

UNIVERSITÄT REGENSBURG
FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK

POSITIVITÄTSEIGENSCHAFTEN DER DELIGNE-PAARUNG



MASTERARBEIT

ZUR ERLANGUNG DES AKADEMISCHEN GRADES
MASTER OF SCIENCE
IM STUDIENGANG MATHEMATIK

EINGEREICHT BEI PROF. DR. KLAUS KÜNNEMANN
AM 30. JANUAR 2014

VORGELEGT VON:
ALEXANDER PAUL RUDOLF SCHILLER
GEBOREN AM 04. MÄRZ 1989 IN REGENSBURG
Matrikelnummer 1409058

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Vorbemerkungen und Grundlagen	5
2.1	Notationen und Konventionen im Umfeld von Divisoren	5
2.2	Spezielle Morphismen von Schemata	6
2.3	Schnitttheorie	7
2.4	Horizontale Divisoren	10
3	Die Norm eines Geradenbündels	13
3.1	Die Norm eines Geradenbündels im Sinne Aitkens	13
3.1.1	Die Norm eines Geradenbündels über einem Körper als Basisschema	13
3.1.2	Die Norm eines Geradenbündels über einem integren Basisschema	15
3.2	Die Norm eines Geradenbündels nach Grothendieck	17
3.3	Zur Äquivalenz der Normdefinitionen	20
4	Die Deligne-Paarung	24
4.1	Die Deligne-Paarung über einem Körper als Basisschema	24
4.2	Die Deligne-Paarung über einem integren Basisschema	25
5	Beweis des Hauptresultats	28
5.1	Grundsätzliches zum Theorem	28
5.2	Rückführung auf die Deligne-Paarung über einer Kurve	29
5.3	Weitere Umformungen der Behauptung	31
5.4	Abschluss des Beweises mittels eines Theorems von Kleiman	34

1 Einleitung

In der Literatur findet sich die Deligne-Paarung das erste Mal (für eine Spezialsituation) in Pierre Delignes Abhandlung „La formule de dualité globale“, die 1973 in [SGA73] erschien. Seither hat sie eine spannende Entwicklung erfahren: 1987 wurde sie erneut vom namensgebenden Deligne in seinem Artikel „Le déterminant de la cohomologie“ ([Del87]) präsentiert. Durch die Arbeit von Mathematikern wie Moret-Bailly ([MB85]) und Zhang ([Zha96]) wurden interessante Eigenschaften der Deligne-Paarung nachgewiesen und ihr Anwendungsbereich erweitert. Auch u.a. in den Beiträgen von Elkik ([Elk90]), Franke ([Fra90]), Phong und Sturm ([PS04]) und Biswas, Schumacher und Weng ([BSW11]) spielt die Deligne-Paarung eine wichtige Rolle. Insgesamt lässt sich sagen, dass die Deligne-Paarung sich als ein nützliches Instrument in der Mathematik, speziell in der algebraischen und der arithmetischen Geometrie, erwiesen hat. Arithmetische Geometrie ist jener Bereich der Mathematik, der als Schnittstelle zwischen algebraischer Zahlentheorie und klassischer algebraischer Geometrie gesehen wird, in dem sich aber auch Einflüsse der algebraischen Topologie und der komplexen Analysis finden.

Was ist nun diese Deligne-Paarung? Wegen der Komplexität der Definition muss für diese auf das Kapitel 4 der Arbeit verwiesen werden; wir können hier jedoch eine informelle Erklärung geben. Die grundlegende Idee ist die folgende: Man habe einen Morphismus $f : X \rightarrow Y$ von Schemata gegeben, der gewisse Eigenschaften erfüllt - in unserem Fall wird er projektiv sowie flach von relativer Dimension 1 sein, und außerdem wird das Schema Y integer, separiert und noethersch sein. Ausgehend von zwei Geradenbündeln L und M auf X möchte man nun ein Geradenbündel $\langle L, M \rangle$ auf Y erhalten, die Deligne-Paarung von L und M (bzgl. f). Dabei soll diese Paarung Eigenschaften wie z.B. Symmetrie aufweisen. Eine Vorstellung von der Deligne-Paarung kann man auch wie folgt erhalten: Schneidet man L und M im Sinne der Schnitttheorie auf X und drückt das Resultat nach vorn, so ist dies (unter geeigneten Voraussetzungen) eine Beschreibung der ersten Chern-Klasse von $\langle L, M \rangle$. Es soll an dieser Stelle nicht unerwähnt bleiben, dass die Deligne-Paarung, wie sie in Kapitel 4 definiert wird, ein bis auf kanonische Isomorphie eindeutig bestimmtes Geradenbündel liefert und nicht nur eine Isomorphieklasse.

Das Hauptresultat der vorliegenden Arbeit wird eine Positivitätseigenschaft der Deligne-Paarung sein. Ursprünglich wurde die Positivität von Geradenbündeln schon in den 1950er und 1960er Jahren untersucht. In den folgenden Jahrzeh-

ten ist die damals entstandene Theorie gereift, hat Werke wie Lazarsfelds Bücher ([Laz04a], [Laz04b]) hervorgebracht, und teilweise sind andere Begriffe in den Vordergrund der Forschung getreten, beispielsweise der eines sogenannten numerisch effektiven (auch als nef bezeichneten) Geradenbündels.

Definition. Sei Y ein eigentliches Schema über $\text{Spec } K$, wobei K ein Körper sei, und L ein Geradenbündel auf Y . Dann heißt L **numerisch effektiv** oder **nef**, falls $\deg_{Y/K}(c_1(L) \cap [C]) \geq 0$ für alle Kurven C in Y , d.h. für alle abgeschlossenen integren 1-dimensionalen Unterschemata von Y , ist.

Wir werden in einer speziellen Situation den Begriff der relativen Semipositivität genauer betrachten, der eng mit dem Term nef verwandt ist.

Definition. Sei Γ eine eigentliche und normale (also reguläre und projektive) Kurve über $\text{Spec } K$, wobei K ein Körper sei. Sei Y ein Schema, das projektiv und flach über Γ ist. Ein Geradenbündel L auf Y heißt **relativ semipositiv** (bzgl. Γ), wenn L nichtnegativen Grad auf jeder Kurve in den speziellen Fasern von Y über Γ hat, d.h., wenn alle durch Einschränkung von L auf die speziellen Fasern erhaltenen Geradenbündel nef sind.

Nach entsprechender Vorarbeit und mit zwischenzeitlichem Beweis auch eigenständig interessanter Aussagen (beispielsweise einer Basiswechseleigenschaft der Deligne-Paarung, wie sie für die dort behandelte Situation auch bei der ursprünglichen Definition der Deligne-Paarung in [SGA73, XVIII Ex. 1.3.11] gegeben ist) wird am Ende der Arbeit gezeigt sein, dass in einer genau spezifizierten Situation die Deligne-Paarung zweier relativ semipositiver Geradenbündel wieder relativ semipositiv ist. Konkret lautet das Hauptresultat so:

Theorem. Sei Γ eine eigentliche und normale (also reguläre und projektive) Kurve über einem Körper. Sei \mathcal{Y} ein integres Schema, das projektiv und flach über Γ ist und $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ ein projektiver Γ -Morphismus von Schemata, der flach von relativer Dimension 1 ist.

Sind \mathcal{L} und \mathcal{M} relativ semipositive Geradenbündel bzgl. Γ auf \mathcal{X} , wobei $\mathcal{L} = \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(D)$ oder $\mathcal{M} = \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(D)$ für einen horizontalen Divisor D bzgl. f gilt, so liefert die Deligne-Paarung von \mathcal{L} und \mathcal{M} ein bzgl. Γ relativ semipositives Geradenbündel $\langle \mathcal{L}, \mathcal{M} \rangle$ auf \mathcal{Y} .

Ein vergleichbares Resultat wird in [Zha10] implizit verwendet, was eine Inspiration für das Thema dieser Arbeit darstellte.

Wir setzen im Folgenden neben grundlegenden Kenntnissen in algebraischer Geometrie (z.B. über Faserprodukte und projektive Morphismen von Schemata) auch Wissen über Cartier-Divisoren sowie Zykel und Zykelklassen als bekannt voraus. Wir sind uns jedoch bewusst, dass wir insgesamt und speziell im Umfeld der

Divisoren viele, teils selten angewandte und vereinzelt auch fortgeschrittene Resultate mit ins Kalkül ziehen. Daher haben wir uns entschlossen, an entsprechenden Stellen regen Gebrauch von genauen Literaturangaben zu machen, um eventuelles Nachschlagen zu vereinfachen. Außerdem sollten es diese auch einem mit der jeweiligen Thematik nicht so vertrauten Leser ermöglichen, die Beweise, die auf jenen Resultaten fußen, nachzuvollziehen. Hauptreferenz ist hierbei Grothendiecks Werk „Éléments de géométrie algébrique“ („EGA“, [Gro60], [Gro61a], [Gro61b], [Gro67]). Teilweise wurde aber auch auf andere Abhandlungen über die algebraische Geometrie zurückgegriffen (exemplarisch sei an dieser Stelle auf die Bücher von Hartshorne, [Har77], und Görtz und Wedhorn, [GW10], verwiesen). Natürlich finden sich nicht nur für die allgemein in der algebraischen Geometrie beheimateten Resultate, sondern auch für speziellere Themenbereiche entsprechende Referenzen im Textkörper.

Nach dieser Einleitung werden zunächst in Kapitel 2 einige Bezeichnungen und Notationen geklärt. Außerdem werden Grundlagen für das weitere Vorgehen geschaffen, indem gewisse Morphismen von Schemata, für uns relevante Teile der Schnitttheorie und sogenannte horizontale Divisoren vorgestellt werden. Dieses Material ist großteils in der Literatur schon behandelt worden; wir steuern vereinzelt explizite Beweise bei. Thema des Kapitels 3 ist die Norm eines Geradenbündels, die einen engen Bezug zur Deligne-Paarung aufweist und deren Verständnis daher für uns essentiell ist. Im ersten Teil dieses Kapitels fassen wir die entsprechende Vorgehensweise von Aitken (aus [Ait96]) zusammen. Im zweiten Teil besprechen wir die Norm von Grothendieck und passen die Definition und ein Basiswechselresultat an unsere Situation an. Als Abschluss des Kapitels liefern wir einen Beweis der Äquivalenz der beiden Normdefinitionen in der für uns entscheidenden Situation. In Kapitel 4 steht die Deligne-Paarung im Fokus. Wir lehnen uns dabei konzeptionell an Aitken ([Ait96]) an, da dort die Deligne-Paarung in der für uns nötigen Allgemeinheit (insbesondere ohne Glattheits- und Regularitätsvoraussetzungen) entwickelt wird und zudem Aitkens Ansatz ohne umfangreiche Vorbereitungen auskommt. Dementsprechend resümieren wir die benötigten Teile des dort dargelegten Materials. In Kapitel 5 schließlich werden die entwickelten Begriffe und Aussagen eingesetzt, um auf das bereits formulierte Hauptresultat einzugehen. Auch die ebenfalls schon erwähnte Basiswechseleigenschaft der Deligne-Paarung findet sich hier. Die Vorgehensweise und Argumentation in diesem Kapitel, die letztlich im Beweis des Hauptresultats kulminiert, ist - nach bestem Wissen und Gewissen - neu.

Bedanken möchte ich mich bei allen, die mich bei der Erstellung dieser Masterarbeit unterstützt haben. Hier ist vor allem der Betreuer meiner Masterarbeit, Prof. Dr. Klaus Künnemann, zu nennen. Aus den gemeinsamen, stets interessanten Gesprächen gingen zahlreiche konstruktive Ideen und Verbesserungsvorschläge

hervor, die letztendlich die Arbeit bereicherten. Außerdem bin ich ihm für thematische Anregungen und die Leitung des begleitenden Masterseminars dankbar. Weiterer Dank gebührt meinen Kommilitonen, von denen so manche längst zu guten Freunden geworden sind. Ihr moralischer Beistand in schwierigen Phasen der Masterarbeitszeit war eine große Hilfe. Zu guter Letzt möchte ich mich auch bei meinen Eltern für ihre kontinuierliche Unterstützung bedanken.

2 Vorbemerkungen und Grundlagen

Im ersten Teil dieses Kapitels soll zunächst ein Konsens hinsichtlich der Bezeichnungen und Notationen bei invertierbaren Garben und Divisoren erzielt werden. Anschließend werden wir auf Definitionen und Eigenschaften von Objekten eingehen, die zum Verständnis der Arbeit wichtig sind und zugleich nicht zu den Grundkenntnissen in algebraischer Geometrie gezählt werden können, da sie in der entsprechenden Literatur kaum oder nicht vorkommen. Speziell werden wir in drei separaten Abschnitten gewisse Morphismen von Schemata, Grundlagen der Schnitttheorie sowie sogenannte horizontale Divisoren vorstellen, die Eckpfeiler der folgenden Arbeit bilden.

2.1 Notationen und Konventionen im Umfeld von Divisoren

Es sei in diesem Abschnitt X ein Schema.

Wie in weiten Teilen der Literatur üblich werden wir den Ausdruck *Geradenbündel auf X* synonym für den Term *invertierbarer \mathcal{O}_X -Modul* benutzen, was durch die entsprechende Kategorienäquivalenz (vgl. [Ful98, App. B.3]; für eine kontravariante Äquivalenz, wie sie z.B. in [GW10] benutzt wird, siehe [GW10, 11.7]) gerechtfertigt ist. Die Gruppe der Isomorphieklassen von Geradenbündeln auf X , die *Picardgruppe* von X , wird mit $\text{Pic}(X)$ bezeichnet. Zur besseren Übersichtlichkeit schreiben wir teilweise auch kurz L für $[L] \in \text{Pic}(X)$.

Die Definitionen eines *regulären meromorphen Schnitts* (eines Geradenbündels auf X), eines *Cartier-Divisors* auf X und die mit diesen Begriffen assoziierten grundlegenden Konstruktionen und Definitionen sind gegeben wie in der Literatur üblich. Referenzen hierfür sind [Sta13, Kapitel 01WO] und vor allem der entsprechende Abschnitt in Grothendiecks EGA ([Gro67, IV §20, §21]) unter Beachtung von [Kle79]. Die Gruppe der Cartier-Divisoren auf X wird mit $\text{CaDiv}(X)$ notiert. Als $\text{CaCl}(X)$ wird die Gruppe der *Cartier-Divisorenklassen* auf X bezeichnet.

Sei jetzt X ein n -dimensionales Schema von endlichem Typ über dem Spektrum eines Körpers.

Auch bei *Zykeln* und *Zykelklassen* folgen wir den in Literatur üblichen Definitionen (vgl. z.B. [Ful98, 1.3], [Gro67, IV 21.6]). Die Gruppe der m -Zykel auf X wird mit $Z_m(X)$ notiert. Die Gruppe der m -Zykelklassen (also der m -Zykel modulo rationale Äquivalenz) auf X wird mit $A_m(X)$ bezeichnet und wir setzen $A_*(X) := \bigoplus_{m=0}^n A_m(X)$. Den Fundamentalzykel von X und seine Zykelklasse notieren wir mit $[X]$. Für die Gruppe der *Weil-Divisoren* auf X , $Z_{n-1}(X)$, schreiben wir kurz $Z(X)$. Die Gruppe der *Weil-Divisorenklassen* auf X , $A_{n-1}(X)$, bezeichnen wir auch mit $A(X)$. Sind die Voraussetzungen für ihre Existenz erfüllt, notieren wir die kanonische Abbildung $\text{Pic}(X) \rightarrow A(X)$ mit c_1 .

2.2 Spezielle Morphismen von Schemata

Wir stellen in dieser Sektion zwei Arten von Morphismen von Schemata vor und gehen auf die Stabilität dieser Eigenschaften unter Basiswechsel ein.

Definition 2.1. Sei $f : X \rightarrow Y$ ein Morphismus von Schemata. Der Morphismus f ist **von relativer Dimension d** , wenn f lokal von endlichem Typ ist und alle nichtleeren Fasern von f äquidimensional von Dimension d sind.

Lemma 2.2. Die Eigenschaft eines Morphismus von Schemata, von relativer Dimension d zu sein, ist stabil unter Basiswechsel.

Beweis. Siehe [Sta13, Lemma 02NK]. □

Definition 2.3. Ein Morphismus $f : X \rightarrow Y$ von Schemata heißt **endlich lokal frei**, falls eine der beiden folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

- i) f ist affin und $f_*\mathcal{O}_X$ ist ein endlich lokal freier \mathcal{O}_Y -Modul
- ii) f ist endlich, flach, und von endlicher Präsentation

Nach i) ist die Rangfunktion

$$Y \rightarrow \mathbb{N}_0, y \mapsto \dim_{\kappa(y)}((f_*\mathcal{O}_X)_y \otimes_{\mathcal{O}_{Y,y}} \kappa(y))$$

lokal konstant (insbesondere ist sie konstant für zusammenhängendes Y). Ist f endlich lokal frei und $f_*\mathcal{O}_X$ von konstantem Rang d , so heißt f **endlich lokal frei von Rang d** mit $d \in \mathbb{N}_0$.

Lemma 2.4. Sei

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{g'} & X' \\ \downarrow f & & \downarrow f' \\ Y & \xleftarrow{g} & Y' \end{array}$$

ein kartesisches Diagramm von Schemata. Ist f endlich lokal frei von Rang d , so ist auch f' endlich lokal frei von Rang d .

Beweis. Zunächst ist anzumerken, dass die Eigenschaft eines Morphismus, endlich lokal frei zu sein, stabil unter Basiswechsel ist, da dies für die definierenden Eigenschaften von Morphismen gilt. Da f affin ist, gilt weiterhin $g^*f_*\mathcal{O}_X = f'_*g'^*\mathcal{O}_X$ nach [GW10, 12.6] und wir erhalten $g^*f_*\mathcal{O}_X = f'_*\mathcal{O}_{X'}$. Weil der Pullback rangerhaltend ist, folgt hieraus die Behauptung. \square

2.3 Schnitttheorie

In diesem Abschnitt werden wir eine Auswahl an Definitionen und Resultaten aus dem Gebiet der Schnitttheorie darlegen, die wir im Weiteren verwenden möchten. Ein umfassender Zugang zur Schnitttheorie lässt sich beispielsweise aus dem entsprechenden Werk von Fulton ([Ful98]) erhalten.

Definition 2.5. Sei $f : Y \rightarrow \text{Spec } K$ ein eigentlicher Morphismus von Schemata, wobei K ein Körper sei. Für einen 0-Zykel α auf Y definieren wir den **Grad**

$$\deg_{Y/K}(\alpha) := f_*(\alpha).$$

Nach [Ful98, Theorem 1.4] setzt sich der Pushforward auf Zykelklassen fort bzw. haben rational äquivalente Zyklen den gleichen Grad, so dass wir eine induzierte Abbildung $\deg_{Y/K}$ für 0-Zykelklassen haben. Wir setzen diese fort zu einem Homomorphismus der Zykelklassen in die ganzen Zahlen, der **Gradabbildung**

$$\deg_{Y/K} : A_*(Y) \rightarrow A_0(\text{Spec } K) = \mathbb{Z},$$

indem wir für jede n -Zykelklasse β mit $n \neq 0$ die Festlegung $\deg_{Y/K}(\beta) := 0$ treffen. Wenn keine Verwechslungsgefahr besteht, schreiben wir oft nur kurz \deg für $\deg_{Y/K}$.

Als nächstes gehen wir auf die Operation der ersten Chern-Klasse eines Geradenbündels ein.

Definition 2.6. Sei Y ein Schema von endlichem Typ über einem Körper. Sei L ein Geradenbündel auf Y und S ein n -dimensionales integrales Unterschema von Y . Da S integer ist, ist die Abbildung

$$\text{CaDiv}(S) \rightarrow \text{Pic}(S), D \mapsto [\mathcal{O}_S(D)]$$

surjektiv und dementsprechend der durch Klassenbildung erhaltene Homomorphismus $\text{CaCl}(S) \rightarrow \text{Pic}(S)$ ein Isomorphismus ([GW10, 11.27] ist anwendbar). Daher gilt $L|_S \cong \mathcal{O}_S(D)$ für einen geeigneten, bis auf lineare Äquivalenz eindeutig bestimmten Cartier-Divisor D auf S . Betrachten wir die zu D assoziierte Weil-Divisorenklasse $[D]$, erhalten wir also ein wohldefiniertes Element von

$A(S) = A_{n-1}(S)$ und somit von $A_{n-1}(Y)$ (der entsprechende Pushforward wird per Konvention in der Notation meist weggelassen). Dieses bezeichnen wir mit $c_1(L) \cap [S]$. Setzen wir diese Definition linear fort, ergibt dies einen Homomorphismus

$$Z_n(Y) \longrightarrow A_{n-1}(Y), \alpha \mapsto c_1(L) \cap \alpha.$$

Nach [Ful98, Prop. 2.5(a)] gilt für einen Zykel β auf Y , der rational äquivalent zu 0 ist, schon $c_1(L) \cap \beta = 0$. Somit erhalten wir einen induzierten Homomorphismus

$$A_n(Y) \longrightarrow A_{n-1}(Y), [\alpha] \mapsto c_1(L) \cap \alpha.$$

Man beachte, dass die Notation mit der Abbildung $c_1 : \text{Pic}(S) \longrightarrow A(S)$ kompatibel ist in dem Sinne, dass $c_1(L) \cap [S] = c_1(L|_S)$.

Wir stellen jetzt einige Eigenschaften dieser Definition zusammen.

Satz 2.7. *Sei Y ein Schema von endlichem Typ über einem Körper und L ein Geradenbündel auf Y .*

i) (Kommutativität) *Ist M ein weiteres Geradenbündel und α ein n -Zykel auf Y , so gilt die Gleichheit*

$$c_1(L) \cap (c_1(M) \cap \alpha) = c_1(M) \cap (c_1(L) \cap \alpha)$$

von Elementen von $A_{n-2}(Y)$.

ii) (Verträglichkeit mit Addition und Inversenbildung) *Ist M ein weiteres Geradenbündel und α ein n -Zykel auf Y , dann gilt*

$$c_1(L \otimes M) \cap \alpha = c_1(L) \cap \alpha + c_1(M) \cap \alpha$$

und

$$c_1(L^{-1}) \cap \alpha = -(c_1(L) \cap \alpha).$$

iii) (Projektionsformel) *Ist $f : X \longrightarrow Y$ ein eigentlicher Morphismus von Schemata und α ein n -Zykel auf X , so gilt*

$$f_*(c_1(f^*L) \cap \alpha) = c_1(L) \cap f_*(\alpha).$$

Beweis. Der Beweis lässt sich beispielsweise durch eine Rückführung auf die Definition und Eigenschaften des Schnitts eines Cartier-Divisors mit einem n -Zykel mittels Pseudo-Divisoren führen, da jedes Geradenbündel auf Y einen Pseudo-Divisor auf Y bestimmt. Details finden sich in [Ful98, 2.3 und Prop. 2.5]. \square

Wir kommen nun zu einem zweiten Zugang zur Schnitttheorie. Im Beweis des Hauptresultats werden wir ein Theorem von Kleiman aus seinem Artikel „Toward a numerical theory of ampleness“ ([Kle66]) anwenden. Dazu leisten wir jetzt etwas Vorarbeit. Für ähnliche Herangehensweisen siehe [Kle66], [Vak13, Kapitel 20] und [dFEM13, Kapitel 1].

Definition 2.8. Sei Y ein eigentliches Schema über einem Körper K und \mathcal{F} eine kohärente Garbe auf Y . Es ist Y endlich-dimensional und $H^i(Y, \mathcal{F})$ ein endlich-dimensionaler K -Vektorraum für alle $i \in \mathbb{N}_0$ (dies folgt aus [Gro61b, III (3.2.1)]). Die **Euler-Poincaré-Charakteristik** von \mathcal{F} ist definiert durch

$$\chi(\mathcal{F}) := \sum_{i=0}^{\dim Y} (-1)^i \dim_K(H^i(Y, \mathcal{F})).$$

Definition 2.9. Sei Y ein eigentliches Schema über einem Körper K und seien L_1, \dots, L_n Geradenbündel auf Y . Weiterhin sei \mathcal{F} eine kohärente Garbe auf Y mit $\dim(\text{Supp}(\mathcal{F})) \leq n$. Die **Schnittzahl** $(L_1 \cdot \dots \cdot L_n \cdot \mathcal{F})$ von L_1, \dots, L_n mit \mathcal{F} ist definiert durch

$$(L_1 \cdot \dots \cdot L_n \cdot \mathcal{F}) := \sum_{J \subseteq \{1, \dots, n\}} (-1)^{|J|} \chi(\mathcal{F} \otimes (\otimes_{j \in J} L_j^{-1})).$$

Bemerkung 2.10. Sind die Voraussetzungen für ihre Existenz erfüllt, so stimmt diese Definition der Schnittzahl mit der aus Kleimans Artikel, gegeben in [Kle66, I §2 Def. 1], überein (dies lässt sich aus [dFEM13, 1.12] ableiten).

Wie lässt sich diese Schnittzahl nun in Verbindung zur oben entwickelten Theorie bringen? Ist unter obigen Voraussetzungen $i : S \hookrightarrow Y$ ein abgeschlossenes Unterschema der Dimension $\dim S \leq n$, so ist $i_*\mathcal{O}_S$ eine kohärente Garbe mit $\dim S = \dim(\text{Supp}(i_*\mathcal{O}_S)) \leq \dim Y$, und man setzt $(\mathcal{L}_1 \cdot \dots \cdot \mathcal{L}_n \cdot S) := (\mathcal{L}_1 \cdot \dots \cdot \mathcal{L}_n \cdot i_*\mathcal{O}_S)$. Ist S integer, so entspricht $(\mathcal{L}_1 \cdot \dots \cdot \mathcal{L}_n \cdot S)$ gerade $\deg_{Y/K}(c_1(\mathcal{L}_1) \cap \dots \cap c_1(\mathcal{L}_n) \cap [S])$.

Wir definieren abschließend noch zwei Nichtnegativitätseigenschaften von Geradenbündeln.

Definition 2.11. Sei Y ein eigentliches Schema über $\text{Spec } K$, wobei K ein Körper sei, und L ein Geradenbündel auf Y . Dann heißt L **numerisch effektiv** oder **nef**, falls $\deg_{Y/K}(c_1(L) \cap [C]) \geq 0$ für alle Kurven C in Y , d.h. für alle abgeschlossenen integren 1-dimensionalen Unterschemata von Y , ist.

Definition 2.12. Sei Γ eine eigentliche und normale (also reguläre und projektive) Kurve über $\text{Spec } K$, wobei K ein Körper sei. Sei Y ein Schema, das projektiv und flach über Γ ist. Ein Geradenbündel L auf Y heißt **relativ semipositiv** (bzgl. Γ), wenn L nichtnegativen Grad auf jeder Kurve in den speziellen Fasern von Y über Γ hat, d.h., wenn alle durch Einschränkung von L auf die speziellen Fasern erhaltenen Geradenbündel nef sind. Mit anderen Worten, ist $Y_0 = Y \times_{\Gamma} \text{Spec } k$ eine spezielle Faser und C ein abgeschlossenes integrires 1-dimensionales Unterschema von Y_0 , so muss $\deg_{Y_0/k}(c_1(L|_{Y_0}) \cap [C]) \geq 0$ gelten. Der Grad ist hier definiert, da Projektivität stabil unter Basiswechsel ist.

2.4 Horizontale Divisoren

Im folgenden Abschnitt führen wir einen speziellen Typ von Cartier-Divisoren ein. Diese sogenannten horizontalen Divisoren sind relativ zu einem gewissen Morphismus von Schemata gegeben und werden im nächsten Kapitel bei der uns interessierenden Norm eines Geradenbündels eine wichtige Rolle spielen. Informationen zu (effektiven) horizontalen Divisoren finden sich auch in [Sta13, Sektion 056P], [KM85, (1.1)] und [Ait96, 2 2.].

Definition 2.13. Sei Y ein noethersches Schema und $f : X \rightarrow Y$ ein projektiver und flacher Morphismus von Schemata von relativer Dimension 1. Ein **effektiv horizontaler Divisor bzgl. f** ist definiert als ein nichttrivialer effektiver Cartier-Divisor auf X , der als Schema flach über Y ist.

Ein **horizontaler Divisor bzgl. f** ist ein Tripel (D, D_1, D_2) , bei dem D ein Cartier-Divisor auf X ist, D_1 und D_2 effektiv horizontale Divisoren bzgl. f sind und $D = D_1 - D_2$ gilt. Wir schreiben oft kurz D für das Tripel (D, D_1, D_2) .

Der **Träger** eines horizontalen Divisors (D, D_1, D_2) , bezeichnet mit $\text{Supp}(D)$, ist definiert als die Vereinigung von D_1 und D_2 (als Menge).

Wie man sehen wird, ist auch dieser Begriff verträglich mit Basiswechsel.

Satz 2.14. Es sei das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & D & \\ & \downarrow & \\ X & \longleftarrow & X' \\ & \downarrow & \downarrow \\ Y & \longleftarrow & Y' \end{array}$$

von Schemata gegeben, in dem das Quadrat unten kartesisch sei. Dabei sei D ein effektiv horizontaler Divisor bzgl. $X \rightarrow Y$. Außerdem seien Y und Y' noethersch.

Dann existiert der Pullback von D bzgl. $X' \rightarrow X$ (der dem X' -Unterschema $D' := D \times_Y Y' = D \times_X X'$ entspricht [Gro67, IV (21.4.7)]).

Beweis. Wir dürfen ohne Einschränkung $Y = \text{Spec } R$ voraussetzen. Weil D ein effektiver Divisor auf X ist, existiert eine affine, offene Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von X mit $U_i = \text{Spec } A_i$, so dass $U_i \cap D = \text{Spec}(A_i/f_i)$ ist, wobei $f_i \in A_i$ ein Nicht-Nullteiler ist (diese lokale Charakterisierung eines effektiven Cartier-Divisors findet sich z.B. in [Sta13, Lemma 01WS]). Dabei ist A_i/f_i eine flache R -Algebra. Wir haben weiterhin die kanonische exakte Folge von R -Algebren

$$0 \longrightarrow A_i \xrightarrow{\cdot f_i} A_i \longrightarrow A_i/f_i \longrightarrow 0.$$

Weil A_i/f_i eine flache R -Algebra ist, bleibt diese Folge exakt nach Tensorieren mit jedem R -Modul, insbesondere mit jeder R -Algebra R' , und $f_i \otimes 1$ ist dementsprechend Nicht-Nullteiler von $A_i \otimes_R R'$. Dies genügt zusammen mit der oben genannten lokalen Beschreibung eines effektiven Cartier-Divisors, um festzustellen, dass das Schema D' ein effektiver Cartier-Divisor auf X' ist. \square

Tatsächlich sind effektiv horizontale Divisoren nicht nur projektiv, sondern sogar endlich über dem Basisschema:

Lemma 2.15. *Sei Y ein noethersches Schema. Ist $f : X \rightarrow Y$ ein projektiver und flacher Morphismus von Schemata von relativer Dimension 1 und D ein effektiv horizontaler Divisor bzgl. f , so ist der Morphismus von Schemata $D \rightarrow Y$ endlich.*

Beweis. Nach einem Korollar aus Zariskis Haupttheorem ([GW10, 12.89]) genügt es zu zeigen, dass $D \rightarrow Y$ quasi-endlich ist, da nach den Voraussetzungen $D \rightarrow Y$ projektiv ist. Weil f flach von relativer Dimension 1 ist und der Pullback von D auf jede Faser wieder ein effektiver Divisor ist (vgl. Satz 2.14), ist dies der Fall. \square

Bemerkung 2.16. In der Situation von 2.14 ist z.B. bei zusammenhängendem Y der Cartier-Divisor D' wieder ein effektiv horizontaler Divisor (bzgl. $X' \rightarrow Y'$): Da $h' : D' \rightarrow Y'$ flach nach Basiswechsel ist, verbleibt nur zu zeigen, dass D' nichttrivial ist. Nach Lemma 2.15 ist $h : D \rightarrow Y$ endlich lokal frei. Da D nichttrivial ist, hat h Rang $d > 0$, womit nach Lemma 2.4 auch der Basiswechsel h' Rang $d > 0$ hat, so dass letztendlich auch D' nichttrivial ist.

Das folgende Lemma werden wir in den beiden nächsten Kapiteln anwenden.

Lemma 2.17. *Sei das Schema X projektiv und flach von relativer Dimension 1 über dem noetherschen und separierten Schema Y . Sei L ein Geradenbündel auf X , $y \in Y$ ein abgeschlossener Punkt und Z eine abgeschlossene Teilmenge von X , die die Faser $X \times_Y \text{Spec}(\kappa(y))$ in nur endlich vielen Punkten schneidet. Dann existieren ein offenes Unterschema U von Y , das y enthält, und ein horizontaler Divisor D bzgl. $X_U := X \times_Y U \rightarrow U$, dessen Träger disjunkt von der Einschränkung von Z auf X_U ist, so dass $L|_{X_U} \cong \mathcal{O}_{X_U}(D)$ gilt.*

Beweis. Siehe [Ait96, 2 (2.4)]

□

3 Die Norm eines Geradenbündels

In diesem Kapitel werden wir Definitionen und Eigenschaften zur Norm eines Geradenbündels zusammentragen. Für uns relevant wird die Norm durch ihre enge Verbindung zur Deligne-Paarung, die Gegenstand des nächsten Kapitels sein wird. Wir werden diese Beziehung entscheidend im Beweis unseres Hauptresultats, Theorem 5.1, ausnutzen.

Im ersten Teil des Kapitels wird die Norm eines Geradenbündels im Sinne von Aitken präsentiert. Der Übersichtlichkeit halber ist dieses Material allerdings komprimiert und - im Gegensatz zur Darlegung in [Ait96] - gebündelt dargestellt, so dass Nachschlagen entfällt und die Definition schneller ersichtlich sein sollte.

Danach wird die Norm eines Geradenbündels im Sinne von Grothendieck (siehe [Gro61a, II 6.5] oder [GW10, 12.25]) definiert und anschließend für uns geeignet erweitert. Zur Unterscheidung mit der Aitken-Norm N wird sie in der vorliegenden Arbeit mit \hat{N} bezeichnet. Als Abschluss des Kapitels wird jedoch gezeigt werden, dass in der uns vorliegenden Situation beide Definitionen kanonisch isomorphe Geradenbündel liefern.

3.1 Die Norm eines Geradenbündels im Sinne Aitkens

In Anlehnung an Aitken ([Ait96]) werden wir die Norm eines Geradenbündels zunächst in einer Situation definieren, die wir später nicht betrachten werden. Diese Definition wird aber für die Konstruktion unter den für uns relevanten Voraussetzungen vonnöten sein.

3.1.1 Die Norm eines Geradenbündels über einem Körper als Basisschema

Es seien ein Körper K und ein Schema Y , das endlich über $\text{Spec} K$ ist, gegeben. Damit ist $Y = \text{Spec} A$, wobei A eine endliche K -Algebra ist. Weiterhin sei L ein Geradenbündel auf Y . Da Y affin ist, ist die Garbe L assoziiert zu einem K -Vektorraum V_L , der ein lokal freier A -Modul vom Rang 1 ist. Weil A als endliche K -Algebra artinsch ist, besteht Y aus einer endlichen Anzahl abgeschlossener Punkte, und V_L ist ein freier A -Modul vom Rang 1.

Definition 3.1. In der obigen Situation ist die **Norm** von L , bezeichnet mit $N_{Y/\text{Spec}K}(L)$, definiert durch

$$N_{Y/\text{Spec}K}(L) := \det(V_L) \otimes_K \det(A)^{-1}.$$

Dabei ist für einen endlich-dimensionalen K -Vektorraum V die Determinante $\det(V) = \bigwedge^{\dim V} V$.

Für jedes Element von V_L (also für jeden globalen Schnitt von L) definieren wir die **Norm** $N_{Y/\text{Spec}K}(l)$ wie folgt: Ist a_1, \dots, a_n eine K -Basis von A , so ist $a_1 \wedge \dots \wedge a_n$ ein nichttriviales Element von $\det(A)$ und $a_1 l \wedge \dots \wedge a_n l$ ist ein Element von $\det(V_L)$. Dann setzen wir

$$N_{Y/\text{Spec}K}(l) := (a_1 l \wedge \dots \wedge a_n l) \otimes (a_1 \wedge \dots \wedge a_n)^{-1}.$$

Diese Festlegung ist wegen der grundlegenden Eigenschaften des äußeren Produkts unabhängig von der Wahl der Basis a_1, \dots, a_n , so dass die Norm wohldefiniert ist.

Es sei wie gehabt K ein Körper. Außerdem sei X ein 1-dimensionales Schema, das projektiv über $\text{Spec}K$ ist. Sei zudem M ein Geradenbündel auf X . Ist in dieser Situation D ein nichttrivialer effektiver Cartier-Divisor auf X , so ist das zugehörige Schema D endlich über $\text{Spec}K$ (wende [GW10, 5.17] in Verbindung mit [GW10, 5.20] an). Daher ergibt die folgende Definition Sinn:

Definition 3.2. In der gerade genannten Situation bezeichnen wir den 1-dimensionalen K -Vektorraum $N_{D/\text{Spec}K}(M|_D)$ mit $N_{D/\text{Spec}K}(M)$. Ist m ein regulärer meromorpher Schnitt von M , der auf ganz D definiert ist, so setzen wir $N_{D/\text{Spec}K}(m) := N_{D/\text{Spec}K}(m|_D)$.

Wir gehen jetzt auf allgemeine Cartier-Divisoren über.

Satz/Definition 3.3. Sei X ein 1-dimensionales Schema, das projektiv über $\text{Spec}K$ ist, wobei K ein Körper sei. Außerdem sei D ein Cartier-Divisor auf X und M ein Geradenbündel auf X . Der Cartier-Divisor D lässt sich als $D_1 - D_2$ schreiben, wobei D_1 und D_2 nichttriviale effektive Cartier-Divisoren sind. In dieser Situation ist die **Norm** von M (bzgl. D), geschrieben $N_{D/\text{Spec}K}(M)$, definiert durch

$$N_{D/\text{Spec}K}(M) := N_{D_1/\text{Spec}K}(M) \otimes N_{D_2/\text{Spec}K}(M)^{-1}.$$

Diese Festlegung ist bis auf kanonischen Isomorphismus unabhängig von der Wahl von D_1 und D_2 . Daher ist die Norm von M bzgl. D wohldefiniert. Außerdem stimmt die Definition (bis auf kanonischen Isomorphismus) mit der aus 3.2 überein für den Fall, dass D effektiv und nichttrivial ist.

Ist m ein regulärer meromorpher Schnitt von M , der definiert und nichtverschwindend auf dem Träger von D ist, so ist die **Norm** von m (bzgl. D) definiert durch

$$N_{D/\text{Spec}K}(m) := N_{D_1/\text{Spec}K}(m) \otimes N_{D_2/\text{Spec}K}(m)^{-1},$$

wobei D_1 und D_2 nun so gewählt sein müssen, dass m definiert und nichtverschwindend auf diesen Divisoren ist.

Sei D'_1, D'_2 ein weiteres Paar von effektiven, nichttrivialen Cartier-Divisoren mit $D = D'_1 - D'_2$ und so, dass m definiert und nichtverschwindend auf D'_1 und D'_2 ist. Dann wird unter dem kanonischen Isomorphismus

$$N_{D_1/\text{Spec}K}(M) \otimes N_{D_2/\text{Spec}K}(M)^{-1} \xrightarrow{\sim} N_{D'_1/\text{Spec}K}(M) \otimes N_{D'_2/\text{Spec}K}(M)^{-1}$$

das Element $N_{D_1/\text{Spec}K}(m) \otimes N_{D_2/\text{Spec}K}(m)^{-1}$ auf $N_{D'_1/\text{Spec}K}(m) \otimes N_{D'_2/\text{Spec}K}(m)^{-1}$ abgebildet. Daher ist $N_{D/\text{Spec}K}(m)$ wohldefiniert. Im Fall, dass D selbst schon effektiv und nichttrivial ist, stimmt diese Festlegung wegen der Verträglichkeit mit dem oben genannten kanonischen Isomorphismus überein mit der Definition von $N_{D/\text{Spec}K}(m)$ aus 3.2.

Beweis. Siehe [Ait96, 1 (5.3)], [Ait96, 1 (5.4)] und [Ait96, 1 (6.1)]. □

3.1.2 Die Norm eines Geradenbündels über einem integren Basisschema

Wir gehen jetzt auf die Situation über, in der wir uns später beim Beweis des Hauptresultats befinden werden. Auch für diese neue Situation definieren wir - unter Verwendung der bisherigen Normbegriffe - die Norm eines Geradenbündels.

Satz/Definition 3.4. *Sei das Schema X projektiv und flach von relativer Dimension 1 über dem integren, separierten und noetherschen Schema Y . Es bezeichne $K(Y)$ den Funktionenkörper von Y . Wir erhalten das kartesische Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec} K(Y) & \longleftarrow & X_{K(Y)} := X \times_Y \text{Spec} K(Y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \longleftarrow & X, \end{array}$$

in dem der Morphismus $X_{K(Y)} \rightarrow \text{Spec} K(Y)$ die Anforderungen an die Situation aus Satz/Definition 3.3 erfüllt. Sei weiterhin D ein horizontaler Divisor bzgl. $X \rightarrow Y$ und M ein Geradenbündel auf X . Mit $D_{K(Y)}$ sei der Pullback von D auf $X_{K(Y)}$ bezeichnet (vgl. Bemerkung 2.16 und beachte die Verträglichkeit des Pullbacks von Cartier-Divisoren mit Addition und Inversenbildung ([Gro67, IV (21.4.2)])). Die konstante Garbe zum 1-dimensionalen $K(Y)$ -Vektorraum $N_{D_{K(Y)}/\text{Spec}K(Y)}(M|_{X_{K(Y)}})$, der definiert ist wie in 3.3, werde mit C notiert. Sie ist ein \mathcal{O}_Y -Modul, da Y integer ist.

Es existiert eine offene Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von Y , so dass es für jedes $i \in I$ einen regulären meromorphen Schnitt m_{U_i} von $M|_{X_{U_i}}$ gibt, der definiert und nichtverschwindend auf $\text{Supp}(D_{U_i})$ ist. Dabei sei wie üblich $X_{U_i} := X \times_Y U_i$ und $D_{U_i} := D|_{X_{U_i}}$.

Wir definieren in dieser Situation die **Norm des regulären meromorphen Schnitts** m_{U_i} , bezeichnet mit $N_{D_{U_i}/U_i}(m_{U_i})$, als den globalen Schnitt der Garbe $\mathcal{C}|_{U_i}$, der zum nichttrivialen Element $N_{D_{K(Y)}/\text{Spec}K(Y)}(m_{U_i|X_{K(Y)}})$ des Vektorraums $N_{D_{K(Y)}/\text{Spec}K(Y)}(M|_{X_{K(Y)}})$ assoziiert ist (vgl. Satz/Definition 3.3).

Weiterhin definieren wir die **Norm** von $M|_{X_{U_i}}$ über U_i (bzgl. D_{U_i}), bezeichnet mit $N_{D_{U_i}/U_i}(M|_{X_{U_i}})$, als den \mathcal{O}_{U_i} -Untermodul von $\mathcal{C}|_{U_i}$ erzeugt von $N_{D_{U_i}/U_i}(m_{U_i|X_{U_i}})$. Diese Festlegung ist unabhängig von der Wahl von m_{U_i} . Wir definieren die **Norm** von M über Y (bzgl. D), bezeichnet mit $N_{D/Y}(M)$, als jenes Geradenbündel auf Y , das $N_{D/Y}(M)|_{U_i} = N_{D_{U_i}/U_i}(M|_{X_{U_i}})$ für alle $i \in I$ erfüllt. Diese Definition ist nicht abhängig von der Wahl der Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$. Erfüllen das Geradenbündel M und der horizontale Divisor D schon die Voraussetzung auf X , wie sie auf X_{U_i} für $M|_{X_{U_i}}$ und D_{U_i} gilt (d.h., es existiert ein regulärer meromorpher Schnitt m von M auf X , der definiert und nichtverschwindend auf $\text{Supp}(D)$ ist), so stimmen die beiden gegebenen Definitionen der Norm überein.

Beweis. Die gewünschte Überdeckung existiert nach Lemma 2.17. Weiterhin ist nach [Ait96, 2 (3.5), 2.] und [Ait96, 2 (3.6.1)] die Definition von $N_{D_{U_i}/U_i}(M|_{X_{U_i}})$ unabhängig von der Wahl von m_{U_i} . Nach [Ait96, 2 (3.5), 1.] und [Ait96, 2 (3.6.1)] impliziert die Existenz der Familie $(N_{D_{U_i}/U_i}(M|_{X_{U_i}}))_{i \in I}$ die Existenz von $N_{D/Y}(M)$. Die Definition von $N_{D/Y}(M)$ ist unabhängig von der Wahl der Überdeckung nach [Ait96, 2 (3.5), 2.] und [Ait96, 2 (3.6.1)]. Auch der letzte Teil der Behauptung folgt aus diesen beiden Referenzen. \square

Wir präsentieren im folgenden Satz noch zwei Eigenschaften der Norm, die wir im letzten Abschnitt dieses Kapitels anwenden werden, um die Äquivalenz der gerade gegebenen Definition zur Normdefinition von Grothendieck zu zeigen.

Satz 3.5. *Sei das Schema X projektiv und flach von relativer Dimension 1 über dem integren, separierten und noetherschen Schema Y . Es bezeichne $K = K(Y)$ den Funktionenkörper von Y . Sei (D, D_1, D_2) ein horizontaler Divisor bzgl. $X \rightarrow Y$ und M ein Geradenbündel auf X .*

i) (Verträglichkeit mit offenen Mengen) Ist U ein offenes Unterschema von Y , so gibt es einen kanonischen Isomorphismus

$$N_{D/Y}(M)|_U \xrightarrow{\sim} N_{D_U/U}(M|_{X_U}).$$

ii) (*Trivialitätseigenschaft*) Angenommen, es gibt einen regulären meromorphen Schnitt m von M , der definiert und nichtverschwindend auf jedem Punkt des Trägers von D ist. Dann ist $N_{D/Y}(M)$ ein triviales Geradenbündel auf Y mit nirgends verschwindendem globalen Schnitt $N_{D/Y}(m)$.

Ist außerdem f ein regulärer meromorpher Schnitt von \mathcal{O}_X , der definiert und nichtverschwindend auf jedem Punkt des Trägers von D ist, so ist $N_{D/Y}(fm)$ ein weiterer nirgends verschwindender globaler Schnitt von $N_{D/Y}(M)$ und es gilt

$$N_{D/Y}(fm) = \text{Norm}_{\Gamma(D_{1K}, \mathcal{O}_{D_{1K}})/K}(f|_{D_{1K}}) \text{Norm}_{\Gamma(D_{2K}, \mathcal{O}_{D_{2K}})/K}(f|_{D_{2K}})^{-1} N_{D/Y}(m).$$

Beweis. Siehe [Ait96, 2 (3.8), 2. und 3.]. □

Bemerkung 3.6. Auf den ersten Blick mag es so scheinen, als unterscheidet sich die in 3.5ii) gegebene Formel von der aus [Ait96, 2 (3.8), 3.]. Jedoch führt die sorgfältige Rückverfolgung der Definition des dort angegebenen Terms auf den in Satz 3.5ii) genannten Ausdruck.

3.2 Die Norm eines Geradenbündels nach Grothendieck

Wie angekündigt werden wir nun noch eine zweite Definition der Norm eines Geradenbündels geben. Diese findet sich (nur für effektiv horizontale Divisoren, nicht für horizontale Divisoren) ursprünglich in [Gro61a, II 6.5], weswegen wir sie hier Grothendieck-Norm nennen werden. Eine weitere Referenz ist [GW10, 12.25].

Definition 3.7. Sei $f : D \rightarrow Y$ ein endlich lokal freier Morphismus von Schemata von positivem Rang.

Zunächst definieren wir eine Normabbildung $\hat{N}_{f_*\mathcal{O}_D/\mathcal{O}_Y} : f_*\mathcal{O}_D \rightarrow \mathcal{O}_Y$ wie folgt: Für eine offene Menge $U \subset Y$ und $u \in \Gamma(U, f_*\mathcal{O}_D)$ sei $m_u : \Gamma(U, f_*\mathcal{O}_D) \rightarrow \Gamma(U, f_*\mathcal{O}_D)$ die Multiplikation mit u . Da f endlich lokal frei ist, ist $f_*\mathcal{O}_D$ ein endlich lokal freier \mathcal{O}_Y -Modul. Somit kann man $\hat{N}_{f_*\mathcal{O}_D/\mathcal{O}_Y}(u) := \det(m_u)$ setzen ([Gro61a, II (6.4.8)]). Auf diese Weise erhält man den multiplikativen Normhomomorphismus $\hat{N}_{f_*\mathcal{O}_D/\mathcal{O}_Y} : f_*\mathcal{O}_D \rightarrow \mathcal{O}_Y$, der einen Homomorphismus $(f_*\mathcal{O}_D)^\times \rightarrow \mathcal{O}_Y^\times$ von abelschen Garben induziert.

Es sei jetzt L ein Geradenbündel auf dem Schema (D, \mathcal{O}_D) . Sei weiterhin Σ die Menge der Paare (U_i, h_i) , die die folgenden Eigenschaften besitzen:

- U_i ist eine offene Teilmenge von Y
- h_i ist ein Isomorphismus $(f_*L)|_{U_i} \xrightarrow{\sim} (f_*\mathcal{O}_D)|_{U_i}$ von $(f_*\mathcal{O}_D)|_{U_i}$ -Moduln

Da f_*L ein Geradenbündel auf $(Y, f_*\mathcal{O}_D)$ ist ([GW10, 12.13]), bildet die Familie $(U_i)_{i \in I}$ eine Überdeckung von Y . Für $i, j \in I$ setzen wir $g_{ij} := h_{i|U_i \cap U_j} \circ (h_{j|U_i \cap U_j})^{-1}$, was ein Automorphismus von $(f_*\mathcal{O}_D)|_{U_i \cap U_j}$ ist. Dieser identifiziert sich kanonisch mit einem Schnitt von $(f_*\mathcal{O}_D)^\times$ über $U_i \cap U_j$, und $(g_{ij})_{i,j \in I}$ ist ein 1-Kozykel der Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ mit Werten in $(f_*\mathcal{O}_D)^\times$ ([Gro60, 0 (5.4.7)]). Wenden wir hierauf den obigen Homomorphismus an, erhalten wir mit $(\hat{N}_{f_*\mathcal{O}_D/\mathcal{O}_Y}(g_{ij}))_{i,j \in I}$ einen 1-Kozykel der Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ mit Werten in \mathcal{O}_Y^\times . Mittels Verkleben ergibt sich aus diesem wiederum ein korrespondierendes, bis auf kanonische Isomorphie eindeutig bestimmtes Geradenbündel auf dem Schema (Y, \mathcal{O}_Y) ([Gro60, 0 (5.4.7), 0 (3.3.1)]). Dieses Geradenbündel nennen wir die **Grothendieck-Norm** von L und bezeichnen es mit $\hat{N}_{D/Y}(L)$.

Bemerkung 3.8. Ist in der Situation von Definition 3.7 Σ' eine Teilmenge von Σ mit der Eigenschaft, dass die korrespondierenden U_i noch eine Überdeckung von Y bilden, so führt die zu obiger analoge Konstruktion für Σ' zu einem zu $\hat{N}_{D/Y}(L)$ kanonisch isomorphen Geradenbündel auf dem Schema (Y, \mathcal{O}_Y) . Daher kann eine derartige Teilmenge Σ' ebenfalls zur Definition von $\hat{N}_{D/Y}(L)$ herangezogen werden.

Die jetzt folgende Basiswechseleigenschaft der Grothendieck-Norm werden wir später beim Beweis der Basiswechseleigenschaft der Deligne-Paarung verwenden.

Satz 3.9. *Die Bildung der Grothendieck-Norm ist verträglich mit Basiswechsel in folgendem Sinn: Sei $D \rightarrow Y$ ein endlich lokal freier Morphismus von Schemata von positivem Rang und L ein Geradenbündel auf D . Sei $g : Y' \rightarrow Y$ ein weiterer Morphismus von Schemata, so dass man das kartesische Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} D & \xleftarrow{g'} & D' \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \xleftarrow{g} & Y' \end{array}$$

erhält. Dann gilt

$$g^*(\hat{N}_{D/Y}(L)) = \hat{N}_{D'/Y'}(g'^*L),$$

d.h., es existiert ein kanonischer Isomorphismus zwischen diesen Geradenbündeln.

Beweis. Siehe [Gro61a, II (6.5.8)] □

Nun erfolgt die Anpassung der Definition und des Basiswechselresultats an unsere Situation.

Definition 3.10. *Sei das Schema X projektiv und flach von relativer Dimension 1 über dem zusammenhängenden und noetherschen Schema Y . Sei weiterhin D ein effektiv horizontaler Divisor bzgl. $X \rightarrow Y$. Aus Lemma 2.15 ergibt sich,*

dass D endlich lokal frei über Y ist. Der Rang von $D \rightarrow Y$ ist positiv, da D nach Definition nichttrivial ist. Somit ist für jedes Geradenbündel M auf D die Grothendieck-Norm $\hat{N}_{D/Y}(M)$ definiert. Ist L ein Geradenbündel auf X , so können wir insbesondere $\hat{N}_{D/Y}(L) := \hat{N}_{D/Y}(L|_D)$ setzen und damit die **Grothendieck-Norm von L über Y bzgl. D** definieren.

Ist (E, E_1, E_2) ein horizontaler Divisor bzgl. $X \rightarrow Y$, so definieren wir die **Grothendieck-Norm von L über Y bzgl. E** als

$$\hat{N}_{E/Y}(L) := \hat{N}_{E_1/Y}(L) \otimes \hat{N}_{E_2/Y}(L)^{-1}.$$

Bemerkung 3.11. In der Situation von 3.10 ist die Festlegung $\hat{N}_{D/Y}(L) := \hat{N}_{D/Y}(L|_D)$ mit der Aussage über die Verträglichkeit der Grothendieck-Norm mit Basiswechsel kompatibel: Ist

$$\begin{array}{ccccc} Y' & \longleftarrow & X' & \longleftarrow & D' \\ \downarrow g & & \downarrow g' & & \downarrow g'' \\ Y & \longleftarrow & X & \longleftarrow & D \end{array}$$

das entsprechende kartesische Diagramm, so gilt

$$\begin{aligned} g^* \hat{N}_{D/Y}(L) &\stackrel{\text{def}}{=} g^* \hat{N}_{D/Y}(L|_D) \stackrel{3.9}{=} \hat{N}_{D'/Y'}(g''^*(L|_D)) \\ &= \hat{N}_{D'/Y'}((g'^*L)|_{D'}) \stackrel{\text{def}}{=} \hat{N}_{D'/Y'}(g'^*L). \end{aligned}$$

Dabei ist D' ein effektiv horizontaler Divisor bzgl. $X' \rightarrow Y'$ nach Bemerkung 2.16.

Bemerkung 3.12. Es ist in der Situation von 3.10 ebenfalls die Bildung der Grothendieck-Norm von L bzgl. eines horizontalen Divisors (E, E_1, E_2) mit Basiswechsel verträglich. Ist nämlich

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{g'} & X' \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \xleftarrow{g} & Y' \end{array}$$

das entsprechende kartesische Diagramm und E horizontaler Divisor bzgl. $X \rightarrow Y$, so gilt zunächst nach Definition

$$g^* \hat{N}_{E/Y}(L) = g^*(\hat{N}_{E_1/Y}(L) \otimes \hat{N}_{E_2/Y}(L)^{-1}).$$

Wegen der Verträglichkeit des Pullbacks von Geradenbündeln mit Tensorieren sowie Inversenbildung und Satz 3.9 in Verbindung mit Bemerkung 3.11 entspricht dieser Ausdruck gerade $\hat{N}_{E'_1/Y'}(g'^*L) \otimes \hat{N}_{E'_2/Y'}(g'^*L)^{-1}$. Dies wiederum ist aber nach Definition und wegen der Verträglichkeit des Pullbacks von Cartier-Divisoren mit Addition und Inversenbildung ([Gro67, IV (21.4.2)]) schon $\hat{N}_{E'/Y'}(g'^*L)$.

3.3 Zur Äquivalenz der Normdefinitionen

Der folgende Satz liefert einen kanonischen Isomorphismus zwischen Norm und Grothendieck-Norm eines Geradenbündels in der für uns relevanten Situation. Auf Basis dieses Resultats können wir also zwischen den Definitionen wechseln und ihre jeweiligen Vorteile nutzen.

Satz 3.13. *Sei das Schema X projektiv und flach von relativer Dimension 1 über dem integren, separierten und noetherschen Schema Y . Mit $K = K(Y)$ sei der Funktionenkörper von Y bezeichnet. Für ein Geradenbündel M auf X und einen horizontalen Divisor (D, D_1, D_2) bzgl. $X \rightarrow Y$ gilt $N_{D/Y}(M) = \check{N}_{D/Y}(M)$, d.h., die beiden Normdefinitionen stimmen in der gegebenen Situation überein.*

Beweis. Zum Beweis werden wir Rahmen beider Geradenbündel miteinander identifizieren. Im ersten Schritt suchen wir uns dazu eine geeignete Überdeckung von Y .

Wie in der Definition der Norm nach Aitken in 3.4 existieren eine Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von Y und reguläre meromorphe Schnitte m_i von $M|_{X_{U_i}}$, so dass m_i definiert und nichtverschwindend auf dem Träger von D_{U_i} ist (mit der üblichen Notation $D_{U_i} := D|_{X_{U_i}}$, $X_{U_i} := X \times_Y U_i$), also mit der Eigenschaft, dass m_i ein Rahmen von $M|_{D_{1U_i}}$ und $M|_{D_{2U_i}}$ ist. Diese Überdeckung kann ohne Einschränkung der Allgemeinheit affin gewählt werden.

Da D_1 endlich lokal frei über Y ist (D_1 ist endlich und flach über dem noetherschen Schema Y), gibt es des Weiteren eine Überdeckung $(V_j)_{j \in J}$ von Y mit $V_j = \text{Spec } R_j$ und $D_{1V_j} = \text{Spec } A_j$, so dass A_j eine endliche, freie R_j -Algebra ist.

Betrachtet man jetzt die Überdeckung $(U_i \cap V_j)_{(i,j) \in I \times J}$ von Y , so erhält man (durch Pullback) reguläre meromorphe Schnitte m_{ij} des Geradenbündels $M|_{X_{U_i \cap V_j}}$, wobei m_{ij} definiert und nichtverschwindend auf dem Träger von $D_{U_i \cap V_j}$ ist. Da Endlichkeit stabil unter Basiswechsel ist und die Eigenschaft eines Moduls, frei zu sein, unter Skalarerweiterung erhalten bleibt, hat man außerdem mit $U_i \cap V_j = \text{Spec } R_{ij}$, dass $D_{1U_i \cap V_j} = \text{Spec } A_{ij}$, wobei A_{ij} eine endliche, freie R_{ij} -Algebra ist.

Weiterhin gibt es, da D_2 endlich und flach über Y ist, eine Überdeckung $(W_l)_{l \in L}$ von Y mit $W_l = \text{Spec } T_l$, so dass D_{2W_l} ein offenes, affines Unterschema von D_2 ist, das zu einer endlichen, freien T_l -Algebra korrespondiert.

Betrachtet man die Überdeckung $((U_i \cap V_j) \cap W_l)_{(i,j,l) \in I \times J \times L}$, so stellt man mit einer Argumentation analog zu obiger fest, dass man ohne Einschränkung annehmen kann, dass die Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ insgesamt über die folgenden Eigenschaften verfügt:

- es existiert ein regulärer meromorpher Schnitt m_i von $M|_{X_{U_i}}$, so dass m_i definiert und nichtverschwindend auf dem Träger von D_{U_i} ist
- es ist $U_i = \text{Spec } R_i$ affin und $D_{1_{U_i}}$ und $D_{2_{U_i}}$ sind offene, affine Unterschemata von D_1 bzw. D_2 , die jeweils zu endlichen, freien R_i -Algebren korrespondieren

Aufgrund des ersten Punktes ist nach Konstruktion bzw. nach Satz 3.5i) und ii) $n_i := N_{D_{U_i}/U_i}(m_i)$ ein Rahmen von $N_{D/Y}(M)$ über U_i . Ist $X_{U_i \cap U_j} \neq \emptyset$ (für $i, j \in I$), so gilt auf $X_{U_i \cap U_j}$ die Gleichung $m_j = f_{ij}m_i$, wobei f_{ij} eine reguläre, auf dem Träger von $D_{U_i \cap U_j}$ definierte und nichtverschwindende, meromorphe Funktion auf $X_{U_i \cap U_j}$ ist. Nach Satz 3.5ii) gilt dann für die entsprechenden Rahmen auf $U_i \cap U_j$ die Gleichung

$$n_j = \text{Norm}_{\Gamma(D_{1_K}, \mathcal{O}_{D_{1_K}})/K}(f_{ij|_{D_{1_K}}}) \text{Norm}_{\Gamma(D_{2_K}, \mathcal{O}_{D_{2_K}})/K}(f_{ij|_{D_{2_K}}})^{-1} n_i.$$

Wir halten fest, dass die Schemata $U_i \cap U_j$ und $D_{1_{U_i \cap U_j}} = D_{1_{U_i}} \times_{U_i} (U_i \cap U_j)$ affin sind: Für $U_i \cap U_j$ gilt dies, da U_i und U_j nach der zweiten Eigenschaft der Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ affin sind und Y separiert ist. Für $D_{1_{U_i \cap U_j}}$ folgt dies aus der zweiten Eigenschaft der Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ und der Tatsache, dass das Faserprodukt affiner Schemata über einem affinen Schema wieder affin ist.

Aus der ersten Eigenschaft der Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ erhalten wir nach Definition kanonisch aus den Schnitten m_i hervorgehende Rahmen \hat{n}_{1_i} von $\hat{N}_{D_1/Y}(M)$ und Rahmen \hat{n}_{2_i} von $\hat{N}_{D_2/Y}(M)$ über U_i mit der Eigenschaft, dass

$$\hat{n}_{1_j} = \text{Norm}_{\Gamma(D_{1_{U_i \cap U_j}}, \mathcal{O}_{D_1})/\Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O}_Y)}(f_{ij|_{D_{1_{U_i \cap U_j}}}) \hat{n}_{1_i}$$

bzw.

$$\hat{n}_{2_j} = \text{Norm}_{\Gamma(D_{2_{U_i \cap U_j}}, \mathcal{O}_{D_2})/\Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O}_Y)}(f_{ij|_{D_{2_{U_i \cap U_j}}}) \hat{n}_{2_i}$$

auf $U_i \cap U_j$ für $i, j \in I$ gilt.

Eine kurze Erklärung, wieso die Rahmen \hat{n}_{1_i} (und analog \hat{n}_{2_i}) kanonisch aus den m_i hervorgehen: Die Wahl eines m_i entspricht der Wahl eines eindeutig bestimmten h_i aus der Definition 3.7 für ein i (dies ist zulässig nach Bemerkung 3.8; a priori könnte ein U_i mit verschiedenen $(h_{i_n})_{n \in N}$ zu einem Tupel kombiniert werden, so dass dieses Tupel ein Element von Σ wie in Definition 3.7 ergibt). Die m_i bestimmen die Funktionen $(f_{ij})_{i, j \in I}$, welche ihrerseits die Familie $(\text{Norm}_{\Gamma(D_{1_{U_i \cap U_j}}, \mathcal{O}_{D_1})/\Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O}_Y)}(f_{ij|_{D_{1_{U_i \cap U_j}}}))_{i, j \in I}$ festlegen. Diese wiederum liefert -

nach Konstruktion von $\hat{N}_{D_1/Y}(M)$ durch Verkleben, vergleiche Definition 3.7 bzw. [Gro60, 0 (5.4.7), 0 (3.3.1)] - für jedes $i \in I$ einen kanonischen Isomorphismus $\hat{N}_{D_1/Y}(M)|_{U_i} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{U_i}$ und somit also auch einen kanonischen Rahmen \hat{n}_{1_i} .

Damit erhalten wir insgesamt kanonisch aus den Schnitten m_i hervorgehende Rahmen $\hat{n}_i := \hat{n}_{1_i} \otimes \hat{n}_{2_i}^{-1}$ von $\hat{N}_{D_1/Y}(M) \otimes \hat{N}_{D_2/Y}(M)^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} \hat{N}_{D/Y}(M)$ über U_i mit der Eigenschaft, dass

$$\hat{n}_j = \frac{\text{Norm}_{\Gamma(D_{1_{U_i \cap U_j}}, \mathcal{O}_{D_1})/\Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O}_Y)}(f_{ij|D_{1_{U_i \cap U_j}})})}{\text{Norm}_{\Gamma(D_{2_{U_i \cap U_j}}, \mathcal{O}_{D_2})/\Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O}_Y)}(f_{ij|D_{2_{U_i \cap U_j}})}} \hat{n}_i$$

auf $U_i \cap U_j$ ist. Ziel ist es nun, durch Abbildung der Rahmen, also via $n_i \mapsto \hat{n}_i$, einen kanonischen Isomorphismus zwischen $N_{D/Y}(M)$ und $\hat{N}_{D/Y}(M)$ anzugeben. Die Rahmen sind über denselben Mengen definiert und wir weisen jetzt die Gleichheit der Übergangsfunktionen (Rahmenwechsel) nach, womit die Verträglichkeit mit Verfeinerungen der Überdeckung aus den gleichen Gründen folgt. Es ist also die Gleichung

$$\frac{\text{Norm}_{\Gamma(D_{1_K}, \mathcal{O}_{D_{1_K}})/K}(f_{ij|D_{1_K}})}{\text{Norm}_{\Gamma(D_{2_K}, \mathcal{O}_{D_{2_K}})/K}(f_{ij|D_{2_K}})}} = \frac{\text{Norm}_{\Gamma(D_{1_{U_i \cap U_j}}, \mathcal{O}_{D_1})/\Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O}_Y)}(f_{ij|D_{1_{U_i \cap U_j}})}}{\text{Norm}_{\Gamma(D_{2_{U_i \cap U_j}}, \mathcal{O}_{D_2})/\Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O}_Y)}(f_{ij|D_{2_{U_i \cap U_j}}}})}$$

zu zeigen. Hierfür genügt es (ohne Einschränkung) zu beweisen, dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(D_{1_{U_i \cap U_j}}, \mathcal{O}_{D_1}) & \longrightarrow & \Gamma(D_{1_K}, \mathcal{O}_{D_{1_K}}) \\ \downarrow \text{Norm} & & \downarrow \text{Norm} \\ \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O}_Y) & \hookrightarrow & K \end{array}$$

kommutiert.

Dazu betrachten wir das kartesische Diagramm

$$\begin{array}{ccc} D_{1_{U_i \cap U_j}} & \longleftarrow & D_{1_K} \\ \downarrow & & \downarrow \\ U_i \cap U_j & \longleftarrow & \text{Spec } K, \end{array}$$

in dem alle Schemata affin sind. Somit ist

$$\Gamma(D_{1_K}, \mathcal{O}_{D_{1_K}}) = K \otimes_{\Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O}_Y)} \Gamma(D_{1_{U_i \cap U_j}}, \mathcal{O}_{D_1}).$$

Die Abbildung $D_{1_{U_i \cap U_j}} \rightarrow U_i \cap U_j$ ist endlich nach Basiswechsel. Außerdem erhält Skalarerweiterung die Eigenschaft eines Moduls, frei zu sein, so dass $\Gamma(D_{1_{U_i \cap U_j}}, \mathcal{O}_{D_1})$ eine endliche, freie $\Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O}_Y)$ -Algebra ist. Aus der Injektivität der Abbildung $\Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O}_Y) \rightarrow K$ und der Verträglichkeit der Normbildung mit Tensorieren in dieser Situation ([Bou74, III §9 3. (21)]) folgt die gewünschte Gleichheit.

Der angegebene Isomorphismus ist nach einem analogen Argument unabhängig von der Wahl der Schnitte $(m_i)_{i \in I}$, da somit eine andere Wahl von m_i lediglich eine gleichwertige Veränderung der Rahmen n_i und \hat{n}_i bedingt. Da der Isomorphismus aus diesem Grund und wegen der Verträglichkeit mit Verfeinerungen der Überdeckung auch unabhängig von der Wahl der Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ ist, ist der Satz vollständig gezeigt. \square

4 Die Deligne-Paarung

In diesem Kapitel befassen wir uns mit der Deligne-Paarung und ihren Eigenschaften. Ähnlich wie bei der Norm geben wir die Definition der Deligne-Paarung dabei zuerst in einer Situation, die nicht der im späteren Verlauf auftretenden entspricht, weil wir auf diese Definition dann in der für uns entscheidenden Situation zurückgreifen müssen. Wiederum orientieren wir uns konzeptionell an Aitken ([Ait96]), stellen aber das für uns relevante Material möglichst prägnant und auf den Punkt gebracht vor.

4.1 Die Deligne-Paarung über einem Körper als Basisschema

Wir betrachten zunächst ein Schema X , das projektiv über $\text{Spec } K$ ist, wobei K ein Körper sei. Weiterhin sei \mathcal{F} eine kohärente Garbe auf X . Dann ist X endlich-dimensional, $H^i(X, \mathcal{F})$ ein endlich-dimensionaler K -Vektorraum für alle $i \in \mathbb{N}_0$ (dies folgt beispielsweise aus [Gro61b, III (3.2.1)]) und $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$ für alle $i > \dim X$ ([Har77, III 2.7]).

Definition 4.1. *In dieser Situation ist die **Determinante der Kohomologie** von \mathcal{F} , bezeichnet mit $\mathcal{D}(\mathcal{F})$, definiert durch*

$$\mathcal{D}(\mathcal{F}) = \bigotimes_{i \text{ ungerade}} \det(H^i(X, \mathcal{F}))^{-1} \otimes \left(\bigotimes_{i \text{ gerade}} \det(H^i(X, \mathcal{F})) \right),$$

wobei $\det(H^i(X, \mathcal{F})) = \bigwedge^{\dim H^i(X, \mathcal{F})} H^i(X, \mathcal{F})$ ist. Dies ist ein 1-dimensionaler K -Vektorraum.

Satz/Definition 4.2. *Sei X ein 1-dimensionales Schema, das projektiv über $\text{Spec } K$ ist, wobei K ein Körper sei. Seien weiterhin L und M zwei Geradenbündel auf X . Ein Tupel $T = (L_1, L_2, M_1, M_2)$ bestehend aus vier Geradenbündeln auf X heißt **Modellierungsdatum** von L und M , wenn $L \cong L_1 \otimes L_2^{-1}$ und $M \cong M_1 \otimes M_2^{-1}$ gilt. Sei nun so ein Modellierungsdatum T (inklusive der Isomorphismen) fixiert. Dann ist die **Deligne-Paarung** von L und M bzgl. T , notiert als $\langle L, M \rangle_T$, definiert durch*

$$\langle L, M \rangle_T := \mathcal{D}(L_1 \otimes M_1) \otimes \mathcal{D}(L_2 \otimes M_2) \otimes (\mathcal{D}(L_1 \otimes M_2) \otimes \mathcal{D}(L_2 \otimes M_1))^{-1}.$$

Für jedes Paar (L, M) von Geradenbündeln auf X existiert ein Modellierungsdatum. Da die Deligne-Paarung von L und M , ein 1-dimensionaler K -Vektorraum, außerdem unabhängig von der Auswahl des Modellierungsdatums (bis auf kanonischen K -Vektorraumisomorphismus) ist, können wir das Modellierungsdatum in der Bezeichnung weglassen.

Beweis. Die Existenz eines Modellierungsdatums ist offensichtlich, da als zweites und viertes Geradenbündel des Tupels das Bündel \mathcal{O}_X gewählt werden kann. Dass zwischen den Konstruktionen der Deligne-Paarung bzgl. verschiedener Wahlen des Modellierungsdatums ein kanonischer Isomorphismus existiert, wird in [Ait96, 1 (7.2)] gezeigt. \square

Bemerkung 4.3. Unter den Voraussetzungen, wie sie in 4.2 gelten, kann man die Deligne-Paarung $\langle l, m \rangle_T$ von gewissen meromorphen Schnitten l von L und m von M (die immer existieren) bzgl. eines Modellierungsdatums T von L und M definieren als das Urbild von 1 unter einem bestimmten, festgelegten Isomorphismus $\langle L, M \rangle_T \xrightarrow{\sim} K$. Die Definition dieses Isomorphismus erfordert mehrere Konstruktionsschritte und es ist die Unabhängigkeit von $\langle l, m \rangle_T$ von gewissen Wahlen im Verlauf der Konstruktion zu zeigen. Weiterhin lässt sich beweisen, dass der kanonische Isomorphismus $\langle L, M \rangle_T \xrightarrow{\sim} \langle L, M \rangle_{T'}$ für zwei Modellierungsdaten T und T' von L und M gerade $\langle l, m \rangle_T$ auf $\langle l, m \rangle_{T'}$ schickt, so dass man von der Deligne-Paarung $\langle l, m \rangle$ von l und m (unabhängig von einem Modellierungsdatum) sprechen kann.

Da wir im Weiteren nur die Existenz dieser Deligne-Paarung von Schnitten benötigen, nicht aber, wie sie konkret gegeben ist, verweisen wir für eine detaillierte Darstellung inklusive der oben genannten Punkte auf Aitken ([Ait96, 1 (4.3)-(4.8), (7.2)]).

4.2 Die Deligne-Paarung über einem integren Basisschema

Nun sind wir bereit, die Deligne-Paarung in der für uns relevanten Situation zu definieren.

Satz/Definition 4.4. *Sei das Schema X projektiv und flach von relativer Dimension 1 über dem integren, separierten und noetherschen Schema Y . Es bezeichne $K(Y)$ den Funktionenkörper von Y . Wir erhalten das kartesische Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spec} K(Y) & \longleftarrow & X_{K(Y)} := X \times_Y \mathrm{Spec} K(Y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \longleftarrow & X, \end{array}$$

in dem der Morphismus $X_{K(Y)} \rightarrow \text{Spec } K(Y)$ die Anforderungen an die Situation aus Satz/Definition 4.2 erfüllt. Seien weiterhin L und M Geradenbündel auf X . Die konstante Garbe zum 1-dimensionalen $K(Y)$ -Vektorraum $\langle L|_{X_{K(Y)}}, M|_{X_{K(Y)}} \rangle$, der definiert ist wie in 4.2, werde mit \mathcal{C} notiert. Sie ist ein \mathcal{O}_Y -Modul, da Y integer ist.

Es existiert eine offene Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von Y , so dass es für jedes $i \in I$ reguläre meromorphe Schnitte l_{U_i} bzw. m_{U_i} von $L|_{X_{U_i}}$ bzw. $M|_{X_{U_i}}$ gibt mit der Eigenschaft, dass ihre jeweiligen assoziierten Cartier-Divisoren geschrieben werden können als horizontale Divisoren (also als Differenz zweier effektiv horizontaler Divisoren) bzgl. $X_{U_i} \rightarrow U_i$ mit disjunktem Träger.

In dieser Situation definieren wir die **Deligne-Paarung** $\langle l_{U_i}, m_{U_i} \rangle$ der **regulären meromorphen Schnitte** l_{U_i} und m_{U_i} als den globalen Schnitt der Garbe $\mathcal{C}|_{U_i}$, der zum nichttrivialen Element $\langle l_{U_i|_{X_{K(Y)}}}, m_{U_i|_{X_{K(Y)}}} \rangle$ des $K(Y)$ -Vektorraums $\langle L|_{X_{K(Y)}}, M|_{X_{K(Y)}} \rangle$ assoziiert ist (vgl. Bemerkung 4.3).

Weiterhin definieren wir die **Deligne-Paarung** von $L|_{X_{U_i}}$ und $M|_{X_{U_i}}$, bezeichnet mit $\langle L|_{X_{U_i}}, M|_{X_{U_i}} \rangle$, als den \mathcal{O}_{U_i} -Untermodule von $\mathcal{C}|_{U_i}$ erzeugt von $\langle l_{U_i}, m_{U_i} \rangle$. Diese Festlegung ist unabhängig von der Wahl von l_{U_i} und m_{U_i} . Wir definieren die **Deligne-Paarung** von L und M , bezeichnet mit $\langle L, M \rangle$, als jenes Geradenbündel auf Y , das $\langle L, M \rangle|_{U_i} = \langle L|_{X_{U_i}}, M|_{X_{U_i}} \rangle$ für alle $i \in I$ erfüllt. Diese Definition ist nicht abhängig von der Wahl der Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$. Erfüllen die zwei Geradenbündel L und M schon die Voraussetzung auf X wie sie auf X_{U_i} für $L|_{X_{U_i}}$ und $M|_{X_{U_i}}$ gilt (d.h., es existieren reguläre meromorphe Schnitte l bzw. m von L bzw. M auf X , so dass deren assoziierte Cartier-Divisoren geschrieben werden können als horizontale Divisoren (bzgl. $X \rightarrow Y$) mit disjunktem Träger), so stimmen die beiden gegebenen Definitionen der Deligne-Paarung überein.

Beweis. Die Existenz der gewünschten Überdeckung lässt sich aus Lemma 2.17 schließen. Weiterhin ist nach [Ait96, 2 (3.5), 2.] und [Ait96, 2 (4.1.1)] die Definition von $\langle L|_{X_{U_i}}, M|_{X_{U_i}} \rangle$ unabhängig von der Wahl von l_{U_i} und m_{U_i} . Nach [Ait96, 2 (3.5), 1.] und [Ait96, 2 (4.1.1)] impliziert die Existenz der Familie $(\langle L|_{X_{U_i}}, M|_{X_{U_i}} \rangle)_{i \in I}$ die Existenz von $\langle L, M \rangle$. Die Definition von $\langle L, M \rangle$ ist unabhängig von der Wahl der Überdeckung nach [Ait96, 2 (3.5), 2.] und [Ait96, 2 (4.1.1)]. Auch der letzte Teil der Behauptung folgt aus diesen beiden Referenzen. \square

Im folgenden Satz stellen wir zwei der wichtigsten Eigenschaften der Deligne-Paarung vor. Insbesondere die Beziehung zur Norm wird für uns im weiteren Verlauf eine entscheidende Rolle spielen, da sie uns den Übergang von der Deligne-Paarung zur Norm und der dort verfügbaren Theorie ermöglicht.

Satz 4.5. *Sei das Schema X projektiv und flach von relativer Dimension 1 über dem integren, separierten und noetherschen Schema Y . Weiterhin seien L und M Geradenbündel auf X . Dann gilt*

i) (Symmetrie) Es gibt einen kanonischen Isomorphismus

$$\langle L, M \rangle \xrightarrow{\sim} \langle M, L \rangle.$$

ii) (Beziehung zur Norm) Ist D ein horizontaler Divisor bzgl. $X \rightarrow Y$, so gibt es einen kanonischen Isomorphismus

$$\langle \mathcal{O}_X(D), M \rangle \xrightarrow{\sim} N_{D/Y}(M).$$

Beweis. Die Aussagen basieren auf den jeweiligen Resultaten für die Deligne-Paarung über einem Körper (definiert in Abschnitt 4.1). Beweise finden sich in Aitkens Kapitel über die Deligne-Paarung ([Ait96, 2 (4.5), (4.4)]). \square

Bemerkung 4.6. Da wir sie im Folgenden nicht benötigen werden, verweisen wir für weitere Eigenschaften der Deligne-Paarung, wie z.B. Bilinearität, ebenfalls auf Aitken ([Ait96, 2 (4.3)-(4.7)]).

5 Beweis des Hauptresultats

Nach den Vorbereitungen in den vorhergehenden Kapiteln sind wir jetzt bereit, das folgende, in der Einleitung schon angekündigte und formulierte Theorem zu zeigen, welches das Hauptresultat der vorliegenden Arbeit bildet. Der restliche Teil der Ausarbeitung wird dessen Beweis gewidmet sein. Dabei werden wir unter anderem auch auf eine Basiswechseleigenschaft der Deligne-Paarung zu sprechen kommen (Theorem 5.5).

Theorem 5.1. *Sei Γ eine eigentliche und normale (also reguläre und projektive) Kurve über einem Körper. Sei \mathcal{Y} ein integrales Schema, das projektiv und flach über Γ ist und $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ ein projektiver Γ -Morphismus von Schemata, der flach von relativer Dimension 1 ist.*

Sind \mathcal{L} und \mathcal{M} relativ semipositive Geradenbündel bzgl. Γ auf \mathcal{X} , wobei $\mathcal{L} = \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(D)$ oder $\mathcal{M} = \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(D)$ für einen horizontalen Divisor D bzgl. f gilt, so liefert die Deligne-Paarung von \mathcal{L} und \mathcal{M} ein bzgl. Γ relativ semipositives Geradenbündel $\langle \mathcal{L}, \mathcal{M} \rangle$ auf \mathcal{Y} .

5.1 Grundsätzliches zum Theorem

Wir beginnen mit ein paar einleitenden Bemerkungen.

Bemerkung 5.2. Als projektives, also eigentliches Schema über einem Körper ist \mathcal{Y} (und damit auch \mathcal{X}) separiert und noethersch, so dass die Deligne-Paarung in dieser Situation definiert ist. Auch die im Folgenden auftretenden Schemata werden projektiv über einem Körper sein, was neben der Existenz der Gradabbildung auch die Isomorphie der jeweiligen Picardgruppe mit der entsprechenden Cartier-Divisorenklassengruppe und die Existenz von c_1 bedingt. Wir werden darauf teilweise an gegebener Stelle nochmals eingehen.

Bemerkung 5.3. Wegen der Symmetrie der Deligne-Paarung (siehe Satz 4.5i)) nehmen wir im Folgenden ohne Einschränkung der Allgemeinheit an, dass $\mathcal{L} = \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(D)$ für einen horizontalen Divisor (D, D_1, D_2) bzgl. f gilt.

Bemerkung 5.4. Dass das Geradenbündel $\langle \mathcal{L}, \mathcal{M} \rangle$ relativ semipositiv bzgl. Γ sein soll, bedeutet laut Definition (vgl. 2.12) gerade, dass für jede spezielle Faser $\mathcal{Y}_0 = \mathcal{Y} \times_{\Gamma} \text{Spec } k$ von \mathcal{Y} gelten muss, dass

$$\deg_{\mathcal{Y}_0/k}(c_1(\langle \mathcal{L}, \mathcal{M} \rangle|_{\mathcal{Y}_0}) \cap [C]) \geq 0$$

für jede Kurve C in \mathcal{Y}_0 ist.

Den Ausgangspunkt für die folgenden Überlegungen wird daher das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{X} & \longleftarrow & \mathcal{X}_0 & \longleftarrow & f^{-1}C \\ \downarrow f & & \downarrow f_0 & & \downarrow f_C \\ \mathcal{Y} & \longleftarrow & \mathcal{Y}_0 & \longleftarrow & C \end{array}$$

darstellen. Dabei sind \mathcal{X} , \mathcal{Y} und f wie in Theorem 5.1, \mathcal{X}_0 und \mathcal{Y}_0 korrespondierende spezielle Fasern (d.h. $\mathcal{X}_0 = \mathcal{X} \times_{\Gamma} \text{Spec } k$ und $\mathcal{Y}_0 = \mathcal{Y} \times_{\Gamma} \text{Spec } k$, wobei k der Restklassenkörper in einem speziellen Punkt von Γ ist), C eine Kurve in \mathcal{Y}_0 und $f^{-1}C$ das Faserprodukt $\mathcal{X} \times_{\mathcal{Y}} C = \mathcal{X}_0 \times_{\mathcal{Y}_0} C$. Das Diagramm, in dem die Abbildungen f_0 sowie f_C diejenigen sind, die aus f durch Basiswechsel hervorgehen, ist nach Definition und wegen der „Transitivität“ des Faserprodukts kartesisch.

5.2 Rückführung auf die Deligne-Paarung über einer Kurve

Ein erstes Ziel wird sein, zu zeigen, dass man zum Beweis von Theorem 5.1 wie folgt vorgehen kann: Man zieht \mathcal{L} und \mathcal{M} auf $f^{-1}C$ zurück und betrachtet die Deligne-Paarung der zurückgezogenen Geradenbündel für die Abbildung $f_C : f^{-1}C \rightarrow C$. Dabei ist zu beachten, dass f_C projektiv und flach von relativer Dimension 1 ist, da diese Eigenschaften stabil unter Basiswechsel sind. Weiterhin ist C nicht nur integer, sondern als eigentliches Schema über einem Körper auch separiert und noethersch, so dass die Voraussetzungen für die Konstruktion der Deligne-Paarung (siehe Definition 4.4) tatsächlich erfüllt sind.

Um dieses Zwischenziel zu erreichen, benötigen wir die Verträglichkeit der Deligne-Paarung mit Basiswechsel, welche im Folgenden für die gegebene Situation gezeigt wird:

Theorem 5.5. *Seien X, Y, X' und Y' Schemata, wobei Y und Y' integer, separiert und noethersch seien. Sei weiterhin $f : X \rightarrow Y$ ein projektiver und flacher Morphismus von Schemata von relativer Dimension 1, und das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{g'} & X' \\ \downarrow f & & \downarrow f' \\ Y & \xleftarrow{g} & Y' \end{array}$$

kartesisch. Seien zudem L und M Geradenbündel auf X , wobei $L = \mathcal{O}_X(D)$ für einen horizontalen Divisor (D, D_1, D_2) bzgl. f sei. Dann gilt

$$g^* \langle L, M \rangle = \langle g'^* L, g'^* M \rangle.$$

Beweis. Wegen des erwähnten Zusammenhangs der Deligne-Paarung mit der Norm (vgl. Satz 4.5ii)) gilt zunächst

$$g^* \langle L, M \rangle = g^* \langle \mathcal{O}_X(D), M \rangle = g^* N_{D/Y}(M).$$

Wir erhalten daraus $g^* \langle L, M \rangle = g^* \hat{N}_{D/Y}(M)$, da, wie in Satz 3.13 gezeigt wurde, die Normdefinitionen von Aitken (siehe 3.4) und Grothendieck (siehe 3.10) in der gegebenen Situation übereinstimmen. In Satz 3.9 in Verbindung mit Bemerkung 3.12 wurde bereits geklärt, dass die Grothendieck-Norm mit Basiswechsel verträglich ist. Dementsprechend gilt $g^* \langle L, M \rangle = \hat{N}_{D'/Y'}(g'^* M)$, wobei $D' := g'^* D$ nach Bemerkung 2.16 und wegen der Verträglichkeit des Pullbacks von Cartier-Divisoren mit Addition und Inversenbildung ([Gro67, IV (21.4.2)]) tatsächlich existiert und ein horizontaler Divisor bzgl. f' ist. Wenden wir erneut Satz 3.13 und die Beziehung der Deligne-Paarung zur Norm, beschrieben in 4.5ii), an, so ergibt sich

$$g^* \langle L, M \rangle = \hat{N}_{D'/Y'}(g'^* M) = N_{D'/Y'}(g'^* M) = \langle \mathcal{O}_{X'}(D'), g'^* M \rangle.$$

Die Bildung des assoziierten Geradenbündels zu einem Cartier-Divisor ist verträglich mit dem Zurückziehen der jeweiligen Struktur ([Gro67, IV (21.4.2)]), es gilt also $\mathcal{O}_{X'}(D') = g'^* \mathcal{O}_X(D)$. Mit $\mathcal{O}_X(D) = L$ erhalten wir

$$g^* \langle L, M \rangle = \langle \mathcal{O}_{X'}(D'), g'^* M \rangle = \langle g'^* \mathcal{O}_X(D), g'^* M \rangle = \langle g'^* L, g'^* M \rangle$$

und damit die Behauptung. □

Wenden wir dieses Resultat auf den obigen Fall an, ergibt sich

$$\deg(c_1(\langle \mathcal{L}, \mathcal{M} \rangle_{|_{\mathcal{Y}_0}} \cap [C])) = \deg(c_1(\langle \mathcal{L}, \mathcal{M} \rangle_{|_C})) = \deg(c_1(\langle \mathcal{L}_{|_{f^{-1}C}}, \mathcal{M}_{|_{f^{-1}C}} \rangle))$$

und es genügt dementsprechend,

$$\deg(c_1(\langle \mathcal{L}_{|_{f^{-1}C}}, \mathcal{M}_{|_{f^{-1}C}} \rangle)) \geq 0$$

zu zeigen, um einen Beweis von Theorem 5.1 zu erhalten. Wir setzen $\mathcal{L}' := \mathcal{L}_{|_{f^{-1}C}} = \mathcal{O}_{f^{-1}C}(D')$, wobei D' den Pullback von D auf $f^{-1}C$ bezeichnet, und $\mathcal{M}' := \mathcal{M}_{|_{f^{-1}C}}$. Es ist $D' = D'_1 - D'_2$ für die Pullbacks D'_1 und D'_2 von D_1 respektive D_2 auf $f^{-1}C$.

5.3 Weitere Umformungen der Behauptung

Wir werden uns als nächstes den Term $c_1(\langle \mathcal{L}', \mathcal{M}' \rangle)$ näher ansehen und ihn in einen für uns vorteilhaften Ausdruck umwandeln. Dazu benötigen wir die folgenden beiden Lemmata.

Lemma 5.6. *Sei $f : X \rightarrow Y$ ein projektiver und flacher Morphismus von Schemata von relativer Dimension 1, wobei Y eine projektive Kurve über einem Körper sei. Weiterhin sei D ein effektiv horizontaler Divisor bzgl. f , so dass wir das kommutative Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} D & \hookrightarrow & X \\ & \searrow g & \downarrow f \\ & & Y \end{array}$$

erhalten. In dieser Situation gilt

$$c_1(\hat{N}_{D/Y}(M)) = g_*(c_1(M|_D))$$

für jedes Geradenbündel M auf X .

Beweis. Es ist $\hat{N}_{D/Y}(M) \stackrel{\text{def}}{=} \hat{N}_{D/Y}(M|_D)$ ein Geradenbündel auf Y . Da nach Voraussetzung Y projektiv über einem Körper ist, ist die Abbildung

$$\text{CaDiv}(Y) \rightarrow \text{Pic}(Y), F \mapsto [\mathcal{O}_Y(F)]$$

surjektiv ([Gro67, IV (21.3.5)]), also ist $\hat{N}_{D/Y}(M)$ isomorph zu $\mathcal{O}_Y(F)$, wobei F ein geeigneter Cartier-Divisor auf Y ist. Bezeichnet s_F den kanonischen regulären meromorphen Schnitt von $\mathcal{O}_Y(F)$, so gilt $\text{div}(s_F) = F$ ([Gro67, IV (21.2.9.3)]). Mit Y ist auch D projektiv über einem Körper, so dass wiederum die Abbildung

$$\text{CaDiv}(D) \rightarrow \text{Pic}(D), E \mapsto [\mathcal{O}_D(E)]$$

surjektiv ist. Also gilt $M|_D \cong \mathcal{O}_D(E)$ für einen geeigneten Cartier-Divisor E auf D . Es ist $E = \text{div}(s_E)$ für den kanonischen regulären meromorphen Schnitt s_E von $\mathcal{O}_D(E)$.

Für ein noethersches Schema S bezeichne im Folgenden $\text{cyc}_S : \text{CaDiv}(S) \rightarrow Z(S)$ die kanonische Abbildung der Cartier-Divisoren auf S in die Weil-Divisoren auf S und $\overline{\text{cyc}}_S : \text{CaCl}(S) \rightarrow A(S)$ die kanonische Abbildung der Cartier-Divisorenklassen auf S in die Weil-Divisorenklassen auf S . Damit ergibt sich $g_*(c_1(M|_D)) = g_*(\overline{\text{cyc}}_D([E]))$, da c_1 die Komposition von $\overline{\text{cyc}}_D$ mit dem kanonischen Isomorphismus $\text{Pic}(D) \xrightarrow{\sim} \text{CaCl}(D)$ ist. Weiterhin gilt wegen entsprechender Verträglichkeit mit Klassenbildung

$$g_*(\overline{\text{cyc}}_D([E])) = g_*([\text{cyc}_D(\text{div}(s_E))]) = [g_*(\text{cyc}_D(\text{div}(s_E)))]$$

und, da der Pushforward mit cyc verträglich ist ([Gro67, IV (21.10.17)], man beachte, dass g endlich lokal frei ist), auch

$$[g_*(\text{cyc}_D(\text{div}(s_E)))] = [\text{cyc}_Y(g_*(\text{div}(s_E)))].$$

Mit [Gro67, IV (21.5.5.3)] haben wir außerdem

$$[\text{cyc}_Y(g_*(\text{div}(s_E)))] = [\text{cyc}_Y(\text{div}(\hat{N}_{D/Y}(s_E)))].$$

Dabei ist $\hat{N}_{D/Y}(s_E)$ ein regulärer meromorpher Schnitt von $\hat{N}_{D/Y}(M)$ (vgl. [Gro67, IV (21.5.3)] für die Aussage und ggf. Details zur Definition, die wir jedoch im Folgenden nicht benötigen werden). Mit Argumentation analog zu obiger erhalten wir insgesamt

$$g_*(c_1(M|_D)) = \overline{\text{cyc}}_Y([\text{div}(\hat{N}_{D/Y}(s_E))]).$$

Zwischen-Behauptung: Dieser Ausdruck ist gerade $\overline{\text{cyc}}_Y([\text{div}(s_F)])$.

Es genügt zu zeigen, dass die Cartier-Divisoren $\text{div}(\hat{N}_{D/Y}(s_E))$ und $\text{div}(s_F)$ dasselbe Bild in $\text{CaCl}(Y)$ haben. Wir betrachten dazu den Isomorphismus $\text{CaDiv}(Y) \xrightarrow{\sim} D(Y)$, wobei $D(Y)$ die Menge der Äquivalenzklassen von Geradenbündeln mit regulärem meromorphen Schnitt bezeichnet (siehe [Gro67, IV (21.2.10)] für die Definition und [Gro67, IV (21.2.11)] für den genannten Isomorphismus). Unter diesem Isomorphismus wird $\text{div}(\hat{N}_{D/Y}(s_E))$ auf $[(\hat{N}_{D/Y}(M), \hat{N}_{D/Y}(s_E))]$ abgebildet und $\text{div}(s_F)$ wird auf $[(\mathcal{O}_Y(F), s_F)]$ abgebildet. Unter der kanonischen Abbildung $D(Y) \rightarrow \text{Pic}(Y)$ werden $[(\hat{N}_{D/Y}(M), \hat{N}_{D/Y}(s_E))]$ und $[(\mathcal{O}_Y(F), s_F)]$ auf $[\hat{N}_{D/Y}(M)]$ abgebildet. Da das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \text{CaDiv}(Y) & \longrightarrow & D(Y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{CaCl}(Y) & \longrightarrow & \text{Pic}(Y) \end{array}$$

kommutiert (dies ergibt sich aus [Gro67, IV (21.3.2.2)] und [Gro67, IV (21.3.3)]) und der untere Pfeil im Diagramm ein Isomorphismus ist, folgt hieraus die Zwischen-Behauptung.

Zuletzt ist noch anzumerken, dass Zurückrechnen $\overline{\text{cyc}}_Y([\text{div}(s_F)]) = c_1(\hat{N}_{D/Y}(M))$ und damit die Behauptung liefert. \square

Lemma 5.7. *Sei $f : X \rightarrow Y$ ein projektiver und flacher Morphismus von Schemata von relativer Dimension 1, wobei Y eine projektive Kurve über einem Körper sei. Weiterhin sei D ein effektiv horizontaler Divisor bzgl. f , so dass wir das kommutative Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{j} & X \\ & \searrow g & \downarrow f \\ & & Y \end{array}$$

erhalten. Seien außerdem $L = \mathcal{O}_X(D)$ und M Geradenbündel auf X . Dann gilt

$$g_*(c_1(M|_D)) = f_*(c_1(L) \cap c_1(M) \cap [X]).$$

Beweis. Zunächst sei angemerkt, dass in dieser Situation die Schemata D bzw. X nach [Har77, III 9.6] äquidimensional von Dimension 1 bzw. von Dimension 2 sind. Aus der Projektionsformel 2.7iii) erhalten wir

$$g_*(c_1(M|_D)) = f_*j_*(c_1(j^*M) \cap [D]) = f_*(c_1(M) \cap j_*[D]) \in A_0(Y).$$

Dieser Ausdruck entspricht wegen $[D] = c_1(\mathcal{O}_X(D)) \cap [X]$ nach Anwendung der Kommutativität von c_1 (siehe 2.7i)) gerade dem Term aus der Behauptung. \square

Nun kehren wir wieder zu unserer speziellen Situation zurück. Wir hatten den Beweis von Theorem 5.1 auf die zu zeigende Ungleichung

$$\deg(c_1(\langle \mathcal{L}|_{f^{-1}C}, \mathcal{M}|_{f^{-1}C} \rangle)) \geq 0$$

reduziert und zur Notationsvereinfachung $\mathcal{L}' := \mathcal{L}|_{f^{-1}C}$ und $\mathcal{M}' := \mathcal{M}|_{f^{-1}C}$ gesetzt. Mithilfe der eben gezeigten Lemmata können wir nun den Term $c_1(\langle \mathcal{L}', \mathcal{M}' \rangle)$ umformen. Aus der Beziehung der Deligne-Paarung zur Norm (Satz 4.5ii)) und dem Satz über die Äquivalenz der Normdefinitionen (3.13) erhalten wir

$$c_1(\langle \mathcal{L}', \mathcal{M}' \rangle) = c_1(\langle \mathcal{O}_{f^{-1}C}(D'), \mathcal{M}' \rangle) = c_1(N_{D'/C}(\mathcal{M}')) = c_1(\hat{N}_{D'/C}(\mathcal{M}')).$$

Nach Definition ergibt sich weiterhin

$$\begin{aligned} c_1(\hat{N}_{D'/C}(\mathcal{M}')) &= c_1(\hat{N}_{D'_1/C}(\mathcal{M}') \otimes \hat{N}_{D'_2/C}(\mathcal{M}')^{-1}) \\ &= c_1(\hat{N}_{D'_1/C}(\mathcal{M}')) - c_1(\hat{N}_{D'_2/C}(\mathcal{M}')). \end{aligned}$$

Auf diesen Ausdruck wenden wir nun die eben gezeigten Lemmata 5.6 und 5.7 an und erhalten den Term

$$f_{C*}(c_1(\mathcal{O}_{f^{-1}C}(D'_1)) \cap c_1(\mathcal{M}') \cap [f^{-1}C]) - f_{C*}(c_1(\mathcal{O}_{f^{-1}C}(D'_2)) \cap c_1(\mathcal{M}') \cap [f^{-1}C]).$$

Nach Satz 2.7ii) entspricht dieser Ausdruck gerade

$$f_{C*}(c_1(\mathcal{O}_{f^{-1}C}(D'_1 - D'_2)) \cap c_1(\mathcal{M}') \cap [f^{-1}C]),$$

und da $D' = D'_1 - D'_2$ ist, ergibt sich insgesamt

$$c_1(\langle \mathcal{L}', \mathcal{M}' \rangle) = f_{C*}(c_1(\mathcal{L}') \cap c_1(\mathcal{M}') \cap [f^{-1}C]).$$

Zusammenfassend sind wir jetzt also in der folgenden Situation: Wir haben das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{X}_0 & \xleftarrow{i'} & f^{-1}C \\
 \downarrow f_0 & & \downarrow f_C \\
 \mathcal{Y}_0 & \xleftarrow{i} & C \\
 \downarrow & & \\
 \text{Spec } k & &
 \end{array}$$

in dem das obere Quadrat kartesisch ist. Es verbleibt zu zeigen, dass

$$\deg(f_{C*}(c_1(\mathcal{L}') \cap c_1(\mathcal{M}') \cap [f^{-1}C])) \geq 0$$

ist. Da die Gradabbildung letztendlich über den Pushforward von 0-Zykelklassen definiert ist, gilt

$$\begin{aligned}
 \deg(f_{C*}(c_1(\mathcal{L}') \cap c_1(\mathcal{M}') \cap [f^{-1}C])) &= \deg(c_1(\mathcal{L}') \cap c_1(\mathcal{M}') \cap [f^{-1}C]) \\
 &= \deg(i'_*(c_1(\mathcal{L}') \cap c_1(\mathcal{M}') \cap [f^{-1}C])) \\
 &= \deg(i'_*(c_1(i'^*\mathcal{L}_{|\mathcal{X}_0}) \cap c_1(i'^*\mathcal{M}_{|\mathcal{X}_0}) \cap [f^{-1}C])).
 \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist nach zweimaliger Anwendung der Projektionsformel 2.7iii) gerade

$$\deg(c_1(\mathcal{L}_{|\mathcal{X}_0}) \cap c_1(\mathcal{M}_{|\mathcal{X}_0}) \cap [f^{-1}C]).$$

Da f_C flach von relativer Dimension 1 und C eine Kurve ist, haben alle irreduziblen Komponenten von $f^{-1}C$ die Dimension 2 ([Har77, III 9.6]). Daher genügt es zu zeigen, dass

$$(\mathcal{L}_{|\mathcal{X}_0} \cdot \mathcal{M}_{|\mathcal{X}_0} \cdot Z) \geq 0$$

ist für alle 2-dimensionalen abgeschlossenen Unterschemata Z von \mathcal{X}_0 .

5.4 Abschluss des Beweises mittels eines Theorems von Kleiman

Um die eben formulierte Ungleichung zu zeigen, benötigen wir ein neues Argument. Wir hatten in Abschnitt 2.3 Vorarbeit für ein Theorem von Kleiman geleistet. Diese Vorarbeit erlaubt uns nun, das entsprechende Resultat ([Kle66, III §2 Theorem 1]) in für uns geeigneter Art und Weise zu formulieren:

Theorem 5.8. *Sei X ein eigentliches Schema über einem algebraisch abgeschlossenen Körper. Seien L_1, \dots, L_n numerisch effektive Geradenbündel auf X . Ist S ein abgeschlossenes Unterschema von X mit $\dim S = n$, so gilt*

$$(L_1 \cdot \dots \cdot L_n \cdot S) \geq 0.$$

Beweis. Siehe [Kle66, III §2 Theorem 1]. □

Offenbar lässt sich dieses Theorem aber nicht ohne Weiteres auf unsere Situation anwenden, da k im Allgemeinen nicht algebraisch abgeschlossen ist. Um dieses Problem zu umgehen und auf den Fall eines algebraisch abgeschlossenen Körpers zurückzuführen, betrachten wir im Folgenden einen beliebig, aber fest gewählten algebraischen Abschluss \bar{k} von k . Nach Durchführung der entsprechenden Basiswechsel erhalten wir das kartesische Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Spec} \bar{k} & \longleftarrow & \bar{\mathcal{Y}}_0 & \longleftarrow & \bar{\mathcal{X}}_0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Spec} k & \longleftarrow & \mathcal{Y}_0 & \longleftarrow & \mathcal{X}_0. \end{array}$$

Wir bezeichnen mit $\mathcal{L}_{|\bar{\mathcal{X}}_0}$ und $\mathcal{M}_{|\bar{\mathcal{X}}_0}$ die Pullbacks von $\mathcal{L}_{|\mathcal{X}_0}$ und $\mathcal{M}_{|\mathcal{X}_0}$ auf $\bar{\mathcal{X}}_0$ und mit \bar{Z} den Pullback von Z (d.h. $\bar{Z} = Z \times_{\mathcal{X}_0} \bar{\mathcal{X}}_0$). Das Schema \bar{Z} ist wiederum ein abgeschlossenes Unterschema von $\bar{\mathcal{X}}_0$ und 2-dimensional ([GW10, 5.38]).

Mittels des folgenden Satzes - der einem Spezialfall der Tatsache entspricht, dass die Schnittzahl invariant unter Erweiterung des Grundkörpers ist - können wir das gewünschte Resultat mit einer Aussage über Schnittzahlen über dem algebraisch abgeschlossenen Körper \bar{k} in Verbindung bringen:

Satz 5.9. *In der gerade beschriebenen Situation ist die Gleichung*

$$(\mathcal{L}_{|\mathcal{X}_0} \cdot \mathcal{M}_{|\mathcal{X}_0} \cdot Z) = (\mathcal{L}_{|\bar{\mathcal{X}}_0} \cdot \mathcal{M}_{|\bar{\mathcal{X}}_0} \cdot \bar{Z})$$

erfüllt.

Beweis. Sei $i \in \mathbb{N}_0$, \mathcal{G} eine kohärente Garbe auf \mathcal{X}_0 und $\bar{\mathcal{G}}$ deren (ebenfalls kohärenter) Pullback auf $\bar{\mathcal{X}}_0$. Nach der Definition der Schnittzahl (in 2.9) und wegen $\dim \mathcal{X}_0 = \dim \bar{\mathcal{X}}_0$ ([GW10, 5.38]) genügt es zu zeigen, dass $\dim_k H^i(\mathcal{X}_0, \mathcal{G}) = \dim_{\bar{k}} H^i(\bar{\mathcal{X}}_0, \bar{\mathcal{G}})$ gilt. Es ist $H^i(\bar{\mathcal{X}}_0, \bar{\mathcal{G}}) = H^i(\mathcal{X}_0, \mathcal{G}) \otimes_k \bar{k}$ ([Vak13, 18.2.H]). Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \dim_{\bar{k}} H^i(\bar{\mathcal{X}}_0, \bar{\mathcal{G}}) &= \dim_{\bar{k}} (H^i(\mathcal{X}_0, \mathcal{G}) \otimes_k \bar{k}) = \dim_{\bar{k}} (k^{\dim_k H^i(\mathcal{X}_0, \mathcal{G})} \otimes_k \bar{k}) \\ &= \dim_{\bar{k}} (\bar{k}^{\dim_k H^i(\mathcal{X}_0, \mathcal{G})}) = \dim_k H^i(\mathcal{X}_0, \mathcal{G}). \end{aligned}$$

□

Um den Beweis des Theorems 5.1 vervollständigen zu können, verbleibt nun noch zu zeigen, dass mit den Geradenbündeln $\mathcal{L}_{|\mathcal{X}_0}$ und $\mathcal{M}_{|\mathcal{X}_0}$ auch deren Pullbacks $\mathcal{L}_{|\overline{\mathcal{X}_0}}$ und $\mathcal{M}_{|\overline{\mathcal{X}_0}}$ numerisch effektiv sind.

Lemma 5.10. *Sei K ein Körper, \overline{K} ein algebraischer Abschluss von K und X ein Schema, das projektiv über $\mathrm{Spec} K$ ist. Das Faserprodukt $X \times_{\mathrm{Spec} K} \mathrm{Spec} \overline{K}$ werde mit \overline{X} notiert. Weiterhin bezeichne \mathcal{N} ein Geradenbündel auf X und $\overline{\mathcal{N}}$ dessen Pullback auf \overline{X} . Ist \mathcal{N} ein numerisch effektives Geradenbündel, so ist auch $\overline{\mathcal{N}}$ numerisch effektiv.*

Beweis. Sei \mathcal{A} ein amples Geradenbündel auf X (ein solches existiert, da X projektiv über $\mathrm{Spec} K$ ist). Mit dem Morphismus $\mathrm{Spec} \overline{K} \rightarrow \mathrm{Spec} K$ ist auch der Basiswechsel $\overline{X} \rightarrow X$ affin. Nach [Gro61a, II (5.1.12)] in Verbindung mit [Gro61a, II (4.6.6)] ist damit auch der Pullback $\overline{\mathcal{A}}$ von \mathcal{A} auf \overline{X} ampel. Dass \mathcal{N} numerisch effektiv ist, ist äquivalent dazu, dass $\mathcal{N}^m \otimes \mathcal{A}$ ampel ist für alle $m > 0$. Dies folgt via der Multilinearität der Schnittzahl ([Vak13, 20.1.3]) aus dem Nakai-Moishezon-Kriterium und einer schwächeren Form des Theorems von Kleiman, deren Voraussetzungen in der gegebenen Situation erfüllt sind ([Vak13, 20.4.1], [Vak13, 20.4.6]). Nach obiger Argumentation ist somit auch der Pullback $\overline{\mathcal{N}^m \otimes \mathcal{A}} = \overline{\mathcal{N}^m} \otimes \overline{\mathcal{A}} = \overline{\mathcal{N}}^m \otimes \overline{\mathcal{A}}$ ampel für alle $m > 0$, so dass wiederum gilt, dass $\overline{\mathcal{N}}$ numerisch effektiv ist. \square

Wir hatten bereits gezeigt, dass es für den Beweis von Theorem 5.1 genügt,

$$(\mathcal{L}_{|\overline{\mathcal{X}_0}} \cdot \mathcal{M}_{|\overline{\mathcal{X}_0}} \cdot \overline{Z}) \geq 0$$

nachzuweisen. Da nach Lemma 5.10 die Geradenbündel $\mathcal{L}_{|\overline{\mathcal{X}_0}}$ und $\mathcal{M}_{|\overline{\mathcal{X}_0}}$ numerisch effektiv sind und wie erwähnt \overline{Z} ein 2-dimensionales, abgeschlossenes Unterschema von $\overline{\mathcal{X}_0}$ ist, ist dies gerade die Aussage unserer Formulierung des Resultats von Kleiman (Theorem 5.8). Der Beweis von Theorem 5.1 ist damit komplett vollzogen.

Literaturverzeichnis

- [Ait96] Wayne Aitken. An arithmetic Riemann-Roch theorem for singular arithmetic surfaces. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 120(573):viii+174, 1996.
- [Bou74] Nicolas Bourbaki. *Elements of mathematics. Algebra, Part I: Chapters 1-3*. Hermann, Paris, 1974. Translated from the French.
- [BSW11] Indranil Biswas, Georg Schumacher, and Lin Weng. Deligne pairing and determinant bundle. *Electron. Res. Announc. Math. Sci.*, 18:91–96, 2011.
- [Del87] P. Deligne. Le déterminant de la cohomologie. In *Current trends in arithmetical algebraic geometry (Arcata, Calif., 1985)*, volume 67 of *Contemp. Math.*, pages 93–177. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987.
- [dFEM13] Tommaso de Fernex, Lawrence Ein, and Mircea Mustață. Vanishing theorems and singularities in birational geometry. Lecture notes, to appear as a book. Verfügbar unter http://www.math.lsa.umich.edu/~mmustata/lecture_notes_birational.pdf, 2013. Abgerufen am 11.12.2013.
- [Elk90] R. Elkik. Métriques sur les fibrés d’intersection. *Duke Math. J.*, 61(1):303–328, 1990.
- [Fra90] J. Franke. Chow categories. *Compositio Math.*, 76(1-2):101–162, 1990. Algebraic geometry (Berlin, 1988).
- [Ful98] William Fulton. *Intersection theory*, volume 2 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics]*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1998.
- [Gro60] A. Grothendieck. Éléments de géométrie algébrique. I. Le langage des schémas. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (4):228, 1960.

- [Gro61a] A. Grothendieck. Éléments de géométrie algébrique. II. Étude globale élémentaire de quelques classes de morphismes. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (8):222, 1961.
- [Gro61b] A. Grothendieck. Éléments de géométrie algébrique. III. Étude cohomologique des faisceaux cohérents. I. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (11):167, 1961.
- [Gro67] A. Grothendieck. Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas IV. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (32):361, 1967.
- [GW10] Ulrich Görtz and Torsten Wedhorn. *Algebraic geometry I*. Advanced Lectures in Mathematics. Vieweg + Teubner, Wiesbaden, 2010. Schemes with examples and exercises.
- [Har77] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry*. Springer-Verlag, New York, 1977. Graduate Texts in Mathematics, No. 52.
- [Kle66] Steven L. Kleiman. Toward a numerical theory of ampleness. *Ann. of Math. (2)*, 84:293–344, 1966.
- [Kle79] Steven L. Kleiman. Misconceptions about K_X . *Enseign. Math. (2)*, 25(3-4):203–206 (1980), 1979.
- [KM85] Nicholas M. Katz and Barry Mazur. *Arithmetic moduli of elliptic curves*, volume 108 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1985.
- [Laz04a] Robert Lazarsfeld. *Positivity in algebraic geometry. I*, volume 48 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics]*. Springer-Verlag, Berlin, 2004. Classical setting: line bundles and linear series.
- [Laz04b] Robert Lazarsfeld. *Positivity in algebraic geometry. II*, volume 49 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics]*. Springer-Verlag, Berlin, 2004. Positivity for vector bundles, and multiplier ideals.

- [MB85] Laurent Moret-Bailly. Métriques permises. *Astérisque*, (127):29–87, 1985. Seminar on arithmetic bundles: the Mordell conjecture (Paris, 1983/84).
- [PS04] D. H. Phong and Jacob Sturm. Scalar curvature, moment maps, and the Deligne pairing. *Amer. J. Math.*, 126(3):693–712, 2004.
- [SGA73] *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas. Tome 3*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 305. Springer-Verlag, Berlin, 1973. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1963–1964 (SGA 4), Dirigé par M. Artin, A. Grothendieck et J. L. Verdier. Avec la collaboration de P. Deligne et B. Saint-Donat.
- [Sta13] The Stacks Project Authors. *Stacks Project*. <http://stacks.math.columbia.edu>, 2013.
- [Vak13] Ravi Vakil. Math 216: Foundations of Algebraic Geometry (June 11, 2013 version). Lecture notes, to appear as a book. Verfügbar unter <http://math.stanford.edu/~vakil/216blog/FOAGjun1113public.pdf>, 2013. Abgerufen am 11.12.2013.
- [Zha96] Shou-Wu Zhang. Heights and reductions of semi-stable varieties. *Compositio Math.*, 104(1):77–105, 1996.
- [Zha10] Shou-Wu Zhang. Gross-Schoen cycles and dualising sheaves. *Invent. Math.*, 179(1):1–73, 2010.

Ich erkläre hiermit an Eides Statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe. Die aus fremden Quellen direkt oder indirekt übernommenen Gedanken sind als solche gekennzeichnet. Die Arbeit wurde bisher in gleicher oder ähnlicher Form weder einer anderen Prüfungsbehörde vorgelegt noch veröffentlicht.

Regensburg, 30. Januar 2014

Alexander Schiller