

Universität Regensburg  
Masterarbeit Mathematik

# Der Spinorfluss auf dreidimensionalen Berger-Sphären

verfasst von  
Johannes Wittmann

Februar 2015

betreut durch  
Prof. Dr. Bernd Ammann



# Inhaltsverzeichnis

|  |            |
|--|------------|
| <b>Einleitung</b>  | <b>1</b>   |
| <b>1 Einführung in die Spingeometrie</b>   | <b>3</b>   |
| 1.1 Clifford-Algebren . . . . .  | 3          |
| 1.2 Die Spin-Gruppen . . . . .   | 7          |
| 1.3 Darstellungen von $\mathbb{C}l_n$ und $\text{Spin}(n)$ . . . . .               | 12         |
| 1.4 Spinstrukturen . . . . .   | 18         |
| 1.5 Spinorbündel . . . . .   | 25         |
| 1.6 Zusammenhänge in Hauptfaserbündeln . . . . .                                   | 32         |
| <b>2 Konstruktion von Spinstrukturen auf Produkten und Hyperflächen</b>            | <b>37</b>  |
| 2.1 Produktspinstruktur . . . . .  | 37         |
| 2.2 Spinstrukturen auf Hyperflächen . . . . .                                      | 40         |
| <b>3 Topologische Spinstrukturen</b>   | <b>47</b>  |
| 3.1 Topologische Spinstrukturen auf Hyperflächen . . . . .                         | 54         |
| <b>4 Der Spinorfluss und verallgemeinerte Zylinder</b>                             | <b>57</b>  |
| 4.1 Definition des Spinorflusses . . . . .   | 58         |
| 4.2 Verallgemeinerte Zylinder . . . . .  | 59         |
| 4.3 Spinstruktur auf dem verallgemeinerten Zylinder . . . . .                      | 62         |
| 4.4 Definition des Spinorflusses mit Hilfe verallgemeinerter Zylinder . . . . .    | 64         |
| <b>5 Kollaps von <math>S^1 \times S^2</math> unter dem Spinorfluss</b>             | <b>67</b>  |
| <b>6 Der Spinorfluss auf dreidimensionalen Berger-Sphären</b>                      | <b>77</b>  |
| 6.1 Grundlagen zu Berger-Sphären und technische Vorbereitungen . . . . .           | 77         |
| 6.2 $S^1$ -invariante Spinoren . . . . .   | 88         |
| 6.3 Kollaps der Berger-Sphären unter dem Spinorfluss . . . . .                     | 90         |
| 6.4 Ein Stabilitätsresultat für die Berger-Sphären unter dem Spinorfluss . . . . . | 107        |
| <b>Literatur</b>   | <b>121</b> |
| <b>Eigenständigkeitserklärung</b>  | <b>123</b> |



## Einleitung

Sei  $M$  eine kompakte orientierte Spinmannigfaltigkeit und  $\mathcal{N}$  die Vereinigung aller Paare  $(g, \varphi)$ , wobei  $g$  eine Riemannsche Metrik auf  $M$  ist und  $\varphi \in \Gamma(\Sigma(M, g))$  ein Spinor bezüglich der Spinmannigfaltigkeit  $(M, g)$ , dessen punktweise Norm konstant 1 ist. Wir betrachten das Energiefunktional  $\mathcal{E}$ , definiert durch

$$\mathcal{E}: \mathcal{N} \rightarrow [0, \infty), \quad (g, \varphi) \mapsto \frac{1}{2} \int_M |\nabla^g \varphi|^2 dv^g,$$

wobei  $dv^g$  die Riemannsche Volumenform auf  $(M, g)$  bezeichnet und  $|\cdot|$  die punktweise Norm auf  $T^*M \otimes \Sigma(M, g)$  ist.

Auf dem Fréchet-Bündel  $\mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$ ,  $\mathcal{M} := \{\text{Riemannsche Metriken auf } M\}$ , existiert ein natürlicher Zusammenhang, motiviert durch [6], welcher eine Aufspaltung von  $T\mathcal{N}$  in horizontale und vertikale Tangentialräume liefert. Dies ermöglicht uns die Definition einer Riemannschen Metrik auf  $\mathcal{N}$  und wir können den Gradienten von  $\mathcal{E}$  bilden. Den negativen Gradientenfluss von  $\mathcal{E}$ ,

$$\frac{\partial}{\partial t}(g_t, \varphi_t) = -\text{grad}_{\mathcal{E}(g_t, \varphi_t)},$$

bezeichnen wir als *den Spinorfluss*.

Der Spinorfluss wurde in [3] eingeführt, insbesondere wurde dort die Kurzzeitexistenz und Eindeutigkeit gezeigt.

Ziel dieser Masterarbeit ist es, das Verhalten des Spinorflusses für konkrete Beispiele zu verstehen. Hauptsächlich werden wir dazu den Spinorfluss auf (dreidimensionalen) Berger-Sphären betrachten. Unsere Resultate umfassen, abhängig von den Anfangswerten:

- Den Kollaps von  $S^1 \times S^2$  gegen  $S^2$ .
- Den Kollaps der Berger-Sphären gegen einen Punkt.
- Den Kollaps der Berger-Sphären gegen  $S^2$ .
- Die Konvergenz der Berger-Sphären unter dem volumennormalisierten Spinorfluss gegen  $(g, \varphi)$ , wobei  $g$  die volumennormalisierte Standardmetrik auf  $S^3$  ist und  $\varphi$  ein Killing-Spinor.

Dabei bestätigen unsere Ergebnisse die folgenden Vermutungen in Spezialfällen:

**Vermutung 1:**  $S^1$ -Hauptfaserbündel mit  $S^1$ -invarianten Spinoren (das sind Spinoren, die von Spinoren auf der Basismannigfaltigkeit kommen) kollabieren unter dem Spinorfluss gegen ihre Basismannigfaltigkeit.

**Vermutung 2:** Für  $M = S^n$  ist die volumennormalisierte Standardmetrik mit Killing-Spinor stabil unter dem volumennormalisierten Spinorfluss. Dabei ist mit „stabil“ gemeint: Wählt man einen Anfangswert  $(g_0, \varphi_0)$ , der nahe an der volumennormalisierten Standardmetrik mit Killing-Spinor ist, so fließt der Fluss für den Anfangswert  $(g_0, \varphi_0)$  zur volumennormalisierten Standardmetrik mit Killing-Spinor (modulo Diffeomorphismeninvarianz).

Ein wesentliches Hilfsmittel für unsere Lösungsmethode des Spinorflusses sind sogenannte verallgemeinerte Zylinder [4]. Diese liefern eine Möglichkeit, Spinoren zu unterschiedlichen Metriken miteinander zu vergleichen. Insbesondere werden wir eine Definition des

Spinorflusses mit Hilfe verallgemeinerter Zylinder angeben. Diese ist die Definition, mit der wir konkret arbeiten. Dieses Vorgehen hat den Vorteil, dass die verallgemeinerten Zylinder Riemannsche Mannigfaltigkeiten sind, mit denen man leichter umgehen kann als mit dem Fréchet-Bündel  $\mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$ .

# 1 Einführung in die Spingeometrie

Dieses Kapitel dient als Einführung in die Grundlagen der Spingeometrie. Zunächst beschäftigen wir uns mit Clifford-Algebren und Spin-Gruppen, sowie deren Darstellungstheorie. Dann erklären wir die zentralen Begriffe „Spinstruktur“ und „Spinorbündel“. Dazu benötigen wir etwas Theorie über Hauptfaserbündel.

Die für diesen Einführungsteil verwendeten Quellen sind [15], [11], [8], [18], [5] und [9].

## 1.1 Clifford-Algebren

Wir beginnen damit, an die Definition von Algebren zu erinnern.

**Definition 1.1 (Assoziative Algebra)** Sei  $K$  ein Körper. Eine assoziative  $K$ -Algebra ist eine abelsche Gruppe  $(A, +)$ , die ein Ring und ein  $K$ -Vektorraum ist, derart, dass die Skalarmultiplikation und Ringmultiplikation in folgendem Sinne verträglich sind:

$$\lambda(xy) = (\lambda x)y = x(\lambda y)$$

für alle  $\lambda \in K$  und alle  $x, y \in A$ .  $A$  hat eine Eins, wenn  $A$  als Ring eine Eins hat.

**Beispiel 1.2** Sei  $K$  ein Körper und  $V$  ein endlichdimensionaler  $K$ -Vektorraum.

- i) Der Vektorraum der Endomorphismen von  $V$ , bezeichnet mit  $\text{End}_K(V)$ , ist eine assoziative  $K$ -Algebra mit Eins, wobei die Ringmultiplikation die Verknüpfung von Abbildungen ist.
- ii) Der Vektorraum  $T(V) := K \oplus V \oplus (V \otimes V) \oplus (V \otimes V \otimes V) \oplus \dots$  zusammen mit dem Tensorprodukt als Ringmultiplikation heißt *Tensoralgebra von  $V$*  und ist eine assoziative  $K$ -Algebra mit Eins. (Beachte:  $\lambda \otimes x := \lambda x$  für alle  $\lambda \in K$  und  $x \in T(V)$ , d.h. die Eins in  $T(V)$  ist die des Körpers.)
- iii) Sei  $A$  eine  $K$ -Algebra mit Eins und  $J \subset A$  ein zweiseitiges Ideal im ringtheoretischen Sinn. Dann ist  $J$  auch ein  $K$ -Untervektorraum von  $A$ , denn  $\lambda x = \lambda(1x) = (\lambda 1)x \in J$  für alle  $\lambda \in K$  und für alle  $x \in A$ . Dann können wir sowohl den Quotientenring  $A/J$  als auch den Quotientenvektorraum  $A/J$  bilden. Diese sind als Mengen gleich. Wählen wir auf der Menge  $A/J$  als Vektorraumstruktur die des Quotientenvektorraums und als Ringstruktur die des Quotientenrings, so erhalten wir die *Quotientenalgebra*  $A/J$ . Diese ist eine assoziative  $K$ -Algebra mit Eins.

**Definition 1.3 (Algebrenhomomorphismus /-isomorphismus)** Seien  $A_1$  und  $A_2$  assoziative  $K$ -Algebren. Eine Abbildung  $f: A_1 \rightarrow A_2$  heißt  $K$ -Algebrenhomomorphismus oder Homomorphismus von  $K$ -Algebren, falls

$$\begin{aligned} f(\lambda x) &= \lambda f(x), \\ f(x + y) &= f(x) + f(y), \\ f(xy) &= f(x)f(y) \end{aligned}$$

für alle  $\lambda \in K$  und für alle  $x, y \in A_1$ . Sind  $A_1$  und  $A_2$  assoziative  $K$ -Algebren mit Eins, dann nennen wir einen  $K$ -Algebrenhomomorphismus  $f: A_1 \rightarrow A_2$  mit  $f(1) = 1$  Homomorphismus von  $K$ -Algebren mit Eins. Ein  $K$ -Algebrenisomorphismus oder Isomorphismus

von  $K$ -Algebren ist ein bijektiver  $K$ -Algebrenhomomorphismus. Ein Isomorphismus von  $K$ -Algebren mit Eins ist ein bijektiver Homomorphismus von  $K$ -Algebren mit Eins.

Im Folgenden sei  $K$  stets ein Körper mit Charakteristik ungleich 2 und  $V$  ein endlichdimensionaler  $K$ -Vektorraum,  $n := \dim_K(V)$ , sowie  $g$  eine symmetrische Bilinearform auf  $V$ .

**Definition 1.4 (Clifford-Algebra)** Die zu  $g$  und  $V$  assoziierte Clifford-Algebra  $Cl(V, g)$  ist die Quotienten-Algebra

$$Cl(V, g) := T(V)/I(V, g),$$

wobei  $I(V, g) \subset T(V)$  das (zweiseitige ringtheoretische) Ideal ist, welches von der Menge  $\{x \otimes x + g(x, x)1 \mid x \in V\}$  erzeugt wird.

Für  $a, b \in T(V)$  schreiben wir für die Multiplikation in  $Cl(V, g)$  (diese wird *Clifford-Multiplikation* genannt)

$$[a] \cdot [b] = [a \otimes b].$$

**Proposition 1.5 (Universelle Eigenschaft von  $Cl(V, g)$ )** Sei  $A$  eine assoziative  $K$ -Algebra mit Eins und  $f: V \rightarrow A$  eine  $K$ -lineare Abbildung mit

$$f(v)^2 = -g(v, v)1$$

für alle  $v \in V$ . Dann gibt es einen eindeutig bestimmten Homomorphismus von  $K$ -Algebren mit Eins

$$F: Cl(V, g) \rightarrow A$$

mit  $F \circ i = f$ , wobei  $i: V \rightarrow Cl(V, g)$  gegeben ist durch  $i(v) = [v]$ .

*Beweis.* Siehe zum Beispiel [8]. Hier sei nur angemerkt, dass man  $F(v_1 \cdots v_k) := f(v_1) \cdots f(v_k)$  für beliebige  $v_i \in V$  und alle  $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ , sowie  $F(1) := 1$  setzt.  $\square$

**Proposition 1.6** Die lineare Abbildung

$$i: V \rightarrow Cl(V, g), \quad v \mapsto [v],$$

ist injektiv. Daher können wir  $V$  als  $K$ -Untervektorraum von  $Cl(V, g)$  auffassen.

*Beweis.* Wir zeigen die Behauptung mit folgender, bekannter Methode: Wir definieren eine  $K$ -lineare Abbildung

$$f: V \rightarrow \text{End}_K(\bigwedge(V)), \quad v \mapsto (x = x_1 \wedge \dots \wedge x_k \mapsto v \wedge x - v \lrcorner x).$$

Dabei ist  $v \lrcorner$  gegeben durch

$$v \lrcorner (x_1 \wedge \dots \wedge x_k) = \sum_{i=1}^k (-1)^{i+1} g(x_i, v) x_1 \wedge \dots \wedge \hat{x}_i \wedge \dots \wedge x_k,$$

wobei  $\hat{x}_i$  bedeutet, dass  $x_i$  weggelassen wird. Es gilt  $f(v) \circ f(v) = -g(v, v)id$  für alle  $v \in V$ , d.h. nach der universellen Eigenschaft von  $Cl(V, g)$  gibt es einen eindeutig bestimmten Homomorphismus von  $K$ -Algebren mit Eins

$$F: Cl(V, g) \rightarrow \text{End}_K(\bigwedge(V))$$

mit  $F([v]) = f(v)$  für alle  $v \in V$ . Wir zeigen nun die Injektivität von  $i$ : Sei  $v \in V$  mit  $[v] = 0 \in Cl(V, g)$ . Dann ist  $0 = F([v]) = f(v)$ . Insbesondere ist  $0 = f(v)(1) = v \wedge 1 - v \lrcorner 1 = v - 0 = v$ .  $\square$

**Proposition 1.7** *Für alle  $u, v \in V$  gilt.*

$$u \cdot v + v \cdot u = -2g(u, v)1.$$

(Dabei haben wir auf der linken Seite verwendet, dass wir  $V$  mittels  $i$  als  $K$ -Untervektorraum von  $Cl(V, g)$  auffassen.)

*Beweis.* Wir berechnen einerseits

$$(u + v) \cdot (u + v) = u^2 + u \cdot v + v \cdot u + v^2 = -g(u, u)1 + u \cdot v + v \cdot u - g(v, v)1$$

und andererseits

$$(u + v) \cdot (u + v) = -g(u + v, u + v)1 = -g(u, u)1 - g(u, v)1 - g(v, u)1 - g(v, v)1.$$

Daraus folgt die Behauptung.  $\square$

Für den nächsten Satz benötigen wir die Existenz einer  $g$ -orthogonalen Basis von  $V$ , d.h. einer Basis  $(e_1, \dots, e_n)$  von  $V$  mit  $g(e_i, e_j) = 0$  für alle  $i \neq j$ . Da wir in Charakteristik ungleich 2 sind, existiert eine  $g$ -orthogonale Basis von  $V$ , siehe etwa [14, S. 575, Theorem 3.1.].

**Satz 1.8** *Sei  $(e_1, \dots, e_n)$  eine  $g$ -orthogonale Basis von  $V$ . Dann ist*

$$\{e_{i_1} \cdot \dots \cdot e_{i_k} \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n, 0 \leq k \leq n\}$$

eine Basis des  $K$ -Vektorraums  $Cl(V, g)$ , wobei man das leere Produkt ( $k = 0$ ) als die 1 in  $Cl(V, g)$  definiert. Es gilt

$$\dim_K(Cl(V, g)) = 2^n.$$

**Bemerkung 1.9** Die Abbildung  $f: V \rightarrow Cl(V, g)$  definiert durch  $f(v) := -v$  für alle  $v \in V$  erfüllt  $f(v)^2 = -g(v, v)1$  für alle  $v \in V$  und wir erhalten damit nach Proposition 1.5 einen Homomorphismus von  $K$ -Algebren

$$\alpha: Cl(V, g) \rightarrow Cl(V, g),$$

welcher  $\alpha(v_1 \cdot \dots \cdot v_k) = (-1)^k v_1 \cdot \dots \cdot v_k$  erfüllt, wobei  $v_i \in V$ . Man überzeugt sich leicht, dass  $\alpha$  eine Involution ist, d.h. es gilt  $\alpha \circ \alpha = id_{Cl(V, g)}$ . Wir erhalten

$$Cl(V, g) = Cl^0(V, g) \oplus Cl^1(V, g),$$

wobei  $Cl^i(V, g) := \{x \in Cl(V, g) \mid \alpha(x) = (-1)^i x\}$ ,  $i = 0, 1$ , die  $\pm 1$ -Eigenräume von  $\alpha$  oder  $\{0\}$  sind<sup>1</sup>. Man nennt die assoziative Algebra mit Eins  $Cl^0(V, g)$  den *geraden Anteil von  $Cl(V, g)$*  und den Vektorraum  $Cl^1(V, g)$  den *ungeraden Anteil von  $Cl(V, g)$* .

<sup>1</sup>An dieser Stelle sei daran erinnert, dass Involutionen über Körpern mit Charakteristik  $\neq 2$  stets diagonalisierbar sind und als einzige Eigenwerte  $\pm 1$  auftreten können.

Als Vektorraum wird  $Cl^0(V, g)$  erzeugt von

$$\{e_{i_1} \cdots e_{i_k} \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n, 0 \leq k \leq n, k \text{ gerade}\}$$

und mit Hilfe der Formeln für den Binomialkoeffizienten berechnen wir für  $n \geq 1$

$$\dim_K(Cl^0(V, g)) = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ gerade}}}^n \binom{n}{k} = 1 + \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ gerade}}}^n \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} = 2^{n-1}.$$

Für  $n = 0$  erhalten wir  $\dim_K(Cl^0(V, g)) = 1$ .

### Definition 1.10

i) Mit  $Cl_n$  bezeichnen wir die Clifford-Algebra  $Cl(\mathbb{R}^n, g)$ , wobei  $g$  das Standardskalarprodukt auf  $\mathbb{R}^n$  ist, d.h.  $g(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ .

ii) Mit  $\mathbb{C}l_n$  bezeichnen wir die Clifford-Algebra  $Cl(\mathbb{C}^n, g_{\mathbb{C}})$ , wobei

$$g_{\mathbb{C}}: \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}, \\ (x, y) \mapsto \sum_{i=1}^n x_i y_i,$$

die  $\mathbb{C}$ -bilineare Erweiterung von  $g$  auf  $\mathbb{C}^n$  ist.

**Lemma 1.11** Sei  $(e_0, \dots, e_n)$  die Standardbasis von  $\mathbb{C}^{n+1}$ . Dann gibt es einen Isomorphismus von  $\mathbb{C}$ -Algebren mit Eins

$$F: \mathbb{C}l_n \rightarrow \mathbb{C}l_{n+1}^0$$

mit  $F(x) = e_0 \cdot (0, x)$  für alle  $x \in \mathbb{C}^n$ .

*Beweis.* Wir definieren eine  $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung

$$f: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}l_{n+1}^0$$

durch  $f(x) := e_0 \cdot (0, x)$  für alle  $x \in \mathbb{C}^n$ . Man sieht leicht, dass  $f(x)^2 = f(x) \cdot f(x) = -g_{\mathbb{C}}(x, x)1$ . Nach der universellen Eigenschaft von  $\mathbb{C}l_n$  erhalten wir einen Homomorphismus von  $\mathbb{C}$ -Algebren

$$F: \mathbb{C}l_n \rightarrow \mathbb{C}l_{n+1}^0,$$

dessen Surjektivität man leicht einsieht. Wegen  $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}l_n) = 2^n = 2^{n+1-1} = \dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}l_{n+1}^0)$  folgt die Bijektivität.  $\square$

Analog zeigt man:

**Lemma 1.12** Sei  $(e_0, \dots, e_n)$  die Standardbasis von  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Dann gibt es einen Isomorphismus von  $\mathbb{R}$ -Algebren mit Eins

$$F: Cl_n \rightarrow Cl_{n+1}^0$$

mit  $F(x) = e_0 \cdot (0, x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}^n$ .

**Proposition 1.13** *Der  $\mathbb{C}$ -Vektorraum  $Cl_n \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$  wird mit der Multiplikation*

$$(a_1 \otimes z) \cdot (a_2 \otimes w) := (a_1 a_2) \otimes (zw)$$

zu einer assoziativen  $\mathbb{C}$ -Algebra mit Eins. Es gibt einen Isomorphismus von  $\mathbb{C}$ -Algebren mit Eins

$$Cl_n \cong Cl_n \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}.$$

*Beweis.* Sei  $i: \mathbb{R}^n \hookrightarrow Cl_n$  die Inklusion (siehe Proposition 1.6). Die  $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^n & = & \mathbb{R}^n \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} & \rightarrow & Cl_n \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}, \\ v \otimes z & & \mapsto & & i(v) \otimes z, \end{array}$$

(dabei identifizieren wir  $\mathbb{R}^n \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mathbb{C}^n$  mittels  $v \otimes z \mapsto zv$ ) erfüllt  $f(v \otimes z)^2 = i(v)^2 \otimes z^2 = (-g(v, v)1) \otimes z^2 = -g(v, v)z^2(1 \otimes 1) = -g_{\mathbb{C}}(zv, zv)(1 \otimes 1)$ , setzt sich also nach der universellen Eigenschaft von  $Cl_n$  zu einem Homomorphismus von  $\mathbb{C}$ -Algebren mit Eins

$$F: Cl_n \rightarrow Cl_n \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$$

fort.  $F$  ist ein Isomorphismus von  $\mathbb{C}$ -Algebren mit Eins. □

## 1.2 Die Spin-Gruppen

Sei  $Cl_n^* := \{\varphi \in Cl_n \mid \exists \psi \in Cl_n : \varphi \cdot \psi = 1 = \psi \cdot \varphi\}$  die multiplikative Gruppe der invertierbaren Elemente in  $Cl_n$ .

Im Folgenden definieren wir die Spin-Gruppe  $\text{Spin}(n)$  als Untergruppe von  $Cl_n^*$  und zeigen, dass sie für  $n \geq 3$  die universelle Überlagerung von  $SO(n, \mathbb{R})$  ist, indem wir die Überlagerungsabbildung explizit konstruieren.

**Definition 1.14 (Spin-Gruppe)** *Sei  $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ . Die Spin-Gruppe (in Dimension  $n$ )  $\text{Spin}(n)$  ist die multiplikative Untergruppe von  $Cl_n^*$ , welche durch*

$$\text{Spin}(n) := \{x_1 \cdot \dots \cdot x_{2k} \mid x_j \in S^{n-1} \text{ für } j = 1, \dots, 2k, k \in \mathbb{N}\}$$

gegeben ist, wobei  $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$  die Einheitssphäre im  $\mathbb{R}^n$  ist und das leere Produkt ( $k = 0$ ) als die 1 in  $Cl_n$  definiert ist.

Für  $u \in Cl_n^*$  betrachten wir die Abbildung

$$\text{Ad}_u: \begin{array}{ccc} Cl_n & \rightarrow & Cl_n, \\ y & \mapsto & u \cdot y \cdot u^{-1}. \end{array}$$

**Proposition 1.15** *Der Gruppenhomomorphismus*

$$\text{Ad}: \text{Spin}(n) \rightarrow SO(n, \mathbb{R}), \quad u \mapsto (\text{Ad}_u|_{\mathbb{R}^n}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n),$$

ist wohldefiniert, surjektiv und hat den Kern  $\ker(\text{Ad}) = \{-1, 1\}$ . (Hier haben wir die linearen Abbildungen  $\text{Ad}_u|_{\mathbb{R}^n}$  mit Matrizen identifiziert.)

Dabei gilt Folgendes: Sei  $x \in S^{n-1}$  beliebig, dann verstehen wir unter  $-1 \in \text{Spin}(n)$  das Produkt

$$-1 = x \cdot x \in \text{Spin}(n),$$

siehe Proposition 1.7.

*Beweis von Proposition 1.15.* Sei zunächst  $x \in S^{n-1}$ . Dann gilt  $x^{-1} = -x$  in  $Cl_n$ . Somit gilt für  $y \in \mathbb{R}^n \subset Cl_n$ :

$$-\text{Ad}_x(y) = x \cdot y \cdot x = x \cdot (-x \cdot y - 2g(x, y)) = y - 2g(x, y)x \in \mathbb{R}^n. \quad (1.1)$$

Damit haben wir gezeigt, dass für  $x \in S^{n-1}$  gilt:

- $\text{Ad}_x$  ein Endomorphismus des  $\mathbb{R}^n$ .
- $-\text{Ad}_x$  ist die Spiegelung<sup>2</sup> entlang  $x^\perp = \{u \in \mathbb{R}^n \mid g(u, x) = 0\}$ .

Falls nun  $u = x_1 \cdot \dots \cdot x_{2k} \in \text{Spin}(n)$  ist, erhalten wir für  $y \in \mathbb{R}^n$ :

$$\begin{aligned} \text{Ad}_u(y) &= u \cdot y \cdot u^{-1} \\ &= x_1 \cdot \dots \cdot x_{2k} \cdot y \cdot x_{2k} \cdot \dots \cdot x_1 \\ &= -\text{Ad}_{x_1} \circ \dots \circ -\text{Ad}_{x_{2k}}(y) \end{aligned}$$

Das ist eine gerade Anzahl von Spiegelungen im  $\mathbb{R}^n$ , also ein Element aus  $SO(n, \mathbb{R})$ . Andererseits lässt sich nach dem Theorem von Cartan-Dieudonné (siehe [15, Theorem 2.7]) jedes Element aus  $SO(n, \mathbb{R})$  als gerade Anzahl von Spiegelungen schreiben, was die Surjektivität zeigt (beachte:  $\rho_v = \rho_{\frac{v}{|v|}}$ ). Für  $\ker(\text{Ad}) = \{1, -1\}$  sei auf [11, Proposition 2.22] verwiesen.  $\square$

Bevor wir zum wichtigsten Satz dieses Abschnittes kommen, beweisen wir noch zwei Lemmata.

**Lemma 1.16** *Sei  $A$  eine endlichdimensionale<sup>3</sup>, assoziative  $\mathbb{R}$ -Algebra mit Eins und  $A^*$  die multiplikative Gruppe der invertierbaren Elemente in  $A$ . Dann ist  $A^* \subset A$  offen und  $A^*$  ist eine Liegruppe.*

*Beweis.* Nach Voraussetzung ist  $A$  ein endlichdimensionaler, reeller Vektorraum und trägt damit eine kanonische Mannigfaltigkeitsstruktur<sup>4</sup>. Wir zeigen nun die Offenheit von  $A^*$ . Definiere die lineare (also glatte) Abbildung

$$f: A \rightarrow \text{End}_{\mathbb{R}}(A); \quad a \mapsto (v \mapsto av).$$

<sup>2</sup>Für ein  $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  ist die Spiegelung entlang  $v^\perp$  definiert als

$$\rho_v: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad w \mapsto w - 2 \frac{g(w, v)}{g(v, v)} v.$$

Für alle  $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  gilt  $\det(\rho_v) = -1$  (siehe [15, S. 17]) und die darstellende Matrix (bezüglich der Standardbasis im  $\mathbb{R}^n$ ) von  $\rho_v$  ist eine orthogonale Matrix.

<sup>3</sup>D.h.  $A$  ist als  $\mathbb{R}$ -Vektorraum endlichdimensional.

<sup>4</sup>In dieser Arbeit sind Mannigfaltigkeiten stets glatt.

Es ist  $GL(A) \subset \text{End}_{\mathbb{R}}(A)$  offen, also folgt die Offenheit von  $A^* \subset A$ , wenn wir

$$f^{-1}(GL(A)) = A^*$$

gezeigt haben. „ $\supseteq$ “ ist klar. Sei  $a \in f^{-1}(GL(A))$ , d.h.  $f(a) = (v \mapsto av)$  ist ein Isomorphismus. Wegen der Surjektivität von  $f(a)$  existiert ein  $w \in A$  mit  $aw = 1$ . Mit der Injektivität von  $f(a)$  erhalten wir weiter

$$awa = a \Rightarrow a(wa - 1) = 0 \Rightarrow wa - 1 = 0 \Rightarrow wa = 1.$$

Damit ist  $a \in A^*$ .

Als offene Teilmenge der Mannigfaltigkeit  $A$  ist  $A^*$  selbst eine Mannigfaltigkeit. Weiter ist  $A^*$  sogar eine Liegruppe. Wir zeigen die Glattheit der Inversenabbildung. Dafür betrachten wir die Abbildungen

$$\begin{aligned} i: A^* &\rightarrow A^*; & a &\mapsto a^{-1}, \\ j: GL(A) &\rightarrow GL(A); & g &\mapsto g^{-1}, \\ k: \text{End}_{\mathbb{R}}(A) &\rightarrow A; & g &\mapsto g(1). \end{aligned}$$

$j$  ist bekanntlich glatt und  $k$  ist eine lineare Abbildung, also auch glatt. Dann ist  $i = k \circ j \circ f$  als Verknüpfung glatter Abbildungen glatt.  $\square$

**Lemma 1.17** *Seien  $G$  und  $H$  Liegruppen und  $f: G \rightarrow H$  ein surjektiver Homomorphismus von Liegruppen. Falls  $\ker(f)$  diskret ist, ist  $f: G \rightarrow H$  eine Überlagerung<sup>5</sup>.*

*Beweis.* Sei  $\ker(f)$  diskret. Dann wissen wir aus der Theorie der Liegruppen einerseits, dass

$$\pi: G \rightarrow G/\ker(f)$$

eine Überlagerung ist (da  $\ker(f)$  eine diskrete, normale Untergruppe von  $G$  ist). Andererseits erhalten wir aus der Surjektivität von  $f$  einen Isomorphismus von Liegruppen

$$G/\ker(f) \rightarrow H.$$

Insgesamt haben wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} G & & \\ \downarrow f & \searrow \pi & \\ & & G/\ker(f) \\ & \swarrow \cong & \\ & & H \end{array}$$

$f$  ist also als Verknüpfung eines Isomorphismus und einer Überlagerung selbst eine Überlagerung.  $\square$

<sup>5</sup>Unter einer „Überlagerung“ verstehen wir in dieser Arbeit eine glatte, surjektive Abbildung  $\pi: M \rightarrow N$  zwischen Mannigfaltigkeiten  $M$  und  $N$  mit der Eigenschaft, dass jedes  $x \in N$  eine Umgebung  $U \subset N$  besitzt, derart, dass jede Zusammenhangskomponente von  $\pi^{-1}(U)$  unter  $\pi$  diffeomorph auf  $U$  abgebildet wird.

**Satz 1.18** Sei  $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ . Dann gilt:

- i)  $\text{Spin}(n)$  ist eine kompakte Liegruppe.
- ii)  $\text{Ad}: \text{Spin}(n) \rightarrow \text{SO}(n, \mathbb{R})$  ist für  $n \geq 1$  eine zweifache Überlagerung der Liegruppe  $\text{SO}(n, \mathbb{R})$ .
- iii)  $\text{Spin}(n)$  ist zusammenhängend für  $n \geq 2$ .
- iv)  $\text{Spin}(n)$  ist einfach zusammenhängend für  $n \geq 3$ . Insbesondere ist  $\text{Spin}(n)$  die universelle Überlagerung von  $\text{SO}(n, \mathbb{R})$  für  $n \geq 3$ .

*Beweis.* Zu i): Nach Lemma 1.16 ist  $Cl_n^*$  eine Liegruppe. Weiter ist  $\text{Spin}(n) \subset Cl_n^*$  abgeschlossen (das wird hier nicht gezeigt) und somit auch eine Liegruppe. Die Kompaktheit wird gleich gezeigt.

Zu ii):  $\text{Ad}: \text{Spin}(n) \rightarrow \text{SO}(n, \mathbb{R})$  ist glatt (nach [5, Satz 1.8] reicht es, die (Folgen-)Stetigkeit von  $\text{Ad}$  zu zeigen). Damit folgt ii) aus Proposition 1.15 in Verbindung mit Lemma 1.17.

Die Kompaktheit von  $\text{Spin}(n)$  folgt aus der Kompaktheit von  $\text{SO}(n, \mathbb{R})$  und der Tatsache, dass  $\text{Ad}$  eine endliche Überlagerung ist (siehe Überlagerungstheorie).

Zu iii) und iv): Wir betrachten die lange exakte<sup>6</sup> Homotopiesequenz der Faserung  $\{\pm 1\} \xrightarrow{i} \text{Spin}(n) \xrightarrow{\text{Ad}} \text{SO}(n, \mathbb{R})$ :

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow \pi_1(\{\pm 1\}, 1) &\xrightarrow{i_*} \pi_1(\text{Spin}(n), 1) \xrightarrow{\text{Ad}_*} \pi_1(\text{SO}(n, \mathbb{R}), 1) \rightarrow \\ &\pi_0(\{\pm 1\}, 1) \xrightarrow{i_*} \pi_0(\text{Spin}(n), 1) \xrightarrow{\text{Ad}_*} \pi_0(\text{SO}(n, \mathbb{R}), 1) \end{aligned}$$

(Siehe [10, Proposition 4.48, zweiter Absatz unter Theorem 4.41 und Theorem 4.41].) Es ist

$$\pi_1(\{1, -1\}) = \pi_0(\text{SO}(n, \mathbb{R})) = \{1\}$$

und

$$\pi_0(\{1, -1\}) = \{1, -1\}.$$

$\pi_0(\text{Spin}(n)) = \{1\}$  folgt aus der Exaktheit obiger Sequenz, wenn wir gezeigt haben, dass die Abbildung

$$\pi_0(\{1, -1\}) \xrightarrow{i_*} \pi_0(\text{Spin}(n)), \quad [x] \mapsto [i(x)], \quad [x] := \text{Zusammenhangskomponente von } x,$$

trivial ist (d.h. alles auf die Zusammenhangskomponente der 1 abbildet). Nach Definition ist das der Fall, wenn wir einen Weg zwischen  $-1$  und  $1$  in  $\text{Spin}(n)$  gefunden haben. Falls  $n \geq 2$  ist, ist ein solcher Weg durch

$$\gamma(t) := -\cos(\pi t) - \sin(\pi t)e_1e_2, \quad t \in [0, 1],$$

gegeben. Dabei bezeichnen  $e_1$  und  $e_2$  Standardbasisvektoren des  $\mathbb{R}^n \subset Cl_n$ .  $\gamma$  ist glatt und verläuft in  $\text{Spin}(n)$ , da

$$\gamma(t) = (\cos(\frac{\pi}{2}t)e_1 + \sin(\frac{\pi}{2}t)e_2) \cdot (\cos(\frac{\pi}{2}t)e_1 - \sin(\frac{\pi}{2}t)e_2)$$

<sup>6</sup> $\pi_0$  ist keine Gruppe, d.h. Exaktheit im Sinne von Gruppen macht für  $n = 0$  keinen Sinn, weil in diesem Fall der Begriff „Kern“ nicht definiert ist. Für  $n = 0$  erklärt man deshalb den Kern als Urbild der Zusammenhangskomponente der 1 und liest Exaktheit wieder ganz normal als „Kern=Bild“. Siehe dazu auch [10, S. 344].

in  $Cl_n$ . Damit ist  $\text{Spin}(n)$  zusammenhängend, für  $n \geq 2$ . Falls  $n \geq 3$ , ist zusätzlich  $\pi_1(\text{SO}(n, \mathbb{R})) = \{1, -1\}$  und wir erhalten für  $n \geq 3$  die exakte Sequenz:

$$1 \rightarrow \pi_1(\text{Spin}(n)) \hookrightarrow \{1, -1\} \xrightarrow{\text{id}} \{1, -1\} \rightarrow 1,$$

woraus

$$\pi_1(\text{Spin}(n)) = \{1\}$$

folgt. □

**Proposition 1.19 (Spin(2) und Ad)** *Es gibt einen Isomorphismus von Liegruppen*

$$I: \text{Spin}(2) \xrightarrow{\cong} S^1$$

derart, dass folgendes Diagramm kommutiert

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \xrightarrow{f} & S^1 \\ \uparrow I & & \downarrow g \\ \text{Spin}(2) & \xrightarrow{\text{Ad}} & \text{SO}(2, \mathbb{R}) \end{array}$$

wobei  $f(z) := z^2$  für alle  $z \in S^1 \subset \mathbb{C}$  und  $g$  der Isomorphismus von Liegruppen ist, der durch

$$\mathbb{C} \supset S^1 \ni e^{i\varphi} \mapsto \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \in \text{SO}(2, \mathbb{R})$$

gegeben ist.

*Beweis.* Wir haben einen Isomorphismus von  $\mathbb{R}$ -Algebren mit Eins  $I: Cl_2^0 \rightarrow \mathbb{C}$ , gegeben durch  $I(e_1 \cdot e_2) = i$ , wobei  $(e_1, e_2)$  die Standardbasis im  $\mathbb{R}^2$  bezeichnet. Wir zeigen, dass  $I(\text{Spin}(2)) = S^1$ . (Die Glattheit von  $J: \text{Spin}(2) \rightarrow S^1$  bzw.  $J^{-1}: S^1 \rightarrow \text{Spin}(2)$  folgt dann aus der Glattheit von  $J: Cl_2^0 \rightarrow \mathbb{C}$  bzw.  $J^{-1}: \mathbb{C} \rightarrow Cl_2^0$ , da  $\text{Spin}(2) \subset Cl_2^0$  eine eingebettete Untermannigfaltigkeit ist. Auf Letzteres gehen wir in Bemerkung 1.26 ein.) Sei zunächst  $x + iy \in S^1$ . Dann ist

$$I^{-1}(x + iy) = (x + ye_1 \cdot e_2) = -xe_1 \cdot e_1 + ye_1 \cdot e_2 = -xe_1 \cdot e_1 - ye_2 \cdot e_1 = -\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\in S^1} \cdot e_1 \in \text{Spin}(2).$$

Sei andererseits  $x \cdot y \in \text{Spin}(2)$  für  $x, y \in S^1$ ,  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ ,  $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  mit  $x_i, y_i \in \mathbb{R}$ . Durch Ausmultiplizieren erhält man  $x \cdot y = (-x_1y_1 - x_2y_2)1 + (x_1y_2 - x_2y_1)e_1 \cdot e_2$ , woraus

$$I(x \cdot y) = (-x_1y_1 - x_2y_2)1 + (x_1y_2 - x_2y_1)i \in S^1$$

folgt. Es bleibt die Kommutativität obigen Diagramms zu zeigen. Sei dazu  $e^{i\varphi} \in S^1$ . Dann

ist  $u := I^{-1}(e^{i\varphi}) = -\begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} \cdot e_1$  und wir berechnen mit Hilfe von (1.1)

$$\begin{aligned} \text{Ad}_u(e_1) &= \text{Ad}_{\begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}}(e_1) \\ &= -e_1 + 2g\left(\begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2\cos^2(\varphi) - 1 \\ 2\sin(\varphi)\cos(\varphi) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(2\varphi) \\ \sin(2\varphi) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Analog erhalten wir

$$\begin{aligned} \text{Ad}_u(e_2) &= \text{Ad}_{\begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}}(e_2) \\ &= -e_2 + 2g\left(\begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2\cos(\varphi)\sin(\varphi) \\ -2\sin^2(\varphi) + 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\sin(2\varphi) \\ \cos(2\varphi) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Somit ist

$$\text{Ad}_{I^{-1}(e^{i\varphi})} = \text{Ad}_u = \begin{pmatrix} \cos(2\varphi) & -\sin(2\varphi) \\ \sin(2\varphi) & \cos(2\varphi) \end{pmatrix} = g(e^{i2\varphi}) = g(f(e^{i\varphi})).$$

□

### 1.3 Darstellungen von $\mathbb{C}l_n$ und $\text{Spin}(n)$

Zunächst erinnern wir an grundlegende Begriffe der Darstellungstheorie.

**Definition 1.20 (Algebrendarstellung)** Sei  $A$  eine assoziative  $K$ -Algebra und  $V$  ein endlichdimensionaler  $K$ -Vektorraum. Ein Homomorphismus von  $K$ -Algebren

$$\rho: A \rightarrow \text{End}_K(V)$$

heißt Algebrendarstellung von  $A$ . Ist  $A$  eine assoziative  $K$ -Algebra mit Eins, so verlangen wir, dass  $\rho$  ein Homomorphismus von  $K$ -Algebren mit Eins ist.

Sei  $\rho: A \rightarrow \text{End}_K(V)$  eine Algebrendarstellung von  $A$ . Dann heißt  $\dim_K(V)$  Dimension von  $\rho$  und  $V$  Darstellungsraum.

Wir nennen einen  $K$ -Untervektorraum  $W$  von  $V$  invariant unter  $\rho$ , falls  $\rho(x)(W) \subset W$  für alle  $x \in A$  gilt. Weiter heißt  $\rho$  irreduzibel, wenn  $\rho \neq 0$  und es keine  $K$ -Untervektorräume  $\{0\} \subsetneq W \subsetneq V$  von  $V$  gibt, die invariant unter  $\rho$  sind. Ist  $\rho$  nicht irreduzibel, heißt  $\rho$  reduzibel.

Sind  $\rho_i: A \rightarrow \text{End}_K(V_i)$ ,  $i = 1, 2$ , Algebrendarstellungen von  $A$ , so heißen  $\rho_1$  und  $\rho_2$  *äquivalent* (kurz  $\rho_1 \sim \rho_2$ ), wenn es einen  $K$ -Vektorraumisomorphismus  $f: V_1 \rightarrow V_2$  gibt, so dass  $f \circ \rho_1(x) \circ f^{-1} = \rho_2(x)$  für alle  $x \in A$ .

Schließlich definieren wir noch die *direkte Summe von  $\rho_1$  und  $\rho_2$*

$$\rho_1 \oplus \rho_2: A \rightarrow \text{End}_K(V_1 \oplus V_2)$$

durch  $(\rho_1 \oplus \rho_2)(x)(v_1 \oplus v_2) := \rho_1(x)(v_1) \oplus \rho_2(x)(v_2)$  für alle  $x \in A$ ,  $v_1 \in V_1$ ,  $v_2 \in V_2$ .

Sei  $A$  eine assoziative  $\mathbb{C}$ -Algebra. Dann ist  $A$  auch eine assoziative  $\mathbb{R}$ -Algebra. Sprechen wir von einer *komplexen Algebrendarstellung* von  $A$ , so meinen wir eine Algebrendarstellung von  $A$  als  $\mathbb{C}$ -Algebra, d.h. einen Homomorphismus von  $\mathbb{C}$ -Algebren  $\rho: A \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(V)$ .

**Proposition 1.21** *Sei  $A$  eine assoziative  $K$ -Algebra mit Eins und  $\rho: A \rightarrow \text{End}_K(V)$  eine Algebrendarstellung. (Wegen  $\rho(1) = 1$  gilt insbesondere  $\rho \neq 0$ .) Dann gibt es einen  $K$ -Untervektorraum  $\{0\} \subsetneq W \subset V$  von  $V$ , der invariant unter  $\rho$  ist, derart, dass*

$$\rho: A \rightarrow \text{End}_K(W)$$

eine irreduzible Algebrendarstellung ist.

*Beweis.* Ist  $\rho$  irreduzibel, wählen wir  $W = V$  und wir sind fertig. Ist  $\rho$  reduzibel, so gibt es einen invarianten Untervektorraum  $\{0\} \subsetneq W_1 \subsetneq V$  von  $V$ , d.h.

$$\rho: A \rightarrow \text{End}_K(W_1)$$

ist eine Algebrendarstellung und  $0 < \dim_K(W_1) < \dim_K(V)$ . Ist  $\rho: A \rightarrow \text{End}_K(W_1)$  irreduzibel, sind wir fertig. Andernfalls gibt es einen invarianten Untervektorraum  $\{0\} \subsetneq W_2 \subsetneq W_1$  von  $W_1$ , d.h.

$$\rho: A \rightarrow \text{End}_K(W_2)$$

ist eine Algebrendarstellung mit  $0 < \dim_K(W_2) < \dim_K(W_1) < \dim_K(V)$ . Da  $V$  endlichdimensional ist, folgt nach endlich vielen Schritten die Behauptung. (Jede Algebrendarstellung  $\neq 0$  der Dimension 1 ist irreduzibel.)  $\square$

**Definition 1.22 (Komplexes Volumenelement)** *Es bezeichne  $(e_1, \dots, e_n)$  die Standardbasis von  $\mathbb{C}^n$  und  $[\cdot]$  die Gaußklammer. Dann nennen wir*

$$\omega_n := i^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} e_1 \cdot \dots \cdot e_n \in \mathbb{C}l_n$$

das komplexe Volumenelement von  $\mathbb{C}l_n$ .

Durch Einsetzen der Definition und Ausrechnen erhält man:

**Lemma 1.23** *Es gilt*

$$i) \ \omega_n^2 = 1.$$

$$ii) \ x \cdot \omega_n = (-1)^{n-1} \omega_n \cdot x \text{ für alle } x \in \mathbb{C}^n \subset \mathbb{C}l_n.$$

**Theorem 1.24** *Sei  $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ . Dann gilt:*

- i) Ist  $n = 2k$  gerade, so gibt es genau eine Äquivalenzklasse irreduzibler komplexer Algebrendarstellungen von  $\mathbb{C}l_n$  und jede irreduzible komplexe Algebrendarstellung von  $\mathbb{C}l_n$  hat die Dimension  $2^k$ .
- ii) Ist  $n = 2k + 1$  ungerade, so gibt es genau zwei unterschiedliche Äquivalenzklassen irreduzibler komplexer Algebrendarstellungen von  $\mathbb{C}l_n$  und jede irreduzible komplexe Algebrendarstellung von  $\mathbb{C}l_n$  hat die Dimension  $2^k$ .

Sei weiter  $\rho: \mathbb{C}l_n \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(\Sigma_n)$  eine irreduzible komplexe Algebrendarstellung von  $\mathbb{C}l_n$ <sup>7</sup>. Dann gilt entweder  $\rho(\omega_n) = id_{\Sigma_n}$  oder  $\rho(\omega_n) = -id_{\Sigma_n}$  und beide Fälle treten auf. Weiter sind die beiden Äquivalenzklassen durch  $\omega_n$  vollständig bestimmt, d.h. für irreduzible komplexe Algebrendarstellungen  $\rho_1$  und  $\rho_2$  von  $\mathbb{C}l_n$  gilt

$$\rho_1 \sim \rho_2 \Leftrightarrow \rho_1(\omega_n) = \rho_2(\omega_n).$$

*Beweis.* Es gibt Isomorphismen von  $\mathbb{C}$ -Algebren mit Eins

$$\mathbb{C}l_n \cong \begin{cases} \text{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{2^k}) & \text{falls } n = 2k \text{ gerade,} \\ \text{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{2^k}) \oplus \text{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{2^k}) & \text{falls } n = 2k + 1 \text{ ungerade,} \end{cases}$$

siehe [8, S. 13] oder [15, Kapitel 1, §4]. Zusammen mit der Darstellungstheorie von  $\text{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{2^k})$  folgt daraus i) und die erste Aussage in ii).

Sei  $n = 2k + 1$  ungerade und  $\rho: \mathbb{C}l_n \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(\Sigma_n)$  eine irreduzible komplexe Algebrendarstellung von  $\mathbb{C}l_n$ . Es gilt  $\rho(\omega_n)^2 = \rho(\omega_n^2) = id_{\Sigma_n}$ , d.h.  $\rho(\omega_n)$  ist eine Involution. Wir erhalten eine Zerlegung

$$\Sigma_n = \Sigma_n^+ \oplus \Sigma_n^-, \quad (1.2)$$

wobei  $\Sigma_n^{\pm}$  die  $\pm 1$ -Eigenräume von  $\rho(\omega_n)$  oder  $\{0\}$  sind. Für  $\sigma \in \Sigma_n^{\pm}$  und  $x \in \mathbb{C}^n$  folgt mit Lemma 1.23 ii) und da  $n$  ungerade ist

$$\rho(\omega_n)(\rho(x)(\sigma)) = \rho(\omega_n \cdot x)(\sigma) = \rho(x \cdot \omega_n)(\sigma) = \rho(x)(\rho(\omega_n)(\sigma)) = \pm \rho(x)(\sigma),$$

d.h.  $\rho(x)(\Sigma_n^{\pm}) \subset \Sigma_n^{\pm}$ . Aus (1.2) und der Irreduzibilität von  $\rho$  folgt, dass entweder  $\Sigma_n = \Sigma_n^+$  oder  $\Sigma_n = \Sigma_n^-$  gilt. Daraus ergibt sich unmittelbar, dass entweder  $\rho(\omega_n) = id_{\Sigma_n}$  oder  $\rho(\omega_n) = -id_{\Sigma_n}$  gilt.

Als Nächstes zeigen wir, dass beide Fälle auftreten. Dafür brauchen wir, dass

$$\mathbb{C}l_n = \mathbb{C}l_n^+ \oplus \mathbb{C}l_n^-,$$

wobei  $\mathbb{C}l_n^{\pm} := (1 \pm \omega_n)\mathbb{C}l_n$ . (Dies folgt, da die Abbildung  $\mathbb{C}l_n \rightarrow \mathbb{C}l_n$ ,  $x \mapsto \omega_n \cdot x$  eine Involution ist. Die  $\mathbb{C}l_n^{\pm}$  sind die  $\pm 1$ -Eigenräume dieser Abbildung.) Weiter sind  $\mathbb{C}l_n^+$  und  $\mathbb{C}l_n^-$  isomorph als Vektorräume und damit insbesondere  $\neq \{0\}$ . (Das folgt aus  $\alpha(\mathbb{C}l_n^{\pm}) = \mathbb{C}l_n^{\mp}$ , wobei  $\alpha$  der Algebrenisomorphismus aus Bemerkung 1.9 ist.) Wir betrachten nun die komplexen Algebrendarstellungen von  $\mathbb{C}l_n$

$$\rho_{\pm}: \mathbb{C}l_n \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}l_n^{\pm})$$

<sup>7</sup>Hier und im weiteren Verlauf der Arbeit ist  $\Sigma_n$  ein beliebiger Darstellungsraum in Dimension  $n$  und nicht fest gewählt.

gegeben durch  $\rho_{\pm}(x)(\sigma) := x \cdot \sigma$  für alle  $x \in \mathbb{C}l_n$  und alle  $\sigma \in \mathbb{C}l_n^{\pm}$ . Die Wohldefiniertheit von  $\rho_+$  und  $\rho_-$  sieht man wie folgt ein: Sei  $x \in \mathbb{C}^n \subset \mathbb{C}l_n$  und  $\sigma = (1 \pm \omega_n) \cdot y \in \mathbb{C}l_n^{\pm}$ ,  $y \in \mathbb{C}l_n$ . Dann ist wegen Lemma 1.23 ii) und da  $n$  ungerade ist

$$x \cdot \sigma = x \cdot (1 \pm \omega_n) \cdot y = (x1 \pm x \cdot \omega_n) \cdot y = (1x \pm \omega_n \cdot x) \cdot y = (1 \pm \omega_n) \cdot (x \cdot y) \in \mathbb{C}l_n^{\pm}.$$

Daraus folgt, dass für  $x \in \mathbb{C}l_n$  und  $\sigma \in \mathbb{C}l_n^{\pm}$  das Produkt  $x \cdot \sigma$  in  $\mathbb{C}l_n^{\pm}$  liegt und die Wohldefiniertheit ist gezeigt. Mit Hilfe von Lemma 1.23 i) sieht man, dass  $\rho_{\pm}(\omega_n) = \pm id_{\mathbb{C}l_n^{\pm}}$ . Nun wenden wir Proposition 1.21 auf  $\rho_{\pm}$  an. Damit ist gezeigt, dass beide Fälle auftreten. (Der Vollständigkeit halber sei angemerkt, dass  $\rho_{\pm}$  für  $n \neq 1$  (d.h.  $k \neq 0$ ) noch nicht irreduzibel sind, da

$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}l_n^{\pm}) = \frac{1}{2} \dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}l_n) = \frac{1}{2} 2^n = 2^{n-1} = 2^{2k}$$

und wir schon gezeigt haben, dass jede irreduzible komplexe Algebendarstellung von  $\mathbb{C}l_n$  die Dimension  $2^k$  hat.)

Schließlich folgt

$$\rho_1 \sim \rho_2 \Leftrightarrow \rho_1(\omega_n) = \rho_2(\omega_n)$$

für irreduzible komplexe Algebendarstellungen  $\rho_1$  und  $\rho_2$  von  $\mathbb{C}l_n$  daraus, dass beide Fälle auftreten und es nur zwei Äquivalenzklassen gibt. □

**Satz 1.25** Sei  $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ . Dann gilt:

- i) Sei  $n = 2k$  gerade und  $\rho: \mathbb{C}l_n \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(\Sigma_n)$  eine irreduzible komplexe Algebendarstellung von  $\mathbb{C}l_n$ . Dann gibt es eine Zerlegung  $\Sigma_n = \Sigma_n^+ \oplus \Sigma_n^-$  derart, dass  $\rho(x)(\Sigma_n^{\pm}) \subset \Sigma_n^{\pm}$  für alle  $x \in \mathbb{C}l_n^0$ . Weiter sind

$$\rho^{\pm}: \mathbb{C}l_n^0 \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(\Sigma_n^{\pm})$$

definiert durch  $\rho^{\pm}(x) = \rho(x)|_{\Sigma_n^{\pm}}$  irreduzibel und es gilt

$$\rho = \rho^+ \oplus \rho^-.$$

Insbesondere ist  $\rho|_{\mathbb{C}l_n^0}: \mathbb{C}l_n^0 \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(\Sigma_n)$  reduzibel.

- ii) Sei  $n = 2k + 1$  ungerade und seien  $\rho_i: \mathbb{C}l_n \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(\Sigma_n^i)$ ,  $i = 1, 2$  irreduzible komplexe Algebendarstellungen von  $\mathbb{C}l_n$ . Dann sind  $\rho_1|_{\mathbb{C}l_n^0}$  und  $\rho_2|_{\mathbb{C}l_n^0}$  irreduzibel und äquivalent.

*Beweis.* Zu i): Wie vorher ist  $\rho(\omega_n)^2 = 1$ , d.h.  $\rho(\omega_n)$  kann keine anderen Eigenwerte als  $\pm 1$  haben. Wir definieren nun

$$\Sigma_n^{\pm} := \{\sigma \in \Sigma_n \mid \rho(\omega_n)(\sigma) = \pm 1\}.$$

Die Untervektorräume  $\Sigma_n^{\pm}$  sind entweder Eigenräume oder  $\{0\}$ . Wir erhalten die Zerlegung

$$\Sigma_n = \Sigma_n^+ \oplus \Sigma_n^-.$$

Für jedes  $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$  sind die Abbildungen  $\rho(x): \Sigma_n^\pm \rightarrow \Sigma_n^\mp$  wohldefiniert (wegen Lemma 1.23 ii) und da  $n$  gerade ist) und Vektorraumisomorphismen mit den Umkehrabbildungen  $\rho(-\frac{x}{g_{\mathbb{C}}(x,x)}): \Sigma_n^\mp \rightarrow \Sigma_n^\pm$ . Insbesondere erhalten wir

$$\dim_{\mathbb{C}}(\Sigma_n^\pm) = \frac{1}{2} \dim_{\mathbb{C}}(\Sigma_n) = 2^{k-1},$$

sowie  $\rho(x)(\Sigma_n^\pm) \subset \Sigma_n^\pm$  für alle  $x \in \mathbb{C}l_n^0$ .

Zur Irreduzibilität von  $\rho^\pm$ : Mit Lemma 1.11 erhalten wir zwei komplexe Algebrendarstellungen

$$\mathbb{C}l_{n-1} \cong \mathbb{C}l_n^0 \xrightarrow{\rho^\pm} \text{End}_{\mathbb{C}}(\Sigma_n^\pm).$$

Wegen  $\dim_{\mathbb{C}}(\Sigma_n^\pm) = 2^{k-1}$  und Theorem 1.24 i) müssen diese beiden Darstellungen irreduzibel sein. (Andernfalls würden wir durch Anwendung von Proposition 1.21 einen Widerspruch erhalten.) Damit sind aber auch  $\rho^\pm: \mathbb{C}l_n^0 \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(\Sigma_n^\pm)$  irreduzibel.

Zu ii): Mit Hilfe von Lemma 1.11 erhalten wir wieder zwei komplexe Algebrendarstellungen

$$\mathbb{C}l_{n-1} \cong \mathbb{C}l_n^0 \xrightarrow{\rho^i} \text{End}_{\mathbb{C}}(\Sigma_n^i),$$

$i = 1, 2$ . Wie im Beweis von i) sind diese Algebrendarstellungen wegen  $\dim_{\mathbb{C}}(\Sigma_n^i) = 2^k$  irreduzibel. Damit sind auch  $\rho_1|_{\mathbb{C}l_n^0}$  und  $\rho_2|_{\mathbb{C}l_n^0}$  irreduzibel. Da  $n - 1$  gerade ist, folgt aus Theorem 1.24 i), dass die irreduziblen komplexen Algebrendarstellungen  $\mathbb{C}l_{n-1} \cong \mathbb{C}l_n^0 \xrightarrow{\rho^i} \text{End}_{\mathbb{C}}(\Sigma_n^i)$ ,  $i = 1, 2$ , äquivalent sind. Damit sind auch  $\rho_i|_{\mathbb{C}l_n^0}$ ,  $i = 1, 2$ , äquivalent.  $\square$

Im Folgenden wollen wir Darstellungen von  $\mathbb{C}l_n$  auf  $\text{Spin}(n)$  einschränken und so Darstellungen der *Liegruppe*  $\text{Spin}(n)$  erhalten. Dazu sei zunächst folgende Bemerkung gemacht:

**Bemerkung 1.26 (Spin( $n$ ) als Untermannigfaltigkeit)** Nach dem Beweis von Satz 1.18 ist  $\text{Spin}(n)$  eine eingebettete Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{C}l_n$ . Mit Hilfe von Proposition 1.13 können wir  $\text{Spin}(n)$  als eingebettete Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{C}l_n$  auffassen, indem wir  $\text{Spin}(n)$  mit dem Bild der Einbettung

$$i: \text{Spin}(n) \subset \mathbb{C}l_n \hookrightarrow \mathbb{C}l_n \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \mathbb{C}l_n$$

identifizieren, wobei  $\mathbb{C}l_n \hookrightarrow \mathbb{C}l_n \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$  wie gewöhnlich durch  $x \mapsto x \otimes 1$  gegeben ist.  $i$  ist als Komposition zweier Einbettungen mit einem Diffeomorphismus selbst eine Einbettung. Es gilt

$$i(x_1 \cdot \dots \cdot x_{2k}) = x_1 \cdot \dots \cdot x_{2k},$$

mit  $x_i \in S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ ,  $i = 1, \dots, 2k$ ,  $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ . Diese Identifikation ist also „natürlich“.

Es wird auch wichtig sein, dass wir  $\text{Spin}(n)$  als eingebettete Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{C}l_n^0$  auffassen können. Dazu nutzt man, dass  $\mathbb{C}l_n^0$  eine eingebettete Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{C}l_n$  ist (da  $\mathbb{C}l_n^0$  ein Untervektorraum von  $\mathbb{C}l_n$  ist) und erhält, dass  $\text{Spin}(n)$  auch eine eingebettete Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{C}l_n^0$  ist. Man bekommt wieder eine Einbettung

$$\text{Spin}(n) \subset \mathbb{C}l_n^0 \hookrightarrow \mathbb{C}l_n^0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \mathbb{C}l_n^0,$$

wobei man  $\mathbb{C}l_n^0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \mathbb{C}l_n^0$  durch Einschränkung des Isomorphismus aus Proposition 1.13 erhält.

**Lemma 1.27** Sei  $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$  und seien  $\rho_i: \mathbb{C}l_n \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(\Sigma_n^i)$ ,  $i = 1, 2$ , irreduzible komplexe Algebendarstellungen von  $\mathbb{C}l_n$ . Dann sind

$$\rho_i|_{\text{Spin}(n)}: \text{Spin}(n) \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{C}}(\Sigma_n^i),$$

$i = 1, 2$ , äquivalente Darstellungen der Liegruppe  $\text{Spin}(n)$ .

*Beweis.* Zunächst handelt es sich nach Bemerkung 1.26 um Darstellungen der Liegruppe  $\text{Spin}(n)$ . (Die  $\rho_i$  sind linear, also glatt.) Falls  $n$  gerade ist, folgt aus Theorem 1.24 i), dass  $\rho_1$  und  $\rho_2$  äquivalent sind und damit auch  $\rho_1|_{\text{Spin}(n)}$  und  $\rho_2|_{\text{Spin}(n)}$ . Wenn  $n$  ungerade ist, folgt aus Satz 1.25 ii), dass  $\rho_1|_{\mathbb{C}l_n^0}$  und  $\rho_2|_{\mathbb{C}l_n^0}$  äquivalent sind und deshalb auch wieder  $\rho_1|_{\text{Spin}(n)}$  und  $\rho_2|_{\text{Spin}(n)}$ .  $\square$

Nun definieren wir die sogenannte komplexe Spinordarstellung.

**Definition 1.28 (Komplexe Spinordarstellung)**

i) Sei  $n \geq 2$  gerade und  $\rho: \mathbb{C}l_n \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(\Sigma_n)$  eine irreduzible komplexe Algebendarstellung von  $\mathbb{C}l_n$ . Dann heißt die Einschränkung von  $\rho$  auf  $\text{Spin}(n)$  (diese bezeichnen wir wieder mit  $\rho$ )

$$\rho: \text{Spin}(n) \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{C}}(\Sigma_n)$$

komplexe Spinordarstellung (in Dimension  $n$ ).

ii) Sei  $n \geq 1$  ungerade und  $\rho: \mathbb{C}l_n \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(\Sigma_n)$  eine irreduzible komplexe Algebendarstellung von  $\mathbb{C}l_n$  mit  $\rho(\omega_n) = id_{\Sigma_n}$ . Dann heißt die Einschränkung von  $\rho$  auf  $\text{Spin}(n)$  (diese bezeichnen wir wieder mit  $\rho$ )

$$\rho: \text{Spin}(n) \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{C}}(\Sigma_n)$$

komplexe Spinordarstellung (in Dimension  $n$ ).

**Bemerkung 1.29**

- i) Die komplexe Spinordarstellung in Dimension  $n$  ist eindeutig bis auf Äquivalenz von Darstellungen. Wir identifizieren äquivalente Darstellungen und sprechen deshalb von *der* komplexen Spinordarstellung in Dimension  $n$ .
- ii) Man könnte in der Definition für ungerades  $n$  die Bedingung „ $\rho(\omega_n) = id_{\Sigma_n}$ “ weglassen und die komplexe Spinordarstellung wäre immer noch eindeutig bis auf Äquivalenz. Diese Bedingung wird aber später, bei der sogenannten Clifford-Multiplikation auf Spinorbündeln, eine Rolle spielen.
- iii) Für ungerades  $n \geq 1$  ist die komplexe Spinordarstellung irreduzibel (denn  $\rho|_{\mathbb{C}l_n^0}$  ist irreduzibel und aus  $\rho(x)(W) \subset W$  für alle  $x \in \text{Spin}(n)$  folgt  $\rho(x)(W) \subset W$  für alle  $x \in \mathbb{C}l_n^0$ , da  $\text{Spin}(n)$  eine Vektorraumbasis von  $\mathbb{C}l_n^0$  enthält).

Für gerades  $n \geq 2$  ist die komplexe Spinordarstellung reduzibel und sie spaltet auf in zwei irreduzible Darstellungen der Liegruppe  $\text{Spin}(n)$

$$\rho^{\pm}: \text{Spin}(n) \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{C}}(\Sigma_n^{\pm}).$$

Dabei sind  $\rho^{\pm}$  die Einschränkungen von  $\rho$  aus Satz 1.25 i) auf  $\text{Spin}(n)$ .

Ist  $V$  ein komplexer Vektorraum, so verstehen wir unter einem *Skalarprodukt auf  $V$*  eine positiv definite, hermitesche Sesquilinearform.

**Proposition 1.30** *Sei  $\rho: \mathbb{C}l_n \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(\Sigma_n)$  eine irreduzible komplexe Algebendarstellung von  $\mathbb{C}l_n$ . Dann gilt: Jedes Skalarprodukt auf  $\Sigma_n$  induziert ein Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Sigma_n}$  auf  $\Sigma_n$ , für das gilt:*

$$\langle \rho(x)(\psi), \varphi \rangle_{\Sigma_n} = -\langle \psi, \rho(x)(\varphi) \rangle_{\Sigma_n}$$

für alle  $x \in \mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n \subset \mathbb{C}l_n$  und alle  $\psi, \varphi \in \Sigma_n$ . Insbesondere gilt

$$\langle \rho(u)(\psi), \rho(u)(\varphi) \rangle_{\Sigma_n} = \langle \psi, \varphi \rangle_{\Sigma_n}$$

für alle  $u \in \text{Spin}(n)$ .

*Beweis.* Siehe [11, Proposition 2.26 und 2.27]. □

## 1.4 Spinstrukturen

In diesem Abschnitt definieren wir zunächst lokal triviale Faserungen und geben ein Lemma zur Konstruktion dieser an, das oft nützlich sein wird, z.B. wenn wir die sogenannten Rahmenbündel konstruieren. Spezialfälle von lokal trivialen Faserungen sind Vektorraum-bündel (grundlegendes Wissen über diese wird hier vorausgesetzt) und Hauptfaserbündel. Spinstrukturen sind dann schließlich spezielle Hauptfaserbündel.

**Definition 1.31 (lokal triviale Faserung)** *Eine lokal triviale Faserung ist ein Tupel  $(P, \pi, M, F)$  mit folgenden Eigenschaften*

- i)  $F$  ist eine Mannigfaltigkeit und  $\pi: P \rightarrow M$  ist eine glatte Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten.*
- ii) Zu jedem  $x \in M$  gibt es eine Umgebung<sup>8</sup>  $U \subset M$  von  $x$  in  $M$  und einen Diffeomorphismus  $\phi: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times F$  mit  $\text{pr}_1 \circ \phi = \pi$ .*

Die Mannigfaltigkeit  $F$  nennt man *Fasertyp*,  $M$  heißt *Basis* und  $\pi: P \rightarrow M$  *Projektion*. Das Paar  $(U, \phi)$  aus der Definition nennt man *lokale Trivialisierung (über  $U$ )*.

Unter einem *Schnitt* verstehen wir eine glatte Abbildung  $s: M \rightarrow P$  mit  $\pi \circ s = \text{id}_M$ . Die Menge der Schnitte bezeichnen wir mit  $\Gamma(P)$ . Ein *lokaler Schnitt* ist eine glatte Abbildung  $s: U \rightarrow P$  mit  $\pi \circ s = \text{id}_U$ , wobei  $U \subset M$  offen ist.

Aus *ii)* folgt:  $\pi: P \rightarrow M$  ist surjektiv und eine Submersion. Damit ist die *Faser über  $x \in M$* ,  $P_x := \pi^{-1}(x) \subset P$ , eine eingebettete Untermannigfaltigkeit von  $P$  (Satz vom regulären Wert) und  $T_p(P_x) = \ker(d\pi_p)$  für alle  $p \in P_x$ .

Für  $U \subset M$  beliebig setzen wir  $P_U := \pi^{-1}(U)$ .

**Lemma 1.32** *Seien  $M$  und  $F$  Mannigfaltigkeiten,  $P$  eine Menge und  $\pi: P \rightarrow M$  eine Abbildung. Weiter gebe es eine offene Überdeckung  $(U_i)_{i \in I}$  von  $M$  und zu jedem  $i \in I$  eine bijektive Abbildung  $\phi_i: \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times F$  mit  $\text{pr}_1 \circ \phi_i = \pi$ , derart, dass*

$$\phi_i \circ \phi_k^{-1}: (U_i \cap U_k) \times F \rightarrow (U_i \cap U_k) \times F$$

<sup>8</sup>Eine Umgebung eines Punktes  $x$  ist in dieser Arbeit eine offene Menge, die  $x$  enthält.

für alle  $i, k \in I$  glatte Abbildungen sind. Dann kann man eine Topologie und Mannigfaltigkeitsstruktur auf  $P$  so definieren, dass  $(P, \pi, M, F)$  eine lokal triviale Faserung wird und die  $(U_i, \phi_i)_{i \in I}$  lokale Trivialisierungen sind.

**Definition 1.33 (Pullback von Faserbündeln)** Sei  $(P, \pi, M, F)$  eine lokal triviale Faserung und  $f: N \rightarrow M$  eine glatte Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten. Dann setzen wir

$$f^*P := \{(n, p) \in N \times P \mid f(n) = \pi(p)\}.$$

Wir haben das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} f^*P & \xrightarrow{\bar{f}} & P \\ \downarrow \bar{\pi} & & \downarrow \pi \\ N & \xrightarrow{f} & M \end{array}$$

wobei  $\bar{\pi}(n, p) := n$ ,  $\bar{f}(n, p) := p$ . Seien  $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$  lokale Trivialisierungen von  $P$  mit  $\bigcup_{i \in I} U_i = M$ . Wir definieren

$$\begin{aligned} \phi_i: \bar{\pi}^{-1}(f^{-1}(U_i)) &\rightarrow f^{-1}(U_i) \times F, \\ (n, p) &\mapsto (n, pr_2(\varphi_i(p))). \end{aligned}$$

Dann erfüllt  $(f^{-1}(U_i), \phi_i)_{i \in I}$  die Voraussetzungen von Lemma 1.32. Dadurch wird  $(f^*P, \bar{\pi}, N, F)$  zu einer lokal trivialen Faserung, dem Pullback von  $P$  entlang  $f$ . Insbesondere gilt: Ist  $(U, \varphi)$  eine beliebige lokale Trivialisierung von  $P$ , so ist  $(f^{-1}(U), \phi)$  mit

$$\begin{aligned} \phi: \bar{\pi}^{-1}(f^{-1}(U)) &\rightarrow f^{-1}(U) \times F, \\ (n, p) &\mapsto (n, pr_2(\varphi(p))). \end{aligned}$$

eine lokale Trivialisierung von  $f^*P$ .

Nun können wir lokal triviale Faserungen auch auf Untermannigfaltigkeiten einschränken:

**Definition 1.34 (Einschränkung von lokal trivialen Faserungen)** Sei  $(P, \pi, M, F)$  eine lokal triviale Faserung,  $N \subset M$  eine immersierte oder eingebettete Untermannigfaltigkeit von  $M$  und  $i: N \rightarrow M$  die Inklusionsabbildung. Dann bezeichnen wir den Pullback von  $P$  entlang  $i$  als die Einschränkung von  $P$  auf  $N$  und schreiben  $P|_N := i^*P$ .

Da  $(n, p) \in i^*P$  äquivalent ist zu  $p \in \pi^{-1}(n)$ ,  $n \in N$ , ist es möglich  $i^*P$  als Menge mit dem Urbild  $P_N = \pi^{-1}(N)$  zu identifizieren. Wir bemerken, dass  $P|_N$  und  $P_N$  formal nicht gleich sind.

Es sei an folgende Definition erinnert:

**Definition 1.35** Sei  $G$  eine Liegruppe und  $P$  eine Mannigfaltigkeit. Eine Rechtswirkung von  $G$  auf  $P$  ist eine glatte Abbildung

$$P \times G \rightarrow P, \quad (x, g) \mapsto x \cdot g,$$

mit folgenden Eigenschaften:

i)  $(x \cdot g) \cdot h = x \cdot (gh)$  für alle  $x \in P$  und alle  $g, h \in G$ .

ii)  $x \cdot e = x$  für alle  $x \in P$  und für das neutrale Element  $e \in G$ .

Liegt eine Rechtswirkung von  $G$  auf  $P$  vor, sagen wir,  $G$  wirkt von rechts auf  $P$ . Weiter ist die Rechtswirkung von  $G$  auf  $P$  einfach transitiv, falls es für alle  $x, y \in P$  genau ein  $g \in G$  mit  $x \cdot g = y$  gibt.

Linkswirkungen werden analog definiert. Eine Rechts- oder Linkswirkung von  $G$  auf  $P$  nennen wir auch  $G$ -Wirkung (auf  $P$ ).

**Definition 1.36 (Hauptfaserbündel)** Ein Hauptfaserbündel ist ein Tupel  $(P, \pi, M, G)$  mit folgenden Eigenschaften:

i)  $G$  ist eine Liegruppe und  $\pi: P \rightarrow M$  ist eine glatte Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten.

ii) Die Liegruppe  $G$  wirkt von rechts auf der Mannigfaltigkeit  $P$ . Die Wirkung ist faser-treu (d.h. für alle  $p \in M$ ,  $x \in \pi^{-1}(p)$  und alle  $g \in G$  ist  $x \cdot g \in \pi^{-1}(p)$ ) und einfach transitiv auf den Fasern.

iii) Zu jedem Punkt  $x \in M$  gibt es eine offene Umgebung  $U \subset M$  von  $x$  und einen Diffeomorphismus

$$\phi: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times G, \quad p \mapsto (\pi(p), \varphi(p)),$$

derart, dass

$$\phi(pg) = (\pi(pg), \varphi(pg)) = (\pi(p), \varphi(p)g)$$

für alle  $p \in \pi^{-1}(U)$  und alle  $g \in G$ .

Man nennt  $G$  Strukturgruppe. Wollen wir die Strukturgruppe hervorheben, schreiben wir auch „ $G$ -Hauptfaserbündel“ anstatt „Hauptfaserbündel“. Das Paar  $(U, \phi)$  aus der Definition nennt man wieder *lokale Trivialisierung (über  $U$ )*. Manchmal nennen wir  $(U, \phi)$  auch *lokale Trivialisierung des Hauptfaserbündels  $P$*  um hervorzuheben, dass wir nicht von einer lokalen Trivialisierung im Sinne von Definition 1.31 sprechen.

Seien  $(P, \pi_P, M, G)$  und  $(Q, \pi_Q, M, G)$  zwei Hauptfaserbündel. Ein  $G$ -äquivarianter Diffeomorphismus  $F: P \rightarrow Q$  heißt *Isomorphismus von Hauptfaserbündeln*, falls  $\pi_Q \circ F = \pi_P$  gilt.

Der Pullback eines  $G$ -Hauptfaserbündels ist wieder ein  $G$ -Hauptfaserbündel, wenn wir  $(n, p) \cdot g := (n, p \cdot g)$  für  $(n, p) \in f^*P$  setzen. Die lokalen Trivialisierungen aus Definition 1.33 sind dann lokale Trivialisierungen des Hauptfaserbündels  $f^*P$ .

**Bemerkung 1.37 (Lokale Trivialisierungen und Schnitte)** Es gibt folgende, nützliche Beziehung zwischen lokalen Trivialisierungen eines Hauptfaserbündels und lokalen Schnitten: Ist  $(U, \phi)$  eine lokale Trivialisierung des Hauptfaserbündels  $P$ , so definiert  $s(x) := \phi^{-1}(x, e)$ ,  $x \in U$ , einen lokalen Schnitt. Sei andererseits  $s: U \rightarrow P$  ein lokaler Schnitt. Dann definieren wir

$$\begin{aligned} \phi: U \times G &\rightarrow \pi^{-1}(U), \\ (x, g) &\mapsto s(x) \cdot g, \end{aligned}$$

und behaupten, dass  $(U, \phi^{-1})$  eine lokale Trivialisierung des Hauptfaserbündels  $P$  ist. Die Glattheit von  $\phi$  sieht man leicht und die Bijektivität ergibt sich daraus, dass die Gruppenwirkung einfach transitiv auf den Fasern ist. Um einzusehen, dass  $\phi$  ein Diffeomorphismus ist, definieren wir auf  $U \times G$  eine transitive Wirkung von  $G$  durch  $(x, a) \cdot g := (x, ag)$ . Das macht aus  $\phi$  eine äquivariante Abbildung (auf  $\pi^{-1}(U)$  haben wir die Wirkung von  $G$  auf  $P$ ). Aus dem Theorem über den Rang von äquivarianten Abbildungen [16, Theorem 7.25] folgt, dass  $\phi$  konstanten Rang hat und ein Diffeomorphismus ist.

### Beispiel 1.38

- i) Das *triviale  $G$ -Hauptfaserbündel*  $(M \times G, pr_1, M, G)$  ist ein Hauptfaserbündel.  
 ii) Das *Rahmenbündel*  $GLM$  einer Mannigfaltigkeit  $M$ :

Sei  $M$  eine  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit. Für  $x \in M$  definieren wir

$$(GLM)_x := \{\text{Basen von } T_x M\}$$

und setzen

$$GLM := \bigsqcup_{x \in M} (GLM)_x$$

als die disjunkte Vereinigung aller  $(GLM)_x$ .

Weiter definieren wir eine Abbildung

$$\pi: GLM \rightarrow M, \quad b \mapsto x,$$

für  $b \in (GLM)_x$ .

Schließlich definieren wir eine  $GL(n, \mathbb{R})$ -Wirkung auf  $GLM$  durch

$$GLM \times GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow GLM, \\ ((b_1, \dots, b_n), A) \mapsto \left( \sum_{i=1}^n b_i A_{i1}, \dots, \sum_{i=1}^n b_i A_{in} \right),$$

wobei  $(b_1, \dots, b_n)$  eine Basis von  $T_x M$  ist. Die Wohldefiniertheit rechnet man leicht nach unter Beachtung, dass die Spalten von  $A$  linear unabhängig sind. Die Wirkung ist offenbar fasertreu und einfach transitiv auf den Fasern (für zwei Basen  $b, b'$  wähle  $A$  als die Basiswechsellmatrix, dann gilt  $b \cdot A = b'$ ).

Seien  $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$  lokale Trivialisierungen von  $TM$  mit  $\bigcup_{i \in I} U_i = M$ . Wir definieren

$$\phi_i: \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times GL(n, \mathbb{R}) \\ (b_1, \dots, b_n) \mapsto (x, (\varphi_i(b_1) \dots \varphi_i(b_n)))$$

wobei  $(b_1, \dots, b_n)$  eine Basis von  $T_x M$  ist,  $x \in U_i$  und  $(\varphi_i(b_1) \dots \varphi_i(b_n))$  die Matrix mit den Spaltenvektoren  $\varphi_i(b_j)$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Dann erfüllt  $(U_i, \phi_i)_{i \in I}$  die Voraussetzungen aus Lemma 1.32 und wir definieren die Topologie und Mannigfaltigkeitsstruktur auf  $GLM$  dadurch.

So wird  $(GLM, \pi, M, GL(n, \mathbb{R}))$  zu einem Hauptfaserbündel, dem *Rahmenbündel von  $M$* . Insbesondere gilt: Ist  $(U, \varphi)$  eine *beliebige* lokale Trivialisierung von  $TM$ , so ist  $(U, \phi)$  mit

$$\begin{aligned}\phi: \pi^{-1}(U) &\rightarrow U \times GL(n, \mathbb{R}) \\ (b_1, \dots, b_n) &\mapsto (x, (\varphi(b_1) \dots \varphi(b_n)))\end{aligned}$$

eine lokale Trivialisierung von  $GLM$ .

- iii) Das *Bündel der positiv orientierten orthonormalen Rahmen SOM* einer orientierten Riemannschen Mannigfaltigkeit<sup>9</sup>  $M$ :

Sei  $M$  eine  $n$ -dimensionale orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit. Für  $x \in M$  definieren wir

$$(SOM)_x := \{\text{positiv orientierte Orthonormalbasen von } T_x M\}$$

und setzen

$$SOM := \bigsqcup_{x \in M} (SOM)_x$$

als die disjunkte Vereinigung aller  $(SOM)_x$ .

Weiter definieren wir wieder eine Abbildung

$$\pi: SOM \rightarrow M, \quad b \mapsto x,$$

für  $b \in (SOM)_x$ .

Analog definieren wir eine  $SO(n, \mathbb{R})$ -Wirkung auf  $SOM$  durch

$$\begin{aligned}SOM \times SO(n, \mathbb{R}) &\rightarrow SOM, \\ ((b_1, \dots, b_n), A) &\mapsto \left( \sum_{i=1}^n b_i A_{i1}, \dots, \sum_{i=1}^n b_i A_{in} \right),\end{aligned}$$

wobei  $(b_1, \dots, b_n)$  eine positiv orientierte Orthonormalbasis von  $T_x M$  ist. Diese Wirkung ist fasertreu und einfach transitiv auf den Fasern. (Für die Wohldefiniertheit und die einfache Transitivität muss man etwas mehr zeigen als im Fall von  $GLM$ , es folgt aber alles mit Hilfe etwas linearer Algebra.)

Seien  $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$  lokale Trivialisierungen von  $TM$ , so dass für alle  $i \in I$  und alle  $x \in U_i$  der Vektorraumisomorphismus  $\varphi_i|_{T_x M}: T_x M \rightarrow \mathbb{R}^n$  orientierungserhaltend ist und  $\bigcup_{i \in I} U_i = M$ . Um die lokalen Trivialisierungen von  $SOM$  zu konstruieren, müssen wir die  $\varphi_i$  noch „verbessern“.

Dazu wenden wir für jedes  $i \in I$  und jedes  $x \in U_i$  das Gram-Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren auf die positiv orientierte Basis

$$((\varphi_i|_{T_x M})^{-1}(e_1), \dots, (\varphi_i|_{T_x M})^{-1}(e_n))$$

von  $T_x M$  an, wobei  $(e_1, \dots, e_n)$  die Standardbasis im  $\mathbb{R}^n$  bezeichne. Die so erhaltenen positiv orientierten Orthonormalbasen von  $T_x M$  bezeichnen wir mit

<sup>9</sup>In dieser Arbeit sind Riemannsche Metriken stets glatt.

$(s_1^i(x), \dots, s_n^i(x))$  für  $x \in U$ ,  $i \in I$ . Es sind dann  $(U_i, \tilde{\varphi}_i)_{i \in I}$  lokale Trivialisierungen von  $TM$ , wobei

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_i^{-1}: U_i \times \mathbb{R}^n &\rightarrow TM_{U_i}, \\ (x, \sum_{k=1}^n v_k e_k) &\mapsto \sum_{k=1}^n v_k s_k^i(x). \end{aligned}$$

Nach Konstruktion sind die  $\tilde{\varphi}_i|_{T_x M}: T_x M \rightarrow \mathbb{R}^n$  orientierungserhaltende Isometrien. Nun definieren wir wie im Fall von  $GL(M)$ :

$$\begin{aligned} \phi_i: \pi^{-1}(U_i) &\rightarrow U_i \times SO(n, \mathbb{R}) \\ (b_1, \dots, b_n) &\mapsto (x, (\tilde{\varphi}_i(b_1) \dots \tilde{\varphi}_i(b_n))) \end{aligned}$$

wobei  $(b_1, \dots, b_n)$  eine positiv orientierte Orthonormalbasis von  $T_x M$  ist,  $x \in U_i$ .

Dann erfüllt  $(U_i, \phi_i)_{i \in I}$  die Voraussetzungen aus Lemma 1.32 und wir definieren die Topologie und Mannigfaltigkeitsstruktur auf  $SOM$  dadurch.

So wird  $(SOM, \pi, M, SO(n, \mathbb{R}))$  zu einem Hauptfaserbündel, dem *Bündel der positiv orientierten orthonormalen Rahmen von  $M$* . Insbesondere gilt: Ist  $(U, \varphi)$  eine beliebige lokale Trivialisierung von  $TM$ , so dass  $\varphi|_{T_x M}: T_x M \rightarrow \mathbb{R}^n$  für alle  $x \in U$  eine orientierungserhaltende Isometrie ist, so ist  $(U, \phi)$  mit

$$\begin{aligned} \phi: \pi^{-1}(U) &\rightarrow U \times SO(n, \mathbb{R}) \\ (b_1, \dots, b_n) &\mapsto (x, (\varphi(b_1) \dots \varphi(b_n))) \end{aligned}$$

eine lokale Trivialisierung von  $SOM$ . Wollen wir die Riemannsche Metrik  $g$  auf  $M$  hervorheben, schreiben wir auch  $SO(M, g) = SOM$ .

**Definition 1.39 (Reduktion)** Sei  $(P, \pi_P, M, G)$  ein Hauptfaserbündel und  $f: H \rightarrow G$  ein Homomorphismus von Liegruppen. Eine  $f$ -Reduktion von  $P$  ist ein Paar  $(Q, \eta)$  mit folgenden Eigenschaften

- i)  $Q$  ist ein  $H$ -Hauptfaserbündel  $(Q, \pi_Q, M, H)$ .
- ii)  $\eta: Q \rightarrow P$  ist eine glatte Abbildung mit  $\pi_P \circ \eta = \pi_Q$ .
- iii)  $\eta(q \cdot h) = \eta(q) \cdot f(h)$  für alle  $q \in Q$  und alle  $h \in H$ .

**Definition 1.40 (Spinstruktur)** Sei  $M$  eine  $n$ -dimensionale orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit. Eine Spinstruktur auf  $M$  ist eine Ad-Reduktion des Rahmenbündels  $(SOM, \pi, M, SO(n, \mathbb{R}))$ , wobei  $\text{Ad}: \text{Spin}(n) \rightarrow SO(n, \mathbb{R})$  die Abbildung aus Proposition 1.15 ist.

Existiert auf  $M$  eine Spinstruktur, so nennen wir  $M$  zusammen mit einer festen Spinstruktur *Spinmannigfaltigkeit* oder wir sagen  $M$  ist *spin*.

Eine Spinstruktur auf  $M$  ist also ein Tupel  $(\text{Spin}M, \eta)$ , wobei  $\eta: \text{Spin}M \rightarrow SOM$  eine glatte Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten ist und  $(\text{Spin}M, \tilde{\pi}, M, \text{Spin}(n))$  ein  $\text{Spin}(n)$ -Hauptfaserbündel derart, dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc}
\text{Spin}M \times \text{Spin}(n) & \longrightarrow & \text{Spin}M \\
\downarrow \eta \times \text{Ad} & & \downarrow \eta \\
\text{SOM} \times \text{SO}(n, \mathbb{R}) & \longrightarrow & \text{SOM}
\end{array}
\begin{array}{c}
\searrow \tilde{\pi} \\
\nearrow \pi \\
M
\end{array}$$

Dabei sind die horizontalen Abbildungen die Gruppenwirkungen auf den jeweiligen Hauptfaserbündeln.

Ist  $(\text{Spin}M, \eta)$  eine Spinstruktur auf  $M$ , so ist  $\eta: \text{Spin}M \rightarrow \text{SOM}$  eine zweifache Überlagerung. Um das einzusehen, sei  $\tilde{s}: U \rightarrow \text{Spin}M$  ein lokaler Schnitt. Dann ist  $s := \eta \circ \tilde{s}: U \rightarrow \text{SOM}$  auch ein lokaler Schnitt. Wir erhalten lokale Trivialisierungen  $\tilde{\phi}$  und  $\phi$ , gegeben durch

$$\tilde{\phi}^{-1}: U \times \text{Spin}(n) \rightarrow \text{Spin}M_U, \quad (x, g) \mapsto \tilde{s}(x) \cdot g,$$

und

$$\phi^{-1}: U \times \text{SO}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \text{SOM}_U, \quad (x, A) \mapsto s(x) \cdot A,$$

siehe Bemerkung 1.37. Die Abbildung

$$\begin{aligned}
\phi \circ \eta \circ \tilde{\phi}^{-1}: U \times \text{Spin}(n) &\rightarrow U \times \text{SO}(n, \mathbb{R}), \\
(x, g) &\mapsto (x, \text{Ad}(g))
\end{aligned}$$

ist eine zweifache Überlagerung, da  $\text{Ad}: \text{Spin}(n) \rightarrow \text{SO}(n, \mathbb{R})$  eine zweifache Überlagerung ist. Da  $\phi$  und  $\tilde{\phi}$  insbesondere Diffeomorphismen sind, ist

$$\eta: \text{Spin}M_U \rightarrow \text{SOM}_U$$

eine zweifache Überlagerung, und damit auch  $\eta: \text{Spin}M \rightarrow \text{SOM}$ .

Wollen wir die Riemannsche Metrik  $g$  auf  $M$  hervorheben, schreiben wir auch  $\text{Spin}(M, g) = \text{Spin}M$ .

### Beispiel 1.41

- i) Für alle  $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$  ist der  $\mathbb{R}^n$  eine Spinmannigfaltigkeit: Es ist  $\text{SO}\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n \times \text{SO}(n, \mathbb{R})$  und

$$(\text{Spin}\mathbb{R}^n, \eta) := (\mathbb{R}^n \times \text{Spin}(n), id_{\mathbb{R}^n} \times \text{Ad})$$

eine Spinstruktur.

Den Isomorphismus  $\text{SO}\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n \times \text{SO}(n, \mathbb{R})$  erhält man wie folgt: Es ist  $\varphi: T\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  mit  $\varphi(\sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial x_i} |_p) = (p, v)$  die bekannte globale Trivialisierung von  $T\mathbb{R}^n$ , wobei die  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  bezüglich der Karte  $x = id_{\mathbb{R}^n}$  gebildet werden. Die Trivialisierung  $\varphi$  induziert nach Beispiel 1.38 iii) eine globale Trivialisierung (diese ist unser Isomorphismus)  $\text{SO}\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n \times \text{SO}(n, \mathbb{R})$ ,  $(b_1, \dots, b_n) \mapsto (p, (b_1 \dots b_n))$ , wobei  $(b_1, \dots, b_n)$  eine positiv orientierte Orthonormalbasis von  $T_p\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$  ist.

- ii) Wir geben zwei Spinstrukturen auf der Sphäre  $S^1 \subset \mathbb{C}$  an. Zunächst ist die Projektion  $\pi: \text{SOS}^1 \rightarrow S^1$  ein Diffeomorphismus und wir identifizieren der Einfachheit halber  $\text{SOS}^1 = S^1$ . Dann ist  $\eta: S^1 \rightarrow S^1$ ,  $\eta(x) := x^2$  für alle  $x \in S^1 \subset \mathbb{C}$ , eine Spinstruktur auf  $S^1$ . Eine weitere Spinstruktur auf  $S^1$  ist gegeben durch  $\eta = pr_1: S^1 \times \{\pm 1\} \rightarrow S^1$ .

**Beispiel 1.42 (Spinstruktur auf Liegruppen mit linksinvarianten Metriken)** Wir betrachten  $(G, h)$ , wobei  $G$  eine  $n$ -dimensionale zusammenhängende orientierte Liegruppe und  $h$  eine linksinvariante Riemannsche Metrik auf  $G$  ist. Wir haben einen Isomorphismus von Vektorraumbündeln

$$\varphi: G \times T_e G \rightarrow TG, \quad (g, X) \mapsto d(L_g)X.$$

(Dabei bezeichnet  $L_g$  die Linkstranslation mit  $g$ .) Da  $h$  linksinvariant ist, ist  $L_g$  eine Isometrie. Da  $G$  zusammenhängend ist, ist  $L_g$  orientierungserhaltend. (Genauer:  $G$  ist zusammenhängend und orientierbar, also gibt es genau zwei Orientierungen auf  $G$ . Weiter gibt es auf  $G$  genau zwei linksinvariante Orientierungen, siehe [16, Proposition 15.19]. Damit ist jede Orientierung auf  $G$  linksinvariant.) Nach Beispiel 1.38 iii) induziert  $\varphi$  eine globale Trivialisierung

$$SO(G) \cong G \times SO(n, \mathbb{R})$$

und  $(G \times \text{Spin}(n), id_G \times \text{Ad})$  ist eine Spinstruktur auf  $G$ .

**Definition 1.43 (Äquivalenz von Reduktionen)** Sei  $P$  ein  $G$ -Hauptfaserbündel,  $f: H \rightarrow G$  ein Homomorphismus von Liegruppen. Zwei  $f$ -Reduktionen  $(Q_1, \eta_1)$  und  $(Q_2, \eta_2)$  von  $P$  heißen äquivalent, wenn es einen Isomorphismus von  $H$ -Hauptfaserbündeln  $F: Q_1 \rightarrow Q_2$  mit  $\eta_2 \circ F = \eta_1$  gibt. Den Isomorphismus  $F$  nennt man Isomorphismus von Reduktionen.

Äquivalenz von Reduktionen definiert eine Äquivalenzrelation auf der Menge der  $f$ -Reduktionen von  $P$ . Die Menge der Äquivalenzklassen bezeichnen wir mit  $\text{Red}_f(P)$ . Wir nennen zwei Spinstrukturen auf  $M$  äquivalent, wenn sie äquivalent als Reduktionen sind.

**Satz 1.44** Sei  $M$  eine einfach zusammenhängende orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann existiert höchstens eine Spinstruktur auf  $M$ , wobei wir äquivalente Spinstrukturen identifizieren.

*Beweis.* Siehe [15, Theorem 2.1] □

## 1.5 Spinorbündel

In diesem Abschnitt definieren wir sogenannte Spinorbündel. Das sind zu Spinstrukturen assoziierte komplexe Vektorraumbündel. Dazu benötigen wir zunächst die Begriffe „assoziertes Faserbündel“ und „assoziertes Vektorraumbündel“.

**Definition 1.45 (Assoziiertes Faserbündel)** Sei  $(P, \pi, M, G)$  ein Hauptfaserbündel und wirke die Liegruppe  $G$  von links auf der Mannigfaltigkeit  $F$ . Dann wirkt die Gruppe  $G$  von rechts auf der Menge  $P \times F$  durch

$$(p, v) \cdot g := (p \cdot g, g^{-1} \cdot v).$$

Mit  $P \times_G F := (P \times F)/G$  bezeichnen wir den dazugehörigen Faktorraum und mit  $[p, v]$  die Äquivalenzklasse von  $(p, v)$ . Weiter definieren wir eine Abbildung

$$\hat{\pi}: P \times_G F \rightarrow M, \quad [p, v] \mapsto \pi(p).$$

Seien  $(U_i, \psi_i)_{i \in I}$  lokale Trivialisierungen des Hauptfaserbündels  $P$ ,

$$\begin{aligned} \psi_i: \pi^{-1}(U_i) &\rightarrow U_i \times G, \\ p &\mapsto (\pi(p), \varphi_i(p)), \end{aligned}$$

mit  $\bigcup_{i \in I} U_i = M$ . Wir definieren für jedes  $i \in I$  eine Abbildung

$$\begin{aligned} \phi_i: \hat{\pi}^{-1}(U_i) &\rightarrow U_i \times F, \\ [p, v] &\mapsto (\pi(p), \varphi_i(p) \cdot v). \end{aligned}$$

Dann erfüllt  $(U_i, \phi_i)_{i \in I}$  die Voraussetzungen von Lemma 1.32 und damit definieren wir die Topologie und Mannigfaltigkeitsstruktur auf  $P \times_G F$ .

Dadurch wird  $(P \times_G F, \hat{\pi}, M)$  zu einem lokal trivialen Faserbündel, das zu dem Hauptfaserbündel  $P$  und der Wirkung assoziierte Faserbündel. Insbesondere gilt: Ist  $(U, \psi)$  eine beliebige lokale Trivialisierung des Hauptfaserbündels  $P$ ,

$$\begin{aligned} \psi: \pi^{-1}(U) &\rightarrow U \times G, \\ p &\mapsto (\pi(p), \varphi(p)), \end{aligned}$$

so ist  $(U, \phi)$  mit

$$\begin{aligned} \phi: \hat{\pi}^{-1}(U) &\rightarrow U \times F, \\ [p, v] &\mapsto (\pi(p), \varphi(p) \cdot v) \end{aligned}$$

eine lokale Trivialisierung von  $P \times_G F$ .

Hat die Linkswirkung von  $G$  auf  $F$  „mehr Struktur“, so können wir aus dem assoziierten Faserbündel ein Vektorraumbündel oder ein Hauptfaserbündel machen. Beide Fälle sind für uns wichtig und wir beginnen damit, aus dem assoziierten Faserbündel ein Vektorraumbündel zu machen:

**Definition 1.46 (Assoziiertes Vektorraumbündel)** Sei  $(P, \pi, M, G)$  ein Hauptfaserbündel,  $V$  ein endlichdimensionaler  $\mathbb{K}$ -Vektorraum,  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$  und  $\rho: G \rightarrow GL(V)$  eine Darstellung der Liegruppe  $G$ . Dann definiert  $\rho$  eine Linkswirkung der Liegruppe  $G$  auf der Mannigfaltigkeit  $V$  durch

$$g \cdot v := \rho(g)(v).$$

Wir bilden das dazugehörige assoziierte Faserbündel  $P \times_G V$  und setzen

$$P \times_\rho V := P \times_G V.$$

Die Fasern  $\hat{\pi}^{-1}(x) = \{[p, v] \mid p \in \pi^{-1}(x), v \in V\}$  werden wie folgt mit einer  $\mathbb{K}$ -Vektorraumstruktur versehen: Seien  $[p, v], [q, w] \in \hat{\pi}^{-1}(x)$ . Da  $G$  auf der Faser  $\pi^{-1}(x)$

transitiv operiert, können wir wegen der Definition der Äquivalenzrelation von  $p = q$  ausgehen. Es ist dann wohldefiniert:

$$\lambda[p, v] + \mu[p, w] := [p, \lambda v + \mu w]$$

für alle  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ . Dadurch wird  $(P \times_{\rho} V, \hat{\pi}, M)$  zu einem  $\mathbb{K}$ -Vektorraumbündel, das zu dem Hauptfaserbündel  $P$  und der Darstellung  $\rho$  assoziierte Vektorraumbündel, wobei die  $(U_i, \phi_i)_{i \in I}$  aus Definition 1.45 lokale Trivialisierungen des Vektorraumbündels  $P \times_G H$  sind.

### Beispiel 1.47

- i) Für das triviale  $G$ -Hauptfaserbündel  $(M \times G, pr_1, M, G)$  erhalten wir einen Isomorphismus von Vektorraumbündeln

$$(M \times G) \times_{\rho} V \cong M \times V$$

für jede Darstellung  $\rho: G \rightarrow GL(V)$ .

- ii) Sei  $M$  eine  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit. Dann gibt es einen Isomorphismus von Vektorraumbündeln

$$TM \cong GLM \times_{\rho_0} \mathbb{R}^n,$$

wobei

$$\rho_0: GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow GL(\mathbb{R}^n), \quad A \mapsto (v \mapsto Av).$$

Der Isomorphismus ist gegeben durch

$$GLM \times_{\rho_0} \mathbb{R}^n \rightarrow TM, \quad [(b_1, \dots, b_n), (x_1, \dots, x_n)] \mapsto \sum_{i=1}^n x_i b_i,$$

wobei  $(b_1, \dots, b_n)$  eine Basis von  $T_p M$ ,  $p \in M$ , ist.

**Satz 1.48** Sei  $f: H \rightarrow G$  ein Homomorphismus von Liegruppen und  $\rho: G \rightarrow GL(V)$  eine Darstellung der Liegruppe  $G$ , wobei  $V$  ein endlichdimensionaler  $\mathbb{K}$ -Vektorraum ist. Weiter sei  $(P, \pi, M, G)$  ein  $G$ -Hauptfaserbündel und  $(Q, \eta)$  eine  $f$ -Reduktion von  $P$ . Dann ist die Abbildung

$$Q \times_{(\rho \circ f)} V \cong P \times_{\rho} V, \\ [q, v] \mapsto [\eta(q), v],$$

ein Isomorphismus von Vektorraumbündeln.

**Beispiel 1.49** Sei  $M$  eine  $n$ -dimensionale orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann erhalten wir nach Satz 1.48 einen Isomorphismus von Vektorraumbündeln

$$SOM \times_{\rho_1} \mathbb{R}^n \cong GLM \times_{\rho_0} \mathbb{R}^n,$$

wobei  $\rho_0$  wie in Beispiel 1.47 ist und  $\rho_1 := \rho_0|_{SO(n, \mathbb{R})}$ . Ist  $M$  zusätzlich spin, so erhalten wir aus Satz 1.48 einen Isomorphismus von Vektorraumbündeln

$$\text{Spin}M \times_{\rho_1 \circ \text{Ad}} \mathbb{R}^n \cong SOM \times_{\rho_1} \mathbb{R}^n$$

**Definition 1.50 (Komplexes Spinorbündel)** Sei  $M$  eine  $n$ -dimensionale Spinmannigfaltigkeit mit Spinstruktur  $(\text{Spin}M, \eta)$ . Sei  $\rho: \text{Spin}(n) \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{C}}(\Sigma_n)$  die komplexe Spinordarstellung. Dann ist das zu der Spinstruktur assoziierte komplexe Spinorbündel das komplexe Vektorraumbündel

$$\Sigma M := \text{Spin}M \times_{\rho} \Sigma_n.$$

Schnitte von  $\Sigma M$  nennen wir *Spinoren*. (Da Schnitte in dieser Arbeit stets glatt sind, ist ein Spinor insbesondere eine glatte Abbildung.)

Wollen wir die Riemannsche Metrik  $g$  auf  $M$  hervorheben, schreiben wir  $\Sigma(M, g) = \Sigma M$ .

**Bemerkung 1.51** Ist  $n \geq 2$  gerade, so liefert die Aufspaltung der komplexen Spinordarstellung  $\rho = \rho^+ \oplus \rho^-$ ,  $\rho^{\pm}: \text{Spin}(n) \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{C}}(\Sigma_n^{\pm})$ , einen Isomorphismus von Vektorraumbündeln

$$\Sigma M \cong \Sigma^+ M \oplus \Sigma^- M,$$

wobei  $\Sigma^{\pm} M := \text{Spin}M \times_{\rho^{\pm}} \Sigma_n^{\pm}$ .

Als Nächstes definieren wir die sogenannte Clifford-Multiplikation auf  $\Sigma M$ , sowie eine Bündelmetrik und eine kovariante Ableitung auf  $\Sigma M$ .

**Definition 1.52 (Clifford-Multiplikation auf  $\Sigma M$ )** Sei  $\rho: \mathbb{C}l_n \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(\Sigma_n)$  eine irreduzible komplexe Algebrendarstellung von  $\mathbb{C}l_n$ . Falls  $n$  ungerade ist, gelte zusätzlich  $\rho(\omega_n) = id_{\Sigma_n}$ . Wir schränken  $\rho$  auf  $\text{Spin}(n)$  ein (wobei wir die Einschränkung wie gewohnt wieder mit  $\rho$  bezeichnen) und bilden das komplexe Spinorbündel  $\Sigma M = \text{Spin}M \times_{\rho} \Sigma_n$ .

Sei  $x \in M$  und  $[p, v] \in \Sigma M_x$ ,  $[q, w] \in T_x M = \text{Spin}M_x \times_{\rho_1 \circ \text{Ad}} \mathbb{R}^n$ . Dann können wir wegen der Transitivität der Wirkung von  $\text{Spin}(n)$  auf den Fasern  $\text{Spin}M_x$  von  $p = q$  ausgehen. Schließlich definieren wir die (von  $\rho$  induzierte) Clifford-Multiplikation auf  $\Sigma M$  als

$$[p, w] \cdot [p, v] := [p, \rho(w)(v)] \in \Sigma M_x.$$

Dabei identifizieren wir  $TM = \text{Spin}M \times_{\rho_1 \circ \text{Ad}} \mathbb{R}^n$  immer durch Verknüpfung des Isomorphismus aus Beispiel 1.47 ii) mit den beiden Isomorphismen aus Beispiel 1.49.

**Bemerkung 1.53**

- i) Die komplexe Spinordarstellung ist eindeutig bis auf Äquivalenz von Darstellungen. Folglich ist das komplexe Spinorbündel eindeutig bis auf Isomorphie von Vektorraumbündeln, die durch Äquivalenz von Darstellungen induziert wird. Konkret realisieren wir dies wie folgt:

Seien  $\rho_i: \mathbb{C}l_n \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(\Sigma_n^i)$ ,  $i = 1, 2$ , irreduzible komplexe Algebrendarstellungen von  $\mathbb{C}l_n$ . Falls  $n$  ungerade ist, gelte zusätzlich  $\rho_i(\omega_n) = id_{\Sigma_n^i}$  für  $i = 1, 2$ . Dann sind die  $\rho_i$  äquivalent und es existiert ein Vektorraumisomorphismus  $F: \Sigma_n^1 \rightarrow \Sigma_n^2$  mit  $F \circ \rho_1(x) \circ F^{-1} = \rho_2(x)$  für alle  $x \in \mathbb{C}l_n$ . Durch Einschränkung von  $\rho_i$  auf  $\text{Spin}(n)$  erhalten wir zwei Wahlen für die komplexe Spinordarstellung, diese bezeichnen wir wie gewohnt ebenfalls mit  $\rho_i$ . Sei

$$\Sigma^i M := \text{Spin}M \times_{\rho_i} \Sigma_n^i$$

für  $i = 1, 2$ . Wir erhalten einen Isomorphismus von Vektorraumbündeln

$$\begin{aligned}\hat{F}: \Sigma^1 M &\rightarrow \Sigma^2 M, \\ [p, v] &\mapsto [p, F(v)].\end{aligned}$$

Vermittels  $\hat{F}$  identifizieren wir  $\Sigma^1 M = \Sigma^2 M$  und es macht deshalb Sinn, wie bei der komplexen Spinordarstellung von *dem* komplexen Spinorbündel zu sprechen.

Weiter bezeichnen wir die von  $\rho_i$  auf  $\Sigma^i M$  induzierte Clifford-Multiplikation mit  $\cdot_i$ . Eine kurze Rechnung liefert

$$\hat{F}(X \cdot_1 \sigma) = X \cdot_2 \hat{F}(\sigma)$$

für alle  $X \in T_x M$ ,  $\sigma \in \Sigma^1 M_x$ . Die Clifford-Multiplikationen auf  $\Sigma^i M$  unterscheiden sich also nur um den Isomorphismus  $\hat{F}$ . Da wir  $\Sigma^1 M$  und  $\Sigma^2 M$  mit Hilfe von  $\hat{F}$  identifizieren, unterscheiden sich die Clifford-Multiplikationen in diesem Sinne nicht.

- ii) In Bemerkung 1.29 ii) haben wir angemerkt, dass die Bedingung „ $\rho(\omega_n) = id_{\Sigma_n}$ “ in der Definition der komplexen Spinordarstellung wichtig ist für die Definition der Clifford-Multiplikation auf  $\Sigma M$ . In i) haben wir gesehen, dass diese Bedingung dazu da ist, um eine Identifikation der Spinorbündel zu erhalten, *bei der die Clifford-Multiplikationen gleich sind*.

Nehmen wir für den Moment an, wir hätten die Bedingung „ $\rho(\omega_n) = id_{\Sigma_n}$ “ in der Definition der komplexen Spinordarstellung weggelassen. Seien  $n$  ungerade,  $\rho_i: \mathbb{C}l_n \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(\Sigma_n^i)$ ,  $i = 1, 2$ , irreduzible komplexe Algebrendarstellungen von  $\mathbb{C}l_n$  mit  $\rho_1(\omega_n) = id_{\Sigma_n^1}$  und  $\rho_2(\omega_n) = -id_{\Sigma_n^2}$ . Dann können wir eine Identifikation der dazugehörigen Spinorbündel erreichen, bei der sich die Clifford-Multiplikationen nur um ein Vorzeichen unterscheiden. Sei dazu

$$\alpha: \mathbb{C}l_n \rightarrow \mathbb{C}l_n$$

der Algebrenisomorphismus aus Bemerkung 1.9 mit  $\alpha(v_1 \dots v_k) = (-1)^k v_1 \dots v_k$ . Dann ist  $\rho_2 \circ \alpha$  irreduzibel mit  $(\rho_2 \circ \alpha)(\omega_n) = id_{\Sigma_n^2}$ , d.h.  $\rho_1 \sim \rho_2 \circ \alpha$ . Wir erhalten einen Vektorraumisomorphismus  $F: \Sigma_n^1 \rightarrow \Sigma_n^2$  mit  $F \circ \rho_1(x) \circ F^{-1} = \rho_2(\alpha(x))$  für alle  $x \in \mathbb{C}l_n$ . Wir wissen, dass die Einschränkungen  $\rho_1|_{\text{Spin}(n)}$  und  $\rho_2|_{\text{Spin}(n)}$  äquivalent sind. Man sieht leicht, dass die Äquivalenz durch  $F$  realisiert wird, d.h.  $F \circ \rho_1|_{\text{Spin}(n)}(u) \circ F^{-1} = \rho_2|_{\text{Spin}(n)}(u)$  für alle  $u \in \text{Spin}(n)$ . Sind nun  $\Sigma^i M$  und  $\hat{F}$  wie in i), so erhalten wir

$$\hat{F}(X \cdot_1 \sigma) = -X \cdot_2 \hat{F}(\sigma),$$

d.h. die Clifford-Multiplikationen unterscheiden sich nur um ein Vorzeichen.

- iii) Sei  $n \geq 2$  gerade. Dann vertauscht die Clifford-Multiplikation auf  $\Sigma M$  Die Faktoren  $\Sigma^{\pm} M$ . Genauer bedeutet das: Sei  $[p, v] \in (\Sigma^{\pm} M)_x$ , d.h.  $v \in \Sigma_n^{\pm} \subset \Sigma_n$  und sei  $[p, w] \in T_x M$ ,  $w \neq 0$ . Dann ist  $[p, w] \cdot [p, v] = [p, \rho(w)(v)]$  mit  $\rho(w)(v) \in \Sigma_n^{\mp}$  (siehe Beweis von Satz 1.25 i)), also  $[p, \rho(w)(v)] \in (\Sigma^{\mp} M)_x$ .

**Proposition 1.54** *Sei  $(e_1, \dots, e_n)$  eine positiv orientierte Orthonormalbasis von  $T_p M$ ,  $p \in M$ . Falls  $n$  ungerade ist, sei  $\varphi \in \Sigma M_p$  und falls  $n$  gerade ist, sei  $\varphi \in \Sigma^+ M_p$ . Dann gilt*

$$i^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} e_1 \cdot \dots \cdot e_n \cdot \varphi = \varphi.$$

(Um formal ganz korrekt zu sein, müssten wir  $e_1 \cdot (\dots \cdot (e_n \cdot \varphi) \dots)$  anstatt  $e_1 \cdot \dots \cdot e_n \cdot \varphi$  schreiben.)

*Beweis.* Wir wählen ein Urbild  $s \in \text{Spin}M$  von  $(e_1, \dots, e_n) \in \text{SOM}$  unter  $\eta$ ,  $\eta(s) = (e_1, \dots, e_n)$ . Anhand der Definitionen überlegt man sich, dass unter  $TM \cong \text{Spin}M \times_{\rho_1 \circ \text{Ad}} \mathbb{R}^n$  gilt:  $e_i = [s, E_i]$  für  $i = 1, \dots, n$ , wobei  $(E_1, \dots, E_n)$  die Standardbasis im  $\mathbb{R}^n$  bezeichnet. Es ist  $\varphi = [s, \sigma]$  für ein  $\sigma \in \Sigma_n$  (bzw.  $\sigma \in \Sigma_n^+$  falls  $n$  gerade ist) und wir berechnen

$$\begin{aligned} i^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} e_1 \cdot \dots \cdot e_n \cdot \varphi &= [s, \rho(\underbrace{i^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} E_1 \cdot \dots \cdot E_n}_{=\omega_n})(\sigma)] \\ &= [s, \rho(\omega_n)(\sigma)] \\ &= [s, \sigma] \\ &= \varphi. \end{aligned}$$

□

**Definition 1.55 (Bündelmetrik auf  $\Sigma M$ )** Sei  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Sigma_n}$  ein Skalarprodukt auf  $\Sigma_n$  gemäß Proposition 1.30. Dann erklären wir eine Bündelmetrik auf  $\Sigma M$  durch

$$\langle [p, v], [p, w] \rangle := \langle v, w \rangle_{\Sigma_n},$$

für  $[p, v], [p, w] \in \Sigma M$ . Für  $\varphi \in \Sigma M$  definieren wir  $|\varphi| := \langle \varphi, \varphi \rangle$ .

**Lemma 1.56** Es gilt

$$i) \quad X \cdot (Y \cdot \psi) + Y \cdot (X \cdot \psi) = -2g(X, Y)\psi,$$

$$ii) \quad \langle X \cdot \psi, \varphi \rangle = -\langle \psi, X \cdot \varphi \rangle,$$

für alle  $X, Y \in T_x M$ ,  $\psi, \varphi \in \Sigma M_x$ ,  $x \in M$ .

**Definition 1.57 (Spinorielle Levi-Civita-Ableitung auf  $\Sigma M$ )** Sei  $(M, g)$  spin und  $\varphi \in \Gamma(\Sigma M)$ . Sei weiter  $\tilde{b}: U \rightarrow \text{Spin}M$  ein beliebiger lokaler Schnitt. Es gibt eine eindeutig bestimmte, glatte Funktion  $f: U \rightarrow \Sigma_n$  mit  $\varphi = [\tilde{b}, f]$  auf  $U$ . Dann definieren wir eine kovariante Ableitung  $\nabla^{\Sigma M}$  auf  $\Sigma M$  durch

$$\nabla_X^{\Sigma M} \varphi := [\tilde{b}, df(X)] + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} g(\nabla_X^M b_i, b_j) b_i \cdot (b_j \cdot \varphi), \quad (1.3)$$

wobei  $X \in T_x M$ ,  $x \in U$ ,  $(b_1, \dots, b_n) := \eta(\tilde{b})$ ,  $n = \dim M$  und  $\nabla^M$  die Levi-Civita-Ableitung auf  $(M, g)$  bezeichnet. Wir nennen  $\nabla^{\Sigma M}$  spinorielle Levi-Civita-Ableitung (auf  $\Sigma M$ ).

Wollen wir die Riemannsche Metrik hervorheben, schreiben wir auch  $\nabla^{\Sigma(M, g)} = \nabla^{\Sigma M}$ . (Später werden wir Spinstrukturen auf Hyperflächen  $N$  von Spinmannigfaltigkeiten  $M$  definieren und die beiden spinoriellen Levi-Civita-Ableitungen  $\nabla^{\Sigma N}$  und  $\nabla^{\Sigma M}$  miteinander vergleichen. Damit an diesen Stellen keine Verwirrung entsteht, unterdrücken wir die Mannigfaltigkeit in der Notation für die spinorielle Levi-Civita-Ableitung nicht.)

**Bemerkung 1.58**

- i) Für  $n = 1$  erhalten wir  $\nabla_X^{\Sigma M} \varphi = [\tilde{b}, df(X)]$ , da die leere Summe als Null definiert ist.
- ii) Aus Bemerkung 1.53 iii) erhalten wir, dass die spinorielle Levi-Civita-Ableitung invariant unter  $\Sigma^\pm M$  ist, d.h. für  $\varphi \in \Gamma(\Sigma^\pm M)$  ist  $\nabla_X^{\Sigma M} \varphi \in \Gamma(\Sigma^\pm M)$ . Für  $\varphi \in \Gamma(\Sigma^\pm M)$  setzen wir

$$\nabla_X^{\Sigma^\pm M} \varphi := \nabla_X^{\Sigma M} \varphi$$

und erhalten, dass  $\nabla^{\Sigma^\pm M}$  eine kovariante Ableitung auf  $\Sigma^\pm M$  ist.

- iii) Wir werden später festhalten, dass man die spinorielle Levi-Civita-Ableitung durch eine sogenannte „Zusammenhangsform“ erhalten kann, welche von der Levi-Civita-Ableitung auf  $M$  induziert wird.

Ein Spinor  $\varphi \in \Gamma(\Sigma M)$  heißt *parallel*, wenn  $\nabla_X^{\Sigma M} \varphi = 0$  für alle  $X \in TM$ . Sei  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Ein  $\lambda$ -Killing-Spinor ist ein Spinor  $\varphi \in \Gamma(\Sigma M)$  mit

$$\nabla_X^{\Sigma M} \varphi = \lambda X \cdot \varphi$$

für alle  $X \in \Gamma(TM)$ .

**Bemerkung 1.59 (Spinstrukturen und Multiplikation von Metriken mit Konstanten)** Sei  $c \in \mathbb{R}_{>0}$  und sei  $(\text{Spin}M, \eta)$  eine Spinstruktur auf  $(M, g)$ . Wir haben einen Isomorphismus von Hauptfaserbündeln

$$\begin{aligned} G: \text{SO}(M, g) &\rightarrow \text{SO}(M, c^2g), \\ (b_1, \dots, b_n) &\mapsto \left(\frac{1}{c}b_1, \dots, \frac{1}{c}b_n\right). \end{aligned}$$

Es ist  $(\text{Spin}(M), G \circ \eta)$  eine Spinstruktur auf  $(M, c^2g)$ . Mit diesen Spinstrukturen gilt

$$\Sigma(M, g) = \Sigma(M, c^2g).$$

Es folgt

$$\nabla^{\Sigma(M, g)} = \nabla^{\Sigma(M, c^2g)}.$$

Bezeichnen wir die Clifford-Multiplikation auf  $\Sigma(M, g)$  mit „ $\cdot$ “ und die Clifford-Multiplikation auf  $\Sigma(M, c^2g)$  mit „ $\tilde{\cdot}$ “, so gilt für alle  $p \in M$ ,  $X \in T_p M$ ,  $\varphi \in \Sigma(M, g)_p = \Sigma(M, c^2g)_p$

$$X \cdot \varphi = \frac{1}{c} X \tilde{\cdot} \varphi.$$

Insbesondere erhalten wir:

Ist  $\varphi \in \Gamma(\Sigma(M, g))$  ein  $\lambda$ -Killing-Spinor, so ist  $\varphi \in \Gamma(\Sigma(M, c^2g))$  ein  $\frac{\lambda}{c}$ -Killing-Spinor.

**Lemma 1.60** *Es gilt*

$$i) \nabla_X^{\Sigma M} (Y \cdot \psi) = (\nabla_X^M Y) \cdot \psi + Y \cdot \nabla_X^{\Sigma M} \psi,$$

$$ii) L_X \langle \psi, \varphi \rangle = \langle \nabla_X^{\Sigma M} \psi, \varphi \rangle + \langle \psi, \nabla_X^{\Sigma M} \varphi \rangle,$$

für alle  $X, Y \in \Gamma(TM)$ ,  $\psi, \varphi \in \Gamma(\Sigma M)$ , wobei  $L$  die Lieableitung bezeichnet.

Es sei an folgende Definition erinnert: Ist  $E$  ein Vektorraumbündel mit kovarianter Ableitung  $\nabla$ , so definieren wir dessen *Krümmung bezüglich  $\nabla$*  als

$$R(X, Y)\varphi := \nabla_X \nabla_Y \varphi - \nabla_Y \nabla_X \varphi - \nabla_{[X, Y]}\varphi, \quad (1.4)$$

für  $X, Y \in \Gamma(TM)$  und  $\varphi \in \Gamma(E)$ , wobei  $[\cdot, \cdot]$  die Lieklammer von Vektorfeldern bezeichnet. Falls  $E = TM$  das Tangentialbündel einer Riemannschen Mannigfaltigkeit  $M$  ist schreiben wir für dessen Krümmung bezüglich der Levi-Civita-Ableitung auch  $R^M$ .

Mit  $R^{\Sigma M}$  bezeichnen wir die Krümmung von  $\Sigma M$  bezüglich  $\nabla^{\Sigma M}$ . Analog bezeichnen wir mit  $R^{\Sigma^\pm M}$  die Krümmung von  $\Sigma^\pm M$  bezüglich  $\nabla^{\Sigma^\pm M}$ . Nach Definition gilt damit

$$R^{\Sigma M}(X, Y)\varphi = R^{\Sigma^\pm M}(X, Y)\varphi$$

für alle  $X, Y \in \Gamma(TM)$ ,  $\varphi \in \Gamma(\Sigma^\pm M)$ .

**Lemma 1.61** *Sei  $(M, g)$  spin und  $(b_1, \dots, b_n)$  eine lokale Orthonormalbasis von  $(M, g)$ . Dann gilt*

$$R^{\Sigma M}(X, Y)\varphi = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} g(R^M(X, Y)b_i, b_j)b_i \cdot (b_j \cdot \varphi),$$

für alle  $X, Y \in \Gamma(TM)$ ,  $\varphi \in \Gamma(\Sigma M)$ .

## 1.6 Zusammenhänge in Hauptfaserbündeln

Für den gesamten Abschnitt sei  $(P, \pi, M, G)$  ein Hauptfaserbündel. Sei  $x \in M$  und  $p \in P_x$ . Dann nennen wir

$$T_p^{\text{vert}} P := T_p(P_x) = \ker(d\pi_p) \subset T_p P$$

den *vertikalen Tangentialraum von  $P$  in  $p$* .

Sei  $\mathfrak{g}$  die Liealgebra von  $G$ . Die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} &\rightarrow T_p^{\text{vert}} P, \\ X &\mapsto \tilde{X}(p) := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (p \cdot \exp(tX)), \end{aligned}$$

ist ein Isomorphismus von Vektorräumen. (Dabei bezeichnet „exp“ die Exponentialabbildung der Liegruppe  $G$ , siehe [5, Kapitel 1].) Insbesondere ist diese Abbildung wohldefiniert, denn

$$d\pi_p(\tilde{X}(p)) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\pi(p \cdot \exp(tX))) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \pi(p) = 0.$$

**Definition 1.62 (Zusammenhang)** *Ein Zusammenhang auf  $(P, \pi, M, G)$  ist eine Zuordnung*

$$P \ni p \mapsto T_p^{\text{hor}} P \subset T_p P$$

mit folgenden Eigenschaften:

i) Für jedes  $p \in P$  ist  $T_p^{\text{hor}} P \subset T_p P$  ein Untervektorraum mit

$$T_p P = T_p^{\text{vert}} P \oplus T_p^{\text{hor}} P.$$

ii) Die Zuordnung ist rechtsinvariant, d.h. für alle  $p \in P$  und alle  $g \in G$  gilt

$$T_{pg}^{\text{hor}} P = d(R_g)T_p^{\text{hor}} P,$$

wobei  $R_g: P \rightarrow P$ ,  $p \mapsto pg$ .

iii) Die Zuordnung ist glatt, d.h. für jedes  $p \in P$  gibt es eine Umgebung  $U \subset P$  von  $p$  in  $P$  und Vektorfelder  $X_i \in \Gamma(TP|_U)$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $n = \dim M$ , mit

$$T_q^{\text{hor}} P = \text{span}\{X_1(q), \dots, X_n(q)\}$$

für alle  $q \in U$ .

Liegt ein Zusammenhang vor, nennen wir  $T_p^{\text{hor}} P \subset T_p P$  *horizontalen Tangentialraum* von  $P$  in  $p$ .

Mit  $\Omega^1(P, \mathfrak{g})$  bezeichnen wir die Menge der 1-Formen auf  $P$  mit Werten in  $\mathfrak{g}$  (diese werden zum Beispiel in [5, Anhang A.2] definiert). Insbesondere gilt: Ist  $\omega \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ , so ist  $\omega_p$  für jedes  $p \in P$  eine Abbildung  $\omega_p: T_p P \rightarrow \mathfrak{g}$ .

**Definition 1.63 (Zusammenhangsform)** Eine Zusammenhangsform auf  $(P, \pi, M, G)$  ist eine 1-Form  $\omega \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$  mit folgenden Eigenschaften:

- i)  $\omega(\tilde{X}) = X$  für alle  $X \in \mathfrak{g}$ .
- ii)  $R_g^* \omega = \text{ad}(g^{-1})\omega$  für alle  $g \in G$ , wobei  $\text{ad}: G \rightarrow \text{End}(\mathfrak{g})$ ,  $g \mapsto d(\alpha_g)$  und  $\alpha_g: G \rightarrow G$ ,  $a \mapsto gag^{-1}$ .

Wir schreiben auch kürzer: „Zusammenhang auf  $P$ “, bzw. „Zusammenhangsform auf  $P$ “. Es besteht folgende Beziehung zwischen Zusammenhängen und Zusammenhangsformen auf  $P$ :

**Satz 1.64** Es gilt:

- i) Ist  $p \mapsto T_p^{\text{hor}} P$  ein Zusammenhang auf  $P$ , so definiert

$$\omega_p(\tilde{X}(p) \oplus Y) := X$$

für alle  $p \in P$ ,  $X \in \mathfrak{g}$ ,  $Y \in T_p^{\text{hor}} P$  eine Zusammenhangsform auf  $P$ .

- ii) Ist  $\omega \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$  eine Zusammenhangsform auf  $P$ , so ist

$$p \mapsto T_p^{\text{hor}} P := \ker(\omega_p)$$

einen Zusammenhang auf  $P$ .

Im Folgenden fixieren wir einen Zusammenhang  $p \mapsto T_p^{\text{hor}} P$  auf  $P$ .

**Definition 1.65 (Horizontales Vektorfeld / Horizontaler Lift)** Ein Vektorfeld  $Z \in \Gamma(TP)$  heißt horizontal, falls  $Z(p) \in T_p^{\text{hor}} P$  für alle  $p \in P$ .

Sei  $X \in \Gamma(TM)$  ein Vektorfeld. Dann heißt ein Vektorfeld  $X^* \in \Gamma(TP)$  horizontaler Lift von  $X$ , falls für alle  $p \in P$  gilt:

$$X^*(p) \in T_p^{\text{hor}}P$$

und

$$d\pi_p(X^*(p)) = X(\pi(p)).$$

**Satz 1.66 (Eigenschaften von horizontalen Lifts)**

- i) Für jedes Vektorfeld  $X \in \Gamma(TM)$  gibt es genau einen horizontalen Lift  $X^* \in \Gamma(TP)$ . Dieser ist gegeben durch

$$X^*(p) := \left( d\pi|_{T_p^{\text{hor}}P} \right)^{-1} (X(\pi(p))).$$

Weiter ist  $X^*$  rechtsinvariant, d.h. für alle  $p \in P$  und alle  $g \in G$  gilt

$$d(R_g)X^*(p) = X^*(p \cdot g).$$

- ii) Für alle Vektorfelder  $X, Y \in \Gamma(TM)$  und alle glatten Funktionen  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  gilt

$$\begin{aligned} X^* + Y^* &= (X + Y)^*, \\ (fX)^* &= (f \circ \pi)X^*, \\ [X, Y]^* &= \text{pr}_{\text{hor}}([X^*, Y^*]). \end{aligned}$$

Genauso kann man auch lokale Vektorfelder oder einzelne Tangentialvektoren horizontal liften. Der Vollständigkeit halber halten wir auch das fest:

Ist  $X: U \rightarrow TM$ ,  $U \subset M$  offen, ein lokales Vektorfeld (d.h. ein Schnitt  $X \in \Gamma(TM|_U)$ ), so ist der *horizontale Lift von  $X$*  das lokale Vektorfeld  $X^*: \pi^{-1}(U) \rightarrow TP$  gegeben durch

$$X^*(p) := \left( d\pi|_{T_p^{\text{hor}}P} \right)^{-1} (X(\pi(p))),$$

für alle  $p \in \pi^{-1}(U)$ .

Sei  $X \in T_xM$  und  $p \in \pi^{-1}(x)$ . Dann nennen wir den Tangentialvektor

$$X^* := \left( d\pi|_{T_p^{\text{hor}}P} \right)^{-1} (X) \in T_pP$$

horizontalen Lift von  $X$  (zu  $T_pP$ ).

**Bemerkung 1.67 (Spinorielle Levi-Civita-Ableitung mittels Zusammenhangsformen)** Wir gehen hier kurz darauf ein, wie man die spinorielle Levi-Civita-Ableitung mit Hilfe von Zusammenhangsformen erhalten kann. Für Details verweisen wir auf [11] und [5]. Sei  $\rho: G \rightarrow GL(V)$  eine Darstellung der Liegruppe  $G$  und  $V$  ein endlichdimensionaler  $\mathbb{K}$ -Vektorraum. Für jede Zusammenhangsform  $\omega$  auf  $P$  können wir eine kovariante Ableitung  $\nabla^{\rho, \omega}$  auf  $E := P \times_{\rho} V$  wie folgt definieren: Sei  $e \in \Gamma(E)$  und  $s: U \rightarrow P$  ein lokaler Schnitt von  $P$ . Dann gibt es eine eindeutig bestimmte, glatte Funktion  $f: U \rightarrow V$  mit  $e = [s, f]$  auf  $U$ . Für  $X \in T_xM$ ,  $x \in U$ , setzen wir

$$\nabla_X^{\rho, \omega} e := [s, L_X f + \rho_*((\omega \circ s_*)(X)) f].$$

Sei nun  $M$  spin mit Spinstruktur  $(\text{Spin}M, \eta)$ . Die Levi-Civita-Ableitung auf  $M$  induziert eine Zusammenhangsform  $\omega$  auf dem Hauptfaserbündel  $\text{SOM}$ . Dann definiert

$$\tilde{\omega} := (\text{Ad}_*)^{-1} \circ \omega \circ \eta_*$$

eine Zusammenhangsform auf  $\text{Spin}M$ . Für die spinorielle Levi-Civita-Ableitung  $\nabla^{\Sigma M}$  gilt

$$\nabla^{\Sigma M} = \nabla^{\rho, \omega},$$

wobei hier  $\rho: \text{Spin}(n) \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{C}}(\Sigma_n)$  die komplexe Spinordarstellung ist.



## 2 Konstruktion von Spinstrukturen auf Produkten und Hyperflächen

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns damit, wie man Spinstrukturen auf dem Produkt von Spinmannigfaltigkeiten definieren kann und wie man Spinstrukturen auf Hyperflächen von Spinmannigfaltigkeiten erhält. Ersteres benötigen wir in Kapitel 5, um eine Spinstruktur auf  $S^1 \times S^2$  zu definieren. Spinstrukturen auf Hyperflächen spielen bei unserer Lösungsmethode des Spinorflusses mit Hilfe verallgemeinerter Zylinder eine wesentliche Rolle.

### 2.1 Produktspinstruktur

Zunächst benötigen wir folgende Definition:

**Definition 2.1 (Erweiterung)** Sei  $(P, \pi, M, G)$  ein Hauptfaserbündel und  $f: G \rightarrow H$  ein Homomorphismus von Liegruppen. Dann definiert  $f$  eine Linkswirkung der Liegruppe  $G$  auf der Mannigfaltigkeit  $H$  durch

$$g \cdot h := f(g)h$$

für  $h \in H$ ,  $g \in G$ . Wir bilden das dazugehörige assoziierte Faserbündel  $P \times_G H$  (siehe Definition 1.45) und definieren darauf eine Rechtswirkung der Liegruppe  $H$  durch

$$\begin{aligned} (P \times_G H) \times H &\rightarrow P \times_G H, \\ ([q, a], h) &\mapsto [q, ah]. \end{aligned}$$

Dadurch wird  $(P \times_G H, \hat{\pi}, M, H)$  zu einem  $H$ -Hauptfaserbündel, der  $f$ -Erweiterung von  $P$ , wobei die  $(U_i, \phi_i)_{i \in I}$  aus Definition 1.45 lokale Trivialisierungen des Hauptfaserbündels  $P \times_G H$  sind.

Der nächste Satz besagt, dass Reduktion und Erweiterung von Hauptfaserbündeln in gewisser Weise invers zueinander sind.

**Satz 2.2** Sei  $(Q, \pi_Q, M, H)$  ein Hauptfaserbündel und  $f: G \rightarrow H$  ein Homomorphismus von Liegruppen. Weiter sei  $(P, \eta)$  eine  $f$ -Reduktion von  $Q$ , wobei  $(P, \pi_P, M, G)$  ein Hauptfaserbündel ist. Dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned} P \times_G H &\rightarrow Q, \\ [p, h] &\mapsto \eta(p)h, \end{aligned}$$

ein Isomorphismus von Hauptfaserbündeln, wobei  $P \times_G H$  die  $f$ -Erweiterung von  $P$  ist.

**Beispiel 2.3** Seien  $M$  und  $N$  zwei orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeiten der Dimensionen  $n$  und  $m$ . Dann ist  $\text{SOM} \times \text{SON}$  ein  $SO(n) \times SO(m)$ -Hauptfaserbündel über  $M \times N$ . Wir betrachten dessen  $i$ -Erweiterung

$$(\text{SOM} \times \text{SON}) \times_{SO(n, \mathbb{R}) \times SO(m, \mathbb{R})} SO(n + m, \mathbb{R}),$$

wobei

$$i: SO(n, \mathbb{R}) \times SO(m, \mathbb{R}) \rightarrow SO(n+m, \mathbb{R}),$$

$$(A, B) \mapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

Weiter definieren wir

$$\iota: \text{SOM} \times \text{SON} \rightarrow \text{SO}(M \times N),$$

durch  $\iota((b_1, \dots, b_n), (b'_1, \dots, b'_m)) := (b_1, \dots, b_n, b'_1, \dots, b'_m)$ . (Auf  $M \times N$  wählen wir die von  $M$  und  $N$  induzierte Orientierung und Riemannsche Metrik.)

Dann ist  $(\text{SOM} \times \text{SON}, \iota)$  eine  $i$ -Reduktion von  $\text{SO}(M \times N)$  und nach Satz 2.2 erhalten wir einen Isomorphismus von Hauptfaserbündeln

$$(\text{SOM} \times \text{SON}) \times_{SO(n, \mathbb{R}) \times SO(m, \mathbb{R})} SO(n+m, \mathbb{R}) \cong \text{SO}(M \times N).$$

Für den Beweis des nächsten Lemmas erinnern wir zunächst an Ergebnisse aus der Überlagerungstheorie.

**Satz 2.4** *Seien  $M$  und  $N$  Mannigfaltigkeiten und  $\pi: M \rightarrow N$  eine Überlagerung. Weiter seien  $M$  und  $N$  zusammenhängend, sowie  $B$  eine weitere zusammenhängende Mannigfaltigkeit und  $f: B \rightarrow N$  eine glatte Abbildung. Dann gilt:*

- i) Zwei Lifts von  $f$ , die in einem Punkt übereinstimmen, sind gleich. (Dabei verstehen wir unter einem Lift von  $f$  eine glatte Abbildung  $\tilde{f}: B \rightarrow M$  mit  $\pi \circ \tilde{f} = f$ .)*
- ii) Seien  $m \in M$ ,  $b \in B$  mit  $\pi(m) = f(b)$ . Dann gibt es genau dann einen Lift  $\tilde{f}$  von  $f$  mit  $\tilde{f}(b) = m$ , wenn  $f_*(\pi_1(B, b)) \subset \pi_*(\pi_1(M, m))$ .*

**Lemma 2.5** *Für alle  $n, m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$  gibt es einen Homomorphismus von Liegruppen*

$$\varphi: \text{Spin}(n) \times \text{Spin}(m) \rightarrow \text{Spin}(n+m)$$

*derart, dass folgendes Diagramm kommutiert:*

$$\begin{array}{ccc} \text{Spin}(n) \times \text{Spin}(m) & \xrightarrow{\varphi} & \text{Spin}(n+m) \\ \text{Ad} \times \text{Ad} \downarrow & & \downarrow \text{Ad} \\ \text{SO}(n, \mathbb{R}) \times \text{SO}(m, \mathbb{R}) & \xrightarrow{i} & \text{SO}(n+m, \mathbb{R}) \end{array} \quad (2.1)$$

*Dabei ist  $i$  die Abbildung aus Beispiel 2.3.*

*Beweis.* Sei zunächst  $F: Cl_n \rightarrow Cl_{n+1}^0$  der Algebrenisomorphismus aus Lemma 1.12, dann ist die Einschränkung von  $F$  auf  $\text{Spin}(n)$

$$F: \text{Spin}(n) \rightarrow \text{Spin}(n+1)$$

glatt und folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \text{Spin}(n) & \xrightarrow{F} & \text{Spin}(n+1) \\ \text{Ad} \downarrow & & \downarrow \text{Ad} \\ \text{SO}(n, \mathbb{R}) & \xrightarrow{j} & \text{SO}(n+1, \mathbb{R}) \end{array}$$

wobei  $j$  durch  $A \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$  gegeben ist. Nun beweisen wir das Lemma durch Fallunterscheidung:

**Fall 1:**  $n = 1, m \geq 1$ : Sei  $\ker(\text{Ad}) = \{\pm 1\} \subset \text{Spin}(1 + m)$ . Wir wählen  $F: \text{Spin}(n) \rightarrow \text{Spin}(n + 1)$  wie oben und definieren  $\varphi: \text{Spin}(1) \times \text{Spin}(m) \rightarrow \text{Spin}(1 + m)$  durch

$$\varphi(\pm 1, x) := \pm 1 \cdot F(x).$$

(Wir bemerken, dass der Fall  $m = 1, n \geq 1$  analog gezeigt werden kann. Man muss den Algebrenisomorphismus  $F$  nur durch  $F(x) = e_n \cdot (x, 0)$  für  $(e_0, \dots, e_n)$  Standardbasis des  $\mathbb{R}^{n+1}$  definieren.)

**Fall 2:**  $n \geq 2, m \geq 2$ : Wir zeigen die Existenz einer glatten Abbildung  $\varphi: \text{Spin}(n) \times \text{Spin}(m) \rightarrow \text{Spin}(n + m)$ , die (2.1) kommutativ macht und  $\varphi(e, e) = e$  erfüllt (wobei  $e$  die neutralen Elemente in den betreffenden Liegruppen bezeichnet). So ein  $\varphi$  existiert, falls

$$(i \circ (\text{Ad} \times \text{Ad}))_*(\pi_1(\text{Spin}(n) \times \text{Spin}(m))) \subset \text{Ad}_*(\pi_1(\text{Spin}(n + m))) \quad (2.2)$$

gilt (siehe Satz 2.4 ii)). Diese Inklusion werden wir durch eine weitere Fallunterscheidung zeigen. Dazu benötigen wir, dass wir aus Proposition 1.19 ein kommutatives Diagramm erhalten:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(S^1) & \xrightarrow{f_*} & \pi_1(S^1) \\ \uparrow I_* & & \downarrow g_* \\ \pi_1(\text{Spin}(2)) & \xrightarrow{\text{Ad}_*} & \pi_1(SO(2, \mathbb{R})) \end{array}$$

Dabei gilt  $f_*(c) = c * c$  für alle  $c \in \pi_1(S^1)$ , wobei wir mit  $*$  hier und im weiteren Verlauf des Beweises die Gruppenmultiplikation in den betreffenden Fundamentalgruppen bezeichnen. Daraus folgt

$$\text{Ad}_*(c) = (g_* I_* c) * (g_* I_* c) \quad (2.3)$$

für alle  $c \in \pi_1(\text{Spin}(2))$ .

**Fall 2.1:**  $n = m = 2$ : Sei  $c \in \pi_1(\text{Spin}(2) \times \text{Spin}(2))$ . Dann können wir  $c = (c_1, c_2)$  für  $c_1, c_2 \in \pi_1(\text{Spin}(2))$  schreiben und mit (2.3) folgt

$$(\text{Ad} \times \text{Ad})_*(c) = ((g_* I_* c_1) * (g_* I_* c_1), (g_* I_* c_2) * (g_* I_* c_2)).$$

Wegen  $\pi_1(SO(2 + 2, \mathbb{R})) = \mathbb{Z}_2$  folgt, dass  $(i \circ (\text{Ad} \times \text{Ad}))_*$  trivial ist, woraus sich (2.2) ergibt.

**Fall 2.2:**  $n = 2, m \geq 3$ : Sei  $c \in \pi_1(\text{Spin}(2) \times \text{Spin}(m))$ . Dann können wir  $c = (c_1, 1)$  für  $c_1 \in \pi_1(\text{Spin}(2))$  schreiben, wobei 1 das neutrale Element in  $\pi_1(\text{Spin}(m)) = \{1\}$  ist. Mit (2.3) erhalten wir

$$(\text{Ad} \times \text{Ad})_*(c) = ((g_* I_* c) * (g_* I_* c), 1 * 1),$$

woraus sich wieder die Trivialität von  $(i \circ (\text{Ad} \times \text{Ad}))_*$  und damit (2.2) ergibt, denn  $\pi_1(SO(2 + m, \mathbb{R})) = \mathbb{Z}_2$ .

**Fall 2.3:**  $n \geq 3, m \geq 3$ : Es ist  $\pi_1(\text{Spin}(n) \times \text{Spin}(m)) = \{1\}$ , woraus direkt (2.2) folgt.

Es bleibt zu zeigen, dass  $\varphi$  für  $n \geq 2, m \geq 2$  ein Homomorphismus von Liegruppen

ist. Dazu bezeichnen  $m$ ,  $\tilde{m}$  und  $\hat{m}$  die Multiplikationen in  $\text{Spin}(n) \times \text{Spin}(m)$ ,  $\text{Spin}(n+m)$  und  $\text{SO}(n, \mathbb{R}) \times \text{SO}(m, \mathbb{R})$ . Dann ist

$$\varphi \circ m = \tilde{m} \circ (\varphi \times \varphi) \quad (2.4)$$

zu zeigen. Sowohl  $\varphi \circ m$  als auch  $\tilde{m} \circ (\varphi \times \varphi)$  sind Lifts von  $i \circ \hat{m} \circ (\text{Ad} \times \text{Ad} \times \text{Ad} \times \text{Ad})$  bezüglich der Überlagerung  $\text{Ad}$ . Wegen  $\varphi(e, e) = e$  stimmen  $\varphi \circ m$  und  $\tilde{m} \circ (\varphi \times \varphi)$  im neutralen Element von  $\text{Spin}(n) \times \text{Spin}(m) \times \text{Spin}(n) \times \text{Spin}(m)$  überein und mit Satz 2.4 i) erhalten wir (2.4).  $\square$

**Definition 2.6 (Produktspinstruktur)** Seien  $M$  und  $N$  zwei Spinmannigfaltigkeiten der Dimensionen  $n$  und  $m$ . Seien die Spinstrukturen gegeben durch  $(\text{Spin}M, \eta_1)$  und  $(\text{Spin}N, \eta_2)$ . Wir wählen auf der Mannigfaltigkeit  $M \times N$  die von  $M$  und  $N$  induzierte Orientierung und Riemannsche Metrik. Dann definieren wir wie folgt eine Spinstruktur  $(\text{Spin}(M \times N), \eta)$  auf  $M \times N$ :

$\text{Spin}(M \times N)$  ist die  $\varphi$ -Erweiterung von  $\text{Spin}M \times \text{Spin}N$ ,

$$\text{Spin}(M \times N) := (\text{Spin}M \times \text{Spin}N) \times_{\text{Spin}(n) \times \text{Spin}(m)} \text{Spin}(n+m),$$

wobei  $\varphi$  die Abbildung aus Lemma 2.5 ist und  $\eta$  ist definiert durch

$$\begin{aligned} \eta: \text{Spin}(M \times N) &\rightarrow (\text{SOM} \times \text{SON}) \times_{\text{SO}(n, \mathbb{R}) \times \text{SO}(m, \mathbb{R})} \text{SO}(n+m, \mathbb{R}) = \text{SO}(M \times N) \\ [(x, y), u] &\mapsto [(\eta_1(x), \eta_2(y)), \text{Ad}(u)] \end{aligned}$$

für alle  $x \in \text{Spin}M$ ,  $y \in \text{Spin}(N)$ ,  $u \in \text{Spin}(n+m)$ .  $(\text{Spin}(M \times N), \eta)$  heißt Produktspinstruktur.

## 2.2 Spinstrukturen auf Hyperflächen

In diesem Abschnitt beschreiben wir, wie man Spinstrukturen auf Hyperflächen von Spinmannigfaltigkeiten erhält. Als Referenz diene [4].

Sei  $M$  eine  $(n+1)$ -dimensionale orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit. Sei  $N \subset M$  eine orientierte Riemannsche Hyperfläche von  $M$  (immersiert oder eingebettet). Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes Einheitsnormalenfeld  $\nu$  entlang  $N$  (d.h. einen Schnitt  $\nu: N \rightarrow TM|_N$  mit  $\|\nu\| = 1$  und  $\nu_p \perp T_p N$  für alle  $p \in N$ ) derart, dass eine Basis  $(b_1, \dots, b_n)$  von  $T_p N$  positiv orientiert ist, genau dann, wenn  $(\nu, b_1, \dots, b_n)$  eine positiv orientierte Basis von  $T_p M$  ist,  $p \in N$ .

Sei nun  $M$  zusätzlich eine Spinmannigfaltigkeit mit Spinstruktur  $(\text{Spin}M, \eta)$ . Dann erhalten wir eine Spinstruktur  $(\text{Spin}N, \bar{\eta})$  auf  $N$  wie folgt: Zunächst betrachten wir den Pullback

$$\begin{array}{ccc} i^*(\text{Spin}M|_N) & \xrightarrow{\bar{i}} & \text{Spin}M|_N \\ \downarrow \bar{\eta} & & \downarrow \eta \\ \text{SON} & \xrightarrow{i} & \text{SOM}|_N \end{array}$$

wobei

$$\begin{aligned} i: \text{SON} &\rightarrow \text{SOM}|_N, \\ (b_1, \dots, b_n) &\mapsto (\nu, b_1, \dots, b_n). \end{aligned}$$

(Beachte:  $\eta$  ist eine zweifache Überlagerung, also ist  $\eta: \text{Spin}M|_N \rightarrow \text{SOM}|_N$  eine lokal triviale Faserung.) Wir definieren  $\text{Spin}N$  als Mannigfaltigkeit durch

$$\text{Spin}N := i^*(\text{Spin}M|_N)$$

und zeigen folgendes Lemma:

**Lemma 2.7** *Auf der Mannigfaltigkeit  $\text{Spin}N$  existiert die Struktur eines  $\text{Spin}(n)$ -Hauptfaserbündels.*

*Beweis.* Als Projektion von  $\text{Spin}N$  setzen wir

$$\begin{aligned} \bar{\pi}: \text{Spin}N &\rightarrow N, \\ (b, x) &\mapsto \pi(x), \end{aligned}$$

wobei  $\pi: \text{Spin}M \rightarrow M$  die Projektion von  $\text{Spin}M$  ist. Wir haben ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \text{Spin}(n) & \xrightarrow{F} & \text{Spin}(n+1) \\ \downarrow \text{Ad} & & \downarrow \text{Ad} \\ \text{SO}(n, \mathbb{R}) & \xrightarrow{j} & \text{SO}(n+1, \mathbb{R}) \end{array}$$

(siehe Anfang des Beweises von Lemma 2.5). Die Wirkung von  $\text{Spin}(n)$  auf  $\text{Spin}N$  erklären wir durch

$$(b, x) \cdot g := (b \cdot \text{Ad}(g), x \cdot F(g)) \quad (2.5)$$

für  $(b, x) \in \text{Spin}N \subset \text{SON} \times \text{Spin}M|_N$  und  $g \in \text{Spin}(n)$ . Diese Wirkung ist fasertreu. Wir zeigen nun, dass sie einfach transitiv auf der Fasern ist. Seien dazu  $(b, x), (\tilde{b}, \tilde{x}) \in (\text{Spin}N)_p$ ,  $p \in N$ . Dann gilt  $x, \tilde{x} \in (\text{Spin}M)_p$ . Wegen  $i(b) = \eta(x)$ ,  $i(\tilde{b}) = \eta(\tilde{x})$  folgt  $i(b), i(\tilde{b}) \in (\text{SOM}|_N)_p$ , also  $b, \tilde{b} \in (\text{SON})_p$ . Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes  $A \in \text{SO}(n, \mathbb{R})$  mit

$$b \cdot A = \tilde{b}.$$

Seien  $g_1$  und  $g_2$  die beiden Urbilder von  $A$  unter  $\text{Ad}$ , dann haben wir

$$b \cdot \text{Ad}(g_i) = \tilde{b}$$

für  $i = 1, 2$ . Weiter erhalten wir für  $i = 1, 2$ :

$$\eta(x \cdot F(g_i)) = \eta(x) \cdot \text{Ad}(F(g_i)) = i(b) \cdot j(\text{Ad}(g_i)) = i(b) \cdot j(A) = i(\tilde{b}) = \eta(\tilde{x}).$$

(Dabei haben wir beim ersten Gleichheitszeichen verwendet, dass  $(\text{Spin}M, \eta)$  eine  $\text{Ad}$ -Reduktion ist.) Also haben  $x \cdot F(g_1)$ ,  $x \cdot F(g_2)$  und  $\tilde{x}$  das gleiche Bild unter  $\eta$ . Da  $\eta$  eine zweifache Überlagerung ist und  $x \cdot F(g_1) \neq x \cdot F(g_2)$  gilt (da  $g_1 \neq g_2$ ,  $F$  injektiv ist und die Wirkung von  $\text{Spin}(n+1)$  auf  $(\text{Spin}M)_p$  einfach transitiv ist) folgt nach eventueller Umnummerierung der  $g_i$

$$\begin{aligned} x \cdot F(g_1) &= \tilde{x} \\ x \cdot F(g_2) &\neq \tilde{x}. \end{aligned}$$

Damit haben wir  $(b, x) \cdot g_1 = (\tilde{b}, \tilde{x})$  gezeigt und dass es nur eine Wahl von  $g_1$  gibt.

Sei nun  $s: U \rightarrow \text{SON}$  ein lokaler Schnitt mit  $U \subset N$  offen und einfach zusammenhängend. Dann wissen wir aus der Überlagerungstheorie, dass es eine glatte Abbildung  $\tilde{s}: U \rightarrow \text{Spin}N$  gibt, so dass folgendes Diagramm kommutiert

$$\begin{array}{ccc} & & \text{Spin}N \\ & \nearrow \tilde{s} & \downarrow \bar{\eta} \\ U & \xrightarrow{s} & \text{SON} \end{array}$$

(Mit  $\eta$  ist auch  $\bar{\eta}$  eine zweifache Überlagerung, da der Pullback den Fasertyp erhält.) Man überlegt sich leicht, dass  $(\bar{\pi} \circ \tilde{s})(p) = p$  für alle  $p \in U$ . Als Nächstes zeigen wir, dass

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}: U \times \text{Spin}(n) &\rightarrow \text{Spin}N_U, \\ (p, g) &\mapsto \tilde{s}(p) \cdot g, \end{aligned}$$

ein Diffeomorphismus ist. Dazu betrachten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} U \times \text{Spin}(n) & \xrightarrow{\tilde{\phi}} & \text{Spin}N_U \\ \downarrow id_U \times Ad & & \downarrow \bar{\eta} \\ U \times SO(n, \mathbb{R}) & \xrightarrow{\phi} & \text{SON}_U \end{array}$$

wobei  $\phi(x, A) := s(x) \cdot A$  die durch  $s$  induzierte lokale Trivialisierung ist (siehe Bemerkung 1.37). Die vertikalen Abbildungen sind lokale Diffeomorphismen und  $\phi$  ist ein Diffeomorphismus, folglich ist  $\tilde{\phi}$  ein lokaler Diffeomorphismus. Da  $\tilde{\phi}$  bijektiv ist, ist  $\tilde{\phi}$  ein Diffeomorphismus. Wir erhalten, dass  $(\text{Spin}N, \bar{\pi}, N, \text{Spin}(n))$  mit der durch (2.5) definierten Wirkung und den lokalen Trivialisierungen  $(U, \tilde{\phi}^{-1})$  ein  $\text{Spin}(n)$ -Hauptfaserbündel wird.  $\square$

Wir wählen auf  $\text{Spin}N$  die durch den Beweis von Lemma 2.7 definierte Struktur eines  $\text{Spin}(n)$ -Hauptfaserbündels und erhalten eine Spinstruktur  $(\text{Spin}N, \bar{\eta})$  auf  $N$ , die von  $(\text{Spin}M, \eta)$  auf  $N$  induzierte Spinstruktur.

Folgender Satz ist im weiteren Verlauf der Arbeit von zentraler Bedeutung:

**Satz 2.8** *Sei  $M$  eine  $(n+1)$ -dimensionale Spinmannigfaltigkeit mit Spinstruktur  $\text{Spin}M$  und  $N \subset M$  eine orientierte Riemannsche Hyperfläche von  $M$ . Wir wählen  $\nu$  wie oben und versehen  $N$  mit der von  $\text{Spin}M$  induzierten Spinstruktur.*

*i) Sei  $n \geq 2$  gerade. Dann gibt es einen Isomorphismus von Vektorraumbündeln*

$$\Phi: \Sigma M|_N \rightarrow \Sigma N,$$

*derart, dass für alle  $p \in N$ ,  $\varphi \in (\Sigma M|_N)_p$ ,  $X \in T_p N \subset T_p M$  gilt:*

$$\Phi(\nu_p \cdot_M (X \cdot_M \varphi)) = X \cdot_N \Phi(\varphi),$$

*wobei  $\cdot_M$  (bzw.  $\cdot_N$ ) die Clifford-Multiplikation auf  $\Sigma M$  (bzw.  $\Sigma N$ ) bezeichnet. Weiter gilt für alle  $X \in T_p N \subset T_p M$  und alle  $\varphi \in \Gamma(\Sigma M|_N)$*

$$\nabla_X^{\Sigma M} \varphi = \Phi^{-1}(\nabla_X^{\Sigma N} \Phi(\varphi)) - \frac{1}{2} \nu \cdot_M \cdot (W(X) \cdot_M \varphi).$$

Dabei ist  $W$  die Weingartenabbildung von  $N$  bezüglich  $\nu$ . Wir können die Bündelmetriken auf  $\Sigma M$  und  $\Sigma N$  so wählen, dass für alle  $\varphi, \sigma \in \Sigma M|_N$

$$\langle \varphi, \sigma \rangle = \langle \Phi(\varphi), \Phi(\sigma) \rangle$$

gilt.

ii) Sei  $n \geq 1$  ungerade. Dann gibt es einen Isomorphismus von Vektorraumbündeln

$$\Phi: \Sigma^+ M|_N \rightarrow \Sigma N,$$

derart, dass für alle  $p \in N$ ,  $\varphi \in (\Sigma^+ M|_N)_p$ ,  $X \in T_p N \subset T_p M$  gilt:

$$\Phi(\nu_p \cdot_M (X \cdot_M \varphi)) = X \cdot_N \Phi(\varphi),$$

wobei  $\cdot_M$  (bzw.  $\cdot_N$ ) die Clifford-Multiplikation auf  $\Sigma M$  (bzw.  $\Sigma N$ ) bezeichnet. Weiter gilt für alle  $X \in T_p N \subset T_p M$  und alle  $\varphi \in \Gamma(\Sigma^+ M|_N)$

$$\nabla_X^{\Sigma^+ M} \varphi = \Phi^{-1}(\nabla_X^{\Sigma N} \Phi(\varphi)) - \frac{1}{2} \nu \cdot_M \cdot (W(X) \cdot_M \varphi).$$

Wir können die Bündelmetriken auf  $\Sigma M$  und  $\Sigma N$  so wählen, dass für alle  $\varphi, \sigma \in \Sigma^+ M|_N$

$$\langle \varphi, \sigma \rangle = \langle \Phi(\varphi), \Phi(\sigma) \rangle$$

gilt.

*Beweis.* Zu i): Sei  $n \geq 2$  gerade. Sei  $\rho: \mathbb{C}l_{n+1} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(\Sigma_{n+1})$  eine irreduzible komplexe Algebrendarstellung von  $\mathbb{C}l_{n+1}$  mit  $\rho(\omega_{n+1}) = id_{\Sigma_{n+1}}$  und  $F: \mathbb{C}l_n \rightarrow \mathbb{C}l_{n+1}^0$  der Algebrenisomorphismus aus Lemma 1.11. Dann ist  $\rho \circ F$  eine irreduzible komplexe Algebrendarstellung von  $\mathbb{C}l_n$ . Da zusätzlich  $(\text{Spin} N, pr_2)$  eine  $(F: \text{Spin}(n) \rightarrow \text{Spin}(n+1))$ -Reduktion von  $\text{Spin} M|_N$  ist, erhalten wir aus Satz 1.48

$$\Sigma M|_N = \text{Spin} M|_N \times_{\rho} \Sigma_{n+1} \cong \text{Spin} N \times_{\rho \circ F} \Sigma_{n+1} = \Sigma N.$$

Diesen Vektorraumbündelisomorphismus bezeichnen wir mit  $\Phi$ . Nun überlegen wir uns, wie sich die Clifford-Multiplikationen unter  $\Phi$  verhalten. Dazu bezeichnen wir mit  $I$  den Isomorphismus

$$TM \cong \text{GL}M \times_{\rho_0} \mathbb{R}^{n+1} \cong \text{SOM} \times_{\rho_1} \mathbb{R}^{n+1} \cong \text{Spin} M \times_{\rho_1 \circ \text{Ad}} \mathbb{R}^{n+1},$$

der sich aus Beispiel 1.47 ii) und Beispiel 1.49 ergibt. Sei  $(b_1, \dots, b_n)$  eine beliebige positiv orientierte Orthonormalbasis von  $T_p N \subset T_p M$ . Wir wählen  $\tilde{b} \in (\text{Spin} M)_p$  derart, dass  $\eta(\tilde{b}) = (\nu_p, b_1, \dots, b_n)$ . Dann überlegt man sich anhand der Definition von  $I$ , dass

$$\begin{aligned} I(b_i) &= [\tilde{b}, e_i], \\ I(\nu_p) &= [\tilde{b}, e_0], \end{aligned}$$

für  $i = 1, \dots, n$ , wobei  $(e_0, \dots, e_n)$  die Standardbasis im  $\mathbb{R}^{n+1}$  bezeichnet. Sei  $X \in T_p N \subset T_p M$ . Dann gilt  $I(X) = [\tilde{b}, (0, v)]$  mit  $v \in \mathbb{R}^n$ . Sei jetzt noch  $\varphi \in (\Sigma M|_N)_p$  beliebig. Dann können wir  $\varphi = [\tilde{b}, \sigma]$  für ein  $\sigma \in \Sigma_{n+1}$  schreiben. Bezeichnen wir mit  $\cdot_M$  (bzw.  $\cdot_N$ ) die

durch  $\rho$  (bzw.  $\rho \circ F$ ) induzierte Clifford-Multiplikation und  $\hat{b} := ((b_1, \dots, b_n), \tilde{b}) \in \text{Spin}N$ , so berechnen wir

$$\begin{aligned}
\nu_p \cdot_M (X \cdot_M \varphi) &= \nu_p \cdot_M [\tilde{b}, \rho(0, v)(\sigma)] \\
&= [\tilde{b}, e_0] \cdot_M [\tilde{b}, \rho(0, v)(\sigma)] \\
&= [\tilde{b}, \rho(e_0 \cdot (0, v))(\sigma)] \\
&= [\tilde{b}, (\rho \circ F)(v)(\sigma)] \\
&= \Phi^{-1}([\hat{b}, (\rho \circ F)(v)(\sigma)]) \\
&= \Phi^{-1}([\hat{b}, v] \cdot_N [\hat{b}, \sigma]) \\
&= \Phi^{-1}(X \cdot_N \Phi(\varphi)),
\end{aligned}$$

wobei wir beim letzten Gleichheitszeichen verwendet haben, dass  $b_i \mapsto [\hat{b}, e_i]$  unter  $TN \cong \text{Spin}N \times_{\rho_1 \circ \text{Ad}} \mathbb{R}^n$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $(e_1, \dots, e_n)$  Standardbasis des  $\mathbb{R}^n$ . Wir haben also gezeigt:

$$\Phi(\nu_p \cdot_M (X \cdot_M \varphi)) = X \cdot_N \Phi(\varphi).$$

Sei nun  $v = (v_1, \dots, v_n): V \rightarrow \text{SON}$  ein lokaler Schnitt. Nach eventueller Verkleinerung von  $V$  gibt es einen lokalen Schnitt  $b = (b_0, \dots, b_n): U \rightarrow \text{SOM}$  mit  $V \subset U$ ,  $b_i|_V = v_i$  für  $i = 1, \dots, n$  und  $b_0|_V = \nu|_V$ . Weiter sei  $\varphi \in \Gamma(\Sigma M|_N)$  und  $p \in V$  fest gewählt. Wir setzten  $\varphi$  lokal um  $p$  zu einem Schnitt von  $\Sigma M$  fort und können  $\varphi = [\tilde{b}, f]$  für eine durch  $\varphi$  und  $\tilde{b}$  eindeutig bestimmte glatte Funktion  $f$  schreiben, wobei  $\tilde{b}$  ein lokaler Schnitt von  $\text{Spin}M$  mit  $\eta(\tilde{b}) = b$  ist. Für alle  $X, Y \in \Gamma(TN)$  haben wir die Identität

$$\nabla_X^M Y = \nabla_X^N Y + g(W(X), Y)\nu.$$

(Dabei bezeichnet  $g$  die Riemannsche Metrik auf  $M$  bzw.  $N$ .) Damit berechnen wir, dass für  $l = 1, \dots, n$  in  $p$  gilt:

$$\begin{aligned}
\nabla_{b_l}^{\Sigma M} \varphi &= [\tilde{b}, df(b_l)] + \frac{1}{2} \sum_{0 \leq i < j \leq n} g(\nabla_{b_l}^M b_i, b_j) b_i \cdot_M (b_j \cdot_M \varphi) \\
&= [\tilde{b}, df(b_l)] + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n g(-W(b_l), b_j) \nu \cdot_M (b_j \cdot_M \varphi) \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} g(\nabla_{b_l}^N b_i, b_j) b_i \cdot_M (b_j \cdot_M \varphi) \\
&= [\tilde{b}, df(b_l)] + \frac{1}{2} W(b_l) \cdot_M (\nu \cdot_M \varphi) + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} g(\nabla_{b_l}^N b_i, b_j) b_i \cdot_M (b_j \cdot_M \varphi) \\
&\stackrel{*}{=} \frac{1}{2} W(b_l) \cdot_M (\nu \cdot_M \varphi) + \Phi^{-1}(\nabla_{b_l}^{\Sigma N} \Phi(\varphi)) \\
&= \Phi^{-1}(\nabla_{b_l}^{\Sigma N} \Phi(\varphi)) - \frac{1}{2} \nu \cdot_M (W(b_l) \cdot_M \varphi).
\end{aligned}$$

Dabei ergibt sich \* aus

$$\begin{aligned}
b_i \cdot_M (b_j \cdot_M \varphi) &= \nu \cdot_M (b_i \cdot_M (\nu \cdot_M (b_j \cdot_M \varphi))) \\
&= \nu \cdot_M (b_i \cdot_M \Phi^{-1}(b_j \cdot_N \Phi(\varphi))) \\
&= \Phi^{-1}(b_i \cdot_N b_j \cdot_N \Phi(\varphi))
\end{aligned}$$

und  $\Phi(\varphi) = [(v, \tilde{b}|_V), f]$ . Die Aussage über die Bündelmetriken folgt unter Beachtung, dass  $\Phi$  die  $\Sigma_{n+1}$ -Komponente unverändert lässt. (Wichtig ist lediglich, dass man bei  $\Sigma M$  und  $\Sigma N$  jeweils das gleiche Skalarprodukt auf  $\Sigma_{n+1}$  wählt.)

Zu ii): Sei  $n \geq 1$  ungerade. Sei  $\rho: \mathbb{C}l_{n+1} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(\Sigma_{n+1})$  eine irreduzible komplexe Algebren­darstellung von  $\mathbb{C}l_{n+1}$ . Sei  $\rho^+: \mathbb{C}l_{n+1}^0 \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(\Sigma_{n+1}^+)$  die irreduzible komplexe Algebren­darstellung aus Satz 1.25 i). In dessen Beweis haben wir gesehen, dass  $\rho^+(\omega_{n+1}) = id_{\Sigma_{n+1}^+}$ . Wegen  $F(\omega_n) = \omega_{n+1}$  (dies gilt, da  $n$  ungerade ist) ist  $\rho^+ \circ F$  eine irreduzible komplexe Algebren­darstellung von  $\mathbb{C}l_n$  mit  $(\rho^+ \circ F)(\omega_n) = id_{\Sigma_{n+1}^+}$ . Wir erhalten

$$\Sigma^+ M|_N = \text{Spin}M|_N \times_{\rho^+} \Sigma_{n+1}^+ \cong \text{Spin}N \times_{\rho^+ \circ F} \Sigma_{n+1}^+ = \Sigma N,$$

wobei wir diesen Vektorraumbündelisomorphismus wieder mit  $\Phi$  bezeichnen. Bezeichnen wir mit  $\cdot_M$  (bzw.  $\cdot_N$ ) die von  $\rho$  (bzw.  $\rho^+ \circ F$ ) induzierte Clifford-Multiplikation auf  $\Sigma M$  (bzw.  $\Sigma N$ ), so erhalten wir wie oben

$$\Phi(\nu_p \cdot_M (X \cdot_M \varphi)) = X \cdot_N \Phi(\varphi)$$

für  $X \in T_p N \subset T_p M$ ,  $\varphi \in (\Sigma^+ M|_N)_p \subset (\Sigma M|_N)_p$ . Die Aussagen über die spinoriellen Levi-Civita-Ableitungen und die Bündelmetriken erhält man ebenfalls analog zum Beweis von i).  $\square$



### 3 Topologische Spinstrukturen

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit sogenannten topologischen Spinstrukturen. Diese werden im Zusammenhang mit den verallgemeinerten Zylindern eine Rolle spielen. Grob formuliert kann man sich unter einer topologischen Spinstruktur eine Art Spinstruktur vorstellen, die die Riemannsche Metrik „nicht sieht“. Wir beginnen damit, aus dem Rahmenbündel  $SOM$  die Riemannsche Metrik „zu entfernen“.

Sei  $M$  eine  $n$ -dimensionale orientierte Mannigfaltigkeit. Dann können wir auf  $M$  das Bündel der positiv orientierten Rahmen  $GL^+M$  erklären. Man geht dabei analog zu Beispiel 1.38 vor. Der Vollständigkeit halber machen wir das noch einmal etwas ausführlicher: Für jedes  $x \in M$  definieren wir

$$(GL^+M)_x := \{\text{positiv orientierte Basen von } T_xM\}$$

und  $GL^+M := \bigsqcup_{x \in M} (GL^+M)_x$ . Die Projektion ist wieder gegeben durch  $\pi(b) := x$  für  $b \in (GL^+M)_x$  und die Gruppenwirkung durch

$$\begin{aligned} GL^+M \times GL^+(n, \mathbb{R}) &\rightarrow GL^+M, \\ ((b_1, \dots, b_n), A) &\mapsto \left( \sum_{i=1}^n b_i A_{i1}, \dots, \sum_{i=1}^n b_i A_{in} \right), \end{aligned}$$

wobei  $(b_1, \dots, b_n)$  eine positiv orientierte Basis von  $T_xM$  ist.

Seien  $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$  lokale Trivialisierungen von  $TM$  mit  $\bigcup_{i \in I} U_i = M$ , so dass für alle  $i \in I$  und alle  $x \in U_i$  der Vektorraumisomorphismus  $\varphi_i|_{T_xM}: T_xM \rightarrow \mathbb{R}^n$  orientierungserhaltend ist. Wir definieren

$$\begin{aligned} \phi_i: \pi^{-1}(U_i) &\rightarrow U_i \times GL^+(n, \mathbb{R}) \\ (b_1, \dots, b_n) &\mapsto (x, (\varphi_i(b_1) \dots \varphi_i(b_n))) \end{aligned}$$

wobei  $(b_1, \dots, b_n)$  eine positiv orientierte Basis von  $T_xM$  ist,  $x \in U_i$  und  $(\varphi_i(b_1) \dots \varphi_i(b_n))$  die Matrix mit den Spaltenvektoren  $\varphi_i(b_j)$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Dann erfüllt  $(U_i, \phi_i)_{i \in I}$  die Voraussetzungen aus Lemma 1.32 und wir definieren die Topologie und Mannigfaltigkeitsstruktur auf  $GL^+M$  dadurch.

So wird  $(GL^+(M), \pi, M, GL^+(n, \mathbb{R}))$  zu einem Hauptfaserbündel, dem Bündel der positiv orientierten Rahmen von  $M$ . Insbesondere gilt: Ist  $(U, \varphi)$  eine beliebige lokale Trivialisierung von  $TM$ , so dass  $\varphi|_{T_xM}: T_xM \rightarrow \mathbb{R}^n$  für alle  $x \in U$  orientierungserhaltend ist, ist  $(U, \phi)$  mit

$$\begin{aligned} \phi: \pi^{-1}(U) &\rightarrow U \times GL^+(n, \mathbb{R}) \\ (b_1, \dots, b_n) &\mapsto (x, (\varphi(b_1) \dots \varphi(b_n))) \end{aligned}$$

eine lokale Trivialisierung von  $GL^+M$ .

Als Nächstes brauchen wir einen Ersatz für  $\text{Ad}: \text{Spin}(n) \rightarrow \text{SO}(n, \mathbb{R})$ . Dazu definieren wir eine Abbildung

$$\theta: \widetilde{GL^+}(n, \mathbb{R}) \rightarrow GL^+(n, \mathbb{R})$$

wie folgt:

- Für  $n = 1$  setzen wir  $\widetilde{GL}^+(1, \mathbb{R}) := \mathbb{R}_+ \times \{\pm 1\}$ , wobei  $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$ ,  $\theta(x, \pm 1) := x \in GL^+(1, \mathbb{R}) = \mathbb{R}_+$ .
- Für  $n = 2$  ist  $\theta: \widetilde{GL}^+(2, \mathbb{R}) \rightarrow GL^+(2, \mathbb{R})$  die zusammenhängende zweifache Überlagerung der Liegruppe  $GL^+(2, \mathbb{R})$ . (Erinnerung aus der Überlagerungstheorie: Es gibt eine bijektive Zuordnung zwischen Äquivalenzklassen zusammenhängender Überlagerungen  $X \xrightarrow{p} GL^+(2, \mathbb{R})$  und (Konjugationsklassen von) Untergruppen von  $\pi_1(GL^+(2, \mathbb{R})) \cong \mathbb{Z}$ , wobei  $p$  die Untergruppe  $p_*(\pi_1(X))$  zugeordnet wird. Sei nun  $X \xrightarrow{p} GL^+(2, \mathbb{R})$  die zusammenhängende Überlagerung mit  $p_*(\pi_1(X)) = 2\mathbb{Z}$ . Da  $2\mathbb{Z}$  ein Normalteiler in  $\mathbb{Z}$  ist, ist  $p$  eine normale Überlagerung. Dann ist die Blätterzahl von  $p$  gleich dem Index von  $2\mathbb{Z}$  in  $\mathbb{Z}$ , also 2. Damit ist  $p$  eine zusammenhängende zweifache Überlagerung, was die Existenz zeigt. Zur Eindeutigkeit: Sei  $X \xrightarrow{p} GL^+(2, \mathbb{R})$  eine zusammenhängende zweifache Überlagerung. Da  $\mathbb{Z}$  genau die Untergruppen  $n\mathbb{Z}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , hat, gilt  $p_*(\pi_1(X)) = n\mathbb{Z}$  für ein  $n \in \mathbb{N}$ . Dann ist  $p$  normal, da  $n\mathbb{Z}$  ein Normalteiler in  $\mathbb{Z}$  ist. Folglich ist die Blätterzahl von  $p$  gleich  $n$ , d.h.  $n = 2$ . Damit ist  $p$  eindeutig bis auf Isomorphie.)
- Für  $n \geq 3$  definieren wir  $\theta: \widetilde{GL}^+(n, \mathbb{R}) \rightarrow GL^+(n, \mathbb{R})$  als die universelle Überlagerung der Liegruppe  $GL^+(n, \mathbb{R})$ . (Die universelle Überlagerung ist immer normal, damit ist ihre Blätterzahl gleich der Mächtigkeit von  $\pi_1(GL^+(n, \mathbb{R}))$ ). Für  $n \geq 3$  gilt  $\pi_1(GL^+(n, \mathbb{R})) = \mathbb{Z}_2$ , also ist die universelle Überlagerung in diesem Fall zweiblättrig.)

**Definition 3.1 (topologische Spinstruktur)** Sei  $M$  eine  $n$ -dimensionale orientierte Mannigfaltigkeit. Eine topologische Spinstruktur auf  $M$  ist eine  $\theta$ -Reduktion von  $(GL^+M, \pi, M, GL^+(n, \mathbb{R}))$ .

Um topologische Spinstrukturen von Spinstrukturen im Sinne von Definition 1.40 zu unterscheiden, nennen wir Letztere auch *metrische Spinstrukturen*. Genauer:

Metrische Spinstruktur  $\equiv$  Spinstruktur  $\equiv$  Definition 1.40

Topologische Spinstruktur  $\equiv$  Definition 3.1

(Insbesondere verwenden wir den Begriff „Spinstruktur“ *nicht* als Oberbegriff für beide Definitionen.)

Ist  $(\widetilde{GL}^+M, \eta)$  eine topologische Spinstruktur auf  $M$ , so ist  $\eta: \widetilde{GL}^+M \rightarrow GL^+M$  eine zweifache Überlagerung. Dies beweist man wie im Fall von metrischen Spinstrukturen unter Verwendung, dass  $\theta$  eine zweifache Überlagerung ist.

Als Nächstes wollen wir uns damit beschäftigen, wie topologische und metrische Spinstrukturen zusammenhängen.

**Lemma 3.2** Sei  $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ . Dann gibt es genau einen injektiven Homomorphismus von Liegruppen

$$j: \text{Spin}(n) \rightarrow \widetilde{GL}^+(n, \mathbb{R})$$

derart, dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Spin}(n) & \xrightarrow{j} & \widetilde{GL}^+(n, \mathbb{R}) \\
 \downarrow \text{Ad} & & \downarrow \theta \\
 SO(n, \mathbb{R}) & \xrightarrow{i} & GL^+(n, \mathbb{R})
 \end{array} \tag{3.1}$$

Dabei ist  $i: SO(n, \mathbb{R}) \rightarrow GL^+(n, \mathbb{R})$  die Inklusion. Weiter gilt

$$j(\text{Spin}(n)) = \theta^{-1}(SO(n, \mathbb{R})). \tag{3.2}$$

*Beweis.* Sei  $n = 1$ . Dann zeigt man sofort, dass es nur einen injektiven Homomorphismus von Liegruppen  $j: \text{Spin}(1) \rightarrow \widetilde{GL}^+(1, \mathbb{R})$  gibt, so dass (3.1) kommutiert. Für den Rest des Beweises sei also  $n \geq 2$ . Wir zeigen zunächst:

$$(i \circ \text{Ad})_*(\pi_1(\text{Spin}(n))) \subset \theta_*(\pi_1(\widetilde{GL}^+(n, \mathbb{R}))). \tag{3.3}$$

Für  $n \geq 3$  ist  $\text{Spin}(n)$  einfach zusammenhängend und (3.3) ist klar. Sei  $n = 2$ . Dann haben wir  $\theta_*(\pi_1(\widetilde{GL}^+(2, \mathbb{R}))) = 2\mathbb{Z}$  (siehe Definition von  $\theta$ ) und in Verbindung mit Proposition 1.19 folgt (3.3). Damit existiert nach Satz 2.4 ii) für alle  $n \geq 2$  eine glatte Abbildung  $j: \text{Spin}(n) \rightarrow \widetilde{GL}^+(n, \mathbb{R})$  mit  $j(e) = e$ , wobei  $e$  die neutralen Elemente in den betreffenden Liegruppen bezeichnet.

Als Nächstes zeigen wir, dass  $j$  ein Gruppenhomomorphismus ist. Dazu bezeichnen wir mit  $m, \tilde{m}$  und  $\hat{m}$  die Multiplikationen in  $\text{Spin}(n)$ ,  $\widetilde{GL}^+(n, \mathbb{R})$  und  $SO(n, \mathbb{R})$ . Wir müssen also

$$j \circ m = \tilde{m} \circ (j \times j) \tag{3.4}$$

zeigen. Sowohl  $j \circ m$  als auch  $\tilde{m} \circ (j \times j)$  sind Lifts von  $i \circ \hat{m} \circ (\text{Ad} \times \text{Ad})$  bezüglich der Überlagerung  $\theta$ . Wegen  $(j \circ m)(e, e) = (\tilde{m} \circ (j \times j))(e, e)$  und Satz 2.4 i) erhalten wir (3.4).

Zur Eindeutigkeit von  $j$ : Aus Satz 2.4 i) folgt, dass es höchstens eine Abbildung  $j: \text{Spin}(n) \rightarrow \widetilde{GL}^+(n, \mathbb{R})$  mit  $j(e) = e$  geben kann, die (3.1) kommutativ macht.

Zur Injektivität von  $j$ : Wir zeigen die Injektivität von  $j$  durch Liften von passenden Wegen. Dazu benötigen wir:

$$(*) \text{ Es gilt } i_*^{-1}(\theta_*(\pi_1(\widetilde{GL}^+(n, \mathbb{R})))) \subset \text{Ad}_*(\pi_1(\text{Spin}(n))).$$

Um (\*) einzusehen, verwenden wir, dass  $i: SO(n, \mathbb{R}) \rightarrow GL^+(n, \mathbb{R})$  eine Homotopieäquivalenz ist, d.h.  $i_*$  ist ein Isomorphismus. Sei  $n = 2$ . Dann ist  $i_*^{-1}(\theta_*(\pi_1(\widetilde{GL}^+(2, \mathbb{R})))) = i_*^{-1}(2\mathbb{Z}) = 2\mathbb{Z} = \text{Ad}_*(\pi_1(\text{Spin}(n)))$  nach Definition von  $\theta$  und wegen Proposition 1.19. Für  $n \geq 3$  ist  $i_*^{-1}(\theta_*(\pi_1(\widetilde{GL}^+(n, \mathbb{R})))) = i_*^{-1}(e) = \{e\} \subset \text{Ad}_*(\pi_1(\text{Spin}(n)))$  und (\*) ist gezeigt. Seien nun  $a, b \in \text{Spin}(n)$  mit  $j(a) = j(b)$ . Aus der Kommutativität von (3.1) folgt  $\text{Ad}(a) = \text{Ad}(b)$ . Sei  $\gamma: [0, 1] \rightarrow \text{Spin}(n)$  ein Weg mit  $\gamma(0) = a$  und  $\gamma(1) = b$ . (Wir werden zeigen, dass  $\gamma$  geschlossen ist.) Die Wege  $j \circ \gamma$ ,  $\theta \circ j \circ \gamma = i \circ \text{Ad} \circ \gamma$  und  $\text{Ad} \circ \gamma$  sind geschlossen und definieren damit Elemente in den betreffenden Fundamentalgruppen. Aus (\*) folgt  $[\text{Ad} \circ \gamma] \in \text{Ad}_*(\pi_1(\text{Spin}(n)))$ , denn  $i_*([\text{Ad} \circ \gamma]) = [i \circ \text{Ad} \circ \gamma] = [\theta \circ j \circ \gamma] = \theta_*([j \circ \gamma]) \in \theta_*(\pi_1(\widetilde{GL}^+(n, \mathbb{R})))$ , d.h. es gibt einen geschlossenen Weg  $\tilde{\gamma}: [0, 1] \rightarrow \text{Spin}(n)$

mit  $\tilde{\gamma}(0) = a$  derart, dass  $\text{Ad} \circ \tilde{\gamma}$  homotop ist zu  $\text{Ad} \circ \gamma$ . Dann müssen die beiden Lifts  $\tilde{\gamma}$  und  $\gamma$  die gleichen Endpunkte haben (Monodromielemma). Das bedeutet

$$b = \gamma(1) = \tilde{\gamma}(1) = \tilde{\gamma}(0) = a,$$

d.h.  $j$  ist injektiv.

Es bleibt (3.2) zu zeigen: Die Inklusion  $j(\text{Spin}(n)) \subset \theta^{-1}(SO(n, \mathbb{R}))$  folgt direkt aus der Kommutativität von (3.1). Die umgekehrte Inklusion kann man wie folgt einsehen: Sei  $x \in \theta^{-1}(SO(n, \mathbb{R}))$  und seien  $u_1$  und  $u_2$  die beiden verschiedenen Urbilder von  $\theta(x) \in SO(n, \mathbb{R})$  unter  $\text{Ad}$ . Es folgt

$$\theta(j(u_1)) = i(\text{Ad}(u_1)) = \theta(x) = i(\text{Ad}(u_2)) = \theta(j(u_2)),$$

d.h.  $j(u_1)$ ,  $j(u_2)$  und  $x$  haben das gleiche Bild unter  $\theta$ . Da  $\theta$  eine zweifache Überlagerung ist und wir aus der Injektivität von  $j$  erhalten, dass  $j(u_1) \neq j(u_2)$ , muss  $x = j(u_i)$  für ein  $i = 1, 2$  gelten, d.h.  $x \in j(\text{Spin}(n))$ .  $\square$

Differenzieren wir (3.1), so erhalten wir, dass  $j$  eine Immersion ist. Wegen der Kompaktheit von  $\text{Spin}(n)$  folgt daraus, dass  $j$  eine Einbettung ist (siehe z.B. [16, Proposition 4.22]). Weiter ist  $j(\text{Spin}(n)) \subset \widetilde{GL}^+(n, \mathbb{R})$  eine Lie-Untergruppe und  $j: \text{Spin}(n) \rightarrow j(\text{Spin}(n)) = \theta^{-1}(SO(n, \mathbb{R}))$  ein Isomorphismus von Liegruppen (vergleiche [16, Proposition 7.17]). Wir können  $\theta$  also in gewisser Weise als eine „Erweiterung“ von  $\text{Ad}$  ansehen.

Für die Notation im folgenden Satz erinnern wir daran, dass wir mit  $\text{Red}_{\text{Ad}}(\text{SOM})$  die Menge von äquivalenten Spinstrukturen auf  $M$  bezeichnen und mit  $\text{Red}_{\theta}(GL^+M)$  die Menge von äquivalenten topologischen Spinstrukturen auf  $M$ . (Siehe nach Definition 1.43.)

**Satz 3.3 (Wechsel zwischen topologischen und metrischen Spinstrukturen)** *Sei  $M$  eine  $n$ -dimensionale orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann gilt:*

- i) Ist  $(\text{Spin}M, \eta)$  eine metrische Spinstruktur auf  $M$ , erhalten wir eine topologische Spinstruktur  $(\widetilde{GL}^+M, \tilde{\eta})$  auf  $M$  wie folgt: Wir definieren  $\widetilde{GL}^+M$  als die  $j$ -Erweiterung*

$$\widetilde{GL}^+M := \text{Spin}M \times_{\text{Spin}(n)} \widetilde{GL}^+(n, \mathbb{R}),$$

*wobei  $j$  der Homomorphismus von Liegruppen aus Lemma 3.2 ist. Weiter erklären wir  $\tilde{\eta}$  durch*

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}: \widetilde{GL}^+M &\rightarrow \text{SOM} \times_{SO(n, \mathbb{R})} GL^+(n, \mathbb{R}) \cong GL^+M, \\ [x, \tilde{A}] &\mapsto [\eta(x), \theta(\tilde{A})] \mapsto \eta(x) \cdot \theta(\tilde{A}), \end{aligned}$$

*wobei wir  $\text{SOM}$  bezüglich der Inklusion  $i: SO(n, \mathbb{R}) \rightarrow GL^+(n, \mathbb{R})$  erweitert haben.*

- ii) Ist  $(\widetilde{GL}^+M, \tilde{\eta})$  eine topologische Spinstruktur auf  $M$ , erhalten wir eine metrische Spinstruktur  $(\text{Spin}M, \eta)$  auf  $M$  wie folgt:  $\text{Spin}M$  ist die Einschränkung der lokal trivialen Faserung  $\tilde{\eta}: \widetilde{GL}^+M \rightarrow GL^+M$  auf  $\text{SOM}$ ,*

$$\text{Spin}M := (\widetilde{GL}^+M)|_{\text{SOM}}.$$

*Dann setzen wir  $\eta(b, x) := b$  für alle  $(b, x) \in \text{Spin}M \subset \text{SOM} \times \widetilde{GL}^+M$ . Wir können auf  $\text{Spin}M$  die Struktur eines  $\text{Spin}(n)$ -Hauptfaserbündels derart definieren, dass  $(\text{Spin}M, \eta)$  eine Spinstruktur auf  $M$  wird.*

iii) Die in i) und ii) beschriebenen Vorgänge definieren wohldefinierte Abbildungen

$$\mathfrak{R}: \text{Red}_{\text{Ad}}(\text{SOM}) \rightarrow \text{Red}_{\theta}(\text{GL}^+M),$$

$$\mathfrak{R}^{-1}: \text{Red}_{\theta}(\text{GL}^+M) \rightarrow \text{Red}_{\text{Ad}}(\text{SOM}),$$

welche invers zueinander sind.

*Beweis.* Zu i): Der Isomorphismus von Hauptfaserbündeln  $\text{SOM} \times_{SO(n, \mathbb{R})} \text{GL}^+(n, \mathbb{R}) \cong \text{GL}^+M$  ergibt sich aus Satz 2.2. Für den Rest beachte man, dass (3.1) kommutiert.

Zu ii):  $\tilde{\eta}: \widetilde{\text{GL}^+M} \rightarrow \text{GL}^+M$  ist eine zweifache Überlagerung, also eine lokal triviale Faserung. Damit  $\text{Spin}M$  wohldefiniert ist, müssen wir zeigen, dass  $\text{SOM} \subset \text{GL}^+M$  eine Untermannigfaltigkeit ist. Wir zeigen, dass die Inklusion  $\iota: \text{SOM} \rightarrow \text{GL}^+M$  eine Einbettung ist. Dazu wählen wir lokale Trivialisierungen  $(U_j, \phi_j)_{j \in I}$  von  $\text{SOM}$  mit  $\bigcup_{j \in I} U_j = M$ , wie wir sie in Beispiel 1.38 iii) konstruiert haben. Dann sind  $(U_j, \phi_j)$  auch lokale Trivialisierungen von  $\text{GL}^+M$  und wir erhalten für jedes  $j \in I$  ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} (\text{SOM})_{U_j} & \xrightarrow{\iota} & (\text{GL}^+M)_{U_j} \\ \downarrow \phi_j & & \downarrow \phi_j \\ U_j \times SO(n, \mathbb{R}) & \xrightarrow{id_{U_j} \times i} & U_j \times \text{GL}^+(n, \mathbb{R}) \end{array} \quad (3.5)$$

Da die Inklusion  $i: SO(n, \mathbb{R}) \rightarrow \text{GL}^+(n, \mathbb{R})$  eine Einbettung ist, erhalten wir aus der Kommutativität von (3.5), dass  $\iota$  eine Immersion ist und  $\iota: (\text{SOM})_{U_j} \rightarrow (\text{GL}^+M)_{U_j}$  eine topologische Einbettung. Wir zeigen, dass  $\iota: \text{SOM} \rightarrow \iota(\text{SOM})$  eine offene Abbildung (und damit ein Homöomorphismus) ist. Sei dazu  $W \subset \text{SOM}$  offen. Dann ist  $\iota(W \cap (\text{SOM})_{U_j})$  offen in  $\iota((\text{SOM})_{U_j})$ , woraus wir nach der Definition der Teilraumtopologie eine Menge  $V_j \subset (\text{GL}^+M)_{U_j}$  erhalten, die offen ist in  $(\text{GL}^+M)_{U_j}$  (und damit auch in  $\text{GL}^+M$ ) und

$$\iota(W \cap (\text{SOM})_{U_j}) = V_j \cap \iota((\text{SOM})_{U_j})$$

erfüllt. Wir erhalten

$$\iota(W \cap (\text{SOM})_{U_j}) = V_j \cap \iota((\text{SOM})_{U_j}) = V_j \cap \iota(\text{SOM}),$$

woraus folgt:

$$\begin{aligned} \iota(W) &= \iota(W) \cap \iota(\text{SOM}) \\ &= \iota(W) \cap \iota\left(\bigcup_{j \in I} (\text{SOM})_{U_j}\right) \\ &= \bigcup_{j \in I} (W \cap (\text{SOM})_{U_j}) \\ &= \bigcup_{j \in I} (V_j \cap \iota(\text{SOM})) \\ &= \left(\bigcup_{j \in I} V_j\right) \cap \iota(\text{SOM}). \end{aligned}$$

Damit ist  $\iota(W)$  offen in  $\iota(\text{SOM})$ . Folglich ist  $\iota: \text{SOM} \rightarrow \iota(\text{SOM})$  eine offene Abbildung und  $\iota: \text{SOM} \rightarrow \text{GL}^+M$  eine topologische Einbettung. Also ist  $\iota: \text{SOM} \rightarrow \text{GL}^+M$  insgesamt

eine Einbettung und  $SOM \subset GL^+M$  eine eingebettete Untermannigfaltigkeit. Gehen wir analog zum Beweis von Lemma 2.7 vor, erhalten wir auf  $SpinM$  die Struktur eines  $Spin(n)$ -Hauptfaserbündels, d.h. wir machen folgende Definitionen: Ist  $(b, x) \in SpinM$ ,  $b \in SOM$ ,  $x \in \widetilde{GL^+M}$ , so definieren wir die Projektion von  $SpinM$  als

$$\begin{aligned} \bar{\pi}: SpinM &\rightarrow M, \\ (b, x) &\mapsto \pi(x), \end{aligned}$$

wobei  $\pi: \widetilde{GL^+M} \rightarrow M$  die Projektion von  $\widetilde{GL^+M}$  ist. Ist  $g \in Spin(n)$ , so definieren wir die Wirkung von  $Spin(n)$  auf  $SpinM$  durch

$$(b, x) \cdot g := (b \cdot \text{Ad}(g), x \cdot j(g)),$$

wobei  $j$  wie in Lemma 3.2 ist. (Dass diese Wirkung einfach transitiv auf den Fasern ist, kann man ganz analog zum Beweis von Lemma 2.7 zeigen.) Schließlich erklären wir die lokalen Trivialisierungen von  $SpinM$  wie folgt: Sei  $s: U \rightarrow SOM$  ein lokaler Schnitt mit  $U \subset M$  offen und einfach zusammenhängend. Aus der Überlagerungstheorie erhalten wir, dass es eine glatte Abbildung  $\tilde{s}: U \rightarrow SpinM$  gibt, so dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} & & SpinM \\ & \nearrow \tilde{s} & \downarrow \eta \\ U & \xrightarrow{s} & SOM \end{array}$$

Dann definiert

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}: U \times Spin(n) &\rightarrow \bar{\pi}^{-1}(U), \\ (p, g) &\mapsto \tilde{s}(p) \cdot g, \end{aligned}$$

eine lokale Trivialisierung und macht damit  $SpinM$  zu einem  $Spin(n)$ -Hauptfaserbündel.

Zu iii): Äquivalente metrische (bzw. topologische) Spinstrukturen induzieren durch den in i) (bzw. ii)) beschriebenen Vorgang äquivalente topologische (bzw. metrische) Spinstrukturen, d.h.  $\mathfrak{R}$  und  $\mathfrak{R}^{-1}$  sind wohldefiniert.

Sei  $(SpinM, \eta)$  eine metrische Spinstruktur auf  $M$ . Wir führen i) aus und erhalten eine topologische Spinstruktur  $(\widetilde{GL^+M}, \tilde{\eta})$ . Auf diese wenden wir ii) an und erhalten eine metrische Spinstruktur  $(\widetilde{GL^+M}|_{SOM}, \hat{\eta})$ , wobei aus den Definitionen folgt:

$$\begin{aligned} \widetilde{GL^+M}|_{SOM} &= \{(b, [p, \tilde{A}]) \mid b \in SOM, p \in SpinM, \tilde{A} \in \widetilde{GL^+}(n, \mathbb{R}), b = \eta(p) \cdot \theta(\tilde{A})\}, \\ \hat{\eta}(b, [p, \tilde{A}]) &= b. \end{aligned}$$

Aus  $\eta(p) \cdot \theta(\tilde{A}) \in SOM$  und  $\eta(p) \in SOM$  folgt  $\theta(\tilde{A}) \in SO(n, \mathbb{R})$ . Daraus ergibt sich mit (3.2), dass  $\tilde{A} \in j(Spin(n))$ , d.h.

$$\widetilde{GL^+M}|_{SOM} = \{(b, [p, \tilde{A}]) \mid b \in SOM, p \in SpinM, \tilde{A} \in j(Spin(n)), b = \eta(p) \cdot \theta(\tilde{A})\}.$$

Wir definieren zwei Abbildungen

$$\begin{aligned} F: SpinM &\rightarrow \widetilde{GL^+M}|_{SOM}, \\ p &\mapsto (\eta(p), [p, 1]), \end{aligned}$$

wobei 1 das neutrale Element in  $\widetilde{GL}^+(n, \mathbb{R})$  bezeichnet und

$$F^{-1}: \widetilde{GL}^+M|_{\text{SOM}} \rightarrow \text{Spin}M, \\ (b, [p, \tilde{A}]) \mapsto p \cdot j^{-1}(\tilde{A}).$$

Die Wohldefiniertheit von  $F$  ist klar. Zur Wohldefiniertheit von  $F^{-1}$ : Es ist  $[p, \tilde{A}] = \{(p \cdot g, j(g^{-1})\tilde{A}) \mid g \in \text{Spin}(n)\}$ . Sei also  $g \in \text{Spin}(n)$ . Dann gilt

$$F^{-1}(b, [p \cdot g, j(g^{-1})\tilde{A}]) = (p \cdot g) \cdot j^{-1}(j(g^{-1})\tilde{A}) = p \cdot j^{-1}(\tilde{A}) = F^{-1}(b, [p, \tilde{A}]).$$

Als Nächstes zeigen wir, dass  $F$  und  $F^{-1}$  invers zueinander sind:  $F^{-1}(F(p)) = p$  ist klar. Weiter gilt

$$F(F^{-1}(b, [p, \tilde{A}])) = F(p \cdot j^{-1}(\tilde{A})) = (\eta(p \cdot j^{-1}(\tilde{A})), [p \cdot j^{-1}(\tilde{A}), 1]).$$

Aus (3.1) und da  $\eta$  eine Ad-Reduktion ist, erhalten wir

$$\eta(p \cdot j^{-1}(\tilde{A})) = \eta(p) \cdot \text{Ad}(j^{-1}(\tilde{A})) = \eta(p) \cdot \theta(\tilde{A}) = b.$$

$[p \cdot j^{-1}(\tilde{A}), 1] = [p, \tilde{A}]$  folgt aus der Definition der Äquivalenzklassen. Damit sind  $F$  und  $F^{-1}$  invers zueinander.

$F$  ist  $\text{Spin}(n)$ -äquivariant: Aus der Definition der Wirkung von  $\text{Spin}(n)$  auf  $\widetilde{GL}^+M|_{\text{SOM}}$  im Beweis von ii) und der Definition der Wirkung in Erweiterungen erhalten wir, dass die Wirkung von  $g \in \text{Spin}(n)$  gegeben ist durch

$$(b, [p, \tilde{A}]) \cdot g = (b \cdot \text{Ad}(g), [p, \tilde{A}j(g)]).$$

Wir berechnen

$$F(p \cdot g) = (\eta(p \cdot g), [p \cdot g, 1]) = (\eta(p) \cdot \text{Ad}(g), [p, j(g)]) = (\eta(p), [p, 1]) \cdot g = F(p) \cdot g.$$

Damit ist  $F$  eine  $\text{Spin}(n)$ -äquivariante Abbildung und man sieht leicht ein, dass  $F$  ein Isomorphismus von Reduktionen ist.

Sei nun  $(\widetilde{GL}^+M, \tilde{\eta})$  eine topologische Spinstruktur auf  $M$ . Durch den in ii) beschriebenen Vorgang erhalten wir eine metrische Spinstruktur  $(\text{Spin}M, \eta)$ . Auf diese wenden wir i) an und erhalten eine topologische Spinstruktur  $\text{Spin}M \times_{\text{Spin}(n)} \widetilde{GL}^+(n, \mathbb{R})$ . Man sieht leicht, dass  $(\text{Spin}M, pr_2)$  eine  $j$ -Reduktion von dem  $\widetilde{GL}^+(n, \mathbb{R})$ -Hauptfaserbündel  $\widetilde{GL}^+M$  ist. Deshalb liefert uns Satz 2.2 einen Isomorphismus von  $\text{Spin}(n)$ -Hauptfaserbündeln

$$F: \text{Spin}M \times_{\text{Spin}(n)} \widetilde{GL}^+(n, \mathbb{R}) \rightarrow \widetilde{GL}^+M, \\ [(b, x), \tilde{A}] \mapsto x \cdot \tilde{A},$$

wobei  $b \in \text{SOM}$ ,  $x \in \widetilde{GL}^+M$  und  $\tilde{A} \in \widetilde{GL}^+(n, \mathbb{R})$ . Anhand der Definitionen rechnet man leicht nach, dass  $F$  ein Isomorphismus von Reduktionen ist. Damit sind  $\mathfrak{R}$  und  $\mathfrak{R}^{-1}$  invers zueinander. □

Aus Satz 3.3 folgt, dass die Existenz einer Spinstruktur auf einer orientierten Riemannschen Mannigfaltigkeit unabhängig von der Riemannschen Metrik ist. Genauer: Sei  $M$  eine orientierte Mannigfaltigkeit und  $g_1, g_2$  zwei Riemannsche Metriken auf  $M$ . Existiert auf  $(M, g_1)$  eine Spinstruktur, so induziert diese eine topologische Spinstruktur auf  $M$  und die topologische Spinstruktur induziert eine Spinstruktur auf  $(M, g_2)$ .

### 3.1 Topologische Spinstrukturen auf Hyperflächen

**Lemma 3.4** Für jedes  $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$  gibt es genau einen injektiven Homomorphismus von Liegruppen

$$l: \widetilde{GL}^+(n, \mathbb{R}) \rightarrow \widetilde{GL}^+(n+1, \mathbb{R})$$

derart, dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{GL}^+(n, \mathbb{R}) & \xrightarrow{l} & \widetilde{GL}^+(n+1, \mathbb{R}) \\ \downarrow \theta & & \downarrow \theta \\ GL^+(n, \mathbb{R}) & \xrightarrow{i} & GL^+(n+1, \mathbb{R}) \end{array} \quad (3.6)$$

wobei  $i(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ . Weiter gilt

$$l(\widetilde{GL}^+(n, \mathbb{R})) = \theta^{-1}(i(GL^+(n, \mathbb{R}))). \quad (3.7)$$

*Beweis.* Sei zunächst  $n = 1$ . Da  $GL^+(1, \mathbb{R}) = \mathbb{R}_+$  einfach zusammenhängend ist, gibt es genau eine glatte Abbildung  $H: GL^+(1, \mathbb{R}) \rightarrow \widetilde{GL}^+(2, \mathbb{R})$  mit  $\theta \circ H = i$  und  $H(e) = e$  (wobei  $e$  hier und im Folgenden die betreffenden neutralen Elemente bezeichnet.) Wir zeigen, dass  $H$  ein Homomorphismus von Liegruppen ist. Bezeichnet  $m$  die Multiplikation in  $GL^+(1, \mathbb{R})$  und  $\tilde{m}$  die in  $\widetilde{GL}^+(2, \mathbb{R})$ , so ist  $H \circ m = \tilde{m} \circ (H \times H)$  zu zeigen. Sowohl  $H \circ m$  als auch  $\tilde{m} \circ (H \times H)$  sind Lifts von  $i \circ m$  bezüglich der Überlagerung  $\theta$ , die in  $(e, e)$  übereinstimmen. Aus Satz 2.4 i) folgt  $H \circ m = \tilde{m} \circ (H \times H)$ . Sei  $\theta^{-1}(e) = \{e, a\} \subset \widetilde{GL}^+(2, \mathbb{R})$ . Für  $n = 1$  definieren wir  $l$  wie folgt:

$$l(A, 1) := H(A), \quad l(A, -1) := H(A) \cdot a = a \cdot H(A),$$

für alle  $A \in GL^+(1, \mathbb{R})$ . (Die Identität  $H(A) \cdot a = a \cdot H(A)$  kann man wie folgt zeigen: Offenbar haben  $H(A)$ ,  $H(A) \cdot a$  und  $a \cdot H(A)$  das gleiche Bild unter  $\theta$ . Da  $\theta$  eine zweifache Überlagerung ist, müssen zwei dieser drei Elemente gleich sein.  $H(A) = a \cdot H(A)$  oder  $H(A) = H(A) \cdot a$  ist nicht möglich, denn nach Multiplikation mit  $H(A)^{-1}$  würde daraus  $a = e$  folgen. Damit muss  $H(A) \cdot a = a \cdot H(A)$  gelten.) Um die Glattheit von  $l$  einzusehen, sei  $k: \{\pm 1\} \rightarrow \widetilde{GL}^+(2, \mathbb{R})$  definiert durch  $k(1) = e$ ,  $k(-1) = a$ . Dann ist  $k$  eine glatte Abbildung und folglich ist  $l = \tilde{m} \circ (H \times k)$  glatt. Als Nächstes zeigen wir die Injektivität von  $l$ , indem wir  $\ker(l) = \{e\}$  zeigen. Da  $i$  injektiv ist, ist auch  $H$  injektiv. Gilt  $l(A, 1) = e$ , so folgt aus der Injektivität von  $H$ , dass  $A = e$ . Der Fall  $l(A, -1) = e$  kann nicht auftreten, denn: Angenommen, es gilt  $l(A, -1) = e$ . Dann folgt  $H(A) \cdot a = e$ . Es folgt

$$e = \theta(e) = \theta(H(A) \cdot a) = \theta(H(A)) = i(A),$$

d.h.  $A = e$ . Also gilt  $e = H(A) \cdot a = H(e) \cdot a = a$  im Widerspruch zu  $a \neq e$ . Die Eindeutigkeit von  $l$  folgt aus der Eindeutigkeit von  $H$ , der Kommutativität von (3.6) und der Forderung, dass  $l$  ein injektiver Homomorphismus von Liegruppen sein muss.

Für den Rest des Beweises sei  $n \geq 2$ . Wir verwenden wie gewohnt Satz 2.4 ii), um eine glatte Abbildung  $l: \widetilde{GL}^+(n, \mathbb{R}) \rightarrow \widetilde{GL}^+(n+1, \mathbb{R})$  mit  $l(e) = e$  zu erhalten, so dass (3.6) kommutiert. Für  $n = 2$  ist nach Konstruktion  $\theta_*(\pi_1(\widetilde{GL}^+(2, \mathbb{R}))) = 2\mathbb{Z}$  und liegt

damit automatisch im Kern von  $i_*: \mathbb{Z} \cong \pi_1(GL^+(2, \mathbb{R})) \rightarrow \pi_1(GL^+(3, \mathbb{R})) \cong \mathbb{Z}_2$ . Somit ist  $(i \circ \theta)_*(\pi_1(\widetilde{GL}^+(2, \mathbb{R}))) = \{1\} \subset \{1\} = \theta_*(\pi_1(\widetilde{GL}^+(3, \mathbb{R})))$ , was wir zeigen wollten. Für  $n \geq 3$  ist  $\widetilde{GL}^+(n, \mathbb{R})$  einfach zusammenhängend und die Voraussetzung für Satz 2.4 ii) folgt direkt. Dass  $l$  ein Gruppenhomomorphismus ist, kann man wie in den Beweisen von Lemma 2.5 und Lemma 3.2 zeigen.

Die Injektivität von  $l$  kann man mit der gleichen Methode wie im Beweis von Lemma 3.2 zeigen, wobei man verwendet: Für  $n \geq 3$  ist  $i_*: \mathbb{Z}_2 \cong \pi_1(GL^+(n, \mathbb{R})) \rightarrow \pi_1(GL^+(n+1, \mathbb{R})) \cong \mathbb{Z}_2$  ein Isomorphismus. Für  $n = 2$  ist  $i_*$  kein Isomorphismus mehr, aber es gilt  $i_*^{-1}(e) = 2\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z} \cong \pi_1(GL^+(2, \mathbb{R}))$ , was ausreichend ist.

Gleichung (3.7) zeigt man analog zu (3.2). Für  $n \geq 2$  folgt aus Satz 2.4 i), dass es höchstens eine glatte Abbildung  $l: \widetilde{GL}^+(n, \mathbb{R}) \rightarrow \widetilde{GL}^+(n+1, \mathbb{R})$  mit  $l(e) = e$  gibt, die (3.6) kommutativ macht. Damit ist  $l$  eindeutig.  $\square$

Sei  $M$  eine  $(n+1)$ -dimensionale orientierte Mannigfaltigkeit und  $N \subset M$  eine Hyperfläche (eingebettet oder immersiert). Sei  $\nu$  ein Vektorfeld entlang  $N$ , das nirgendwo tangential zu  $N$  ist (d.h.  $\nu: N \rightarrow TM|_N$  ist ein Schnitt und  $\nu_p \notin T_p N \subset T_p M$  für alle  $p \in N$ ). Wir wählen auf  $N$  die durch  $\nu$  induzierte Orientierung, d.h. eine Basis  $(b_1, \dots, b_n)$  von  $T_p N \subset T_p M$  ist positiv orientiert, genau dann, wenn  $(\nu_p, b_1, \dots, b_n)$  eine positiv orientierte Basis von  $T_p M$  ist.

Sei nun  $(\widetilde{GL}^+M, \eta)$  eine topologische Spinstruktur auf  $M$ . Wir gehen analog zum Fall metrischer Spinstrukturen vor, um eine topologische Spinstruktur auf  $N$  zu erhalten: Zunächst definieren wir  $\widetilde{GL}^+N$  als den Pullback der lokal trivialen Faserung  $\eta: \widetilde{GL}^+M|_N \rightarrow \widetilde{GL}^+M|_N$  bezüglich der Abbildung

$$\begin{aligned} j: \widetilde{GL}^+N &\rightarrow (\widetilde{GL}^+M)|_N, \\ (b_1, \dots, b_n) &\mapsto (\nu, b_1, \dots, b_n). \end{aligned}$$

Dann existiert auf  $\widetilde{GL}^+N := j^*(\widetilde{GL}^+M|_N)$  die Struktur eines  $\widetilde{GL}^+(n, \mathbb{R})$ -Hauptfaserbündels derart, dass  $(\widetilde{GL}^+N, \bar{\eta})$  mit  $\bar{\eta}(b, x) := b$  eine topologische Spinstruktur auf  $N$  ist:

Die Projektion von  $\widetilde{GL}^+N$  erklären wir durch

$$\begin{aligned} \bar{\pi}: \widetilde{GL}^+N &\rightarrow N, \\ (b, x) &\mapsto \pi(x), \end{aligned}$$

wobei  $\pi: \widetilde{GL}^+M \rightarrow M$  die Projektion von  $\widetilde{GL}^+M$  ist. Die Wirkung von  $\widetilde{GL}^+(n, \mathbb{R})$  auf  $\widetilde{GL}^+N$  definieren wir als

$$(b, x) \cdot \tilde{A} := (b \cdot \theta(\tilde{A}), x \cdot l(\tilde{A})),$$

für  $\tilde{A} \in \widetilde{GL}^+(n, \mathbb{R})$ , wobei  $l$  der Homomorphismus von Liegruppen aus Lemma 3.4 ist. Die lokalen Trivialisierungen erhalten wir wie folgt: Sei  $s: U \rightarrow \widetilde{GL}^+N$  ein lokaler Schnitt mit  $U \subset N$  einfach zusammenhängend und offen, sowie  $\tilde{s}: U \rightarrow \widetilde{GL}^+N$  eine glatte Abbildung derart, dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} & \widetilde{GL}^+N & \\ & \nearrow \tilde{s} & \downarrow \bar{\eta} \\ U & \xrightarrow{s} & \widetilde{GL}^+N \end{array}$$

Dann ist

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}: U \times GL^+(n, \mathbb{R}) &\rightarrow \bar{\pi}^{-1}(U), \\ (p, A) &\mapsto \tilde{s}(p) \cdot A,\end{aligned}$$

eine lokale Trivialisierung. Dadurch wird  $(\widetilde{GL^+N}, \bar{\pi}, N, GL^+(n, \mathbb{R}))$  zu einem Hauptfaserbündel und  $(\widetilde{GL^+N}, \bar{\eta})$  eine topologische Spinstruktur auf  $N$ , welche wir als *die von  $(\widetilde{GL^+M}, \eta)$  und  $\nu$  auf  $N$  induzierte topologische Spinstruktur* bezeichnen.

Für  $M$ ,  $N$  und  $\nu$  wie oben und fest gewählt erhalten wir eine wohldefinierte Abbildung

$$\mathfrak{H}_{\text{top}}: \text{Red}_\theta(\widetilde{GL^+M}) \rightarrow \text{Red}_\theta(\widetilde{GL^+N}),$$

welche die Äquivalenzklasse einer topologischen Spinstruktur auf  $M$  auf die Äquivalenzklasse der dadurch auf  $N$  induzierten Spinstruktur abbildet.

Ist  $M$  eine Spinmannigfaltigkeit und  $N \subset M$  eine orientierte Riemannsche Hyperfläche, so bezeichnen wir mit

$$\mathfrak{H}_{\text{met}}: \text{Red}_{\text{Ad}}(\text{SOM}) \rightarrow \text{Red}_{\text{Ad}}(\text{SON})$$

die wohldefinierte Abbildung, welche die Äquivalenzklasse einer metrischen Spinstruktur auf  $M$  auf die Äquivalenzklasse der dadurch auf  $N$  induzierten metrischen Spinstruktur abbildet (siehe Abschnitt 2.2).

Wir erhalten folgenden Satz:

**Satz 3.5** *Sei  $M$  eine  $(n + 1)$ -dimensionale Spinmannigfaltigkeit und  $N \subset M$  eine orientierte Riemannsche Hyperfläche. Wir wählen  $\nu$  wie zu Beginn von Abschnitt 2.2. Dann ist  $\nu$  insbesondere ein Vektorfeld entlang  $N$ , das nirgendwo tangential zu  $N$  ist und wir können sowohl die induzierten metrischen als auch die induzierten topologischen Spinstrukturen mit Hilfe von  $\nu$  bilden. Wir erhalten ein kommutatives Diagramm:*

$$\begin{array}{ccc}\text{Red}_{\text{Ad}}(\text{SOM}) & \xrightarrow{\mathfrak{H}_{\text{met}}} & \text{Red}_{\text{Ad}}(\text{SON}) \\ \mathfrak{R}^{-1} \uparrow & & \mathfrak{R}^{-1} \uparrow \\ \text{Red}_\theta(\widetilde{GL^+M}) & \xrightarrow{\mathfrak{H}_{\text{top}}} & \text{Red}_\theta(\widetilde{GL^+N})\end{array}$$

## 4 Der Spinorfluss und verallgemeinerte Zylinder

In diesem Kapitel definieren wir den Spinorfluss [3] und verallgemeinerte Zylinder [4], welche für uns beim Lösen des Spinorflusses eine wesentliche Rolle spielen.

Wir beginnen damit, an einige Definitionen zu erinnern: Sei  $(M, g)$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und  $(e_1, \dots, e_n)$  eine lokale Orthonormalbasis von  $(M, g)$ . Dann ist die *Tensorableitung* (bezüglich der Levi-Civita-Ableitung) eines  $(k, 0)$ -Tensors  $T$  auf  $M$  gegeben durch

$$\begin{aligned} (\nabla_Y^M T)(X_1, \dots, X_k) &= L_Y(T(X_1, \dots, X_k)) - T(\nabla_Y^M X_1, X_2, \dots, X_k) \\ &\quad - T(X_1, \nabla_Y^M X_2, X_3, \dots, X_k) - \dots - T(X_1, \dots, X_{k-1}, \nabla_Y^M X_k). \end{aligned}$$

Weiter ist

$$(\operatorname{div}_g T)(\cdot) = - \sum_{j=1}^n (\nabla_{e_j}^M T)(e_j, \cdot)$$

die *Divergenz von  $T$* .

Sei  $M$  nun eine Spinmannigfaltigkeit (und  $(e_1, \dots, e_n)$  wieder eine lokale Orthonormalbasis von  $M$ ). Dann ist der *Zusammenhangs-Laplace-Operator* gegeben durch

$$\left( (\nabla^{\Sigma M})^* \nabla^{\Sigma M} \right) \varphi = - \sum_{j=1}^n \left( \nabla_{e_j}^{\Sigma M} \nabla_{e_j}^{\Sigma M} \varphi - \nabla_{\nabla_{e_j}^M e_j}^{\Sigma M} \varphi \right),$$

wobei  $\varphi \in \Gamma(\Sigma M)$ .

Wir wählen ein Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Sigma M}$  gemäß Proposition 1.30. Auf dem Spinorbündel  $\Sigma M$  haben wir nach Definition 1.55 eine Bündelmetrik  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Wir definieren  $(\cdot, \cdot) := \operatorname{Re} \langle \cdot, \cdot \rangle$  als den Realteil der Bündelmetrik auf  $\Sigma M$ . Für  $\varphi \in (\Sigma M)_p$ ,  $p \in M$ , setzen wir  $|\varphi| := \sqrt{(\varphi, \varphi)} = \sqrt{\langle \varphi, \varphi \rangle}$ .

**Proposition 4.1** *Für alle  $p \in M$ ,  $X, Y \in T_p M$ ,  $\varphi \in (\Sigma M)_p$  gilt*

$$(X \cdot \varphi, Y \cdot \varphi) = g(X, Y)(\varphi, \varphi) \tag{4.1}$$

und

$$(X \cdot \varphi, \varphi) = 0. \tag{4.2}$$

*Beweis.* Wir berechnen

$$\begin{aligned} (X \cdot \varphi, Y \cdot \varphi) &\stackrel{1.56ii)}{=} -(Y \cdot (X \cdot \varphi), \varphi) \stackrel{1.56i)}{=} (X \cdot (Y \cdot \varphi) + 2g(X, Y) \cdot \varphi, \varphi) \\ &= (X \cdot (Y \cdot \varphi), \varphi) + 2g(X, Y)(\varphi, \varphi) \\ &\stackrel{1.56ii)}{=} -(Y \cdot \varphi, X \cdot \varphi) + 2g(X, Y)(\varphi, \varphi) \\ &= -(X \cdot \varphi, Y \cdot \varphi) + 2g(X, Y)(\varphi, \varphi), \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Gleichheitszeichen verwendet haben, dass  $(\cdot, \cdot)$  im Gegensatz zu  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  symmetrisch ist. Gleichung (4.1) folgt nun durch Addition von  $(X \cdot \varphi, Y \cdot \varphi)$ .

Wir zeigen (4.2) ebenfalls mit der Symmetrie von  $(\cdot, \cdot)$ : Einerseits haben wir  $(X \cdot \varphi, \varphi) = (\varphi, X \cdot \varphi)$  und andererseits liefert uns Lemma 1.56 ii), dass  $(X \cdot \varphi, \varphi) = -(\varphi, X \cdot \varphi)$  gilt.  $\square$

Für  $\varphi \in \Gamma(\Sigma M)$  ist

$$|\nabla^{\Sigma M} \varphi|^2 = \sum_{j=1}^n \left( \nabla_{e_j}^{\Sigma M} \varphi, \nabla_{e_j}^{\Sigma M} \varphi \right).$$

(Dabei ist  $(e_1, \dots, e_n)$  wieder eine lokale Orthonormalbasis.)

#### 4.1 Definition des Spinorflusses

Sei  $M$  eine zusammenhängende kompakte orientierte Mannigfaltigkeit mit einer fest gewählten topologischen Spinstruktur  $\widetilde{GL}^+M$  und  $\dim M \geq 2$ . Wir setzen

$$\mathcal{M} := \{\text{Riemannsche Metriken auf } M\}.$$

Jede Wahl einer Riemannschen Metrik  $g \in \mathcal{M}$  induziert eine metrische Spinstruktur  $\text{Spin}(M, g) := \widetilde{GL}^+M|_{\text{SO}(M, g)}$  auf  $M$ , siehe Satz 3.3 ii). Bezüglich dieser bilden wir das Spinorbündel  $\Sigma(M, g)$  und definieren

$$\mathcal{N}_g := \{\varphi \in \Gamma(\Sigma(M, g)) \mid |\varphi| = 1\},$$

$$\mathcal{N} := \bigsqcup_{g \in \mathcal{M}} \mathcal{N}_g.$$

Dann betrachten wir das Energiefunktional

$$\mathcal{E}: \mathcal{N} \rightarrow [0, \infty), \quad (g, \varphi) \mapsto \frac{1}{2} \int_M |\nabla^{\Sigma(M, g)} \varphi|^2 dv^g,$$

wobei  $dv^g$  die Riemannsche Volumenform auf  $(M, g)$  bezeichnet. Auf dem Fréchet-Bündel  $\mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$  existiert ein natürlicher Zusammenhang, welcher mit Hilfe der Resultate in [6] definiert wird. Für Details verweisen wir auf [3]. Dieser Zusammenhang liefert horizontale Tangentialräume  $\mathcal{H}_{(g, \varphi)} \cong \Gamma(\odot^2 T^*M)$  und eine Aufspaltung

$$T_{(g, \varphi)} \mathcal{N} \cong \Gamma(\odot^2 T^*M) \oplus V_{(g, \varphi)}, \quad (4.3)$$

mit

$$V_{(g, \varphi)} = \{\psi \in \Gamma(\Sigma(M, g)) \mid (\varphi, \psi) = 0\}.$$

Auf dem ersten Faktor wählen wir das Skalarprodukt, welches man durch Integration des natürlichen Skalarprodukts auf  $(2, 0)$ -Tensoren erhält. Auf dem zweiten Faktor wählen wir das  $L^2$ -Skalarprodukt, gegeben durch

$$(\psi_1, \psi_2)_{L^2} := \int_M (\psi_1, \psi_2) dv^g,$$

für  $\psi_1, \psi_2 \in V_{(g, \varphi)}$ . Nun sind wir in der Lage, den Gradienten von  $\mathcal{E}$  zu bilden und den Spinorfluss zu definieren.

**Definition 4.2 (Spinorfluss)** *Der Spinorfluss ist der negative Gradientenfluss von  $\mathcal{E}$ ,*

$$\frac{\partial}{\partial t} (g_t, \varphi_t) = -\text{grad} \mathcal{E}_{(g_t, \varphi_t)}.$$

In [3] wurde Kurzzeitexistenz und Eindeutigkeit des Spinorflusses gezeigt, was einer der Gründe ist, welche den Spinorfluss interessant machen.

Für den konkreten Umgang mit dem Spinorfluss ist es wichtig, dass wir unter der Aufspaltung (4.3) eine Darstellung

$$-\text{grad}\mathcal{E}_{(g,\varphi)} = (Q_1(g, \varphi), Q_2(g, \varphi))$$

haben, wobei

$$\begin{aligned} Q_1(g, \varphi) &= -\frac{1}{4}|\nabla^{\Sigma(M,g)}\varphi|^2g - \frac{1}{4}\text{div}_g T_{g,\varphi} + \frac{1}{2}\left(\nabla^{\Sigma(M,g)}\varphi \otimes \nabla^{\Sigma(M,g)}\varphi\right), \\ Q_2(g, \varphi) &= -\left(\left(\nabla^{\Sigma(M,g)}\right)^* \nabla^{\Sigma(M,g)}\right)\varphi + |\nabla^{\Sigma(M,g)}\varphi|^2\varphi, \end{aligned}$$

für alle  $(g, \varphi) \in \mathcal{N}$ . Dabei ist

$$\left(\nabla^{\Sigma(M,g)}\varphi \otimes \nabla^{\Sigma(M,g)}\varphi\right)(X, Y) := \left(\nabla_X^{\Sigma(M,g)}\varphi, \nabla_Y^{\Sigma(M,g)}\varphi\right)$$

für alle  $X, Y \in \Gamma(TM)$ . Weiter ist  $T_{g,\varphi}$  die Symmetrisierung von

$$(X, Y, Z) \mapsto \left(X \cdot Y \cdot \varphi + g(X, Y)\varphi, \nabla_Z^{\Sigma(M,g)}\varphi\right)$$

in der zweiten und dritten Komponente, wobei  $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ .

Der *volumennormalisierte Spinorfluss* ist der negative Gradientenfluss von  $\mathcal{E}|_{\mathcal{N}_1}$ , wobei  $\mathcal{N}_1 := \{(g, \varphi) \in \mathcal{N} \mid \text{vol}(M, g) = 1\}$ . Es gilt

$$-\text{grad}(\mathcal{E}|_{\mathcal{N}_1}) = (\tilde{Q}_1, Q_2|_{\mathcal{N}_1})$$

mit

$$\tilde{Q}_1(g, \varphi) = Q_1(g, \varphi) + \frac{n-2}{2n} \frac{1}{\text{vol}(M, g)} \mathcal{E}(g, \varphi)g$$

für alle  $(g, \varphi) \in \mathcal{N}_1$ .

In der Gleichung für  $\tilde{Q}_1$  könnten wir den Faktor  $\frac{1}{\text{vol}(M, g)}$  weglassen, da  $(g, \varphi) \in \mathcal{N}_1$ , d.h.  $\text{vol}(M, g) = 1$ . Dieser Faktor spielt aber später eine Rolle, wenn wir den volumennormalisierten Spinorfluss mit Hilfe verallgemeinerter Zylinder erklären.

## 4.2 Verallgemeinerte Zylinder

Dieser und der folgende Abschnitt basieren auf [4].

In dieser Arbeit werden wir den Spinorfluss mit Hilfe sogenannter verallgemeinerter Zylinder [4] lösen. Nach dem wir diese eingeführt haben, definieren wir den Spinorfluss noch einmal mit Hilfe der verallgemeinerten Zylinder. Diese wird die Definition sein, mit der wir konkret arbeiten. Dieses Vorgehen hat den Vorteil, dass die verallgemeinerten Zylinder Riemannsche Mannigfaltigkeiten sind, mit denen man leichter umgehen kann als mit dem Fréchet-Bündel  $\mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$ .

Grundsätzlich sind die verallgemeinerten Zylinder ein Hilfsmittel, um Spinoren zu unterschiedlichen Metriken miteinander zu vergleichen.

**Definition 4.3 (Glatte Einparameterfamilie von Riemannschen Metriken)** Sei  $M$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall. Dann heißt eine Familie  $(g_t)_{t \in I}$  von Riemannschen Metriken auf  $M$  glatte Einparameterfamilie von Riemannschen Metriken (auf  $M$ ), falls die Abbildung

$$g: I \times M \rightarrow T^*M \otimes T^*M, \\ (t, p) \mapsto g_t(p),$$

glatt ist.

**Definition 4.4 (Verallgemeinerte Zylinder)** Sei  $M$  eine Mannigfaltigkeit,  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall und  $(g_t)_{t \in I}$  eine glatte Einparameterfamilie von Riemannschen Metriken auf  $M$ . Der verallgemeinerte Zylinder (bezüglich  $(g_t)_{t \in I}$ ) ist die Riemannsche Mannigfaltigkeit  $(\mathcal{Z}, g_{\mathcal{Z}})$  mit

$$\mathcal{Z} := I \times M$$

und

$$g_{\mathcal{Z}} := dt^2 + g_t,$$

wobei  $dt^2$  die Standardmetrik auf  $I$  ist.

**Bemerkung 4.5**

i) Es gilt also

$$(g_{\mathcal{Z}})_{(t_0, p)}(v_1 + w_1, v_2 + w_2) = (dt^2)_{t_0}(v_1, v_2) + (g_{t_0})_p(w_1, w_2)$$

für alle  $(t_0, p) \in I \times M$  und alle  $v_1, v_2 \in T_{t_0}I$ ,  $w_1, w_2 \in T_pM$ , wobei wir  $T_{(t_0, p)}(I \times M) = T_{t_0}I \times T_pM$  identifizieren.

ii) Weder bei der Definition von glatten Einparameterfamilien von Riemannschen Metriken, noch bei der Definition des verallgemeinerten Zylinders fordern wir, dass  $I$  offen ist. Falls  $I$  nicht offen ist, ist  $I \times M$  eine Mannigfaltigkeit mit Rand. (Das ist der einzige Fall einer Mannigfaltigkeit mit Rand in dieser Arbeit.) Für Mannigfaltigkeiten mit Rand sind lokal triviale Faserungen (insbesondere Vektorraumbündel und Hauptfaserbündel), die Rahmenbündel und Spinstrukturen ganz genauso definiert wie im randlosen Fall.

Die Riemannsche Mannigfaltigkeit  $(M, g_t)$  ist isometrisch zur Riemannschen Hyperfläche  $\{t\} \times M \subset \mathcal{Z}$  mittels

$$M \rightarrow \{t\} \times M, \\ p \mapsto (t, p).$$

Wir identifizieren diese Riemannschen Mannigfaltigkeiten und bezeichnen beide mit  $M_t$ . Insbesondere ist  $T_{(t, p)}(\{t\} \times M) = \{0\} \times T_pM = T_pM = T_pM_t$ .

Wir definieren das Vektorfeld

$$\nu := \frac{\partial}{\partial t} \in \Gamma(T\mathcal{Z}).$$

(Wählt man das geometrische Modell für den Tangentialraum, d.h. der Tangentialraum wird als Menge von Äquivalenzklassen von Kurven aufgefasst, so ist  $\frac{\partial}{\partial t}|_{(t_0,p)} = [t_0 + s, p]$ , wobei rechts vom Gleichheitszeichen die Äquivalenzklasse einer Kurve in  $I \times M$  in der Variablen  $s$  steht.)

Es gilt  $g_{\mathcal{Z}}(\nu, \nu) = 1$  und  $\nu|_{M_t}$  steht senkrecht auf  $M_t$ . Mit  $W = W_t$  bezeichnen wir die Weingartenabbildung von  $M_t$  bezüglich  $\nu|_{M_t}$ .

Sei  $p \in M$  und  $X, Y \in T_p M$ . Dann setzen wir

$$\begin{aligned}\dot{g}_t(X, Y) &:= \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=t} (g_s(X, Y)), \\ \ddot{g}_t(X, Y) &:= \left. \frac{d^2}{ds^2} \right|_{s=t} (g_s(X, Y)).\end{aligned}$$

Manchmal schreiben wir auch  $\frac{\partial}{\partial t} g_t(X, Y) := \dot{g}_t(X, Y)$ .

**Satz 4.6** Für alle  $U, X, Y \in T_p M$ ,  $p \in M$  und alle  $t \in I$  haben wir die folgenden Identitäten:

$$\nabla_{\nu}^{\mathcal{Z}} \nu = 0, \quad (4.4)$$

$$g_t(W_t(X), Y) = -\frac{1}{2} \dot{g}_t(X, Y), \quad (4.5)$$

$$g_{\mathcal{Z}}(R^{\mathcal{Z}}(X, Y)U, \nu) = \frac{1}{2} ((\nabla_Y^{M_t} \dot{g}_t)(X, U) - (\nabla_X^{M_t} \dot{g}_t)(Y, U)), \quad (4.6)$$

$$g_{\mathcal{Z}}(R^{\mathcal{Z}}(X, \nu)\nu, Y) = -\frac{1}{2} (\dot{g}_t(X, Y) + \dot{g}_t(W_t(X), Y)). \quad (4.7)$$

Ist  $\tilde{Z} \in \Gamma(T\mathcal{Z})$  mit  $\tilde{Z}(t, p) = (0, Z_t(p)) \in T_t I \times T_p M$  für alle  $t \in I$ ,  $p \in M$ , so gilt

$$[\nu, \tilde{Z}](t, p) = (0, \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=t} Z_s(p)) \in T_t I \times T_p M, \quad (4.8)$$

$$(\nabla_{\nu}^{\mathcal{Z}} \tilde{Z})(t, p) = (0, \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=t} (Z_s(p) - W_t(Z_t(p)))) \quad (4.9)$$

für alle  $t \in I$ ,  $p \in M$ , wobei  $\nabla^{\mathcal{Z}}$  die Levi-Civita-Ableitung auf  $(\mathcal{Z}, g_{\mathcal{Z}})$  bezeichnet.

*Beweis.* Die Beweise von (4.4)-(4.7) findet man in [4]. Um (4.8) einzusehen, sei zunächst  $\tilde{Z} \in \Gamma(T\mathcal{Z})$  beliebig. Dann gilt

$$[\nu, \tilde{Z}](t, p) = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} (d\Phi_{-s})_{\Phi_s(t,p)} (\tilde{Z}(\Phi_s(t, p))),$$

wobei  $\Phi_s$  den Fluss von  $\nu = \frac{\partial}{\partial t} \in \Gamma(\mathcal{Z})$  bezeichnet, der gegeben ist durch

$$\Phi_s(t, p) = (s + t, p)$$

für alle  $(t, p) \in \mathcal{Z}$  und alle  $s \in \mathbb{R}$ . Daraus folgt für alle  $v \in TM$  und alle  $s \in \mathbb{R}$

$$d\Phi_s(0, v) = (0, v).$$

Ist nun  $\tilde{Z}$  wie in der Aussage von ii), so folgt aus  $\tilde{Z}(\Phi_s(t, p)) = \tilde{Z}(s+t, p) = (0, Z_{s+t}(p))$ , dass

$$[\nu, \tilde{Z}](t, p) = (0, \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=t} Z_t(p)).$$

Es bleibt (4.9) zu zeigen. Aus der Torsionsfreiheit der Levi-Civita-Ableitung folgt

$$\begin{aligned} [\nu, \tilde{Z}](t, p) &= (\nabla_{\nu}^{\tilde{Z}} \tilde{Z})(t, p) - (\nabla_{\tilde{Z}}^{\nu} \nu)(t, p) \\ &= (\nabla_{\nu}^{\tilde{Z}} \tilde{Z})(t, p) + W_t(Z_t(p)). \end{aligned}$$

Damit ergibt sich (4.9) aus (4.8).  $\square$

### 4.3 Spinstruktur auf dem verallgemeinerten Zylinder

Nehmen wir an, dass auf der  $n$ -dimensionalen orientierten Mannigfaltigkeit  $M$  eine topologische Spinstruktur  $(\widetilde{\text{GL}}^+M, \eta)$  existiert. Mit  $\pi: \widetilde{\text{GL}}^+M \rightarrow M$  bezeichnen wir deren Projektion. Auf  $\mathcal{Z} = I \times M$  wählen wir die Produktorientierung. Sei  $p: \mathcal{Z} \rightarrow M$  die Projektion auf die zweite Komponente. Dann bilden wir den Pullback  $p^*(\widetilde{\text{GL}}^+M)$  von  $\pi: \widetilde{\text{GL}}^+M \rightarrow M$  bezüglich  $p$ , welcher uns ein  $\widetilde{\text{GL}}^+(n, \mathbb{R})$ -Hauptfaserbündel über  $\mathcal{Z}$  liefert. Dieses erweitern wir entlang  $l$ , wobei  $l$  die Abbildung aus Lemma 3.4 ist, und erhalten damit ein  $\widetilde{\text{GL}}^+(n+1, \mathbb{R})$ -Hauptfaserbündel über  $\mathcal{Z}$ ,

$$\widetilde{\text{GL}}^+\mathcal{Z} := p^*(\widetilde{\text{GL}}^+M) \times_{\widetilde{\text{GL}}^+(n, \mathbb{R})} \widetilde{\text{GL}}^+(n+1, \mathbb{R}).$$

Sei  $p^*(\widetilde{\text{GL}}^+M)$  der Pullback von  $\text{GL}^+M \rightarrow M$  bezüglich  $p$  und sei

$$\begin{aligned} f: p^*(\text{GL}^+M) &\rightarrow \text{GL}^+\mathcal{Z}, \\ (t, p, b) &\mapsto (\nu_{(t,p)}, b), \end{aligned}$$

$\nu = \frac{\partial}{\partial t}$ . Dann ist  $(p^*(\text{GL}^+M), f)$  eine  $i$ -Reduktion von  $\text{GL}^+\mathcal{Z}$ , mit  $i$  wie in Lemma 3.4. Mit Satz 2.2 erhalten wir einen Isomorphismus von Hauptfaserbündeln

$$p^*(\text{GL}^+M) \times_{\text{GL}^+(n, \mathbb{R})} \text{GL}^+(n+1, \mathbb{R}) \cong \text{GL}^+\mathcal{Z}$$

und wir definieren

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}: \widetilde{\text{GL}}^+\mathcal{Z} &\rightarrow p^*(\widetilde{\text{GL}}^+M) \times_{\text{GL}^+(n, \mathbb{R})} \text{GL}^+(n+1, \mathbb{R}) \cong \text{GL}^+\mathcal{Z}, \\ [(t, p, x), \tilde{A}] &\mapsto [(t, p, \eta(x)), \theta(\tilde{A})] \mapsto (\nu_{(t,p)}, \eta(x)) \cdot \theta(\tilde{A}), \end{aligned}$$

für  $(t, p) \in I \times M$ ,  $x \in \widetilde{\text{GL}}^+M$ ,  $\tilde{A} \in \widetilde{\text{GL}}^+(n+1, \mathbb{R})$ . Dann ist  $(\widetilde{\text{GL}}^+\mathcal{Z}, \tilde{\eta})$  eine topologische Spinstruktur auf  $\mathcal{Z}$ .

Wir erhalten:

**Proposition 4.7** *Die von  $(\widetilde{\text{GL}}^+\mathcal{Z}, \tilde{\eta})$  und  $\nu = \frac{\partial}{\partial t}$  auf  $M$  induzierte topologische Spinstruktur (siehe Abschnitt 3.1) ist äquivalent zu  $(\text{GL}^+M, \eta)$ . Dabei betrachten wir  $M$  als Hyperfläche von  $\mathcal{Z}$ , indem wir  $M$  mit  $\{t\} \times M$  identifizieren, wobei wir  $t \in I$  beliebig aber fest wählen.*

*Beweis.* Die von  $(\widetilde{\text{GL}}^+\mathcal{Z}, \tilde{\eta})$  und  $\nu = \frac{\partial}{\partial t}$  auf  $M$  induzierte topologische Spinstruktur ist gegeben durch den Pullback der lokal trivialen Faserung  $\widetilde{\text{GL}}^+\mathcal{Z}|_M \rightarrow \text{GL}^+\mathcal{Z}|_M$  bezüglich

$$\begin{aligned} \iota: \text{GL}^+M &\rightarrow (\text{GL}^+\mathcal{Z})|_M, \\ (b_1, \dots, b_n) &\mapsto (\nu|_{(t,p)}, b_1, \dots, b_n), \end{aligned}$$

wobei  $(b_1, \dots, b_n)$  eine positiv orientierte Basis von  $T_pM$  ist,  $p \in M$ . Nach den Definitionen gilt

$$\begin{aligned} \iota^*(\widetilde{\text{GL}}^+\mathcal{Z}) &= \{(b, [(t, p, x), \tilde{A}]) \mid b \in (\text{GL}^+M)_p, p \in M, x \in (\widetilde{\text{GL}}^+M)_p, \tilde{A} \in \widetilde{\text{GL}}^+(n+1), \\ &\quad (\nu|_{(t,p)}, b) = (\nu|_{(t,p)}, \eta(x)) \cdot \theta(\tilde{A})\} \end{aligned}$$

Aus  $(\nu|_{(t,p)}, b) = (\nu|_{(t,p)}, \eta(x)) \cdot \theta(\tilde{A})$  folgt  $\theta(\tilde{A}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$  für ein  $A \in \text{GL}^+(n, \mathbb{R})$  und aus (3.7) erhalten wir  $\tilde{A} \in l(\widetilde{\text{GL}}^+(n, \mathbb{R}))$ . Wir definieren zwei Abbildungen

$$\begin{aligned} F: \iota^*(\widetilde{\text{GL}}^+\mathcal{Z}) &\rightarrow \widetilde{\text{GL}}^+M, \\ (b, [(t, p, x), \tilde{A}]) &\mapsto x \cdot l^{-1}(\tilde{A}), \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} F^{-1}: \widetilde{\text{GL}}^+M &\rightarrow \iota^*(\widetilde{\text{GL}}^+\mathcal{Z}), \\ x &\mapsto (\eta(x), [(t, \pi(x), x), 1]), \end{aligned}$$

wobei  $\pi: \widetilde{\text{GL}}^+M \rightarrow M$  die Projektion von  $\widetilde{\text{GL}}^+M$  ist und 1 das neutrale Element in  $\widetilde{\text{GL}}^+(n+1, \mathbb{R})$  bezeichnet.  $F$  ist ein Isomorphismus von Reduktionen mit der Umkehrabbildung  $F^{-1}$ . Dies rechnet man nach wie im Beweis von Satz 3.3 iii).  $\square$

Wir gehen einen Schritt weiter und betrachten metrische Spinstrukturen: Dazu nehmen wir an, dass für ein  $t \in I$  auf  $(M, g_t)$  eine metrische Spinstruktur  $\text{Spin}(M, g_t)$  existiert. Nach Satz 3.3 i) erhalten wir aus dieser eine topologische Spinstruktur auf  $M$ . Daraus erhalten wir nach dem zu Beginn dieses Abschnittes beschriebenen Vorgang eine topologische Spinstruktur auf  $\mathcal{Z}$ . Dann liefert uns Satz 3.3 ii) eine metrische Spinstruktur auf  $(\mathcal{Z}, g_{\mathcal{Z}})$ . Diese Spinstruktur bezeichnen wir als *die von  $\text{Spin}(M, g_t)$  auf  $\mathcal{Z}$  induzierte Spinstruktur*.

**Theorem 4.8** *Sei  $(g_t)_{t \in I}$  eine glatte Einparameterfamilie von Riemannschen Metriken auf  $M$ . Bezüglich dieser bilden wir den verallgemeinerten Zylinder  $(\mathcal{Z}, g_{\mathcal{Z}})$ . Sei  $t_0 \in I$ , so dass auf  $(M, g_{t_0})$  eine Spinstruktur  $\text{Spin}(M, g_{t_0})$  existiert. Wir bezeichnen die von  $\text{Spin}(M, g_{t_0})$  auf  $\mathcal{Z}$  induzierte Spinstruktur als  $\text{Spin}\mathcal{Z}$ . Dann gilt:*

- i) *Versehen wir jede der orientierten Riemannschen Hyperflächen  $M_t$  mit der von  $\text{Spin}\mathcal{Z}$  induzierten Spinstruktur (siehe Abschnitt 2.2), erhalten wir für  $n \geq 2$  gerade:*

$$\Sigma\mathcal{Z}|_{M_t} = \Sigma M_t$$

und wir können die Bündelmetriken so wählen, dass sie unter dieser Identifikation erhalten bleiben. Bezeichnen wir mit  $\cdot$  die Clifford-Multiplikation auf  $\Sigma\mathcal{Z}$  und mit  $\cdot_t$  die auf  $\Sigma M_t$ , so haben wir

$$\nu \cdot (X \cdot \varphi) = X \cdot_t \varphi$$

für alle  $p \in M$ ,  $X \in T_p M$  und alle  $\varphi \in (\Sigma\mathcal{Z}|_{M_t})_p$ , wobei  $\nu = \frac{\partial}{\partial t}$ . Weiter gilt

$$\nabla_X^{\Sigma\mathcal{Z}} \varphi = \nabla_X^{\Sigma M_t} \varphi - \frac{1}{2} W_t(X) \cdot_t \varphi$$

für alle  $\varphi \in \Gamma(\Sigma\mathcal{Z}|_{M_t})$ .

Für  $n \geq 1$  ungerade sind diese Aussagen auch richtig, wenn wir überall  $\Sigma\mathcal{Z}$  durch  $\Sigma^+\mathcal{Z}$  ersetzen.

- ii) Die von  $\text{Spin}\mathcal{Z}$  auf  $M_{t_0}$  induzierte Spinstruktur ist äquivalent zu  $\text{Spin}(M, g_{t_0})$
- iii) Sei  $t \in I$  beliebig. Dann induziert die topologische Spinstruktur  $\mathfrak{R}(\text{Spin}(M, g_{t_0}))$  auf  $(M, g_t)$  eine metrische Spinstruktur (siehe Satz 3.3 i)). Diese metrische Spinstruktur ist äquivalent zu der von  $\text{Spin}\mathcal{Z}$  auf  $M_t$  induzierten metrischen Spinstruktur.

*Beweis.* Zu i): Dies ist genau die Aussage von Satz 2.8, wobei wir den Isomorphismus  $\Phi$  nicht mehr dazuschreiben. Auf  $\mathcal{Z}$  ist nach Konstruktion die Produktorientierung gewählt, d.h.  $\nu = \frac{\partial}{\partial t}$  ist die richtige Wahl für Satz 2.8.

Zu ii) und iii): Dies folgt aus Satz 3.5 und Proposition 4.7.  $\square$

Wir können Schnitte  $\varphi \in \Gamma(\Sigma^{(+)}\mathcal{Z})$  als zeitabhängige Familie von Spinoren ansehen, denn nach Theorem 4.8 gilt  $\varphi_t \in \Gamma(\Sigma M_t)$  für  $\varphi_t(\cdot) := \varphi(t, \cdot)$ .

#### 4.4 Definition des Spinorflusses mit Hilfe verallgemeinerter Zylinder

**Definition 4.9 (Spinorfluss)** Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall,  $0 \in I$  und  $(g_t)_{t \in I}$  eine glatte Einparameterfamilie von Riemannschen Metriken auf  $M$ . Weiter sei  $(M, g_0)$  spin mit Spinstruktur  $\text{Spin}(M, g_0)$  und  $\varphi_0 \in \Gamma(\Sigma(M, g_0))$  mit  $|\varphi_0| = 1$ . Wir bilden den verallgemeinerten Zylinder  $\mathcal{Z} = I \times M$ ,  $g_{\mathcal{Z}} = dt^2 + g_t$  und wählen auf  $\mathcal{Z}$  die von  $\text{Spin}(M, g_0)$  induzierte Spinstruktur. Dann nennen wir das Tupel  $((g_t)_{t \in I}, \varphi)$  mit  $\varphi \in \Gamma(\Sigma\mathcal{Z})$  für  $n$  gerade (bzw.  $\varphi \in \Gamma(\Sigma^+\mathcal{Z})$  für  $n$  ungerade),  $|\varphi| = 1$  und  $\varphi(0, \cdot) = \varphi_0(\cdot)$  Lösung des Spinorflusses zum Anfangswert  $(g_0, \varphi_0)$ , falls

$$\frac{\partial}{\partial t} g_t = Q_1(g_t, \varphi_t) \in \Gamma(\odot^2 T^* M) \quad (4.10)$$

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^{\Sigma^{(+)}\mathcal{Z}} \varphi = Q_2(g_t, \varphi_t) \in \Gamma(\Sigma^{(+)}\mathcal{Z}) \quad (4.11)$$

wobei  $\varphi_t(\cdot) := \varphi(t, \cdot)$ .

Für eine Lösung  $((g_t)_{t \in I}, \varphi)$  des Spinorflusses schreiben wir oft  $(g_t, \varphi_t)_{t \in I}$ , wobei wir wie oben  $\varphi_t(\cdot) := \varphi(t, \cdot)$  setzen.

Wegen Theorem 4.8 i) und ii) macht die Bedingung  $\varphi(0, \cdot) = \varphi_0(\cdot)$  Sinn. Die Definitionen 4.2 und 4.9 entsprechen sich, wenn wir für Definition 4.2 die topologische Spinstruktur  $\mathfrak{R}(\text{Spin}(M, g_0))$  auf  $M$  wählen (siehe Theorem 4.8 iii)).

Den volumennormalisierten Spinorfluss kann man analog mit Hilfe verallgemeinerter Zylinder erklären:

**Definition 4.10 (volumennormalisierter Spinorfluss)** Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall,  $0 \in I$  und  $(g_t)_{t \in I}$  eine glatte Einparameterfamilie von Riemannschen Metriken auf  $M$ . Weiter sei  $(M, g_0)$  spin mit Spinstruktur  $\text{Spin}(M, g_0)$ ,  $\text{vol}(M, g_0) = 1$  und  $\varphi_0 \in \Gamma(\Sigma(M, g_0))$  mit  $|\varphi_0| = 1$ . Wir bilden den verallgemeinerten Zylinder  $\mathcal{Z} = I \times M$ ,  $g_{\mathcal{Z}} = dt^2 + g_t$  und wählen auf  $\mathcal{Z}$  die von  $\text{Spin}(M, g_0)$  induzierte Spinstruktur. Dann nennen wir das Tupel  $((g_t)_{t \in I}, \varphi)$  mit  $\varphi \in \Gamma(\Sigma \mathcal{Z})$  für  $n$  gerade (bzw.  $\varphi \in \Gamma(\Sigma^+ \mathcal{Z})$  für  $n$  ungerade),  $|\varphi| = 1$  und  $\varphi(0, \cdot) = \varphi_0(\cdot)$  Lösung des volumennormalisierten Spinorflusses zum Anfangswert  $(g_0, \varphi_0)$ , falls

$$\frac{\partial}{\partial t} g_t = \tilde{Q}_1(g_t, \varphi_t) \in \Gamma(\odot^2 T^* M) \quad (4.12)$$

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^{\Sigma^{(+)} \mathcal{Z}} \varphi = Q_2(g_t, \varphi_t) \in \Gamma(\Sigma^{(+)} \mathcal{Z}) \quad (4.13)$$

wobei  $\varphi_t(\cdot) := \varphi(t, \cdot)$ .

Ist  $(g_t, \varphi_t)_{t \in I}$  eine Lösung des volumennormalisierten Spinorflusses, so berechnen wir in der Tat

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=s} \text{vol}(M, g_t) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=s} \int_M dv^{g_t} = \int_M \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=s} dv^{g_t} \\ &= \int_M \left( \frac{1}{2} \text{tr}_{g_s} \dot{g}_s \right) dv^{g_s} \\ &= \int_M \left( \frac{1}{2} \text{tr}_{g_s} \tilde{Q}_1(g_s, \varphi_s) \right) dv^{g_s} \\ &= \frac{1}{2} \int_M \text{tr}_{g_s} Q_1(g_s, \varphi_s) dv^{g_s} + \frac{1}{2} \frac{n-2}{2n} \frac{1}{\text{vol}(M, g_s)} \mathcal{E}(g_s, \varphi_s) \int_M \text{tr}_{g_s} g_s dv^{g_s} \\ &= \frac{1}{2} \int_M -\frac{n-2}{4} |\nabla^{\Sigma(M, g_s)} \varphi_s|^2 dv^{g_s} + \frac{1}{2} \frac{n-2}{2} \frac{1}{\text{vol}(M, g_s)} \mathcal{E}(g_s, \varphi_s) \text{vol}(M, g_s) \\ &= -\frac{1}{2} \frac{n-2}{2} \mathcal{E}(g_s, \varphi_s) + \frac{1}{2} \frac{n-2}{2} \mathcal{E}(g_s, \varphi_s) \\ &= 0, \end{aligned}$$

d.h.  $\text{vol}(M, g_t) \equiv 1$ . Dabei haben wir verwendet, dass für eine beliebige, glatte Einparameterfamilie von Riemannschen Metriken  $g_t$  auf einer beliebigen Mannigfaltigkeit  $M$  gilt:

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=s} dv^{g_t} = \frac{1}{2} (\text{tr}_{g_s} \dot{g}_s) dv^{g_s}.$$



## 5 Kollaps von $S^1 \times S^2$ unter dem Spinorfluss

Dieses Beispiel soll als „Einführungsbeispiel“ dienen. Das Kapitel ist so aufgebaut, dass der Leser den Entstehungsprozess der Lösung möglichst gut nachvollziehen kann.

Wir betrachten  $S^1$ ,  $S^2$  und  $\mathbb{R}^3$  mit den gewöhnlichen Orientierungen und Riemannschen Metriken. Auf  $\mathbb{R}^3$  wählen wir die Spinstruktur aus Beispiel 1.41 i), auf der orientierten Riemannschen Hyperfläche  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$  wählen wir die von dieser Spinstruktur induzierte Spinstruktur (siehe Abschnitt 2.2). Auf  $S^1$  wählen wir die Spinstruktur  $S^1 \times \{\pm 1\} \xrightarrow{pr_1} S^1$  aus Beispiel 1.41 ii) und schließlich wählen wir auf  $S^1 \times S^2$  die von diesen beiden Spinstrukturen induzierte Produktspinstruktur (siehe Definition 2.6). Insbesondere wählen wir auf  $S^1 \times S^2$  die Produktorientierung und die Produktmetrik  $g_{S^1} + g_{S^2}$ , wobei  $g_{S^1}$  und  $g_{S^2}$  die Standardmetriken auf  $S^1$  und  $S^2$  bezeichnen. Diese Spinstrukturen sind ab jetzt fest gewählt und werden nicht mehr dazugeschrieben.

Wir zeigen das folgende Theorem:

**Theorem 5.1** *Sei  $M = S^1 \times S^2$  (mit der zu Beginn des Kapitels gewählten Spinstruktur). Als Anfangswert  $(g_0, \varphi_0)$  wählen wir  $g_0 = g_{S^1} + g_{S^2}$  und  $\varphi_0 \in \Gamma(\Sigma(M, g_0))$  mit  $|\varphi_0| = 1$  und*

$$\begin{aligned} \nabla_Y^{\Sigma(M, g_0)} \varphi_0 &= \frac{1}{2} Y \cdot \varphi_0 & \forall Y \in \Gamma(TS^2), \\ \nabla_X^{\Sigma(M, g_0)} \varphi_0 &= 0 & \forall X \in \Gamma(TS^1). \end{aligned}$$

Dann ist die Lösung des Spinorflusses gegeben durch

$$g_t := e^{-\frac{1}{8}t} g_{S^1} \circ (pr_{TS^1} \times pr_{TS^1}) + g_{S^2} \circ (pr_{TS^2} \times pr_{TS^2}),$$

$t \in I := [0, \infty)$ , sowie

$$\varphi_t(p) = \varphi(t, p) = \mathcal{P}_{0,t}(p)(\varphi_0(p)) \in \Sigma^+ \mathcal{Z},$$

wobei  $\mathcal{P}_{0,t}(p)$  die Parallelverschiebung in  $\Sigma^+ \mathcal{Z}$  bezüglich  $\nabla^{\Sigma^+ \mathcal{Z}}$  entlang  $\gamma_p(s) = (s, p)$ ,  $s \in I$ ,  $p \in M$ , von  $\gamma_p(0)$  nach  $\gamma_p(t)$  bezeichnet. Weiter erfüllt  $\varphi_t$  die Gleichungen aus Lemma 5.6.

Wir können dieses Ergebnis so lesen, dass  $S^1$  exponentiell schnell „zusammengezogen“ wird und  $S^1 \times S^2$  gegen  $S^2$  kollabiert, wobei sich „kollabieren“ darauf bezieht, dass die  $S^1$ -Faser gegen Null geht.

Zunächst beweisen wir, dass der Spinor-Teil des Anfangswertes existiert.

**Lemma 5.2** *Auf  $M = S^1 \times S^2$  existiert ein Spinor  $\varphi_0 \in \Gamma(\Sigma(M, g_0))$  mit*

$$\nabla_Y^{\Sigma(M, g_0)} \varphi_0 = \frac{1}{2} Y \cdot \varphi_0 \quad \forall Y \in \Gamma(TS^2), \quad (5.1)$$

$$\nabla_X^{\Sigma(M, g_0)} \varphi_0 = 0 \quad \forall X \in \Gamma(TS^1), \quad (5.2)$$

$$|\varphi_0| = 1. \quad (5.3)$$

*Beweis.* Wir verwenden eine Tatsache über die Produktpinstruktur, welche hier nur zitiert und nicht bewiesen werden soll (siehe z.B. [2]): Seien  $\pi_1: M \rightarrow S^1$  und  $\pi_2: M \rightarrow S^2$  die Projektionen. Dann gibt es eine Identifizierung (genauer: einen Isomorphismus von Vektorraumbündeln)

$$\Sigma M = \pi_1^*(\Sigma S^1) \otimes \pi_2^*(\Sigma S^2),$$

mit

$$(X, Y) \cdot_M (\varphi \otimes \psi) = (X \cdot_{S^1} \varphi) \otimes (\omega_{S^2} \cdot_{S^2} \psi) + \varphi \otimes (Y \cdot_{S^2} \psi), \quad (5.4)$$

$$\nabla_{(X,Y)}^{\Sigma M} (\varphi \otimes \psi) = ((\pi_1^* \nabla^{\Sigma S^1})_{(X,Y)} \varphi) \otimes \psi + \varphi \otimes ((\pi_2^* \nabla^{\Sigma S^2})_{(X,Y)} \psi), \quad (5.5)$$

für alle  $X \in \Gamma(TS^1)$ ,  $Y \in \Gamma(TS^2)$ ,  $\varphi \in \Gamma(\pi_1^*(\Sigma S^1))$ ,  $\psi \in \Gamma(\pi_2^*(\Sigma S^2))$ . (Auf das Produkt  $\omega_{S^2} \cdot_{S^2} \psi$  gehen wir nicht näher ein, da es für uns in diesem Beweis nicht wichtig ist.) Dabei bezeichnet  $\pi_1^* \nabla^{\Sigma S^1}$  den Pullback von  $\nabla^{\Sigma S^1}$  bezüglich  $\pi_1$ , d.h. für jeden Schnitt  $s \in \Gamma(\Sigma S^1)$  gilt für den Pullback-Schnitt  $\pi_1^* s = s \circ \pi_1$

$$(\pi_1^* \nabla^{\Sigma S^1})_{(X,Y)} (\pi_1^* s) = \pi_1^* (\nabla_X^{\Sigma S^1} s).$$

Analog für  $\pi_2^* \nabla^{\Sigma S^2}$ . Gleichung (5.5) besagt also, dass die spinorielle Levi-Civita-Ableitung auf  $M$  unter obiger Identifizierung das Tensorprodukt der Pullbacks der spinoriellen Levi-Civita-Ableitungen auf  $S^1$  und  $S^2$  ist. Wir konstruieren nun  $\varphi_0$ , indem wir unsere Kenntnis über die Spinstrukturen auf  $S^1$  und  $S^2$  verwenden.

Sei  $c \in \Sigma_1$  fest gewählt. Wir definieren einen Spinor

$$\begin{aligned} f: S^1 \rightarrow \Sigma S^1 &= (S^1 \times \{\pm 1\}) \times_{\rho} \Sigma_1, \\ s &\mapsto [(s, 1), c]. \end{aligned}$$

Aus Bemerkung 1.58 i) folgt direkt

$$\nabla_X^{\Sigma S^1} f = 0$$

für alle  $X \in TS^1$ , d.h.  $f$  ist ein paralleler Spinor.

Sei  $\varphi \in \Gamma(\Sigma \mathbb{R}^3)$  ein paralleler Spinor. (Wähle z.B.  $\varphi(x) = [(x, 1), \tilde{c}] \in \Sigma \mathbb{R}^3 = (\mathbb{R}^3 \times \text{Spin}(3)) \times_{\rho} \Sigma_3$  für ein  $\tilde{c} \in \Sigma_3$ . Die Parallelität von  $\varphi$  folgt aus der Definition der spinoriellen Levi-Civita-Ableitung. Etwas genauer: Wir wählen in Definition 1.57  $\tilde{b}(x) = (x, 1)$ . Dann ist  $\eta(\tilde{b}) = (b_1, b_2, b_3)$  die Standardbasis im  $\mathbb{R}^3$ . Für diese gilt  $\nabla_X b_i = 0$ .) Dann definieren wir einen Spinor

$$\begin{aligned} s: \mathbb{R}^3 &\rightarrow \Sigma \mathbb{R}^3, \\ x &\mapsto x \cdot_{\mathbb{R}^3} \varphi(x), \end{aligned}$$

wobei wir hier  $x$  auch als Element in  $T_x \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^3$  auffassen. Aus Lemma 1.60 i) folgt

$$\nabla_Y^{\Sigma \mathbb{R}^3} s = Y \cdot_{\mathbb{R}^3} \varphi$$

für alle  $Y \in T\mathbb{R}^3$ . Mit Hilfe von Satz 2.8 erhalten wir, dass  $\tilde{s} := s|_{S^2} \in \Gamma(\Sigma S^2)$  ein Spinor ist (wir lassen den Isomorphismus  $\Phi$  in der Notation weg). Wir verwenden, dass für die

Weingartenabbildung  $W$  von  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$  bezüglich  $\nu(x) = x$  gilt:  $W(Y) = -Y$  für alle  $Y \in TS^2$ . Dann folgt für alle  $Y \in TS^2$

$$\begin{aligned}
\nabla_Y^{\Sigma S^2} \tilde{s} &= \nabla_Y^{\Sigma \mathbb{R}^3} s + \frac{1}{2} W(Y) \cdot_{S^2} \tilde{s} \\
&= Y \cdot_{\mathbb{R}^3} \varphi - \frac{1}{2} Y \cdot_{S^2} \tilde{s} \\
&= \nu \cdot_{\mathbb{R}^3} Y \cdot_{\mathbb{R}^3} \nu \cdot_{\mathbb{R}^3} \varphi - \frac{1}{2} Y \cdot_{S^2} \tilde{s} \\
&= \nu \cdot_{\mathbb{R}^3} Y \cdot_{\mathbb{R}^3} s - \frac{1}{2} Y \cdot_{S^2} \tilde{s} \\
&= Y \cdot_{S^2} \tilde{s} - \frac{1}{2} Y \cdot_{S^2} \tilde{s} \\
&= \frac{1}{2} Y \cdot_{S^2} \tilde{s},
\end{aligned}$$

d.h.  $\tilde{s}$  ist ein  $\frac{1}{2}$ -Killing-Spinor auf  $S^2$  (siehe dazu auch [9, Examples A.1.3]).

Wir definieren nun  $\varphi_0 := \pi_1^* f \otimes \pi_2^* \tilde{s} \in \Gamma(\Sigma M)$ . Es folgt für alle  $X \in \Gamma(TS^1)$ ,  $Y \in \Gamma(TS^2)$  aus (5.4) und (5.5)

$$\begin{aligned}
\nabla_Y^{\Sigma M} \varphi_0 &= \nabla_{(0,Y)}^{\Sigma M} (\pi_1^* f \otimes \pi_2^* \tilde{s}) \\
&= ((\pi_1^* \nabla^{\Sigma S^1})_{(0,Y)} \pi_1^* f) \otimes \pi_2^* \tilde{s} + \pi_1^* f \otimes ((\pi_2^* \nabla^{\Sigma S^2})_{(0,Y)} \pi_2^* \tilde{s}) \\
&= \pi_1^* (\nabla_0^{\Sigma S^1} f) \otimes \pi_2^* \tilde{s} + \pi_1^* f \otimes (\pi_2^* (\nabla_Y^{\Sigma S^2} \tilde{s})) \\
&= 0 + \pi_1^* f \otimes \pi_2^* (\frac{1}{2} Y \cdot_{S^2} \tilde{s}) \\
&= \frac{1}{2} (0, Y) \cdot_M \varphi_0,
\end{aligned}$$

und

$$\nabla_X^{\Sigma M} \varphi_0 = 0.$$

Mit Hilfe von Lemma 1.60 ii) und (5.1)-(5.2) folgt  $L_X |\varphi_0|^2 = L_Y |\varphi_0|^2 = 0$ , d.h.  $|\varphi_0|$  ist konstant als Funktion in  $p \in S^1 \times S^2$ . Nach Reskalierung können wir also von  $|\varphi_0| = 1$  ausgehen.  $\square$

Im Beweis von Lemma 5.2 haben wir einen parallelen Spinor  $f$  auf  $S^1$  konstruiert. Dabei haben wir explizit verwendet, dass wir auf  $S^1$  die Spinstruktur  $S^1 \times \{\pm 1\} \xrightarrow{pr_1} S^1$  gewählt haben. Die Wahl der Spinstruktur auf  $S^1$  ist also für die Existenz des Anfangswertes wichtig.

Wir wählen nun  $\varphi_0$  wie in Lemma 5.2 und suchen für den Rest dieses Abschnittes eine Lösung des Spinorflusses auf  $M$  mit Anfangswert  $(g_0, \varphi_0)$ . Um ein erstes Gefühl für das Problem zu bekommen, berechnen wir im nächsten Lemma die  $Q$ -Terme für unseren Anfangswert.

**Lemma 5.3** *Es gilt*

$$\begin{aligned}
Q_1(g_0, \varphi_0) &= -\frac{1}{8} g_{S^1} \circ (pr_{TS^1} \times pr_{TS^1}), \\
Q_2(g_0, \varphi_0) &= 0.
\end{aligned}$$

*Beweis.* Wir berechnen schrittweise die einzelnen Terme:

Sei  $(b_1, b_2, b_3)$  eine lokale Orthonormalbasis von  $M_0 = (M, g_0)$  derart, dass  $b_1 \in TS^1$ ,  $b_2, b_3 \in TS^2$ . Dann folgt aus (5.1)-(5.3) und (4.1), dass

$$\begin{aligned} |\nabla^{\Sigma M_0} \varphi_0|^2 &= \sum_{k=1}^3 (\nabla_{b_k}^{\Sigma M_0} \varphi_0, \nabla_{b_k}^{\Sigma M_0} \varphi_0) \\ &= \left(\frac{1}{2} b_2 \cdot \varphi_0, \frac{1}{2} b_2 \cdot \varphi_0\right) + \left(\frac{1}{2} b_3 \cdot \varphi_0, \frac{1}{2} b_3 \cdot \varphi_0\right) \\ &= \frac{1}{4} g_0(b_2, b_2) |\varphi_0|^2 + \frac{1}{4} g_0(b_3, b_3) |\varphi_0|^2 \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Als Nächstes wählen wir eine lokale Orthonormalbasis  $(b_1, b_2, b_3)$  von  $M_0$  mit  $b_1 \in TS^1$ ,  $b_2, b_3 \in TS^2$ , so dass  $(b_2, b_3)$  lokale Normalkoordinaten von  $S^2$  sind, welche zentriert in einem  $x \in S^2$  sind. In  $x$  gilt dann

$$\begin{aligned} \nabla^{\Sigma(M, g_0)*} \nabla^{\Sigma(M, g_0)} \varphi_0 &= - \sum_{k=1}^3 \nabla_{b_k}^{\Sigma M_0} \nabla_{b_k}^{\Sigma M_0} \varphi_0 = -(\nabla_{b_2}^{\Sigma M_0} (\frac{1}{2} b_2 \cdot \varphi_0) + \nabla_{b_3}^{\Sigma M_0} (\frac{1}{2} b_3 \cdot \varphi_0)) \\ &= -\frac{1}{2} ((\nabla_{b_2}^{M_0} b_2) \cdot \varphi_0 + b_2 \cdot \nabla_{b_2}^{\Sigma M_0} \varphi_0 + (\nabla_{b_3}^{M_0} b_3) \cdot \varphi_0 + b_3 \cdot \nabla_{b_3}^{\Sigma M_0} \varphi_0) \\ &= -\frac{1}{4} (b_2 \cdot (b_2 \cdot \varphi) + b_3 \cdot (b_3 \cdot \varphi)) \\ &= -\frac{1}{4} (-\varphi_0 - \varphi_0) \\ &= \frac{1}{2} \varphi_0. \end{aligned}$$

Insgesamt haben wir damit  $Q_2(g_0, \varphi_0) = 0$  gezeigt.

Weiter berechnen wir für  $X_i \in TS^1$ ,  $Y_i \in TS^2$ ,  $i = 1, 2$ ,

$$\begin{aligned} (\nabla^{\Sigma M_0} \varphi_0 \otimes \nabla^{\Sigma M_0} \varphi_0)(X_1 + Y_1, X_2 + Y_2) &= (\nabla_{X_1+Y_1}^{\Sigma M_0} \varphi_0, \nabla_{X_2+Y_2}^{\Sigma M_0} \varphi_0) \\ &= (\nabla_{Y_1}^{\Sigma M_0} \varphi_0, \nabla_{Y_2}^{\Sigma M_0} \varphi_0) \\ &= \left(\frac{1}{2} Y_1 \cdot \varphi_0, \frac{1}{2} Y_2 \cdot \varphi_0\right) \\ &= \frac{1}{4} g_0(Y_1, Y_2) |\varphi_0|^2 \\ &= \frac{1}{4} g_0(Y_1, Y_2), \end{aligned}$$

d.h. wir erhalten

$$(\nabla^{\Sigma M_0} \varphi_0 \otimes \nabla^{\Sigma M_0} \varphi_0)(V, W) = \frac{1}{4} g_{S^2}(pr_{TS^2} V, pr_{TS^2} W)$$

für alle  $V, W \in TM$ .

Es bleibt noch  $T_{g_0, \varphi_0}$  zu berechnen. Dazu sei  $(b_1, b_2, b_3)$  wieder eine lokale Orthonormalbasis von  $M_0$  mit  $b_1 \in TS^1$  und  $b_2, b_3 \in TS^2$ . Wir setzen

$$T_{ijk} := (b_i \cdot (b_j \cdot \varphi_0), \nabla_{b_k}^{\Sigma M_0} \varphi_0).$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} T_{123} &= -T_{132}, \\ T_{ijk} &= 0 \text{ sonst.} \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$T_{g_0, \varphi_0}(b_i, b_j, b_k) \stackrel{*}{=} \frac{1}{2}(T_{ijk} + T_{ikj}) = 0$$

für alle  $i, j, k = 1, \dots, 3$  und also  $T_{g_0, \varphi_0} = 0$ . Die Gleichheit  $*$  gilt, denn

$$(g_0(b_i, b_j)\varphi_0, \nabla_{b_k}^{\Sigma M_0} \varphi_0) = 0$$

nach (4.2). Damit haben wir

$$\begin{aligned} Q_1(g_0, \varphi_0) &= -\frac{1}{8}g_0 + \frac{1}{8}g_{S^2} \circ (pr_{TS^2} \times pr_{TS^2}) \\ &= -\frac{1}{8}g_{S^1} \circ (pr_{TS^1} \times pr_{TS^1}). \end{aligned}$$

□

Für uns ist nicht nur das Ergebnis dieses Lemmas wichtig, sondern auch sein Beweis, denn wenn wir uns überlegen, was wir in dem Beweis verwendet haben, erhalten wir:

Angenommen, die Lösung  $(g_t, \varphi_t)_{t \in I}$  hat die folgenden beiden Eigenschaften:

- $g_t$  hat für jedes  $t \in I$  Produktgestalt, d.h.  $g_t = g_{S^1}(t) + g_{S^2}(t)$ , wobei  $g_{S^1}(t)$  bzw.  $g_{S^2}(t)$  für jedes  $t \in I$  Riemannsche Metriken auf  $S^1$  bzw.  $S^2$  sind,
- $\varphi_t$  erfüllt für jedes  $t \in I$  die Gleichungen (5.1)-(5.3),

dann gilt die Aussage von Lemma 5.3 nicht nur für  $t = 0$ , sondern für jedes  $t \in I$ , d.h. wir erhalten

$$Q_1(g_t, \varphi_t) = -\frac{1}{8}g_{S^1}(t) \circ (pr_{TS^1} \times pr_{TS^1}), \quad (5.6)$$

$$Q_2(g_t, \varphi_t) = 0, \quad (5.7)$$

für alle  $t \in I$ . Diese Beobachtung ist zwar nicht schwer, aber wesentlich für die Lösung des Spinorflusses, da sie uns einen leichten Zugriff auf die  $Q$ -Terme erlaubt.

Wir setzen nun

$$g_t := e^{-\frac{1}{8}t} g_{S^1} \circ (pr_{TS^1} \times pr_{TS^1}) + g_{S^2} \circ (pr_{TS^2} \times pr_{TS^2}), \quad (5.8)$$

$t \in I := [0, \infty)$ . (Aus (5.6) folgt, dass das ein guter Ansatz für  $g_t$  ist, denn  $\frac{\partial}{\partial t} g_t = -\frac{1}{8}e^{-\frac{1}{8}t} g_{S^1} \circ (pr_{TS^1} \times pr_{TS^1})$ .)

Wir bilden den verallgemeinerten Zylinder bezüglich (5.8), auf welchem wir die Spinstruktur wählen, welche von der Spinstruktur auf  $(M, g_0)$  induziert wird und machen alle Identifizierungen aus Theorem 4.8.

Weiter definieren wir  $\varphi_t$  wie folgt: Mit  $\mathcal{P}_{0,t} := \mathcal{P}_{0,t}(s, x)$  bezeichnen wir die von  $\nabla^{\Sigma^+ \mathcal{Z}}$  induzierte Parallelverschiebung in  $\Sigma^+ \mathcal{Z}$  entlang  $\gamma_{(s,x)}(t) = (t, s, x)$ ,  $(s, x) \in S^1 \times S^2$ , von  $\gamma_{(s,x)}(0)$  nach  $\gamma_{(s,x)}(t)$ ,  $t \in I$  und setzen

$$\varphi_t(s, x) := \varphi(t, s, x) := \mathcal{P}_{0,t}(s, x)(\varphi_0(s, x)) \in (\Sigma^+ \mathcal{Z})_{(t,s,x)}$$

für alle  $(t, s, x) \in \mathcal{Z}$ .

Wir beginnen mit folgender Proposition:

**Proposition 5.4** *Es gilt*

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^{\Sigma^+ \mathcal{Z}} \varphi = 0$$

und

$$|\varphi| = 1.$$

*Beweis.* Aus der Definition von  $\varphi$  (und der Tatsache, dass man die kovariante Ableitung  $\nabla^{\Sigma^+ \mathcal{Z}}$  durch die Parallelverschiebung ausdrücken kann) folgt:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^{\Sigma^+ \mathcal{Z}} \varphi = 0.$$

Daraus folgt mit Lemma 1.60 ii)

$$L_{\frac{\partial}{\partial t}} |\varphi|^2 = \langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^{\Sigma^+ \mathcal{Z}} \varphi, \varphi \rangle + \langle \varphi, \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^{\Sigma^+ \mathcal{Z}} \varphi \rangle = 0.$$

Damit ist  $|\varphi|$  konstant in  $t$ . Nach Voraussetzung gilt  $|\varphi_0| = 1$ , also folgt  $|\varphi| = 1$ .  $\square$

Aufgrund der Überlegungen nach Lemma 5.3 (insbesondere (5.6) und (5.7)) brauchen wir nur noch (5.1) und (5.2) für alle  $t \in I$  zeigen, d.h. wir wollen

$$\begin{aligned} \nabla_Y^{\Sigma M_t} \varphi_t &= \frac{1}{2} Y \cdot_t \varphi_t & \forall Y \in \Gamma(TS^2), \\ \nabla_X^{\Sigma M_t} \varphi_t &= 0 & \forall X \in \Gamma(TS^1), \end{aligned}$$

für alle  $t \in I$  zeigen, dann ist  $(g_t, \varphi_t)_{t \in I}$  eine Lösung des Spinorflusses. Das ist der schwierigste Teil und wir brauchen dazu noch Aussagen über die Krümmung von  $\Sigma^+ \mathcal{Z}$ , die uns das nächste Lemma liefert.

**Lemma 5.5**

i) Für alle  $Y \in \Gamma(TS^2)$  gilt

$$R^{\Sigma^+ \mathcal{Z}}\left(\frac{\partial}{\partial t}, Y\right) = 0.$$

ii) Für alle  $X \in \Gamma(TS^1)$  und alle  $\sigma \in \Gamma(\Sigma^+ \mathcal{Z})$  gilt

$$R^{\Sigma^+ \mathcal{Z}}\left(\frac{\partial}{\partial t}, X\right)\sigma = \frac{1}{2 \cdot 16^2} \frac{\partial}{\partial t} \cdot (X \cdot \sigma).$$

*Beweis.* Wir wählen eine lokale Orthonormalbasis  $(b_1, b_2, b_3, b_4)$  von  $\mathcal{Z}$  mit  $b_1 = \frac{\partial}{\partial t}$ ,  $b_2 \in TS^1$ ,  $b_3, b_4 \in TS^2$ . Im Folgenden geben wir zwei Varianten an, um die Aussage des Lemmas zu zeigen. Für beide Varianten verwenden wir Lemma 1.61 (wobei zu beachten ist, dass nach Definition  $R^{\Sigma^+ \mathcal{Z}} = R^{\Sigma \mathcal{Z}}$  für Schnitte von  $\Sigma^+ \mathcal{Z}$ ), d.h. wir müssen  $g_{\mathcal{Z}}(R^{\Sigma^+ \mathcal{Z}}(\frac{\partial}{\partial t}, W)b_i, b_j)$  für  $W \in TS^1$  bzw.  $W \in TS^2$  berechnen.

**1. Variante:** Wir verwenden (4.6)-(4.7) und erhalten das Gewünschte durch Nachrechnen, wobei die Rechnungen nicht kompliziert sind.

**2. Variante:** Dies ist eine Variante, die anstelle der Gleichungen (4.6)-(4.7) Aussagen über verzerrte Produkte [17, Abschnitt „warped products“, ab S. 204] verwendet.

Zu i): Sei  $Y \in \Gamma(TS^2)$ .  $\frac{\partial}{\partial t}$  und  $Y$  liegen im Tangentialbündel der Riemannschen Untermannigfaltigkeit

$$(B, g_B) := (I \times S^2, dt^2 + g_{S^2})$$

von  $(\mathcal{Z}, g_{\mathcal{Z}})$ . Aus der Definition der Krümmung in  $B$  (siehe (1.4)) und weil „ $\nabla^B = \nabla^I + \nabla^{S^2}$ “, folgt  $R^B(\frac{\partial}{\partial t}, Y) = 0$ . Weiter ist  $(\mathcal{Z}, g_{\mathcal{Z}})$  (bis auf eine Vertauschung von Faktoren) gleich dem verzerrten Produkt  $B \times_f S^1$  mit  $f(t, x) := e^{-\frac{1}{16}t}$ ,  $(t, x) \in B$  und es folgt:

- $R^{\mathcal{Z}}(\frac{\partial}{\partial t}, Y)V = 0$  für alle  $V \in TI \times TS^2$  nach [17, S. 210, 42. Proposition (1)],
- $R^{\mathcal{Z}}(\frac{\partial}{\partial t}, Y)V = 0$  für alle  $V \in TS^1$  nach [17, S. 210, 42. Proposition (3)].

Also erhalten wir insgesamt  $R^{\mathcal{Z}}(\frac{\partial}{\partial t}, Y) = 0$  und i) folgt.

Zu ii): Sei  $X \in \Gamma(TS^1)$ . Wir betrachten die Untermannigfaltigkeit  $\mathcal{Z}' := I \times S^1$  von  $\mathcal{Z}$ . Die induzierte Riemannsche Metrik ist  $g_{\mathcal{Z}'} := dt^2 + e^{-\frac{1}{8}t}g_{S^1}$ . Weiter liegen  $\frac{\partial}{\partial t}$  und  $X$  im Tangentialbündel von  $\mathcal{Z}'$ . Einige Krümmungen können wir leicht ausrechnen, unter Beachtung von  $g_{\mathcal{Z}} = g_{\mathcal{Z}'} + g_{S^2}$  und der daraus resultierenden Form der Levi-Civita-Ableitung „ $\nabla^{\mathcal{Z}} = \nabla^{\mathcal{Z}'} + \nabla^{S^2}$ “:

$$R^{\mathcal{Z}}(\frac{\partial}{\partial t}, X)b_3 = R^{\mathcal{Z}}(\frac{\partial}{\partial t}, X)b_4 = 0.$$

Aus der Identität  $R_{XYZW} = -R_{XYWZ}$  für den  $(4, 0)$ -Krümmungstensor folgt

$$g_{\mathcal{Z}}(R^{\mathcal{Z}}(\frac{\partial}{\partial t}, X)b_k, b_l) = g_{\mathcal{Z}}(R^{\mathcal{Z}}(\frac{\partial}{\partial t}, X)b_l, b_k) = 0 \text{ für alle } k = 1, \dots, 4, l = 3, 4.$$

Für die verbleibenden Krümmungen nutzen wir, dass für  $f(t) := e^{-\frac{1}{16}t}$ ,  $t \in I$  gilt

$$(\mathcal{Z}', g_{\mathcal{Z}'}) = I \times_f S^1.$$

Somit folgt aus [17, S. 210, 42. Proposition (2)]<sup>10</sup> dass

$$\begin{aligned} R^{\mathcal{Z}'}(\frac{\partial}{\partial t}, X)b_1 &= R^{\mathcal{Z}'}(\frac{\partial}{\partial t}, X)\frac{\partial}{\partial t} \\ &= \text{Hess}(f)(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t})\frac{1}{f}X \\ &= (L_{\frac{\partial}{\partial t}}L_{\frac{\partial}{\partial t}}f - L_{(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\frac{\partial}{\partial t})}f)\frac{1}{f}X \\ &= f''\frac{1}{f}X \\ &= \frac{1}{16^2}X, \end{aligned}$$

wobei  $\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\frac{\partial}{\partial t} = 0$  nach (4.4), da auch  $\mathcal{Z}'$  ein verallgemeinerter Zylinder ist. Weiter ist  $\mathcal{Z}' \times \{x\}$  für alle  $x \in S^2$  eine totalgeodätische Untermannigfaltigkeit von  $\mathcal{Z}$ , d.h. die zweite Fundamentalform ist Null. Die Gauß-Gleichungen liefern

$$g_{\mathcal{Z}}(R^{\mathcal{Z}}(\frac{\partial}{\partial t}, X)b_1, b_2) = g_{\mathcal{Z}}(R^{\mathcal{Z}'}(\frac{\partial}{\partial t}, X)b_1, b_2) = \frac{1}{16^2}g_{\mathcal{Z}}(X, b_2).$$

Wir erhalten insgesamt

$$\begin{aligned} R^{\Sigma^+ \mathcal{Z}}(\frac{\partial}{\partial t}, X)\sigma &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{16^2}g_{\mathcal{Z}}(X, b_2)b_1 \cdot (b_2 \cdot \sigma)\right) \\ &= \frac{1}{2 \cdot 16^2}\frac{\partial}{\partial t} \cdot (X \cdot \sigma), \end{aligned}$$

was zu zeigen war. □

<sup>10</sup>Hier ist zu beachten, dass wir die Krümmung durch (1.4) definiert haben. Die Definition in [17] unterscheidet sich um ein Vorzeichen. Damit ist unser  $R(X, Y)Z$  das gleiche wie  $R(Y, X)Z$  in [17].

Damit können wir nun (5.1)-(5.2) für alle  $t \geq 0$  zeigen, woraus Theorem 5.1 folgt.

**Lemma 5.6** *Für alle  $t \geq 0$  gilt*

$$i) \nabla_Y^{\Sigma M_t} \varphi_t = \frac{1}{2} Y \cdot_t \varphi_t \text{ für alle } Y \in TS^2,$$

$$ii) \nabla_X^{\Sigma M_t} \varphi_t = 0 \text{ für alle } X \in TS^1.$$

*Beweis.* Zunächst stellen wir fest, dass aus (4.5) folgt:

$$W_t(V) = \frac{1}{16} pr_{TS^1}(V) \quad (5.9)$$

für alle  $V \in T(S^1 \times S^2)$  und alle  $t \in I$ .

Zu i): Sei  $Y \in \Gamma(TS^2)$  beliebig und  $\tilde{Y}(t, s, x) := (0, 0, Y(x))$  für alle  $(t, s, x) \in \mathcal{Z} = [0, \infty) \times S^1 \times S^2$ . Dann ist  $\tilde{Y} \in \Gamma(T\mathcal{Z})$  und aus (4.9) und (5.9) folgt

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^{\mathcal{Z}} \tilde{Y} = 0.$$

Mit Theorem 4.8 berechnen wir weiter

$$\begin{aligned} \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^{\Sigma^+ \mathcal{Z}} (\tilde{Y} \cdot_t \varphi_t) &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^{\Sigma^+ \mathcal{Z}} \left( \frac{\partial}{\partial t} \cdot \tilde{Y} \cdot \varphi \right) \\ &= \underbrace{\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^{\mathcal{Z}} \frac{\partial}{\partial t}}_{=0} \cdot (\tilde{Y} \cdot \varphi) + \frac{\partial}{\partial t} \cdot \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^{\Sigma^+ \mathcal{Z}} (\tilde{Y} \cdot \varphi) + \frac{\partial}{\partial t} \cdot \tilde{Y} \cdot \underbrace{\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^{\Sigma^+ \mathcal{Z}} \varphi}_{=0} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \cdot \left( \underbrace{(\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^{\mathcal{Z}} \tilde{Y})}_{=0} \cdot \varphi + \tilde{Y} \cdot \underbrace{\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^{\Sigma^+ \mathcal{Z}} \varphi}_{=0} \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Wegen (5.9) ist

$$\nabla_{\tilde{Y}}^{\Sigma^+ \mathcal{Z}} \varphi = \nabla_{\tilde{Y}}^{\Sigma M_t} \varphi_t.$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^{\Sigma^+ \mathcal{Z}} (\nabla_{\tilde{Y}}^{\Sigma M_t} \varphi_t - \frac{1}{2} \tilde{Y} \cdot_t \varphi_t) &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^{\Sigma^+ \mathcal{Z}} \nabla_{\tilde{Y}}^{\Sigma^+ \mathcal{Z}} \varphi \\ &= R^{\Sigma^+ \mathcal{Z}} \left( \frac{\partial}{\partial t}, \tilde{Y} \right) \varphi + \nabla_{\tilde{Y}}^{\Sigma^+ \mathcal{Z}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^{\Sigma^+ \mathcal{Z}} \varphi + \nabla_{[\frac{\partial}{\partial t}, \tilde{Y}]}^{\Sigma^+ \mathcal{Z}} \varphi \\ &= 0, \end{aligned}$$

denn  $R^{\Sigma^+ \mathcal{Z}}(\frac{\partial}{\partial t}, \tilde{Y}) = 0$  nach Lemma 5.5 i),  $\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^{\Sigma^+ \mathcal{Z}} \varphi = 0$  nach Konstruktion von  $\varphi$  und  $[\frac{\partial}{\partial t}, \tilde{Y}] = 0$  nach (4.8).

Zusammen mit (5.1) haben wir also

$$\begin{cases} \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^{\Sigma^+ \mathcal{Z}} (\nabla_{\tilde{Y}}^{\Sigma M_t} \varphi_t - \frac{1}{2} \tilde{Y} \cdot_t \varphi_t) = 0, \\ \nabla_{\tilde{Y}}^{\Sigma M_0} \varphi_0 - \frac{1}{2} \tilde{Y} \cdot_0 \varphi_0 = 0. \end{cases}$$

Diese Differentialgleichung mit Anfangswert hat eine eindeutige Lösung. Diese ist Null, da Null eine Lösung ist.

(Genauer: Sei  $s(t, \cdot) := \nabla_{\tilde{Y}}^{\Sigma M_t} \varphi_t - \frac{1}{2} \tilde{Y} \cdot_t \varphi_t$ . Wir zeigen mit der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen im  $\mathbb{R}^n$ , dass  $s = 0$  auf  $\mathcal{Z}$ . Sei  $p \in S^1 \times S^2$  beliebig gewählt. Sei  $(e_1, e_2)$  ein lokaler Rahmen von  $\Sigma^+ \mathcal{Z}$ , so dass für  $i = 1, 2$

$$e_i: [0, \tilde{t}) \times U \rightarrow \Sigma^+ \mathcal{Z},$$

mit  $\tilde{t} > 0$ ,  $U \subset S^1 \times S^2$  offen,  $p \in U$ . Wir schreiben

$$s = s^1 e_1 + s^2 e_2$$

für  $s^1, s^2: [0, \tilde{t}) \times U \rightarrow \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$  glatt.

Für  $t \in [0, \tilde{t})$  gilt:

$$\begin{aligned} 0 &= \left( \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^{\Sigma^+ \mathcal{Z}} s \right) (t, p) = \sum_{i=1}^2 \left( L_{\frac{\partial}{\partial t}} s^i \right) (t, p) e_i(t, p) + s^i(t, p) \underbrace{\left( \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^{\Sigma^+ \mathcal{Z}} e_i \right)}_{= \sum_{j=1}^2 f_j^i e_j} (t, p) \\ &= \sum_{i=1}^2 \left( \frac{d}{dt} \Big|_t (s^i(t, p)) + \sum_{j=1}^2 s^j(t, p) f_j^i(t, p) \right) e_i(t, p), \end{aligned}$$

wobei  $f_j^i: [0, \tilde{t}) \times U \rightarrow \mathbb{C}$  geeignete glatte Funktionen sind. Weiter gilt  $s^1(0, p) = s^2(0, p) = 0$ . Setzen wir  $\gamma(t) := (s^1(t, p), s^2(t, p))$  und  $A(t) := (f_j^i(t, p))_{i,j=1,2}$  für alle  $t \in [0, \tilde{t})$ , so erhalten wir das homogene, lineare System von gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\begin{cases} \gamma'(t) &= -A(t)\gamma(t), \quad t \in [0, \tilde{t}) \\ \gamma(0) &= 0. \end{cases}$$

Es folgt  $\gamma(t) = 0$  für alle  $t \in [0, \tilde{t})$ . Das bedeutet  $s(t, p) = 0$  für alle  $t \in [0, \tilde{t})$ .

Um einzusehen, dass  $s(t, p) = 0$  für alle  $t \in [0, \infty)$ , führen wir einen Widerspruchsbeweis. Angenommen, es gibt ein  $t_0 \in (0, \infty)$  mit  $s(t_0, p) \neq 0$ . Dann existiert

$$t_1 := \inf\{t \in [0, \infty) \mid s(t, p) \neq 0\}$$

Nach Definition gilt  $s(t, p) = 0$  für alle  $t \in [0, t_1)$ . Wir wählen einen lokalen Rahmen von  $\Sigma^+ \mathcal{Z}$ , definiert auf  $J \times V$ ,  $J \subset (0, \infty)$  offen,  $V \subset S^1 \times S^2$  offen,  $t_1 \in J$ ,  $p \in V$ , und erhalten wie oben  $s(t, p) = 0$  für alle  $t \in J$ . Das steht im Widerspruch zur Definition von  $t_1$ . Also gilt  $s = 0$  auf  $\mathcal{Z}$ , was wir zeigen wollten.)

Daraus folgt  $\nabla_{\tilde{Y}}^{\Sigma M_t} \varphi_t = \frac{1}{2} \tilde{Y} \cdot_t \varphi_t$  für alle  $t \geq 0$  und damit auch i).

Zu ii): Wir gehen analog zu i) vor: Sei  $X \in \Gamma(TS^1)$  beliebig und

$$\tilde{X}(t, s, x) := (0, e^{\frac{1}{16}t} X(s), 0)$$

für alle  $(t, s, x) \in \mathcal{Z}$ . Dann ist  $\tilde{X} \in \Gamma(T\mathcal{Z})$  und aus (4.9) und (5.9) folgt

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^{\mathcal{Z}} \tilde{X} = 0.$$

Wir berechnen ganz genau wie im Beweis von i), dass

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^{\Sigma^+ \mathcal{Z}}(\tilde{X} \cdot_t \varphi_t) = 0.$$

Aus Theorem 4.8 und (5.9) ergibt sich

$$\nabla_{\tilde{X}}^{\Sigma^+ \mathcal{Z}} \varphi = \nabla_{\tilde{X}}^{\Sigma M_t} \varphi_t - \frac{1}{32} \tilde{X} \cdot_t \varphi_t$$

und wir berechnen

$$\begin{aligned} \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^{\Sigma^+ \mathcal{Z}}(\nabla_{\tilde{X}}^{\Sigma M_t} \varphi_t) &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^{\Sigma^+ \mathcal{Z}}(\nabla_{\tilde{X}}^{\Sigma^+ \mathcal{Z}} \varphi + \frac{1}{32} \tilde{X} \cdot_t \varphi_t) \\ &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^{\Sigma^+ \mathcal{Z}}(\nabla_{\tilde{X}}^{\Sigma^+ \mathcal{Z}} \varphi) \\ &= R^{\Sigma^+ \mathcal{Z}}\left(\frac{\partial}{\partial t}, \tilde{X}\right) \varphi + \nabla_{\tilde{X}}^{\Sigma^+ \mathcal{Z}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^{\Sigma^+ \mathcal{Z}} \varphi + \nabla_{[\frac{\partial}{\partial t}, \tilde{X}]}^{\Sigma^+ \mathcal{Z}} \varphi \\ &= R^{\Sigma^+ \mathcal{Z}}\left(\frac{\partial}{\partial t}, \tilde{X}\right) \varphi + \nabla_{[\frac{\partial}{\partial t}, \tilde{X}]}^{\Sigma^+ \mathcal{Z}} \varphi \\ &\stackrel{*}{=} \frac{1}{2 \cdot 16^2} \frac{\partial}{\partial t} \cdot (\tilde{X} \cdot \varphi) + \frac{1}{16} \nabla_{\tilde{X}}^{\Sigma^+ \mathcal{Z}} \varphi \\ &= \frac{1}{16} \left( \frac{1}{32} \tilde{X} \cdot_t \varphi_t + \nabla_{\tilde{X}}^{\Sigma^+ \mathcal{Z}} \varphi \right) \\ &= \frac{1}{16} \nabla_{\tilde{X}}^{\Sigma M_t} \varphi_t, \end{aligned}$$

wobei die Gleichheit \* durch Lemma 5.5 ii) und  $[\frac{\partial}{\partial t}, \tilde{X}] = \frac{1}{16} \tilde{X}$  nach (4.8) folgt.

Mit dem Anfangswert (5.2) erhalten wir

$$\begin{cases} \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^{\Sigma^+ \mathcal{Z}}(\nabla_{\tilde{X}}^{\Sigma M_t} \varphi_t) = \frac{1}{16} \nabla_{\tilde{X}}^{\Sigma M_t} \varphi_t \\ \nabla_{\tilde{X}}^{\Sigma M_0} \varphi_0 = 0 \end{cases}$$

Wie oben erhalten wir daraus  $\nabla_{\tilde{X}}^{\Sigma M_t} \varphi_t = 0$  für alle  $t \geq 0$  und ii) folgt. □

## 6 Der Spinorfluss auf dreidimensionalen Berger-Sphären

Unsere Ergebnisse in diesem Kapitel beziehen sich auf folgende Vermutungen:

**Vermutung 1:**  $S^1$ -Hauptfaserbündel mit kurzen Fasern und  $S^1$ -invarianten Spinoren kollabieren unter dem Spinorfluss gegen ihre Basis.

**Vermutung 2:** Für  $M = S^n$  ist die volumennormalisierte Standardmetrik mit Killing-Spinor stabil unter dem volumennormalisierten Spinorfluss. Dabei ist mit „stabil“ gemeint: Wählt man einen Anfangswert  $(g_0, \varphi_0)$ , der nahe an der volumennormalisierten Standardmetrik mit Killing-Spinor ist, so fließt der Fluss für den Anfangswert  $(g_0, \varphi_0)$  zur volumennormalisierten Standardmetrik mit Killing-Spinor (modulo Diffeomorphismeninvarianz).

Die „ $S^1$ -invarianten Spinoren“ sind diejenigen Spinoren auf dem Hauptfaserbündel, welche den Spinoren auf der Basismannigfaltigkeit entsprechen, diese werden wir in Abschnitt 6.2 definieren.

Wir werden diese beiden Vermutungen für die sogenannten Berger-Sphären bestätigen. Das Ergebnis zur ersten Vermutung ist Theorem 6.10, das zur zweiten Vermutung ist Theorem 6.19 (und Theorem 6.17).

Die obigen beiden Vermutungen sind nicht formal präzise formuliert (teilweise ist auch nicht klar, wie eine formale Präzisierung dieser auszusehen hat), unsere Ergebnisse sind jedoch sehr konkret.

Die Motivation für die erste Vermutung kann man anschaulich so beschreiben: Es ist sehr wahrscheinlich, dass triviale  $S^1$ -Hauptfaserbündel  $M \times S^1 \rightarrow M$  (mit passend gewählter Riemannscher Metrik) mit  $S^1$ -invarianten Spinoren gegen ihre Basis  $M$  kollabieren. Angenommen, wir haben ein (nicht-triviales)  $S^1$ -Hauptfaserbündel mit „kurzen“ Fasern. Dann sind die geometrischen Auswirkungen der Krümmung klein. Damit sollte das Bündel „fast“ trivial sein und auch gegen seine Basis kollabieren.

Die zweite Vermutung ist durch ähnliche Resultate für andere geometrische Flüsse motiviert. Ein Ergebnis dieser Art für den mittleren Krümmungsfluss ist z.B. [12, 1.1 Theorem].

### 6.1 Grundlagen zu Berger-Sphären und technische Vorbereitungen

Die Berger-Sphären sind die Sphäre  $S^3$  mit speziellen Riemannschen Metriken, die wir im Folgenden beschreiben.

Zunächst sei

$$\pi: \mathbb{C}^2 \supset S^3 \rightarrow S^2 \subset \mathbb{C} \times \mathbb{R}$$

die Hopffaserung,  $\pi(w, z) = (2w\bar{z}, |w|^2 - |z|^2)$ ,  $w, z \in \mathbb{C}$ . Mit der Hopffaserung als Projektion wird  $S^3$  zu einem  $S^1$ -Hauptfaserbündel über  $S^2$ , wobei die  $S^1$ -Wirkung durch

$$(a, b) \cdot g := (ag, bg),$$

$(a, b) \in S^3 \subset \mathbb{C}^2$ ,  $g \in S^1 \subset \mathbb{C}$  definiert ist. Die Fasern  $\pi^{-1}(x)$ ,  $x \in S^2$ , heißen *Hopffasern*. Wählen wir auf  $S^3$  die Standardmetrik  $g_{S^3}$  (welche man durch Einschränkung des Standardskalarproduktes auf dem  $\mathbb{R}^4$  erhält) und auf  $S^2$  die Fubini-Study-Metrik  $g_{FS}$ , so wird die Hopffaserung  $\pi: (S^3, g_{S^3}) \rightarrow (S^2, g_{FS})$  zu einer Riemannschen Submersion. Für jedes

$p \in S^3$  spaltet der Tangentialraum  $T_p S^3$  auf in den Tangentialraum der Hopffaser und sein orthogonales Komplement (welches wir hier und im Folgenden bezüglich  $g_{S^3}$  bilden),

$$T_p S^3 = \ker(d\pi_p) \oplus (\ker(d\pi_p))^\perp.$$

Wir skalieren die Standardmetrik auf  $S^3$  entlang der Hopffasern mit  $\varepsilon > 0$ :

$$g^\varepsilon(X_1 + Y_1, X_2 + Y_2) := g_{S^3}(\varepsilon X_1 + Y_1, \varepsilon X_2 + Y_2)$$

für  $X_i \in \ker(d\pi_p)$ ,  $Y_i \in (\ker(d\pi_p))^\perp$ ,  $i = 1, 2$ .

**Definition 6.1 (Berger-Sphären)** Die Familie Riemannscher Mannigfaltigkeiten  $(S^3, g^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$  bezeichnen wir als die Berger-Sphären. Für jedes  $\varepsilon > 0$  nennen wir  $(S^3, g^\varepsilon)$  Berger-Sphäre (zum Parameter  $\varepsilon$ ) und  $g^\varepsilon$  heißt Berger-Metrik (zum Parameter  $\varepsilon$ ).

Wir notieren den Parameter  $\varepsilon$  in  $g^\varepsilon$  oben, damit die Berger-Metrik zum Parameter  $\varepsilon$  nicht mit dem Metrik-Teil der Lösung des Spinorflusses  $g_t$  verwechselt werden kann, bei dem wir den Parameter unten notieren.

**Bemerkung 6.2 (Berger-Metriken mittels linksinvarianter Metriken auf  $SU(2)$ )**

Wir geben noch eine weitere Art und Weise an, wie man die Berger-Metriken erhalten kann. Dazu betrachten wir die Liegruppe

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{C}, |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\}$$

mit der Liealgebra

$$\mathfrak{su}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} i\alpha & \beta + i\gamma \\ -\beta + i\gamma & -i\alpha \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}.$$

Es ist  $(X_1, X_2, X_3)$  mit

$$X_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

eine Vektorraumbasis von  $\mathfrak{su}(2)$ . Für jedes  $\varepsilon > 0$  definieren wir ein Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\varepsilon$  auf  $\mathfrak{su}(2)$ , indem wir  $(\frac{1}{\varepsilon} X_1, X_2, X_3)$  als Orthonormalbasis von  $(\mathfrak{su}(2), \langle \cdot, \cdot \rangle_\varepsilon)$  erklären. Sei  $\tilde{g}^\varepsilon$  die davon induzierte linksinvariante Riemannsche Metrik auf  $SU(2)$ ,

$$(\tilde{g}^\varepsilon)_A(V, W) = \langle d(L_{A^{-1}})V, d(L_{A^{-1}})W \rangle_\varepsilon,$$

wobei  $A \in SU(2)$ ,  $V, W \in T_A SU(2)$  und  $L_{A^{-1}}(B) = A^{-1}B$  die Linkstranslation mit  $A^{-1}$  bezeichnet.

Vermittels des Diffeomorphismus

$$h: SU(2) \rightarrow S^3, \\ \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} \mapsto (a, b),$$

identifizieren wir  $S^3 = SU(2)$ . Unter dieser Identifizierung ist  $\tilde{g}^\varepsilon$  die Berger-Metrik zum Parameter  $\varepsilon$ , d.h. genauer:  $h^*g^\varepsilon = \tilde{g}^\varepsilon$ .

Wir sammeln nun einige technische Resultate, die wir für die Lösung des Spinorflusses auf den Berger-Sphären benötigen.

Die Wirkung von  $S^1$  auf  $S^3$  liefert uns einen globalen Fluss

$$\begin{aligned}\mathbb{R} \times S^3 &\rightarrow S^3, \\ (t, p) &\mapsto p \cdot e^{it},\end{aligned}$$

dessen Flussvektorfeld  $K \in \Gamma(TS^3)$  gegeben ist durch

$$K((a, b)) = (ia, ib)$$

für alle  $(a, b) \in S^3 \subset \mathbb{C}^2$ . Es gilt  $K(p) \in \ker(d\pi_p)$  für alle  $p \in S^3$ .

Für den Rest dieser Arbeit wählen wir auf  $S^3$  den Zusammenhang

$$p \mapsto (\ker(d\pi_p))^\perp.$$

(Insbesondere heißt das: Wann immer wir im Folgenden von horizontalen Lifts sprechen, meinen wir horizontale Lifts bezüglich dieses Zusammenhangs.) Sei  $\tilde{\omega}: TS^3 \rightarrow i\mathbb{R}$  die Zusammenhangsform, die durch diesen Zusammenhang induziert wird, d.h.

$$\tilde{\omega}_p(\tilde{X}(p) + Y) = X$$

für alle  $p \in S^3$ ,  $X \in i\mathbb{R}$  und alle  $Y \in \ker(d\pi_p)^\perp$ . Man sieht leicht, dass  $\tilde{\omega}(K) \equiv i$ . Wir setzen

$$\omega := \frac{1}{i}\tilde{\omega}: TS^3 \rightarrow \mathbb{R}.$$

Mit  $d\omega$  bezeichnen wir das Differential von  $\omega$ ,

$$d\omega(X, Y) = L_X(\omega(Y)) - L_Y(\omega(X)) - \omega([X, Y]).$$

Wir definieren

$$g_t(X_1 + Y_1, X_2 + Y_2) := g_{S^3}(\alpha(t)X_1 + \beta(t)Y_1, \alpha(t)X_2 + \beta(t)Y_2) \quad (6.1)$$

für  $t \in I$ ,  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall,  $0 \in I$ ,  $X_i \in \ker(d\pi_p)$ ,  $Y_i \in (\ker(d\pi_p))^\perp$ ,  $i = 1, 2$  und beliebige glatte Funktionen  $\alpha, \beta: I \rightarrow (0, \infty)$ .

**Bemerkung 6.3 (Lösungsstrategie für den Spinorfluss auf Berger-Sphären)** An dieser Stelle gehen wir auf unsere Lösungsstrategie für den Spinorfluss auf den Berger-Sphären ein, damit klarer wird, warum wir im Folgenden bestimmte Aussagen zeigen und insbesondere, warum wir uns für die Metriken (6.1) interessieren.

- Wir wählen später (6.1) als Lösungsansatz für den Metrik-Teil der Lösung, wobei wir fordern werden, dass  $\alpha(0)$  und  $\beta(0)$  so gewählt sind, dass  $g_0$  der Metrik-Teil unseres Anfangswertes ist.
- Dann bilden wir den verallgemeinerten Zylinder bezüglich (6.1) und definieren den Spinor-Teil der Lösung  $\varphi_t$  durch Parallelverschiebung des Spinor-Teil des Anfangswertes  $\varphi_0$  in  $\Sigma^+ \mathcal{Z}$  bezüglich  $\nabla^{\Sigma^+ \mathcal{Z}}$  entlang  $s \mapsto (s, p)$ ,  $s \in I$ .

- Als Nächstes berechnen wir  $\nabla^{\Sigma(S^3, g_t)}\varphi_t$  (als einen Ausdruck, der insbesondere von  $\alpha$  und  $\beta$  abhängt). Dazu stellen wir eine Differentialgleichung in  $\Sigma^+\mathcal{Z}$  auf. Ein wesentliches Hilfsmittel hierfür sind Krümmungen in  $\Sigma^+\mathcal{Z}$ .
- Nachdem wir  $\nabla^{\Sigma(S^3, g_t)}\varphi_t$  berechnet haben, können wir damit  $Q_1(g_t, \varphi_t)$  und  $Q_2(g_t, \varphi_t)$  berechnen.
- Wir zeigen  $\nabla_{\nu}^{\Sigma^+\mathcal{Z}}\varphi = 0 = Q_2(g_t, \varphi_t)$ , unabhängig von der Wahl von  $\alpha$  und  $\beta$ .
- Schließlich zeigen wir, dass die Identität  $\frac{\partial}{\partial t}g_t = Q_1(g_t, \varphi_t)$  äquivalent ist zu einem System von zwei nichtlinearen, gewöhnlichen Differentialgleichungen für  $(\alpha, \beta)$ . Wir lösen dieses System, um Eigenschaften des Metrik-Teils der Lösung  $g_t$  zu erhalten.

Im weiteren Verlauf ist es wichtig, dass  $d\omega(X, Y)$  unter bestimmten Voraussetzungen eine konstante Funktion in  $p \in S^3$  ist. Dazu benötigen wir:

**Lemma 6.4** *Sei eine Orientierung auf  $S^2$  beliebig aber fest gewählt. Dann gilt:*

- Für eine der beiden Orientierungen auf  $S^3$  gilt: Für alle  $p \in S^3$  und alle positiv orientierten Basen  $(f_1, f_2)$  von  $T_{\pi(p)}S^2$  ist  $(K(p), b_1, b_2)$  eine positiv orientierte Basis von  $T_pS^3$ . Dabei bezeichnet  $b_i$  den horizontalen Lift von  $f_i$ ,  $i = 1, 2$ . Für die andere Orientierung auf  $S^3$  gilt dann entsprechend: Für alle  $p \in S^3$  und alle positiv orientierten Basen  $(f_1, f_2)$  von  $T_{\pi(p)}S^2$  ist  $(-K(p), b_1, b_2)$  eine positiv orientierte Basis von  $T_pS^3$ .*
- Ist  $(f_1, f_2)$  eine positiv orientierte Orthonormalbasis auf  $(S^2, g_{FS})$  und bezeichnet  $b_i$  wieder den horizontalen Lift von  $f_i$ ,  $i = 1, 2$ , so gilt*

$$d\omega(b_1, b_2) = \pm 2,$$

*wobei das Vorzeichen nur von der auf  $S^2$  gewählten Orientierung abhängt (aber nicht von der Wahl der positiv orientierten Orthonormalbasis  $(f_1, f_2)$ ).*

*Beweis.* Zu i): Sei  $p \in S^3$  und  $(f_1, f_2)$  eine positiv orientierte Basis von  $T_{\pi(p)}S^2$ . Wir definieren eine Orientierung auf  $T_pS^3$ , indem wir  $(K(p), b_1, b_2)$  als positiv orientiert erklären. Durch Betrachtung der Basiswechselformen überzeugt man sich leicht davon, dass diese Orientierung auf  $T_pS^3$  nicht von der gewählten positiv orientierten Basis  $(f_1, f_2)$  abhängt. Insgesamt bekommen wir eine punktweise Orientierung auf  $S^3$ . Diese ist stetig (und definiert damit eine Orientierung auf  $S^3$ ), da für einen lokalen positiv orientierten Rahmen  $(f_1, f_2)$  der lokale Rahmen  $(K, b_1, b_2)$  positiv orientiert ist. Ersetzen wir  $K$  durch  $-K$  erhalten wir die andere Orientierung auf  $S^3$ .

Zu ii): Wir identifizieren  $S^3 = SU(2)$  wie zu Beginn des Abschnittes. Unter dieser Identifikation gilt  $K = X_1$ . Mit der Identität  $[X_2, X_3] = 2X_1$  folgt also

$$[X_2, X_3] = 2K,$$

und damit

$$d\omega(X_2, X_3) = -\omega([X_2, X_3]) = -2\omega(K) \equiv -2.$$

(Hier fassen wir die  $X_i$  wie gewöhnlich auch als linksinvariante Vektorfelder auf und bemerken, dass  $X_2$  und  $X_3$  horizontal sind.) Die beiden Orientierungen auf  $S^3$  sind linksinvariant

(siehe [16, Proposition 15.19]), d.h. für eine Orientierung auf  $S^3$  ist  $(K, X_2, X_3)$  in jedem Punkt positiv orientiert und für die andere Orientierung auf  $S^3$  ist  $(-K, X_2, X_3)$  in jedem Punkt positiv orientiert. Außerdem ist  $(K, X_2, X_3)$  in jedem Punkt eine Orthonormalbasis auf  $(S^3, g_{S^3}) = (SU(2), \tilde{g}^1)$ . Sei nun  $(f_1, f_2)$  eine positiv orientierte Orthonormalbasis auf  $(S^2, g_{FS})$ . Damit ist  $(K, b_1, b_2)$  (bzw.  $(-K, b_1, b_2)$ ) eine positiv orientierte Orthonormalbasis von  $(S^3, g_{S^3})$ . Dann gilt entweder

1. Fall:  $(K, b_1, b_2)$  und  $(-K, X_2, X_3)$  sind gleichorientiert (und dies gilt unabhängig vom Auswertungspunkt  $p \in S^3$  und von der Wahl von  $(f_1, f_2)$ ). In diesem Fall erhalten wir (durch Betrachtung der Basiswechsellmatrizen)  $d\omega(b_1, b_2) = 2$ .

oder

2. Fall:  $(K, b_1, b_2)$  und  $(K, X_2, X_3)$  sind gleichorientiert (und dies gilt unabhängig vom Auswertungspunkt  $p \in S^3$  und von der Wahl von  $(f_1, f_2)$ ). In diesem Fall gilt  $d\omega(b_1, b_2) = -2$ .

Hierbei ist zu beachten, dass „Gleichorientiertheit“ unabhängig von der Wahl einer Orientierung auf  $S^3$  ist. Daraus folgt ii).  $\square$

**Bemerkung 6.5 (Orientierungskonvention für  $S^3$  und  $S^2$ )** Für den Rest dieser Arbeit wählen wir eine beliebige (aber feste) Orientierung auf  $S^2$  und versehen  $S^3$  mit der Orientierung, für die gilt: Ist  $(f_1, f_2)$  ein beliebiger positiv orientierter lokaler Orthonormalrahmen auf  $(S^2, g_{FS})$ , so ist  $(K, b_1, b_2)$  ein positiv orientierter lokaler Orthonormalrahmen auf  $(S^3, g_{S^3})$ . Dann ist

$$a := d\omega(b_1, b_2) \equiv \pm 2,$$

unabhängig von der Wahl des positiv orientierten lokalen Orthonormalrahmens  $(f_1, f_2)$ . (Da wir die Orientierung auf  $S^2$  fixiert haben, ist  $a$  eine feste Zahl.)

In Bemerkung 6.16 gehen wir darauf ein, was passiert, wenn wir die Orientierungskonvention ändern und  $(-K, b_1, b_2)$  als positiv orientiert wählen. Dabei sei schon angemerkt, dass die Wahl der Orientierungen keine wirkliche Einschränkung darstellt und nur in Form eines Vorzeichens eine Rolle spielt.

**Bemerkung 6.6 (Notation für Rahmen)** Sei  $(g_t)_{t \in I}$  wie in (6.1). Wir vereinbaren für den Rest dieser Arbeit folgende Notation:  $(f_1, f_2)$  bezeichnet einen beliebigen positiv orientierten lokalen Orthonormalrahmen auf  $(S^2, g_{FS})$  und mit  $b_i$  bezeichnen wir den horizontalen Lift von  $f_i$ ,  $i = 1, 2$ . Wir setzen

$$(e_0(t), e_1(t), e_2(t)) := \left( \frac{1}{\alpha(t)} K, \frac{1}{\beta(t)} b_1, \frac{1}{\beta(t)} b_2 \right),$$

und bemerken, dass  $(e_0(t), e_1(t), e_2(t))$  eine lokale positiv orientierte Orthonormalbasis von  $(S^3, g_t)$  ist (mit unserer Orientierungskonvention). Weiter sei

$$f_i(t) = \frac{1}{\beta(t)} f_i, \quad i = 1, 2.$$

Später benötigen wir folgende Proposition:

**Proposition 6.7** Für  $(g_t)_{t \in I}$  wie in (6.1) gilt

$$\begin{aligned}\dot{g}_t(e_0(t), e_0(t)) &= 2 \frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)}, \\ \dot{g}_t(e_1(t), e_1(t)) &= \dot{g}_t(e_2(t), e_2(t)) = 2 \frac{\beta'(t)}{\beta(t)}, \\ \dot{g}_t(e_0(t), e_1(t)) &= \dot{g}_t(e_0(t), e_2(t)) = \dot{g}_t(e_1(t), e_2(t)) = 0, \\ \ddot{g}_t(e_0(t), e_0(t)) &= 2 \frac{\alpha''(t)}{\alpha(t)} + 2 \frac{\alpha'(t)^2}{\alpha(t)^2}, \\ \ddot{g}_t(e_1(t), e_1(t)) &= \ddot{g}_t(e_2(t), e_2(t)) = 2 \frac{\beta''(t)}{\beta(t)} + 2 \frac{\beta'(t)^2}{\beta(t)^2}, \\ \ddot{g}_t(e_0(t), e_1(t)) &= \ddot{g}_t(e_0(t), e_2(t)) = \ddot{g}_t(e_1(t), e_2(t)) = 0.\end{aligned}$$

Weiter gilt für die Weingartenabbildung  $W_t$  von  $(S^3, g_t)$  in  $(\mathcal{Z} = I \times S^3, g_{\mathcal{Z}} = dt^2 + g_t)$ :

$$W_t(K) = -\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)}K, \quad (6.2)$$

$$W_t(Y) = -\frac{\beta'(t)}{\beta(t)}Y, \quad (6.3)$$

für alle horizontalen Vektorfelder  $Y \in \Gamma(TS^3)$ .

*Beweis.* Wir berechnen

$$\begin{aligned}\dot{g}_t(e_0(t), e_0(t)) &= \frac{d}{ds} \Big|_{s=t} g_s(e_0(t), e_0(t)) \\ &= \frac{d}{ds} \Big|_{s=t} \frac{1}{\alpha(t)^2} \underbrace{g_s(K, K)}_{=\alpha(s)^2 g_{S^3}(K, K) = \alpha(s)^2} \\ &= \frac{1}{\alpha(t)^2} \frac{d}{ds} \Big|_{s=t} \alpha(s)^2 \\ &= \frac{1}{\alpha(t)^2} 2\alpha(t)\alpha'(t) \\ &= 2 \frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)}.\end{aligned}$$

Analog erhält man

$$\begin{aligned}\dot{g}_t(e_1(t), e_1(t)) &= \dot{g}_t(e_2(t), e_2(t)) = 2 \frac{\beta'(t)}{\beta(t)}, \\ \dot{g}_t(e_0(t), e_1(t)) &= \dot{g}_t(e_0(t), e_2(t)) = \dot{g}_t(e_1(t), e_2(t)) = 0.\end{aligned}$$

Für die zweiten Ableitungen berechnen wir

$$\begin{aligned}
\ddot{g}_t(e_0(t), e_0(t)) &= \frac{d^2}{ds^2} \Big|_{s=t} g_s(e_0(t), e_0(t)) \\
&= \frac{d^2}{ds^2} \Big|_{s=t} \frac{1}{\alpha(t)^2} g_s(K, K) \\
&= \frac{1}{\alpha(t)^2} \frac{d^2}{ds^2} \Big|_{s=t} \alpha(s)^2 \\
&= \frac{1}{\alpha(t)^2} 2(\alpha''(t)\alpha(t) + \alpha'(t)^2) \\
&= 2\frac{\alpha''(t)}{\alpha(t)} + 2\frac{\alpha'(t)^2}{\alpha(t)^2}
\end{aligned}$$

und analog

$$\begin{aligned}
\ddot{g}_t(e_1(t), e_1(t)) &= \ddot{g}_t(e_2(t), e_2(t)) = 2\frac{\beta''(t)}{\beta(t)} + 2\frac{\beta'(t)^2}{\beta(t)^2}, \\
\ddot{g}_t(e_0(t), e_1(t)) &= \ddot{g}_t(e_0(t), e_2(t)) = \ddot{g}_t(e_1(t), e_2(t)) = 0.
\end{aligned}$$

Die Aussagen über die Weingartenabbildungen  $W_t$  folgen aus (4.5) □

Für das nächste Lemma erinnern wir daran, dass wir den horizontalen Lift eines Vektorfeldes  $X$  mit  $X^*$  bezeichnen.

**Lemma 6.8** *Bezeichnen wir mit  $\nabla^t$  die Levi-Civita-Ableitung von  $(S^3, g_t)$  und  $(S^2, \beta(t)^2 g_{FS})$ , so gilt*

$$\begin{aligned}
\nabla_{e_0(t)}^t e_0(t) &= 0, & \nabla_{e_1(t)}^t e_2(t) &= -\frac{1}{2} \frac{\alpha(t)}{\beta(t)^2} a e_0(t) + \left( \nabla_{f_1(t)}^t f_2(t) \right)^*, \\
\nabla_{e_0(t)}^t e_1(t) &= \frac{1}{2} \frac{\alpha(t)}{\beta(t)^2} a e_2(t), & \nabla_{e_2(t)}^t e_1(t) &= \frac{1}{2} \frac{\alpha(t)}{\beta(t)^2} a e_0(t) + \left( \nabla_{f_2(t)}^t f_1(t) \right)^*, \\
\nabla_{e_0(t)}^t e_2(t) &= -\frac{1}{2} \frac{\alpha(t)}{\beta(t)^2} a e_1(t), & \nabla_{e_2(t)}^t e_0(t) &= -\frac{1}{2} \frac{\alpha(t)}{\beta(t)^2} a e_1(t), \\
\nabla_{e_1(t)}^t e_0(t) &= \frac{1}{2} \frac{\alpha(t)}{\beta(t)^2} a e_2(t), & \nabla_{e_2(t)}^t e_2(t) &= \left( \nabla_{f_2(t)}^t f_2(t) \right)^*, \\
\nabla_{e_1(t)}^t e_1(t) &= \left( \nabla_{f_1(t)}^t f_1(t) \right)^*.
\end{aligned}$$

*Beweis.* Für den Beweis sei  $t \in I$  beliebig aber fest gewählt. Sei  $R_{e^{is}}(p) = p \cdot e^{is}$  für alle  $p \in S^3$ ,  $s \in \mathbb{R}$ . Dann gilt für  $j = 1, 2$ :

$$\begin{aligned}
[K, e_j(t)](p) &= \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \underbrace{(dR_{e^{-is}})_{p \cdot e^{is}} (e_j(p \cdot e^{is}))}_{=e_j(p \cdot e^{is} \cdot e^{-is})=e_j(p)} \\
&= \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} e_j(p) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Dabei haben wir verwendet, dass  $e_j(t)$  als horizontaler Lift rechtsinvariant ist, siehe Satz 1.66. Insbesondere folgt  $[e_0(t), e_j(t)] = 0$ .

Die Christoffelsymbole  $\Gamma_{ij}^k(t)$  und  $\tilde{\Gamma}_{ij}^k(t)$  sind definiert durch

$$\begin{aligned}\nabla_{f_i(t)}^t f_j(t) &= \sum_{k=1}^2 \Gamma_{ij}^k(t) f_k(t), & i, j &= 1, 2, \\ \nabla_{e_i(t)}^t e_j(t) &= \sum_{k=0}^2 \tilde{\Gamma}_{ij}^k(t) e_k(t), & i, j &= 0, 1, 2.\end{aligned}$$

Die Koszul-Formel liefert

$$\begin{aligned}2\tilde{\Gamma}_{ij}^k(t) &= 2g_t(\nabla_{e_i(t)}^t e_j(t), e_k(t)) \\ &= g_t([e_i(t), e_j(t)], e_k(t)) + g_t([e_k(t), e_i(t)], e_j(t)) - g_t([e_j(t), e_k(t)], e_i(t)).\end{aligned}$$

Für den Rest des Beweises seien  $i, j, k \in \{1, 2\}$ . Dann gilt

$$\begin{aligned}2\tilde{\Gamma}_{0i}^j(t) &= g_t(\underbrace{[e_0(t), e_i(t)]}_{=0}, e_j(t)) + g_t(\underbrace{[e_j(t), e_0(t)]}_{=0}, e_i(t)) - g_t([e_i(t), e_j(t)], e_0(t)) \\ &= -\alpha(t)g_t([e_i(t), e_j(t)], e_0(t))\omega(e_0(t)) \\ &= -\alpha(t)\omega(\text{pr}_{\text{vert}}([e_i(t), e_j(t)])) \\ &= -\alpha(t)\omega([e_i(t), e_j(t)]) \\ &= \alpha(t)d\omega(e_i(t), e_j(t)) \\ &= \frac{\alpha(t)}{\beta(t)^2}d\omega(b_i, b_j).\end{aligned}$$

Damit erhält man

$$-\tilde{\Gamma}_{ij}^0(t) = \tilde{\Gamma}_{i0}^j(t) = \tilde{\Gamma}_{0i}^j(t) = \frac{1}{2} \frac{\alpha(t)}{\beta(t)^2} d\omega(b_i, b_j).$$

Genauso erhält man aus der Koszul-Formel

$$\tilde{\Gamma}_{00}^i(t) = \tilde{\Gamma}_{i0}^0(t) = \tilde{\Gamma}_{0i}^0(t) = \tilde{\Gamma}_{00}^0(t) = 0.$$

Mit Satz 1.66 folgt

$$\begin{aligned}\sum_{l=1}^2 g_t([e_i(t), e_j(t)], e_l(t))e_l(t) &= \text{pr}_{\text{hor}}([e_i(t), e_j(t)]) \\ &= [f_i(t), f_j(t)]^* \\ &= \left( \sum_{l=1}^2 \beta(t)^2 g_{FS}([f_i(t), f_j(t)], f_l(t)) f_l(t) \right)^* \\ &= \sum_{l=1}^2 \left( \beta(t)^2 g_{FS}([f_i(t), f_j(t)], f_l(t)) \circ \pi \right) e_l(t).\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^k(t) = \Gamma_{ij}^k(t) \circ \pi.$$

Die Aussage des Lemmas folgt nun durch einfaches Ausrechnen.  $\square$

Das nächste Lemma liefert uns wichtige Aussagen über Krümmungen im verallgemeinerten Zylinder, den wir bezüglich der in (6.1) angegebenen Einparameterfamilie von Riemannschen Metriken bilden.

Als Spinstruktur auf dem Zylinder wählen wir die von der Spinstruktur auf  $(S^3, g_0)$  induzierte Spinstruktur. (Auf  $(S^3, g_{S^3})$  existiert eine Spinstruktur nach Abschnitt 2.2. Damit existiert wegen der Bemerkung nach Satz 3.3 auch auf  $(S^3, g_0)$  eine Spinstruktur. Diese ist eindeutig (bis auf Äquivalenz), da  $S^3$  einfach zusammenhängend ist, siehe Satz 1.44. Deshalb sprechen wir von *der* Spinstruktur auf  $(S^3, g_0)$ .)

**Lemma 6.9** *Für alle  $\varphi \in \Gamma(\Sigma^+ \mathcal{Z})$  und alle horizontalen Vektorfelder  $Y \in \Gamma(TS^3)$  gilt*

$$R^{\Sigma^+ \mathcal{Z}}(\nu, K)\varphi = \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha''(t)}{\alpha(t)} + \frac{\alpha'(t)}{\beta(t)^2} a - \frac{\alpha(t)\beta'(t)}{\beta(t)^3} a \right) \nu \cdot K \cdot \varphi \quad (6.4)$$

$$R^{\Sigma^+ \mathcal{Z}}(\nu, Y)\varphi = \frac{1}{2} \left( \frac{\beta''(t)}{\beta(t)} - \frac{1}{2} \frac{\alpha'(t)}{\beta(t)^2} a + \frac{1}{2} \frac{\alpha(t)\beta'(t)}{\beta(t)^3} a \right) \nu \cdot Y \cdot \varphi \quad (6.5)$$

*Beweis.* Wir berechnen die Krümmungen mit Hilfe von Lemma 1.61. Als lokale Orthonormalbasis von  $\mathcal{Z}$  wählen wir  $(\nu, e_0, e_1, e_2)$ , wobei

$$e_i(t, p) = e_i(t)(p), \quad i = 0, 1, 2.$$

Für den Beweis verwenden wir die abkürzende Schreibweise

$$R_{X,Y,Z,W} := g_{\mathcal{Z}}(R^{\mathcal{Z}}(X, Y)Z, W).$$

Weiter nutzen wir die Tensorialität von  $R_{X,Y,Z,W}$ , d.h. wollen wir z.B.  $R_{\nu, e_0, e_1, e_2}(t, p)$  berechnen, reicht es,  $R_{\nu(t,p), e_0(t,p), e_1(t,p), e_2(t,p)}$  zu berechnen. Das hat folgenden Vorteil: Die  $e_i$ ,  $i = 0, 1, 2$ , sind lokale Vektorfelder auf  $\mathcal{Z}$ , aber  $e_i(t, p)$  sind Tangentialvektoren auf  $S^3$ , d.h. wir können die Gleichungen (4.6)-(4.7) verwenden. Für den Rest des Beweises wählen wir also  $(t, p)$  beliebig, aber fest und meinen mit  $e_i$  den Tangentialvektor  $e_i(t, p)$ . Wir berechnen

$$\begin{aligned} R_{\nu, e_0, e_0, e_1} &= -R_{e_0, e_1, e_0, \nu} \\ &= -\frac{1}{2} \left( \left( \nabla_{e_1}^t \dot{g}_t \right) (e_0, e_0) - \left( \nabla_{e_0}^t \dot{g}_t \right) (e_1, e_0) \right) \\ &= -\frac{1}{2} \left( L_{e_1} (\dot{g}_t(e_0, e_0)) - 2\dot{g}_t(\nabla_{e_1}^t e_0, e_0) \right. \\ &\quad \left. - L_{e_0} (\dot{g}_t(e_1, e_0)) + \dot{g}_t(\nabla_{e_0}^t e_1, e_0) + \dot{g}_t(e_1, \nabla_{e_0}^t e_0) \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Dabei sind die Terme der Form  $\dot{g}_t(\cdot, \cdot)$  Null wegen Proposition 6.7 und Lemma 6.8. Die Terme mit den Lieableitungen sind Null, da  $\dot{g}_t(e_i, e_j)$  konstant ist als Funktion in  $p \in S^3$  und die Lieableitung als Lieableitung von Funktionen auf  $S^3$  zu verstehen ist. Analoge Rechnungen liefern

$$R_{\nu, e_0, e_0, e_2} = R_{\nu, e_0, \nu, e_1} = R_{\nu, e_0, \nu, e_2} = 0.$$

Weiter ist

$$\begin{aligned}
R_{\nu, e_0, \nu, e_0} &= -R_{e_0, \nu, \nu, e_0} \\
&= \frac{1}{2}(\ddot{g}_t(e_0, e_0) + \dot{g}_t(\underbrace{W_t(e_0)}_{= -\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)}e_0}, e_0)) \\
&= \frac{1}{2}\left(2\frac{\alpha''(t)}{\alpha(t)} + 2\frac{\alpha'(t)^2}{\alpha(t)^2} - \frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)}2\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)}\right) \\
&= \frac{\alpha''(t)}{\alpha(t)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{\nu, e_0, e_1, e_2} &= -R_{e_1, e_2, e_0, \nu} \\
&= -\frac{1}{2}\left((\nabla_{e_2}^t \dot{g}_t)(e_1, e_0) - (\nabla_{e_1}^t \dot{g}_t)(e_2, e_0)\right) \\
&= -\frac{1}{2}\left(-\dot{g}_t(\nabla_{e_2}^t e_1, e_0) - \dot{g}_t(e_1, \nabla_{e_2}^t e_0) + \dot{g}_t(\nabla_{e_1}^t e_2, e_0) + \dot{g}_t(e_2, \nabla_{e_1}^t e_0)\right) \\
&\stackrel{*}{=} -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\frac{\alpha(t)}{\beta(t)^2}a \cdot 2\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)} - \frac{1}{2}\frac{\alpha(t)}{\beta(t)^2}a \cdot 2\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)}\right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2}\frac{\alpha(t)}{\beta(t)^2}a \cdot 2\frac{\beta'(t)}{\beta(t)} + \frac{1}{2}\frac{\alpha(t)}{\beta(t)^2}a \cdot 2\frac{\beta'(t)}{\beta(t)}\right) \\
&= \frac{\alpha'(t)}{\beta(t)^2}a - \frac{\alpha(t)\beta'(t)}{\beta(t)^3}a,
\end{aligned}$$

wobei in \* zu beachten ist, dass  $\dot{g}_t((\nabla_{f_2(t)}^t f_1(t))^*, e_0) = \dot{g}_t((\nabla_{f_1(t)}^t f_2(t))^*, e_0) = 0$ , da man die horizontalen Lifts immer als Summe von  $e_1$  und  $e_2$  schreiben kann.

Schließlich wenden wir Lemma 1.61 an und erhalten

$$\begin{aligned}
R^{\Sigma^+ \mathcal{Z}}(\nu, e_0)\varphi &= \frac{1}{2}(R_{\nu, e_0, \nu, e_0}\nu \cdot e_0 \cdot \varphi + R_{\nu, e_0, e_1, e_2}e_1 \cdot e_2 \cdot \varphi) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha''(t)}{\alpha(t)}\nu \cdot e_0 \cdot \varphi + \left(\frac{\alpha'(t)}{\beta(t)^2}a - \frac{\alpha(t)\beta'(t)}{\beta(t)^3}a\right)\underbrace{e_1 \cdot e_2 \cdot \varphi}_{=\nu \cdot e_0 \cdot \varphi}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha''(t)}{\alpha(t)} + \frac{\alpha'(t)}{\beta(t)^2}a - \frac{\alpha(t)\beta'(t)}{\beta(t)^3}a\right)\nu \cdot e_0 \cdot \varphi,
\end{aligned}$$

woraus sofort (6.4) folgt. Dabei folgt  $e_1 \cdot e_2 \cdot \varphi = \nu \cdot e_0 \cdot \varphi$  aus Proposition 1.54, denn diese liefert  $\nu \cdot e_0 \cdot e_1 \cdot e_2 \cdot \varphi = -\varphi$ .

Um  $R^{\Sigma^+ \mathcal{Z}}(\nu, Y)\varphi$  für ein horizontales Vektorfeld  $Y \in \Gamma(TS^3)$  zu berechnen, berechnen wir  $R^{\Sigma^+ \mathcal{Z}}(\nu, e_1)\varphi$  und  $R^{\Sigma^+ \mathcal{Z}}(\nu, e_2)\varphi$ . Mit den gleichen Argumenten wie bisher zeigt man

$$R_{\nu, e_1, \nu, e_0} = R_{\nu, e_1, \nu, e_2} = R_{\nu, e_1, e_0, e_1} = 0,$$

sowie

$$R_{\nu, e_1, \nu, e_1} = \frac{\beta''(t)}{\beta(t)}.$$

Die nächste Rechnung ist etwas länger, deshalb schreiben wir sie nochmal explizit auf:

$$\begin{aligned}
R_{\nu, e_1, e_0, e_2} &= -R_{e_0, e_2, e_1, \nu} \\
&= -\frac{1}{2} \left( (\nabla_{e_2}^t \dot{g}_t)(e_0, e_1) - (\nabla_{e_0}^t \dot{g}_t)(e_2, e_1) \right) \\
&= -\frac{1}{2} \left( -\dot{g}_t(\nabla_{e_2}^t e_0, e_1) - \dot{g}_t(e_0, \nabla_{e_2}^t e_1) + \dot{g}_t(\nabla_{e_0}^t e_2, e_1) + \dot{g}_t(e_2, \nabla_{e_0}^t e_1) \right) \\
&= -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \frac{\alpha(t)}{\beta(t)^2} a \cdot 2 \frac{\beta'(t)}{\beta(t)} - \frac{1}{2} \frac{\alpha(t)}{\beta(t)^2} a \cdot 2 \frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \frac{\alpha(t)}{\beta(t)^2} a \cdot 2 \frac{\beta'(t)}{\beta(t)} + \frac{1}{2} \frac{\alpha(t)}{\beta(t)^2} a \cdot 2 \frac{\beta'(t)}{\beta(t)} \right) \\
&= \frac{1}{2} \frac{\alpha'(t)}{\beta(t)^2} a - \frac{1}{2} \frac{\alpha(t)\beta'(t)}{\beta(t)^3} a.
\end{aligned}$$

Weiter ist

$$\begin{aligned}
R_{\nu, e_1, e_1, e_2} &= -R_{e_1, e_2, e_1, \nu} \\
&= -\frac{1}{2} \left( (\nabla_{e_2}^t \dot{g}_t)(e_1, e_1) - (\nabla_{e_1}^t \dot{g}_t)(e_2, e_1) \right) \\
&= -\frac{1}{2} \left( -2\dot{g}_t(\nabla_{e_2}^t e_1, e_1) + \dot{g}_t(\nabla_{e_1}^t e_2, e_1) + \dot{g}_t(e_2, \nabla_{e_1}^t e_1) \right) \\
&= -\frac{1}{2} \left( -2\dot{g}_t((\nabla_{f_2(t)}^t f_1(t))^*, e_1) + \dot{g}_t((\nabla_{f_1(t)}^t f_2(t))^*, e_1) + \dot{g}_t(e_2, (\nabla_{f_1(t)}^t f_1(t))^*) \right) \\
&\stackrel{*}{=} 0,
\end{aligned}$$

dabei sehen wir die Gleichheit \* wie folgt ein: Sei zunächst  $\nabla_{f_i(t)}^t f_j(t) = \sum_{k=1}^2 \Gamma_{ij}^k(t) f_k(t)$ , wobei hier  $\nabla^t$  die Levi-Civita-Ableitung von  $\beta(t)^2 g_{FS}$  bezeichnet. Um die Notation etwas zu vereinfachen, sei  $\langle \cdot, \cdot \rangle := \beta(t)^2 g_{FS}(\cdot, \cdot)$ . (Erinnerung:  $t$  ist für den ganzen Beweis fest gewählt.) Die Koszul-Formel liefert

$$\begin{aligned}
2\Gamma_{ij}^k(t) &= 2\langle \nabla_{f_i(t)}^t f_j(t), f_k \rangle \\
&= \langle [f_i(t) f_j(t)], f_k(t) \rangle + \langle [f_k(t) f_i(t)], f_j(t) \rangle - \langle [f_j(t) f_k(t)], f_i(t) \rangle,
\end{aligned}$$

woraus folgt:

$$\Gamma_{11}^1(t) = \Gamma_{12}^2(t) = \Gamma_{21}^1(t) = \Gamma_{22}^2(t) = 0, \quad \Gamma_{11}^2(t) = -\Gamma_{12}^1(t), \quad \Gamma_{21}^2(t) = -\Gamma_{22}^1(t). \quad (6.6)$$

Schließlich ist

$$(\nabla_{f_i(t)}^t f_j(t))^* = \left( \sum_{k=1}^2 \Gamma_{ij}^k(t) f_k(t) \right)^* = \sum_{k=1}^2 (\Gamma_{ij}^k(t) \circ \pi) e_k \quad (6.7)$$

und wir berechnen

$$\begin{aligned}
&-2\dot{g}_t((\nabla_{f_2(t)}^t f_1(t))^*, e_1) + \dot{g}_t((\nabla_{f_1(t)}^t f_2(t))^*, e_1) + \dot{g}_t(e_2, (\nabla_{f_1(t)}^t f_1(t))^*) \\
&= -2\dot{g}_t(\underbrace{(\Gamma_{21}^1(t) \circ \pi)}_{=0} e_1, e_1) + \dot{g}_t(\underbrace{(\Gamma_{12}^2(t) \circ \pi)}_{=-\Gamma_{11}^2(t)} e_1, e_1) + \dot{g}_t((\Gamma_{11}^2(t) \circ \pi) e_2, e_2) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

was genau die Gleichheit \* ist.

Wir erhalten

$$\begin{aligned} R^{\Sigma^+ \mathcal{Z}}(\nu, e_1)\varphi &= \frac{1}{2} (R_{\nu, e_1, \nu, e_1} \nu \cdot e_1 \cdot \varphi + R_{\nu, e_1, e_0, e_2} e_0 \cdot e_2 \cdot \varphi) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\beta''(t)}{\beta(t)} \nu \cdot e_1 \cdot \varphi + \left( \frac{1}{2} \frac{\alpha'(t)}{\beta(t)^2} a - \frac{1}{2} \frac{\alpha(t)\beta'(t)}{\beta(t)^3} a \right) \underbrace{e_0 \cdot e_2 \cdot \varphi}_{=-\nu \cdot e_1 \cdot \varphi} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\beta''(t)}{\beta(t)} - \frac{1}{2} \frac{\alpha'(t)}{\beta(t)^2} a + \frac{1}{2} \frac{\alpha(t)\beta'(t)}{\beta(t)^3} a \right) \nu \cdot e_1 \cdot \varphi \end{aligned}$$

Ganz analog berechnet man (man verwendet ganz genau die bisherigen Methoden, es kommt nichts Neues hinzu)

$$R^{\Sigma^+ \mathcal{Z}}(\nu, e_2)\varphi = \frac{1}{2} \left( \frac{\beta''(t)}{\beta(t)} - \frac{1}{2} \frac{\alpha'(t)}{\beta(t)^2} a + \frac{1}{2} \frac{\alpha(t)\beta'(t)}{\beta(t)^3} a \right) \nu \cdot e_2 \cdot \varphi$$

und wir erhalten (6.5). □

## 6.2 $S^1$ -invariante Spinoren

Wir werden den Spinorfluss unter anderem für sogenannte  $S^1$ -invariante Spinoren betrachten, welche in diesem Abschnitt eingeführt werden. Details findet man in [1].

Die Hauptfaserbündel-Wirkung von  $S^1$  auf  $S^3$  induziert eine Wirkung von  $S^1$  auf  $SO(S^3, g_t)$ , wobei  $g_t$  wie in (6.1) ist (und  $t \in I$  fest gewählt). Ziel ist es, diese Wirkung zu einer (glatten) Wirkung von  $S^1$  auf  $(\text{Spin}(S^3, g_t), \eta)$  zu liften<sup>11</sup>, d.h. wir wollen ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \text{Spin}(S^3, g_t) \times S^1 & \longrightarrow & \text{Spin}(S^3, g_t) \\ \downarrow \eta \times \text{id} & & \downarrow \eta \\ \text{SO}(S^3, g_t) \times S^1 & \longrightarrow & \text{SO}(S^3, g_t) \end{array}$$

wobei die horizontalen Abbildungen die jeweiligen Wirkungen sind. Gibt es so einen Lift, sagen wir, dass die Spinstruktur  $\text{Spin}(S^3, g_t)$  *projizierbar* ist. Aus Satz 2.4 folgt, dass der Lift eindeutig ist, sofern er existiert, d.h. dass es höchstens eine Wirkung von  $S^1$  auf  $\text{Spin}(S^3, g_t)$  gibt, die obiges Diagramm kommutativ macht. (Dabei ist zu beachten, dass  $\text{Spin}(S^3, g_t)$  und  $\text{SO}(S^3, g_t)$  zusammenhängend sind, da  $\text{Spin}(S^3, g_t) \cong S^3 \times \text{Spin}(3)$  und  $\text{SO}(S^3, g_t) \cong S^3 \times \text{SO}(3, \mathbb{R})$  nach Beispiel 1.42.) Wir definieren mit Hilfe der Riemannschen Submersion  $\pi: (S^3, g_t) \rightarrow (S^2, \beta(t)^2 g_{FS})$  eine projizierbare Spinstruktur auf  $(S^3, g_t)$ . Das reicht, da es nur eine Spinstruktur auf  $(S^3, g_t)$  gibt.

Wir setzen

$$\text{Spin}(S^3, g_t) := \pi^*(\text{Spin}(S^2, \beta(t)^2 g_{FS})) \times_{\text{Spin}(2)} \text{Spin}(3)$$

und definieren

$$\eta: \text{Spin}(S^3, g_t) \rightarrow \pi^*(\text{SO}(S^2, \beta(t)^2 g_{FS})) \times_{\text{SO}(2, \mathbb{R})} \text{SO}(3, \mathbb{R}) = \text{SO}(S^3, g_t)$$

<sup>11</sup>Bis auf Äquivalenz gibt es genau eine Spinstruktur auf  $(S^3, g_t)$ , siehe Satz 1.44 und die Bemerkung nach Satz 3.3.

durch

$$\eta([(x, \sigma), g]) = [x, \tilde{\eta}(\sigma), \text{Ad}(g)].$$

Dabei ist  $(\text{Spin}(S^2, \beta(t)^2 g_{FS}), \tilde{\eta})$  die Spinstruktur auf  $(S^2, \beta(t)^2 g_{FS})$ ,  $(x, \sigma) \in \pi^*(\text{Spin}(S^2, \beta(t)^2 g_{FS})) \subset S^3 \times \text{Spin}(S^2, \beta(t)^2 g_{FS})$ ,  $g \in \text{Spin}(3)$ . Die Erweiterungen werden entlang der Abbildungen  $F$  und  $j$  aus dem Beginn des Beweises von Lemma 2.5 gebildet. Die Identifikation  $\pi^*(\text{SO}(S^2, \beta(t)^2 g_{FS})) \times_{\text{SO}(2, \mathbb{R})} \text{SO}(3, \mathbb{R}) = \text{SO}(S^3, g_t)$  ergibt sich aus dem Isomorphismus

$$\begin{aligned} \pi^*(\text{SO}(S^2, \beta(t)^2 g_{FS})) \times_{\text{SO}(2, \mathbb{R})} \text{SO}(3, \mathbb{R}) &\rightarrow \text{SO}(S^3, g_t), \\ [(x, v_1, v_2), A] &\mapsto \left(\frac{1}{\alpha(t)} K(x), v_1^*, v_2^*\right) \cdot A. \end{aligned}$$

Den Isomorphismus erhält man mit Hilfe von Satz 2.2.

Nun definieren wir eine  $S^1$ -Wirkung auf  $\text{Spin}(S^3, g_t)$  durch

$$[(x, \sigma), g] \cdot e^{is} := [(x \cdot e^{is}, \sigma), g]$$

(wobei  $x \cdot e^{is}$  die Hauptfaserbündelwirkung von  $e^{is} \in S^1 \subset \mathbb{C}$  auf  $x \in S^3$  ist). Diese Wirkung ist ein Lift der Wirkung von  $S^1$  auf  $\text{SO}(S^3, g_t)$  und damit ist die Spinstruktur auf  $(S^3, g_t)$  projizierbar.

Durch Wirkung in der ersten Komponente erhalten wir eine  $S^1$ -Wirkung auf  $\Sigma(S^3, g_t)$ . Wir nennen einen Spinor  $\varphi \in \Gamma(\Sigma(S^3, g_t))$   $S^1$ -invariant, falls

$$\varphi(x \cdot e^{is}) = \varphi(x) \cdot e^{is}$$

für alle  $x \in S^3$  und alle  $s \in \mathbb{R}$  gilt. Mit  $V_0(t) \subset \Gamma(\Sigma(S^3, g_t))$  bezeichnen wir die Menge der  $S^1$ -invarianten Spinoren. Für einen  $S^1$ -invarianten Spinor  $\varphi \in V_0(t)$  gilt

$$\nabla_K^t \varphi = \frac{1}{4} \frac{\alpha(t)}{\beta(t)^2} aK \cdot_t \varphi, \quad (6.8)$$

siehe [1, Lemma 4.3]<sup>12</sup>. Für jedes  $t \in I$  gibt es einen Isomorphismus von Vektorräumen

$$Q_0(t): \Gamma(\Sigma(S^2, \beta(t)^2 g_{FS})) \rightarrow V_0(t),$$

so dass für jedes Vektorfeld  $X \in \Gamma(TS^2)$  und jeden Spinor  $\sigma \in \Gamma(\Sigma(S^2, \beta(t)^2 g_{FS}))$  gilt

$$\nabla_{X^*}^t Q_0(\sigma) = Q_0(\nabla_X^t \sigma) - \frac{1}{4} \frac{\alpha(t)}{\beta(t)^2} aX^* \cdot_t Q_0(\sigma), \quad (6.9)$$

$$Q_0(X \cdot_t \sigma) = X^* \cdot_t Q_0(\sigma), \quad (6.10)$$

vergleiche [1, Lemma 4.4]. (In [1] müssen Spinoren nicht notwendigerweise glatt sein. Unser Isomorphismus  $Q_0(t)$  ist die Homothetie von Hilberträumen  $Q_0$  aus [1], eingeschränkt auf die glatten Spinoren.) Dabei bezeichnet  $\nabla^t$  die spinorielle Levi-Civita-Ableitung auf  $\Sigma(S^3, g_t)$  bzw.  $\Sigma(S^2, \beta(t)^2 g_{FS})$  und „ $\cdot_t$ “ ist die Clifford-Multiplikation in den betreffenden Spinorbündeln.

<sup>12</sup>Um (6.8) aus [1, Lemma 4.3] zu erhalten, verwenden wir Proposition 1.54.

### 6.3 Kollaps der Berger-Sphären unter dem Spinorfluss

Ziel dieses Abschnitts ist der Beweis des folgenden Theorems, welches die Vermutung 1 (siehe Beginn Kapitel 6) für die Berger-Sphären zeigt. (Für die Formulierung des Theorems erinnern wir an Bemerkung 6.5.)

**Theorem 6.10** *Sei  $M = S^3$ ,  $\varepsilon > 0$  und  $\lambda \in \{\pm 1\}$ . Als Anfangswert  $(g_0, \varphi_0)$  wählen wir  $g_0 = g^\varepsilon$  und einen Spinor  $\varphi_0 \in \Gamma(\Sigma(S^3, g^\varepsilon))$ , so dass  $|\varphi_0| = 1$  und*

$$\nabla_K^{\Sigma(S^3, g^\varepsilon)} \varphi_0 = \frac{1}{4} \varepsilon a K \cdot \varphi_0, \quad (6.11)$$

$$\nabla_Y^{\Sigma(S^3, g^\varepsilon)} \varphi_0 = (\lambda - \frac{1}{4} \varepsilon a) Y \cdot \varphi_0, \quad (6.12)$$

für alle horizontalen Vektorfelder  $Y \in \Gamma(TS^3)$ .

Dann ist die Lösung des Spinorflusses gegeben durch  $(g_t, \varphi_t)_{t \in I}$ ,  $I = [0, t_{max})$ ,  $t_{max}$  maximale Existenzzeit nach rechts, mit

$$g_t(X_1 + Y_1, X_2 + Y_2) = g_{S^3}(\alpha(t)X_1 + \beta(t)Y_1, \alpha(t)X_2 + \beta(t)Y_2)$$

für  $t \in I$ ,  $X_i \in \ker(d\pi_p)$ ,  $Y_i \in (\ker(d\pi_p))^\perp$  und glatte Funktionen  $\alpha, \beta: I \rightarrow (0, \infty)$  mit  $\alpha(0) = \varepsilon$  und  $\beta(0) = 1$  ( $g_{S^3}$  bezeichnet die Standardmetrik auf  $S^3$ ), sowie

$$\varphi_t(p) = \varphi(t, p) = \mathcal{P}_{0,t}(p)(\varphi_0(p)) \in \Sigma^+ \mathcal{Z},$$

wobei  $\mathcal{P}_{0,t}(p)$  die Parallelverschiebung in  $\Sigma^+ \mathcal{Z}$  bezüglich  $\nabla^{\Sigma^+ \mathcal{Z}}$  entlang  $\gamma_p(s) = (s, p)$ ,  $s \in I$ , von  $\gamma_p(0)$  nach  $\gamma_p(t)$  bezeichnet. Es erfüllt  $(g_t, \varphi_t)$  für jedes  $t \in I$  die Gleichungen (6.13)-(6.14).

Falls  $a\lambda = 2$  ist, gilt:

Für  $0 < \varepsilon < \frac{2}{3}$  gilt  $t_{max} = \infty$  und

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \beta(t) =: \beta_\infty > 0.$$

Für  $\varepsilon \geq \frac{2}{3}$  gilt

$$\lim_{t \rightarrow t_{max}} \alpha(t) = \lim_{t \rightarrow t_{max}} \beta(t) = 0.$$

Für  $\varepsilon = \frac{2}{3}$  ist  $t_{max} = 12$  und die Lösung ist gegeben durch

$$\alpha(t) = \frac{2}{3} \beta(t), \quad \beta(t) = \frac{1}{6} \sqrt{36 - 3t}.$$

Für  $\varepsilon = 1$  gilt  $t_{max} = 16$  und die Lösung ist gegeben durch

$$\alpha(t) = \beta(t) = \frac{1}{4} \sqrt{16 - t}.$$

Falls  $a\lambda = -2$  ist, gilt:

Für jedes  $\varepsilon > 0$  gilt  $t_{max} = \infty$  und

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \beta(t) =: \beta_\infty > 0.$$

**Bemerkung 6.11**

- i) Die Motivation für  $\varphi_0$  in Theorem 6.10 sind  $S^1$ -invariante Spinoren, „die von  $\lambda$ -Killing-Spinoren auf  $(S^2, g_{FS})$  kommen“. (So stellen wir auch die Existenz von  $\varphi_0$  sicher, siehe Lemma 6.12.)
- ii) Im Fall  $a\lambda = 2$  bedeutet das Ergebnis: Wenn die Fasern kurz genug sind ( $\varepsilon < \frac{2}{3}$ ), so kollabiert die  $S^1$ -Faser ( $\alpha \rightarrow 0$ ), das Faserkomplement aber nicht ( $\beta \rightarrow \beta_\infty > 0$ ). In diesem Sinn kollabiert das  $S^1$ -Hauptfaserbündel  $\pi: S^3 \rightarrow S^2$  gegen seine Basis  $S^2$ .  
Werden die Fasern zu lang ( $\varepsilon \geq \frac{2}{3}$ ), kollabiert die  $S^3$  gegen einen Punkt ( $\alpha, \beta \rightarrow 0$ ).  
Im Fall  $a\lambda = -2$  kollabiert  $S^3$  unabhängig von der Faserlänge gegen  $S^2$ .

**Lemma 6.12** *Zu jedem  $\lambda \in \{\pm 1\}$  gibt es einen Spinor  $\varphi_0 \in \Gamma(\Sigma(S^3, g^\varepsilon))$ , so dass  $|\varphi_0| = 1$  und*

$$\begin{aligned}\nabla_K^{\Sigma(S^3, g^\varepsilon)} \varphi_0 &= \frac{1}{4} \varepsilon a K \cdot \varphi_0, \\ \nabla_Y^{\Sigma(S^3, g^\varepsilon)} \varphi_0 &= (\lambda - \frac{1}{4} \varepsilon a) Y \cdot \varphi_0,\end{aligned}$$

für alle horizontalen Vektorfelder  $Y \in \Gamma(TS^3)$ .

*Beweis.* Sei  $\sigma$  ein  $\pm \frac{1}{2}$ -Killing-Spinor auf  $(S^2, g_{S^2})$ , wobei  $g_{S^2}$  die Standardmetrik auf  $S^2$  bezeichnet (für die Existenz von  $\sigma$  siehe etwa [9, Examples A.1.3]). Dann ist  $\sigma$  ein  $\pm 1$ -Killing-Spinor auf  $(S^2, \frac{1}{4} g_{S^2}) = (S^2, g_{FS})$  nach Bemerkung 1.59. Wir setzen

$$\varphi_0 := Q_0(0)(\sigma)$$

(siehe Abschnitt 6.2). Die Identitäten für  $\nabla^{\Sigma(S^3, g^\varepsilon)} \varphi_0$  folgen direkt aus den Gleichungen (6.8)-(6.10). Mit Hilfe von Lemma 1.60 ii) folgt  $L_K |\varphi_0|^2 = L_Y |\varphi_0|^2 = 0$ , d.h.  $|\varphi_0|$  ist konstant als Funktion in  $p \in S^3$ . Nach Reskalierung können wir also von  $|\varphi_0| = 1$  ausgehen.  $\square$

Wir führen nun die in Bemerkung 6.3 beschriebenen Schritte aus. Wir betrachten den verallgemeinerten Zylinder, den wir bezüglich der in (6.1) angegebenen Einparameterfamilie von Riemannschen Metriken bilden, wobei wir zusätzlich  $\alpha(0) = \varepsilon > 0$  und  $\beta(0) = 1$  annehmen. Als Spinstruktur auf dem verallgemeinerten Zylinder wählen wir die von der Spinstruktur auf  $(S^3, g_0)$  induzierte Spinstruktur.

Weiter sei im Folgenden stets

$$\varphi_t(p) := \varphi(t, p) := \mathcal{P}_{0,t}(p)(\varphi_0(p)) \in \Sigma^+ \mathcal{Z},$$

wobei  $\mathcal{P}_{0,t}(p)$  die Parallelverschiebung in  $\Sigma^+ \mathcal{Z}$  bezüglich  $\nabla^{\Sigma^+ \mathcal{Z}}$  entlang  $\gamma_p(s) = (s, p)$ ,  $s \in I$ , von  $\gamma_p(0)$  nach  $\gamma_p(t)$  bezeichnet. Dabei sei  $\varphi_0 \in \Gamma(\Sigma(S^3, g^\varepsilon))$  wie in Theorem 6.10 gewählt. Wir machen alle Identifizierungen aus Theorem 4.8, insbesondere ist  $\varphi_t \in \Gamma(\Sigma(S^3, g_t))$  und wir schreiben kurz

$$\nabla^t := \nabla^{\Sigma(S^3, g_t)}.$$

**Lemma 6.13** Für alle  $t \in I$  und alle horizontalen Vektorfelder  $Y \in \Gamma(TS^3)$  gilt

$$\nabla_K^t \varphi_t = \frac{1}{4} \frac{\alpha(t)}{\beta(t)^2} a K \cdot_t \varphi_t \quad (6.13)$$

$$\nabla_Y^t \varphi_t = \left( \frac{1}{\beta(t)} \lambda - \frac{1}{4} \frac{\alpha(t)}{\beta(t)^2} a \right) Y \cdot_t \varphi_t \quad (6.14)$$

*Beweis.* Nach (4.9) und Proposition 6.7 gilt für alle  $(t, x) \in \mathcal{Z}$

$$\begin{aligned} (\nabla_\nu^{\mathcal{Z}} e_0)(t, x) &= \left( 0, \frac{d}{ds} \Big|_{s=t} \frac{1}{\alpha(s)} K(x) \right) - W_t \left( \frac{1}{\alpha(t)} K(x) \right) \\ &= \left( 0, -\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)^2} K(x) \right) + \left( 0, \frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)^2} K(x) \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Weiter ist

$$[\nu, e_0](t, x) = -\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)} e_0(t, x)$$

für alle  $(t, x) \in \mathcal{Z}$  nach (4.8). Mit Theorem 4.8 und (6.4) berechnen wir

$$\begin{aligned} &\nabla_\nu^{\Sigma^+ \mathcal{Z}} \left( \nabla_{e_0(t)}^t \varphi_t - \frac{1}{4} \frac{\alpha(t)}{\beta(t)^2} a e_0(t) \cdot_t \varphi_t \right) \\ &= \nabla_\nu^{\Sigma^+ \mathcal{Z}} \left( \nabla_{e_0}^{\Sigma^+ \mathcal{Z}} \varphi + \frac{1}{2} \nu \cdot \underbrace{W_t(e_0(t))}_{=-\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)} e_0(t)} \cdot \varphi \right) - \frac{1}{4} a \nabla_\nu^{\Sigma^+ \mathcal{Z}} \left( \frac{\alpha(t)}{\beta(t)^2} \nu \cdot e_0 \cdot \varphi \right) \\ &\stackrel{*}{=} \nabla_\nu^{\Sigma^+ \mathcal{Z}} \nabla_{e_0}^{\Sigma^+ \mathcal{Z}} \varphi - \frac{1}{2} L_\nu \left( \frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)} \right) \nu \cdot e_0 \cdot \varphi - \frac{1}{4} a L_\nu \left( \frac{\alpha(t)}{\beta(t)^2} \right) \nu \cdot e_0 \cdot \varphi \\ &= R^{\Sigma^+ \mathcal{Z}}(\nu, e_0) \varphi + \nabla_{e_0}^{\Sigma^+ \mathcal{Z}} \underbrace{\nabla_\nu^{\Sigma^+ \mathcal{Z}} \varphi}_{=0} + \nabla_{[\nu, e_0]}^{\Sigma^+ \mathcal{Z}} \varphi - \left( \frac{1}{2} L_\nu \left( \frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)} \right) + \frac{1}{4} a L_\nu \left( \frac{\alpha(t)}{\beta(t)^2} \right) \right) \nu \cdot e_0 \cdot \varphi \\ &= -\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)} \nabla_{e_0}^{\Sigma^+ \mathcal{Z}} \varphi + R^{\Sigma^+ \mathcal{Z}}(\nu, e_0) \varphi - \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)} \right)' + \frac{1}{4} a \left( \frac{\alpha(t)}{\beta(t)^2} \right)' \right) \nu \cdot e_0 \cdot \varphi \\ &= -\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)} \nabla_{e_0}^{\Sigma^+ \mathcal{Z}} \varphi + \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha''(t)}{\alpha(t)} + \frac{\alpha'(t)}{\beta(t)^2} a - \frac{\alpha(t) \beta'(t)}{\beta(t)^3} a \right) \nu \cdot e_0 \cdot \varphi \\ &\quad - \left( \frac{1}{2} \frac{\alpha''(t)}{\alpha(t)} - \frac{1}{2} \frac{\alpha'(t)^2}{\alpha(t)^2} + \frac{1}{4} a \frac{\alpha'(t)}{\beta(t)^2} - \frac{1}{2} a \frac{\alpha(t) \beta'(t)}{\beta(t)^3} \right) \nu \cdot e_0 \cdot \varphi \\ &= -\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)} \nabla_{e_0}^{\Sigma^+ \mathcal{Z}} \varphi + \left( \frac{1}{4} \frac{\alpha'(t)}{\beta(t)^2} a + \frac{1}{2} \frac{\alpha'(t)^2}{\alpha(t)^2} \right) \nu \cdot e_0 \cdot \varphi \\ &= -\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)} \left( \nabla_{e_0(t)}^t \varphi_t + \frac{1}{2} \frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)} \nu \cdot e_0 \cdot \varphi \right) + \left( \frac{1}{4} \frac{\alpha'(t)}{\beta(t)^2} a + \frac{1}{2} \frac{\alpha'(t)^2}{\alpha(t)^2} \right) \nu \cdot e_0 \cdot \varphi \\ &= -\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)} \left( \nabla_{e_0(t)}^t \varphi_t - \frac{1}{4} \frac{\alpha(t)}{\beta(t)^2} a e_0(t) \cdot_t \varphi_t \right), \end{aligned}$$

wobei wir in \* die Identität  $\nabla_\nu^{\mathcal{Z}} e_0 = 0 = \nabla_\nu^{\Sigma^+ \mathcal{Z}} \varphi$  und (4.4) verwendet haben. Dabei folgt  $\nabla_\nu^{\Sigma^+ \mathcal{Z}} \varphi = 0$  aus der Definition von  $\varphi$ . Zusammen mit unserem Anfangswert haben wir also die Differentialgleichung

$$\begin{cases} \nabla_{\nu}^{\Sigma^+ \mathcal{Z}} \left( \nabla_{e_0(t)}^t \varphi_t - \frac{1}{4} \frac{\alpha(t)}{\beta(t)^2} a e_0(t) \cdot_t \varphi_t \right) = -\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)} \left( \nabla_{e_0(t)}^t \varphi_t - \frac{1}{4} \frac{\alpha(t)}{\beta(t)^2} a e_0(t) \cdot_t \varphi_t \right), \\ \nabla_{e_0(0)}^0 \varphi_0 - \frac{1}{4} \frac{\alpha(0)}{\beta(0)^2} a e_0(0) \cdot_0 \varphi_0 = 0. \end{cases}$$

deren eindeutige Lösung Null ist (das zeigt man genauso wie im Beweis von Lemma 5.6, es ergeben sich keine zusätzlichen Schwierigkeiten) und wir erhalten (6.13).

Sei nun  $Y \in \Gamma(TS^3)$  ein beliebiges horizontales Vektorfeld. Wir definieren  $\tilde{Y} \in \Gamma(T\mathcal{Z})$  durch

$$\tilde{Y}(t, x) := \left( 0, \frac{1}{\beta(t)} Y(x) \right)$$

und  $\tilde{Y}_t := \tilde{Y}(t, \cdot) \in \Gamma(TS^3)$ . Mit (4.9) und Proposition 6.7 zeigt man wie oben im Beweis, dass für alle  $(t, x) \in \mathcal{Z}$

$$(\nabla_{\nu}^{\mathcal{Z}} \tilde{Y})(t, x) = 0$$

gilt. Aus (4.8) folgt

$$[\nu, \tilde{Y}](t, x) = -\frac{\beta'(t)}{\beta(t)} \tilde{Y}(t, x)$$

für alle  $(t, x) \in \mathcal{Z}$ . Wir berechnen

$$\begin{aligned} & \nabla_{\nu}^{\Sigma^+ \mathcal{Z}} \left( \nabla_{\tilde{Y}_t}^t \varphi_t - \left( \frac{1}{\beta(t)} \lambda - \frac{1}{4} \frac{\alpha(t)}{\beta(t)^2} a \right) \tilde{Y}_t \cdot_t \varphi_t \right) \\ &= \nabla_{\nu}^{\Sigma^+ \mathcal{Z}} \nabla_{\tilde{Y}_t}^t \varphi_t - \nabla_{\nu}^{\Sigma^+ \mathcal{Z}} \left( \left( \frac{1}{\beta(t)} \lambda - \frac{1}{4} \frac{\alpha(t)}{\beta(t)^2} a \right) \nu \cdot \tilde{Y} \cdot \varphi \right) \\ &= \nabla_{\nu}^{\Sigma^+ \mathcal{Z}} \left( \nabla_{\tilde{Y}}^{\Sigma^+ \mathcal{Z}} \varphi + \frac{1}{2} \nu \cdot W_t(\tilde{Y}_t) \cdot \varphi \right) - L_{\nu} \left( \frac{1}{\beta(t)} \lambda - \frac{1}{4} \frac{\alpha(t)}{\beta(t)^2} a \right) \nu \cdot \tilde{Y} \cdot \varphi \\ &= \nabla_{\nu}^{\Sigma^+ \mathcal{Z}} \nabla_{\tilde{Y}}^{\Sigma^+ \mathcal{Z}} \varphi - \frac{1}{2} L_{\nu} \left( \frac{\beta'(t)}{\beta(t)} \right) \nu \cdot \tilde{Y} \cdot \varphi - L_{\nu} \left( \frac{1}{\beta(t)} \lambda - \frac{1}{4} \frac{\alpha(t)}{\beta(t)^2} a \right) \nu \cdot \tilde{Y} \cdot \varphi \\ &= R^{\Sigma^+ \mathcal{Z}}(\nu, \tilde{Y}) \varphi + \nabla_{\tilde{Y}}^{\Sigma^+ \mathcal{Z}} \nabla_{\nu}^{\Sigma^+ \mathcal{Z}} \varphi + \nabla_{[\nu, \tilde{Y}]}^{\Sigma^+ \mathcal{Z}} \varphi \\ &\quad + \left( -\frac{1}{2} \left( \frac{\beta'(t)}{\beta(t)} \right)' - \left( \left( \frac{1}{\beta(t)} \right)' \lambda - \frac{1}{4} \left( \frac{\alpha(t)}{\beta(t)^2} \right)' a \right) \right) \nu \cdot \tilde{Y} \cdot \varphi \\ &= -\frac{\beta'(t)}{\beta(t)} \nabla_{\tilde{Y}}^{\Sigma^+ \mathcal{Z}} \varphi + \frac{1}{2} \left( \frac{\beta''(t)}{\beta(t)} - \frac{1}{2} \frac{\alpha'(t)}{\beta(t)^2} a + \frac{1}{2} \frac{\alpha(t) \beta'(t)}{\beta(t)^3} a \right) \nu \cdot \tilde{Y} \cdot \varphi \\ &\quad + \left( -\frac{1}{2} \left( \frac{\beta'(t)}{\beta(t)} \right)' - \left( \left( \frac{1}{\beta(t)} \right)' \lambda - \frac{1}{4} \left( \frac{\alpha(t)}{\beta(t)^2} \right)' a \right) \right) \nu \cdot \tilde{Y} \cdot \varphi \\ &= -\frac{\beta'(t)}{\beta(t)} \left( \nabla_{\tilde{Y}_t}^t \varphi_t + \frac{1}{2} \nu \cdot W_t(\tilde{Y}_t) \cdot \varphi \right) + \left( -\frac{1}{4} \frac{\alpha(t) \beta'(t)}{\beta(t)^3} a + \frac{1}{2} \frac{\beta'(t)^2}{\beta(t)^2} + \frac{\beta'(t)}{\beta(t)^2} \lambda \right) \nu \cdot \tilde{Y} \cdot \varphi \\ &= -\frac{\beta'(t)}{\beta(t)} \nabla_{\tilde{Y}_t}^t \varphi_t + \left( -\frac{1}{4} \frac{\alpha(t) \beta'(t)}{\beta(t)^3} a + \frac{\beta'(t)}{\beta(t)^2} \lambda \right) \nu \cdot \tilde{Y} \cdot \varphi \\ &= -\frac{\beta'(t)}{\beta(t)} \left( \nabla_{\tilde{Y}_t}^t \varphi_t + \left( \frac{1}{4} \frac{\alpha(t)}{\beta(t)^2} a - \frac{1}{\beta(t)} \lambda \right) \nu \cdot \tilde{Y} \cdot \varphi \right) \\ &= -\frac{\beta'(t)}{\beta(t)} \left( \nabla_{\tilde{Y}_t}^t \varphi_t - \left( \frac{1}{\beta(t)} \lambda - \frac{1}{4} \frac{\alpha(t)}{\beta(t)^2} a \right) \tilde{Y}_t \cdot_t \varphi_t \right). \end{aligned}$$

Daraus erhalten wir wieder eine Differentialgleichung

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_{\nu}^{\Sigma^+ \mathcal{Z}} \left( \nabla_{\tilde{Y}_t}^t \varphi_t - \left( \frac{1}{\beta(t)} \lambda - \frac{1}{4} \frac{\alpha(t)}{\beta(t)^2} a \right) \tilde{Y}_t \cdot_t \varphi_t \right) \\ = -\frac{\beta'(t)}{\beta(t)} \left( \nabla_{\tilde{Y}_t}^t \varphi_t - \left( \frac{1}{\beta(t)} \lambda - \frac{1}{4} \frac{\alpha(t)}{\beta(t)^2} a \right) \tilde{Y}_t \cdot_t \varphi_t \right), \\ \nabla_{\tilde{Y}_0}^0 \varphi_0 - \left( \frac{1}{\beta(0)} \lambda - \frac{1}{4} \frac{\alpha(0)}{\beta(0)^2} a \right) \tilde{Y}_0 \cdot_0 \varphi_0 = 0. \end{array} \right.$$

deren eindeutige Lösung Null ist, woraus (6.14) folgt.  $\square$

**Lemma 6.14** Für alle  $t \in I$  gilt

$$\begin{aligned} Q_1(g_t, \varphi_t)(e_0(t), e_0(t)) &= -\frac{9}{64} \frac{\alpha(t)^2}{\beta(t)^4} a^2 + \frac{1}{2} \frac{\alpha(t)}{\beta(t)^3} a \lambda - \frac{1}{2} \frac{1}{\beta(t)^2} \lambda^2, \\ Q_1(g_t, \varphi_t)(e_1(t), e_1(t)) &= \frac{3}{64} \frac{\alpha(t)^2}{\beta(t)^4} a^2 - \frac{1}{8} \frac{\alpha(t)}{\beta(t)^3} a \lambda, \\ Q_1(g_t, \varphi_t)(e_2(t), e_2(t)) &= Q_1(g_t, \varphi_t)(e_1(t), e_1(t)), \\ Q_1(g_t, \varphi_t)(e_i(t), e_j(t)) &= 0 \text{ für } i \neq j, \\ Q_2(g_t, \varphi_t) &= 0. \end{aligned}$$

*Beweis.* Für den Beweis verwenden wir Lemma 6.8, Lemma 6.13 und erinnern an Proposition 1.54, sowie die Gleichungen (4.1)-(4.2). Zunächst berechnen wir

$$\nabla^{t*} \nabla^t \varphi_t = - \sum_{j=0}^2 \left( \nabla_{e_j(t)}^t \nabla_{e_j(t)}^t \varphi_t - \nabla_{\nabla_{e_j(t)}^t e_j(t)}^t \varphi_t \right).$$

Es ist

$$\begin{aligned} \nabla_{e_0(t)}^t \nabla_{e_0(t)}^t \varphi_t &= \frac{1}{4} \frac{\alpha(t)}{\beta(t)^2} a \nabla_{e_0(t)}^t (e_0(t) \cdot_t \varphi_t) \\ &= \frac{1}{4} \frac{\alpha(t)}{\beta(t)^2} a \left( (\nabla_{e_0(t)}^t e_0(t)) \varphi_t + e_0(t) \nabla_{e_0(t)}^t \varphi_t \right) \\ &= \frac{1}{4} \frac{\alpha(t)}{\beta(t)^2} a \left( e_0(t) \nabla_{e_0(t)}^t \varphi_t \right) \\ &= \frac{1}{16} \frac{\alpha(t)^2}{\beta(t)^4} a^2 e_0(t) \cdot_t e_0(t) \cdot_t \varphi_t \\ &= -\frac{1}{16} \frac{\alpha(t)^2}{\beta(t)^4} a^2 \varphi_t. \end{aligned}$$

Eine analoge Rechnung liefert

$$\nabla_{e_i(t)}^t \nabla_{e_i(t)}^t \varphi_t = \left( \frac{1}{\beta(t)} \lambda - \frac{1}{4} \frac{\alpha(t)}{\beta(t)^2} a \right) (\nabla_{e_i}^t e_i(t)) \varphi_t - \left( \frac{1}{\beta(t)} \lambda - \frac{1}{4} \frac{\alpha(t)}{\beta(t)^2} a \right)^2 \varphi_t$$

für  $i = 1, 2$ . Weiter haben wir

$$\nabla_{\nabla_{e_0(t)}^t e_0(t)}^t \varphi_t = 0.$$

Um  $\nabla_{\nabla_{e_i(t)}^t e_i(t)}^t \varphi_t$  für  $i = 1, 2$  zu berechnen schreiben wir zunächst

$$\nabla_{e_i(t)}^t e_i(t) = \left( \nabla_{f_i(t)}^t f_i(t) \right)^* = \mu_1^i(t) e_1(t) + \mu_2^i(t) e_2(t)$$

für geeignete  $\mu_j^i(t)$  und erhalten

$$\begin{aligned}
\nabla_{\nabla_{e_i(t)}^t e_i(t)}^t \varphi_t &= \nabla_{(\mu_1^i(t)e_1(t) + \mu_2^i(t)e_2(t))}^t \varphi_t \\
&= \mu_1^i(t) \nabla_{e_1(t)}^t \varphi_t + \mu_2^i(t) \nabla_{e_2(t)}^t \varphi_t \\
&= \mu_1^i(t) \left( \frac{1}{\beta(t)} \lambda - \frac{1}{4} \frac{\alpha(t)}{\beta(t)^2} a \right) e_1(t) \cdot_t \varphi_t + \mu_2^i(t) \left( \frac{1}{\beta(t)} \lambda - \frac{1}{4} \frac{\alpha(t)}{\beta(t)^2} a \right) e_2(t) \cdot_t \varphi_t \\
&= \left( \frac{1}{\beta(t)} \lambda - \frac{1}{4} \frac{\alpha(t)}{\beta(t)^2} a \right) (\mu_1^i(t) e_1(t) + \mu_2^i(t) e_2(t)) \cdot_t \varphi_t \\
&= \left( \frac{1}{\beta(t)} \lambda - \frac{1}{4} \frac{\alpha(t)}{\beta(t)^2} a \right) (\nabla_{e_i(t)}^t e_i(t)) \cdot_t \varphi_t.
\end{aligned}$$

Damit ist

$$\nabla^{t*} \nabla^t \varphi_t = \frac{1}{16} \frac{\alpha(t)^2}{\beta(t)^4} a^2 \varphi_t + 2 \left( \frac{1}{\beta(t)} \lambda - \frac{1}{4} \frac{\alpha(t)}{\beta(t)^2} a \right)^2 \varphi_t.$$

Eine kurze Rechnung liefert

$$|\nabla^t \varphi_t|^2 = \sum_{i=0}^2 (\nabla_{e_i(t)}^t \varphi_t, \nabla_{e_i(t)}^t \varphi_t) = \frac{1}{16} \frac{\alpha(t)^2}{\beta(t)^4} a^2 + 2 \left( \frac{1}{\beta(t)} \lambda - \frac{1}{4} \frac{\alpha(t)}{\beta(t)^2} a \right)^2.$$

(Dabei verwenden wir  $|\varphi| = 1$ , d.h. insbesondere  $|\varphi_t| = 1$ , was man wie in Proposition 5.4 zeigt.) Also ist

$$Q_2(g_t, \varphi_t) = -\nabla^{t*} \nabla^t \varphi_t + |\nabla^t \varphi_t|^2 \varphi_t = 0.$$

Wir haben weiter

$$\begin{aligned}
(\nabla^t \varphi_t \otimes \nabla^t \varphi_t)(e_0(t), e_0(t)) &= \frac{1}{16} \frac{\alpha(t)^2}{\beta(t)^4} a^2, \\
(\nabla^t \varphi_t \otimes \nabla^t \varphi_t)(e_1(t), e_1(t)) &= \left( \frac{1}{\beta(t)} \lambda - \frac{1}{4} \frac{\alpha(t)}{\beta(t)^2} a \right)^2, \\
(\nabla^t \varphi_t \otimes \nabla^t \varphi_t)(e_2(t), e_2(t)) &= (\nabla^t \varphi_t \otimes \nabla^t \varphi_t)(e_1(t), e_1(t)), \\
(\nabla^t \varphi_t \otimes \nabla^t \varphi_t)(e_i(t), e_j(t)) &= 0 \text{ für } i \neq j.
\end{aligned}$$

Es bleibt die Divergenz von  $T_{g_t, \varphi_t}$  zu berechnen. Dazu sei

$$T_{ijk} := (e_i(t) \cdot_t e_j(t) \cdot_t \varphi_t, \nabla_{e_k(t)}^t \varphi_t)$$

für  $i, j, k \in \{0, 1, 2\}$ . Dann ist mit (4.1)-(4.2) und  $e_0(t) \cdot_t e_1(t) \cdot_t e_2(t) \cdot_t \varphi_t = -\varphi_t$

$$\begin{aligned}
-T_{210} = T_{120} &= \frac{1}{4} \frac{\alpha(t)}{\beta(t)^2} a, \\
-T_{021} = -T_{102} = T_{201} = T_{012} &= \frac{1}{\beta(t)} \lambda - \frac{1}{4} \frac{\alpha(t)}{\beta(t)^2} a, \\
T_{ijk} &= 0 \text{ sonst.}
\end{aligned}$$

Da  $(\varphi_t, \nabla_{e_k(t)}^t \varphi_t) = 0$  für  $k = 0, 1, 2$  nach (4.2) und Lemma 6.8, folgt

$$T_{g_t, \varphi_t}(e_i(t), e_j(t), e_k(t)) = \frac{1}{2} (T_{ijk} + T_{ikj})$$

und damit

$$\begin{aligned}
-T_{g_t, \varphi_t}(e_2(t), e_0(t), e_1(t)) &= -T_{g_t, \varphi_t}(e_2(t), e_1(t), e_0(t)) \\
&= T_{g_t, \varphi_t}(e_1(t), e_2(t), e_0(t)) \\
&= T_{g_t, \varphi_t}(e_1(t), e_0(t), e_2(t)) \\
&= \frac{1}{4} \frac{\alpha(t)}{\beta(t)^2} a - \frac{1}{2} \frac{1}{\beta(t)} \lambda
\end{aligned}$$

und  $T_{g_t, \varphi_t}(e_i(t), e_j(t), e_k(t)) = 0$  sonst.

Damit können wir nun

$$(\operatorname{div}_{g_t} T_{g_t, \varphi_t})(X, Y) = - \sum_{i=0}^2 \left( \nabla_{e_i(t)}^t T_{g_t, \varphi_t} \right) (e_i(t), X, Y)$$

berechnen, wobei wir an

$$\begin{aligned}
\left( \nabla_W^t T_{g_t, \varphi_t} \right) (X, Y, Z) &= L_W (T_{g_t, \varphi_t}(X, Y, Z)) - T_{g_t, \varphi_t}(\nabla_W^t X, Y, Z) \\
&\quad - T_{g_t, \varphi_t}(X, \nabla_W^t Y, Z) - T_{g_t, \varphi_t}(X, Y, \nabla_W^t Z)
\end{aligned}$$

erinnern. Es ist

$$\begin{aligned}
\left( \nabla_{e_0(t)}^t T_{g_t, \varphi_t} \right) (e_0(t), e_0(t), e_0(t)) &= 0, \\
\left( \nabla_{e_1(t)}^t T_{g_t, \varphi_t} \right) (e_1(t), e_0(t), e_0(t)) &= -\frac{\alpha(t)}{\beta(t)^2} a \left( \frac{1}{4} \frac{\alpha(t)}{\beta(t)^2} a - \frac{1}{2} \frac{1}{\beta(t)} \lambda \right), \\
\left( \nabla_{e_2(t)}^t T_{g_t, \varphi_t} \right) (e_2(t), e_0(t), e_0(t)) &= -\frac{\alpha(t)}{\beta(t)^2} a \left( \frac{1}{4} \frac{\alpha(t)}{\beta(t)^2} a - \frac{1}{2} \frac{1}{\beta(t)} \lambda \right),
\end{aligned}$$

also

$$(\operatorname{div}_{g_t} T_{g_t, \varphi_t})(e_0(t), e_0(t)) = 2 \frac{\alpha(t)}{\beta(t)^2} a \left( \frac{1}{4} \frac{\alpha(t)}{\beta(t)^2} a - \frac{1}{2} \frac{1}{\beta(t)} \lambda \right).$$

Dabei sind die auftretenden Lieableitungen stets Null, da  $T_{g_t, \varphi_t}(e_i(t), e_j(t), e_k(t))$  konstant als Funktion in  $p \in S^3$  ist und die Lieableitung als Lieableitung von Funktionen auf  $S^3$  zu verstehen ist. Analog berechnet man

$$\begin{aligned}
(\operatorname{div}_{g_t} T_{g_t, \varphi_t})(e_1(t), e_1(t)) &= -\frac{\alpha(t)}{\beta(t)^2} a \left( \frac{1}{4} \frac{\alpha(t)}{\beta(t)^2} a - \frac{1}{2} \frac{1}{\beta(t)} \lambda \right), \\
(\operatorname{div}_{g_t} T_{g_t, \varphi_t})(e_2(t), e_2(t)) &= -\frac{\alpha(t)}{\beta(t)^2} a \left( \frac{1}{4} \frac{\alpha(t)}{\beta(t)^2} a - \frac{1}{2} \frac{1}{\beta(t)} \lambda \right).
\end{aligned}$$

(Bei diesen Rechnungen ist wieder zu beachten, dass wir  $\left( \nabla_{f_i(t)}^t f_j(t) \right)^*$  als Summe von  $e_1(t)$  und  $e_2(t)$  schreiben können und damit Terme wie  $T_{g_t, \varphi_t}(e_2(t), e_1(t), \left( \nabla_{f_2(t)}^t f_1(t) \right)^*)$  Null sind.)

Für  $(\operatorname{div}_{g_t} T_{g_t, \varphi_t})(e_0(t), e_1(t))$  berechnen wir  $(\nabla_{e_0(t)}^t T_{g_t, \varphi_t})(e_0(t), e_0(t), e_1(t)) = 0$ . Weiter folgt mit (6.6)-(6.7), dass

$$\begin{aligned} & (\nabla_{e_1(t)}^t T_{g_t, \varphi_t})(e_1(t), e_0(t), e_1(t)) \\ &= -T_{g_t, \varphi_t}(\nabla_{e_1(t)}^t e_1(t), e_0(t), e_1(t)) - T_{g_t, \varphi_t}(e_1(t), e_0(t), \nabla_{e_1(t)}^t e_1(t)) \\ &= -T_{g_t, \varphi_t}((\nabla_{f_1(t)}^t f_1(t))^*, e_0(t), e_1(t)) - T_{g_t, \varphi_t}(e_1(t), e_0(t), (\nabla_{f_1(t)}^t f_1(t))^*) \\ &= -(\Gamma_{11}^2(t) \circ \pi) T_{g_t, \varphi_t}(e_2(t), e_0(t), e_1(t)) - (\Gamma_{11}^2(t) \circ \pi) T_{g_t, \varphi_t}(e_1(t), e_0(t), e_2(t)) \\ &= 0, \end{aligned}$$

sowie  $(\nabla_{e_2(t)}^t T_{g_t, \varphi_t})(e_2(t), e_0(t), e_1(t)) = 0$  und damit

$$(\operatorname{div}_{g_t} T_{g_t, \varphi_t})(e_0(t), e_1(t)) = 0.$$

Analog ist

$$(\operatorname{div}_{g_t} T_{g_t, \varphi_t})(e_0(t), e_2(t)) = (\operatorname{div}_{g_t} T_{g_t, \varphi_t})(e_1(t), e_2(t)) = 0.$$

Die Aussage des Lemmas folgt nun durch direktes Ausrechnen.  $\square$

Nun beweisen wir Theorem 6.10, indem wir zeigen, dass die Identität  $\frac{\partial}{\partial t} g_t = Q_1(g_t, \varphi_t)$  äquivalent ist zu einem System zweier nichtlinearer gewöhnlicher Differentialgleichungen für  $(\alpha, \beta)$ . Anschließend lösen wir dieses System, um die Aussagen über die Eigenschaften von  $\alpha$  und  $\beta$  zu erhalten.

*Beweis von Theorem 6.10.* Genau wie in Proposition 5.4 zeigt man

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^{\Sigma^+ \mathcal{Z}} \varphi = 0$$

und

$$|\varphi| = 1.$$

Insbesondere folgt mit Lemma 6.14

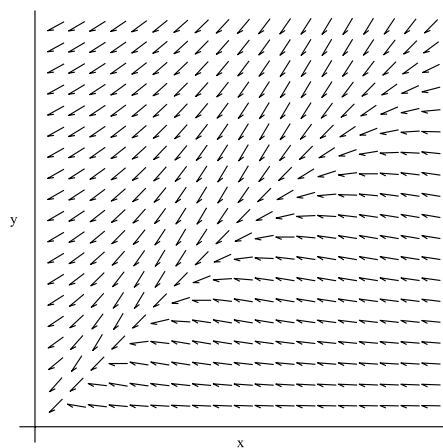
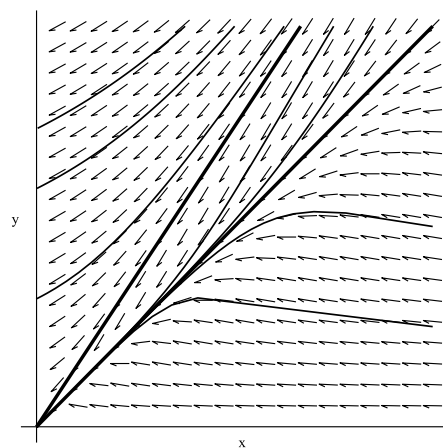
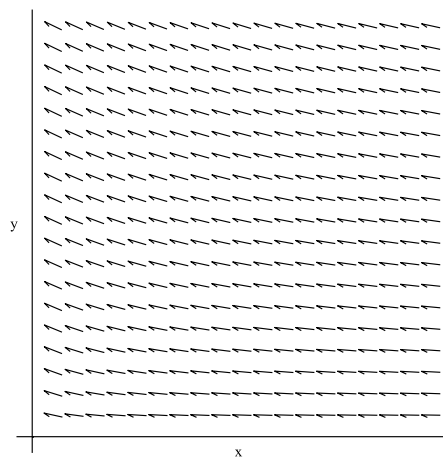
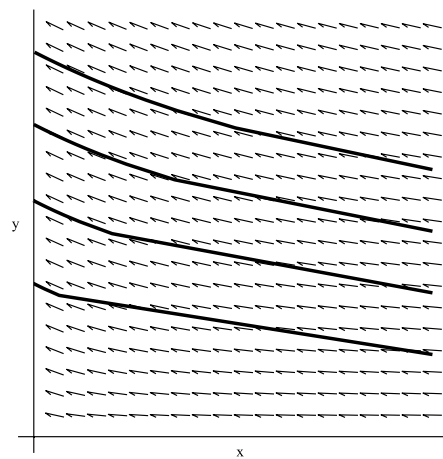
$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^{\Sigma^+ \mathcal{Z}} \varphi = 0 = Q_2(g_t, \varphi_t).$$

Kombinieren wir Proposition 6.7 und Lemma 6.14, so sehen wir, dass  $\frac{\partial}{\partial t} g_t = Q_1(g_t, \varphi_t)$  mit  $g_0 = g^\varepsilon$  genau dann gilt, wenn  $(\alpha, \beta)$  die Lösung des folgenden Systems von zwei nichtlinearen gewöhnlichen Differentialgleichungen ist:

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= -\frac{9}{128} \frac{\alpha(t)^3}{\beta(t)^4} a^2 + \frac{1}{4} \frac{\alpha(t)^2}{\beta(t)^3} a\lambda - \frac{1}{4} \frac{\alpha(t)}{\beta(t)^2} \lambda^2, \\ \beta'(t) &= \frac{3}{128} \frac{\alpha(t)^2}{\beta(t)^3} a^2 - \frac{1}{16} \frac{\alpha(t)}{\beta(t)^2} a\lambda, \\ \alpha(0) &= \varepsilon, \\ \beta(0) &= 1. \end{aligned}$$

Wir betrachten das zugehörige Vektorfeld  $F: U := \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,

$$F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{9}{128} \frac{x^3}{y^4} a^2 + \frac{1}{4} \frac{x^2}{y^3} a\lambda - \frac{1}{4} \frac{x}{y^2} \lambda^2 \\ \frac{3}{128} \frac{x^2}{y^3} a^2 - \frac{1}{16} \frac{x}{y^2} a\lambda \end{pmatrix},$$

(a)  $F$  für  $a\lambda = 2$ (b)  $F$  für  $a\lambda = 2$  mit Integalkurven, wobei die Integalkurven mit Startpunkt  $(1, 1)$  und  $(\frac{2}{3}, 1)$  hervorgehoben sind.(c)  $F$  für  $a\lambda = -2$ (d)  $F$  für  $a\lambda = -2$  mit IntegalkurvenAbbildung 1: Plots des Vektorfelds  $F$  aus dem Beweis von Theorem 6.10.

d.h. die Integralkurven von  $F$  mit Startpunkt  $(\varepsilon, 1)$  sind genau die Lösungen des obigen Systems. Plots von  $F$  findet man in Abbildung 1.

Dass die in Theorem 6.10 angegebenen Lösungen für  $\varepsilon = \frac{2}{3}$  und  $\varepsilon = 1$  im Fall  $a\lambda = 2$  richtig sind, erhält man durch Nachrechnen.

Wir stellen fest: Ist  $c: J \rightarrow U$ ,  $c(t) = (x(t), y(t))$ ,  $J \subset \mathbb{R}$  Intervall,  $0 \in J$ , eine Integralkurve von  $F$  mit  $x(0) > 0$  und  $y(0) > 0$ , so folgt  $x(t) > 0$  und  $y(t) > 0$  für alle  $t \in J$ , denn jede Kurve der Form  $t \mapsto (0, k)$ ,  $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , ist eine Integralkurve von  $F$ , welche von  $c$  nicht geschnitten werden kann. Da  $c(J) \subset U$  zusammenhängend ist, kann es außerdem kein  $t \in J$  geben mit  $y(t) < 0$ . (Insbesondere sind damit  $\alpha$  und  $\beta$  stets positiv und  $g_t$  ist eine Riemannsche Metrik.) Weiter ist  $x(t)$  streng monoton fallend, denn

$$x'(t) = \frac{x(t)}{y(t)^2} \left( -\frac{9}{128} \left( \frac{x(t)}{y(t)} a\lambda \right)^2 + \frac{1}{4} \left( \frac{x(t)}{y(t)} a\lambda \right) - \frac{1}{4} \right)$$

und  $-\frac{9}{128}z^2 + \frac{1}{4}z - \frac{1}{4} < 0$  für alle  $z \in \mathbb{R}$ .

Ebenso sieht man, dass für  $x(0), y(0) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  die Funktion  $x(t)$  streng monoton (fallend oder steigend, abhängig von  $x(0)$ ) ist. Insbesondere folgt, dass die Punkte der Form  $(0, k)$ ,  $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , genau die kritischen Punkte von  $F$  sind.

Um die Eigenschaften von  $\alpha$  und  $\beta$  zu zeigen, machen wir eine Fallunterscheidung.

**1. Fall:**  $a\lambda = -2$ : Seien  $\tilde{y}, h \in (0, \infty)$ . Wir betrachten die Geraden

$$\begin{aligned} g_1(x) &= -x + (\tilde{y} + h), \\ g_2(x) &\equiv \tilde{y}. \end{aligned}$$

Der Vektor  $N_1 = (-1, -1)$  ist ein Normalenvektor für  $g_1$  und  $N_2 = (0, 1)$  ist ein Normalenvektor für  $g_2$ . Wir zeigen:

**1. Behauptung:** Für  $i = 1, 2$  und alle  $0 < x \leq h$ ,  $y = g_i(x)$  gilt  $\langle N_i, F(x, y) \rangle > 0$ . Dabei bezeichnet  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  das Standardskalarprodukt auf dem  $\mathbb{R}^2$ . Geometrisch besagt die Behauptung, dass  $F$  in die Menge

$$K(h, \tilde{y}) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq h, \tilde{y} \leq y \leq -x + (\tilde{y} + h)\}$$

„hinein fließt“, siehe Abbildung 2.

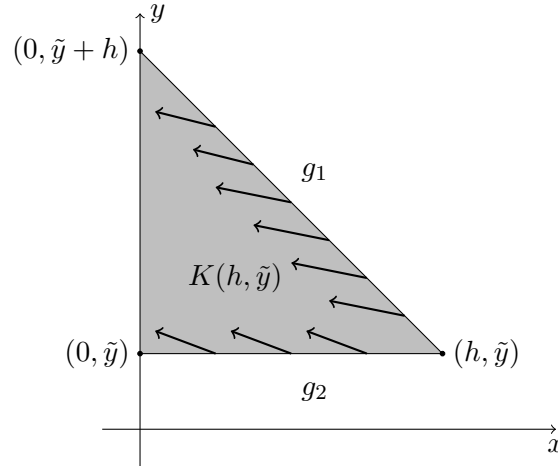


Abbildung 2: Die erste Behauptung bedeutet anschaulich, dass  $F(x, g_i(x))$  für  $0 < x \leq h$ ,  $i = 1, 2$ , „in  $K(h, \tilde{y})$  hinein zeigt“.

Daraus werden wir folgern, dass Integralkurven in beschränkten Teilmengen der Form  $K(h, \tilde{y}) \subset U$  bleiben. Dies ist eine der Voraussetzungen des Theorems von Poincaré-Bendixson (siehe [7]), welches wir später verwenden.

Beweis der ersten Behauptung: Für  $i = 2$  folgt sofort

$$\langle N_2, F(x, \tilde{y}) \rangle = \frac{3}{32} \frac{x^2}{\tilde{y}^3} + \frac{1}{8} \frac{x}{\tilde{y}^2} > 0$$

für alle  $0 < x \leq h$ . Für  $i = 1$  berechnen wir

$$\langle N_1, F(x, y) \rangle = \frac{9}{32} \frac{x^3}{y^4} + \frac{13}{32} \frac{x^2}{y^3} + \frac{1}{8} \frac{x}{y^2} > 0$$

für  $0 < x \leq h$  und  $y = g_1(x) > 0$ . Damit ist die erste Behauptung gezeigt.

**2. Behauptung:** Sei  $c: J \rightarrow U$ ,  $c(t) = (x(t), y(t))$ ,  $J \subset \mathbb{R}$  Intervall, eine Integralkurve von  $F$ . Sei weiter  $l \in J$  mit  $x(l) > 0$ ,  $y(l) > 0$ . Dann gilt  $c(t) \in K(x(l), y(l))$  für alle  $t \in J$  mit  $t \geq l$ .

Beweis: Angenommen, es gibt ein  $s \in J$ ,  $s > l$  mit  $c(s) \notin K(x(l), y(l)) =: K$ . Dann existiert

$$t_0 := \inf\{t \in J \mid l < t \leq s, c(t) \notin K\}.$$

Wir zeigen, dass  $c(t_0) \in \partial K$ . Falls  $l = t_0$ , ist  $c(t_0) = c(l) \in K$ . Falls  $l < t_0$ , wählen wir eine Folge  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}_{\geq 1}}$  mit  $l < t_n < t_0$ ,  $t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} t_0$ . Wegen  $t_n < t_0$  ist  $c(t_n) \in K$  für alle  $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ . Da  $K$  abgeschlossen ist, folgt  $c(t_0) \in K$ . Weiter existiert nach Definition von  $t_0$  eine Folge  $(\tilde{t}_n)_{n \in \mathbb{N}_{\geq 1}}$  mit  $\tilde{t}_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} t_0$  und  $l < \tilde{t}_n \leq s$ ,  $c(\tilde{t}_n) \notin K$  für alle  $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ . Da insbesondere  $c(\tilde{t}_n) \in K^c \cup \partial K$  und  $K^c \cup \partial K$  abgeschlossen ist, erhalten wir  $c(t_0) \in K^c \cup \partial K$ . Insgesamt haben wir damit

$$c(t_0) \in K \cap (K^c \cup \partial K) = \partial K.$$

Sei  $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$  beliebig. Da  $c(\tilde{t}_n) \notin K$ , gilt  $y(\tilde{t}_n) < g_2(x(\tilde{t}_n))$  oder  $y(\tilde{t}_n) > g_1(x(\tilde{t}_n))$ . Deshalb gibt es eine Teilfolge  $(\tilde{t}_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  mit  $\tilde{t}_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} t_0$  und: Entweder gilt  $y(\tilde{t}_{n_k}) < g_2(x(\tilde{t}_{n_k}))$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  oder es gilt  $y(\tilde{t}_{n_k}) > g_1(x(\tilde{t}_{n_k}))$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ .

Wir nehmen ohne Einschränkung an, dass  $y(\tilde{t}_{n_k}) > g_1(x(\tilde{t}_{n_k}))$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ . (Der andere Fall ist einfacher und man behandelt ihn analog.) Es folgt

$$\begin{aligned} \langle N_1, c(\tilde{t}_{n_k}) - c(l) \rangle &= -(x(\tilde{t}_{n_k}) - x(l)) - (y(\tilde{t}_{n_k}) - y(l)) \\ &= -(x(\tilde{t}_{n_k}) - x(l)) + y(l) - y(\tilde{t}_{n_k}) \\ &< -(x(\tilde{t}_{n_k}) - x(l)) + y(l) - g_1(x(\tilde{t}_{n_k})) \\ &= -(x(\tilde{t}_{n_k}) - x(l)) + y(l) - (-x(\tilde{t}_{n_k}) + x(l) + y(l)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

für alle  $k \in \mathbb{N}$ . Zusammen mit der ersten Behauptung erhalten wir den Widerspruch

$$0 < \langle N_1, F(c(l)) \rangle = \langle N_1, c'(l) \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{1}{\tilde{t}_{n_k} - l}}_{>0} \langle N_1, c(\tilde{t}_{n_k}) - c(l) \rangle < 0.$$

Damit ist die zweite Behauptung bewiesen.

Nun zeigen wir die Aussage von Theorem 6.10 (im Fall  $a\lambda = -2$ ): Sei  $c: J \rightarrow U$  die maximale Integralkurve von  $F$  mit  $c(t) = (x(t), y(t))$ ,  $x(0) = \varepsilon > 0$ ,  $y(0) = 1$ ,  $J = [0, t_{max})$ ,  $t_{max} \in (0, \infty]$  maximale Existenzzeit nach rechts. Nach der zweiten Behauptung liegt  $c(J)$  ganz in der kompakten Menge  $K(x(0), y(0)) \subset U$ . Es folgt  $t_{max} = \infty$  und aus dem Theorem von Poincaré-Bendixson (es gibt verschiedene Versionen, wir verwenden die aus [7]) folgt, dass es eine Folge  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $t_n \geq 0$ , gibt mit  $t_n \rightarrow \infty$  für  $n \rightarrow \infty$  und  $c(t_n) \rightarrow (0, k)$  für  $n \rightarrow \infty$  und ein  $k > 0$ . Daraus folgt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = (0, k),$$

denn nach der zweiten Behauptung gilt für alle  $n \in \mathbb{N}$ , dass  $c([t_n, \infty)) \subset K(x(t_n), y(t_n))$ .

## 2. Fall: $a\lambda = 2$ :

Um die Aussagen für  $a\lambda = 2$  zu zeigen, gehen wir in mehreren Schritten vor.

**1. Schritt:** In diesem Schritt zeigen wir die Aussagen von Theorem 6.10 für  $a\lambda = 2$  und  $0 < \varepsilon < \frac{2}{3}$ .

Seien  $0 < \tilde{y} < \infty$  und  $0 < h < \frac{2}{3}\tilde{y}$ . Wir betrachten die Geraden

$$\begin{aligned} g_1(x) &\equiv \tilde{y}, \\ g_2(x) &= \frac{3}{2}x + (\tilde{y} - \frac{3}{2}h) \end{aligned}$$

mit den Normalenvektoren  $N_1 = (0, -1)$  und  $N_2 = (-\frac{3}{2}, 1)$ .

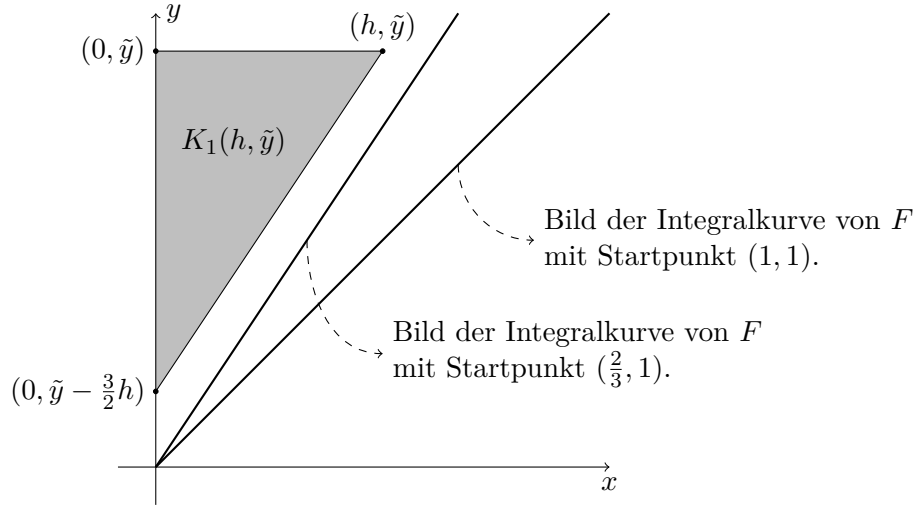
**3. Behauptung:** Für  $i = 1, 2$  und alle  $0 < x \leq h$ ,  $y = g_i(x)$  gilt  $\langle N_i, F(x, y) \rangle > 0$ .

Beweis: Für  $i = 1$  ist

$$\langle N_1, F(x, \tilde{y}) \rangle = \frac{x}{\tilde{y}^2} \left( \frac{1}{8} - \frac{3}{32} \underbrace{\frac{x}{\tilde{y}}}_{< \frac{2}{3}} \right) > 0$$

für alle  $0 < x \leq h$ . Für  $i = 2$  berechnen wir für  $0 < x \leq h$  und  $y = g_2(x)$

$$\langle N_2, F(x, y) \rangle = \frac{1}{64} \frac{x}{y^2} \left( 27 \left( \frac{x}{y} \right)^2 - 42 \frac{x}{y} + 16 \right) > 0,$$

Abbildung 3: Die Menge  $K_1(h, \tilde{y})$ .

denn  $27\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 42\frac{x}{y} + 16 > 0$  für  $0 < \frac{x}{y} < \frac{h}{\tilde{y}} < \frac{2}{3}$ . (Die kleinere Nullstelle der nach oben geöffneten Parabel  $27z^2 - 42z + 16$  ist  $\frac{2}{3}$ .) Damit ist die dritte Behauptung gezeigt.

Sei

$$K_1(h, \tilde{y}) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq h, \frac{3}{2}x + (\tilde{y} - \frac{3}{2}h) \leq y \leq \tilde{y}\}.$$

(Siehe Abbildung 3.)

Analog zum ersten Fall zeigt man damit:

**4. Behauptung:** Sei  $c: J \rightarrow U$ ,  $c(t) = (x(t), y(t))$ ,  $J \subset \mathbb{R}$  Intervall, eine Integralkurve von  $F$ . Sei weiter  $l \in J$  mit  $0 < x(l) < \frac{2}{3}y(l)$ ,  $y(l) > 0$ . Dann gilt  $c(t) \in K_1(x(l), y(l)) \subset U$  für alle  $t \in J$  mit  $t \geq l$ .

Geht man analog zum ersten Fall vor, folgen daraus die Aussagen von Theorem 6.10 für  $a\lambda = 2$  und  $0 < \varepsilon < \frac{2}{3}$ .

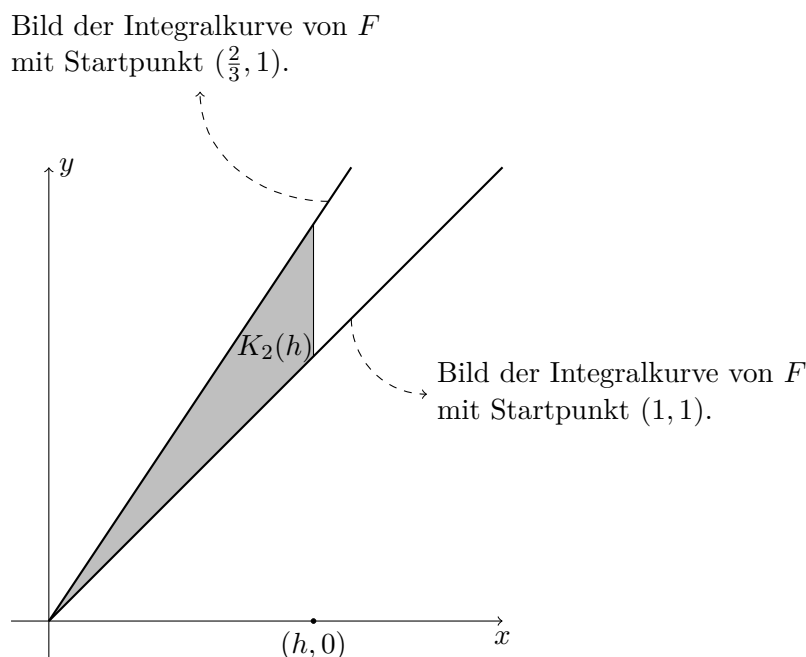
**2. Schritt:** In diesem Schritt zeigen wir die Aussagen von Theorem 6.10 für  $a\lambda = 2$  und  $\frac{2}{3} < \varepsilon < 1$ .

Sei  $h > 0$ . Weiter sei  $N = (-1, 0)$  und

$$K_2(h) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq h, x \leq y \leq \frac{3}{2}x\}.$$

(Siehe Abbildung 4.) Dann gilt für alle  $\tilde{y} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , dass

$$\langle N, F(h, \tilde{y}) \rangle = \frac{h}{\tilde{y}^2} \left( \frac{9}{32} \left( \frac{h}{\tilde{y}} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{h}{\tilde{y}} \right) + \frac{1}{4} \right) > 0.$$

Abbildung 4: Die Menge  $K_2(h)$ .

Daraus folgt wie zuvor:

**5. Behauptung:** Sei  $c: J \rightarrow U$ ,  $c(t) = (x(t), y(t))$ ,  $J \subset \mathbb{R}$  Intervall, eine Integralkurve von  $F$ . Sei weiter  $l \in J$  mit  $x(l) > 0$ ,  $x(l) < y(l) < \frac{3}{2}x(l)$ . Dann gilt  $c(t) \in K_2(x(l))$  für alle  $t \in J$  mit  $t \geq l$ .

Sei nun  $c: J \rightarrow U$  eine Integralkurve von  $F$  mit  $c(t) = (x(t), y(t))$ ,  $x(0) = \varepsilon$ ,  $\frac{2}{3} < \varepsilon < 1$ ,  $y(0) = 1$ ,  $J = [0, t_{max})$  maximales Existenzintervall nach rechts,  $t_{max} \in (0, \infty]$ . Wir zeigen:  $c(t) \xrightarrow{t \rightarrow t_{max}} 0$ .

Nach der fünften Behauptung gilt  $c(J) \subset K_2(x(0), y(0))$ . Angenommen, es gibt ein  $\delta > 0$  derart, dass

$$c(J) \subset \underbrace{K_2(x(0), y(0)) \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq \delta\}}_{=: A}.$$

Dann liegt  $c(J)$  ganz in der kompakten Menge  $A \subset U$  und nach dem Theorem von Poincaré-Bendixson gibt es eine Folge  $t_n$  mit  $t_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$  und  $c(t_n)$  konvergiert für  $n \rightarrow \infty$  gegen einen kritischen Punkt von  $F$ . Da  $F$  nur die kritischen Punkte  $(0, k)$ ,  $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , hat und  $c(J) \subset A$  gilt, folgt ein Widerspruch.

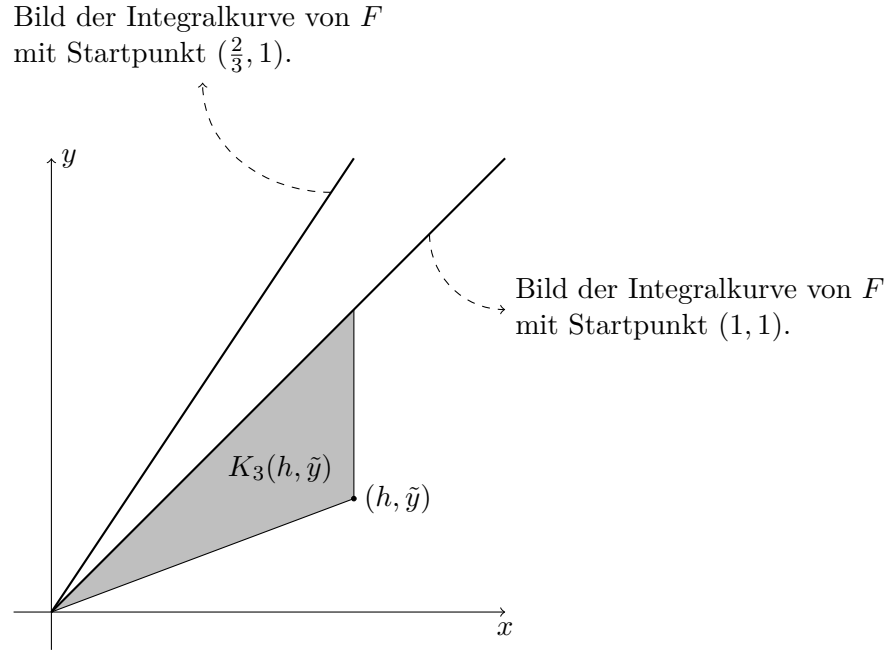
Damit gibt es zu jedem  $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$  ein  $t_n \in J$  mit  $x(t_n) < \frac{1}{n}$ . Da  $x(t)$  streng monoton fallend ist, folgt

$$x(t) \xrightarrow{t \rightarrow t_{max}} 0.$$

Wegen der fünften Behauptung folgt daraus  $y(t) \xrightarrow{t \rightarrow t_{max}} 0$  und insgesamt

$$c(t) \xrightarrow{t \rightarrow t_{max}} 0.$$

Daraus folgen die Aussagen von Theorem 6.10 für  $a\lambda = 2$  und  $\frac{2}{3} < \varepsilon < 1$ .

Abbildung 5: Die Menge  $K_3(h, \tilde{y})$ .

**3. Schritt:** In diesem Schritt zeigen wir die Aussagen von Theorem 6.10 für  $a\lambda = 2$  und  $\varepsilon > 1$ .

Seien  $0 < \tilde{y} < \infty$  und  $h > \tilde{y}$ . Wir betrachten die Gerade

$$g(x) := \frac{\tilde{y}}{h}x.$$

Es sei  $N_1 = (-1, 0)$  und  $N_2 = (-\frac{\tilde{y}}{h}, 1)$ . Der Vektor  $N_2$  ist ein Normalenvektor für  $g$ . Es gilt

$$\langle N_1, F(h, \tilde{y}) \rangle = \frac{h}{\tilde{y}^2} \left( \frac{9}{32} \left( \frac{h}{\tilde{y}} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{h}{\tilde{y}} \right) + \frac{1}{4} \right) > 0.$$

Sei nun  $0 < x \leq h$  und  $y = g(x)$ . Dann berechnen wir

$$\langle N_2, F(x, y) \rangle = \frac{h}{\tilde{y}x} \left( \frac{3}{8} \left( \frac{h}{\tilde{y}} \right)^2 - \frac{5}{8} \left( \frac{h}{\tilde{y}} \right) + \frac{1}{4} \right) > 0,$$

da  $\frac{3}{8} \left( \frac{h}{\tilde{y}} \right)^2 - \frac{5}{8} \left( \frac{h}{\tilde{y}} \right) + \frac{1}{4} > 0$  für  $\frac{h}{\tilde{y}} > 1$ . Dabei gilt  $\frac{h}{\tilde{y}} > 1$  nach Voraussetzung.

Sei

$$K_3(h, \tilde{y}) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq h, \frac{\tilde{y}}{h}x \leq y \leq x\}$$

(siehe Abbildung 5).

Dann folgt:

Sei  $c: J \rightarrow U$ ,  $c(t) = (x(t), y(t))$ ,  $J \subset \mathbb{R}$  Intervall, eine Integralkurve von  $F$ . Sei weiter  $l \in J$  mit  $y(l) > 0$  und  $x(l) > y(l)$ . Dann gilt  $c(t) \in K_3(x(l), y(l))$  für alle  $t \in J$  mit  $t \geq l$ .

Damit können wir die Aussagen von Theorem 6.10 für  $a\lambda = 2$  und  $\varepsilon > 1$  wie im zweiten Schritt zeigen. □

**Satz 6.15** *Wählen wir den Spinor-Teil des Anfangswertes  $\varphi_0$  in Theorem 6.10 wie im Beweis von Lemma 6.12 (d.h.  $\varphi_0$  ist ein  $S^1$ -invarianter Spinor mit  $\varphi_0 = Q_0(0)(\sigma)$ , wobei  $\sigma$  ein  $\lambda$ -Killing-Spinor auf  $(S^2, g_{FS})$  ist,  $\lambda \in \{\pm 1\}$ ), so ist der Spinor-Teil der Lösung  $\varphi_t$  für jedes  $t \in I$  ein  $S^1$ -invarianter Spinor mit  $\varphi_t = Q_0(t)(\sigma_t)$ , wobei  $\sigma_t$  ein  $\frac{\lambda}{\beta(t)}$ -Killing-Spinor auf  $(S^2, \beta(t)^2 g_{FS})$  ist.*

Dieser Satz besagt, dass der Spinorfluss „die Klasse der  $S^1$ -invarianten Spinoren, die von Killing-Spinoren auf  $S^2$  kommen“ erhält.

*Beweis von Satz 6.15.* Wir wollen die Diffeomorphismeninvarianz des Spinorflusses (siehe [3, Corollary 4.5. (ii)]) zusammen mit der Eindeutigkeit der Lösung nutzen. Um die Diffeomorphismeninvarianz auszunutzen, konstruieren wir zu einem festen  $e^{is} \in S^1$  einen Spin-Diffeomorphismus<sup>13</sup>  $F: \widetilde{\text{GL}}^+ S^3 \rightarrow \widetilde{\text{GL}}^+ S^3$ , der sich für jedes  $t \in I$  einschränkt zu der Wirkung von  $e^{is}$  auf  $\text{Spin}(S^3, g_t)$ , welche wir in Abschnitt 6.2 definiert haben.

Sei  $(\widetilde{\text{GL}}^+ S^3, \eta)$  die<sup>14</sup> topologische Spinstruktur auf  $S^3$ . Die Wirkung von  $S^1$  auf  $S^3$  induziert eine Wirkung von  $S^1$  auf  $\text{GL}^+ S^3$ . Diese Wirkung besitzt einen eindeutigen Lift zu einer Wirkung von  $S^1$  auf  $\widetilde{\text{GL}}^+ S^3$ , d.h. wir haben ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\text{GL}}^+ S^3 \times S^1 & \longrightarrow & \widetilde{\text{GL}}^+ S^3 \\ \downarrow \eta \times id & & \downarrow \eta \\ \text{GL}^+ S^3 \times S^1 & \longrightarrow & \text{GL}^+ S^3 \end{array}$$

wobei die horizontalen Abbildungen durch die Wirkungen gegeben sind. Die Eindeutigkeit dieses Lifts folgt aus Satz 2.4 i), denn  $\widetilde{\text{GL}}^+ S^3 \cong S^3 \times \widetilde{\text{GL}}^+(3, \mathbb{R})$  und  $\text{GL}^+ S^3 \cong S^3 \times \text{GL}^+(3, \mathbb{R})$  sind zusammenhängend, wobei man die Isomorphismen analog zu Beispiel 1.42 erhält. Die Existenz des Lifts zeigt man wie im Fall metrischer Spinstrukturen (vergleiche Abschnitt 6.2), indem man

$$\widetilde{\text{GL}}^+ S^3 := \pi^*(\widetilde{\text{GL}}^+ S^2) \times_{\widetilde{\text{GL}}^+(2, \mathbb{R})} \widetilde{\text{GL}}^+(3, \mathbb{R})$$

setzt, wobei man die Erweiterung mit Hilfe von  $l$  aus Lemma 3.4 bildet.

Abschnitt 6.2 liefert uns für jedes  $t \in I$  ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \text{Spin}(S^3, g_t) \times S^1 & \longrightarrow & \text{Spin}(S^3, g_t) \\ \downarrow \eta \times id & & \downarrow \eta \\ \text{SO}(S^3, g_t) \times S^1 & \longrightarrow & \text{SO}(S^3, g_t) \end{array}$$

<sup>13</sup>Wir verwenden als Definition von „Spin-Diffeomorphismus“ die aus [3, Abschnitt 4.1].

<sup>14</sup>Bis auf Äquivalenz gibt es auf  $S^3$  mit fest gewählter Orientierung genau eine topologische Spinstruktur. Das folgt zum Beispiel, in dem man die Sätze 1.44 und 3.3 iii) kombiniert.

wobei die horizontalen Abbildungen durch die Wirkungen gegeben sind. Sei  $e^{is} \in S^1$  beliebig, aber fest gewählt. Dann liefert uns die Wirkung von  $e^{is}$  Abbildungen

$$\begin{aligned} F: \widetilde{GL^+S^3} &\rightarrow \widetilde{GL^+S^3}, \\ F_t: \text{Spin}(S^3, g_t) &\rightarrow \text{Spin}(S^3, g_t), \\ f: S^3 &\rightarrow S^3, \end{aligned}$$

wobei  $F$  ein Spin-Diffeomorphismus ist. Da die Wirkungen von  $S^1$  auf  $GL^+S^3$  und  $\text{SO}(S^3, g_t)$  übereinstimmen auf  $\text{SO}(S^3, g_t) \subset GL^+S^3$  und die Wirkungen auf  $\widetilde{GL^+S^3}$  und  $\text{Spin}(S^3, g_t)$  eindeutig sind, gilt

$$F|_{\text{Spin}(S^3, g_t)} = F_t.$$

(Dabei haben wir  $\text{Spin}(S^3, g_t) = \widetilde{GL^+S^3}|_{\text{SO}(S^3, g_t)}$  verwendet.)

Mit [3, Abschnitt 4.1] erhalten wir eine Abbildung

$$F_*: \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}, \quad \mathcal{N}_g \ni \varphi \mapsto F_*\varphi \in \mathcal{N}_{(f^{-1})^*g},$$

definiert durch: Ist lokal  $\varphi = [\tilde{s}, \tilde{\varphi}]$ , so ist  $F_*\varphi = [F \circ \tilde{s} \circ f^{-1}, \tilde{\varphi} \circ f^{-1}]$ . Aus den Definitionen folgt für jedes  $t \in I$  und jeden Spinor  $\varphi \in \mathcal{N}_{g_t}$

$$(F_*\varphi)(x) = \varphi(x \cdot e^{-is}) \cdot e^{is}. \quad (6.15)$$

Sei nun  $(g_t, \varphi_t)_{t \in I}$  eine Lösung des Spinorflusses mit Anfangswert  $(g_0, \varphi_0)$ ,  $g_0 = g^\varepsilon$  und  $\varphi_0$  ein  $S^1$ -invarianter Spinor mit  $\varphi_0 = Q_0(0)(\sigma)$ , wobei  $\sigma$  ein  $\lambda$ -Killing-Spinor auf  $(S^2, g_{FS})$  ist. Wegen der Diffeomorphismeninvarianz des Spinorflusses ist auch  $((f^{-1})^*g_t, F_*\varphi_t)_{t \in I}$  eine Lösung des Spinorflusses, mit Anfangswert  $((f^{-1})^*g_0, F_*\varphi_0)$ . Es ist  $(f^{-1})^*g_0 = (f^{-1})^*g^\varepsilon = g^\varepsilon$  ( $f$  ist eine Isometrie) und  $F_*\varphi_0 = \varphi_0$ , wobei Letzteres direkt aus der  $S^1$ -Invarianz von  $\varphi_0$  und (6.15) folgt. Wegen der Eindeutigkeit der Lösung des Spinorflusses gilt für alle  $t \in I$ :

$$F_*\varphi_t = \varphi_t.$$

Nach (6.15) und da  $e^{is} \in S^1$  beliebig gewählt war, folgt daraus, dass  $\varphi_t$  ein  $S^1$ -invarianter Spinor ist. Wir definieren  $\sigma_t \in \Gamma(\Sigma(S^2, \beta(t)^2 g_{FS}))$  durch  $Q_0(t)(\sigma_t) = \varphi_t$  und (6.9) liefert

$$\nabla_{e_1(t)}^t \varphi_t = Q_0(t)(\nabla_{f_1(t)}^t \sigma_t) - \frac{1}{4} \frac{\alpha(t)}{\beta(t)^2} a e_1(t) \cdot_t \varphi_t.$$

Kombinieren wir dies mit Lemma 6.13, so folgt

$$Q_0(t)(\nabla_{f_1(t)}^t \sigma_t) = \frac{\lambda}{\beta(t)} e_1(t) \cdot_t \varphi_t.$$

Mit (6.10) erhalten wir zusätzlich

$$\frac{\lambda}{\beta(t)} e_1(t) \cdot_t \varphi_t = Q_0(t)\left(\frac{\lambda}{\beta(t)} f_1(t) \cdot_t \sigma_t\right),$$

also

$$\nabla_{f_1(t)}^t \sigma_t = \frac{\lambda}{\beta(t)} f_1(t) \cdot_t \sigma_t.$$

Völlig analog zeigt man

$$\nabla_{f_2(t)}^t \sigma_t = \frac{\lambda}{\beta(t)} f_2(t) \cdot_t \sigma_t.$$

Damit ist  $\sigma_t$  ein  $\frac{\lambda}{\beta(t)}$ -Killing-Spinor auf  $(S^2, \beta(t)^2 g_{FS})$ .

□

**Bemerkung 6.16 (Änderung der Orientierungskonvention)** Wir betrachten die Orientierung auf  $S^3$ , für die gilt: Ist  $(f_1, f_2)$  ein beliebiger positiv orientierter lokaler Orthonormalrahmen auf  $(S^2, g_{FS})$ , so ist  $(-K, b_1, b_2)$  ein positiv orientierter lokaler Orthonormalrahmen auf  $(S^3, g_{S^3})$ . Dabei wählen wir eine beliebige Orientierung auf  $S^2$ . Weiter setzen wir wieder

$$a := d\omega(b_1, b_2) \equiv \pm 2.$$

Es stellt sich die Frage, ob und wie sich die Ergebnisse verändern, wenn wir diese Orientierungskonvention treffen. Ansehen der betreffenden Beweise liefert:

- Die Aussagen von Proposition 6.7 und Lemma 6.8 ändern sich nicht.
- In der Aussage von Lemma 6.9 ist „ $a$ “ durch „ $-a$ “ zu ersetzen. Das zusätzliche Vorzeichen tritt auf, da wir im Beweis von Lemma 6.9 die Proposition 1.54 verwendet haben und nun  $(-e_0(t), e_1(t), e_2(t))$  und nicht mehr  $(e_0(t), e_1(t), e_2(t))$  positiv orientiert ist.
- In den Gleichungen (6.8) und (6.9) ist „ $a$ “ durch „ $-a$ “ zu ersetzen, da wir auch hier Proposition 1.54 verwendet haben. Damit ist in der Aussage von Lemma 6.12 ebenfalls „ $a$ “ durch „ $-a$ “ zu ersetzen.
- In den Aussagen von Lemma 6.13 und Lemma 6.14 ist „ $a$ “ durch „ $-a$ “ zu ersetzen.

Also insgesamt: In Theorem 6.10 ist überall „ $a$ “ durch „ $-a$ “ zu ersetzen.

## 6.4 Ein Stabilitätsresultat für die Berger-Sphären unter dem Spinorfluss

Ziel dieses Abschnitts ist der Beweis der nachfolgenden Theoreme 6.17 und 6.19. Dabei bestätigt Theorem 6.19 die Vermutung 2 (siehe Beginn Abschnitt 6) für die Berger-Sphären mit bestimmten Anfangswerten. Theorem 6.17 zeigt, was im unnormalisierten Fall passiert. (Für die Formulierung der Theoreme erinnern wir an Bemerkung 6.5.)

**Theorem 6.17** Sei  $M = S^3$ ,  $\varepsilon > 0$  und  $\mu \in \{\pm \frac{1}{2}\}$ . Als Anfangswert  $(g_0, \varphi_0)$  wählen wir  $g_0 = g^\varepsilon$  und einen Spinor  $\varphi_0 \in \Gamma(\Sigma(S^3, g^\varepsilon))$ , so dass  $|\varphi_0| = 1$  und

$$\begin{aligned} \nabla_K^{\Sigma(S^3, g^\varepsilon)} \varphi_0 &= \left( \frac{\mu - \frac{1}{4}a}{\varepsilon} + \frac{1}{4}a\varepsilon \right) K \cdot \varphi_0, \\ \nabla_Y^{\Sigma(S^3, g^\varepsilon)} \varphi_0 &= \left( -\frac{1}{4}a(\varepsilon - 1) + \mu \right) Y \cdot \varphi_0, \end{aligned}$$

für alle horizontalen Vektorfelder  $Y \in \Gamma(TS^3)$ .

Dann ist die Lösung des Spinorflusses gegeben durch  $(g_t, \varphi_t)_{t \in I}$ ,  $I = [0, t_{max})$ ,  $t_{max}$  maximale Existenzzeit nach rechts, mit

$$g_t(X_1 + Y_1, X_2 + Y_2) = g_{S^3}(\alpha(t)X_1 + \beta(t)Y_1, \alpha(t)X_2 + \beta(t)Y_2)$$

für  $t \in I$ ,  $X_i \in \ker(d\pi_p)$ ,  $Y_i \in (\ker(d\pi_p))^\perp$  und glatte Funktionen  $\alpha, \beta: I \rightarrow (0, \infty)$  mit  $\alpha(0) = \varepsilon$  und  $\beta(0) = 1$  ( $g_{S^3}$  bezeichnet die Standardmetrik auf  $S^3$ ), sowie

$$\varphi_t(p) = \varphi(t, p) = \mathcal{P}_{0,t}(p)(\varphi_0(p)) \in \Sigma^+ \mathcal{Z},$$

wobei  $\mathcal{P}_{0,t}(p)$  die Parallelverschiebung in  $\Sigma^+ \mathcal{Z}$  bezüglich  $\nabla^{\Sigma^+ \mathcal{Z}}$  entlang  $\gamma_p(s) = (s, p)$ ,  $s \in I$ , von  $\gamma_p(0)$  nach  $\gamma_p(t)$  bezeichnet. Es erfüllt  $(g_t, \varphi_t)$  für jedes  $t \in I$  die Gleichungen (6.19)-(6.20).

Falls  $a\mu = 1$  ist, gilt:

Für  $0 < \varepsilon < \frac{2}{3}$  gilt  $t_{max} = \infty$  und

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \beta(t) =: \beta_\infty > 0.$$

Für  $\varepsilon \geq \frac{2}{3}$  gilt

$$\lim_{t \rightarrow t_{max}} \alpha(t) = \lim_{t \rightarrow t_{max}} \beta(t) = 0.$$

Für  $\varepsilon = \frac{2}{3}$  ist  $t_{max} = 12$  und die Lösung ist gegeben durch

$$\alpha(t) = \frac{2}{3}\beta(t), \quad \beta(t) = \frac{1}{6}\sqrt{36 - 3t}.$$

Für  $\varepsilon = 1$  gilt  $t_{max} = 16$  und die Lösung ist gegeben durch

$$\alpha(t) = \beta(t) = \frac{1}{4}\sqrt{16 - t}.$$

Falls  $a\mu = -1$  ist, gilt:

Für jedes  $\varepsilon > 0$  gilt

$$\lim_{t \rightarrow t_{max}} \alpha(t) = \lim_{t \rightarrow t_{max}} \beta(t) = 0.$$

Ist  $\varepsilon = 1$ , so ist  $t_{max} = 16$  und die Lösung ist gegeben durch

$$\alpha(t) = \beta(t) = \frac{1}{4}\sqrt{16 - t}.$$

### Bemerkung 6.18

- i) Der Fall  $a\mu = 1$  in Theorem 6.17 stimmt überein mit dem Fall  $a\lambda = 2$  in Theorem 6.10. Das ist nicht verwunderlich, da in diesen Fällen die Gleichungen für  $\nabla\varphi_0$  übereinstimmen (und nur diese sind relevant für die Lösung).
- ii) Die Motivation für  $\varphi_0$  in Theorem 6.17 ist, einen Spinor zu wählen, der „nahe an einem Killing-Spinor auf  $(S^3, g_{S^3})$  liegt“ (siehe Beweis von Lemma 6.21).
- iii) Im Fall  $a\mu = 1$  bedeutet die Aussage von Theorem 6.17: Wenn  $\varepsilon$  nahe genug an 1 ist ( $\varepsilon \geq \frac{2}{3}$ ), d.h.  $g^\varepsilon$  ist nahe genug an der Standardmetrik  $g_{S^3}$ , so kollabiert die  $S^3$  unter dem unnormalisierten Spinorfluss gegen einen Punkt. Dieses Verhalten ist ähnlich wie in [12, 1.1 Theorem], denn auch dort hat man im unnormalisierten Fall den Kollaps gegen einen Punkt.

Das Hauptresultat dieses Abschnitts ist:

**Theorem 6.19** Sei  $M = S^3$ ,  $\varepsilon > 0$  und  $\mu \in \{\pm \frac{1}{2}\}$ . Den Anfangswert  $(g_0, \varphi_0)$  wählen wir wie folgt:  $g_0 = c(\varepsilon)g^\varepsilon$ , wobei  $c(\varepsilon) := \left(\frac{1}{2\pi^2\varepsilon}\right)^{\frac{2}{3}}$  so gewählt ist, dass  $\text{vol}(S^3, c(\varepsilon)g^\varepsilon) = 1$ . Als Spinor-Teil des Anfangswertes wählen wir  $\varphi_0 \in \Gamma(\Sigma(S^3, c(\varepsilon)g^\varepsilon))$ , so dass  $|\varphi_0| = 1$  und

$$\begin{aligned}\nabla_K^{\Sigma(S^3, c(\varepsilon)g^\varepsilon)} \varphi_0 &= \frac{1}{\sqrt{c(\varepsilon)}} \left( \frac{\mu - \frac{1}{4}a}{\varepsilon} + \frac{1}{4}a\varepsilon \right) K \cdot \varphi_0, \\ \nabla_Y^{\Sigma(S^3, c(\varepsilon)g^\varepsilon)} \varphi_0 &= \frac{1}{\sqrt{c(\varepsilon)}} \left( -\frac{1}{4}a(\varepsilon - 1) + \mu \right) Y \cdot \varphi_0,\end{aligned}$$

für alle horizontalen Vektorfelder  $Y \in \Gamma(TS^3)$ .

Dann ist die Lösung des volumennormalisierten Spinorflusses gegeben durch  $(g_t, \varphi_t)_{t \in I}$ ,  $I = [0, t_{\max})$ ,  $t_{\max}$  maximale Existenzzeit nach rechts, mit

$$g_t(X_1 + Y_1, X_2 + Y_2) = g_{S^3}(\alpha(t)X_1 + \beta(t)Y_1, \alpha(t)X_2 + \beta(t)Y_2)$$

für  $t \in I$ ,  $X_i \in \ker(d\pi_p)$ ,  $Y_i \in (\ker(d\pi_p))^\perp$  und glatte Funktionen  $\alpha, \beta: I \rightarrow (0, \infty)$  mit  $\alpha(0) = \sqrt{c(\varepsilon)}\varepsilon$  und  $\beta(0) = \sqrt{c(\varepsilon)}$ , sowie

$$\varphi_t(p) = \varphi(t, p) = \mathcal{P}_{0,t}(p)(\varphi_0(p)) \in \Sigma^+ \mathcal{Z},$$

wobei  $\mathcal{P}_{0,t}(p)$  die Parallelverschiebung in  $\Sigma^+ \mathcal{Z}$  bezüglich  $\nabla^{\Sigma^+ \mathcal{Z}}$  entlang  $\gamma_p(s) = (s, p)$ ,  $s \in I$ , von  $\gamma_p(0)$  nach  $\gamma_p(t)$  bezeichnet. Es erfüllt  $(g_t, \varphi_t)$  für jedes  $t \in I$  die Gleichungen (6.19)-(6.20).

Falls  $a\mu = 1$ , gilt:

Für  $0 < \varepsilon < \frac{2}{3}$  gilt

$$\lim_{t \rightarrow t_{\max}} \alpha(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow t_{\max}} \beta(t) = \infty.$$

Für  $\varepsilon = \frac{2}{3}$  gilt  $t_{\max} = \infty$  und

$$\alpha(t) \equiv \frac{2}{3} \sqrt{c\left(\frac{2}{3}\right)}, \quad \beta(t) \equiv \sqrt{c\left(\frac{2}{3}\right)}.$$

Insbesondere ist  $(c(\frac{2}{3})g^{\frac{2}{3}}, \varphi_0)$  ein kritischer Punkt des volumennormalisierten Spinorflusses.

Für  $\varepsilon > \frac{2}{3}$  gilt  $t_{\max} = \infty$  und

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(t) = \sqrt{c(1)}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \beta(t) = \sqrt{c(1)}.$$

Für  $\varepsilon = 1$  gilt  $t_{\max} = \infty$  und

$$\alpha(t) \equiv \sqrt{c(1)}, \quad \beta(t) \equiv \sqrt{c(1)}.$$

Insbesondere ist  $(c(1)g_{S^3}, \varphi_0)$  ein kritischer Punkt des volumennormalisierten Spinorflusses.

Falls  $a\mu = -1$ , gilt:

Für alle  $\varepsilon > 0$  gilt  $t_{\max} = \infty$  und

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(t) = \sqrt{c(1)}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \beta(t) = \sqrt{c(1)}.$$

Für  $\varepsilon = 1$  gilt

$$\alpha(t) \equiv \sqrt{c(1)}, \quad \beta(t) \equiv \sqrt{c(1)}.$$

Insbesondere ist  $(c(1)g_{S^3}, \varphi_0)$  ein kritischer Punkt des volumennormalisierten Spinorflusses.

### Bemerkung 6.20

- i) Die Motivation für  $\varphi_0$  in Theorem 6.19 ist folgende: Wir wählen  $\varphi_0 \in \Gamma(\Sigma(S^3, g^\varepsilon))$  wie in Theorem 6.17 und fassen  $\varphi_0$  als Spinor auf  $(S^3, c(\varepsilon)g^\varepsilon)$  auf (siehe Bemerkung 1.59). Insbesondere ist  $\varphi_0$  ein Spinor, der „nicht weit von einem Killing-Spinor auf  $S^3$  entfernt ist“.
- ii) Im Fall  $a\mu = 1$  bedeutet das Ergebnis: Ist  $c(\varepsilon)g^\varepsilon$  nahe genug ( $\varepsilon > \frac{2}{3}$ ) an der volumennormalisierten Standardmetrik  $c(1)g_{S^3}$ , so konvergiert  $g_t$  gegen die volumennormalisierte Standardmetrik  $c(1)g_{S^3}$ . Ist  $c(\varepsilon)g^\varepsilon$  zu weit von der volumennormalisierten Standardmetrik entfernt ( $\varepsilon \leq \frac{2}{3}$ ), liegt diese Konvergenz nicht mehr vor ( $\alpha \rightarrow 0$ ,  $\beta \rightarrow \infty$ ).

Im Fall  $a\mu = -1$  liegt die Konvergenz für alle  $\varepsilon > 0$  vor.

- iii) Der Spinor-Teil der Lösung  $\varphi_t$  erfüllt die Gleichungen (6.19)-(6.20), d.h. es gilt:

$$\begin{aligned} \nabla_K^t \varphi_t &= \left( \frac{\mu - \frac{1}{4}a}{\alpha(t)} + \frac{1}{4} \frac{\alpha(t)}{\beta(t)^2} a \right) K \cdot_t \varphi_t \\ \nabla_Y^t \varphi_t &= \frac{1}{\beta(t)} \left( -\frac{1}{4} a \left( \frac{\alpha(t)}{\beta(t)} - 1 \right) + \mu \right) Y \cdot_t \varphi_t \end{aligned}$$

für alle horizontalen Vektorfelder  $Y \in \Gamma(TS^3)$ . Im Fall  $a\mu = 1$  und  $\varepsilon > \frac{2}{3}$  (bzw. im Fall  $a\mu = -1$  und  $\varepsilon > 0$  beliebig) folgt aus der Konvergenz von  $\alpha$  und  $\beta$ , dass

$$\frac{\mu - \frac{1}{4}a}{\alpha(t)} + \frac{1}{4} \frac{\alpha(t)}{\beta(t)^2} a \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{\mu}{\sqrt{c(1)}}$$

und

$$\frac{1}{\beta(t)} \left( -\frac{1}{4} a \left( \frac{\alpha(t)}{\beta(t)} - 1 \right) + \mu \right) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{\mu}{\sqrt{c(1)}}.$$

In diesem Sinn konvergiert  $\varphi_t$  (in diesen Fällen) gegen einen Killing-Spinor auf  $(S^3, c(1)g_{S^3})$ .

Wir beweisen zunächst Theorem 6.17. Den Spinor-Teil des Anfangswertes in Theorem 6.17 liefert uns das folgende Lemma.

**Lemma 6.21** *Zu jedem  $\varepsilon > 0$  und jedem  $\mu \in \{\pm \frac{1}{2}\}$  gibt es einen Spinor  $\varphi_0 \in \Gamma(\Sigma(S^3, g^\varepsilon))$  mit  $|\varphi_0| = 1$  und*

$$\nabla_K^{\Sigma(S^3, g^\varepsilon)} \varphi_0 = \left( \frac{\mu - \frac{1}{4}a}{\varepsilon} + \frac{1}{4} a \varepsilon \right) K \cdot \varphi_0, \quad (6.16)$$

$$\nabla_Y^{\Sigma(S^3, g^\varepsilon)} \varphi_0 = \left( -\frac{1}{4} a (\varepsilon - 1) + \mu \right) Y \cdot \varphi_0, \quad (6.17)$$

für alle horizontalen Vektorfelder  $Y \in \Gamma(TS^3)$ .

*Beweis.* Die Idee für  $\varphi_0$  ist folgende: Wir wählen einen  $\mu$ -Killing-Spinor auf  $(S^3, g_{S^3})$  und verschieben diesen parallel zu einem Spinor auf  $(S^3, g^\varepsilon)$ . Dieser ist eine passende Wahl für  $\varphi_0$ . Genauer:

**1. Fall:**  $\varepsilon \geq 1$ : Wir betrachten die Einparameterfamilie von Riemannschen Metriken  $(g_t)_{t \in I}$  definiert durch (6.1), wobei  $\alpha(t) := 1 + t$ ,  $\beta(t) \equiv 1$ ,  $I := [0, \varepsilon - 1]$ . Sei nun  $\sigma \in \Gamma(\Sigma(S^3, g_{S^3}))$  ein  $\mu$ -Killing-Spinor (siehe [9, Examples A.1.3]). Für alle  $t \in I$  und alle  $p \in S^3$  setzen wir

$$\sigma_t(p) := \mathcal{P}_{0,t}(p)\sigma(p),$$

wobei  $\mathcal{P}_{0,t}(p)$  wie gewöhnlich die Parallelverschiebung in  $\mathcal{Z} = [0, \varepsilon - 1] \times S^3$  bezüglich  $\gamma_p(s) = (s, p)$  von  $\gamma_p(0)$  nach  $\gamma_p(t)$  bezeichnet. Dann ist  $\sigma_{\varepsilon-1}$  ein Spinor auf  $(S^3, g_{\varepsilon-1} = g^\varepsilon)$ . Es bleibt zu zeigen, dass  $\varphi_0 := \sigma_{\varepsilon-1}$  die Gleichungen (6.16)-(6.17) erfüllt. Dazu setzen wir

$$U_1(t) := \frac{\mu}{t+1} + \frac{at^2}{4(t+1)} + \frac{at}{2(t+1)}.$$

Durch Nachrechnen erhalten wir

$$\frac{1}{2}a - U_1'(t) = \frac{1}{t+1}U_1(t). \quad (6.18)$$

Weiter folgt aus (6.2)-(6.3) und Lemma 6.9, dass  $W_t(K) = -\frac{1}{1+t}K$ ,  $W_t(Y) \equiv 0$  sowie

$$\begin{aligned} R^{\Sigma^+ \mathcal{Z}}(\nu, K)\tau &= \frac{1}{2}a\nu \cdot K \cdot \tau, \\ R^{\Sigma^+ \mathcal{Z}}(\nu, Y)\tau &= -\frac{1}{4}a\nu \cdot Y \cdot \tau, \end{aligned}$$

für alle horizontalen Vektorfelder  $Y \in \Gamma(TS^3)$  und alle  $\tau \in \Gamma(\Sigma^+ \mathcal{Z})$ . Damit berechnen wir wie im Beweis von Lemma 6.13

$$\begin{aligned} &\nabla_\nu^{\Sigma^+ \mathcal{Z}} \left( \nabla_{e_0(t)}^t \sigma_t - U_1(t)e_0(t) \cdot_t \sigma_t \right) \\ &= -\frac{1}{1+t} \left( \nabla_{e_0(t)}^t \sigma_t \right) + \left( \frac{1}{2}a - U_1'(t) \right) e_0(t) \cdot_t \sigma_t \\ &= -\frac{1}{1+t} \left( \nabla_{e_0(t)}^t \sigma_t - U_1(t)e_0(t) \cdot_t \sigma_t \right), \end{aligned}$$

wobei wir beim letzten Gleichheitszeichen (6.18) verwendet haben. Zusammen mit

$$\nabla_{e_0(0)}^0 \sigma_0 - U_1(0)e_0(0) \cdot_0 \sigma_0 = 0$$

erhalten wir eine Differentialgleichung, deren eindeutige Lösung Null ist. Damit folgt (6.16), indem man in

$$\nabla_{e_0(t)}^t \sigma_t - U_1(t)e_0(t) \cdot_t \sigma_t = 0$$

$t = \varepsilon - 1$  setzt und einer kurzen Rechnung. Um (6.17) zu zeigen, sei  $Y \in \Gamma(TS^3)$  ein beliebiges horizontales Vektorfeld und  $\tilde{Y}(t, p) := (0, Y(p))$  für alle  $p \in S^3$  und alle  $t \in I$ . Dann ist  $\tilde{Y} \in \Gamma(T\mathcal{Z})$  und (4.9) liefert

$$\nabla_\nu^{\mathcal{Z}} \tilde{Y} \equiv 0.$$

Wir erhalten

$$\begin{cases} \nabla_{\nu}^{\Sigma^+ \mathcal{Z}} \left( \nabla_{\tilde{Y}_t}^t \sigma_t - \left( -\frac{1}{4}at + \mu \right) \tilde{Y}_t \cdot_t \sigma_t \right) = 0, \\ \nabla_{\tilde{Y}_0}^0 \sigma_0 - \left( -\frac{1}{4}a0 + \mu \right) \tilde{Y}_0 \cdot_0 \sigma_0 = 0. \end{cases}$$

Daraus folgt wie zuvor (6.17). Mit Hilfe von Lemma 1.60 ii) folgt  $L_K |\varphi_0|^2 = L_Y |\varphi_0|^2 = 0$ , d.h.  $|\varphi_0|$  ist konstant als Funktion in  $p \in S^3$ . Nach Reskalierung können wir also von  $|\varphi_0| = 1$  ausgehen.

**2. Fall:**  $0 < \varepsilon < 1$ : Wir gehen analog zum ersten Fall vor, wobei wir  $\alpha(t) := 1 - t$ ,  $\beta \equiv 1$ ,  $I := [0, 1 - \varepsilon]$  setzen. Sei wieder  $\sigma \in \Gamma(\Sigma(S^3, g_{S^3}))$  ein  $\mu$ -Killing-Spinor. Für alle  $t \in I$  und alle  $p \in S^3$  setzen wir

$$\sigma_t(p) := \mathcal{P}_{0,t}(p)\sigma(p),$$

und  $\varphi_0 := \sigma_{1-\varepsilon}$ . Wir setzen

$$\tilde{U}_1(t) := \frac{\mu}{1-t} + \frac{at^2}{4(1-t)} - \frac{at}{2(1-t)},$$

und berechnen

$$-\frac{1}{2}a - U_1'(t) = -\frac{1}{1-t}U_1(t).$$

Durch ein zum ersten Fall analoges Vorgehen folgt daraus

$$\begin{aligned} & \nabla_{\nu}^{\Sigma^+ \mathcal{Z}} \left( \nabla_{e_0(t)}^t \sigma_t - \tilde{U}_1(t) e_0(t) \cdot_t \sigma_t \right) \\ &= \frac{1}{1+t} \left( \nabla_{e_0(t)}^t \sigma_t \right) + \left( -\frac{1}{2}a - \tilde{U}_1'(t) \right) e_0(t) \cdot_t \sigma_t \\ &= \frac{1}{1+t} \left( \nabla_{e_0(t)}^t \sigma_t - \tilde{U}_1(t) e_0(t) \cdot_t \sigma_t \right), \end{aligned}$$

und wir erhalten wie zuvor

$$\nabla_{e_0(t)}^t \sigma_t - \tilde{U}_1(t) e_0(t) \cdot_t \sigma_t = 0,$$

woraus durch Einsetzen von  $t = 1 - \varepsilon$  die Gleichung (6.16) folgt. Weiter zeigt man analog zum ersten Fall

$$\nabla_{\tilde{Y}_t}^t \sigma_t - \left( \frac{1}{4}at + \mu \right) \tilde{Y}_t \cdot_t \sigma_t = 0,$$

woraus (6.17) folgt.  $\square$

Wir betrachten den verallgemeinerten Zylinder, den wir bezüglich der in (6.1) angegebenen Einparameterfamilie von Riemannschen Metriken bilden, wobei wir zusätzlich  $\alpha(0) = \varepsilon > 0$  und  $\beta(0) = 1$  annehmen. Als Spinstruktur auf dem verallgemeinerten Zylinder wählen wir wieder diejenige, die von der Spinstruktur auf  $(S^3, g_0)$  induziert wird.

Weiter sei im Folgenden stets

$$\varphi_t(p) := \varphi(t, p) := \mathcal{P}_{0,t}(p)(\varphi_0(p)) \in \Sigma^+ \mathcal{Z},$$

wobei  $\mathcal{P}_{0,t}(p)$  die Parallelverschiebung in  $\Sigma^+ \mathcal{Z}$  entlang  $\gamma_p(s) = (s, p)$  von  $\gamma_p(0)$  nach  $\gamma_p(t)$  bezeichnet. Dabei sei  $\varphi_0$  wie in Theorem 6.17 gewählt. Wir machen alle Identifizierungen aus Theorem 4.8, insbesondere ist  $\varphi_t \in \Gamma(\Sigma(S^3, g_t))$  und wir schreiben wieder kurz  $\nabla^t := \nabla^{\Sigma(S^3, g_t)}$ .

**Lemma 6.22** Für alle  $t \in I$  und alle horizontalen Vektorfelder  $Y \in \Gamma(TS^3)$  gilt

$$\nabla_K^t \varphi_t = \left( \frac{\mu - \frac{1}{4}a}{\alpha(t)} + \frac{1}{4} \frac{\alpha(t)}{\beta(t)^2} a \right) K \cdot_t \varphi_t \quad (6.19)$$

$$\nabla_Y^t \varphi_t = \frac{1}{\beta(t)} \left( -\frac{1}{4}a \left( \frac{\alpha(t)}{\beta(t)} - 1 \right) + \mu \right) Y \cdot_t \varphi_t \quad (6.20)$$

*Beweis.* Der Beweis verläuft analog zum Beweis von Lemma 6.13.  $\square$

**Lemma 6.23** Für alle  $t \in I$  gilt

$$\begin{aligned} Q_1(g_t, \varphi_t)(e_0(t), e_0(t)) &= \frac{1}{4} \frac{1}{\alpha(t)^2} \left( \mu - \frac{1}{4}a \right)^2 + \frac{1}{\beta(t)^2} \left( -\frac{1}{2}\mu^2 - \frac{3}{8}a\mu \right) \\ &\quad + \frac{\alpha(t)}{\beta(t)^3} \left( \frac{1}{8}a^2 + \frac{1}{2}a\mu \right) - \frac{9}{64} \frac{\alpha(t)^2}{\beta(t)^4} a^2, \\ Q_1(g_t, \varphi_t)(e_1(t), e_1(t)) &= -\frac{1}{4} \frac{1}{\alpha(t)^2} \left( \mu - \frac{1}{4}a \right)^2 + \frac{\alpha(t)}{\beta(t)^3} \left( -\frac{1}{32}a^2 - \frac{1}{8}a\mu \right) + \frac{3}{64} \frac{\alpha(t)^2}{\beta(t)^4} a^2, \\ Q_1(g_t, \varphi_t)(e_2(t), e_2(t)) &= Q_1(g_t, \varphi_t)(e_1(t), e_1(t)), \\ Q_1(g_t, \varphi_t)(e_i(t), e_j(t)) &= 0 \text{ für } i \neq j, \\ Q_2(g_t, \varphi_t) &= 0. \end{aligned}$$

*Beweis.* Der Beweis verläuft analog zum Beweis von Lemma 6.14, wobei wir Lemma 6.22 anstelle von Lemma 6.13 verwenden: Wir setzen

$$\begin{aligned} A(t) &:= \frac{\mu - \frac{1}{4}a}{\alpha(t)} + \frac{1}{4} \frac{\alpha(t)}{\beta(t)^2} a, \\ B(t) &:= \frac{1}{\beta(t)} \left( -\frac{1}{4}a \left( \frac{\alpha(t)}{\beta(t)} - 1 \right) + \mu \right) \end{aligned}$$

und erhalten

$$\begin{aligned} \nabla_{e_0(t)}^t \nabla_{e_0(t)}^t \varphi_t &= -A(t)^2 \varphi_t, \\ \nabla_{e_i(t)}^t \nabla_{e_i(t)}^t \varphi_t &= B(t) \left( \nabla_{e_i(t)}^t e_i(t) \right) \varphi_t - B(t)^2 \varphi_t \quad \text{für } i = 1, 2, \\ \nabla_{\nabla_{e_0(t)}^t e_0(t)}^t \varphi_t &= 0, \\ \nabla_{\nabla_{e_i(t)}^t e_i(t)}^t \varphi_t &= B(t) \left( \nabla_{e_i(t)}^t e_i(t) \right) \varphi_t \quad \text{für } i = 1, 2, \\ \nabla^{t*} \nabla^t \varphi_t &= \left( A(t)^2 + 2B(t)^2 \right) \varphi_t, \\ |\nabla^t \varphi_t|^2 &= A(t)^2 + 2B(t)^2. \end{aligned}$$

Daraus folgt  $Q_2(g_t, \varphi_t) = 0$ . Weiter ist

$$\begin{aligned} \left( \nabla^t \varphi_t \otimes \nabla^t \varphi_t \right) (e_0(t), e_0(t)) &= A(t)^2, \\ \left( \nabla^t \varphi_t \otimes \nabla^t \varphi_t \right) (e_i(t), e_i(t)) &= B(t)^2 \quad \text{für } i = 1, 2, \\ \left( \nabla^t \varphi_t \otimes \nabla^t \varphi_t \right) (e_i(t), e_j(t)) &= 0 \quad \text{für } i \neq j. \end{aligned}$$

Wie im Beweis von Lemma 6.14 sei wieder

$$T_{ijk} := (e_i(t) \cdot_t e_j(t) \cdot_t \varphi_t, \nabla_{e_k(t)}^t \varphi_t)$$

für  $i, j, k \in \{0, 1, 2\}$ . Dann ist

$$\begin{aligned} -T_{210} &= T_{120} = A(t), \\ -T_{021} &= -T_{102} = T_{201} = T_{012} = B(t), \\ T_{ijk} &= 0 \text{ sonst} \end{aligned}$$

und weiter

$$\begin{aligned} -T_{g_t, \varphi_t}(e_2(t), e_0(t), e_1(t)) &= -T_{g_t, \varphi_t}(e_2(t), e_1(t), e_0(t)) \\ &= T_{g_t, \varphi_t}(e_1(t), e_2(t), e_0(t)) \\ &= T_{g_t, \varphi_t}(e_1(t), e_0(t), e_2(t)) \\ &= \frac{1}{2}(A(t) - B(t)), \\ T_{g_t, \varphi_t}(e_i(t), e_j(t), e_k(t)) &= 0 \text{ sonst.} \end{aligned}$$

Damit berechnet man

$$\begin{aligned} (\operatorname{div}_{g_t} T_{g_t, \varphi_t})(e_0(t), e_0(t)) &= \frac{\alpha(t)}{\beta(t)^2} a(A(t) - B(t)), \\ (\operatorname{div}_{g_t} T_{g_t, \varphi_t})(e_i(t), e_i(t)) &= -\frac{1}{2} \frac{\alpha(t)}{\beta(t)^2} a(A(t) - B(t)) \quad \text{für } i = 1, 2, \\ (\operatorname{div}_{g_t} T_{g_t, \varphi_t})(e_i(t), e_j(t)) &= 0 \quad \text{für } i \neq j, \end{aligned}$$

woraus die Behauptung durch Ausrechnen folgt.  $\square$

Wie im vorherigen Abschnitt beweisen wir nun Theorem 6.17, indem wir zeigen, dass die Identität  $\frac{\partial}{\partial t} g_t = Q_1(g_t, \varphi_t)$  äquivalent ist zu einem System zweier nichtlinearer gewöhnlicher Differentialgleichungen für  $(\alpha, \beta)$ . Anschließend lösen wir dieses System, um die Aussagen über die Eigenschaften von  $\alpha$  und  $\beta$  zu erhalten.

*Beweis von Theorem 6.17.* Genau wie in Proposition 5.4 zeigt man

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^{\Sigma^+ \mathcal{Z}} \varphi = 0$$

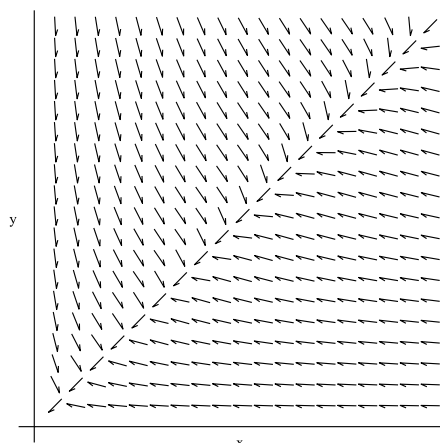
und

$$|\varphi| = 1.$$

Insbesondere ist  $\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^{\Sigma^+ \mathcal{Z}} \varphi = 0 = Q_2(g_t, \varphi_t)$ .

Kombinieren wir Proposition 6.7 und Lemma 6.23, so sehen wir, dass  $\frac{\partial}{\partial t} g_t = Q_1(g_t, \varphi_t)$  mit  $g_0 = g^\varepsilon$  genau dann gilt, wenn  $(\alpha, \beta)$  die Lösung des folgenden Systems von zwei nichtlinearen gewöhnlichen Differentialgleichungen ist:

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= -\frac{9}{128} a^2 \frac{\alpha(t)^3}{\beta(t)^4} + \left(\frac{1}{16} a^2 + \frac{1}{4} a\mu\right) \frac{\alpha(t)^2}{\beta(t)^3} + \left(-\frac{1}{4} \mu^2 - \frac{3}{16} a\mu\right) \frac{\alpha(t)}{\beta(t)^2} + \frac{1}{8} \left(\mu - \frac{1}{4} a\right)^2 \frac{1}{\alpha(t)}, \\ \beta'(t) &= \frac{3}{128} a^2 \frac{\alpha(t)^2}{\beta(t)^3} + \left(-\frac{1}{64} a^2 - \frac{1}{16} a\mu\right) \frac{\alpha(t)}{\beta(t)^2} - \frac{1}{8} \left(\mu - \frac{1}{4} a\right)^2 \frac{\beta(t)}{\alpha(t)^2}, \\ \alpha(0) &= \varepsilon, \\ \beta(0) &= 1. \end{aligned}$$

Abbildung 6: Plot des Vektorfelds  $F$  aus dem Beweis von Theorem 6.17 im Fall  $a\mu = -1$ .

Wir betrachten das zugehörige Vektorfeld

$$F: U := \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \vee y = 0\} \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

$$F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{9}{128}a^2\frac{x^3}{y^4} + \left(\frac{1}{16}a^2 + \frac{1}{4}a\mu\right)\frac{x^2}{y^3} + \left(-\frac{1}{4}\mu^2 - \frac{3}{16}a\mu\right)\frac{x}{y^2} + \frac{1}{8}\left(\mu - \frac{1}{4}a\right)^2\frac{1}{x} \\ \frac{3}{128}a^2\frac{x^2}{y^3} + \left(-\frac{1}{64}a^2 - \frac{1}{16}a\mu\right)\frac{x}{y^2} - \frac{1}{8}\left(\mu - \frac{1}{4}a\right)^2\frac{y}{x^2} \end{pmatrix},$$

d.h. die Integralkurven von  $F$  mit Startpunkt  $(\varepsilon, 1)$  sind genau die Lösungen des obigen Systems.

**1. Fall:**  $a\mu = 1$ : In diesem Fall ist  $F$  genau wie im Fall „ $a\lambda = 2$ “ des Beweises von Theorem 6.10 und es ist nichts mehr zu zeigen.

**2. Fall:**  $a\mu = -1$ : In diesem Fall ist  $F$  gegeben durch

$$F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{9}{32}\frac{x^3}{y^4} + \frac{1}{8}\frac{x}{y^2} + \frac{1}{8}\frac{1}{x} \\ \frac{3}{32}\frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{8}\frac{y}{x^2} \end{pmatrix}.$$

Einen Plot von  $F$  im Fall  $a\mu = -1$  findet man in Abbildung 6.

Sei  $c: J \rightarrow U$  die Integralkurve von  $F$  mit  $c(t) = (x(t), y(t))$ ,  $x(0) = \varepsilon > 1$ ,  $y(0) = 1$ ,  $J = [0, t_{max})$  maximales Existenzintervall nach rechts,  $t_{max} \in (0, \infty]$ . Dann gilt  $x(t) > y(t)$  für alle  $t \in J$  (da die Gerade  $y = x$  (mit  $x > 0$ ) das Bild einer Integralkurve von  $F$  ist). Weiter ist  $x$  streng monoton fallend, denn es ist

$$x(t)x'(t) = -\frac{9}{32}\left(\frac{x(t)^2}{y(t)^2}\right)^2 + \frac{1}{8}\left(\frac{x(t)^2}{y(t)^2}\right) + \frac{1}{8} < 0,$$

da  $-\frac{9}{32}z^2 + \frac{1}{8}z + \frac{1}{8} < 0$  für  $z > 1$ .

Gehen wir analog zum Beweis von Theorem 6.10 vor (d.h. wir argumentieren mit Normalenvektoren), erhalten wir:

Es gilt  $c(t) \in K(x(0), y(0))$  für alle  $t \in J$ , wobei

$$K(x(0), y(0)) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq x(0), \frac{y(0)}{x(0)}x \leq y \leq x\}.$$

Es folgt  $c(t) \xrightarrow{t \rightarrow t_{max}} 0$  wie im Beweis von Theorem 6.10, zweiter Schritt (nach der fünften Behauptung).

Sei  $c: J \rightarrow U$  die Integralkurve von  $F$  mit  $c(t) = (x(t), y(t))$ ,  $x(0) = \varepsilon < 1$ ,  $y(0) = 1$ ,  $J = [0, t_{max})$  maximales Existenzintervall nach rechts,  $t_{max} \in (0, \infty]$ . Dann gilt  $x(t) < y(t)$  für alle  $t \in J$  und  $y$  ist streng monoton fallend, denn es ist

$$y(t)y'(t) = \frac{3}{32} \underbrace{\frac{x(t)^2}{y(t)^2}}_{<1} - \frac{1}{8} \underbrace{\frac{y(t)^2}{x(t)^2}}_{>1} < 0.$$

Wir erhalten wieder  $c(t) \in K(x(0), y(0))$  für alle  $t \in J$ , wobei

$$K(x(0), y(0)) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq y(0), \frac{x(0)}{y(0)}y \leq x \leq y\}.$$

Wieder folgt  $c(t) \xrightarrow{t \rightarrow t_{max}} 0$  (wobei man ausnutzt, dass  $y$  streng monoton fallend ist).  $\square$

*Beweis von Theorem 6.19.* Wählen wir  $\varphi_0 \in \Gamma(\Sigma(S^3, g^\varepsilon))$  wie in Lemma 6.21, dann erfüllt  $\varphi_0 \in \Gamma(\Sigma(S^3, c(\varepsilon)g^\varepsilon))$ , dass

$$\begin{aligned} \nabla_K^{\Sigma(S^3, c(\varepsilon)g^\varepsilon)} \varphi_0 &= \frac{1}{\sqrt{c(\varepsilon)}} \left( \frac{\mu - \frac{1}{4}a}{\varepsilon} + \frac{1}{4}a\varepsilon \right) K \cdot \varphi_0, \\ \nabla_Y^{\Sigma(S^3, c(\varepsilon)g^\varepsilon)} \varphi_0 &= \frac{1}{\sqrt{c(\varepsilon)}} \left( -\frac{1}{4}a(\varepsilon - 1) + \mu \right) Y \cdot \varphi_0, \end{aligned}$$

für alle horizontalen Vektorfelder  $Y \in \Gamma(TS^3)$ , siehe Bemerkung 1.59, d.h. der Spinor-Teil des Anfangswertes existiert. Um die Gleichungen (6.19)-(6.20) für  $(g_t, \varphi_t)$  zu zeigen, können wir analog zu den Beweisen von Lemma 6.13 bzw. Lemma 6.22 vorgehen (wobei wir dieses mal  $\alpha(0) = \sqrt{c(\varepsilon)}\varepsilon$  und  $\beta(0) = \sqrt{c(\varepsilon)}$  annehmen) und Differentialgleichungen mit Anfangswerten aufstellen. Die Anfangswerte der Differentialgleichungen lieferten uns die Gleichungen für  $\varphi_0$ . In unserem Fall sind das

$$\begin{aligned} \nabla_K^{\Sigma(S^3, c(\varepsilon)g^\varepsilon)} \varphi_0 &= \frac{1}{\sqrt{c(\varepsilon)}} \left( \frac{\mu - \frac{1}{4}a}{\varepsilon} + \frac{1}{4}a\varepsilon \right) K \cdot \varphi_0 \\ &= \left( \frac{\mu - \frac{1}{4}a}{\alpha(0)} + \frac{1}{4}a \frac{\alpha(0)}{\beta(0)^2} \right) K \cdot \varphi_0, \\ \nabla_Y^{\Sigma(S^3, c(\varepsilon)g^\varepsilon)} \varphi_0 &= \frac{1}{\sqrt{c(\varepsilon)}} \left( -\frac{1}{4}a(\varepsilon - 1) + \mu \right) Y \cdot \varphi_0 \\ &= \frac{1}{\beta(0)} \left( -\frac{1}{4}a \left( \frac{\alpha(0)}{\beta(0)} - 1 \right) + \mu \right) Y \cdot \varphi_0, \end{aligned}$$

da  $\alpha(0) = \sqrt{c(\varepsilon)}\varepsilon$  und  $\beta(0) = \sqrt{c(\varepsilon)}$ , wir haben also die passenden Anfangswerte.

Da  $(g_t, \varphi_t)$  die Gleichungen (6.19)-(6.20) erfüllen, gelten für  $Q_1(g_t, \varphi_t)$  und  $Q_2(g_t, \varphi_t)$  die Identitäten aus Lemma 6.23. Insbesondere haben wir  $\nabla_\nu^{\Sigma^+ \mathcal{Z}} \varphi = 0 = Q_2(g_t, \varphi_t)$ .

Wir zeigen, dass  $\frac{\partial}{\partial t} g_t = \tilde{Q}_1(g_t, \varphi_t)$  mit  $g_0 = c(\varepsilon)g^\varepsilon$  äquivalent ist zu einem System von zwei Differentialgleichungen für  $(\alpha, \beta)$ .

Um  $\tilde{Q}_1(g_t, \varphi_t)$  zu berechnen, halten wir fest:

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} \frac{1}{\text{vol}(S^3, g_t)} \mathcal{E}(g_t, \varphi_t) &= \frac{1}{12} \frac{1}{\text{vol}(S^3, g_t)} \int_{S^3} |\nabla^t \varphi_t|^2 dv^{g_t} \\ &= \frac{1}{12} |\nabla^t \varphi_t|^2 \frac{1}{\text{vol}(S^3, g_t)} \text{vol}(S^3, g_t) \\ &= \frac{1}{12} \left( \mu - \frac{1}{4}a \right)^2 \frac{1}{\alpha(t)^2} + \frac{1}{64} a^2 \frac{\alpha(t)^2}{\beta(t)^4} + \frac{1}{24} a \left( \mu - \frac{1}{4}a \right) \frac{1}{\beta(t)^2} \\ &\quad + \frac{1}{6} \left( \frac{1}{4}a + \mu \right)^2 \frac{1}{\beta(t)^2} - \frac{1}{12} a \left( \frac{1}{4}a + \mu \right) \frac{\alpha(t)}{\beta(t)^3}. \end{aligned}$$

( $|\nabla^t \varphi_t|^2$  haben wir im Beweis von Lemma 6.14 berechnet.) Damit ist  $\frac{\partial}{\partial t} g_t = \tilde{Q}_1(g_t, \varphi_t)$  mit  $g_0 = c(\varepsilon)g^\varepsilon$  äquivalent zu folgendem System von zwei Differentialgleichungen für  $(\alpha, \beta)$ :

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= -\frac{1}{16} a^2 \frac{\alpha(t)^3}{\beta(t)^4} + \frac{5}{24} a \left( \frac{1}{4}a + \mu \right) \frac{\alpha(t)^2}{\beta(t)^3} + \left( -\frac{1}{4} \mu^2 - \frac{3}{16} a \mu \right) \frac{\alpha(t)}{\beta(t)^2} + \frac{1}{6} \left( \mu - \frac{1}{4}a \right)^2 \frac{1}{\alpha(t)} \\ &\quad + \frac{1}{48} a \left( \mu - \frac{1}{4}a \right) \frac{\alpha(t)}{\beta(t)^2} + \frac{1}{12} \left( \frac{1}{4}a + \mu \right)^2 \frac{\alpha(t)}{\beta(t)^2}, \\ \beta'(t) &= \frac{1}{32} a^2 \frac{\alpha(t)^2}{\beta(t)^3} - \frac{5}{48} a \left( \frac{1}{4}a + \mu \right) \frac{\alpha(t)}{\beta(t)^2} - \frac{1}{12} \left( \mu - \frac{1}{4}a \right)^2 \frac{\beta(t)}{\alpha(t)^2} + \frac{1}{48} a \left( \mu - \frac{1}{4}a \right) \frac{1}{\beta(t)} \\ &\quad + \frac{1}{12} \left( \frac{1}{4}a + \mu \right)^2 \frac{1}{\beta(t)}, \\ \alpha(0) &= \sqrt{c(\varepsilon)} \varepsilon, \\ \beta(0) &= \sqrt{c(\varepsilon)}. \end{aligned}$$

Für  $a\mu = 1$  haben wir also

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= -\frac{1}{4} \frac{\alpha(t)^3}{\beta(t)^4} + \frac{5}{12} \frac{\alpha(t)^2}{\beta(t)^3} - \frac{1}{6} \frac{\alpha(t)}{\beta(t)^2}, \\ \beta'(t) &= \frac{1}{8} \frac{\alpha(t)^2}{\beta(t)^3} - \frac{5}{24} \frac{\alpha(t)}{\beta(t)^2} + \frac{1}{12} \frac{1}{\beta(t)}, \end{aligned}$$

und für  $a\mu = -1$  gilt

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= -\frac{1}{4} \frac{\alpha(t)^3}{\beta(t)^4} + \frac{1}{12} \frac{\alpha(t)}{\beta(t)^2} + \frac{1}{6} \frac{1}{\alpha(t)}, \\ \beta'(t) &= \frac{1}{8} \frac{\alpha(t)^2}{\beta(t)^3} - \frac{1}{12} \frac{\beta(t)}{\alpha(t)^2} - \frac{1}{24} \frac{1}{\beta(t)}. \end{aligned}$$

Mit  $F = F(x, y)$  bezeichnen wir das zu der Differentialgleichung für  $(\alpha, \beta)$  gehörende Vektorfeld, wie in den Beweisen der Theoreme 6.10 und 6.17.

Da wir uns nur für die Anfangswerte  $(\sqrt{c(\varepsilon)}\varepsilon, \sqrt{c(\varepsilon)})$  mit  $\varepsilon > 0$  interessieren, reicht es,  $F$  auf einer passenden Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^2$  zu betrachten. Dazu definieren wir

$$u: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \left( \sqrt{c(t)}t, \sqrt{c(t)} \right) = \left( (2\pi^2)^{-\frac{1}{3}} t^{\frac{2}{3}}, (2\pi^2)^{-\frac{1}{3}} t^{-\frac{1}{3}} \right).$$

Wir stellen fest:  $u$  ist injektiv und eine Immersion (da  $u'(t) \neq 0$  für alle  $t \in (0, \infty)$ ). Weiter ist  $u$  eine topologische Einbettung, denn die Umkehrabbildung

$$u^{-1}: \text{Im}(u) \rightarrow (0, \infty), \quad (x, y) \mapsto (2\pi^2)^{\frac{1}{2}} x^{\frac{2}{3}},$$

ist stetig. Damit ist  $\text{Im}(u)$  eine eingebettete Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^2$ .

Wir zeigen, dass  $F$  tangential zu  $\text{Im}(u)$  ist. Es ist  $T_{u(t)}\text{Im}(u) = \text{span}\{u'(t)\}$ . Durch Nachrechnen erhält man

$$F(u(t)) = k(t)u'(t),$$

mit

$$k(t) = \begin{cases} \frac{1}{8}(2\pi^2)^{\frac{2}{3}} t^{\frac{5}{3}}(-3t^2 + 5t - 2), & \text{falls } a\mu = 1, \\ \frac{1}{8}(2\pi^2)^{\frac{2}{3}} t^{-\frac{1}{3}}(-3t^4 + t^2 + 2), & \text{falls } a\mu = -1, \end{cases}$$

für alle  $t \in (0, \infty)$ . Insbesondere ist  $F$  tangential zu  $\text{Im}(u)$ . Es sind Integralkurven von

$$V := F|_{\text{Im}(u)}: \text{Im}(u) \rightarrow T\text{Im}(u),$$

auch Integralkurven von  $F$  (nach Verknüpfung mit der Inklusion  $\text{Im}(u) \rightarrow \mathbb{R}^2$ ). Da die für uns interessanten Anfangswerte in  $\text{Im}(u)$  liegen, reicht es, wenn wir die Integralkurven von  $V$  verstehen. Dazu betrachten wir das Vektorfeld

$$\tilde{V} := d(u^{-1})(V \circ u): (0, \infty) \rightarrow T(0, \infty),$$

d.h.  $\tilde{V}(t) = (d(u^{-1}))_{u(t)}(V(u(t)))$ .

**Behauptung:** Es gilt  $\tilde{V}(t) = k(t)$  für alle  $t \in (0, \infty)$ .

Beweis:  $u^{-1}: \text{Im}(u) \rightarrow (0, \infty)$  ist eine Karte für  $\text{Im}(u)$ . Es gilt  $\left. \frac{\partial}{\partial(u^{-1})} \right|_{u(t)} = u'(t)$ , woraus folgt

$$\tilde{V}(t) = (d(u^{-1}))_{u(t)}(V(u(t))) = k(t)(d(u^{-1}))_{u(t)} \left( \left. \frac{\partial}{\partial(u^{-1})} \right|_{u(t)} \right) = k(t)e_1 = k(t).$$

Damit ist die Behauptung gezeigt. Nun zeigen wir die Aussagen von Theorem 6.19 durch eine Fallunterscheidung.

**1. Fall:**  $a\mu = 1$ : (Siehe Abbildung 7.) In diesem Fall hat  $\tilde{V} = k$  genau die kritischen Punkte  $t = \frac{2}{3}$  und  $t = 1$ . Insbesondere ist  $F(u(1)) = 0 = F(u(\frac{2}{3}))$ , d.h.  $(\sqrt{c(1)}, \sqrt{c(1)})$  und  $(\sqrt{c(\frac{2}{3})}, \sqrt{c(\frac{2}{3})})$  sind kritische Punkte von  $F$ . Daraus folgt die Aussage von Theorem 6.19 im Fall  $a\mu = 1$  und  $\varepsilon = 1$ ,  $\varepsilon = \frac{2}{3}$ . (Die Aussage über die kritischen Punkte in Theorem 6.19 erhält man dabei wie folgt: Sei  $\varepsilon = \frac{2}{3}$ . Dann ist  $g_0 = c(\frac{2}{3})g^{\frac{2}{3}}$  und es gilt

$$-\text{grad}(\mathcal{E}|_{\mathcal{N}_1})_{(g_0, \varphi_0)} = (\tilde{Q}_1(g_0, \varphi_0), Q_2(g_0, \varphi_0)) = 0,$$

wobei  $\tilde{Q}_1(g_0, \varphi_0) = \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} g_t = 0$ , da  $g_t$  in diesem Fall konstant in  $t$  ist. Analog für  $\varepsilon = 1$ .)

Weiter gilt

$$\begin{aligned} \tilde{V}(t) &> 0 \text{ für } t \in \left(\frac{2}{3}, 1\right), \\ \tilde{V}(t) &< 0 \text{ für } t \in \left(0, \frac{2}{3}\right) \cup (1, \infty). \end{aligned}$$

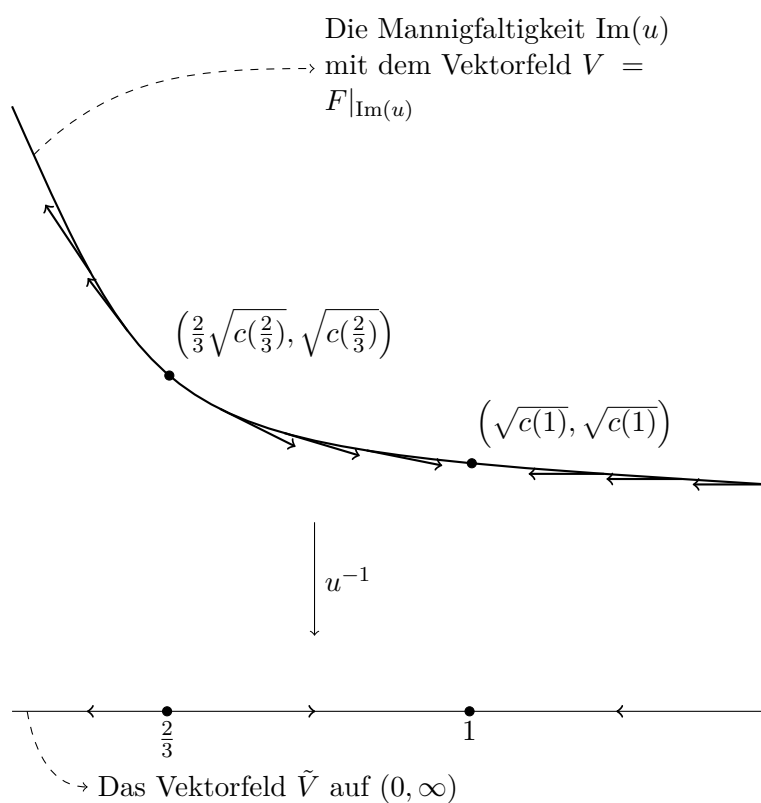


Abbildung 7: Beweis von Theorem 6.19 im Fall  $a\mu = 1$ .

Sei  $\tilde{\gamma}: [0, t_{max}) \rightarrow (0, \infty)$  eine Integralkurve von  $\tilde{V}$ . Dann gilt:

Ist  $\tilde{\gamma}(0) > 1$ , so ist  $\tilde{\gamma}$  streng monoton fallend und immer größer als 1. Insbesondere konvergiert  $\tilde{\gamma}(t)$  für  $t \rightarrow t_{max}$  und der Grenzwert liegt in  $(0, \infty)$ . Das bedeutet  $t_{max} = \infty$  und der Grenzwert ist ein kritischer Punkt von  $\tilde{V}$  (siehe z.B. [13, S. 158]). Da  $\tilde{V}$  nur die kritischen Punkte  $\frac{2}{3}$  und 1 hat, folgt  $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\gamma}(t) = 1$ . Daraus folgt die Aussage von Theorem 6.19 im Fall  $a\mu = 1$  und  $\varepsilon > 1$ : Sei  $\gamma$  eine Integralkurve von  $V$  mit  $\gamma(0) = u(\varepsilon)$ ,  $\varepsilon > 1$ . Dann ist  $\tilde{\gamma} := u^{-1} \circ \gamma$  eine Integralkurve von  $\tilde{V}$  mit  $\tilde{\gamma}(0) = \varepsilon > 1$ . Dann existiert  $\tilde{\gamma}$  nach dem gerade Gezeigten auf  $[0, \infty)$  und ebenso  $\gamma$  (oder man kann  $\gamma$  auf  $[0, \infty)$  fortsetzen) mit  $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\gamma}(t) = 1$ . Daraus folgt  $\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(t) = u(1)$ , was zu zeigen war.

Ist  $\frac{2}{3} < \tilde{\gamma}(0) < 1$ , so ist  $\tilde{\gamma}$  streng monoton steigend und immer kleiner als 1. Wieder folgt, dass  $\tilde{\gamma}(t)$  für  $t \rightarrow t_{max} = \infty$  konvergiert und dass der Grenzwert in  $(0, \infty)$  liegt. Wie oben bedeutet das  $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\gamma}(t) = \frac{2}{3}$ . Daraus folgt wie oben die Aussage von Theorem 6.19 im Fall  $a\mu = 1$  und  $\frac{2}{3} < \varepsilon < 1$ .

Ist  $\tilde{\gamma}(0) < \frac{2}{3}$ , so ist  $\tilde{\gamma}$  streng monoton fallend und immer kleiner als  $\frac{2}{3}$ . Insbesondere konvergiert  $\tilde{\gamma}(t)$  für  $t \rightarrow t_{max}$ . Da  $\tilde{V}$  nur die kritischen Punkte  $\frac{2}{3}$  und 1 hat, liegt der Grenzwert nicht in  $(0, \infty)$ . Das bedeutet  $\lim_{t \rightarrow t_{max}} \tilde{\gamma}(t) = 0$ . Sei nun  $\gamma: [0, t_{max}) \rightarrow \text{Im}(u)$  eine Integralkurve von  $V$  mit  $\gamma(0) = u(\varepsilon)$ ,  $\varepsilon < \frac{2}{3}$ ,  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ . Dann ist wieder  $\tilde{\gamma} := u^{-1} \circ \gamma$  eine Integralkurve von  $\tilde{V}$  mit  $\tilde{\gamma}(0) = \varepsilon < \frac{2}{3}$ . Die maximalen Existenzzeiten (nach rechts) von  $\gamma$  und  $\tilde{\gamma}$  stimmen überein. Es folgt  $(u^{-1} \circ \gamma)(t) \xrightarrow{t \rightarrow t_{max}} 0$ . Aus der Definition von  $u^{-1}$  folgt  $x(t) \xrightarrow{t \rightarrow t_{max}} 0$ . Wir wissen, dass  $(x(t), y(t))$  eine Lösung der Differentialgleichung für  $(\alpha, \beta)$  ist. Damit ist der Metrik-Teil der Lösung des volumennormalisierten Spinorflusses in diesem Fall gegeben als

$$g_t(X_1 + Y_1, X_2 + Y_2) = g_{S^3}(x(t)X_1 + y(t)Y_1, x(t)X_2 + y(t)Y_2)$$

für  $t \in [0, t_{max})$ ,  $X_i \in \ker(d\pi_p)$ ,  $Y_i \in (\ker(d\pi_p))^\perp$ . Da für das Volumen  $1 \equiv \text{vol}(S^3, g_t) = 2\pi^2 x(t)y(t)^2$  gilt, folgt  $\lim_{t \rightarrow t_{max}} y(t) = \infty$ . Daraus folgt die Aussage von Theorem 6.19 im Fall  $a\mu = 1$  und  $0 < \varepsilon < \frac{2}{3}$ .

**2. Fall:**  $a\mu = -1$ : Diesen Fall behandelt man analog. Dabei hat  $\tilde{V}$  nur den kritischen Punkt 1 und es gilt

$$\tilde{V}(t) > 0 \text{ für } 0 < t < 1,$$

$$\tilde{V}(t) < 0 \text{ für } t > 1.$$

□

## Literatur

- [1] AMMANN, B. und C. BÄR: *The Dirac operator on nilmanifolds and collapsing circle bundles*. Ann. Global Anal. Geom., 16(3):221–253, 1998.
- [2] AMMANN, B. und N. GROSSE:  *$L^p$ -spectrum of the Dirac operator on products with hyperbolic spaces*. Preprint 2014. arXiv:1405.2830.
- [3] AMMANN, B., H. WEISS und F. WITT: *A spinorial energy functional: critical points and gradient flow*. arXiv:1207.3529.
- [4] BÄR, C., P. GAUDUCHON und A. MOROIANU: *Generalized cylinders in semi-Riemannian and Spin geometry*. Math. Z., 249(3):545–580, 2005.
- [5] BAUM, H.: *Eichfeldtheorie: Eine Einführung in die Differentialgeometrie auf Faserbündeln*. Springer, 2009.
- [6] BOURGUIGNON, J.-P. und P. GAUDUCHON: *Spineurs, opérateurs de Dirac et variations de métriques*. Comm. Math. Phys., 144(3):581–599, 1992.
- [7] CODDINGTON, E. A. und N. LEVINSON: *Theory of ordinary differential equations*. McGraw-Hill Book Company, Inc., 1987.
- [8] FRIEDRICH, T.: *Dirac-Operatoren in der Riemannschen Geometrie*. Verlag Vieweg, 1997.
- [9] GINOUX, N.: *The Dirac spectrum*, Bd. 1976 d. Reihe *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2009.
- [10] HATCHER, A.: *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2002. Kostenlose elektronische Version: <http://www.math.cornell.edu/~hatcher/AT/AT.pdf>.
- [11] HIJAZI, O.: *Spectral Properties of the Dirac Operator and Geometrical Structures*. Proceedings of the Summer School on Geometric Methods in Quantum Field Theory, Villa de Leyva, Colombia, July 12-30, (1999), World Scientific 2001.
- [12] HUISKEN, G.: *Flow by mean curvature of convex surfaces into spheres*. J. Diff. Geom., 20:237–266, 1984.
- [13] KÖNIGSBERGER, K.: *Analysis 2*. Springer, fünfte, korrigierte Aufl., 2004.
- [14] LANG, S.: *Algebra*. Springer, dritte Aufl., 2002.
- [15] LAWSON, H. B. und M.-L. MICHELSON: *Spin Geometry*. Princeton University Press, 1989.
- [16] LEE, J. M.: *Introduction to smooth manifolds*, Bd. 218 d. Reihe *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, zweite Aufl., 2013.
- [17] O’NEILL, B.: *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity*. Academic Press, 1983.
- [18] ROE, J.: *Elliptic operators, topology and asymptotic methods*. Longman, 1998.



## **Eigenständigkeitserklärung**

Hiermit versichere ich, dass ich diese Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen benutzt habe.

---

Ort, Datum

---

Unterschrift