmethode läßt sich zur Bestimmung einer Nullstelle einer reellwertigen Funktion anwenden. Ein die Nullstelle enthaltendes Intervall wird durch Halbierung fortwährend verkleinert, bis dessen Weite unter eine vorgegebene Abbruchschranke gefallen ist. Damit das Intervall auf ein Zehntel seiner Weite schrumpft, bedarf es ca. 3.32 Halbierungen. Falls es gelingt, die Bisektionsmethode auf einen Markovschen Entscheidungsprozeß mit unendlichem Plaungshorizont und Diskontfaktor $\rho < 1$ anzuwenden, wird der Rechenaufwand unabhängig von ρ und geringer als bei der Wertiteration, sobald $\rho > 0.5$ ist.

Nun stellt sich aber die Aufgabe der Fixpunktberechnung v^* als ein Problem im $\mathbb{R}^N$ dar. Eine Einschließung

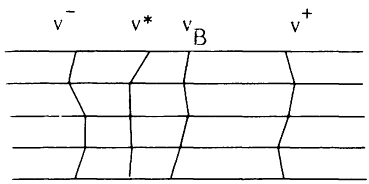
$$v^- \leq v^* \leq v^+$$

läßt sich zwar leicht finden, jedoch funktioniert die Bisektionsmethode nicht, da der $\mathbb{R}^N$ nur halbgeordnet ist. Das bedeutet, nach dem Bisektionsschritt

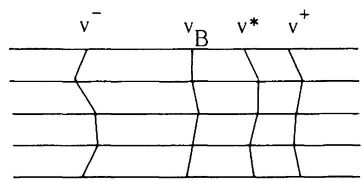
$$v_B := \frac{v^+ + v^-}{2}$$

ist nicht nur $v^* \in [v^-;v_B]$ (Situation 1)

oder (exklusives oder) $v^* \in [v_B;v^+]$ möglich (Situation 2),

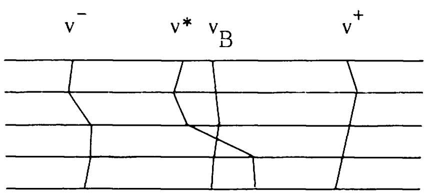


Situation 1: v^* liegt im linken Teilintervall



Situation 2: v^* liegt im rechten Teilintervall

sondern auch Situation 3:



Situation 3: v^* liegt weder ganz im linken noch ganz im rechten Teilintervall.

Erläuterung zu den obigen Abbildungen:
Jede waagerechte Linie bedeutet die reelle Zahlengerade. Jede Komponente $v(i)$ von v ist auf einer eigenen Zahlengeraden abgetragen. Diese einzelnen Werte miteinander verbunden ergeben die gezackte Linie als Darstellung des Vektors v.

Um die Bisektion dennoch anwenden zu können, muß sie geeignet modifiziert werden. Das gesamte Verfahren besteht aus fünf Teilen.

Teil 1: Berechnung eines geeigneten Startintervalles, das v^* enthält.

Teil 2: Bisektionsschritt.

Teil 3: Test, welche der drei Situationen vorliegt.

Teil 4: Falls Situation 3 vorliegt: einige Maximierungsschritte $v_n := Uv_{n-1}$ durchführen, bis Monotonie erreicht ist, d.h.

$v_n \geq v_{n-1}$ oder

$v_n \leq v_{n-1}$. Dann wird v_n der intervallteilende Vektor, denn es gilt entweder

a) $v_n > v_{n-1} \Rightarrow v^* > v_n \Rightarrow v^* \in [v_n;v^+]$

oder

b) $v_n < v_{n-1} \Rightarrow v^* < v_n \Rightarrow v^* \in [v^-;v_n]$.

Teil 5: Abbruchkriterium.

Diese Teile werden geeignet zu einem Algorithmus zusammengebunden. Wir formulieren ihn für die Standardsituation "Maximierungsproblem, alle $a_{ij} \leq 0$" .

Bisektionsverfahren und Dynamische Optimierung

1. Schritt: Starte mit $v_o \equiv 0$, ϵ_{abs}, $\epsilon_{rel} > 0$.

2. Schritt: Berechne $v := Uv_o$. Die maximierende Entscheidungsregel sei δ.

3. Schritt: Setze $v^+ := v$ (obere Grenze von v^*, da $Uv < v$).

4. Schritt: Berechne w_δ zu δ aus Schritt 2 durch Lösung des Gleichungssystems
$w_\delta = L(\delta, w_\delta)$.

5. Schritt: Abbruchkriterium:

a) prüfen, ob δ bereits optimal ist: berechne $\hat{v} := Uw_\delta$; falls δ auch hier wieder Maximierer, setze $v^* := \hat{v}$; $\delta^* := \delta$ und gehe nach 14.

b) falls $\| \hat{v} - w_\delta\|/\| \hat{v} \| < \epsilon_{rel}$, setze $v^* := \hat{v}$; $\delta^* := \delta$ und gehe nach 14.

6. Schritt: Setze $v^- := \hat{v}$ (untere Grenze von v^*).

7. Schritt: Bisektionsschritt: $v_B := (v^+ + v^-)/2$

8. Schritt: Abbruchkriterium: $\| v^+ - v^- \| < \epsilon_{abs}$?

ja: berechne Uv, um δ^* zu bekommen,
setze $v^* := Uv$; $\delta^* := \delta$ (Maximierer von Uv) und gehe

nach 14;

nein: gehe nach 9.

9. Schritt: Test, welche Situation vorliegt:

Berechne Tv (entspricht Uv mit evtl. Recheneinsparungen)

a) falls $Tv \geq v$, setze $v^- := v$ und gehe nach 7;

b) falls $Tv \leq v$, setze $v^+ := v$ und gehe nach 7;

c) falls $Tv \equiv v$, setze $v^* := Tv$ und gehe nach 14;

d) andernfalls gehe nach 10.

10. Schritt: Es liegt Situation 3 vor:

Berechne $\hat{v} := Uv$. Der Maximierer sei δ.

11. Schritt: Abbruchkriterium:

Falls $\| \hat{v} - v \| / \| \hat{v} \| < \epsilon_{rel}$, setze $v^* := \hat{v}$; $\delta^* := \delta$

und gehe nach 14.

12. Schritt: Test, ob Monotonie vorliegt:

a) falls $\hat{v} \geq v$, setze $v^- := \hat{v}$; $\delta^* := \delta$ und gehe nach 7;

b) falls $\hat{v} \leq v$, setze $v^+ := \hat{v}$; $\delta^* := \delta$ und gehe nach 7;

c) andernfalls gehe nach 13.

13. Schritt: Setze $v := \hat{v}$ und gehe nach 10.

14. Schritt: Stop.

Erläuterung zur Iteration Tv im 9. Schritt: Um auf die drei o.a. Situationen zu testen, kann man einen vollen Maximierungsschritt Uv durchführen und v mit Uv vergleichen. Um eine der Aussagen a) $v^* < v$; b) $v^* > v$; c) $v^* \lesseqgtr v$ zu treffen, ist aber nicht in jedem Fall ein voller Maximierungsschritt notwendig. Um z.B. auf $v^* > v$ zu testen, genügt es, wenn man eine Entscheidungsregel δ findet, die eine Verbesserung $L(\delta, v) > v$ bringt (beachte: Maximierungsproblem, deshalb die Verwendung von ">"), man muß nicht nach der besten suchen.

Ebenso genügt es zur Feststellung der Situation 3, wenn man nur zwei Komponenten i,j findet, bei denen $v_i < (Uv)_i$ und $v_j > (Uv)_j$ ist. Die restlichen Komponenten brauchen dann nicht mehr untersucht zu werden.

Man kann deshalb Tv auf folgende Weise definieren.

Iteration Tv:

Erste Komponente: berechne für die zulässigen Entscheidungen im Zustand 1 die Größe $l(d,1,v)$. Sobald für ein d $l(d,1,v) > v(1)$, gehe zur Berechnung der restlichen Komponenten.

Restliche Komponenten:

a) Es sei ein d gefunden worden, für welches $l(d,1,v) > v(1)$. Man kann dann in den übrigen Komponenten i die Berechnung abbrechen, sobald man jeweils ein d gefunden hat, so daß $l(d,i,v) > v(i)$. Existiert aber in einem Zustand $j > 1$ keine derartige Entscheidung, d.h. $\max_d l(d,j,v) < v(j)$, so folgt daraus sofort $Uv \lessgtr v$ (nicht vergleichbar) und man kann den Test abbrechen.

b) Es sei kein d gefunden worden, für welches $l(d,1,v) > v(1)$. Führe in den restlichen Komponenten den vollen Maximierungsschritt durch. Falls jedoch in einem Zustand $i > 1$ ein d gefunden wird, so daß $l(d,i,v) > v(i)$, dann folgt daraus sofort $Uv \lessgtr v$ und man kann den Test abbrechen.

Das obige Bisektionsverfahren in Kombination mit der Dynamischen Optimierung ist ein Basisalgorithmus, der zahlreiche Verfeinerungen erlaubt. Die numerischen Erfahrungen zeigen, daß diese Methode der Wert- und der Entscheidungsiteration weit überlegen ist.

Liegt jedoch eine ganz spezielle Problemstellung vor, so können Verfahren, die hierauf zugeschnitten sind, durchaus effektiv sein. Ein derartiges Verfahren wird im nächsten Paragraphen vorgestellt.

§51 BERECHNUNG OPTIMALER (s,S) - POLITIKEN NACH FEDERGRUEN/ZIPKIN

Die Methode von FEDERGRUEN/ZIPKIN (1984) zur Berechnung optimaler (s,S) - Politiken ist auf das nichtdiskontierte Standard - AHM - Modell im BACKORDER - Fall zugeschnitten. Die Verteilung von u liege in der Form $p_o, p_1, p_2, p_3, \ldots$ vor. Wir betrachten das Modell mit bereits eliminierten proportionalen Bestellkosten. Sei

$\hat{f}(y)$: Erwartungswert der Lagerungs- und Fehlmengenkosten einer Periode bei Anfangsbestand y

y: Anfangsbestand (vor einer evtl. Bestellung)

x: Anfangsbestand nach der Bestellung

x - y: Bestellmenge

δ: Bestellregel vom (s,S) - Typ

$$\delta(y) = \begin{cases} y, & \text{falls } s+1 \leq y \leq S \text{ ;} \\ S, & \text{falls } y \leq s; \end{cases}$$

δ^*: optimale Bestellregel

c_δ: Durchschnittskosten bei Bestellregel δ

c^*: minimale Durchschnittskosten

π_y^δ: stationäre Zustandswahrscheinlichkeit des Bestandes y bei Politik δ

F(x,y): Einperiodenkosten

k: fixe Bestellkosten

$$F(x,y) = \begin{cases} \hat{f}(y), & \text{falls } x = y; \\ k + \hat{f}(y), & \text{falls } x > y; \end{cases}$$

$$F_\delta(y) = F(\delta(y),y) \;.$$

Das Prinzip der Optimalität lautet in dieser Schreibweise

$$v(y) + c^* = F_\delta(y) + \sum_{u=o}^{\infty} v[\delta(y) - u]p_u \;, \tag{51.1}$$

für alle $y < S$. Per definitionem ist

$$v(S) = 0 \tag{51.2}$$

als Normierung. Will man die Funktionalgleichungen (51.1) lösen, muß man den Zustandsraum auf eine endliche Größe beschneiden, d.h. ein kleinstes $y = y_{min}$ zulassen, so daß $y_{min} \leq y \leq S$ ist. y_{min} wirkt als absorbierende Barriere. Entsprechend ist (51.1) abzuändern. Die Summation darf nur soweit laufen, bis $\delta(y) - u = y_{min}$ ist. Durch diese Beschneidung des Zustandsraumes wird eine Ungenauigkeit ins Modell hineingetragen.

Das Verfahren von FEDERGRUEN/ZIPKIN vermeidet sie. Es basiert nicht auf der rekursiven Auswertung der Funktionalgleichungen, sondern verfolgt den Bestandsverlauf, nachdem das Lager auf S aufgefüllt wurde. Wir definieren

$t(w)$: erwartete Zeit bis zur nächsten Bestellung, wenn der augenblickliche Bestand w Einheiten über dem Bestellpunkt s liegt, $w = y - s$, $w > 0$.

$\upsilon_s(y)$: erwartete Kosten bis zur nächsten Bestellung, wenn das Lager im Augenblick den Bestand y aufweist, $y > s$.

Die beiden Funktionen t und υ erfüllen die beiden Gleichungen

$$t(w) = 1 + \sum_{u=o}^{w-1} p_u t(w - u), \qquad w > 0 , \tag{51.3}$$

$$\upsilon_s(y) = \hat{f}(y) + \sum_{u=o}^{y-s-1} p_u \upsilon_s(y - u), \qquad y > s. \tag{51.4}$$

t ist unabhängig von der (s,S)-Politik und υ hängt bezüglich δ nur von s ab. Das Gleichungssystem (51.3) besitzt eine Dreiecksgestalt:

$$\begin{array}{lcl} t(1) - 1 & = & p_o t(1). \\ t(2) - 1 & = & p_o t(2) + p_1 t(1) \\ \vdots & & \qquad\qquad \ddots \\ t(w) - 1 & = & p_o t(w) + \cdots \quad + p_{w-1} t(1) . \end{array}$$

Dasselbe trifft auf das Gleichungssystem (51.4) zu. Startend mit w = 1 kann deshalb t, und startend mit y = s +1 kann auch υ_s sehr schnell berechnet werden. Der wesentliche Vorteil des Verfahrens liegt nun darin, daß man mit t und υ die Werte c_δ und $v_\delta(y)$ berechnen kann:

$$c_\delta = \frac{\upsilon_s(S) + k}{t(S - s)} \tag{51.5}$$

$$v_\delta(y) = \begin{cases} \upsilon_s(y) + k - c_\delta t(y - s), & \text{für} \quad y > 0 \\ k \qquad\qquad\qquad\qquad , & \text{für} \quad y \leq s \end{cases} \tag{51.6}$$

(51.5) sind genau die Zykluskosten $\upsilon_s(S) + k$ pro Zykluszeit. Die Gültigkeit von (51.5), (51.6) zeigt sich darin, daß diese Ausdrücke, eingesetzt in (51.1), (51.2), das Prinzip der Optimalität erfüllen. Mit (51.3) bis (51.6) läßt sich ein schnelles Verfahren der Politikiteration konstruieren.

1. Schritt: Initialisierung

Lege Schranken $\underline{s}$, $\underline{S}$, $\bar{S}$ für die Werte s, S fest.

$\underline{s}$: kleinste ganze Zahl, für die gilt: $\hat{f}(\underline{s}) \leq \hat{f}(\underline{S}) + k$;

$\underline{S}$: kleinste ganze Zahl, die $\hat{f}(y)$ minimiert;

$\bar{S}$: kleinste ganze Zahl, für die gilt: $\hat{f}(\bar{S}) \geq \hat{f}(\underline{S}) + k$;

(vgl. §42).

Setze $s_{alt} := S_{alt} := -1$.

Wähle eine Anfangspolitik $\delta = (s,S)$ und setze $s_{neu} := s$; $S_{neu} := S$.

Berechne die Funktion $t(w)$, $w = 1,2 \ldots, \bar{S} - \underline{s}$ aus (51.3).

2. Schritt: Berechnung der Wertfunktion

Falls sich s bei der letzten Iteration geändert hat ($s_{alt} \neq s_{neu}$):

Berechne $\upsilon_s(y)$, $y = s + 1,\ldots,U$ aus Gleichung (51.4).

Berechne c_δ und $v_\delta(y)$, $y = \underline{s},\ldots,\bar{S}$ aus Gleichung (51.5), (51.6).

3. Schritt: Politikverbesserung

a) Abspeicherung der alten Politik: $s_{alt} := s_{neu}$; $S_{alt} := S_{neu}$.

b) Berechne minimierendes S'; $\underline{S} \leq S' \leq \bar{S}$:

$$v_\delta(S') = \min_{\underline{S} \leq y \leq \bar{S}} v_\delta(y) .$$

$S_{neu} := S'$.

c) Suche nach einem besseren s:

c1) in aufsteigender Richtung: $s+1, s+2, \ldots, \bar{s}$;

falls sich im Zustand s+1 das Bestellen lohnt, d.h. falls

$$k + v_\delta(S') < v_\delta(s + 1) ,$$

suche solange in aufsteigender Richtung weiter, bis sich zum erstenmal eine Bestellung nicht lohnt. Sei dies beim Bestand η der Fall. Es muß also gelten

$$k + v_\delta(S') < v_\delta(y) \quad \text{für alle } y, \quad s < y \leq \eta - 1 .$$

Setze $s_{neu} := \eta - 1$.

Gehe zum Schritt 4.

c2) in absteigender Richtung: $s-1, s-2, \ldots, \underline{s}$;

falls sich im Zustand s-1 das Bestellen nicht lohnt, d.h. falls

$$\hat{f}(s-1) < c_\delta ,$$

suche solange in absteigender Richtung weiter, bis sich zum erstenmal eine Bestellung lohnt. Sei dies beim Bestand ξ der Fall. Es muß also gelten

$$\hat{f}(y) < c_\delta \quad \text{für alle } y, \quad \xi + 1 \leq y < s.$$

Setze $s_{neu} := \xi + 1$.

Gehe zum Schritt 4.

<u>4. Schritt:</u> Test auf Abbruch

Falls $\delta_{alt} = (s_{alt}, S_{alt}) \neq \delta_{neu} = (s_{neu}, S_{neu})$, setze $\delta_{neu} := \delta_{alt}$ und gehe zu Schritt 1. Falls $\delta_{alt} = \delta_{neu}$, dann gehe nach 5. δ_{neu} ist die optimale Politik.

<u>5. Schritt:</u> Stop.

Die Rechenzeiten bei allen in diesem Kapitel vorgestellten Verfahren (ausgenommen die Wertiteration) für Lagerhaltungsprobleme realistischer Größe liegen auf schnellen Personal Computern im Sekundenbereich.

SCHLUßBEMERKUNG

Die Lagerhaltungstheorie ist noch keineswegs abgeschlossen. Auch kann ein Buch nie auf Vollständigkeit hin zielen. Es bringt immer nur eine Auswahl, und diese ist notwendig subjektiv. Wir hoffen aber, die wichtigsten und typischen Ansätze vorgeführt zu haben, um den Leser dadurch zu eigenem Nachdenken anzuregen.

L I T E R A T U R V E R Z E I C H N I S

Bibliographien

Eine Bibliographie über Arbeiten vor 1953 ist enthalten in:
WHITIN, T.M.: The Theory of Inventory Management, Princeton 1953.

Für den Zeitraum 1953-55:
GOURARY, M., LEWIS, R., NEELAND, F.: An Inventory Control Bibliography. Naval Research Logistic Quarterly, 3(1955), 295-304.

Abstracts von englischsprachigen Arbeiten der Periode 1953-65 enthält:
EILON, S., LAMPKIN, W., Inventory Control Abstracts. Edinburgh-London 1968.

Eine Bibliographie stochastischer Lagerhaltungsmodelle bis 1967 findet man bei:
HOCHSTÄDTER, D.: Stochastische Lagerhaltungsmodelle. Lecture Notes in Operations Research and Mathematical Economics, Berlin 1968.

RICHARDS, F.R., MARSHALL, K.,T.: The OR/MS Index 1952-1976. A cumulative Index of Management Science 1-22, Operations Research 1-24, and Interfaces 1-6. The Institute for Management and Operations Research Society of America. Providence und Baltimore 1978.

Eine fortlaufende Sammlung von Abstracts bieten:
BRADLEY, H., (Hrsg.): International Abstracts in Operations Research. Amsterdam, und

ROSENTHAL, A. (Hrsg.): Operations Research/Management Science. International Literature Digest. Whippany, New Yersey.

Die aktuellste Biographie stammt von der International Society for Inventory Research (ISIR):
Attila Chikán (Hrsg.): Bibliography of Inventory Literature. ISIR Sekretariat Veres Pálné u. 36, Budapest, Hungary, H-1053, 1988.

Monographien

ARROW,K., KARLIN, J., SCARF, H.(ed): Studies in the Mathematical Theory of Inventory and Production. Stanford 1958.

BECKMANN, M.J.: Dynamic Programming of Economic Decisions. Heidelberg 1968.

BEMELMANS, R.: The Capacity Aspect of Inventories. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Berlin 1968.

BROWN, R.G.: Decision Rules for Inventory Management. New York 1967.

BUCHAN, J., KOENIGSBERG, E.: Scientific Inventory Management. Englewood Cliffs N.J. 1963.

BUFFA, E.: Production-inventory systems: planning and control. Homewood 1968.

HADLEY, G., WHITIN, T.M.: Analysis of Inventory Systems. Englewood Cliffs N.J. 1963.

HANSSMANN, F.: Operations Research in Production and Inventory Control. New York 1962.

HOCHSTÄDTER, D.: Stochastische Lagerhaltungsmodelle. Lecture Notes in Operations Research and Mathematical Economics, Berlin 1969.

HOLT, C.,C., MODIGLINAI, F., MUTH, J.F., SIMON, H.A.: Planning Production, Inventories and Work Force. Englewood Cliffs, N.J. 1960.

INDERFURTH, K.: Zur Güte linearer Entscheidungsregeln in Produktions-Lagerhaltungsmodellen. Opladen 1977.

KLEMM, H., GIRLICH, H.-J., (Hrsg.): Lagerhaltungsprozesse. Modellierung - Steuerung - Implementierung.

KLEMM, H., MIKUT, M.: Lagerhaltungsmodelle, Theorie und Anwendung. Berlin 1972.

KLINGST, A.: Optimale Lagerhaltung. Wann und wieviel bestellen? Würzburg 1971.

MAGEE, J.F., BOODMANN, D.: Production Planning and Inventory Control (2nd ed.), New York 1967.

NADDOR, E.: Lagerhaltungssysteme. Übersetzung aus dem Englischen von S. KIPPING und H. SCHODLOCK, Leipzig 1971.

POPP, W.: Einführung in die Theorie der Lagerhaltung. Lecture Notes in Operations Research and Mathematical Economics, Berlin 1968.

SCHNEEWEISS, CH.: Inventory Production Theory. A Linear Policy Approach. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems. Berlin 1978.

SCHNEEWEISS, CH.: Modellierung industrieller Lagerhaltungssysteme. Einführung und Fallstudien. Berlin 1981.

STARR, M., MILLER, D.: Inventory Control: Theory and Practice. Englewood Cliffs, N.J. 1962.

TERSINE, R.J.: Principles of Inventory and Materials Management. New York (2nd ed.) 1982.

TIJMS, H.C.: Analysis of (s,S) Inventory Models. Amsterdam 1972.

Bücher und Artikel

ALSCHER, J., KÜHN, M., SCHNEEWEISS, CH.: On the validity of reorderpoint inventory models for regular and sporadic demand. Engineering Costs and Production Economics 10 (1986), S. 43 ff.

ALTENSCHMIDT, W.: Produktion und Lagerhaltung. Aulendorf 1979.

ARROW, K.J., HARRIS, T., MARSCHAK, J.: Optimal Inventory Policy. Econometrica 19 (1951) 3, S. 250 ff.

AXSAETER, S., SCHNEEWEISS, Ch., SILVER, E. (Hrsg.): Multi-Stage Production Planning and Inventory Control. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Berlin 1986.

BAETGE, J.: Betriebswirtschaftliche Systemtheorie, Regelungstheoretische Planungs-Überwachungsmodelle für Produktion, Lagerung und Absatz. Opladen 1974.

BARTMANN, D.: A Method of Bisection for Discounted Markov Decision Problems. Zeitschrift für Operations Research 23 (1979), S. 275 ff.

BARTMANN, D.: Optimierung Markovscher Entscheidungsprozesse. Dissertation, TU München 1976.

BARTMANN, D.: Optimierung eines Zweiproduktlagers. In: Dathe, H. (Hrsg.), Proceedings in Operations Research 6. Würzburg-Wien 1976.

BECKMANN, M.J.: Production Smoothing and Inventory Control. Operations Research 9 (1961), S. 456-467.

BECKMANN, M.J., HOCHSTÄDTER, D.: Berechnung optimaler Entscheidungsregeln für die Lagerhaltung. Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik, 182 (1968), S. 106-123.

BELLMAN, R.: Dynamic Programming. Princeton N.J. 1957.

BERNOULLI, D.: Versuch einer neuen Theorie der Wertbestimmung von Glücksfällen. In: Pringsheim, A. (Hrsg.), Die Grundlagen der modernen Wertlehre, Leipzig 1896.

BLACKBURN, J.D., MILLEU, R.A.: A heuristic lot-sizing performance in a rolling-schedule environment. Decision Sciences 11 (1980), S. 691 ff.

BUEHLER, G.: Sicherheitsäquivalente und Informationsbedarf bei stochastischen dynamischen Produktions-Lagerhaltungs-Modellen. Frankfurt 1979.

CHANAL, S.: A note on dynamic lot sizing in a rolling-horizon environment. Decision Sciences 13 (1982) 1, S. 113 ff.

COLLATZ, L.: Funktionalanalysis und numerische Mathematik. Heidelberg 1968.

DE GROOT, M.H.: Optimal Statistical Decisions. New York 1970.

DE MATTEIS, J.J., MENDOZA, A.G.: An economic Lot-sizing Technique. IBM Systems Journal 7 (1968), S. 30 ff.

D'EPENOUX, F.: Sur un probleme de production et de stockage dans l'aléatoire. Revue Francaise de récherche operationnnelle (1960), S. 3-15.

D'EPENOUX, F.: A probabilistic Production and Inventory Problem. Management Science, Vol 10 (1963), S. 98-108.

FEDERGRUEN, A., und ZIPKIN, P.: An Efficient Algorithm for Computing Optimal (s,S) Policies. Operations Research 32 (1984) 6, S. 1268 ff.

GAL, T. (Hrsg.): Grundlagen des Operations Research. 3. Spieltheorie, Dynamische Optimierung, Lagerhaltung, Warteschlangentheorie, Simulation, Unscharfe Entscheidungen, Berlin 1987.

GRUBBSTRÖM, R.W.: Dynamical Aspects of Production Inventory Systems. Third International Symposium on Inventories, Budapest 1984.

HEINRICH, C.: Mehrstufige Losgrößenplanung in hierarchisch strukturierten Produktionsplanungssystemen. Heidelberg 1987.

HOCHSTÄDTER, D.: Neuere Entwicklung der stochastischen Lagerhaltungstheorie. In: Beckmann, M.J.(Hrsg.), Unternehmensforschung heute. Lecture Notes für Operations Research and Mathematical Systems, Berlin 1971.

HOWARD, A.R.: Dynamische Programmierung und Markov-Prozesse. Zürich 1965.

KNOLMAYER, G.: Ein Vergleich von 30 "praxisnahen" Lagerhaltungsheuristiken. In: Ohse, D. u.a. (Hrsg), Operations-Research-Proceedings 1984, Berlin 1985, S. 223 ff.

McQUEEN, J.B.: A Test for Suboptimal Actions in Markovian Decision Problems. Operations Research 15 (1987) 3, S. 559 ff.

MERTENS, P. (Hrsg.): Prognoserechnung. Würzburg-Wien 1978.

MEYER, M., HANSEN, K.: Mathematische Planungsverfahren II. Eine einführende und anwendungsorientierte Darstellung von Lagerhaltungs- und Warteschlangenmodellen. Essen 1975.

NEUMANN, K., (MORLOCK, M., WOLF, D.): Operations Research Verfahren. Band II: Dynamische Optimierung, Lagerhaltung, Simulation, Warteschlangen. München 1977.

OHSE, D.: Näherungsverfahren zur Bestimmung der wirtschaftlichen Bestellmenge bei schwankendem Bedarf. Elektronische Datenverarbeitung 12 (1970), S. 83 ff.

PREKOPA, A. (Hrsg.): Inventory Control and Water Storage. Amsterdam 1973.

RÉNYI, A.: Briefe über die Wahrscheinlichkeit. Basel 1969.

RYSHIKOW, J.I.: Lagerhaltung. In deutscher Sprache herausgegeben von M. Bliefernich. Berlin 1973.

SASIENI, M., JASPAN, A., FRIEDMAN, L.: Methoden und Probleme der Unternehmensforschung. Würzburg 1962.

SCARF, H.E., GILFORD, D.M., SHELLY, M.W. (Hrsg.): Multistage Inventory Models and Techniques. Stanford 1963.

SCARF, H.: The Optimality of (S,s) Policies in Dynamic Inventory Problems. In: Arrow, K., Karlin, Suppes, P. (Hrsg.), Mathematical Methods in the Social Sciences, 1959. Proceedings of the first Stanford Symposium. Stanford 1960, S. 196-202.

SCHÄL, M.: On the Optimality of (s,S)-Policies in Dynamic Inventory Models with Finite Horizon. Siam Journal of Applied Mathematics 30 (1976), S. 528 ff.

SCHLITTGEN, R., STREITBERG, B.: Zeitreihenanalyse. München-Wien 1984.

SCHNEEWEISS, CH.: Entscheidungskriterien bei Risiko. Heidelberg 1967.

SCHNEEWEISS, CH.: Optimal Production Smoothing and Safety Inventory. Management Science 20 (1974), S. 1122-1130.

SILVER, E.A., MEAL, H.C.: A Heuristic for Selecting Lot Size Quantities for the Case of a deterministic time-varying Demand Rate and discrete Opportunities for Replenishment. Production and Inventory Management 14 (1973) 2, S. 64 ff.

SILVER, E.A., MILTENBURG, J.: Two Modifications for the Silver-Meal Lot Sizing Heuristic. Infor 22 (1984) 1, S. 56 ff.

SIMON, H.: Dynamic Programming under Uncertainty with a Quadratic Criterion Function. Econometrica 24 (1956), S. 74-81.

VEINOTT, A.: On the Optimality of (s,S) Inventory Policies: New Conditions and a New Proof. Siam Journal of Applied Mahtematics 14 (1966) S. 1067-1083.

VEINOTT, A., WAGNER, H.: Computing Optimal (s,S) Inventory Policies. Management Science 11 (1965), S. 525-552.

WAGNER, H.M., WHITIN, T.M.: Dynamic Version of the Economic Lot Size Model. Management Science 5 (1958), S. 89 ff.