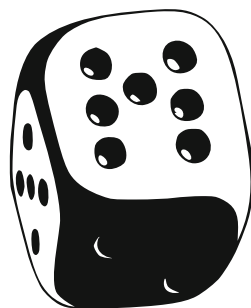


6

Die verflixte 7



Welche Zahlen sind durch 7 teilbar?

Stefan Krauss

6.1	Teilbarkeit durch Sieben	80
6.2	Aufgaben	82
	Literaturverzeichnis	84
	Lösungen zu den Aufgaben	213

In der Natur ist die Zahl 7 nur selten zu finden, aber im Volkstum begegnet sie uns häufig: Die sieben Weisen, die sieben Weltwunder, die sieben Zwerge, die sieben Todsünden, die sieben Tage der Schöpfung und danach die sieben Wochentage.

Experimente der Verhaltensforschung zeigen die Bevorzugung der 7: Die häufigste Antwort auf die Frage nach der Lieblingszahl oder bei der Frage nach einer beliebigen Zahl zwischen 1 und 9 ist die Zahl 7.

In einer Bibliothek erscheint die 7 deutlich häufiger in Buchtiteln als die benachbarten Zahlen 6 und 8. Das Gleiche gilt in Lexika für Begriffe, die mit Zahlen beginnen. Weitere Besonderheiten über die Zahl 7 findest du zum Beispiel in der Linksammlung am Ende des Kapitels.

Teilbarkeit

In der Schule lernt man Teilbarkeitsregeln für 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11 und 12. Welche Zahlen sind aber ohne Rest durch 7 teilbar? Um uns dieser Frage anzunähern, betrachten wir in der folgenden Knobelaufgabe zwei interessante Tatsachen zur Teilbarkeit durch 7.

Knobelaufgabe 6.1.

1. Wenn man zwischen eine zweiziffrige Zahl und ihre Wiederholung eine 0 einfügt, so ist die entstehende Zahl durch 7 teilbar. Prüfe das zum Beispiel für 23023. Warum ist das immer so?
2. An die Stelle der eingefügten 0 kann auch eine 7 treten und die Zahl bleibt durch 7 teilbar. Warum?

6.1 Teilbarkeit durch Sieben

Im Gegensatz zu den relativ einfachen Teilbarkeitsregeln für die anderen Zahlen von 1 bis 12, die in der Schule behandelt werden, gibt es für 7 keine einfache Teilbarkeitsregel, sondern leider nur etwas komplexere Regeln. Mehr dazu findest du auch im Wikipedia Eintrag zur *Teilbarkeit durch 7*, siehe Linksammlung am Ende des Kapitels.

Eine Teilbarkeitsregel für die 7 erhält man zum Beispiel folgendermaßen: Man spaltet die zu prüfende Zahl n in ihre letzte Ziffer b und den Rest a auf ($n = 10 \cdot a + b$). Zum Beispiel haben wir für 3815 die Zahlen $a = 381$ und $b = 5$. Dann gilt:

Satz 6.2. Eine Zahl $n = 10 \cdot a + b$ ist genau dann durch 7 teilbar, wenn $a - 2 \cdot b$ durch 7 teilbar ist.

Beweis. Die Zahl n ist genau dann durch 7 teilbar, wenn ihr Doppeltes $2 \cdot n$ durch 7 teilbar ist. Wegen $2 \cdot n = 20 \cdot a + 2 \cdot b = 21 \cdot a - (a - 2 \cdot b)$ muss man lediglich die Teilbarkeit von $a - 2 \cdot b$ durch 7 prüfen. $\square$

Beispiel 6.3. Für 3815 muss man also überprüfen, ob $381 - 2 \cdot 5 = 371$ durch 7 teilbar ist. Dazu kann man 371 wieder in 37 und 1 zerlegen. Da $37 - 2 \cdot 1 = 35 = 5 \cdot 7$ durch 7 teilbar ist, sind auch 371 und 3815 durch 7 teilbar.

Diese Regel für die Teilbarkeit durch 7 führt zu folgendem einfachen Algorithmus, um die restlose Teilbarkeit einer natürlichen Zahl durch 7 zu testen:

1. Man entferne die letzte Ziffer und

2. verdopple diese letzte Ziffer und
3. subtrahiere sie von der Zahl, die aus den übrig gebliebenen Ziffern besteht.
4. Ist die Differenz negativ, so lässt man das Minuszeichen weg.
5. Hat das Ergebnis mehr als eine Ziffer, so wiederholt man die Schritte 1 bis 4.
6. Ergibt sich schließlich 7 oder 0, dann ist die Zahl durch 7 teilbar – und sonst nicht.

In Beispiel 6.3 könnte man also auch die 35 noch einmal zerlegen in $3 - 2 \cdot 5 = -7$. Ein weiteres Beispiel zeigt, dass 1547 restlos durch 7 teilbar ist:

$$154 - 2 \cdot 7 = 140, \quad 14 - 2 \cdot 0 = 14, \quad 1 - 2 \cdot 4 = -7.$$

In obigem Satz wurden unter anderem folgende allgemeingültige Beziehungen verwendet:

B 1 Das Produkt zweier Zahlen m und n ist durch k teilbar, wenn m oder n durch k teilbar sind.

Beispiel: $60 = 5 \cdot 12$ ist durch 4 teilbar, da 12 durch 4 teilbar ist.

B 2 Die Summe zweier Zahlen $m + n$ (bzw. die Differenz $m - n$) ist durch k teilbar, wenn m und n durch k teilbar sind.

Beispiel: $21 = 15 + 6$ ist durch 3 teilbar, da 15 und 6 beide durch 3 teilbar sind.

Mithilfe dieser zwei Beziehungen lassen sich oftmals allgemeine Aussagen zur Teilbarkeit durch 7 beweisen – auch ohne Zuhilfenahme des obigen Algorithmus, wie folgendes Beispiel zeigt.

Beispiel 6.4. An eine Zahl des Siebenereinsmaleins (7, 14, 21, ..., 70) werde die Einerziffer zweimal angehängt und dahinter noch die Zehnerziffer gesetzt. Die neue Zahl ist dann ein Vielfaches von 7 (also durch 7 teilbar). So ist zum Beispiel mit 28 auch 28882, mit 56 auch 56665 ein Vielfaches von 7.

Beweis. Sei a die Zehnerziffer und b die Einerziffer. Da $z = 10a + b = 7n$ (also ein Vielfaches von 7) ist, ergibt sich die Beziehung $b = 7n - 10a$. Aus z wird nun nach der gegebenen Anweisung

$$z_1 = (10a + b) \cdot 1000 + 100b + 10b + a = (10a + b) \cdot 1000 + 110b + a.$$

Der erste der Summanden ist (wegen **B 1**) durch 7 teilbar, für den Rest findet man unter Benutzung der obigen Beziehung für b :

$$\begin{aligned} 110b + a &= 110(7n - 10a) + a \\ &= 770n - 1100a + a \\ &= 770n - 1099a. \end{aligned}$$

Da sowohl 770 als auch 1099 durch 7 teilbar sind, gilt (nach **B 1** und **B 2**), dass auch z_1 durch 7 teilbar ist. 

6.2 Aufgaben

Beim Erstellen der folgenden Aufgaben orientierten wir uns am Buch von Lietzmann [1], in dem sich auch noch viele weitere ähnliche Aufgaben finden.

Aufwärm Aufgabe 6.A. Prüfe die beiden Zahlen 8151 und 11924913 auf Teilbarkeit durch 7.

Aufwärm Aufgabe 6.B. Zeige allgemein, dass eine dreistellige Zahl durch 7 teilbar ist, wenn die Hunderterziffer und die Einerziffer gleich sind und die Summe der Hunderterziffer und der Zehnerziffer durch 7 teilbar ist. Zum Beispiel erfüllen die Zahlen 161 und 595 diese Bedingung.

Aufwärm Aufgabe 6.C. Zeige allgemein, dass eine dreistellige Zahl durch 7 teilbar ist, wenn das Fünffache der Hunderterziffer gleich der zweistelligen Zahl aus Zehnerziffer und Einerziffer ist. Zum Beispiel erfüllen die Zahlen 105 oder 420 diese Bedingung.

Aufgabe 6.1 (Doppelzahlen*). Löse beide Teile der Knobelaufgabe 6.1 vom Anfang. Warum ist die Zahl 23023 (sowie alle Zahlen dieser Form) auch durch 11 und durch 13 teilbar?

Aufgabe 6.2 (Dreifachzahlen*). Wiederholt man eine zweiziffrige Zahl dreimal, so ist auch diese Zahl stets durch 7 teilbar, wie zum Beispiel 232323. Beweise, dass dies immer gilt!

Aufgabe 6.3 (Umkehrung von **B 1** und **B 2***). Lassen sich die beiden Beziehungen **B 1** und **B 2** aus Abschnitt 6.1 umkehren? Im Fall des Produkts lautet die Frage also: Wenn ein Produkt $m \cdot n$ durch k teilbar ist, ist dann auch immer einer der Faktoren m oder n durch k teilbar?

1. Untersuche diese Umkehrung und begründe deine Antwort.
2. Formuliere die entsprechende Umkehraussage für eine Summe und begründe auch hier deine Antwort.

Aufgabe 6.4 (Weihnachtstage*). Der 24.12.2013 war ein Dienstag. Begründe, warum 2014 Weihnachten ein Mittwoch war.

Aufgabe 6.5 (Drei Teilbarkeitsregeln**). Es sei eine zweistellige Zahl mit der Quersumme 7 gegeben. Man erhält aus ihr Vielfache von 7, wenn man

1. die Zehnerziffer noch einmal hinter die Einerziffer setzt. So wird beispielsweise aus 52 die durch 7 teilbare Zahl 525.
2. die Einerziffer am Ende zweimal wiederholt. So wird beispielsweise aus 52 die durch 7 teilbare Zahl 5222.
3. die Zehnerziffer am Anfang dreimal wiederholt. So wird beispielsweise aus 52 die durch 7 teilbare Zahl 55552.

Beweise die allgemeine Gültigkeit dieser drei Regeln!

Aufgabe 6.6 (Noch mehr Teilbarkeitsregeln**). In eine zweiziffrige Zahl des kleinen Siebenereinsmaleins fügt man beliebig oft die Summe der beiden Ziffern ein und erhält immer eine durch 7 teilbare Zahl. So ist beispielsweise mit 21 auch 231, 2331, 23331, usw. durch 7 teilbar. Tritt eine zweiziffrige Zahl als Summe der beiden Ziffern auf, so ist die Einerziffer einzufügen und die Zehnerziffer als Übertrag zu berücksichtigen. Für 56 finden wir also beispielsweise 616, 6216, 62216 usw. Beweise dies allgemein!

Aufgabe 6.7 (Folgenteilbarkeit***). Beweise die folgenden Aussagen:

1. Bei der Folge $1, 6, 6^2, 6^3, \dots$ ist jeweils die Summe zweier *Nachbarzahlen* durch 7 teilbar.
2. Bei der Folge $1, 8, 8^2, 8^3, \dots$ ist die Differenz von zwei *beliebigen* Zahlen immer durch 7 teilbar.

Bemerkung: Folgen dieser Art nennt man auch **geometrische Folgen**. Mehr zu Folgen findest du in Thema II.13 und Thema II.15.

Aufgabe 6.8 (Konstruktionen mit Sequenzzahlen***). Bilden die Ziffern einer Zahl eine endliche arithmetische Folge, wie 1234 oder 2468 oder auch, wenn die Differenz negativ ist, 852 oder 9630, dann nennen wir diese Zahl eine **Sequenzzahl**. (Die Definition einer arithmetischen Folge findest du in Thema II.13.)

1. Hängt man an eine dreiziffrige Sequenzzahl die letzte Ziffer noch dreimal an, dann ist die neue Zahl durch 7 teilbar. So ist zum Beispiel 123333 durch 7 teilbar. Beweise das allgemein!
2. Hängt man an eine fünfziffrige Sequenzzahl die zweite Ziffer an, dann ist die neue Zahl durch 7 teilbar. Beweise das allgemein!
3. Versuche, wenn du hinter den Kniff gekommen bist, auch für vier- und für sechsstelligen Sequenzzahlen entsprechende Regeln zu formulieren, die zu einer Teilbarkeit durch 7 führen.

Weiterführende Links

<http://de.wikipedia.org/wiki/Sieben>

http://de.wikipedia.org/wiki/Teilbarkeit#Teilbarkeit_durch_7

http://wiki.zum.de/PH_Heidelberg/Zahlentheorie

Literatur

- [1] W. Lietzmann. *Sonderlinge im Reich der Zahlen*, Ferd. Dümmlers Verlag, 1954.