Universität Regensburg
Fakultät für Mathematik

Ein Kriterium für die Algebraizität von glatten formalen Keimen

Masterarbeit

zur Erlangung des akademischen Grades
Master of Science
im Studiengang Mathematik

eingereicht bei Prof. Dr. Klaus Künnemann
am 31. März 2014

Vorgelegt von:
Regina Schmiddunser
Deutschherrnweg 2
93053 Regensburg
geboren am 25. Mai 1989 in Rosenheim

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Die formale Geometrie ist ein Bereich der algebraischen Geometrie, der in den verschiedensten Situationen Anwendung findet. So verwendet Oscar Zariski 1951 in seiner Arbeit über holomorphe Funktionen auf Varietäten bereits formale Vervollständigungen [Z]. Eine systematische Einführung von formalen Schemata und deren Eigenschaften gibt Alexander Grothendieck dann 1960 [EGAI, Ch. 10].

Wie immer in der algebraischen Geometrie beruhen die grundsätzlichen Ideen und Konstruktionen auf Konzepten der kommutativen Algebra. Ist A ein kommutativer Ring mit Eins, so kann man A bezüglich eines Ideals vervollständigen. Einen Überblick darüber werden wir im ersten Kapitel dieser Arbeit geben. Ein Ideal $\mathfrak{a} \subset A$ definiert eine Topologie auf A, für die die Mengen $\mathfrak{a}^n, n \in \mathbb{N}$ eine Basis der Umgebungen der Null bilden. Indem man alle Cauchyfolgen in A modulo die Nullfolgen betrachtet, erhält man die *Vervollständigung* oder *Komplettierung* $\hat{A}$ von A. Wir werden zeigen, dass man die Vervollständigung durch den inversen Limes des projektiven Systems $(A/\mathfrak{a}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschreiben kann. Dies gibt uns die Möglichkeit, verschiedene Eigenschaften der Komplettierung, die für die Arbeit mit formalen Schemata nützlich sind, zu beweisen. Leser, die mit der Vervollständigung von kommutativen Ringen bereits vertraut sind, können direkt im zweiten Kapitel mit der Einführung von formalen Schemata beginnen.

Weil eine allgemeinere Definition verschiedene Schwierigkeiten mit sich bringt, werden wir uns auf noethersche formale Schemata beschränken. Ist A ein noetherscher Ring mit Ideal $\mathfrak{a}$, so ist das *formale Spektrum von A* ein lokal geringter Raum, der mit $\mathrm{Spf}(A)$ bezeichnet wird. Der topologische Raum von $\mathrm{Spf}(A)$ ist gegeben durch alle Primideale von A, die offen bezüglich der von $\mathfrak{a}$ definierten Topologie sind. Die Strukturgarbe von $\mathrm{Spf}(A)$ ist durch den inversen Limes von Garben $\varprojlim \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A/\mathfrak{a}^n)}$ gegeben. Ganz analog zu gewöhnlichen Schemata ist ein *lokal noethersches formales Schema $\mathcal{X}$* ein lokal geringter Raum, für den jeder Punkt eine offene Umgebung besitzt, die isomorph zu einem affinen formalen Schema $\mathrm{Spf}(A)$ für einen noetherschen Ring A ist. Man nennt $\mathcal{X}$ *noethersch*, wenn der topologische Raum von $\mathcal{X}$ noethersch ist. Referenzen hierzu finden sich in [Bos, Ch. 2.2] und [EGAIneu, Ch. 10].

Eine Möglichkeit, ein noethersches formales Schema zu konstruieren, ist die Komplettierung eines noetherschen Schemas X entlang eines abgeschlossenen Unterschemas $Y \hookrightarrow X$. Wird Y durch die Idealgarbe $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_X$ beschrieben, so ist der lokal geringte Raum $(Y, \varprojlim \mathcal{O}_X/\mathcal{J}^n)$ ein noethersches formales Schema. Diese Herangehensweise wählt Hartshorne um noethersche formale Schemata zu definieren [H, II, Ch. 9]. Analog zur gewöhnlichen Theorie von Schemata wird ein abgeschlossenes Unterschema eines formalen Schemas $(\mathcal{X}, \mathcal{O}_\mathcal{X})$ durch eine kohärente Idealgarbe $\mathcal{A} \subset \mathcal{O}_\mathcal{X}$ definiert. Zu $\mathcal{A}$ korrespondiert das formale Schema $(V, \mathcal{O}_\mathcal{X}/\mathcal{A}_{|V})$, wobei V die abgeschlossene Teilmenge $\mathrm{Supp}(\mathcal{O}_\mathcal{X}/\mathcal{A})$ von $\mathcal{X}$ ist.

Nach einer allgemeinen Diskussion von formalen Schemata wollen wir in dieser Arbeit einen speziellen Fall genauer untersuchen. Dazu sei X ein integres Schema von endlichem

Typ über einem Grundkörper k. Da ein k-rationaler Punkt P von X abgeschlossen ist, können wir X entlang $\{P\}$ komplettieren. Man bezeichnet die Vervollständigung von X entlang P mit $\hat{X}_P$. Wir betrachten nun abgeschlossene Unterschemata $\hat{V} \hookrightarrow \hat{X}_P$. Ist $\hat{V}$ glatt, so nennen wir $\hat{V}$ einen *glatten formalen Keim von X in P*.

Jean-Benoît Bost untersucht in seiner Arbeit über glatte formale Keime [Bost], unter welchen Bedingungen solch ein Keim algebraisch ist. Wir werden im dritten Kapitel zunächst notwendige Grundlagen besprechen und dann in Teil 3.3 Algebraizität von glatten formalen Keimen definieren. Unerlässlich für das Verständnis von Algebraizität sind Zweige. Sind X und P wie oben gegeben, so ist ein *Zweig von X durch P* ein Punkt Q in der Normalisierung $\tilde{X}$ von X, der auf P abgebildet wird. Wir werden zeigen, dass jeder Zweig einem minimalen Primideal in $\widehat{\mathcal{O}_{X,P}}$ entspricht und dass dieses Primideal ein formales Unterschema von $\hat{X}_P$ definiert. Mit Hilfe dieser Korrespondenz beweisen wir dann folgende Äquivalenzen.

Theorem. *Für einen glatten formalen Keim $\hat{V} \hookrightarrow \hat{X}_P$ sind folgenden Bedingungen äquivalent:*

(i) Es existiert eine algebraische Varietät Y über k, ein Punkt $Q \in Y(k)$ und ein k-Morphismus $f : Y \to X$, der Q auf P abbildet und für den der induzierte Morphismus

$$\hat{f}_Q : \hat{Y}_Q \to \hat{X}_P$$

über $\hat{V} \to \hat{X}_P$ faktorisiert und einen formalen Isomorphismus $\hat{Y}_Q \xrightarrow{\sim} \hat{V}$ induziert.

(ii) Es existiert eine abgeschlossene Untervarietät W von X, sodass P in $W(k)$ liegt und $\hat{V}$ ein Zweig von W durch P ist.

(iii) Die Dimension des Zariskiabschlusses Z von $\hat{V}$ in X ist gleich der Dimension von $\hat{V}$.

Einen glatten formalen Keim $\hat{V} \hookrightarrow \hat{X}_P$, der diese Bedingungen erfüllt, nennen wir *algebraisch*.

Nach der eingehenden Diskussion der Definition wollen wir ein Kriterium besprechen, das angibt, wann ein formaler Keim algebraisch ist. Dieses Kriterium hat Bost beschrieben [Bost, Prop. 2.2] und wir werden uns beim Beweis an seiner Herangehensweise orientieren, wobei wir die Grundlagen und einzelnen Schritte ausführlicher besprechen. Das Schema X sei nun zusätzlich projektiv und es sei eine ample invertierbare Garbe L auf X gegeben. Der Keim $\hat{V}$ definiert Unterschemata $V_n, n \in \mathbb{N}$ von X und eine Folge von Nilimmersionen

$$V_1 \to V_2 \to V_3 \to \cdots .$$

Indem man L auf V_n, einschränkt erhält man Morphismen

$$\eta_D^n : \Gamma(X, L^{\otimes D}) \to \Gamma(V_n, L^{\otimes D})$$

für $D \in \mathbb{N}$. Wir bezeichnen $\Gamma(X, L^{\otimes D})$ mit E_D und den Kern von η_D^{n-1} mit E_D^n. Diese bilden eine Folge von endlich-dimensionalen k-Vektorräumen

$$\ldots \subset E_D^3 \subset E_D^2 \subset E_D^1 = E_D.$$

Schränkt man die Morphismen η_D^n auf E_D^n ein, so definieren sie Morphismen

$$\gamma_D^n : E_D^n \to \operatorname{Sym}^n \check{T}_{\hat{V}} \otimes L_P^{\otimes D}.$$

Hierbei bezeichnet $T_{\hat{V}}$ den Tangentialraum von $\hat{V}$ in P. Der duale Vektorraum $\check{T}_{\hat{V}}$ ist dann durch den k-Vektorraum η/η^2 für das maximale Ideal $\eta \subset \mathcal{O}_{\hat{V}}$ gegeben. Damit lässt sich das Algebraizitätskriterium folgendermaßen formulieren:

Theorem. *Es sind äquivalent:*

(i) Der formale Keim $\hat{V}$ ist algebraisch.

(ii) Es existiert ein $c > 0$, sodass für alle $D, n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{n}{D} > c$ die Abbildungen γ_D^n verschwinden.

Konventionen: Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ bezeichnen alle positiven ganzen Zahlen. Alle auftretenden Ringe sind kommutativ mit Eins. Eine *algebraische Varietät* X bezeichnet ein integres Schema von endlichem Typ über einem Körper k. Insbesondere ist X dann noethersch. Ein Morphismus von algebraischen Varietäten $f : X \to Y$ ist ein Morphismus von Schemata, für den das Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr] \arrow[dr] & & Y \arrow[dl] \\ & \operatorname{Spec}(k) & \end{tikzcd}$$

kommutiert. Der Morphismus f ist dann von endlichem Typ [GW, Prop. 10.7]. Mit $X(k)$ bezeichnen wir die Menge der k-rationalen Punkte von X, das heißt

$$X(k) = \{\sigma : \operatorname{Spec}(k) \to X \mid \sigma \text{ ist Schnitt von } X\} = \{x \in X \mid \kappa(x) = k\}.$$

1 Vervollständigung von Ringen

Wir werden nun zunächst die Komplettierung eines Rings A bezüglich eines Ideals $\mathfrak{a} \subset A$ untersuchen. Dafür definieren wir eine Topologie auf A und vervollständigen A bezüglich dieser Topologie. Eine umfassende Diskussion der Vervollständigung findet sich zum Beispiel in [AM, Ch. 10]. Einen kurzen Überblick über die Vervollständigung als inverser Limes kann man auch in [H, II, Ch. 9] erhalten.

1.1 Die $\mathfrak{a}$-adische Topologie und $\mathfrak{a}$-adische Vervollständigung

Definition 1.1. Eine *topologische Gruppe* G ist eine Gruppe G zusammen mit einer Topologie auf G, sodass die Abbildungen $a : G \times G \to G,\ (x, y) \mapsto x + y$ und $i : G \to G,\ x \mapsto -x$ stetig sind. Hierbei ist $G \times G$ mit der Produkttopologie versehen. Ein *topologischer Ring* R ist ein Ring mit einer Topologie auf R, sodass die Gruppe $(R, +)$ eine topologische Gruppe ist und auch die Multiplikation stetig ist.

Bemerkung 1.2. Für eine topologische Gruppe ist die Translation $\tau_g : G \to G, x \mapsto x+g$ für jedes $g \in G$ ein Homöomorphismus. Die Umkehrabbildung ist durch τ_{-g} gegeben. Deswegen genügt es eine Basis der Umgebungen der Null anzugeben, um eine Topologie auf G zu definieren.

Definition 1.3. Sei A ein Ring und $\mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal. Die $\mathfrak{a}$-*adische Topologie auf* A ist die eindeutig bestimmte Topologie auf A, für die die Mengen $\mathfrak{a}^n,\ n \in \mathbb{N}$ eine Basis der Umgebungen der Null bilden und A mit dieser Topologie ein topologischer Ring ist.

Bemerkung 1.4. Eine Menge $U \subset A$ ist also genau dann offen, wenn für jedes $x \in U$ ein $n \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $x + \mathfrak{a}^n \subset U$ gilt.

Lemma 1.5. *Für einen Ring A, versehen mit der $\mathfrak{a}$-adischen Topologie bezüglich eines Ideals $\mathfrak{a} \subset A$, gilt:*

(i) Die Mengen $\mathfrak{a}^n, n \in \mathbb{N}$ sind offen und abgeschlossen.

(ii) A ist genau dann hausdorffsch, wenn $\cap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{a}^n = \{0\}$.

Beweis. (i) Die Mengen $\mathfrak{a}^n$ sind per Definition offen. Sei also $n \in \mathbb{N}$ und $x \in A \setminus \mathfrak{a}^n$ gegeben. Dann ist für jedes $y \in \mathfrak{a}^n$ die Summe $x + y \notin \mathfrak{a}^n$, weil $\mathfrak{a}^n$ eine Untergruppe ist. Also gilt $x + \mathfrak{a}^n \subset A \setminus \mathfrak{a}^n$ und $A \setminus \mathfrak{a}^n$ ist offen.

(ii) Zunächst ist A genau dann hausdorffsch, wenn jeder Punkt abgeschlossen ist [vgl. Bou1, III, §1.2, Prop. 2]. Wegen der Stetigkeit der Addition gilt das genau dann, wenn $\{0\}$ abgeschlossen ist. Sei nun $\cap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{a}^n = \{0\}$. Nach (i) ist dann $A \setminus \{0\} = \cup_{n=1}^{\infty} A \setminus \mathfrak{a}^n$ eine Vereinigung von offenen Mengen, also selbst offen. Damit ist $\{0\}$ abgeschlossen und A hausdorffsch.

Sei umgekehrt A hausdorffsch. Dann ist $A \setminus \{0\}$ offen und für $x \neq 0$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $x + \mathfrak{a}^n \subset A \setminus \{0\}$ gilt. Daraus folgt $x \notin \mathfrak{a}^n$ und somit $\cap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{a}^n = \{0\}$. □

Ganz analog definiert man topologische Moduln. Das heißt, für einen topologischen Ring A ist ein topologischer A-Modul ein A-Modul M mit einer Topologie auf M, sodass M eine topologische Gruppe ist und die Skalarmultiplikation stetig ist.

Ist A versehen mit der $\mathfrak{a}$-adischen Topologie für ein Ideal $\mathfrak{a} \subset A$, so ist ein A-Modul M mit der $\mathfrak{a}$-adischen Topologie auf M, das heißt die Mengen $\mathfrak{a}^n M$ bilden eine Basis der Umgebungen der Null, ein topologischer A-Modul. Wie in Lemma 1.5 sind dann die Mengen $\mathfrak{a}^n M$ offen und abgeschlossen und M genau dann hausdorffsch, wenn $\cap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{a}^n M = \{0\}$ gilt.

Mit dieser Topologie kann man nun wie gewohnt Konvergenz von Folgen und Cauchyfolgen definieren. Eine Folge $(c_m)_{m \in \mathbb{N}}$ von Elementen in A konvergiert genau dann gegen ein $a \in A$, wenn für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein m_0 existiert, sodass $c_m - a \in \mathfrak{a}^n$ für alle $m \geq m_0$ gilt. Eine Cauchyfolge in A ist eine Folge $(c_m)_{m \in \mathbb{N}}$, für die für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $m_0 \in \mathbb{N}$ existiert, sodass für alle $m, m' \geq m_0$ gilt $c_m - c_{m'} \in \mathfrak{a}^n$.

Definition 1.6. Ein topologischer Ring A heißt *adisch*, wenn die Topologie mit der $\mathfrak{a}$-adischen für ein Ideal $\mathfrak{a} \subset A$ übereinstimmt. Das Ideal $\mathfrak{a}$ nennt man *definierendes Ideal.* Der Ring A heißt *separiert*, wenn die Topologie hausdorffsch ist und *vollständig*, wenn jede Cauchyfolge einen Grenzwert in A besitzt.

Ein definierendes Ideal ist nicht eindeutig. Ist zum Beispiel $\mathfrak{a}$ eines, so ist auch $\mathfrak{a}^n$ ein definierendes Ideal. Genauer gilt:

Lemma 1.7. *Sei A ein adischer Ring und $\mathfrak{a}$ ein definierendes Ideal. Ein Ideal $\mathfrak{b} \subset A$ ist genau dann ein definierendes Ideal, wenn Zahlen $p, q \in \mathbb{N}$ existieren, sodass $\mathfrak{b}^q \subset \mathfrak{a}^p \subset \mathfrak{b}$ gilt. Ist A noethersch, so existieren solche Zahlen genau dann, wenn $\sqrt{\mathfrak{a}} = \sqrt{\mathfrak{b}}$ gilt.*

Beweis. Sei $\mathfrak{b}$ ein definierendes Ideal. Weil dann $\mathfrak{b}$ offen ist, gilt $\mathfrak{a}^p \subset \mathfrak{b}$ für ein p. Weil die Mengen $\mathfrak{b}^n, n \in \mathbb{N}$ eine Basis der Umgebungen der Null bilden und $\mathfrak{a}^p$ eine offene Umgebung der Null ist, existiert ein q mit $\mathfrak{b}^q \subset \mathfrak{a}^p$.

Seien umgekehrt p, q mit $\mathfrak{b}^q \subset \mathfrak{a}^p \subset \mathfrak{b}$ gegeben. Es genügt zu zeigen, dass die Mengen $\mathfrak{b}^n, n \in \mathbb{N}$ eine Basis der Umgebungen der Null bilden. Zunächst ist $\mathfrak{b}^n$ offen wegen $\mathfrak{a}^{pn} \subset \mathfrak{b}^n$. Sei nun $U \subset A$ eine offene Umgebung der Null. Dann existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit $\mathfrak{a}^m \subset U$ und es folgt $\mathfrak{b}^{qm} \subset \mathfrak{a}^{pm} \subset \mathfrak{a}^m \subset U$.

Sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ definierende Ideale, so folgt aus $\mathfrak{b}^q \subset \mathfrak{a}^p \subset \mathfrak{b}$ schon $\sqrt{\mathfrak{b}^q} = \sqrt{\mathfrak{b}} \subset \sqrt{\mathfrak{a}^p} = \sqrt{\mathfrak{a}} \subset \sqrt{\mathfrak{b}}$, also $\sqrt{\mathfrak{a}} = \sqrt{\mathfrak{b}}$.

Gelte nun $\sqrt{\mathfrak{a}} = \sqrt{\mathfrak{b}}$. Ist A noethersch, so existieren Zahlen n, m mit $(\sqrt{\mathfrak{a}})^n \subset \mathfrak{a}$ und $(\sqrt{\mathfrak{b}})^m \subset \mathfrak{b}$. Für $p = m$ und $q = nm$ gilt dann $\mathfrak{a}^p = \mathfrak{a}^m \subset (\sqrt{\mathfrak{a}})^m = (\sqrt{\mathfrak{b}})^m \subset \mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b}^q = \mathfrak{b}^{nm} \subset (\sqrt{\mathfrak{b}})^{nm} = (\sqrt{\mathfrak{a}})^{nm} \subset \mathfrak{a}^m = \mathfrak{a}^p$. □

Definition 1.8. Sei A ein adischer Ring. Die *Vervollständigung* $\hat{A}$ von A ist die Vervollständigung von A bezüglich der $\mathfrak{a}$-adischen Topologie, das heißt die Menge aller Cauchyfolgen in A modulo die Menge aller Nullfolgen.

Damit ist dann auch $\hat{A}$ ein kommutativer Ring mit Eins. Es existiert ein kanonischer Ringhomomorphismus $A \to \hat{A}$, der ein Element a aus A auf die konstante Folge $(a)_{n\in\mathbb{N}}$ abbildet. Dieser Morphismus ist genau dann injektiv, wenn die Topologie hausdorffsch ist, also wenn $\cap_{n\in\mathbb{N}}\mathfrak{a}^n = \{0\}$ gilt. Dies gilt beispielsweise, wenn A ein noetherscher Integritätsring, oder ein lokaler noetherscher Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{a} \subset A$ ist [vgl. AM, Th. 10.17]. Der Morphismus ist surjektiv, wenn A vollständig ist.

1.2 Vervollständigung als inverser Limes

Sei A ein adischer Ring und $\mathfrak{a}$ ein definierendes Ideal. Für $n' \geq n$ sei $\phi_{n',n} : A/\mathfrak{a}^{n'} \to A/\mathfrak{a}^n$ die kanonische Projektion. Dann bildet $(A/\mathfrak{a}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit den Übergangsabbildungen $\phi_{n',n}$ ein projektives System von Ringen. Bildet man den inversen Limes über dieses System, so gilt

$$\tilde{A} := \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} A/\mathfrak{a}^n = \left\{ (a_n) \in \prod_{n\in\mathbb{N}} A/\mathfrak{a}^n \;\middle|\; \phi_{n',n}(a_{n'}) = a_n \;\forall n' \geq n \right\}.$$

Die kanonischen Projektionen $\phi_n : A \to A/\mathfrak{a}^n$ induzieren nach der universellen Eigenschaft des inversen Limes einen kanonischen Morphismus $\phi : A \to \tilde{A}$. Dieser ist gegeben durch

$$a \mapsto (a_n)_{n\in\mathbb{N}}, \text{ wobei } a_n = a + \mathfrak{a}^n.$$

Satz 1.9. *Sei A ein adischer Ring und $\mathfrak{a}$ ein definierendes Ideal. Es existiert ein kanonischer Isomorphismus*

$$\hat{A} \xrightarrow{\sim} \tilde{A}.$$

Beweis. Sei $(c_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in A. Betrachtet man $(c_m)_{m\in\mathbb{N}}$ für ein $n \in \mathbb{N}$ als Folge in $A/\mathfrak{a}^n$, so wird die Folge stationär. Sei nun $a_n \in A/\mathfrak{a}^n$ der Grenzwert dieser Folge und $a := (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Für $n' \geq n$ gilt dann $\phi_{n',n}(a_{n'}) = a_n$, denn für ein m groß genug, sodass $c_m \equiv a_n \pmod{\mathfrak{a}^n}$ und $c_m \equiv a_{n'} \pmod{\mathfrak{a}^{n'}}$, folgt

$$\phi_{n',n}(a_{n'}) - a_n \equiv a_{n'} - a_n \equiv c_m - c_m \equiv 0 \pmod{\mathfrak{a}^n}.$$

Also gilt $a \in \tilde{A}$. Ist $(c_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge, so ist a_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ gleich Null, also auch a. Damit hat man einen wohldefinierten Ringhomomorphismus $\hat{A} \to \tilde{A}$.

Sei $(c_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge, die auf $0 \in \tilde{A}$ abgebildet wird. Das heißt, der Grenzwert von $(c_m)_{m\in\mathbb{N}}$ in $A/\mathfrak{a}^n$ ist für jedes n gleich Null. Dann ist $(c_m)_{m\in\mathbb{N}}$ auch in A eine Nullfolge, denn für jedes $n \in \mathbb{N}$ existiert ein m_0, sodass $c_m \in \mathfrak{a}^n$ für $m \geq m_0$. Also ist die Abbildung injektiv und es fehlt noch die Surjektivität zu zeigen. Sei ein $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \tilde{A}$ gegeben. Wählt man für jedes n einen Vertreter $c_n \in A$ von a_n, so ist $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in A, denn für jedes $k \in \mathbb{N}$ und $n' \geq n \geq k$ gilt $c_{n'} - c_n \equiv a_{n'} - a_n \equiv 0 \pmod{\mathfrak{a}^n}$, also $c_{n'} - c_n \in \mathfrak{a}^n \subset \mathfrak{a}^k$. Der Grenzwert von $(c_m)_{m\in\mathbb{N}}$ in $A/\mathfrak{a}^n$ ist a_n, denn für $k \geq n$ ist $c_k - a_n \equiv 0 \pmod{\mathfrak{a}^n}$. Das heißt $(c_m)_{m\in\mathbb{N}}$ wird auf a abgebildet und die Abbildung ist surjektiv. □

Bemerkung 1.10. Sei A ein adischer Ring mit definierendem Ideal $\mathfrak{a}$. Dann hat man auf $\hat{A} = \varprojlim A/\mathfrak{a}^n$ eine kanonische Topologie gegeben. Diese ist die gröbste Topologie, sodass alle kanonischen Projektionen $\phi_n : \hat{A} \to A/\mathfrak{a}^n$ stetig sind. Dabei sind die Ringe $A/\mathfrak{a}^n$ mit der diskreten Topologie versehen. Die diskrete Topologie stimmt mit der Quotiententopologie, induziert von der $\mathfrak{a}$-adischen Topologie auf A, überein.

Lemma 1.11. *Die Mengen* $\ker\phi_n \subset \hat{A}$ *bilden eine Basis der Umgebungen der Null. Es ist* $\ker\phi_n$ *der Abschluss von* $\mathfrak{a}^n \subset \hat{A}$. *Ist* $\mathfrak{a}$ *endlich erzeugt, so gilt außerdem* $\mathfrak{a}^n\hat{A} = \ker\phi_n = \overline{\mathfrak{a}^n}$ *und die kanonische Topologie auf* $\hat{A}$ *stimmt mit der* $\mathfrak{a}\hat{A}$*-adischen überein.*

Beweis. Nach der Definition der Topologie auf $\hat{A}$ sind die offenen Mengen in $\hat{A}$ beliebige Vereinigungen von endlichen Durchschnitten von Mengen der Form $\phi_n^{-1}(V)$, wobei $n \in \mathbb{N}$ und $V \subset A/\mathfrak{a}^n$ gilt. Insbesondere ist $\ker\phi_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ offen. Es ist zu zeigen, dass für jede offene Menge $U \subset \hat{A}$ mit $0 \in U$ ein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $\ker\phi_n \subset U$. Man kann ohne Einschränkung annehmen, dass $U = \cap_{i=1}^m \phi_{n_i}^{-1}(V_i)$, mit $n_i \in \mathbb{N}$ und $V_i \subset A/\mathfrak{a}^{n_i}$. Wegen $0 \in U$ ist $0 \in V_i$ für alle $i = 1, \ldots, m$. Also gilt $\ker\phi_{n_i} \subset \phi_{n_i}^{-1}(V_i)$ für alle i und damit

$$\cap_{i=1}^m \ker\phi_{n_i} \subset \cap_{i=1}^m \phi_{n_i}^{-1}(V_i) = U.$$

Für $n = \max\{n_i \mid i = 1, \ldots, m\}$ gilt dann wegen $\ker\phi_n \subset \ker\phi_{n'}$ für $n \geq n'$

$$\ker\phi_n \subset \cap_{i=1}^m \ker\phi_{n_i} \subset U.$$

Die Mengen $\ker\phi_n$ bilden also eine Basis der Umgebungen der Null und wie im Beweis von Lemma 1.5 (i) folgt, dass sie sowohl offen als auch abgeschlossen sind.

Wegen $\mathfrak{a}^n \subset \ker\phi_n$ genügt es zu zeigen, dass $\mathfrak{a}^n$ dicht in $\ker\phi_n$ liegt. Sei also $f \in \ker\phi_n$ und eine offene Umgebung U von f gegeben. Dann existiert ein $m \in \mathbb{N}$, sodass $f + \ker\phi_m \subset U$. Wählt man nun einen Vertreter $f_m \in A$ von $\phi_{m+n}(f)$ so gilt $f_m \in \mathfrak{a}^n$ und $f - f_m \in \ker\phi_{m+n}$, also $f_m \in U \cap \ker\phi_n$. Damit liegt $\mathfrak{a}^n$ dicht in $\ker\phi_n$ und es folgt $\ker\phi_n = \overline{\mathfrak{a}^n}$.

Sei nun $\mathfrak{a} = (a_1, \ldots, a_m)$ endlich erzeugt. Zunächst zeigen wir, dass man jedes $f \in \hat{A}$ als Summe $f = \sum_{i=0}^\infty f_i$ mit $f_i \in \mathfrak{a}^i$ schreiben kann. Es sei für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ein Vertreter $g_n \in A$ von $\phi_{n+1}(f)$ gegeben. Setze $f_0 = g_0$ und $f_i = g_i - g_{i-1} \in A$ für $i > 0$. Es gilt $f_i \in \mathfrak{a}^i$ für $i > 0$ wegen $g_i \equiv g_{i-1} \pmod{\mathfrak{a}^i}$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt nun

$$\phi_n(\sum_{i=0}^{\infty} f_i) \equiv \sum_{i=0}^{n-1} f_i = g_{n-1} \equiv \phi_n(f) \pmod{\mathfrak{a}^n}.$$

Daraus folgt $f = \sum_{i=0}^{\infty} f_i$. Ist $f \in \ker \phi_n$, so kann man $f_0 = \ldots = f_{n-1} = 0$ wählen. Sei also $f = \sum_{i=n}^{\infty} f_i \in \ker \phi_n$ mit $f_i \in \mathfrak{a}^i$. Dann kann man jedes f_i darstellen als $f_i = \sum_{j=1}^{m} f_{ij} a_j$ mit $f_{ij} \in \mathfrak{a}^{i-1}$ und es ist

$$f = \sum_{i=n}^{\infty}(\sum_{j=1}^{m} f_{ij} a_j) = \sum_{j=1}^{m} a_j (\sum_{i=n}^{\infty} f_{ij}) \in \mathfrak{a}\hat{A}.$$

Wegen $\sum_{i=n}^{\infty} f_{ij} \in \ker \phi_{n-1}$ folgt induktiv $f \in \mathfrak{a}^n \hat{A}$. Also gilt $\ker \phi_n = \mathfrak{a}^n \hat{A}$ und die Mengen $\mathfrak{a}^n \hat{A}$ bilden eine Basis der Umgebungen der Null. □

Das Lemma zeigt, dass für ein endlich erzeugtes Ideal $\mathfrak{a}$ die Vervollständigung $\hat{A}$ wieder ein adischer Ring ist. Da wir diese Voraussetzung oft verwenden werden, werden wir im Folgenden nur noch über noetherschen Ringen arbeiten. Weil wir später mit algebraischen Varietäten, also insbesondere noetherschen Schemata arbeiten, ist diese Voraussetzung für unsere Zwecke keine Einschränkung. Für den Rest der Arbeit ist ein Ring also stets ein noetherscher, kommutativer Ring mit Eins.

Für einen A-Modul M ist analog $\hat{M} := \varprojlim M/\mathfrak{a}^n M$ die Vervollständigung von M bezüglich der $\mathfrak{a}$-adischen Topologie. Für ein $m = (m_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \hat{M}$ und $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \hat{A}$ definiert

$$a \cdot m := (a_n m_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \hat{M}$$

eine Skalarmultiplikation, die $\hat{M}$ in kanonischer Weise zu einem $\hat{A}$-Modul macht.

Lemma 1.12. *Sei A ein adischer Ring, M ein endlich erzeugter A-Modul versehen mit der $\mathfrak{a}$-adischen Topologie und $M' \subset M$ ein Untermodul. Die $\mathfrak{a}$-adische Topologie auf M' stimmt mit der von M induzierten Teilraumtopologie überein.*

Beweis. Es reicht zu zeigen, dass die Basen der Umgebungen der Null $(\mathfrak{a}^n M) \cap M'$ und $\mathfrak{a}^n M'$ die gleiche Topologie induzieren. Nach dem Artin-Rees-Lemma [z.B. AM, Cor. 10.10] existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq n_0$ gilt

$$(\mathfrak{a}^n M) \cap M' = \mathfrak{a}^{n-n_0}((\mathfrak{a}^{n_0}) \cap M').$$

Dies zeigt die Behauptung, denn für alle $m = n - n_0 \geq 0$ gilt

$$(\mathfrak{a}^{m+n_0} M) \cap M' = \mathfrak{a}^m((\mathfrak{a}^{n_0} M) \cap M') \subset \mathfrak{a}^m M'$$

und umgekehrt

$$\mathfrak{a}^m M' \subset (\mathfrak{a}^m M) \cap M' \qquad \text{für alle } m \geq 0.$$ □

Lemma 1.13. *Seien A und B adische Ringe mit definierenden Idealen $\mathfrak{a} \subset A$ und $\mathfrak{b} \subset B$. Ein Ringhomomorphismus $f : A \to B$ ist genau dann stetig bezüglich den adischen Topologien, wenn für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $m(n) \in \mathbb{N}$ existiert mit $\mathfrak{a}^{m(n)} \subset f^{-1}(\mathfrak{b}^n)$. Insbesondere ist f stetig, wenn $\mathfrak{a} \subset f^{-1}(\mathfrak{b})$.*

Beweis. „$\Rightarrow$" Ist f stetig, so ist $f^{-1}(\mathfrak{b}^n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ eine offene Umgebung der Null. Also existiert ein $m(n) \in \mathbb{N}$ mit $\mathfrak{a}^{m(n)} \subset f^{-1}(\mathfrak{b}^n)$.

„$\Leftarrow$" Es sei $U \subset B$ offen. Wir müssen zeigen, dass für jedes $x \in f^{-1}(U)$ ein m existiert mit $x + \mathfrak{a}^m \subset f^{-1}(U)$. Sei also ein $x \in f^{-1}(U)$ gegeben. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $f(x) + \mathfrak{b}^n \subset U$ gilt. Wählt man $m = m(n)$ mit $\mathfrak{a}^{m(n)} \subset f^{-1}(\mathfrak{b}^n)$, so folgt

$$x + \mathfrak{a}^m \subset x + f^{-1}(\mathfrak{b}^n) \subset f^{-1}(f(x) + \mathfrak{b}^n) \subset f^{-1}(U).$$

Also ist $f^{-1}(U)$ offen und f stetig. □

Proposition 1.14. *Bezeichnet (adR) die Kategorie der adischen Ringe mit stetigen Ringhomomorphismen als Morphismen, so definiert die Vervollständigung einen Funktor*

$$\hat{\ } : (adR) \to (adR), \;\; A \mapsto \hat{A}$$

Beweis. Seien A, B adische Ringe mit definierenden Idealen $\mathfrak{a}$ beziehungsweise $\mathfrak{b}$. Nach 1.11 ist $\hat{A}$ ein adischer Ring und die Zuordnung $A \mapsto \hat{A}$ wohldefiniert. Sei nun ein stetiger Ringhomomorphismus $f : A \to B$ gegeben. Nach Lemma 1.13 existieren $m(n) \in \mathbb{N}$ mit $\mathfrak{a}^{m(n)} \subset f^{-1}(\mathfrak{b}^n)$. Dies induziert Ringhomomorphismen

$$f_n : \hat{A} \xrightarrow{\phi^A_{m(n)}} A/\mathfrak{a}^{m(n)} \xrightarrow{\bar{f}} B/\mathfrak{b}^n.$$

Sind diese Morphismen mit den Übergangsabbildungen von B verträglich, so induzieren sie nach der universellen Eigenschaft des inversen Limes einen Morphismus $\hat{f} : \hat{A} \to \hat{B}$. Wir müssen also zeigen, dass die Abbildungen f_n verträglich mit den Übergangsabbildungen $\phi^B_{nn'}$ sind und dass $\hat{f}$ unabhängig von der Wahl der $m(n)$ ist.

Seien zunächst $m, m' \in \mathbb{N}$ mit $\mathfrak{a}^m \subset f^{-1}(\mathfrak{b}^n)$ und $\mathfrak{a}^{m'} \subset f^{-1}(\mathfrak{b}^n)$. Ohne Einschränkung ist $m' \geq m$. Sei ein $(\bar{a}_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \hat{A}$, $\bar{a}_k \in A/\mathfrak{a}^k$ mit Vertretern $a_k \in A$ gegeben. Wir müssen zeigen, dass $\bar{f}(\bar{a}_m) = \bar{f}(\bar{a}_{m'})$ in $B/\mathfrak{b}^n$ gilt. Dies folgt aus $\bar{f}(\bar{a}_m) - \bar{f}(\bar{a}_{m'}) = f(a_m) - f(a_{m'}) + \mathfrak{b}^n = f(a_m - a_{m'}) + \mathfrak{b}^n = 0$, denn $f(a_m - a_{m'}) \in f(\mathfrak{a}^m) \subset \mathfrak{b}^n$. Es ist also f_n und damit auch $\hat{f}$ unabhängig von der Auswahl der $m(n)$.

Seien nun $n' \geq n$ gegeben und $m = \max\{m(n), m(n')\}$. Sei $a = (\bar{a}_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \hat{A}$ mit Vertretern $a_k \in A$ gegeben. Dann ist $\phi^B_{n'n} \circ f_{n'}(a) = \phi^B_{n'n}(f(a_m) + \mathfrak{b}^{n'}) = f(a_m) + \mathfrak{b}^n = f_n(a)$. Die Abbildungen f_n sind also verträglich mit den Übergangsabbildungen und man hat einen wohldefinierten Ringhomomorphismus $\hat{f} : \hat{A} \to \hat{B}$. Für die Stetigkeit von $\hat{f}$ genügt es nach Lemma 1.13 zu zeigen, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $m \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $\mathfrak{a}^m\hat{A} \subset \hat{f}^{-1}(\mathfrak{b}^n\hat{B})$, beziehungsweise $\hat{f}(\mathfrak{a}^m\hat{A}) \subset \mathfrak{b}^n\hat{B}$ gilt. Wegen der Stetigkeit von f existiert zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $m \in \mathbb{N}$ mit $\mathfrak{a}^m \subset f^{-1}(\mathfrak{b}^n)$. Ist nun $a \in \mathfrak{a}^m, x = (\bar{x}_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \hat{A}$, so gilt

$$\phi^B_n(\hat{f}(ax)) = f_n((a\bar{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}) = f(ax_m) + \mathfrak{b}^n = 0$$

für die Projektion $\phi^B_n : \hat{B} \to B/\mathfrak{b}^n$. Also ist $\hat{f}(ax) \in \ker \phi^B_n = \mathfrak{b}^n\hat{B}$. Die Funktorialität von $\hat{\ }$ folgt aus der Funktorialität des inversen Limes. □

Bemerkung 1.15. Für einen adischen Ring A seien A-Moduln M und N gegeben. Versieht man M und N mit der $\mathfrak{a}$-adischen Topologie für ein definierendes Ideal $\mathfrak{a}$, so ist wegen $f(\mathfrak{a}^n M) = \mathfrak{a}^n f(M) \subset \mathfrak{a}^n N$ jeder A-Modulhomomorphismus $f : M \to N$ stetig. Dann induziert f einen stetigen $\hat{A}$-Modulhomomorphismus $\hat{f} : \hat{M} \to \hat{N}$.

1.3 Eigenschaften der Vervollständigung

Lemma 1.16. *Sei A ein adischer Ring mit definierendem Ideal $\mathfrak{a}$ und eine exakte Folge von endlich erzeugten A-Moduln*

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

gegeben. Die Sequenz, induziert durch die Vervollständigung bezüglich der $\mathfrak{a}$-adischen Topologie,

$$0 \to \hat{M}' \to \hat{M} \to \hat{M}'' \to 0$$

ist exakt.

Beweis. Nach Lemma 1.12 ist $\hat{M}' = \varprojlim M'/\mathfrak{a}^n M' = \varprojlim M'/((\mathfrak{a}^n M) \cap M')$, weil M endlich erzeugt ist. Des Weiteren ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Sequenz

$$0 \to M'/((\mathfrak{a}^n M) \cap M') \to M/\mathfrak{a}^n M \to (M/M')/\mathfrak{a}^n(M/M') \to 0$$

exakt. Man hat damit ein exaktes Diagramm projektiver Systeme

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & M'/((\mathfrak{a}^3 M) \cap M') \arrow[r] \arrow[d] & M/\mathfrak{a}^3 M \arrow[r] \arrow[d] & (M/M')/\mathfrak{a}^3(M/M') \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & M'/((\mathfrak{a}^2 M) \cap M') \arrow[r] \arrow[d] & M/\mathfrak{a}^2 M \arrow[r] \arrow[d] & (M/M')/\mathfrak{a}^2(M/M') \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & M'/((\mathfrak{a} M) \cap M') \arrow[r] \arrow[d] & M/\mathfrak{a} M \arrow[r] \arrow[d] & (M/M')/\mathfrak{a}(M/M') \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0. &
\end{tikzcd}$$

Dieses induziert eine Sequenz der inversen Limiten

$$0 \to \hat{M}' \to \hat{M} \to \hat{M}'' \to 0$$

und diese ist exakt, da die Übergangsabbildungen der linken Spalte surjektiv sind [vgl. H, II, Prop. 9.1]. □

Lemma 1.17. *Ist M ein endlich erzeugter A-Modul, so ist der kanonische Morphismus von $\hat{A}$-Moduln*

$$\hat{A} \otimes_A M \to \hat{M}, \qquad a \otimes m \mapsto am$$

ein Isomorphismus.

Beweis. Es existiert eine exakte Folge von A-Moduln

$$0 \to N \to A^k \to M \to 0,$$

wobei N endlich erzeugt ist, weil A noethersch ist. Diese induziert ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} & \hat{A} \otimes_A N \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & \hat{A} \otimes_A A^k \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & \hat{A} \otimes_A M \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \hat{N} \arrow[r] & \widehat{A^k} \arrow[r] & \hat{M} \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Die Zeilen sind exakt wegen der Rechtsexaktheit des Tensorprodukts und Lemma 1.16. Weil der inverse Limes mit Produkten vertauscht (vgl. Lemma 2.3), ist β ein Isomorphismus und die Surjektivität von α folgt. Dann ist auch γ surjektiv, da N endlich erzeugt ist. Die Injektivität von α folgt mit einer Diagrammjagd. □

Korollar 1.18. *Sei A ein adischer Ring, $\mathfrak{a}$ ein definierendes Ideal. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$*

$$\hat{A}/\widehat{\mathfrak{a}^n} \cong A/\mathfrak{a}^n.$$

Insbesondere gilt $\hat{\hat{A}} = \hat{A}$ und $\hat{A}$ ist ein adischer, separierter und vollständiger Ring.

Beweis. Die Behauptung folgt aus Lemma 1.16 für $M = A$ und $M' = \mathfrak{a}^n$. Dann ist $M'' = A/\mathfrak{a}^n$ und das projektive System $0 \leftarrow M''/\mathfrak{a}M'' \leftarrow M''/\mathfrak{a}^2M'' \leftarrow \cdots$ wird stationär, weshalb $\hat{M''} = M''$ gilt. Man erhält also eine exakte Sequenz

$$0 \to \widehat{\mathfrak{a}^n} \to \hat{A} \to A/\mathfrak{a}^n \to 0.$$

Nach Lemma 1.17 ist der Morphismus $\hat{A} \otimes_A \mathfrak{a}^n \to \widehat{\mathfrak{a}^n}$ mit Bild $\mathfrak{a}^n\hat{A}$ ein Isomorphismus, also ist $\widehat{\mathfrak{a}^n} = \mathfrak{a}^n\hat{A}$. Weiter gilt $\widehat{\mathfrak{a}^n} = \mathfrak{a}^n\hat{A} = (\mathfrak{a}\hat{A})^n = (\hat{\mathfrak{a}})^n$. Da $\mathfrak{a}\hat{A}$ ein definierendes Ideal für die Topologie von $\hat{A}$ ist, folgt $\hat{\hat{A}} = \varprojlim \hat{A}/\mathfrak{a}^n\hat{A} = \varprojlim \hat{A}/\widehat{\mathfrak{a}^n} \cong \varprojlim A/\mathfrak{a}^n = \hat{A}$. □

Korollar 1.19. *Sei A ein adischer Ring mit definierendem Ideal $\mathfrak{a}$ und M ein endlich erzeugter A-Modul. Dann gilt:*

(i) $\widehat{\mathfrak{a}^n}/\widehat{\mathfrak{a}^{n+1}} \cong \mathfrak{a}^n/\mathfrak{a}^{n+1}$ *für alle $n \in \mathbb{N}$.*

(ii) $\widehat{M}/\widehat{\mathfrak{a}^n M} \cong M/\mathfrak{a}^n M$ *für alle $n \in \mathbb{N}$.*

(iii) $\widehat{\mathfrak{a}^n M}/\widehat{\mathfrak{a}^{n+1} M} \cong \mathfrak{a}^n M/\mathfrak{a}^{n+1} M$ *für alle $n \in \mathbb{N}$.*

Beweis. Die Behauptungen folgen wie in 1.18 für die exakten Folgen von endlich erzeugten A-Moduln

(i) $0 \to \mathfrak{a}^n \to \mathfrak{a}^{n+1} \to \mathfrak{a}^n/\mathfrak{a}^{n+1} \to 0$

(ii) $0 \to \mathfrak{a}^n M \to M \to M/\mathfrak{a}^n M \to 0$

(iii) $0 \to \mathfrak{a}^n M \to \mathfrak{a}^{n+1} M \to \mathfrak{a}^n M/\mathfrak{a}^{n+1} M \to 0.$ □

Korollar 1.20. *$\hat{A}$ ist eine flache A-Algebra.*

Beweis. Sei $f : M' \to M$ eine Injektion von A-Moduln und M' sowie M endlich erzeugt. Dann erhält man eine exakte Sequenz von endlich erzeugten A-Moduln

$$0 \to M' \to M \to M/M' \to 0.$$

Diese induziert ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \hat{A} \otimes_A M' \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & \hat{A} \otimes_A M \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & \hat{A} \otimes_A M/M' \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \hat{M'} \arrow[r] & \hat{M} \arrow[r] & \widehat{M/M'} \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

wobei die vertikalen Abbildungen nach Lemma 1.17 Isomorphismen sind. Mit Lemma 1.16 ist die untere Zeile exakt, also auch die obere. Insbesondere ist $1 \otimes f : \hat{A} \otimes_A M' \to \hat{A} \otimes_A M$ injektiv. Mit [AM, Prop. 2.19] folgt, dass $\hat{A}$ eine flache A-Algebra ist. □

Bemerkung 1.21. Ist A ein noetherscher adischer Ring mit Vervollständigung $\hat{A}$, so ist auch $\hat{A}$ noethersch [vgl. AM, Th. 10.26].

Lemma 1.22. *Sei A ein adischer Ring mit definierendem Ideal $\mathfrak{a}$ und M ein A-Modul. Ist M endlich erzeugt, so ist $\hat{M}$ ein endlich erzeugter $\hat{A}$-Modul.*

Beweis. Wir betrachten den assoziierten graduierten Ring $G(A) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathfrak{a}^n/\mathfrak{a}^{n+1}$, beziehungsweise $G(M) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathfrak{a}^n M/\mathfrak{a}^{n+1} M$. Dann ist $G(M)$ ein endlich erzeugter $G(A)$-Modul [s. AM, Prop. 10.22]. Wegen 1.19 gilt $G(M) = G(\hat{M})$ und $G(A) = G(\hat{A})$, also ist $G(\hat{M})$ ein endlich erzeugter $G(\hat{A})$-Modul. Weil $\hat{A}$ vollständig und $\hat{M}$ separiert ist, folgt mit [AM, Prop. 10.24], dass $\hat{M}$ ein endlich erzeugter $\hat{A}$-Modul ist. □

Proposition 1.23. *Es sei A ein lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m} \subset A$. Dann ist die Vervollständigung von A bezüglich $\mathfrak{m}$ ein lokaler Ring mit maximalem Ideal $\hat{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}\hat{A}$.*

Beweis. Es existiert nach Lemma 1.18 ein Isomorphismus $\hat{A}/\hat{\mathfrak{m}} \cong A/\mathfrak{m}$, also ist $\hat{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}\hat{A}$ ein maximales Ideal von $\hat{A}$. Für $x \in \hat{\mathfrak{m}}$ ist $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$ eine Cauchyfolge bezüglich der $\hat{\mathfrak{m}}$-adischen Topologie. Weil $\hat{A}$ aber vollständig ist, konvergiert $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\hat{A}$ und $(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + \cdots$ existiert. Es gilt also $1 + \hat{\mathfrak{m}} \subset \hat{A}^\times$ und $\hat{A}$ ist ein lokaler Ring. □

Definition 1.24. Sei A ein adischer Ring mit definierendem Ideal $\mathfrak{a}$. Für ein $f \in A$ sei

$$A_{\{f\}} := \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} (A/\mathfrak{a}^n)_f = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} A_f/\mathfrak{a}_f^n$$

die Vervollständigung des Rings A_f bezüglich der $\mathfrak{a}_f$-adischen Topologie, wobei $\mathfrak{a}_f := \mathfrak{a}A_f = \{\frac{a}{f^n} \mid a \in \mathfrak{a}, n \in \mathbb{N}\}$.

Der kanonische Morphismus $A_f \to A_{\{f\}}$ zeigt, dass das Bild von f in $A_{\{f\}}$ invertierbar ist. Der Ring $A_{\{f\}}$ ist noethersch und adisch mit definierendem Ideal $\mathfrak{a}_f A_{\{f\}}$.

2 Formale Schemata

In der Literatur finden sich verschiedene Vorgehensweisen, formale Schemata einzuführen. Grothendieck [EGAIneu, Ch. 10] oder Bosch [Bos, Ch. 2] führen zunächst affine formale Schemata ein. Ein formales Schema erhält man dann durch Verkleben von affinen. Hartshorne hingegen definiert ein noethersches formales Schema als einen lokal geringten Raum, der lokal die Komplettierung eines noetherschen Schemas entlang eines Unterschemas ist [H, II, Ch. 9]. Wir werden zunächst der Herangehensweise von Grothendieck und Bosch folgen und dann darauf eingehen, warum die verschieden Definitionen im Fall von noetherschen formalen Schemata äquivalent sind.

2.1 Der inverse Limes von Garben

Wir haben bereits inverse Limiten in den Kategorien der Ringe und A-Moduln betrachtet. Um formale Schemata definieren zu können, müssen wir aber Garben vervollständigen. Deswegen werden wir den inversen Limes in der Kategorie der Garben $Sh(X)$ kurz besprechen.

Definition 2.1. Sei X ein topologischer Raum und $(I, \leq)$ eine halbgeordnete Menge. Ein *projektives System von Garben auf X über I* ist eine Familie von Garben $(\mathcal{F}_i)_{i\in I}$ auf X zusammen mit Morphismen von Garben $\phi_{i'i} : \mathcal{F}_{i'} \to \mathcal{F}_i$ für alle $i' \geq i,\ i, i' \in I$, sodass gilt

(i) $\phi_{ii} = \mathrm{id}_{\mathcal{F}_i}$,

(ii) $\phi_{ki} = \phi_{ji} \circ \phi_{kj}$ für $k \geq j \geq i$.

Ist $I = \mathbb{N}$, so ist ein projektives System durch eine Sequenz von Garben auf X

$$\mathcal{F}_1 \leftarrow \mathcal{F}_2 \leftarrow \mathcal{F}_3 \leftarrow \cdots$$

gegeben.

Proposition 2.2. *Sei $(\mathcal{F}_i)_{i\in I}$ ein projektives System von Garben auf einem topologischen Raum X. Der inverse Limes $\varprojlim_{i\in I} \mathcal{F}_i$ in Sh(X) existiert.*

Beweis. Für ein offenes $U \subset X$ ist $(\mathcal{F}_i(U))_{i\in I}$ ein projektives System von abelschen Gruppen beziehungsweise Ringen oder A-Moduln. Man kann also eine Prägarbe $\varprojlim^p \mathcal{F}_i$ auf X durch $U \mapsto \varprojlim \mathcal{F}_i(U)$ definieren. Es sei $\varprojlim \mathcal{F}_i := (\varprojlim^p \mathcal{F}_i)^+$ die assoziierte Garbe mit kanonischem Morphismus $\theta : \varprojlim^p \mathcal{F}_i \to \varprojlim \mathcal{F}_i$. Es genügt zu zeigen, dass $\varprojlim \mathcal{F}_i$ die universelle Eigenschaft des inversen Limes in $\mathrm{Sh}(X)$ erfüllt.

Sei eine Garbe $\mathcal{G}$ zusammen mit Garbenmorphismen $\psi_i : \mathcal{G} \to \mathcal{F}_i$, die verträglich mit den Übergangsmorphismen $\phi_{i'i}$ sind, gegeben. Wegen der universellen Eigenschaft des inversen Limes in (Ab) beziehungsweise (Ringe) oder (A-Mod) ist leicht zu sehen, dass ein eindeutig bestimmter Morphismus von Prägarben $\tilde{\psi} : \mathcal{G} \to \varprojlim^p \mathcal{F}_i$ existiert, der verträglich mit den Übergangsabbildungen ist. Dann ist $\psi := \theta \circ \tilde{\psi} : \mathcal{G} \to \varprojlim \mathcal{F}_i$ ein Morphismus von Garben, der mit den Übergangsabbildungen verträglich ist und $\varprojlim \mathcal{F}_i$ erfüllt die universelle Eigenschaft. □

Um den inversen Limes explizit berechnen zu können, werden wir zeigen, dass die Schnitte des inversen Limes von Garben schon durch den inversen Limes der Schnitte der einzelnen Garben gegeben ist. Dafür benötigen wir noch folgendes Lemma:

Lemma 2.3. *Produkte und inverse Limiten vertauschen in den Kategorien (Ringe) und (A-Mod).*

Beweis. Wir werden den Beweis für A-Moduln durchführen. Es seien für alle $i, n \in \mathbb{N}$ A-Moduln M_n^i gegeben und für $i, n, n' \in \mathbb{N},\ n' \geq n$ habe man Übergangsabbildungen $\phi_{n'n}^i : M_{n'}^i \to M_n^i$. Das heißt, für jedes i ist $(M_n^i)_{n\in\mathbb{N}}$ ein projektives System und der inverse Limes $\varprojlim_{n\in\mathbb{N}} M_n^i$ existiert. Weiter definieren die Morphismen $\phi_{n'n}^i$ nach der universellen Eigenschaft des Produkts für alle $n' \geq n$ Morphismen $\prod_{i\in\mathbb{N}} \phi_{n'n}^i : \prod_{i\in\mathbb{N}} M_{n'}^i \to \prod_{i\in\mathbb{N}} M_n^i$ und wir erhalten ein projektives System $(\prod_{i\in\mathbb{N}} M_n^i, \prod_{i\in\mathbb{N}} \phi_{n'n}^i)_{n\in\mathbb{N}}$. Wir müssen nun zeigen

$$\prod_{i\in\mathbb{N}} \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} M_n^i \cong \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \prod_{i\in\mathbb{N}} M_n^i.$$

Dazu zeigen wir, dass $\varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \prod_{i\in\mathbb{N}} M_n^i$ die universelle Eigenschaft des Produkts erfüllt. Die Projektionen $\varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \prod_{i\in\mathbb{N}} M_n^i \to \prod_{i\in\mathbb{N}} M_n^i \to M_n^i$ für $i, n \in \mathbb{N}$ vertauschen mit den Übergangsabbildungen $\phi_{n'n}^i$ und definieren so eindeutige Morphismen $\phi^i : \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \prod_{i\in\mathbb{N}} M_n^i \to \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} M_n^i$. Seien nun ein A-Modul T und Morphismen $\psi^i : T \to \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} M_n^i$ gegeben. Definieren wir $\psi_n^i := \mathrm{pr}_n \circ \psi^i : T \to M_n^i$, wobei $\mathrm{pr}_n : \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} M_n^i \to M_n^i$ die kanonische Projektion bezeichnet, so gilt für alle $n' \geq n$ schon $\psi_n^i = \phi_{n'n}^i \circ \psi_{n'}^i$. Insbesondere gilt dann für $\prod_{i\in\mathbb{N}} \psi_n^i : T \to \prod_{i\in\mathbb{N}} M_n^i$

$$\prod_{i\in\mathbb{N}} \psi_n^i = \prod_{i\in\mathbb{N}} \left(\phi_{n'n}^i \circ \psi_{n'}^i\right) = \left(\prod_{i\in\mathbb{N}} \phi_{n'n}^i\right) \circ \left(\prod_{i\in\mathbb{N}} \psi_{n'}^i\right).$$

Also sind die Morphismen $\prod_{i\in\mathbb{N}} \psi_n^i$ verträglich mit den Übergangsabbildungen und nach der universellen Eigenschaft des projektiven Limes existiert ein eindeutiger Morphismus

$$\psi : T \to \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \prod_{i\in\mathbb{N}} M_n^i,$$

wobei für alle $i \in \mathbb{N}$ schon $\psi^i = \phi^i \circ \psi$ gilt. □

Lemma 2.4. *Sei $U \subset X$ eine offene Menge und $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein projektives System von Garben auf X. Dann gilt*

$$(\varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_n)(U) = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_n(U).$$

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass $\varprojlim^p \mathcal{F}_i$ bereits eine Garbe ist. Sei $U \subset X$ offen und $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von U. Man hat ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & \mathcal{F}_3(U) \arrow[r] \arrow[d] & \prod_{i\in I} \mathcal{F}_3(U_i) \arrow[r] \arrow[d] & \prod_{i,j} \mathcal{F}_3(U_i \cap U_j) \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & \mathcal{F}_2(U) \arrow[r] \arrow[d] & \prod_{i\in I} \mathcal{F}_2(U_i) \arrow[r] \arrow[d] & \prod_{i,j} \mathcal{F}_2(U_i \cap U_j) \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & \mathcal{F}_1(U) \arrow[r] \arrow[d] & \prod_{i\in I} \mathcal{F}_1(U_i) \arrow[r] \arrow[d] & \prod_{i,j} \mathcal{F}_1(U_i \cap U_j) \arrow[d] \\
 & 0 & 0 & 0.
\end{tikzcd}$$

Weil die $\mathcal{F}_i$ Garben sind, ist jede Zeile exakt. Man hat also eine exakte Sequenz von projektiven Systemen

$$0 \to \Big(\mathcal{F}_n(U)\Big)_{n\in\mathbb{N}} \to \Big(\prod_{i\in I} \mathcal{F}_n(U_i)\Big)_{n\in\mathbb{N}} \to \Big(\prod_{i,j\in I} \mathcal{F}_n(U_i \cap U_j)\Big)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Dies induziert wegen der Linksexaktheit des inversen Limes eine exakte Sequenz

$$0 \to \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_n(U) \to \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \Big(\prod_{i\in I} \mathcal{F}_n(U_i)\Big) \to \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \Big(\prod_{i,j\in I} \mathcal{F}_n(U_i \cap U_j)\Big).$$

Nach Lemma 2.3 vertauscht der inverse Limes mit Produkten, wodurch man eine exakte Sequenz

$$0 \to \varprojlim_{n\in\mathbb{N}}{}^p \mathcal{F}_n(U) \to \prod_{i\in I} \varprojlim_{n\in\mathbb{N}}{}^p \mathcal{F}_n(U_i) \to \prod_{i,j\in I} \varprojlim_{n\in\mathbb{N}}{}^p \mathcal{F}_n(U_i \cap U_j)$$

erhält. Die Exaktheit dieser Sequenz ist äquivalent dazu, dass $\varprojlim^p \mathcal{F}_n$ eine Garbe ist. □

2.2 Affine formale Schemata

Bei der Definition von formalen Schemata wenden wir ein ganz ähnliches Vorgehen wie bei gewöhnlichen Schemata an. Wir definieren zunächst das formale Spektrum $\mathrm{Spf}(A)$ für einen Ring A. Grothendieck setzt in seiner Definition voraus, dass der Ring A ein *zulässiger topologischer Ring* ist [vgl. EGAIneu, 0, (7.1.2)]. Wir werden etwas strengere Voraussetzungen machen, da dies für unsere Zwecke ausreichend ist. Im Folgenden ist A stets ein noetherscher, adischer Ring mit definierendem Ideal $\mathfrak{a} \subset A$. Weitere Bedingungen fordern wir zunächst nicht, werden aber später zeigen, dass man A ohne Einschränkung als separiert und vollständig annehmen kann.

Es bezeichne $\mathrm{Spf}(A) \subset \mathrm{Spec}(A)$ die Menge aller Primideale, die offen bezüglich der $\mathfrak{a}$-adischen Topologie sind. Die Zariski-Topologie auf $\mathrm{Spec}(A)$ induziert eine Topologie auf $\mathrm{Spf}(A)$. Es gilt

$$\mathrm{Spf}(A) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \mid \mathfrak{p} \text{ ist offen}\} = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \mid \mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}\} \cong \mathrm{Spec}(A/\mathfrak{a}).$$

Insbesondere ist $\mathrm{Spf}(A)$ eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathrm{Spec}(A)$. Weil die Mengen $D_A(f) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \mid f \notin \mathfrak{p}\}$ für $f \in A$ eine Basis der Zariski-Topologie auf $\mathrm{Spec}(A)$ bilden, sind deren Einschränkungen, also $D(f) = D_A(f) \cap \mathrm{Spf}(A) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \mid \mathfrak{a} \subset \mathfrak{p},\ f \notin \mathfrak{p}\}$, eine Basis der Topologie auf $\mathrm{Spf}(A)$. Wir wollen nun eine Garbe $\mathcal{O}$ definieren, die $\mathrm{Spf}(A)$ zu einem geringten Raum macht. Dabei soll gelten $\mathcal{O}(D(f)) = A_{\{f\}}$.

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ definiert $\mathfrak{a}^n$ ein abgeschlossenes Unterschema $\mathrm{Spec}(A/\mathfrak{a}^n)$ von $\mathrm{Spec}(A)$. Da der topologische Raum von $\mathrm{Spec}(A/\mathfrak{a}^n)$ immer gleich $\mathcal{Y} := \mathrm{Spf}(A)$ ist, hat man ein projektives System von Garben von Ringen auf $\mathcal{Y}$ gegeben durch

$$\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A/\mathfrak{a})} \leftarrow \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A/\mathfrak{a}^2)} \leftarrow \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A/\mathfrak{a}^3)} \leftarrow \cdots .$$

Es sei $\mathcal{O} := \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A/\mathfrak{a}^n)}$. Dann ist $\mathcal{O}$ eine Garbe von Ringen auf $\mathcal{Y}$.

Lemma 2.5. *Die Garbe $\mathcal{O}$ macht $\mathcal{Y}$ zu einem topologisch geringten Raum. Das heißt, für alle offenen $U \subset \mathcal{Y}$ ist $\mathcal{O}(U)$ ein topologischer Ring und alle Restriktionsabbildungen sind stetig.*

Beweis. Sei $U \subset \mathcal{Y}$ offen. Dann ist

$$\mathcal{O}(U) = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A/\mathfrak{a}^n)}(U) = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}(U)/\tilde{\mathfrak{a}}(U)^n$$

die Vervollständigung von $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}(U)$ bezüglich der $\tilde{\mathfrak{a}}(U)$-adischen Topologie und nach 1.11 ein topologischer Ring. Sind $U \subset V \subset \mathcal{Y}$ offene Mengen und $\rho : \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}(V) \to \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}(U)$ die Restriktionsabbildung, so gilt $\rho(\tilde{\mathfrak{a}}^n(V)) \subset \tilde{\mathfrak{a}^n}(U)$, also ist ρ stetig. Da die Restriktionsabbildung $\mathcal{O}(V) \to \mathcal{O}(U)$ durch $\hat{\rho}$ gegeben ist, ist diese nach Proposition 1.14 stetig. $\square$

Sei nun $f \in A$. Es ist

$$\mathcal{O}(D(f)) = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A/\mathfrak{a}^n)}(D(f)) = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} (A/\mathfrak{a}^n)_f = A_{\{f\}}.$$

Außerdem gilt

$$\mathcal{O}(\mathcal{Y}) = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A/\mathfrak{a}^n)}(A/\mathfrak{a}^n) = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} A/\mathfrak{a}^n = \hat{A}.$$

Lemma 2.6. *Sei $x \in \mathrm{Spf}(A)$ ein Punkt, der zu dem Primideal $\mathfrak{p} \subset A$ korrespondiert. Dann ist der Halm $\mathcal{O}_x$ am Punkt x ein lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}_x = \mathfrak{p}\mathcal{O}_x$.*

Beweis. Es ist
$$\mathcal{O}_x = \varinjlim_{x\in U\subset \mathcal{Y}} \mathcal{O}(U) = \varinjlim_{x\in D(f)} \mathcal{O}(D(f)) = \varinjlim_{f\notin \mathfrak{p}} A_{\{f\}}.$$
Für jedes $f \in A \setminus \mathfrak{p}$ und $n \in \mathbb{N}$ hat man eine kanonische exakte Sequenz

$$0 \to (\mathfrak{p}/\mathfrak{a}^n)_f \to (A/\mathfrak{a}^n)_f \to (A/\mathfrak{p})_f \to 0.$$

Die Sequenzen induzieren eine kurze exakte Sequenz von projektiven Systemen über $\mathbb{N}$, wobei das linke System surjektive Übergangsabbildungen hat. Anwenden des inversen Limes liefert dann eine exakte Sequenz

$$0 \to \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} (\mathfrak{p}/\mathfrak{a}^n)_f \to \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} (A/\mathfrak{a}^n)_f \to \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} (A/\mathfrak{p})_f \to 0.$$

Es ist $\varprojlim (A/\mathfrak{p})_f = (A/\mathfrak{p})_f$, weil das System konstant ist. Weiter folgt wie im Beweis von Korollar 1.18, dass $\varprojlim (\mathfrak{p}/\mathfrak{a}^n)_f = \mathfrak{p}A_{\{f\}}$ gilt. Man eine exakte Sequenz

$$0 \to \mathfrak{p}A_{\{f\}} \to A_{\{f\}} \to (A/\mathfrak{p})_f \to 0.$$

Nun nimmt man den direkten Limes über alle $f \in A\setminus\mathfrak{p}$ und schreibt $\mathfrak{m}_x$ für $\varinjlim_{f\in A\setminus\mathfrak{p}} \mathfrak{p}A_{\{f\}}$. Weil $\varinjlim_{f\in A\setminus\mathfrak{p}} (A/\mathfrak{p})_f = Q(A/\mathfrak{p})$ der Quotientenkörper $Q(A/\mathfrak{p})$ von $A/\mathfrak{p}$ ist, hat man eine exakte Sequenz
$$0 \to \mathfrak{m}_x \to \mathcal{O}_x \to Q(A/\mathfrak{p}) \to 0.$$
Also ist $\mathfrak{m}_x$ maximal und es gilt $\mathfrak{p}\mathcal{O}_x \subset \mathfrak{m}_x$. Sei nun $g_x \in \mathcal{O}_x \setminus \mathfrak{p}\mathcal{O}_x$. Wir zeigen, dass g_x eine Einheit ist. Sei g_x durch einen Vertreter $g \in A_{\{f\}}$ mit $f \notin \mathfrak{p}$ gegeben. Wegen $g_x \notin \mathfrak{p}\mathcal{O}_x$, ist $g \notin \mathfrak{p}A_{\{f\}}$. Also liegt auch die Projektion $\bar{g} \in (A/\mathfrak{a})_f$ nicht in $(\mathfrak{p}A/\mathfrak{a})_f$. Da wir zeigen wollen, dass g_x eine Einheit ist, können wir ohne Einschränkung mit Potenzen von f, also mit Einheiten, multiplizieren. Wir können also annehmen, dass $\bar{g}$ schon in $A/\mathfrak{a}$ liegt und wählen einen Vertreter $g' \in A$. Dann ist $g' \notin \mathfrak{p}$ und insbesondere $fg' \notin \mathfrak{p}$. Schränkt man g auf $A_{\{fg'\}}$ ein und setzt $d = 1 - g'^{-1}g$, so gilt $g = g'(1-d)$ in $A_{\{fg'\}}$. Weil g' in $A_{\{fg'\}}$ eine Einheit ist, genügt es zu zeigen, dass auch $1-d$ in $A_{\{fg'\}}$ eine Einheit ist.

Wegen $g = g'$ in $(A/\mathfrak{a})_{fg'} \subset (A/\mathfrak{a})_f$ ist $d = 0$ in $(A/\mathfrak{a})_{fg'}$, also $d \in \mathfrak{a}_{fg'}$. Insbesondere ist $d^n \in \mathfrak{a}^n_{fg'}$. Dann ist aber die Folge der Partialsummen $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $S_n = \sum_{k=1}^n d^k$ eine Cauchyfolge in $A_{\{fg'\}}$ und weil $A_{\{fg'\}}$ vollständig ist, konvergiert die Reihe $\sum_{n\in\mathbb{N}} d^n$ gegen ein $h \in A_{\{fg'\}}$. Es gilt $(1-d)h = 1$, also ist $1-d$ und damit auch g eine Einheit in $A_{\{fg'\}}$. Dann ist aber auch das Bild g_x von g in $\mathcal{O}_x$ eine Einheit und es folgt, dass $\mathfrak{p}\mathcal{O}_x$ das einzige Maximalideal in $\mathcal{O}_x$ ist und damit auch $\mathfrak{m}_x = \mathfrak{p}\mathcal{O}_x$. □

Definition 2.7. Sei A ein adischer Ring und $\mathfrak{a}$ ein definierendes Ideal. Es sei $\mathcal{Y} = \mathrm{Spf}(A)$ und $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}$ die oben konstruierte Garbe $\mathcal{O}$. Dann heißt der geringte Raum $(\mathcal{Y}, \mathcal{O}_{\mathcal{Y}})$ das *affine formale Spektrum von A*. Oft bezeichnet man es nur mit $\mathrm{Spf}(A)$. Ein *affines noethersches formales Schema* ist ein topologisch lokal geringter Raum, der isomorph zu $\mathrm{Spf}(A)$ für einen noetherschen, adischen Ring A ist.

Lemma 2.8. *Sei $\mathcal{Y} = \operatorname{Spf}(A)$ ein affines formales Schema und $U = D(f) \subset \operatorname{Spf}(A)$ für ein $f \in A$. Dann ist der lokal geringte Raum $(U, \mathcal{O}_{\mathcal{Y}|U})$ isomorph zu dem affinen formalen Schema* $\operatorname{Spf}(A_f)$.

Beweis. Sei $\mathfrak{a}$ ein definierendes Ideal, $X = \operatorname{Spec}(A)$ und $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_X$ die zu $\mathfrak{a}$ gehörige Idealgarbe. Dann ist $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}} = \varprojlim \mathcal{O}_X/\mathcal{J}^n$. Sei $\tilde{U} = D_A(f) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A) \mid f \notin \mathfrak{p}\}$. Wegen $(\tilde{U}, \mathcal{O}_{X|\tilde{U}}) \cong (\operatorname{Spec} A_f, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A_f})$ gilt $(\mathcal{O}_X/\mathcal{J}^n)_{|U} \cong \mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(A_f/\mathfrak{a}_f^n)}$. Also ist $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}|U} = (\varprojlim \mathcal{O}_X/\mathcal{J}^n)_{|U} \cong \varprojlim \mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(A_f/\mathfrak{a}_f^n)} = \mathcal{O}_{\operatorname{Spf} A_f}$. Wegen $D(f) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spf}(A) \mid f \notin \mathfrak{p}\} = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A) \mid \mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}, f \notin \mathfrak{p}\} = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A_f \mid \mathfrak{a}_f \subset \mathfrak{p}\} = \operatorname{Spf}(A_f)$ gilt also $(U, \mathcal{O}_{\mathcal{Y}|U}) \cong (\operatorname{Spf}(A_f), \mathcal{O}_{\operatorname{Spf}(A_f)})$. □

Lemma 2.9. *Sei A ein adischer Ring. Es gilt*

$$\operatorname{Spf}(\hat{A}) = \operatorname{Spf}(A).$$

Insbesondere kann man in Definition 2.7 ohne Einschränkung A als vollständigen und separierten Ring voraussetzen.

Beweis. Ist $\mathfrak{a}$ ein definierendes Ideal für die Topologie von A, so ist $\hat{\mathfrak{a}}$ ein definierendes Ideal für die Topologie von $\hat{A}$. Dann ist

$$\operatorname{Spf}(A) \cong (\operatorname{Spec} A/\mathfrak{a}, \varprojlim \mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(A/\mathfrak{a}^n)}).$$

Nach Korollar 1.18 ist aber $A/\mathfrak{a}^n \cong \hat{A}/\widehat{\mathfrak{a}^n}$. Damit ist

$$\operatorname{Spf}(A) \cong (\operatorname{Spec} \hat{A}/\hat{\mathfrak{a}}, \varprojlim \mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(\hat{A}/\widehat{\mathfrak{a}^n})}) \cong \operatorname{Spf}(\hat{A}).$$ □

2.3 Noethersche formale Schemata

Definition 2.10. Ein *lokal noethersches formales Schema* $\mathcal{X}$ ist ein topologisch lokal geringter Raum $(\mathcal{X}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}})$, für den jeder Punkt $x \in \mathcal{X}$ eine offene Umgebung U besitzt, sodass $(U, \mathcal{O}_U)$ isomorph zu einem noetherschen affinen formalen Schema $\operatorname{Spf}(A)$ ist.
Man nennt $\mathcal{X}$ noethersch, wenn der topologische Raum $\mathcal{X}$ noethersch ist.

Ein *Morphismus von formalen Schemata* $f : (\mathcal{X}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}}) \to (\mathcal{Y}, \mathcal{O}_{\mathcal{Y}})$ ist ein Morphismus der lokal geringten Räume, sodass für jedes offene $V \subset \mathcal{Y}$ die induzierte Abbildung $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}(V) \to \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(f^{-1}(V))$ stetig ist.

Bemerkung 2.11. Jedes lokal noethersche Schema X ist in kanonischer Weise ein lokal noethersches formales Schema, denn für einen noetherschen Ring A stimmt die Topologie induziert durch das Ideal $(0) \subset A$ mit der diskreten Topologie überein. Es gilt dann $\operatorname{Spec}(A) = \operatorname{Spf}(A)$, also hat jeder Punkt von X eine Umgebung U mit $U \cong \operatorname{Spec}(A) = \operatorname{Spf}(A)$. Insbesondere ist X ein topologisch geringter Raum, für den jeder Ring $\mathcal{O}_X(U)$ mit der diskreten Topologie versehen ist. Offensichtlich sind dann alle Restriktionsabbildungen stetig.

Da wir in dieser Arbeit glatte formale Keime betrachten wollen, müssen wir Glattheit für formale Schemata definieren. In der Literatur findet sich keine Definition, doch wir werden später sehen, dass uns die Definition für formale Glattheit, angewendet auf formale Schemata, einen sinnvollen Glattheitsbegriff liefert.

Definition 2.12. Ein Morphismus $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ von lokal noetherschen formalen Schemata heißt *formal glatt*, wenn für jedes kommutative Diagramm von lokal noetherschen formalen Schemata

$$\begin{tikzcd} \mathcal{X} \arrow[d, "f"'] & \mathrm{Spec}(C/N) \arrow[l] \arrow[d] \\ \mathcal{Y} & \mathrm{Spec}(C), \arrow[l] \arrow[ul, dashed, "\exists g"] \end{tikzcd}$$

wobei C ein Ring und $N \subset C$ ein Ideal mit $N^2 = 0$ ist, ein Lift $g : \mathrm{Spec}(C) \to \mathcal{X}$ existiert. Ein lokal noethersches formales Schema $\mathcal{X}$ über einem Körper k heißt *formal glatt über k* oder nur *formal glatt*, wenn der Morphismus $\mathcal{X} \to \mathrm{Spec}(k)$ formal glatt ist. Um Wiederholungen zu vermeiden, sprechen wir von einem glatten formalen Schema $\mathcal{X}$, wenn $\mathcal{X}$ formal glatt ist.

Eine Möglichkeit, ein noethersches formales Schema zu erhalten, ist die Vervollständigung eines noetherschen Schemas entlang eines abgeschlossenen Unterschemas.

Definition 2.13. Sei X ein noethersches Schema und $i : Y \hookrightarrow X$ ein abgeschlossenes Unterschema. Sei $\mathcal{J}$ die zu Y korrespondierende Idealgarbe, das heißt $\mathcal{J} = \ker(i^\sharp : \mathcal{O}_X \to i_*\mathcal{O}_Y)$. Insbesondere ist $\mathcal{O}_X/\mathcal{J} \cong i_*\mathcal{O}_Y$ und $Y = \mathrm{Supp}\,\mathcal{O}_X/\mathcal{J}$. Sei Y_n das abgeschlossene Unterschema von X, das durch die Idealgarbe $\mathcal{J}^n$ definiert wird, das heißt $Y_n = \mathrm{Supp}\,\mathcal{O}_X/\mathcal{J}^n$ und $\mathcal{O}_{Y_n} = i^{-1}(\mathcal{O}_X/\mathcal{J}^n)$ [vgl. GW, (7.16)]. Da der topologische Raum von Y_n für alle $n \in \mathbb{N}$ gleich dem topologischen Raum von Y ist, kann man die Garben $\mathcal{O}_{Y_n}$ als Garben auf Y auffassen. Setzt man nun $\hat{X} := Y$ und $\mathcal{O}_{\hat{X}} = \varprojlim \mathcal{O}_{Y_n}$, so heißt der geringte Raum $(\hat{X}, \mathcal{O}_{\hat{X}})$ die *formale Vervollständigung von X entlang Y*.

Lemma 2.14. *Der konstruierte Raum $(\hat{X}, \mathcal{O}_{\hat{X}})$ ist ein noethersches formales Schema.*

Beweis. Sei $x \in \hat{X} \subset X$ und $U = \mathrm{Spec}(A)$ eine offene, affine Umgebung von x in X. Der Ring A ist noethersch, weil X noethersch ist. Dann ist $V := U \cap \hat{X}$ eine offene Umgebung von x in $\hat{X}$. Wir zeigen $(V, \mathcal{O}_{\hat{X}|V}) \cong \mathrm{Spf}(A)$. Ist $\mathcal{J}(U) = \mathfrak{a}$, so ist $(Y_n)_{|V} \cong \mathrm{Spec}(A/\mathfrak{a}^n)$. Insbesondere ist $\mathcal{O}_{Y_n|V} = \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A/\mathfrak{a}^n)}$ Dann ist aber $\mathcal{O}_{\hat{X}|V} = \varprojlim \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A/\mathfrak{a}^n)}$ und es folgt $(V, \mathcal{O}_{\hat{X}|V}) \cong \mathrm{Spf}(A)$. Weil X noethersch ist, ist auch die abgeschlossene Teilmenge $Y \subset X$ noethersch. □

Insbesondere ist für einen noetherschen, adischen Ring mit definierendem Ideal $\mathfrak{a}$ das affine formale Schema $\mathrm{Spf}(A)$ die Vervollständigung des noetherschen Schemas $\mathrm{Spec}(A)$ entlang des abgeschlossenen Unterschemas $\mathrm{Spec}(A/\mathfrak{a})$.

Bemerkung 2.15. Das formale Schema $\hat{X}$ aus 2.13 hängt nur von der abgeschlossenen Teilmenge $Y \subset X$ und nicht von der Struktur des Unterschemas ab. Sind $\mathcal{I}$ und $\mathcal{J}$ Idealgarben auf X, die beide ein abgeschlossenes Unterschema mit topologischem Raum Y definieren, so gilt für jede offene Teilmenge $U \subset X$ schon $\sqrt{\mathcal{I}(U)} = \sqrt{\mathcal{J}(U)}$. Mit Lemma 1.7 folgt $\mathcal{O}_{\hat{X}_{\mathcal{I}}}(U) = \varprojlim \mathcal{O}_X/\mathcal{I}^n(U) = \varprojlim \mathcal{O}_X/\mathcal{J}^n(U) = \mathcal{O}_{\hat{X}_{\mathcal{J}}}(U)$.

Bemerkung 2.16. Nach Hartshornes Definition ist ein noethersches formales Schema ein lokal geringter Raum $(\mathcal{X}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}})$, der eine endliche Überdeckung $(\mathcal{U}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ besitzt, sodass jedes Paar $(\mathcal{U}_i, \mathcal{O}_{\mathcal{U}_i})$ als lokal geringter Raum isomorph zu der Vervollständigung eines noetherschen Schemas X_i entlang eines abgeschlossenen Unterschemas Y_i ist [H, II, Ch. 9]. Dies ist offensichtlich auch ein noethersches formales Schema im Sinne unserer Definition, da eine endliche Vereinigung noetherscher Räume wieder noethersch ist und jedes $\hat{X}_i$ bereits ein noethersches formales Schema ist.

Sei umgekehrt ein noethersches formales Schema $(\mathcal{X}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}})$ gegeben. Für jeden Punkt $x \in \mathcal{X}$ existiert eine offene, affine Umgebung $U_x = \mathrm{Spf}(A_x)$ von $\mathcal{X}$. Weil $\mathcal{X}$ noethersch ist, besitzt die Überdeckung $(U_x)_{x\in X}$ eine endliche Teilüberdeckung $(U_x)_{x\in I}$ und jedes U_x ist isomorph zu der Vervollständigung des noetherschen Schemas $\mathrm{Spec}(A_x)$ entlang des abgeschlossenen Unterschemas $\mathrm{Spec}(A_x/\mathfrak{a}_x)$, wobei $\mathfrak{a}_x \subset A_x$ ein definierendes Ideal ist.

Lemma 2.17. *Seien ein Morphismus $f : X \to Y$ von noetherschen Schemata und abgeschlossene Teilmengen X' von X und Y' von Y gegeben, sodass $f(X') \subset Y'$ gilt. Dann induziert f in kanonischer Weise einen Morphismus von noetherschen formalen Schemata $\hat{f} : \hat{X} \to \hat{Y}$, wobei $\hat{X}$ die Vervollständigung von X entlang X' und $\hat{Y}$ die Vervollständigung von Y entlang Y' bezeichnet.*

Beweis. Wir zeigen das Lemma zunächst für affine Schemata. Es seien also $X = \mathrm{Spec}(B)$ und $Y = \mathrm{Spec}(A)$ für noethersche Ringe A und B. Weiter seien die abgeschlossenen Teilmengen $X' = V(\mathfrak{b}) \subset X$ beziehungsweise $Y' = V(\mathfrak{a}) \subset Y$ durch Ideale $\mathfrak{a} \subset A$, $\mathfrak{b} \subset B$ gegeben. Ohne Einschränkung können wir $\mathfrak{b}$ durch $\sqrt{\mathfrak{b}}$ ersetzen. Es gilt nun $\hat{X} = \mathrm{Spf}(B)$ und $\hat{Y} = \mathrm{Spf}(A)$. Der Morphismus $f : X \to Y$ korrespondiere zum Ringhomomorphismus $\phi : A \to B$. Wegen $f(X') \subset Y'$ induziert f einen stetigen Morphismus $\hat{f} = f_{|X'} : X' \to Y'$ der topologischen Räume. Wir müssen also noch einen Morphismus der Garben $\hat{f}^\sharp : \mathcal{O}_{\hat{Y}} \to \hat{f}_*\mathcal{O}_{\hat{X}}$ konstruieren. Es ist $\mathcal{O}_{\hat{Y}} = \varprojlim \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A/\mathfrak{a}^n)}$ und $\hat{f}_*\mathcal{O}_{\hat{X}} = \hat{f}_* \varprojlim \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(B/\mathfrak{b}^n)} = \varprojlim \hat{f}_*\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(B/\mathfrak{b}^n)}$. Wegen der universellen Eigenschaft des projektiven Limes genügt es, Morphismen $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A/\mathfrak{a}^n)} \to \hat{f}_*\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(B/\mathfrak{b}^n)}$ anzugeben, die mit den Übergangsabbildungen vertauschen.

Die Bedingung $f(V(\mathfrak{b})) \subset V(\mathfrak{a})$ impliziert, dass für jedes Primideal $\mathfrak{p} \subset B$ mit $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{p}$ schon $\mathfrak{a} \subset \phi^{-1}(\mathfrak{p})$ gilt. Damit folgt

$$\phi^{-1}(\mathfrak{b}) = \phi^{-1}\big(\sqrt{\mathfrak{b}}\big) = \phi^{-1}\Big(\bigcap_{\mathfrak{b}\subset\mathfrak{p}} \mathfrak{p}\Big) = \bigcap_{\mathfrak{b}\subset\mathfrak{p}} \phi^{-1}(\mathfrak{p}) \supset \mathfrak{a}.$$

Damit gilt dann $\phi(\mathfrak{a}^n) \subset \mathfrak{b}^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und wir erhalten wohldefinierte Ringhomomorphismen $\phi_n : A/\mathfrak{a}^n \to B/\mathfrak{b}^n$. Diese induzieren Morphismen von Schemata $\mathrm{Spec}(B/\mathfrak{b}^n) \to$

$\operatorname{Spec}(A/\mathfrak{a}^n)$ mit den gesuchten Morphismen von Garben $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(A/\mathfrak{a}^n)} \to \hat{f}_*\mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(B/\mathfrak{b}^n)}$. Nach Konstruktion sind diese mit den Übergangsabbildungen verträglich und induzieren somit einen kanonischen Morphismus von Garben $\hat{f}^\sharp : \mathcal{O}_{\hat{Y}} \to \hat{f}_*\mathcal{O}_{\hat{X}}$.

Sei nun $U' \subset \hat{Y}$ offen. Das heißt, es existiert ein $U \subset Y$ mit $U' = U \cap \hat{Y}$. Bezeichnet ψ den induzierten Ringhomomorphismus

$$\psi = f^\sharp(U) : \mathcal{O}_Y(U) \to f_*\mathcal{O}_X(U) = \mathcal{O}_X(f^{-1}(U)),$$

so ist der Ringhomomorphismus

$$\hat{f}^\sharp(U') = \mathcal{O}_{\hat{Y}}(U') \to \hat{f}_*\mathcal{O}_{\hat{X}}(U')$$

durch die Vervollständigung $\hat{\psi}$ von ψ gegeben und somit stetig nach Proposition 1.14.

Wir müssen nun noch zeigen, dass der Morphismus $\hat{f}$ lokal ist. Dazu seien Punkte $x \in \hat{X}$ und $y = \hat{f}(x) \in \hat{Y}$ gegeben. Der Punkt $x \in X'$ entspricht einem Primideal $\mathfrak{q} \subset B$ und $y = \hat{f}(x) = \phi^{-1}(\mathfrak{q}) =: \mathfrak{p}$ einem Primideal in A. Sei $\hat{f}_x : \mathcal{O}_{\hat{Y},y} \to \mathcal{O}_{\hat{X},x}$ der induzierte Morphismus auf den Halmen. Nach Lemma 2.6 sind $\mathcal{O}_{\hat{Y},y}$ und $\mathcal{O}_{\hat{X},x}$ lokale Ringe mit maximalen Idealen $\mathfrak{m}_y = \mathfrak{p}\mathcal{O}_{\hat{Y},y}$ beziehungsweise $\mathfrak{m}_x = \mathfrak{q}\mathcal{O}_{\hat{X},x}$. Es gilt

$$\hat{f}_x^{-1}(\mathfrak{m}_x) = \phi^{-1}(\mathfrak{q})\hat{f}_x^{-1}(\mathcal{O}_{\hat{X},x}) = \mathfrak{p}\mathcal{O}_{\hat{Y},y} = \mathfrak{m}_y,$$

also ist $\hat{f}_x$ lokal. Der konstruierte Morphismus $\hat{f} : \hat{X} \to \hat{Y}$ ist damit ein Morphismus von noetherschen formalen Schemata.

Für beliebige Schemata X und Y seien offene, affine Überdeckungen $(U_i)_{i\in I}$ von X und $(V_j)_{j\in J}$ von Y gegeben, sodass für jedes $i \in I$ ein $j \in J$ existiert mit $f(U_i) \subset V_j$. Weil dann auch $U_i \cap X' \subset V_j \cap Y'$ gilt, existiert nach dem ersten Teil ein kanonischer Morphismus $\widehat{(f_{|U_i})} : \hat{U}_i = \hat{X}_{|U_i} \to \hat{V}_j = \hat{Y}_{|V_j} \hookrightarrow \hat{Y}$. Da diese Morphismen kanonisch sind, stimmen sie auf Schnitten überein und verkleben nach [GW, Prop. 3.5] zu dem gesuchten Morphismus $\hat{f} : \hat{X} \to \hat{Y}$. □

2.4 Kohärente Moduln und definierende Ideale

Ebenso wie für Schemata, gibt es auch für formale Schemata den Begriff der kohärenten Moduln. Außerdem benötigen wir, um später die Theorie der Unterschemata verstehen zu können, definierende Ideale. Wir wollen in diesem Kapitel nur einen kurzen Überblick über die Definitionen und einige Eigenschaften geben. Ausführlicher finden sich diese zum Beispiel in [H, II, Ch. 9].

Definition 2.18. Sei X ein noethersches Schema, Y ein abgeschlossenes Unterschema definiert durch die Idealgarbe $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_X$ und Y_n das zu $\mathcal{J}^n$ korrespondierende Unterschema. Es sei ein kohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{F}$ auf X gegeben. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ definiert $\mathcal{F}/\mathcal{J}^n\mathcal{F}$ eine Garbe von $\mathcal{O}_X/\mathcal{J}^n$-Moduln auf Y_n, also auch auf Y. Die Garbe $\hat{\mathcal{F}} := \varprojlim \mathcal{F}/\mathcal{J}^n\mathcal{F}$ auf Y ist in kanonischer Weise ein $\mathcal{O}_{\hat{X}}$-Modul und heißt die *Vervollständigung von $\mathcal{F}$ entlang Y*.

Definition 2.19. Es sei $\mathcal{X}$ ein noethersches formales Schema und $\mathfrak{F}$ eine Garbe von $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$-Moduln. Dann nennen wir $\mathfrak{F}$ kohärent, wenn eine endliche Überdeckung $(\mathcal{U}_i)_{i\in I}$ existiert, für die gilt $\mathcal{U}_i \cong \hat{X}_i$, wobei die X_i noethersche Schemata sind und $\hat{X}_i$ die Vervollständigung von X_i entlang eines abgeschlossenen Unterschemas ist, und $\mathfrak{F}_{|\mathcal{U}_i} \cong \hat{\mathcal{F}}_i$ für eine kohärente Garbe $\mathcal{F}_i$ von $\mathcal{O}_{X_i}$-Moduln ist.

Definition 2.20. Sei $\mathcal{X} = \mathrm{Spf}(A)$ nun ein affines noethersches formales Schema und X das noethersche Schema $\mathrm{Spec}(A)$. Zu einem endlich erzeugten A-Modul M korrespondiert der kohärente $\mathcal{O}_X$-Modul $\tilde{M}$. Wir definieren $M^{\triangle}$ auf $\mathcal{X}$ als die Vervollständigung $M^{\triangle} = \widehat{\widetilde{M}}$. Dann ist $M^{\triangle}$ ein kohärenter $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$-Modul.

Lemma 2.21. *Sei A ein noetherscher Ring, $\mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal, $X = \mathrm{Spec}(A)$, $Y = V(\mathfrak{a})$ und $\mathcal{X} = \hat{X} = \mathrm{Spf}(A)$. Dann ist $\mathfrak{I} := \mathfrak{a}^{\triangle}$ eine Garbe von Idealen in $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ und für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}/\mathfrak{I}^n \cong (A/\mathfrak{a}^n)^{\sim}$ als Garbe auf Y.*

Beweis. [H, II, Prop. 9.4] □

Definition 2.22. Sei $(\mathcal{X}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}})$ ein noethersches formales Schema und $\mathfrak{I} \subset \mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ eine Garbe von Idealen auf $\mathcal{X}$. Dann heißt $\mathfrak{I}$ *definierendes Ideal für* $\mathcal{X}$, wenn $\mathrm{Supp}(\mathcal{O}_{\mathcal{X}}/\mathfrak{I}) = \mathcal{X}$ und der lokal geringte Raum $(\mathcal{X}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}}/\mathfrak{I})$ ein noethersches Schema ist.

Bemerkung 2.23. Ist $X = \mathrm{Spec}(A)$ und $Y = V(\mathfrak{a})$ für ein Ideal $\mathfrak{a} \subset A$, so ist $\mathfrak{a}^{\triangle}$ nach Lemma 2.21 ein definierendes Ideal von $\hat{X}$.
Ist allgemeiner X ein noethersches Schema und Y ein abgeschlossenes Unterschema, definiert durch die Idealgarbe $\mathcal{J}$, so ist $\mathfrak{I} = \hat{\mathcal{J}}$ ein definierendes Ideal für $\hat{X}$. Das noethersche Schema $(\hat{X}, \mathcal{O}_{\hat{X}}/\mathfrak{I}^n)$ heißt die *n-te infinitesimale Umgebung von Y* und ist das abgeschlossene Unterschema von X definiert durch $\mathcal{J}^n$. Auch für beliebige formale Schemata existieren definierende Ideale [vgl. H, II, Prop. 9.5].

2.5 Vervollständigung entlang eines Punktes

Im dritten Kapitel dieser Arbeit werden wir uns mit glatten formalen Keimen beschäftigen. Diese werden wir für einen speziellen Fall von formalen Schemata definieren. Ist X ein noethersches Schema lokal von endlichem Typ über einem Körper k und $P \in X(k)$ ein k-rationaler Punkt, so ist die einelementige Menge $\{P\}$ abgeschlossen [s. GW, Prop. 3.33]. Wir können also X entlang $\{P\}$ vervollständigen. Da der topologische Raum von $\hat{X}$ nur aus einem einzelnen Punkt besteht, vereinfacht sich die Struktur deutlich. Solche formalen Schemata sind immer affin und auch die kohärenten Moduln lassen sich besonders einfach darstellen. Um diese zu beschreiben, benötigen wir zunächst folgendes Lemma.

Lemma 2.24. *Sei A ein noetherscher Ring und $\mathfrak{m} \subset A$ ein maximales Ideal. Dann existiert für alle $n \in \mathbb{N}$ ein Isomorphismus*

$$A/\mathfrak{m}^n \cong A_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}^n A_{\mathfrak{m}}.$$

Insbesondere gilt $\hat{A} \cong \widehat{A_{\mathfrak{m}}}$ für die Vervollständigungen bezüglich $\mathfrak{m}$ beziehungsweise $\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}$.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $b \in A \setminus \mathfrak{m}$ ein $y \in A$ und $m \in \mathfrak{m}^n$ existiert mit $by = 1 + m$. Für $n = 1$ gilt dies offensichtlich, weil $A/\mathfrak{m}$ ein Körper ist. Ist $y \in A$ und $m \in \mathfrak{m}^{n-1}$ mit $by = 1 + m$, so folgt

$$\begin{aligned} by - 1 &= m \\ b^2y^2 - 2by + 1 &= m^2 \\ b(-by^2 + 2y) &= 1 - m^2 \end{aligned}$$

und wegen $m^2 \in \mathfrak{m}^n$ folgt die Aussage per Induktion.

Seien für $n \in \mathbb{N}$ die kanonischen Ringhomomorphismen $i : A \to A_\mathfrak{m}$ und $\pi : A_\mathfrak{m} \to A_\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^n A_\mathfrak{m}$ gegeben. Bezeichnet $\phi : A \to A_\mathfrak{m} \to A_\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^n A_\mathfrak{m}$ die Komposition, so ist $\ker(\phi) = i^{-1}(\mathfrak{m}^n A_\mathfrak{m})$. Offensichtlich gilt $\mathfrak{m}^n \subset i^{-1}(\mathfrak{m}^n A_\mathfrak{m})$. Ist umgekehrt $x \in i^{-1}(\mathfrak{m}^n A_\mathfrak{m})$, so gilt $\frac{x}{1} = \frac{m}{s}$ für ein $m \in \mathfrak{m}^n$ und $s \in A \setminus \mathfrak{m}$. Dann existiert ein $y \in A \setminus \mathfrak{m}$ mit $yxs = ym$. Wegen $ys \in A \setminus \mathfrak{m}$ existieren dann wie oben ein $k \in A$ und $p \in \mathfrak{m}^n$ mit $kys = 1 + p$. Also gilt $kym = kysx = (1+p)x = x + px$. Dies zeigt, dass $x = kym - px \in \mathfrak{m}^n$ ist und $\ker(\phi) = \mathfrak{m}^n$ gilt. Man erhält also einen wohldefinierten injektiven Ringhomomorphismus

$$\bar{\phi} : A/\mathfrak{m}^n \hookrightarrow A_\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^n A_\mathfrak{m}.$$

Der Homomorphismus $\bar{\phi}$ ist ebenso surjektiv. Sei $\frac{a}{b} \in A_\mathfrak{m}$, also $a \in A$ und $b \in A \setminus \mathfrak{m}$. Dann existiert ein $y \in A, m \in \mathfrak{m}^n$ mit $by - m = 1$. Damit gilt

$$\bar{\phi}(\overline{ay}) = \frac{ay}{1} = \frac{ayb}{b} = \frac{ayb}{b} - \underbrace{\frac{am}{b}}_{\in \mathfrak{m}^n A_\mathfrak{m}} = \frac{a(by-m)}{b} = \frac{a}{b}$$

und $\bar{\phi}$ ist ein Isomorphismus. □

Lemma 2.25. *Sei X ein noethersches Schema und $Y = \{P\}$ ein abgeschlossener Punkt. Dann ist die Vervollständigung $\hat{X}$ von X entlang Y gegeben durch $(\{P\}, \widehat{\mathcal{O}_{X,P}})$, wobei $\widehat{\mathcal{O}_{X,P}}$ die Vervollständigung bezüglich des maximalen Ideals $\mathfrak{m}_P$ ist, und $\hat{X}$ ist affin. Die kohärenten $\mathcal{O}_{\hat{X}}$-Moduln entsprechen genau den endlich erzeugten $\widehat{\mathcal{O}_{X,P}}$-Moduln.*

Beweis. Es sei $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_X$ die Idealgarbe, die zum eindeutig bestimmten reduzierten Unterschema mit topologischem Raum Y korrespondiert. Da der topologische Raum von $\hat{X}$ nur aus einem Punkt besteht, genügt es, die Strukturgarbe für diesen Punkt zu kennen.
Sei $U = \mathrm{Spec}(A)$ eine offene affine Umgebung von P. Dann ist $\mathcal{J}(U) = \mathfrak{m}$ das maximale Ideal, das den Punkt $P \in \mathrm{Spec}(A)$ definiert. Es ist $\mathcal{O}_{X,P} = A_\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{m}_P = \mathfrak{m}A_\mathfrak{m}$. Nun gilt

$$\mathcal{O}_{\hat{X}}(\{P\}) = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A/\mathfrak{m}^n)}(\{P\}) = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} A/\mathfrak{m}^n \cong \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} A_\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^n A_\mathfrak{m} = \widehat{\mathcal{O}_{X,P}}.$$

Weiterhin gilt

$$\mathrm{Spf}(\widehat{\mathcal{O}_{X,P}}) = \mathrm{Spf}(\mathcal{O}_{X,P}) = (\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,P}/\mathfrak{m}_P), \varprojlim \mathcal{O}_{X,P}/\mathfrak{m}_P^n) = (\{P\}, \varprojlim A_\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^n A_\mathfrak{m}) = \hat{X},$$

also ist $\hat{X}$ affin. Weil $\hat{X}$ nur aus einem Punkt besteht, entsprechen die $\mathcal{O}_{\hat{X}}$-Moduln genau den $\widehat{\mathcal{O}_{X,P}}$-Moduln.

Sei nun M ein kohärenter $\mathcal{O}_{\hat{X}}$-Modul, das heißt, es existiert ein kohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{F}$ mit $M = \hat{\mathcal{F}}$. Weil $N := \mathcal{F}(U)$ ein endlich erzeugter A-Modul ist, ist $M = \hat{\mathcal{F}}(\{P\}) = \varprojlim N/\mathfrak{m}^n N$ ein endlich erzeugter $\hat{A} = \widehat{\mathcal{O}_{X,P}}$-Modul (vgl. Lemma 1.22).

Sei umgekehrt M ein endlich erzeugter $\hat{A} = \widehat{\mathcal{O}_{X,P}}$-Modul. Dann ist $\mathcal{F} := \tilde{M}$ ein kohärenter $\operatorname{Spec}(\widehat{\mathcal{O}_{X,P}})$-Modul und es gilt

$$\hat{\mathcal{F}}(\{P\}) = \hat{M} \overset{1.17}{=} M \otimes_{\widehat{\mathcal{O}_{X,P}}} \widehat{\widehat{\mathcal{O}_{X,P}}} = M \otimes_{\widehat{\mathcal{O}_{X,P}}} \widehat{\mathcal{O}_{X,P}} = M.$$

Also ist $M = \hat{\mathcal{F}}$ kohärent. □

2.6 Formale Unterschemata

In diesem Abschnitt werden wir abgeschlossene formale Unterschemata einführen. Für ein noethersches formales Schema $\mathcal{X}$ wird ein abgeschlossenes Unterschema durch eine kohärente Idealgarbe $\mathcal{A} \subset \mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ definiert. Um zu zeigen, dass so definierte Unterschemata wieder noethersche formale Schemata sind, verwendet man eine weitere Darstellung von formalen Schemata. In dieser Arbeit werden wir diese nur kurz angeben, aber nicht weiter darauf eingehen. Für eine genauere Beschreibung sei auf Grothendieck verwiesen [EGAIneu, I, §10.6].

Man kann ein formales Schema als Folge von Nilimmersionen beschreiben. Sei eine Folge

$$X_1 \xrightarrow{i_1} X_2 \xrightarrow{i_2} X_3 \xrightarrow{i_3} X_4 \xrightarrow{i_4} X_5 \to \cdots$$

gegeben, wobei die X_n noethersche Schemata sind und die Übergangsabbildungen i_n Nilimmersionen. Alle X_n haben denselben topologischen Raum und man erhält ein projektives System von Garben von Ringen auf X_1

$$\mathcal{O}_{X_1} \leftarrow \mathcal{O}_{X_2} \leftarrow \mathcal{O}_{X_3} \cdots .$$

Dann ist der geringte Raum $\varinjlim X_n := (X_1, \varprojlim \mathcal{O}_{X_n})$ ein noethersches formales Schema [s. EGAIneu, I, Prop. 10.6.3].

Proposition 2.26. *Es sei $\mathcal{X}$ ein noethersches formales Schema und $\mathcal{A} \subset \mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ eine kohärente Garbe von Idealen. Weiter sei $V = \operatorname{Supp}(\mathcal{O}_{\mathcal{X}}/\mathcal{A})$ und $i : V \to \mathcal{X}$ die Inklusion der topologischen Räume. Dann ist V abgeschlossen und der topologisch geringte Raum $(V, (\mathcal{O}_{\mathcal{X}}/\mathcal{A})_{|V})$ ist ein noethersches formales Schema.*

Beweis. Die Garbe $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}/\mathcal{A}$ ist als Quotient von kohärenten Garben wieder kohärent [s. H, II, Cor. 9.9]. Dann ist der Träger von $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}/\mathcal{A}$ abgeschlossen nach [EGAIneu, 0, Prop. 5.2.2].

Es ist $(V, (\mathcal{O}_{\mathcal{X}}/\mathcal{A})_{|V}) = (V, i^*(\mathcal{O}_{\mathcal{X}}/\mathcal{A}))$ ein topologisch lokal geringter Raum. Sei $\mathfrak{J}$ ein definierendes Ideal für $\mathcal{X}$. Dann ist für alle n der lokal geringte Raum $X_n := (\mathcal{X}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}}/\mathfrak{J}^n)$ ein noethersches Schema. Aus Lemma 2.4 und den entsprechenden Aussagen für Ringe folgt

$$\mathcal{O}_{\mathcal{X}}/\mathcal{A} = (\mathcal{O}_{\mathcal{X}}/\mathcal{A}) \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{X}} = (\mathcal{O}_{\mathcal{X}}/\mathcal{A}) \otimes \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} (\mathcal{O}_{\mathcal{X}}/\mathfrak{J}^n) =$$
$$= \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} (\mathcal{O}_{\mathcal{X}}/\mathcal{A} \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{X}}/\mathfrak{J}^n) = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{O}_{\mathcal{X}}/(\mathcal{A} + \mathfrak{J}^n).$$

Die Garben $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}/(\mathcal{A} + \mathfrak{J}^n)$ haben alle den Träger V [vgl. EGAIneu, 0, Cor. 5.2.2.2]. Weiterhin sind die Garben von $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$-Moduln $(\mathcal{A} + \mathfrak{J}^n)/\mathfrak{J}^n$ kohärent, also sind sie auch als $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}/\mathfrak{J}$-Moduln kohärent [EGAIneu, 0, (5.3.13)]. Sei nun V_n das abgeschlossene Unterschema von X_n, das von der kohärenten Idealgarbe $(\mathcal{A} + \mathfrak{J}^n)/\mathfrak{J}^n$ definiert wird. Dann erhalten wir ein System von noetherschen Schemata

$$V_1 \to V_2 \to V_3 \to \cdots \to V_n \to \cdots ,$$

wobei alle auftretenden Morphismen Nilimmersionen sind. Wegen $\mathcal{O}_V := (\mathcal{O}_{\mathcal{X}}/\mathcal{A})_{|V} = \varprojlim \mathcal{O}_{V_n}$ ist dann $(V, \mathcal{O}_V) = \varinjlim V_n$ ein noethersches formales Schema. $\square$

Definition 2.27. Ein abgeschlossenes formales Unterschema eines noetherschen formalen Schemas $\mathcal{X}$ ist ein noethersches formales Schema, das isomorph zu einem der Form $(V, \mathcal{O}_{\mathcal{X}}/\mathcal{A}_{|V})$ für ein kohärentes Ideal $\mathcal{A} \subset \mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ ist. Wie für Schemata erhält man eine 1:1-Korrespondenz zwischen den kohärenten Idealen und den abgeschlossenen Unterschemata von $\mathcal{X}$.

Bemerkung 2.28. Ist $\mathcal{X} = \hat{X}$ für ein noethersches Schema X und ein abgeschlossenes Unterschema Y definiert durch die Idealgarbe $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_X$, so definiert $\mathcal{J}^n$ ein abgeschlossenes Unterschema X_n von X. Dies stimmt mit dem Schema X_n aus dem Beweis von 2.26 überein. Ein abgeschlossenes Unterschema V ist gegeben durch den direkten Limes $V = \varprojlim V_n$ für abgeschlossene Unterschemata $V_n \hookrightarrow X_n \hookrightarrow X$. Wir nennen V_n die *n-te infinitesimale Umgebung von $\hat{V}$ in X.*

Wir wollen nun wieder die Vervollständigung entlang eines Punktes gesondert betrachten. Wenn wir in dieser Situation von formalen Unterschemata sprechen, sind stets abgeschlossene Unterschemata gemeint. Dies führt nicht zu Verwechslungen, da die einzig möglichen offenen Unterschemata das leere Schema und das Schema selbst sind.

Es sei also X ein noethersches Schema und $P \in X$ ein abgeschlossener Punkt. Dabei sei $\mathcal{O}_X$ die Strukturgarbe von X und $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_X$ die kohärente Idealgarbe, die zum eindeutig bestimmten reduzierten Unterschema mit topologischem Raum $\{P\}$ gehört. Es sei $\hat{X}_P$ die Vervollständigung von X entlang $\{P\}$, also $\hat{X}_P = (\{P\}, \varprojlim \mathcal{O}_X/\mathcal{J}^n)$. Es sei $A := \mathcal{O}_{X,P}$ der Halm in P mit maximalem Ideal $\mathfrak{m} := \mathfrak{m}_P \subset \mathcal{O}_{X,P}$. Dann gilt nach Lemma 2.25, dass $\hat{X}_P$ durch $(\{P\}, \hat{A})$ gegeben ist. Sei nun ein Unterschema $\hat{V} \hookrightarrow \hat{X}_P$ gegeben. Nach der Definition wird $\hat{V}$ durch ein kohärentes Ideal $\mathcal{A} \subset \mathcal{O}_{\hat{X}_P}$ gegeben. Weil nach 2.25 die kohärenten Ideale von $\mathcal{O}_{\hat{X}_P}$ einfach den endlich erzeugten Idealen in $\hat{A}$ entsprechen und jedes Ideal von $\hat{A}$ endlich erzeugt ist ($\hat{A}$ ist nach 1.21 noethersch, weil A noethersch ist), entspricht $\hat{V}$ also einem Ideal $\mathcal{A} \subset \hat{A}$.

Es gilt $\hat{A} = \varprojlim \hat{A}/\mathfrak{m}^n\hat{A}$. Das Ideal $\mathcal{A}$ definiert für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Ideal $(\mathcal{A}+\mathfrak{m}^n\hat{A})/\mathfrak{m}^n\hat{A} \subset \hat{A}/\mathfrak{m}^n\hat{A} = \hat{A}/\hat{\mathfrak{m}}^n \cong A/\mathfrak{m}^n$. Dieses Ideal in $A/\mathfrak{m}^n$ ist gegeben durch ein Ideal $\mathfrak{a}_n \subset A$ mit $\mathfrak{m}^n \subset \mathfrak{a}_n$. Es gilt $\mathfrak{a}_{n+1} \subset \mathfrak{a}_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Die Strukturgarbe von $\hat{V}$, also auch der Halm in P, ist dann gegeben durch

$$\mathcal{O}_{\hat{V}} = \mathcal{O}_{\hat{X}_P}/\mathcal{A} = \hat{A}/\mathcal{A} = \varprojlim \hat{A}/(\mathcal{A} + \mathfrak{m}^n)\hat{A} = \varprojlim A/\mathfrak{a}_n.$$

Es ist $\mathcal{O}_{\hat{V}}$ ein lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}\hat{A}/\mathcal{A} = \mathfrak{m}\mathcal{O}_{\hat{V}}$.

Nach Proposition 2.26 ist $(\hat{V}, \mathcal{O}_{\hat{V}})$ ein noethersches formales Schema. Da der topologische Raum von $\hat{V}$ nur aus einem Punkt besteht, bedeutet dies, dass $\hat{V}$ ein affines noethersches Schema ist. In diesem Fall kann man das leicht einsehen. Es gilt

$$\mathcal{O}_{\hat{V}}/\mathfrak{m}^n\mathcal{O}_{\hat{V}} = (\hat{A}/\mathcal{A})/(\mathfrak{m}^n\hat{A}/\mathcal{A}) = \hat{A}/(\mathfrak{m}^n\hat{A} + \mathcal{A}) = A/\mathfrak{a}_n.$$

Also ergibt sich

$$\mathcal{O}_{\hat{V}} = \varprojlim A/\mathfrak{a}_n = \varprojlim \mathcal{O}_{\hat{V}}/\mathfrak{m}^n\mathcal{O}_{\hat{V}}.$$

Es ist also $\mathcal{O}_{\hat{V}}$ ein adischer Ring, der vollständig und separiert bezüglich der von $\mathfrak{m}\mathcal{O}_{\hat{V}}$ definierten Topologie ist. Es gilt dann $\hat{V} = \mathrm{Spf}(\mathcal{O}_{\hat{V}})$.

Die n-te infinitesimale Umgebung V_n von V ist gegeben durch

$$\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{\hat{V}}/\mathfrak{m}^n\mathcal{O}_{\hat{V}}) = (\{P\}, \mathcal{O}_{\hat{V}}/\mathfrak{m}^n\mathcal{O}_{\hat{V}}) = (\{P\}, A/\mathfrak{a}_n).$$

Nun haben wir alle nötigen Voraussetzungen, um glatte formale Keime zu definieren.

Definition 2.29. Es sei X eine algebraische Varietät über einem Körper k, das heißt X ist integer und von endlichem Typ über k. Es sei P ein Punkt von $X(k)$ und $\hat{X}_P$ die formale Vervollständigung von X entlang P. Ein *glatter formaler Keim von X durch P* ist ein glattes formales Unterschema $\hat{V} \hookrightarrow \hat{X}_P$. Die Dimension $\dim(\hat{V})$ von $\hat{V}$ bezeichnet die Krull-Dimension des lokalen Rings $\mathcal{O}_{\hat{V}}(\hat{V})$.

3 Algebraizität von glatten formalen Keimen

In diesem Kapitel werden wir uns tiefer mit glatten formalen Keimen beschäftigen. Bost definiert in seiner Arbeit „Germs of analytic varieties in algebraic varieties“ [Bost], wann man einen glatten formalen Keim algebraisch nennt. Er beschreibt ein Kriterium, mit dem sich die Algebraizität von glatten formalen Keimen mit Hilfe gewisser Morphismen γ_D^n prüfen lässt. Wir werden zunächst die Algebraizität etwas ausführlicher besprechen und dann das von Bost gefundene Kriterium beweisen. Kurz gesagt ist ein glatter formaler Keim algebraisch, wenn $\hat{V}$ ein *Zweig* einer Untervarietät Z von X ist. Wir werden daher zunächst das Konzept der Zweige einführen.

3.1 Zweige

Definition 3.1. Es sei Z eine algebraische Varietät und $P \in Z(k)$. Weiter sei $n : \tilde{Z} \to Z$ die Normalisierung von Z. Dann heißt ein Punkt $Q \in \tilde{Z}$ mit $n(Q) = P$ ein *Zweig von Z durch P.*

Wir werden nun zeigen, dass ein Zweig durch P einem minimalen Primideal in der Komplettierung des lokalen Rings im Punkt P entspricht. Grothendieck hat diesen Satz mit etwas schwächeren Voraussetzungen bewiesen [vgl. EGAIV, Cor. 7.6.2]. Wir werden hier eine Version für exzellente Ringe beweisen, da diese für unsere Zwecke ausreichend ist. Eine Definition von exzellenten Ringen findet sich beispielsweise in [Liu, Ch. 8, Def. 2.35].

Satz 3.2. *Sei A ein exzellenter lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m} \subset A$. Weiter sei A integer und A' der ganze Abschluss von A im Quotientenkörper $K := Q(A)$. Bezeichnet $\hat{A}$ die Vervollständigung von A bezüglich dem maximalen Ideal $\mathfrak{m}$ von A, so gilt:*

(i) $\hat{A}$ ist reduziert.

(ii) A' ist eine endliche A-Algebra, also ein semilokaler Ring.

(iii) Seien $\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_n$ die maximalen Ideale von A' und $\widehat{(A')}$ die Vervollständigung von A' bezüglich der maximalen Ideale. Der ganze Abschluss von $\hat{A}$ im totalen Quotientenring R'' von $\hat{A}$ sei mit $(\hat{A})'$ bezeichnet. Dann gilt

$$\widehat{(A')} \cong (\hat{A})'.$$

Für den Beweis benötigen wir zunächst einige Lemmata.

Lemma 3.3. *Sei B ein normaler Ring, das heißt, für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ von B ist die Lokalisierung $B_{\mathfrak{p}}$ ein ganzabgeschlossener Integritätsring. Dann ist B ganzabgeschlossen im totalen Quotientenring $Q(B)$.*

Beweis. [vgl. S, Tag 037B] Sei $x \in Q(B)$ ganz über B. Wir setzen $I = \{f \in B | fx \in B\}$. Dann ist I ein Ideal in B. Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal von B. Weil $B_\mathfrak{p}$ eine flache B-Algebra und $B \hookrightarrow Q(B)$ injektiv ist, haben wir eine Injektion $B_\mathfrak{p} \to Q(B) \otimes B_\mathfrak{p} = Q(B)_\mathfrak{p}$. Dann ist $\frac{x}{1} \in Q(B)_\mathfrak{p}$ auch ganz über $B_\mathfrak{p}$. Wenn wir zeigen, dass $Q(B)_\mathfrak{p} \subset Q(B_\mathfrak{p})$ gilt, folgt aus der Ganzabgeschlossenheit von $B_\mathfrak{p}$ schon, dass $\frac{x}{1} \in B_\mathfrak{p}$ gilt. Es existieren dann $y, s \in B,\ s \notin \mathfrak{p}$ mit $\frac{x}{1} = \frac{(y/1)}{s}$ in $Q(B)_\mathfrak{p}$. Also existiert ein $t \in B \setminus \mathfrak{p} \subset Q(B)$ mit $txs = \frac{ty}{1}$ in $Q(B)$. Das heißt, es gilt $stx = ty \in B$ und es folgt $st \in I$. Wegen $st \notin \mathfrak{p}$ folgt, dass I in keinem Primideal von B enthalten ist. Also ist $I = B$ und $x \in B$.

Wir müssen also nur noch $Q(B)_\mathfrak{p} \subset Q(B_\mathfrak{p})$ zeigen. Sei $S = B \setminus \mathfrak{p} \subset Q(B)$. Wir haben einen kanonischen Ringhomomorphismus

$$u : Q(B) \to Q(B_\mathfrak{p}),\ \frac{x}{s} \mapsto \frac{(x/1)}{(s/1)}.$$

Es ist $\ker(u) = \{\frac{x}{s} \in Q(B) \mid \frac{x}{1} = 0 \text{ in } B_\mathfrak{q}\} = \{0\}$, also ist u injektiv. Weil die Elemente von $u(S)$ in $Q(B_\mathfrak{q})$ invertierbar sind, existiert nach der universellen Eigenschaft der Lokalisierung ein eindeutig bestimmter Ringhomomorphismus $\bar{u} : Q(B)_\mathfrak{p} \to Q(B_\mathfrak{q})$, der nach [Bou2, II, §2.1, Cor. 1 to Prop. 2] injektiv ist. □

Lemma 3.4. *Es sei B ein noetherscher Ring mit totalem Quotientenring $Q(B)$. Weiter sei C ein Unterring $B \subset C \subset Q(B)$, der normal und eine endliche B-Algebra ist. Dann ist C gleich dem ganzen Abschluss B' von B in $Q(B)$.*

Beweis. Weil C eine endliche B-Algebra ist, ist jedes Element von $C \subset Q(B)$ schon ganz über B, also gilt $C \subset B'$. Sei nun $x \in B'$, das heißt $x \in Q(B)$ und x ist ganz über B. Insbesondere ist dann x ganz über C. Weil aber $Q(B) \subset Q(C)$ ist, folgt aus der Normalität von C und Lemma 3.3, dass $x \in C$ gilt. □

Beweis von Satz 3.2. (i) Weil der Ring A exzellent und reduziert ist, ist auch die Vervollständigung $\hat{A}$ nach [Liu, Ch. 8, Prop. 2.41] reduziert.

(ii) Aus [Liu, Ch. 8, Prop. 2.41] folgt ebenso, dass A' eine endliche A-Algebra ist. Der Ringhomomorphismus $h : A \to A'$ ist also insbesondere ganz. Ist $\mathfrak{n} \subset A'$ ein Maximalideal, so ist nach [Bou2, V, §2.1, Prop. 1] auch $h^{-1}(\mathfrak{n}) = \mathfrak{n} \cap A$ ein Maximalideal, also gleich $\mathfrak{m}$, da A lokal ist. Damit liegen alle Maximalideale von A' über $\mathfrak{m}$. Nach [Bou2, V, §2.1, Prop. 3] liegen aber nur endlich viele Ideale über $\mathfrak{m}$, also ist A' semilokal.

(iii) Sind $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_n$ die Maximalideale von A', so gilt

$$\widehat{(A')} = \bigoplus_{j=1}^{n} \widehat{A'_{\mathfrak{m}_j}}$$

nach [Bou2, III, §2.13, Cor. to Prop. 19], wobei $\widehat{A'_{\mathfrak{m}_j}}$ die Komplettierung des lokalen Rings $A'_{\mathfrak{m}_j}$ bezüglich des Ideals $\mathfrak{m}_j A'_{\mathfrak{m}_j}$ bezeichnet. Der Ring A' ist integer und ganzabgeschlossen, also normal. Dann sind auch die Lokalisierungen $A'_{\mathfrak{m}_j}$ normal. Weil A' eine endliche A-Algebra ist, ist A' exzellent [vgl. Liu, Ch. 8, Th. 2.39]. Nach [EGAIV, (7.8.3) ii)] ist dann auch jede Lokalisierung $A'_{\mathfrak{m}_j}$ exzellent. Da für exzellente lokale Ringe Normalität beim Übergang zur Vervollständigung erhalten bleibt [s. Liu, Ch. 8, Prop. 2.41], sind die Ringe $\widehat{A'_{\mathfrak{m}_j}}$ normal.

Wegen $\mathrm{Spec}(\widehat{(A')}) = \mathrm{Spec}(\oplus_{j=1}^n \widehat{A'_{\mathfrak{m}_j}}) = \amalg_{j=1}^n \mathrm{Spec}(\widehat{A'_{\mathfrak{m}_j}})$, und weil Normalität eine lokale Eigenschaft ist, ist dann auch $\mathrm{Spec}(\widehat{(A')})$ normal.

Es ist $\widehat{(A')}$ die Vervollständigung bezüglich der $\mathfrak{r} = \mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_n$-adischen Topologie und nach [Bou2, IV, §2.5, Cor. 3] ist auch $\mathfrak{m}A'$ ein definierendes Ideal für die Topologie. Weil A' ein endlich erzeugter A-Modul ist, gilt also

$$\widehat{(A')} = \varprojlim A'/\mathfrak{m}^n A' = A' \otimes_A \hat{A}.$$

Die Injektionen $A \hookrightarrow A' \hookrightarrow K$ induzieren durch Tensorieren mit der flachen A-Algebra $\hat{A}$ Injektionen $\hat{A} \hookrightarrow \widehat{(A')} \hookrightarrow K \otimes_A \hat{A} =: R'$ (vgl. Korollar 1.20).

Ist ein Element in A regulär, so ist es wegen der Flachheit von $\hat{A}$ auch in $\hat{A}$ regulär. Ist also $T \subset \hat{A}$ die Menge der regulären Elemente in $\hat{A}$ und $S \subset A$ die Menge der regulären Elemente in A, also $A \setminus \{0\}$, so gilt $S \subset T$, $R'' = T^{-1}\hat{A}$ und man hat nach [Bou2, II, §2.1, Rem. 7] ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
& \hat{A} \arrow[dl, hook] \arrow[dr, hook] & \\
S^{-1}\hat{A} \arrow[rr, hook] & & T^{-1}\hat{A} = R''.
\end{tikzcd}$$

Wegen $S^{-1}\hat{A} = S^{-1}A \otimes \hat{A} = K \otimes \hat{A} = R'$ ist $R' \subset R''$ ein Unterring. Wir haben also $\hat{A} \subset \widehat{(A')} \subset R'' = Q(\hat{A})$. Weil A' ein endlicher A-Modul ist, ist wegen der Flachheit von $\hat{A}$ auch $\widehat{(A')}$ ein endlich erzeugter $\hat{A}$-Modul. Dann folgt die Behauptung aus Lemma 3.4. □

Korollar 3.5. *Sei A ein exzellenter, integrer und lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$. Dann existiert eine 1:1-Korrespondenz zwischen der Menge der maximalen Ideale von A', also der Punkte, die in der Normalisierung über $\mathfrak{m}$ liegen, und der Menge der minimalen Primideale von $\hat{A}$.*

Beweis. Seien $\mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_r$ die minimalen Primideale von $\hat{A}$ und $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_n$ die maximalen Ideale von A'. Nach [Bou2, V, §1.2, Cor. 1 to Prop. 9] gilt

$$(\hat{A})' = \bigoplus_{i=1}^{r} (\hat{A}/\mathfrak{g}_i)'.$$

Also ergibt sich

$$\bigoplus_{j=1}^{n} \widehat{A'_{\mathfrak{m}_j}} = \widehat{A'} \overset{3.2}{\cong} (\hat{A})' = \bigoplus_{i=1}^{r} (\hat{A}/\mathfrak{g}_i)'.$$

Dabei sind sowohl die $\widehat{A'_{\mathfrak{m}_j}}$ (vgl. Proposition 1.23), wie auch die $(\hat{A}/\mathfrak{g}_i)'$ [vgl. EGAIV, 0, (23.1.6)] lokale Ringe. Das Schema $\mathrm{Spec}(\widehat{(A')}) = \mathrm{Spec}((\hat{A})')$ hat damit genau n beziehungsweise r abgeschlossene Punkte, also muss $n = r$ gelten. Weil der Halm in einem abgeschlossenen Punkt aber genau $\widehat{A'_{\mathfrak{m}_j}}$ beziehungsweise $(\hat{A}/\mathfrak{g}_i)'$ ist, hat man nach eventuellem Umsortieren paarweise Isomorphismen

$$\widehat{A'_{\mathfrak{m}_j}} \cong (A/\mathfrak{g}_j)' \text{ für } j = 1, \dots, n.$$

Diese definieren die gesuchte 1:1-Korrespondenz. □

Satz 3.6. *Sei Z eine algebraische Varietät und $P \in Z(k)$. Dann existiert eine 1:1-Korrespondenz zwischen den Zweigen von Z durch P und den minimalen Primidealen in der Komplettierung $\widehat{\mathcal{O}_{Z,P}}$.*

Beweis. Es sei $P \in U = \mathrm{Spec}(B)$ eine offene, affine Umgebung von P. Ist $n : \tilde{Z} \to Z$ die Normalisierung, so wird $n_{|n^{-1}(U)} : n^{-1}(U) \to U$ induziert von $\phi : B \hookrightarrow B'$, wobei B' der ganze Abschluss des integren Rings B in $K = Q(B)$ ist. Weil P abgeschlossen ist, entspricht P einem maximalen Ideal $\eta \subset B$. Der Ring B ist als k-Algebra von endlichem Typ insbesondere exzellent [s. Liu, Ch. 8, Th. 2.39]. Ist nun $A := \mathcal{O}_{Z,P}$, so ist $A = B_\eta$ exzellent, noethersch und lokal. Es ist $A' = (S^{-1}B)' = S^{-1}B'$ für $S = B \setminus \eta \subset B'$ [vgl. Bou2, V, §1.5, Prop. 16]. Sei nun ein minimales Ideal $\mathfrak{p} \subset \widehat{\mathcal{O}_{Z,P}} = \hat{A}$ gegeben. Nach 3.5 entspricht dieses einem maximalen Ideal $\mathfrak{m} \subset A' = S^{-1}B'$. Dieses entspricht wiederum einem maximalen Ideal $\mathfrak{n} \subset B'$ mit $S \cap \mathfrak{n} = \varnothing$, also $B \cap \mathfrak{n} \subset \eta$ und weil $\mathfrak{n}$ und damit auch $B \cap \mathfrak{n}$ maximal ist, folgt $B \cap \mathfrak{n} = \eta$. Ist dann $Q \in \tilde{Z}$ der abgeschlossene Punkt, der zu $\mathfrak{n} \subset B'$ korrespondiert, so ist $n(Q) = \phi^{-1}(\mathfrak{n}) = \eta = P$, also entspricht $\mathfrak{p}$ einem Zweig durch P. Dabei gilt insbesondere

$$\widehat{\mathcal{O}_{\tilde{Z},Q}} = \widehat{(B')_{\mathfrak{n}}} \overset{\text{[Bou2, II, §5.11, Prop. 11]}}{\cong} \widehat{A'_{\mathfrak{m}}} \overset{3.5}{\cong} \hat{A}/\mathfrak{p} = \widehat{\mathcal{O}_{Z,P}}/\mathfrak{p}.$$

Sei nun umgekehrt $Q \in \tilde{Z}$ ein Zweig von Z durch P. Dann entspricht Q einem maximalen Ideal $\mathfrak{n} \subset B'$ mit $B \cap \mathfrak{n} = \eta$, beziehungsweise $(B \setminus \eta) \cap \mathfrak{n} = \varnothing$. Dieses $\mathfrak{n}$ entspricht wiederum einem maximalen Ideal $\mathfrak{m} \subset A' = S^{-1}B'$ mit $S = B \setminus \eta$. Wegen 3.5 korrespondiert dies einem minimalen Primideal in $\hat{A}$. Man hat also die gesuchte 1:1-Korrespondenz gefunden. □

Korollar 3.7. *Sei eine algebraische Varietät Z und ein Punkt $P \in Z(k)$ gegeben. Ist $Q \in \tilde{Z}$ ein Zweig von Z durch P, so ist auch Q ein k-rationaler Punkt.*

Beweis. Wir müssen zeigen, dass $\kappa(Q) = k$ gilt. Aus Satz 3.6 wissen wir, dass Q einem minimalen Primideal $\mathfrak{p}$ in $\widehat{\mathcal{O}_{Z,P}}$ entspricht. Es gilt dann

$$\kappa(Q) = \mathcal{O}_{\tilde{Z},Q}/\mathfrak{m}_Q = \widehat{\mathcal{O}_{\tilde{Z},Q}}/\widehat{\mathfrak{m}_Q} \overset{3.6}{=}$$

$$(\widehat{\mathcal{O}_{Z,P}}/\mathfrak{p})/(\widehat{\mathfrak{m}_P}/\mathfrak{p}) = \widehat{\mathcal{O}_{Z,Q}}/\widehat{\mathfrak{m}_P} = \mathcal{O}_{Z,Q}/\mathfrak{m}_P = \kappa(P) \overset{P \in Z(k)}{=} k. \qquad \square$$

Definition 3.8. Ein lokaler noetherscher Integritätsring heißt *unibranch*, wenn der ganze Abschluss A' von A ein lokaler Ring ist. In der Normalisierung von $\mathrm{Spec}(A)$ liegt dann nur ein Punkt über dem abgeschlossenen Punkt von $\mathrm{Spec}(A)$, also hat $\mathrm{Spec}(A)$ nur einen Zweig.

Bemerkung 3.9. Sei A ein regulärer noetherscher Ring. Dann ist A integer und normal ([E, 10.3, Cor. 10.14] und [M1, §19, Th. 19.4]). Insbesondere ist A dann ganzabgeschlossen, $A' = A$ ist ein lokaler Ring und A ist unibranch.

3.2 Glattheit von formalen Keimen

Wir betrachten in dieser Arbeit nur glatte formale Keime $\hat{V} \hookrightarrow \hat{X}_P$, denn die Glattheit liefert uns eine wichtige Eigenschaft, die notwendig ist um Algebraizität zu definieren. Ist $\hat{V}$ glatt, so ist der Halm von $\hat{V}$ in P immer ein regulärer Ring.

Lemma 3.10. *Der lokale Ring $\mathcal{O}_{\hat{V}} := \mathcal{O}_{\hat{V}}(\hat{V}) = \mathcal{O}_{\hat{V},P}$ mit maximalem Ideal $\eta \subset \mathcal{O}_{\hat{V}}$ ist ein regulärer Ring.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass der Ring $\mathcal{O}_{\hat{V}}$ η-glatt über k ist [vgl. M1, §28]. Sei ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{\hat{V}} & \xrightarrow{u} & C/N \\ \uparrow & & \uparrow \\ k & \longrightarrow & C \end{array}$$

gegeben, wobei C eine k-Algebra und $N \subset C$ ein Ideal mit $N^2 = 0$ ist. Der Morphismus u sei stetig bezüglich der η-adischen Topologie auf B und der diskreten Topologie auf C/N. Versieht man auch k und C mit der diskreten Topologie, so sind alle auftretenden Ringhomomorphismen stetig. Die Ringhomomorphismen induzieren Morphismen von Schemata

$$\mathrm{Spec}(C) \to \mathrm{Spec}(k) \text{ und } \mathrm{Spec}(C/N) \to \mathrm{Spec}(C),$$

welche in kanonischer Weise Morphismen von noetherschen formalen Schemata sind.

Der stetige Morphismus $u : \mathcal{O}_{\hat{V}} \to C/N$ induziert einen Morphismus geringter Räume $f : \mathrm{Spec}(C/N) \to \hat{V}$ mit

$$\begin{aligned} &f : \mathrm{Spec}(C/N) \to \{P\}, \\ &f^\sharp : \mathcal{O}_{\hat{V}} \to f_*\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(C/N)} \text{ gegeben durch} \\ &u = f^\sharp(\{P\}) : \mathcal{O}_{\hat{V}}(\{P\}) \to f_*\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(C/N)}(\{P\}) = C/N. \end{aligned}$$

Für jeden Punkt $\mathfrak{g}$ in $\mathrm{Spec}(C/N)$ ist der induzierte Morphismus auf den Halmen

$$f_P : \mathcal{O}_{\hat{V},P} = \mathcal{O}_{\hat{V}} \to \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(C/N),\mathfrak{g}} = (C/N)_{\mathfrak{g}}$$

lokal, denn wegen der Stetigkeit von u ist $\ker(u) = u^{-1}(\{0\})$ offen bezüglich der η-adischen Topologie in $\mathcal{O}_{\hat{V}}$. Das heißt für $0 \in \ker(u)$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $0 + \eta^n \subset \ker(u)$, also gilt $u(\eta^n) = 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann ist aber η in jedem Primideal von C/N enthalten und insbesondere gilt $f_P(\eta) \subset \mathfrak{m}_{\mathfrak{g}}$. Also ist f lokal und wegen der Stetigkeit von u ist f ein Morphismus von noetherschen formalen Schemata.

Ebenso definiert der Ringhomomorphismus $k \to \mathcal{O}_{\hat{V}}$ einen Morphismus von noetherschen formalen Schemata

$$\begin{aligned}
&g : \hat{V} \to \mathrm{Spec}(k), \{P\} \mapsto \{(0)\},\\
&g^\sharp : \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(k)} \to g_*\mathcal{O}_{\hat{V}} \text{ gegeben durch}\\
&g^\sharp(\mathrm{Spec}(k)) : k \to \mathcal{O}_{\hat{V}}(\hat{V}) = \mathcal{O}_{\hat{V}}.
\end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir ein kommutatives Diagramm noetherscher formaler Schemata

$$\begin{tikzcd}
\hat{V} \arrow[d, "g"'] & \mathrm{Spec}(C/N) \arrow[l, "f"'] \arrow[d] \\
\mathrm{Spec}(k) & \mathrm{Spec}(C), \arrow[l] \arrow[ul, dashed]
\end{tikzcd}$$

und wegen der Glattheit von $\hat{V}$ existiert dann nach Definition 2.12 ein Lift $\mathrm{Spec}(C) \to \hat{V}$. Durch Übergang zu globalen Schnitten erhält man also einen Lift $\mathcal{O}_{\hat{V}} \to C$ und $\mathcal{O}_{\hat{V}}$ ist η-glatt über k.

Die Regularität von $\mathcal{O}_{\hat{V}}$ folgt dann mit [M1, Th. 28.7]. $\square$

Korollar 3.11. *Es sei X eine algebraische Varietät und $P \in X(k)$. Weiter sei $n : \tilde{X} \to X$ die Normalisierung von X und $\hat{X}_P$ sei glatt. Dann existiert nur ein Zweig $Q \in \tilde{X}$ mit $n(Q) = P$ und es gilt $\hat{X}_P \cong \widehat{\tilde{X}_Q}$.*

Beweis. Ist $\hat{X}_P$ glatt, so ist $\widehat{\mathcal{O}_{X,P}}$ nach Lemma 3.10 ein regulärer Ring, also insbesondere integer. Das impliziert, dass $\widehat{\mathcal{O}_{X,P}}$ nur ein minimales Primideal besitzt und nach 3.6 existiert nur ein Zweig von X durch P. Ist $Q \in \tilde{X}$ dieser Zweig, so gilt

$$\mathcal{O}_{\widehat{\tilde{X}_Q}} = \widehat{\mathcal{O}_{\tilde{X},Q}} = \widehat{\mathcal{O}_{X,P}}/(0) = \widehat{\mathcal{O}_{X,P}} = \mathcal{O}_{\hat{X}_P}. \qquad \square$$

3.3 Algebraizität

Es sei X eine algebraische Varietät über einem Körper k, $P \in X(k)$ und $\hat{X}_P$ die formale Vervollständigung von X entlang P, also $\hat{X}_P = (\{P\}, \widehat{\mathcal{O}_{X,P}})$. Es sei ein glatter formaler

Keim $\hat{V} \hookrightarrow \hat{X}_P$ gegeben und für $n \geq 1$ sei V_n die n-te infinitesimale Umgebung von $\hat{V}$ in X. Wir können ohne Einschränkung V_1 als reduziert annehmen. Aus technischen Gründen setzen wir zusätzlich $V_0 = \varnothing$.

Sind Z und Y abgeschlossene Unterschemata von X, so sagen wir Z *enthält* Y, wenn die abgeschlossene Immersion $Y \hookrightarrow X$ über Z faktorisiert, also ein Morphismus $Y \to Z$ existiert, sodass

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, hook] \arrow[dr] & & X \\ & Z \arrow[ur, hook] & \end{tikzcd}$$

kommutiert. Nach [GW, Rem. 9.11] ist der Morphismus $Y \to Z$ dann eine abgeschlossene Immersion. Das Schema Z enthält Y genau dann, wenn für die korrespondierenden Idealgarben die Inklusion $\mathcal{J}_Z \subset \mathcal{J}_Y$ gilt.

Für ein abgeschlossenes Unterschema $Z \hookrightarrow X$ mit $P \in Z$ gilt $\mathcal{J}_Z \subset \mathcal{J}_P$, wobei $\mathcal{J}_P$ die Idealgarbe zum eindeutig bestimmten reduzierten Unterschema mit topologischem Raum $\{P\}$ ist. Weil P auch in Z abgeschlossen ist, können wir Z entlang P komplettieren. Es gilt dann

$$\mathcal{O}_{\hat{Z}_P} = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{O}_Z/\mathcal{J}_P^n = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{O}_X/(\mathcal{J}_P^n + \mathcal{J}_Z).$$

Die surjektiven Morphismen $\mathcal{O}_X/\mathcal{J}_P^n \twoheadrightarrow \mathcal{O}_X/(\mathcal{J}_P^n + \mathcal{J}_Z)$ induzieren einen surjektiven Morphismus

$$\mathcal{O}_{\hat{X}_P} = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{O}_X/\mathcal{J}_P^n \twoheadrightarrow \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{O}_X/(\mathcal{J}_P^n + \mathcal{J}_Z) = \mathcal{O}_{\hat{Z}_P}.$$

Also definiert Z ein Ideal $\mathcal{A}_Z \subset \mathcal{O}_{\hat{X}_P}$ mit $\mathcal{O}_{\hat{Z}_P} = \mathcal{O}_{\hat{X}_P}/\mathcal{A}_Z$ und $\hat{Z}_P$ ist ein Unterschema von $\hat{X}_P$. Wir sagen $\hat{Z}_P$ *enthält* $\hat{V}$, wenn der Morphismus $\hat{V} \hookrightarrow \hat{X}_P$ über $\hat{Z}_P$ faktorisiert. Dies gilt genau dann, wenn $\mathcal{A}_Z \subset \mathcal{A}$ gilt, wobei $\mathcal{A}$ das zu $\hat{V}$ korrespondierende Ideal ist.

Lemma 3.12. *Für ein abgeschlossenes Unterschema Z sind äquivalent:*

(i) Das Schema Z enthält alle Unterschemata V_n.

(ii) Das formale Schema $\hat{Z}_P$ enthält $\hat{V}$.

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii) Es gelte $\mathcal{J}_Z \subset \mathcal{J}_{V_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen $\mathcal{J}_P^n \subset \mathcal{J}_{V_n}$ liefert dies surjektive Morphismen $\mathcal{O}_X/(\mathcal{J}_P^n + \mathcal{J}_Z) \twoheadrightarrow \mathcal{O}_X/\mathcal{J}_{V_n}$, die wiederum einen surjektiven Morphismus

$$\mathcal{O}_{\hat{Z}_P} = \varprojlim \mathcal{O}_X/(\mathcal{J}_P^n + \mathcal{J}_Z) \twoheadrightarrow \varprojlim \mathcal{O}_X/\mathcal{J}_{V_n} = \mathcal{O}_{\hat{V}}$$

induzieren. Dies liefert ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_{\hat{X}_P}/\mathcal{A} = \mathcal{O}_{\hat{V}} & & \mathcal{O}_{\hat{X}_P} \arrow[ll, two heads] \arrow[dl, two heads] \\ & \mathcal{O}_{\hat{X}_P}/\mathcal{A}_Z = \mathcal{O}_{\hat{Z}_P}. \arrow[ul, two heads] & \end{tikzcd}$$

Also gilt $\mathcal{A}_Z \subset \mathcal{A}$ und das formale Schema $\hat{Z}_P$ enthält $\hat{V}$.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Es gelte nun $\mathcal{A}_Z \subset \mathcal{A}$. Es ist

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_Z &= \ker(\mathcal{O}_{\hat{X}_P} \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{\hat{Z}_P} = \varprojlim \mathcal{O}_X/(\mathcal{J}_P^n + \mathcal{J}_Z)), \\ \mathcal{A} &= \ker(\mathcal{O}_{\hat{X}_P} \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{\hat{V}} = \varprojlim \mathcal{O}_X/\mathcal{J}_{V_n}). \end{aligned}$$

Die kanonische Projektion $\mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X/\mathcal{J}_{V_n}$ faktorisiert über

$$\mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_{\hat{X}_P} \to \mathcal{O}_{\hat{V}} \to \mathcal{O}_X/\mathcal{J}_{V_n},$$

weshalb $\mathcal{J}_Z$ wegen $\mathcal{J}_Z \subset \mathcal{A}_Z \subset \mathcal{A}$ unter der Projektion auf Null abgebildet wird. Also gilt $\mathcal{J}_Z \subset \ker(\mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X/\mathcal{J}_{V_n}) = \mathcal{J}_{V_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. □

Lemma 3.13. *Es existiert ein minimales abgeschlossenes Unterschema Z von X, das alle V_n enthält. Dabei gilt $P \in Z(k)$. Man nennt Z den* Zariskiabschluss von $\hat{V}$ in X.

Beweis. Es bezeichne Σ die Menge aller abgeschlossenen Unterschemata von X, die alle V_n enthalten. Die Menge Σ ist nicht leer, da sie zum Beispiel X enthält. Wir betrachten die Idealgarbe

$$\mathcal{J}_Z := \sum_{Y \in \Sigma} \mathcal{J}_Y,$$

wobei $\mathcal{J}_Y$ die quasi-kohärente Idealgarbe zum abgeschlossenen Unterschema $Y \in \Sigma$ bezeichnet. Dann ist $\mathcal{J}_Z$ nach [GW, Cor. 7.19] quasi-kohärent. Also definiert $\mathcal{J}_Z$ ein abgeschlossenes Unterschema Z von X. Dieses erfüllt die gewünschten Eigenschaften, wegen $\mathcal{J}_Z \subset \mathcal{J}_{V_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\mathcal{J}_Y \subset \mathcal{J}_Z$ für $Y \in \Sigma$. Offensichtlich ist $P \in Z$ und wegen $Z(k) = X(k) \cap Z$ ist $P \in Z(k)$ [vgl. Liu, Ch. 1, Rem. 3.31]. □

Lemma 3.14. *Es sei U eine offene Umgebung von P und $\tilde{Z}$ der Zariskiabschluss von $\hat{V}$ in U. Weiter sei $k = j \circ i$ die Komposition der abgeschlossenen Immersion $i : \tilde{Z} \hookrightarrow U$ und der offenen Immersion $j : U \hookrightarrow X$. Dann ist das schematheoretische Bild $Z :=$* im(k) *der Zariskiabschluss von $\hat{V}$ in X.*

Beweis. Wir bezeichnen im(k) zunächst mit Z' und den Zariskiabschluss von $\hat{V}$ in X mit Z. Die V_n sind abgeschlossene Unterschemata, die in U enthalten sind. Also faktorisiert $V_n \hookrightarrow X$ über $j : U \to X$. Damit erhalten wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} V_n \arrow[r, hook] \arrow[dr, hook] & U \arrow[rr, hook] & & X \\ & \tilde{Z} \arrow[u, hook] \arrow[rr] & & Z'. \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

Also enthält Z' alle V_n. Nach der Definition des Zariskiabschlusses existiert dann eine abgeschlossene Immersion $Z \hookrightarrow Z'$.

Da das Unterschema Z von X alle V_n enthält, haben wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} V_n \arrow[rr, hook] \arrow[dr, hook] & & X \\ & Z. \arrow[ur, hook] & \end{tikzcd}$$

Dies liefert uns ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} V_{n|U} = V_n \arrow[rr, hook] \arrow[dr, hook] & & U \\ & Z_{|U}. \arrow[ur, hook] & \end{tikzcd}$$

Das abgeschlossene Unterschema $Z_{|U}$ von U enthält alle V_n. Nach der Definition des Zariskiabschlusses existiert dann eine abgeschlossene Immersion $\tilde{Z} \hookrightarrow Z_{|U}$. Wir erhalten ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} \tilde{Z} \arrow[rrr, "k"] \arrow[dr, hook] & & & X \\ & Z_{|U} \arrow[r] & Z. \arrow[ur, hook] & \end{tikzcd}$$

Weil k über Z faktorisiert, existiert nach der universellen Eigenschaft des schematheoretischen Bildes [GW, Def. 10.29] eine abgeschlossene Immersion $Z' \hookrightarrow Z$. $\square$

Lemma 3.15. *Für den Zariskiabschluss Z von $\hat{V}$ in X gilt:*

(i) Z ist eine Untervarietät von X.

(ii) Der Halm $\mathcal{J}_{Z,P}$ ist gegeben durch den Schnitt $\mathcal{O}_{X,P} \cap \mathcal{A}$.

(iii) Die Dimension von Z ist größer gleich der Dimension von $\hat{V}$.

Beweis. Sei zunächst $X = \mathrm{Spec}(B)$ affin für einen noetherschen Ring B. Der Punkt P entspricht einem maximalen Ideal $\eta \subset B$. Mit unserer üblichen Notation sei $\mathcal{O}_{X,P} = B_\eta = A$ mit maximalem Ideal $\mathfrak{m} \subset A$ und $\hat{V}$ definiert durch $\mathcal{A} \subset \hat{A}$. Das Ideal $\mathcal{A}$ definiert Ideale $\mathfrak{a}_n \subset A$ mit $\mathfrak{m}^n \subset \mathfrak{a}_n$ und $\mathcal{O}_{\hat{V}} = \hat{A}/\mathcal{A} = \varprojlim A/\mathfrak{a}_n$. Wegen

$$A/\mathfrak{m}^n = B_\eta/\eta^n B_\eta \overset{2.24}{\cong} B/\eta^n$$

definieren die $\mathfrak{a}_n$ Ideale $\mathfrak{b}_n \subset B$ mit $\eta^n \subset \mathfrak{b}^n$, $\mathfrak{b}_{n+1} \subset \mathfrak{b}_n$ und $\mathcal{O}_{\hat{V}} = \varprojlim B/\mathfrak{b}_n$.

Nach der Konstruktion korrespondiert das Ideal $\mathfrak{b}_n$ für $n \in \mathbb{N}$ mit der n-ten infinitesimalen Umgebung V_n von $\hat{V}$, weshalb gilt $\mathcal{J}_{V_n} = \tilde{\mathfrak{b}}_n$.

Dann wird Z durch das größte Ideal in B, das in allen Idealen $\mathfrak{b}_n$ enthalten ist, definiert. Es gilt also $\mathcal{J}_Z = \widetilde{(\cap \mathfrak{b}_n)}$. Damit ist $\mathcal{J}_Z = \ker(\mathcal{O}_X \to \varprojlim \mathcal{O}_X/\mathcal{J}_{V_n})$. Insbesondere ist dann

$\mathcal{J}_{Z,P} = \ker(\mathcal{O}_{X,P} \to \mathcal{O}_{\hat{X},P})$, also der Kern von $A \hookrightarrow \hat{A} \to \hat{A}/\mathcal{A}$. Dieser Kern ist durch $A \cap \mathcal{A}$ gegeben. Weil $\hat{V}$ glatt ist, ist $\mathcal{A}$ ein Primideal und damit auch $\mathcal{J}_{Z,P}$. Dann ist auch das Ideal, das Z in B definiert, ein Primideal und Z ist eine Varietät. Dies zeigt die Behauptungen (i) und (ii) für ein affines X.

Sei nun X beliebig, U eine offene Umgebung von P und $\tilde{Z}$ der Zariskiabschluss von $\hat{V}$ in U. Mit Lemma 3.14 folgt $\tilde{Z} = Z_{|U}$. Also ist $\mathcal{J}_{Z,P} = \mathcal{J}_{\tilde{Z},P} = A \cap \mathcal{A}$. Nach [GW, Rem. 10.32] ist Z reduziert. Der topologische Raum von Z ist durch den Abschluss von $\tilde{Z}$ in X gegeben. Weil $\tilde{Z}$ irreduzibel ist, ist dann auch Z irreduzibel. Dies zeigt (i) und (ii) für ein beliebiges X.

Schließlich gilt

$$\dim(\hat{V}) = \dim(\mathcal{O}_{\hat{V}}) = \dim(\hat{A}/\mathcal{A}) \leq \dim(\hat{A}) = \dim(\widehat{\mathcal{O}_{Z,P}}).$$

Nach [Liu, §4, 2.26] ist $\dim(\widehat{\mathcal{O}_{Z,P}}) = \dim(\mathcal{O}_{Z,P})$ und damit folgt

$$\dim(\hat{V}) \leq \dim(\mathcal{O}_{Z,P}) = \operatorname{codim}(Z,P) = \dim(Z). \qquad \square$$

Bemerkung 3.16. In 3.1 haben wir bereits definiert, was ein Zweig von X durch P ist. Die Zweige stehen in einem engen Zusammenhang mit den Unterschemata von $\hat{X}_P$. Ist nämlich $Q \in \tilde{X}$ ein Zweig durch P, also $n(Q) = P$ für die Normalisierung $n : \tilde{X} \to X$, so korrespondiert Q nach 3.6 zu einem minimalen Primideal $\mathfrak{p} \subset \widehat{\mathcal{O}_{X,P}}$, welches ein Unterschema $\hat{V} \hookrightarrow \hat{X}_P$ von $\hat{X}_P$ definiert. Es ist $Q \in \tilde{Z}(k)$ (vgl. Korollar 3.7) und wir erhalten einen kanonischen Morphismus

$$\hat{n} : \widehat{\tilde{X}_Q} \to \hat{X}_P.$$

Es gilt

$$\mathcal{O}_{\widehat{\tilde{X}_Q}} = \widehat{\mathcal{O}_{\tilde{X},Q}} = \widehat{\mathcal{O}_{X,P}}/\mathfrak{p} = \mathcal{O}_{\hat{V}}.$$

Es ist also $\widehat{\tilde{X}_Q} \cong \hat{V}$ und der Morphismus $\hat{n}$ faktorisiert über $\hat{V}$

$$\begin{tikzcd} \widehat{\tilde{X}_Q} \arrow[rr, "\hat{n}"] \arrow[dr, "\cong"'] & & \hat{X}_P \\ & \hat{V}. \arrow[ur, hook] & \end{tikzcd}$$

Ist umgekehrt ein abgeschlossenes Unterschema $\hat{V} \hookrightarrow \hat{X}_P$ gegeben, so sagen wir $\hat{V}$ ist ein *Zweig von X durch P*, wenn ein Zweig $Q \in \tilde{X}$ existiert, sodass der kanonische Morphismus $\widehat{\tilde{X}_Q} \to \hat{X}_P$ über $\hat{V}$ faktorisiert und der Morphismus $\widehat{\tilde{X}_Q} \to \hat{V}$ ein formaler Isomorphismus ist. Dies gilt eben dann, wenn das Ideal $\mathcal{A} \subset \mathcal{O}_{\hat{X}_P}$, das $\hat{V}$ definiert, ein minimales Primideal ist.

Wir nehmen nun wieder an, dass das formale Unterschema $\hat{V} \hookrightarrow \hat{X}_P$ glatt ist, also ein glatter formaler Keim von X durch P.

Theorem 3.17. *Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:*

(i) Es existiert eine algebraische Varietät Y über k, ein Punkt $Q \in Y(k)$ und ein k-Morphismus $f : Y \to X$, der Q auf P abbildet und für den der induzierte Morphismus
$$\hat{f}_Q : \hat{Y}_Q \to \hat{X}_P$$
über $\hat{V} \to \hat{X}_P$ faktorisiert und einen formalen Isomorphismus $\hat{Y}_Q \xrightarrow{\simeq} \hat{V}$ induziert.

(ii) Es existiert eine abgeschlossene Untervarietät W von X, sodass P in $W(k)$ liegt und $\hat{V}$ ein Zweig von W durch P ist.

(iii) Die Dimension des Zariskiabschlusses Z von $\hat{V}$ in X ist gleich der Dimension von $\hat{V}$.

Definition 3.18. Erfüllt ein glatter formaler Keim $\hat{V} \hookrightarrow \hat{X}_P$ die äquivalenten Bedingungen von 3.17, so nennen wir $\hat{V}$ *algebraisch.*

Beweis von 3.17.

(ii) $\Rightarrow$ *(i)* Sei W eine abgeschlossene Untervarietät und $\hat{V}$ ein Zweig von W durch P. Das heißt, es existiert ein $Q \in \tilde{W}$ mit $Q \in \tilde{W}(k)$, sodass der induzierte Morphismus $\hat{n} : \widehat{\tilde{W}_Q} \to \hat{W}_P$ über $\hat{V}$ faktorisiert und einen formalen Isomorphismus $\widehat{\tilde{W}_Q} \cong \hat{V}$ induziert. Setzt man also $Y := \tilde{W}$, so sind sind die Bedingungen aus (i) offensichtlich erfüllt.

(i) $\Rightarrow$ *(ii)* Es sei $f : Y \to X$ und $Q \in Y(k)$ wie in (i) gegeben. Es sei $W := \overline{f(Y)}$ das schematheoretische Bild von Y in X, das heißt W ist das eindeutig bestimmte reduzierte Unterschema mit dem Abschluss von $f(Y)$ als topologischen Raum [vgl. GW, Ch. (10.8)]. Dann ist W abgeschlossen, reduziert und irreduzibel, weil Y irreduzibel ist. Also ist $W \subset X$ eine Untervarietät mit $P = f(Q) \in W(k) \subset X(k)$. Die Morphismen $Y \to W \to X$ induzieren Morphismen der Vervollständigungen

$$\begin{tikzcd} \hat{Y}_Q \arrow[r] \arrow[dr, "\cong"'] & \hat{W}_P \arrow[r] & \hat{X}_P \\ & \hat{V}. \arrow[ur, hook] & \end{tikzcd}$$

Dies liefert uns Morphismen auf den lokalen Ringen

$$\begin{tikzcd} \widehat{\mathcal{O}_{Y,Q}} & \widehat{\mathcal{O}_{W,P}} \arrow[l] & \widehat{\mathcal{O}_{X,P}} \arrow[l] \arrow[dl, two heads] \\ & \mathcal{O}_{\hat{V}} = \widehat{\mathcal{O}_{X,P}}/\mathcal{A}. \arrow[ul, "\cong"] & \end{tikzcd}$$

Da die Verkettung $\widehat{\mathcal{O}_{X,P}} \to \widehat{\mathcal{O}_{W,P}} \to \widehat{\mathcal{O}_{Y,Q}}$ surjektiv ist, muss schon der Morphismus $\widehat{\mathcal{O}_{W,P}} \to \widehat{\mathcal{O}_{Y,Q}}$ surjektiv sein. Es existiert also ein Ideal $\mathcal{B} \subset \widehat{\mathcal{O}_{W,P}}$ mit

$$\widehat{\mathcal{O}_{Y,Q}} \cong \widehat{\mathcal{O}_{W,P}}/\mathcal{B}.$$

Mit $\hat{V}$ ist auch $\hat{Y}_Q$ glatt und der Ring $\widehat{\mathcal{O}_{Y,Q}}$ regulär. Insbesondere ist $\widehat{\mathcal{O}_{Y,Q}}$ integer und $\mathcal{B}$ ein Primideal. Es gilt $\dim(\widehat{\mathcal{O}_{Y,Q}}) = \dim(\widehat{\mathcal{O}_{W,P}}/\mathcal{B}) \leq \dim(\widehat{\mathcal{O}_{W,P}})$.

Als nächsten Schritt wollen wir zeigen, dass $\dim(Y) \geq \dim(W)$ gilt. Es ist $f : Y \to W$ ein dominanter k-Morphismus algebraischer Varietäten. Dann ist f insbesondere von endlichem Typ. Weil f dominant ist, ist der induzierte Morphismus der Funktionenkörper $\kappa(W) \to \kappa(Y)$ injektiv. Außerdem ist er von endlichem Typ, da f von endlichem Typ ist. Wir haben also eine endlich erzeugte Körpererweiterung $\kappa(Y)/\kappa(W)$. Es gilt

$$\operatorname{trdeg}(\kappa(Y)/\kappa(W)) = \operatorname{trdeg}(\kappa(Y)/k) - \operatorname{trdeg}(\kappa(W)/k) =$$

$$\overset{\text{[GW, Th. 5.22]}}{=} \dim(Y) - \dim(W) \geq 0.$$

Also ist $\dim(Y) \geq \dim(W)$. Es folgt dann

$$\dim(\widehat{\mathcal{O}_{Y,Q}}) \overset{\text{[Liu, Ch. 4, Lem. 2.26]}}{=} \dim(\mathcal{O}_{Y,Q}) \overset{\text{[GW, Th. 5.22]}}{=} \dim(Y) \geq$$

$$\geq \dim(W) = \dim(\widehat{\mathcal{O}_{W,P}}).$$

Insbesondere folgt $\dim(\widehat{\mathcal{O}_{W,P}}/\mathcal{B}) = \dim(\widehat{\mathcal{O}_{W,P}})$ und das Ideal $\mathcal{B}$ ist ein minimales Primideal. Dieses entspricht einem Zweig von W durch P, der isomorph zu $\hat{V}$ ist.

(ii) $\Rightarrow$ *(iii)* Sei eine Untervarietät W wie in (ii) gegeben und $Q \in \tilde{W}$ mit $\widehat{\tilde{W}_Q} \xrightarrow{\sim} \hat{V} \hookrightarrow \hat{W}_P$. Weil $\hat{W}_P$ den formalen Keim $\hat{V}$ enthält, enthält W auch alle V_n. Dann enthält W den Zariskiabschluss Z von $\hat{V}$ und die Dimension von Z ist kleiner gleich der Dimension von W. Da die Dimension von Z größer gleich der Dimension von $\hat{V}$ ist, genügt es zu zeigen, dass $\dim(W) = \dim(\hat{V})$ gilt. Wie oben folgt

$$\dim(\hat{V}) = \dim(\widehat{\mathcal{O}_{\tilde{W},Q}}) = \dim(\mathcal{O}_{\tilde{W},Q}) = \dim(\tilde{W}) \overset{\text{[GW, Prop. 12.12]}}{=} \dim(W).$$

(iii) $\Rightarrow$ *(ii)* Wir zeigen, dass der Zariskiabschluss die Eigenschaften aus (ii) erfüllt. Weil $\hat{Z}_P$ das formale Unterschema $\hat{V}$ enthält, haben wir einen surjektiven Morphismus

$$\widehat{\mathcal{O}_{Z,P}} \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{\hat{V}}.$$

Sei $\mathfrak{a} \subset \widehat{\mathcal{O}_{Z,P}}$ der Kern dieses Morphismus, so gilt

$$\mathcal{O}_{\hat{V}} \cong \widehat{\mathcal{O}_{Z,P}}/\mathfrak{a}.$$

Weil $\hat{V}$ glatt ist, ist $\mathcal{O}_{\hat{V}}$ ein regulärer und damit insbesondere integrer Ring. Das heißt, das Ideal $\mathfrak{a} \subset \widehat{\mathcal{O}_{Z,P}}$ muss ein Primideal sein. Da

$$\dim(\widehat{\mathcal{O}_{Z,P}}/\mathfrak{a}) = \dim(\mathcal{O}_{\hat{V}}) = \dim(\hat{V}) = \dim(Z) = \dim(\mathcal{O}_{Z,P}) = \dim(\widehat{\mathcal{O}_{Z,P}})$$

gilt, muss $\mathfrak{a}$ ein minimales Primideal sein. Dieses entspricht einem Zweig von Z durch P und die Bedingungen aus (ii) sind erfüllt. □

3.4 Algebraizitätskriterium

Das Ziel dieses Kapitel ist es, das von Bost gefundene Algebraizitätskriterium zu beweisen. Wir werden zunächst die Ausgangssituation besprechen und das Kriterium angeben. Um es dann beweisen zu können, werden wir noch etwas mehr Vorarbeit leisten müssen.

Es sei X eine algebraische Varietät über k, $P \in X(k)$, $\hat{V}$ ein glatter formaler Keim von X durch P und Z der Zariskiabschluss von $\hat{V}$ in X. Wir setzen zusätzlich voraus, dass X projektiv ist und betrachten ein amples Geradenbündel L auf X. Wir haben ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\varnothing = V_0 \arrow[r] & V_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[ddrr, "g_1"] & V_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[ddr, "g_2"] & V_3 \arrow[r, "f_3"] \arrow[dd, "g_3"] & \cdots \arrow[r] & V_n \arrow[r, "f_n"] \arrow[ddll, "g_n"] & \cdots \\
& & & & & & \\
& & & X, & & &
\end{tikzcd}$$

wobei die f_n Nilimmersionen und die g_n abgeschlossene Immersionen sind. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $L_n := g_n^* L = g_n^{-1} L \otimes_{g_n^{-1}\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{V_n}$ ein lokal freier $\mathcal{O}_{V_n}$-Modul vom Rang 1. Es gilt

$$L_n = g_n^* L = (g_{n+1} \circ f_n)^* L = f_n^*(g_{n+1}^* L) = f_n^* L_{n+1}.$$

Weiter gilt

$$\Gamma(V_n, L_n) = \Gamma(f_n^{-1}(V_{n+1}), f_n^* L_{n+1}) = \Gamma(V_{n+1}, (f_n)_* f_n^* L_{n+1}),$$

$$\Gamma(V_n, L_n) = \Gamma(g_n^{-1}(X), g_n^* L) = \Gamma(X, (g_n)_* g_n^* L)$$

und die Adjunktionsabbildungen $L_{n+1} \to (f_n)_* f_n^* L_{n+1}$ beziehungsweise $L \to (g_n)_* g_n^* L$ liefern Morphismen von k-Vektorräumen

$$\Gamma(V_{n+1}, L_{n+1}) \to \Gamma(V_n, L_n) \text{ und } \Gamma(X, L) \to \Gamma(V_n, L_n).$$

Wegen $g_n^* \mathcal{O}_X = \mathcal{O}_{V_n}$ erhält man ganz analog k-Vektorraumhomomorphismen

$$\Gamma(V_{n+1}, \mathcal{O}_{V_{n+1}}) \to \Gamma(V_n, \mathcal{O}_{V_n}).$$

Ersetzt man L durch $L^{\otimes D}$ für $D \in \mathbb{N}$ und beachtet $g_n^*(L^{\otimes D}) = (g_n^* L)^{\otimes D}$ [s. GW, Rem. 7.10], so hat man ein kommutatives Diagramm von k-Vektorräumen

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\ldots & \Gamma(V_{n-1}, L_{n-1}^{\otimes D}) \arrow[l] & & \Gamma(V_n, L_n^{\otimes D}) \arrow[ll] & & \Gamma(V_{n+1}, L_{n+1}^{\otimes D}) \arrow[ll] & \ldots \arrow[l] \\
& & & \Gamma(X, L^{\otimes D}). \arrow[ull] \arrow[u] \arrow[urr] & & &
\end{tikzcd}$$

Zieht man L entlang des Morphismus von geringten Räumen $h : \hat{V} \to \hat{X}_p \to X$ zurück, so gilt für den $\mathcal{O}_{\hat{V}}$-Modul $\hat{L}^{\otimes D} := h^*(L^{\otimes D})$

$$\Gamma(\hat{V}, \hat{L}^{\otimes D}) = \Gamma(\hat{V}, h^{-1}L^{\otimes D} \otimes_{h^{-1}\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{\hat{V}}) =$$
$$= \Gamma(\hat{V}, h^{-1}L^{\otimes D} \otimes_{h^{-1}\mathcal{O}_X} \varprojlim \mathcal{O}_{V_n}) = \varprojlim \Gamma(V_n, L_n^{\otimes D}).$$

Dies ist ein $\Gamma(\hat{V}, \mathcal{O}_{\hat{V}}) = \varprojlim \Gamma(V_n, \mathcal{O}_{V_n})$-Modul.

Im Folgenden werden wir, wenn es ohne Verwechslungen möglich ist, auch alle Einschränkungen von L mit L bezeichnen. Wir definieren nun

$$\begin{aligned}
E_D :=& \Gamma(X, L^{\otimes D}) \\
\eta_D : E_D &\to \Gamma(\hat{V}, L^{\otimes D}) \\
s &\mapsto s_{|\hat{V}} \\
\eta_D^n : E_D &\to \Gamma(V_n, L^{\otimes D}) \qquad \text{für } n \geq 0. \\
s &\mapsto s_{|V_n}
\end{aligned}$$

Es gilt dann

$$\eta_D = \varprojlim_{n \geq 0} \eta_D^n.$$

Weiter setzen wir

$$E_D^n := \{s \in E_D \mid s_{|V_{n-1}} = 0\} = \ker \eta_D^{n-1} \subset E_D \qquad \text{für } n \geq 1.$$

Dann bilden die k-Vektorräume eine aufsteigende Filtration von k-Unterräumen.

$$\ldots \subset E_D^{n+1} \subset E_D^n \subset \ldots \subset E_D^1 = E_D.$$

Nach [H, II, Th. 5.19] ist E_D endlich-dimensional und die Filtration wird stationär.

3.4.1 Der Tangentialraum und die Morphismen γ_D^n

Wir betrachten nun den Tangentialraum $T_{\hat{V}}$ von $\hat{V}$. Bezeichnet η das maximale Ideal des lokalen Rings $\mathcal{O}_{\hat{V}}$ und $\kappa(\hat{V})$ den Restkassenkörper $\kappa(\hat{V}) = \mathcal{O}_{\hat{V}}/\eta$, so ist η/η^2 ein endlich dimensionaler $\kappa(\hat{V})$-Vektorraum. Dann ist der Tangentialraum durch den dualen Vektorraum $T_{\hat{V}} = (\eta/\eta^2)^\vee$ gegeben [vgl. GW, Def. 6.2].

Lemma 3.19. *Hat der glatte formale Keim* $\hat{V}$ *die Dimension* d*, so ist* $\operatorname{Sym}^n \check{T}_{\hat{V}}$ *für alle* $D \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}_0$ *ein* k*-Vektorraum und ein* $\mathcal{O}_{X,P}$*-Modul mit*

$$\dim_k(\operatorname{Sym}^n \check{T}_{\hat{V}} \otimes_{\mathcal{O}_{X,P}} L_P^{\otimes D}) = \binom{d+n-1}{n}.$$

Beweis. Weil $\mathcal{O}_{\hat{V}}$ ein regulärer lokaler Ring der Dimension d ist, hat der $\kappa(\hat{V})$-Vektorraum $\check{T}_{\hat{V}} = \eta/\eta^2$ die Dimension d. Sei $A := \mathcal{O}_{X,P}$ mit maximalem Ideal $\mathfrak{m} \subset A$ und $\mathcal{O}_{\hat{V}} = \hat{A}/\mathcal{A}$ für $\mathcal{A} \subset A$. Wegen

$$\kappa(\hat{V}) = (\hat{A}/\mathcal{A})/(\hat{\mathfrak{m}}/\mathcal{A}) \cong \hat{A}/\hat{\mathfrak{m}} \cong A/\mathfrak{m} = k$$

ist $\check{T}_{\hat{V}}$ auch ein k-Vektorraum der Dimension d.

Es ist dann

$$\operatorname{Sym}_k \check{T}_{\hat{V}} \cong \operatorname{Sym}_k k[T_1, \ldots, T_d].$$

Daraus folgt

$$\dim_k \operatorname{Sym}^n \check{T}_{\hat{V}} = \sharp\{T_1^{n_1} \cdots T_d^{n_d} \mid n_1 + \ldots n_d = n\} = \binom{d+n-1}{n}.$$

Weiter ist $\check{T}_{\hat{V}}$ ein A-Modul via

$$A \to \hat{A} \to \mathcal{O}_{\hat{V}} \to \kappa(\hat{V}).$$

Weil der Halm $L_P^{\otimes D}$ ist ein freier A-Modul vom Rang 1 ist, folgt

$$\operatorname{rg}_A(\operatorname{Sym}^n \check{T}_{\hat{V}} \otimes_A L_P^{\otimes D}) = \dim_k(\operatorname{Sym}^n \check{T}_{\hat{V}} \otimes_A L_P^{\otimes D}) = \dim_k(\operatorname{Sym}^n \check{T}_{\hat{V}}) = \binom{d+n-1}{n}.$$

□

Lemma 3.20. *Bezeichnet* $r_n : \Gamma(V_n, L^{\otimes D}) \to \Gamma(V_{n-1}, L^{\otimes D})$ *für* $n \in \mathbb{N}$ *die Restriktionsabbildung, so gilt:*

$$\ker(r_n) \cong \operatorname{Sym}^{n-1} \check{T}_{\hat{V}} \otimes L_P^{\otimes D}.$$

Beweis. Wir zeigen die Behauptung zunächst für den Fall $L = \mathcal{O}_{\hat{V}}$. Es ist dann $r_n : \Gamma(V_n, \mathcal{O}_{V_n}) \to \Gamma(V_{n-1}, \mathcal{O}_{V_{n-1}})$ und wir müssen zeigen

$$\ker(r_n) \cong \operatorname{Sym}^{n-1} \check{T}_{\hat{V}}.$$

Es sei wieder $A = \mathcal{O}_{X,P}$ mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$, $\hat{V}$ gegeben durch $\mathcal{A} \subset \hat{A}$ und $B = \mathcal{O}_{\hat{V}} = \hat{A}/\mathcal{A}$ mit maximalem Ideal $\eta = \hat{\mathfrak{m}}/\mathcal{A} = \mathfrak{m}\hat{A}/\mathcal{A} = \mathfrak{m}B$. Dann ist $\Gamma(V_n, \mathcal{O}_{V_n}) = \hat{A}/\hat{\mathfrak{m}}^n + \mathcal{A} = B/\mathfrak{m}^n B$ und $r_n : B/\mathfrak{m}^n B \to B/\mathfrak{m}^{n-1} B$ durch die kanonische Projektion gegeben. Es ist $\ker(r_n) = \mathfrak{m}^{n-1}B/\mathfrak{m}^n B = \eta^{n-1}/\eta^n$. Insbesondere ist $\ker(r_2) = \eta/\eta^2 = \check{T}_{\hat{V}}$.

Weil B ein regulärer lokaler Ring ist, wird das maximale Ideal η nach [M2, Ch. 17, Th. 36] von einer regulären Folge erzeugt. Dann gilt mit [FL, IV, §2, Cor. 2.4], dass

$$\operatorname{Sym}_k \check{T}_{\hat{V}} = \operatorname{Sym}_k(\eta/\eta^2) \cong \bigoplus_{n=0}^{\infty} \eta^n/\eta^{n+1} = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \eta^{n-1}/\eta^n = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \ker(r_n)$$

ein graduierter Isomorphismus ist und die Behauptung folgt für $L = \mathcal{O}_{\hat{V}}$. Sei nun ein Geradenbündel L gegeben. Zur besseren Unterscheidung bezeichnen wir mit L nur das Geradenbündel auf X. Es seien $L_n = g_n^* L$ die zugehörigen Geradenbündel auf V_n. Diese sind für $n \in \mathbb{N}$ gegeben durch $L_n = g_n^{-1} L \otimes_{g_n^{-1}\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{\hat{V}}$. Es ist

$$\Gamma(V_n, L_n^{\otimes D}) = (L_n^{\otimes D})_P = L_P^{\otimes D} \otimes_{\mathcal{O}_{X,P}} \mathcal{O}_{V_n,P} = L_P^{\otimes D} \otimes_A B/\mathfrak{m}^n B.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \ker(r_n) &= \ker(L_P^{\otimes D} \otimes_A B/\mathfrak{m}^n B \to L_P^{\otimes D} \otimes_A B/\mathfrak{m}^{n-1} B) = \\ &= L_P^{\otimes D} \otimes \mathfrak{m}^{n-1} B/\mathfrak{m}^n B = L_P^{\otimes D} \otimes \operatorname{Sym}^{n-1} \check{T}_{\hat{V}}. \end{aligned}$$

□

Mit Hilfe dieses Lemmas können wir nun die Morphismen γ_D^n definieren. Wegen $r_n \circ \eta_D^n = \eta_D^{n-1}$ gilt $\eta_D^n(E_D^n) \subset \ker(r_n)$. Weil wir den Kern von r_n mit $\operatorname{Sym}^{n-1} \check{T}_{\hat{V}} \otimes L_P^{\otimes D}$ identifizieren können, induziert η_D^n eine k-lineare Abbildung

$$\gamma_D^n : E_D^n \to \operatorname{Sym}^{n-1} \check{T}_{\hat{V}} \otimes L_P^{\otimes D}.$$

Nun können wir das Algebraizitätskriterium formulieren.

Theorem 3.21. *Es sind äquivalent:*

(i) Der formale Keim $\hat{V}$ ist algebraisch.

(ii) Es existiert ein $c > 0$, sodass für alle $D, n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{n}{D} > c$ die Abbildung γ_D^n verschwindet.

Um das Theorem beweisen zu können, müssen wir zunächst einige weitere Definitionen besprechen.

3.4.2 Rahmen und Verschwindungsordnung

Definition 3.22. Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein lokal geringter Raum und L ein invertierbarer $\mathcal{O}_X$-Modul. Weiter sei $\varnothing \neq U \subset X$ eine offene Menge und eine Trivialisierung $\phi_U : \mathcal{O}_{X|U} \xrightarrow{\sim} L_{|U}$ gegeben. Dann nennen wir $r = \phi_U(1) \in \Gamma(U, L)$ einen *Rahmen von L über U*.

Lemma 3.23. *Es sei ein Schema X und eine invertierbare Garbe L auf X gegeben.*

(i) Jeder Punkt $P \in X$ besitzt eine offene Umgebung $U \subset X$ für die ein Rahmen $r \in \Gamma(U, L)$ existiert.

(ii) *Ist $r \in \Gamma(U, L)$ ein Rahmen, so existiert für jedes $s \in \Gamma(U, L)$ ein eindeutig bestimmtes $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ mit $s = fr$. Für jedes $P \in U$ gilt dann $s_P = f_P r_P$ im Halm $\mathcal{O}_{X,P}$.*

(iii) *Ist $r' \in \Gamma(U, L)$ ein weiterer Rahmen, so existiert ein eindeutig bestimmtes $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X^\times)$ mit $r = fr'$.*

(iv) *Ist L' eine weitere invertierbare Garbe auf X und sind $r \in \Gamma(U, L)$, $r' \in \Gamma(V, L')$ Rahmen, so ist $r \otimes r' \in \Gamma(U \cap V, L \otimes L')$ ein Rahmen von $L \otimes L'$.*

(v) *Ist $i : Z \to X$ ein Morphismus von Schemata und $r \in \Gamma(U, L)$ ein Rahmen von L, so ist $i^*(r) \in \Gamma(i^{-1}(U), i^*L)$ ein Rahmen von i^*L.*

Beweis. Die Punkte (i) bis (iv) folgen sofort aus der Definition von invertierbaren Garben. Es bleibt also noch (v) zu zeigen.

Es ist $i^{-1}L$ die Garbe auf Z assoziiert zur Prägarbe

$$V \mapsto \varinjlim_{i(V) \subset U} L(U).$$

Hat man einen Schnitt $s \in \Gamma(U, L)$ gegeben, so definiert dieser wegen $i(i^{-1}(U)) \subset U$ ein Element $i^{-1}s \in \Gamma(i^{-1}(U), i^{-1}L)$. Ist nun $U \subset X$ offen mit einem Isomorphismus $\phi_U : \mathcal{O}_{X|U} \xrightarrow{\sim} L_{|U}$, mit $\phi_U(1) = r$, so definiert dies einen Isomorphismus $\phi_{i^{-1}(U)}$: $i^{-1}\mathcal{O}_{X|i^{-1}(U)} \xrightarrow{\sim} i^{-1}L_{|i^{-1}(U)}$. Für $V := i^{-1}(U)$ liefert dies einen Isomorphismus

$$\psi_V : i^*L_{|V} = \mathcal{O}_{Z|V} \otimes_{i^{-1}\mathcal{O}_{X|V}} i^{-1}L_{|V} \xrightarrow{1 \otimes \phi_V^{-1}} \mathcal{O}_{Z|V} \otimes_{i^{-1}\mathcal{O}_{X|V}} i^{-1}\mathcal{O}_{X|V} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{Z|V}$$

$$i^*r = 1 \otimes i^{-1}r \mapsto 1 \otimes 1 \mapsto 1$$

Also ist $i^*r = \psi_V^{-1}(1)$ ein Rahmen von i^*L über V. □

Definition 3.24. Sei X eine algebraische Varietät, $P \in X$ und L ein Geradenbündel auf X. Weiter sei s ein globaler Schnitt von L. Wir definieren die *Verschwindungsordnung* $\operatorname{mult}_P s$ *von s in P* wie folgt: Wir wählen eine Trivialisierung $\phi_U : \mathcal{O}_{X|U} \xrightarrow{\sim} L_{|U}$ für eine Umgebung U von P. Dann ist $r := \phi_U(1)$ ein Rahmen von L und es existiert ein eindeutig bestimmtes $f_P \in \mathcal{O}_{X,P}$ mit $s_P = f_P r_P$. Ist $f_P \in \cap_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{m}_P^n$, so setzt man $\operatorname{mult}_P s = \infty$. Für $f_P \notin \cap_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{m}_P^n$ ist $\operatorname{mult}_P s$ die eindeutig bestimme Zahl $k \in \mathbb{N}_0$ mit

$$f_P \in \mathfrak{m}_P^k \text{ und } f_P \notin \mathfrak{m}_P^{k+1}.$$

Bemerkung 3.25. Da sich Rahmen nur um Einheiten unterscheiden, ist die Definition unabhängig von der Wahl der Trivialisierung ϕ_U. Weil X noethersch ist, ist der Halm $\mathcal{O}_{X,P}$ ein noetherscher lokaler Ring. Dann ist $\cap_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{m}_P^n = (0)$ und für einen Schnitt s ist $\operatorname{mult}_P s = \infty$ äquivalent zu $s_P = 0$.

Bemerkung 3.26. Sei X eine algebraische Varietät, $P \in X(k)$ und $\hat{X}_P = \varprojlim X_n$ die formale Vervollständigung von X entlang P. Für die n-te infinitesimale Umgebung $X_n = \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{X,P}/\mathfrak{m}_P^n)$ und $L_n = L_{|X_n}$ hat man ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\ldots & \Gamma(X_{n-1}, L_{n-1}) \arrow[l] & \Gamma(X_n, L_n) \arrow[l] & \Gamma(X_{n+1}, L_{n+1}) \arrow[l] & \ldots \arrow[l] \\
 & & \Gamma(X, L) \arrow[ul, "\omega_{n-1}"] \arrow[u, "\omega_n"] \arrow[ur, "\omega_{n+1}"'] & &
\end{tikzcd}$$

Ist $s \in \Gamma(X, L)$, so ist $\operatorname{mult}_P s$ die größte natürliche Zahl n, für die $\omega_n(s) = 0$ gilt. Denn ist r ein Rahmen von L in einer Umgebung von P, so ist $1 \otimes r_{|X_n} = 1 \otimes r_P$ ein Rahmen von L_n. Ist dann $s = fr$, so ist $\omega_n(s) = s_{|V_n} = 1 \otimes f_P r_P = f_P(1 \otimes r_P)$. Es ist $L_n = L_{n,P} = L_P \otimes \mathcal{O}_{X,P}/\mathfrak{m}_P^n$ ein freier $\mathcal{O}_X/\mathfrak{m}_P^n$-Modul mit Basis $1 \otimes r_P$. Also ist $\omega_n(s)$ genau dann 0, wenn $f_P = 0$ in $\mathcal{O}_{X_n,P}$, also $f_P \in \mathfrak{m}_P^n$ gilt. Damit ist $\operatorname{mult}_P s$ die größte Zahl für die $\omega_n(s) = 0$ gilt.

Lemma 3.27. *Bezeichnet $\mathcal{J}_Z \subset \mathcal{O}_X$ die Idealgarbe, die zum Zariskiabschluss Z korrespondiert, so gilt*

$$\bigcap_{n \geq 1} E_D^n = \ker \eta_D = \Gamma(X, \mathcal{J}_Z L^{\otimes D}).$$

Beweis. Die Abbildung η_D ist gegeben durch

$$\eta_D = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \eta_D^n : \Gamma(X, L^{\otimes D}) \to \Gamma(\hat{V}, h^* L^{\otimes D}) = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \Gamma(V_n, g_n^* L^{\otimes D})$$

für die Morphismen von geringen Räumen $h : \hat{V} \to X$ und $g_n : V_n \to X, n \in \mathbb{N}$. Dann folgt $\cap_{n \geq 1} E_D^n = \cap_{n \geq 1} \ker \eta_D^{n-1} = \ker \eta_D$ sofort aus der Konstruktion des inversen Limes.

Sei nun ein Schnitt $s \in \Gamma(X, \mathcal{J}_Z L^{\otimes D})$ gegeben. Nach der Definition des Zariskiabschlusses gilt $\mathcal{J}_Z \subset \mathcal{J}_{V_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit ist $s \in \Gamma(X, \mathcal{J}_{V_n} L^{\otimes D})$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es ist

$$\Gamma(V_n, g_n^* L^{\otimes D}) = \Gamma(X, (g_n)_* g_n^* L^{\otimes D}) \overset{\text{[H, II, Ex. 5.1]}}{\cong} \Gamma(X, \mathcal{O}_X / \mathcal{J}_{V_n} \otimes_{\mathcal{O}_X} L^{\otimes D}).$$

Für jedes $x \in X$ besitzt der Halm s_x eine Darstellung $s_x = fr$ mit $f \in \mathcal{J}_{Z,x}$ und $r \in L_x^{\otimes D}$. Dann gilt

$$\eta_D^n(s)_x = \eta_D^n(s_x) = 1 \otimes s_x = f \otimes r = 0 \text{ in } \mathcal{O}_{X,x}/\mathcal{J}_{Z,x} \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} L_x^{\otimes D}.$$

Es folgt $\eta_D^n(s) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit auch auch $s \in \ker \eta_D$.

Sei nun umgekehrt ein $s \in \ker \eta_D$ gegeben. Das heißt, $s_{|V_n} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir wählen eine offene, affine Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von X mit Rahmen $r_i \in \Gamma(U_i, L^{\otimes D})$. Es genügt zu zeigen, dass für jedes $i \in I$ schon $s_{|U_i} \in \Gamma(U_i, \mathcal{J}_Z L^{\otimes D})$ gilt. Für jedes $i \in I$ existiert eine eindeutige Darstellung $s_{|U_i} = f_i r_i$ mit $f_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{O}_X)$. Wir definieren Idealgarben $\mathcal{J}_{s|U_i} := f_i \mathcal{O}_{U_i}$. Die f_i unterscheiden sich nur um Einheiten, denn auf den Schnitten $U_{ij} := U_i \cap U_j$ gilt

$$\frac{(f_i)_{|U_{ij}}}{(f_j)_{|U_{ij}}} = \frac{s_{|U_{ij}} (r_j)_{|U_{ij}}}{(r_i)_{|U_{ij}} s_{|U_{ij}}} = \frac{(r_j)_{|U_{ij}}}{(r_i)_{|U_{ij}}} \in \Gamma(U_{ij}, \mathcal{O}_X^\times).$$

Das heißt die Idealgarben $\mathcal{J}_{s|U_i}$ stimmen auf den Schnitten überein und verkleben somit zu einer quasi-kohärenten Idealgarbe $\mathcal{J}_s \subset \mathcal{O}_X$. Diese definiert ein abgeschlossenes Unterschema $Z_s \hookrightarrow X$.

Wegen $s \in \ker \eta_D$ ist $(s_{|U_i})_{|V_n} = g_n^*(s_{|U_i}) = f_i g_n^*(r_i) = 0$. Nach Lemma 3.23 ist $g_n^*(r_i)$ ein Rahmen von $g_n^* L^{\otimes D}$. Dann muss aber schon der Koeffizient f_i in $\mathcal{O}_{V_n} = \mathcal{O}_X/\mathcal{J}_{V_n}$ verschwinden. Damit gilt $f_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{J}_{V_n})$ und somit $\mathcal{J}_s \subset \mathcal{J}_{V_n}$ für alle $n \in N$. Die Definition des Zariskiabschlusses liefert uns eine Inklusion $\mathcal{J}_s \subset \mathcal{J}_Z$ und es folgt $s_{|U_i} = f_i r_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{J}_Z L^{\otimes D})$. □

3.4.3 Der Grad eines Geradenbündels

Den Grad eines Geradenbündels definiert man mit Hilfe von Schnitttheorie. Eine fundierte Einführung in die Schnitttheorie findet man zum Beispiel im gleichnamigen Buch von William Fulton [F].

Definition 3.28. Es sei X eine projektive Varietät der Dimension d über dem Körper k und L ein amples Geradenbündel über X. Man definiert den *Grad von X bezüglich L* durch

$$\deg_L X := \deg_{X/k}(\mathrm{c}_1(L)^d \cap [X]) \in \mathbb{Z}.$$

Es ist $[X] \in A_d X$ und $\mathrm{c}_1(L)$ definiert eine Operation

$$\mathrm{c}_1(L) \cap \ . \ : A_p X \to A_{p-1} X, \quad p \in \mathbb{N}.$$

Damit gilt $\mathrm{c}_1(L)^d \cap [X] \in A_0 X$. Das Schema X ist projektiv und damit insbesondere eigentlich, weshalb der Morphismus $\deg_{X/k} : A_0 X \to \mathbb{Z}$ wohldefiniert ist [vgl. F, Def. 1.4].

Lemma 3.29. *Sei X eine projektive Varietät über dem Körper k. Es sei eine Untervarietät $i : Z \hookrightarrow X$ der Dimension d gegeben und $n : \tilde{Z} \to Z$ die Normalisierung von Z. Für ein amples Geradenbündel H auf X sei $L := i^* H$ die Einschränkung von H auf Z. Dann sind Z und $\tilde{Z}$ projektiv, die Geradenbündel L und $n^* L$ sind ampel und es gilt*

$$\deg_L Z = \deg_{n^* L} \tilde{Z}.$$

Beweis. Wir betrachten das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} \tilde{Z} \arrow[r, "n"] \arrow[drr, "k_{\tilde{Z}}"'] & Z \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "k_Z"] & X \arrow[d, "k_X"] \\ & & \mathrm{Spec}(k). \end{tikzcd}$$

Dabei ist der Morphismus k_X nach Voraussetzung projektiv. Der Morphismus n ist als Normalisierung einer Varietät von endlichem Typ über einem Körper endlich. Ebenso ist i als abgeschlossene Immersion endlich und insbesondere projektiv. Weil $\mathrm{Spec}(k)$ quasi-kompakt und quasi-separiert ist, ist Projektivität verträglich mit Komposition und die Morphismen k_Z und $k_{\tilde{Z}}$ sind projektiv. Also sind auch die Schemata Z und $\tilde{Z}$ projektiv. Dass L und n^*L ampel sind, folgt zum Beispiel aus [GW, Prop. 13.83]. Mit der Projektionsformel [F, Prop. 2.5 (c)], der Funktorialität des Push-forward, das heißt $\deg_{\tilde{Z}/k} = \deg_{Z/k} \circ n_*$, und der Tatsache, dass n surjektiv ist [s. GW, Prop. 12.43], folgt dann

$$\begin{aligned}\deg_L Z &= \deg_{Z/k}(\mathrm{c}_1(L)^d \cap [Z]) \\ &= \deg_{Z/k}(n_*(\mathrm{c}_1(n^*L)^d \cap [\tilde{Z}])) \\ &= \deg_{\tilde{Z}/k}(\mathrm{c}_1(n^*L)^d \cap [\tilde{Z}]) = \deg_{n^*L} \tilde{Z}.\end{aligned}$$ □

Lemma 3.30. *Es sei X eine projektive Varietät über k der Dimension d und L ein amples Geradenbündel auf X. Dann gilt für $D \gg 0$*

$$\dim_k \Gamma(X, L^{\otimes D}) = \frac{\deg_L X}{d!} D^d + \mathcal{O}(D^{d-1}).$$

Beweis. Weil L ampel ist, gilt für $D \gg 0$ nach [H, III, Prop. 5.3] schon $\mathrm{H}^i(X, L^{\otimes D}) = 0$ für $i > 0$. Damit folgt

$$\chi(X, L^{\otimes D}) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i \dim_k \mathrm{H}^i(X, L^{\otimes D}) = \dim_k \mathrm{H}^0(X, L^{\otimes D}) = \dim_k \Gamma(X, L^{\otimes D}).$$

Die Euler-Charakteristik $\chi(X, L^{\otimes D})$ ist nach [F, Ex. 18.3.6] ein Polynom in D vom Grad d, wobei der höchste Grad durch

$$\frac{1}{d!} \int_X (D\, \mathrm{c}_1(L))^d \cap [X] = \frac{D^d}{d!} \int_X \mathrm{c}_1(L)^d \cap [X] = \frac{D^d}{d!} \deg_L X$$

gegeben ist. □

Das folgende Lemma werden wir nicht beweisen, da hierfür noch weiterführende Theorie notwendig wäre und der Beweis zum unmittelbaren Verständnis nicht notwendig ist. Es findet sich in dieser Form in der Arbeit von Bost [Bost, Lem. 2.3] oder kann für Varietäten über $\mathbb{C}$ aus [Laz, Prop. 5.1.9] gefolgert werden.

Lemma 3.31. *Sei X eine projektive Varietät der Dimension d über einem Körper k, L ein amples Geradenbündel und $P \in X(k)$ ein k-rationaler Punkt. Es existiert eine Konstante $\epsilon(L, P)$ die nur von L in P abhängt, sodass für jede natürliche Zahl $D \in \mathbb{N}$ und jeden globalen Schnitt $s \in \Gamma(X, L^{\otimes D})$ ungleich Null folgende Ungleichung für die Verschwindungsordnung von s gilt:*

$$\mathrm{mult}_P\, s \leq \frac{\deg_L X}{\epsilon(L, P)^{d-1}} D.$$

Bemerkung 3.32. Im Beweis von Lemma 3.31 wählt man $\epsilon(L, P)$ als die *Seshadri-Konstante* [s. Laz, Def. 5.1.1].

3.4.4 Beweis des Algebraizitätskriteriums

Mit diesen Vorarbeiten sind wir so weit, dass wir Theorem 3.21 beweisen können.

Beweis von Theorem 3.21:

$(i) \Rightarrow (ii)$ Der formale Keim $\hat{V}$ sei algebraisch. Wir werden zeigen, dass ein $c > 0$ existiert, sodass für alle $D, n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{n}{D} > c$ der Morphismus $\eta_D : E_D \to \Gamma(\hat{V}, L^{\otimes D})$ auf E_D^n verschwindet. Denn dann gilt

$$E_D^n \subset \ker \eta_D = \cap_{i \in \mathbb{N}} E_D^i$$

und es ist $E_D^i = E_D^n$ für alle $i \geq n$. Insbesondere ist dann

$$E_D^{n+1} = \ker \gamma_D^n = E_D^n$$

und die Abbildung γ_D^n verschwindet.

Ist Z der Zariskiabschluss von $\hat{V}$ und $n : \tilde{Z} \to Z$ die Normalisierung von Z, so sind die Geradenbündel L auf Z und n^*L auf $\tilde{Z}$ nach Lemma 3.29 ampel und es gilt

$$\deg_L Z = \deg_{n^*L} \tilde{Z}.$$

Weil $\hat{V}$ algebraisch ist, ist $d := \dim(Z) = \dim(\hat{V}) = \dim(\tilde{Z})$. Der Keim $\hat{V}$ entspricht einem Zweig $Q \in \tilde{Z}(k)$, also faktorisiert die Vervollständigung von n über $\hat{V}$

$$\hat{n} : \widehat{\tilde{Z}_Q} \xrightarrow{\sim} \hat{V} \to \widehat{Z_P}.$$

Sei nun ein globaler Schnitt $s \in E_D^n$ gegeben, das heißt $s \in \Gamma(X, L^{\otimes D})$ und $s_{|V_{n-1}} = 0$. Dann ist n^*s ein globaler Schnitt von n^*L. Wegen $\widehat{\tilde{Z}_Q} \cong \hat{V}$ und $s_{|V_{n-1}} = 0$ folgt mit Bemerkung 3.26

$$\mathrm{mult}_Q\, n^*s \geq n - 1.$$

Wir wählen nun $c = \frac{\deg_L Z}{\epsilon(n^*L, Q)^{d-1}} + 1$, denn dann gilt für alle D, n mit $\frac{n}{D} > c$

$$\mathrm{mult}_Q\, n^*s \geq n - 1 > cD - 1 = \frac{\deg_L Z}{\epsilon(n^*L, Q)^{d-1}} D + D - 1 \geq \frac{\deg_{n^*L} \tilde{Z}}{\epsilon(n^*L, Q)^{d-1}} D.$$

Wendet man Lemma 3.31 auf n^*s an, so kann diese Ungleichung aber nur für $n^*s = 0$ gelten. Also ist $s_{|\hat{V}} = n^*s = 0$ und die Abbildung η_D verschwindet auf E_D^n.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Sei umgekehrt ein $c > 0$ gegeben, sodass für alle $n, D \in \mathbb{N}$ mit $\frac{n}{D} > c$ die Abbildung γ_D^n verschwindet. Dann ist insbesondere

$$E_D^{n+1} = \ker \gamma_D^n = E_D^n.$$

Also ist $E_D^n / E_D^{n+1} = 0$ für $n > cD$. Für ein beliebiges n ist die Dimension dieses Quotientenvektorraums beschränkt durch

$$\dim_k E_D^n / E_D^{n+1} = \dim_k E_D^n / \ker \gamma_D^n = \dim_k \mathrm{im}\, \gamma_D^n \leq$$

$$\leq \dim_k \operatorname{Sym}_k^{n-1} \check{T}_{\hat{V}} \otimes L_P^{\otimes D} = \binom{d+n-2}{n-1}$$

für $d = \dim(\hat{V})$. Weil die Folge der endlich-dimensionalen k-Vektorräume E_D^n stationär wird, können wir weiter abschätzen

$$\dim_k(E_D / \cap_{n\geq 1} E_D^n) = \sum_{n\geq 1} \dim_k(E_D^n / E_D^{n+1}) = \sum_{n=1}^{[cD]} \dim_k(E_D^n / E_D^{n+1}) \leq$$

$$\leq \sum_{n=1}^{[cD]} \binom{d+n-2}{n-1} = \sum_{n=0}^{[cD]-1} \binom{d+n-1}{n}.$$

Dabei bezeichnet $[cD]$ die größte natürliche Zahl mit $[cD] \leq cD$. Für den weiteren Beweis müssen wir das Verhalten dieses Terms für $D \to \infty$ genauer untersuchen.

Lemma 3.33. *Es seien $d, D \in \mathbb{N}$, $c \in \mathbb{R}_{>0}$ und $[cD]$ die größte natürliche Zahl mit $[cD] \leq cD$. Die Terme*

$$A(D) = \sum_{n=0}^{[cD]-1} \binom{d+n-1}{n}$$
$$B(D) = \frac{c^d}{d!} D^d$$

sind äquivalent für D gegen unendlich, das heißt $\lim_{D\to\infty} \frac{A(D)}{B(D)} = 1$.

Beweis. Zunächst vereinfachen wir den Ausdruck $A(D)$:

$$A(D) = \sum_{n=0}^{[cD]-1} \binom{d+n-1}{n} = \sum_{n=0}^{[cD]-1} \binom{d-1+n}{d-1} = \binom{d+[cD]-1}{d}$$

$$= \frac{(d+[cD]-1)!}{d!([cD]-1)!}.$$

Es gilt dann

$$\begin{aligned}
\lim_{D\to\infty}\frac{A(D)}{B(D)} &= \lim_{D\to\infty}\frac{(d+[cD]-1)!}{c^dD^d([cD]-1)!} \overset{\text{Stirling-Formel}}{=} \\
&= \lim_{D\to\infty}\frac{\sqrt{2\pi(d+[cD]-1)}(d+[cD]-1)^{d+[cD]-1}e^{-d-[cD]+1}}{c^dD^d\sqrt{2\pi([cD]-1)}([cD]-1)^{[cD]-1}e^{-[cD]+1}} \\
&= \lim_{D\to\infty}\frac{\sqrt{d+[cD]-1}(d+[cD]-1)^d}{c^dD^de^d\sqrt{[cD]-1}}\cdot\left(\frac{d+[cD]-1}{[cD]-1}\right)^{[cD]-1} \\
&= \lim_{D\to\infty}\frac{\sqrt{d+[cD]-1}(d+[cD]-1)^d}{c^dD^de^d\sqrt{[cD]-1}}\cdot e^d \\
&= \lim_{cD\to\infty}\left(\frac{d+cD}{cD}\right)^{d+\frac{1}{2}} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

□

Die Dimension von $E_D/\bigcap_{n\geq 1}E_D^n$ ist für D gegen unendlich also durch $\frac{c^d}{d!}D^d$ beschränkt.

Lemma 3.34. *Für D groß genug kann man den k-Vektorraum*

$$E_D/\textstyle\bigcap_{n\geq 1}E_D^n = \Gamma(X,L^{\otimes D})/\Gamma(X,\mathcal{J}_ZL^{\otimes D})$$

mit dem Vektorraum $\Gamma(Z,L^{\otimes D})$ identifizieren.

Beweis. Es sei $i: Z\hookrightarrow X$ die Inklusion der topologischen Räume. Dann ist $\Gamma(Z,L^{\otimes D})=\Gamma(i^{-1}(X),i^*L^{\otimes D})=\Gamma(X,i_*i^*L^{\otimes D})$. Wir zeigen, dass für jedes $x\in X$ die Halme $(L^{\otimes D}/\mathcal{J}_ZL^{\otimes D})_x$ und $(i_*i^*L^{\otimes D})_x$ übereinstimmen. Für ein $x\in X\setminus Z$ ist $\mathcal{J}_{Z,x}=\mathcal{O}_{X,x}$ und $(L^{\otimes D}/\mathcal{J}_ZL^{\otimes D})_x=L_x^{\otimes D}/\mathcal{J}_{Z,x}L_x^{\otimes D}=0$. Ebenso ist $(i_*i^*L^{\otimes D})_x=0$. Ist $x\in Z$, so ist $(i_*i^*L^{\otimes D})_x=(i^*L^{\otimes D})_x=L_x^{\otimes D}\otimes_{\mathcal{O}_{X,x}}\mathcal{O}_{Z,x}=L_x^{\otimes D}\otimes_{\mathcal{O}_{X,x}}\mathcal{O}_{X,x}/\mathcal{J}_{Z,x}=L_x^{\otimes D}/\mathcal{J}_{Z,x}L_x^{\otimes D}=(L^{\otimes D}/\mathcal{J}_ZL^{\otimes D})_x$. Damit gilt dann

$$\Gamma(X,L^{\otimes D}/\mathcal{J}_ZL^{\otimes D})\cong\Gamma(Z,L^{\otimes D}).$$

Wir betrachten nun die exakte Folge von $\mathcal{O}_X$-Moduln

$$0\to\mathcal{J}_ZL^{\otimes D}\to L^{\otimes D}\to L^{\otimes D}/\mathcal{J}_ZL^{\otimes D}\to 0.$$

Diese liefert eine lange exakte Kohomologiesequenz

$$0\to\Gamma(X,\mathcal{J}_ZL^{\otimes D})\to\Gamma(X,L^{\otimes D})\to\Gamma(X,L^{\otimes D}/\mathcal{J}_ZL^{\otimes D})\to\mathrm{H}^1(X,\mathcal{J}_ZL^{\otimes D})\to\cdots.$$

Dann genügt es zu zeigen, dass $\mathrm{H}^1(X,\mathcal{J}_ZL^{\otimes D})=0$ gilt. Der $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{J}_ZL^{\otimes D}$ ist das Bild der Multiplikation $\mathcal{J}_Z\otimes L^{\otimes D}\to L^{\otimes D}$. Für jeden Halm $x\in X$ ist die kanonische Abbildung

$$(\mathcal{J}_Z\otimes L^{\otimes D})_x\to(\mathcal{J}_ZL^{\otimes D})_x$$

also surjektiv. Wegen $L_x^{\otimes D} \cong \mathcal{O}_{X,x}$ ist die Abbildung aber auch injektiv und es folgt $\mathcal{J}_Z L^{\otimes D} \cong \mathcal{J}_Z \otimes L^{\otimes D}$ als $\mathcal{O}_X$-Moduln. Nach [H, III, Prop. 5.3] ist $\mathrm{H}^1(X, \mathcal{J}_Z \otimes L^{\otimes D}) = 0$ für $D \gg 0$ und die Behauptung folgt. $\square$

Mit Lemma 3.30 erhalten wir nun

$$\dim_k(E_D / \cap_{n\geq 1} E_D^n) = \frac{\deg_L Z}{(\dim Z)!} D^{\dim Z} + \mathcal{O}(D^{\dim Z - 1}).$$

Insgesamt ergibt sich dann

$$\lim_{D\to\infty} \frac{\frac{c^d}{d!} D^d}{\frac{\deg_L Z}{(\dim Z)!} D^{\dim Z}} \overset{3.33}{=} \lim_{D\to\infty} \frac{\sum_{i=0}^{[cD]-1} \binom{d+i-1}{i}}{\frac{\deg_L Z}{(\dim Z)!} D^{\dim Z}} \geq$$

$$\geq \lim_{D\to\infty} \frac{\dim_k(E_D / \cap_{n\geq 1} E_D^n)}{\frac{\deg_L Z}{(\dim Z)!} D^{\dim Z}} = \lim_{D\to\infty} \frac{\frac{\deg_L Z}{(\dim Z)!} D^{\dim Z} + \mathcal{O}(D^{\dim Z-1})}{\frac{\deg_L Z}{(\dim Z)!} D^{\dim Z}} = 1$$

Also muss $d \geq \dim Z$ gelten. Dann gilt aber schon $d = \dim Z$ und der Keim $\hat{V}$ ist algebraisch. Insbesondere ist dann $\deg_L Z \leq c^d$. $\square$

Wir haben also ein Kriterium bewiesen, das uns sagt, wann ein glatter formaler Keim algebraisch ist. Ebenso sagt uns das Theorem, dass man, falls $\hat{V}$ nicht algebraisch ist, beliebig große Brüche $\frac{n}{D}$ findet, für die der Quotientenvektorraum E_D^n / E_D^{n+1} nicht Null ist. Diese Aussage kann man sogar noch stärker formulieren.

Lemma 3.35. *Ist der glatte formale Keim $\hat{V}$ nicht algebraisch, so gilt*

$$\lim_{D\to\infty} \frac{\sum_{n\geq 1} \frac{n}{D} \dim_k(E_D^n / E_D^{n+1})}{\sum_{n\geq 1} \dim_k(E_D^n / E_D^{n+1})} = \infty.$$

Genauer gilt für jedes $\lambda > 0$

$$\lim_{D\to\infty} \frac{\sum_{n\geq \lambda D} \frac{n}{D} \dim_k(E_D^n / E_D^{n+1})}{\sum_{n\geq 1} \dim_k(E_D^n / E_D^{n+1})} = \infty$$

und

$$\frac{\sum_{n< \lambda D} \frac{n}{D} \dim_k(E_D^n / E_D^{n+1})}{\sum_{n\geq 1} \dim_k(E_D^n / E_D^{n+1})} \leq \lambda.$$

Beweis. Aus dem Beweis von Theorem 3.21 wissen wir bereits, dass für D gegen unendlich der Term $\sum_{n\geq 1} \dim_k(E_D^n / E_D^{n+1}) = \dim_k(E_D / \cap_{n\in\mathbb{N}} E_D^n)$ wie $D^{\dim Z}$ wächst.

Sei nun ein $\lambda > 0$ gegeben. Dann ist

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 1} \frac{n}{D} \dim_k(E_D^n / E_D^{n+1}) &\geq \sum_{n\geq \lambda D} \lambda \dim_k(E_D^n / E_D^{n+1}) + \sum_{n<\lambda D} \frac{n}{D} \dim_k(E_D^n / E_D^{n+1}) \geq \\ &\geq \sum_{n\geq \lambda D} \lambda \dim_k(E_D^n / E_D^{n+1}) = \lambda \dim_k(E_D^{[\lambda D]} / \cap_{n\geq 1} E_D^n) = \\ &= \lambda \left(\dim_k(E_D / \cap_{n\in\mathbb{N}} E_D^n) - \dim_k(E_D / E_D^{[\lambda D]}) \right).\end{aligned}$$

Den zweiten Summanden können wir abschätzen durch

$$\dim_k(E_D/E_D^{[\lambda D]}) = \sum_{n=1}^{[\lambda D]-1} \dim_k(E_D^n/E_D^{n+1}) = \sum_{n=1}^{[\lambda D]-1} \dim_k(\operatorname{im} \gamma_D^n)) \leq$$
$$\leq \sum_{n=1}^{[\lambda D]-1} \binom{d+n-2}{n-1} = \sum_{n=0}^{[\lambda D]-2} \binom{d+n-1}{n} = \binom{d+[\lambda D]-2}{d}$$

für $d = \dim \hat{V}$. Dieser Term wächst für D gegen unendlich wie D^d. Weil aber $\hat{V}$ nicht algebraisch ist, gilt $\dim Z > d$ und es folgt

$$\lim_{D\to\infty} \frac{\dim_k(E_D/E_D^{[\lambda D]}))}{\dim_k(E_D/\cap_{n\in\mathbb{N}} E_D^n)} \leq \lim_{D\to\infty} \frac{D^d}{D^{\dim Z}} = 0.$$

Zusammen ergibt sich

$$\liminf_{D\to\infty} \frac{\sum_{n\geq 1} \frac{n}{D} \dim_k(E_D^n/E_D^{n+1})}{\sum_{n\geq 1} \dim_k(E_D^n/E_D^{n+1})} \geq$$
$$\geq \liminf_{D\to\infty} \frac{\lambda \Big(\dim_k(E_D/\cap_{n\in\mathbb{N}} E_D^n) - \dim_k(E_D/E_D^{[\lambda D]})\Big)}{\dim_k(E_D/\cap_{n\in\mathbb{N}} E_D^n)} = \lambda.$$

Weil λ beliebig gewählt war, folgt die erste Behauptung.

Weiter gilt für jedes $\lambda > 0$

$$\frac{\sum_{n<\lambda D} \frac{n}{D} \dim_k(E_D^n/E_D^{n+1})}{\sum_{n\geq 1} \dim_k(E_D^n/E_D^{n+1})} \leq \frac{\sum_{n<\lambda D} \lambda \dim_k(E_D^n/E_D^{n+1})}{\sum_{n\geq 1} \dim_k(E_D^n/E_D^{n+1})} \leq \lambda.$$

Insbesondere folgt dann

$$\lim_{D\to\infty} \frac{\sum_{n\geq \lambda D} \frac{n}{D} \dim_k(E_D^n/E_D^{n+1})}{\sum_{n\geq 1} \dim_k(E_D^n/E_D^{n+1})} = \infty. \qquad \square$$

Literatur

[AM] Michael Francis Atiyah und Ian G. Macdonald. *Introduction to Commutative Algebra*. Addison-Wesley, 1969.

[Bos] Siegfried Bosch. *Lectures on Formal and Rigid Geometry*. Mathematisches Institut der Universität Münster, Stand: April 2008. URL: www.math.uni-muenster.de/sfb/about/publ/heft378.pdf.

[Bost] Jean-Benoît Bost. „Germs of analytic varieties in algebraic varieties: canonical metrics and arithmetic algebraization theorems". In: *Geometric Aspects of Dwork Theory* I (2004), S. 371–418.

[Bou2] Nikolas Bourbaki. *Commutative Algebra: Chapters 1–7*. 2. Aufl. Eléments de mathématique, English. Springer Verlag, 1989.

[Bou1] Nikolas Bourbaki. *General Topology: Chapters 1–4*. 2. Aufl. Eléments de mathématique, English. Springer Verlag, 1989.

[E] David Eisenbud. *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry*. Springer Science+Business Media, 2004.

[F] William Fulton. *Intersection Theory*. 2. Aufl. Springer Verlag Berlin Heidelberg, 1998.

[FL] William Fulton und Serge Lang. *Riemann-Roch Algebra*. Bd. 227. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer Verlag, 1985.

[GW] Ulrich Görtz und Torsten Wedhorn. *Algebraic Geometry I*. Vieweg + Teubner Verlag, 2010.

[EGAI] Alexander Grothendieck und Jean A. Dieudonné. *Eléments de Géométrie Algébrique I*. Publications mathématiques de l' I.H.É.S., 1960.

[EGAIneu] Alexander Grothendieck und Jean A. Dieudonné. *Eléments de Géométrie Algébrique I*. Springer Verlag Berlin Heidelberg, 1971.

[EGAIV] Alexander Grothendieck und Jean A. Dieudonné. *Eléments de Géométrie Algébrique IV*. Publications mathématiques de l' I.H.É.S., 1964, 1965, 1966, 1967.

[H] Robin Hartshorne. *Algebraic Geometry*. Springer Verlag, New York, 1977.

[Laz] Robert Lazarsfeld. *Positivity in Algebraic Geometry I*. Springer Verlag Berlin Heidelberg, 2004.

[Liu] Qing Liu. *Algebraic Geometry and Arithmetic Curves*. Oxford University Press, 2002.

[M2] Hideyuki Matsumura. *Commutative Algebra*. 2. Aufl. Mathematical Lecture Note. Benjamin/Cummings Publishing Company, 1980.

[M1] Hideyuki Matsumura. *Commutative Ring Theory*. 9. Aufl. Cambridge university press, 2006.

[S] The Stacks Project Authors. *Stacks Project*. http://stacks.math.columbia.edu. 2014.

[Z] Oscar Zariski. „Theory and application of holomorphic functions on algebraic varieties over arbitrary ground fields". In: *Memoirs of the American Mathematical Society* 5 (1951).

Danksagung

Ich möchte mich an dieser Stelle bei allen Personen bedanken, die mich bei der Erstellung der Masterarbeit begleitet haben. Ohne sie wäre diese Arbeit nicht möglich gewesen. Mein herzlicher Dank gilt Prof. Dr. Klaus Künnemann für die Möglichkeit die Masterarbeit bei ihm zu schreiben, die umfassende Betreuung und die zahlreichen Anregungen und Ideen, die in diese Arbeit eingeflossen sind.

Ich danke Johannes Prem, Alexander Schiller und Florian Steiner für ihre Anmerkungen und Korrekturen.

Zu guter Letzt bedanke ich mich bei Josef Ringlstetter für die kontinuierliche Unterstützung und bei meinen Eltern, die mir das Studium erst ermöglichten und mir immer bedingungslos zur Seite standen.

Erklärung der Selbstständigkeit

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Masterarbeit selbstständig verfasst und keine anderen, als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe. Die aus fremden Quellen direkt oder indirekt übernommenen Gedanken sind als solche gekennzeichnet. Diese Arbeit hat in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner Prüfungsbehörde vorgelegen.

Regensburg, den 31. März 2014