

0

Prolog

Quod erat knobelandum?

Clara Löh, Stefan Krauss, Niki Kilbertus

0.1	Wie funktioniert Mathematik?	x
0.2	Wie funktioniert der Schülerzirkel?	xii
0.3	Wie funktioniert dieses Buch?	xii
	Literaturverzeichnis	xiv
	Danksagungen	xiv

Das vorliegende Buch enthält das überarbeitete und ergänzte Material des Schülerzirkels Mathematik der Fakultät für Mathematik an der Universität Regensburg aus den Schuljahren 2012/13–2014/15. Die Originalmaterialien finden sich auf der Homepage des Schülerzirkels:

<http://www.mathematik.uni-regensburg.de/schuelerzirkel>

Mathematik ist eine der zentralen Kulturtechniken, die auf einmalige Weise die Strenge des logischen Denkens, die Nützlichkeit der Naturwissenschaften und die Eleganz der Kunst vereint und verbindet. Dennoch erhalten viele Schüler in der Schulausbildung leider nicht ausreichend Gelegenheit, Mathematik als attraktive und aktive Wissenschaft kennenzulernen und zu entdecken.

Ziel des im Schuljahr 2012/13 gestarteten Schülerzirkels Mathematik an der Fakultät für Mathematik der Universität Regensburg ist es, Schülerinnen und Schüler an die Mathematik heranzuführen und ihre Neugierde für diese Wissenschaft zu wecken und die Begeisterung zu fördern. Dieses Angebot ist an alle mathematikbegeisterten Schüler ab Klasse 7 gerichtet, die Spaß am Knobeln und am logischen Denken haben.

Bei der Auswahl der Themen haben wir darauf geachtet, dass die Aufgaben möglichst unabhängig vom Schulstoff bearbeitet werden können und dass viele verschiedene Gebiete der Mathematik beleuchtet werden. Die Themen sind dabei so aufbereitet, dass sie von Schülern leicht erlernt werden können.

Für die meisten Aufgaben beanspruchen wir jedoch keine mathematische Originalität. Viele der Aufgaben gehören zum weit verbreiteten Fundus mathematischer Probleme wie sie zum Beispiel auch in der Literatur zum mathematischen Problemlösen gesammelt sind [2, 1, 3]. Bei spezielleren Aufgaben haben wir versucht, Referenzen anzugeben, auch wenn es manchmal schwierig ist, die Originalquelle ausfindig zu machen. Andererseits gibt es auch Themenblätter, die sowohl das Thema betreffend als auch in den Aufgaben vollständig neu für den Schülerzirkel konzipiert wurden (wie zum Beispiel Thema II.7 zu Zahlenschleifen).

0.1 Wie funktioniert Mathematik?

Die Einzigartigkeit der Mathematik beruht auf ihrer Exaktheit. Die formale Sprache der Mathematik mag zunächst abstrakt und abschreckend erscheinen; nach eingehenderer Beschäftigung damit stellt sich aber schnell heraus, dass es ebendiese formale Sprache ermöglicht, Sachverhalte und Argumente präzise und nachvollziehbar darzustellen.

Der rigorose Aufbau der Mathematik besteht aus den folgenden, immer wiederkehrenden Schritten:

- In **Definitionen** werden neue Begriffe präzise eingeführt.
- **Theoreme** (bzw. **Sätze**, **Lemmata**, **Korollare**, ...) enthalten Behauptungen über mathematische Objekte und deren Zusammenhang.
- In der Mathematik muss jede Behauptung durch logische Argumente aus den bereits etablierten Tatsachen abgeleitet werden. Eine solche Kette von Argumenten bezeichnet man als **Beweis**; traditionell endet ein Beweis mit **quod erat demonstrandum** (was zu beweisen war). Bemerkenswert dabei ist, dass auch der Begriff des Beweises eine stringente mathematische Definition besitzt.

Dieser Prozess benötigt natürlich einen Ursprung, an dem diese Schritte beginnen. Klassisch sind diese grundlegenden Startpunkte durch die Axiome der

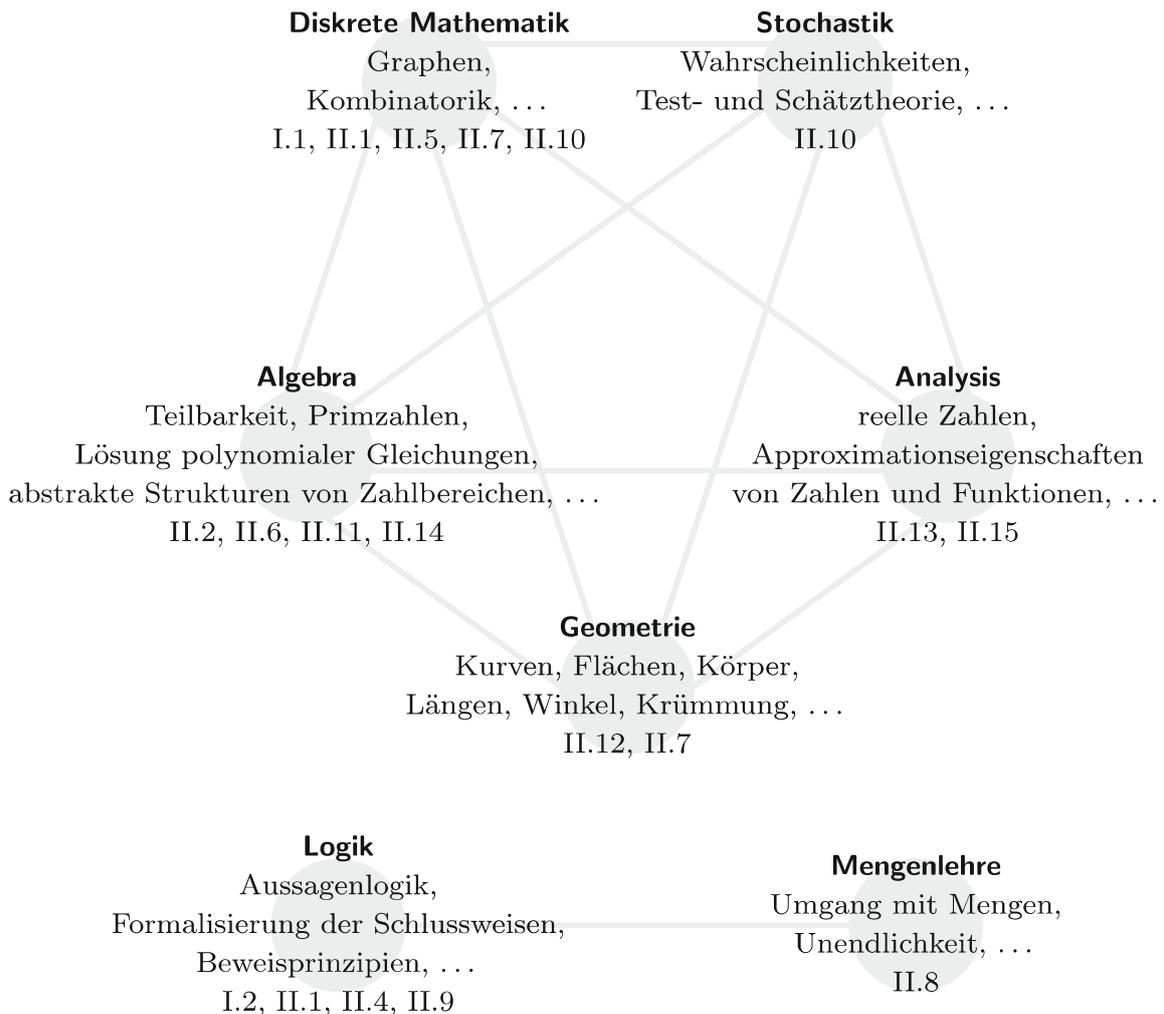


Abbildung 0.1: Panorama der Mathematik. Aufbauend auf Logik und Mengenlehre entwickeln und verbinden sich diverse mathematischen Teilgebiete. Die Grenzen zwischen den Gebieten verlaufen dabei fließend und durch Kombination mehrerer Gebiete entstehen neue Forschungsrichtungen (zum Beispiel algebraische Geometrie, Topologie, algebraische Topologie, Differentialgeometrie, diskrete Geometrie, ...).

Logik und Mengenlehre gegeben. Darauf aufbauend haben sich die mathematischen Teilgebiete wie Geometrie, Algebra, ... entwickelt (Abbildung 0.1 zeigt einen groben Überblick).

Einerseits erfordert und ermöglicht die Auseinandersetzung mit mathematischen Themen also diszipliniertes und selbstkritisches logisches Denken. Andererseits besitzt die Mathematik aber auch vielfältige Anwendungen in den Naturwissenschaften, in den Wirtschaftswissenschaften und im Alltag, selbst in vielen geisteswissenschaftlichen Disziplinen wie z. B. der Psychologie bildet die Mathematik in Form der Statistik das empirische Fundament.

Der wahrlich vergnügliche Teil der Mathematik besteht aber nicht darin, nur bereits bekannte Theorie und ihre Anwendungen nachzuvollziehen, sondern selbst aktiv Mathematik zu betreiben, d. h. neue Probleme zu lösen, neue Theoreme zu entdecken und neue Fragen zu stellen. Der Einstieg in das Problemlösen

erfordert keine komplizierte Mathematik – selbst mit wenigen Grundbegriffen lassen sich schöne und auch knifflige Aufgaben formulieren und lösen.

Im Schülerzirkel laden wir Schüler dazu ein, diese verschiedenen Aspekte der Mathematik zu entdecken und zu erlernen.

0.2 Wie funktioniert der Schülerzirkel?

Der Schülerzirkel für Mathematik an der Universität Regensburg hat zwei Komponenten: den Korrespondenzzirkel und Workshops an der Fakultät für Mathematik. Das Schülerzirkelteam unter der Leitung der Initiatoren Clara Löh (Fachmathematik) und Stefan Krauss (Didaktik der Mathematik) besteht aus freiwilligen wissenschaftlichen Mitarbeitern der Fakultät sowie fortgeschrittenen Studenten der Mathematik.

Der **Korrespondenzzirkel** funktioniert nach dem Vorbild anderer Korrespondenzzirkel in Mathematik, wie sie früher zum Beispiel in der ehemaligen DDR etabliert waren. In unserem Fall werden fünfmal pro Schuljahr Themenblätter auf der Schülerzirkel-Homepage veröffentlicht bzw. per Email/Post an die registrierten Teilnehmer versandt. Jedes Themenblatt enthält eine Einführung in ein mathematisches Thema und passende Aufgaben dazu. Die Teilnehmer haben dann ca. acht Wochen Zeit, die Themen zu studieren, die Aufgaben einzeln oder in Gruppen zu bearbeiten und ihre Lösungen einzusenden. Diese Lösungen werden vom Schülerzirkelteam korrigiert und bewertet; die Korrekturen werden dann mit dem jeweils nächsten neuen Themenblatt an die Teilnehmer zurückgesandt. Am Ende des Schuljahres erhalten die besten Teilnehmer Preise und werden auf der Homepage des Schülerzirkels genannt.

Die **Workshops** finden jährlich statt und bestehen aus Vorträgen, Knobelrunden, Wettbewerben und kleinen mathematischen Experimenten. Die bisherigen Workshops hatten die folgenden Titel:

- 2013: Mathematisches Kaleidoskop
- 2014: Würfelei
- 2015: Zahlensuppe

Wie alle Angebote des Schülerzirkels standen auch die Workshops allen Schülern aus der Region um Regensburg offen – unabhängig davon, ob sie am Korrespondenzzirkel teilgenommen haben oder nicht.

0.3 Wie funktioniert dieses Buch?

Dieses Buch ist in drei Teile gegliedert:

- In Teil I wird ein **Musterthema** des Schülerzirkels vorgestellt und gelöst; außerdem werden allgemeine Hinweise zum Problemlösen in der Mathematik und zum schlüssigen Beweisen gegeben.
- Teil II enthält das Herzstück des Buches: die fünfzehn **Themenblätter** des Schülerzirkels aus den Schuljahren 2012/13–2014/15. Zusätzlich haben wir die Themenblätter für dieses Buch um einige einfache Aufwärmaufgaben erweitert, die den Einstieg in die Aufgaben erleichtern sollen.
- In Teil III finden sich **Lösungsvorschläge** zu den Aufgaben dieser Themenblätter.

Lesern, die noch keine Erfahrung mit dieser Art des Problemlösens und Beweisen haben, sei empfohlen, zunächst Teil I durchzuarbeiten. Nach dem Lesen des Musterthemas (Kapitel I.1) bietet es sich an, die Hinweise zum Problemlösen und Beweisen (Kapitel I.2) zu studieren. Mit diesen Hinweisen gerüstet sollten die Aufgaben des Musterthemas gut zugänglich sein – an dieser Stelle ist natürlich Geduld, die eine oder andere Idee und auch etwas Glück gefragt. Erst wenn man sich an allen Aufgaben ernsthaft versucht hat, sollte man die Lösungsvorschläge in Kapitel I.3 zur Hilfe nehmen. Bei allen Lösungsvorschlägen ist natürlich zu beachten, dass mathematische Probleme oft eine Vielzahl verschiedener Lösungswege zulassen und wir nur eine kleine Auswahl präsentieren können.

Erfahrenere Problemlöser können sich auch direkt den Themenblättern im zweiten Teil widmen. Jedes Kapitel stellt ein mathematisches Thema vor, bietet Beispiele dazu und liefert dann eine Reihe von Aufgaben, an denen man die neu erworbenen Kenntnisse ausprobieren kann. Lösungsvorschläge zu den Aufgaben finden sich im dritten Teil.

Da unter den Themenblättern nur wenige Abhängigkeiten bestehen, können die Themenblätter im Wesentlichen in beliebiger Reihenfolge bearbeitet werden. Es empfiehlt sich aber,

- Thema II.2 zur Zahlentheorie vor Thema II.11 zur RSA-Verschlüsselung,
- Thema II.4 zur Induktion vor den Themen II.13 und II.15 zu Folgen und Reihen, und
- Thema II.3 zur Graphentheorie vor Thema II.12 zum Eulerschen Polyedersatz zu bearbeiten.

Die Themen sind so ausgewählt, dass Schüler ab Klasse 7 die mathematischen Kenntnisse haben sollten, bei jedem Themenblatt einen Teil der Aufgaben zu lösen; manche der Aufgaben erfordern jedoch weiterführende Kenntnisse aus den späteren Schuljahren. Wir haben aber insgesamt versucht darauf zu achten, dass die Themenblätter vor allem mathematische Konzepte und Gebiete behandeln, die normalerweise in der Schulmathematik nicht vertreten sind.

Die Schwierigkeiten der Aufgaben sind durch Sterne markiert – je mehr Sterne, desto schwieriger erscheint uns die Aufgabe. Im Normalfall bedeutet dies aber nicht, dass mehr Schulwissen nötig ist, um die entsprechende Aufgabe zu lösen: Die Schwierigkeit ist im Wesentlichen nicht durch die nötigen Vorkenntnisse bestimmt, sondern durch die Komplexität der zu verwendenden Argumente und Tricks.

Hinweise und Zusatzinformationen für Lehrer finden sich im Epilog (S. 269).

Literatur

- [1] D. Djukić, V. Janković, I. Matić, N. Petrović. *The IMO Compendium: A Collection of Problems Suggested for International Mathematical Olympiads 1959–2009, Problem Books in Mathematics*, zweite Auflage, Springer, 2011.
- [2] A. Engel. *Problem-Solving Strategies, Problem Books in Mathematics*, Springer, 1998.
- [3] S. Vandervelde. *Circle in a Box, MSRI Mathematics Circles Library*, AMS, 2009.

Danksagungen

Wir möchten uns an dieser Stelle ganz herzlich bei allen Unterstützern des Schülerzirkels bedanken. An erster Stelle geht unser Dank an die teilnehmenden Schüler und Lehrer. Ohne die tatkräftige, kreative und professionelle Mithilfe der Mitarbeiter Rosina Bonn, Laura Drossel, Andreas Eberl, Brigitte Eichenhofer, Alexander Engel, Tabea Fischer, Timo Keller, Christian Nerf, Antonella Perucca, Theresa Stoiber, Jan-Hendrik Treude, Alexander Voitovitch und Michael Völkl wäre der Schülerzirkel – und somit auch dieses Buch – nicht denkbar gewesen. Ein ganz besonderer Dank geht an Matthias Moßburger für seine sorgfältigen Anmerkungen zu unserem ursprünglichen Material. Die Fehlerfuchse Dominik Pruy, Patrick Weber und Anna Zellner haben uns auf den letzten Metern bei der Fehlerjagd unterstützt.



Wir wünschen viel Freude beim Entdecken und Knobeln!

Regensburg, den 1. Dezember 2015

Clara Löh
Stefan Krauss
Niki Kilbertus