

Lokale Schnitttheorie
an nicht-archimedischen Stellen
für Produkte semistabiler Kurven



DISSERTATION

zur Erlangung des
Doktorgrades der Naturwissenschaften Dr. rer. nat.
der Naturwissenschaftlichen Fakultät I - Mathematik
der Universität Regensburg

vorgelegt von
Johannes Kolb aus **Regensburg**
im Januar 2013

Promotionsgesuch eingereicht am: 7. Januar 2013
Die Arbeit wurde angeleitet von: Professor Dr. Klaus Künemann

Inhaltsverzeichnis

0. Einleitung	1
1. Regulär strikt semistabile Schemata	7
2. Desingularisierung	17
2.1. Desingularisierung durch Aufblasung	17
2.2. Verzweigter Basiswechsel von Kurven	19
2.3. Singularitätenauflösung bei Produkten	23
2.4. Alternative Desingularisierung	33
3. Metrisierte Geradenbündel	37
3.1. Metriken auf Geradenbündeln	37
3.2. Die Reduktionsabbildung	41
3.3. Morphismen zwischen Modellen	46
4. Schnitzzahlen in Produktsituationen	49
4.1. Der Chowring regulärer Schemata	49
4.2. Der Chowring in der Produktsituation	60
4.3. Ein Movinglemma in der speziellen Faser	62
4.4. Die lokale Gradabbildung	68
4.5. Explizite Berechnung von $\mathcal{C}(I^d)$	69
4.6. Berechnung von $\mathcal{C}(I^2)$ und $\mathcal{C}(I^3)$	75
5. Limiten von Schnitzzahlen	79
5.1. Analysis auf simplizialen Reduktionsmengen	79
5.2. Die Schnittpaarung	89
6. Ein Dankeschön	101
A. Die Kategorie der Simplizialen Mengen	103
A.1. Partiell geordnete Mengen und simpliziale Mengen	103
A.2. Die geometrische Realisierung	106
A.3. Unterteilung einer simplizialen Menge	108
Literaturverzeichnis	113

0. Einleitung

In dieser Arbeit verallgemeinern wir eine Formel von Shou-Wu Zhang, die lokale arithmetische Schnitzzahlen von Cartierdivisoren mit Träger in der speziellen Faser einer Desingularisierung eines Produktes semistabiler arithmetischer Flächen mittels elementarer Analysis beschreibt. Es sei R ein diskreter Bewertungsring mit algebraisch abgeschlossenen Restklassenkörper k . Wir bezeichnen den Quotientenkörper $\text{Quot}(R)$ mit K und ein uniformisierendes Element mit $\pi \in R$. In dieser Einleitung und den meisten Kapiteln setzen wir des weiteren voraus, dass R ein vollständiger Bewertungsring ist und sich daher die Bewertung eindeutig auf algebraische Erweiterungen von K fortsetzen lässt. Weiter bezeichne S das Schema $\text{Spec } R$, und $\eta, s \in S$ dessen generischen bzw. speziellen Punkt. Wir betrachten regulär strikt semistabile Modelle von glatten K -Schemata in der Definition von De Jong ([dJ96, 2.16]). Dies sind Schemata, die étale lokal von der Form $\text{Spec } R[x_0, \dots, x_r]/(x_0 \cdots \cdot x_r - \pi)$ sind.

Im Folgenden sei mit $\text{CaDiv}_{X_s}(X)$ die Gruppe der Cartierdivisoren auf X mit Träger in der speziellen Faser X_s benannt. Die Schnitttheorie mit Träger [Ful98, Ch. 2] liefert ein Produkt

$$\left(\text{CaDiv}_{X_s}(X) \right)^p \rightarrow \text{CH}^{p-1}(X_s),$$

wobei CH^p den Chowring in Kodimension $p-1$ bezeichnet. Ist X/S eigentlich von Dimension $\dim(X) = d+1$, so existiert eine Gradabbildung $\text{ldeg} : \text{CH}^d(X_s) \rightarrow \mathbb{Z}$. Wir untersuchen eigentliche regulär strikt semistabile Schemata. Unser Interesse gilt der durch Schnittprodukt und Gradabbildung gegebene Paarung

$$(0.1) \quad \begin{aligned} \left(\text{CaDiv}_{X_s}(W) \right)^{d+1} &\rightarrow \mathbb{Z}, \\ (C_0, \dots, C_d) &\mapsto \text{ldeg}(C_0 \cdots \cdot C_d). \end{aligned}$$

Wir betrachten zunächst das einfachste Beispiel. Sei X ein regulär strikt semistabiles Modell einer glatten eigentlichen K -Kurve X_η . Nach dem Satz über semistabile Reduktion gibt es zu jeder glatten K -Kurve — evtl. nach endlichem Basiswechsel — ein regulär strikt semistabiles Modell. Mit dem dualen Graphen $\Gamma(X)$ bezeichnen wir den Graphen, dessen Ecken durch die irreduziblen Komponenten gegeben sind und der für jeden Schnittpunkt von Komponenten eine Kante zwischen den entsprechenden Ecken enthält. Mittels elementarer Schnitttheorie sieht man, dass die Paarung (0.1) vollständig durch $\Gamma(X)$ bestimmt ist. Alle Schnittprodukte zwischen Divisoren aus $\text{CaDiv}_{X_s}(X)$ lassen sich durch Abzählen bestimmter Kanten in $\Gamma(X)$ berechnen.

Für dieses Schnittverhalten kann man eine analytische Beschreibung finden: Dazu bemerken wir zunächst, dass die Gruppe der Cartierdivisoren $\text{CaDiv}_{X_s}(X)$ mit Träger in der speziellen Faser mit der freien abelschen Gruppe der Ecken aus $\Gamma(X)$ übereinstimmt. Ferner versehen wir den Reduktionsgraph $\Gamma(X)$ mit einer Metrik, die jeder Kante die Länge 1 gibt. Dadurch lassen sich Cartierdivisoren $C \in \text{CaDiv}_{X_s}(X)$ durch stetige Funktionen $f_C : |\Gamma(X)| \rightarrow \mathbb{R}$ beschreiben, die auf jeder Kante affin sind und an den Ecken Werte aus \mathbb{Z} annehmen. Die Menge aller stetigen, auf den Kanten affinen Funktionen $f : |\Gamma(X)| \rightarrow \mathbb{R}$ wird mit $\mathcal{C}_\Delta^{\text{lin}}(\Gamma(X))$ bezeichnet.

Die Schnittpaarung induziert folglich eine bilineare Paarung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{C}_\Delta^{\text{lin}}(\Gamma(X)) \times \mathcal{C}_\Delta^{\text{lin}}(\Gamma(X)) \rightarrow \mathbb{R},$$

die durch

$$\langle f_{C_1}, f_{C_2} \rangle = \text{ldeg}(C_1 \cdot C_2)$$

eindeutig bestimmt ist. Wir können diese Paarung schließlich analytisch beschreiben:

Fakt. *Es sei X eine eigentliche regulär strikt semistabile Kurve und $f_1, f_2 \in \mathcal{C}_\Delta^{\text{lin}}(\Gamma, \mathbb{Q})$. Dann gilt*

$$(0.2) \quad \langle f_1, f_2 \rangle = - \int_{\Gamma(X)} (D^1 f_1)(D^1 f_2).$$

Hierbei seien die Kanten von $\Gamma(X)$ jeweils mit einer beliebigen Orientierung versehen und D^1 bezeichnet die Ableitung der Funktion f in Richtung dieser Orientierung.

Da die Ableitungen $D^1 f$ auch für stückweise glatte Funktionen fast überall definiert sind, lässt sich die Paarung durch die Gleichung (0.2) auf eine Paarung von stückweise glatten Funktionen fortsetzen. Das Ziel unserer Arbeit ist, eine Verallgemeinerung dieser Beschreibung von lokalen Schnittzahlen für Cartierdivisoren mit Träger in der speziellen Faser für höherdimensionale Schemata zu finden.

Wir beschränken uns dabei auf K -Schemata, für die die Existenz einer semistabilen Modells leicht zu zeigen ist, nämlich für Produkte von glatten Kurven. Ist X_η eine glatte Kurve über K , so kann man mittels des Satzes über semistabile Reduktion ein semistabiles Modell X finden. Ein Modell von $(X_\eta)^d$ wird dann — eventuell nach Basiswechsel — durch das d -fache Faserprodukt $X \times_R \cdots \times_R X$ gegeben. Es ist im Allgemeinen nicht regulär strikt semistabil, lässt sich aber durch geeignete Aufblasungen zu einem regulär strikt semistabilen Schema W desingularisieren.

Analog zum Kurvenfall können wir die lokalen Schnittzahlen von Cartierdivisoren aus $\text{CaDiv}_{W_s}(W)$ im desingularisierten Modell W allein mit Hilfe kombinatorischen Daten bestimmen. Wir beschreiben diese kombinatorischen Daten in Form einer simplizialen Menge, der simplizialen Reduktionsmenge $\mathcal{R}(W)$.

Als Verallgemeinerung des Reduktionsgraphen nutzen wir die geometrische Realisierung der simplizialen Reduktionsmenge $|\mathcal{R}(W)| = |\Gamma(X)|^d$; dies ist ein lokal affiner Raum, der die kombinatorischen Daten von W_s in sich trägt. Ebenso wie im trivialen Fall lässt sich jedem Cartierdivisor $C \in \text{CaDiv}_{W_s}(W)$ mit Träger in W_s auf kanonische Weise eine stückweise affine Funktion

$$f_C : |\Gamma(X)|^d \rightarrow \mathbb{R}$$

zuordnen. Wir bezeichnen die Menge dieser stückweise affinen Funktionen mit $\mathcal{C}_\Delta^{\text{lin}}(\Gamma(X)^d)$. Die Schnittpaarung (0.1) induziert damit eine multilineare Paarung stückweise affiner Funktionen

$$\langle \cdot, \dots, \cdot \rangle : \left(\mathcal{C}_\Delta^{\text{lin}}(\mathcal{R}(W)) \right)^{d+1} \rightarrow \mathbb{R},$$

die durch $\langle f_{C_0}, \dots, f_{C_d} \rangle = \text{ldeg}(C_0 \cdots \cdots C_d)$ eindeutig bestimmt ist.

Durch Approximation können wir die Paarung $\langle \cdot, \dots, \cdot \rangle$ auf die Menge der stückweise glatten Funktionen, $\mathcal{C}_\Delta^\infty(\Gamma(X)^d)$, fortsetzen und erhalten in dieser Arbeit eine analytische Formel für die lokalen Schnittzahlen, sofern eine nur von der Dimension d abhängige Konvergenzbedingung (vgl. Definition 5.29) erfüllt ist. Eine explizite Berechnung von Schnittzahlen zeigt, dass diese Konvergenzbedingung insbesondere für $d = 2$ und $d = 3$ erfüllt ist.

Satz 5.30. *Seien $f_0, \dots, f_d \in \mathcal{C}_\Delta^\infty(\Gamma(X)^d)$ und $f_i^{(n)}$ die Standardapproximation durch stückweise affine Funktionen $f_i^{(n)} \in \mathcal{C}_\Delta^\infty((\Gamma(X)_n)^d)$. Falls d die Konvergenzbedingung erfüllt, so existiert der Grenzwert*

$$\langle f_0, \dots, f_d \rangle := \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_0^{(n)}, \dots, f_d^{(n)} \rangle_{W,n}$$

und berechnet sich zu

$$(0.3) \quad \langle f_0, \dots, f_d \rangle = \sum_{\mathcal{P} \text{ Partition}} \frac{1}{2^{d+|\mathcal{P}|}} \sum_{\substack{v_0, \dots, v_d \in \mathbb{F}_2^d, \\ \sum \alpha(v_i, \mathcal{P}) = d+|\mathcal{P}|}} \text{ldeg}_{I^d} \left(\prod_{i=0}^d F_{v_i} \right) \int_{\Delta_{\mathcal{P}}} \prod_{i=0}^d D_{\alpha(v_i, \mathcal{P})}^{v_i}(f_i).$$

Die Terme $D_{\alpha(v_i, \mathcal{P})}^{v_i}(f_i)$ sind dabei elementare analytische Ausdrücke in den Funktionen f_i . Die Koeffizienten vor den Integralen $\text{ldeg}_{I^d} \left(\prod_i F_{v_i} \right)$ sind unabhängig von X und lassen sich mittels Kombinatorik berechnen: Es bezeichne dazu \bar{L} das S -Schema

$$(0.4) \quad \bar{L} = \text{Proj } R[x_1, x_2, t]/(x_1 x_2 - t^2 \pi).$$

Da es regulär strikt semistabil ist, können wir das Produkt $(\bar{L})^d$ wie oben erklärt desingularisieren und erhalten ein regulär strikt semistabiles S -Schema \bar{M} von Dimension $d + 1$. Die Koeffizienten $\text{ldeg}_{I^d} \left(\prod_i F_{v_i} \right)$ definieren wir schließlich als lokale Schnittprodukte bestimmter Divisoren F_{v_i} auf dem Schema \bar{M} .

Im Fall $d = 2$ wurde Satz 5.30 für eine Variante unserer Desingularisierung in [Zha10, Prop 3.3.1, Prop 3.4.1] bewiesen. Unser Beweis folgt in wesentlichen Teilen dem Beweis von Zhang. Aufbauend auf seinen Grundideen erweitern und modifizieren wir die Beweisführungen allerdings in gewissen Punkten, um eine leichtere Verallgemeinerung auf höhere Dimensionen zu ermöglichen. So wird zur Desingularisierung des Produktmodells X^d das Verfahren von Gross-Schoen [Gro95] benutzt. Während dieses Verfahren für die Bestimmung der speziellen Faser etwas mehr technischen Aufwand erfordert, hat das entstehende Modell eine übersichtlichere Struktur.

Die von Zhang implizit verwendete lokale Berechenbarkeit der Schnittzahlen wird von uns explizit für $d \geq 2$ bewiesen. Dazu reduzieren wir das Problem mittels eines Moving-Lemmas auf den Fall eigentlicher Schnitte und für diese ist die lokale Berechenbarkeit klar. Sie kann mithilfe des einfachen von der Kurve X unabhängigen Standardschemas (0.4) erfolgen.

Zur Herleitung von Satz 5.30 müssen in diesem Standardschema Schnittzahlen zwischen Divisoren zu gewissen Eckpunkten von $\Gamma(X)^d$ berechnet werden. Die Eckpunkte dienen als Stützstellen für die Approximation der stückweise glatten Funktionen $f_0, \dots, f_d \in \mathcal{C}_\Delta^\infty(\Gamma(X)^d)$ aus (0.3). Um den Grenzwert in Satz 5.30 zu erhalten, ist bei Zhang eine aufwändige analytische Betrachtung nötig. In der resultierenden Formel tauchen die eingangs berechneten Schnittzahlen nicht mehr direkt auf, was eine Verallgemeinerung der Formel erschwert. Uns gelingt eine Vereinfachung, indem wir vor Berechnung der Schnittzahlen eine Fouriertransformation anwenden. Damit tauchen bei der Berechnungen die Fouriertransformierten $\mathcal{F}(f_i)$ der Funktionen f_i auf. Ein elementares Argument zeigt schließlich, dass diese im Limes gegen die verallgemeinerten Ableitungen $D_y^x(f)$ konvergieren.

Im Gegensatz zu Zhang können wir auf diese Art auch die Vorfaktoren zu den Integralen direkt als Schnittzahlen $\text{ldeg}(F_{v_0} \cdot \dots \cdot F_{v_d})$ von bestimmten Divisoren F_v in der Standardsituation I^d bestimmen.

Da sich speziell für den Fall $d = 3$ die benötigten Schnittzahlen der F_v vollständig berechnen lassen, kann man zumindest für die Paarung glatter Funktionen auch eine explizitere Beschreibung angeben:

Satz 5.34. *Es seien $f_0, \dots, f_3 \in \mathcal{C}_\square^\infty(\Gamma^3)$ auf den Quadraten glatte Funktionen. Dann existiert für die Standardapproximationen $f_i^{(n)}$ der Grenzwert der Vierfachpaarung $\langle f_0, f_1, f_2, f_3 \rangle$ und es gilt*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_0^{(n)}, \dots, f_3^{(n)} \rangle = \int_{\Gamma^3} \sum_{\substack{v_0, v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{F}_2 \\ \{v_0, v_1, v_2, v_3\} \in B}} \prod_{i=0}^d D_{|v_i|}^{v_i}(f_i),$$

mit der Menge $B \subset \mathcal{P}(\mathbb{F}_2^3)$ definiert als

$$B := \left\{ \begin{array}{l} \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 1)\}, \\ \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}, \\ \{(1, 0, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}, \\ \{(0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 1)\} \end{array} \right\}.$$

Diese Betrachtungen können als ein erster Schritt zur analytischen Beschreibung von lokalen arithmetischen Schnittzahlen der Arakelovtheorie an den nichtarchimedischen Stellen gesehen werden. Für diese Interpretation von Satz 5.30 sollte man die Funktionen $f \in \mathcal{C}_\Delta^\infty(\mathcal{R}(W))$ als Funktionen auf $(X_\eta)^{\text{an}}$, der Analytifizierung von X_η nach Berkovich, auffassen. Dies ist möglich, da die geometrische Realisierung von $\mathcal{R}(W)$ mit dem von Berkovich definierten Skelett von $(X_\eta)^{\text{an}}$ übereinstimmt und $(W_\eta)^{\text{an}}$ nach [Ber99] auf das Skelett kontrahiert werden kann.

Es folgt ein Überblick über die einzelnen Kapitel. Wir beginnen in Kapitel 1 mit der Definition und wesentlichen Eigenschaften von regulär strikt semistabilen S -Schemata. Anschließend wird die simpliziale Reduktionsmenge eines regulär strikt semistabilen S -Schemas definiert und ihr funktorielles Verhalten beschrieben. Im Folgenden sei stets X eine regulär strikt semistabile S -Kurve.

In Kapitel 2 wiederholen wir Standardverfahren zur Desingularisierung von Modellen. Zunächst betrachten wir eine endliche Körpererweiterung K_n von K vom Grad n . Dann ist K_n/K rein verzweigt vom Grad n ; wir bezeichnen mit R_n den ganzen Abschluss von R in K_n und mit S_n dessen Spektrum $S_n := \text{Spec } R_n$. Wir beschreiben, wie durch geeignete Aufblasungen aus $X \otimes_S S_n$ ein regulär strikt semistabiles Schema gebildet werden kann. Anschließend erklären wir das Desingularisierungsverfahren von Gross-Schoen für das Produkt X^d . Wir gehen dabei in beiden Fällen genauer auf das Verhalten der Reduktionsmengen ein.

In Kapitel 3 wiederholen wir die Reduktionsabbildung

$$\text{Red} : W(\bar{K}) \rightarrow |\mathcal{R}(W)|,$$

die eine Abbildung von den geometrischen Punkten von W_η in die geometrische Realisierung $|\mathcal{R}(W)|$ der simplizialen Reduktionsmenge $\mathcal{R}(W)$ liefert. Mittels dieser Abbildung definieren wir eine Bijektion

$$\text{CaDiv}_{W_s}(W)_\mathbb{Q} \rightarrow \mathcal{C}_\Delta^{\text{lin}}(\mathcal{R}(W), \mathbb{Q})$$

zwischen Cartierdivisoren mit \mathbb{Q} -Koeffizienten auf W mit Träger in der speziellen Faser und stückweise affinen Funktionen auf $|\mathcal{R}(W)|$, die an den Eckpunkten Werte in \mathbb{Q} annehmen.

In Kapitel 4 untersuchen wir den Chowring von W . Wir zeigen ein Moving-Lemma für Produkte von Divisoren aus $\text{CaDiv}_{W_s}(W)$ und präzisieren das oben angegebene Verfahren zur lokalen Berechnung der Schnittzahlen. Schließlich berechnen wir für $d = 2$ und $d = 3$ die in der Formel (0.3) benötigten Schnittzahlen.

In Kapitel 5 betreiben wir Analysis auf simplizialen Reduktionsmengen. Wir zeigen, dass das Schnittprodukt eine Paarung auf den stückweise affinen Funktionen $\mathcal{C}_\Delta^{\text{lin}}(\mathcal{R}(W))$ induziert und erweitern diese Paarung mittels geeignet verzweigtem Basiswechsel auf stückweise affine Funktionen in einer verfeinerten Unterteilung $\mathcal{C}_\Delta^{\text{lin}}(\mathcal{R}(W_n))$.

Wir erklären die Konvergenzbedingung und weisen nach, dass sie im Falle $d = 2$ und $d = 3$ erfüllt ist. Hierfür ist es erforderlich, sämtliche Schnittzahlen

$$\text{ldeg}(F_{v_0} \cdot \dots \cdot F_{v_d})$$

für $v_0, \dots, v_d \in \mathbb{F}_2^d$ zu berechnen. Diese Berechnungen lassen sich nach Kapitel 4 für beliebiges d in einer kombinatorischen Version des Chowrings explizit berechnen. Dieser Chowring erscheint jedoch zu kompliziert, um für $d \geq 4$ die Konvergenzbedingung mit vertretbarem Aufwand elementar zu verifizieren.

Durch Bildung einer Standardapproximation mittels verzweigtem Basiswechsel können wir dieses Schnittprodukt schließlich auf beliebige stückweise glatte Funktionen erweitern und die analytische Beschreibung in Satz 5.30 beweisen. Wir vergleichen schließlich Satz 5.30 im Falle $d = 2$ mit dem Ergebnis von Zhang und leiten für $d = 3$ die konkretere Formulierung Satz 5.34 her.

1. Regulär strikt semistabile Schemata

Dieses Kapitel ist einer kurzen Beschreibung von regulär strikt semistabilen Modellen gewidmet. Auf diesen Modellen kann man aufgrund der Regularität mit der Theorie von Gillet-Soulé ein Schnittprodukt sowie eine Gradabbildung finden. Eine kombinatorische Beschreibung der speziellen Faser ermöglicht uns, Schnittzahlen zwischen irreduziblen Komponenten der speziellen Faser zu berechnen. Während diese kombinatorische Struktur bei Kurven durch den Reduktionsgraphen beschrieben wird, definieren wir im Folgenden eine naheliegende Verallgemeinerung, die *simpliziale Reduktionsmenge*.

Es bezeichne R einen diskreten Bewertungsring mit algebraisch abgeschlossenem Restklassenkörper k . Das Schema $S := \text{Spec } R$ besteht aus dem generischen Punkt η sowie dem speziellen Punkt s . Ein Uniformisierer von R sei ferner mit π bezeichnet. Unter einer S -Varietät werde hier stets ein integres Schema verstanden, das separiert, flach und von endlichem Typ über S ist.

Zu einem Schema X bezeichnen wir mit $X^{(q)}$ die Menge der Punkte von Kodimension q . Dadurch erhält man insbesondere die irreduziblen Komponenten als $X^{(0)} := \{p \in X \mid \dim \mathcal{O}_{X,p} = 0\}$.

Definition 1.1. [dJ96, 2.16] Es sei $S := \text{Spec } R$ das Spektrum eines diskreten Bewertungsrings R mit algebraisch abgeschlossenem Restklassenkörper k . Sei X ein integres, flaches separiertes S -Schema von endlichem Typ. Dann heißt X *regulär strikt semistabil*, wenn folgende Eigenschaften gelten:

- (i) Die generische Faser X_η ist glatt,
- (ii) die spezielle Faser X_s ist reduziert,
- (iii) jede irreduzible Komponente C von X_s ist ein Cartierdivisor auf X , und
- (iv) für jede endliche Menge C_1, \dots, C_m von paarweise verschiedenen Komponenten der speziellen Faser X_s ist der schematheoretische Schnitt $C_1 \cap \dots \cap C_m$ entweder glatt über k von Kodimension m oder leer.

Eine regulär strikt semistabile S -Varietät von Dimension 2 hat relative Dimension 1 über S und wird daher als *regulär strikt semistabile Kurve über S* bezeichnet.

Bemerkung 1.2. Da in Definition 1.1 alle definierenden Eigenschaften lokal auf X sind, ist eine S -Varietät X bereits regulär strikt semistabil, wenn sie von regulär strikt semistabilen S -Varietäten offen überdeckt wird.

Beispiel 1.3. Das affine Schema $\text{Spec } R[x_0, \dots, x_n]/(x_0 \cdots \cdots x_n - \pi)$ ist eine regulär strikt semistabile S -Varietät.

Der folgende Satz von Hartl [Har01, Prop. 1.3] zeigt, dass lokal bereits jede semistabile S -Varietät von dieser Form ist:

Satz 1.4. Eine S -Varietät X ist genau dann regulär strikt semistabil, wenn die generische Faser glatt ist und für jeden abgeschlossenen Punkt $x \in X_s$ der speziellen Faser eine offene Umgebung U von x in X , eine Zahl $m \in \mathbb{N}$ sowie ein glatter Morphismus

$$f : U \rightarrow L_m := \text{Spec } R[x_0, \dots, x_m]/(x_0 \cdots \cdots x_m - \pi)$$

existiert. Der Morphismus kann dabei so gewählt werden, dass x auf den „Nullpunkt“, also den durch das Ideal (x_0, \dots, x_m) gegebenen Punkt p_0 , abgebildet wird.

Diese Charakterisierung werden wir im Folgenden oft in Form der folgenden einfachen Korollare verwenden:

Korollar 1.5. Ist $f : X \rightarrow Y$ ein glatter Morphismus von S -Varietäten und Y regulär strikt semistabil, so ist auch X regulär strikt semistabil.

Korollar 1.6. Für eine regulär strikt semistabile S -Kurve X gilt: Jeder abgeschlossene Punkt $x \in X_s$ ist entweder glatt oder besitzt eine offene Umgebung U zusammen mit einer étalen Abbildung

$$U \rightarrow \text{Spec } R[x_0, x_1]/(x_0 x_1 - \pi).$$

Beweis. Nach Satz 1.4 gibt es einen glatten Morphismus

$$f : U \rightarrow \text{Spec } R[x_0, \dots, x_m]/(x_0 \cdots \cdots x_m - \pi)$$

einer offenen Umgebung U des Punktes x ; aus Dimensionsgründen ist lediglich $m = 0$ und $m = 1$ möglich.

Im Falle $m = 0$ folgt sofort, dass U glatt über S ist. Im Falle $m = 1$ hat der glatte Morphismus f bereits relative Dimension 0, ist also étale. \square

Aufgrund von Korollar 1.6 können wir für étale lokale Betrachtungen um einen Doppelpunkt stets das Modellschema $L = L_1 := \text{Spec } R[x_0, x_1]/(x_0 x_1 - \pi)$ heranziehen. Die spezielle Faser dieses Schemas besteht aus zwei Komponenten, die sich eigentlich schneiden. Ihr einziger Schnittpunkt ist der „Nullpunkt“ $p_0 \in L$, beschrieben durch das Maximalideal (x_0, x_1) .

Diese lokale Beschreibung von regulär strikt semistabilen Kurven ermöglicht außerdem einen Vergleich mit der Definition einer semistabilen Kurve aus [Bos90, 9.2.6]:

Bemerkung 1.7. Es sei S das Spektrum eines diskreten Bewertungsringes mit algebraisch abgeschlossenem Restklassenkörper und X ein flaches eigentliches S -Schema. Dann ist X genau dann eine regulär strikt semistabile Kurve über S im Sinne von Definition 1.1, wenn X_s ein eindimensionales, reduziertes, zusammenhängendes k -Schema mit gewöhnlichen Doppelpunkten als Singularitäten ist und zusätzlich das gesamte Schema X sowie jede irreduzible Komponente von X_s regulär ist.

Beweis. Sei X ein Schema, das die Bedingungen aus Definition 1.1 erfüllt. Nach Definition 1.1(iii) ist jede irreduzible Komponente von X_s glatt über k , also insbesondere regulär. Sei $p \in X_s$ ein singulärer Punkt der speziellen Faser, dann gibt es nach Korollar 1.6 eine Umgebung $U \subseteq X$ von x mit étalem Morphismus $f : U \rightarrow L$; der Punkt p ist folglich ein gewöhnlicher Doppelpunkt. Um zu zeigen, dass auch X regulär ist, benutzen wir nochmals die lokale Charakterisierung aus Korollar 1.6 und die Glattheit von L . Sei $x \in X$ ein beliebiger Punkt aus X , dann gibt es nach dem Bewertungskriterium für Eigentlichkeit einen abgeschlossenen Punkt $x' \in X_s$ derart, dass x in x' spezialisiert. Da das Schema L regulär ist, gibt es nach Korollar 1.6 eine reguläre offene Umgebung von x' und damit auch von x . Das Schema X ist folglich regulär.

Seien umgekehrt X und jede irreduzible Komponente von X_s regulär und die spezielle Faser X_s ein eindimensionales, reduziertes, zusammenhängendes k -Schema mit gewöhnlichen Doppelpunkten. Da X regulär ist, sind die irreduziblen Komponenten von X_s Cartierdivisoren. Diese Komponenten sind ferner nach Voraussetzung reguläre k -Schemata über dem algebraisch abgeschlossenen Körper k und daher glatte k -Schemata. Da sich zwei dieser Komponenten in gewöhnlichen Doppelpunkten schneiden und dieser Schnitt folglich transversal erfolgt (vgl. [Liu02, 10.3.11]), ist auch ihr schematheoretischer Schnitt glatt. Da das Schema X eigentlich ist und somit jeder Punkt von X in einen Punkt der speziellen Faser spezialisiert, folgt die Regularität von X aus einer verfeinerten Form von Satz 1.4, siehe hierzu [Har01, Prop 1.3, Remark 1.1.2]. \square

Bemerkung 1.8. Es sei K ein vollständig bewerteter Körper und X_η eine glatte, eigentliche und geometrisch zusammenhängende Kurve über K . Nach dem Satz über die semistabile Reduktion [Bos90, Thm 9.2.7] gibt es eine endliche Erweiterung K'/K derart, dass für den Basiswechsel $X_\eta \otimes_{\text{Spec } K} \text{Spec } K'$ ein semistabiles Modell X über dem diskreten Bewertungsring R' , dem ganzen Abschluss von R in K' , existiert. Durch die Betrachtung einer zusätzlichen verzweigten Basiserweiterung R''/R' können wir sogar ein strikt semistabiles Modell erhalten; dieses lässt sich schließlich durch Aufblasungen in Punkten desingularisieren, sodass wir schließlich ein reguläres strikt semistabiles Modell X'' der Kurve $X''_\eta := X_\eta \otimes_{\text{Spec } K} \text{Spec } K''$ erhalten. Beide Verfahren funktionieren ähnlich dem in Algorithmus 2.4 beschriebenen Basiswechsel (vgl. auch [Har01, Example 1.1.3]).

Wir betrachten jetzt wieder ein beliebiges regulär strikt semistabiles Schema X . Paarweise verschiedene Komponenten der speziellen Faser X_s schneiden sich nach

Definition 1.1(iv) eigentlich und wir zeigen in Proposition 4.18, dass dieser Schnitt stets mit Vielfachheit 1 (im Sinne der Schnitttheorie) erfolgt. Daher erwarten wir, aus der Kenntnis, welche Komponenten sich schneiden, bereits Aussagen über Chowgruppen machen zu können, dass ein wesentlicher Teil der Chowgruppe also durch die Kombinatorik der speziellen Faser bestimmt wird. Konkret lässt sich diese Kombinatorik durch eine simpliziale Menge beschreiben, die *simplizialen Reduktionsmenge*.

Um ein besseres funktorielles Verhalten zu erhalten, ist es zur Definition der simplizialen Reduktionsmenge nötig, auf der Menge $X_s^{(0)}$ der Komponenten der speziellen Faser eine Totalordnung zu wählen, also eine transitive, antisymmetrische und reflexive Relation \leq , so dass für je zwei Elemente $C_1, C_2 \in X_s^{(0)}$ mindestens eine der Relationen $C_1 \leq C_2$, $C_2 \leq C_1$ erfüllt ist. Mit $[n]$ wird wie üblich die Menge $\{0, \dots, n\}$ mit der natürlichen Totalordnung bezeichnet und mit Δ die simpliziale Kategorie, d.h. die Kategorie die als Objekte alle $[n]$ für $n \in \mathbb{N}$ enthält und als Morphismen $[n] \rightarrow [m]$ alle monoton steigenden Abbildungen. Die exakten Definitionen und Aussagen zu partiellen Ordnungen, der simplizialen Kategorie und simplizialen Mengen finden sich in Anhang A.

Definition 1.9. Sei X ein regulär strikt semistabiles Schema über S und \leq eine Totalordnung auf $X_s^{(0)}$, den Komponenten der speziellen Faser von X . Zu einem Morphismus geordneter Mengen, d.h. einer monoton steigenden Funktion $\beta : [n] \rightarrow X_s^{(0)}$ bezeichne

$$[\beta] := \beta(0) \cap \dots \cap \beta(n)$$

den schematheoretischen Schnitt der Komponenten $\beta(0), \dots, \beta(n)$ und $[\beta]^{(0)}$ die Menge der irreduziblen Komponenten in $[\beta]$.

Bemerkung 1.10. Seien X, \leq wie oben, $\beta : [m] \rightarrow X_s^{(0)}$ ein Morphismus geordneter Mengen und $f : [n] \rightarrow [m]$ ein Morphismus der simplizialen Kategorie Δ . Es gilt

$$[\beta] \subseteq [\beta \circ f].$$

Da für regulär strikt semistabile Schemata $[\beta]$ glatt über k ist, sind die irreduziblen Komponenten $[\beta]^{(0)}$ bereits Zusammenhangskomponenten ([Liu02, Cor 4.2.17]) und daher existiert ein kanonischer Morphismus

$$(1.1) \quad f_\beta : [\beta]^{(0)} \rightarrow [\beta \circ f]^{(0)},$$

der jeden Punkt aus $[\beta]^{(0)}$ auf die ihn enthaltende Zusammenhangskomponente aus $[\beta \circ f]$ abbildet.

Definition 1.11. Sei X ein regulär strikt semistabiles Schema über S und \leq eine Totalordnung auf $X_s^{(0)}$, den Komponenten der speziellen Faser von X . Die *simpliziale Reduktionsmenge* von X ist die simpliziale Menge $\mathcal{R}(X) : \Delta \rightarrow \text{Set}$, definiert für Objekte $[n] \in \Delta$ durch

$$\mathcal{R}(X)_n := \mathcal{R}(X)([n]) := \coprod_{\beta \in \text{hom}([n], X_s^{(0)})} [\beta]^{(0)}$$

und für Morphismen $f : [n] \rightarrow [m]$ durch

$$\mathcal{R}(X)(f) = \left[\coprod_{\beta \in \text{hom}([m], X_s^{(0)})} f_\beta \right] : \mathcal{R}(X)_m \rightarrow \mathcal{R}(X)_n$$

mit f_β aus (1.1).

Gilt darüberhinaus $\dim(X) = 2$, ist also X eine S -Kurve, so wird $\mathcal{R}(X)$ auch *geordneter Reduktionsgraph* genannt und mit $\Gamma(X)$ bezeichnet.

Bemerkung 1.12. Es wäre vielleicht naheliegender, statt der simplizialen Reduktionsmenge einen simplizialen Komplex zu definieren ([Wei94, Example 8.1.8]), da dazu keine Ordnung auf den Komponenten der speziellen Faser gewählt werden muss. Da jedoch für simpliziale Komplexe keine gute Definition eines Produktes möglich ist, sind diese für uns ungeeignet.

Eine simpliziale Menge lässt sich besonders leicht beschreiben, wenn jeder Simplex durch seine Eckpunkte bestimmt ist. Wir bezeichnen diese als *simpliziale Menge ohne Mehrfachsimplices* (vgl. Definition A.12). Ob die simpliziale Reduktionsmenge eine simpliziale Menge ohne Mehrfachsimplices ist, lässt sich durch das folgende Kriterium beschreiben.

Proposition 1.13. *Es sei X ein regulär strikt semistabiles S -Schema mit einer Totalordnung \leq auf $X_s^{(0)}$. Dann ist die simpliziale Reduktionsmenge $\mathcal{R}(X)$ genau dann frei von Mehrfachsimplices, wenn für jede endliche Menge $\{C_1, \dots, C_k\}$ von Komponenten von X_s der Durchschnitt $C_1 \cap \dots \cap C_k$ zusammenhängend ist.*

Ist dies der Fall, so gibt es eine kanonische Bijektion

$$(1.2) \quad \mathcal{R}(X)_k \simeq \{C_0 \leq \dots \leq C_k \mid C_0, \dots, C_k \in \mathcal{R}(X)_0, C_0 \cap \dots \cap C_d \neq \emptyset\}$$

zwischen den k -Simplices und aufsteigenden Ketten von Komponenten in $(X_s)^{(0)}$, die nichtleeren Schnitt aufweisen.

Beweis. Nur für diesen Beweis benutzen wir die Bezeichnung aus Definition A.12 und verstehen für $0 \leq i \leq k$ unter $s_{k,i}$ den durch

$$s_{k,i} : [0] \rightarrow [k], 0 \mapsto i$$

gegebenen Morphismus in der simplizialen Kategorie. Bei der Frage nach Mehrfachsimplices haben wir für einen beliebigen k -Simplex seine Bilder unter den Randabbildungen $s_{k,0}, \dots, s_{k,k}$ zu betrachten. Ist ein k -Simplex durch ein Paar (β, p) mit $\beta : [k] \rightarrow X_s^{(0)}, p \in [\beta]^{(0)}$ wie in Definition 1.11 gegeben, so gilt

$$(1.3) \quad \mathcal{R}(X)(s_{k,i})(\beta, p) = \beta(i).$$

Ist für jede Menge $\{C_1, \dots, C_k\}$ von Komponenten von X_s der Durchschnitt $C_1 \cap \dots \cap C_k$ zusammenhängend, so ist für jeden Morphismus geordneter Mengen

$\beta : [k] \rightarrow X_s^{(0)}$ das nach Definition 1.9 zugeordnete Schema $[\beta]$ irreduzibel. Jeder k -Simplex ist daher bereits durch $\beta : [k] \rightarrow X_s^{(0)}$ eindeutig bestimmt, d.h. durch eine aufsteigende Kette wie in (1.2). Wie man direkt aus der Definition erkennt, ist ein k -Simplex (β, p) genau dann nichtausgeartet, wenn β eine streng monoton steigende Funktion ist. Da streng monoton steigende Funktionen durch ihre Bildmenge $\beta([k])$ eindeutig bestimmt sind, folgt mit (1.3) die Behauptung.

Falls umgekehrt $\mathcal{R}(X)$ Mehrfachsimplices enthält, so gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ und zwei verschiedene nichtausgeartete k -Simplices mit

$$(1.4) \quad \mathcal{R}(X)(s_{k,i})(\beta, p) = \mathcal{R}(X)(s_{k,i})(\beta', p')$$

für alle $0 \leq i \leq k$. Aus Gleichung (1.4) folgt sofort $\beta = \beta'$ und daher $p \neq p'$. Daher besteht $[\beta]^{(0)}$ aus mindestens zwei Punkten, $[\beta]$ ist daher nicht zusammenhängend. \square

Bemerkung 1.14. Im Folgenden werden wir uns meist auf regulär strikt semistabile Schemata mit Reduktionsmenge ohne Mehrfachsimplices beschränken, da wir dann über Proposition 1.13 eine bequeme Beschreibung der simplizialen Reduktionsmenge erhalten. Zumindest für Kurven stellt dies keine wesentliche Einschränkung dar: Durch verzweigten Basiswechsel $S_n \rightarrow S$ von Grad $n \geq 2$ und anschließender Desingularisierung erhält man aus jeder regulär strikt semistabilen Kurve über S eine regulär strikt semistabile Kurve über S_n mit simplizialer Reduktionsmenge ohne Mehrfachsimplices. Dieser Prozess wird in Kapitel 2 genauer beschrieben.

Beispiel 1.15. Das affine S -Schema $L_m := \text{Spec } R[x_0, \dots, x_m]/(x_0 \cdots \cdot \cdot x_n - \pi)$ aus Beispiel 1.3 ist regulär strikt semistabil mit simplizialer Reduktionsmenge ohne Mehrfachsimplices. Die Komponenten der speziellen Faser von L_m sind gerade durch die Hauptideale (x_i) ($i=0, \dots, m$) gegeben. Wir versehen sie mit der nahe liegenden Ordnung $(x_i) \leq (x_j)$ für $(i \leq j)$. Da jeder Durchschnitt von derartigen Komponenten zusammenhängend ist und zumindest den Nullpunkt $p_0 \in L_m$ enthält, ist nach Proposition 1.13 die simpliziale Reduktionsmenge $\mathcal{R}(L_m)$ frei von Mehrfachsimplices und es gilt $\mathcal{R}(L_m)_k = \text{Hom}_{\text{Poset}}([k], [m])$, daher ist

$$\mathcal{R}(L_m) \simeq \Delta[m]$$

der Standard- m -Simplex (vgl. Definition A.6).

Beispiel 1.16. Sei X eine regulär strikt semistabile S -Kurve, d.h. ein regulär strikt semistabiles S -Schema von Dimension 2, und habe eine simpliziale Reduktionsmenge $\mathcal{R}(X)$ ohne Mehrfachsimplices. Da sich verschiedene Komponenten von X_s eigentlich schneiden, muss der Schnitt von drei verschiedenen Komponenten aus X_s leer sein. Nach Proposition 1.13 haben daher nichtausgeartete Simplices höchstens die Dimension 2, die simpliziale Reduktionsmenge ist folglich ein geordneter Graph (vgl. Definition A.8). Seine Ecken werden durch die irreduziblen Komponenten von X_s bestimmt; zwischen zwei Ecken C_1, C_2 existiert genau dann

eine Kante, wenn der Schnitt $C_1 \cap C_2$ nicht leer ist. Wenn man daher die Ordnung der Reduktionsmenge ignoriert, also $\mathcal{R}(X)$ als (ungeordneten) Graphen auffasst, so stimmt er mit dem Reduktionsgraph von X in der üblichen Definition ([Bos90, 9.2]) überein.

Proposition 1.17. *Es sei $f : X \rightarrow Y$ ein Morphismus von S -Schemata, der auf einer offenen Umgebung der generischen Punkte von X_s flach ist.*

(i) *Es gilt $f(X_s^{(0)}) \subseteq Y_s^{(0)}$ und daher induziert f eine Abbildung*

$$(1.5) \quad f_* : X_s^{(0)} \rightarrow Y_s^{(0)}.$$

(ii) *Es seien desweiteren X und Y regulär strikt semistabile S -Schemata und \leq_X bzw. \leq_Y Totalordnungen auf $X_s^{(0)}$ bzw. $Y_s^{(0)}$. Falls X und Y eine simpliziale Reduktionsmenge ohne Mehrfachsimplices aufweisen und die Abbildung (1.5) ein Morphismus geordneter Mengen ist, so gibt es einen eindeutig bestimmten Morphismus*

$$f_* : \mathcal{R}(X) \rightarrow \mathcal{R}(Y),$$

der auf den 0-Simplizes durch $f_([C]) = [\overline{f(C)}]$ gegeben ist. Wird dabei ein k -Simplex $\sigma \in \mathcal{R}(X)_k$ vermöge (1.2) durch eine aufsteigende Kette von Komponenten*

$$C_0 \leq_X \cdots \leq_X C_n$$

aus $X_s^{(0)}$ beschrieben, so wird das Bild $f_(\sigma)$ durch die aufsteigende Kette*

$$(\overline{f(C_0)} \leq_Y \cdots \leq_Y \overline{f(C_n)})$$

gegeben.

Beweis. Sei $p \in X_s^{(0)}$ der generische Punkt einer Komponente der speziellen Faser X_s . Durch eventuelle Einschränkung von X auf eine Umgebung von p dürfen wir f als flach annehmen. Mit f ist auch dessen Basiswechsel $f' : X_s \rightarrow Y_s$ flach und daher ist nach [Gro65, IV, §2, Cor (2.3.5) (ii)] der Abschluss des Bildes $\overline{\{f(p)\}}$ eine irreduzible Komponente von Y_s .

Zum Beweis der zweiten Aussage seien X und Y regulär strikt semistabile S -Schemata. Da die Abbildung $f_* : X_s^{(0)} \rightarrow Y_s^{(0)}$ nach Voraussetzung ein Morphismus geordneter Mengen ist, induziert sie eine Abbildung

$$f_* : \hom([n], X_s^{(0)}) \rightarrow \hom([n], Y_s^{(0)})$$

und unter Ausnutzung der kanonischen Isomorphie (1.2) die gesuchte Abbildung $f_* : \mathcal{R}(X)_n \rightarrow \mathcal{R}(Y)_n$.

Zum Beweis der zweiten Aussage seien X und Y regulär strikt semistabile S -Schemata. Wir beschreiben die Simplizes von $\mathcal{R}(X)$ bzw. $\mathcal{R}(Y)$ mittels Proposition 1.13 (1.2). Dabei genügt zu zeigen, dass eine Abbildung $f_* : \mathcal{R}(X) \rightarrow \mathcal{R}(Y)$ wie gefordert existiert, die Eindeutigkeit folgt sofort aus Proposition A.14. Es

beschreibe $(C_0 \leq_X \cdots \leq_X C_n)$ einen n -Simplex von $\mathcal{R}(X)$. Ein gemeinsamer Schnittpunkt $p \in C_0 \cap \cdots \cap C_n$ wird durch f auf einen Schnittpunkt $f(p) \in \overline{f(C_0)} \cap \cdots \cap \overline{f(C_n)}$ abgebildet und $f_* : X_s^{(0)} \rightarrow Y_s^{(0)}$ ist ein Morphismus geordneter Mengen, daher bildet $(\overline{f_*(C_0)} \leq_Y \cdots \leq_Y \overline{f_*(C_n)})$ einen n -Simplex von $\mathcal{R}(Y)$. Diese Zuordnung ist offensichtlich funktoriell und liefert daher einen Morphismus simplizialer Mengen

$$f_* : \mathcal{R}(X) \rightarrow \mathcal{R}(Y).$$

□

Die simpliziale Reduktionsmenge kann in folgendem Sinne lokal bestimmt werden:

Proposition 1.18. *Sei X ein regulär strikt semistabiles S -Schema mit einer Totalordnung \leq auf $X_s^{(0)}$.*

- (i) *Ist $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge, so induziert \leq_X eine Totalordnung \leq_U auf $U_s^{(0)}$ und es gibt einen kanonischen Monomorphismus $\mathcal{R}(U) \rightarrow \mathcal{R}(X)$.*
- (ii) *Es sei $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ ein überdeckendes System offener Mengen auf X derart, dass für je zwei offene Mengen $U_i, U_j \in \mathcal{U}$ der Schnitt $U_i \cap U_j$ eine Überdeckung von Mengen aus \mathcal{U} besitzt. Dann gilt*

$$\mathcal{R}(X) = \operatorname{colim}_{i \in I} \mathcal{R}(U_i).$$

Beweis. Die Existenz des Monomorphismus $\mathcal{R}(U) \rightarrow \mathcal{R}(X)$ ist klar nach Definition der simplizialen Reduktionsmenge. Nach der universellen Eigenschaft des Kolimes existiert ein eindeutiger Morphismus

$$(1.6) \quad \varphi : \operatorname{colim}_{i \in I} \mathcal{R}(U_i) \rightarrow \mathcal{R}(X),$$

der von den Inklusionen $U_i \rightarrow X$ induziert wird. Wir zeigen, dass dies bereits ein Isomorphismus ist:

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $p \in \mathcal{R}(X)_n$ ein n -Simplex, also nach Definition ein Punkt $p \in [\beta]^{(0)}$ für ein $\beta \in \operatorname{Hom}([n], X_s^{(0)})$. Da das System \mathcal{U} die spezielle Faser überdeckt, gibt es ein $U \in \mathcal{U}$ mit $p \in U$ und es folgt $p \in \mathcal{R}(U)$. Der Morphismus (1.6) ist somit surjektiv.

Für den Beweis der Injektivität seien $n \in \mathbb{N}$, $U, U' \in \mathcal{U}$ und $p \in \mathcal{R}(U)_n$, $p' \in \mathcal{R}(U')_n$ derart, dass ihre Bilder unter φ übereinstimmen. Wir können wie eben p und p' als Punkte von U bzw. U' auffassen; die Bedingung $\varphi(p) = \varphi(p')$ bedeutet dann $p = p'$ als Punkte von X . Sei nun $U'' \in \mathcal{U}$ eine Teilmenge von $U \cap U'$, die den Punkt p enthält. Wir bezeichnen den durch den Punkt p in $\mathcal{R}(U'')$ definierten Simplex mit p'' . Dann gilt für die Inklusionen $i : U'' \rightarrow U$ und $i' : U'' \rightarrow U'$

$$i_*(p'') = p \quad i'_*(p'') = p'$$

und daher stimmen p und p' als Elemente von $\operatorname{colim}_{i \in I}$ überein. □

Bemerkung 1.19. Es sei X ein regulär strikt semistabiles Schema und es bezeichne $\dim(\mathcal{R}(X))$ die Dimension der simplizialen Menge $\mathcal{R}(X)$ (vgl. Definition A.8). Dann gilt

$$\dim(\mathcal{R}(X)) \leq \dim(X_s),$$

da sich nach Eigenschaft (4) in Definition 1.1 höchstens $\dim(X_s)$ Komponenten von X_s schneiden können.

Definition 1.20. Sei X ein regulär strikt semistabiles Schema und $p \in X$ ein abgeschlossener Punkt. Dann heißt eine offene Teilmenge $U \subseteq X$ *Standardumgebung von p* , wenn entweder $U \subseteq X_\eta$ gilt oder wenn es eine Zahl $m \in \mathbb{N}$ und einen glatten Morphismus

$$f : U \rightarrow L_m := \text{Spec } R[x_0, \dots, x_m]/(x_0 \cdots \cdots x_m - \pi)$$

derart gibt, dass die Abbildung $f_* : \mathcal{R}(U) \rightarrow \mathcal{R}(L_m)$ aus Proposition 1.17(ii) eine Bijektion ist und $f(p) = p_0 := (x_0, \dots, x_m, \pi)$ gilt.

Proposition 1.21. *Es sei X ein regulär strikt semistabiles Schema, $U \subseteq X$ eine offene Menge und $p \in X_s \cap U$ ein abgeschlossener Punkt der speziellen Faser. Dann existiert eine Standardumgebung U' von p mit $U' \subseteq U$.*

Beweis. Nach Satz 1.4 gibt es eine offene Umgebung U' von p und einen glatten Morphismus

$$f : U' \rightarrow L_m$$

mit $f(p) = p_0$. Durch Verkleinerung der Menge U' können wir erreichen, dass $U' \subseteq U$ gilt und alle irreduziblen Komponenten von U'_s auch den Punkt p enthalten. Durch weitere Einschränkung von U' können wir erreichen, dass für jede Wahl von irreduziblen Komponenten C_0, \dots, C_n der speziellen Faser U'_s der Durchschnitt $C_0 \cap \cdots \cap C_n$ zusammenhängend und nicht leer ist.

Die simpliziale Reduktionsmenge $\mathcal{R}(U')$ ist daher isomorph zum Standard- n -Simplex und weist daher keine Mehrfachsimplices auf. Nach Proposition A.14 genügt es daher zu zeigen, dass f eine Bijektion $f_* : U_s^{(0)} \rightarrow (L_m)_s^{(0)}$ der 0-Simplizes induziert: Da f flach ist, wird nach Proposition 1.17 jede Komponente von U_s auf eine Komponente von $(L_m)_s$ abgebildet. Sei umgekehrt $C \subseteq (L_m)_s$ eine irreduzible Komponente von $(L_m)_s$ und daher ein glattes k -Schema, das den Punkt p_0 enthält. Das schematheoretische Urbild $f^{-1}(C)$ ist folglich ein nichtleeres gutes k -Schema und somit ist jede irreduzible Komponente von $f^{-1}(C)$ bereits eine Zusammenhangskomponente. Da f flach ist, ist jede dieser Komponente eine Zusammenhangskomponente von U'_s und enthält insbesondere den Punkt p . Es folgt, dass $f^{-1}(C)$ aus genau einer Zusammenhangskomponente von U_s besteht, die Abbildung f_* also bijektiv ist. \square

Korollar 1.22. *Sei X ein regulär strikt semistabiles Schema. Dann lässt sich jede offene Menge $U \subseteq X$ durch ein System $(U_i)_{i \in I}$ von Standardumgebungen überdecken. Daher erfüllt die Überdeckung*

$$\mathcal{U} := \{U \subseteq X \mid U \text{ ist Standardumgebung eines abgeschlossenen Punktes } p \in X\}$$

die Bedingung aus Proposition 1.18 (ii) und es gilt folglich

$$\mathcal{R}(X) = \operatorname{colim}_{\mathcal{U}} \mathcal{R}(U).$$

Beweis. Wir zeigen, dass jede offene Teilmenge von X von Mengen aus \mathcal{U} überdeckt wird. Sei daher $U \subseteq X$ eine beliebige offene Teilmenge. Es bezeichne I die Menge der abgeschlossenen Punkte aus der speziellen Faser U_s . Für jeden Punkt $p \in I$ wählen wir nach Proposition 1.21 eine Standardumgebung $U_p \subseteq U$ von p . Damit bildet $\{U_p \mid p \in I\} \subseteq \mathcal{U}$ eine offene Überdeckung der abgeschlossenen Punkte von U_s und nach dem Hilbertschen Nullstellensatz bereits auch schon eine Überdeckung der gesamten speziellen Faser U_s . Des Weiteren gilt $U_\eta \in \mathcal{U}$ und wir erhalten daher eine Überdeckung von U durch Mengen aus \mathcal{U} wie folgt

$$U = U_\eta \cup \left(\bigcup_{p \in I} U_p \right).$$

□

2. Desingularisierung

Es sei $S := \text{Spec } R$ das Spektrum eines diskreten Bewertungsringes mit algebraisch abgeschlossenem Restklassenkörper k und X ein regulär strikt semistabiles S -Schema von Dimension 2, also eine S -Kurve. Es sei ferner R_n eine flache R -Algebra, die selbst ein diskreter Bewertungsring ist und einen Uniformisierer π_n besitzt, so dass der Uniformisierer π von R auf π_n^n abgebildet wird; es bezeichne S_n das Spektrum $S_n := \text{Spec } R_n$. Wir betrachten im folgenden einerseits den Basiswechsel $X \times_S S_n$, als auch das k -fache gefaserte Produkt X^k . Beide Schemata sind im Allgemeinen nicht regulär; um die Theorie regulär strikt semistabiler Schemata anwenden zu können, müssen wir daher in beiden Fällen eine Desingularisierung betrachten.

Derartige Desingularisierungen sind bereits in mehreren Arbeiten untersucht worden: In [Gro95] werden allgemein Produkte von regulär strikt semistabilen Schemata betrachtet, das selbe Auflösungsverfahren beschreibt Hartl in [Har01] zusammen mit einem Auflösungsverfahren für verzweigten Basiswechsel von beliebigen regulär strikt semistabilen Schemata. Bei beiden Verfahren ist jedoch die Reihenfolge der durchgeföhrten Aufblasungen nicht vorgegeben und daher das Ergebnis nicht eindeutig festgelegt. Je nach Wahl der Reihenfolge erhält man unterschiedliche Schemata, die auch unterschiedliche simpliziale Reduktionsmengen haben können.

Zhang betrachtet in [Zha10, §3] die Desingularisierung eines Produktes $X \times_S X$ von regulär strikt semistabilen S -Kurven. Das Ergebnis ist hierbei von der Reihenfolge der Aufblasungen unabhängig. Ein ähnliches Verfahren ist auch bei höheren Produkten möglich, liefert jedoch — wie in Abschnitt 2.4 skizziert — relativ komplizierte simpliziale Reduktionsmengen.

Für die Auflösung von Produkten nutzen wir daher eine angepasste Form des in [Gro95, Prop 6.11] und [Har01, Prop 2.1] beschriebenen Verfahrens, das die Aufblasungsreihenfolge fest vorgibt. Für die Betrachtung des verzweigten Basiswechsels beschränken wir uns auf den Basiswechsel von Kurven und können daher bekannte Verfahren ([Del69], [Hei03]) benutzen. Da dabei lediglich in abgeschlossenen Punkten aufgeblasen wird, muss in diesem Fall nicht auf die Reihenfolge geachtet werden.

2.1. Desingularisierung durch Aufblasung

Wir bestimmen in den folgenden Abschnitten die Desingularisierungen und Reduktionsmengen durch explizite Berechnungen. Daher wiederholen wir zunächst

einige grundlegende Aussagen über Aufblasungen.

Proposition 2.1. *Es sei $X = \text{Spec } A$ ein affines integres noethersches Schema und $Y \subseteq X$ ein abgeschlossenes Unterschema, gegeben durch das Ideal $I = (f_1, \dots, f_n)$. Dann lässt sich die Aufblasung $\text{Bl}_Y(X)$ von X mit Zentrum Y durch offene affine Schemata $\text{Spec } A_i$ überdecken, wobei jeweils A_i die von den Elementen $f_j f_i^{-1}$ ($j = 1, \dots, n$) erzeugte A -Unteralgebra von $\text{Quot } A$ ist.*

Beweis. [Liu02, Lemma 8.1.4] □

Eine weitere oft gebrauchte Eigenschaft der Aufblasung ist ihre Verträglichkeit mit flachem Basiswechsel.

Proposition 2.2. *Ist $f : Z \rightarrow X$ ein flacher Morphismus lokal noetherscher Schemata und Y ein abgeschlossenes Unterschema von X , so gilt:*

$$(2.1) \quad \text{Bl}_{f^{-1}(Y)}(Z) = \text{Bl}_Y(X) \times Z.$$

Hierbei bezeichnet $f^{-1}(Y)$ das schematheoretische Urbild von Y .

Beweis. [Liu02, Prop 1.12 (c)] □

Bei der Bestimmung von Fasern einer Aufblasung werden wir schließlich gelegentlich Gebrauch von folgender einfacher Tatsache machen:

Lemma 2.3. *Es sei k ein Körper,*

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g'} & X \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ Y' & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

ein kartesisches Diagramm von k -Schemata von endlichem Typ, $p \in X$ ein Punkt in X und $q = f(p)$ sein Bildpunkt unter f . Wir bezeichnen die schematheoretischen Fasern der Morphismen g' bzw. g im Punkte p bzw. q mit

$$\begin{aligned} X'_p &:= X' \times_X \text{Spec } \kappa(p), \\ Y'_q &:= Y' \times_Y \text{Spec } \kappa(q). \end{aligned}$$

Ist der Restklassenkörper $\kappa(q)$ algebraisch abgeschlossen und gilt $\dim \overline{\{p\}} = \dim \overline{\{q\}}$, so ist der von f' induzierte Morphismus $X'_p \rightarrow Y'_q$ ein Isomorphismus.

Beweis. Wir versehen die abgeschlossenen Unterschemata $\overline{\{p\}}$ und $\overline{\{q\}}$ mit der induzierten reduzierten Struktur. Da sie damit integre k -Schemata von endlichem Typ sind, gilt

$$\text{trdeg}_k \kappa(p) = \dim \overline{\{p\}} = \dim \overline{\{q\}} = \text{trdeg}_k \kappa(q) < \infty.$$

Die Körpererweiterung $\kappa(p)/\kappa(q)$ ist somit algebraisch und es folgt $\kappa(p) = \kappa(q)$. Der Basiswechsel des Diagramms mit $q : \text{Spec } \kappa(q) \rightarrow Y$ lässt sich zu dem folgenden Diagramm mit kartesischen Quadranten ergänzen:

$$\begin{array}{ccc} X'_p & \longrightarrow & \text{Spec } \kappa(p) \\ \downarrow & & \downarrow \\ X'_q & \longrightarrow & X_q \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y'_q & \longrightarrow & \text{Spec } \kappa(q). \end{array}$$

Der kanonische Morphismus $X'_p \rightarrow Y'_q$ ist damit als Basiswechsel des Isomorphismus $\text{Spec } \kappa(p) \rightarrow \text{Spec } \kappa(q)$ selbst ein Isomorphismus. \square

2.2. Verzweigter Basiswechsel von Kurven

Als erste Anwendung der Sätze aus Abschnitt 2.1 wird der verzweigte Basiswechsel einer S -Kurve betrachtet. Die Resultate sind wohlbekannt [Del69, pp. 84-85], [Hei03, Kap. 2], der Beweis illustriert aber gut die zur Desingularisierung der Produktmodelle betrachteten Methoden.

Es sei $S = \text{Spec } R$ das Spektrum eines diskreten Bewertungsringes R mit algebraisch abgeschlossenem Restklassenkörper. Weiter sei $n > 1$ und R_n eine flache R -Algebra, die ein diskreter Bewertungsring ist und einen Uniformisierer π_n besitzt, so dass π auf π_n^n abgebildet wird. Ist R ein vollständiger diskreter Bewertungsring, so können wir einen solchen Ring R_n wie folgt konstruieren: Wir wählen eine separable Körpererweiterung K_n von K und setzen die Bewertung auf K_n fort. Dann ist diese Körpererweiterung rein verzweigt vom Index n und der zu K_n gehörende Bewertungsring R_n hat einen Uniformisierer π_n wie oben.

Es sei wie üblich X eine regulär strikt semistabile Kurve über $S = \text{Spec } R$. Das durch Basiswechsel gebildete S_n -Schema $X \times_S S_n$ ist im Allgemeinen nicht regulär, wie man am Standardbeispiel $L := \text{Spec } R[x_0, x_1]/(x_0x_1 - \pi)$ erkennen kann: Man erhält durch Basiswechsel das S_n -Schema $L \times_S S_n = \text{Spec } R_n[x_0, x_1]/(x_0x_1 - \pi_n^n)$, welches für $n > 1$ an dem durch das Ideal (x_0, x_1, π_n) gegebenen Punkt singulär ist.

Algorithmus 2.4 (Auflösung bei verzweigtem Basiswechsel). Es sei R_n eine flache R -Algebra, die diskreter Bewertungsring und einen Uniformisierer π_n besitzt, so dass der Uniformisierer π von R auf π_n^n abgebildet wird. Einen solchen Bewertungsring erhalten wir später stets als Bewertungsring einer total verzweigten Erweiterung K_n von K vom Index n . Sei X eine regulär strikt semistabile Kurve über S . Es bezeichne $\tilde{X}_0 := X \times_S S_n$ den Basiswechsel von X , sowie $\text{Sing}(\tilde{X}_0)$ den singulären Ort von \tilde{X}_0 versehen mit der induzierten reduzierten Struktur. Es werde rekursiv $\tilde{X}_{i+1} := \text{Bl}_{\text{Sing}(\tilde{X}_i)} \tilde{X}_i$ definiert. Wir setzen $X_n := \tilde{X}_{[n/2]}$.

Dies liefert eine regulär strikt semistabile Desingularisierung:

Satz 2.5. *Das mit Algorithmus 2.4 bestimmte Schema $X_n := \tilde{X}_{\lfloor n/2 \rfloor}$ ist ein regulär strikt semistabiles S_n -Schema. Es gibt eine Totalordnung auf $(X_n)^{(0)}$ derart, dass der Reduktionsgraph von X_n bezüglich dieser Ordnung mit der n -fache Unterteilung (vgl. Definition A.20) des Graphen $\Gamma(X)$ übereinstimmt, d.h. es gilt $\Gamma(X_n) = \text{unt}_n(\Gamma(X))$.*

Die Aussage lässt sich zunächst auf die lokale Situation zurückführen:

Lemma 2.6. *Gilt Satz 2.5 für das Schema $L := L_1 = \text{Spec } R[x_0, x_1]/(x_0x_1 - \pi)$, so auch für beliebige regulär strikt semistabile S -Kurven X .*

Beweis. Es bezeichne ψ den Morphismus $\psi : X_n \rightarrow X$. Wir betrachten die Überdeckung

$$\mathcal{U} := \{U \subseteq X \mid U \text{ ist Standardumgebung eines abgeschlossenen Punktes } p \in U\}$$

von X aus Korollar 1.22 sowie die induzierte Überdeckung

$$\mathcal{U}' = \{\psi^{-1}(U) \mid U \in \mathcal{U}\}$$

von X_n . Nach Bemerkung 1.2 genügt es, die reguläre strikte Semistabilität von X_n auf den Mengen aus \mathcal{U}' zu zeigen.

Für die Bestimmung der Ordnung auf $(X_n)^{(0)}$ zeigen wir zunächst eine funktorielle Isomorphie

$$(2.2) \quad \Gamma(U)_n \simeq \psi^{-1}(U)^{(0)}$$

und erhalten daraus die Isomorphie

$$\text{unt}_n(\Gamma(X))_0 = \Gamma(X)_n \simeq \Gamma(X_n).$$

Wir erhalten daher durch Wahl einer Ordnung auf $\Gamma(X)_n$ mittels Proposition A.27 sofort eine geeignete Ordnung auf $(X_n)^{(0)}$.

Um auch die simpliziale Reduktionsmenge zu bestimmen, ist lediglich zu zeigen, dass für die offenen Mengen $U \subseteq X$ aus \mathcal{U} die Beziehung

$$(2.3) \quad \Gamma(\psi^{-1}(U)) \simeq \text{unt}_n(\Gamma(U))$$

funktoriell in U gilt. Dann gilt nämlich aufgrund der Verträglichkeit von unt_n mit Kolimites in Proposition A.21 zusammen mit Korollar 1.22

$$\Gamma(X_n) \simeq \underset{\mathcal{U}}{\text{colim}} \Gamma(\psi^{-1}(U)) \simeq \underset{\mathcal{U}}{\text{colim}} \text{unt}_n(\Gamma(U)) \simeq \text{unt}_n(\Gamma(X)).$$

Sei $U \in \mathcal{U}$ eine Standardumgebung. Falls $U \subseteq X_n$ gilt, so ist $\Gamma(U) = \emptyset$ und die Aussagen daher trivial. Ist U eine Standardumgebung mit $U_s \neq \emptyset$, so existiert

ein $m \in \mathbb{N}$ und eine glatte Abbildung $f : U \rightarrow L_m$. Da X Dimension 2 hat, ist nur $m \in \{0, 1\}$ möglich. Wir betrachten zunächst den Fall $m = 0$: Aufgrund der Isomorphie $L_0 \simeq S$ ist U ein glattes S -Schema. Dann ist der Basiswechsel $U \times_S S_n$ bereits glatt und daher regulär strikt semistabil. Da die Aufblasungen auf U Isomorphismen sind, ist damit auch $\psi^{-1}(U)$ regulär strikt semistabil. Da der Restklassenkörper k algebraisch abgeschlossen ist, ist U_s geometrisch integer und ebenso der Basiswechsel $\psi^{-1}(U)_s$. Daher bestehen $\Gamma(U)$ und $\Gamma(\psi^{-1}(U))$ nur aus einem Punkt und es folgt $\Gamma(\psi^{-1}(U)) \simeq \Delta[0] \simeq \text{unt}_n(\Delta[0]) \simeq \text{unt}_n(\Gamma(U))$.

Sei nun $m = 1$. Wir bezeichnen mit $p \in U$ den Doppelpunkt von U_s , der unter f auf den Nullpunkt abgebildet wird. Ohne Einschränkung sei X selbst bereits eine solche Umgebung.

Es darf vorausgesetzt werden, dass die sukzessive Aufblasung $\tilde{L}_{i+1} := \text{Bl}_{\text{Sing } \tilde{L}_i}(\tilde{L}_i)$ des Schemas $\tilde{L}_0 := L \times_S S_n$ an den jeweiligen singulären Orten nach $\lfloor n/2 \rfloor$ Schritten das regulär strikt semistabile Schema $L_n := \tilde{L}_{\lfloor n/2 \rfloor}$ liefert. Da jede Aufblasung mit flachem Basiswechsel kommutiert, lässt sich der Basiswechselmorphismus $\varphi_0 : \tilde{X}_0 \rightarrow \tilde{L}_0$ so liften, dass eine Folge kartesischer Diagramme entsteht:

$$\begin{array}{ccccccc} \tilde{X}_N & \xrightarrow{\quad} & \tilde{X}_2 & \xrightarrow{\text{Bl}_{B_2}} & \tilde{X}_1 & \xrightarrow{\text{Bl}_{B_1}} & \tilde{X}_0 \\ \downarrow \varphi_N & & \downarrow \varphi_2 & & \downarrow \varphi_1 & & \downarrow \varphi_0 \\ \tilde{L}_N & \xrightarrow{\quad} & \tilde{L}_2 & \xrightarrow{\text{Bl}_{\varphi(B_2)}} & \tilde{L}_1 & \xrightarrow{\text{Bl}_{\varphi(B_1)}} & \tilde{L}_0 \end{array} .$$

Mit φ_0 ist folglich auch der Basiswechsel φ_N étale und nach Korollar 1.5 ist auch \tilde{X}_N regulär strikt semistabil.

Der Morphismus φ_N induziert ferner einen Isomorphismus der Reduktionsgraphen $(\varphi_N)_* : \Gamma(X_{S_n}) \rightarrow \Gamma(L_{S_n})$: Unter φ_0 werden die beiden Komponenten \tilde{U}_0, \tilde{U}_1 von $(\tilde{X}_0)_s$ auf die Komponenten \tilde{L}_0, \tilde{L}_1 von $(\tilde{L}_0)_s$ abgebildet, daher muss φ_N ebenso die strikten Transformierten von \tilde{U}_0 bzw. \tilde{U}_1 auf die strikten Transformierten von \tilde{L}_0 bzw. \tilde{L}_1 abbilden. Da alle übrigen Komponenten sowie alle Schnittpunkte der Komponenten in der Faser des Punktes p bzw. p_0 liegen, ist nach Lemma 2.3 die Abbildung $(\varphi_N)_*$ ein Isomorphismus.

Zur Vervollständigung des Beweises ist lediglich noch die Funktionalität aus (2.3) zu zeigen. Dazu sei $i : U_1 \rightarrow U_2$ eine offene Immersion von Mengen aus \mathcal{U} . Es ist zu überprüfen, dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \text{unt}_n(\Gamma(U_1)) & \xrightarrow{\text{unt}_n(i_*)} & \text{unt}_n(\Gamma(U_2)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Gamma(\psi^{-1}(U_1)) & \xrightarrow{i_*} & \Gamma(\psi^{-1}(U_2)) \end{array}$$

kommutiert. Da alle im Diagramm genannten Graphen keine Doppelkanten aufweisen, genügt es, die Gleichheit auf den Ecken zu zeigen. Nach Proposition A.25

genügt es ferner, lediglich die Bilder des kanonischen Morphismus

$$\Gamma(U_1)_0 \rightarrow \text{unt}_n(\Gamma(U_1))$$

zu betrachten. Für diese Elemente ist die Kommutativität allerdings trivial, da das Bild einer Komponente $C \in \Gamma(U_1)_0$ in $\Gamma(\psi^{-1}(U_1))$ gerade die strikte Transformierte der Komponente C ist. \square

Zum Beweis von Satz 2.5 bleibt nach Lemma 2.6 noch der lokale Fall $X = L$ zu behandeln, also die Auflösung der Singularitäten des Schemas $L \times_S S_n := \text{Spec } R_n[x_0, x_1]/(x_0 x_1 - (\pi_n)^n)$. Wir zeigen dazu:

Lemma 2.7.

- (i) Aus dem affinen Schema $L_{1,n} := \text{Spec } R[x_0, x_1]/(x_0 x_1 - \pi^n)$ erhält man nach $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ Aufblasungen im jeweils singulären Punkt $\text{Sing}(L_{1,n})$ ein reguläres Schema $\tilde{L}_{1,n}$.
- (ii) Die spezielle Faser $(\tilde{L}_{1,n})_s$ besteht aus $n+1$ Komponenten C_0, \dots, C_n . Dabei sind C_0 und C_n die strikten Transformierten der durch die Ideale (x_0, π) bzw. (x_1, π) definierten Komponenten; die übrigen Komponenten liegen im exzeptionellen Divisor. Jede Komponente C_i schneidet sich nur mit den benachbarten Komponenten C_{i-1}, C_{i+1} je in einem gewöhnlichen Doppelpunkt.
- (iii) Die Pullbacks der Hauptdivisoren $\text{div}(x_0)$ und $\text{div}(\pi)$ unter dem Aufblasungsmorphismus $f : \tilde{L}_{1,n} \rightarrow L_{1,n}$ werden auf $\tilde{L}_{1,n}$ gegeben durch

$$f^*(\text{div}(x_0)) = \sum_{i=0}^n i[C_i] \quad f^*(\text{div}(\pi)) = \sum_{i=0}^n [C_i].$$

Beweis. Für $n = 1$ sind die Behauptungen trivial. Ist $n > 1$, so haben wir die Aufblasung des affinen Schemas $L_{1,n} = \text{Spec}(A)$ mit $A = R[x_0, x_1]/(x_0 x_1 - \pi^n)$ im singulären Punkt p_0 zu betrachten. Dieser Punkt wird auf A durch das Ideal (x_0, x_1, π) beschrieben. Nach Proposition 2.1 wird $\text{Bl}_{p_0}(L_{1,n})$ durch die affinen Schemata

$$(2.4) \quad U_1 := \text{Spec } A[x_1, \frac{\pi}{x_1}], U_2 := \text{Spec } A[\frac{x_0}{\pi}, \frac{x_1}{\pi}], U_3 := \text{Spec } A[x_0, \frac{\pi}{x_0}]$$

überdeckt, wobei die angegebenen Algebren hier stets als Unteralgebren von $\text{Quot } A$ anzusehen sind. Die strikten Transformierten C_0, C_{n+1} von $\text{div}(x_0), \text{div}(x_1) \subseteq L_{1,n}$ sind durch die Divisoren $\text{div}(\frac{\pi}{x_1})$ von U_1 bzw. $\text{div}(\frac{\pi}{x_0})$ von U_3 gegeben. Eine leichte Rechnung zeigt, dass die Homomorphismen von R -Algebren

$$\begin{aligned} \psi_1 : \quad \Gamma(L_{1,1}, \mathcal{O}_{L_{1,1}}) &\rightarrow U_3, \quad x_0 \mapsto \frac{\pi}{x_1}, \quad x_1 \mapsto x_1, \\ \psi_2 : \quad \Gamma(L_{1,n-2}, \mathcal{O}_{L_{1,n-2}}) &\rightarrow U_2, \quad x_0 \mapsto \frac{x_0}{\pi}, \quad x_1 \mapsto \frac{x_1}{\pi}, \\ \psi_3 : \quad \Gamma(L_{1,1}, \mathcal{O}_{L_{1,1}}) &\rightarrow U_1, \quad x_0 \mapsto x_0, \quad x_1 \mapsto \frac{\pi}{x_0} \end{aligned}$$

bijektiv sind. Damit sind die Karten U_1 und U_3 bereits regulär strikt semistabil.

Im Fall $n = 2$ ist die spezielle Faser der Karte U_2 leer und daher die gesamte Aufblasung regulär strikt semistabil. Durch Betrachtung der Übergangsfunktionen lassen sich die Komponenten $\text{div}(x_1)$ von U_1 und $\text{div}(x_0)$ von U_3 identifizieren. Durch die Aufblasung entsteht also eine neue Komponente C_1 in der speziellen Faser, die sich mit den strikten Transformierten in je einem Doppelpunkt schneidet.

Im Fall $n > 2$ lassen sich die Komponenten $\text{div}(x_1)$ von U_1 und $\text{div}(\frac{\pi}{x_0})$ von U_2 mit C_1 identifizieren, sowie analog die Komponenten $\text{div}(x_0)$ von U_3 und $\text{div}(\frac{\pi}{x_1})$ von U_2 mit C_n . Per Induktion erhält man für die Karte U_2 eine Desingularisierung wie gewünscht; da U_1 und U_3 bereits regulär sind, ist damit das ganze Schema desingularisiert.

Für die Berechnung der Pullbacks $f^*(\text{div}(x_0))$ und $f^*(\text{div}(\pi))$ genügt es, ihre Vielfachheiten in den Komponenten C_0, \dots, C_{n+1} zu bestimmen. Dabei können wir uns jeweils auf eine geeignete Karte einschränken:

In U_3 liefern die Faktorisierungen $x_0 = x_0$, sowie $\pi = x_0 \cdot \frac{\pi}{x_0}$ die Gleichungen $f^*(\text{div}(x_0))|_{U_1} = [C_1]$ und $f^*(\text{div}(\pi))|_{U_1} = [C_0] + [C_1]$ und somit die behaupteten Vielfachheiten in den Divisoren C_0 und C_1 . Analog folgt für U_1 die Aussage $f^*(\text{div}(x_0))|_{U_3} = n[C_n] + (n-1)[C_{n-1}]$.

Ist $n > 2$ so erhält man die Vielfachheiten der in U_2 liegenden Komponenten per Induktion durch

$$\begin{aligned} f^*(\text{div}(x_0))|_{U_2} &= f^*(\text{div}(\frac{x_0}{\pi}))|_{U_2} + f^*(\text{div}(\pi))|_{U_2} = \sum_{i=1}^{n-1} i[C_i], \\ f^*(\text{div}(\pi))|_{U_2} &= \sum_{i=1}^{n-1} [C_i]. \end{aligned}$$

□

Dies vervollständigt den Beweis von Satz 2.5.

2.3. Singularitätenauflösung bei Produkten

Auch das gefaserte Produkt regulär strikt semistabiler S -Kurven ist in der Regel selbst nicht wieder regulär strikt semistabil. Schon das Produkt $L \times_S L$ des Standardschemas mit sich weist eine Singularität am Produkt $p_0 \times p_0$ des Doppelpunktes p_0 von L auf. Wiederum gibt es bereits ein Standardverfahren, um in diesem Fall ein reguläres strikt semistabiles Modell zu erhalten: In der Arbeit von Gross und Schoen [Gro95, §6] wird gezeigt, wie man durch sukzessive Aufblasungen aus dem Produkt „guter Modelle“ wieder ein „gutes Modell“ erhält. Hartl zeigt in [Har01], dass dasselbe Verfahren — auf Produkte von regulär strikt semistabilen Schemata angewandt — wieder ein regulär strikt semistabiles Schema liefert. Im Gegensatz zum verzweigten Basiswechsel wird jedoch dabei nicht in Punkten, sondern in Komponenten von höherer Dimension aufgeblasen. Da

sich dabei die Aufblasungszentren schneiden können und daher die Aufblasungen nicht kommutieren, ist das Ergebnis dieser Desingularisierung und damit auch die resultierende Reduktionsmenge von der Reihenfolge der Aufblasungen abhängig.

Wir müssen daher eine feste Aufblasungsreihenfolge für die Desingularisierung nutzen, um eine eindeutig bestimmten simpliziale Reduktionsmenge zu erhalten. Auf der zugrundeliegenden S -Kurve X wurde bereits zur Definition des geordneten Reduktionsgraphen eine Totalordnung auf $(X_s)^{(0)}$, den Komponenten der speziellen Faser gewählt. Wenn wir eine mit dieser Ordnung verträgliche Aufblasungsreihenfolge wählen, so ergibt sich die Reduktionsmenge der Auflösung des d -fachen Produktes X^d tatsächlich als Produkt $\Gamma(X)^d$ der simplizialen Reduktionsmengen von X .

Es sei $d \in \mathbb{N}$, X eine regulär strikt semistabile S -Kurve und \leq eine totale Ordnung auf $X_s^{(0)}$. Weiter bezeichne W_0 das d -fache Faserprodukt

$$W_0 := X^d = X \times_S \cdots \times_S X$$

mit den Projektionsabbildungen $\text{pr}_1, \dots, \text{pr}_d$ auf die Faktoren. Da die irreduziblen Komponenten von X_s geometrisch integer sind, erhält man die irreduziblen Komponenten von $(W_0)_s$ gerade als Produkte der irreduziblen Komponenten der einzelnen Fasern, d.h.

$$(W_0)_s^{(0)} = X_s^{(0)} \times \cdots \times X_s^{(0)}.$$

Wir versehen diese Menge mit einer Totalordnung \preceq , die mit der Ordnung \leq auf $X_s^{(0)}$ verträglich ist; d.h. für jedes Paar $C_1, C_2 \in (W_0)_s^{(0)}$ mit $\text{pr}_i(C_1) \leq \text{pr}_i(C_2)$ für jedes $i \in \{1, \dots, d\}$ gilt $C_1 \preceq C_2$. Eine solche Ordnung ist z.B. durch die lexikographische Ordnung gegeben.

Algorithmus 2.8. Es sei X eine regulär strikt semistabile S -Kurve mit Totalordnung \leq auf $X_s^{(0)}$ und \preceq eine Totalordnung auf $(W_0)_s^{(0)} = (X_s^{(0)})^d$, die mit \leq verträglich ist. Die Elemente aus $(W_0)_s^{(0)}$ seien in aufsteigender Reihenfolge mit B_1, \dots, B_k bezeichnet.

Wir identifizieren die Elemente $B_i \in (W_0)_s^{(0)}$ mit ihren zugehörigen abgeschlossenen Unterschemata $\overline{\{B_i\}}$ und versehen sie mit der reduzierten Unterschemastuktur. Die Auflösung der Singularitäten von W_0 erfolgt durch sukzessive Aufblasung an diesen Komponenten. Wir definieren daher induktiv $W_i := \text{Bl}_{B'_i} W_{i-1}$ als die Aufblasung des Schemas W_{i-1} an der strikten Transformierten B'_i von B_i in W_{i-1} . Das letzte Schema in dieser Kette wird mit $W(X, \leq, d) := W_k$ bezeichnet.

Bemerkung 2.9. Das eben beschriebene Auflösungsverfahren unterscheidet sich von dem von Gross und Schoen beschriebenen nur darin, dass hier kein induktives Verfahren genutzt wird, sondern sofort in den irreduziblen Komponenten des n -fachen Produktes aufgeblasen wird. Durch eine Betrachtung der lokalen Ringe lässt sich zeigen, dass dies keine wesentliche Veränderung darstellt: Legt man im Auflösungsverfahren von Gross und Schoen die Reihenfolge der Aufblasungen geeignet fest, so erhält man ein zu W isomorphes Schema.

Satz 2.10. Das mittels Algorithmus 2.8 bestimmte Schema $W(X, \leq, d) := W_k$ ist regulär strikt semistabil und für die simpliziale Reduktionsmenge bezüglich der Ordnung \prec gilt $\mathcal{R}(W) = \Gamma(X)^d$.

Der Beweis erfolgt wie eben in mehreren Schritten. Zunächst wird die Aussage auf die lokale Situation $X = L := \text{Spec } R[x_0, x_1]/(x_0 x_1 - \pi)$ zurückgeführt.

Lemma 2.11. Gilt Satz 2.10 für $X = L$, so auch für beliebige regulär strikt semistabile Kurven über S .

Beweis. Es bezeichne ψ den Aufblasungsmorphismus $\psi : W(X, \leq, d) \rightarrow X^d$. Wir betrachten wie in Lemma 2.6 die Überdeckung

$$\mathcal{U} = \{U \subseteq X \mid U \text{ ist Standardumgebung}\}$$

des Schemas X aus Korollar 1.22 und die durch Produktbildung gegebene Überdeckung

$$\mathcal{U}' = \{\psi^{-1}(U_1 \times \cdots \times U_d) \mid U_1, \dots, U_d \in \mathcal{U}\}$$

von $W(X, \leq, d)$. Wir zeigen die reguläre strikte Semistabilität von $W(X, \leq, d)$ wie in Lemma 2.6 auf der Überdeckung \mathcal{U}' . Für die Bestimmung der Reduktionsmenge wird wieder Korollar 1.22 sowie die Verträglichkeit des Produktes mit Kolimits genutzt, wir müssen daher eine funktorielle Isomorphie

$$(2.5) \quad \mathcal{R}(\psi^{-1}(U_1 \times \cdots \times U_d)) \simeq \Gamma(U_1) \times \cdots \times \Gamma(U_d)$$

für $U_1, \dots, U_d \in \mathcal{U}$ zeigen.

Seien U_1, \dots, U_d offene Mengen aus \mathcal{U} . Wir können annehmen, dass $(U_i)_s \neq \emptyset$ für alle i gilt, andernfalls ist die Aussage trivial. Da die Mengen U_1, \dots, U_d zweidimensional sind und in \mathcal{U} liegen, existiert für jedes $i \in \{1, \dots, d\}$ ein $m_i \in \{0, 1\}$ und ein glatter Morphismus $f_i : U_i \rightarrow L_{m_i}$. Wir bezeichnen mit $k \in \mathbb{N}$ die Anzahl der i mit $m_i = 1$. Wir erhalten aus den Abbildungen $f_i : U_i \rightarrow L_{m_i}$ durch Produktbildung eine glatte Abbildung

$$\varphi'_0 = \prod_{i=1}^d f_i : U_1 \times \cdots \times U_d \rightarrow \bigtimes_{i=1}^d L_{m_i}.$$

Da L_0 ein glattes S -Schema ist und $L_1 \simeq L$ gilt, erhalten wir schließlich eine glatte Abbildung $\varphi_0 : U_1 \times \cdots \times U_d \rightarrow L^k$, die eine Bijektion $(\varphi_0)_*$ auf den Reduktionsmengen induziert. Von den Aufblasungszentren B_1, \dots, B_k haben wir nur diejenigen zu betrachten, die in der offenen Teilmenge $U_1 \times \cdots \times U_d \subseteq W_0$ liegen; wir bezeichnen diese mit $\tilde{B}_1, \dots, \tilde{B}_{\tilde{k}}$. Mittels der Bijektion $(\varphi_0)_*$ überträgt sich die Totalordnung \preceq von $(U_1 \times \cdots \times U_d)^{(0)}$ auf $(L^k)^{(0)}$. Wir erhalten daher eine aufsteigende Kette von Komponenten

$$(\varphi_0)_*(\tilde{B}_1), \dots, (\varphi_0)_*(\tilde{B}_{\tilde{k}}).$$

Die Ordnung \preceq ist dann ebenfalls mit der Ordnung \leq auf L verträglich. Für die Bestimmung der Isomorphie (2.5) können wir daher davon ausgehen, dass es einen glatten Morphismus $\varphi_0 : W_0 \rightarrow L^d$ gibt, der eine Bijektion der speziellen Komponenten induziert. Wir bezeichnen mit $p \in U_1 \times \cdots \times U_d$ ein Urbild des Nullpunkts $p_0 \in L^k$.

Wir wenden das Auflösungsverfahren aus Algorithmus 2.8 auf das Standardschema $M_0 := L^d$ mit der Aufblasungsreihenfolge $\varphi(B_1), \dots, \varphi(B_i)$ an. Dies liefert eine Folge von Schemata gegeben durch $M_{i+1} := \text{Bl}_{\varphi_0(B_i)} M_i$. Das letzte Schema dieser Folge, M_k , liefert nach Voraussetzung ein regulär strikt semistabiles Schema. Da Aufblasungen mit flachem Basiswechsel kommutieren, lässt sich der Morphismus $\varphi_0 : W_0 \rightarrow M_0$ liften, so dass eine Folge kartesischer Diagramme entsteht:

$$\begin{array}{ccccccc} W_k & \xrightarrow{\quad} & W_2 & \xrightarrow{\text{Bl}_{B_2}} & W_1 & \xrightarrow{\text{Bl}_{B_1}} & W_0 \\ \downarrow \varphi_k & & \downarrow \varphi_2 & & \downarrow \varphi_1 & & \downarrow \varphi_0 \\ M_k & \xrightarrow{\quad} & M_2 & \xrightarrow{\text{Bl}_{\varphi(B_2)}} & M_1 & \xrightarrow{\text{Bl}_{\varphi(B_1)}} & M_0 \end{array}$$

Dabei sind die Basiswechsel φ_i von φ_0 selbst wieder glatt und nach Korollar 1.5 ist mit M_k auch W_k regulär strikt semistabil.

Es bleibt noch, die Reduktionsmengen zu vergleichen. Dazu wird gezeigt, dass $(\varphi_k)_*$ ein Isomorphismus auf den Reduktionsmengen ist. Zunächst betrachten wir die Abbildung der Eckenmengen. Nach Voraussetzung ist die durch φ_0 induzierte Abbildung $(\varphi_0)_* : \mathcal{R}(W_0)_0 \rightarrow \mathcal{R}(M_0)_0$ eine Bijektion. Da die Schemata M_0 und W_0 regulär in Kodimension 1 sind, kommen durch Aufblasungen an Komponenten in Kodimension 1 keine neuen irreduziblen Komponenten hinzu und somit ist auch $(\varphi_k)_* : \mathcal{R}(W_k)_0 \rightarrow \mathcal{R}(M_k)_0$ bijektiv.

Da $\mathcal{R}(W_k)$ und $\mathcal{R}(M_k)$ keine Mehrfachsimplices enthalten, können wir Simplices mit Proposition 1.13 beschreiben. Seien daher $C_1, \dots, C_l \in \mathcal{R}(W_k)_0$ Elemente, so dass $((\varphi_k)_*(C_1) \leq \cdots \leq (\varphi_k)_*(C_l))$ einen l -Simplex in M_k bildet. Es gilt daher $\varphi_k(C_1) \cap \cdots \cap \varphi_k(C_l) \neq \emptyset$ und mindestens ein abgeschlossener Punkt p dieses Schnittes liegt in der Faser von p_0 . Da nach Lemma 2.3 der Morphismus $(\varphi'_k) : (W_k)_p \rightarrow (M_k)_{p_0}$ ein Isomorphismus ist, schneiden sich auch die Komponenten C_1, \dots, C_l in W_k , daher gilt $(C_1 \leq \cdots \leq C_l) \in \mathcal{R}(W_k)_l$.

Für die Funktorialität in (2.5) können wir uns wieder auf die Ecken der simplizialen Mengen beschränken. Für diese sind die folgenden Bijektionen funktoriell in allen U_i :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\psi^{-1}(U_1 \times \cdots \times U_d))_0 &= (\psi^{-1}(U_1 \times \cdots \times U_d))^{(0)} \simeq (U_1 \times \cdots \times U_d)^{(0)} \\ &\simeq U_1^{(0)} \times \cdots \times U_d^{(0)} \simeq \Gamma(U_1)_0 \times \cdots \times \Gamma(U_d)_0. \end{aligned}$$

□

In der lokalen Situation $X = L = L_1$ lässt sich die beschriebene Aufblasung von $M_0 := L^d$ explizit bestimmen. Dabei treten affine Karten der folgenden Form auf:

Definition 2.12. Gegeben sei eine natürliche Zahl $l \in \mathbb{N}_0$ und eine nichtleere endliche Menge A . Unter $R[w_1, \dots, w_l][u_{a0}, u_{a1} \mid a \in A]$ soll die von den $l + 2(\#A)$ Elementen w_1, \dots, w_l und u_{a0}, u_{a1} erzeugte freie kommutative R -Algebra verstanden werden. Darin wird von den Elementen

$$\{w_1 \cdots w_l u_{a0} u_{a1} - \pi, u_{a0} u_{a1} - u_{a'0} u_{a'1} \mid a, a' \in A\}$$

ein Ideal erzeugt, das mit \mathcal{I}_M bezeichnet wird. Schließlich definieren wir $M(l, A)$ als den Quotientenring

$$M(l, A) := R[w_1, \dots, w_l][u_{a0}, u_{a1} \mid a \in A]/\mathcal{I}_M.$$

Bemerkung 2.13. Das affine Schema $\text{Spec } M(l, A)$ beschreibt bei der Desingularisierung von L^d ein offenes affines Unterschema, in dem bereits l Komponenten aufgeblasen wurden. In der Tat erhält man mit $l = 0$ die Situation vor der Aufblasung:

$$\begin{aligned} M(0, \{1, \dots, d\}) &= R[u_{10}, u_{11}, \dots, u_{d0}, u_{d1}]/(u_{10}u_{11} - \pi, \dots, u_{d0}u_{d1} - \pi) \\ &\simeq (R[x_0, x_1]/(x_0x_1 - \pi))^{\otimes d}. \end{aligned}$$

Es ist daher naheliegend, zunächst das Schema $\text{Spec } M(l, A)$ im Hinblick auf Komponenten der speziellen Faser und Bildung von Aufblasungen zu untersuchen.

Lemma 2.14. Es sei $l \in \mathbb{N}$ und A eine endliche Menge.

(i) Das affine Schema $N := \text{Spec } M(l, A)$ ist integer. Seine spezielle Faser $N_s = \text{Spec } M(l, A)/(\pi)$ besteht aus den folgenden irreduziblen Komponenten: Zu jedem $i \in \{1, \dots, l\}$ gibt es einen (Cartier-)Divisor $D(i) := V(w_i)$, der durch das Hauptideal (w_i) gegeben wird. Zusätzlich existiert für jede Abbildung $t \in \text{Hom}(A, \{0, 1\})$ eine weitere Komponente $C(t) := V((u_{k,t(a)} \mid a \in A))$.

(ii) Die Aufblasung $\tilde{N} := \text{Bl}_{C(0)}(N)$ von $N = \text{Spec}(M(l, A))$ an der Komponente $C(0) = V((u_{a,0} \mid a \in A))$ wird durch die Familie

$$\left(\tilde{N}_a := \text{Spec}(M(l+1, A \setminus \{a\})) \right)_{a \in A}$$

von affinen Schemata überdeckt.

(iii) Die irreduziblen Komponenten jeder Karte \tilde{N}_a haben nach (i) entweder die Form \tilde{D}_i für ein $i \in \{1, \dots, l+1\}$ oder $\tilde{C}(t)$ für ein $t \in \text{Hom}(A \setminus \{a\}, \{0, 1\})$. Es bezeichne $\psi : \tilde{N} \rightarrow N$ den Aufblasungsmorphismus und $\psi_a : \tilde{N}_a \rightarrow N$

seine Einschränkung auf die offene Teilmenge $\tilde{N}_a \subseteq \tilde{N}$. Dann bildet ψ_a die irreduziblen Komponenten wie folgt ab:

$$\begin{aligned}\psi_a(\tilde{D}(i)) &= D(i) \quad \text{für } i \in \{1, \dots, l\}, \\ \psi_a(\tilde{D}(l+1)) &= C(0), \\ \psi_a(\tilde{C}(t|_{A \setminus \{a\}})) &= C(t) \quad \text{für } t \in \text{Hom}(A, \{0, 1\}) \text{ mit } t(a) = 1.\end{aligned}$$

- (iv) Sei ψ_a wie in (iii) und $E \in \text{CaDiv}(\tilde{N})$ der exzeptionelle Divisor der Aufblasung. Dann gilt für jedes $b \in A$ und jedes $b' \in A \setminus \{a\}$ für die Hauptdivisoren $V(u_{b,0}), V(u_{b,1}) \in \text{CaDiv}(N)$:

$$\begin{aligned}\psi_a^{-1}(V(u_{b,0}))E^{-1}|_{\tilde{N}_a} &= \begin{cases} V(1) & \text{falls } a = b, \\ V(\tilde{u}_{b,0}) & \text{sonst,} \end{cases} \\ \psi_a^{-1}(V(u_{b,1}))|_{\tilde{N}_a} &= \begin{cases} V(\tilde{u}_{b',0} \cdot u_{b',1}) & \text{falls } a = b, \\ V(\tilde{u}_{b,1}) & \text{sonst.} \end{cases}\end{aligned}$$

Beweis. Wir zeigen die Nullteilerfreiheit von $M(l, A)$ per Induktion nach $\#A$: Für eine einelementige Menge $A = \{a\}$ ist

$$M(l, A) = R[w_1, \dots, w_l][u_{a0}, u_{a1}] / (w_1 \cdots w_l u_{a0} u_{a1} - \pi)$$

und wir erhalten eine kanonische Injektion

$$M(l, A) \rightarrow \text{Quot}(R[w_1, \dots, w_l])[u_{a0}]_{(u_{a0})}.$$

Somit ist $M(l, A)$ als Unterring eines integren Rings integer. Den Induktionsschritt liefert eine analoge Betrachtung des injektiven Ringhomomorphismus

$$M(l, A) \rightarrow \text{Quot}(M(l, A \setminus \{a\}))[u_{a0}]_{(u_{a0})}.$$

Eine einfache Rechnung zeigt die in (i) gegebene Beschreibung der minimalen Primideale von $M(l, A)/(\pi)$.

Für die Beschreibung der Aufblasung von N an der Komponente $C(0)$ ziehen wir Proposition 2.1 heran: Eine offene Überdeckung der Aufblasung \tilde{N} von N am Ideal $(u_{a,0} \mid a \in A)$ wird danach durch die folgende Familie von Unteralgebren von $\text{Quot } M(l, A)$ erhalten:

$$\left(W_a := M(l, A) \left[\frac{u_{a',0}}{u_{a,0}} \middle| a' \in A \setminus \{a\} \right] \right)_{a \in A}.$$

Wir zeigen die Isomorphie von W_a mit

$$M(l+1, A \setminus \{a\}) \simeq R[\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_{l+1}][\tilde{u}_{a0}, \tilde{u}_{a1}] / \mathcal{I}_{M(l+1, A \setminus \{a\})}$$

durch Betrachtung von zwei Morphismen von R -Algebren:

$$\begin{aligned}\varphi_a : M(l+1, A \setminus \{a\}) &\rightarrow W_a, \\ \psi_a^\# : M(l, A) &\rightarrow M(l+1, A \setminus \{a\})\end{aligned}$$

gegeben durch

$$(2.6) \quad \begin{aligned}\varphi_a(\tilde{w}_i) &:= w_i \quad \text{für } i \leq l & \psi_a^\#(w_i) &:= \tilde{w}_i, \\ \varphi_a(\tilde{w}_{l+1}) &:= u_{a,0} & \psi_a^\#(u_{a,0}) &:= \tilde{w}_{l+1}, \\ \varphi_a(\tilde{u}_{a',0}) &:= \frac{u_{a',0}}{u_{a,0}} & \psi_a^\#(u_{a',0}) &:= \tilde{w}_{l+1} \tilde{u}_{a',0}, \\ \varphi_a(\tilde{u}_{a',1}) &:= u_{a',1} & \psi_a^\#(u_{a',1}) &:= \tilde{u}_{a',1}.\end{aligned}$$

Durch leichte Rechnungen überzeugt man sich von der Wohldefiniertheit der Abbildungen φ_a und $\psi_a^\#$. Mittels $\psi_a^\#$ lässt sich $M(l+1, A \setminus \{a\})$ mit der Struktur einer $M(l, A)$ -Algebra versehen und φ_a erweist sich als $M(l, A)$ -Algebrenhomomorphismus; dieser ist offenbar surjektiv. Da φ_a ferner einen Isomorphismus der Quotientenkörper von W_a und $M(l+1, A \setminus \{a\})$ induziert, folgt aus der Nullteilerfreiheit von $M(l+1, A \setminus \{a\})$ bereits die Injektivität von φ_a . Damit ist φ_a ein Isomorphismus und $\psi_a^\#$ beschreibt den Aufblasungsmorphismus $\tilde{N} \rightarrow N$ in der Karte $\tilde{N}_a = \text{Spec } M(l+1, A \setminus \{a\}) \subseteq \tilde{N}$.

Für (iii) haben wir die Bilder der speziellen Komponenten von $\tilde{N}_a \subseteq \tilde{N}$ unter dem Aufblasungsmorphismus ψ_a zu untersuchen. Der exzeptionelle Divisor wird gemäß der Beschreibung der Aufblasung in W_a durch das Hauptideal (\tilde{w}_{l+1}) beschrieben; daraus folgt bereits $\psi_a(\tilde{D}(l+1)) = C(0)$. Die generischen Punkte der übrigen Komponenten von $M(l+1, A \setminus \{a\})$ liegen außerhalb des exzeptionellen Divisors, also in der standard-affinen Umgebung $D(u_{a,0})$. Da dort die Aufblasung trivial ist, folgt die Identifikation der übrigen Komponenten durch Betrachtung des von $\psi_a^\#$ induzierten Isomorphismus $M(l, A)_{u_{a,0}} \simeq M(l+1, A \setminus \{a\})_{\tilde{w}_{l+1}}$.

Die letzte Aussage folgt sofort aus der Beschreibung der Abbildung $\psi_a^\#$ in (2.6). \square

Zum Beweis von Satz 2.10 in der lokalen Situation werden wir die Aussage umformulieren, um das vorangegangene Lemma bequem anwenden zu können. Hierzu betrachten wir wieder das Schema $W_0 := L^d$ mit den Projektionen $\text{pr}_i : W_0 \rightarrow L$ auf den i -ten Faktor. Für einen Moment wollen wir die irreduziblen Komponenten von L_s mit I_0 und I_1 bezeichnen und mit der Ordnung $I_0 \leq I_1$ versehen. Wir haben bereits bemerkt, dass man die irreduziblen Komponenten von $(W_0)_s$ als Produkt der irreduziblen Komponenten I_0, I_1 von L erhält. Es gibt daher eine Bijektion

$$\begin{aligned}\text{Hom}(\{1, \dots, d\}, \{0, 1\}) &\rightarrow (W_0)_s^{(0)}, \\ (t : \{1, \dots, d\} \rightarrow \{0, 1\}) &\mapsto I_{t(1)} \times \dots \times I_{t(d)}.\end{aligned}$$

Das Urbild einer Komponente C unter dieser Bijektion sei mit t_C bezeichnet. Ferner sei das Urbild der 1 unter t_C mit $A(C) := (t_c)^{-1}(1)$ bezeichnet.

Wir bezeichnen die davon durch $\mathcal{R}(W_0)_0 = (\mathcal{R}(L)_0)^d$ gegebene Produktordnung wieder mit \leq . Bezuglich dieser (partiellen) Ordnung haben wir $C \leq C'$ genau dann, wenn $t_C(i) \leq t_{C'}(i)$ für alle $i \in \{1, \dots, d\}$ gilt.

Des Weiteren haben wir eine Aufblasungsreihenfolge B_1, \dots, B_{2^d} der Komponenten aus $\mathcal{R}(W_0)_0$ gegeben, die mit der Ordnung \leq verträglich ist. Die Relation $B_i \leq B_j$ impliziert folglich $i \leq j$. Wir erhalten insbesondere $t_{B_0} = 0$, da die zu $t = 0$ assoziierte Komponente offenbar minimal unter \leq ist.

Die Menge aller bezüglich der Halbordnung \leq nicht verfeinerbaren Ketten werde mit $J := \{C_1 < \dots < C_{l+1}\} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{R}(W_0)_0)$ bezeichnet. Davon betrachten wir für jedes $m \in \mathbb{N}_0$ die Teilmenge J^m , die durch

$$J^m := \{(C_1 < \dots < C_{l+1}) \in J \mid C_1 = B_1, \{C_1, \dots, C_l\} \subseteq \{B_1, \dots, B_m\}\}$$

definiert wird. Elemente von J^m sind mit B_1 beginnende, nicht verfeinerbare Ketten von Komponenten, deren erste l Komponenten im Schritt m bereits aufgeblasen sind. Insbesondere enthält J^0 als einziges Element die mit B_1 beginnende Kette mit einem Element, es gilt also $J^0 = \{(B_1)\}$.

Diese Definitionen erlauben schließlich die Anwendung von Lemma 2.14:

Lemma 2.15. *Es sei $X = L$ und W_m nach Algorithmus 2.8 gebildet. Dann gilt für jedes $m \in \{0, \dots, 2^d\}$:*

(i) *Das Schema W_m wird durch die Familie affiner Schemata*

$$(2.7) \quad \left(\text{Spec } M(l, A(C_l)) \right)_{(C_1 < \dots < C_{l+1}) \in J^m}$$

überdeckt. Die irreduziblen Komponenten der speziellen Faser sind gerade die strikten Transformierten der Komponenten von $(W_0)_s$.

(ii) *In der Karte $N(C_1, \dots, C_{l+1}) := \text{Spec } M(k, A(C_k))$ findet man für jedes $i \in \{1, \dots, l\}$ die bereits aufgeblasenen Komponenten C_i durch den Cartierdivisoren $D(i)$ beschrieben. Des Weiteren enthält die Karte die strikten Transformierten all derjenigen Komponenten $C \in \mathcal{R}(M_0)_0$ mit $C \geq C_l$; sie identifizieren sich jeweils mit der Komponente $C(t_C |_{A(C_l)})$ aus $\text{Spec } M(l, A(C_l))$.*

(iii) *Jedes Aufblasungszentrum B'_j mit $j > m$ ist der schematheoretische Durchschnitt von Cartierdivisoren: Es gilt*

$$B'_j = \bigcap_{n=1}^d F_{j,n}$$

mit den Cartierdivisoren

$$F_{j,n} := \text{pr}_n^{-1}(\text{pr}_n(B_j)) \sum_{i \leq m, \text{pr}_n(B_i) = \text{pr}_n(B_j)} -B_i.$$

Beweis. Wir zeigen zunächst (i) und (ii) durch Induktion nach m . Für $m = 0$ ist die Behauptung trivial: Es gilt $J^0 = \{B_1\}$ und tatsächlich wird $M_0 := L^d$ durch das affine Schema $N(B_1) := \text{Spec } M(0, \{1, \dots, d\}) \simeq L^d$ überdeckt. Dabei kann der Isomorphismus so gewählt werden, dass der von der Projektion pr_n

$$(2.8) \quad N(B_1) \simeq L^d \xrightarrow{\text{pr}_n} L$$

induzierte Morphismus auf den globalen Schnitten

$$\mathcal{O}_L(L) \rightarrow \mathcal{O}_{N(B_1)}(N(B_1))$$

den Schnitt x_0 auf $u_{n,0}$ und den Schnitt x_1 auf $u_{n,1}$ abbildet. Durch Betrachtung der Projektionen folgt dann sofort Aussage (ii) für $m = 0$.

Sei für M_m die geforderte Überdeckung bereits konstruiert. Wir haben die Aufblasung an der Komponente B_{m+1} zu untersuchen und können uns dabei auf die Karten beschränken, die diese Komponente enthalten; die übrigen bleiben unverändert. Sei also $(C_1 < \dots < C_l) \in J^m$ mit $C_l = B_{m+1}$ und $N = \text{Spec } M(l, A(C_l))$ die zugehörige Karte. Es gilt $t_{C_l}|_{A(C_l)} = 0$, daher wird die Komponente B_{m+1} in der Karte N durch $C(0)$ beschrieben.

Mittels Lemma 2.14 lässt sich die Aufblasung \tilde{N} von N in $B_{m+1} = C(0)$ durch Karten der Form $\text{Spec } M(l+1, A(C_l) \setminus \{i\})$ für $i \in A(C_l)$ überdecken. Jedem $i \in A(C_l)$ lässt sich eindeutig eine Komponente C' mit $A(C') = A(C) \setminus \{i\}$ und somit das Element $(C_0 < \dots < C_k < C') \in J^{m+1}$ zuordnen.

Für Aussage (ii) sind noch die irreduziblen Komponenten zu identifizieren. Dies folgt ebenfalls aus Lemma 2.14: Eine Komponente $C'' > C$ liegt demnach in der zu i respektive $(C_0 < \dots < C')$ gehörenden Karte genau dann, wenn $t_{C''}(i) = 1$ und folglich $C'' > C'$ gilt.

Für die Aussage (iii) zeigen wir per Induktion nach m die folgenden Identitäten in jeder der Karten $N(C_1, \dots, C_{l+1}) \subseteq W_m$ aus (2.7):

$$F_n|_{N(C_1, \dots, C_{l+1})} = \begin{cases} V(u_{n,0}) & \text{falls } \text{pr}_n(C) = 0, \text{pr}_n(C_l) = 0, \\ V(1) & \text{falls } \text{pr}_n(C) = 0, \text{pr}_n(C_l) = 1, \\ V(u_{n,1}) & \text{falls } \text{pr}_n(C) = 1, \text{pr}_n(C_l) = 0, \\ V(u_{a',0}u_{a',1}) \text{ für ein } a' \in A(C_l) & \text{falls } \text{pr}_n(C) = 1, \text{pr}_n(C_l) = 1. \end{cases}$$

Der Induktionsanfang folgt aus der Wahl des Isomorphismus in (2.8), der Induktionsschritt aus Aussage (iv) von Lemma 2.14. Daher erhalten wir für $B_j > C_k$:

$$\bigcap_{n=1}^d F_{j,n}|_{N(C_1, \dots, C_{l+1})} = V((u_{a,t_{B_j}(a)} \mid a \in A(C_l))) = B_j$$

und für $B_j \not> C_k$

$$\bigcap_{n=1}^d F_k|_{N(C_1, \dots, C_{l+1})} = \emptyset.$$

Damit folgt die Behauptung. □

Beweis von Satz 2.10. Nach Lemma 2.11 reicht es, die Aussage für das Schema $W_0 := L^n$ zu zeigen. Nach Lemma 2.15 wird W_k durch affine Karten der Form $\text{Spec } M(k, \{a\}) \simeq \text{Spec } R[w_1, \dots, w_l, w_{l+1}, w_{l+2}]/(w_1 \cdots \cdot w_{l+2} - \pi)$ überdeckt, ist somit nach Satz 1.4 regulär strikt semistabil.

Da die Reduktionsmengen von L und M_m nach Proposition 1.13 keine Mehrfachsimplices aufweisen und die Projektionsabbildungen $\tilde{\text{pr}}_i : M_m \rightarrow L$ in einer Umgebung der generischen Punkte von $(M_m)_s$ flach sind, erhalten wir nach Proposition 1.17 Morphismen $(\tilde{\text{pr}}_i)_* : \mathcal{R}(M_m) \rightarrow \mathcal{R}(L)$.

Es bleibt noch zu zeigen, dass die Abbildungen $(\tilde{\text{pr}}_i)_*$ einen Isomorphismus

$$\mathcal{R}(M_m)_k \simeq (\mathcal{R}(L)_k)^d$$

induzieren. Da der Isomorphismus für die 0-Simplizes bereits gezeigt wurde, ist nach Proposition 1.13 nur noch zu zeigen, dass für jedes $k > 0$ die Mengen

$$\{(C_0 \leq \cdots \leq C_k) \in ((M_m)^{(0)})^{k+1} \mid C_0 \cap \cdots \cap C_k \neq \emptyset\}$$

und

$$\{(C_0 \leq \cdots \leq C_k) \in ((M_m)^{(0)})^{k+1} \mid \tilde{\text{pr}}_i(C_0) \cap \cdots \cap \tilde{\text{pr}}_i(C_k) \neq \emptyset \quad \forall i \in \{1, \dots, d\}\}$$

übereinstimmen. Damit sich Komponenten $C_0, \dots, C_k \in (M_m)^{(0)}$ schneiden ist es offenbar erforderlich, dass diese in einer gemeinsamen Karte liegen. Dies gilt aber genau dann, wenn die Komponenten bezüglich der Produktordnung \leq total geordnet sind, also wenn $\tilde{\text{pr}}_i(C_0) \cap \cdots \cap \tilde{\text{pr}}_i(C_k) \neq \emptyset$ für alle i gilt. \square

Unmittelbar aus Lemma 2.15(iii) erhalten wir

Korollar 2.16. *Alle Aufblasungen in Algorithmus 2.8 erfolgen an schematheoretischen Durchschnitten von Cartierdivisoren.*

Bemerkung 2.17. Sei $S_n := \text{Spec}(R_n)$ das Spektrum einer flachen R -Algebra wie in Abschnitt 2.2, das Schema X eine regulär strikt semistabile Kurve über $S = \text{Spec } R$ und \leq eine Totalordnung auf den irreduziblen Komponenten von X_s . Nach Satz 2.5 erhält man durch Aufblasungen in den jeweiligen Singularitäten auf eindeutige Weise aus $X \times_S S_n$ eine regulär strikt semistabile Kurve über S_n , die mit X_n bezeichnet wird; durch geeignete Wahl einer Totalordnung auf $(X_n)^{(0)}$ gilt ferner für den geordneten Reduktionsgraphen

$$\Gamma(X_n) = \text{unt}_n(\Gamma(X)).$$

Es gibt dann für jedes $d \in \mathbb{N}$ einen eindeutigen Morphismus $W(X_n, \leq, d) \rightarrow W(X, \leq, d)$ zwischen dem regulär strikt semistabilen S_n -Schema $W(X_n, \leq, d)$ und dem S -Schema $W(X, \leq, d)$, der das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} W(X_n, \leq, d) & \longrightarrow & (X_n)^d \\ \downarrow & & \downarrow \\ W(X, \leq, d) & \longrightarrow & X^d \end{array}$$

kommutativ macht.

Wir zeigen dies in Satz 3.20 unter Zuhilfenahme der Aussagen über Metriken in Kapitel 3.

2.4. Alternative Desingularisierung

Die hier beschriebene Methode stellt nicht die einzige Möglichkeit dar, das Produkt semistabiler Kurven zu desingularisieren. Man kann im Fall $d = 2$ auch das von Zhang in [Zha10] verwendete Verfahren benutzen, das mit Aufblasungen in Punkten auskommt und daher keine Reihenfolge beachten muss.

Dazu sei X wie stets eine regulär strikt semistabile S -Kurve und $W_0 := X \times_S X$ das gefaserte Selbstprodukt. Das Schema W_0 ist lediglich in abgeschlossenen Punkten singulär, nämlich gerade in den Punkten, die als Produkt zweier Doppelpunkte von X_s entstehen. Zu allen übrigen Punkten existiert eine Umgebung der Form $U \times_S V$ mit $U, V \subseteq X$ offen, wobei U oder V glatt ist. Dann ist bereits $U \times_S V$ glatt und daher regulär; der singuläre Ort ist daher

$$\text{Sing}(W_0) = \text{Sing}(X_s) \times \text{Sing}(X_s).$$

Durch eine Aufblasung am singulären Ort lässt sich dann das Schema desingularisieren und man erhält ein nichtreduziert regulär strikt semistabiles Schema, d.h. ein Schema das die Eigenschaften (i),(iii) und (iv) aus Definition 1.1 erfüllt.

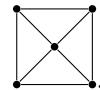
Proposition 2.18. *Die Aufblasung*

$$W := \text{Bl}_{\text{Sing}(W_0)}(W_0)$$

von W_0 am singulären Ort liefert ein nichtreduziert regulär strikt semistabiles Schema. Es lässt sich durch offene Umgebungen $U_i \subseteq W$ überdecken, die eine étale Abbildung

$$U_i \rightarrow \text{Spec } R[x_0, x_1, x_2]/(x_0^2 x_1 x_2)$$

zulassen. Die simpliziale Reduktionsmenge $\mathcal{R}(W)$ hat im Falle $X = L$ die Form



Beweis. [Zha10]. □

Diese Auflösung hat den Vorteil, dass die Reduktionsmenge symmetrisch ist und somit unabhängig von der Wahl von Aufblasungsreihenfolgen. Demgegenüber muss man berücksichtigen, dass nicht alle Komponenten der speziellen Faser des Schemas W reduziert sind und daher bei der Berechnung der Schnittzahlen zusätzliche Vielfachheiten auftauchen. Zudem entstehen bei der Auflösung zusätzliche irreduzible Komponenten von W_s und daher wird die Reduktionsmenge größer und dementsprechend schwieriger zu handhaben. Dies wird vor allem problematisch, wenn man mehrfache Produkte desingularisiert.

Bemerkung 2.19. Auch für Dreifachprodukte ist eine Desingularisierung wie bei Zhang möglich: Es sei dazu $W_0 := X \times_S X \times_S X$ ein dreifaches Produkt einer regulär strikt semistabilen S -Kurve X . Der singuläre Ort bestimmt sich mit dem gleichen Argument wie oben zu

$$\begin{aligned} \text{Sing}(W_0) &= \left(X \times \text{Sing}(X_s) \times \text{Sing}(X_s) \right) \cup \left(\text{Sing}(X_s) \times X \times \text{Sing}(X_s) \right) \\ &\cup \left(\text{Sing}(X_s) \times \text{Sing}(X_s) \times X \right). \end{aligned}$$

Wir versehen $\text{Sing}(W_0)$ mit der induzierten reduzierten Struktur und bilden die Aufblasung

$$W_1 = \text{Bl}_{\text{Sing}(W_0)} W_0.$$

Das Schema W_1 ist nicht regulär, aber es hat nur noch Singularitäten in abgeschlossenen Punkten. Daher liefert eine weitere Aufblasung am singulären Ort $\text{Sing}(W_1)$ mit reduzierter Struktur

$$W_2 = \text{Bl}_{\text{Sing}(W_1)} W_1$$

ein reguläres Schema W_2 .

Jeder Punkt von W_2 hat eine offene Umgebung $U \subseteq W_2$ mit étaler Abbildung

$$U \rightarrow \text{Spec } R[x_0, x_1, x_2, x_3]/(x_0^4 x_1^2 x_2 x_3 - \pi).$$

Ein Beweis dieser Aussage ist ähnlich wie in der Arbeit von Zhang und ähnlich wie in Satz 2.10 durch explizites Nachrechnen in Karten möglich. Von Interesse sind dabei hauptsächlich die Umgebungen eines Punktes $p \in \text{Sing}(X_s) \times \text{Sing}(X_s) \times \text{Sing}(X_s)$, für übrige Punkte kann man mittels einer glatten Abbildung auf den zweidimensionalen Fall reduzieren. Eine Umgebung der Faser von p unter der ersten Aufblasung lässt sich dadurch von affinen Schemata U von der Form

$$U \rightarrow \text{Spec } R[x_0, y_0, a_0, b_0, a_1, b_1]/(x_0 b_0 - y_0 a_0, x_0 b_1 - y_0 a_1, a_0 b_1 - a_1 b_0, x_0^2 b_0 b_1 - \pi)$$

überdecken; dieses Schema ist am Punkt $(x_0, y_0, a_0, b_0, a_1, b_1)$ singulär. Die abermalige Aufblasung an diesem Punkt liefert schließlich eine Überdeckung von der gewünschten Form.

Die Struktur der Reduktionsmenge wird durch die vielen neu entstehenden exzentrischen Divisoren etwas unübersichtlich, er wird im Folgenden lediglich für das Standardschema $X = L := \text{Spec } R[x_0, x_1]/(x_0 x_1 - \pi)$ beschrieben. Der Komplex lässt sich am einfachsten durch eine Einbettung in den \mathbb{R}^3 angeben, indem man die Koordinaten der Eckpunkte und die 3-Simplizes angibt. Die Eckpunkte

werden gegeben durch

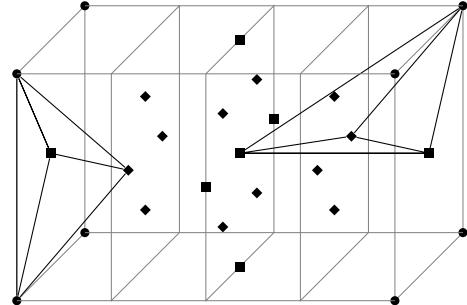
$$\begin{aligned}\mathcal{R}(X)_0 &= E \cup M \cup F \cup K, \\ E &:= \{0, 1\}^3, \\ M &:= \left\{ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \right\}, \\ F &:= \{(x_1, x_2, x_3) \mid \exists i \in \{1, 2, 3\}, x_i \in \{0, 1\}, x_j = 1/2 \text{ für } j \neq i\}, \\ K &:= \{(x_1, x_2, x_3) \mid \exists i \in \{1, 2, 3\}, x_i = 1/2, x_j \in \left\{ \frac{1}{4}, \frac{3}{4} \right\} \text{ für } j \neq i\}.\end{aligned}$$

Um eine totale Ordnung auf $\mathcal{R}(X)_0$ zu erhalten, versehen wir E mit der lexicographischen Ordnung und die übrigen Mengen F und K mit einer beliebigen Totalordnung. Durch die Festlegung $E \leq M \leq F \leq K$ lassen sich die Ordnungen zu einer Totalordnung auf $\mathcal{R}(X)_0$ kombinieren. Die symmetrische Gruppe S_3 operiert auf $\mathcal{R}(X)_0$ durch Vertauschung der Koordinaten. Wir können damit die nichtausgearteten 3-Simplizes analog zu Proposition 1.13 durch die folgenden aufsteigenden Ketten von Ecken angeben:

$$\mathcal{R}(X)_3 = S_1 \cup S_2,$$

$$\begin{aligned}S_1 &:= \left\{ \sigma(0, b, c) < \sigma(1, b, c) < \sigma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, c\right) < \sigma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4} + \frac{1}{2}b, \frac{1}{4} + \frac{1}{2}c\right) \mid \sigma \in S_3; b, c \in \{0, 1\} \right\} \\ S_2 &:= \left\{ \sigma(a, b, c) < \sigma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) < \sigma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, c\right) < \sigma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4} + \frac{1}{2}b, \frac{1}{4} + \frac{1}{2}c\right) \mid \sigma \in S_3; a, b, c \in \{0, 1\} \right\}\end{aligned}$$

Die Punkte werden im folgenden Bild illustriert, wobei die Punkte E durch einen kleinen Punkt (\bullet), die Punkte M und F durch Quadrate (\blacksquare) und die Punkte K durch Rauten (\blacklozenge) dargestellt werden. Exemplarisch ist jeweils ein Simplex aus S_1 und S_2 dargestellt; die restlichen Simplizes sind zu diesen kongruent.



3. Metrisierte Geradenbündel

Wir betrachten für einen Moment eine übliche Situation der Arakelovtheorie. Sei dazu X ein reguläres, projektives und flaches \mathbb{Z} -Schema. Dann gibt es nach [Sou92, III 4.2] eine Bijektion zwischen $\widehat{\text{CH}}^1(X)$, den Äquivalenzklassen arithmetischer Divisoren, und $\widehat{\text{Pic}}(X)$, der Gruppe von Paaren (\mathcal{L}, h) aus einem Geradenbündel \mathcal{L} und einer glatten hermiteschen konjugationsinvarianten Metrik h auf $\mathcal{L}(\mathbb{C})$, wobei $\mathcal{L}(\mathbb{C})$ das von \mathcal{L} auf $X(\mathbb{C})$ induzierte Geradenbündel bezeichnet. In Analogie dazu betrachtet Zhang in [Zha95, §1] auf projektiven \mathbb{Z} -Schemata Metriken von Geradenbündeln auch in der Faser einer nichtarchimedischen Stelle von \mathbb{Z} .

Wir wiederholen zunächst die Definition eines metrisierten Geradenbündels über einem vollständigen diskret bewerteten Körper nach [Zha95] und zeigen, dass durch ein Modell eines Geradenbündels eine Metrik induziert wird. Dabei gehen wir gesondert auf Metriken des trivialen Geradenbündels ein, denn diese lassen sich mit den irreduziblen Komponenten der speziellen Faser in Verbindung bringen. Sie ermöglichen eine Definition der Reduktionsabbildung, also einer Abbildung $\text{Red} : X(\bar{K}) \rightarrow |\mathcal{R}(X)|$ der geometrischen Punkte der speziellen Faser in die geometrische Realisierung der simplizialen Reduktionsmenge. Des Weiteren können wir Zykel auf X von Kodimension 1 mit Träger in der speziellen Faser durch Funktionen auf der Reduktionsmenge charakterisieren.

3.1. Metriken auf Geradenbündeln

Es sei R ein vollständiger diskreter Bewertungsring mit algebraisch abgeschlossenem Restklassenkörper und $|\cdot|$ eine Norm auf Quot R , dem Quotientenkörper von R . Später werden wir meist diejenige Norm von R betrachten, die eindeutig durch den Wert eines Uniformisierers $|\pi| = 1/b$ für eine feste Basis $b \in \mathbb{R}$, $b > 0$ festgelegt ist.

Es sei ferner \bar{K} ein algebraischer Abschluss von K und die Norm $|\cdot|$ auf \bar{K} fortgesetzt. Die Fortsetzung von $|\cdot|$ ist eindeutig, da R vollständig ist. Der Ring $\{a \in \bar{K} \mid |a| \leq 1\}$ werde mit $R_{\bar{K}}$ bezeichnet.

Bemerkung 3.1. Der Ring $R_{\bar{K}}$ ist ein Bewertungsring mit Wertegruppe \mathbb{Q} von Rang 1, das Spektrum $\bar{S} := \text{Spec } R_{\bar{K}}$ besteht daher nach [Mat89, Theorem 10.7] aus einem offenen Punkt $\bar{\eta}$ und einem abgeschlossenen Punkt \bar{s} . Insbesondere ist jede offene Umgebung von \bar{s} bereits das ganze Schema und es folgt $\text{Pic}(\bar{S}) = 0$.

Sei X_K ein K -Schema und L ein Geradenbündel auf X_K . Zu einem geometrischen Punkt $x \in X_K(\bar{K})$, also einem K -Morphismus $\text{Spec } \bar{K} \rightarrow X_K$, definieren

wir die geometrische Faser des Geradenbündels am Punkt x durch die globalen Schnitte der Garbe $x^*(L)$. Sie bildet einen 1-dimensionalen \bar{K} -Vektorraum und wird mit $L(x) := \Gamma(\mathrm{Spec} \bar{K}, x^*(L))$ bezeichnet.

Definition 3.2. Es sei X_K ein K -Schema und L ein Geradenbündel auf X_K . Eine Familie von Abbildungen in den geometrischen Fasern $(\|\cdot\|_x : L(x) \rightarrow \mathbb{R})_{x \in X_K(\bar{K})}$ heißt *Metrik auf L* , wenn $\|\cdot\|_x$ für jedes $x \in X_K(\bar{K})$ eine $(\bar{K}, |\cdot|)$ -Norm ist. Das Paar $(L, \|\cdot\|)$ wird als metrisiertes Geradenbündel bezeichnet.

Eine wichtige Klasse von Metriken lässt sich durch Modelle von Geradenbündeln bilden.

Definition 3.3. Es sei X ein S -Schema und L ein Geradenbündel auf der generischen Faser X_η von X . Wir bezeichnen ein Paar (\mathcal{L}, φ) bestehend aus einem Geradenbündel \mathcal{L} auf X und einem Isomorphismus $\varphi : \mathcal{L}|_{X_\eta} \rightarrow L$ als *Modell* von L . Für die Einschränkung $\mathcal{L}|_{X_\eta}$ schreiben wir auch kurz \mathcal{L}_η .

Ist desweiteren X ein eigentliches S -Schema mit $S = \mathrm{Spec} R$ und $x : \mathrm{Spec} \bar{K} \rightarrow X_\eta$ ein geometrischer Punkt der generischen Faser, so lässt sich x mittels des Bewertungskriteriums für Eigentlichkeit eindeutig zu einem $R_{\bar{K}}$ -rationalen Punkt $\tilde{x} : \mathrm{Spec} R_{\bar{K}} \rightarrow X$ fortsetzen.

Definition 3.4. Sei X ein eigentliches S -Schema von endlichem Typ und \mathcal{L} ein Modell eines Geradenbündels L auf X_η . Es bezeichne $x : \mathrm{Spec} \bar{K} \rightarrow X_\eta$ einen geometrischen Punkt der generischen Faser und $\tilde{x} : \bar{S} = \mathrm{Spec} R_{\bar{K}} \rightarrow X$ seine Fortsetzung als $R_{\bar{K}}$ -rationalen Punkt. Aufgrund von Bemerkung 3.1 ist das Geradenbündel $\tilde{x}^*\mathcal{L}$ trivial und mittels einer Trivialisierung $\psi : \tilde{x}^*\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{O}_{\bar{S}}$ erhalten wir eine \bar{K} -Norm auf dem Halm an $\bar{\eta}$ gegeben durch

$$\|\cdot\|_x : (\tilde{x}^*\mathcal{L})_{\bar{\eta}} \rightarrow \mathbb{R}, l \mapsto |\psi(l)|.$$

Sie ist unabhängig von der Wahl von ψ .

Die durch das Modell gegebene Isomorphie $x^*L \simeq (\tilde{x}^*\mathcal{L})_{\bar{\eta}}$ induziert einen Isomorphismus von \bar{K} -Vektorräumen $L(x) \simeq (\tilde{x}^*\mathcal{L})_{\bar{\eta}}$; dieser ermöglicht es uns, $\|\cdot\|_x$ als \bar{K} -Norm auf $L(x)$ aufzufassen:

$$\|\cdot\|_{\mathcal{L}, x} : L(x) \simeq (\tilde{x}^*\mathcal{L})_{\bar{\eta}} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Die Familie $(\|\cdot\|_{\mathcal{L}, x})_{x \in X(\bar{K})}$ ist eine Metrik auf L und wird die *durch das Modell (X, \mathcal{L}) induzierte Metrik* auf L genannt.

Es ist bereits interessant, Modelle des trivialen Geradenbündels zu betrachten; wir untersuchen daher im folgenden Modelle, die sich aus Cartierdivisoren mit Träger in der speziellen Faser gewinnen lassen.

Bemerkung 3.5. Es sei X ein eigentliches S -Schema und D ein Cartierdivisor mit Träger $\text{supp } D \subseteq X_s$ in der speziellen Faser von X . Dann induziert dieser eine invertierbare Untergarbe $\mathcal{O}_X(D) \subseteq \mathcal{K}_X$ (vgl. [Har77, II Prop 6.13] und [Gör10, (11.12)]). Da die generische Faser X_η eine offene Menge außerhalb des Trägers ist, gibt es nach [Gör10, Remark 11.31] einen kanonischen Schnitt $s_D \in \mathcal{O}_X(D)(X_\eta)$ sowie einen kanonischen Isomorphismus

$$\varphi_D : \mathcal{O}_X(D) |_{X_\eta} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_X |_{X_\eta},$$

der s_D auf den Einsschnitt in $\mathcal{O}_X |_{X_\eta}$ abbildet.

Definition 3.6. Es sei $|\cdot|$ eine Norm auf \bar{K} , X ein eigentliches S -Schema und D ein Cartierdivisor auf X mit $\text{supp } D \subseteq X_s$. Das durch D induzierte Modell $(\mathcal{O}_X(D), \varphi_D)$ des trivialen Geradenbündels induziert nach Definition 3.4 eine Metrik $\|\cdot\|_{\mathcal{O}_X(D)}$ auf \mathcal{O}_{X_η} . Die von den Werten des kanonischen Schnitts $1 \in \Gamma(X_\eta, \mathcal{O}_{X_\eta})$ in dieser Norm gebildete Funktion

$$f_D^{|\cdot|} : X_\eta(\bar{K}) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto -\log_b(\|1\|_{\mathcal{O}_X(D), x})$$

wird *tropische Koordinatenfunktion* zum Divisor D genannt. Falls sich die Norm aus dem Kontext ergibt, bezeichnen wir die tropische Koordinatenfunktion auch mit f_D .

Proposition 3.7. Sei X ein eigentliches S -Schema und D ein Cartierdivisor auf X mit Träger in der speziellen Faser von X . Es sei $x \in X(\bar{K})$ ein \bar{K} -rationaler Punkt und $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge, in die der Punkt x spezialisiert und in der der Cartierdivisor D durch eine rationale Funktion $f \in \mathcal{K}_X(U)$ gegeben ist. Dann gilt $f |_{U_\eta} \in \mathcal{O}_X(U_\eta)$ und wir erhalten

$$f_D(x) = -\log_b \left(\left| x^\# \left(f |_{U_\eta} \right) \right| \right),$$

wobei $x^\#$ die kanonische Abbildung $x^\# : \mathcal{O}_X(U_\eta) \rightarrow \bar{K}$ bezeichnet.

Beweis. Da der Träger von D außerhalb von U_η liegt, gilt $f |_{U_\eta} \in \mathcal{O}_X(U_\eta)$. Da ferner der Cartierdivisor D auf U durch eine rationale Funktion gegeben ist, ist die Einschränkung $\mathcal{O}_X(D) |_U$ trivial; wir dürfen daher einen festen Isomorphismus $\psi : \mathcal{O}_X(D) |_U \rightarrow \mathcal{O}_U$ wählen. Unter dieser Abbildung wird der kanonische Schnitt $s_D |_{U_\eta} \in \mathcal{O}_X(D)(U_\eta)$ auf $f |_{U_\eta}$ abgebildet.

Wir bezeichnen mit $\tilde{x} : \text{Spec } R_{\bar{K}} \rightarrow U$ wieder die Fortsetzung des Punktes x auf den Bewertungsring $R_{\bar{K}}$. Sie existiert, da x in die offene Teilmenge U spezialisiert. Durch Basiswechsel mit \tilde{x} erhalten wir aus der Trivialisierung ψ eine Trivialisierung $\psi' : \tilde{x}^*(\mathcal{O}_X(D)) \rightarrow \mathcal{O}_{\bar{S}}$. Sie bildet den Schnitt $\tilde{x}^* s_D \in \Gamma(\{\bar{\eta}\}, \tilde{x}^*(\mathcal{O}_X(D)))$ auf $x^\#(f) \in \Gamma(\{\bar{\eta}\}, \mathcal{O}_{\bar{S}}) = \bar{K}$ ab. Durch Basiswechsel des kanonischen Isomorphismus φ_D aus Bemerkung 3.5 erhalten wir ferner einen Isomorphismus $\varphi'_D :$

$\tilde{x}^*(\mathcal{O}_X(D))|_{\{\eta\}} \rightarrow \mathcal{O}_{\bar{S}}|_{\{\bar{\eta}\}}$, der \tilde{x}^*s_D auf den Einsschnitt $1 \in \mathcal{O}_{\bar{S}}|_{\{\bar{\eta}\}} = \mathcal{O}_{X_\eta}(x)$ abbildet. Es folgt daher

$$f_D(x) = -\log_b(\|1\|_{\mathcal{O}_X(D),x}) = -\log_b(|\psi'(x^*s_D)|) = -\log_b\left(\left|x^\#(f|_{U_\eta})\right|\right).$$

□

Proposition 3.8. *Die Koordinatenfunktion des trivialen Cartierdivisors ist die Nullfunktion. Es seien D_1, D_2 Cartierdivisoren auf X mit $\text{supp } D_i \subseteq X_s$. Dann gilt $f_{D_1+D_2} = f_{D_1} + f_{D_2}$.*

Beweis. Für jeden Punkt $x \in X(R_{\bar{K}})$ genügt es, eine Umgebung U von x zu betrachten, in der die Cartierdivisoren trivial sind. In einer solchen Umgebung folgen die Aussagen sofort aus Proposition 3.7. □

Schließlich ist die Definition der Koordinatenfunktion auch mit Basiswechsel verträglich.

Proposition 3.9. *Seien X, Y eigentliche integre R -Schemata, $g : X \rightarrow Y$ ein dominanter Morphismus und D ein Cartierdivisor auf Y . Nach [Gör10, Prop 11.48] existiert ein wohldefinierter Cartierdivisor g^*D . Es gilt dann für jeden Punkt $x \in X(\bar{K})$ die Beziehung*

$$f_D(g(x)) = f_{\varphi^*(D)}(x).$$

Beweis. Wie bisher lässt sich der Morphismus x zu $\tilde{x} : R_{\bar{K}} \rightarrow X$ fortsetzen, sein Bild unter g sei mit $\tilde{y} := g \circ \tilde{x}$ bezeichnet. Es genügt, die Aussage in einer offenen Umgebung von \tilde{x} zu zeigen. Wir dürfen daher nach eventueller Einschränkung der Menge Y annehmen, dass der Cartierdivisor auf Y durch eine rationale Funktion $f \in \mathcal{K}_Y(Y)$ gegeben ist. Man erhält den Cartierdivisor g^*D definitionsgemäß durch den Pullback g^*f und die Behauptung folgt wegen $\tilde{y}^\#(f) = \tilde{x}^\#(g^\#(f))$ aus Proposition 3.7. □

Beispiel 3.10. Es sei X ein eigentliches S -Schema, $U \subseteq X$ eine affine offene Teilmenge mit einem dominanten Morphismus $f : U \rightarrow L = \text{Spec } R[z_0, z_1]/(z_0z_1 - \pi)$ und D ein Cartierdivisor auf X mit Träger in X_s , der auf U mit $f^*(\text{div}(z_0))$ übereinstimmt.

Die geometrischen Punkte $x : \text{Spec } \bar{K} \rightarrow U$ des betrachteten Schemas lassen sich durch ihre Koordinaten $x^\# \circ f^\#(z_0), x^\# \circ f^\#(z_1)$ beschreiben. Ist x ein geometrischer Punkt, der in U spezialisiert, so gilt $x^\#(f^\#z_0), x^\#(f^\#z_1) \in R_{\bar{K}}$. Da der Divisor D in U durch $f^\#(z_0)$ gegeben ist, folgt mit Proposition 3.7

$$f_D(x) = -\log_b\left(\left|x^\#(f^\#(z_0))\right|\right).$$

Die Koordinatenfunktion f_D wird in diesem Fall also durch die Exponentialbewertung der z_0 -Komponente des Punktes x gegeben.

Bemerkung 3.11. Die hier definierten Metriken stimmen mit den Definitionen von Zhang überein: Ist K algebraisch abgeschlossen und X ein projektives S -Schema, so stimmt Definition 3.4 mit [Zha95, (1.1)] überein: Zhang betrachtet ebenfalls ein Geradenbündel \mathcal{L} , das Modell eines Geradenbündels L ist, es gibt also einen Modellisomorphismus $\varphi : \mathcal{L}_\eta \rightarrow L$.

Zur Definition der Metrik an einem geometrischen Punkt $x \in X(\bar{K})$ wird mittels des Bewertungskriteriums für Eigentlichkeit der Punkt x zu $\tilde{x} : R_{\bar{K}} \rightarrow X$ fortgesetzt. Nach Pullback mit \tilde{x} bzw. x erhalten wir ein Geradenbündel $\tilde{x}^*\mathcal{L}$, das über den Morphismus $\tilde{x}^*\varphi : \tilde{x}^*(\mathcal{L}_\eta) \rightarrow x^*L$ ein Modell des Geradenbündels x^*L ist. Die induzierte Abbildung auf den globalen Schnitten $\Gamma(\bar{S}, x^*\mathcal{L}) \rightarrow (x^*\mathcal{L})_{\bar{\eta}}$ ist injektiv, da sie (auf nichtkanonische Weise) mit der Abbildung $R \rightarrow \text{Quot } R$ übereinstimmt. Wir dürfen daher $\Gamma(\bar{S}, x^*\mathcal{L})$ als Teilmenge von $(x^*\mathcal{L})_{\bar{\eta}}$ auffassen. Zhang kann damit die Norm eines Schnittes $l \in L(x) = (x^*\mathcal{L})_{\bar{\eta}}$ definieren durch

$$\|l\|' := \inf_{a \in K} \{|a| \mid l \in a\Gamma(\bar{S}, \tilde{x}^*\mathcal{L})\} = \inf_{a \in K^\times} \{|a| \mid la^{-1} \in \Gamma(\bar{S}, \tilde{x}^*\mathcal{L})\}.$$

Um zu sehen, dass $\|l\|'$ mit $\|l\|$ aus Definition 3.4 übereinstimmt, betrachten wir eine Trivialisierung $\psi : x^*\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{O}_{\bar{S}}$ des Geradenbündels $x^*\mathcal{L}$. Die Inklusion $\Gamma(\bar{S}, x^*\mathcal{L}) \subseteq (x^*\mathcal{L})_\eta$ identifiziert sich darüber mit der Inklusion $R_{\bar{K}} \subseteq \bar{K}$. Da schließlich für jedes $a \in K$ genau dann $a \in R_{\bar{K}}$ gilt, wenn $|a| \leq 1$ ist, folgt

$$\|l\|' = \inf_{a \in K} \{|a| \mid la^{-1} \in \tilde{x}^*\mathcal{L}\} = \inf_{a \in K} \{|a| \mid \psi(l)a^{-1} \in R\} = |\psi(l)| = \|l\|_x.$$

Die gleiche Überlegung zeigt die Übereinstimmungen mit der von Zhang in [Zha93, (1.1),(1.3)] definierten Metrik, falls X eine regulär strikt semistabile Kurve ist.

3.2. Die Reduktionsabbildung

Ab jetzt sollen wieder ausschließlich regulär strikt semistabile S -Schemata X betrachtet werden. Als eine weitere technische Voraussetzung nehmen wir an, dass die simpliziale Reduktionsmenge keine Mehrfachkanten aufweist. Dies ist keine starke Einschränkung, da wir aus einem regulär strikt semistabilen S -Schema X durch verzweigten Basiswechsel $S_n \rightarrow S$ stets ein regulär strikt semistabiles Schema über S_n erhalten können; für Kurven wurde dies in Algorithmus 2.4 gezeigt. Um Koordinatenfunktionen betrachten zu können, sei außerdem X als eigentlich über S vorausgesetzt. Wir identifizieren die Ecken $C \in \mathcal{R}(X)_0$ der Reduktionsmenge mit den irreduziblen Komponenten der speziellen Faser von X_s . Da X regulär strikt semistabil ist, wird jede Komponente $C \in \mathcal{R}(X)_0$ durch einen Cartierdivisor beschrieben und daher können wir ihr nach Definition 3.6 eine Koordinatenfunktion $f_C : X_\eta(\bar{K}) \rightarrow \mathbb{R}$ zuordnen.

Sie ermöglicht uns, eine Abbildung der abgeschlossenen Punkte der geometrischen Faser $X(\bar{K})$ des Schemas X in die geometrische Realisierung der Reduktionsmenge $\mathcal{R}(X)$ zu definieren. Wir nutzen dazu die Beschreibung der geometrischen Realisierung $|\mathcal{R}(X)|$ mittels Koordinatenfunktionen (Proposition A.17) und müssen zunächst zeigen, dass die Funktionen f_C tatsächlich Koordinatenfunktionen zum simplizialen Komplex $\mathcal{R}(X)$ bilden:

Proposition 3.12. *Sei X ein eigentliches regulär strikt semistabiles S -Schema mit einer Reduktionsmenge ohne Mehrfachsimplices, sowie $x \in X(\bar{K})$. Dann gilt $\sum_{C \in \mathcal{R}(X)_0} f_C(x) = 1$ mit $f_C(x) \geq 0$ für alle $C \in \mathcal{R}(X)_0$. Dabei ist genau dann $f_C(x) > 0$, wenn x in einen beliebigen Punkt der Komponente C spezialisiert.*

Beweis. Die spezielle Faser X_s wird durch den Hauptdivisor $D_\pi = \text{div } \pi$ beschrieben. Da X_s reduziert ist, gilt $\sum_{C \in \mathcal{R}(X)_0} D_C = D_\pi$ und mit Proposition 3.8 erhalten wir $\sum_{C \in \mathcal{R}(X)_0} f_C(x) = f_{D_\pi}(x)$. Da nach Proposition 3.7 $f_{D_\pi}(p) = 1$ für jeden Punkt $p \in X(\bar{K})$ gilt, folgt die erste Behauptung.

Für die zweite Behauptung sei der geometrische Punkt x wieder zu einem $R_{\bar{K}}$ -rationalen Punkt $\tilde{x} \in X(R_{\bar{K}})$ fortgesetzt. Wir betrachten eine Umgebung $U \subset X$ von \tilde{x} , in der der effektive Cartierdivisor D_C durch einen Schnitt $h \in \mathcal{O}_U(U)$ gegeben wird. Mit Proposition 3.7 folgt sofort $f_{D_C}(x) = -\log_b(|x^\# h|) \geq 0$.

Der Punkt x spezialisiert nach Definition genau dann in die Komponente C , wenn das Bild des speziellen Punktes $\bar{s} \in \text{Spec } R_{\bar{K}}$ unter \tilde{x} in C liegt, wenn also der Keim $h_{\tilde{x}(\bar{s})}$ im Maximalideal $\mathfrak{m}_{\tilde{x}(\bar{s})}$ des lokalen Rings $U_{\tilde{x}(\bar{s})}$ liegt. Dies ist äquivalent dazu, dass $\tilde{x}^\#(h)$ im Maximalideal $\{x \in R_{\bar{K}} \mid |x| < 1\}$ von $R_{\bar{K}}$ liegt. Nach Proposition 3.7 ist dies äquivalent zu $f_C(x) > 0$. \square

Das Tupel $(f_C(x))_{C \in \mathcal{R}(X)_0}$ bildet folglich für jeden Punkt $x \in X(\bar{K})$ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $\mathcal{R}(X)_0$ mit Träger in einem Element aus $\mathcal{R}_S(X)$, also einem Simplex der Reduktionsmenge. Nach Proposition A.17 dürfen wir $(f_C(x))_{C \in \mathcal{R}(X)_0}$ als Punkt von $|\mathcal{R}(X)|$ auffassen.

Definition 3.13. Sei X ein eigentliches regulär strikt semistabiles S -Schema. Die durch die Koordinatenfunktionen induzierte Abbildung

$$\text{Red}_X : X(\bar{K}) \rightarrow |\mathcal{R}(X)|, \quad x \in X(\bar{K}) \mapsto (f_C(x))_{C \in \mathcal{R}(X)_0}$$

heißt *Reduktionsabbildung*.

Sie zeigt gutes Verhalten bei Basiswechsel:

Proposition 3.14. *Sei $g : X \rightarrow Y$ ein dominanter Morphismus zwischen eigentlichem regulär strikt semistabilen Schemata. Dann kommutiert g_* mit der Reduktionsabbildung, d.h. das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} X(\bar{K}) & \xrightarrow{\text{Red}_X} & |\mathcal{R}(X)| \\ g_* \downarrow & & \downarrow g_* \\ Y(\bar{K}) & \xrightarrow{\text{Red}_Y} & |\mathcal{R}(Y)| \end{array}$$

kommutiert. (Hierbei wird durch den Pfeil g_* rechts im Bild der vom Morphismus $g_* : \mathcal{R}(X) \rightarrow \mathcal{R}(Y)$ aus Proposition 1.17 induzierten Morphismus der geometrischen Realisierungen bezeichnet.)

Beweis. Da f ein Morphismus zwischen reduzierten lokal noetherschen Schemata ist und die einzige irreduzible Komponente von X nach Voraussetzung das Schema Y dominiert, existiert ein Pullback $g^* : \text{CaDiv}Y \rightarrow \text{CaDiv}X$.

Sei x ein Punkt aus $X(\bar{K})$. Wir haben zu zeigen, dass die Koordinatenfunktionen von $\text{Red}_Y \circ g_*(x)$ und $g_* \circ \text{Red}_X(x)$ übereinstimmen. Mit der expliziten Beschreibung der Abbildung $g_* : |\mathcal{R}(X)| \rightarrow |\mathcal{R}(Y)|$ aus Proposition A.17 haben wir für jedes Element $C \in \mathcal{R}(Y)_0$ die Gleichheit

$$f_C(g_*(x)) = \sum_{C' \in (g_*)^{-1}(C)} f_{C'}(x)$$

zu beweisen.

Da beide Schemata regulär strikt semistabil sind, können wir C und $(g_*)^{-1}(C) = \{C'_1, \dots, C'_l\}$ als Elemente von $\text{CaDiv}Y$ bzw. $\text{CaDiv}X$ auffassen. Nach [Gör10, Cor. 11.49] gilt $g^*(C) = g^{-1}(C)$ und mit Y_s ist auch $g^{-1}(C)$ reduziert ist. Daher enthält Y_s jeden der Primdivisoren C'_1, \dots, C'_l mit Vielfachheit 1. Es gilt daher

$$g^*(C) = C'_1 + \dots + C'_l.$$

Daraus folgt mit Proposition 3.8 und Proposition 3.9 die Behauptung

$$f_C(g_*(x)) = f_{g^*(C)}(x) = f_{C'_1}(x) + \dots + f_{C'_l}(x).$$

□

Eine erste Anwendung für Proposition 3.14 finden wir bei der Betrachtung der Projektionen eines Produktmodells.

Korollar 3.15. *Sei X eine regulär strikt semistabile S -Kurve mit einer Totalordnung $<$ auf ihrem Reduktionsgraphen $\Gamma(X)$. Es bezeichne $W := W(X, <, d)$ das in Algorithmus 2.8 konstruierte Modell des Produktes $(X_\eta)^d$. Wir bezeichnen die Verkettung aus der Aufblasung $W \rightarrow X^d$ und der Projektion $\text{pr}_i : X^d \rightarrow X$ auf den i -ten Faktor mit $\tilde{\text{pr}}_i : W \rightarrow X$. Diese Morphismen sind dominant, daher kommutiert nach Proposition 3.14 das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} W(\bar{K}) & \xrightarrow{\text{Red}_W} & |\mathcal{R}(W)| \\ (\tilde{\text{pr}}_i)_* \downarrow & & \downarrow (\tilde{\text{pr}}_i)_* \\ X(\bar{K}) & \xrightarrow{\text{Red}_X} & |\mathcal{R}(X)|. \end{array}$$

Hierbei stimmt der von pr_i induzierte Morphismus $(\tilde{\text{pr}}_i)_* : |\mathcal{R}(W)| \rightarrow |\mathcal{R}(X)|$ mit der Projektion von $|\mathcal{R}(W)| = |\mathcal{R}(X)^d|$ auf den i -ten Faktor überein. Es ist daher möglich, die Reduktionsabbildung komponentenweise zu bestimmen.

Bemerkung 3.16. Sei K_n eine algebraische Erweiterung vom Grad n . Da K vollständig ist, lässt sich die Bewertung von K eindeutig auf K_n fortsetzen. Wir bezeichnen den Bewertungsring von K_n mit R_n und sein Spektrum mit $S_n := \text{Spec } R_n$. Da der Restklassenkörper von R algebraisch abgeschlossen ist, ist die Erweiterung K_n/K total verzweigt vom Index n und wir können daher Uniformisierer $\pi_n \in R_n$, $\pi \in R$ von R_n bzw. R wählen, so dass π unter dem kanonischen Morphismus $R \rightarrow R_n$ auf π_n^n abgebildet wird. Wir sind daher in der Situation aus Abschnitt 2.2. Sei X_n ein regulär strikt semistabiles S_n -Schema. Dann lässt sich auf X_n ebenfalls eine Reduktionsabbildung angeben, indem man alle Betrachtungen dieses Kapitels mit dem diskreten Bewertungsring R_n und seinem Uniformisierer π_n durchführt. Hierzu muss eine Norm $|\cdot|_n$ auf \bar{K} gewählt werden, die $|\pi_n|_n = 1/b$ erfüllt. Sie unterscheidet sich damit von $|\cdot|$ lediglich in der Normierung: $|\cdot|_n = \sqrt[n]{|\cdot|}$.

Wir können daher die Reduktionsabbildung Red_{X_n} des S_n -Schemas unter Verwendung der Norm $|\cdot|$ ausdrücken und erhalten damit

$$\text{Red}_{X_n} : X_n(\bar{K}) \rightarrow |\mathcal{R}(X)|, \quad x \in X_n(\bar{K}) \mapsto (f_C^{|\cdot|_n}(x) = n f_C^{|\cdot|}(x))_{C \in \mathcal{R}(X_n)_0}.$$

Mit dieser Beschreibung ist es möglich, die Verträglichkeit der Reduktionsabbildung mit verzweigtem Basiswechsel zu untersuchen. Ist X eine regulär strikt semistabile Kurve über S , so haben wir bereits gesehen, dass für das regulär strikt semistabile Modell X_n des Basiswechsels der Reduktionsgraph $\Gamma(X_n)$ aus $\Gamma(X)$ durch n -fache Unterteilung hervorgeht. Auch in diesem Fall lässt sich ein kanonischer Isomorphismus zwischen den geometrischen Realisierungen angeben, die gleichmäßige Unterteilung $\text{unt}_n : |\Gamma(X_n)| \simeq |\Gamma(X)|$ und man erhält ein kommutatives Diagramm wie folgt

Proposition 3.17. *Es sei K_n/K eine algebraische Körpererweiterung vom Grad n , R_n der diskrete Bewertungsring der Bewertungsfortsetzung von K auf K_n und $S_n := \text{Spec } R_n$ dessen Spektrum. Es sei X_n das durch Algorithmus 2.4 bestimmte Modell der Kurve X_η über R_n und $\varphi : X_n \rightarrow X$ der Aufblasungsmorphismus. Dann kommutiert das folgende Diagramm:*

$$\begin{array}{ccc} X_n(\bar{K}) & \xrightarrow{\text{Red}_{X_n}} & |\Gamma(X_n)| \\ \varphi \downarrow & & \text{unt}_n \downarrow \\ X(\bar{K}) & \xrightarrow{\text{Red}_X} & |\Gamma(X)|. \end{array}$$

Beweis. Sei $x \in X_n(\bar{K})$ ein geometrischer Punkt von X_n und $\tilde{x} : X_n(R_{\bar{K}})$ seine Fortsetzung auf $R_{\bar{K}}$. Das Schema X_n wurde mittels Aufblasung in den Doppelpunkten aus dem Basiswechsel $X \times \text{Spec } R_n$ gewonnen. Falls daher $\varphi(x)$ in einen glatten Punkt von X spezialisiert, also falls $\varphi \circ \tilde{x}(\bar{s})$ ein glatter Punkt von X ist, so liegt auch bereits $\tilde{x}(\bar{s})$ in einem glatten Punkt von X_n und daher in genau einer Komponente C' von $(X_n)_s$, der strikten Transformierten der Komponente C .

Bildet andererseits $\varphi \circ \tilde{x}(\bar{s})$ einen Doppelpunkt von X_s , so dürfen wir uns auf eine offene Umgebung U einschränken, die eine étale Abbildung $\varphi : U \rightarrow L$ auf

das Standardschema $L = \text{Spec } R[x_0, x_1]/(x_0x_1 - \pi)$ erlaubt. Wie im Beweis zu Satz 2.5 gezeigt erhält man ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} U_n & \xrightarrow{\varphi'} & U \\ \psi_n \downarrow & & \downarrow \psi \\ L_n & \xrightarrow{\varphi''} & L \end{array}$$

mit einer étalen Abbildung $\psi_n : U_n \rightarrow L_n$ zwischen den entsprechenden aus U und L durch Aufblasungen gewonnenen regulär strikt semistabilen Modellen. Die Abbildungen ψ und ψ_n können so gewählt werden, dass sie Bijektionen ψ_* bzw. $(\psi_n)_*$ auf den Reduktionsmengen induzieren. Wir können uns daher aufgrund von Proposition 3.14 auf den Fall $X = L$ beschränken.

Sei somit $X = L = \text{Spec } R[z_0, z_1]/(z_0z_1 - \pi)$ und L_n das mittels Algorithmus 2.4 bestimmte Modell über $S_n = \text{Spec } R_n$ und $\tilde{x} : R_{\bar{K}} \rightarrow L_n$. Wie stets bezeichne die Komponenten von L_s mit C_0 und C_1 ; nach Lemma 2.7 besteht $(L_n)_s$ aus irreduziblen Komponenten C'_0, \dots, C'_n , wobei C'_0 und C'_n die strikten Transformierten der Komponenten $C_0 = \text{div}(z_1)$ bzw. $C_1 = \text{div}(z_0)$ bilden. Fassen wir C_0, C_1 sowie C'_0, \dots, C'_n als Cartierdivisoren auf, so gilt ebenfalls nach Lemma 2.7 die Beziehung

$$\varphi^*(C_0) = \sum_{i=0}^n (n-i)C'_i.$$

In einem geometrischen Punkt $\tilde{x} : R_{\bar{K}} \rightarrow L_n$ erhalten wir daraus mittels Proposition 3.8 und Proposition 3.9 die Gleichung

$$f_{C_0}(\varphi(x)) = \sum_{i=0}^n (n-i)f_{C'_i}^{[1:n]}(x) = \sum_{i=0}^k \frac{(n-i)}{n} (nf_{C'_i}^{[1]}(x)).$$

Dies liefert bei Beachtung der Normierung (vgl. Bemerkung 3.16) und mit der Definition der Abbildung unt_n die Behauptung. \square

Bemerkung 3.18. Mittels des letzten Lemmas erkennt man, dass die hier definierte Reduktionsabbildung mit der üblichen Definition von Rumely ([Rum89, 2.4.2]) übereinstimmt: Um nach Rumely die Reduktion eines geometrischen Punkts $x \in X_{\eta}(\bar{K})$ zu bestimmen, muss man zu einer verzweigten Erweiterung von R_n von R übergehen, in der der Punkt x in einen glatten Punkt spezialisiert. Die Spezialisierung von x liegt folglich in genau einer Komponente C' der speziellen Faser X_n , also einem Element von $\Gamma(X_n)$. Das Bild dieser Komponente unter der Abbildung unt_n der Reduktionsgraphen wird Reduktion von x genannt.

Da der Punkt $x \in X_n(\bar{K})$ in genau eine Komponente $C' \in \Gamma(X_n)$ spezialisiert, so ist nach Proposition 3.12 auch $\text{Red}_{X_n}(x) = C'$ und mit Proposition 3.17 folgt schließlich auch die Übereinstimmung von $\text{unt}_n(C')$ mit $\text{Red}_X(x)$.

Mittels der Reduktionsabbildung erhalten wir schließlich eine Möglichkeit, vertikale Divisoren auf regulär strikt semistabilen S -Varietäten durch analytische Objekte, nämlich Funktionen auf der geometrischen Realisierung der Reduktionsmengen, zu beschreiben. Schlüssel dafür ist die folgende Aussage.

Proposition 3.19. *Sei X eine regulär strikt semistabile S -Kurve mit Totalordnung $<$ auf $X_s^{(0)}$, das Schema $W = W(X, d)$ das nach Algorithmus 2.8 gebildete regulär strikt semistabile Produktmodell, sowie $D \in \text{CaDiv}W$ ein Cartierdivisor mit Träger in der speziellen Faser. Dann faktorisiert die Funktion f_D über die Reduktionsabbildung. Die induzierte Abbildung wird mit $\tilde{f}_D : |\mathcal{R}(W)| \rightarrow \mathbb{R}$ bezeichnet. Die Funktion \tilde{f}_D ist innerhalb der geometrischen Realisierung jedes Simplex von $\mathcal{R}(W)$ affin und daher durch die Werte an den Eckpunkten $C' \in \mathcal{R}(W)_0$ eindeutig festgelegt. Es gilt*

$$D = \sum_{C' \in \mathcal{R}(W)_0} f_D(C')[C'].$$

Beweis. Mit den bisherigen Definitionen ist die Faktorisierung eine Trivialität: Ist D der Cartierdivisor einer Komponente $C \in \mathcal{R}(W)_0$, so ist f_C selbst Koordinatenfunktion und damit auf jedem Simplex affin. Da jeder Cartierdivisor mit Träger in W_s eine Linearkombination solcher Divisoren ist, folgt die erste Aussage für beliebige Divisoren aus Proposition 3.8.

Sei $D = \sum_{C \in \mathcal{R}(W)_0} n_C [C]$ und $C' \in \mathcal{R}(W)_0$ eine beliebige Komponente. Wir wählen einen Punkt $x \in W(\bar{K})$, der nur in die Komponente C' spezialisiert. Für diesen gilt nach Proposition 3.12 offenbar

$$f_D(x) = \sum_{C \in \mathcal{R}(W)_0} n_C f_C(x) = n_{C'}$$

und die gesuchte Gleichung der Divisoren folgt sofort. \square

3.3. Morphismen zwischen Modellen

Die Funktionen f_D erweisen sich nützlich für die Bildung von Morphismen zwischen Modellen. Die durch die Verfahren aus Kapitel 2 gebildeten Modelle sind sich ähnlich genug, dass man Abbildungen zwischen Modellen erhalten kann, wenn die Reduktionsmengen verträglich sind:

Satz 3.20. *Es sei K_n eine algebraische Körpererweiterung vom Grad n , R_n der Bewertungsring der Bewertungsfortsetzung von K auf K_n und $S_n := \text{Spec } R_n$. Sei X eine eigentliche regulär strikt semistabile Kurve über S und X_n das in Algorithmus 2.4 bestimmte regulär strikt semistabile Modell des Basiswechsels mit S_n . Es bezeichne $W = W(X, <, d)$ das Modell des Produktes X^d und weiterhin $W_n = W(X_n, <, d)$ entsprechend das Modell des Produktes $(W_n)^d$. Dann existiert ein Morphismus $\varphi : W_n \rightarrow W$.*

Der Beweis nutzt die universelle Eigenschaft der Aufblasung. Als Grundidee dient das folgende Lemma:

Lemma 3.21. *Sei W ein eigentliches regulär strikt semistabiles Schema und D_1, D_2 zwei effektive Cartierdivisoren mit Träger in W_s . Der schematheoretische*

Durchschnitt $D_1 \cap D_2$ ist genau dann wieder ein Cartierdivisor D , wenn die Funktion $\min(f_{D_1}, f_{D_2})$ auf jedem Simplex von $\mathcal{R}(W)$ affin ist. Ist dies der Fall, dann gilt für den Cartierdivisor D

$$f_D = \min(f_{D_1}, f_{D_2}).$$

Beweis. Ist der schematheoretische Durchschnitt $D = D_1 \cap D_2$ ein Cartierdivisor, so ist f_D affin. Sei $\tilde{x} \in W(R_{\bar{K}})$ ein $R_{\bar{K}}$ -Punkt von X und $U \subseteq W$ trivialisierende offene Umgebung für die Divisoren D, D_1, D_2 . Da die Divisoren effektiv sind, werden sie auf U durch Schnitte $r, r_1, r_2 \in \Gamma(\mathcal{O}_W, U)$ gegeben. Die Voraussetzung $D = D_1 \cap D_2$ impliziert eine Gleichheit von Idealen $(r) = (r_1, r_2)$ also auch

$$(x^*(r)) = (x^*(r_1), x^*(r_2)).$$

Da $R_{\bar{K}}$ ein Hauptidealring ist, folgt $|x^*(r)| = \min(|x^*(r_1)|, |x^*(r_2)|)$ und mit Proposition 3.7 schließlich $f_D(\tilde{x}) = \min(f_{D_1}(\tilde{x}), f_{D_2}(\tilde{x}))$.

Für die Umkehrung dürfen uns auf einen Simplex einschränken. Dort impliziert die Voraussetzung, dass eine der beiden Funktionen die andere auf dem ganzen Simplex dominiert, ohne Einschränkung sei folglich $f_{D_1} < f_{D_2}$. Dann ist jedoch $D_2 D_1^{-1}$ ein effektiver Cartierdivisor, wie man ebenfalls mittels Proposition 3.7 in lokalen Koordinaten überprüfen kann. Folglich gilt $D_1 \cap D_2 = D_1$ und damit ist $D_1 \cap D_2$ insbesondere selbst ein Cartierdivisor. \square

Wir zeigen zunächst die folgende Verträglichkeit der Reduktionsmengen:

Lemma 3.22. *Sei X eine regulär strikt semistabile Kurve über S und X_k das in Algorithmus 2.4 bestimmte regulär strikt semistabile Modell, $W = W(X, <, d)$ und W_n die mittels Algorithmus 2.8 gebildeten Produktmodelle von X^d bzw. $(X_n)^d$. Dann gibt es einen kanonischen Homöomorphismus $\tau : |\mathcal{R}(W_n)| \rightarrow |\mathcal{R}(W)|$ derart, dass das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} W_n(\bar{K}) & \xrightarrow{\cong} & W(\bar{K}) \\ \text{Red} \downarrow & & \text{Red} \downarrow \\ |\mathcal{R}(W_n)| & \xrightarrow{\tau} & |\mathcal{R}(W)| \end{array}$$

kommutiert. Es sei $f : |\mathcal{R}(W)| \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, die auf jedem Simplex von $\mathcal{R}(W)$ affin ist. Dann ist auch $f \circ \tau$ auf jedem Simplex von $\mathcal{R}(W_n)$ linear.

Beweis. Nach Korollar 3.15 und Proposition 3.17 kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} W_n(\bar{K}) & \longrightarrow & \prod_i X_n(\bar{K}) & \longrightarrow & \prod_i X(\bar{K}) & \longrightarrow & W(\bar{K}) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ |\mathcal{R}(W_n)| & \longrightarrow & \prod_i |\mathcal{R}(X_n)| & \longrightarrow & \prod_i |\mathcal{R}(X)| & \longrightarrow & |\mathcal{R}(W)| \end{array}$$

und wir erhalten τ als Verkettung aller kanonischer Isomorphismen in der zweiten Zeile.

Für die zweite Aussage betrachten wir die nach Satz 2.5, Satz 2.10 und Proposition A.9 gegebene kanonische Isomorphismus von simplizialen Mengen:

$$(3.1) \quad \varphi : \mathcal{R}(W_n) \simeq \prod_i \mathcal{R}(X_n) \simeq \prod_i \text{unt}_n \mathcal{R}(X) \simeq \text{unt}_n \mathcal{R}(W).$$

Da φ ein Isomorphismus ist, genügt es, die Aussage für den Morphismus

$$\tau \circ |\varphi| : |\text{unt}_n(\mathcal{R}(W))| \rightarrow |\mathcal{R}(W)|$$

zu zeigen. Dieser stimmt jedoch nach Konstruktion mit der kanonischen Abbildung aus Proposition A.23 überein. Daher folgt die Behauptung aus Proposition A.24. \square

Beweis von Satz 3.20. Wir betrachten die Definition von W als sukzessive Aufblasung von W^d :

$$W = W^{[N]} \rightarrow \cdots \rightarrow W^{[1]} \rightarrow W^{[0]}.$$

Offenbar gibt es einen Morphismus $\varphi^{[0]} : W_n \rightarrow W^{[0]}$. Wir weisen die universelle Eigenschaft der Aufblasungen nach, um Abbildungen $\varphi^{[i]} : W_n \rightarrow W^{[i]}$ zu konstruieren.

Sei $\varphi^{[i]} : W_n \rightarrow W^{[i]}$ bereits konstruiert. Das Zentrum des Aufblasungsmorphismus $W^{[i+1]} \rightarrow W^{[i]}$ kann nach Korollar 2.16 als Schnitt von Cartierdivisoren $C = D_1 \cap \cdots \cap D_l$ beschrieben werden. Die Komponente C wird nach Aufblasung ein Cartierdivisor, folglich gilt für die Funktionen $\min(f_{D_1}, \dots, f_{D_l})$ die Bedingung aus Lemma 3.21.

Nach Lemma 3.22 gilt auch für den zurückgezogenen Divisor $(\varphi^{[i]})^{-1}(C) = (\varphi^{[i]})^* D_1 \cap \cdots \cap (\varphi^{[i]})^* D_l$ die Bedingung aus Lemma 3.21. Damit ist $(\varphi^{[i]})^{-1}(C)$ ebenfalls Cartierdivisor und die universelle Eigenschaft der Aufblasung liefert die gewünschte Abbildung $\varphi^{[i+1]} : W_n \rightarrow W^{[i+1]}$. Es folgt die Behauptung. \square

4. Schnittzahlen in Produktsituationen

Ziel dieses Abschnittes ist es, die kombinatorische Struktur der Reduktionsmenge auszunutzen, um Schnittzahlen zu bestimmen. Es sei S das Spektrum eines diskreten Bewertungsringes mit algebraisch abgeschlossenem Restklassenkörper und X eine regulär strikt semistabiles S -Kurve mit einer Totalordnung \leq auf $X^{(0)}$. Den Reduktionsgraph von X bezeichnen wir mit $\Gamma := \Gamma(X)$. Zu $d \in \mathbb{N}$ betrachten wir das nach Algorithmus 2.8 gebildete Produktmodell $W := W(X, \leq, d)$ von $(X_\eta)^d$. Nach Satz 2.10 gilt für die simpliziale Reduktionsmenge von W die Beziehung $\mathcal{R}(W) = \Gamma^d$. Im folgenden Kapitel untersuchen wir den Chowrings von W und zeigen, dass einige wesentliche Relationen in $\text{CH}_{W_s}(W)$ nur von der kombinatorischen Struktur der Reduktionsmenge $\mathcal{R}(W) := \Gamma^d$ abhängen. Es macht daher Sinn, einen Ring $\mathcal{C}(\Gamma^d)$ zu definieren, der genau diese Daten kodiert. Es wird gezeigt, dass es einen Homomorphismus von \mathbb{Z} -Algebren von $\mathcal{C}(\Gamma^d)$ in den Chowring von W gibt und es möglich ist, Schnittzahlen bereits in $\mathcal{C}(\Gamma^d)$ zu berechnen. Weiter lässt sich zeigen, dass die Berechnung der Schnittzahlen von $\mathcal{C}(\Gamma^d)$ in geeignetem Sinne „lokal“ erfolgen kann, dass es also genügt, den Fall zu betrachten, dass der Graph Γ lediglich aus einer Kante besteht. Für derartige Graphen schließlich werden die Schnittzahlen für $d = 2$ und $d = 3$ explizit bestimmt.

4.1. Der Chowring regulärer Schemata

Wir wiederholen im Folgenden einige wesentliche Aussagen der Schnitttheorie nach Fulton. Dabei beschränken wir uns auf das noch relativ einfach durchzuführende Schnittprodukt mit Divisoren. Dazu betrachten wir stets reguläre Schemata über einem regulären Basisschema. Da diese nach [Liu02, 8.2.16] universell katenär sind, können wir ohne größere Probleme den Chowring nach der Kodimension graduieren. Wir übernehmen dabei die Definition aus [Sou92, I.2].

Definition 4.1. Es sei S ein reguläres noethersches Schema, X ein reguläres S -Schema von endlichem Typ und $Y \subseteq X$ eine abgeschlossene Teilmenge.

- (i) Wir bezeichnen mit $Z_Y^p(X)$ die von den Elementen aus $X^{(p)} \cap Y$ erzeugte freie abelsche Gruppe. Elemente aus $Z_Y^p(X)$ werden als *p-Zykel mit Träger in Y* bezeichnet.

- (ii) Zu jedem Punkt $x \in X^{(p-1)} \cap Y$ von Kodimension $p-1$ und jeder rationalen Funktion $f \in \kappa(x)$ wird ein p -Zykel $\text{div}(f) \in Z_Y^p(X)$ definiert durch

$$\text{div}(f) = \sum_{y \in X^{(p)} \cap \overline{\{x\}}} \text{ord}_{\mathcal{O}_{X,y}}(f) y,$$

wobei die Ordnung $\text{ord}_y(f)$ wie in [Sou92, I.1] definiert ist. Die von $\text{div}(f)$ für alle $x \in X^{(p-1)} \cap Y, f \in \kappa(x)$ erzeugte Untergruppe von $Z_Y^p(X)$ heißt die Gruppe der *zu 0 rational äquivalenten Zykel mit Träger Y* und wird mit $\text{Rat}_Y^p(X)$ bezeichnet.

- (iii) Die Gruppe

$$\text{CH}_Y^p(X) := Z_Y^p(X)/\text{Rat}_Y^p(X)$$

heißt *Chowgruppe von X mit Träger Y*. Ist $V \subseteq Y$ eine abgeschlossene irreduzible Teilmenge von Y mit generischem Punkt x_V , so bezeichnen wir die durch den Punkt x_V repräsentierte Klasse in $\text{CH}_Y^p(X)$ mit $[V]$.

Bemerkung 4.2. Es sei S ein reguläres noethersches Schema, X ein reguläres S -Schema von endlichem Typ und $Y' \subseteq Y \subseteq X$ zwei abgeschlossene Teilmengen. Dann gibt es einen kanonischen Morphismus

$$Z_{Y'}^p(X) \rightarrow Z_Y^p(X),$$

der durch die Zuordnung $[V] \mapsto [V]$ gegeben ist. Dieser bildet $\text{Rat}_{Y'}^p$ auf Rat_Y^p ab und liefert daher eine kanonische Abbildung

$$\text{CH}_{Y'}^p(Y) \rightarrow \text{CH}_Y^p(X).$$

Um den Zusammenhang dieser Definitionen mit denen aus [Ful98, 1.3] explizit angeben zu können, benötigen wir zunächst noch den Begriff der relativen Dimension aus [Ful98, 20.1]:

Definition 4.3. Es sei S ein reguläres Schema und X ein S -Schema von endlichem Typ mit Strukturmorphismus $\varphi : X \rightarrow S$.

- (i) Ist X irreduzibel mit generischem Punkt η_X , so definieren wir die *relative Dimension* von X bezüglich S durch

$$\dim_S(X) := \text{trdeg}(\kappa(\eta_X)/\kappa(\varphi(\eta_X))) - \dim(\mathcal{O}_{S,\varphi(\eta_X)}).$$

- (ii) Ist X ein beliebiges S -Schema von endlichem Typ, so heißt es *relativ äquidimensional* von Dimension d , falls für jede irreduzible Komponente $V \subseteq X$ gilt:

$$\dim_S(V) = d.$$

In diesem Fall bezeichnen wir d auch als *relative Dimension* von X und bezeichnen sie mit $\dim_S(X)$.

Da S universell katenär ist, erhält man folgende Eigenschaften der relativen Dimension.

Proposition 4.4. *Es sei S ein reguläres Schema und X, Y irreduzible S -Schemata von endlichem Typ.*

(i) *Es gilt*

$$\dim_S(X_{\text{red}}) = \dim_S(X).$$

(ii) *Ist $V \subseteq X$ ein irreduzibles abgeschlossenes Unterschema von X , so gilt*

$$\dim_S(V) = \dim_S(X) - \text{codim}(V, X).$$

(iii) *Ist $f : X \rightarrow Y$ ein dominanter Morphismus, so gilt*

$$\dim_S(X) = \dim_S(Y) + \text{trdeg}(\kappa(\eta_X)/\kappa(\eta_Y)),$$

wobei mit η_X und η_Y die generischen Punkte von X bzw. Y bezeichnet werden.

(iv) *Ist Y regulär und $f : X \rightarrow Y$ ein Morphismus von S -Schemata, so gilt*

$$\dim_S(X) = \dim_S(Y) + \dim_Y(X).$$

(v) *Ist k ein Körper und X ein k -Schema von endlichem Typ, so gilt*

$$\dim_{\text{Spec } k}(X) = \text{trdeg}(\kappa(\eta_X)/k) = \dim(X).$$

Falls daher X und S k -Schemata von endlichem Typ sind, so gilt

$$\dim_S(X) = \dim(X) - \dim(S).$$

(vi) *Ist $f : X \rightarrow Y$ ein flacher Morphismus, so gilt für jeden Punkt $y \in Y$*

$$\dim X_y = \dim_S(X) - \dim_S(Y).$$

Beweis. Behauptung (i) ist klar, da beim Übergang zum reduzierten Schema $\kappa(\eta_X)$ und $\varphi(\eta_X)$ unverändert bleibt. Wir können daher für die restlichen Aussagen X als reduziert annehmen.

Behauptungen (ii) und (iii) folgen dann aus [Ful98, Lemma 20.1]. Zum Beweis von (iv) bezeichne $V := f(X)$ das schemattheoretische Bild und wir betrachten die Faktorisierung von f als

$$f : X \rightarrow V \rightarrow Y.$$

Da der erste Morphismus dominant und der zweite eine abgeschlossene Immersion ist, folgt die Behauptung aus (ii) und (iii).

Behauptung (v) folgt direkt aus der Definition.

Für Behauptung (vi) lässt sich [Liu02, Cor 4.3.14] übertragen. Es sei dazu $x \in X_y$ ein abgeschlossener Punkt der Faser X_y . Daher gilt $\text{trdeg}(\kappa(x)/\kappa(y)) = 0$ und es folgt

$$\dim_S(\overline{\{x\}}) = \dim_S(\overline{\{y\}}).$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \dim(X_y) &= \dim(\mathcal{O}_{X_y, x}) = \dim \mathcal{O}_{X, x} - \dim \mathcal{O}_{Y, y} = \text{codim}(\overline{\{x\}}, X) - \text{codim}(\overline{\{y\}}, Y) \\ &= \dim_S(X) - \dim_S(\overline{\{x\}}) - \dim_S(Y) + \dim_S(\overline{\{y\}}) = \dim_S(X) - \dim_S(Y). \end{aligned}$$

□

Damit können wir Definition 4.1 mit der Definition der Chowgruppe aus [Ful98, 1.3] vergleichen:

Proposition 4.5. *Es sei S ein reguläres Schema und X ein relativ äquidimensionales S -Schema von endlichem Typ. Wir bezeichnen mit $Z_p(X)$, $\text{Rat}_p(X)$ und $A_p(X)$ die Gruppe der Zykel, der zu 0 rational äquivalenten Zykel sowie die Chowgruppe aus [Ful98, Kap 1]. Dann gilt für jedes abgeschlossene Unterschema $Y \subseteq X$ und $p \in \mathbb{N}$:*

$$\begin{aligned} Z_Y^p(X) &\simeq Z_{\dim_S(X)-p}(Y), \\ \text{Rat}_Y^p(X) &\simeq \text{Rat}_{\dim_S(X)-p}(Y), \\ \text{CH}_Y^p(X) &\simeq A_{\dim_S(X)-p}(Y). \end{aligned}$$

Beweis. Dies folgt sofort aus Proposition 4.4 (ii), da für jedes abgeschlossene integre Unterschema $V \subseteq Y$ gilt:

$$\dim_S(V) = \dim_S(X) - \text{codim}(V, X).$$

□

Die Definitionen von direktem Bild und flachem Pullback lassen sich durch kleine Anpassungen auf die Graduierung nach Kodimension übertragen.

Definition 4.6. Es sei S ein reguläres Schema und $f : X \rightarrow Y$ ein eigentlicher Morphismus von regulären relativ äquidimensionalen S -Schemata. Wir setzen $d := \dim_Y(X)$ und definieren das *direkte Bild*

$$f_* : Z^p(X) \rightarrow Z^{p-d}(Y)$$

als die eindeutiger lineare Abbildung mit $f_*(x) = \deg(\overline{\{x\}}/\overline{\{f(x)\}})f(x)$. Hierbei gelte wie üblich

$$\deg(\overline{\{x\}}/\overline{\{f(x)\}}) := \begin{cases} [\kappa(x) : \kappa(f(x))] & \text{falls } \kappa(x)/\kappa(f(x)) \text{ endliche Körpererweiterung,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Proposition 4.7. Die Abbildung f_* erhält rationale Äquivalenz und induziert daher eine Abbildung auf Chowringen mit Träger:

$$f_* : \mathrm{CH}_Z^p(X) \rightarrow \mathrm{CH}_{f(Z)}^{p-d}(Y).$$

Beweis. Es bezeichne Y' das Schema $f(Z)$ versehen mit der induzierten reduzierten Struktur und $X' := f^{-1}(Y')$ das schematoretische Urbild. Dann ist der Basiswechsel $f' : X' \rightarrow Y'$ ebenfalls eigentlich und nach [Ful98, 1.4, 20] existiert ein Morphismus $f'_* : Z_{\dim(X)-p}(X') \rightarrow Z_{\dim(X)-p}(Y')$ derart, dass

$$\begin{array}{ccc} Z_Z^p(X) & \xrightarrow{f_*} & Z_{f(Z)}^{p-d}(Y) \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ Z_{\dim_S(X)-p}(Z) & \longrightarrow & Z_{\dim_S(X)-p}(X') \xrightarrow{f'_*} Z_{\dim_S(Y)-(p-d)}(Y') \end{array}$$

kommutiert. Mit [Ful98, Thm 1.4, 20] folgt schließlich $f_*(\mathrm{Rat}_Z^p(X)) \subseteq \mathrm{Rat}_{f(Z)}^{p-d}(Y)$. \square

Definition 4.8. Es sei $f : X \rightarrow Y$ ein flacher Morphismus von regulären relativ äquidimensionalen S -Schemata und $Z \subseteq Y$ eine abgeschlossene Teilmenge. Dann definieren wir den *Pullback*

$$f^* : Z_Z^p(Y) \rightarrow Z_{f^{-1}(Z)}^p(X)$$

als die eindeutige lineare Abbildung, die für jedes abgeschlossene Unterschema $V \subseteq X$ von Kodimension p und mit $W := f^{-1}(V)$ die Gleichung

$$f^*([V]) := \sum_{y \in W^{(0)}} \text{Länge}_{\mathcal{O}_{W,y}}(\mathcal{O}_{W,y})y$$

erfüllt.

Proposition 4.9. Die Abbildung f^* erhält rationale Äquivalenz und induziert eine Abbildung

$$f^* : \mathrm{CH}_Z^p(Y) \rightarrow \mathrm{CH}_{f^{-1}(Z)}^p(X).$$

Beweis. Wir versehen die abgeschlossene Teilmenge Z mit der induzierten reduzierten Struktur und bezeichnen das schematoretische Urbild mit $X' := f^{-1}(Z)$. Da f flach ist, ist auch der Basiswechsel $f' : X' \rightarrow Z$ flach und nach [Liu02, Thm 4.3.12] gilt für jede irreduzible Komponente V von X'

$$\mathrm{codim}(V, X) = \dim(\mathcal{O}_{X, \eta_{V'}}) = \dim(\mathcal{O}_{Y, \eta_Z}) = \mathrm{codim}(Z, Y)$$

und daher ist X' relativ äquidimensional über Z . Wir bezeichnen diese Dimension mit $d := \dim_Z(X') = \dim_Y(X)$. Nach [Ful98, 1.7, 20] gibt es einen Morphismus

$f'^*: Z_{\dim(Y)-p}(Z) \rightarrow Z_{\dim(X)-p}(X')$ derart, dass

$$\begin{array}{ccc} Z_Z^p(Y) & \longrightarrow & Z_{f^{-1}(Z)}^p(X) \\ \simeq \downarrow & & \simeq \downarrow \\ Z_{\dim(Y)-p}(Z) & \xrightarrow{f'^*} & Z_{\dim(X)-p}(X') \end{array}$$

kommutiert. Dann folgt $f^*(\text{Rat}_Z^p(Y)) \subseteq \text{Rat}_{f^{-1}(Z)}^p(X)$ aus [Ful98, Thm 1.7, 20]. \square

Direktes Bild und flacher Pullback sind im folgenden Sinne verträglich:

Proposition 4.10. *Es sei*

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{f'} & Y' \\ g' \downarrow & & g \downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

ein kartesisches Diagramm von regulären S-Schemata von endlichem Typ, wobei X, Y, Y' relativ äquidimensional über S sind und f ein eigentlicher und g ein flacher Morphismus ist. Dann ist auch X' äquidimensional mit relativer Dimension

$$\dim_S(X') = \dim_S(X) + \dim_Y(Y').$$

Ist $Z \subseteq X$ eine abgeschlossene Teilmenge, so gilt für jedes Element $\alpha \in \text{CH}_Z^p(X)$ die Beziehung

$$f'_* g'^* \alpha = g^* f_* \alpha$$

in $\text{CH}_{g^{-1}(f(Z))}^{p-d}(Y')$ mit $d = \dim_Y(X) = \dim_{Y'}(X')$.

Beweis. Wir bestimmen zunächst die relative Dimension von X' . Hierfür genügt es zu zeigen, dass für jede irreduzible Komponente $V' \subseteq X'$ die Gleichung

$$\dim_X(V') = \dim_Y(Y')$$

gilt. Es bezeichne $x' \in X'$ den generischen Punkt der Komponente V' . Da g' flach ist, gilt $\text{codim}(g'(V'), X) = 0$ und daher

$$\dim_X(V') = \text{trdeg}(\kappa(x')/\kappa(g'(x'))) = \dim(X'_{g'(x')})$$

und mit Proposition 4.4(vi) folgt

$$\dim(Y'_{f(g'(x'))}) = \dim_S(Y') - \dim_S(Y).$$

Die noch zu zeigende Gleichheit $\dim(Y'_{f(g'(x'))}) = \dim(X'_{f'(x')})$ folgt schließlich aus dem kartesischen Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} X'_x & \longrightarrow & X'_y & \longrightarrow & Y'_y \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \kappa(x) & \longrightarrow & X_y & \longrightarrow & \kappa(y) \end{array}$$

unter Verwendung der Noether-Normalisierung.

Es bezeichne Z' die abgeschlossene Teilmenge $f(Z) \subseteq Y$ versehen mit der induzierten reduzierten Struktur. Wir betrachten den Basiswechsel des Diagramms mit der abgeschlossenen Immersion $Z' \rightarrow Y$:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X}' & \longrightarrow & \tilde{Y}' \\ \downarrow & & \tilde{g} \downarrow \\ \tilde{X} & \xrightarrow{\tilde{f}} & Z'. \end{array}$$

Nach [Ful98, Prop 1.7, 20] gilt für jeden k -Zykel $\alpha \in A_k(\tilde{X})$

$$\tilde{f}'_* \tilde{g}'^*(\alpha) = \tilde{g}^* \tilde{f}_*(\alpha)$$

als Gleichung in $A_{k+d}(\tilde{Y}')$. Mit der Verträglichkeit von direktem Bild und Pullback mit Wechsel des Trägers folgt dann auch die Gleichheit der Abbildungen

$$\begin{aligned} f'_* g'^* : \mathrm{CH}_Z^p(X) &\rightarrow \mathrm{CH}_{Z'}^{p+d}(Y'), \\ g^* f_* : \mathrm{CH}_Z^p(X) &\rightarrow \mathrm{CH}_{Z'}^{p+d}(Y'). \end{aligned}$$

□

Da die Gruppe der 1-kodimensionalen Zykeln regulärer Schemata mit der Gruppe der Cartierdivisoren in Bijektion steht, kann man einen allgemeineren Pullback definieren.

Definition 4.11. Es seien X und Y reguläre integre Schemata, $f : X \rightarrow Y$ ein dominanter Morphismus und $\alpha = \sum_i [V_i] \in Z^1(Y)$ ein 1-Zykel mit Träger in Z . Da Y regulär ist, sind die abgeschlossenen Unterschemata V_i gegeben durch Cartierdivisoren D_i . Da f dominant ist, existiert ein Pullback für Cartierdivisoren und wir setzen

$$f^*(\alpha) := \sum_i [f^* D_i].$$

Proposition 4.12. Es seien X, Y reguläre integre Schemata, $f : X \rightarrow Y$ ein dominanter Morphismus und $Z \subseteq Y$ ein abgeschlossenes Unterschema. Dann gilt $f^*(\mathrm{Rat}^1(Z)) \subseteq \mathrm{Rat}^1(f^{-1}(Z))$ und daher induziert f^* einen Modulmorphismus

$$f^* : \mathrm{CH}_Z^1(Y) \rightarrow \mathrm{CH}_{f^{-1}(Z)}^1(X), [\alpha] \mapsto [f^* \alpha].$$

Ist f darüberhinaus flach, so stimmt f^* mit Definition 4.8 überein.

Beweis. Wir bezeichnen die generischen Punkte von X, Y mit η_X, η_Y . Es genügt zu zeigen, dass für jedes $g \in \kappa(\eta_Y)^\times$ die Beziehung $f^*(\mathrm{div}(g)) \in \mathrm{Rat}^1(f^{-1}(Z))$ gilt. Dazu betrachten wir den aufgrund der Dominanz gegebenen Morphismus $f^* : \kappa(\eta_Y) \rightarrow \kappa(\eta_X)$ und nutzen die Gleichheit der Cartierdivisoren

$$f^*(\mathrm{div}(g)) = \mathrm{div}(f^*(g)).$$

Zur Übereinstimmung mit dem flachen Pullback aus Definition 4.8 genügt es, $f^*([D]) = [f^*(D)]$ zu zeigen. Dies folgt aus [Ful98, Lemma 1.7.1, 20]. \square

Im Gegensatz zu einem beliebigem Schnittprodukt, ist es relativ leicht, ein Schnittprodukt mit Divisoren zu definieren:

Proposition 4.13. *Es sei X ein reguläres Schema.*

Sei D ein Cartierdivisor und $V \subseteq X$ eine abgeschlossene Teilmenge von Kodimension p , die mit der induzierten reduzierten Struktur versehen ist. Wir erhalten daher eine abgeschlossene Immersion $i_V : V \rightarrow X$. Unter Verwendung der Theorie von Pseudodivisoren aus [Ful98, 2.2] lässt sich dann eine eindeutige Klasse $[i_V^ D]$ in $\text{CH}_{D \cap V}^p$ bilden.*

Wir erhalten daher einen Morphismus von \mathbb{Z} -Moduln definiert durch

$$\begin{aligned} \cdot : \text{CH}_Y^p(X) \otimes \text{CH}_Z^1(X) &\rightarrow \text{CH}_{Y \cap Z}^{p+1}(X) \\ [V] \otimes D &\mapsto [V] \cdot D := [i_V^* D]. \end{aligned}$$

Der Morphismus \cdot erfüllt die folgenden Eigenschaften eines Schnittproduktes:

(i) *Für $\alpha \in \text{CH}_Y^p(X)$ und $D, D' \in \text{CH}_Z^1(X)$ gilt*

$$(\alpha \cdot D) \cdot D' = (\alpha \cdot D') \cdot D.$$

(ii) *Ist $f : Y \rightarrow X$ ein eigentlicher Morphismus, $\alpha \in \text{CH}_Y^p(X)$ und $D \in \text{CH}_Z^1(Y)$, so gilt:*

$$f_*(\alpha \cdot f^* D) = f_*(\alpha) \cdot D.$$

(iii) *Es seien $\alpha = [V] \in \text{CH}_Y^p(X)$ und $D \in \text{CH}_Z^1(X)$ gegeben, die sich eigentlich schneiden, d.h. $\text{codim}(V \cap |D|) = p + 1$. Dann gilt*

$$[V] \cdot D = \sum_{x \in X^{p+1}} \chi^x(V, D)[\overline{\{x\}}].$$

Hierbei bezeichnet $\chi^x(V, W)$ die Formel von Serre für Schnittvielfachheiten:

$$\chi^x(Y, Z) := \sum_i (-1)^i \text{Länge}(\text{Tor}_i(Y_x, Z_x)).$$

Beweis. Ein Beweis der ersten beiden Aussagen finden sich im Buch von Fulton [Ful98, Def 2.3, Prop 2.3, Thm 2.4], wenn man die Verallgemeinerungen wie in [Ful98, 20.1] durchführt und die Isomorphismen aus Proposition 4.5 nutzt.

Zum Beweis von (iii) sei $V \subset X$ eine abgeschlossene Teilmenge und D ein Cartierdivisor. Wir bezeichnen $[V] \cdot D = \sum_{x \in X^{(p+1)}} a_x x$ und haben daher für jedes $x \in X^{(p+1)}$

$$(4.1) \quad a_x = \chi^x(V, D)$$

zu zeigen. Liegt der Punkt x außerhalb von $V \cap D$, so erhalten wir $a_x = \chi^x(V, |D|) = 0$ und müssen Gleichung (4.1) daher lediglich für $x \in V \cap |D|$ zeigen. Es bezeichne $f \in \mathcal{O}_{X,x}$ eine lokale Gleichung für den Cartierdivisor D und $i : V \rightarrow X$ die kanonische Immersion. Nach Konstruktion (Definition 4.11) wird i^*D durch einen eindeutigen Cartierdivisor repräsentiert, der in x durch die lokale Gleichung $f\mathcal{O}_{V,x}$ gegeben ist. Der Divisor i^*D hat daher am Punkt x die Vielfachheit Länge $\mathcal{O}_{V,x}/(f)$. Zur Bestimmung von $\chi^x(V, |D|)$ betrachten wir den Koszul-Komplex für D in $\mathcal{O}_{X,x}$:

$$(4.2) \quad 0 \rightarrow \mathcal{O}_{X,x} \xrightarrow{\cdot f} \mathcal{O}_{X,x} \rightarrow \mathcal{O}_{D,x} \rightarrow 0.$$

Da $\mathcal{O}_{X,x}$ nullteilerfrei ist, bildet (4.2) eine Auflösung von $\mathcal{O}_{D,x}$. Wir erhalten die Tor-Gruppen folglich als Kohomologiegruppen der Sequenz

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{V,x} \xrightarrow{\cdot i^\sharp(f)} \mathcal{O}_{V,x} \rightarrow 0.$$

Das Schema V ist integer und es gilt $i^\sharp(f) \neq 0$, daher ist die einzige nichttriviale Kohomologie

$$\mathrm{Tor}_0(\mathcal{O}_{V,x}, \mathcal{O}_{D,x}) = \mathcal{O}_{V,x}/i^\sharp(f)\mathcal{O}_{V,x}$$

und die Vielfachheiten stimmen überein. \square

Wir beschließen die Wiederholung der Schnitttheorie mit einer Verallgemeinerung des Kriteriums für Schnittvielfachheit 1 bei eigentlichem Schnitt aus [Ful98, 7.2] für beliebige reguläre Schemata X .

Satz 4.14. *Es seien Y, Z zwei reguläre integre abgeschlossene Unterschemata eines regulären Schemas X von Kodimension p bzw. q , die sich eigentlich schneiden. Es bezeichne $x \in Y \cap Z$ den generischen Punkt einer Komponente von $Y \cap Z$. Ist der schematheoretische Durchschnitt $Y \cap Z$ reduziert, so ist $Y \cap Z$ wieder regulär und die Unterschemata Y und Z schneiden sich im Punkt x mit Vielfachheit 1, d.h. für die Serresche Schnittmultiplizität gilt*

$$\chi^x(Y, Z) = 1.$$

Beweis. Wir bezeichnen den lokalen Ring $\mathcal{O}_{X,x}$ mit A und die definierenden Ideale für Y und Z mit \mathcal{I}_Y bzw. \mathcal{I}_Z . Da Y regulär ist, wird das Ideal $(\mathcal{I}_Y)_x$ von einer regulären Folge (y_1, \dots, y_p) der Länge p in $\mathcal{O}_{X,x}$ erzeugt; ebenso wird $(\mathcal{I}_Z)_x$ von einer regulären Folge (z_1, \dots, z_q) erzeugt. Da x generischer Punkt einer Komponente von $Y \cap Z$ ist, bilden die Elemente $(y_1, \dots, y_p, z_1, \dots, z_q)$ ein Erzeugendensystem für das Maximalideal $\mathfrak{m}_{X,x}$ des $p + q$ -dimensionalen lokalen Rings $\mathcal{O}_{X,x}$. Er ist daher regulär und das System bildet ein System von Parametern.

Wir dürfen daher die höheren Torsionsmoduln durch Betrachtung des Koszul-Komplexes bestimmen und es gilt zunächst ([Ser00, IV A Cor. 2])

$$\mathrm{Tor}_i(A/(\mathcal{I}_Y)_x, A/(\mathcal{I}_Z)_x) \simeq H_i((y_1, \dots, y_p), A/(\mathcal{I}_Z)_x)$$

und mittels [Ser00, IV A Prop. 3] schließlich

$$H_i((y_1, \dots, y_p), A/(\mathcal{I}_Z)_x) = 0 \text{ für alle } i \geq 1.$$

Bei der Berechnung der Eulercharakteristik $\chi^p(Y, Z)$ ist somit nur der Term von Grad 0 zu betrachten und es folgt

$$\chi^x(Y, Z) = \text{Länge}(A/(\mathcal{I}_Y)_x \otimes A/(\mathcal{I}_Z)_x) = \text{Länge}(A/\mathfrak{m}) = 1.$$

□

Es sei jetzt $S = \text{Spec } R$ das Spektrum eines vollständigen diskreten Bewertungsringes mit algebraisch abgeschlossenem Restklassenkörper und X ein reguläres S -Schema. Mittels des direkten Bildes lässt sich dann eine Gradabbildung auf Zykeln mit Träger in der speziellen Faser X_s definieren. Hierzu müssen wir lediglich beachten, dass es in der speziellen Faser von S nur ein nichtleeres abgeschlossenes Unterschema gibt, den abgeschlossenen Punkt s . Da s Kodimension 1 hat, gilt $\text{Rat}_{\{s\}}^1(\text{Spec } R) = 0$ und es gibt daher eine kanonische Isomorphie $\text{CH}_{\{s\}}^1(\text{Spec } R) \simeq \mathbb{Z}$.

Definition 4.15. Sei X ein flaches eigentliches S -Schema der relativen Dimension d mit Strukturmorphismus $f : X \rightarrow \text{Spec } R$. Die Abbildung

$$\text{ldeg}_X := f_* : \text{CH}_{X_s}^{d+1}(X) \rightarrow \text{CH}_{\{s\}}^1(S) \simeq \mathbb{Z}$$

wird *lokale Gradabbildung* genannt.

Nach Definition des direkten Bildes bestimmt sich der lokale Grad eines Zykels $\alpha = \sum_V n_V[V]$ durch

$$\text{ldeg}(\alpha) = \sum_{V \subseteq X} n_V[\kappa(\eta_V) : k].$$

Insbesondere erhalten wir im Falle eines algebraisch abgeschlossenen Restklassenkörpers den Grad durch $\sum_{V \subseteq X} n_V$.

Wir können bereits jetzt das Verhalten des Schnittproduktes bei verzweigtem Basiswechsel bestimmen. Hierzu sei $S = \text{Spec } R$ das Spektrum eines vollständigen diskreten Bewertungsringes, K_n eine endliche Körpererweiterung von $K := \text{Quot}(R)$. Die Bewertung von K lässt sich eindeutig auf K_n fortsetzen und wir können daher R_n als Bewertungsring von K_n und $S_n := \text{Spec } R_n$ als dessen Spektrum wählen. Da der Restklassenkörper algebraisch abgeschlossen ist, ist die Erweiterung K_n/K total verzweigt vom Index n . Mit η bzw. η_n sei jeweils der generische Punkt von R resp. R_n bezeichnet. Mit dem Bewertungskriterium für Eigentlichkeit erweist sich S_n als eigentliches S -Schema, daher existiert das direkte Bild $g_* : \text{CH}(S_n) \rightarrow \text{CH}(S)$ und erlaubt es uns, Schnittvielfachheiten von S -Schemata und S_n -Schemata zu vergleichen.

Lemma 4.16. Es seien W ein integres flaches S -Schema und W_n ein integres S_n -Schema mit einem eigentlichen S -Morphismus $\varphi : W_n \rightarrow W$. Ist f generisch flach und gilt für die generischen Fasern $(W_n)_\eta = W_\eta \times_{S_\eta} (S_n)_\eta$, so haben wir in der Chowgruppe $\text{CH}_W^0(W)$ die Gleichung

$$\varphi_*([W_n]) = n[W].$$

Ist $Z \subseteq W$ eine abgeschlossene Teilmenge und $\alpha = D_1 \cdot \dots \cdot D_k \in \text{CH}_Z^k(W)$ das Produkt von 1-Zykeln $D_1, \dots, D_k \in \text{CH}_Z^1(W)$, so gilt

$$\varphi_*(\varphi^*(\alpha)) = n\alpha$$

als Gleichung in $\text{CH}_Z(W)$.

Beweis. Da das Bild $\varphi(W_n)$ irreduzibel ist, ist $\varphi_*([W_n])$ ein Vielfaches von $[W]$. Zur Bestimmung dieser Multiplizität können wir uns auf die generische Faser beschränken und dürfen daher das kartesische Diagramm

$$\begin{array}{ccc} (W_n)_{\eta_n} & \xrightarrow{f'} & (S_n)_{\eta_n} \\ \varphi \downarrow & & \downarrow g \\ W_\eta & \xrightarrow{f} & S_\eta \end{array}$$

betrachten. Da die Körpererweiterung $\text{Quot}(R) \subseteq \text{Quot}(R_n)$ offenbar Grad n aufweist, gilt $g_*([(S_n)_\eta]) = n[S_\eta]$ und damit folgt

$$\varphi_*[W_\eta] = \varphi_*(f'^*[S_n]) = f^*(g_*([S_n])) = nf^*([S]) = n[W_\eta].$$

Die zweite Behauptung folgt sofort unter Ausnutzung der Projektionsformel Proposition 4.13(ii):

$$\varphi_*(\varphi^*(\alpha)) = \varphi_*(\varphi^*(\alpha) \cdot [W_n]) = \alpha \cdot \varphi_*([W_n]) = n\alpha.$$

□

Wenn wir die Definition der Gradabbildung als direktes Bild unter dem Strukturmorphismus verwenden, können wir mittels des vorangegangenen Lemmas die Gradabbildungen in W_n und W vergleichen.

Proposition 4.17. Es seien W ein eigentliches, integres, flaches S -Schema und W_n ein eigentliches integres S_n -Schema mit einem eigentlichen S -Morphismus $\varphi : W_n \rightarrow W$. Erfüllt φ die Bedingung aus Lemma 4.16, d.h. ist φ generisch flach und erfüllt $(W_n)_\eta = W_\eta \times_{S_\eta} (S_n)_\eta$, so gilt für jedes $\alpha \in \text{CH}_{W_s}^{\dim W}(W)$:

$$\deg_W(\alpha) = n \deg_{W_n}(\varphi^*(\alpha)).$$

Beweis. Wir betrachten das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} W_n & \xrightarrow{f'} & S_n \\ \varphi \downarrow & & g \downarrow \\ W & \xrightarrow{f} & S. \end{array}$$

Mit der Definition der Gradabbildung erhalten wir die Gleichungen

$$f_*\alpha = \deg_W(\alpha)[\{s\}],$$

sowie

$$\begin{aligned} \varphi_*(\varphi^*\alpha) &= g_*f'_*(\varphi^*\alpha) = \deg_{W_n}(\varphi^*\alpha)g_*([s_n]) \\ &= \deg_{W_n}(\varphi^*\alpha)[\{s\}] \end{aligned}$$

und die Behauptung folgt durch Koeffizientenvergleich aus Lemma 4.16. \square

4.2. Der Chowring in der Produktsituation

Wir widmen uns nun einer genaueren Untersuchung des Chowrings von regulär strikt semistabilen Schemata und nach Algorithmus 2.8 gebildeten Produktmodellen regulär strikt semistabiler Kurven. Die ersten beiden Aussagen gelten für beliebige regulär strikt semistabile Schemata mit Reduktionsmenge ohne Mehrfachsimplices.

Proposition 4.18. *Sei W ein regulär strikt semistabiles S -Schema der Dimension d versehen mit einer Totalordnung \leq auf $W_s^{(0)}$ und mit Reduktionsmengen ohne Mehrfachimplizes. Es bezeichne C_1, \dots, C_k paarweise verschiedene irreduzible Komponenten von W_s mit $C_1 \cap \dots \cap C_k \neq \emptyset$. Dann schneiden sich diese Komponenten eigentlich und mit Vielfachheit 1, d.h. in $\text{CH}_{W_s}(W)$ gilt*

$$[C_1] \cdot \dots \cdot [C_l] = [C_1 \cap \dots \cap C_l].$$

Für $l = d$ gilt desweiteren

$$\text{ldeg}([C_1] \cdot \dots \cdot [C_l]) = 1.$$

Beweis. Die Komponenten C_1, \dots, C_k schneiden sich nach Definition 1.1 eigentlich und alle Schnitte $C_1 \cap \dots \cap C_i$ sind nach Proposition 1.13 irreduzibel. Per Induktion haben wir lediglich $\chi^p(C_1 \cap \dots \cap C_{l-1}, C_l) = 1$ im generischen Punkt p von $C_1 \cap \dots \cap C_l$ zu zeigen. Dies folgt folgt bereits aus Satz 4.14. \square

Proposition 4.19. Sei W ein regulär strikt semistabiles Schema. Für jede irreduzible Komponente $C \in W_s^{(0)}$ von W_s gilt in $\text{CH}_{W_s}(W)$ die Gleichung

$$\left(\sum_{C' \in W_s^{(0)}} [C'] \right) \cdot [C] = 0.$$

Beweis. Da W_s reduziert ist, gilt $\sum_{C' \in W_s^{(0)}} [C'] = \text{div}(\pi)$ und als Hauptdivisor ist diese Summe rational äquivalent zu 0 im Chowring $\text{CH}^*(W)$. Ihr Schnitt mit dem Zykel $[C]$ ist folglich bereits rational äquivalent zu 0 im Chowring mit Träger $C \subseteq W_s$. \square

Es sei X eine eigentliche regulär strikt semistabile Kurve über $S = \text{Spec } R$ mit Totalordnung \leq auf $X_s^{(0)}$ und einem Reduktionsgraphen $\Gamma(X)$ ohne Mehrfachkanten. Wir bezeichnen mit $W := W(X, \leq, d)$ jetzt spezieller die nach Algorithmus 2.8 bestimmte Desingularisierung von X^d . Die Komposition aus der Desingularisierung $W \rightarrow X^d$ und der Projektion auf den i -ten Faktor $X^d \rightarrow X$ werde mit $\text{pr}_i : W \rightarrow X$ bezeichnet. Da der Reduktionsgraph $\Gamma(X)$ einfach ist, ist auch die simpliziale Reduktionsmenge $\mathcal{R}(W) = \Gamma(X)^d$ einfach.

Die Produktsituation ermöglicht es uns, eine weitere rationale Äquivalenz herzuleiten.

Proposition 4.20. Es seien $C_1, C_2 \in \mathcal{R}(W)_0$ irreduzible Komponenten von W_s . Existiert ein $i \in \{1, \dots, d\}$ mit $\text{pr}_i(C_1) \neq \text{pr}_i(C_2)$, so gilt in $\text{CH}_{W_s}(W)$

$$[C_1] \cdot [C_2] \cdot \left(\sum_{\substack{C' \in \mathcal{R}(W)_0, \\ \text{pr}_i(C') = \text{pr}_i(C_2)}} [C'] \right) = 0.$$

Beweis. Wir dürfen voraussetzen, dass C_1 und C_2 nichtleeren Schnitt haben. Da $\mathcal{R}(X)$ keine Mehrfachsimplices enthält und $\text{pr}_i(C_1) \neq \text{pr}_i(C_2)$ gilt, schneiden sich die Projektionen $\text{pr}_i(C_1)$ und $\text{pr}_i(C_2)$ in einem Doppelpunkt, den wir mit $p \in X$ bezeichnen. Da $\text{pr}_i(C_2)$ eine Komponente der speziellen Faser X_s ist, wird sie durch einen Cartierdivisor $D \in \text{CaDiv}(X)$ gegeben und folglich in einer Umgebung $U \subseteq X$ von p durch einen Schnitt $r \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ bestimmt. Da X integer ist, können wir r zu einer rationalen Funktion $r \in \Gamma(X, \mathcal{K}_X)$ fortsetzen und es gilt $\text{div}(r) = D + D_r$ mit einem Cartierdivisor D_r , dessen Träger außerhalb von U liegt. Der Pullback des Hauptdivisors $\text{div}(r)$ existiert und liefert auf W den Hauptdivisor $\text{pr}_i^*(\text{div}(r)) = \text{pr}_i^*(D) + \text{pr}_i^*(D_r)$. Da X_s geometrisch reduziert ist, gilt

$$[\text{pr}_i^*(D)] = \sum_{\substack{C' \in \mathcal{R}(W)_0, \\ \text{pr}_i(C') = \text{pr}_i(C_2)}} [C'].$$

Der zurückgezogen Restdivisor $\text{pr}_i^*(D_r)$ hingegen hat Träger außerhalb des Doppelpunktes p und trägt daher zum Schnitt mit $[C_1][C_2]$ nichts bei. Nach Bildung

des Schnittproduktes mit C_1 und C_2 erhalten wir schließlich die gewünschte Gleichung

$$0 = [C_1][C_2][\text{pr}_i^*(\text{div}(r))] = [C_1][C_2] \sum_{\substack{C' \in \mathcal{R}(W)_0, \\ \text{pr}_i(C') = \text{pr}_i(C_2)}} [C'].$$

□

4.3. Ein Movinglemma in der speziellen Faser

Die in Proposition 4.19 und Proposition 4.20 beschriebenen rationalen Äquivalenzen in $\text{CH}_{W_S}(W)$ sind nur von der simplizialen Reduktionsmenge $\mathcal{R}(W) = \Gamma^d$ des Produktmodells und den Projektionsabbildungen $\text{pr}_i : \mathcal{R}(W) \rightarrow \mathcal{R}(X)$ abhängig. Es macht daher Sinn, diese losgelöst von der Kurve zu betrachten und allgemeiner auf dem Produkt geordneter simplizialer Mengen zu definieren. Diese Idee führt zur Definition des kombinatorischen Chowrings, der gewissermaßen den vom konkreten Schema unabhängigen „Anteil“ des Chowrings beschreibt. Wir können für diesen kombinatorischen Chowring schließlich ein Movinglemma beweisen, das wir zur Berechnung von Schnittzahlen ausnutzen.

Es sei in diesem Abschnitt $d \in \mathbb{N}$ und Γ ein endlicher geordneter Graph ohne Mehrfachkanten, also eine endliche simpliziale Menge von Dimension 1 ohne Mehrfachsimplices. Das Produkt simplizialer Mengen nach Proposition A.9 wird mit Γ^d bezeichnet und die Projektion auf die i -te Komponente mit $\text{pr}_i : \Gamma^d \rightarrow \Gamma$. Wir verwenden außerdem die Bezeichnung aus Definition A.12: Zu der simplizialen Menge Γ^d bezeichnet demnach $(\Gamma^d)_S \subseteq \mathcal{P}((\Gamma^d)_0)$ die Familie aller Mengen, die als Eckenmengen eines Simplex von Γ^d auftreten.

Definition 4.21. Es bezeichne $Z(\Gamma^d)$ den Polynomring über \mathbb{Z} , der von den 0-Simplizes aus Γ^d erzeugt wird: $Z(\Gamma^d) := \mathbb{Z}[C \mid C \in (\Gamma^d)_0]$. Er wird mit der kanonischen Graduierung versehen, in der alle Erzeuger $C \in (\Gamma^d)_0$ den Grad 1 haben.

In $Z(\Gamma^d)$ wird durch die Polynome

$$(4.3) \quad C_1 \cdots \cdot C_k \text{ für } \{C_1, \dots, C_k\} \notin (\Gamma^d)_S,$$

$$(4.4) \quad \left(\sum_{C' \in (\Gamma^d)_0} C' \right) C_1,$$

$$(4.5) \quad \sum_{\substack{C' \in (\Gamma^d)_0 \\ \text{pr}_i(C') = \text{pr}_i(C_2)}} C_1 C_2 C' \text{ für } i \in \{1, \dots, d\} \text{ mit } \text{pr}_i(C_1) \neq \text{pr}_i(C_2)$$

mit $C_1, C_2 \in \Gamma_0^d$ ein graduiertes Ideal $\text{Rat}(\Gamma^d)$ erzeugt, das Ideal der zu 0 rational äquivalenten Zykel.

Der graduierte Ring

$$\mathcal{C}(\Gamma^d) := Z(\Gamma^d)/\text{Rat}(\Gamma^d)$$

heißt der *kombinatorische Chowring* des Produktes Γ^d .

Wir erhalten für den kombinatorischen Chowring die folgende Funktionalitäts-eigenschaft:

Proposition 4.22. *Es seien Γ und Γ' Graphen ohne Mehrfachsimplices und $f_1, \dots, f_d : \Gamma' \rightarrow \Gamma$ Morphismen von Graphen. Es bezeichne $f = (f_1, \dots, f_d) : (\Gamma')^d \rightarrow \Gamma^d$ den induzierte Morphismus auf den Produkten. Dann wird durch*

$$f^* : Z(\Gamma^d) \rightarrow Z(\Gamma'^d), C \mapsto \sum_{C' \in \Gamma'_0, f(C')=C} C'$$

ein wohldefinierter Ringhomomorphismus erklärt. Er induziert einen Homomorphismus der kombinatorischen Chowringe

$$f^* : \mathcal{C}(\Gamma^d) \rightarrow \mathcal{C}(\Gamma'^d).$$

Beweis. Es ist lediglich $f^*(\text{Rat}(\Gamma^d)) \subseteq \text{Rat}(\Gamma'^d)$ zu zeigen. Wir betrachten dazu die Bilder der Erzeuger (4.3), (4.4) und (4.5).

Für ein Polynom der Form (4.3), also ein Produkt $C_1 \cdots \cdots C_k$ mit $\{C_1, \dots, C_k\} \notin (\Gamma^d)_S$ gilt

$$f^*(C_1 \cdots \cdots C_k) = \prod_{i=1}^k \left(\sum_{f(C'_i)=C_i} C'_i \right).$$

Für Elemente C'_1, \dots, C'_k mit $f(C'_i) = C_i$ folgt aufgrund von $C_1 \cap \cdots \cap C_k = \emptyset$ sofort $C'_1 \cap \cdots \cap C'_k = \emptyset$ und daher $\{C'_1 \cap \cdots \cap C'_k\} \notin (\Gamma'^d)_S$. Wir erhalten somit $f^*(C_1 \cdots \cdots C_k) \in \text{Rat}(\Gamma'^d)$.

Entsprechend folgt die Aussage für die Erzeuger (4.4) und (4.5) aus den Gleichungen

$$f^* \left(\sum_{C' \in ((\Gamma')^d)_0} C' \right) = \sum_{C \in (\Gamma^d)_0} C$$

und

$$f^* \left(\sum_{\substack{C' \in ((\Gamma')^d)_0 \\ \text{pr}_i(C')=\text{pr}_i(C'_2)}} C' \right) = \sum_{\substack{C \in (\Gamma^d)_0 \\ \text{pr}_i(C')=\text{pr}_i(f(C'_2))}} C.$$

□

Die bisherigen Aussagen über den Chowrings von $\text{CH}_{W_s}(W)$ des Produktmodells $W = W(X, <, d)$ einer semistabilen S -Kurve aus Abschnitt 4.2 lassen sich zusammenfassen zu:

Proposition 4.23. *Sei $d \in \mathbb{N}$, X eine regulär strikt semistabile S -Kurve und $<$ eine totale Ordnung auf der Eckenmenge des Reduktionsgraphen $\Gamma(X)$. Das in Algorithmus 2.8 bestimmte Modell von $(X_\eta)^d$ werde mit $W = W(X, <, d)$ bezeichnet. Dann wird durch*

$$\varphi_W : \mathcal{C}(\Gamma(X)^d) \rightarrow \text{CH}_{W_s}^*(W), [C] \mapsto [C]$$

ein Morphismus graduierter Ringe bestimmt.

Beweis. Es ist lediglich zu zeigen, dass die Erzeuger von $\text{Rat}(\mathcal{R}(X)^d)$ auf die Null in $\text{CH}_{W_s}^*(W)$ abgebildet werden. Für (4.3) ist wegen $\{C_1, C_2\} \notin \mathcal{R}(X)_0$ offenbar $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ und daher gilt $C_1 C_2 = 0$ im Chowring $\text{CH}_{W_s}^*$. Für die übrigen Erzeuger wurde die Behauptung bereits in Proposition 4.19 bzw. Proposition 4.20 gezeigt. \square

Wir wenden uns nun dem Hauptresultat dieses Abschnitts zu, einem Moving-lemma für den kombinatorischen Chowring. Hierzu übertragen wir zunächst noch den Begriff des eigentlichen Schnittes auf den Ring der kombinatorischen Zykel $Z(\Gamma^d)$.

Definition 4.24. Ein Monom $C_1 \cdot \dots \cdot C_k \in Z(\Gamma^d)$ heißt *eigentlich*, wenn die Ecken $C_i \in \Gamma_0$ paarweise verschieden sind. Ein beliebiges Element $\alpha \in Z(\Gamma^d)$ heißt *eigentlich*, wenn es Summe eigentlicher Monome ist.

In Analogie eines „Moving Lemmas“ wäre zu zeigen, dass in jeder Äquivalenzklasse von $\mathcal{C}^k(\Gamma^d)$ ein eigentliches Element liegt. In der Tat gilt:

Satz 4.25. *Es sei Γ ein zusammenhängender endlicher Graph ohne Mehrfachsimplices. Dann wird die Gruppe $\mathcal{C}^k(\Gamma^d)$ der k -Zykel im kombinatorischen Chowring von den Klassen der eigentlich Monome*

$$\{C_1 \cdot \dots \cdot C_k \mid C_1, \dots, C_k \in Z(\Gamma^d) \text{ paarweise verschieden}\}$$

vom Grad d erzeugt.

Bemerkung 4.26. Da die spezielle Faser X_s einer regulär strikt semistabilen S -Kurve nach Definition zusammenhängend ist, ist auch die Reduktionsmenge $\mathcal{R}(X)$ zusammenhängend.

Für den Beweis sei die Zahl $\#\{C_1, \dots, C_k\}$ als *Größe* eines Monoms $C_1 \cdot \dots \cdot C_k$. Sie bestimmt daher die Anzahl der verschiedenen Komponenten im Monom. Ein Monom aus \mathcal{C}^k der Größe k ist offenbar ein eigentliches Element.

Der Beweis erfolgt per Induktion nach der Minimallänge der auftretenden Monome sofort aus folgendem

Lemma 4.27. *Sei $\alpha = C_1 \cdot \dots \cdot C_k \in Z^k(\Gamma^d)$ ein Monom vom Grad k der Größe $l < k$. Dann existiert ein Element $\alpha' \in Z^k(\Gamma^d)$ mit $\alpha - \alpha' \in \text{Rat}(\Gamma^d)$, der aus Monomen der Größe $l + 1$ besteht.*

Für den Beweis dieses Lemmas zerlegen wir das Produkt Γ^d in Produkte von Standardsimplizes $\Delta[1]$ wie folgt:

Bemerkung 4.28. Es sei Γ ein Graph ohne Mehrfachkanten. Nach Proposition A.11 können wir die 1-Simplizes $\gamma_1 \in \Gamma_1$ des Graphen Γ mit Morphismen $i_{\gamma_1} : \Delta[1] \rightarrow \Gamma$ identifizieren. Da Γ keine Mehrfachkanten aufweist, ist i_{γ_1} für jeden nichtausgearteten 1-Simplex γ_1 injektiv. Zu einem d -Tupel $\gamma := (\gamma_1, \dots, \gamma_d) \in (\Gamma_1^{\text{nd}})^d$ von nichtausgearteten 1-Simplizes bezeichne i_γ den Monomorphismus

$$i_\gamma := (i_{\gamma_1} \times \dots \times i_{\gamma_d}) : I^d \rightarrow \Gamma^d.$$

Proposition 4.29. Es sei Γ ein endlicher zusammenhängender Graph ohne Mehrfachkanten, der mindestens zwei Ecken enthält. Dann liefern die Bilder von i_γ für $\gamma \in (\Gamma_1^{nd})^d$ eine Überdeckung des Produktgraphen, die Überdeckung durch Standardwürfel. Dabei liegt ein beliebiger k -Simplex $\sigma \in (\Gamma^d)_k^{nd}$ genau dann im Bild von i_γ , wenn alle Ecken von σ im Bild von i_γ liegen. Ist $\sigma \in (\Gamma^d)_d^{nd}$ ein nichtausgearteter d -Simplex, so gibt es genau ein $\gamma \in (\Gamma_1^{nd})^d$ derart, dass σ im Bild von i_γ liegt.

Beweis. Sei $\sigma \in (\Gamma^d)_k$ ein beliebiger k -Simplex und $\text{pr}_i : \Gamma^d \rightarrow \Gamma$ die Projektion auf den i -ten Faktor. Da Γ ein Graph ist, so ist für jedes $i \in \{1, \dots, d\}$ der k -Simplex $\text{pr}_i(\sigma)$ die Ausartung eines nichtausgearteten 0- oder 1-Simplex, den wir mit σ_i bezeichnen.

Wir setzen $\gamma_i = \sigma_i$, falls σ_i ein 1-Simplex ist, andernfalls wählen wir einen 1-Simplex $\gamma_i \in \Gamma_1^{nd}$, der die Ecke σ_i enthält. Dies ist möglich, da der Graph zusammenhängend ist und mindestens zwei Ecken enthält. Durch diese Wahl von γ liegen alle Ecken von σ im Bild von i_γ und es bleibt noch zu zeigen, dass dann auch schon σ im Bild von i_γ liegt.

Wir fassen dazu σ nach Proposition A.11 als Morphismus simplizialer Mengen $\sigma : \Delta[k] \rightarrow \Gamma^d$ auf. Da die Ecken von σ im Bild von i_γ liegen und daher insbesondere auch für jedes $i = \{1, \dots, d\}$ das Bild von $\text{pr}_i \circ \sigma$ im Bild von i_{γ_i} liegt, existiert ein Morphismus $\tau_i : \Delta[1] \rightarrow \Delta[1]$, so dass

$$\begin{array}{ccc} \Delta[k] & \xrightarrow{\sigma} & \Gamma^d \\ \tau_i \downarrow & & \text{pr}_i \downarrow \\ \Delta[1] & \xrightarrow{i_{\gamma_i}} & \Gamma \end{array}$$

kommutiert. Nach der universellen Eigenschaft des Produktes faktorisiert dann σ in der Form

$$\Delta[k] \xrightarrow{\tau_1 \times \dots \times \tau_d} I^d \xrightarrow{i_\gamma} \Gamma^d.$$

Daher liegt σ im Bild von i_γ .

Ist σ ein nichtausgearteter d -Simplex, so ist nach dem Schubfachprinzip jedes σ_i ein nichtausgearteter 1-Simplex. Daher existiert genau eine Wahl von γ derart, dass $\sigma_i \in \text{pr}_i(\text{Im}(i_\gamma))$ gilt. \square

Mittels des Ringhomomorphismus aus Proposition 4.22 $(i_\gamma)^* : \mathcal{C}(\Gamma^d) \rightarrow \mathcal{C}(I^d)$ ist es möglich, den Anteil des kombinatorischen Chowrings zu betrachten, der in dem durch $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_d)$ bestimmten Würfel liegt.

Lemma 4.30. Es sei Γ ein zusammenhängender endlicher Graph ohne Mehrfachkanten, $\gamma \in (\Gamma_1^{nd})^d$ und $i_\gamma : I^d \rightarrow \Gamma^d$ die zugehörige Einbettung des Standardwürfels nach Bemerkung 4.28. Wir versehen die Ecken des Standardwürfels I^d mit der Produkthalbordnung und bezeichnen diese mit \leq . Für zwei Ecken $C_1, C_2 \in (I^d)_0$ des Standardwürfels mit $C_1 < C_2$ gilt dann:

(i) Es gibt einen 1-Zykel $\beta \in Z^1(\Gamma^d)$ derart, dass

$$i_\gamma(C_1)i_\gamma(C_2)^2 - \beta i_\gamma(C_1)i_\gamma(C_2) \in \text{Rat}(\Gamma^d)$$

gilt und dass

$$i_\gamma^*(\beta) = \sum_{i=1}^n [E_i]$$

für endliche viele Elemente $E_i \in I_0^d$ mit $E_i > C_1$ und $E_i \neq C_2$ gilt.

(ii) Es gibt einen 1-Zykel $\beta' \in Z^1(\Gamma^d)$ derart, dass

$$i_\gamma(C_1)^2 i_\gamma(C_2) - \beta i_\gamma(C_1)i_\gamma(C_2) \in \text{Rat}(\Gamma^d)$$

gilt und dass

$$i_\gamma^*(\beta') = \sum_{i=1}^n [E'_i]$$

für endlich viele Elemente $E'_i \in I_0^d$ mit $E'_i < C_2$ und $E'_i \neq C_1$ gilt.

Beweis. Aufgrund $C_1 < C_2$ gibt es ein $j \in \{1, \dots, d\}$ mit $\text{pr}_j(C_1) < \text{pr}_j(C_2)$. Wir setzen

$$\tilde{\beta} := - \sum_{\substack{C' \in (\Gamma^d)_0 \setminus \{i_\gamma(C_2)\} \\ C' \notin \text{Im}(i_\gamma) \vee i_\gamma^{-1}(C') > C_1}} [C']$$

und erhalten aufgrund von (4.5)

$$(4.6) \quad i_\gamma(C_1)i_\gamma(C_2)^2 - \tilde{\beta} i_\gamma(C_1)i_\gamma(C_2) \in \text{Rat}(\Gamma^d).$$

Mit der injektiven Abbildung i_γ erhalten wir

$$i_\gamma^*(\tilde{\beta}) = - \sum_{\substack{C \in (I^d)_0 \setminus \{C_2\} \\ \text{pr}_j(C') = \text{pr}_j(C_2)}} C.$$

Jedes der Elemente $C \in (I^d)_0 \setminus \{C_2\}$ mit $\text{pr}_j(C) = \text{pr}_j(C_2)$ ist entweder größer als C_1 oder mit diesem nicht vergleichbar. Falls C mit C_1 nicht vergleichbar ist, gilt $C_1 C \in \text{Rat}(I^d)$ und nach Proposition 4.29 auch $i_\gamma(C_1)i_\gamma(C) \in \text{Rat}(\Gamma^d)$. Daher können wir letztere Elemente aus $\tilde{\beta}$ entfernen ohne Gleichung (4.6) zu ändern. Der Zykel

$$\beta := \sum_{\substack{C' \in (\Gamma^d)_0 \setminus \{i_\gamma(C_2)\} \\ \text{pr}_j(C') = \text{pr}_j(i_\gamma(C_2)) \\ C' \notin \{i_\gamma(C) \mid C > C_1\}}} C'$$

erfüllt somit die Behauptung.

Der Beweis von (b) folgt analog. □

Beweis von Lemma 4.27. Falls Γ nur aus einer Ecke besteht, ist die Aussage klar. Dann enthält nämlich auch Γ^d nur eine Ecke und nach (4.4) liegt jedes Monom vom Grad $k \geq 2$ in $\text{Rat}(\Gamma^d)$.

Sei $\alpha = \tilde{C}_1^{a_1} \cdots \tilde{C}_l^{a_l} \in Z^k(\Gamma^d)$ ein Monom vom Grad k mit C_1, \dots, C_l verschiedenen Ecken aus $(\Gamma^d)_0$. Ist $l = 1$, so liefert bereits die einfache Anwendung von (4.4) einen zu α äquivalenten Zykel aus Monomen der Größe 2, d.h. aus Monomen mit jeweils zwei verschiedenen Faktoren.

Ist $l \geq 2$ so können wir annehmen, dass $\{\tilde{C}_1, \dots, \tilde{C}_l\}$ einen Simplex in Γ^d bildet, da andernfalls bereits $\alpha = 0$ gilt. Nach Bemerkung 4.28 existiert folglich eine Einbettung des Standardwürfels $i_\gamma : I^d \rightarrow \Gamma^d$, in dessen Bild die Elemente $\tilde{C}_1, \dots, \tilde{C}_l$ liegen. Wir bezeichnen ihre Urbilder mit C_1, \dots, C_l . Da diese einen Simplex in I^d bilden, können wir nach Proposition A.19 annehmen, dass $C_1 < \dots < C_l$ eine aufsteigende Kette bezüglich der Produkthalbordnung $<$ in $(I^d)_0 = (I_0)^d$ bildet. Wir erhalten

$$i^* \alpha = C_1^{a_1} \cdots C_l^{a_l}.$$

Wir bezeichnen mit $j(\alpha)$ den kleinsten Index $j = j(\alpha) \in \{1, \dots, l\}$ mit $a_{j(\alpha)} \geq 2$. Es genügt zu zeigen, dass es einen 1-Zykel

$$\beta = \sum_{\tilde{C}' \in (\Gamma^d)_0} b_{C'} C' \in Z^1(\Gamma^d), \quad b_{C'} \in \mathbb{Z}$$

gibt, so dass

$$\alpha - \beta \prod_{i=1}^{j-1} C_i C_j^{a_j-1} \prod_{i=j+1}^l C_i^{a_i} \in \text{Rat}(\Gamma^d)$$

und $b_{C_i} = 0$ für alle $i \in \{1, \dots, l\}$ gilt. Dies zeigen wir per Induktion nach $j(\alpha)$:

Ist $j = j(\alpha) < l$, so wählen wir β' nach Lemma 4.30 (a) so, dass

$$C_j^2 C_{j+1} - \beta' C_j C_{j+1} \in \text{Rat}(\Gamma^d)$$

mit $i^* \beta' = \sum E_i$ für $C_j \neq E_i < C_{j+1}$. Wir zerlegen das Element

$$\beta C_1 \cdots C_j^{a_j-1} C_{j+1}^{a_{j+1}} \cdots C_l^{a_l}$$

als Summe $\sum_i \alpha_i$ von Monomen. Jedes dieser Monome γ_i enthält entweder einen zusätzlichen Faktor und weist daher eine größere Größe als α auf, oder ist von der Form $C_1 \cdots C_{j-1} C_j^{\tilde{a}_j} \cdots C_l^{\tilde{a}_l}$ mit $\tilde{a}_j < a_j$. Führt man für diese Monome die gleiche Ersetzung durch, so erhalten wir schließlich $\tilde{a}_j = 1$ und somit $j(\alpha_i) < j(\alpha)$. Die Aussage folgt daher nach der Induktionsvoraussetzung.

Ist andererseits $j = j(\alpha) = l$, so gehen wir analog unter Verwendung von Lemma 4.30 (a) vor. Wir wählen $\beta' \in Z^1(\Gamma, <, d)$ so, dass

$$C_{j-1} C_j^2 - \beta' C_{j-1} C_j \in \text{Rat}(\Gamma^d)$$

mit $i^* \beta' = \sum_i E_i$ für $C_j \neq E_i > C_{j-1}$ für alle i gilt. Dann hat jedes Monom von

$$\beta C_1 \cdots C_j^{a_j-1} C_{j+1}^{a_{j+1}} \cdots C_l^{a_l}$$

bereits eine größere Größe als α . □

4.4. Die lokale Gradabbildung

Für ein genaueres Studium des Rings $\mathcal{C}(\Gamma^d)$ beschränken wir uns zunächst auf einen Graphen von möglichst einfacher Bauart, den Standard-1-Simplex $I := \Delta[1]$. Diesen erhalten wir als Reduktionsgraphen des regulär strikt semistabilen Schemas $L := \text{Spec } R[z_0, z_1]/(z_0 z_1 - \pi)$. Die projektive Vervollständigung $\bar{L} := \text{Proj } R[z_0, z_1, t]/(z_0 z_1 - \pi t^2)$ von L liefert ein eigentliches regulär strikt semistabiles Schema mit dem gleichen Reduktionsgraphen. Nach Definition 4.15 haben wir bereits eine Gradabbildung auf $\text{CH}_{(\bar{L})_s}(\bar{L})$ und können diese mittels Proposition 4.23 als lokale Gradabbildung auf $\mathcal{C}(I^d)$ auffassen. Wir zeigen in Proposition 4.33, dass sich diese Gradabbildung auf beliebige Graphen Γ fortsetzen lässt.

Es seien die irreduziblen Komponenten von \bar{L}_s mit C_0 und C_1 bezeichnet und mit der Ordnung $C_0 < C_1$ versehen. Mit \bar{M} werde das nach Algorithmus 2.8 gebildete Modell von $(\bar{L}_\eta)^d$ bezeichnet. Da \bar{M} ein eigentliches Schema ist, existiert die lokale Gradabbildung

$$\text{ldeg}_{\bar{M}} : \text{CH}_{\bar{M}_s}^{d+1}(\bar{M}) \rightarrow \mathbb{Z}$$

und bildet nach Proposition 4.18 ein eigentliches Monom $\alpha = C_1 \cdot \dots \cdot C_d$ mit paarweise verschiedenen C_1, \dots, C_d auf $1 \in \mathbb{Z}$ ab.

Definition 4.31. Es bezeichne $\varphi_{\bar{M}} : \mathcal{C}(I^d) \rightarrow \text{CH}_{\bar{M}_s}(\bar{M})$ den Homomorphismus graduierter Ringe aus Proposition 4.23. Der Morphismus von \mathbb{Z} -Moduln

$$\text{ldeg}_{(I^d)} := \text{ldeg}_{\bar{M}} \circ \varphi_{\bar{M}} : \mathcal{C}(I^d) \rightarrow \mathbb{Z}$$

heißt *lokale Gradabbildung*.

Zur Definition der lokalen Gradabbildung eines beliebigen Graphen benutzen wir wieder die Zerlegung des Produktes in Einheitsquadrate aus Proposition 4.29. Sei daher $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_d)$ ein Element aus $(\Gamma_1^{\text{nd}})^d$ und $i_\gamma : I^d \rightarrow \Gamma^d$ die zugehörige Einbettung des Standardwürfels I^d in das Produkt simplizialer Mengen Γ^d wie in Bemerkung 4.28. Nach Proposition 4.22 existiert ein Homomorphismus von graduierter Ringen

$$i_\gamma^* : \mathcal{C}(\Gamma^d) \rightarrow \mathcal{C}(I^d),$$

den wir zur Definition der allgemeinen lokalen Gradabbildung auf \mathcal{C} heranziehen.

Definition 4.32. Sei Γ ein endlicher Graph und $d \in \mathbb{N}$. Die *lokale Gradabbildung* $\text{ldeg}_{(\Gamma^d)} : \mathcal{C}(\Gamma^d) \rightarrow \mathbb{Z}$ wird definiert durch

$$\text{ldeg}_{(\Gamma^d)} := \sum_{\gamma \in (\Gamma_1^{\text{nd}})^d} \text{ldeg}_{\bar{M}} \circ i_\gamma^*.$$

Proposition 4.33. Es sei wieder X eine regulär strikt semistabile Kurve über S mit Totalordnung $<$ auf $\Gamma(X)$ und $W := W(X, <, d)$ das zugehörige Modell des d -fachen Produktes. Der in Proposition 4.23 bestimmte Vergleichshomomorphismus zwischen Chowring und kombinatorischem Chowring werde mit

$\varphi_W : \mathcal{C}(\Gamma(X)^d) \rightarrow \text{CH}_{W_s}(W)$ bezeichnet. Dann stimmt die lokale Gradabbildung von $\mathcal{C}(\Gamma(X)^d)$ mit der Gradabbildung in CH_{W_s} überein, d.h. es gilt

$$\text{ldeg}_{(\Gamma(X)^d)} = \text{ldeg}_W \circ \varphi_W.$$

Beweis. Nach Satz 4.25 ist lediglich zu zeigen, dass die Abbildungen für eigentliche Monome übereinstimmen. Seien daher $C_0, \dots, C_d \in \mathcal{R}(W)_0$ verschiedene irreduzible Komponenten mit $\{C_0, \dots, C_d\} \in \mathcal{R}_S(W)$, also $C_0 \cap \dots \cap C_d \neq \emptyset$. Da in W gemäß Proposition 4.18 alle eigentlichen Schnitte mit Vielfachheit 1 erfolgen, gilt $\text{ldeg}_W \circ \varphi_W(C_0 \cdot \dots \cdot C_d) = \text{ldeg}_W([C_0] \cdot \dots \cdot [C_d]) = 1$. Für die Bestimmung des Grades $\text{ldeg}_{(\Gamma(X)^d)}$ betrachten wir den d -Simplex (C_0, \dots, C_d) . Da dieser nichtausgeartet ist, gibt es nach Proposition 4.29 genau ein $s = (s_1, \dots, s_d) \in (\Gamma(X)_0)^d$ derart, dass $i_s^* : I^d \rightarrow \Gamma^d$ das Monom $C_0 \cdot \dots \cdot C_d$ auf einen eigentlichen Schnitt von $\mathcal{C}(I^d)$ abbildet. Für $s' \neq s$ gilt hingegen bereits $i_{s'}^*(C_0 \cdot \dots \cdot C_d) = 0$. Es folgt

$$\begin{aligned} \text{ldeg}_{(\mathcal{R}(X)^d)}(C_0 \cdot \dots \cdot C_d) &= \sum_{\tilde{s} \in \Gamma_1^d} \text{ldeg}_{(I, <, d)} \circ i_{\tilde{s}}^*(C_0 \cdot \dots \cdot C_d) \\ &= \text{ldeg}_{(I, <, d)} \circ i_s(C_0 \cdot \dots \cdot C_d) = 1. \end{aligned}$$

□

4.5. Explizite Berechnung von $\mathcal{C}(I^d)$

Um eine explizite Beschreibung der Gradabbildung zu erhalten, ist es nach dem vorigen Abschnitt ausreichend, den Ring $\mathcal{C}(I^d)$ zu verstehen. Es genügt ferner, den Ring $\mathcal{C}(I^d) \otimes \mathbb{Q}$ zu betrachten, da für die Gradabbildung Torsionselemente keine Rolle spielen. Im Folgenden geben wir eine günstigere Basis dieses Rings an und bestimmen anschließend alle Schnitzahlen.

Die Ecken von I seien wieder mit C_0 und C_1 bezeichnet und mit der Ordnung $C_0 < C_1$ versehen. Zu einem Vektor $v = (v_1, \dots, v_d) \in \mathbb{F}_2^d$ bezeichne C_v die Ecke aus $(I, <)^d$ mit $\text{pr}_i(C_v) = C_{v_i}$. Wir benennen die Vektoren der Standardbasis von \mathbb{F}_2^d mit e_1, \dots, e_d .

Mit diesen Bezeichnungen bildet $(C_v \mid v \in \mathbb{F}_2^d)$ ein Erzeugendensystem für $\mathcal{C}(I^d)$. Die erzeugende Relationen von $\mathcal{C}(I^d)$ aus Definition 4.21 erhalten die folgende Form:

$$(4.7) \quad C_v C_w = 0 \quad \forall v, w \in \mathbb{F}_2^d : \exists i, j \in \{1, \dots, d\} \text{ mit } (v_i, v_j) = (w_j, w_i) = (1, 0),$$

$$(4.8) \quad \left(\sum_{w \in \mathbb{F}_2^d} C_w \right) C_v = 0 \quad \text{für alle } v \in \mathbb{F}_2^d,$$

$$(4.9) \quad C_v C_{v'} \left(\sum_{\substack{w \in \mathbb{F}_2^d \\ w_i = v'_i}} C_w \right) = 0 \quad \begin{aligned} &\text{für alle } i \in \{1, \dots, d\} \text{ und } v, v' \in \mathbb{F}_2^d \\ &\text{mit } v_i \neq v'_i. \end{aligned}$$

Bemerkung 4.34. Für die Relation (4.7) genügt es, Paare $\{v, w\}$ von Vektoren zu betrachten. In I^d gilt nämlich für jedes Tupel $C_1, \dots, C_k \in (I^d)_0$ mit $\{C_1, \dots, C_k\} \notin (I^d)_S$ bereits $\{C_i, C_j\} \notin (I^d)_S$ für ein Paar $i, j \in \{1, \dots, k\}$.

In der Produktordnung auf \mathbb{F}_2^d gilt $v \leq w$, wenn für jedes $i \in \{1, \dots, d\}$ bereits $v_i \leq w_i$ gilt. Wir haben desweiteren auf $\mathcal{C}(I^d)$ eine Gradabbildung definiert, die nach Satz 4.25 und Proposition 4.17 eindeutig durch die Setzung

$$(4.10) \quad \text{ldeg}(C_{v_0} C_{v_1} \cdots C_{v_d}) = 1$$

für jede aufsteigende Kette $v_0 < v_1 < \cdots < v_d$ eindeutig bestimmt ist.

Definition 4.35. Es sei R ein kommutativer Ring mit Eins. Die Abbildung

$$\mathcal{F} : \text{Hom}_{\text{Set}}(\mathbb{F}_2^d, R) \rightarrow \text{Hom}_{\text{Set}}(\mathbb{F}_2^d, R),$$

die für eine Abbildung $f : \mathbb{F}_2^d \rightarrow R$ gegeben ist durch

$$\mathcal{F}(f)(v) := \sum_{w \in \mathbb{F}_2^d} (-1)^{\langle v, w \rangle} f(w),$$

heißt *diskrete Fouriertransformation*. Hierbei bezeichnet $\langle v, w \rangle := {}^t v \cdot w$ das Skalarprodukt der Vektoren v und $w \in \mathbb{F}_2^d$.

Bemerkung 4.36. Eine leichte Rechnung liefert die erwarteten Gleichungen

$$\mathcal{F} \circ \mathcal{F} = 2^d$$

und

$$\sum_{w \in \mathbb{F}_2^d} f(w) \mathcal{F}(g)(w) = \sum_{w \in \mathbb{F}_2^d} \mathcal{F}(f)(w) g(w)$$

für alle Abbildungen $f, g : \mathbb{F}_2^d \rightarrow R$.

Definition 4.37. Es bezeichne C_\bullet die Abbildung $C_\bullet : \mathbb{F}_2^d \rightarrow \mathcal{C}(I^d), v \mapsto C_v$. Zu einem Vektor $v \in \mathbb{F}_2^d$ bezeichne ferner das zugeordnete Element von $\mathcal{C}(I^d)$ mit

$$F_v := \mathcal{F}(C_\bullet)(v) = \sum_{w \in \mathbb{F}_2^d} (-1)^{\langle v, w \rangle} C_w \in \mathcal{C}(I^d).$$

Bemerkung 4.38. In der \mathbb{Q} -Algebra $\mathcal{C}(I^d)_\mathbb{Q} := \mathcal{C}(I^d) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, dem Chowring mit rationalen Koeffizienten, bilden die Elemente $(F_v \mid v \in \mathbb{F}_2^d)$ ein System von Erzeugern. Aufgrund der Gleichung $\mathcal{F} \circ \mathcal{F} = 2^d$ gilt nämlich insbesondere $2^d C_\bullet = \mathcal{F}(\mathcal{F}(C_\bullet))$ und daher gilt in $\mathcal{C}(I^d)_\mathbb{Q}$ für jedes $v \in \mathbb{F}_2^d$

$$C_v = \frac{1}{2^d} \sum_{w \in \mathbb{F}_2^d} (-1)^{\langle v, w \rangle} F_w.$$

Wir schreiben die im kombinatorischen Chowring vorliegenden Relationen um in Relationen für die Elemente F_v .

Bemerkung 4.39. Im Folgenden bezeichnen wir mit $E \subseteq \mathbb{F}_2^d$ die Menge der Basisvektoren der Standardbasis von \mathbb{F}_2^d :

$$E := \{e_1, \dots, e_d\}.$$

Proposition 4.40. Es seien $v, w \in \mathbb{F}_2^d$ und $e, e' \in E$ zwei Basisvektoren der Standardbasis. Dann gelten im kombinatorischen Chowring $\mathcal{C}(I^d)$ die folgenden Basisrelationen:

$$(4.11) \quad F_0 F_v = 0,$$

$$(4.12) \quad (F_{v+e+e'} - F_v)(F_{w+e+e'} - F_w) = (F_{v+e} - F_{v+e'})(F_{w+e} - F_{w+e'}),$$

$$(4.13) \quad F_e(F_v + F_{v+e})(F_w - F_{w+e}) = 0.$$

Beweis. Gleichung (4.11) folgt aufgrund von $F_0 = \sum_{v \in \mathbb{F}_2^d} C_v$ sofort aus (4.8).

Für (4.12) sei $e = e_i, e' = e_j$ und es bezeichne $J \subseteq \mathbb{F}_2^d$ die Teilmenge $J := \{w \in \mathbb{F}_2^d \mid w_i \neq w_j\}$. Beachtet man

$$\begin{aligned} (F_v - F_{v+e+e'}) &= 2 \sum_{w \in J} (-1)^{\langle v, w \rangle} C_w, \\ (F_{v+e} - F_{v+e'}) &= 2 \sum_{w \in J} (-1)^{\langle v, w \rangle} (-1)^{\langle e, w \rangle} C_w, \end{aligned}$$

so gilt

$$\begin{aligned} &(F_v - F_{v+e+e'})(F_{v'} - F_{v'+e+e'}) - (F_{v+e} - F_{v+e'})(F_{v'+e} - f_{v'+e'}) \\ &= 4 \sum_{w, w' \in J} (-1)^{\langle v, w \rangle + \langle v', w' \rangle} (1 - (-1)^{\langle e, w \rangle + \langle e, w' \rangle}) C_w C_{w'} \\ &= 8 \sum_{\substack{w, w' \in J \\ w_i \neq w'_i}} (-1)^{\langle v, w \rangle + \langle v', w' \rangle} C_w C_{w'} = 0. \end{aligned}$$

Die Elemente der letzten Summe fallen wegen $w_i \neq w'_i, w_j \neq w'_j$ nach (4.7) weg.

Die Relation (4.13) folgt aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} (4.14) \quad (F_0 + F_{e_i}) &= \sum_{\substack{w \in \mathbb{F}_2^d \\ w_i=0}} C_w, \\ (F_v + F_{v+e_i}) &= \sum_{\substack{w \in \mathbb{F}_2^d \\ w_i=0}} (-1)^{\langle v, w \rangle} C_w \text{ und} \\ (F_v - F_{v+e_i}) &= \sum_{\substack{w \in \mathbb{F}_2^d \\ w_i=1}} (-1)^{\langle v, w \rangle} C_w, \end{aligned}$$

denn mit (4.9) folgt

$$(F_v + F_{v+e_i})(F_w - F_{w+e_i})(F_0 + F_{e_i}) = 0$$

und aufgrund $F_0 F_{v'} = 0$ für alle $v' \in \mathbb{F}_2^d$ erhält man die Behauptung. \square

Bemerkung 4.41. Da die Elemente F_v für $v \in \mathbb{F}_2^d$ die \mathbb{Q} -Algebra $\mathcal{C}(I^d)_{\mathbb{Q}}$ erzeugen, folgt aus (4.11) bereits

$$F_0 \cdot \alpha = 0$$

für jedes Element $\alpha \in \mathcal{C}(I^d)_{\mathbb{Q}}$ von echt positivem Grad.

Für die folgenden Produkte ist allgemein die Bestimmung des Grades möglich:

Proposition 4.42. In $\mathcal{C}_{\mathbb{Q}}(I^d) = \mathcal{C}(I^d) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ gilt

$$\text{ldeg}\left(F_v \prod_{i=1}^d F_{e_i}\right) = \begin{cases} (-4)^d & \text{falls } v = (1, \dots, 1), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis. Für den Beweis benutzen wir die Zerlegung

$$F_v = \sum_{w \in \mathbb{F}_2^d} (-1)^{\langle v, w \rangle} C_w$$

und bestimmen für jeden Vektor $w \in \mathbb{F}_2^d$ den Wert von $\text{ldeg}\left(C_w \prod_{i=1}^d F_{e_i}\right)$.

Wir betrachten zu $t \in \{0, 1\}$ und $w \in \mathbb{F}_2^d$ das Element

$$\alpha^t(w) := \prod_{\substack{i \in \{1, \dots, d\} \\ w_i = t}} F_{e_i}.$$

Es gilt somit $\prod_{i=1}^d F_{e_i} = \alpha^0(w)\alpha^1(w)$. Für jedes j mit $w_j \neq t$ lässt sich eine Rekursionsbeziehung

$$(4.15) \quad C_w \alpha^t(w) = 2(-1)^t C_w C_{w+e_j} \alpha^t(w + e_j)$$

ableiten: Wir zeigen dazu, dass die Differenz

$$(4.16) \quad C_w \alpha^t(w) - 2(-1)^t C_w C_{w+e_j} \alpha^t(w + e_j)$$

verschwindet. Aufgrund von $w_j \neq t$ gilt $\alpha^t(w) = F_{e_j} \alpha^t(w + e_j)$ und wir erhalten mit Bemerkung 4.41

$$C_w F_{e_j} = (-1)^t C_w (F_0 + (-1)^t F_{e_j}) \stackrel{(4.14)}{=} (-1)^t C_w \left(2 \sum_{\substack{w' \in \mathbb{F}_2^d \\ w'_j = t}} C_{w'} \right).$$

Es folgt für (4.16)

$$\begin{aligned} & C_w \alpha^t(w) - 2(-1)^t C_w C_{w+e_j} \alpha^t(w + e_j) \\ &= C_w F_{e_j} \alpha^t(w + e_j) - 2(-1)^t C_w C_{w+e_j} \alpha^t(w + e_j) \\ &= 2(-1)^t C_w \alpha^t(w + e_j) \left(\sum_{\substack{w' \in \mathbb{F}_2^d \setminus \{w+e_j\} \\ w'_j = t}} C_{w'} \right). \end{aligned}$$

Es genügt daher, die Gleichung

$$C_{w'} C_w \alpha^t(w + e_j) = 0$$

für jedes $w' \in \mathbb{F}_2^d$ mit $w'_j = t$ und $w' \neq w + e_j$ zu zeigen. Da $w' \neq w + e_j$ gilt, gibt es neben j eine weitere Position $k \in \{1, \dots, d\}$, an der sich w' von w unterscheidet. Im Falle $t = 1$ gilt $w_j = 0, w'_j = 1$ und wir können daher annehmen, dass $w_k = 0, w'_k = 1$ gilt; andernfalls ist bereits $C_{w'} C_w = 0$ nach (4.7). Dann gilt aber

$$C_{w'} C_w F_{e_k} = C_{w'} C_w (F_0 + F_{e_k}) = C_{w'} C_w \left(2 \sum_{\substack{w'' \in \mathbb{F}_2^d \\ w''_k = 0}} C_{w''} \right) = 0$$

nach (4.9). Der Fall $t = 0$ folgt analog.

Wir wenden uns jetzt wieder dem Element

$$C_w \prod_{i=1}^d F_{e_i} = C_w \alpha^0(w) \alpha^1(w)$$

zu. Es bezeichne $w^{(0)} < \dots < w^{(d)} \in \mathbb{F}_2^d$ eine maximale aufsteigende Kette von Vektoren, die w enthält. Das Element w steht dann schon an $|w|$ -ter Stelle, wir haben somit $w = w^{(|w|)}$ und mehrmalige Anwendung von (4.15) liefert

$$C_w \alpha^0(w) \alpha^1(w) = 2^d (-1)^{d-|w|} C_{w^{(0)}} \cdot \dots \cdot C_{w^{(d)}}.$$

Das bedeutet für den Grad nach (4.10) somit

$$\text{ldeg} \left(C_w \prod_{i=1}^d C_{e_i} \right) = 2^d (-1)^{d-|w|} = (-2)^d (-1)^{\langle w, (1, \dots, 1) \rangle}.$$

Die Behauptung folgt schließlich aus

$$\begin{aligned} \text{ldeg} \left(F_v \prod_{i=1}^d F_{e_i} \right) &= \sum_{w \in \mathbb{F}_2^d} (-1)^{\langle v, w \rangle} \text{ldeg} \left(C_w \prod_{i=1}^d C_{e_i} \right) \\ &= \sum_{w \in \mathbb{F}_2^d} (-1)^{\langle v, w \rangle} (-2)^d (-1)^{\langle v, (1, \dots, 1) \rangle} \\ &= (-4)^d \delta_{v, (1, \dots, 1)}. \end{aligned}$$

□

Wir können desweiteren die im Quadrat vorliegenden Symmetrien ausnutzen:

Proposition 4.43.

(i) Auf $\mathcal{C}(I^d)$ gibt es einen Isomorphismus graduierter Ringe

$$\psi : \mathcal{C}(I^d) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}(I^d),$$

der durch $\psi(C_v) = C_{v+(1,\dots,1)}$ eindeutig bestimmt ist. Es gilt

$$\psi(F_v) = (-1)^{\langle v, (1,\dots,1) \rangle} F_v.$$

(ii) Es existiert eine Operation der symmetrischen Gruppe S_d auf $\mathcal{C}(I^d)$ die für $\sigma \in S_d$ durch

$$\cdot^\sigma : \mathcal{C}(I^d) \rightarrow \mathcal{C}(I^d), C_v \mapsto C_{v^\sigma}$$

eindeutig bestimmt ist. Es gilt

$$(F_v)^\sigma = F_{v^\sigma}.$$

Beide Automorphismen graduierter Ringe sind mit dem lokalen Grad ldeg verträglich.

Beweis. Die Existenz und Eindeutigkeit der Abbildungen ψ und \cdot^σ ist unmittelbar aus der Beschreibung des kombinatorischen Chowrings (4.8),(4.7),(4.9) ersichtlich. Die Werte von F_v lassen sich sofort nachrechnen. Um die Verträglichkeit mit der lokalen Gradabbildung zu zeigen, genügt es nach Satz 4.25, eigentliche Monome zu betrachten. Ist ein eigentliches Monom $C_{v_0}C_{v_1}\dots C_{v_d}$ nichttrivial, so müssen die Elemente v_0, \dots, v_d (nach evtl. Umsortierung) eine aufsteigende Kette bilden. Da damit aber auch $(v_0)^\sigma, \dots, (v_d)^\sigma$ und $(v_d + (1, \dots, 1)), \dots, (v_d + (1, \dots, 1))$ aufsteigende Ketten bilden, gilt nach (4.10)

$$1 = \text{ldeg}_{\mathcal{C}(I^d)}(C_{v_0}\dots C_{v_d}) = \text{ldeg}_{\mathcal{C}(I^d)}((C_{v_0}\dots C_{v_d})^\sigma) = \text{ldeg}_{\mathcal{C}(I^d)}(\psi(C_{v_0}\dots C_{v_d})).$$

□

Proposition 4.44. Sind $v_0, \dots, v_d \in \mathbb{F}_2^d$ mit $(\sum_{i=0}^d v_i) \cdot (1, \dots, 1) = 1$, so gilt

$$\text{ldeg}(F_{v_0}\dots F_{v_d}) = 0.$$

Beweis. Nach Proposition 4.43 gilt $\text{ldeg} \circ \psi = \text{ldeg}$. Damit folgt

$$\text{ldeg}(F_{v_0}\dots F_{v_d}) = \text{ldeg}(\psi(F_{v_0}\dots F_{v_d})) = (-1)^{\sum_{i=0}^d v_i \cdot (1, \dots, 1)} = -\text{ldeg}(F_{v_0}\dots F_{v_d})$$

und somit die Behauptung. □

4.6. Berechnung von $\mathcal{C}(I^2)$ und $\mathcal{C}(I^3)$

Die Sätze des vorangegangenen Abschnitts ermöglichen eine Bestimmung der Schnittzahlen für $d = 2$ und $d = 3$:

Satz 4.45. *Es seien $d = 2$ und v_1, v_2, v_3 Vektoren aus \mathbb{F}_2^2 . Dann gilt in $\mathcal{C}(I^2)_{\mathbb{Q}}$:*

$$\text{ldeg}(F_{v_1} F_{v_2} F_{v_3}) = \begin{cases} -32 & \text{falls } v_1 = v_2 = v_3 = (1, 1), \\ 16 & \text{falls } \{v_1, v_2, v_3\} = \{(1, 0), (0, 1), (1, 1)\}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis. In Proposition 4.42 wurde bereits $\text{ldeg}(F_{10} F_{01} F_{11}) = (-4)^2 = 16$ bestimmt. Mittels (4.11) und (4.13) folgt aus Proposition 4.40

$$\begin{aligned} 2F_{10}^2 F_{11} &= F_{10}^2 ((F_{11} + F_{01}) + (F_{11} - F_{01})) \\ (4.17) \quad &= F_{10}(F_{10} - F_{00})(F_{11} + F_{01}) + F_{10}(F_{10} + F_{00})(F_{11} - F_{01}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Unter Ausnutzung von (4.12) gilt daher

$$F_{11}^3 = F_{11}(F_{11} - F_{00})^2 = F_{11}(F_{10} - F_{01})^2 = -2F_{10}F_{01}F_{11}$$

und somit $\text{ldeg}(F_{11}^3) = -32$. Alle übrigen Monome haben Grad 0 aufgrund von Proposition 4.44 oder Gleichung (4.12) aus Proposition 4.40. \square

Um die Schnittzahlen im Fall $d = 3$ zu beschreiben, ist zusätzliche Notation nötig, da die Liste sonst übermäßig lang wird. Aus Gründen der besseren Lesbarkeit werden Vektoren in \mathbb{F}_2^3 durch Hintereinanderfügen der Ziffern notiert, d.h. mit 101 ist der Vektor $(1, 0, 1) \in \mathbb{F}_2^3$ gemeint. Nur für diese Beschreibung seien die Vektoren aus \mathbb{F}_2^3 zuerst nach Anzahl der vorkommenden Einsen, dann lexikographisch sortiert:

$$000 \prec 100 \prec 010 \prec 001 \prec 110 \prec 101 \prec 011 \prec 111.$$

Viertupel von Vektoren $(v_0, v_1, v_2, v_3) \in (\mathbb{F}_2^3)^4$ seien ferner mittels der lexikographischen Ordnung sortiert, d.h. es gilt $(v_0, v_1, v_2, v_3) \prec (v'_0, v'_1, v'_2, v'_3)$, falls es ein N gibt mit $v_N \prec v'_N$ und $v_i = v'_i$ für alle $i < N$.

Wir betrachten zu einem Tupel (v_0, v_1, v_2, v_3) aus \mathbb{F}_2^3 den Wert von

$$d(v_0, v_1, v_2, v_3) := \text{ldeg}(F_{v_0} F_{v_1} F_{v_2} F_{v_3}).$$

Aus Proposition 4.43 folgt, dass für $\sigma \in S_4, \tau \in S_3$ die Gleichung

$$d(v_0, v_1, v_2, v_3) = d((v_0, v_1, v_2, v_3)^{\sigma, \tau}) := d(v_{\sigma(0)}^\tau, v_{\sigma(1)}^\tau, v_{\sigma(2)}^\tau, v_{\sigma(3)}^\tau)$$

gilt. Es genügt daher die Werte von d jeweils für das minimale Element der Menge

$$\{(v_0, v_1, v_2, v_3)^{\sigma, \tau} \mid \sigma \in S_4, \tau \in S_3\}$$

anzugeben.

Satz 4.46. Es sei $V = (v_0, \dots, v_3)$ ein Tupel von Vektoren aus \mathbb{F}_2^3 derart, dass

$$(v_0, v_1, v_2, v_3) \leq (v_0, v_1, v_2, v_3)^{\sigma, \tau}$$

für alle $\sigma \in S_4, \tau \in S_3$ gilt. Dann folgt für die Schnittzahlen in $\mathcal{C}(I^3)_{\mathbb{Q}}$:

$$\text{ldeg}(F_{v_0} F_{v_1} F_{v_2} F_{v_3}) = \begin{cases} -64 & \text{falls } V = (100, 010, 001, 111), \\ -64 & \text{falls } V = (100, 010, 101, 011), \\ -64 & \text{falls } V = (100, 110, 101, 111), \\ 128 & \text{falls } V = (100, 011, 011, 111), \\ 128 & \text{falls } V = (100, 111, 111, 111), \\ 128 & \text{falls } V = (110, 110, 101, 011), \\ -128 & \text{falls } V = (110, 101, 111, 111), \\ 512 & \text{falls } V = (111, 111, 111, 111), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis. Vor der Bestimmung aller möglichen Werte von d leiten wir in unserem Spezialfall einige wichtige Gleichungen her. Zunächst gilt analog zu (4.17) für jedes $v \in \mathbb{F}_2^3$ und jeden Einheitsvektor $e \in \mathbb{F}_2^3$ die Beziehung

$$\begin{aligned} (4.18) \quad 2F_e^2 F_v &= F_e^2((F_v - F_{v+e}) + (F_v + F_{v+e})) \\ &= F_e(F_e + F_0)(F_v - F_{v+e}) + F_e(F_e - F_0)(F_v + F_{v+e}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir zusammen mit (4.12) für jedes $v \in \mathbb{F}_2^3$ die Gleichung

$$(4.19) \quad F_{110}^2 F_v = (F_{110} - F_{000})^2 F_v = (F_{100} - F_{010})^2 F_v = -2F_{100}F_{010}F_v.$$

Ferner erhalten wir durch Kombination von Proposition 4.44 und (4.12) für beliebige Vektoren $u, v, w \in \mathbb{F}_2^3$ und einen Einheitsvektor $e \in \mathbb{F}_2^3$ die Gleichung

$$(4.20) \quad d(e, u, v, w) = d(e, u + e, v + e, w).$$

Wir bestimmen die nichttrivialen Werte von $d(v_0, v_1, v_2, v_3)$ in aufsteigender Reihenfolge bezüglich der Ordnung \prec .

Anfangsstück $(100, 010, \dots)$. Nach (4.11) und (4.18) beginnt das kleinste derartige Tupel mit $v_0 = 100, v_1 = 010, v_2 = 001$ und aufgrund von Proposition 4.42 muss dann bereits $v_3 = 111$ gelten und wir erhalten $d(V) = (-4)^3 = -64$. Für das nächstgrößere Anfangsstück $v_0 = 100, v_1 = 010, v_2 = 110$ folgt aufgrund von (4.20) und (4.18) sofort

$$d(100, 010, 110, v_3) = d(100, 010, 010, v_3 + 100) = 0.$$

Für das Anfangsstück $V = (100, 010, 101, v_3)$ gilt ebenfalls nach (4.20)

$$d(100, 010, 101, v_3) = d(100, 010, 001, v_3 + 100)$$

und nach Proposition 4.42 erhalten wir ein nichttriviales Ergebnis im Falle $v_3 = 011$:

$$d(100, 010, 101, 011) = d(100, 010, 001, 111) = -64.$$

Ein Tupel in der Form $(100, 010, 011, v_3)$ kann nicht vorkommen, da dieses durch $\tau = (12), \sigma = (12)$ auf ein kleinere Tupel $(100, 010, 101, v_3^\sigma)$ abgebildet wird.

Es bleibt noch $V = (100, 010, 111, 111)$ zu untersuchen. Wieder aufgrund von (4.20) erhalten wir hierfür

$$d(100, 010, 111, 111) = d(100, 010, 001, 001) = 0.$$

Damit ist der Fall $v_0 = 100, v_1 = 010$ vollständig beschrieben.

Anfangsstück $(100, \dots)$. Tupel, die mit $(100, 001, \dots)$ beginnen, haben wir nicht zu betrachten, da sie durch $\tau = (23)$ in die bereits betrachtete Form $(100, 010, \dots)$ gebracht werden können.

Die nächstgrößeren Tupel haben die Form $(100, 110, v_2, v_3)$ und können aufgrund von

$$d(100, 110, v_2, v_3) = d(100, 010, v_2 + 100, v_3) = d(100, 010, v_2, v_3 + 100)$$

auf die bereits behandelten Fälle zurückgeführt werden. Das einzige mögliche Tupel, das minimal unter den (σ, τ) -Konjugierten ist und nichttriviale Schnittzahl $d(V)$ aufweist ist darunter $V = (100, 110, 101, 111)$ mit

$$d(100, 110, 101, 111) = d(100, 010, 001, 111) = -64.$$

Da Tupel der Form $(100, 101, v_2, v_3)$ nicht minimal unter den Konjugierten sind, ist als nächstes $V = (100, 011, v_2, v_3)$ zu untersuchen. Die Minimalität erfordert hier $011 \preceq v_2 \preceq v_3$, also $v_2, v_3 \in \{011, 111\}$ und aufgrund von Proposition 4.44 gilt wieder $d(100, 011, 111, 111) = 0$. Wir dürfen daher $v_2 = 011$ annehmen. Dann folgt aber mit (4.19)

$$d(100, 011, 011, v_3) = -2d(100, 010, 001, v_3)$$

und ein nichttriviales Ergebnis genau im Fall $v_3 = 111$.

Als letzte Möglichkeit müssen wir das Tupel $V = (100, 111, 111, 111)$ betrachten. Hierfür gilt wieder mit (4.20)

$$d(100, 111, 111, 111) = d(100, 011, 011, 111) = 128.$$

Da sich jeder Vektor aus $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ im Tupel V durch eine geeignete Permutation τ auf 100 abgebildet werden kann, sind damit alle Fälle behandelt, die Einheitsvektoren enthalten.

restliche Fälle Das nach der Ordnung \prec nächstgrößere mögliche Tupel hat die Form $V = (110, 110, v_2, v_3)$. Dieses lässt sich mittels (4.19) umformen zu

$$d(110, 110, v_2, v_3) = -2d(100, 010, v_2, v_3).$$

Nach den bereits behandelten Fällen erhalten wir ein nichttriviales Ergebnis genau für die Belegung $v_2 = 101, v_3 = 011$:

$$d(110, 110, 101, 011) = -2d(100, 010, 101, 011) = 128.$$

Enthält das Tupel V den Vektor 110 nur einmal, so kann es aufgrund der Minimalität unter $V^{\sigma, \tau}$ auch die Vektoren 101 und 011 höchstens einmal enthalten. Daher kommt mindestens einmal 111 vor. Wegen Proposition 4.44 können wir eine nichttriviale Schnittzahl nur erwarten, wenn 111 mit gerader Anzahl in V vorkommt. Dadurch bleiben lediglich zwei Fälle zu untersuchen: $V = (110, 101, 111, 111)$ und $V = (111, 111, 111, 111)$.

Für ersteren gilt mit (4.12)

$$\begin{aligned} d(110, 101, 111, 111) &= \text{ldeg}(F_{110}F_{101}F_{111}F_{111}) \\ &= \text{ldeg}(F_{110}F_{101}(F_{111} - F_{001})^2) \\ &= \text{ldeg}(F_{110}F_{101}(F_{101} - F_{011})^2) \\ &= \text{ldeg}(F_{110}F_{101}F_{011}^2 - 2F_{110}F_{101}F_{011}) \\ &= -\text{ldeg}(F_{110}^2F_{101}F_{011}) \\ &= -128. \end{aligned}$$

Dazu wurden die bereits gezeigten Gleichungen

$$\text{ldeg}(F_{110}F_{101}F_{001}^2) = \text{ldeg}(F_{110}F_{101}F_{001}F_{111}) = \text{ldeg}(F_{100}F_{110}F_{011}F_{111}) = 0$$

ausgenutzt.

Im Falle $V = (111, 111, 111, 111)$ zeigt die analoge Rechnung

$$\begin{aligned} d(111, 111, 111, 111) &= \text{ldeg}(F_{111}^4) \\ &= \text{ldeg}(F_{111}^2(F_{111} - F_{100})^2 + 2F_{111}^3F_{100}) \\ &= \text{ldeg}(F_{111}^2(F_{110} - F_{101})^2 + 2F_{111}^3F_{100}) \\ &= -2 \text{ldeg}(F_{110}F_{101}F_{111}^2) + 2 \text{ldeg}(F_{100}F_{111}^3) \\ &= -2 \cdot (-128) + 2 \cdot 128 \\ &= 512. \end{aligned}$$

□

5. Limiten von Schnittzahlen

Im folgenden Abschnitt kombinieren wir die Ergebnisse über Schnittzahlen und Metriken. Dadurch ist es möglich, lokalisierte Schnittzahlen von vertikalen Divisoren mit Methoden der Analysis zu bestimmen.

Es sei wie stets R ein vollständiger diskreter Bewertungsring mit algebraisch abgeschlossenem Restklassenkörper und X eine eigentliche regulär strikt semistabile Kurve über $S = \text{Spec } R$ mit einer Totalordnung $<$ auf $X_s^{(0)}$, deren Reduktionsgraph keine Doppelkanten aufweist. Weiter sei $W := W(X, <, d)$ das in Algorithmus 2.8 bestimmte regulär strikt semistabile Modell des Produktes $(X_\eta)^d$. Die nach Proposition 3.19 vorliegende Bijektion von Cartierdivisoren der speziellen Faser von W mit stückweise affinen Funktionen auf der geometrischen Realisierung der simplizialen Reduktionsmenge $|\mathcal{R}(W)|$ ermöglicht zusammen mit dem Schnittprodukt die Konstruktion einer $(d+1)$ -fachen Paarung auf den stückweise affinen Funktionen auf $|\mathcal{R}(W)|$.

Wir betrachten anschließend einen Grenzprozess wie in der Theorie von Zhang [Zha10, Sec. 3] indem wir zu verzweigten Erweiterungen von R übergehen. Falls bestimmte Bedingungen an die Schnittzahlen erfüllt sind, so erhalten wir eine Paarung für stückweise glatte Funktionen und können diese durch geeignet definierte analytische Ausdrücke beschreiben.

5.1. Analysis auf simplizialen Reduktionsmengen

Wir beginnen mit der Definition der analytischen Ausdrücke auf Produkten von Graphen. Sei dazu Γ ein endlicher Graph. Zu jeder Kante $\gamma \in \Gamma_1$ existiert nach Proposition A.11 eine Einbettung $i_\gamma : I \rightarrow \Gamma$ des Standardgraphen $I = \Delta[1]$ nach Γ , die die einzige Kante von I auf γ abbildet. Durch Produktbildung erhalten wir wie in Bemerkung 4.28 für jedes d -Tupel $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_d) \in \Gamma_1^d$ von Kanten eine Einbettung

$$i_\gamma := i_{\gamma_1} \times \dots \times i_{\gamma_d} : I^d \rightarrow \Gamma^d$$

und aufgrund der Funktorialität der geometrischen Realisierung eine induzierte Einbettung $(i_\gamma)_* : |I^d| \rightarrow |\Gamma^d|$ des d -dimensionalen „Einheitswürfels“ $|I|^d$ nach $|\Gamma^d|$.

Wir fassen die Einbettungen $(i_\gamma)_*$ als „Karten“ auf und nutzen diese Karten zur Definition analytischer Begriffe auf dem Graphen.

Wir identifizieren die geometrische Realisierung $|I|$ mit dem Einheitsintervall $[0, 1]$, daher ist die geometrische Realisierung des d -fachen Produktes $|I^d|$ kanonisch isomorph zum „Einheitswürfel“ $[0, 1]^d$. Zu einem k -Simplex $\{C_0, \dots, C_k\} \in$

$(I^d)_k$ bezeichnen wir die abgeschlossene konvexe Hülle der Eckpunkte C_0, \dots, C_k — aufgefasst als Punkte in $[0, 1]^d$ — mit $[C_0, \dots, C_k]$. Eine stetige Funktion $f : [C_0, \dots, C_k] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt glatt, wenn sie sich zu einer glatten Funktion auf einer offenen Umgebung $[C_0, \dots, C_k] \subseteq U \subseteq \mathbb{R}^d$ fortsetzen lässt.

Definition 5.1.

- (i) Eine stetige Funktion $f : |I^d| \simeq [0, 1]^d \rightarrow \mathbb{R}$ heißt
 - (a) (*in den Würfeln*) glatt, falls f auf $[0, 1]^d$ glatt ist,
 - (b) *in den Simplizes glatt*, falls für jede natürliche Zahl $k \in \mathbb{N}$ und jeden k -Simplex $\{C_0, \dots, C_k\} \in (I^d)_S$ die Einschränkung $f|_{[C_0, \dots, C_k]}$ glatt ist,
 - (c) *affin*, falls für jeden Simplex $\{C_0, \dots, C_k\} \in (I^d)_S$ die Einschränkung $f|_{[C_0, \dots, C_k]}$ eine affine Funktion ist.

Die Menge der stetigen Funktionen auf $|I^d|$ wird mit $\mathcal{C}^0(I^d)$, die der glatten Funktionen mit $\mathcal{C}_\square^\infty(I^d)$, die Menge der auf Simplizes glatten mit $\mathcal{C}_\Delta^\infty(I^d)$ und die Menge der affinen Funktionen mit $\mathcal{C}_\Delta^{\text{lin}}(I^d)$ bezeichnet.

- (ii) Es sei Γ ein endlicher Graph. Die Menge der stetigen Funktionen $f : |\Gamma^d| \rightarrow \mathbb{R}$ werde mit $\mathcal{C}^0(\Gamma^d)$ bezeichnet.

Eine Funktion $f \in \mathcal{C}^0(\Gamma^d)$ heißt in den Würfeln glatt (in den Simplizes glatt, affin) falls für jedes $\gamma \in (\Gamma_1)^d$ die Funktion $(i_\gamma)^* f = f \circ i_\gamma : [0, 1]^d \rightarrow \mathbb{R}$ in den Würfeln glatt (in den Simplizes glatt, in den Simplizes affin) ist.

Die Menge der in den Würfeln glatten, in den Simplizes glatten bzw. affinen Funktionen auf Γ^d werde mit $\mathcal{C}_\square^\infty(\Gamma^d)$, $\mathcal{C}_\Delta^\infty(\Gamma^d)$ resp. $\mathcal{C}_\Delta^{\text{lin}}(\Gamma^d)$ bezeichnet.

Für eine Betrachtung von partiellen Ableitungen müssen wir besonders diejenigen Punkte diskutieren, an denen die Funktionen aus $\mathcal{C}_\Delta^\infty(\Gamma^d)$ und $\mathcal{C}_\Delta^{\text{lin}}(\Gamma^d)$ nicht differenzierbar sind. Im Standardsimplex $|I^d|$ sind das gerade Punkte $x = (x_1, \dots, x_d) \in [0, 1]^d$, bei denen zwei oder mehr Koordinaten übereinstimmen: $\exists i \neq j : x_i = x_j$. Wir bezeichnen die Menge dieser Punkte als *verallgemeinerte Diagonale*.

Definition 5.2. Wir bezeichnen die Punkte $|I^d| \setminus \partial|I^d|$ als innere Punkte der geometrischen Realisierung von I^d . Sei Γ ein beliebiger endlicher Graph. Ein Punkt $x \in |\Gamma^d|$ heißt *innerer Punkt*, wenn es ein Tupel $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_d) \in \Gamma_1^d$ gibt, so dass $x = (i_\gamma)_*(x')$ für einen inneren Punkt $x' \in |I^d|$ gilt. Ist dies der Fall, so ist γ und x' eindeutig bestimmt. Die Menge der inneren Punkte wird mit $|\Gamma^d|^i$ bezeichnet.

Definition 5.3.

- (i) Es sei $x \in |I^d|^i$ ein innerer Punkt in der geometrischen Realisierung der simplizialen Menge I^d , beschrieben durch seine Koordinaten $(x_1, \dots, x_d) \in [0, 1]^d$. Wir definieren eine disjunkte Zerlegung $\{1, \dots, d\} = A_1 \amalg \dots \amalg A_l$ derart, dass

$$x_i = x_j \Leftrightarrow \exists h : i, j \in A_h$$

gilt. Dadurch wird eine eindeutige Partition

$$d(x) := \{A_1, \dots, A_l\}$$

der Menge $\{1, \dots, d\}$ bestimmt.

- (ii) Es sei $x \in |\Gamma^d|^i$ ein innerer Punkt in der geometrischen Realisierung des Produktes Γ^d . Dann existiert ein Tupel $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_d) \in \Gamma_1^d$ und ein Punkt $x' \in |I^d|$ mit $(i_\gamma)_*(x') = x$. Diese sind eindeutig bestimmt, da x ein innerer Punkt ist. Wir setzen daher

$$d(x) := d(x').$$

Die Partition $d(x)$ eines Punktes $x \in |I^d|$ gibt an, welche der Koordinaten von x übereinstimmen. Beispielsweise werden die Punkte $x \in |I^d|$ mit $d(x) = \{1, \dots, d\}$ beschrieben durch $\{(t, \dots, t) \mid t \in (0, 1)\}$, sie bilden daher die Diagonale in $[0, 1]^d$.

Definition 5.4. Es sei Γ ein endlicher Graph und $\mathcal{P} = \{A_1, \dots, A_k\}$ eine Partition der Menge $\{1, \dots, d\}$. Wir bezeichnen die Teilmenge

$$\mathcal{D}_{\mathcal{P}}(\Gamma^d) := \left\{ x \in |\Gamma^d| \mid d(x) = \mathcal{P} \right\} \subseteq |\Gamma^d|$$

als *verallgemeinerte Diagonale* zur Partition \mathcal{P} .

Bemerkung 5.5. Es sei $\mathcal{P} = \{A_1, \dots, A_l\}$ eine Partition der Menge $\{1, \dots, d\}$ und $I \subseteq \{1, \dots, d\}$ eine Teilmenge mit $\#(A_i \cap I) = 1$ für alle $i = 1, \dots, l$; es gilt also $I = \{i_1, \dots, i_l\}$ mit $i_1 \in A_1, \dots, i_l \in A_l$. Wir erhalten dann

$$\mathcal{D}_{\mathcal{P}}(I^d) = \left\{ x = (x_1, \dots, x_d) \in |I^d| \mid x_{j_1} = x_{j_2} \iff \exists m \in \{1, \dots, l\} : j_1, j_2 \in A_m \right\}$$

und durch die Projektion pr_I auf die Koordinaten i_1, \dots, i_l erhalten wir eine Bijektion

$$c_{\mathcal{P}} : \mathcal{D}_{\mathcal{P}}(I^d) \rightarrow [0, 1]^l, (x_1, \dots, x_d) \mapsto (x_{i_1}, \dots, x_{i_l}).$$

Die Karte $c_{\mathcal{P}}$ ist unabhängig von der Wahl der Menge I .

Da stetige Funktionen integrierbar sind, lässt sich ohne Schwierigkeiten ein Integral auf Γ^d und auf beliebigen verallgemeinerten Diagonalen $\mathcal{D}(\mathcal{P})$ definieren.

Definition 5.6.

- (i) Sei $\Gamma = I$ und $f \in \mathcal{C}^0(I^d)$ eine stetige Funktion auf dem „Standardquadrat“ I^d . Dann ist $|I^d|$ kanonisch homöomorph zu $[0, 1]^d$ und wir können daher das *Integral* über f definieren als

$$\int_{I^d} f := \int_{[0, 1]^d} f(x) d\mu,$$

wobei wir mit μ das Lebesgue-Maß auf $[0, 1]^d$ bezeichnen. Sei zusätzlich \mathcal{P} eine Partition der Menge $\{1, \dots, d\}$. Dann definieren wir das Integral entlang der Diagonale $\mathcal{D}_{\mathcal{P}}$ durch

$$\int_{\mathcal{D}_{\mathcal{P}}(I^d)} f := \int_{[0,1]^{|\mathcal{P}|}} f \circ c_{\mathcal{P}}^{-1} d\mu,$$

mit der Karte $c_{\mathcal{P}}$ aus Bemerkung 5.5.

- (ii) Sei Γ ein beliebiger Graph und $f \in \mathcal{C}^0(\Gamma^d)$ eine stetige Funktion auf dem d -fachen Selbstprodukt von Γ und \mathcal{P} eine Partition von $\{1, \dots, d\}$, so definieren wir das *Integral* über Γ^d bzw. über die verallgemeinerte Diagonale durch

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma^d} f &:= \sum_{\gamma \in \Gamma_1^d} \int_{I^d} (f \circ (i_{\gamma})_*), \\ \int_{\mathcal{D}_{\mathcal{P}}(\Gamma^d)} f &:= \sum_{\gamma \in \Gamma_1^d} \int_{\mathcal{D}_{\mathcal{P}}(I^d)} (f \circ (i_{\gamma})_*). \end{aligned}$$

Bevor wir zu einer Verallgemeinerung der Ableitungsoperatoren für in den Simplices glatte Funktionen kommen, müssen wir zunächst die Funktionen auf dem Einheitswürfel näher studieren. Wir werden eine Form der diskreten Fouriertransformation benutzen, um einen Zusammenhang sowohl mit den in Abschnitt 4.5 bestimmten Schnittvielfachheiten als auch mit Ableitungen der Funktion f herstellen zu können.

Sei $v = (v_1, \dots, v_d) \in \mathbb{F}_2^d$ ein Vektor, dann bezeichnen wir mit $|v|$ die Anzahl der nichttrivialen Einträge, d.h. $|v| = \#\{i \mid v_i \neq 0\}$. Wir nutzen einen Vektor $v \in \mathbb{F}_2^d$ im Folgenden, um die Ecken eines Würfels zu indizieren. Sei $h \in \mathbb{R}$, dann bezeichnen wir mit $h^v \in \mathbb{R}^d$ die durch

$$h^v := h \cdot ((-1)^{v_1}, \dots, (-1)^{v_d})$$

gegebene Ecke eines Würfels um den Nullpunkt mit Kantenlänge $2h$. Wir betrachten im Folgenden zu einer stetigen Funktion $f \in \mathcal{C}^0(I^d)$ auf dem Einheitswürfel und $x \in |I^d| \setminus \partial|I^d|$ die Funktionswerte von f in den Ecken eines x umgebenden Würfels

$$f_x^h : \mathbb{F}_2^d \rightarrow \mathbb{R}, v \mapsto f(x + h^v).$$

Definition 5.7.

- (i) Seien $f \in \mathcal{C}^0(I^d)$ eine stetige Funktion auf dem Einheitswürfel, $x \in |I^d|^i = |I^d| \setminus \partial|I^d|$, $v \in \mathbb{F}_2^d$ und $h > 0$ so klein, dass für alle $w \in \mathbb{F}_2^d$ auch der Punkt $x + h^w \in |I^d|^i$ im Inneren von $|I^d|$ liegt. Die diskrete Fouriertransformation von f_x^h liefert eine Funktion

$$\begin{aligned} \Delta_h^v f : |I^d|^i &\rightarrow \mathbb{R}, \\ x &\mapsto \frac{1}{2^d} \mathcal{F} f_x^h(v), \end{aligned}$$

d.h. es gilt $\Delta_h^v f(x) = \frac{1}{2^d} \sum_{w \in \mathbb{F}_2^d} (-1)^{\langle v, w \rangle} f_x^h(w)$.

- (ii) Sei $f \in \mathcal{C}^0(\Gamma^d)$ eine stetige Funktion auf dem Produkt eines Graphen Γ ohne Mehrfachkanten. Es sei $x \in |\Gamma^d|^i$ ein innerer Punkt der das Bild eines Punktes $x' \in |I^d|^i$ unter $(i_\gamma)_* : |I^d| \rightarrow |\Gamma^d|$ für ein $\gamma \in \Gamma_1^d$. Desweiteren sei $v \in \mathbb{F}_2^d$ und $h > 0$ so klein, dass $x' + h^w \in |I^d|^i$ für alle $w \in \mathbb{F}_2^d$ gilt. Dann definiere

$$\Delta_h^v f(x) := \Delta_h^v f \circ (i_\gamma)_*.$$

Da x ein innerer Punkt in $|\Gamma^d|$ ist, sind γ und x' eindeutig und daher $\Delta_h^v f(x)$ wohldefiniert.

Proposition 5.8. *Sei $f \in \mathcal{C}^0(\Gamma^d)$ eine stetige Funktion, die in einer Umgebung des inneren Punktes $x \in |\Gamma^d|^i$ glatt ist. Dann konvergiert $\frac{1}{h^{|v|}} \Delta_h^v f(x)$ gegen die durch den Parameter $v = (v_1, \dots, v_d) \in \mathbb{F}_2^d$ bestimmte Ableitung von f :*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^{|v|}} \Delta_h^v f(x) = D^v f(x) := \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{v_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_d} \right)^{v_d} f(x).$$

Beweis. Es genügt, die Aussage für den Standardgraphen $\Gamma = I$ zu zeigen. Dazu benutzen wir die mehrdimensionale Taylorentwicklung der Funktion f im Punkt x : Da f in einer Umgebung des Punktes x glatt ist, gilt für jeden Vektor $w \in \mathbb{F}_2^d$, jedes $h \in \mathbb{R}$ und $l \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} f(x + h^w) &= \sum_{\substack{\lambda \in \mathbb{N}_0^d \\ 0 \leq |\lambda| \leq l}} \frac{(h^w)^\lambda}{\lambda!} D^\lambda f(x) + o(\|(h^w)\|^l) \\ &= \sum_{\substack{\lambda \in \mathbb{N}_0^d \\ 0 \leq |\lambda| \leq l}} (-1)^{\langle w, \lambda \text{ mod } 2 \rangle} \frac{h^{|\lambda|}}{\lambda!} D^\lambda f(x) + o(h^l). \end{aligned}$$

Die Terme $\lambda!$, $(h^w)^\lambda$, $|\lambda|$ sind dabei im Sinne der üblichen Multiindexschreibweise zu verstehen. Für die Fouriertransformierte $\Delta_h^v f$ ergibt sich damit:

$$\begin{aligned} \Delta_h^v f(x) &= \frac{1}{2^d} \sum_{w \in \mathbb{F}_2^d} (-1)^{\langle v, w \rangle} f(x + h^w) \\ &= \frac{1}{2^d} \sum_{w \in \mathbb{F}_2^d} (-1)^{\langle v, w \rangle} \sum_{0 \leq |\lambda| \leq |v|} (-1)^{\langle w, \lambda \text{ mod } 2 \rangle} \frac{h^{|\lambda|}}{\lambda!} D^\lambda f(x) + o(h^{|v|}) \\ &= \frac{1}{2^d} \sum_{0 \leq |\lambda| \leq |v|} \left(\sum_{w \in \mathbb{F}_2^d} (-1)^{\langle w, v - (\lambda \text{ mod } 2) \rangle} \right) \frac{h^{|\lambda|}}{\lambda!} D^\lambda f(x) + o(h^{|v|}) \\ &= h^{|v|} D^v f(x) + o(h^{|v|}). \end{aligned}$$

Wir erhalten daher

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^{|v|}} \Delta_h^v f(x) = D^v f(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{v_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_d} \right)^{v_d} f(x).$$

□

Eine ähnliche Aussage erhalten wir auch für Funktionen, die auf Simplizes glatt sind. Dabei erhält man auf den verallgemeinerten Diagonalen im Allgemeinen eine schwächere Konvergenz der Funktionen Δ_h^v .

Proposition 5.9. *Sei $f \in \mathcal{C}_\Delta^\infty(\Gamma^d)$ eine auf Simplizes glatte Funktion in Γ^d , $v \in \mathbb{F}_2^d$ und $\mathcal{P} = \{A_1, \dots, A_k\}$ eine Partition der Menge $\{1, \dots, d\}$. Wir setzen*

$$\alpha = \alpha(\mathcal{P}, v) := \#\{i \in \{1, \dots, k\} \mid \exists a \in A_i : v_a = 1\}.$$

Dann existiert für jeden Punkt $x \in \mathcal{D}_{\mathcal{P}}(\Gamma^d)$ der Grenzwert

$$(5.1) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \Delta_h^v f(x)$$

und (5.1) ist stetig in x auf $\mathcal{D}_{\mathcal{P}}(\Gamma^d)$.

Der Beweis dieser Aussage ist sehr technisch. Es genügt, die Aussage für den Standardgraphen $\Gamma = I$ zu zeigen. Wir zerlegen dazu im folgenden Lemma die Summe $\Delta_n^v(f)(x)$ aus Definition 5.7 in Teilsummen, so dass jede Teilsumme nur Beiträge aus einem Simplex enthält. Dann kann man die Funktion f durch eine glatte Funktion ersetzen und die Aussage folgt aus Proposition 5.8.

Wir bezeichnen im Beweis zu einer Menge $J \subseteq \{1, \dots, d\}$ den von den Basisvektoren e_i mit $i \in J$ aufgespannten Unterraum von \mathbb{F}_2^d mit V_J . Ist $H := \{1, \dots, d\} \setminus J$ das Komplement, so gilt $V = V_J \oplus V_H$. Die zugehörigen Projektionen dieser direkten Summe werden mit pr_J und pr_H bezeichnet.

Lemma 5.10. *Sei $f \in \mathcal{C}_\Delta^\infty(I^d)$ eine auf Simplizes glatte Funktion und $x \in |I^d|$. Es sei $J \subseteq \{1, \dots, d\}$ eine Menge, die aus jedem Block der Partition $d(x) = \{A_1, \dots, A_l\}$ genau ein Element enthält (vgl. Bemerkung 5.5), und die Menge $H := \{1, \dots, d\} \setminus J$ ihr Komplement. Dann existiert für jedes $v \in V$ und $v' \in V_H$ ein $\epsilon > 0$, eine offene Umgebung $U \subseteq |I^d|$ von x und eine auf U glatte Funktion F mit*

$$\sum_{v_H \in V_H} (-1)^{\langle v_H, v' \rangle} \Delta_h^{v+v_H}(f)(x') = \sum_{v_H \in V_H} (-1)^{\langle v_H, v' \rangle} \Delta_h^{v+v_H}(F)(x')$$

für alle $x' \in U$ mit $d(x') = d(x)$ und alle $h < \epsilon$.

Beweis. Es sei $\epsilon > 0$ so klein gewählt, dass $\epsilon < \frac{1}{4}|x_i - x_j|$ für alle i, j mit $x_i \neq x_j$ und es bezeichne $U' = \{x' \in |I^d| \mid |x' - x| \leq \epsilon\}$. Für jedes $x' \in U'$, $d(x') = d(x)$ gilt offenbar

$$\begin{aligned} \sum_{v_H \in V_H} (-1)^{\langle v_H, v' \rangle} \Delta_h^{v+v_H}(f)(x') &= \sum_{v_H \in V_H} (-1)^{\langle v_H, v' \rangle} \sum_{w \in \mathbb{F}_2^d} (-1)^{\langle v+v_H, w \rangle} f_{x'}^h(w) \\ &= \sum_{\substack{v_H, w_H \in V_H \\ w_J \in V_J}} (-1)^{\langle v_H, v' \rangle + \langle v+v_H, w_H \rangle + \langle v, w_J \rangle} f_{x'}^h(w_J + w_H) \\ &= \sum_{\substack{w_H \in V_H \\ w_J \in V_J}} 2^{|H|} \delta_{v', w_H} (-1)^{\langle v, w_H \rangle + \langle v, w_J \rangle} f_{x'}^h(w_J + w_H) \\ &= 2^{|H|} \sum_{w_J \in V_J} (-1)^{\langle v, w_J + v' \rangle} f(x' + h^{w_J + v'}). \end{aligned}$$

Die im letzten Ausdruck auftretenden Punkte

$$Q := \{x' + h^{w_J+v'} \mid w_J \in V_J, h < \epsilon, x' \in U', d(x') = d(x)\}$$

liegen in einem Simplex: Für die Koordinaten $q = (q_1, \dots, q_d) \in \mathbb{R}^d$ aller Punkte $q \in Q$ gelten die Ungleichungen:

$$\begin{aligned} q_{k_1} &< q_{k_2} && \text{falls } x_{k_1} < x_{k_2}, \\ q_j &\leq q_k && \text{falls } x_j = x_k, j \in H, v_j = 1, \\ q_j &\geq q_k && \text{falls } x_j = x_k, j \in H, v_j = 0. \end{aligned}$$

Es ist daher möglich, die Koordinaten aller Punkte aus P durch eine Permutation $\sigma \in S_d$ aufsteigend zu sortieren; daher liegen nach Proposition A.19 alle diese Punkte in einem Simplex $S_\sigma \subseteq |I^d|$. Da f eine auf Simplizes glatte Funktion ist, gibt es auf einer Umgebung $U'' \supseteq S_\sigma$ eine glatte Fortsetzung F der Funktion. Die Wahl $U := U' \cap U''$ liefert schließlich die Behauptung. \square

Korollar 5.11. Sei $f \in \mathcal{C}^0(I^d)$, $v \in \mathbb{F}_2^d$ und $x \in |I^d|$, sowie $J, H \subseteq \{1, \dots, d\}$ wie in Lemma 5.10. Dann existiert eine Umgebung $U \subseteq |I^d|$ von x und auf U glatte Funktionen $(F_{v_H})_{v_H \in V_H}$ mit

$$\Delta_h^v(f)(x') = \sum_{v_H \in V_H} \Delta_h^{v+v_H}(F_{v_H})$$

für alle $x' \in U$ mit $d(x') = d(x)$.

Beweis. Nach Lemma 5.10 gibt es eine Umgebung U von x , ein $\epsilon > 0$ und für jedes $w_H \in V_H$ eine auf U glatte Funktion G_{w_H} , so dass für jedes $x' \in U$ mit $d(x') = d(x)$ und jedes $h < \epsilon$ gilt:

$$\sum_{v_H \in V_H} (-1)^{\langle v_H, w_H \rangle} \Delta_h^{v+v_H}(f) = \sum_{v_H \in V_H} (-1)^{\langle v_H, w_H \rangle} \Delta_h^{v+v_H}(G_{w_H}).$$

Durch eine weitere Anwendung der Fouriertransformation erhalten wir

$$\begin{aligned} \Delta_h^v(f)(x') &= 2^{|H|} \sum_{w_H \in V_H} \left(\sum_{v_H \in V_H} (-1)^{\langle v_H, w_H \rangle} \Delta_h^{v+v_H}(f) \right) \\ &= 2^{|H|} \sum_{w_H \in V_H} \left(\sum_{v_H \in V_H} (-1)^{\langle v_H, w_H \rangle} \Delta_h^{v+v_H}(G_{w_H}) \right) \\ &= \sum_{v_H \in V_H} \Delta_h^{v+v_H} \left(\sum_{w_H \in V_H} 2^{|H|} (-1)^{\langle v_H, w_H \rangle} G_{w_H} \right) \\ &= \sum_{v_H \in V_H} \Delta_h^{v+v_H}(F_{v_H}) \end{aligned}$$

mit

$$F_{v_H} := \sum_{w_H \in V_H} 2^{|H|} (-1)^{\langle v_H, w_H \rangle} G_{w_H}.$$

□

Beweis von Proposition 5.9. Wir betrachten zunächst wieder die Partition $d(x) = \{A_1, \dots, A_l\}$. Aus jedem Block A_j der Partition wählen wir ein Element $j_i \in A_i$ mit $v_{j_i} = 0$, falls ein solches existiert; ansonsten ein beliebiges Element. Die Teilmenge $J := \{j_1, \dots, j_l\} \subseteq \{1, \dots, d\}$ erfüllt dann offenbar die Voraussetzung aus Korollar 5.11. Es gibt daher eine Umgebung U von x und glatte Funktionen F_{v_H} für $v_H \in V_H$, so dass

$$\Delta_n^v(f)(x') = \sum_{v_H \in V_H} \Delta_n^{v+v_H}(F_{v_H})$$

gilt. Mit $w := \text{pr}_J(v)$ ist $|v + w| = \alpha(x, v)$ das Minimum der Menge $\{|v + v'|, v' \in V_H\}$ und folglich gilt nach Proposition 5.8 für alle $x' \in U$ mit $d(x') = d(x)$:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\alpha(x, v)} \Delta_n^v(f)(x) &= \sum_{v' \in V_H} \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\alpha(x, v)} \Delta_n^{v+v'}(F_{v'})(x') \\ &= D^v(F_w)(x') \end{aligned}$$

und damit die Behauptung. □

Die eben gemachten Betrachtungen rechtfertigen die folgende Definition einer verallgemeinerten Ableitung:

Definition 5.12. Es sei $f \in \mathcal{C}^0(\Gamma^d)$ eine stetige Funktion auf $|\Gamma^d|$. Existiert für $x \in |\Gamma^d|$, $v \in \mathbb{F}_2^d$ und $\alpha \in \mathbb{N}$ der Grenzwert

$$D_\alpha^v(f)(x) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \Delta_h^v(x),$$

so heißt f differenzierbar nach v im Grad α und D_α^v die verallgemeinerte Ableitung von f nach v im Grad α .

Nach Proposition 5.9 existiert für jedes $f \in \mathcal{C}^0(I^d)$, $v \in \mathbb{F}_2^d$ und jeden Punkt $x \in |I^d|^i$ die verallgemeinerte Ableitung im Grad $\alpha := \alpha(d(x), v)$. Für $d = 2$ lässt sich die verallgemeinerte Ableitung mit der von Zhang definierten Größe $\delta(f)$ in Verbindung bringen:

Beispiel 5.13. Es sei $d = 2$ und $f \in \mathcal{C}^0(I^2)$. Durch die Diagonale $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\{\{1, 2\}\}) = \{(x_1, x_2) \in (0, 1) \mid x_1 = x_2\}$ wird das Quadrat in zwei Dreiecke $S^+, S^- \subseteq |I^2|$ geteilt, auf denen die Funktion f jeweils glatt ist. Mit S^+ sei hier das obere Dreieck bezeichnet:



Wie bei Zhang [Zha10, 3.4] sei mit f^+ und f^- jeweils eine Fortsetzung der glatten Funktion $f|_{S^+}$ bzw. $f|_{S^-}$ über die Diagonale hinaus bezeichnet. Für jeden Punkt $x \in \mathcal{D}$ gilt dann mit $0 < h \in \mathbb{R}$ klein genug nach Lemma 5.10

$$\begin{aligned}\Delta_h^{(1,1)}(f)(x) + \Delta_h^{(1,0)}(f)(x) &= \Delta_h^{(1,1)}(f^+)(x) + \Delta_h^{(1,0)}(f^+)(x), \\ \Delta_h^{(1,1)}(f)(x) - \Delta_h^{(1,0)}(f)(x) &= \Delta_h^{(1,1)}(f^-)(x) - \Delta_h^{(1,0)}(f^-)(x).\end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}\Delta_h^{(1,1)}(f)(x) &= \frac{1}{2} \left(\Delta_h^{(1,1)}(f^+)(x) + \Delta_h^{(1,0)}(f^+)(x) + \Delta_h^{(1,1)}(f^-)(x) - \Delta_h^{(1,0)}(f^-)(x) \right) \\ &= \frac{1}{2} \Delta_h^{(1,1)}(f^+ + f^-)(x) + \frac{1}{2} \Delta_h^{(1,0)}(f^+ - f^-)(x)\end{aligned}$$

und daher konvergiert

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \Delta_h^{(1,1)}(f)(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2h} \Delta_h^{(1,0)}(f^+ - f^-)(x) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_1} (f^+ - f^-)(x).\end{aligned}$$

Unter Verwendung der Bezeichnung von Zhang $\delta(f) := \frac{\partial}{\partial x_1}(f^+ - f^-)$ gilt somit für jedes $x \in \mathcal{D}$

$$D_1^{(1,1)}(f)(x) = \frac{1}{2} \delta(f)(x).$$

Als Abschluss dieses Abschnitts betrachten wir noch eine Diskretisierung der verallgemeinerten Ableitung. Zur Approximation mit $n \in \mathbb{N}$ zerlegen wir dazu den Einheitswürfel gleichmäßig in Teilwürfel der Kantenlänge $\frac{1}{n}$ und betrachten für jedes Punkt $x \in [0, 1]^d$ den ihm enthaltenen Teilwürfel. Zu einem Vektor $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ bezeichne dazu $\lfloor x \rfloor$ den Vektor $(\lfloor x_1 \rfloor, \dots, \lfloor x_d \rfloor)$, wobei $\lfloor \cdot \rfloor$ die übliche Abrundungsfunktion bezeichnet:

$$\lfloor x_1 \rfloor := \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x_1\}.$$

Damit erhält man für den x umgebenden Würfel in der n -fachen Approximation als Mittelpunktskoordinaten $\tilde{x}^{(n)} := \frac{1}{n} \lfloor nx \rfloor + \frac{1}{2n} (1, \dots, 1)$.

Definition 5.14.

- (i) Sei $f \in \mathcal{C}^0(I^d)$ eine auf $[0, 1]^d$ stetige Funktion. Wir bezeichnen als n -te Gitterapproximation der Ableitung nach $v \in \mathbb{F}_2^d$ am Punkt $x \in (0, 1)^d$ den Ausdruck

$$\tilde{\Delta}_n^v f(x) := \Delta_{1/2n}^v f(\tilde{x}^{(n)}) = \Delta_{1/2n}^v f\left(\frac{1}{n} \lfloor nx \rfloor + \frac{1}{2n} (1, \dots, 1)\right).$$

- (ii) Sei Γ ein endlicher Graph und $f \in \mathcal{C}^0(\Gamma^d)$ eine auf $|\Gamma^d|$ stetige Funktion und $x \in |\Gamma^d|^\text{i}$ ein innerer Punkt. Wie in Definition 5.7 gibt es dann eindeutig bestimmte $\gamma \in \Gamma_1^d, x' \in I^d \setminus \partial I^d$ mit $(i_\gamma)_*(x') = x$. Die n -te Gitterapproximation der Ableitung nach $v \in \mathbb{F}_2^d$ am Punkt x wird definiert durch

$$\tilde{\Delta}_n^v f(x) := \tilde{\Delta}_n^v(f \circ (i_\gamma)_*)(x').$$

Proposition 5.15. Ist $f \in \mathcal{C}_\Delta^\infty \Gamma^d$ eine auf Simplices glatte Funktion, $x \in |\Gamma^d|$ ein innerer Punkt und $\alpha := \alpha(\mathcal{P}(x), v)$ wie in Proposition 5.9, so gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2n)^\alpha \tilde{\Delta}_n^v(x) = D_{v,\alpha} f(x).$$

Beweis. Es genügt $I = \Gamma$ zu betrachten. Es sei $N \in \mathbb{N}$ so groß, dass die abgeschlossene Gerade $V := [\tilde{x}^{(N)} - \frac{1}{2N}(1, \dots, 1), \tilde{x}^{(N)} + \frac{1}{2N}(1, \dots, 1)]$ in I^d liegt und $d(x') = d(x)$ für alle $x' \in V$ gilt. Offenbar gilt für jedes $x \in V$ und jedes $n \geq N$ auch $\tilde{x}^{(n)} \in V$. Nach Proposition 5.9 existiert $D_\alpha^v(f)(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \Delta_h^v f(x)$ für jedes $x \in V$ und da V kompakt ist, erfolgt die Konvergenz gleichmäßig. Da ebenfalls nach Proposition 5.9 die Funktion $D_\alpha^v(f)$ stetig auf V ist, folgt

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (2n)^\alpha \Delta_n^v(\tilde{x}^{(n)}) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} (2n)^\alpha \Delta_n^v(\tilde{x}^{(m)}) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} D_\alpha^v(f)(\tilde{x}^{(m)}) = D_\alpha^v(f)(x). \end{aligned}$$

□

Lemma 5.16. Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $f \in \mathcal{C}^0(\Gamma^d)$ eine Funktion mit $f(x) = f(\tilde{x}^{(n)})$ für jedes $x \in |\Gamma^d|$. Dann gilt für jede Partition \mathcal{P} von $\{1, \dots, d\}$ die Gleichung

$$(5.2) \quad \int_{\Gamma^d} f \mathbb{1}_{\{x|\mathcal{P}(\tilde{x}^{(n)})=\mathcal{P}\}} = n^{|\mathcal{P}|-d} \int_{\mathcal{D}_{\mathcal{P}}} f.$$

Beweis. Nach Definition der Integrale genügt, die Aussage für den Standardgraphen $\Gamma = I$ zu zeigen. Da die Funktion f für jedes $y \in \left(\frac{1}{n}\mathbb{Z} \cap [0, 1]\right)^d$ auf der Menge $\{x \in |I|^d \mid \tilde{x}^{(n)} = y\}$ konstant ist, folgt

$$\int_{I^d} f \mathbb{1}_{\{x|\mathcal{P}(\tilde{x}^{(n)})=\mathcal{P}\}} = \frac{1}{n^d} \sum_{\substack{x \in \left(\frac{1}{n}\mathbb{Z} \cap [0, 1]\right)^d \\ d(x)=\mathcal{P}}} f(x).$$

Unter Verwendung der Standardkarte $c_{\mathcal{P}} : \mathcal{D}(\mathcal{P}) \rightarrow \mathbb{R}^{|\mathcal{P}|}$ der verallgemeinerten Diagonale $\mathcal{D}(\mathcal{P})$ aus Bemerkung 5.5 gilt weiter

$$\begin{aligned} \int_{I^d} f \mathbb{1}_{\{x|\mathcal{P}(\tilde{x}^{(n)})=\mathcal{P}\}} &= \frac{1}{n^d} \sum_{x \in \left(\frac{1}{n}\mathbb{Z} \cap [0, 1]\right)^{|\mathcal{P}|}} f(c_{\mathcal{P}}^{-1}(x)) \\ &= \frac{1}{n^{d-|\mathcal{P}|}} \int_{[0, 1]^{|\mathcal{P}|}} f \circ c_{\mathcal{P}}^{-1} d\mu \\ &= \frac{1}{n^{d-|\mathcal{P}|}} \int_{\mathcal{D}(\mathcal{P})} f. \end{aligned}$$

□

Es bezeichne $\text{unt}_n \Gamma$ die n -fache Unterteilung des Graphen nach Definition A.20 und $\text{unt}_n : |\Gamma_n| \rightarrow |\Gamma|$ den durch gleichmäßige Unterteilung gegebenen Homöomorphismus der geometrischen Realisierungen aus Proposition A.23. Durch Produktbildung erhalten wir dann einen Homöomorphismus $(\text{unt}_n)^d : |(\Gamma_n)^d| \rightarrow |\Gamma^d|$ und aus Funktionalitätsgründen einen Isomorphismus

$$(\text{unt}_n)^* : \mathcal{C}^0(\Gamma^d) \rightarrow \mathcal{C}^0((\Gamma_n)^d).$$

Hierbei werden alle bisher definierten Teilmengen von $\mathcal{C}^0(\Gamma^d)$ auf ihre jeweiligen Gegenstücke abgebildet:

Proposition 5.17. *Für die Bijektion $(\text{unt}_n)^* : \mathcal{C}^0(\Gamma^d) \rightarrow \mathcal{C}^0((\Gamma_n)^d)$ gilt*

$$(5.3) \quad \begin{aligned} (\text{unt}_n)^*(\mathcal{C}_\square^\infty(\Gamma^d)) &\subseteq \mathcal{C}_\square^\infty(\Gamma_n^d), \\ (\text{unt}_n)^*(\mathcal{C}_\Delta^\infty(\Gamma^d)) &\subseteq \mathcal{C}_\Delta^\infty(\Gamma_n^d), \\ (\text{unt}_n)^*(\mathcal{C}_\Delta^{\text{lin}}(\Gamma^d)) &\subseteq \mathcal{C}_\Delta^{\text{lin}}(\Gamma_n^d). \end{aligned}$$

Es kommutiert

$$(5.4) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^0(\Gamma^d) & \xrightarrow{(\text{unt}_n)^*} & \mathcal{C}^0((\Gamma_n)^d) \\ \tilde{\Delta}_n^v \downarrow & & \tilde{\Delta}_1^v \downarrow \\ \mathcal{C}^0(\Gamma^d) & \xrightarrow{(\text{unt}_n)^*} & \mathcal{C}^0((\Gamma_n)^d). \end{array}$$

und für jede Funktion $f \in \mathcal{C}^0(\Gamma^d)$ gilt

$$(5.5) \quad n^d \int_{\Gamma^d} f = \int_{\Gamma_n^d} (\text{unt}_n)^* f.$$

Beweis. Es genügt, die Aussagen für den Graphen $\Gamma = I$ zu zeigen. Die n -fache Unterteilung von $|I^d|$ liefert in diesem Fall ein Gitter mit Abstand $1/n$ in $[0, 1]^d = |I^d|$. Da jeder Simplex von $(I_n)^d$ unter der Abbildung $|(\Gamma_n)^d| \rightarrow |\Gamma^d|$ vollständig in einem Simplex aus I^d enthalten ist, folgen die Relationen (5.3) sofort.

Für die Kommutativität des Diagramms (5.4) ist lediglich zu beachten, dass die Ecken des unterteilten Graphen $(I_n)^d$ bei der Abbildung unt_n genau auf die Punkte mit rationalen Koordinaten $[0, 1/n, \dots, n/n]^d$ abgebildet werden.

Die Gleichung (5.5) folgt schließlich aus der Integrationstheorie. \square

5.2. Die Schnittpaarung

Es sei jetzt wieder X eine eigentliche regulär strikt semistabile S -Kurve mit Reduktionsgraph $\Gamma(X)$ ohne Doppelkanten, dessen Ecken mit einer Totalordnung $<$ versehen sind. Mit $W = W(X, <, d)$ bezeichnen wir das in Algorithmus 2.8 bestimmte Modell von $(X_\eta)^d$. Der Restklassenkörper k sei algebraisch abgeschlossen habe Charakteristik p und mit $|\cdot|$ sei wieder die durch $|\pi| = 1/p$ bzw.

$|\pi| = 1/e$ für $p = 0$ normierte Bewertung von R bezeichnet. Wir beschreiben im Folgenden das lokale Schnittprodukt von Divisoren mit Träger in der speziellen Faser als Paarung zwischen stückweise affinen Funktionen der Reduktionsmengen $\mathcal{C}_\Delta^{\text{lin}}(\Gamma(X)^d)$.

Definition 5.18. Es sei $\Gamma = \Gamma(X)$ der geordnete Reduktionsgraph von X . Dann bezeichne

$$\mathcal{C}_\Delta^{\text{lin}}(\Gamma^d, \mathbb{Q}) := \{f \in \mathcal{C}_\Delta^{\text{lin}}(\Gamma^d) \mid f(p) \in \mathbb{Q} \forall p \in (\Gamma^d)_0\}$$

die \mathbb{Q} -Algebra der auf den Simplizes affinen Funktionen *mit \mathbb{Q} -Koeffizienten*. Es gilt $\mathcal{C}_\Delta^{\text{lin}}(\Gamma^d) = \mathcal{C}_\Delta^{\text{lin}}(\Gamma^d, \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$.

Nach Proposition 3.19 erhalten wir einen Isomorphismus von \mathbb{Q} -Moduln

$$\begin{aligned} \text{CaDiv}_{W_s}(W)_\mathbb{Q} &\rightarrow \mathcal{C}_\Delta^{\text{lin}}(\Gamma(X)^d, \mathbb{Q}), \\ C &\mapsto f_C^{|\cdot|}. \end{aligned}$$

Wir übertragen diesen Morphismus auf Cartierdivisoren mit Koeffizienten aus \mathbb{R} , d.h. auf das Tensorprodukt $\text{CaDiv}_{W_s}(W)_\mathbb{R} := \text{CaDiv}_{W_s}(W) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$.

Definition 5.19. Sei X ein regulär strikt semistabile Kurve und $d \geq 2$. Wir bezeichnen mit $\text{CaDiv}_{W_s}(W)_\mathbb{R}$ das Tensorprodukt $\text{CaDiv}_{W_s}(W) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ und mit $\phi_1^{|\cdot|}$ den Isomorphismus von \mathbb{R} -Algebren

$$\phi_1^{|\cdot|} : \text{CaDiv}_{W_s}(W)_\mathbb{R} \rightarrow \mathcal{C}_\Delta^{\text{lin}}(\Gamma(X)^d)$$

gegeben durch

$$C \otimes r \mapsto rf_C^{|\cdot|}.$$

Bemerkung 5.20. Da die Bestimmung des Schnittproduktes

$$\begin{aligned} \text{ldeg}(\cdot, \dots, \cdot) : (\text{CaDiv}_{W_s}(W))^{d+1} &\rightarrow \mathbb{Q}, \\ (D_0, \dots, D_d) &\mapsto \text{ldeg}(D_0 \cdots \cdots D_d) \end{aligned}$$

eine multilinear Abbildung ist, lässt sie sich auf $\text{CaDiv}_{W_s}(W)_\mathbb{R}$ fortsetzen. Wir bezeichnen die Fortsetzung ebenfalls mit ldeg :

$$\text{ldeg}(\cdot, \dots, \cdot) : (\text{CaDiv}_{W_s}(W)_\mathbb{R})^{d+1} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Definition 5.21. Durch

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \dots, \cdot \rangle_{W,1} : \mathcal{C}_\Delta^{\text{lin}}(\Gamma^d)^{d+1} &\rightarrow \mathbb{R}, \\ (f_0, \dots, f_d) &\mapsto \text{ldeg}_{W_s}((\phi_1^{|\cdot|})^{-1}(f_0) \cdots (\phi_1^{|\cdot|})^{-1}(f_d)) \end{aligned}$$

wird eine multilinear Paarung auf $\mathcal{C}_\Delta^{\text{lin}}(\Gamma^d)$, der Menge der stückweise affinen Funktionen auf dem Reduktionsgraphen definiert, die *Schnittpaarung*.

Mittels der Bijektion $(\text{unt}_n)^* : \mathcal{C}^0(\Gamma^d) \rightarrow \mathcal{C}^0(\Gamma_n^d)$ lässt sich $\mathcal{C}_{\Delta}^{\text{lin}}(\Gamma_n^d)$ nach (5.3) als Teilmenge von $\mathcal{C}^0(\Gamma^d)$ auffassen, die $\mathcal{C}_{\Delta}^{\text{lin}}(\Gamma^d)$ enthält. Wir setzen im folgenden die Schnittpaarung auf Funktionen aus $\mathcal{C}_{\Delta}^{\text{lin}}(\Gamma_n^d)$ fort. Es sei dazu K_n/K eine algebraische Körpererweiterung vom Grad n , R_n der Bewertungsring der Bewertungsfortsetzung von K auf K_n und $S_n := \text{Spec } R_n$. Mit X_n sei das mittels Algorithmus 2.4 gewonnene regulär strikt semistabile Modell von X_n über S_n bezeichnet und mit $W_n := W(X_n, <, d)$ das mittels Algorithmus 2.8 gewonnene Modell von $(X_n)_n^d$ über S_n . Da sich die Reduktionskomplexe von X_n und W_n kombinatorisch bestimmen lassen, sind $\mathcal{R}(X_n)$ und $\mathcal{R}(W_n)$ unabhängig von der Wahl von K_n . Wir bezeichnen mit $|\cdot|$ die eindeutig bestimmte Fortsetzung der Bewertung $|\cdot| : K \rightarrow \mathbb{R}$ auf die Erweiterung K_n .

In dieser Situation gibt es ebenfalls nach Proposition 3.19 einen Isomorphismus von \mathbb{R} -Algebren

$$\phi_n^{|\cdot|} : \text{CaDiv}_{(W_n)_s}(W_n)_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathcal{C}_{\Delta}^{\text{lin}}((\Gamma(X)_n)_n^d),$$

definiert durch

$$C \otimes r \mapsto rf_C^{|\cdot|}.$$

Definition 5.22. Durch

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \dots, \cdot \rangle_{W,n} : \mathcal{C}_{\Delta}^{\text{lin}}(\Gamma_n^d)^{d+1} &\rightarrow \mathbb{R}, \\ (f_0, \dots, f_d) &\mapsto 1/n \deg_{W_s} \left((\phi_n^{|\cdot|})^{-1}(f_0) \cdots (\phi_n^{|\cdot|})^{-1}(f_d) \right) \end{aligned}$$

wird eine multilinear Paarung auf $\mathcal{C}_{\Delta}^{\text{lin}}(\Gamma_n^d)$ definiert.

Bemerkung 5.23. Da die lokalen Schnitzzahlen nur von der Struktur der Reduktionsmenge $\mathcal{R}(W_n)$ abhängen, ist auch $\langle \cdot, \dots, \cdot \rangle_{W,n}$ unabhängig von der Wahl der Erweiterung R_n .

Proposition 5.24. *Die Paarung aus Definition 5.22 ist eine Fortsetzung der Paarung aus Definition 5.21: Es seien $f_0, \dots, f_d \in \mathcal{C}_{\Delta}^{\text{lin}}(\Gamma^d)$ bereits auf den Simplizes von Γ^d affin. Dann gilt*

$$\langle f_0, \dots, f_d \rangle_{W,n} = \langle f_0, \dots, f_d \rangle_{W,1}.$$

Beweis. Aufgrund der Linearität genügt es, Funktionen $f_0, \dots, f_d \in \mathcal{C}_{\Delta}^{\text{lin}}(\Gamma^d, \mathbb{Q})$ mit \mathbb{Q} -Koeffizienten zu betrachten. Wir dürfen daher davon ausgehen, dass es Cartierdivisoren $D_0, \dots, D_d \in \text{CaDiv}_{W_s}(W)$ mit $f_i = f_{D_i}^{|\cdot|}$ gibt. Da die Funktionen f_0, \dots, f_d dann auch in $\mathcal{C}_{\Delta}^{\text{lin}}(\Gamma_n^d, \mathbb{Q})$ liegen, gibt es ebenfalls Cartierdivisoren $\tilde{D}_0, \dots, \tilde{D}_d \in \text{CaDiv}_{(W_n)_s}(W_n)$ mit $f_i = f_{\tilde{D}_i}^{|\cdot|}$. Nach Satz 3.20 gibt es einen Morphismus $g : W_n \rightarrow W$ zwischen den Modellen. Für den zurückgezogenen Cartierdivisor

g^*D_i gilt ebenfalls $\phi_n^{|\cdot|}(g^*D_i) = f_i$ (Proposition 3.8) und nach der Eindeutigkeit aus Proposition 3.19 folgt $D_i = g^*D_i$. Der Morphismus $g : W_n \rightarrow W$ ist generisch flach und es gilt $(W_n)_\eta = W_\eta \times_{S_\eta} (S_n)_\eta$, daher folgt die Behauptung aus der in Proposition 4.17 bewiesenen Gleichung

$$\mathrm{ldeg}_W(D_0 \cdot \dots \cdot D_d) = n \mathrm{ldeg}_{W_n}(g^*(D_0) \cdot \dots \cdot g^*(D_d)).$$

□

Wir können auch Definition 5.21 direkt auf ein Modell X_n über S_n anwenden. Die hierdurch erhaltene Paarung $\langle \cdot, \dots, \cdot \rangle_{W_n,1}$ stimmt mit Definition 5.22 bis auf einen konstanten Faktor überein:

Proposition 5.25. *Für $f_0, \dots, f_d \in \mathcal{C}_\Delta^{\mathrm{lin}}(\Gamma_n^d)$ gilt*

$$\langle f_0, \dots, f_d \rangle_{W,n} = n^d \langle f_0, \dots, f_d \rangle_{W_n,1}.$$

Beweis. Zur Definition der Paarung $\langle \cdot, \dots, \cdot \rangle_{W_n,1}$ ist eine Bewertung $|\cdot|_n$ auf R_n zu verwenden, die dem Uniformisierer π_n die Bewertung $1/p$ zuordnet. Es gilt daher $|\cdot|_n = (|\cdot|)^n$ und somit für jeden Cartierdivisor $C \in \mathrm{CaDiv}_{(W_n)_s}(W_n)_\mathbb{R}$:

$$f_C^{|\cdot|_n} = n f_C^{|\cdot|}.$$

Daher gilt für die Funktionen $f'_i := nf_i$:

$$(\phi_n^{|\cdot|})^{-1}(f_i) = D_i = (\phi_1^{|\cdot|_n})^{-1}(f'_i).$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \langle f_0, \dots, f_d \rangle_{W,n} &= \frac{1}{n} \mathrm{ldeg}_{W_n}(D_0, \dots, D_d) = \frac{1}{n} \langle f'_0, \dots, f'_d \rangle_{W_n,1} \\ &= n^d \langle f_0, \dots, f_d \rangle_{W_n,1}. \end{aligned}$$

□

Die nun folgendende alternative Beschreibung der Schnittpaarung ermöglicht im Anschluss eine Erweiterung des Definitionsbereichs von $\langle \cdot, \dots, \cdot \rangle$. Dazu verwenden wir die Gitterapproximation $\tilde{\Delta}_n^v$ der verallgemeinerten Ableitung.

Proposition 5.26. *Für Funktionen $f_0, \dots, f_d \in \mathcal{C}_\Delta^{\mathrm{lin}}(\Gamma_n)^d$ gilt:*

$$(5.6) \quad \langle f_0, \dots, f_d \rangle_{W,n} = n^{2d} \sum_{v_0, \dots, v_d \in \mathbb{F}_2^d} \mathrm{ldeg}_{I^d} \left(\prod_{i=0}^d F_{v_i} \right) \int_{\Gamma^d} \prod_{i=0}^d \tilde{\Delta}_n^v(f_i).$$

Beweis. Sei zunächst $n = 1$. Aufgrund der Linearität reicht es, die Aussage für Funktionen $f_0, \dots, f_d \in \mathcal{C}_\Delta^{\text{lin}}(\gamma_n^d, \mathbb{Q})$ mit \mathbb{Q} -Koeffizienten zu zeigen. Die den Funktionen f_0, \dots, f_d zugeordneten Divisoren $\phi_1^{-1}(f_0), \dots, \phi_1^{-1}(f_d) \in \text{CaDiv}_{W_s}(W)_\mathbb{R}$ liegen im Bild des kombinatorischen Chowrings unter der kanonischen Abbildung $\varphi_W : \mathcal{C}(\Gamma(X)^d) \rightarrow \text{CH}_{W_s}(W)$. Wir bezeichnen ihre Urbilder unter φ_W mit $D_0, \dots, D_d \in \mathcal{C}(\Gamma(X)^d)$. Nach Proposition 4.33 können wir den Grad in $\mathcal{C}(\Gamma(X)^d)$ berechnen und nach der Definition der Gradabbildung erhalten wir

$$\text{ldeg}_W(\varphi_W(D_0 \cdot \dots \cdot D_d)) = \sum_{\gamma \in \Gamma_1(X)^d} \text{ldeg}_{I^d} \circ i_\gamma^*(D_0 \cdot \dots \cdot D_d).$$

Folglich sind beide Seiten von (5.6) additiv auf den Würfeln und es genügt daher, die Aussage für Schemata X mit Reduktionsgraph $\Gamma(X) = I$ zu zeigen.

Sei jetzt $\Gamma(X) = I$. Der Mittelpunkt des Einheitswürfels $|\Gamma(X)^d| = |I^d| = [0, 1]^d$ werde mit $x_M := 1/2(1, \dots, 1)$ bezeichnet. Wir beschreiben die Ecken des simplizialen Komplexes I^d wie gehabt durch $\{C_v \mid v \in \mathbb{F}_2^d\}$ und betrachten zunächst den zu einer Funktion $f \in \mathcal{C}^0(I^d)$ durch Proposition 3.19 assoziierten Divisor

$$D_f := \phi_1^{-1}(f) = \sum_{v \in \mathbb{F}_2^d} f_i(C_v)[C_v].$$

Die Koordinaten des Punktes C_v in $|I^d| = [0, 1]^d$ können durch $x_M - (1/2)^v = x_M + (1/2)^{v+(1, \dots, 1)}$ beschrieben werden und daher gilt $f(C_v) = f_{x_M}^{1/2}(v + (1, \dots, 1))$. Unter Verwendung der Abbildung $\psi : \mathcal{C}(I^d) \rightarrow \mathcal{C}(I^d)$, $C_v \mapsto C_{v+(1, \dots, 1)}$ aus Proposition 4.43 und den Eigenschaften der Fouriertransformation (Bemerkung 4.36) berechnet sich D_f zu:

$$\begin{aligned} D_f &= \sum_{v \in \mathbb{F}_2^d} f_{x_M}^{1/2}(v + (1, \dots, 1))[C_v] = \sum_{v \in \mathbb{F}_2^d} f_{x_M}^{1/2}(v)\psi([C_v]) \\ &= \psi \left(\sum_{v \in \mathbb{F}_2^d} \frac{1}{2^d} f_{x_M}^{1/2}(v) \mathcal{F} \circ \mathcal{F}(C_\cdot)(v) \right) \\ &= \psi \left(\sum_{v \in \mathbb{F}_2^d} \frac{1}{2^d} \mathcal{F}(f_{x_M}^{1/2})(v) \mathcal{F}(C_\cdot)(v) \right) \\ &= \sum_{v \in \mathbb{F}_2^d} \Delta_{1/2}^v(f)(x_M)\psi(F_v). \end{aligned}$$

Nach Einsetzen dieser Gleichung in die Definition der Schnittpaarung erhält man

$$\begin{aligned} \langle f_0, \dots, f_d \rangle &= \text{ldeg}_{I^d} \left(\sum_{v_0, \dots, v_d \in \mathbb{F}_2^d} \left(\prod_{i=0}^d \Delta_{1/2}^{v_i}(f_i)(x_M)\psi(F_{v_i}) \right) \right) \\ &= \sum_{v_0, \dots, v_d \in \mathbb{F}_2^d} \text{ldeg}_{I^d} \left(\prod_{i=0}^d F_{v_i} \right) \prod_{i=0}^d \Delta_{1/2}^{v_i}(f_i)(x_M). \end{aligned}$$

Hierbei wurde ausgenutzt, dass die Abbildung ψ den Grad invariant lässt (Proposition 4.43). Da wir mit der Definition der Gitterapproximation $\tilde{\Delta}$ die Gleichung

$$\prod_{i=0}^d \Delta_{\frac{1}{2}}^{v_i}(f_i)(x_M) = \int_{\Gamma_1^d} \prod_{i=0}^d \tilde{\Delta}_1^{v_i}(f_i)$$

erhalten, folgt die Behauptung im Fall $n = 1$.

Im Fall $n > 1$ gilt nach Proposition 5.25

$$\langle f_0, \dots, f_d \rangle_{W,n} = n^d \langle f_0, \dots, f_d \rangle_{W_n,1}$$

und nach (5.5) gilt für jede Funktion $f \in \mathcal{C}^0(\Gamma^d)$

$$n^d \int_{|\Gamma^d|} f = \int_{|\Gamma_n^d|} f.$$

Es folgt zusammen mit Proposition 5.17

$$\begin{aligned} \langle f_0, \dots, f_d \rangle_{W,n} &= n^d \langle f_0, \dots, f_d \rangle_{W_n,1} \\ &= n^d \sum_{v_0, \dots, v_d \in \mathbb{F}_2^d} \text{ldeg}_{I^d} \left(\prod_{i=0}^d F_{v_i} \right) \int_{\Gamma_n^d} \prod_{i=0}^d \tilde{\Delta}_1^{v_i}(f_i) \\ &= n^{2d} \sum_{v_0, \dots, v_d \in \mathbb{F}_2^d} \text{ldeg}_{I^d} \left(\prod_{i=0}^d F_{v_i} \right) \int_{\Gamma^d} \prod_{i=0}^d \tilde{\Delta}_n^{v_i}(f_i) \end{aligned}$$

und schließlich die Behauptung. \square

Die soeben gewonnenen Beschreibung des Schnittprodukts lässt sich ausnutzen, um die Definition auf eine größere Klasse von Funktionen auszudehnen. Dazu nutzen wir die folgende Standardapproximation stetiger Funktionen durch stückweise affine Funktionen.

Definition 5.27. Es sei $f \in \mathcal{C}_\Delta^\infty(\Gamma^d)$. Als n -te Standardapproximation zu f werde die eindeutig bestimmte Funktion $f^{(n)} \in \mathcal{C}_\Delta^{\text{lin}}(\Gamma_n^d)$ bezeichnet, für die $f^{(n)}(p) = f(p)$ für alle Punkte $p \in (\Gamma_n^d)_0$ gilt.

Bemerkung 5.28. Da bei der Bestimmung von $\tilde{\Delta}_n^v(f)$ nur die Funktionswerte an den Eckpunkten einer n -fachen Unterteilung berücksichtigt werden, gilt offenbar für jedes $v \in \mathbb{F}_2^d$:

$$\tilde{\Delta}_n^v(f) = \tilde{\Delta}_n^v(f^{(n)}).$$

Wir können damit eine allgemeine Konvergenzaussage für Approximationen von Funktionen aus $\mathcal{C}^0(\Gamma^d)$ machen, sofern die folgende Konvergenzbedingung erfüllt ist.

Definition 5.29. Es sei $d \in \mathbb{N}$. Gilt für jede Partition \mathcal{P} der Menge $\{1, \dots, d\}$ im kombinatorischen Chowring $\mathcal{C}(I^d)_{\mathbb{Q}}$ die Gleichung

$$(5.7) \quad \text{ldeg}_{I^d} \left(\prod_{i=0}^d F_{v_i} \right) = 0$$

für alle $v_0, \dots, v_d \in \mathbb{F}_2^d$ mit $\sum_{i=0}^d \alpha(\mathcal{P}, v_i) < d + |\mathcal{P}|$, so erfüllt d die Konvergenzbedingung.

Satz 5.30. Erfüllt $d \in \mathbb{N}$ die Konvergenzbedingung aus Definition 5.29, so existiert für alle Funktionen $f_0, \dots, f_d \in \mathcal{C}_{\Delta}^{\infty}(\Gamma^d)$ der Grenzwert

$$\langle f_0, \dots, f_d \rangle := \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_0^{(n)}, \dots, f_n^{(n)} \rangle_{W,n}$$

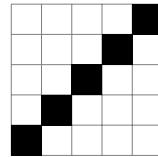
und er berechnet sich zu

$$\langle f_0, \dots, f_d \rangle = \sum_{\mathcal{P} \text{ Partition}} \frac{1}{2^{d+|\mathcal{P}|}} \sum_{\substack{v_0, \dots, v_d \in \mathbb{F}_2^d, \\ \sum \alpha(v_i, \mathcal{P}) = d+|\mathcal{P}|}} \text{ldeg}_{I^d} \left(\prod_{i=0}^d F_{v_i} \right) \int_{\Delta_{\mathcal{P}}} \prod_{i=0}^d D_{\alpha(v_i, \mathcal{P})}^{v_i}(f_i).$$

Beweis. Wir nutzen die Beschreibung der Schnittpaarung aus Proposition 5.26

$$(5.8) \quad \langle f_0^{(n)}, \dots, f_d^{(n)} \rangle = n^{2d} \sum_{v_0, \dots, v_d} \text{ldeg}_{I^d} \left(\prod_{i=0}^d F_{v_i} \right) \int_{\Gamma^d} \prod_{i=0}^d \tilde{\Delta}_n^{v_i}(f_i).$$

Da die Summe der charakteristischen Funktionen $\sum_{\mathcal{P} \text{ Partition}} \mathbb{1}_{\{x \in \Gamma^d | \mathcal{D}(\tilde{x}^n) = \mathcal{P}\}}$ die konstante Funktion $\mathbb{1}_{\Gamma^d}$ ergibt, dürfen wir den Integralausdruck in (5.8) mittels Lemma 5.16 in Anteile entlang der verschiedenen „verpixelten Diagonalen“ zerlegen:



Die „verpixelte Diagonale“ $\{x \mid d(\tilde{x}^{(n)}) = \mathcal{P}\}$
für $n = 5$ und $\mathcal{P} = \{\{1, 2\}\}$

$$\begin{aligned} n^{2d} \int_{\Gamma^d} \prod_{i=0}^d \tilde{\Delta}_n^{v_i}(f_i) &= \sum_{\mathcal{P} \text{ Partition}} n^{2d} \int_{\Gamma^d} \mathbb{1}_{\{d(\tilde{x}^{(n)}) = \mathcal{P}\}} \prod_{i=0}^d \tilde{\Delta}_n^{v_i}(f_i) \\ &= \sum_{\mathcal{P} \text{ Partition}} n^{d+|\mathcal{P}|} \int_{\mathcal{D}_{\mathcal{P}}} \mathbb{1}_{\{d(\tilde{x}^{(n)}) = \mathcal{P}\}} \prod_{i=0}^d \tilde{\Delta}_n^{v_i}(f_i). \end{aligned}$$

Zusammen mit (5.8) erhalten wir

$$\langle f_0^{(n)}, \dots, f_d^{(n)} \rangle = \sum_{\mathcal{P} \text{ Partition}} \frac{1}{2^{d+|\mathcal{P}|}} \sum_{v_0, \dots, v_d \in \mathbb{F}_2^d} \text{ldeg}_{I^d} \left(\prod_{i=0}^d F_{v_i} \right) \int_{\mathcal{D}_{\mathcal{P}}} T_n(\mathcal{P}, v_0, \dots, v_d)$$

mit

$$T_n(\mathcal{P}, v_0, \dots, v_d) := (2n)^{d+|\mathcal{P}|} \mathbb{1}_{\{\mathcal{P}(\tilde{x}^{(n)})=\mathcal{P}\}} \prod_{i=0}^d \tilde{\Delta}_n^{v_i}(f_i).$$

Wir untersuchen die Terme $T_n(\dots)$ auf Konvergenz: Aufgrund von Voraussetzung (5.7) brauchen wir nur die Terme mit $\sum \alpha(\mathcal{P}, v_i) \geq d + |\mathcal{P}|$ betrachten und nach dem Satz über majorisierte Konvergenz genügt es zu zeigen, dass die Funktionen $T_n(\mathcal{P}, v_0, \dots, v_d)$ global beschränkt sind und gegen

$$T(\mathcal{P}, v_0, \dots, v_d) := \begin{cases} 0 & \text{falls } \sum \alpha(v_i, \mathcal{P}) > d + |\mathcal{P}|, \\ \prod_{i=0}^d D_{\alpha(v_i, \mathcal{P})}^{v_i}(f_i) & \text{falls } \sum \alpha(v_i, \mathcal{P}) = d + |\mathcal{P}|. \end{cases}$$

konvergieren.

Wir schreiben dazu T_n als

$$T_n(\mathcal{P}, v_0, \dots, v_d) = \mathbb{1}_{\{\mathcal{P}(\tilde{x}^{(n)})=\mathcal{P}\}} \cdot \left((2n)^{d+|\mathcal{P}|- \sum \alpha(v_i, \mathcal{P})} \right) \cdot \left(\prod_{i=0}^d (2n)^{\alpha(v_i, \mathcal{P})} \tilde{\Delta}_n^{v_i}(f_i) \right)$$

und diskutieren die enthaltenen Terme einzeln. Aufgrund von Proposition 5.15 ist $(2n)^{\alpha(v_i, \mathcal{P})} \tilde{\Delta}_n^{v_i}(f_i)$ beschränkt und konvergiert gegen $D_{\alpha(\mathcal{P}, v_i)}^{v_i}$. Die charakteristische Funktion $\mathbb{1}_{\{\mathcal{P}(\tilde{x}^{(n)})=\mathcal{P}\}}$ ist offensichtlich beschränkt und konvergiert gegen $\mathbb{1}_{\{\mathcal{P}(\tilde{x}^{(n)})=\mathcal{P}\}} = \mathbb{1}_{\mathcal{D}(\mathcal{P})}$. Das Verhalten des Terms $n^{d+|\mathcal{P}|- \sum \alpha(v_i, \mathcal{P})}$ liefert schließlich die gewünschte Konvergenz $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(\mathcal{P}, v_0, \dots, v_d) = T(\mathcal{P}, v_0, \dots, v_d)$. \square

Satz 5.30 lässt sich mit den bereits bestimmten Schnittzahlen in den Fällen $d = 2$ und $d = 3$ konkreter fassen. Dazu bemerken wir zunächst:

Lemma 5.31. *Für $d = 2$ und $d = 3$ ist die Konvergenzbedingung Definition 5.29 erfüllt.*

Beweis. Für die Partition $\mathcal{P} = \{\{1, \dots, d\}\}$ ist (5.7) stets erfüllt, da nämlich $\text{ldeg}(F_0 \cdot \prod_{i=1}^d F_{v_i}) = 0$ für alle $v_1, \dots, v_d \in \mathbb{F}_2^d$ gilt.

Im Falle $d = 2$ haben wir damit lediglich die Partition $\mathcal{P} = \{\{1\}, \{2\}\}$ zu betrachten. Da jedoch nach Satz 4.45 für alle $v_1, \dots, v_3 \in \mathbb{F}_2^d$ mit $\text{ldeg}(F_{v_1} F_{v_2} F_{v_3}) \neq 0$ bereits $\sum_{i=1}^3 |v_i| \geq 4$ gilt, ist (5.7) erfüllt.

Im Falle $d = 3$ überprüft man durch Testen aller nichttrivialen Kombinationen aus Satz 4.46, dass (5.7) erfüllt ist. \square

Wir können daher in diesen Spezialfällen die Formel für die Schnittpaarung explizit angeben. Im Fall $d = 2$ erhalten wir dabei das Ergebnis von Zhang [Zha10, Prop 3.3.1, Prop 3.4.1] zurück:

Korollar 5.32. Es seien $d = 2$ und $f_0, f_1, f_2 \in \mathcal{C}_\Delta^\infty(\Gamma^2)$ auf den Simplizes glatte Funktionen. Für die Standardapproximationen $f_i^{(n)}$ von f_i gilt: Der Grenzwert der Dreifachpaarung $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_0^{(n)}, \dots, f_2^{(n)} \rangle$ existiert und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_0^{(n)}, \dots, f_2^{(n)} \rangle = \langle f_0, f_1, f_2 \rangle_{\text{gl}} + \langle f_0, f_1, f_2 \rangle_{\text{sing}}$$

mit

$$\begin{aligned} \langle f_0, f_1, f_2 \rangle_{\text{gl}} &= \sum_{\substack{v_0, v_1, v_2 \in \mathbb{F}_2^2 \\ \{v_0, v_1, v_2\} = \{(1,0), (0,1), (1,1)\}}} \int_{|\Gamma^2|} D_{|v_0|}^{v_0}(f_0) D_{|v_1|}^{v_1}(f_1) D_{|v_2|}^{v_2}(f_2), \\ \langle f_0, f_1, f_2 \rangle_{\text{sing}} &= \sum_{\substack{v_0, v_1, v_2 \in \mathbb{F}_2^2 \\ \{v_0, v_1, v_2\} = \{(1,0), (0,1), (1,1)\}}} 2 \int_{\mathcal{D}} D_1^{v_0}(f_0) D_1^{v_1}(f_1) D_1^{v_2}(f_2) \\ &\quad - 4 \int_{\mathcal{D}} D_1^{(1,1)}(f_0) D_1^{(1,1)}(f_1) D_1^{(1,1)}(f_2). \end{aligned}$$

Bemerkung 5.33. Die exakte Formulierung aus [Zha10] erhalten wir nach Einsetzen von Beispiel 5.13, also nach

$$\begin{aligned} D_1^{(1,0)}(f)(x) &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \\ D_1^{(0,1)}(f)(x) &= \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \\ D_2^{(1,1)}(f)(x) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x) \quad \text{falls } x \notin \mathcal{D}, \\ D_1^{(1,1)}(f)(x) &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_1} (f^+ - f^-)(x) = \frac{1}{2} \delta(f)(x) \quad \text{falls } x \in \mathcal{D}. \end{aligned}$$

Damit wird die Formel für den glatten bzw. singulären Teil zu

$$\begin{aligned} \langle f_0, f_1, f_2 \rangle_{\text{gl}} &= \int_{\Gamma^2 \setminus \mathcal{D}} \frac{\partial f_0}{\partial x_1}(x) \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 \partial x_2}(x) + \text{Permutationen}, \\ \langle f_0, f_1, f_2 \rangle_{\text{sing}} &= \int_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial f_0}{\partial x_1}(x) \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) \delta(f_2)(x) + \text{Permutationen} \right) \\ &\quad - \int_{\mathcal{D}} \left(\frac{1}{2} \delta(f_0)(x) \delta(f_1)(x) \delta(f_2)(x) \right). \end{aligned}$$

Beweis. Das Ergebnis ist eine unmittelbare Folgerung von Satz 5.30: Der Summand mit $\mathcal{P} = \{\{1\}, \{2\}\}$ liefert den nichtsingulären Anteil $\langle \cdot, \dots, \cdot \rangle_{\text{gl}}$. Da für $v_0 = v_1 = v_2 = (1, 1)$ gerade

$$\sum_{i=0}^2 2\alpha(v_i, \mathcal{P}) = \sum_{i=0}^2 |v_i| = 6 > 4 = d + |\mathcal{P}|$$

gilt, haben wir für diesen Term lediglich Elemente $v_0, v_1, v_2 \in \mathbb{F}_2^d$ mit $\{v_0, v_1, v_2\} = \{(1, 0), (0, 1), (1, 1)\}$ zu berücksichtigen.

Für den Summanden der Partition $\mathcal{P} = \{\{1, 2\}\}$ haben wir alle nichttrivialen Schnitte $F_{v_0} F_{v_1} F_{v_2}$ zu betrachten. Der entsprechende Term liefert gerade den singulären Anteil $\langle \cdot, \dots, \cdot \rangle_{\text{sing}}$ der Dreifachpaarung. \square

Eine ähnliche explizite Formel lässt sich auch für Dreifachprodukte aus Satz 5.30 ableiten. Aus Gründen der Übersichtlichkeit beschränke ich mich im Folgenden auf die Bestimmung des nichtsingulären Anteils der Paarung. Hierzu betrachten wir die vollständige Schnittpaarung von Funktionen $f \in \mathcal{C}^0(\Gamma^3)$, also auf den Würfeln glatte Funktionen; bei diesen fällt nämlich in der Schnittpaarung der singuläre Anteil weg.

Satz 5.34. *Es seien $f_0, \dots, f_3 \in \mathcal{C}_\square^\infty(\Gamma^3)$ auf den Würfeln glatte Funktionen. Dann existiert für die Standardapproximationen $f_i^{(n)}$ der Grenzwert der Vierfachpaarung $\langle f_0, f_1, f_2, f_3 \rangle$ und es gilt*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_0^{(n)}, \dots, f_3^{(n)} \rangle = \int_{\Gamma^3} \sum_{\substack{v_0, v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{F}_2 \\ \{v_0, v_1, v_2, v_3\} \in B}} \prod_{i=0}^d D_{|v_i|}^{v_i}(f_i),$$

mit der Menge $B \subset \mathcal{P}(\mathbb{F}_2^3)$ definiert wie folgt

$$B := \left\{ \begin{array}{l} \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 1)\}, \\ \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}, \\ \{(1, 0, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}, \\ \{(0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 1)\} \end{array} \right\}.$$

Beweis. Nach Satz 4.46 gilt für Vektoren $v_0, \dots, v_3 \in \mathbb{F}_2^3$ genau dann $\{v_0, v_1, v_2, v_3\} \in B$, wenn $\text{ldeg}_{\mathcal{C}(I^3)}(\prod_{i=0}^3 F_{v_i}) \neq 0$ und $\sum_{i=0}^3 |v_i| = 6$ gilt. Da für diese $v_0, \dots, v_3 \in \mathbb{F}_2^3$ bereits $\text{ldeg}_{\mathcal{C}(I^3)}(\prod_{i=0}^3 F_{v_i}) = 2^6$ gilt, berechnet sich der zur Partition $\mathcal{P} = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$ gehörende Term in Satz 5.30 zu

$$(5.9) \quad \sum_{\substack{v_0, v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{F}_2 \\ \{v_0, v_1, v_2, v_3\} \in B}} \prod_{i=0}^d D_{|v_i|}^{v_i}(f_i).$$

Ist \mathcal{P} eine andere Partition der Menge $\{1, 2, 3\}$, so existiert für alle $v_0, \dots, v_3 \in \mathbb{F}_2^3$ mindestens ein $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ mit $\alpha(v_i, \mathcal{P}) < |v_i|$ und es folgt $D_{\alpha(v_i, \mathcal{P})}^{v_i}(f_i) = 0$, da die Funktionen glatt sind. Daher liefern diese Partitionen keinen Beitrag.

Da ferner alle Funktionen auf ganz $|\Gamma(X)^3|$ definiert sind und $|\Gamma(X)^3| \setminus \mathcal{D}_{\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}}$ eine Nullmenge ist, folgt die Behauptung. \square

Man kann vielleicht zur Ansicht kommen, dass hier für die Konvergenz im Gegensatz zu [Zha95] keine Positivitätseigenschaften nötig sind. Dies ist jedoch nicht richtig, wie das folgende Beispiel zeigt:

Beispiel 5.35. Es sei $X = \text{Proj } R[x_0, x_1, z]/(x_0x_1 - z^2\pi)$ die projektive Vervollständigung des Standardschemas L mit der üblichen Ordnung $<$ der irreduziblen Komponenten und $W = W(X, <, 2)$ das nach Algorithmus 2.8 bestimmte Produktmodell. Wir identifizieren wie stets $|\mathcal{R}(W)| = |\Gamma(X)|^2 = [0, 1]^2$ und betrachten

$$\begin{aligned}\varphi_n : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}, \\ x &\mapsto \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n (-1)^i \max\left(0, \frac{1}{n} - |x - \frac{i}{n}|\right).\end{aligned}$$

Die Funktion φ_n beschreibt damit eine Dreiecksschwingung mit Amplitude 1 und Länge $\frac{2}{n}$. Mit ihrer Hilfe definieren wir die Funktionenfolgen

$$\begin{aligned}f_{0,n} &:= \varphi_n(x), \\ f_{1,n} &:= \varphi_n(y), \\ f_{2,n} &:= \varphi_n(x - y).\end{aligned}$$

Diese sind beschränkt und liegen in $\mathcal{C}_\Delta^{\text{lin}}(\text{unt}_n(\Gamma))$. Es gilt jedoch

$$\langle f_{0,n}, f_{1,n}, f_{2,n} \rangle = n.$$

Durch Einführen eines Vorfaktors $f'_{i,n} := n^{1/3}f_{i,n}$ erhält man daher gleichmäßig gegen 0 konvergente Funktionen $f'_{i,n}$, deren Dreifachpaarung konstant bleibt.

Beweis. Offenbar gilt für die Ableitung der Funktion φ_n :

$$\varphi'_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in (\frac{2i}{n}, \frac{2i+1}{n}), \\ -1 & \text{falls } x \in (\frac{2i+1}{n}, \frac{2i+2}{n}). \end{cases}$$

Wir erhalten damit für die verallgemeinerten Ableitungen der Funktionen

$$\begin{aligned}D_1^{(1,0)}(f_{0,n})(x, y) &= \varphi'_n(x), \\ D_1^{(0,1)}(f_{1,n})(x, y) &= \varphi'_n(y), \\ D_1^{(1,0)}(f_{2,n})(x, y) &= \varphi'_n(x - y), \\ D_1^{(0,1)}(f_{2,n})(x, y) &= -\varphi'_n(x - y),\end{aligned}$$

sowie

$$D_1^{(0,1)}(f_{0,n}) = D_1^{(1,0)}(f_{1,n}) = D_2^{(1,1)}(f_{i,n}) = 0.$$

Die Diagonalen der n -fachen Unterteilung werden gerade durch die Punkte (x, y) mit $|x - y| = \frac{i}{n}$ beschrieben. Dort hat lediglich die Funktion $f_{2,n}$ einen Knick und es gilt

$$D_1^{(1,1)}(f_{2,n})(x, y) = (-1)^i \quad \text{für } |x - y| = \frac{i}{n}.$$

5. Limiten von Schnittzahlen

Wir können nun die Formel aus Korollar 5.32 anwenden. Da $D_2^{(1,1)}(f_{i,n}) = 0$ für $i = 0, 1, 2$ außerhalb der Diagonale gilt, haben wir lediglich den singulären Anteil zu bestimmen und mit den berechneten Ableitungen gilt

$$\begin{aligned}\langle f_{0,n}, f_{1,n}, f_{2,n} \rangle &= \int_{\mathcal{D}} D_1^{(1,0)}(f_{0,n}) D_1^{(0,1)}(f_{1,n}) D_1^{(1,1)}(f_{2,n}) \\ &= \int_{\mathcal{D}} 1 = n.\end{aligned}$$

□

6. Ein Dankeschön

An dieser Stelle ein herzliches Dankeschön an alle, die mich während der vergangenen vier Jahre an der Universität Regensburg unterstützt haben!

Auf wissenschaftlicher Seite richte ich mich speziell an meinen Betreuer, Klaus Künnemann. Er hatte stets ein offenes Ohr für meine Probleme und half mir besonders im ersten Jahr, in die algebraische und arithmetische Geometrie einzusteigen. Ihm verdanke ich auch zahlreiche Anregungen und Hilfestellungen bei der Erarbeitung dieser Dissertation. Bedanken möchte ich mich auch bei Walter Gubler, der mir gerade in Hinblick auf die Auflösungsverfahren aus Kapitel 2 wertvolle Hinweise gab.

Einen besonderen Dank möchte ich allen Korrekturlesern aussprechen, die mit ihren mathematischen und grammatischen Verbesserungen eine große Hilfe waren: Meinen Bürokollegen Peter Jossen und Andreas Weber, meinen Kommilitonen Jascha Smacka, Johannes Sprang, sowie Sonja Koller.

Für moralische Unterstützung bin ich einer Vielzahl von Bekannten dankbar. Gerade in den letzten Wochen mussten sie doch hin und wieder unter meinen Launen leiden. Stellvertretend möchte ich hier Sonja Koller und meine Eltern Gisela und Karl nennen. Vielen Dank für Eure Unterstützung.

Einen herzlichen Dank auch allen meinen Kollegen der Arbeitsgruppe arithmetische Geometrie. Es hat mich stets gefreut, mit Euch zu arbeiten!

A. Die Kategorie der Simplizialen Mengen

Für die Beschreibung der simplizialen Reduktionsmenge eines nach Kapitel 2 gebildeten Produktmodells regulär strikt semistabiler Modelle eignen sich eine simpliziale Menge. Im folgenden Anhang werde ich die von mir benutzten Definitionen und Sätze wiederholen.

Alle im Folgenden präsentierten Sätze sind elementar und wohlbekannt. Da sich jedoch zu manchen Aussagen keine passende Referenz finden ließ, erschien mir ein kurzer Beweis einfacher.

A.1. Partiell geordnete Mengen und simpliziale Mengen

Definition A.1. Eine *partiell geordnete Menge* ist eine Menge A versehen mit einer reflexiven, transitiven und antisymmetrischen Relation \leq . Eine Abbildung $f : A \rightarrow B$ zwischen partiell geordneten Mengen heißt *monoton steigend*, wenn für jedes Paar $a, a' \in A$ mit $a \leq a'$ auch $f(a) \leq f(a')$ gilt. Wie man leicht zeigt, bilden die partiell geordneten Mengen zusammen mit den monotonen Abbildungen eine Kategorie, die wir mit *Poset* bezeichnen.

Definition A.2. Eine partiell geordnete Menge A heißt *total geordnet*, falls jedes Paar von Elementen $a, a' \in A$ vergleichbar ist, d.h. zumindest eine der Relationen $a \leq a'$, $a' \leq a$ erfüllt.

Bemerkung A.3. In der Kategorie der partiell geordneten Mengen existieren endliche Produkte: Seien A und B partiell geordnete Mengen, so wird das Produkt gegeben durch das kartesische Produkt $A \times B$ versehen mit der partiellen Ordnung \leq , wobei

$$(a, b) \leq (a', b') \iff a \leq a' \text{ und } b \leq b'$$

gilt.

Definition A.4. Wir betrachten für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ die Teilmenge

$$[n] := \{0, \dots, n\} \subset \mathbb{N}_0$$

zusammen mit der von \mathbb{N}_0 induzierten Ordnung \leq . Die von den Mengen $[n]$, $n \in \mathbb{N}_0$ induzierte volle Unterkategorie von Poset heißt *simpliziale Kategorie* und wird mit Δ bezeichnet.

Definition A.5. Eine *simpliziale Menge* ist ein kontravarianter Funktor $K : \Delta \rightarrow \text{Set}$. Die Mengen $K([n])$ für ein Objekt $[n]$ aus Δ werden mit K_n bezeichnet. Wir bezeichnen eine strikte Transformation $f : K \rightarrow K'$ als *Morphismus simplizialer Mengen*. Die dadurch definierte Kategorie heißt *Kategorie simplizialer Mengen* und wird mit sSet bezeichnet.

Definition A.6. Der Funktor $\Delta[n] := \text{Hom}_\Delta(\cdot, [n])$ bildet eine simpliziale Menge, den *Standard-n-Simplex*.

Definition A.7. Sei K eine simpliziale Menge und $k \in \mathbb{N}$. Ein k -Simplex, d.h. ein Element $\sigma \in K_k$, heißt *ausgeartet*, wenn es einen Morphismus $d : [k] \rightarrow [k-1]$ gibt, so dass σ im Bild der induzierten Abbildung $d^* : K_{k-1} \rightarrow K_k$ ist. Die Menge aller nichtausgearteten k -Simplizes wird mit K_k^{nd} bezeichnet.

Definition A.8. Eine simpliziale Menge K heißt *endlich*, wenn sie nur endlich viele nichtausgeartete Simplizes besitzt, d.h. wenn die disjunkte Vereinigung

$$\coprod_{k=0}^{\infty} K_k^{\text{nd}}$$

endlich ist. Wir definieren die Dimension einer endlichen simplizialen Menge als

$$\dim(K) := \max\{k \in \mathbb{N} \mid K_k^{\text{nd}} \neq \emptyset\}.$$

Eine endliche simpliziale Menge der Dimension 1 heißt auch *endlicher geordneter Graph*.

Proposition A.9. In sSet existieren Limiten und Kolimite. Sie lassen sich komponentenweise berechnen, d.h. es gilt für jedes $k \in \mathbb{N}_0$

$$\left(\lim_{i \in I} K_{i,\cdot} \right)_k = \lim_{i \in I} K_{i,k}$$

und

$$\left(\operatorname{colim}_{i \in I} K_{i,\cdot} \right)_k = \operatorname{colim}_{i \in I} K_{i,k}.$$

Beweis. Nach einer bekannten Aussage der Kategorientheorie (siehe beispielsweise [Awo10, Prop 8.7, Cor 8.9]) sind für jede kleine Kategorie C die Funktorkategorien Set^C vollständig und kovollständig, d.h. in Set^C existieren Limiten und Kolimite. Die Aussage folgt daraus, da sSet als die Funktorkategorie Set^Δ definiert ist. \square

Wir können mittels Proposition A.9 das Produkt des Standard-1-Simplex bestimmen:

Korollar A.10. Es gibt für jedes $d \in \mathbb{N}$ eine kanonische Bijektion

$$(\Delta[1])^d \simeq \text{Hom}_{\text{Poset}}(\cdot, [1]^d),$$

wobei $[1]^d$ als Produkt partiell geordneter Mengen (Bemerkung A.3) zu verstehen ist.

Beweis. Da das Produkt $(\Delta[1]^d)$ komponentenweise gebildet werden kann, haben wir für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ eine funktorielle Isomorphie

$$(\Delta[1])_n^d \simeq \prod_d \text{Hom}_{\Delta}([n], [1]) \simeq \text{Hom}_{\text{Poset}}([n], [1]^d).$$

□

Wir bezeichnen zu einer simplizialen Menge $K.$ mit $\Delta K.$ die Kategorie $\Delta[n] \downarrow K.$ der Simplizes über $K.$: Die Objekte sind gegeben durch Morphismen $\Delta[n] \rightarrow K.$ für ein $n \in \mathbb{N}$, Morphismen durch Abbildungen $[n] \rightarrow [m]$, so dass das offensichtliche Diagramm kommutiert.

Wir bezeichnen mit $\Delta'K.$ die Unterkategorie von $\Delta K.$, die als Objekte lediglich Morphismen $\Delta[n] \rightarrow K.$ enthält, die nicht ausgeartet sind und als Morphismen lediglich injektive Abbildungen $[n] \rightarrow [m]$.

Mit Hilfe des Yoneda-Lemmas folgert man dann:

Proposition A.11. *Für jede simpliziale Menge $K. \in \text{sSet}$ gilt*

$$K_n \simeq \text{Hom}_{\text{sSet}}(\Delta[n], K.)$$

und

$$K. = \underset{\Delta K.}{\text{colim}} \Delta[n] = \underset{\Delta' K.}{\text{colim}} \Delta[n].$$

Beweis. Ein Beweis hierfür findet sich in [Hov99, Lemma 3.1.3, Lemma 3.1.4]. □

Definition A.12. Wir bezeichnen für jedes $i \in \{0, k\}$ die Abbildung

$$s_i : [0] \rightarrow [k], 0 \mapsto i$$

mit s_i . Eine simpliziale Menge $K.$ heißt *simpliziale Menge ohne Mehrfachsimplices*, falls die Abbildung

$$\varphi : \coprod_{k=0}^{\infty} K_k^{\text{nd}} \rightarrow \mathcal{P}(K_0), t \in K_k^{\text{nd}} \mapsto \{K(s_0)(t), \dots, K(s_k)(t)\}$$

in die Potenzmenge $\mathcal{P}(K_0)$ der Eckenmenge K_0 ein Monomorphismus ist. Ist $K.$ eine simpliziale Menge ohne Mehrfachsimplices, so bezeichnen wir das Bild unter φ mit

$$K_S := \text{Im}(\varphi) \subseteq \mathcal{P}(K_0).$$

Bemerkung A.13. Da das Produkt simplizialer Mengen komponentenweise gebildet ist, ist das Produkt simplizialer Mengen ohne Mehrfachsimplices selbst eine simpliziale Menge ohne Mehrfachsimplices.

Proposition A.14. *Es seien $K.$ und K' zwei simpliziale Mengen, wobei K' keine Mehrfachsimplices aufweist, und $f, f' : K. \rightarrow K'$ zwei Morphismen simplizialer Mengen. Stimmen die Einschränkungen von f und f' auf die 0-Simplizes:*

$$f|_0, f'|_0 : K_0 \rightarrow K'_0$$

überein, so gilt bereits $f = f'$.

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass für jedes $k \in \mathbb{N}$ und jeden nichtdegenerierten k -Simplex $t \in K_k$ bereits $f(t) = f'(t)$ gilt. Da K' keine Mehrfachsimplices enthält, werden die k -Simplizes $f(t)$ und $f'(t)$ eindeutig durch $\varphi(f(t))$ bzw. $\varphi(f'(t))$ bestimmt. Es gilt jedoch

$$\begin{aligned}\varphi(f(t)) &= \{K(s_0)(f(t)), \dots, K(s_k)(f(t))\} \\ &= \{K(s_0)(f'(t)), \dots, K(s_k)(f'(t))\} = \varphi(f'(t)).\end{aligned}$$

□

A.2. Die geometrische Realisierung

Proposition A.11 lässt sich so deuten: Durch geeignetes Verkleben von Standard-simplizes erhält man die simpliziale Menge K zurück. Ersetzt man hierbei jeweils den Standardsimplex $\Delta[n]$ durch den topologischen Standardsimplex $|\Delta[n]|$, so gewinnt man die geometrische Realisierung einer simplizialen Menge.

Definition A.15. Sei $[n]$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ ein Objekt aus Δ . Dann bezeichne $|\Delta[n]|$ den topologischen Standard- n -Simplex, d.h. den Raum

$$\{(t_0, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_i t_i = 1, t_i \geq 0\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}.$$

Seien $n, m \in \mathbb{N}_0$ und $\varphi : [n] \rightarrow [m]$ ein Morphismus aus Δ . Dann induziert φ eine stetige Abbildung

$$\begin{aligned}|\Delta[\varphi]| : |\Delta[n]| &\rightarrow |\Delta[m]|, \\ (t_0, \dots, t_n) &\mapsto (t'_0, \dots, t'_m)\end{aligned}$$

mit $t'_j := \sum_{\varphi(i)=j} t_i$. Damit ist $|\Delta[\cdot]| : \Delta \rightarrow \text{Top}$ ein kovarianter Funktor. Sei K eine simpliziale Menge, so wird der topologische Raum

$$|K| := \operatorname{colim}_{\Delta K} |\Delta[n]|$$

die *geometrische Realisierung* von K genannt. Als Kolimes ist diese Bildung funktoriell in K .

Proposition A.16. *Die geometrische Realisierung kommutiert mit der Bildung von Produkten, d.h. für beliebige simpliziale Mengen K, V gibt es einen kanonischen Homöomorphismus $|K \times V| \simeq |K| \times |V|$.*

Beweis. [Hov99, Lemma 3.1.8]

□

Für die Betrachtung der geometrischen Realisierung ist es praktisch, wenn man nichtausgeartete Simplizes bereits an der Menge ihrer „Eckpunkte“ eindeutig bestimmen kann:

Für simpliziale Mengen ohne Mehrfachsimplices lässt sich die geometrische Realisierung ganz explizit beschreiben durch:

Proposition A.17. Sei K eine simpliziale Menge ohne Mehrfachsimplices. Die geometrische Realisierung ist der Unterraum $|K| \subseteq \text{hom}_{\text{set}}(K_0, \mathbb{R})$ bestehend aus den Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf K_0 (bezüglich des Zählmaßes) mit Träger in einem Simplex aus K , d.h. aus Funktionen $f : K_0 \rightarrow [0, 1]$ mit

$$(A.1) \quad \sum_{v \in K_0} f(v) = 1 \text{ und } \text{supp}(f) \in K_S$$

für K_S aus Definition A.12.

Ist $\varphi : K \rightarrow K'$ ein Morphismus simplizialer Mengen ohne Mehrfachsimplices, so wird die induzierte Abbildung $\varphi_* : |K| \rightarrow |K'|$ für eine Wahrscheinlichkeitsverteilung $f \in |K|$ wie in (A.1) gegeben durch $\varphi_*(f) = f'$, wobei die Abbildung $f' : K'_0 \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f'(s') = \sum_{s \in \varphi_0^{-1}(s')} f(s)$$

gegeben ist.

Beweis. Wir bezeichnen die Menge der beschriebenen Wahrscheinlichkeitsverteilungen mit $\text{WV}(K)$. Für die Standardsimplizes $\Delta[n]$ sowie Morphismen von Standardsimplizes ist die Isomorphie offensichtlich. Wir erhalten daher eine stetige Abbildung $|K| \rightarrow \text{WV}(K)$. Man überzeugt sich davon, dass diese Abbildung offen ist. Es genügt daher zu zeigen, dass für simpliziale Mengen ohne Mehrfachsimplices die Abbildung bijektiv ist. Die Umkehrabbildung bildet sich wie folgt: Sei $f : K_0 \rightarrow \mathbb{R}$ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung wie in (A.1). Da die simpliziale Menge K keine Mehrfachsimplices aufweist, existiert ein eindeutiger Simplex $s : \Delta[j] \rightarrow K$ mit $\text{supp}(f) = \text{Im}(s)$. Dann gibt es ein $f' : \Delta[j]_0 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f = s_*(f')$ und wir ordnen f den Punkt $|s|(f')$ zu. \square

Beispiel A.18. Für den Standard-1-Simplex $\Delta[1] := \text{Hom}(\cdot, [1])$ gilt offenbar $\Delta[1]_0 \simeq \{0, 1\}$ und $\Delta[1]_S \simeq \mathcal{P}(\{0, 1\})$. Daher gibt es eine kanonische Isomorphie der geometrischen Realisierung $|\Delta[1]|$ mit dem Einheitsintervall $[0, 1]$.

Proposition A.19. Es bezeichne I den Standard-1-Simplex $I := \Delta[1]$ und S_d die symmetrische Gruppe vom Grad d . Dann gibt es eine kanonische Bijektion

$$\psi : S_d \rightarrow (I^d)_d^{\text{nd}}$$

zwischen den nichtausgearteten d -Simplizes im Produkt I^d und S_d . Die geometrische Realisierung des Simplex $\psi(\sigma)$ wird in $I^d = [0, 1]^d$ durch

$$\{x = (x_1, \dots, x_d) \in [0, 1]^d \mid x_{\sigma(1)} \leq x_{\sigma(2)} \leq \dots \leq x_{\sigma(d)}\}$$

gegeben.

Beweis. Da das Produkt I^d komponentenweise gebildet wird, gilt

$$I^d([n]) \simeq \prod_d \text{Hom}_{\text{Poset}}([n], [1]) \simeq \text{Hom}_{\text{Poset}}([n], [1]^d),$$

wobei das Produkt $[1]^d$ in der Kategorie der Mengen mit partieller Ordnung gebildet wird. Wir erhalten daher für die d -Simplizes

$$(I^d)_d \simeq \text{Hom}([d], [1]^d).$$

Ein Element $\varphi \in \text{Hom}([d], [1]^d)$ ist genau dann nichtausgeartet, wenn $\varphi(0) < \varphi(1) < \dots < \varphi(d)$ bezüglich der Produktordnung auf $[1]^d$ gilt. Dann gibt es jedoch genau eine Permutation $\sigma \in S_d$ mit

$$\varphi(i) = (0, \dots, 0, 1, \dots, 1)^\sigma.$$

Die s_σ zugeordneten Ecken werden auch gerade durch $\varphi(i)$ bestimmt. Daher wird ein Punkt aus $|(I^d)_0|$, der im Simplex s_σ liegt, durch eine Koordinatenfunktion $f : (I^d)_0 \rightarrow \mathbb{R}$ mit Träger $\text{supp}(f) \subseteq \text{Im}(s_d)$ beschrieben. Unter der Identifikation

$$|I^d| \simeq |I|^d \simeq [0, 1]^d$$

wird der durch f bestimmte Punkt auf

$$\sum_{a \in \{0,1\}^d} f(a)a$$

abgebildet, wobei die Menge $[1]^d = \{0, 1\}^d$ als Teilmenge von $[0, 1]^d$ aufgefasst wird.

Daher gilt für alle Punkte $x = (x_1, \dots, x_d) \in |s_\sigma|$ die Ungleichung

$$x_{\sigma(1)} \leq \dots \leq x_{\sigma(d)}.$$

□

A.3. Unterteilung einer simplizialen Menge

In der vorliegenden Arbeit ist es an mehreren Stellen erforderlich, Unterteilungen von simplizialen Mengen zu bilden. Dazu verwende ich eine in [Bök93, §1] beschriebene, analog zu Segal [Seg73, Appendix 1] gebildete k -fache Eckenunterteilung einer simplizialen Menge.

Definition A.20.

(i) Es sei $k \in \mathbb{N}$. Wir bezeichnen mit $\tilde{\text{unt}}_k$ den Funktor

$$\tilde{\text{unt}}_k : \Delta \rightarrow \Delta$$

der auf Objekten durch

$$[n] \mapsto [(n+1) \cdot k - 1]$$

und auf Morphismen durch

$$\text{Hom}_{\text{sSet}}([n], [m]) \ni \varphi \mapsto (ak + b \mapsto ak + \varphi(b) \text{ für } 0 \leq b < k)$$

gegeben ist.

(ii) Der von $\tilde{\text{unt}}_k$ induzierte Funktor

$$\text{unt}_k : \text{sSet} \rightarrow \text{sSet}, K_\cdot \mapsto \tilde{\text{unt}}_k \circ K_\cdot$$

heißt *k-fache Eckenunterteilung*.

Proposition A.21. *Der Funktor unt_k kommutiert mit Kolimites und endlichen Produkten.*

Beweis. Die Behauptung lässt sich mit elementaren Aussagen der Kategorientheorie zeigen und beruht im Wesentlichen darauf, dass Produkte und Kolimites von simplizialen Mengen nach Proposition A.9 komponentenweise bestimmt werden können. Eine sehr ausführliche Darstellung findet man in [Ber09, Chapter 5]. \square

Beispiel A.22. Wir bezeichnen zu $i \leq k$ mit φ_i^k den Morphismus partiell geordneter Mengen

$$\varphi_i : [k] \rightarrow [1], j \mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } j < i, \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann lassen sich die k -Simplizes des Graphen $I_\cdot := \Delta[1] = \text{Hom}(\cdot, [1])$ durch $I_k = \{\varphi_0, \dots, \varphi_{k+1}\}$ beschreiben. Wir können damit die Simplizes von $\text{unt}_k(I)$ bestimmen. Für die 0-Simplizes gilt

$$(\text{unt}_k(I))_0 = I_{k-1} = \{\varphi_0^{k-1}, \dots, \varphi_{k-1}^{k-1}\}.$$

Man überzeugt sich sofort, dass die nichtausgearteten 1-Simplizes $(\text{unt}_k(I))_1^{\text{nd}} \subseteq I_{2k-1}$ genau durch

$$(\text{unt}_k(I))_1^{\text{nd}} = \{\varphi_{2i+1}^{2k+1} \mid i = 0, \dots, k-1\}$$

gegeben sind und der Simplex φ_{2i+1} als Ecken φ_i^k und φ_{i+1}^k aufweist. Alle höheren Simplizes sind ausgeartet. Daher ist $\text{unt}_k(I)$ wie erwartet der Graph des k -fach unterteilten Einheitsintervalls.

Proposition A.23. *Für jede simpliziale Menge X_\cdot gibt es einen kanonischen Isomorphismus*

$$\text{Unt}_n : |\text{unt}_n(X)| \simeq |X|.$$

Für $X_\cdot = I_\cdot = \Delta[1]$ und mit der Beschreibung der geometrischen Realisierung aus Proposition A.17 ist dieser gegeben durch die Abbildung

$$[f : (\text{unt}_n(I))_0 \rightarrow \mathbb{R}] \mapsto [f' : I_0 \rightarrow \mathbb{R}]$$

mit

$$f'(0) = \sum_{i=0}^n \frac{1}{n} f(\varphi_i^k).$$

Beweis. Eine Konstruktion der Abbildung findet sich in [Bök93, Lemma 1.1]. \square

Proposition A.24. Es sei K eine simpliziale Menge und $t : \Delta \rightarrow \text{unt}_n(K)$ ein Simplex von $\text{unt}_n(K)$. Dann gibt es einen Simplex $s : \Delta \rightarrow K$ aus K , derart, dass unter der kanonischen Abbildung

$$|\text{unt}_n(K)| \simeq |K|$$

das Bild von $|t|$ ganz in $\text{Im}(|s|)$ enthalten ist.

Beweis. Es sei $i \in \mathbb{N}$ derart, dass $t \in (\text{unt}_k(K))_i$ liegt. Nach Definition der Unterteilung gilt $(\text{unt}_k(K))_i \simeq K_{(i+1)k-1}$ und wir setzen daher $s \in K_{(i+1)k-1}$ als das Bild von t unter dieser Isomorphie. Dann faktorisiert t in der Form

$$t : \Delta[i] \xrightarrow{\tilde{t}} \text{unt}_k(\Delta[i]) \xrightarrow{\text{unt}_k(s)} \text{unt}_k(K)$$

und daher kommutiert

$$\begin{array}{ccc} |\Delta[i]| & & \\ \downarrow |\tilde{t}| & & \\ |\text{unt}_k(\Delta[i])| & \xrightarrow{\cong} & |\Delta[(i+1)k-1]| \\ \downarrow |\text{unt}_k(s)| & & \downarrow |s| \\ |\text{unt}_k(K)| & \xrightarrow{\cong} & |K|. \end{array}$$

Daraus folgt sofort die Behauptung. \square

Proposition A.25. Es seien K, K' zwei simpliziale Mengen ohne Mehrfachsimplices und $f, g : \text{unt}_n(K) \rightarrow \text{unt}_n(K')$ zwei Morphismen simplizialer Mengen, für die die $f(K_0) \subseteq K'_0$ bzw. $g(K_0) \subseteq K'_0$ gilt. Sind dann f und g auf der Teilmenge $K_0 \subseteq \text{unt}_n(K)_0$ injektiv und stimmen überein, so gilt bereits $f = g$.

Beweis. Da die simplizialen Mengen keine Mehrfachsimplices aufweisen, genügt es nach Proposition A.14, die Abbildungen f_0 und g_0 der Eckenmengen zu betrachten. Dazu bezeichnen wir zu zwei Ecken $x, y \in \text{unt}_n(K)_0$ die Länge des kürzesten verbindenden Kantenzugs mit $d(x, y)$. Es gilt für jedes $x \in \text{unt}_n(K)_0 = K_n$ und jedes $z \in K_0$ mit der kanonischen Einbettung $\psi : K_0 \rightarrow \text{unt}_n(K)_0$:

$$\max(0, n - d(x, \psi(z))) = \#\{i \mid K(s_i)(x) = z\}.$$

Hierbei bezeichnen wir mit s_i die Seitenabbildungen aus Definition A.12. Da K' keine Mehrfachsimplices enthält, ist x durch $K(s_i)(x)$ eindeutig bestimmt. Daher ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi_K : \text{unt}_n(K)_0 &\rightarrow \text{Hom}(K_0, \mathbb{N}), \\ x &\mapsto \left(k \mapsto \max(0, n - d(x, \psi(k))) \right) \end{aligned}$$

injektiv und erfüllt $\sum_{k \in K_0} \varphi(x)(k) = n$. Aufgrund der Injektivität von $f|_{K_0}$ gelten für jede Ecke $x \in \text{unt}_n(K)_0$ die Beziehungen

$$\begin{aligned} f|_{K_0} \circ \varphi_K &= \varphi_{K'}(f(x)), \\ g|_{K_0} \circ \varphi_K &= \varphi_{K'}(g(x)) \end{aligned}$$

und es folgt $f = g$. □

Definition A.26. Es sei K eine simpliziale Menge. Eine *simpliziale Totalordnung* auf K bezeichnet eine Totalordnung von K_0 derart, dass für jeden Simplex $s \in K_k$ die nach Proposition A.11 zugeordnete Abbildung

$$s : \Delta[k]_0 \rightarrow K_0$$

ein Morphismus geordneter Mengen ist.

Proposition A.27. Es sei K eine simpliziale Menge ohne Mehrfachsimplices, $n \in \mathbb{N}$ und $<$ eine simpliziale Ordnung auf K_0 . Wir versehen $(K_0)^n$ mit der lexikographischen Ordnung. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte simpliziale Ordnung auf $\text{unt}_n(K)$ derart, dass die kanonischen Abbildungen

$$K_0 \rightarrow \text{unt}_n(K)_0,$$

und

$$\text{unt}_n(K)_0 \rightarrow (K_0)^n$$

Morphismen geordneter Mengen sind.

Beweis. Wir betrachten zunächst die durch die Seitenabbildungen s_0, \dots, s_n aus Definition A.12 induzierte kanonische Abbildung

$$\psi : \text{unt}_n(K)_0 \rightarrow (K_0)^n$$

und wählen für jedes $z \in (K_0)^n$ eine beliebige Totalordnung auf der Faser $\psi^{-1}(z)$. Dann lässt sich eine Totalordnung auf $\text{unt}_n(K)_0$ wie folgt definieren: Für zwei Elemente $x, y \in \text{unt}_n(K)_0$ gilt $x \prec y$ falls $\psi(x) < \psi(y)$ in der lexikographischen Ordnung gilt oder $\psi(x) = \psi(y)$ und $x \leq y$ in der auf $\psi^{-1}(\psi(x))$ gewählten Totalordnung gilt. Dies liefert in der Tat eine simpliziale Ordnung: Ist $c \in \text{unt}_n(K)_k = K_{(k+1)n}$ ein k -Simplex von $\text{unt}_n(K)$, so gilt für die Abbildung φ_i^n auf die i -te Ecke

$$\psi(\text{unt}_n(K)(\varphi_i^n))(c) = \left(K(s_i)(c), K(s_{n+i})(c), \dots, K(s_{kn+i})(c) \right)$$

und daher folgt für $i < i'$ bereits

$$\psi(\text{unt}_n(K)(s_i))(c) \leq \psi(\text{unt}_n(K)(s_{i'}))(c).$$

Da K eine simpliziale Menge ohne Mehrfachsimplices ist, so ist die Abbildung ψ injektiv und die Totalordnung daher eindeutig bestimmt. □

Literaturverzeichnis

- [Awo10] AWODEY, Steve: *Category theory*, Bd. 52 von *Oxford Logic Guides*, Oxford University Press, Oxford, second Aufl. (2010)
- [Ber99] BERKOVICH, Vladimir G.: Smooth p -adic analytic spaces are locally contractible. *Invent. Math.* (1999), Bd. 137(1):S. 1–84
- [Ber09] BERG, Knut: *Edgewise Subdivision and Simple Maps*, Diplomarbeit, University of Oslo (2009)
- [Bök93] BÖKSTEDT, M.; HSIANG, W. C. und MADSEN, I.: The cyclotomic trace and algebraic K -theory of spaces. *Invent. Math.* (1993), Bd. 111(3):S. 465–539
- [Bos90] BOSCH, Siegfried; LÜTKEBOHMERT, Werner und RAYNAUD, Michel: *Néron models*, Bd. 21 von *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]*, Springer-Verlag, Berlin (1990)
- [Del69] DELIGNE, Pierre und MUMFORD, David: The irreducibility of the space of curves of given genus. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1969), (36):S. 75–109
- [dJ96] DE JONG, A. J.: Smoothness, semi-stability and alterations. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1996), Bd. 83:S. 51–93
- [Ful98] FULTON, William: *Intersection theory*, Bd. 2 von *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics]*, Springer-Verlag, Berlin, second Aufl. (1998)
- [Gör10] GÖRTZ, Ulrich und WEDHORN, Torsten: *Algebraic geometry I*, Advanced Lectures in Mathematics, Vieweg + Teubner, Wiesbaden (2010), schemes with examples and exercises
- [Gro65] GROTHENDIECK, Alexander: Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas. II. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1965), (24):S. 231

- [Gro95] GROSS, Benedict. H. und SCHOEN, Chad: The modified diagonal cycle on the triple product of a pointed curve. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* (1995), Bd. 45(3):S. 649–679
- [Har77] HARTSHORNE, Robin: *Algebraic geometry*, Springer-Verlag, New York (1977), graduate Texts in Mathematics, No. 52
- [Har01] HARTL, Urs T.: Semi-stability and base change. *Arch. Math. (Basel)* (2001), Bd. 77(3):S. 215–221
- [Hei03] HEINZ, Niels: Metrized line bundles on products of curves over local fields and functions on reduction complexes, <http://people.math.jussieu.fr/~vmaillot/Arakelov/0011/> (2003)
- [Hov99] HOVEY, Mark: *Model categories*, Bd. 63 von *Mathematical Surveys and Monographs*, American Mathematical Society, Providence, RI (1999)
- [Liu02] LIU, Qing: *Algebraic geometry and arithmetic curves*, Bd. 6 von *Oxford Graduate Texts in Mathematics*, Oxford University Press, Oxford (2002), translated from the French by Reinie Erné, Oxford Science Publications
- [Mat89] MATSUMURA, Hideyuki: *Commutative ring theory*, Bd. 8 von *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*, Cambridge University Press, Cambridge, second Aufl. (1989), translated from the Japanese by M. Reid
- [Rum89] RUMELY, Robert S.: *Capacity theory on algebraic curves*, Bd. 1378 von *Lecture Notes in Mathematics*, Springer-Verlag, Berlin (1989)
- [Seg73] SEGAL, Graeme: Configuration-spaces and iterated loop-spaces. *Invent. Math.* (1973), Bd. 21:S. 213–221
- [Ser00] SERRE, Jean-Pierre: *Local algebra*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin (2000), translated from the French by Chee-Whye Chin and revised by the author
- [Sou92] SOULÉ, Christophe: *Lectures on Arakelov geometry*, Bd. 33 von *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*, Cambridge University Press, Cambridge (1992), with the collaboration of D. Abramovich, J.-F. Burnol and J. Kramer
- [Wei94] WEIBEL, Charles A.: *An introduction to homological algebra*, Bd. 38 von *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*, Cambridge University Press, Cambridge (1994)
- [Zha93] ZHANG, Shou-Wu: Admissible pairing on a curve. *Invent. Math.* (1993), Bd. 112(1):S. 171–193

- [Zha95] ZHANG, Shou-Wu: Small points and adelic metrics. *J. Algebraic Geom.* (1995), Bd. 4(2):S. 281–300
- [Zha10] ZHANG, Shou-Wu: Gross-Schoen cycles and dualising sheaves. *Invent. Math.* (2010), Bd. 179(1):S. 1–73