# 6 Lösungsvorschläge zu Thema 6

Stefan Krauss

**Lösung zu Aufgabe 6.1.**

1. Die neue Zahl ist durch Multiplikation der zweiziffrigen Zahl mit 1001 entstanden. In unserem Beispiel gilt $23023 = 23 \cdot 1001$. Die Zahl 1001 ist aber durch 7 teilbar ($1001 = 7 \cdot 143$), somit ist (nach **B 1**) auch die neue Zahl durch 7 teilbar. Zusätzlich gilt wegen $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$, dass alle Zahlen dieser Form nicht nur durch 7, sondern auch durch 11 und durch 13 teilbar sind.

2. In diesem Fall wird zur neuen Zahl (aus Teilaufgabe 1) noch 700 dazu gezählt. Somit werden zwei Zahlen addiert, die beide durch 7 teilbar sind, also ist (nach **B 2**) auch die Summe durch 7 teilbar. ◎

**Lösung zu Aufgabe 6.2.** In diesem Fall ist die neue Zahl durch Multiplikation der zweiziffrigen Zahl mit 10101 entstanden. In unserem Beispiel gilt $232323 = 23 \cdot 10101$. Die Zahl 10101 ist durch 7 teilbar ($10101 = 7 \cdot 1443$), somit ist auch die neue Zahl durch 7 teilbar. ◎

**Lösung zu Aufgabe 6.3.**

1. Die Umkehrung gilt im Fall des Produkts nicht. Ein Gegenbeispiel ist das Produkt $5 \cdot 4 = 20$, denn: Die Zahl 20 ist durch 10 teilbar, aber weder 5 noch 4 sind durch 10 teilbar.

2. Die Umkehraussage würde lauten: Wenn die Summe zweier Zahlen $m$ und $n$ durch $k$ teilbar ist, dann sind auch immer beide Zahlen $m$ und $n$ durch $k$ teilbar. Auch diese Aussage ist falsch. Ein Gegenbeispiel ist die Summe $11 + 4 = 15$, denn: Die Zahl 15 ist durch 5 teilbar, aber weder 11 noch 4 sind durch 5 teilbar. ◎

**Lösung zu Aufgabe 6.4.** Das Jahr 2014 war kein Schaltjahr, hatte also 365 Tage. Die Zahl 364 ist durch 7 teilbar und somit ist 365 gleich $1 \pmod 7$, vgl. Thema II.2 und Thema II.11. Somit fiel Weihnachten 2014 auf den Wochentag nach Dienstag, also auf einen Mittwoch. ◎

**Lösung zu Aufgabe 6.5.** Heißt die Ausgangszahl $x = 10a + b$, so ist hier immer $a + b = 7$ vorausgesetzt. Man kann die drei Regeln nun allgemein beweisen, indem man entweder $a = 7 - b$ oder $b = 7 - a$ in die aus $x$ neu gebildete Zahl $y$ einsetzt.


C. Löh et al. (Hrsg.), *Quod erat knobelandum,* DOI 10.1007/978-3-662-48956-7_24

1. Es gilt

$$\begin{aligned} y &= 10x + a = 10(10a + b) + a = 100a + 10b + a = 101a + 10b \\ &= 101(7 - b) + 10b = 707 - 101b + 10b = 707 - 91b. \end{aligned}$$

   Sowohl 707 ($707 = 7 \cdot 101$) als auch 91 ($91 = 7 \cdot 13$) sind durch 7 teilbar.

2. Man sieht

$$\begin{aligned} y &= 100x + 10b + b = 100(10a + b) + 11b = 1000a + 100b + 11b \\ &= 1000a + 111b = 1000(7 - b) + 111b = 7000 - 1000b + 111b \\ &= 7000 - 889b. \end{aligned}$$

   Sowohl 7000 ($7000 = 7 \cdot 1000$) als auch 889 ($889 = 7 \cdot 127$) sind durch 7 teilbar.

3. Es ist

$$y = 11100a + x = 11100a + (10a + b) = 11110a + 7 - a = 11109a + 7.$$

   Sowohl 11109 ($11109 = 7 \cdot 1587$) als auch 7 sind durch 7 teilbar.

**Lösung zu Aufgabe 6.6.** Sei $z = 10a + b$ eine durch 7 teilbare Zahl. Man bildet

$$\begin{aligned} z_1 &= 100a + 10(a + b) + b = 100a + 10a + 10b + b = 110a + 11b \\ &= 11(10a + b). \end{aligned}$$

Somit ist mit $z$ auch $z_1$ durch 7 teilbar. Fügt man die Summe $a + b$ ein zweites Mal ein, erhält man

$$\begin{aligned} z_2 &= 1000a + 100(a + b) + 10(a + b) + b = 1000a + 100a + 10a + 100b + 10b + b \\ &= 1110a + 111b = 111(10a + b). \end{aligned}$$

Also ist auch $z_2$ durch 7 teilbar.

Fügt man die Summe $a + b$ nun $n$ mal ein, erhält man mithilfe des Summenzeichens $\Sigma$ (s. Thema II.15) den folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned} z_n &= 10^{n+1}a + \sum_{i=1}^{n} 10^i (a + b) + b \\ &= 10^{n+1}a + \sum_{i=1}^{n} 10^i a + \sum_{i=1}^{n} 10^i b + b \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} 10^i a + \sum_{i=0}^{n} 10^i b \\ &= \sum_{i=0}^{n} 10^{i+1} a + \sum_{i=0}^{n} 10^i b \\ &= (10a + b) \sum_{i=0}^{n} 10^i. \end{aligned}$$

Also ist auch $z_n$ durch 7 teilbar.

**Lösung zu Aufgabe 6.7.**

1. Durch Probieren mit kleinen $n$ (z. B. $n = 1, 2, 3$) gelangt man zu folgender Behauptung: Für alle natürlichen Zahlen $n$ gilt

$$6^{n+1} + 6^n = 6^n \cdot 7.$$

Dies sieht man mit folgender Rechnung:

$$6^{n+1} + 6^n = 6^n(6^1 + 6^0) = 6^n(6 + 1) = 6^n \cdot 7.$$

2. Wir müssen zeigen, dass für alle natürlichen Zahlen $n$ und $k$ die Zahl $8^{n+k} - 8^n$ durch 7 teilbar ist. Seien dazu $n$ und $k$ natürliche Zahlen. Dann ist

$$8^{n+k} - 8^n = 8^n(8^k - 1).$$

Da $8 \equiv 1 \pmod 7$ (das bedeutet, dass bei der Division von 8 durch 7 der Rest 1 bleibt, zum Modulorechnen siehe Thema II.2), ist $8^k \equiv 1^k \pmod 7$. Somit ist der Faktor $(8^k - 1)$ durch 7 teilbar.

**Lösung zu Aufgabe 6.8.**

1. Im Folgenden ist $a$ immer die erste Ziffer der Sequenzzahl und $n$ bezeichnet die Schrittweite der Sequenz ($n$ kann auch negativ sein). Die aus einer dreiziffrigen Sequenzzahl nach der Angabe neu gebildete Zahl hat die Form

$$\begin{aligned} &100000a + 10000(a + n) + 1000(a + 2n) + 111(a + 2n) \\ =\ &111111a + 10000n + 2000n + 222n \\ =\ &111111a + 12222n. \end{aligned}$$

Sowohl $111111 = 7 \cdot 15873$ als auch $12222 = 7 \cdot 1746$ sind durch 7 teilbar.

2. Die aus einer fünfziffrigen Sequenzzahl nach der Angabe neu gebildete Zahl hat die Form

$$\begin{aligned} &100000a + 10000(a + n) + 1000(a + 2n) \\ &+ 100(a + 3n) + 10(a + 4n) + a + n \\ =\ &111111a + 10000n + 1000 \cdot 2n + 100 \cdot 3n + 10 \cdot 4n + n \\ =\ &111111a + 12341n. \end{aligned}$$

Sowohl $111111 = 7 \cdot 15873$ als auch $12341 = 7 \cdot 1763$ sind durch 7 teilbar.

3. Wir hängen an eine vierziffrige Sequenzzahl zum Beispiel die zweite und die vierte Zahl an

$$\begin{aligned} &100000a + 10000(a + n) + 1000(a + 2n) \\ &+ 100(a + 3n) + 10(a + n) + a + 3n \\ =\ &111111a + 10000n + 1000 \cdot 2n + 100 \cdot 3n + 10n + 3n \\ =\ &111111a + 12313n. \end{aligned}$$

Sowohl $111111 = 7 \cdot 15873$ als auch $12313 = 7 \cdot 1759$ sind durch 7 teilbar.

Gehen wir für eine sechsziffrige Sequenzzahl analog wie bisher vor, so erhalten wir

$$z = 111111a + 12345n.$$

Aber 12345 ist nicht durch 7 teilbar. Die Zahl 111111111111 ist durch 7 teilbar, wir probieren also

$$10^6 \cdot z + 111111a = 111111111111a + 12345000000n.$$

Nun ist 12345000000 wieder nicht durch 7 teilbar, aber 12345000003 wäre durch 7 teilbar. Also ist $10^6 \cdot z + 111111a + 3n$ durch 7 teilbar. Dies lässt sich aber schreiben als $10^6 \cdot z + 111110a + (a + 3n)$. Der zweite Summand $(111110a)$ bedeutet hierbei, dass an $z$ fünfmal die erste Ziffer angehängt wird. Der letzte Summand $(a+3n)$ bedeutet, dass zum Schluss noch einmal die vierte Ziffer angehängt wird.

Beispiele sind 123456111114 oder 876543888885. An eine sechsziffrige Sequenzzahl kann man also z. B. fünfmal die erste Ziffer und einmal die vierte Ziffer anhängen.