Der $\mathcal{N}$-Isomorphiesatz in der Darstellungstheorie endlicher Gruppen

DISSERTATION ZUR ERLANGUNG DES DOKTORGRADES DER NATURWISSENSCHAFTEN (DR. RER. NAT.) DER FAKULTÄT MATHEMATIK DER UNIVERSITÄT REGENSBURG

vorgelegt von

Nazir Rostayar aus
Kabul (Afghanistan)

im Jahr 2019

Promotionsgesuch eingereicht am: 03.07.2019
Die Arbeit wurde angeleitet von: Prof. Dr. Niko Naumann

Summary

Let G be a finite group, R a G-ring spectrum as e.g. in [Greenlees] § 5. and X a G-set. Then there exists a minimal Family $\mathcal{F}$ of subgroups of G, such that the canoncal restriction map

$$\mathrm{Res} : R^*_G(X) \longrightarrow \lim_{G/H \in \mathcal{O}_{\mathcal{F}}(G)} R^*_H(X)$$

for $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}(G)$ a subcategory of the orbit category of G is an $\mathcal{N}$-isomorphism, cf. [MNN] Theorem C respectively 3.21. Namely there exist $m, n \in \mathbb{Z}_{>0}$, such that whenever $x \in \ker(\mathrm{Res})$ and $y \in \lim_{G/H \in \mathcal{O}_{\mathcal{F}}(G)} R^*_H(X)$, then $x^m = 0$ and $y^n \in \mathrm{im}(\mathrm{Res})$ holds. The case that R assigns to every Object $G/H \in \mathrm{Ob}(\mathcal{O}_{\mathcal{F}}(G))$ the representation ring $R(H)$ is of special interest. In this case the minimal Family is equal to $\mathcal{C}$, the Family of all cyclic subgroups of G. One has

$$|G| \cdot (\lim_{\mathcal{O}_{\mathcal{F}}(G)^{op}} R(H)/R(G)) = 0,$$

which is a consequence of Artin's Theorem. Moreover it is possible to prove that Res is an $\mathcal{N}$-isomorphism purely by means of the arithmetic geometry, which happens in the first paragraph of this work. For the product $C_p \times C_p =: P$ of two cyclic groups of order equal to a prime p it will be shown that, for all $y \in \lim_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(P)^{op}} R(C)$, $y^p \in R(P)$ and

$$p \cdot (\lim_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(P)^{op}} R(C)/R(P)) = 0$$

holds. For the elliptic cohomology the minimal Family of the Lubin-Tate Theory for G equal to a p-group will be determined. For the case of the Burnside rings $G/H \mapsto A(H)$, the result [MNN] 3.2 Proposition 3.11 (3) page 21 about the Amitsur-Dress-Tate cohomology $\widehat{H}^*_{\mathcal{F}}(\pi_*^{(-)} S)$ will be proved. Finally following the example of Serre from [Serre1] 11.4, the prime spectrum of the Ring $R(G)$ for some finite groups, namely $\mathfrak{S}_3$, $\mathfrak{A}_4$ and D_4 will be determined by using the results of the previous sections.

Zusammenfassung

Sei G eine endliche Gruppe, R ein G-Ringspektrum wie z.B. in [Greenlees] § 5. und X eine G-Menge. Es gibt dann eine minimale Familie $\mathcal{F}$ der Untergruppen von G so, dass die kanonische Restriktionsabbildung

$$\mathrm{Res} : R_G^*(X) \longrightarrow \lim_{G/H \in \mathcal{O}_{\mathcal{F}}(G)} R_H^*(X)$$

mit $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}(G)$ eine Unterkategorie der Orbitkategorie von G ein $\mathcal{N}$-Isomorphismus ist, siehe [MNN] Theorem C bzw. 3.21. Es gibt nämlich $m, n \in \mathbb{Z}_{>0}$ so, dass wenn x in $\ker(\mathrm{Res})$ und y in $\lim_{G/H \in \mathcal{O}_{\mathcal{F}}(G)} R_H^*(X)$ liegt, dann gilt $x^m = 0$ und $y^n \in \mathrm{im}(\mathrm{Res})$. Der Fall, dass R jedem Objekt $G/H \in \mathrm{Ob}(\mathcal{O}_{\mathcal{F}}(G))$ den Darstellungsring $R(H)$ zuordnet ist besonders interessant. In diesem Fall ist die minimale Familie gleich $\mathcal{C}$, die Familie aller zyklischen Untergruppen von G. Es gilt nämlich

$$|G| \cdot (\lim_{\mathcal{O}_{\mathcal{F}}(G)^{op}} R(H)/R(G)) = 0,$$

die eine Folge des Artinschen Theorems ist. Daneben ist es möglich, die $\mathcal{N}$-Isomorphie Eigenschaft der Abbildung Res rein mit Hilfe der arithmetischen Geometrie zu beweisen, das im ersten Paragraphen dieser Arbeit geschieht. Für das Produkt $C_p \times C_p =: P$ zweier zyklischen Gruppen von Ordnung gleich einer Primzahl p wird gezeigt, dass für alle $y \in \lim_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(P)^{op}} R(C)$, $y^p \in R(P)$ und

$$p \cdot (\lim_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(P)^{op}} R(C)/R(P)) = 0$$

gilt. Zur elliptischen Kohomologie wird die minimale Familie der Lubin-Tate Theorie einer p-Gruppe für p eine Primzahl bestimmt. Für den Fall des Burnside Ringes $G/H \mapsto A(H)$ wird das Ergebnis [MNN] 3.2 Proposition 3.11 (3) Seite 21 über Amitsur-Dress-Tate Kohomologie $\widehat{H}_{\mathcal{F}}^*(\pi_*^{(-)} S)$ bewiesen. Schliesslich wird wie in dem Beispiel von Serre aus [Serre1] 11.4, mit Hilfe der hervorgehenden Ergebnissen das Primspektrum des Ringes $R(G)$ für einige endliche Gruppen, nämlich $\mathfrak{S}_3$, $\mathfrak{A}_4$ und D_4 bestimmt.

Inhaltsverzeichnis

§ 1. Der $\mathcal{N}$-Isomorphiesatz des Darstellungsringes

Sei G eine endliche Gruppe und h die Zahl der unterschiedlichen Konjugationsklassen der Elementen von G. Es gibt dann genau h irreduzible Charaktere $\chi_1, \ldots, \chi_h$ von G, d.h. Abbildungen $\chi_i : G \to \mathbb{Z}[\zeta_{|G|}]$, $0 \leq i \leq h$ so, dass für alle $g, s \in G$, $\chi_i(sgs^{-1}) = \chi_i(g) \in \mathbb{Z}[\zeta_{|G|}]$ gilt und jeder weitere Charakter auf G eine Linearkombination deren ist. Eine solche Funktion heisst auch eine Klassenfunktion auf G mit Werten in $\mathbb{Z}[\zeta_{|G|}]$. Der Darstellungsring $R(G)$ ist die frei abelsche Gruppe erzeugt durch den irreduziblen Charakteren von G, wobei für die Multiplikation $\chi_i \cdot \chi_j$ zweier Charaktere χ_i und χ_j, $\chi_i \cdot \chi_j(g) := \chi_i(g)\chi_j(g)$ gilt für alle $g \in G$. Die Orbitkategorie $\mathcal{O}(G)$ von G ist die volle Unterkategorie von G-Set mit Objekten die homogenen G-Mengen, d.h. Mengen der Form G/H für H eine Untergruppe und da zwischen bestehenden G-Morphismen. Dabei heisst eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen G-Mengen X und Y ein G-Morphismus, wenn für alle $g \in G$, $x \in X$, $f(gx) = gf(x)$ gilt. Meistens betrachtet man aus praktischen Gründen eine Unterkategorie $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}(G)$ der Orbitkategorie von G, wobei hier die Untergruppen H mit $G/H \in \mathrm{Ob}(\mathcal{O}(G))$ zu einer kleineren Familie $\mathcal{F}$ der Untergruppen von G eingeschränkt werden. Zur Erinnerung, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(G)$ heisst eine Familie, wenn mit H auch alle zu H konjugierte Untergruppen von G und Untergruppen von H zu $\mathcal{F}$ gehören. Zu einen kontravarianten Funktor $\mathcal{G} : J \to$ Ringe, J eine Kategorie wird der Limes $\lim \mathcal{G}$ definiert als

$$\lim \mathcal{G} := \{(x_j) \in \prod_{j \in \mathrm{Ob}(J)} \mathcal{G}(j) \,|\, \forall i, j \in \mathrm{Ob}(J) \text{ und } \varphi \in \mathrm{Mor}_J(i,j) : \mathcal{G}(\varphi)(x_j) = x_i\}$$

und in den Fall $J = \mathcal{O}_{\mathcal{F}}(G)$, wobei $\mathcal{G}$ einem Objekt $G/H \in \mathcal{O}_{\mathcal{F}}(G)$ den Darstellungsring $R(H)$ zuordnet auch als $\lim_{\mathcal{O}_{\mathcal{F}}(G)^{op}} R(H)$ bezeichnet. Sei $\mathcal{C}$ die Familie der zyklischen Untergruppen von G. Durch der Restriktion irreduzibler Charaktere von G auf ihren zyklischen Untergruppen erhält man die Inklusion

$$\begin{aligned} R(G) &\overset{\mathrm{Res}}{\hookrightarrow} \lim_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(G)^{op}} R(C) \hookrightarrow \bigoplus_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(G)} R(C), \\ y &\longmapsto (\mathrm{Res}_C^G(y)) \end{aligned} \tag{1.1}$$

kommutativer Ringe, die aus Charaktertheorie ersichtlich ist. Weiter gilt durch das Theorem von Artin

$$|G| \cdot (\bigoplus_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(G)} R(C)/R(G)) = 0, \tag{1.2}$$

insbesondere gilt coker(Res) ist endlich. Ob nun der Homomorphismus Res der Ringe auch surjektiv ist, lässt sich nicht so einfach antworten. Wegen (1.2) weiss man, dass es tensoriert mit $- \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ ein Isomorphismus ist. Im Allgemeinen aber, siehe [MNN] Theorem 3.21 Seite 23, ist es eine Inklusion, die nur $\mathcal{N}$-surjektiv ist. Ein Homomorphismus $f : A \to B$ kommutativer Ringe A, B heisst $\mathcal{N}$-surjektiv, falls es eine $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ gibt so, dass für alle $y \in B$, $y^n \in \mathrm{im}(f)$ gilt. f heisst $\mathcal{N}$-Isomorphismus, falls es $\mathcal{N}$-surjektiv ist und es eine

$m \in \mathbb{Z}_{>0}$ gibt so, dass für alle $x \in \ker(f)$, $x^m = 0$ gilt. Wenn also Res $\mathcal{N}$-surjektiv ist, dann folgt aus der Inklusion (1.1), dass es ein $\mathcal{N}$-Isomorphismus ist. Diese Eigenschaft der Abbildung Res, d.h., dass es $\mathcal{N}$-surjektiv ist, wird als Hauptergebnis dieses Paragraphen rein mit Hilfe der arithmetischen Geometrie bewiesen, siehe Satz 1.38. Die Idee dieses Beweises stammt von Herrn Akhil Mathew, der erste Autor von [MNN]. Als Vorbereitung und Beispiel wird zuerst der Fall einer endlichen p-Gruppe für eine Primzahl p behandelt. In diesem Fall ergibt sich, dass Res tensoriert mit $- \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p$ ein $\mathcal{F}_p$-Isomorphismus ist, siehe Satz 1.15. Dabei heisst ein Homomorphismus $f : A \to B$ kommutativer Ringe A, B $\mathcal{F}_p$-Isomorphismus, wenn es $\mathcal{F}_p$-surjektiv ist und der Kern nilpotent, d.h. wenn es $m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $m > 0$ gibt so, dass für alle $x \in \ker(f)$ und $y \in B$, $x^m = 0$ und $y^{p^n} \in \mathrm{im}(f)$ gilt. Dann wird dieses Ergebnis in den Satz 1.28 auf endlichen Gruppen verallgemeinert, das dem Beweis des Satzes 1.38 als Hilfsmittel dienen wird.

1 Der $\mathcal{F}_p$-Isomorphismus $\mathrm{Res} \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{Z}_p}$, der Fall einer endlichen p-Gruppe

Sei p eine Primzahl und G eine endliche p-Gruppe. Zuerst wird gezeigt, dass jedes Element $(\phi_C) \in \lim_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(G)^{op}} R(C) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p[\zeta_{|G|}]$ eine Klassenfunktion ϕ auf G mit Werten in $\mathbb{Z}_p[\zeta_{|G|}]$ definiert. Wie üblich bezeichnet hier $\zeta_{|G|}$ eine primitive $|G|$-te Einheitswurzel.

Bemerkung 1.3. Sei S ein kommutativer Ring mit Eins und $R \subseteq S$ ein Unterring. Betrachte das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\overbrace{(\lim\limits_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(G)^{op}} R(C)) \otimes_R S}^{A:=} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, hook, "\iota_1"'] & \overbrace{\lim\limits_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(G)^{op}} (R(C) \otimes_R S)}^{B:=} \arrow[d, hook, "\iota_2"] \\
(\bigoplus\limits_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(G)^{op}} R(C)) \otimes_R S \arrow[r, "\psi"] & \bigoplus\limits_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(G)^{op}} (R(C) \otimes_R S) \\
(\phi_C) \otimes a \arrow[r, mapsto] & (\phi_C \otimes a)
\end{tikzcd}$$

mit offensichtlichen Inklusionen ι_1 und ι_2, wobei dessen untere Zeile laut [Lang] Proposition 2.1 Seite 608 ein Isomorphismus ist. Daher gilt $\varphi = \psi|_A$ ist die Restriktion von ψ auf A, die ebenfalls injektiv ist. Es ist auch leicht zu sehen, dass $\psi^{-1}(B) \subseteq A$ gilt. Deshalb ist φ auch surjektiv und da es R-linear ist, gilt φ ist ein Isomorphismus. Also es ist weiterhin irrelevant, wie man den Limes auffasst.

Lemma 1.4. *Sei G eine endliche Gruppe und $(\phi_C) \in \bigoplus_{C \in \mathcal{C}} R(C) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p[\zeta_{|G|}]$, $\mathcal{C}$ die Familie aller zyklischen Untergruppen von G so, dass*
(a) *für alle $C, C' \in \mathcal{C}$, falls $C' \subseteq C$ gilt, so gilt $\mathrm{Res}^C_{C'}(\phi_C) = \phi_{C'}$,*
(b) *für ${}^sC := sCs^{-1}$ und alle $g \in G$ gilt $\phi_{{}^sC}(sgs^{-1}) = \phi_C(g)$.*
Dann existiert eine Klassenfunktion $\phi \in \mathrm{Cl}(G, \mathbb{Z}_p[\zeta_{|G|}])$ so, dass $\mathrm{Res}(\phi) = (\phi_C)$ gilt.

Beweis. Wähle $C \in \mathcal{C}$ für $g \in G$ so, dass $g \in C$ gilt und setze $\phi(g) := \phi_C(g)$. Dann ist die Funktion ϕ wohldefiniert, da aus (a) für $g \in C \cap C'$

$$\phi_C(g) = \phi_{C \cap C'}(g) = \phi_{C'}(g)$$

folgt. ϕ ist eine Klassenfunktion, da aus (b) für alle $g \in C$ und $s \in G$

$$\phi(sgs^{-1}) = \phi_{^sC}(sgs^{-1}) = \phi_C(g) = \phi(g)$$

folgt. Für alle $C \in \mathcal{C}$, $\mathrm{Res}_C^G(\phi) = \phi_C$ folgt aus der Definition von ϕ. $\square$

Bemerkung 1.5. Sei A ein Dedekindring und K sein Quotientenkörper. Sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum über K. Ein Gitter von V bezüglich A ist ein A-Untermodul $X \subseteq V$, der endlich erzeugt ist und spannt V ganz auf. Falls A ein Hauptidealring ist, bedeutet diese, dass X ein freier A-Modul vom Rang $\dim_K(V)$ ist, siehe [Serre2] § 1 Seite 47. Laut [Serre1] Theorem 6 Seite 19 bilden die irreduziblen Charaktere $\chi_1, \ldots, \chi_h$ von G mit h ihre Zahl eine Basis von $\mathrm{Cl}(G, \mathbb{Q}_p(\zeta_{|G|}))$ über $\mathbb{Q}_p(\zeta_{|G|})$. Als Vektorraum über $\mathbb{Q}_p$ hat er also die Dimension

$$\dim_{\mathbb{Q}_p}(\mathrm{Cl}(G, \mathbb{Q}_p(\zeta_{|G|}))) = h \cdot \dim_{\mathbb{Q}_p}(\mathbb{Q}_p(\zeta_{|G|})).$$

Durch Einschränkung der Koeffizienten sieht man, dass $\mathrm{Cl}(G, \mathbb{Z}_p[\zeta_{|G|}]) \subseteq \mathrm{Cl}(G, \mathbb{Q}_p(\zeta_{|G|}))$ ein $\mathbb{Z}_p$-Untermodul ist. Darüber hinaus gilt

$$\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}_p}(\mathrm{Cl}(G, \mathbb{Z}_p[\zeta_{|G|}])) = h \cdot \dim_{\mathbb{Q}_p}(\mathbb{Q}_p(\zeta_{|G|}))$$

und $R(G) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p[\zeta_{|G|}] \subseteq \mathrm{Cl}(G, \mathbb{Z}_p[\zeta_{|G|}])$, da jedes $f \in R(G) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p[\zeta_{|G|}]$ eine Klassenfunktion auf G mit Werten in $\mathbb{Z}_p[\zeta_{|G|}]$ ist. Ebenso gilt

$$\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}_p}(R(G) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p[\zeta_{|G|}]) = h \cdot \dim_{\mathbb{Q}_p}(\mathbb{Q}_p(\zeta_{|G|})).$$

Deshalb sind $R(G) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p[\zeta_{|G|}]$ und $\mathrm{Cl}(G, \mathbb{Z}_p[\zeta_{|G|}])$ Gitter im endlich dimensionalen $\mathbb{Q}_p$-Vektorraum $\mathrm{Cl}(G, \mathbb{Q}_p(\zeta_{|G|}))$.

Lemma 1.6. *Sei G eine endliche Gruppe und p eine Primzahl. Für $\alpha \gg 1$ genügend gross gilt $p^\alpha \mathrm{Cl}(G, \mathbb{Z}_p[\zeta_{|G|}]) \subseteq R(G) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p[\zeta_{|G|}]$.*

Beweis. Für $M := \mathrm{Cl}(G, \mathbb{Z}_p[\zeta_{|G|}])$, $N := R(G) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p[\zeta_{|G|}]$ und $I := p\mathbb{Z}_p$, sei IN definiert als die Menge aller Summen der Form

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j$$

für alle $n \geq 1$ und alle $a_j \in I$, $x_j \in N$. Man sieht, dass $IN \subseteq N \subseteq M$ ein $\mathbb{Z}_p$-Untermodul ist. Daher kann man die Faktormoduln M/IN und N/IN bilden. Aus dem Isomorphiesatz für Moduln erhält man

$$M/N \cong (M/IN)/(N/IN).$$

$(M/IN)/(N/IN)$ wird durch

$$(a + I)(x + IN + (N/IN)) := ax + IN + (N/IN)$$

für $a + I \in \mathbb{Z}_p/I$ und $x + IN + (N/IN) \in (M/IN)/(N/IN)$ zu einem $\mathbb{Z}_p/I$-Modul. Ist $\{v_i\}$, $1 \leq i \leq h \cdot \dim_{\mathbb{Q}_p}(\mathbb{Q}_p(\zeta_{|G|}))$ eine $\mathbb{Z}_p$-Basis von M, so ist $\{v_i + IN + (N/IN)\}$ eine $\mathbb{Z}_p/I$-Basis von $(M/IN)/(N/IN)$. Wegen

$$\mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z},$$

siehe [Neukirch] Satz 2.4 Seite 117, ist M/N ein endlich dimensionaler Vektorraum über dem endlichen Körper $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Deshalb muss M/N endlich sein. Als $\mathbb{Z}_p$-Modul ist M/N daher ein Torsionsmodul. Aus $\varepsilon \cdot x = 0$ für $x \in M/N$ und eine Einheit $\varepsilon \in \mathbb{Z}_p^\times$ folgt, dass $\varepsilon^{-1}\varepsilon \cdot x = 1 \cdot x = 0$, also $x = 0$. Jedes Element $x \in M/N\backslash\{0\}$ hat also eine Potenz von p als Ordnung. Für $\alpha \gg 1$ höchst teilbar gilt deswegen $p^\alpha M/N = 0$, d.h. $p^\alpha M \subseteq N$. □

Definition 1.7. *Sei $f : A \to B$ ein Homomorphismus kommutativer Ringe A, B und p eine Primzahl. Man sagt, f ist $\mathcal{F}_p$-surjektiv, falls es eine $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ gibt so, dass für alle $y \in B$, $y^{p^n} \in \operatorname{im}(f)$ gilt. f heisst $\mathcal{F}_p$-Isomorphismus, falls er $\mathcal{F}_p$-surjektiv ist und es eine $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ gibt so, dass für alle $x \in \ker(f)$, $x^m = 0$ gilt.*

Lemma 1.8. *Sei G eine endliche Gruppe, S ein kommutativer Ring mit Eins und $R \subseteq S$ ein Unterring. Aus*

$$R \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[\zeta_{|G|}] \hookrightarrow S \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[\zeta_{|G|}] \tag{1.9}$$

ist $\mathcal{F}_p$-surjektiv folgt, dass

$$R \hookrightarrow S \tag{1.10}$$

$\mathcal{F}_p$-surjektiv ist.

Beweis. Angenommen (1.10) ist nicht $\mathcal{F}_p$-surjektiv. Es wird gezeigt, dass dann (1.9) nicht $\mathcal{F}_p$-surjektiv ist. Man betrachtet den $\mathbb{Z}_p$-Untermodul $(S/R)_n$ von S/R erzeugt durch $\{s^{p^n}R \mid n \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \text{ fest},\ s \in S\}$ und das Bild hiervon unter

$$\begin{aligned} S/R &\hookrightarrow S/R \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[\zeta_{|G|}] \cong S \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[\zeta_{|G|}]/R \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[\zeta_{|G|}], \\ x &\longmapsto x \otimes 1. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Da (1.9) $\mathcal{F}_p$-surjektiv ist, gibt es eine $n_0 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ so, dass für alle $y \in S \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[\zeta_{|G|}]$, $y^{p^{n_0}} \in R \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[\zeta_{|G|}]$ gilt. Insbesondere für alle $s \in S$ gilt $s^{p^{n_0}} \otimes 1 \in R \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[\zeta_{|G|}]$. Es folgt, dass das Bild des Untermoduls $(S/R)_{n_0}$ unter der (1.11) gleich Null ist. Da $\mathbb{Z}_p[\zeta_{|G|}]$ ein treuflacher $\mathbb{Z}_p$-Modul ist, aus $(S/R)_{n_0} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[\zeta_{|G|}] = 0$ folgt $(S/R)_{n_0} = 0$, d.h. die erzeugende Menge $\{s^{p^{n_0}}R \mid s \in S\}$ ist trivial, ein Widerspruch zur Annahme oben. □

Lemma 1.12. *Sei G eine endliche p-Gruppe, d.h. $|G| = p^n$ mit $n \geq 0$ und ϕ eine Klassenfunktion wie im Lemma 1.4. Dann gilt für alle $s \in G$ und $k \geq 0$*

$$\phi(s)^{p^k} - \phi(1)^{p^k} \equiv 0 \bmod \pi^{k+1}, \tag{1.13}$$

wobei π ein Primelement des Ringes $\mathbb{Z}_p[\zeta_{|G|}]$ bezeichnet.

Beweis. Sei χ ein irreduzibler Charakter einer zyklischen Untergruppe C von G und ζ eine primitive $|G|$-te Einheitswurzel. Dann gilt für $s \in C$, $\chi(s) = \zeta^a$ für eine $a \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ und

$$\chi(s) - \chi(1) = \zeta^a - 1 \equiv 0 \bmod \pi.$$

Diese Kongruenz ist eine Folge von $\zeta \equiv 1 \bmod \pi$, die man wie folgt sieht. Weil man in Charakteristik p rechnet, aus $\zeta^{p^n} = 1$ folgt

$$0 = \zeta^{p^n} - 1 \equiv (\zeta - 1)^{p^n} \bmod \pi,$$

also $\overline{\zeta} - 1 = 0$, da $\mathbb{Z}_p[\zeta_{|G|}]/(\pi)$ ein Körper ist. Weil für jede zyklische Untergruppe C von G, ϕ_C eine $\mathbb{Z}_p$-lineare Kombination solcher Charaktere ist und $\mathrm{Res}(\phi) = (\phi_C)$, ist damit (1.13) für $k = 0$ gezeigt. Angenommen für irgendwelche x, y und $k \geq 0$

$$x^{p^{k-1}} - y^{p^{k-1}} \equiv 0 \bmod \pi^k \tag{1.14}$$

gilt. Setzt man $X := x^{p^{k-1}}$ und $Y := y^{p^{k-1}}$, so gilt wegen (1.14)

$$X = Y + \alpha \cdot \pi^k$$

für ein $\alpha \in \mathbb{Z}_p[\zeta_{|G|}]$. Die p-te Potenz hiervon nehmen ergibt

$$\begin{aligned} X^p &= Y^p + \sum_{j=1}^{p-1} \binom{p}{j} Y^{p-j} (\alpha \cdot \pi^k)^j + (\alpha \cdot \pi^k)^p \\ &\equiv Y^p \bmod \pi^{k+1}, \end{aligned}$$

da $\binom{p}{j}$ durch π, $(\alpha \cdot \pi^k)^j$ durch π^k und $(\alpha \cdot \pi^k)^p$ wegen $p \geq 2$ durch π^{k+1} teilbar ist. Also folgt

$$X^p - Y^p = x^{p^k} - y^{p^k} \equiv 0 \bmod \pi^{k+1}. \quad \square$$

Satz 1.15. *Sei p eine Primzahl und G eine endliche p-Gruppe. Dann ist die Inklusion kommutativer Ringe*

$$R(G) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p \xhookrightarrow{\mathrm{Res} \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{Z}_p}} \lim_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(G)^{op}} R(C) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p$$

ein $\mathcal{F}_p$-Isomorphismus.

Beweis. Sei $(\phi_C) \in \lim_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(G)^{op}} R(C) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p[\zeta_{|G|}]$ und ϕ die Klassenfunktion auf G mit $\mathrm{Res}(\phi) = (\phi_C)$, deren Existenz aus Lemma 1.4 folgt. Die Klassenfunktion ψ_k, definiert als

$$\psi_k : s \longmapsto \phi(s)^{p^k} - \phi(1)^{p^k} \in \mathrm{Cl}(G, \mathbb{Z}_p[\zeta_{|G|}])$$

ist durch Lemma 1.12 für alle $k \geq 0$ durch π^{k+1} teilbar. Sei α wie im Lemma 1.6. Wähle k so, dass $k + 1 \geq \alpha \cdot \dim_{\mathbb{Q}_p}(\mathbb{Q}_p(\zeta_{|G|}))$ gilt. Dann folgt wegen $p = u \cdot \pi^{\dim_{\mathbb{Q}_p}(\mathbb{Q}_p(\zeta_{|G|}))}$, $u \in \mathbb{Z}_p[\zeta_{|G|}]$ eine Einheit, dass $p^{-\alpha}\psi_k \in \mathrm{Cl}(G, \mathbb{Z}_p[\zeta_{|G|}])$ gilt. Also gilt durch Lemma 1.6

$$\psi_k = p^{\alpha}(p^{-\alpha}\psi_k) \in p^{\alpha}\mathrm{Cl}(G, \mathbb{Z}_p[\zeta_{|G|}]) \subseteq R(G) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p[\zeta_{|G|}],$$

d.h. $\psi_k \in R(G) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p[\zeta_{|G|}]$. Weil $\phi(1)^{p^k}$ in $R(G) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p[\zeta_{|G|}]$ liegt, gilt

$$\phi^{p^k} \in R(G) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p[\zeta_{|G|}],$$

d.h. die Inklusion kommutativer Ringe

$$R(G) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p[\zeta_{|G|}] \hookrightarrow \lim_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(G)^{op}} R(C) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p[\zeta_{|G|}] \tag{1.16}$$

ist $\mathcal{F}_p$-surjektiv. Setzt man $R := R(G) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p$ und $S := \lim_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(G)^{op}} R(C) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p$, so folgt durch Lemma 1.8 aus (1.16), dass

$$R(G) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p \hookrightarrow \lim_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(G)^{op}} R(C) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p \tag{1.17}$$

$\mathcal{F}_p$-surjektiv ist. Die Inklusion $R(G) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p \subseteq \lim_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(G)^{op}} R(C) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p$ ist aus der Charaktertheorie klar. Daher ist (1.17) ein $\mathcal{F}_p$-Isomorphismus. □

2 Der $\mathcal{F}_p$-Isomorphismus $\mathrm{Res} \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{Z}_p}$, der Fall einer endlichen Gruppe

In diesem Abschnitt wird das Ergebnis des letzten Abschnitts, Satz 1.15 auf beliebige endliche Gruppe G verallgemeinert.

Definition 1.18. *Eine Gruppe G heisst elementar, genau dann, wenn für mindestens eine Primzahl p, $G = P \times C'$ gilt mit P eine p-Gruppe, C' eine zyklische Gruppe und $p \not| |C'|$. Jedes $s \in G$ lässt sich schreiben als $s = s_1 s_2$ so, dass die Ordnung von s_1 eine p-Potenz ist, p die Ordnung von s_2 nicht teilt und s_1, s_2 mit einander kommutieren.*

Lemma 1.19. *Sei ϕ eine Klassenfunktion auf einer endlichen Gruppe G so, dass für jede elementare Untergruppe H von G und jeden Charakter χ von H vom Grad 1*

$$\langle \chi, \mathrm{Res}_H^G(\phi) \rangle_H = \tfrac{1}{|H|} \sum_{s \in H} \chi(s^{-1}) \phi(s) \in \mathbb{Z}_p[\zeta_{|G|}] \tag{1.20}$$

gilt, dann gilt $\phi \in R(G) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p[\zeta_{|G|}]$.

Beweis. Siehe [Serre1] Theorem 22 Seite 82. □

Lemma 1.21. *Sei $G = P \times C'$ eine elementare Gruppe und ϕ eine Klassenfunktion wie im Lemma 1.4. Dann gilt für alle $s \in G$, $s = s_1 s_2$ wie in der Definition 1.18 und $k \geq 1$*

$$\phi(s)^{Q^k} - \phi(s_2)^{Q^{k-1}} \equiv 0 \bmod \pi^k, \tag{1.22}$$

wobei π ein Primelement des Ringes $\mathbb{Z}_p[\zeta_{|G|}]$ und Q eine geeignete Potenz von p bezeichnet.

Beweis. Sei $|G| = p^n \cdot m$ mit $p \not| m$ und f minimal so, dass $p^f \equiv 1 \bmod m$ gilt. Dann gilt

$$\mathbb{Z}_p[\zeta_{|G|}]/(\pi) \cong \mathbb{F}_{p^f}. \tag{1.23}$$

Sei $s \in G$, $s = s_1 s_2$ wie oben und $Q := p^f$. Aus ${s_1}^{p^n} = 1$ und ${s_2}^m = 1$ folgt für $f \geq n$ wegen $p^f = 1 + \alpha \cdot m$ mit einer $\alpha \geq 0$

$$s^Q = s_2. \tag{1.24}$$

Falls $f < n$ gilt, setzt man $Q := p^{\beta f}$ für eine $\beta > 1$ so, dass $\beta f \geq n$ gilt. Sei $(\phi_C) \in \lim_{\mathcal{O}_C(G)^{op}} R(C) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p[\zeta_{|G|}]$ mit $\mathrm{Res}(\phi) = (\phi_C)$, $\phi_C = \sum_{i=1}^{|C|} a_i \chi_i$, $a_i \in \mathbb{Z}_p[\zeta_{|G|}]$ und χ_i die irreduziblen Charaktere von C. Aus (1.23) folgt wegen $Q = p^f$

$$\left(\sum_{i=1}^{|C|} a_i \chi_i(s) \right)^Q \equiv \sum_{i=1}^{|C|} (a_i \chi_i(s))^Q \bmod \pi.$$

Man weiss, dass für alle $1 \leq i \leq |C|$, χ_i ein Charakter vom Grad 1 ist und für alle $s \in C$, $\chi_i(s)$ eine $|G|$-te Einheitswurzel. Daher gilt wegen (1.24)

$$\chi_i(s)^Q = \chi_i(s^Q) = \chi_i(s_2).$$

Durch (1.23) für alle a_i gilt

$$a_i^Q \equiv a_i \bmod \pi.$$

Also gilt

$$\phi_C(s)^Q \equiv \phi_C(s_2) \bmod \pi.$$

Damit ist die Kongruenz (1.22) für $k = 1$ gezeigt. Angenommen für $k > 1$ gilt (1.22). Setzt man $X := \phi_C(s)^{Q^k}$ und $Y := \phi_C(s_2)^{Q^{k-1}}$, so gilt wegen (1.22)

$$X = Y + \alpha \cdot \pi^k \tag{1.25}$$

für ein $\alpha \in \mathbb{Z}_p[\zeta_{|G|}]$. Die Q-te Potenz von (1.25) nehmen ergibt

$$\begin{aligned} X^Q &= Y^Q + \sum_{j=1}^{Q-1} \binom{Q}{j} Y^{Q-j} (\alpha \cdot \pi^k)^j + (\alpha \cdot \pi^k)^Q \\ &\equiv Y^Q \bmod \pi^{k+1}, \end{aligned}$$

da $\binom{Q}{j}$ durch π, $(\alpha \cdot \pi^k)^j$ durch π^k und $(\alpha \cdot \pi^k)^Q$ wegen $Q \geq 2$ durch π^{k+1} teilbar ist. Also gilt

$$\phi_C(s)^{Q^{k+1}} \equiv \phi_C(s_2)^{Q^k} \bmod \pi^{k+1}. \quad \square$$

Lemma 1.26. *Sei G, ϕ wie im Lemma 1.21 und χ ein Charakter von G vom Grad 1. Dann existiert ein $k_0 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ so, dass $\langle \chi, \phi^{Q^{k_0}} \rangle \in \mathbb{Z}_p[\zeta_{|G|}]$ gilt.*

Beweis. Für χ gilt wegen (1.22) die Kongruenz

$$\chi(s^{-1}) \phi(s)^{Q^k} \equiv \chi(s^{-1}) \phi(s_2)^{Q^{k-1}} \bmod \pi^k$$

und durch Summation über alle $s \in G$ die Kongruenz

$$\sum_{s\in G} \chi(s^{-1})\phi(s)^{Q^k} \equiv \sum_{s\in G} \chi(s^{-1})\phi(s_2)^{Q^{k-1}} \bmod \pi^k.$$

Aus (1.22) folgt für $k \to \infty$ die p-adische Konvergenz von ϕ^{Q^k} gegen einer Klassenfunktion $\psi : G \to \mathbb{Z}_p[\zeta_{|G|}]$. Genauer, für $k \to \infty$ gilt

$$\sum_{s\in G} \chi(s^{-1})\psi(s) \equiv \sum_{s\in G} \chi(s^{-1})\psi(s_2).$$

Weil χ vom Grad 1 ist, gilt für $s = s_1 s_2$

$$\chi(s^{-1}) = \chi(s_1^{-1})\chi(s_2^{-1}).$$

Durch $G = P \times C'$ folgt deshalb

$$\sum_{s\in G} \chi(s^{-1})\psi(s) = \sum_{s_1\in P} \chi(s_1^{-1}) \cdot \sum_{s_2\in C'} \chi(s_2^{-1})\psi(s_2),$$

woraus wegen

$$\sum_{s_1\in P} \chi(s_1^{-1}) = |P|\langle \chi, 1\rangle_P$$

und

$$\sum_{s_2\in C'} \chi(s_2^{-1})\psi(s_2) = |C'|\langle \chi, \psi\rangle_{C'},$$

$$\langle \chi, \psi\rangle = \langle \chi, 1\rangle_P \cdot \langle \chi, \psi\rangle_{C'} \in \mathbb{Z}_p[\zeta_{|G|}] \tag{1.27}$$

folgt. Man weiß, dass $\mathbb{Z}_p[\zeta_{|G|}]$ ein diskreter Bewertungsring mit Quotientenkörper $\mathbb{Q}_p(\zeta_{|G|})$ ist. Sei w die diskrete Bewertung von $\mathbb{Z}_p[\zeta_{|G|}]$. Aus der Diskretheit von w und (1.27) folgt dann für ein $k_0 < \infty$

$$0 \le w(\langle \chi, \psi\rangle) = \lim_{k\to\infty} w(\langle \chi, \phi^{Q^k}\rangle) = w(\langle \chi, \phi^{Q^{k_0}}\rangle),$$

d.h. $\langle \chi, \phi^{Q^{k_0}}\rangle \in \mathbb{Z}_p[\zeta_{|G|}]$. $\square$

Satz 1.28. *Sei G eine endliche Gruppe und p eine Primzahl. Dann ist die Inklusion kommutativer Ringe*

$$R(G) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p \overset{\mathrm{Res}\otimes \mathrm{id}_{\mathbb{Z}_p}}{\hookrightarrow} \lim_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(G)^{op}} R(C) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p \tag{1.29}$$

ein $\mathcal{F}_p$-Isomorphismus.

Beweis. Zuerst wird hier gezeigt, dass (1.29) tensoriert mit $- \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[\zeta_{|G|}]$ $\mathcal{F}_p$-surjektiv ist. Genauer, dass es eine $k \geq 0$ gibt so, dass für alle $(\phi_C) \in \lim_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(G)^{op}} R(C) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p[\zeta_{|G|}]$, $\phi^{p^k} \in$

$R(G) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p[\zeta_{|G|}]$ gilt, wobei ϕ eine Klassenfunktion auf G mit $\mathrm{Res}(\phi) = (\phi_C)$ ist, die nach Lemma 1.4 existiert. Sei H eine elementare Untergruppe von G und χ ein Charakter von H vom Grad 1. Wenn $p \not| |H|$ gilt, wird (1.20) immer für χ und ϕ erfüllt. Sei also $p||H|$. Dann ist entweder $H = P \times C$ mit P eine p-Gruppe, C zyklisch und $p \not| |C|$ oder $H = P' \times C$ mit P' eine p'-Gruppe für $p' \neq p$, C zyklisch und $p||C|$. Im letzten Fall lässt sich C zerlegen als $C = P \times C'$ mit P eine p-Gruppe, C' zyklisch und $p \not| |C'|$ so, dass die p-adische Bewertung von (1.20) für H und $P \times C'$ ungeändert bleibt. Daher darf man G elementar annehmen, d.h. gleich $P \times C'$ mit P eine p-Gruppe, C' zyklisch und $p \not| |C'|$. Aus Lemma 1.26 folgt dann die Existenz einer $k_0 < \infty$ so, dass $\langle \chi, \phi^{Q^{k_0}} \rangle \in \mathbb{Z}_p[\zeta_{|G|}]$ gilt mit χ ein Charakter von G vom Grad 1. Daher folgt für $k := k_0 f$ aus Lemma 1.19 $\phi^{p^k} \in R(G) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p[\zeta_{|G|}]$. Setzt man $R := R(G) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p$, $S := \lim_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(G)^{op}} R(C) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p$ und wendet Lemma 1.8 an, so folgt, dass (1.29) $\mathcal{F}_p$-surjektiv ist. Die Inklusion $R(G) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p \subseteq \lim_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(G)^{op}} R(C) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p$ ist klar, da $R(G) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p \subseteq \mathrm{Cl}(G, \mathbb{Z}_p)$ gilt und eine Klassenfunktion $f \in \mathrm{Cl}(G, \mathbb{Z}_p)$, die auf alle $C \in \mathcal{C}$ gleich Null ist, ist trivial. Deshalb ist (1.29) ein $\mathcal{F}_p$-Isomorphismus. $\square$

3 Der $\mathcal{N}$-Isomorphiesatz

Am Ende dieses Abschnitts wird das Hauptergebnis des Paragraphen, Satz 1.38 bewiesen. Hierzu braucht man das Ergebnis des letzten Abschnitts, nämlich Satz 1.28. Die nächst folgende Proposition ist ein weiteres wichtiges Hilfsmittel.

Definition 1.30. *Sei $f : A \to B$ ein Homomorphismus kommutativer Ringe A und B. Man sagt, f ist $\mathcal{N}$-surjektiv, falls es eine $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ gibt so, dass für alle $y \in B$, $y^n \in \mathrm{im}(f)$ gilt. f heisst $\mathcal{N}$-Isomorphismus, falls er $\mathcal{N}$-surjektiv ist und es eine $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ gibt so, dass für alle $x \in \ker(f)$, $x^m = 0$ gilt.*

Proposition 1.31. *Sei S ein kommutativer Ring mit Eins und $R \subseteq S$ ein Unterring so, dass*

1) *S/R ist als abelsche Gruppe endlich erzeugt,*
2) *$R \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \subseteq S \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ ist eine Gleichheit,*
3) *Für jede Primzahl p ist $R \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p \hookrightarrow S \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p$ $\mathcal{F}_p$-surjektiv.*

Dann ist $R \hookrightarrow S$ $\mathcal{N}$-surjektiv.

Bemerkung 1.32. Aus 1) und 2) folgt, dass S/R endlich ist. Denn aus 2) folgt, dass die bei 1) besagten endlich vielen Erzeuger alle Torsion sind.

Bemerkung 1.33. Sei I_N für eine $N \geq 1$ definiert als die Menge

$$I_N := \{M \in \mathbb{Z} \,|\, \forall s \in S,\ Ms^N \in R\}.$$

Aus Bemerkung 1.32 folgt $I_N \neq \emptyset$, denn $|S/R| \in I_N$. Da R ein Ring ist, folgt sogar $I_N \subseteq \mathbb{Z}$ ist ein Ideal.

Lemma 1.34. *Für alle $N, N' \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, aus $N|N'$ folgt $I_N \subseteq I_{N'}$.*

Beweis. Aus $N|N'$ und $M \in I_N$ folgt für beliebiges $s \in S$

$$Ms^{N'} = M(s^{N'/N})^N \in R,$$

d.h. $M \in I_{N'}$. $\square$

Lemma 1.35. *Es gilt $I_1 \neq 0$.*

Beweis. Da S/R endlich ist, gilt

$$\begin{aligned} I_1 &\overset{\text{Def.}}{=} \{M \in \mathbb{Z} \,|\, \forall s \in S,\ Ms \in R\} \\ &= \{M \in \mathbb{Z} \,|\, M(S/R) = 0\}. \end{aligned}$$

Deshalb folgt $I_1 \ni |S/R| \neq 0$. $\square$

Lemma 1.36. *Sei p eine Primzahl und $n \geq 1$ so, dass für alle $s \in S$*

$$s^{p^n} \otimes 1 \in R \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p \tag{1.37}$$

gilt (eine solche n existiert nach Voraussetzung 3)). Dann gilt $p \nmid M_0$, wobei $I_{p^n} = (M_0)$.

Beweis. Angenommen $p|M_0$ gilt. Es folgt, dass

$$(*) : \text{für alle } M \in \mathbb{Z} \text{ mit } p \nmid M \text{ gibt es ein } s \in S \text{ so, dass } Ms^{p^n} \notin R \text{ gilt.}$$

Da S/R endlich ist, gilt als abelsche Gruppe $S/R \cong A \oplus B$ mit $p \nmid |A|$ und $|B|$ eine p-Potenz. Wegen $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p \cong \mathbb{Z}_p/n\mathbb{Z}_p$ und

$$\mathbb{Z}_p/n\mathbb{Z}_p \cong \begin{cases} 0, & p \nmid n, \text{ da } n\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}_p \\ \mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z}, & n = p^\alpha \end{cases}$$

siehe z.B. [Koblitz] Satz 2.4 Seite 117, gilt $A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p \cong 0$ und $B \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p \cong B$. Aus (1.37) folgt, dass die Teilmenge $A' := \{s^{p^n}R \,|\, s \in S\} \subseteq S/R$ unter

$$S/R \hookrightarrow S/R \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p \cong S \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p / R \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p \cong B$$

auf $\{0\}$ abgebildet wird. Daher gilt $A' \subseteq A$. Es gibt also eine $M \in \mathbb{Z}$, etwa $M = |A|$ mit $p \nmid M$ so, dass für alle $s \in S$

$$0 = M(s^{p^n}R) = (Ms^{p^n})R$$

gilt, d.h. für alle $s \in S$ gilt $Ms^{p^n} \in R$ mit $p \nmid M$, ein Widerspruch zur $(*)$. $\square$

Beweis von Proposition 1.31. Schreibe $I_1 = (p_1^{n_1} \cdots p_r^{n_r})$ für Primzahlen $p_1, \ldots, p_r$ (paarweise verschieden, $r \geq 1$ und $n_i \geq 1$), das nach Lemma 1.35 möglich ist. Sei $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ so, dass für alle $1 \leq i \leq r$ und $y \in S \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{p_i}$

$$y^{p_i^{\alpha_i}} \in R \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{p_i}$$

gilt. Nach Lemma 1.34 gilt $I_1 \subseteq I_{p_i^{\alpha_i}}$, d.h. für $I_{p_i^{\alpha_i}} = (M_i)$ gilt $M_i | p_1^{n_1} \cdots p_r^{n_r}$ und nach Lemma 1.36 $p_i \nmid M_i$ für alle $1 \leq i \leq r$. Daher gilt

$$I_{p_1^{\alpha_1}} + \ldots + I_{p_r^{\alpha_r}} = (1).$$

Aus $I_{p_i^{\alpha_i}} \subseteq I_{p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}}$ folgt

$$(1) = I_{p_1^{\alpha_1}} + \ldots + I_{p_r^{\alpha_r}} \subseteq I_{p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}},$$

denn für $I_{p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}} = (M)$ gilt $M | M_i$ für alle $1 \leq i \leq r$. Daher gilt $I_{p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}} = (1)$. Also für $N := p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$ gilt $s^N \in R$ für alle $s \in S$, d.h. $R \hookrightarrow S$ ist $\mathcal{N}$-surjektiv. $\square$

Satz 1.38 ($\mathcal{N}$-Isomorphie). *Sei G eine endliche Gruppe. Dann ist die Inklusion Res*

$$\begin{aligned} R(G) &\overset{\mathrm{Res}}{\hookrightarrow} \lim_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(G)^{op}} R(C), \\ y &\longmapsto (\mathrm{Res}_C^G(y)) \end{aligned} \tag{1.39}$$

kommutativer Ringe $R(G)$ und $\lim_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(G)^{op}} R(C)$ ein $\mathcal{N}$-Isomorphismus.

Beweis. Setze $R := R(G)$ und $S := \lim_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(G)^{op}} R(C)$. Aus der Charaktertheorie ist bekannt, dass (1.39) eine Inklusion ist. R und S sind als abelsche Gruppen endlich erzeugt, also auch S/R, d.h. die Bedingung 1) aus Proposition 1.31 ist erfüllt. Aus Satz 1.28 folgt die Bedingung 3) dieser Proposition. Für Proposition 1.31 2) betrachte das Folgende. Die Inklusion $R \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \subseteq S \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ ist wegen $R \subseteq S$ klar. Sei $(\chi_C) \in S$ und χ eine Klassenfunktion auf G mit $\mathrm{Res}(\chi) = (\chi_C)$, die nach Lemma 1.4 existiert. Es gilt

$$|G| = \sum_{C \in \mathcal{C}} \mathrm{Ind}_C^G \vartheta_C$$

mit $\mathcal{C}$ die Familie aller zyklischen Untergruppen von G und $\vartheta_C \in R(C)$ geeignet gewählt, vgl. [Serre1] Proposition 27 Seite 72. Also gilt

$$\begin{aligned} |G| \cdot \chi &= \sum_{C \in \mathcal{C}} \mathrm{Ind}_C^G(\vartheta_C) \cdot \chi \\ &= \sum_{C \in \mathcal{C}} \mathrm{Ind}_C^G(\vartheta_C \cdot \underbrace{\mathrm{Res}_C^G(\chi)}_{\chi_C}) \in R(G), \end{aligned}$$

da für alle $C \in \mathcal{C}$, $\vartheta_C \cdot \chi_C \in R(C)$ gilt. Deshalb gilt für alle Klassenfunktion χ auf G und $a \in \mathbb{Q}$

$$\chi \otimes a = (|G| \cdot \chi) \otimes \tfrac{a}{|G|} \in R(G) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q},$$

d.h. $S \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \subseteq R \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Daher folgt aus Proposition 1.31, dass die Inklusion Res kommutativer Ringe R, S $\mathcal{N}$-surjektiv ist. Also ist sie ein $\mathcal{N}$-Isomorphismus. □

§ 2. Einige Eigenschaften des Morphismus Res für die Gruppen $C_p \times C_p$ und C_p

In diesem Paragraphen wird zuerst die Struktur des Ringhomomorphismus (1.1) für den Fall G gleich das Produkt $C_p \times C_p$ zyklischer Gruppen von Ordnung einer Primzahl p geklärt. Als Ergebnis erhält man hier, dass für alle $y \in \lim_{\mathcal{O}_\mathcal{C}(P)^{op}} R(C)$, $y^p \in R(P)$ und $p \cdot (\lim_{\mathcal{O}_\mathcal{C}(P)^{op}} R(C)/R(P)) = 0$ gilt. Im Teil 2 wird die minimale Familie des Funktors R für C_p bestimmt, d.h. die kleinste Familie $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(C_p)$ bezüglich der Inklusion, wofür (1.1) für $G = C_p$ mit $\mathcal{C}$ ersetzt durch $\mathcal{F}$ ein $\mathcal{N}$-Isomorphismus ist.

1 Der Fall $C_p \times C_p$ für eine Primzahl p

Sei p eine Primzahl und $\zeta_p = e^{2\pi i/p}$ die primitive p-te Einheitswurzel. Sei C_p die zyklische Gruppe erzeugt durch ζ_p und P das Produkt $C_p \times C_p$, erzeugt von allen (ζ_p^k, ζ_p^l) mit $1 \leq k, l \leq p-1$, wobei für $(s_1, s_2), (t_1, t_2) \in P$

$$(s_1, s_2) \cdot (t_1, t_2) = (s_1 t_1, s_2 t_2)$$

gilt. Hiermit wird P zu einer abelschen p-Gruppe mit p^2 Elementen. Sind $\chi_1, \ldots, \chi_p$ die irreduziblen Charaktere von C_p, so sind $\chi_i \otimes \chi_j$, $1 \leq i, j \leq p$ die irreduziblen Charaktere der Gruppe P. Daher gilt für den Darstellungsring der Gruppe P

$$R(P) = R(C_p) \otimes_\mathbb{Z} R(C_p).$$

Es gilt

$$\#\{C_p' < P \mid |C_p'| = p\} = p + 1$$

und weil P abelsch ist, existieren keine zu einander konjugierte unterschiedliche zyklische Untergruppen, d.h. die Kategorie $\mathcal{O}_\mathcal{C}(P)$ (siehe Anfang § 1.) enthält die Objekte $P/\{1\}$, P/C_p^1, P/C_p^2, $\ldots$, P/C_p^{p+1} mit $C_p^1 := \langle(\zeta_p, 1)\rangle$, $C_p^2 := \langle(1, \zeta_p)\rangle$, $\ldots$, $C_p^{p+1} := \langle(\zeta_p^{p-1}, \zeta_p)\rangle$. Da P abelsch ist, sind die Weylgruppen aller Untergruppen trivial. Das nächste Diagramm veranschaulicht die Kategorie $\mathcal{O}_\mathcal{C}(P)$ und ihres Bildes in der Kategorie der Ringe

$$\begin{tikzcd}
P/C_p^1 \arrow[loop above, "R_{(1,\zeta_p)}"] & P/C_p^2 \arrow[loop above, "R_{(\zeta_p,1)}"] & \cdots & P/C_p^{p+1} \arrow[loop above, "R_{(\zeta_p^\alpha,\zeta_p^\beta)}"] \\
 & & & P/\{1\} \arrow[ulll, bend left, "R_1"] \arrow[ull, "R_1"] \arrow[u, "R_1"] \arrow[loop below, "R_1,\ldots,R_{(\zeta_p^{p-1},\zeta_p^{p-1})}"]
\end{tikzcd}
\quad \overset{\mathcal{G}}{\longmapsto} \quad
\begin{tikzcd}
R(C_p^1) \arrow[loop above, "\mathrm{id}_{R(C_p^1)}"] \arrow[drrr, bend right, "\mathrm{Res}_{\{1\}}^{C_p^1}"'] & R(C_p^2) \arrow[loop above, "\mathrm{id}_{R(C_p^2)}"] \arrow[drr, "\mathrm{Res}_{\{1\}}^{C_p^2}"'] & \cdots & R(C_p^{p+1}) \arrow[loop above, "\mathrm{id}_{R(C_p^{p+1})}"] \arrow[d, "\mathrm{Res}_{\{1\}}^{C_p^{p+1}}"'] \\
 & & & \mathbb{Z} \arrow[loop below, "\mathrm{id}_\mathbb{Z}"]
\end{tikzcd}$$

wobei der kontravariante Funktor $\mathcal{G} : \mathcal{O}_\mathcal{C}(P) \to$ Ringe einem Objekt $P/C \in \mathcal{O}_\mathcal{C}(P)$ die Darstellungsring $\mathcal{G}(P/C) = R(C)$ zuordnet und einem Pfeil $P/C \overset{\varphi}{\to} P/C'$ den Restriktionsmorphismus $\mathcal{G}(\varphi) = \mathrm{Res}_C^{C'}$. Für das Limes gilt deshalb

$$\lim_{\mathcal{O}_\mathcal{C}(P)^{op}} R(C) = \{(\phi_C)_{P/C \in \mathcal{O}_\mathcal{C}(P)} \in \bigoplus_{\mathcal{O}_\mathcal{C}(P)} R(C) \,|\, \mathrm{Res}^C_{\{1\}}(\phi_C) = \text{const.} \forall P/C \in \mathcal{O}_\mathcal{C}(P)\},$$

d.h. $y \in \lim_{\mathcal{O}_\mathcal{C}(P)^{op}} R(C)$ genau dann gilt, wenn

$$y = \begin{pmatrix} (\sum_{j=1}^p a_j)\chi_0 \\ a_1\chi_1^{C_p^1} + \cdots + a_p\chi_p^{C_p^1} \\ a_{p+1}\chi_1^{C_p^2} + \cdots + a_{2p-1}\chi_{p-1}^{C_p^2} + (a_p + \sum_{j=1}^{p-1}(a_j - a_{p+j}))\chi_p^{C_p^2} \\ a_{2p}\chi_1^{C_p^3} + \cdots + a_{3p-2}\chi_{p-1}^{C_p^3} + (a_p + \sum_{j=1}^{p-1}(a_j - a_{2p-1+j}))\chi_p^{C_p^3} \\ \vdots \\ a_{p(p-1)+2}\chi_1^{C_p^{p+1}} + \cdots + a_{p^2}\chi_{p-1}^{C_p^{p+1}} + (a_p + \sum_{j=1}^{p-1}(a_j - a_{p(p-1)+1+j}))\chi_p^{C_p^{p+1}} \end{pmatrix}$$

mit $a_1, \ldots, a_{p^2} \in \mathbb{Z}$, χ_0 einziger Charakter der trivialen Untergruppe $\{1\}$ und $\chi_j^{C_p^i}$ der j-te irreduzible Charakter der zyklischen Untergruppe C_p^i gilt. Es ist bekannt, dass alle Charaktere der zyklischen Gruppe C_p von einem einzigen Charakter χ erzeugt werden, d.h. die irreduziblen Charaktere von C_p haben die Form $\chi^0, \chi, \ldots, \chi^{p-1}$. Daher haben die irreduziblen Charaktere von P die Form $\chi^i \otimes \chi^j$, $0 \leq i, j \leq p-1$. Die Restriktion eines beliebigen Charakters $\chi^i \otimes \chi^j$ ist durch sein Wert auf den Erzeuger (ζ_p^k, ζ_p^l), $k, l \in \{1, \ldots, p-1\}$ einer bestimmten Untergruppe $\langle(\zeta_p^k, \zeta_p^l)\rangle$ von P festgelegt. Da $k, l > 0$ gilt, durch

$$\chi^i \otimes \chi^j(\zeta_p^k, \zeta_p^l) = \chi^i(\zeta_p^k)\chi^j(\zeta_p^l) = \zeta_p^{ik}\zeta_p^{jl} = \zeta_p^{ik+jl} \tag{2.1}$$

sieht man, dass für feste $ik + jl$ modulo p genau p unterschiedliche Möglichkeiten für die Wahl von i, j existiert. Es ist auch klar, dass hierbei all diese i's und j's unterschiedlich sein müssen. Lässt man diese p Möglichkeiten als $\chi^0 \otimes \chi^{j_0}, \ldots, \chi^{p-1} \otimes \chi^{j_{p-1}}$ ordnen, so gilt $(01 \cdots p-1) \to (j_0 j_1 \cdots j_{p-1})$ ist eine bestimmte Permutation von $\{0, 1, \ldots, p-1\}$. Durch (2.1) ist auch klar, dass für eine andere Wahl von $k, l > 0$, diese Permutation unterschiedlich sein wird. Für $k = 0$ oder $l = 0$ sind die Restriktionen der Charaktere $\chi^i \otimes \chi^j$, $0 \leq i, j \leq p-1$ auf den Charakteren der Untergruppen $\langle(\zeta_p, 1)\rangle$ und $\langle(1, \zeta_p)\rangle$ einfach zu bestimmen. Deshalb gilt

$$R(P) \xrightarrow{\mathrm{Res}} \lim_{\mathcal{O}_\mathcal{C}(P)^{op}} R(C),$$
$$\sum_{1 \leq i,j \leq p} c_{ij}\chi_i \otimes \chi_j \longmapsto y,$$

$$y = \begin{pmatrix} (\sum_{1\le i,j\le p} c_{ij})\chi_0 \\ (\sum_{j=1}^p c_{1j})\chi_1^{C_p^1} + \cdots + (\sum_{j=1}^p c_{pj})\chi_p^{C_p^1} \\ (\sum_{i=1}^p c_{i1})\chi_1^{C_p^2} + \cdots + (\sum_{i=1}^p c_{ip})\chi_p^{C_p^2} \\ (\sum_{i=1}^p c_{i\sigma_1(i)})\chi_1^{C_p^3} + \cdots + (\sum_{i=1}^p c_{i\sigma_{p-1}(i)})\chi_{p-1}^{C_p^3} + c_{\sigma'_{p-1}}\chi_p^{C_p^3} \\ \vdots \\ (\sum_{i=1}^p c_{i\sigma_{(p-1)(p-2)+1}(i)})\chi_1^{C_p^{p+1}} + \cdots + (\sum_{i=1}^p c_{i\sigma_{p(p-2)+1}(i)})\chi_{p-1}^{C_p^{p+1}} + c_{\sigma'_{p(p-2)+1}}\chi_p^{C_p^{p+1}} \end{pmatrix}$$

mit

$$c_{\sigma'_{p-1}} = (\sum_{1\le i,j\le p} c_{ij}) - (\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p-1} c_{i\sigma_j(i)}),$$

$$\vdots$$

$$c_{\sigma'_{p(p-2)+1}} = (\sum_{1\le i,j\le p} c_{ij}) - (\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=(p-1)(p-2)+1}^{p(p-2)+1} c_{i\sigma_j(i)})$$

und σ_j, $1 \le j \le p(p-2)+1$ unterschiedliche Permutationen der Menge $\{1,2,\ldots,p\}$. Sei nun $y \in \lim_{\mathcal{O}_\mathcal{C}(P)^{op}} R(C)$ gegeben. Finde ein $x \in R(P)$ so, dass $\mathrm{Res}(x) = y$ gilt. Durch Vergleich der Koeffizienten in den Ausdruck des Restriktionsmorphismus entsteht das System der linearen Gleichungen

$$\begin{cases} c_{11} + \cdots + c_{1p} = a_1 \\ \vdots \\ c_{p1} + \cdots + c_{pp} = a_p \\ c_{11} + \cdots + c_{p1} = a_{p+1} \\ \vdots \\ c_{1p-1} + \cdots + c_{pp-1} = a_{2p-1} \\ c_{1\sigma_1(1)} + \cdots + c_{p\sigma_1(p)} = a_{2p} \\ \vdots \\ c_{1\sigma_{p-1}(1)} + \cdots + c_{p\sigma_{p-1}(p)} = a_{3p-2} \\ \vdots \\ c_{1\sigma_{(p-1)(p-2)+1}(1)} + \cdots + c_{p\sigma_{(p-1)(p-2)+1}(p)} = a_{p(p-1)+2} \\ \vdots \\ c_{1\sigma_{p(p-2)+1}(1)} + \cdots + c_{p\sigma_{p(p-2)+1}(p)} = a_{p^2} \end{cases}$$

Die Permutationen σ_1 bis $\sigma_{(p-1)(p-2)+1}$, die in den Koeffizienten der trivialen Charaktere der Gruppen C_p^3 bis C_p^{p+1} vorkommen, lassen alle 1 fest. Daher erhält man durch Addition der Koeffizienten der Charaktere $\chi_1^{C_p^2}, \chi_1^{C_p^3}, \ldots, \chi_1^{C_p^{p+1}}$

$$p \cdot c_{11} + \underbrace{\sum_{\substack{2 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq p}} c_{ij}}_{\sum_{i=2}^{p} a_i} = a_{p+1} + a_{2p} + \cdots + a_{p(p-1)+2}.$$

Hieraus lässt sich c_{11} lösen

$$c_{11} = -\tfrac{1}{p}(a_2 + \cdots + a_p - a_{p+1} - a_{2p} - \cdots - a_{p(p-1)+2}).$$

Für die Lösung der $c_{i_0 j_0}$ zu einem beliebigen Index $i_0 j_0 \neq 11$ gilt abhängig davon ob $c_{i_0 j_0}$ im linearen System der Gleichungen genau einmal vorkommt oder nicht

$$c_{i_0 j_0} = \begin{cases} \sum_{j'} \operatorname{sgn}(j') a_{j'} + \frac{1}{p}(\sum_{i'} \operatorname{sgn}(i') \alpha(a_{i'}) a_{i'}), \\ \frac{1}{p}(\sum_{i'} \operatorname{sgn}(i') a_{i'}) \end{cases} \tag{2.2}$$

mit $\operatorname{sgn}(i') \in \{\pm 1\}$, $\alpha(a_{i'}) \in \{1, p-1\}$ und die Indexmenge $\{i' \mid i' \in \{1, \ldots, p^2\}\} \neq \emptyset$.
Beispiel 2.3. Für $p = 2$ gilt $P = \{(1,1), (-1,1), (1,-1), (-1,-1)\}$ mit zyklischen Untergruppen $\{1\}$, $\langle(-1,1)\rangle$, $\langle(1,-1)\rangle$, $\langle(-1,-1)\rangle$. Daher enthält $\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(P)$ die Objekte $P/\{1\}$, $P/\langle(-1,1)\rangle$, $P/\langle(1,-1)\rangle$ und $P/\langle(-1,-1)\rangle$. Für das Limes gilt $y \in \lim_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(P)} R(C)$ genau dann, wenn

$$y = \begin{pmatrix} (a_1 + a_2)\chi_0 \\ a_1 \chi_1^{\langle(-1,1)\rangle} + a_2 \chi_2^{\langle(-1,1)\rangle} \\ a_3 \chi_1^{\langle(1,-1)\rangle} + (a_1 + a_2 - a_3)\chi_2^{\langle(1,-1)\rangle} \\ a_4 \chi_1^{\langle(-1,-1)\rangle} + (a_1 + a_2 - a_4)\chi_2^{\langle(-1,-1)\rangle} \end{pmatrix}$$

mit $a_1, \ldots, a_4 \in \mathbb{Z}$ und χ_i^C i-ter irreduzibler Charakter der Untergruppe C gilt. Für den Restriktionsmorphismus gilt

$$R(P) \xrightarrow{\text{Res}} \lim_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(P)^{op}} R(C) \subseteq \bigoplus_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(P)} R(C),$$

$$\sum_{1 \leq i,j \leq 2} c_{ij} \chi_i \otimes \chi_j \longmapsto \begin{pmatrix} (c_{11} + c_{12} + c_{21} + c_{22})\chi_0 \\ (c_{11} + c_{12})\chi_1^{\langle(-1,1)\rangle} + (c_{21} + c_{22})\chi_2^{\langle(-1,1)\rangle} \\ (c_{11} + c_{21})\chi_1^{\langle(1,-1)\rangle} + (c_{12} + c_{22})\chi_2^{\langle(1,-1)\rangle} \\ (c_{11} + c_{22})\chi_1^{\langle(-1,-1)\rangle} + (c_{12} + c_{21})\chi_2^{\langle(-1,-1)\rangle} \end{pmatrix}.$$

Es entsteht das lineare Gleichungssystem $Mc = a$ mit $a = (a_1, \ldots, a_4)$, $c = (c_{11}, \ldots, c_{22})$, c_{ij} nach Grösse von ij geordnet,

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und der Lösung

$$c = \tfrac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -a_2 + a_3 + a_4 \\ 2a_1 + a_2 - a_3 - a_4 \\ a_2 + a_3 - a_4 \\ a_2 - a_3 + a_4 \end{pmatrix}.$$

Beispiel 2.4. Für $p = 3$ gilt $C_3 = \langle \zeta \rangle$ mit $\zeta = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, $P = \{(1,1), (\zeta, 1), \ldots, (\zeta^2, \zeta^2)\}$ und die zyklischen Untergruppen $\{1\}$, $\langle (\zeta,1) \rangle$, $\langle (1,\zeta) \rangle$, $\langle (\zeta,\zeta) \rangle$, $\langle (\zeta^2,\zeta) \rangle$. Daher enthält $\mathcal{O}_\mathcal{C}(P)$ die Objekte $P/\{1\}$, $P/\langle (\zeta,1) \rangle$, $P/\langle (1,\zeta) \rangle$, $P/\langle (\zeta,\zeta) \rangle$ und $P/\langle (\zeta^2,\zeta) \rangle$. Für das Limes gilt $y \in \lim_{\mathcal{O}_\mathcal{C}(P)} R(C)$ genau dann, wenn

$$y = \begin{pmatrix} (a_1 + a_2 + a_3)\chi_0 \\ a_1\chi_1^{\langle (\zeta,1) \rangle} + a_2\chi_2^{\langle (\zeta,1) \rangle} + a_3\chi_3^{\langle (\zeta,1) \rangle} \\ a_4\chi_1^{\langle (1,\zeta) \rangle} + a_5\chi_2^{\langle (1,\zeta) \rangle} + (a_1 + a_2 + a_3 - a_4 - a_5)\chi_3^{\langle (1,\zeta) \rangle} \\ a_6\chi_1^{\langle (\zeta,\zeta) \rangle} + a_7\chi_2^{\langle (\zeta,\zeta) \rangle} + (a_1 + a_2 + a_3 - a_6 - a_7)\chi_3^{\langle (\zeta,\zeta) \rangle} \\ a_8\chi_1^{\langle (\zeta^2,\zeta) \rangle} + a_9\chi_2^{\langle (\zeta^2,\zeta) \rangle} + (a_1 + a_2 + a_3 - a_8 - a_9)\chi_3^{\langle (\zeta^2,\zeta) \rangle} \end{pmatrix}$$

mit $a_1, \ldots, a_9 \in \mathbb{Z}$ und χ_i^C i-ter irreduzibler Charakter der Untergruppe C gilt. Für den Restriktionsmorphismus gilt

$$R(P) \xrightarrow{\text{Res}} \lim_{\mathcal{O}_\mathcal{C}(P)^{op}} R(C) \subseteq \bigoplus_{\mathcal{O}_\mathcal{C}(P)} R(C),$$

$$\sum_{1 \le i,j \le 3} c_{ij}\chi_i \otimes \chi_j \longmapsto y,$$

$$y = \begin{pmatrix} (\sum_{1 \le i,j \le 3} c_{ij})\chi_0 \\ (c_{11} + c_{12} + c_{13})\chi_1^{\langle (\zeta,1) \rangle} + (c_{21} + c_{22} + c_{23})\chi_2^{\langle (\zeta,1) \rangle} + (c_{31} + c_{32} + c_{33})\chi_3^{\langle (\zeta,1) \rangle} \\ (c_{11} + c_{21} + c_{31})\chi_1^{\langle (1,\zeta) \rangle} + (c_{12} + c_{22} + c_{32})\chi_2^{\langle (1,\zeta) \rangle} + (c_{13} + c_{23} + c_{33})\chi_3^{\langle (1,\zeta) \rangle} \\ (c_{11} + c_{23} + c_{32})\chi_1^{\langle (\zeta,\zeta) \rangle} + (c_{12} + c_{21} + c_{33})\chi_2^{\langle (\zeta,\zeta) \rangle} + (c_{13} + c_{22} + c_{31})\chi_3^{\langle (\zeta,\zeta) \rangle} \\ (c_{11} + c_{22} + c_{33})\chi_1^{\langle (\zeta^2,\zeta) \rangle} + (c_{12} + c_{23} + c_{31})\chi_2^{\langle (\zeta^2,\zeta) \rangle} + (c_{13} + c_{21} + c_{32})\chi_3^{\langle (\zeta^2,\zeta) \rangle} \end{pmatrix}.$$

Es entsteht das lineare Gleichungssystem $Mc = a$ mit $a = (a_1, \ldots, a_9)$, $c = (c_{11}, \ldots, c_{33})$, wobei die Indizes in c nach Grösse geordnet sind,

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und der Lösung

$$c = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -a_2 - a_3 + a_4 + a_6 + a_8 \\ -a_2 - a_3 + a_5 + a_7 + a_9 \\ 3a_1 + 2a_2 + 2a_3 - a_4 - a_5 - a_6 - a_7 - a_8 - a_9 \\ a_2 + a_4 + a_7 - a_8 - a_9 \\ a_2 + a_5 - a_6 - a_7 + a_8 \\ a_2 - a_4 - a_5 + a_6 + a_8 \\ a_3 + a_4 - a_6 - a_7 + a_9 \\ a_3 + a_5 + a_6 - a_8 - a_9 \\ a_3 - a_4 - a_5 + a_7 + a_8 \end{pmatrix}.$$

Satz 2.5. *Sei p eine Primzahl, C_p die zyklische Gruppe von Ordnung p und $P = C_p \times C_p$ ihrer Produkt. Dann gilt*
(1) $p \cdot (\lim_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(P)^{op}} R(C)/R(P)) = 0$,
(2) für alle $y \in \lim_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(P)^{op}} R(C)$ gilt $y^p \in R(P)$.

Beweis. (1) folgt aus (2.2). Für (2) setze $R := R(P)$, $S := \lim_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(P)^{op}} R(C)$ und definiere I_p als das Ideal in $\mathbb{Z}$ aus Bemerkung 1.33, d.h.

$$I_p = \{M \in \mathbb{Z} \,|\, \text{für alle } y \in S, My^p \in R\}.$$

Durch Satz 1.15 ist die Inklusion $R \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p \overset{\mathrm{Res}\otimes\mathrm{id}_{\mathbb{Z}_p}}{\hookrightarrow} S \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p$ für die Primzahl p ein $\mathcal{F}_p$-Isomorphismus. Deshalb ist die Voraussetzung des Lemmas 1.36 erfüllt. Wenn also $I_p = (M_0)$ gilt, dann folgt $p \nmid M_0$. Wegen (1) gilt $p \in I_p$. Daher muss $I_p = (1) = \mathbb{Z}$ sein, d.h. (2) gilt. □

2 Die minimale Familie des Funktors R für C_p

Sei p eine Primzahl und C_p zyklisch von Ordnung p. Betrachtet man für das Limes die triviale Familie $\{1\}$ der Untergruppen, so ist klar, dass $\lim_{\mathcal{O}_{\{1\}}(C_p)^{op}} R(C) = \mathbb{Z}$ gilt. Wegen $R(C_p) = \mathbb{Z}[X]/(X^p - 1)$ hat der Restriktionsmorphismus dann die Form

$$\begin{aligned} \mathrm{Res} : R(C_p) &\longrightarrow \mathbb{Z}, \\ X &\longmapsto 1, \end{aligned}$$

wobei $\mathrm{Res}(X-1) = 0$, während $X - 1$ nicht nilpotent ist. Daher gilt $\ker(\mathrm{Res}) \neq 0$. Offensichtlich ist Res genau dann ein $\mathcal{N}$-Isomorphismus, wenn $\ker(\mathrm{Res})$ in das Nilradikal

$\mathrm{Nil}(R(C_p))$ enthalten ist. Laut [Krempa] Proposition 5.2 1. Seite 13 ist aber der Ring $R(C_p)$ reduziert, d.h. $\mathrm{Nil}(R(C_p)) = 0$. Wegen $\ker(\mathrm{Res}) \neq 0$ folgt also, dass Res kein $\mathcal{N}$-Isomorphismus ist.

Satz 2.6. *Sei p eine Primzahl und C_p die zyklische Gruppe von Ordnung p. Die minimale Familie für den Darstellungsring $R(-)$ ist dann die Familie $\mathcal{C}$ aller zyklischen Untergruppen von C_p.*

§ 3. Die minimale Familie der Lubin-Tate Theorie E für endliche p-Gruppen

In diesem Paragraphen wird die minimale Familie der Lubin-Tate Theorie E zur p-Gruppe A für eine Primzahl p bestimmt, d.h. eine bestimmte Familie $\mathcal{A}^m_{(p)}$ der abelschen Untergruppen $A' \subseteq A$, die bezüglich der Inklusion möglichst klein und die Restriktion

$$\mathrm{Res} : E^0(BA) \longrightarrow \lim_{A' \in \mathcal{A}^m_{(p)}} E^0(BA')$$

ein $\mathcal{N}$-Isomorphismus ist, vgl. [MNN] Proposition 5.26 Seite 44.

Sei E eine Kohomologietheorie. E heisst schwach periodisch, falls die Abbildung

$$E^2(*) \otimes_{E(*)} E^n(*) \longrightarrow E^{n+2}(*),$$
$$x \otimes y \longmapsto xy$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$ mit $E(*) := E^0(*)$ ein Isomorphismus ist. Insbesondere gilt dann $E^2(*) \otimes_{E(*)} E^{-2}(*) \cong E(*)$. Eine Kohomologietheorie E heisst multiplikativ, falls für alle topologische Räume X, $E^*(X)$ mit der Struktur eines kommutativen graduierten Ringes versehen ist.

Definition 3.1. *Sei R ein kommutativer Ring, $C \to \mathrm{Spec}(R)$ eine elliptische Kurve über R und E eine multiplikative Kohomologietheorie, die gerade und schwach periodisch ist. Dann heisst E eine elliptische Kohomologietheorie, falls $R \cong E(*)$ und $\widehat{C} \cong \mathrm{Spf}E(\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty)$ gilt.*

Hierbei bezeichnet $\widehat{C}$ die formale Komplettierung von C entlang der Identität. Aus $C \to \mathrm{Spec}(R)$ folgt, dass der Morphismus der Schemata $\mathcal{O}_C \to \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(R)}$ surjektiv mit Kern gleich ein Ideal $I \subset \mathcal{O}_C$ ist. Dann gibt es offensichtliche Homomorphismen

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{O}_C/I^3 \longrightarrow \mathcal{O}_C/I^2 \longrightarrow \mathcal{O}_C/I,$$

die $(\mathcal{O}_C/I^n)$ zu einem inversen System der Ringe macht, siehe [Hartshorne] Seite 193. Der topologische Raum $\widehat{C}$ ist dann das abgeschlossene Unterschema von C, das durch dem Idealgarbe $\mathcal{I}$ mit $\mathcal{I}(C) = I$ definiert ist. Es gilt

$$\mathcal{O}_{\widehat{C}} = \varprojlim_{n \geq 1} \mathcal{O}_C/I^n$$

mit $(\widehat{C}, \mathcal{O}_{\widehat{C}})$ die formale Komplettierung von C entlang der Identität.

Lemma 3.2. *Sei p eine Primzahl, $m \geq 1$ und $A = \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$. Dann gilt $BA = S^\infty/A$, wobei für alle $(z_1, z_2, \ldots) \in S^\infty$, $e^{2\pi ik/p^m} \in A$, $0 \leq k < p^m$ die Operation von A auf S^∞ durch*

$$(e^{2\pi ik/p^m}, (z_1, z_2, \ldots)) \longmapsto e^{2\pi ik/p^m}(z_1, z_2, \ldots)$$

gegeben wird und die Sequenz

$$S^1 \longrightarrow BA \xrightarrow{f} \mathbb{C}\mathrm{P}^\infty$$

eine Serre Faserung ist, wobei f die Projektion ist, die einen $(z_1, z_2, \ldots) \in S^\infty$ modulo die Operation von A dessen Äquivalenzklasse $[z_1, z_2, \ldots] \in \mathbb{C}\mathrm{P}^\infty$ zuordnet.

Beweis. Man weiss, dass die exakte Sequenz der abelschen Gruppen

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

zur Faserung

$$K(\mathbb{Z}, 2) \longrightarrow K(\mathbb{Z}, 2) \longrightarrow K(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}, 2)$$

der Eilenberg-Maclane Räume führt. Wegen $\Omega K(G, n+1) = K(G, n)$ für eine Gruppe G und

$$\cdots \longrightarrow \Omega^2 B \longrightarrow \Omega F \longrightarrow \Omega E \longrightarrow \Omega B \longrightarrow F \longrightarrow E \longrightarrow B$$

für eine Faserung $F \to E \to B$, vgl. [Hatcher] Seite 409, wobei jede zwei auf einander folgenden Abbildungen eine Faserung ist folgt, dass

$$\underbrace{\Omega K(\mathbb{Z}, 2)}_{K(\mathbb{Z}, 1)} \longrightarrow \underbrace{\Omega K(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}, 2)}_{K(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}, 1)} \longrightarrow K(\mathbb{Z}, 2)$$

eine Faserung ist. Zur Gleichheit $BA = S^\infty/A$ und der Projektion f vgl. [Hatcher] Example 1B.4 bzw. Example 3E.2. Aus $K(\mathbb{Z}, 2) = \mathbb{C}\mathrm{P}^\infty$, $K(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}, 1) = B(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})$ und $K(\mathbb{Z}, 1) = S^1$ folgt dann die Behauptung zum $(BA, \mathbb{C}\mathrm{P}^\infty, f, S^1)$. □

Lemma 3.3. *Sei E die Lubin-Tate Theorie für p von Höhe n, G ihre formale Gruppe und A die zyklische p-Gruppe $\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$. Dann gilt*

$$\mathrm{Spf} E^0(BA) = \ker(G \xrightarrow{p_G^m} G),$$

wobei p_G^m die Multiplikation mit p^m Abbildung bezeichnet.

Beweis. Man weiss, dass die Lubin-Tate Theorie gerade periodisch und komplex orientierbar ist, vgl. [Lurie] Lecture 21, 22 bzw. 4 Remark 4. Sei $x \in E^2(\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty)$ so, dass $E^*(\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty) = E^*[\![x]\!]$ gilt. Nach Lemma 3.2 ist die Sequenz

$$S^1 \longrightarrow BA \xrightarrow{f} \mathbb{C}\mathrm{P}^\infty$$

eine Serre Faserung, die dann Anlass zur langen exakten Gysin Sequenz

$$\cdots \longrightarrow E^k(\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty) \longrightarrow E^k(BA) \longrightarrow E^{k-1}(\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty) \xrightarrow{[p^m](x)} E^{k+1}(\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty) \longrightarrow \cdots, \tag{3.4}$$

gibt, siehe [Kochman] Seite 37 Korrolar 2.2.6. Hierbei gilt

$$[m](x) := x +_G \cdots +_G x$$

m mal und für $m \in \mathbb{Z}_p$ ist durch die Darstellung

$$m = \sum_{i=0}^{\infty} a_i p^i$$

$0 \leq a_i \leq p-1$, $[m](x)$ für alle $m \in \mathbb{Z}_p$ definiert. Weiter gilt

$$[m](x +_G y) = [m](x) +_G [m](y).$$

Hier aus folgt, dass für alle $m \in \mathbb{Z}_p$, $[m](x)$ ein Endomorphismus von $E^*[\![x]\!]$ ist. Darüber hinaus gilt

$$[p^m](x) = ux^{p^{mn}} \bmod (\mathfrak{m}, x^{p^{mn}+1})$$

mit $u \in E^*$ eine Einheit und $\mathfrak{m}$ das maximale Ideal von E^0. Daher ist $[p^m](x)$ kein Nullteiler in $E^*[\![x]\!]$ und der Homomorphismus $[p^m](x)$ injektiv. Da E gerade ist, gilt $E^{k-1}[\![x]\!] = E^{k+1}[\![x]\!]$. Deshalb ist (3.4) zur langen exakten Sequenz

$$\cdots \longrightarrow E^*[\![x]\!] \overset{[p^m](x)}{\longrightarrow} E^*[\![x]\!] \longrightarrow E^*(BA) \longrightarrow \cdots$$

äquivalent. Weil $[p^m](x)$ injektiv ist folgt, dass (3.4) die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow E^*[\![x]\!] \overset{[p^m](x)}{\longrightarrow} E^*[\![x]\!] \longrightarrow E^*(BA) \longrightarrow 0$$

ist. Also ergibt sich die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathrm{Spf} E^*(BA) \longrightarrow \mathrm{Spf} E^*[\![x]\!] \overset{p_G^m}{\longrightarrow} \mathrm{Spf} E^*[\![x]\!] \longrightarrow \cdots \tag{3.5}$$

und für 0 ergibt (3.5) wegen $\mathrm{Spf} E^0[\![x]\!] = G$ die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathrm{Spf} E^0(BA) \longrightarrow G \overset{p_G^m}{\longrightarrow} G \longrightarrow \cdots$$

so wie

$$\mathrm{Spf} E^0(BA) = \ker(G \overset{p_G^m}{\longrightarrow} G). \ \square$$

Definition 3.6. *Sei E die Lubin-Tate Theorie für p von Höhe n und A eine endliche Gruppe. Für feste $m \geq 1$ sei $\mathcal{A}_{(p)}^m$ die Familie der abelschen Untergruppen $A' \subseteq A$ vom p-Rang kleiner gleich m, d.h.*

$$\dim_{\mathbb{F}_p}(A' \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}_p) \leq m.$$

Die Familie $\mathcal{A}_{(p)}^m$ für kleinst mögliche solche $m \geq 1$, für die der Homomorphismus

$$\mathrm{Res} : E^0(BA) \longrightarrow \lim_{A' \in \mathcal{A}_{(p)}^m} E^0(BA')$$

ein $\mathcal{N}$-Isomorphismus ist, heisst die minimale Familie oder die abgeleitete Defektbasis von E, vgl. [MNN] Definition 1.4 Seite 4.

Satz 3.7. *Sei E die Lubin-Tate Theorie für p von Höhe n und A eine p-Gruppe der Form $A = \underbrace{C_p \times \cdots \times C_p}_{n \text{ mal}}$. Die minimale Familie für E ist dann gleich zur Familie $\mathcal{A}^n_{(p)}$ aller Untergruppen von A.*

Beweis. Es wird für $\pi_0 E^{BA_+} = E^0(BA)$ und die Familie $\mathcal{A}^{n-1}_{(p)}$ der echten Untergruppen von A, d.h. mit p-Rang kleiner als n gezeigt, dass

$$\operatorname{rank}_R(\pi_0 E^{BA_+}) > \operatorname{rank}_R(\lim_{A' \in \mathcal{A}^{n-1}_{(p)}} \pi_0 E^{BA'_+}) \tag{3.8}$$

mit $R := \pi_0 E$ gilt. So ist in diesem Fall der Ringhomomorphismus Res offensichtlich kein $\mathcal{N}$-Isomorphismus, denn dann ist $\ker(\text{Res}) \neq 0$ und nicht nilpotent, da laut [HKR] Corollary 5.8 Seite 577 für alle endliche Gruppe A mit $|A| = p^r$ ist der Ring $E^*(BA)$ frei vom Rang p^{rn}. Laut [HKR] Corollary 5.11 Seite 578 gilt $E^*(B(C_p \times \cdots \times C_p)) \cong E^*(BC_p) \otimes_R \cdots \otimes_R E^*(BC_p)$. Durch Lemma 3.3 für C_p folgt $\operatorname{rank}_R(\pi_0 E^{BC_{p,+}}) = p^n$ und wegen der allgemein gültigen Relation $\operatorname{rank}(A \otimes B) = \operatorname{rank}(A) \cdot \operatorname{rank}(B)$, $\operatorname{rank}_R(\pi_0 E^{BA_+}) = \operatorname{rank}_R((\pi_0 E^{BC_{p,+}})^{\otimes_R n}) = (p^n)^n = p^{n^2}$. Wegen

$$\lim_{A' \in \mathcal{A}^{n-1}_{(p)}} \pi_0 E^{BA'_+} \subseteq \prod_{C_p^{n-1} \subset C_p^n} \pi_0 E^{BC^{n-1}_{p,+}}$$

reicht es die Ungleichheit (3.8) für den Rang des letzten Produktes zu zeigen. Wie zuvor gilt $\operatorname{rank}_R(\pi_0 E^{BC^{n-1}_{p,+}}) = (p^n)^{n-1} = p^{n(n-1)}$ und

$$\#\{\text{Einbettungen } C_p^{n-1} \hookrightarrow C_p^n\} = \frac{p^n - 1}{p - 1}.$$

Die letzte Gleichheit sieht man wie folgt. Ein $x = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in C_p^{n-1}$, $x \neq 0$ kann auf genau $p^n - 1$ Elementen ungleich 0 in C_p^n eingebettet werden. Zu einer bestimmten Einbettung $C_p^{n-1} \subset C_p^n$ und $0 \neq x \in C_p^{n-1}$, etwa $x_i \neq 0$ führen bei festen anderen Komponenten die $p-1$ Einbettungen $(\ldots, \sigma(x_i), \ldots)$, $\sigma : C_p \hookrightarrow C_p$ eine Einbettung, zu keiner neuen Untergruppe von C_p^n. Daher ist die Zahl der unterschiedlichen Einbettungen von C_p^{n-1} in C_p^n gleich $\frac{p^n-1}{p-1}$. Mit der allgemein gültigen Formel $\operatorname{rank}(A \times B) = \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B)$ gilt deshalb

$$\operatorname{rank}_R(\prod_{C_p^{n-1} \subset C_p^n} \pi_0 E^{BC^{n-1}_{p,+}}) = \tfrac{p^n-1}{p-1} \cdot p^{n(n-1)}.$$

Nun bleibt die Ungleichheit $p^{n^2} > \frac{p^n-1}{p-1} \cdot p^{n(n-1)}$ zu überprüfen. Wegen $p \geq 2$, gilt

$$\frac{p^{n^2}}{\frac{p^n-1}{p-1} \cdot p^{n(n-1)}} = \frac{p-1}{p^n-1} \cdot p^{n^2 - n(n-1)} = \frac{p-1}{p^n-1} \cdot p^n \geq \frac{p^n}{p^n-1} > 1. \ \square$$

§ 4. Die Markentafel endlicher Gruppen

In diesem Paragraphen wird die Bemerkung 3.15 in [MNN] ausgearbeitet, die es erlaubt den Index $n(\mathcal{F})$ einer Familie $\mathcal{F}$ der Untergruppen einer endlichen Gruppe G algorithmisch zu berechnen. Die theoretische Grundlage hiervon ist in den Satz 4.1 enthalten, der im Laufe des Paragraphen bewiesen wird. Dann werden für einige endliche Gruppen Beispielrechnungen ausgeführt. Hierbei werden die Markentafel und die Indizes $n(\mathcal{F})$ einiger Familien $\mathcal{F}$ der Untergruppen, jedoch nicht aller Familien bestimmt.

Zur Erinnerung, der Burnside Ring $A(G)$ einer endlichen Gruppe G ist die frei abelsche Gruppe mit Basis $\{[G/H]\}_{H\leq G}$, wobei H den Konjugationsklassen aller Untergruppen von G durchläuft. Das G-Ringspektrum einer endlichen Gruppe G kann man in [Greenlees] lesen. Zu einem G-Ringspektrum R (dem Sphärespektrum S z.B., vgl. [Greenlees] Example 3.5) bezeichnet $\pi_*^{(-)}R$ den Funktor, der einem $G/H \in \mathcal{O}_{\mathcal{F}}(G)$ die stabile Homotopiegruppe $\pi_*^H R$ zuordnet. $\widehat{H}^0_{\mathcal{F}}(\pi_*^{(-)}R)$ bezeichnet die Amitsur-Dress-Tate Kohomologie von $\mathcal{F}$ mit Koeffizienten in $\pi_*^{(-)}R$.

Satz 4.1. *Sei S das Sphärespektrum. Dann wird der kommutative Ring $\widehat{H}^0_{\mathcal{F}}(\pi_0^{(-)}S)$ durch $|G|$ annuliert. Wenn $n(\mathcal{F})$ die kleinste positive Zahl ist, die in $\widehat{H}^0_{\mathcal{F}}(\pi_0^{(-)}S)$ verschwindet, so gilt $n(\mathcal{F})\,|\,|G|$.*

Der Beweis dieses Satzes, der sich als Aussage (3) der Proposition 3.11 in [MNN] befindet wird durch Satz 4.8 geliefert. Dafür betrachtet man Folgendes. Aus

$$\begin{tikzcd}
\operatorname*{colim}_{\mathcal{O}_{\mathcal{F}}(G)} \pi_*^H R \arrow[r, "\mathrm{N}"] \arrow[d, "\mathrm{Ind}_{\mathcal{F}}^G"'] & \lim_{\mathcal{O}_{\mathcal{F}}(G)^{op}} \pi_*^H R, \\
\pi_*^G R \arrow[r, equal] & \pi_*^G R \arrow[u, "\mathrm{Res}_{\mathcal{F}}^G"']
\end{tikzcd}$$

für ein G-Ringspektrum R folgt

$$\widehat{H}^0_{\mathcal{F}}(\pi_*^{(-)}R) \cong \lim_{\mathcal{O}_{\mathcal{F}}(G)^{op}} \pi_*^H R/\operatorname{im}\mathrm{Ind}_{\mathcal{F}}^G$$

und laut [May] XVII.2 Theorem 2.1 gilt $\pi_0^G S \cong A(G)$. Setzt man $R = S$ und $* = 0$, so erhält man mit Ausnahme von N und $\mathrm{Ind}_{\mathcal{F}}^G$ Ringhomomorphismen wie folgt.

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{H\in\mathcal{F}} A(H) \arrow[d, two heads] & \mathbb{Z} \arrow[d] & \\
\operatorname*{colim}_{\mathcal{O}_{\mathcal{F}}(G)} A(H) \arrow[r, "\mathrm{N}"] \arrow[d, "\mathrm{Ind}_{\mathcal{F}}^G"'] & \lim_{\mathcal{O}_{\mathcal{F}}(G)^{op}} A(H) \arrow[r, two heads] & \widehat{H}^0_{\mathcal{F}}(\pi_0^{(-)}S) \\
A(G) \arrow[r, equal] & A(G) \arrow[u, "\mathrm{Res}_{\mathcal{F}}^G"] & \mathbb{Z} \arrow[l, "\psi"'] \arrow[u, "\varphi"']
\end{tikzcd} \tag{4.2}$$

Lemma 4.3. *Für alle $z \in \mathbb{Z}$ ist äquivalent:*
(i) $\varphi(z) = 0$,
(ii) Es gibt $x \in \operatorname{im}(\operatorname{Ind}_{\mathcal{F}}^G)$ und $y \in \ker(\operatorname{Res}_{\mathcal{F}}^G)$, so dass $\psi(z) = x + y$ gilt.

Beweis. Angenommen für $z \in \mathbb{Z}$ (i) gilt. Da $\widehat{H}^0_{\mathcal{F}}(\pi_0^{(-)}S) \cong \operatorname{coker}(\mathrm{N})$ gilt, folgt $\varphi(z) \in \operatorname{im}(\mathrm{N})$. Daher gibt es ein $\alpha \in \operatorname{colim}_{\mathcal{O}_{\mathcal{F}}(G)} A(H)$ so, dass $\mathrm{N}(\alpha) = \varphi(z)$ gilt. Sei $x := \operatorname{Ind}_{\mathcal{F}}^G(\alpha)$. Da $\operatorname{Res}_{\mathcal{F}}^G(x) = \mathrm{N}(\alpha) = \varphi(z)$ gilt und das Diagramm (4.2) kommutiert, es folgt, dass modulo ein Element y aus dem Kern von $\operatorname{Res}_{\mathcal{F}}^G$ wird z unter ψ auf x abgebildet, d.h. $\psi(z) = x + y$ mit $x \in \operatorname{im}(\operatorname{Ind}_{\mathcal{F}}^G)$ und $y \in \ker(\operatorname{Res}_{\mathcal{F}}^G)$. Also gilt (ii).

Angenommen (ii) gilt für $z \in \mathbb{Z}$. Es gibt also ein $\alpha \in \operatorname{colim}_{\mathcal{O}_{\mathcal{F}}(G)} A(H)$ so, dass $\operatorname{Ind}_{\mathcal{F}}^G(\alpha) = x$ gilt. Durch $\operatorname{Res}_{\mathcal{F}}^G(\psi(z)) = \operatorname{Res}_{\mathcal{F}}^G(x) = \operatorname{Res}_{\mathcal{F}}^G(\operatorname{Ind}_{\mathcal{F}}^G(\alpha)) = \mathrm{N}(\alpha)$, $\widehat{H}^0_{\mathcal{F}}(\pi_0^{(-)}S) \cong \operatorname{coker}(\mathrm{N})$ und der Kommutativität des Diagramms (4.2) folgt $\varphi(z) = \mathrm{N}(\alpha)$ modulo $\operatorname{im}(\mathrm{N})$, d.h. $\varphi(z) = 0$. Also gilt (i). $\square$

Bemerkung 4.4. Sei $C(G)$ definiert als

$$C(G) := \prod_{(H)} \mathbb{Z},$$

wobei

$$(H) := \{H' \leq G \,|\, H' \text{ ist zu } H \text{ konjugiert}\}$$

und H allen Untergruppen von G durchläuft. Betrachtet man die Ringe $A(G)$ und $C(G)$ versehen mit den Basen $\{G/(H) \,|\, H \leq G\}$ bzw. $\{(H_1), \ldots, (H_n) \,|\, \forall j > i \; H_j \not\subseteq H_i\}$, so wird die darstellende Matrix M_φ der Inklusion $\varphi : A(G) \hookrightarrow C(G)$ bezüglich dieser Basen gegeben durch

$$M_\varphi = (\left|(G/H_j)^{H_i}\right|)_{i,j}$$

mit $H_i, H_j \in \{(H) \,|\, H < G\}$. Die Komponente dieser Matrix heißen die *Marken* der Gruppe G und die Matrix selbst die *Markentafel*. Jetzt wird gezeigt, dass für alle i, j mit $i > j$ $(G/H_j)^{H_i} = \emptyset$ gilt, d.h. die Matrix M_φ ist obere Dreieck. Für Untergruppen H und K von G gilt per Definition

$$(G/K)^H = \{gK \,|\, h \cdot gK = gK \,\forall\, h \in H\}.$$

Laut [Dieck] Proposition (1.14) Seite 5 gilt

$$\hom_G(G/H, G/K) \cong \{gK \in G/K \,|\, g^{-1}Hg \subseteq K\}.$$

Nun ist aber $g^{-1}Hg \subseteq K$ äquivalent zur $Hg \subseteq gK$, also zur

$$H \cdot Hg \subseteq H \cdot gK = Hg \cdot K \subseteq gK \cdot K = gK,$$

d.h. zur $H \cdot gK \subseteq gK$. Da jedes $h \in H$ die Elementen von gK permutiert, ist sie also äquivalent zur $h \cdot gK = gK$ für alle $h \in H$. Also gilt

$$(G/K)^H \cong \hom_G(G/H, G/K)$$

und durch [Dieck] Proposition (1.14) Seite 5

$$(G/K)^H = \emptyset,$$

wenn es kein $g \in G$ gibt so, dass $g^{-1}Hg \subseteq K$ gilt. Daher kann ein einfaches Algorithmus erstellt werden, womit zu einer endlichen Gruppe G die Markentafel in einigen Schritten gerechnet wird. Für das Algorithmus und einige Beispielrechnungen siehe Anhang A.

Proposition/Definition 4.5. *Sei G eine endliche Gruppe und $\mathcal{F}$ eine Familie der Untergruppen von G. Dann existiert eine kleinste Zahl $n(\mathcal{F}) > 0$, der Index der Familie $\mathcal{F}$ sowie*

$$x \in \operatorname{im}\left(\operatorname*{colim}_{\mathcal{O}_{\mathcal{F}}(G)} A(H) \xrightarrow{\operatorname{Ind}_{\mathcal{F}}^G} A(G)\right)$$

und

$$y \in \ker\left(A(G) \xrightarrow{\operatorname{Res}_{\mathcal{F}}^G} \lim_{\mathcal{O}_{\mathcal{F}}(G)^{op}} A(H)\right)$$

so, dass $n(\mathcal{F}) = x + y$ gilt. Darüber hinaus gilt $n(\mathcal{F}) \,|\, |G|$ (vgl. [Greenl. and May] Proposition 21.3 Seite 121).

Beweis. Definiere

$$I\mathcal{F} := \ker\left(A(G) \xrightarrow{\operatorname{Res}_{\mathcal{F}}^G} \lim_{\mathcal{O}_{\mathcal{F}}(G)^{op}} A(H)\right),$$
$$I'\mathcal{F} := \operatorname{im}\left(\operatorname*{colim}_{\mathcal{O}_{\mathcal{F}}(G)} A(H) \xrightarrow{\operatorname{Ind}_{\mathcal{F}}^G} A(G)\right)$$

und den Homomorphismus

$$\begin{aligned} \varphi_H : A(G) &\longrightarrow \mathbb{Z}, \\ X &\longmapsto |X^H|, \end{aligned}$$

wobei für eine G-Menge X und eine Untergruppe $H \leq G$

$$X^H := \{x \in X \,|\, hx = x \text{ für alle } h \in H\}$$

gilt, siehe [Dieck] Seite 19. Es gilt dann

$$I\mathcal{F} = \{\alpha \in A(G) \,|\, \varphi_H(\alpha) = 0 \,\forall\, H \in \mathcal{F}\}, \tag{4.6}$$
$$I'\mathcal{F} = \{\alpha \in A(G) \,|\, \varphi_K(\alpha) = 0 \,\forall\, K \notin \mathcal{F}\}. \tag{4.7}$$

Beweis von (4.6). Sei $\alpha = \sum n_J[G/J] \in I\mathcal{F}$. Es folgt insbesondere, dass $n_H = 0$ gilt für alle $H \in \mathcal{F}$. Für $K \notin \mathcal{F}$ mit $n_K \neq 0$ ist $(G/K)^H \neq \emptyset$ ausgeschlossen, denn es gilt $(G/K)^H = \{gK \in G/K \,|\, g^{-1}Hg \subseteq K\}$, siehe Bemerkung 4.4 und unter $\operatorname{Res}_{\mathcal{F}}^G$ wird in diesem Fall G/K auf $1 \in A(H)$ abgebildet, siehe (5.3). Also gilt $\varphi_H(\alpha) = 0$ für alle

$H \in \mathcal{F}$, d.h. „$\subseteq$“ gilt. Da aus $\varphi_H(\alpha) = 0$ für ein $\alpha \in \{\alpha \in A(G) \,|\, \varphi_H(\alpha) = 0 \,\forall\, H \in \mathcal{F}\}$, $n_H = 0$ folgt, ist α eine lineare Kombination der Klassen $[G/K]$ für $K \notin \mathcal{F}$ und liegt durch Lemma 4.3 im Kern von $\mathrm{Res}^G_{\mathcal{F}}$. Also gilt „$\supseteq$“.
Beweis von (4.7). Da $I'\mathcal{F}$ durch die $[G/H]$ mit $H \in \mathcal{F}$ gespannt wird, gilt „$\subseteq$“. Sei $\alpha = \sum n_J[G/J]$ so, dass für alle $K \notin \mathcal{F}$ $\varphi_K(\alpha) = 0$ gilt. Wenn (H) die Konjugationsklasse der Untergruppe H in G bezeichnet, die maximal mit $n_H \neq 0$ ist, gilt $\varphi_H(\alpha) = n_H|WH| \neq 0$. Zur Erinnerung, eine Untergruppe $H < G$ heisst maximal, wenn es keine Untergruppe $K < G$ gibt so, dass $H < K$ gilt. Die Gleichheit sieht man wie folgt. Für die Weylgruppe WH der Untergruppe H gilt $WH = NH/H$, wobei $NH = \{g \in G \,|\, gHg^{-1} = H\}$ der Normalisator von H in G heisst. Deshalb gilt

$$WH = \{gH \in G/H \,|\, gH = Hg\}$$

und wegen

$$(G/H)^H = \{gH \in G/H \,|\, \underbrace{\underbrace{hgH = gH \text{ für alle } h \in H}_{HgH = gH = gHH}}_{Hg = gH}\}$$

folgt $(G/H)^H = WH$. Daher muss $H \in \mathcal{F}$ sein und $n_K = 0$ für alle $K \notin \mathcal{F}$. D.h. α ist eine lineare Kombination der Klassen $[G/H]$ für $H \in \mathcal{F}$ und genau diese liegen im Bild von $\mathrm{Ind}^G_{\mathcal{F}}$, also gilt „$\supseteq$“.
Laut [May] XVII.2 Theorem 2.1 ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi : A(G) &\longrightarrow C(G), \\ x &\longmapsto ((H) \mapsto \varphi_H(x)) \end{aligned}$$

ein Monomorphismus kommutativer Ringe und es gilt $|G|\cdot C(G) \subseteq A(G)$, siehe auch [Dieck] Proposition 4.6 Seite 253. Sei $e_{\mathcal{F}}$ der Idempotent in $C(G)$ mit H-ter Komponent gleich 1, wenn $H \in \mathcal{F}$ gilt und 0 sonst. Ist $\widetilde{e}_{\mathcal{F}} = 1 - e_{\mathcal{F}}$, so liegt $|G| = |G|\widetilde{e}_{\mathcal{F}} + |G|e_{\mathcal{F}}$ in $I\mathcal{F} \oplus I'\mathcal{F}$. Sei $n(\mathcal{F})$ die kleinste positive Zahl, so dass $n(\mathcal{F})e_{\mathcal{F}} \in A(G)$ gilt. Aus $A(G)$ ein Ring folgt dann $n(\mathcal{F})\widetilde{e}_{\mathcal{F}} \in A(G)$. Schreibt man $|G| = k \cdot n(\mathcal{F}) + l$ mit positive Zahlen k, l und $l < n(\mathcal{F})$, so folgt $le_{\mathcal{F}} = |G|e_{\mathcal{F}} - k \cdot n(\mathcal{F})e_{\mathcal{F}} \in A(G)$. Da $n(\mathcal{F})$ mit diese Eigenschaft minimal ist, folgt $l = 0$, d.h. $n(\mathcal{F})$ teilt $|G|$. Also gilt $n(\mathcal{F}) = n(\mathcal{F})\widetilde{e}_{\mathcal{F}} + n(\mathcal{F})e_{\mathcal{F}} \in I\mathcal{F} \oplus I'\mathcal{F}$ für alle $\mathcal{F}$. $\square$

Satz 4.8. *Die Aussage des Satzes 4.1 ist zur Proposition 4.5 äquivalent.*

Beweis. Sei $n(\mathcal{F}) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ so, dass $\ker(\varphi) = (n(\mathcal{F})))$ gilt. Da $A(G)$ ein freier $\mathbb{Z}$-Modul vom Rang $\#\{(H) \,|\, H < G\}$ ist, gilt $\psi(n(\mathcal{F})) = n(\mathcal{F})$. Die Äquivalenz folgt dann aus Lemma 4.3. $\square$

Algorithmus A.1. (Zur Berechnung von Markentafel).

1. Finde alle Untergruppen der endlichen Gruppe G bis auf Konjugation etwa $H_1, \ldots, H_n$ so, dass für alle i, j mit $i < j$, $H_j \not\subset H_i$ gilt. Offensichtlich ist H_1 die triviale Untergruppe von G und $H_n = G$.
2. Berechne die Linksnebenklassen $G/H_1, \ldots, G/H_n$.
3. Für alle i, j berechne die Fixpunktmengen

$$(G/H_j)^{H_i} = \{gH_j \in G/H_j \,|\, h \cdot gH_j = gH_j \text{ für alle } h \in H_i\}.$$

   Hierbei gilt laut Bemerkung 4.4

$$(G/H_j)^{H_i} = \emptyset$$

   für alle i, j, falls es kein $g \in G$ gibt so, dass $gH_ig^{-1} \subset H_j$ gilt. Es ist leicht zu sehen, dass für alle i

$$(G/H_i)^{H_1} = G/H_i$$

   und

$$(G/H_n)^{H_i} = G/H_n$$

   gilt.
4. Setze die Werte $|(G/H_j)^{H_i}|$ in der oberen Dreiecksmatrix M ein

$$M = \begin{pmatrix} |G/H_1| & |G/H_2| & \cdots & |G/H_n| \\ 0 & \left|(G/H_2)^{H_2}\right| & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & \left|(G/H_n)^{H_n}\right| \end{pmatrix}.$$

Beispiel A.2. $\boxed{\text{Die Gruppe } G = C_4 = \{1, -1, i, -i\}.}$

1. Bis auf Konjugation gibt es die Untergruppen $\mathfrak{E} := \{1\}$, $C_2 = \{1, -1\}$ und C_4 selbst.
2. Die Linksnebenklassen sind

$$\begin{aligned} C_4/\mathfrak{E} &= \{g\mathfrak{E} \,|\, g \in C_4\}, \\ C_4/C_2 &= \{C_2, iC_2\}, \\ C_4/C_4 &= \{C_4\}. \end{aligned}$$

3. Es gilt

$$(C_4/\mathfrak{E})^{C_2} = (C_4/\mathfrak{E})^{C_4} = (C_4/C_2)^{C_4} = \emptyset$$

und

$$(C_4/C_2)^{C_2} = C_4/C_2.$$

4. Also erhält man

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Einige weitere Beispiele folgen hierunter.

Beispiel A.3. $\boxed{\text{Die Gruppe } G := C_2 \times C_2 = \{1, a, b, ab\}.}$
Bis auf Konjugation gibt es die Untergruppen $e := \{1\}$, $C_a := \{1, a\}$, $C_b := \{1, b\}$, $C_{ab} := \{1, ab\}$ und G selbst. Es gilt

$$\begin{aligned} G/e &= \{ge \mid g \in G\}, & G/C_{ab} &= \{C_{ab}, \underbrace{aC_{ab}}_{bC_{ab}}\}, \\ G/C_a &= \{C_a, bC_a\}, & & \\ G/C_b &= \{C_b, aC_b\}, & G/G &= \{G\}. \end{aligned}$$

Für jede G-Menge X und jede Untergruppe H von G gilt

$$X^e = X,$$
$$(G/G)^H = G/G.$$

Für die zyklische Untergruppen C_i von Ordnung zwei gilt

$$(G/C_j)^{C_i} = \begin{cases} G/C_i, & i = j, \\ \emptyset, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hieraus ergibt sich die Matrix

$$M_\varphi = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nimmt man z.B. $\mathcal{F} = \mathcal{C}$ die Familie aller zyklischen Untergruppen von G, so gilt $e_\mathcal{F} = (1, 1, 1, 1, 0)$. Löst man das System $M_\varphi x = e_\mathcal{F}$ nach x, so findet man $x = \frac{1}{2} \cdot (-1, 1, 1, 1, 0)$. Also erhält man das System $M_\varphi \widetilde{x} = n(\mathcal{F}) \cdot e_\mathcal{F}$ mit der Lösung $\widetilde{x} \in A(G)$, $\widetilde{x} = (-1, 1, 1, 1, 0)$ und $n(\mathcal{F}) = 2$. Analog findet man die Indizes $n(\mathcal{F})$ anderer Familien.

	G/e	G/C_a	G/C_b	G/C_{ab}	G/G
e	4	2	2	2	1
C_a	0	2	0	0	1
C_b	0	0	2	0	1
C_{ab}	0	0	0	2	1
G	0	0	0	0	1

Die Markentafel von $C_2 \times C_2$

$\mathcal{F}$	$n(\mathcal{F})$
$\mathcal{J}$	4
$\mathcal{C} = \mathcal{C}_{(2)} = \mathcal{A}_{(2)}$	2
$\mathcal{A}ll$	1

Die Indizes von $C_2 \times C_2$

Beispiel A.4. $\boxed{\text{Die Gruppe } \mathfrak{S}_3.}$
Bis auf Konjugation gibt es die Untergruppen $e := \{(1)\}$, $C_2 := \{(1),(12)\}$, $C_3 = \{(1),(123),(132)\}$ und $\mathfrak{S}_3$ selbst. Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathfrak{S}_3/e &= \{ge \,|\, g \in \mathfrak{S}_3\}, \\
\mathfrak{S}_3/C_2 &= \{C_2, \underbrace{(13)C_2}_{(123)C_2}, \underbrace{(23)C_2}_{(132)C_2}\}, \\
\mathfrak{S}_3/C_3 &= \{C_3, \underbrace{(12)C_3}_{(13)C_3 = (23)C_3}\}, \\
\mathfrak{S}_3/\mathfrak{S}_3 &= \{\mathfrak{S}_3\}.
\end{aligned}$$

Für die zyklische Untergruppen C_i von Ordnung grösser gleich zwei gilt

$$\begin{aligned}
(\mathfrak{S}_3/C_j)^{C_i} &= \emptyset, \quad i \neq j, \\
(\mathfrak{S}_3/C_2)^{C_2} &= (1)C_2, \\
(\mathfrak{S}_3/C_3)^{C_3} &= \mathfrak{S}_3/C_3.
\end{aligned}$$

Also ergibt sich die Matrix

$$M_\varphi = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Analog wie bei $G = C_2 \times C_2$ für $\mathcal{F} = \mathcal{C}$ erhält man das System $M_\varphi \widetilde{x} = n(\mathcal{F}) \cdot e_{\mathcal{F}}$, $e_{\mathcal{F}} = (1,1,1,0)$ mit der Lösung $\widetilde{x} \in A(\mathfrak{S}_3)$, $\widetilde{x} = (-1,2,1,0)$ und $n(\mathcal{F}) = 2$. Auf ähnliche Weise findet man sie für weiteren Familien.

	$\mathfrak{S}_3/e$	$\mathfrak{S}_3/C_2$	$\mathfrak{S}_3/C_3$	$\mathfrak{S}_3/\mathfrak{S}_3$
e	6	3	2	1
C_2	0	1	0	1
C_3	0	0	2	1
$\mathfrak{S}_3$	0	0	0	1

Die Markentafel von $\mathfrak{S}_3$

$\mathcal{F}$	$n(\mathcal{F})$
$\mathcal{J}$	6
$\mathcal{C}$	2
$\mathcal{C}_{(2)} = \mathcal{A}_{(2)}$	3
$\mathcal{C}_{(3)} = \mathcal{A}_{(3)}$	2
$\mathcal{A}ll$	1

Die Indizes von $\mathfrak{S}_3$

Beispiel A.5. $\boxed{\text{Die Gruppe } D_4.}$
Bis auf Konjugation gibt es die Untergruppen $e := \{1\}$, $C_s := \{1, s\}$, $C_{sr} := \{1, sr\}$, $C_{r^2} := \{1, r^2\}$, $C_4 = \{1, r, r^2, r^3\}$, $D_2 = \{1, s, r^2, sr^2\}$, $D_2' := \{1, sr, r^2, sr^3\}$ und D_4 selbst. Es gilt

$$\begin{aligned} D_4/e &= \{ge \,|\, g \in D_4\}, & D_4/C_4 &= \{C_4, sC_4\}, \\ D_4/C_s &= \{C_s, rC_s, r^2C_s, r^3C_2\}, & D_4/D_2 &= \{D_2, rD_2\}, \\ D_4/C_{sr} &= \{C_{sr}, rC_{sr}, r^2C_{sr}, r^3C_{sr}\}, & D_4/D_2' &= \{D_2', rD_2'\}, \\ D_4/C_{r^2} &= \{C_{r^2}, rC_{r^2}, sC_{r^2}, srC_{r^2}\}, & D_4/D_4 &= \{D_4\}. \end{aligned}$$

Also gilt

$$\begin{aligned} (D_4/C_j)^{C_i} &= \emptyset, \quad i \neq j \text{ und} & (D_4/D_2)^{C_s} &= D_4/D_2, \\ & \qquad (i,j) \neq (r^2, 4), & (D_4/D_2')^{C_{sr}} &= D_4/D_2', \\ (D_4/C_4)^{C_{r^2}} &= D_4/C_4, & (D_4/D_2)^{C_{r^2}} &= D_4/D_2, \\ (D_4/C_s)^{C_s} &= \{C_s, r^2C_s\}, & (D_4/D_2')^{C_{r^2}} &= D_4/D_2', \\ (D_4/C_{sr})^{C_{sr}} &= \{C_{sr}, r^2C_{sr}\}, & (D_4/D_2)^{D_2} &= D_4/D_2, \\ (D_4/C_{r^2})^{C_{r^2}} &= D_4/C_{r^2}, & (D_4/D_2')^{D_2'} &= D_4/D_2'. \\ (D_4/C_4)^{C_4} &= D_4/C_4, \end{aligned}$$

Die übrigen Fixpunktmengen sind alle leer. Also ergibt sich die Matrix

$$M_\varphi = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 4 & 4 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wie zuvor erhält man für $\mathcal{F} = \mathcal{C}$ das System $M_\varphi \widetilde{x} = n(\mathcal{F}) \cdot e_\mathcal{F}$, $e_\mathcal{F} = (1,1,1,1,1,0,0,0)$ mit der Lösung $\widetilde{x} \in A(D_4)$, $\widetilde{x} = (-1,1,1,0,1,0,0,0)$ und $n(\mathcal{F}) = 2$. Und für $\mathcal{F} \neq \mathcal{C}$ ähnlich.

	D_4/e	D_4/C_s	D_4/C_{sr}	D_4/C_{r^2}	D_4/C_4	D_4/D_2	D_4/D_2'	D_4/D_4
e	8	4	4	4	2	2	2	1
C_s	0	2	0	0	0	2	0	1
C_{sr}	0	0	2	0	0	0	2	1
C_{r^2}	0	0	0	4	2	2	2	1
C_4	0	0	0	0	2	0	0	1
D_2	0	0	0	0	0	2	0	1
D_2'	0	0	0	0	0	0	2	1
D_4	0	0	0	0	0	0	0	1

Die Markentafel von D_4

$\mathcal{F}$	$n(\mathcal{F})$
$\mathcal{J}$	8
$\mathcal{C} = \mathcal{C}_{(2)}$	2
$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{(2)}$	2
$\mathcal{A}ll$	1

Die Indizes von D_4

Beispiel A.6. $\boxed{\text{Die Gruppe } Q_8 := \langle i,j,k \mid i^2 = j^2 = k^2\rangle.}$
Bis auf Konjugation gibt es die Untergruppen $\mathfrak{E} := \{1\}$, $C_2 = \{1, -1\}$, $C_i := \{1, i, -1, -i\}$, $C_j := \{1, j, -1, -j\}$, $C_k := \{1, k, -1, -k\}$ und Q_8 selbst. Es gilt

$$\begin{aligned} Q_8/\mathfrak{E} &= \{g\mathfrak{E} \mid g \in Q_8\}, & Q_8/C_j &= \{C_j, kC_j\}, \\ Q_8/C_2 &= \{C_2, iC_2, jC_2, kC_2\}, & Q_8/C_k &= \{C_k, iC_k\}, \\ G/C_i &= \{C_i, jC_i\}, & Q_8/Q_8 &= \{Q_8\}. \end{aligned}$$

Daher gilt

$$\begin{aligned} (Q_8/C_2)^{C_2} &= Q_8/C_2, & (Q_8/C_i)^{C_i} &= Q_8/C_i, \\ (Q_8/C_i)^{C_2} &= Q_8/C_i, & (Q_8/C_j)^{C_j} &= Q_8/C_j, \\ (Q_8/C_j)^{C_2} &= Q_8/C_j, & (Q_8/C_k)^{C_k} &= Q_8/C_k \\ (Q_8/C_k)^{C_2} &= Q_8/C_k, \end{aligned}$$

und

	$Q_8/\mathfrak{E}$	Q_8/C_2	Q_8/C_i	Q_8/C_j	Q_8/C_k	Q_8/Q_8
$\mathfrak{E}$	8	4	2	2	2	1
C_2	0	4	2	2	2	1
C_i	0	0	2	0	0	1
C_j	0	0	0	2	0	1
C_k	0	0	0	0	2	1
Q_8	0	0	0	0	0	1

Die Markentafel von Q_8

$\mathcal{F}$	$n(\mathcal{F})$
$\mathcal{J}$	8
$\mathcal{C} = \mathcal{C}_{(2)}$	2
$\mathcal{A}ll$	1

Die Indizes von Q_8

Beispiel A.7. $\boxed{\text{Die Gruppe } G := C_3 \times C_3 = \{1, d_1, d_2, d_3, d_4, d_1^2, d_2^2, d_3^2, d_4^2\}.}$
Bis auf Konjugation gibt es die Untergruppen $e := \{1\}$, $C_{d_1} := \{1, d_1, d_1^2\}$, $C_{d_2} := \{1, d_2, d_2^2\}$, $C_{d_3} := \{1, d_3, d_3^2\}$, $C_{d_4} := \{1, d_4, d_4^2\}$ und G selbst. Es gilt

$$\begin{aligned} G/e &= \{ge \mid g \in G\}, & G/C_{d_3} &= \{C_{d_3}, d_4C_{d_3}, d_4^2C_{d_3}\}, \\ G/C_{d_1} &= \{C_{d_1}, d_2C_{d_1}, d_2^2C_{d_1}\}, & G/C_{d_4} &= \{C_{d_4}, d_3C_{d_4}, d_3^2C_{d_4}\}, \\ G/C_{d_2} &= \{C_{d_2}, d_1C_{d_2}, d_1^2C_{d_2}\}, & G/G &= \{G\}. \end{aligned}$$

Für die zyklische Untergruppen C_i von Ordnung drei gilt

$$(G/C_j)^{C_i} = \begin{cases} G/C_i, & i = j, \\ \emptyset, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Deshalb gilt

	G/e	G/C_{d_1}	G/C_{d_2}	G/C_{d_3}	G/C_{d_4}	G/G
e	9	3	3	3	3	1
C_{d_1}	0	3	0	0	0	1
C_{d_2}	0	0	3	0	0	1
C_{d_3}	0	0	0	3	0	1
C_{d_4}	0	0	0	0	3	1
G	0	0	0	0	0	1

Die Markentafel von $C_3 \times C_3$

$\mathcal{F}$	$n(\mathcal{F})$
$\mathcal{J}$	9
$\mathcal{C} = \mathcal{C}_{(3)}$	3
$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{(3)} = \mathcal{A}ll$	1

Die Indizes von $C_3 \times C_3$

Beispiel A.8. $\boxed{\text{Die Gruppe } \mathfrak{A}_4 := \{1, a, b, ab, d_1, d_2, d_3, d_4, d_1^2, d_2^2, d_3^2, d_4^2\}.}$
Für die Bezeichnung vgl. Beispiel A.10. Bis auf Konjugation gibt es die Untergruppen $e := \{1\}$, $C_2 := \{1, a\}$, $C_3 := \{1, d_1, d_1^2\}$, $C_2 \times C_2 = \{1, a, b, ab\}$ und $\mathfrak{A}_4$ selbst. Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A}_4/e &= \{ge \,|\, g \in \mathfrak{A}_4\}, \\
\mathfrak{A}_4/C_2 &= \{C_2, bC_2, d_1C_2, d_2C_2, d_1^2C_2, d_2^2C_2\}, \\
\mathfrak{A}_4/C_3 &= \{C_3, aC_3, bC_3, abC_3\}, \\
\mathfrak{A}_4/C_2 \times C_2 &= \{C_2 \times C_2, d_1(C_2 \times C_2), d_1^2(C_2 \times C_2)\}, \\
\mathfrak{A}_4/\mathfrak{A}_4 &= \{\mathfrak{A}_4\}.
\end{aligned}$$

Also gilt

$$\begin{aligned}
(\mathfrak{A}_4/C_j)^{C_i} &= \emptyset, \quad i \neq j, \\
(\mathfrak{A}_4/C_2)^{C_2} &= \{C_2, bC_2\}, \\
(\mathfrak{A}_4/C_3)^{C_3} &= \{C_3\}, \\
(\mathfrak{A}_4/C_2 \times C_2)^{C_2} &= \mathfrak{A}_4/C_2 \times C_2, \\
(\mathfrak{A}_4/C_2 \times C_2)^{C_2 \times C_2} &= \mathfrak{A}_4/C_2 \times C_2
\end{aligned}$$

und

	$\mathfrak{A}_4/e$	$\mathfrak{A}_4/C_2$	$\mathfrak{A}_4/C_3$	$\mathfrak{A}_4/C_2 \times C_2$	$\mathfrak{A}_4/\mathfrak{A}_4$
e	12	6	4	3	1
C_2	0	2	0	3	1
C_3	0	0	1	0	1
$C_2 \times C_2$	0	0	0	3	1
$\mathfrak{A}_4$	0	0	0	0	1

Die Markentafel von $\mathfrak{A}_4$

$\mathcal{F}$	$n(\mathcal{F})$
$\mathcal{J}$	12
$\mathcal{C}$	2
$\mathcal{C}_{(2)}$	6
$\mathcal{C}_{(3)} = \mathcal{A}_{(3)}$	4
$\mathcal{A}_{(2)}$	3
$\mathcal{A} = \mathcal{A}ll$	1

Die Indizes von $\mathfrak{A}_4$

Beispiel A.9. $\boxed{\text{Die Gruppe } D_8 = \langle r, s \,|\, r^8 = s^2 = 1\rangle.}$

Bis auf Konjugation gibt es die Untergruppen $e := \{1\}$, $C_{r^4} := \{1, r^4\}$, $C_s := \{1, s\}$, $C_{sr} := \{1, sr\}$, $C_4 = \langle r^2\rangle$, $C_8 = \langle r\rangle$, $D_2 = \{1, s, r^4, sr^4\}$, $D_2' := \{1, sr, r^4, sr^5\}$, $D_4 = \{1, r^2, r^4, r^6, s, sr^2, sr^4, sr^6\}$, $D_4' := \{1, r^2, r^4, r^6, sr, sr^3, sr^5, sr^7\}$ und D_8 selbst. Es gilt

$$\begin{aligned}
D_8/e &= \{ge \,|\, g \in D_8\}, & D_8/C_4 &= \{C_4, rC_4, sC_4, srC_4\},\\
D_8/C_{r^4} &= \{C_{r^4}, rC_{r^4}, r^2C_{r^4}, r^3C_{r^4}, & D_8/C_8 &= \{C_8, sC_8\},\\
&\quad sC_{r^4}, srC_{r^4}, sr^2C_{r^4}, sr^3C_{r^4}\}, & D_8/D_2 &= \{D_2, rD_2, r^2D_2, r^3D_2\},\\
D_8/C_s &= \{C_s, rC_s, r^2C_s, r^3C_s, r^4C_s, & D_8/D_2' &= \{D_2', rD_2', r^2D_2', r^3D_2'\},\\
&\quad r^5C_s, r^6C_s, r^7C_s\}, & D_8/D_4 &= \{D_4, rD_4\},\\
D_8/C_{sr} &= \{C_{sr}, rC_{sr}, r^2C_{sr}, r^3C_{sr}, & D_8/D_4' &= \{D_4', rD_4'\},\\
&\quad r^4C_{sr}, r^5C_{sr}, r^6C_{sr}, r^7C_{sr}\}, & D_8/D_8 &= \{D_8\}.
\end{aligned}$$

Also gilt

$$\begin{aligned}
(D_8/C_{r^4})^{C_{r^4}} &= D_8/C_{r^4}, & (D_8/D_2')^{C_{sr}} &= \{D_2', r^2D_2'\},\\
(D_8/C_s)^{C_s} &= \{C_s, r^4C_s\}, & (D_8/D_2')^{D_2'} &= \{D_2', r^2D_2'\},\\
(D_8/C_{sr})^{C_{sr}} &= \{C_{sr}, r^4C_{sr}\}, & (D_8/D_4)^{C_{r^4}} &= D_8/D_4,\\
(D_8/C_4)^{C_{r^4}} &= D_8/C_4, & (D_8/D_4)^{C_s} &= D_8/D_4,\\
(D_8/C_8)^{C_{r^4}} &= D_8/C_8, & (D_8/D_4)^{C_4} &= D_8/D_4,\\
(D_8/C_4)^{C_4} &= D_8/C_4, & (D_8/D_4)^{D_2} &= D_8/D_4,\\
(D_8/C_8)^{C_4} &= D_8/C_8, & (D_8/D_4)^{D_4} &= D_8/D_4,\\
(D_8/C_8)^{C_8} &= D_8/C_8, & (D_8/D_4')^{C_{r^4}} &= D_8/D_4',\\
(D_8/D_2)^{C_{r^4}} &= D_8/D_2, & (D_8/D_4')^{C_{sr}} &= D_8/D_4',\\
(D_8/D_2)^{C_s} &= \{D_2, r^2D_2\}, & (D_8/D_4')^{C_4} &= D_8/D_4',\\
(D_8/D_2)^{D_2} &= \{D_2, r^2D_2\}, & (D_8/D_4')^{D_2'} &= D_8/D_4',\\
(D_8/D_2')^{C_{r^4}} &= D_8/D_2', & (D_8/D_4')^{D_4'} &= D_8/D_4'
\end{aligned}$$

und

	D_8/e	D_8/C_{r^4}	D_8/C_s	D_8/C_{sr}	D_8/C_4	D_8/C_8	D_8/D_2	D_8/D_2'	D_8/D_4	D_8/D_4'	D_8/D_8
e	16	8	8	8	4	2	4	4	2	2	1
C_{r^4}	0	8	0	0	4	2	4	4	2	2	1
C_s	0	0	2	0	0	0	2	0	2	0	1
C_{sr}	0	0	0	2	0	0	0	2	0	2	1
C_4	0	0	0	0	4	2	0	0	2	2	1
C_8	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	1
D_2	0	0	0	0	0	0	2	0	2	0	1
D_2'	0	0	0	0	0	0	0	2	0	2	1
D_4	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	1
D_4'	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	1
D_8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Die Markentafel von D_8

$\mathcal{F}$	$n(\mathcal{F})$
$\mathcal{J}$	16
$\mathcal{C} = \mathcal{C}_{(2)}$	2
$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{(2)}$	2
$\mathcal{A}ll$	1

Die Indizes von D_8

Beispiel A.10. $\boxed{\text{Die Gruppe } \mathfrak{S}_4.}$

$\mathfrak{S}_4$ ist die Gruppe aller Permutationen von $\{1, 2, 3, 4\}$, $\mathfrak{S}_4 = \{1, a, \dots, h_7^2\}$ mit Elementen

1. Ordnung

$$1{=}(1).$$

2. Ordnung

$$\begin{array}{ccc} a := (12), & b := (13), & c := (14), \\ d := (23), & e := (24), & f := (34), \\ h_5^2 = (13)(24), & h_6^2 = (14)(23), & h_7^2 = (12)(34). \end{array}$$

3. Ordnung

$$\begin{array}{ccc} h_1 := (123), & h_2 := (124), & h_3 := (134), \\ h_4 := (234), & h_1^2 = (132), & h_2^2 = (142), \\ h_3^2 = (143), & h_4^2 = (243). & \end{array}$$

4. Ordnung

$$\begin{array}{ccc} h_5 := (1234), & h_6 := (1243), & h_7 := (1324), \\ h_5^3 = (1432), & h_6^3 = (1342), & h_7^3 = (1423). \end{array}$$

Bis auf Konjugation gibt es die Untergruppen $\mathfrak{E} := \{1\}$, $C_a := \{1, a\}$, $C_2 = \{1, h_7^2\}$, $C_4 = \langle h_5 \rangle$, $\mathfrak{A}_3 = \langle h_1 \rangle$, $V := \{1, h_5^2, h_6^2, h_7^2\}$, $V' := \{1, a, f, h_7^2\}$, $D_4 = \{1, h_5, h_5^2, h_5^3, b, e, h_6^2, h_7^2\}$, $\mathfrak{S}_3 = \{1, a, b, d, h_1, h_1^2\}$, $\mathfrak{A}_4 = \{1, h_1, h_2, h_3, h_4, h_1^2, h_2^2, h_3^2, h_4^2, h_5^2, h_6^2, h_7^2\}$ und $\mathfrak{S}_4$ selbst. Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathfrak{S}_4/\mathfrak{E} &= \{g\mathfrak{E} \mid g \in \mathfrak{S}_4\},\\
\mathfrak{S}_4/C_a &= \{C_a, bC_a, cC_a, dC_a, eC_a, fC_a, h_3C_a,\\
&\qquad h_4C_a, h_6C_a, h_7C_a, h_4^2C_a, h_5^2C_a\},\\
\mathfrak{S}_4/C_2 &= \{C_2, aC_2, bC_2, cC_2, dC_2, eC_2, h_1C_2,\\
&\qquad h_2C_2, h_4C_2, h_7C_2, h_2^2C_2, h_5^2C_2\},\\
\mathfrak{S}_4/C_4 &= \{C_4, aC_4, bC_4, cC_4, dC_4, fC_4\},\\
\mathfrak{S}_4/\mathfrak{A}_3 &= \{\mathfrak{A}_3, a\mathfrak{A}_3, c\mathfrak{A}_3, e\mathfrak{A}_3, f\mathfrak{A}_3, h_2\mathfrak{A}_3,\\
&\qquad h_4\mathfrak{A}_3, h_3^2\mathfrak{A}_3\},\\
\mathfrak{S}_4/V &= \{V, aV, bV, cV, h_1V, h_2V\},\\
\mathfrak{S}_4/V' &= \{V', bV', cV', dV', eV', h_7V'\},\\
\mathfrak{S}_4/D_4 &= \{D_4, aD_4, cD_4\},\\
\mathfrak{S}_4/\mathfrak{S}_3 &= \{\mathfrak{S}_3, c\mathfrak{S}_3, e\mathfrak{S}_3, f\mathfrak{S}_3\},\\
\mathfrak{S}_4/\mathfrak{A}_4 &= \{\mathfrak{A}_4, a\mathfrak{A}_4\},\\
\mathfrak{S}_4/\mathfrak{S}_4 &= \{\mathfrak{S}_4\}.
\end{aligned}$$

Also gilt

$$\begin{aligned}
(\mathfrak{S}_4/C_a)^{C_a} &= \{C_a, fC_a\}, & (\mathfrak{S}_4/D_4)^{C_2} &= \mathfrak{S}_4/D_4,\\
(\mathfrak{S}_4/C_2)^{C_2} &= \{C_2, aC_2, h_7C_2, h_5^2C_2\}, & (\mathfrak{S}_4/D_4)^{C_4} &= \{D_4\},\\
(\mathfrak{S}_4/C_4)^{C_4} &= \{C_4, bC_4\}, & (\mathfrak{S}_4/D_4)^{V} &= \mathfrak{S}_4/D_4,\\
(\mathfrak{S}_4/C_4)^{C_2} &= \{cC_4, dC_4\}, & (\mathfrak{S}_4/D_4)^{V'} &= \{cD_4\},\\
(\mathfrak{S}_4/\mathfrak{A}_3)^{\mathfrak{A}_3} &= \{\mathfrak{A}_3, a\mathfrak{A}_3\}, & (\mathfrak{S}_4/\mathfrak{S}_3)^{\mathfrak{S}_3} &= \{\mathfrak{S}_3\},\\
(\mathfrak{S}_4/V)^{V} &= \mathfrak{S}_4/V, & (\mathfrak{S}_4/\mathfrak{S}_3)^{C_a} &= \{\mathfrak{S}_3, f\mathfrak{S}_3\},\\
(\mathfrak{S}_4/V)^{C_2} &= \mathfrak{S}_4/V, & (\mathfrak{S}_4/\mathfrak{S}_3)^{\mathfrak{A}_3} &= \{\mathfrak{S}_3\},\\
(\mathfrak{S}_4/V')^{V'} &= \{V', h_7V'\}, & (\mathfrak{S}_4/\mathfrak{A}_4)^{\mathfrak{A}_4} &= \mathfrak{S}_4/\mathfrak{A}_4,\\
(\mathfrak{S}_4/V')^{C_a} &= \{V', h_7V'\}, & (\mathfrak{S}_4/\mathfrak{A}_4)^{C_2} &= \mathfrak{S}_4/\mathfrak{A}_4,\\
(\mathfrak{S}_4/V')^{C_2} &= \{V', h_7V'\}, & (\mathfrak{S}_4/\mathfrak{A}_4)^{\mathfrak{A}_3} &= \mathfrak{S}_4/\mathfrak{A}_4,\\
(\mathfrak{S}_4/D_4)^{D_4} &= \{D_4\}, & (\mathfrak{S}_4/\mathfrak{A}_4)^{V} &= \mathfrak{S}_4/\mathfrak{A}_4\\
(\mathfrak{S}_4/D_4)^{C_a} &= \{cD_4\}, & &
\end{aligned}$$

und

	$\mathfrak{S}_4/\mathfrak{E}$	$\mathfrak{S}_4/C_a$	$\mathfrak{S}_4/C_2$	$\mathfrak{S}_4/C_4$	$\mathfrak{S}_4/\mathfrak{A}_3$	$\mathfrak{S}_4/V$	$\mathfrak{S}_4/V'$	$\mathfrak{S}_4/D_4$	$\mathfrak{S}_4/\mathfrak{S}_3$	$\mathfrak{S}_4/\mathfrak{A}_4$	$\mathfrak{S}_4/\mathfrak{S}_4$
$\mathfrak{E}$	24	12	12	6	8	6	6	3	4	2	1
C_a	0	2	0	0	0	0	2	1	2	0	1
C_2	0	0	4	2	0	6	2	3	0	2	1
C_4	0	0	0	2	0	0	0	1	0	0	1
$\mathfrak{A}_3$	0	0	0	0	2	0	0	0	1	2	1
V	0	0	0	0	0	6	0	3	0	2	1
V'	0	0	0	0	0	0	2	1	0	0	1
D_4	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
$\mathfrak{S}_3$	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
$\mathfrak{A}_4$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	1
$\mathfrak{S}_4$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Die Markentafel von $\mathfrak{S}_4$

$\mathcal{F}$	$n(\mathcal{F})$
$\mathcal{J}$	24
$\mathcal{C}$	2
$\mathcal{C}_{(2)}$	6
$\mathcal{C}_{(3)} = \mathcal{A}_{(3)}$	8
$\mathcal{A}$	6
$\mathcal{A}_{(2)}$	6
$\mathcal{A}ll$	1

Die Indizes von $\mathfrak{S}_4$

Beispiel A.11. $\boxed{\text{Die Gruppe } Q_{16} := \langle a, b \,|\, a^4 = b^2 = abab \rangle.}$

Bis auf Konjugation gibt es die Untergruppen $\mathfrak{E} := \{1\}$, $C_2 = \{1, -1\}$, $C_{a^2} := \{1, a^2, -1, -a^2\}$, $C_b := \{1, b, -1, -b\}$, $C_{ab} := \{1, ab, -1, -ab\}$, $C_8 = \{1, a, a^2, a^3, -1, -a, -a^2, -a^3\}$, $Q_8 = \{1, -1, a^2, -a^2, b, -b, a^2b, -a^2b\}$, $Q_8' := \{1, -1, a^2, -a^2, ab, -ab, a^3b, -a^3b\}$ und Q_{16} selbst. Es gilt

$$
\begin{aligned}
Q_{16}/\mathfrak{E} &= \{g\mathfrak{E} \,|\, g \in Q_{16}\}, & Q_{16}/C_{ab} &= \{C_{ab}, aC_{ab}, \\
Q_{16}/C_2 &= \{C_2, aC_2, a^2C_2, a^3C_2, & &\qquad a^2C_{ab}, a^3C_{ab}\}, \\
&\qquad bC_2, abC_2, a^2bC_2, a^3bC_2\}, & Q_{16}/C_8 &= \{C_8, bC_8\}, \\
Q_{16}/C_{a^2} &= \{C_{a^2}, aC_{a^2}, bC_{a^2}, abC_{a^2}\}, & Q_{16}/Q_8 &= \{Q_8, aQ_8\}, \\
Q_{16}/C_b &= \{C_b, aC_b, a^2C_b, a^3C_b\}, & Q_{16}/Q_8' &= \{Q_8', aQ_8'\}.
\end{aligned}
$$

Also gilt

$$
\begin{aligned}
(Q_{16}/C_2)^{C_2} &= Q_{16}/C_2, & (Q_{16}/Q_8)^{C_{a^2}} &= Q_{16}/Q_8,\\
(Q_{16}/C_{a^2})^{C_2} &= Q_{16}/C_{a^2}, & (Q_{16}/Q_8')^{C_{a^2}} &= Q_{16}/Q_8',\\
(Q_{16}/C_b)^{C_2} &= Q_{16}/C_b, & (Q_{16}/C_b)^{C_b} &= \{C_b, a^2C_b\},\\
(Q_{16}/C_{ab})^{C_2} &= Q_{16}/C_{ab}, & (Q_{16}/Q_8)^{C_b} &= Q_{16}/Q_8,\\
(Q_{16}/C_8)^{C_2} &= Q_{16}/C_8, & (Q_{16}/C_{ab})^{C_{ab}} &= \{C_{ab}, a^2C_{ab}\},\\
(Q_{16}/Q_8)^{C_2} &= Q_{16}/Q_8, & (Q_{16}/Q_8')^{C_{ab}} &= Q_{16}/Q_8',\\
(Q_{16}/Q_8')^{C_2} &= Q_{16}/Q_8', & (Q_{16}/C_8)^{C_8} &= Q_{16}/C_8,\\
(Q_{16}/C_{a^2})^{C_{a^2}} &= Q_{16}/C_{a^2}, & (Q_{16}/Q_8)^{Q_8} &= Q_{16}/Q_8,\\
(Q_{16}/C_8)^{C_{a^2}} &= Q_{16}/C_8, & (Q_{16}/Q_8')^{Q_8'} &= Q_{16}/Q_8'
\end{aligned}
$$

und

	$Q_{16}/\mathfrak{E}$	Q_{16}/C_2	Q_{16}/C_{a^2}	Q_{16}/C_b	Q_{16}/C_{ab}	Q_{16}/C_8	Q_{16}/Q_8	Q_{16}/Q_8'	Q_{16}/Q_{16}
$\mathfrak{E}$	16	8	4	4	4	2	2	2	1
C_2	0	8	4	4	4	2	2	2	1
C_{a^2}	0	0	4	0	0	2	2	2	1
C_b	0	0	0	2	0	0	2	0	1
C_{ab}	0	0	0	0	2	0	0	2	1
C_8	0	0	0	0	0	2	0	0	1
Q_8	0	0	0	0	0	0	2	0	1
Q_8'	0	0	0	0	0	0	0	2	1
Q_{16}	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Die Markentafel von Q_{16}

$\mathcal{F}$	$n(\mathcal{F})$
$\mathcal{J}$	16
$\mathcal{C} = \mathcal{C}_{(2)}$	2
$\mathcal{A}ll$	1

Die Indizes von Q_{16}

§ 5. Die Amitsur-Dress-Tate Kohomologie der Gruppen C_4, $C_2 \times C_2$ und $\mathfrak{S}_3$

In diesem Abschnitt wird die Amitsur-Dress-Tate Kohomologiegruppe $\widehat{H}^0_{\mathcal{F}}(\pi_0^{(-)}S)$ der endlichen Gruppen C_4, $C_2 \times C_2$ und $\mathfrak{S}_3$ zu bestimmten Familien $\mathcal{F}$ der zyklischen Untergruppen gerechnet. Ziel ist ein Beispiel für $\mathbb{Z} \to \widehat{H}^0_{\mathcal{F}}(\pi_0^{(-)}S)$ nicht surjektiv zu finden.

Sei G eine endliche Gruppe und H, K Untergruppen von G. Laut [Webb] Seite 4 ist der Funktor

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{\mathcal{F}}(G)^{op} & \xrightarrow{A} & \text{Ringe} \\ G/H & \longmapsto & A(H) \\ \varphi \Big\downarrow & & A_*(\varphi)=\mathrm{Ind}_H^K \Big\downarrow \quad \Big\uparrow A^*(\varphi)=\mathrm{Res}_H^K \\ G/K & \longmapsto & A(K) \end{array}$$

ein sogenannter Mackey-Funktor. Hierbei gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{Ind}_H^K : A(H) &\longrightarrow A(K), \\ X &\longmapsto K \times_H X \end{aligned}$$

und für $H' < H$ eine Untergruppe

$$G \times_H H/H' = G/H'. \tag{5.1}$$

Wenn G abelsch ist, gilt

$$[G/H] \cdot [G/K] = \tfrac{|G|\cdot|H\cap K|}{|H|\cdot|K|}[G/H \cap K], \tag{5.2}$$

siehe [Fausk] Seite 5. Seien H, L Untergruppen von K und $Hg_1L, \dots, Hg_rL \subset K$ die Doppelnebenklassen von K mod (H, L), dann gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}_H^K : A(K) &\longrightarrow A(H), \\ [K/L] &\longmapsto \sum_{i=1}^{r} [H/\mathrm{Stab}_H(g_iL)]. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Diese ist eine Folge der sogenannten Doppelnebenklassen Formel „double coset formula“ oder „Mackey formula“

$$\mathrm{Res}_K^G \circ \mathrm{Ind}_H^G = \sum_{KgH \in K\backslash G/H} \mathrm{Ind}^K_{{}^gH\cap K} \circ \mathrm{Res}^{{}^gH}_{{}^gH\cap K} \circ c(g)^*, \tag{5.4}$$

wobei für ein $g \in G$, $c(g) : H \to {}^gH = gHg^{-1}$, $h \mapsto ghg^{-1}$ gilt, siehe z.B. [Dieck*] Seite 72. Dabei wird zu einem Homomorphismus der Gruppen $\alpha : K \to L$ eine L-Menge durch α als K-Menge betrachtet so, dass sich der induzierte Homomorphismus der Ringe $\alpha^* = A(\alpha) : A(K) \to A(L)$ ergibt. Wegen $G/H = G \times_H H/H = \mathrm{Ind}_H^G(\underbrace{H/H}_{1})$ und $c(g)^*(H/H) = {}^gH/{}^gH$ aus (5.4) für Untergruppen H, K folgt

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Res}_K^G(G/H) &= \mathrm{Res}_K^G(\mathrm{Ind}_H^G(1)) \\
&= \sum_{KgH \in K\backslash G/H} \mathrm{Ind}^K_{{}^gH\cap K}(\mathrm{Res}^{{}^gH}_{{}^gH\cap K}(1)) \\
&= \sum_{KgH \in K\backslash G/H} \mathrm{Ind}^K_{{}^gH\cap K}(1) \\
&= \sum_{KgH \in K\backslash G/H} K \times_{{}^gH\cap K} {}^gH \cap K/{}^gH\cap K \\
&= \sum_{KgH \in K\backslash G/H} K/{}^gH\cap K.
\end{aligned}
$$

Da

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Stab}_K(gH) &= \{x \in K \mid \underbrace{\underbrace{\underbrace{xgH = gH}_{g^{-1}xgH = H}}_{g^{-1}xg \in H}}_{x \in gHg^{-1}} \} \\
&= {}^gH \cap K
\end{aligned}
$$

gilt, folgt die Formel (5.3). Zur Berechnung von $\widehat{H}^0_{\mathcal{F}}(\pi_0^{(-)}S)$ benutzt man die additiven Homomorphismen

$$
\bigoplus_{H\in\mathcal{F}} A(H) \twoheadrightarrow \operatorname*{colim}_{\mathcal{O}_{\mathcal{F}}(G)} A(H) \xrightarrow{\mathrm{N}} \lim_{\mathcal{O}_{\mathcal{F}}(G)^{op}} A(H).
$$

Ist $H/H_1, \ldots, H/H_n$ eine Basis von $A(H)$, dann ist das Bild von N das Ideal im(N) in $\lim_{\mathcal{O}_{\mathcal{F}}(G)^{op}} A(H)$ erzeugt durch alle $\mathrm{N}(H/H_i)$ für $1 \leq i \leq n$ und alle H aus der Familie $\mathcal{F}$ der Untergruppen von G.

Beispiel 5.5. Die zyklische Gruppe von vier Elementen $C_4 = \{1, i, -1, -i\}$ mit $\mathcal{F} := \{\mathfrak{E}, C_2\}$, wobei $\mathfrak{E} := \{1\}$ und $C_2 = \{1, -1\}$. In $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}(C_4)$ gibt es die Selbstabbildungen für $C_4/\mathfrak{E}$, C_4/C_2 und die aus der Inklusion $\mathfrak{E} \subset C_2$ hervorgehenden Relationen. Weil A ein Mackey-Funktor ist, bestehen die Selbstabbildungen in $A(\mathfrak{E})$ und $A(C_2)$ nur aus der Identität. Es bleibt also nur die Restriktion $\mathrm{Res}_{\mathfrak{E}}^{C_2} : A(C_2) \to A(\mathfrak{E})$ als Relation übrig. Also gilt

$$
\lim_{\mathcal{O}_{\mathcal{F}}(C_4)^{op}} A(H) = \{(X_1, X_2) \in A(\mathfrak{E}) \oplus A(C_2) \mid \mathrm{Res}_{\mathfrak{E}}^{C_2}(X_2) = X_1\},
$$

wobei für $X_1 = a_1\mathfrak{E}/\mathfrak{E}$ und $X_2 = a_2C_2/\mathfrak{E} + a_3C_2/C_2$ mit $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{Z}$ die Bedingung äquivalent zur

$$
\mathrm{Res}_{\mathfrak{E}}^{C_2}(a_2C_2/\mathfrak{E} + a_3C_2/C_2) = (2a_2 + a_3)\mathfrak{E}/\mathfrak{E} = a_1\mathfrak{E}/\mathfrak{E}
$$

ist, d.h. zur $2a_2 + a_3 = a_1$. Es gibt die Doppelnebenklassen

$$\begin{aligned}
\mathfrak{E}\backslash C_4/\mathfrak{E} &= \{\mathfrak{E}g\mathfrak{E} \mid g \in C_4\},\\
\mathfrak{E}\backslash C_4/C_2 &= \{\mathfrak{E}1C_2, \mathfrak{E}iC_2\},\\
C_2\backslash C_4/\mathfrak{E} &= \{C_2 1\mathfrak{E}, C_2 i\mathfrak{E}\},\\
C_2\backslash C_4/C_2 &= \{C_2 1C_2, C_2 iC_2\}.
\end{aligned}$$

Behauptung 5.6. *Für jede endliche Gruppe G und alle $X \in A(\mathfrak{E})$, $\mathfrak{E} := \{1\}$ gilt*

$$\mathrm{Res}_{\mathfrak{E}}^{G}\mathrm{Ind}_{\mathfrak{E}}^{G}(X) = |G| \cdot X.$$

Beweis. Sei $X \in A(\mathfrak{E})$, etwa $X = a\mathfrak{E}/\mathfrak{E}$, $a \in \mathbb{Z}$. Dann folgt aus (5.1) und (5.3)

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}_{\mathfrak{E}}^{G}\mathrm{Ind}_{\mathfrak{E}}^{G}(X) &= \mathrm{Res}_{\mathfrak{E}}^{G}\mathrm{Ind}_{\mathfrak{E}}^{G}(a\mathfrak{E}/\mathfrak{E})\\
&= a \cdot \mathrm{Res}_{\mathfrak{E}}^{G}(G/\mathfrak{E})\\
&= a \cdot \sum_{g\in G} \mathfrak{E}/\mathrm{Stab}_{\mathfrak{E}}(g\mathfrak{E})\\
&= a \cdot \sum_{g\in G} \mathfrak{E}/g\mathfrak{E}g^{-1} \cap \mathfrak{E}\\
&= |G| \cdot a\mathfrak{E}/\mathfrak{E}\\
&= |G| \cdot X. \quad \square
\end{aligned}$$

Weiter folgt aus (5.1) und (5.3)

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}_{\mathfrak{E}}^{C_4}\mathrm{Ind}_{C_2}^{C_4}(C_2/\mathfrak{E}) &= 4\mathfrak{E}/\mathfrak{E},\\
\mathrm{Res}_{\mathfrak{E}}^{C_4}\mathrm{Ind}_{C_2}^{C_4}(C_2/C_2) &= 2\mathfrak{E}/\mathfrak{E},\\
\mathrm{Res}_{C_2}^{C_4}\mathrm{Ind}_{\mathfrak{E}}^{C_4}(\mathfrak{E}/\mathfrak{E}) &= 2C_2/\mathfrak{E},\\
\mathrm{Res}_{C_2}^{C_4}\mathrm{Ind}_{C_2}^{C_4}(C_2/\mathfrak{E}) &= 2C_2/\mathfrak{E},\\
\mathrm{Res}_{C_2}^{C_4}\mathrm{Ind}_{C_2}^{C_4}(C_2/C_2) &= 2C_2/C_2.
\end{aligned} \tag{5.7}$$

Man weiss, dass für jede endliche Gruppe G und jede Familie $\mathcal{F}$ von Untergruppen von G N über $\mathrm{Ind}_{\mathcal{F}}^{G}$ und $\mathrm{Res}_{\mathcal{F}}^{G}$ wie im folgenden Diagramm faktorisiert

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{H\in\mathcal{F}} A(H) \arrow[r, two heads] & \operatorname{colim}_{\mathcal{O}_{\mathcal{F}}(G)} A(H) \arrow[rr, "\mathrm{N}"] \arrow[dr, "\mathrm{Ind}_{\mathcal{F}}^{G}"'] & & \lim_{\mathcal{O}_{\mathcal{F}}(G)^{op}} A(H) \\
& & A(G) \arrow[ur, "\mathrm{Res}_{\mathcal{F}}^{G}"'] &
\end{tikzcd}$$

D.h. das Bild einer Basis des Ringes $\bigoplus_{H\in\mathcal{F}} A(H)$ unter N bzw. $\mathrm{Res}_{\mathcal{F}}^{G}\mathrm{Ind}_{\mathcal{F}}^{G}$ ist gleich. Durch Behauptung 5.6 und (5.7) erhält man deshalb

$$\mathrm{N}(c_1\mathfrak{E}/\mathfrak{E} + c_2C_2/\mathfrak{E} + c_3C_2/C_2) = 2(2c_1 + 2c_2 + c_3)\mathfrak{E}/\mathfrak{E} + 2(c_1 + c_2)C_2/\mathfrak{E} + 2c_3C_2/C_2.$$

So wie a_1, a_2, a_3 nehmen $2c_1 + 2c_2 + c_3$, $c_1 + c_2$ und c_3 ebenso alle mögliche Werte in $\mathbb{Z}$ an. Setzt man $y_0 := 0$, $y_1 := \mathfrak{E}/\mathfrak{E} + C_2/C_2$ und $y_2 := 2\mathfrak{E}/\mathfrak{E} + C_2/\mathfrak{E}$, so erhält man durch Rechnen modulo zwei mittels (5.2) die nächsten Addition und Mutiplikationstafel

$+$	y_0	y_1	y_2	$y_1 + y_2$
y_0	y_0	y_1	y_2	$y_1 + y_2$
y_1	y_1	y_0	$y_1 + y_2$	y_2
y_2	y_2	$y_1 + y_2$	y_0	y_1
$y_1 + y_2$	$y_1 + y_2$	y_2	y_1	y_0

$\cdot$	y_0	y_1	y_2	$y_1 + y_2$
y_0	y_0	y_0	y_0	y_0
y_1	y_0	y_1	y_2	$y_1 + y_2$
y_2	y_0	y_2	y_0	y_2
$y_1 + y_2$	y_0	$y_1 + y_2$	y_2	y_1

Man sieht also, dass

$$\mathbb{F}_2[y_0, y_1, y_2] \cong \mathbb{F}_2[y_2]/(y_2^2)$$

gilt. Mit $x := y_2$ gilt also als Ring

$$\widehat{H}^0_{\mathcal{F}}(\pi_0^{(-)} S) = \lim_{\mathcal{O}_{\mathcal{F}}(G)^{op}} A(H)/\mathrm{im}(\mathrm{N}) \cong \mathbb{F}_2[x]/(x^2).$$

Bemerkung 5.8. Es ist zugleich ein Beispiel für den Fall, dass $\mathbb{Z} \to \widehat{H}^0_{\mathcal{F}}(\pi_0^{(-)} S)$ nicht surjektiv gilt. Da in diesem Fall $n(\mathcal{F}) = 2$ und das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z} \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, two heads] & & \mathbb{F}_2[x]/(x^2) \\
& \mathbb{Z}/n(\mathcal{F})\mathbb{Z} \arrow[ur, hook] &
\end{tikzcd}$$

kommutativ ist, kann φ nicht surjektiv sein. Nämlich $x \in \widehat{H}^0_{\mathcal{F}}(\pi_0^{(-)} S)$ liegt nicht im Bild von φ.

Beispiel 5.9. Die abelsche Gruppe $G := C_2 \times C_2 = \{1, a, b, ab\}$ mit $\mathcal{F} = \{\mathfrak{E}, C_a, C_b, C_{ab}\}$, siehe Anhang B. In $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}(G)$ gibt es die Selbstabbildungen für $G/\mathfrak{E}$, G/C_a, G/C_b, G/C_{ab} und die aus den Inklusionen $\mathfrak{E} \subset C_a$, $\mathfrak{E} \subset C_b$, $\mathfrak{E} \subset C_{ab}$ hervorgehenden Relationen. Da G abelsch ist, gibt es zwischen G/C_a, G/C_b und G/C_{ab} keine Relationen. Weil A ein Mackey-Funktor ist, bestehen die Selbstabbildungen in $A(\mathfrak{E})$, $A(C_a)$, $A(C_b)$ und $A(C_{ab})$ nur aus der Identität. Also bleiben nur die Restriktionen

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}^{C_a}_{\mathfrak{E}} &: A(C_a) \longrightarrow A(\mathfrak{E}), \\
\mathrm{Res}^{C_b}_{\mathfrak{E}} &: A(C_b) \longrightarrow A(\mathfrak{E}), \\
\mathrm{Res}^{C_{ab}}_{\mathfrak{E}} &: A(C_{ab}) \longrightarrow A(\mathfrak{E})
\end{aligned}$$

als Relation übrig, die alle den gleichen Wert in $A(\mathfrak{E})$ annehmen müssen. Also gilt

$$\lim_{\mathcal{O}_{\mathcal{F}}(G)^{op}} A(H) = \{(X_1, X_2, X_3, X_4) \in R \,|(\sim)\}$$

mit

$$R := A(\mathfrak{E}) \oplus A(C_a) \oplus A(C_b) \oplus A(C_{ab})$$

und

$$\begin{aligned}(\sim) : X_1 &= \mathrm{Res}_{\mathfrak{E}}^{C_a}(X_2) \\ &= \mathrm{Res}_{\mathfrak{E}}^{C_b}(X_3) \\ &= \mathrm{Res}_{\mathfrak{E}}^{C_{ab}}(X_4),\end{aligned}$$

wobei für $X_1 = a_1\mathfrak{E}/\mathfrak{E}$, $X_2 = a_2C_a/\mathfrak{E} + a_3C_a/C_a$, $X_3 = a_4C_b/\mathfrak{E} + a_5C_b/C_b$ und $X_4 = a_6C_{ab}/\mathfrak{E} + a_7C_{ab}/C_{ab}$ mit $a_1, \dots, a_7 \in \mathbb{Z}$ die Bedingung $(\sim)$ äquivalent zur

$$\begin{aligned}a_1 &= 2a_2 + a_3 \\ &= 2a_4 + a_5 \\ &= 2a_6 + a_7\end{aligned} \tag{5.10}$$

ist. Aus Anhang A erhält man

$$\begin{aligned}\mathrm{N}(X) = {} & 2(2c_1 + 2c_2 + 2c_4 + 2c_6 + c_3 + c_5 + c_7)\mathfrak{E}/\mathfrak{E} \\ & + (2c_1 + 2c_2 + 2c_4 + 2c_6 + c_5 + c_7)C_a/\mathfrak{E} + 2c_3C_a/C_a \\ & + (2c_1 + 2c_2 + 2c_4 + 2c_6 + c_3 + c_7)C_b/\mathfrak{E} + 2c_5C_b/C_b \\ & + (2c_1 + 2c_2 + 2c_4 + 2c_6 + c_3 + c_5)C_{ab}/\mathfrak{E} + 2c_7C_{ab}/C_{ab}\end{aligned}$$

mit

$$X = c_1\mathfrak{E}/\mathfrak{E} + c_2C_a/\mathfrak{E} + c_3C_a/C_a + c_4C_b/\mathfrak{E} + c_5C_b/C_b + c_6C_{ab}/\mathfrak{E} + c_7C_{ab}/C_{ab}.$$

Die Koeffizienten von $C_a/\mathfrak{E}$, $C_b/\mathfrak{E}$ und $C_{ab}/\mathfrak{E}$ im Bild von N nehmen alle mögliche Werte in $\mathbb{Z}$ an, während die von $\mathfrak{E}/\mathfrak{E}$, C_a/C_a, C_b/C_b und C_{ab}/C_{ab} nur gerade Werte annehmen. Also durch (5.2) und (5.10) sieht man, dass $\lim_{\mathcal{O}_{\mathcal{F}}(G)^{op}} A(H)$ modulo im(N) nur aus 0 und $y := \mathfrak{E}/\mathfrak{E} + C_a/C_a + C_b/C_b + C_{ab}/C_{ab}$ besteht, wobei $y^2 = y \bmod 2$ gilt. Daher gilt $\mathbb{F}_2[y] \cong \mathbb{F}_2$ und als Ring

$$\widehat{H}^0_{\mathcal{F}}(\pi_0^{(-)}S) = \lim_{\mathcal{O}_{\mathcal{F}}(G)^{op}} A(H)/\mathrm{im}(\mathrm{N}) \cong \mathbb{F}_2.$$

Beispiel 5.11. Die Gruppe $\mathfrak{S}_3 = \{(1), (12), (13), (23), (123), (132)\}$ mit $\mathcal{C} = \{\langle s\rangle \,|\, s \in \mathfrak{S}_3\}$. Betrachtet man statt $\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\mathfrak{S}_3)$ für $\mathcal{F} = \{\mathfrak{E}, C_2, \mathfrak{A}_3\}$ die Unterkategorie $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}(\mathfrak{S}_3)$, so ist die Inklusion $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}(\mathfrak{S}_3) \hookrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\mathfrak{S}_3)$ eine Kategorienäquivalenz, denn alle Elementen von $\mathcal{C}$ sind bis auf Konjugation in $\mathcal{F}$ enthalten. Daher gilt

$$\lim_{\mathcal{O}_{\mathcal{F}}(\mathfrak{S}_3)^{op}} A(H) \cong \lim_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\mathfrak{S}_3)^{op}} A(H)$$

und weiterhin werden alle Rechnungen statt $\mathcal{C}$ für $\mathcal{F}$ gemacht, siehe Anhang C. In $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}(\mathfrak{S}_3)$ gibt es die Selbstabbildungen für $\mathfrak{S}_3/\mathfrak{E}$, $\mathfrak{S}_3/C_2$, $\mathfrak{S}_3/\mathfrak{A}_3$ und die aus den Inklusionen $\mathfrak{E} \subset C_2$, $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{A}_3$ hervorgehenden Relationen. Wie bei den Beispielen 1 und 2 bestehen die Selbstabbildungen in $A(\mathfrak{E})$, $A(C_2)$ und $A(\mathfrak{A}_3)$ nur aus der Identität. Also bleiben nur die Restriktionen

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}_{\mathfrak{E}}^{C_2} &: A(C_2) \longrightarrow A(\mathfrak{E}), \\ \mathrm{Res}_{\mathfrak{E}}^{\mathfrak{A}_3} &: A(\mathfrak{A}_3) \longrightarrow A(\mathfrak{E}) \end{aligned}$$

als Relation übrig, die beide den gleichen Wert in $A(\mathfrak{E})$ annehmen müssen. Also gilt

$$\lim_{\mathcal{O}_{\mathcal{F}}(\mathfrak{S}_3)^{op}} A(H) = \{(X_1, X_2, X_3) \in A(\mathfrak{E}) \oplus A(C_2) \oplus A(\mathfrak{A}_3) \mid (\mathrm{R})\}$$

mit

$$(\mathrm{R}) : \mathrm{Res}_{\mathfrak{E}}^{\mathfrak{A}_3}(X_3) = \mathrm{Res}_{\mathfrak{E}}^{C_2}(X_2) = X_1,$$

wobei für $X_1 = a_1\mathfrak{E}/\mathfrak{E}$, $X_2 = a_2 C_2/\mathfrak{E} + a_3 C_2/C_2$ und $X_3 = a_4\mathfrak{A}_3/\mathfrak{E} + a_5\mathfrak{A}_3/\mathfrak{A}_3$ mit $a_1, \ldots, a_5 \in \mathbb{Z}$ die Bedingung (R) äquivalent zur

$$2a_2 + a_3 = 3a_4 + a_5 = a_1 \tag{5.12}$$

ist. Aus Anhang B folgt

$$\begin{aligned} \mathrm{N}(X) = &(6c_1 + 6c_2 + 3c_3 + 6c_4 + 2c_5)\mathfrak{E}/\mathfrak{E} \\ &+ (3c_1 + 3c_2 + c_3 + 3c_4 + c_5)C_2/\mathfrak{E} + c_3 C_2/C_2 \\ &+ (2c_1 + 2c_2 + c_3 + 2c_4)\mathfrak{A}_3/\mathfrak{E} + 2c_5\mathfrak{A}_3/\mathfrak{A}_3 \end{aligned}$$

mit

$$X = c_1\mathfrak{E}/\mathfrak{E} + c_2 C_2/\mathfrak{E} + c_3 C_2/C_2 + c_4\mathfrak{A}_3/\mathfrak{E} + c_5\mathfrak{A}_3/\mathfrak{A}_3.$$

Die Koeffizienten von $\mathfrak{E}/\mathfrak{E}$, $C_2/\mathfrak{E}$, C_2/C_2 und $\mathfrak{A}_3/\mathfrak{E}$ im Bild von N nehmen alle mögliche Werte in $\mathbb{Z}$ an. Also durch (5.12) sieht man, dass 0 und $y := \mathfrak{E}/\mathfrak{E} + C_2/C_2 + \mathfrak{A}_3/\mathfrak{A}_3$ die einzigen Elementen in $\lim_{\mathcal{O}_{\mathcal{F}}(\mathfrak{S}_3)^{op}} A(H)/\mathrm{im}(\mathrm{N})$ sind. Durch (5.2) gilt $y^2 = y \bmod 2$, d.h. $\mathbb{F}_2[y] \cong \mathbb{F}_2$, also als Ring gilt

$$\widehat{H}^0_{\mathcal{F}}(\pi_0^{(-)} S) = \lim_{\mathcal{O}_{\mathcal{F}}(\mathfrak{S}_3)^{op}} A(H)/\mathrm{im}(\mathrm{N}) \cong \mathbb{F}_2.$$

Anhang B.

Die abelsche Gruppe $G := C_2 \times C_2 = \{1, a, b, ab\}$ mit $\mathcal{F} = \{\mathfrak{E}, C_a, C_b, C_{ab}\}$, wobei $\mathfrak{E} := \{1\}$, $C_a := \{1, a\}$, $C_b := \{1, b\}$ und $C_{ab} := \{1, ab\}$. Es gibt die Doppelnebenklassen

$$\begin{aligned}
\mathfrak{E}\backslash G/\mathfrak{E} &= \{\mathfrak{E}g\mathfrak{E} \mid g \in G\}, & C_{ab}\backslash G/\mathfrak{E} &= \{C_{ab}1\mathfrak{E}, C_{ab}a\mathfrak{E}\},\\
\mathfrak{E}\backslash G/C_a &= \{\mathfrak{E}1C_a, \mathfrak{E}bC_a\}, & C_{ab}\backslash G/C_{ab} &= \{C_{ab}1C_{ab}, C_{ab}aC_{ab}\},\\
C_a\backslash G/\mathfrak{E} &= \{C_a1\mathfrak{E}, C_ab\mathfrak{E}\}, & C_a\backslash G/C_b &= \{C_a1C_b\},\\
C_a\backslash G/C_a &= \{C_a1C_a, C_abC_a\}, & C_b\backslash G/C_a &= \{C_b1C_a\},\\
\mathfrak{E}\backslash G/C_b &= \{\mathfrak{E}1C_b, \mathfrak{E}aC_b\}, & C_a\backslash G/C_{ab} &= \{C_a1C_{ab}\},\\
C_b\backslash G/\mathfrak{E} &= \{C_b1\mathfrak{E}, C_ba\mathfrak{E}\}, & C_{ab}\backslash G/C_a &= \{C_{ab}1C_a\},\\
C_b\backslash G/C_b &= \{C_b1C_b, C_baC_b\}, & C_b\backslash G/C_{ab} &= \{C_b1C_{ab}\},\\
\mathfrak{E}\backslash G/C_{ab} &= \{\mathfrak{E}1C_{ab}, \mathfrak{E}aC_{ab}\}, & C_{ab}\backslash G/C_b &= \{C_{ab}1C_b\}.
\end{aligned}$$

Ähnlich wie bei dem Beispiel 5.5 rechnet man

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}^G_{\mathfrak{E}}\mathrm{Ind}^G_{C_a}(C_a/\mathfrak{E}) &= 4\mathfrak{E}/\mathfrak{E}, & \mathrm{Res}^G_{C_{ab}}\mathrm{Ind}^G_{C_{ab}}(C_{ab}/C_{ab}) &= 2C_{ab}/C_{ab},\\
\mathrm{Res}^G_{\mathfrak{E}}\mathrm{Ind}^G_{C_a}(C_a/C_a) &= 2\mathfrak{E}/\mathfrak{E}, & \mathrm{Res}^G_{C_a}\mathrm{Ind}^G_{C_b}(C_b/\mathfrak{E}) &= 2C_a/\mathfrak{E},\\
\mathrm{Res}^G_{C_a}\mathrm{Ind}^G_{\mathfrak{E}}(\mathfrak{E}/\mathfrak{E}) &= 2C_a/\mathfrak{E}, & \mathrm{Res}^G_{C_a}\mathrm{Ind}^G_{C_b}(C_b/C_b) &= C_a/\mathfrak{E},\\
\mathrm{Res}^G_{C_a}\mathrm{Ind}^G_{C_a}(C_a/\mathfrak{E}) &= 2C_a/\mathfrak{E}, & \mathrm{Res}^G_{C_b}\mathrm{Ind}^G_{C_a}(C_a/\mathfrak{E}) &= 2C_b/\mathfrak{E},\\
\mathrm{Res}^G_{C_a}\mathrm{Ind}^G_{C_a}(C_a/C_a) &= 2C_a/C_a, & \mathrm{Res}^G_{C_b}\mathrm{Ind}^G_{C_a}(C_a/C_a) &= C_b/\mathfrak{E},\\
\mathrm{Res}^G_{\mathfrak{E}}\mathrm{Ind}^G_{C_b}(C_b/\mathfrak{E}) &= 4\mathfrak{E}/\mathfrak{E}, & \mathrm{Res}^G_{C_a}\mathrm{Ind}^G_{C_{ab}}(C_{ab}/\mathfrak{E}) &= 2C_a/\mathfrak{E},\\
\mathrm{Res}^G_{\mathfrak{E}}\mathrm{Ind}^G_{C_b}(C_b/C_b) &= 2\mathfrak{E}/\mathfrak{E}, & \mathrm{Res}^G_{C_a}\mathrm{Ind}^G_{C_{ab}}(C_{ab}/C_{ab}) &= C_a/\mathfrak{E},\\
\mathrm{Res}^G_{C_b}\mathrm{Ind}^G_{\mathfrak{E}}(\mathfrak{E}/\mathfrak{E}) &= 2C_b/\mathfrak{E}, & \mathrm{Res}^G_{C_{ab}}\mathrm{Ind}^G_{C_a}(C_a/\mathfrak{E}) &= 2C_{ab}/\mathfrak{E},\\
\mathrm{Res}^G_{C_b}\mathrm{Ind}^G_{C_b}(C_b/\mathfrak{E}) &= 2C_b/\mathfrak{E}, & \mathrm{Res}^G_{C_{ab}}\mathrm{Ind}^G_{C_a}(C_a/C_a) &= C_{ab}/\mathfrak{E},\\
\mathrm{Res}^G_{C_b}\mathrm{Ind}^G_{C_b}(C_b/C_b) &= 2C_b/C_b, & \mathrm{Res}^G_{C_b}\mathrm{Ind}^G_{C_{ab}}(C_{ab}/\mathfrak{E}) &= 2C_b/\mathfrak{E},\\
\mathrm{Res}^G_{\mathfrak{E}}\mathrm{Ind}^G_{C_{ab}}(C_{ab}/\mathfrak{E}) &= 4\mathfrak{E}/\mathfrak{E}, & \mathrm{Res}^G_{C_b}\mathrm{Ind}^G_{C_{ab}}(C_{ab}/C_{ab}) &= C_b/\mathfrak{E},\\
\mathrm{Res}^G_{\mathfrak{E}}\mathrm{Ind}^G_{C_{ab}}(C_{ab}/C_{ab}) &= 2\mathfrak{E}/\mathfrak{E}, & \mathrm{Res}^G_{C_{ab}}\mathrm{Ind}^G_{C_b}(C_b/\mathfrak{E}) &= 2C_{ab}/\mathfrak{E},\\
\mathrm{Res}^G_{C_{ab}}\mathrm{Ind}^G_{\mathfrak{E}}(\mathfrak{E}/\mathfrak{E}) &= 2C_{ab}/\mathfrak{E}, & \mathrm{Res}^G_{C_{ab}}\mathrm{Ind}^G_{C_b}(C_b/C_b) &= C_{ab}/\mathfrak{E}.\\
\mathrm{Res}^G_{C_{ab}}\mathrm{Ind}^G_{C_{ab}}(C_{ab}/\mathfrak{E}) &= 2C_{ab}/\mathfrak{E}, & &
\end{aligned}$$

Anhang C.

Die Gruppe $\mathfrak{S}_3 = \{(1),(12),(13),(23),(123),(132)\}$ mit $\mathcal{F} = \{\mathfrak{E}, C_2, \mathfrak{A}_3\}$, wobei $\mathfrak{E} := \{(1)\}$, $C_2 = \{(1),(12)\}$ und $\mathfrak{A}_3 = \{(1),(123),(132)\}$. Es gibt die Doppelnebenklassen

$$\begin{aligned}
\mathfrak{E}\backslash\mathfrak{S}_3/\mathfrak{E} &= \{\mathfrak{E}g\mathfrak{E} \mid g \in \mathfrak{S}_3\},\\
\mathfrak{E}\backslash\mathfrak{S}_3/C_2 &= \{\mathfrak{E}(1)C_2, \mathfrak{E}(13)C_2, \mathfrak{E}(23)C_2\},\\
\mathfrak{E}\backslash\mathfrak{S}_3/\mathfrak{A}_3 &= \{\mathfrak{E}(1)\mathfrak{A}_3, \mathfrak{E}(12)\mathfrak{A}_3\},\\
C_2\backslash\mathfrak{S}_3/C_2 &= \{C_2(1)C_2, C_2(13)C_2\},\\
C_2\backslash\mathfrak{S}_3/\mathfrak{E} &= \{C_2(1)\mathfrak{E}, C_2(13)\mathfrak{E}, C_2(23)\mathfrak{E}\},\\
C_2\backslash\mathfrak{S}_3/\mathfrak{A}_3 &= \{C_2(1)\mathfrak{A}_3\},\\
\mathfrak{A}_3\backslash\mathfrak{S}_3/\mathfrak{A}_3 &= \{\mathfrak{A}_3(1)\mathfrak{A}_3, \mathfrak{A}_3(12)\mathfrak{A}_3\},\\
\mathfrak{A}_3\backslash\mathfrak{S}_3/\mathfrak{E} &= \{\mathfrak{A}_3(1)\mathfrak{E}, \mathfrak{A}_3(12)\mathfrak{E}\},\\
\mathfrak{A}_3\backslash\mathfrak{S}_3/C_2 &= \{\mathfrak{A}_3(1)C_2\},\\
&.
\end{aligned}$$

Ähnlich wie für $G = C_2 \times C_2$ erhält man

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}_{\mathfrak{E}}^{\mathfrak{S}_3}\mathrm{Ind}_{C_2}^{\mathfrak{S}_3}(C_2/\mathfrak{E}) &= 6\mathfrak{E}/\mathfrak{E}, & \mathrm{Res}_{C_2}^{\mathfrak{S}_3}\mathrm{Ind}_{\mathfrak{A}_3}^{\mathfrak{S}_3}(\mathfrak{A}_3/\mathfrak{E}) &= 3C_2/\mathfrak{E},\\
\mathrm{Res}_{\mathfrak{E}}^{\mathfrak{S}_3}\mathrm{Ind}_{C_2}^{\mathfrak{S}_3}(C_2/C_2) &= 3\mathfrak{E}/\mathfrak{E}, & \mathrm{Res}_{C_2}^{\mathfrak{S}_3}\mathrm{Ind}_{\mathfrak{A}_3}^{\mathfrak{S}_3}(\mathfrak{A}_3/\mathfrak{A}_3) &= C_2/\mathfrak{E},\\
\mathrm{Res}_{\mathfrak{E}}^{\mathfrak{S}_3}\mathrm{Ind}_{\mathfrak{A}_3}^{\mathfrak{S}_3}(\mathfrak{A}_3/\mathfrak{E}) &= 6\mathfrak{E}/\mathfrak{E}, & \mathrm{Res}_{\mathfrak{A}_3}^{\mathfrak{S}_3}\mathrm{Ind}_{\mathfrak{A}_3}^{\mathfrak{S}_3}(\mathfrak{A}_3/\mathfrak{E}) &= 2\mathfrak{A}_3/\mathfrak{E},\\
\mathrm{Res}_{\mathfrak{E}}^{\mathfrak{S}_3}\mathrm{Ind}_{\mathfrak{A}_3}^{\mathfrak{S}_3}(\mathfrak{A}_3/\mathfrak{A}_3) &= 2\mathfrak{E}/\mathfrak{E}, & \mathrm{Res}_{\mathfrak{A}_3}^{\mathfrak{S}_3}\mathrm{Ind}_{\mathfrak{A}_3}^{\mathfrak{S}_3}(\mathfrak{A}_3/\mathfrak{A}_3) &= 2\mathfrak{A}_3/\mathfrak{A}_3,\\
\mathrm{Res}_{C_2}^{\mathfrak{S}_3}\mathrm{Ind}_{C_2}^{\mathfrak{S}_3}(C_2/\mathfrak{E}) &= 3C_2/\mathfrak{E}, & \mathrm{Res}_{\mathfrak{A}_3}^{\mathfrak{S}_3}\mathrm{Ind}_{\mathfrak{E}}^{\mathfrak{S}_3}(\mathfrak{E}/\mathfrak{E}) &= 2\mathfrak{A}_3/\mathfrak{E},\\
\mathrm{Res}_{C_2}^{\mathfrak{S}_3}\mathrm{Ind}_{C_2}^{\mathfrak{S}_3}(C_2/C_2) &= C_2/\mathfrak{E} + C_2/C_2, & \mathrm{Res}_{\mathfrak{A}_3}^{\mathfrak{S}_3}\mathrm{Ind}_{C_2}^{\mathfrak{S}_3}(C_2/\mathfrak{E}) &= 2\mathfrak{A}_3/\mathfrak{E},\\
\mathrm{Res}_{C_2}^{\mathfrak{S}_3}\mathrm{Ind}_{\mathfrak{E}}^{\mathfrak{S}_3}(\mathfrak{E}/\mathfrak{E}) &= 3C_2/\mathfrak{E}, & \mathrm{Res}_{\mathfrak{A}_3}^{\mathfrak{S}_3}\mathrm{Ind}_{C_2}^{\mathfrak{S}_3}(C_2/C_2) &= \mathfrak{A}_3/\mathfrak{E}.
\end{aligned}$$

§ 6. Das Spektrum $\mathrm{Spec}(R(G))$ für $G = \mathfrak{S}_3$, D_4 und $\mathfrak{A}_4$

Zu einer endlichen Gruppe G ist die Bestimmung des Spektrums $\mathrm{Spec}(R(G))$ ihres Darstellungsringes $R(G)$ im Allgemeinen eine schwierige Aufgabe, etwa für G mit beliebig grosser Ordnung. Man weiss, dass der Ringhomomorphismus

$$\mathrm{Res} : R(G) \longrightarrow \lim_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(G)^{op}} R(C)$$

immer eine Inklusion ist, die für $\mathfrak{S}_3$ sogar ein Isomorphismus bildet. Daher ist

$$\mathrm{Spec}(\mathrm{Res}) : \mathrm{Spec}(\lim_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\mathfrak{S}_3)^{op}} R(C)) \longrightarrow \mathrm{Spec}(R(\mathfrak{S}_3))$$

ein Homöomorphismus so, dass das Spektrum $\mathrm{Spec}(R(\mathfrak{S}_3))$ auf einfacher Weise aus den Spektren $\mathrm{Spec}(R(C))$ der Darstellungsringe $R(C)$ zyklischer Untergruppen C von $\mathfrak{S}_3$ bis auf Konjugation und den Relationen im Limes $\lim_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\mathfrak{S}_3)^{op}} R(C))$ bestimmt werden kann.

Im ersten Abschnitt dieses Paragraphen wird das Limes $\lim_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\mathfrak{S}_3)^{op}} R(C))$ bestimmt und die oben erwähnte Isomorphie verifiziert. Dann werden die Spektren der Darstellungsringe zyklischer Untergruppen von $\mathfrak{S}_3$ bis auf Konjugation bestimmt, d.h. das Spektrum $\mathrm{Spec}(R(C))$ für C gleich $C_2 = \langle(12)\rangle$ und $\mathfrak{A}_3 = \langle(123)\rangle$. Durch die Identifizierung

$$\operatorname*{colim}_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\mathfrak{S}_3)} \mathrm{Spec}(R(C)) \cong \mathrm{Spec}(\lim_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\mathfrak{S}_3)^{op}} R(C)),$$

die den Autoren von [MNN] entstammt, siehe [MNN] Proposition 3.29 Seite 22, erhält man schliesslich eine explizite Beschreibung des Spektrums $\mathrm{Spec}(R(\mathfrak{S}_3))$. Auf ähnlicher Weise wird im Verlauf dieses Paragraphen die Spektren $\mathrm{Spec}(R(D_4))$ und $\mathrm{Spec}(R(\mathfrak{A}_4))$ bestimmt.

In dem Buch [Serre1] Paragraph 11.4 behandelt Serre die Bestimmung des Spektrums $\mathrm{Spec}(R(G) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[\zeta_{|G|}])$ für eine endliche Gruppe G. Seine Methode führt am Ende des Paragraphs zu einer Bestimmung des Spektrums $\mathrm{Spec}(R(\mathfrak{S}_3) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[\zeta_3])$ in groben Zügen, vgl. [Serre1] Paragraph 11.4.

1 Der Isomorphismus $R(\mathfrak{S}_3) \cong \lim_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\mathfrak{S}_3)^{op}} R(C)$

Betrachte die Unterkategorie $\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\mathfrak{S}_3)$ der Orbitkategorie $\mathcal{O}(\mathfrak{S}_3)$ von $\mathfrak{S}_3$, wobei die Objekten von $\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\mathfrak{S}_3)$ aus $\mathfrak{S}_3/C$ für sämtlichen zyklischen Untergruppen C von $\mathfrak{S}_3$ bestehen. Sei weiter $\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\mathfrak{S}_3)^{\mathrm{skelet}}$ die Unterkategorie der Kategorie $\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\mathfrak{S}_3)$ mit den Objekten $\mathrm{Ob}(\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\mathfrak{S}_3)^{\mathrm{skelet}}) = \{\mathfrak{S}_3/\mathfrak{E}, \mathfrak{S}_3/C_2, \mathfrak{S}_3/\mathfrak{A}_3\}$, wobei $\mathfrak{E} := \{(1)\}$, $C_2 := \langle(12)\rangle$ und den Morphismenmengen

$$\begin{aligned}
\hom_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\mathfrak{S}_3)^{\mathrm{skelet}}}(\mathfrak{S}_3/\mathfrak{E}, \mathfrak{S}_3/\mathfrak{E}) &= \{R_g \mid g \in \mathfrak{S}_3\},\\
\hom_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\mathfrak{S}_3)^{\mathrm{skelet}}}(\mathfrak{S}_3/C_2, \mathfrak{S}_3/C_2) &= \{R_{(1)}\},\\
\hom_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\mathfrak{S}_3)^{\mathrm{skelet}}}(\mathfrak{S}_3/\mathfrak{A}_3, \mathfrak{S}_3/\mathfrak{A}_3) &= \{R_{(1)}, R_{(12)}\},\\
\hom_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\mathfrak{S}_3)^{\mathrm{skelet}}}(\mathfrak{S}_3/\mathfrak{E}, \mathfrak{S}_3/C_2) &= \{R_{(1)}, R_{(13)}, R_{(23)}\},\\
\hom_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\mathfrak{S}_3)^{\mathrm{skelet}}}(\mathfrak{S}_3/\mathfrak{E}, \mathfrak{S}_3/\mathfrak{A}_3) &= \{R_{(1)}, R_{(12)}\}.
\end{aligned}$$

Dazu gilt laut [Dieck] Proposition (1.14) Seite 5 für eine endliche Gruppe G und Untergruppen $H, K \subseteq G$

$$\begin{aligned} \hom_{\mathcal{O}_\mathcal{C}(G)}(G/H, G/K) &\cong \{gK \in G/K \,|\, g^{-1}Hg \subseteq K\}, \\ R_g &\mapsto R_g(e) \end{aligned} \tag{6.1}$$

mit e neutrales Element von G und für $g \in G$

$$\begin{aligned} R_g : G/H &\longrightarrow G/K, \\ aH &\longmapsto agK. \end{aligned}$$

Die Inklusion $\mathcal{O}_\mathcal{C}(\mathfrak{S}_3)^{\text{skelet}} \hookrightarrow \mathcal{O}_\mathcal{C}(\mathfrak{S}_3)$ ist dann eine Kategorienäquivalenz, da es ein voller und treuer Funktor ist und jedes Objekt aus $\mathcal{O}_\mathcal{C}(\mathfrak{S}_3)$ wegen $\langle(12)\rangle = (23)\langle(13)\rangle(23) = (13)\langle(23)\rangle(13)$ zu einem Objekt in $\mathcal{O}_\mathcal{C}(\mathfrak{S}_3)^{\text{skelet}}$ isomorph ist, d.h. $\mathcal{O}_\mathcal{C}(\mathfrak{S}_3)^{\text{skelet}}$ ist ein Skeleton für $\mathcal{O}_\mathcal{C}(\mathfrak{S}_3)$, vgl. § 5. Beispiel 5.11. Deshalb wird weiterhin das Zeichen „skelet" einfach weggelassen.

Lemma 6.2. *Zu einer endlichen Gruppe G ist die Zuordnung*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_\mathcal{C}(G) \arrow[r, "\mathcal{F}"] & \text{Ringe} \\ G/H \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "R_g"'] & G/K \\ R(H) \arrow[r, mapsto] & R(K) \arrow[u, "\mathcal{F}(R_g)"'] \end{tikzcd}$$

mit $\mathcal{F}(R_g)(\chi)(h) = \chi(g^{-1}hg)$ für $\chi \in R(K)$ und $h \in H$ ein kontravarianter Funktor.

Beweis. Aus $g_1^{-1}Hg_1 \subseteq K$ und $g_2^{-1}Kg_2 \subseteq L$, L eine weitere Untergruppe von G folgt $(g_1g_2)^{-1}Hg_1g_2 = g_2^{-1}g_1^{-1}Hg_1g_2 \subseteq g_2^{-1}Kg_2 \subseteq L$, d.h. $(g_1g_2)^{-1}Hg_1g_2 \subseteq L$. Daher gibt es einen G-Morphismus $R_{g_1g_2}\colon G/H \to G/L$, $aH \mapsto ag_1g_2L$. Wegen $R_{g_1}\colon aH \mapsto ag_1K$ und $R_{g_2}\colon ag_1K \mapsto ag_1g_2L$ gilt $R_{g_1g_2} = R_{g_2} \circ R_{g_1}$. Für $\chi \in R(K)$ und $h \in H$ gilt $\mathcal{F}(R_{g_1})(\chi)(h) = \chi(g_1^{-1}hg_1)$. Ebenso für $\chi' \in R(L)$ und $h' \in K$ gilt $\mathcal{F}(R_{g_2})(\chi')(h') = \chi'(g_2^{-1}h'g_2)$, d.h. $\mathcal{F}(R_{g_2})(\chi') \in R(K)$. Sei etwa $\mathcal{F}(R_{g_2})(\chi') = \chi$. Somit erhält man $\mathcal{F}(R_{g_1})(\chi)(h) = \chi(g_1^{-1}hg_1) = \mathcal{F}(R_{g_2})(\chi')(g_1^{-1}hg_1) = \chi'(g_2^{-1}g_1^{-1}hg_1g_2) = \mathcal{F}(R_{g_1g_2})(\chi')(h)$, d.h. $\mathcal{F}(R_{g_1})(\chi) = \mathcal{F}(R_{g_1g_2})(\chi')$. Andererseits gilt $\mathcal{F}(R_{g_1})(\chi) = \mathcal{F}(R_{g_1})(\mathcal{F}(R_{g_2})(\chi')) = (\mathcal{F}(R_{g_1}) \circ \mathcal{F}(R_{g_2}))(\chi')$, also $\mathcal{F}(R_{g_1g_2}) = \mathcal{F}(R_{g_1}) \circ \mathcal{F}(R_{g_2})$ wie gewünscht. Für $R_e = \mathrm{id}_{G/H} \in \hom_{\mathcal{O}_\mathcal{C}(G)}(G/H, G/H)$, e neutrales Element von G und alle $h \in H$, $\chi \in R(H)$ gilt $\mathcal{F}(R_e)(\chi)(h) = \chi(ehe) = \chi(h)$, also gilt $\mathcal{F}(R_e) = \mathrm{id}_{R(H)} = \mathrm{id}_{\mathcal{F}(G/H)}$, d.h. $\mathcal{F}(\mathrm{id}_{G/H}) = \mathrm{id}_{\mathcal{F}(G/H)}$. $\square$

Definition 6.3. *Sei $\mathcal{F} : J \to \mathrm{Set}$ ein kontravarianter Funktor. Das Limes $\lim \mathcal{F}$ ist definiert als*

$$\lim \mathcal{F} := \{(x_j) \in \prod_{j \in \mathrm{Ob}(J)} \mathcal{F}(j) \,|\, \forall i, j \in \mathrm{Ob}(J) \text{ und } \varphi \in \mathrm{Mor}_J(i,j) : \mathcal{F}(\varphi)(x_j) = x_i\}.$$

Die Charaktertafel irreduzibler Charaktere der Gruppe $\mathfrak{S}_3$ selbst und ihrer Untergruppen C_2 bzw. $\mathfrak{A}_3$ sehen wie folgt aus

	(1)	t	c
χ_1	1	1	1
χ_2	1	-1	1
χ_3	2	0	-1

Die Charaktertafel von $\mathfrak{S}_3$

	(1)	(12)
$\chi_1^{C_2}$	1	1
$\chi_2^{C_2}$	1	-1

Die Charaktertafel von C_2

	(1)	(123)	(132)
$\chi_1^{\mathfrak{A}_3}$	1	1	1
$\chi_2^{\mathfrak{A}_3}$	1	ζ_3	ζ_3^2
$\chi_3^{\mathfrak{A}_3}$	1	ζ_3^2	ζ_3

Die Charaktertafel von $\mathfrak{A}_3$

wobei $\zeta_3 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, $t \in \{(12), (13), (23)\}$ und $c \in \{(123), (132)\}$ gilt. Für den trivialen Charakter χ der trivialen Untergruppe $\mathfrak{E}$ gilt

$$\chi(s) = \begin{cases} 1, & s = (1), \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für alle $R_g \in \hom_{\mathcal{O}_\mathcal{C}(\mathfrak{S}_3)}(\mathfrak{S}_3/\mathfrak{E}, \mathfrak{S}_3/C)$, $\mathfrak{S}_3/C \in \mathcal{O}_\mathcal{C}(\mathfrak{S}_3)$ gilt wegen $R(\mathfrak{E}) = \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(R_g) = \operatorname{Res}_{\mathfrak{E}}^C : R(C) &\longrightarrow \mathbb{Z}, \\ \sum_{i=1}^{|C|} a_i\chi_i &\longmapsto \sum_{i=1}^{|C|} a_i, \end{aligned}$$

wobei χ_i die irreduziblen Charaktere der Untergruppe C bezeichnet und $a_i \in \mathbb{Z}$. Für $\mathfrak{S}_3/\mathfrak{A}_3 \overset{R_{(12)}}{\longrightarrow} \mathfrak{S}_3/\mathfrak{A}_3$ und $h \in \mathfrak{A}_3$ gilt wegen $(12)(123)(12) = (132)$

$$\mathcal{F}(R_{(12)})(\chi_2^{\mathfrak{A}_3})(h) = \chi_2^{\mathfrak{A}_3}((12)h(12)) = \chi_3^{\mathfrak{A}_3}(h),$$

d.h. $\mathcal{F}(R_{(12)}) \neq \mathcal{F}(R_{(1)}) = \mathrm{id}_{R(\mathfrak{A}_3)}$, sondern vertauscht die zwei nicht trivialen irreduziblen Charaktere $\chi_2^{\mathfrak{A}_3}$ und $\chi_3^{\mathfrak{A}_3}$ von $\mathfrak{A}_3$ mit einander.

Sei $\mathcal{F}$ ein kontravarianter Funktor zwischen zwei Kategorien so, dass für den Objekten und den Pfeilen $i \overset{\varphi}{\to} j \overset{\psi}{\to} k$ mit $x_\alpha \in \mathcal{F}(\alpha)$, $\mathcal{F}(\varphi)(x_j) = x_i$ und $\mathcal{F}(\psi)(x_k) = x_j$ gilt. Dann gilt $\mathcal{F}(\psi \circ \varphi)(x_k) = \mathcal{F}(\varphi)(\mathcal{F}(\psi)(x_k)) = \mathcal{F}(\varphi)(x_j) = x_i$. Also reicht es für den Pfeilen in $\mathcal{O}_\mathcal{C}(\mathfrak{S}_3)$ nur die Erzeuger unter der Komposition hinzuschreiben. Für $a\chi_2^{\mathfrak{A}_3} \in \mathcal{F}(\mathfrak{S}_3/\mathfrak{A}_3) = R(\mathfrak{A}_3)$, $a \in \mathbb{Z}$ erhält man z.B. aus $\mathfrak{S}_3/\mathfrak{E} \overset{R'_{(1)}}{\longrightarrow} \mathfrak{S}_3/\mathfrak{A}_3 \underset{R_{(1)}}{\overset{R_{(12)}}{\rightrightarrows}} \mathfrak{S}_3/\mathfrak{A}_3$, $\mathcal{F}(R_{(1)})(a\chi_2^{\mathfrak{A}_3}) = a\chi_2^{\mathfrak{A}_3}$ und $\mathcal{F}(R_{(12)})(a\chi_2^{\mathfrak{A}_3}) = a\chi_3^{\mathfrak{A}_3}$. Wegen $\mathcal{F}(R'_{(1)})(a\chi_2^{\mathfrak{A}_3}) = \mathcal{F}(R'_{(1)})(a\chi_3^{\mathfrak{A}_3}) = a \in \mathbb{Z} = R(\mathfrak{E})$ ist $R_{(12)}$ in $\mathfrak{S}_3/\mathfrak{A}_3$ der Erzeuger unter Komposition, i.d.T. in $\mathfrak{S}_3/\mathfrak{A}_3$ gilt $R_{(12)}^2 = R_{(1)} = \mathrm{id}_{\mathfrak{S}_3/\mathfrak{A}_3}$. Ebenso gibt es zu jedem Pfeil $\mathfrak{S}_3/\mathfrak{E} \overset{\alpha}{\to} \mathfrak{S}_3/C$, C gleich C_2 oder $\mathfrak{A}_3$ ein eindeutig bestimmter Pfeil $\mathfrak{S}_3/\mathfrak{E} \overset{\gamma}{\to} \mathfrak{S}_3/\mathfrak{E}$, so dass $\alpha \circ \gamma = R_{(1)} \in \hom_{\mathcal{O}_\mathcal{C}(\mathfrak{S}_3)}(\mathfrak{S}_3/\mathfrak{E}, \mathfrak{S}_3/C)$ gilt. Grafisch dargestellt, gilt also

$$
\begin{tikzcd}
\mathfrak{S}_3/C_2 \arrow[loop above, "R_{(1)}"] & & \mathfrak{S}_3/\mathfrak{A}_3 \arrow[loop above, "R_{(12)}"] \\
& \mathfrak{S}_3/\mathfrak{E} \arrow[ul, bend left, "R_{(1)}"] \arrow[ur, bend right, "R_{(1)}"'] \arrow[loop below, "{R_{(1)},\ldots,R_{(132)}}"] &
\end{tikzcd}
\quad \xmapsto{\mathcal{F}} \quad
\begin{tikzcd}
R(C_2) \arrow[loop above, "\mathrm{id}_{R(C_2)}"] \arrow[dr, bend right, "\mathrm{Res}_{\mathfrak{E}}^{C_2}"'] & & R(\mathfrak{A}_3) \arrow[loop above, "\mathcal{F}(R_{(12)})\neq\mathrm{id}_{R(\mathfrak{A}_3)}"] \arrow[dl, bend left, "\mathrm{Res}_{\mathfrak{E}}^{\mathfrak{A}_3}"] \\
& \mathbb{Z} \arrow[loop below, "\mathrm{id}_{\mathbb{Z}}"] &
\end{tikzcd}
$$

Daher gilt

$$
\lim \mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} a\chi \\ b\chi_1^{C_2} + c\chi_2^{C_2} \\ d\chi_1^{\mathfrak{A}_3} + e\chi_2^{\mathfrak{A}_3} + f\chi_1^{\mathfrak{A}_3} \end{pmatrix} \in \bigoplus_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\mathfrak{S}_3)} R(C) \;\middle|\; \begin{array}{l} a = b + c, \\ e = f, \\ d = b + c - 2e. \end{array} \right\}
$$

mit $a, b, \ldots, f \in \mathbb{Z}$.

Lemma 6.4. *Sei $\mathcal{F}$ der kontravariante Funktor aus Lemma 6.2 und $\lim\limits_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\mathfrak{S}_3)^{op}} R(C) := \lim \mathcal{F}$ dessen Limes für $G = \mathfrak{S}_3$. Dann ist der Ringhomomorphismus*

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Res} : R(\mathfrak{S}_3) &\longrightarrow \lim_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\mathfrak{S}_3)^{op}} R(C), \\
y &\longmapsto (\mathrm{Res}_C^{\mathfrak{S}_3}(y))
\end{aligned}
$$

ein Isomorphismus.

Beweis. Dass Res ein Ringhomomorphismus bildet, ist aus der Charaktertheorie klar. Durch die Restriktion irreduzibler Charaktere χ_1, χ_2 und χ_3 von $\mathfrak{S}_3$ auf den zyklischen Untergruppen C_2 und $\mathfrak{A}_3$ erhält man die Inklusion

$$
\begin{aligned}
R(\mathfrak{S}_3) &\overset{\mathrm{Res}}{\hookrightarrow} \lim_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\mathfrak{S}_3)^{op}} R(C) \hookrightarrow \bigoplus_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\mathfrak{S}_3)} R(C), \\
\sum_{i=1}^{3} c_i\chi_i &\longmapsto \begin{pmatrix} (c_1 + c_2 + 2c_3)\chi \\ (c_1 + c_3)\chi_1^{C_2} + (c_2 + c_3)\chi_2^{C_2} \\ (c_1 + c_2)\chi_1^{\mathfrak{A}_3} + c_3\chi_2^{\mathfrak{A}_3} + c_3(\chi_2^{\mathfrak{A}_3})^2 \end{pmatrix},
\end{aligned}
\tag{6.5}
$$

wobei $c_i \in \mathbb{Z}$. Wegen $\zeta_3 + \zeta_3^2 = -1$ erhält man z.B. $\chi_3|_{\mathfrak{A}_3} = \chi_2^{\mathfrak{A}_3} + \chi_3^{\mathfrak{A}_3} = \chi_2^{\mathfrak{A}_3} + (\chi_2^{\mathfrak{A}_3})^2$. Die Inklusion links gilt, weil ein Element im Bild von Res ist genau dann gleich Null, wenn $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ gilt. Sei $y \in \lim\limits_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\mathfrak{S}_3)^{op}} R(C)$ gegeben, etwa

$$y = \begin{pmatrix} (b+c)\chi \\ b\chi_1^{C_2} + c\chi_2^{C_2} \\ (b+c-2e)\chi_1^{\mathfrak{A}_3} + e\chi_2^{\mathfrak{A}_3} + e\chi_1^{\mathfrak{A}_3} \end{pmatrix}$$

mit $b, c, e \in \mathbb{Z}$. Wähle das Element $x := \sum_{i=1}^{3} c_i\chi_i \in R(\mathfrak{S}_3)$ so, dass $c_1 = b - e$, $c_2 = c - e$ und $c_3 = e$ gilt. Dann folgt aus (6.5) $\mathrm{Res}(x) = y$, d.h. der Ringhomomorphismus Res ist auch surjektiv, also ein Isomorphismus. $\square$

Bemerkung 6.6. Spec ist ein kontravarianter Funktor so, dass

$$\begin{tikzcd} \overbrace{\mathcal{F}(\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\mathfrak{S}_3))}^{\supset \text{Ringe}} \arrow[r, "\text{Spec}"] & \text{Top} \\ R(C) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "\mathrm{Res}^C_{C'}"'] & \mathrm{Spec}(R(C)) \\ R(C') \arrow[r, mapsto] & \mathrm{Spec}(R(C')) \arrow[u, "\mathrm{Spec}(\mathrm{Res}^C_{C'})"'] \end{tikzcd}$$

gilt mit $\mathcal{F}$ der kontravariante Funktor aus Lemma 6.2 und

$$\begin{aligned} \mathrm{Spec}(\mathrm{Res}^C_{C'}) : \mathrm{Spec}(R(C')) &\longrightarrow \mathrm{Spec}(R(C)), \\ \mathfrak{p} &\longmapsto \mathfrak{P} = \mathfrak{p} \cap R(C). \end{aligned}$$

Korollar 6.7 (zu Lemma 6.4). *Die Abbildung*

$$\mathrm{Spec}(\mathrm{Res}) : \mathrm{Spec}(\lim_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\mathfrak{S}_3)^{op}} R(C)) \longrightarrow \mathrm{Spec}(R(\mathfrak{S}_3))$$

ist ein Homöomorphismus (vgl. [MNN] Proposition 3.27 Seite 21).

2 Die Bestimmung der Spektren $\mathrm{Spec}(R(\mathfrak{A}_3))$ und $\mathrm{Spec}(R(C_2))$

Da $\mathfrak{A}_3$ zyklisch ist, gilt $\mathrm{Spec}(R(\mathfrak{A}_3)) = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[X]/(X^3-1))$. Dabei ist $X^3-1 = fg$ für $f := X - 1$ und $g := X^2 + X + 1$ die Zerlegung in $\mathbb{Z}[X]$ in irreduziblen Faktoren. Daher gilt $V(fg) = V(f) \cup V(g)$. Wegen $(fg) \subset (f)$ und $(fg) \subset (g)$ sind die Ringhomomorphismen

$$\begin{aligned} \varphi_1 : \mathbb{Z}[X]/(fg) &\longrightarrow \mathbb{Z}[X]/(f), \\ y \bmod (fg) &\longmapsto y \bmod (f), \\ \varphi_2 : \mathbb{Z}[X]/(fg) &\longrightarrow \mathbb{Z}[X]/(g), \\ y \bmod (fg) &\longmapsto y \bmod (g) \end{aligned}$$

surjektiv mit Kern jeweils gleich (f) und (g) so, dass es Homöomorphismen

$$\begin{aligned} \mathrm{Spec}(\varphi_1) : \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[X]/(f)) &\longrightarrow V(f), \\ \mathrm{Spec}(\varphi_2) : \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[X]/(g)) &\longrightarrow V(g) \end{aligned}$$

gibt. Zur Bestimmung des Durchschnitts von $V(f)$ und $V(g)$ betrachtet man den Nächsten.

Seien $f, g \in \mathbb{Z}[X]$ normierte Polynome so, dass $(f, g) = 1$ in $\mathbb{Q}[X]$ gilt. Dann gilt $(f, g) = N$ in $\mathbb{Z}[X]$ mit $N > 0$. Zu dem, weiss man, dass der Ring $\mathbb{Z}[X]$ weder Hauptidealring noch Euklidisch ist. Da $\mathbb{Z}$ ein faktorieller Ring mit Eins ist, ist es möglich den größten gemeinsamen Teiler (f, g) der Polynomen f, g in $\mathbb{Z}[X]$ mittels einer Subdivision zu bestimmen. Sei $A := \mathbb{Z}[X]/(fg)$ und $B := \mathbb{Z}[X]/(f) \times \mathbb{Z}[X]/(g)$. Dann sind A, B endlich erzeugte $\mathbb{Z}$-Moduln und B ein endlich erzeugter A-Modul. Also sind die offensichtliche Homomorphismen $t : \mathbb{Z} \to A$, $u : \mathbb{Z} \to B$ und $\varphi : A \to B : y \bmod (fg) \mapsto (y \bmod (f), y \bmod (g))$ ganze Ringerweiterungen. Laut [Matsumura2] Seite 33 Theorem 5 *i*) gibt es Quotientenabbildungen

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Spec}(B) \arrow[rr, two heads, "\mathrm{Spec}(\varphi)"] \arrow[dr, two heads, "\mathrm{Spec}(u)"'] & & \mathrm{Spec}(A) \arrow[dl, two heads, "\mathrm{Spec}(t)"] \\
& \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}) &
\end{tikzcd}$$

Zu einem abgeschlossenen Punkt (p) von $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ gilt $\mathrm{Spec}(t)^{-1}((p)) = \mathrm{Spec}(A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}_p)$, $\mathrm{Spec}(u)^{-1}((p)) = \mathrm{Spec}(B \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}_p)$ und $\mathrm{Spec}(t)^{-1}((0)) = \mathrm{Spec}(A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})$, $\mathrm{Spec}(u)^{-1}((0)) = \mathrm{Spec}(B \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})$. D.h. die Urbilder abgeschlossener Punkten von $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ sind abgeschlossene Unterschemata von $\mathrm{Spec}(A)$ und $\mathrm{Spec}(B)$. Wegen $A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}_p = \mathbb{F}_p[X]/(\bar{f}\bar{g})$ und $B \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}_p = \mathbb{F}_p[X]/(\bar{f}) \times \mathbb{F}_p[X]/(\bar{g})$ gibt es den Morphismus der Schemata

$$\mathrm{Spec}(\varphi \otimes \mathbb{F}_p) : \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p[X]/(\bar{f}) \times \mathbb{F}_p[X]/(\bar{g})) \longrightarrow \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p[X]/(\bar{f}\bar{g})).$$

Seien $\bar{f} = \prod \alpha^{m(\alpha)}$ und $\bar{g} = \prod \alpha^{n(\alpha)}$ Zerlegungen in normierten irreduziblen Faktoren in $\mathbb{F}_p[X]$ und $\bar{f}\bar{g} = \prod \alpha^{m(\alpha)+n(\alpha)}$. Wegen $\mathbb{F}_p$ ein Körper, ist $\mathbb{F}_p[X]$ ein faktorieller Ring. Also ergibt Verwendung des chinesisches Restsatzes

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{F}_p[X]/(\bar{f}\bar{g}) \arrow[r, "\varphi\otimes\mathbb{F}_p"] \arrow[d, equal, "\mathrm{id}"'] & \mathbb{F}_p[X]/(\bar{f}) \times \mathbb{F}_p[X]/(\bar{g}) \arrow[d, equal, "\mathrm{id}"] \\
\displaystyle\prod_{\substack{\alpha\in\mathbb{F}_p[X] \\ \text{norm. irred.}}} \mathbb{F}_p[X]/(\alpha^{m(\alpha)+n(\alpha)}) \arrow[r, "\varphi\otimes\mathbb{F}_p"] & \displaystyle\prod_{\substack{\alpha\in\mathbb{F}_p[X] \\ \text{norm. irred.}}} \mathbb{F}_p[X]/(\alpha^{m(\alpha)}) \times \mathbb{F}_p[X]/(\alpha^{n(\alpha)})
\end{tikzcd}$$

d.h.

$$\prod_{\substack{\alpha\in\mathbb{F}_p[X] \\ \text{norm. irred.}}} \Big((\varphi \otimes \mathbb{F}_p)_\alpha : \mathbb{F}_p[X]/(\alpha^{m(\alpha)+n(\alpha)}) \longrightarrow \mathbb{F}_p[X]/(\alpha^{m(\alpha)}) \times \mathbb{F}_p[X]/(\alpha^{n(\alpha)}) \Big)$$

und wegen

$$\mathrm{Spec}(\prod_{\substack{\alpha\in\mathbb{F}_p[X]\\ \text{norm. irred.}}}(-)) = \dot{\bigcup_{\substack{\alpha\in\mathbb{F}_p[X]\\ \text{norm. irred.}}}}\mathrm{Spec}(-)$$

gilt

$$\dot{\bigcup_{\substack{\alpha\in\mathbb{F}_p[X]\\ \text{norm.}\\ \text{irred.}}}}\left(\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p[X]/(\alpha^{m(\alpha)})\times\mathbb{F}_p[X]/(\alpha^{n(\alpha)}))\overset{\mathrm{Spec}((\varphi\otimes\mathbb{F}_p)_\alpha)}{\longrightarrow}\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p[X]/(\alpha^{m(\alpha)+n(\alpha)}))\right).$$

Die Ringe $\mathbb{F}_p[X]/(\alpha^{n(\alpha)})$ sind gleich 0 für $n(\alpha)=0$ und lokal Artinsch mit maximalem Ideal $(\bar{\alpha})$, Restklassenkörper $\mathbb{F}_p[X]/(\bar{\alpha})\cong\mathbb{F}_{p^{\deg(\alpha)}}$ für $n(\alpha)>0$. Also gilt

$$\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p[X]/(\alpha^{n(\alpha)})) = \begin{cases}\emptyset, & n(\alpha)=0,\\ \{(\bar{\alpha})\}, & n(\alpha)>0.\end{cases}$$

Dabei unterscheiden sich folgende drei Fälle

1) $m(\alpha)=0$, $n(\alpha)=0$: alle Ringe sind gleich 0, also alle $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_p[X]/(\alpha^{n(\alpha)}))=\emptyset$.
2) $m(\alpha)>0$, $n(\alpha)=0$: $(\varphi\otimes\mathbb{F}_p)_\alpha$ ist ein Isomorphismus, genauso, wenn $m(\alpha)=0$ und $n(\alpha)>0$ gilt.
2) $m(\alpha)>0$, $n(\alpha)>0$: $\mathrm{Spec}((\varphi\otimes\mathbb{F}_p)_\alpha):\{\mathfrak{p}_1,\mathfrak{p}_2\}\to\{\mathfrak{p}\}$ soll ein Homöomorphismus sein, der genau dann möglich ist, wenn $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ zu einander verklebt sind.

In der Situation oben gilt $f=X-1$ und $g=X^2+X+1$, beide normiert und irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$. Aus $g-(X+2)f=3$ folgt $3\in(f,g)$. In $\mathbb{F}_3[X]$ gilt $\bar{f}=X-1$, $\bar{g}=X^2+X+1=X^2-2X+1=(X-1)^2$ und $\bar{f}\bar{g}=\bar{f}^3=(X-1)^3$. Also findet bei (3) eine Verklebung der Spektren $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[X]/(f))$ und $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[X]/(g))$ statt.

Weil $\mathbb{Z}[X]\to\mathbb{Z}$, $h\mapsto h(1)$ surjektiv mit Kern gleich (f) ist, folgt $\mathbb{Z}[X]/(f)\cong\mathbb{Z}$. Ferner weiss man, dass $g=\Phi_3$ das 3-te Kreisteilungspolynom ist, das wegen $g=(X-\zeta_3)(X-\zeta_3^2)$ auch das Minimalpolynom von ζ_3 über $\mathbb{Q}$ ist. Also gilt $\mathbb{Z}[X]/(g)=\mathbb{Z}[\zeta_3]$, der Ganzheitsring von $K:=\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ über $\mathbb{Q}$.

Lemma 6.8. *Sei $p>2$ eine Primzahl und $p\nmid d_K$, d_K die Diskriminante des quadratischen Körpers $K:=\mathbb{Q}(\sqrt{d_K})$. So spaltet p in K genau dann, wenn $\left(\frac{d_K}{p}\right)=1$ gilt. Falls d_K ungerade ist, spaltet 2 in K genau dann, wenn $d_K\equiv 1 \bmod 8$ gilt.*

Beweis. Siehe [Fröh. & Tayl.] (2.29) Seite 132. □

Dabei ist das Legendre Symbol $\left(\frac{d_K}{p}\right)$ definiert als

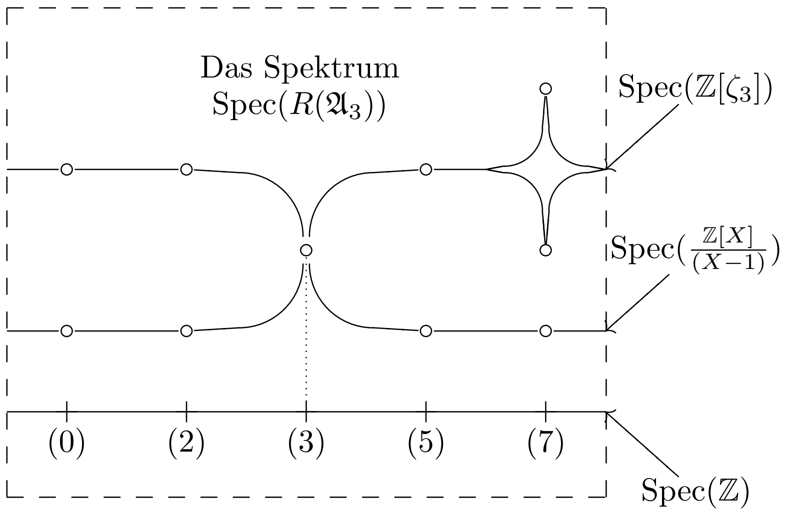
$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases}0, & \text{falls } a\equiv 0 \bmod p \text{ gilt},\\ 1, & \text{falls } X^2\equiv a \bmod p \text{ für } X\in\mathbb{Z}\backslash\{0\} \text{ gilt},\\ -1, & \text{sonst},\end{cases}$$

wobei $\left(\frac{ab}{p}\right)=\left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right)$ gilt. Hier gilt $d_K=-3$ und wegen $-3\not\equiv 1 \bmod 8$ spaltet 2 in $\mathbb{Z}[\zeta_3]$ nicht. Da $4\equiv -3 \bmod 7$ gilt, d.h. $\left(\frac{-3}{7}\right)=1$, spaltet 7 in $\mathbb{Z}[\zeta_3]$. Wegen $\left(\frac{-3}{5}\right)=\left(\frac{2}{5}\right)$ erhält man aus der Formel

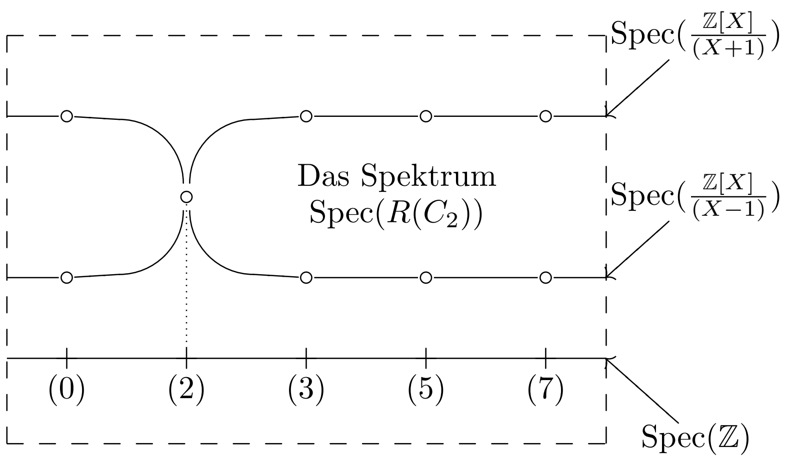
$$\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$$

für eine ungerade Primzahl p, $\left(\frac{-3}{5}\right) = -1$. Also spaltet 5 in $\mathbb{Z}[\zeta_3]$ nicht usw.

Also besteht das Spektrum $\mathrm{Spec}(R(\mathfrak{A}_3)) = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[X]/(fg))$ aus einer Vereinigung der Spektren $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[X]/(f)) = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ und $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[X]/(g)) = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\zeta_3])$, die aber nicht disjunkt ist, sondern findet im Punkt (3) eine Verklebung der Spektren $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ und $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\zeta_3])$ statt. Grafisch sieht das Spektrum wie folgt aus



Auf ähnlicher Weise findet man, dass das Spektrum $\mathrm{Spec}(R(C_2)) = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[X]/(X^2 - 1))$ aus einer Vereinigung der Spektren $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[X]/(X+1)) = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ und $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[X]/(X-1)) = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ besteht, die auch nicht disjunkt ist, sondern im Punkt (2) sind die Spektren $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[X]/(X+1))$ und $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[X]/(X-1))$ zu einander verklebt. Grafisch sieht es wie folgt aus



Sei R ein kommutativer Ring mit Eins und G eine endliche Gruppe, die auf R wirkt. Dann ist die Inklusion des Ringes R^G der invarianten Elementen von R unter der Wirkung von G in R eine ganze Ringerweiterung. Um diese zu zeigen, schreibt man für $x \in R$

$$F = \prod_{\sigma \in G} (T - \sigma(x)) \in R[T].$$

Die Koeffizienten von F sind elementarsymmetrische Funktionen von x und invariant unter der Wirkung von G. Also gilt $F \in R^G[T]$ und $F(x) = 0$. Da F auch normiert ist, folgt x ist ganz über R^G. Aus [Matsumura2] Seite 33 Theorem 5 *i*) folgt, dass für $\iota : R^G \hookrightarrow R$, $\operatorname{Spec}(\iota) : \operatorname{Spec}(R) \to \operatorname{Spec}(R^G)$ eine Quotientenabbildung ist. Ebenso ist durch die Wirkung von G auf $\operatorname{Spec}(R)$, die Projektion $\pi : \operatorname{Spec}(R) \to \operatorname{Spec}(R)/G$, $\mathfrak{P} \mapsto [\mathfrak{P}]$ eine Quotientenabbildung.

Lemma 6.9. *Sei R ein kommutativer Ring mit Eins, G eine endliche Gruppe, die auf R wirkt und R^G sein Ring der invarianten Elementen. Dann sind äquivalent*
(i) *Für $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2 \in \operatorname{Spec}(R)$ gilt $\mathfrak{P}_1 \cap R^G = \mathfrak{P}_2 \cap R^G$.*
(ii) *Es gibt ein $\sigma \in G$ so, dass $\sigma(\mathfrak{P}_1) = \mathfrak{P}_2$ gilt.*

Beweis. „(ii) $\Rightarrow$ (i)“: Seien $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2 \in \operatorname{Spec}(R)$, $\mathfrak{P}_1 \cap R^G = \mathfrak{p}$ und $\sigma \in G$ so, dass $\sigma(\mathfrak{P}_1) = \mathfrak{P}_2$ gilt. Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}_2 \cap R^G &= \sigma(\mathfrak{P}_1) \cap R^G \\ &= \sigma(\mathfrak{P}_1 \cap R^G) \\ &= \sigma(\mathfrak{p}) \\ &= \mathfrak{p} \\ &= \mathfrak{P}_1 \cap R^G. \end{aligned}$$

„(i) $\Rightarrow$ (ii)“: Siehe [Bourbaki] Chapter V § 2.2 Theorem 2 (*i*) Seite 331. $\square$

Proposition 6.10. *Für R, G und R^G wie im Lemma 6.9 gilt* $\operatorname{Spec}(R)/G$ *ist homöomorph zum* $\operatorname{Spec}(R^G)$.

Beweis. Sei $\alpha : \operatorname{Spec}(R)/G \to \operatorname{Spec}(R^G)$ so, dass für $[\mathfrak{P}] \in \operatorname{Spec}(R)/G$, $\alpha([\mathfrak{P}]) = \mathfrak{P} \cap R^G$ gilt. Dann ist α durch dem Lemma 6.9 eine wohldefinierte und bijektive Abbildung. Man weiss, dass die offenen Mengen der Form $D(a) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R^G) \,|\, a \notin \mathfrak{p}\}$ für $a \in R^G$ die Basis der Zariski Topologie des Raumes bilden. Entsprechendes gilt natürlich für $\operatorname{Spec}(R)$ und $\operatorname{Spec}(R)/G$. Sei nun $D(a) \subseteq \operatorname{Spec}(R^G)$ eine solche offene Menge. Da $\operatorname{Spec}(\iota)$ stetig ist, gilt

$$\operatorname{Spec}(\iota)^{-1}(D(a)) = \bigcup_{i=1}^{n} D(a_i) \subseteq \operatorname{Spec}(R)$$

für $a_i \in R$. Dann ist

$$
\begin{aligned}
\pi(\mathrm{Spec}(\iota)^{-1}(D(a))) &= \pi(\bigcup_{i=1}^{n} D(a_i)) \\
&= \bigcup_{i=1}^{n} \{[\mathfrak{P}] \in \mathrm{Spec}(R)/G \mid a_i \notin \mathfrak{P}\} \\
&= \bigcup_{i=1}^{n} D(a_i)/G \subseteq \mathrm{Spec}(R)/G
\end{aligned}
$$

offen. Wegen dem Lemma 6.9 und der Definition von α gilt $\bigcup_{i=1}^{n} D(a_i)/G = \alpha^{-1}(D(a))$, d.h. α ist stetig.

Sei nun $D(\tilde{a})/G$, $\tilde{a} \in R$ eine offene Menge und V ihres Komplements in $\mathrm{Spec}(R)/G$. Da π eine Quotientenabbildung ist, folgt $\pi^{-1}(V)$ ist in $\mathrm{Spec}(R)$ abgeschlossen. Laut [Bourbaki] Chapter V § 2.1 Remark (2) Seite 329 ist $\mathrm{Spec}(\iota)$ eine abgeschlossene Abbildung. Also gilt $\mathrm{Spec}(\iota)(\pi^{-1}(V)) \subset \mathrm{Spec}(R^G)$ ist abgeschlossen. Wegen dem Lemma 6.9 und der Definition von α ist $\mathrm{Spec}(\iota)(\pi^{-1}(V))$ gleich zum Komplement von $\alpha(D(\tilde{a})/G)$ in $\mathrm{Spec}(R^G)$, d.h. $\alpha(D(\tilde{a})/G)$ ist offen, also die Umkehrabbildung α^{-1} ist stetig. □

Bei der Bestimmung des Limes $\lim_{\mathcal{O}_\mathcal{C}(\mathfrak{S}_3)^{op}} R(C)$ hat man gesehen, dass für $\delta := \mathcal{F}(R_{(12)})$, $\delta(\chi_2^{\mathfrak{A}_3}) = \chi_3^{\mathfrak{A}_3}$ gilt. Aus $R(\mathfrak{A}_3) \cong \mathbb{Z}[X]/(X^3-1)$, $(\chi_2^{\mathfrak{A}_3}, \chi_3^{\mathfrak{A}_3}) \mapsto (X, X^2) \bmod (X^3-1)$ folgt $\delta(\overline{X}) = \overline{X}^2$. Also gilt $\mathrm{id}_{R(\mathfrak{A}_3)} \neq \delta \in \mathrm{Aut}(R(\mathfrak{A}_3))$. Durch die Proposition 6.10 erhält man $\mathrm{Spec}(R(\mathfrak{A}_3))/\langle\delta\rangle = \mathrm{Spec}(R(\mathfrak{A}_3)^{\langle\delta\rangle}))$. Also ist $\mathrm{Spec}(R(\mathfrak{A}_3)^{\langle\delta\rangle}))$ gleich zum Spektrum $\mathrm{Spec}(R(\mathfrak{A}_3)$ mit der Komponente $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\zeta_3])$ durch $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ ersetzt, da in $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\zeta_3])$, $\delta(\zeta_3) = \bar{\zeta}_3$ gilt, siehe die Bemerkung vor Lemma 6.8.

Definition 6.11. *Das Kolimes eines Funktors $\mathcal{G} : J \to \mathrm{Top}$ im topologischen Räumen mit der Quotienten Topologie ist definiert als*

$$
\operatorname*{colim}_J \mathcal{G} = \dot{\bigcup_{i \in J}} \mathcal{G}(i) \Bigg/ \begin{pmatrix} \forall \alpha : i \to j \text{ und } x \in \mathcal{G}(i) : \\ x \sim \mathcal{G}(\alpha)(x) \in \mathcal{G}(j) \end{pmatrix}.
$$

Mit $\operatorname*{colim}_{\mathcal{O}_\mathcal{C}(\mathfrak{S}_3)} \mathrm{Spec}(R(C)) := \operatorname*{colim}_{\mathcal{O}_\mathcal{C}(\mathfrak{S}_3)} (\mathrm{Spec} \circ \mathcal{F})$ gilt laut [MNN] Proposition 3.29 Seite 22

$$
\mathrm{Spec}(\lim_{\mathcal{O}_\mathcal{C}(\mathfrak{S}_3)^{op}} R(C)) = \operatorname*{colim}_{\mathcal{O}_\mathcal{C}(\mathfrak{S}_3)} \mathrm{Spec}(R(C)),
$$

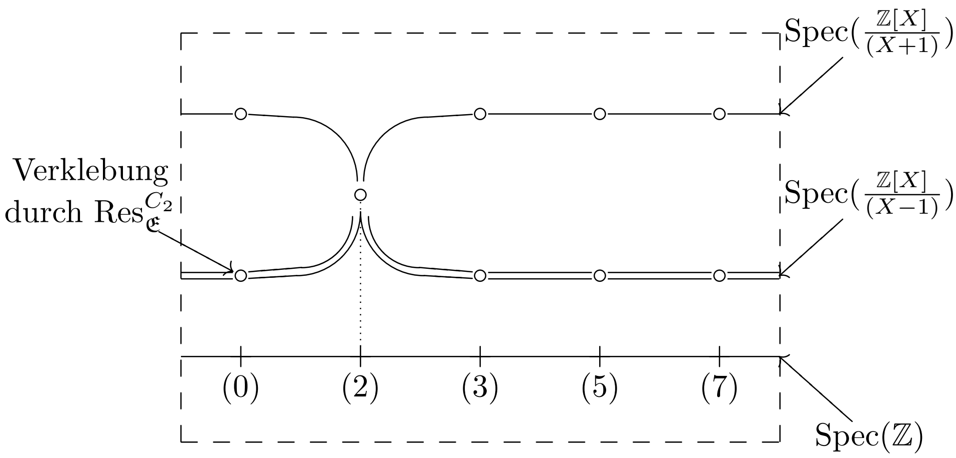
d.h. dem Korollar 6.7 nach sind die Räume $\mathrm{Spec}(R(\mathfrak{S}_3))$ und $\operatorname*{colim}_{\mathcal{O}_\mathcal{C}(\mathfrak{S}_3)} \mathrm{Spec}(R(C))$ zu einander homöomorph.

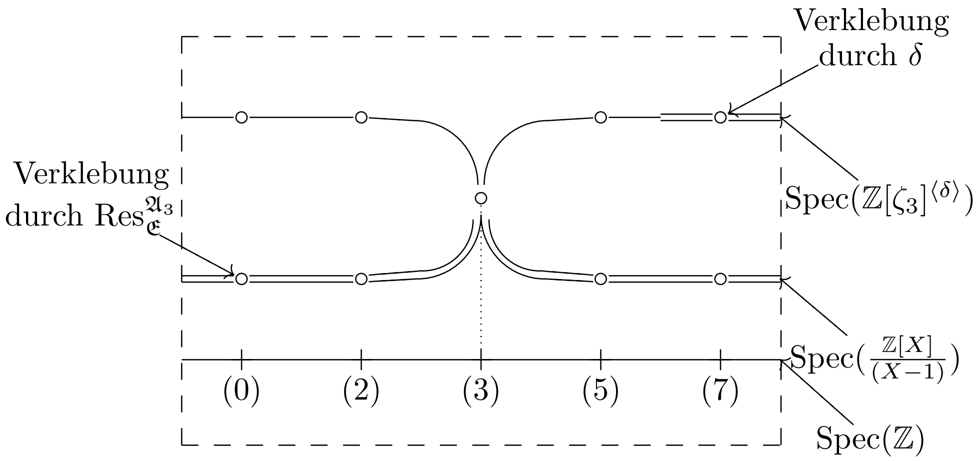
Fazit 6.12. Es gilt

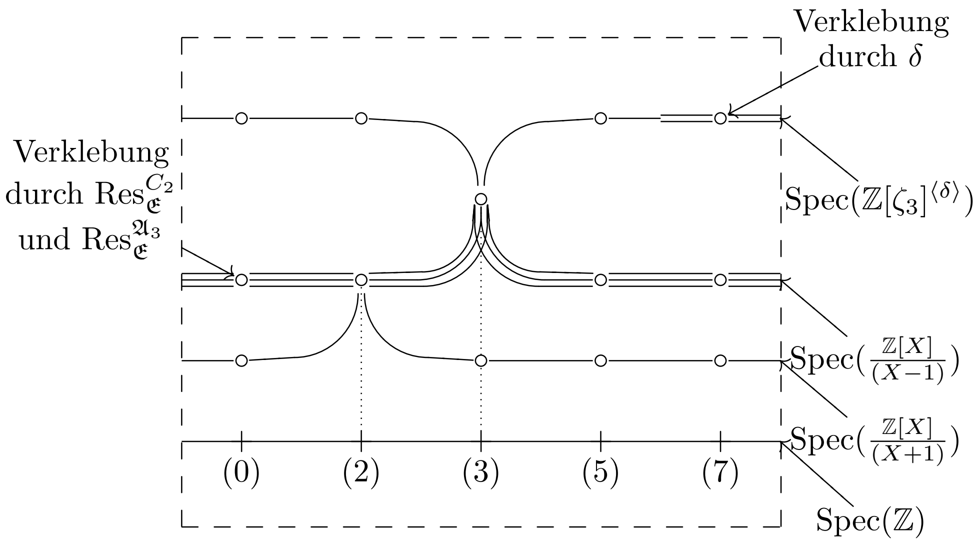
$$\begin{aligned}
\operatorname{Spec}(R(\mathfrak{S}_3)) &\approx \operatorname*{colim}_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\mathfrak{S}_3)} \operatorname{Spec}(R(C)) \\
&= \left. \dot{\bigcup_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\mathfrak{S}_3)}} \operatorname{Spec}(R(C)) \middle/ \right.
\end{aligned}$$

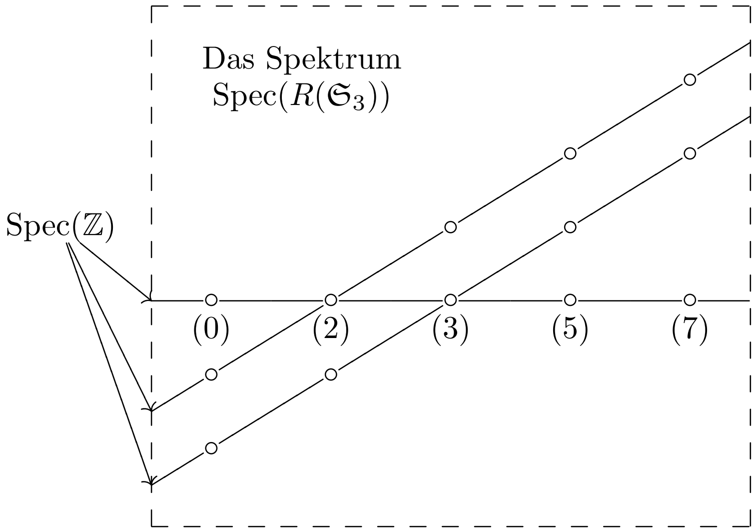
$$\left(\begin{array}{l}
\operatorname{Res}^{C_2}_{\mathfrak{E}} : R(C_2) \to \mathbb{Z}, \forall \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(\mathbb{Z}) : \operatorname{Spec}(\operatorname{Res}^{C_2}_{\mathfrak{E}})(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R(C_2)) \\
\operatorname{Res}^{\mathfrak{A}_3}_{\mathfrak{E}} : R(\mathfrak{A}_3) \to \mathbb{Z}, \forall \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(\mathbb{Z}) : \operatorname{Spec}(\operatorname{Res}^{\mathfrak{A}_3}_{\mathfrak{E}})(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R(\mathfrak{A}_3)) \\
\delta : R(\mathfrak{A}_3) \to R(\mathfrak{A}_3), \forall \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R(\mathfrak{A}_3)^{\langle\delta\rangle}) : \operatorname{Spec}(\delta)(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R(\mathfrak{A}_3)^{\langle\delta\rangle})
\end{array} \right).$$

Grafisch dargestellt sehen die Verklebungen im Kolimes und das Endergebnis wie folgt aus









Bemerkung 6.13. Man weiss, dass ζ_n eine primitive n-te Einheitswurzel ist genau dann, wenn $-\zeta_n$ eine primitive $2n$-te Einheitswurzel ist. Also gilt $\mathbb{Z}[\zeta_6] = \mathbb{Z}[\zeta_3]$. Da $\mathbb{Z}[\zeta_3]$ ein freier $\mathbb{Z}$-Modul vom Rang 2 ist und für alle $\mathbb{Z}$-Modul M aus $M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[\zeta_3] = 0$, $M = 0$ folgt, ist mit

$$R(\mathfrak{S}_3) \xrightarrow{\mathrm{Res}} \lim_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\mathfrak{S}_3)^{op}} R(C)$$

der Homomorphismus $\mathrm{Res} \otimes \mathrm{id}$

$$\begin{array}{ccccc}
 & & (\lim\limits_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\mathfrak{S}_3)^{op}} R(C)) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[\zeta_3] & & (\phi_C) \otimes a \\
 & & \| & & \uparrow \\
R(\mathfrak{S}_3) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[\zeta_3] & \xrightarrow{\mathrm{Res}\otimes\mathrm{id}} & \lim\limits_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\mathfrak{S}_3)^{op}} (R(C) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[\zeta_3]) & & (\phi_C \otimes a)
\end{array}$$

ebenso ein Isomorphismus. Aus der Inklusion

$$R(\mathfrak{S}_3) \hookrightarrow R(\mathfrak{S}_3) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[\zeta_3]$$

erhält man eine surjektive Abbildung

$$\begin{aligned} \mathrm{Spec}(R(\mathfrak{S}_3) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[\zeta_3]) &\twoheadrightarrow \mathrm{Spec}(R(\mathfrak{S}_3)), \\ \mathfrak{P} &\longmapsto \mathfrak{P} \cap R(\mathfrak{S}_3) = \mathfrak{p}. \end{aligned}$$

Also wird $\mathrm{Spec}(R(\mathfrak{S}_3))$ auch durch das Spektrum $\mathrm{Spec}(R(\mathfrak{S}_3) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[\zeta_3])$ bestimmt, vgl. [Serre1] Paragraph 11.4.

4 Die Kategorie $\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(D_4)$ und das Limes $\lim\limits_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(D_4)^{op}} R(C)$

Zur Erinnerung, D_4 besteht aus allen Drehungen r^k und Spiegelungen sr^k für $0 \leq k \leq 3$, wobei

$$r^4 = 1, \;\; s^2 = 1, \;\; sr^k s = r^{-k}$$

gilt. Es gibt die Konjugationsklassen $\{1\}$, $\{r, r^3\}$, $\{r^2\}$, $\{s, sr^2\}$ und $\{sr, sr^3\}$. Die irreduziblen Charaktere der Gruppe D_4 und ihrer Untergruppe C_4 sehen wie folgt aus

	1	r	r^2	r^3	s	sr	sr^2	sr^3
ψ_1	1	1	1	1	1	1	1	1
ψ_2	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
ψ_3	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
ψ_4	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
ψ_5	2	0	-2	0	0	0	0	0

Die Charaktertafel von D_4

	1	r	r^2	r^3
$\chi_1^{C_4}$	1	1	1	1
$\chi_2^{C_4}$	1	i	1	$-i$
$\chi_3^{C_4}$	1	-1	1	-1
$\chi_4^{C_4}$	1	$-i$	1	i

Die Charaktertafel von C_4

Die Kategorie $\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(D_4)$ der Gruppe D_4 besitzt deshalb einen Skeleton, der ebenfalls als $\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(D_4)$ bezeichnet wird, bestehend aus den Objekten $D_4/\mathfrak{E}$, D_4/C_s, D_4/C_{sr}, D_4/C_{r^2} und D_4/C_4, wobei $\mathfrak{E} := \{1\}$, $C_s := \{1, s\}$, $C_{sr} := \{1, sr\}$, $C_{r^2} := \{1, r^2\}$ und $C_4 = \{1, r, r^2, r^3\}$. Die Morphismenmengen sind wie folgt

$$\begin{aligned}
\hom_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(D_4)}(D_4/\mathfrak{E}, D_4/\mathfrak{E}) &= \{R_g \mid g \in D_4\}, \\
\hom_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(D_4)}(D_4/\mathfrak{E}, D_4/C_s) &= \{R_1, R_r, R_{r^2}, R_{r^3}\}, \\
\hom_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(D_4)}(D_4/\mathfrak{E}, D_4/C_{sr}) &= \{R_1, R_r, R_{r^2}, R_{r^3}\}, \\
\hom_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(D_4)}(D_4/\mathfrak{E}, D_4/C_{r^2}) &= \{R_1, R_r, R_s, R_{sr}\}, \\
\hom_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(D_4)}(D_4/\mathfrak{E}, D_4/C_4) &= \{R_1, R_s\}, \\
\hom_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(D_4)}(D_4/C_s, D_4/C_s) &= \{R_1, R_{r^2}\}, \\
\hom_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(D_4)}(D_4/C_{sr}, D_4/C_{sr}) &= \{R_1, R_{r^2}\}, \\
\hom_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(D_4)}(D_4/C_{r^2}, D_4/C_{r^2}) &= \{R_1, R_r, R_s, R_{sr}\}, \\
\hom_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(D_4)}(D_4/C_4, D_4/C_4) &= \{R_1, R_s\}, \\
\hom_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(D_4)}(D_4/C_{r^2}, D_4/C_4) &= \{R_1, R_s\}.
\end{aligned}$$

Die Überprüfung hiervon durch der Relation (6.1) ergibt

$$\begin{aligned}
\hom_{\mathcal{O}_\mathcal{C}(D_4)}(D_4/\mathfrak{E}, D_4/\mathfrak{E}) &\xrightarrow{\cong} \{g\mathfrak{E} \,|\, g \in D_4\},\\
\hom_{\mathcal{O}_\mathcal{C}(D_4)}(D_4/\mathfrak{E}, D_4/C_s) &\xrightarrow{\cong} \{C_s, rC_s, r^2C_s, r^3C_s\},
\end{aligned}$$

da $rC_s = sr^3C_s$, $r^2C_s = sr^2C_s$ und $r^3C_s = srC_s$,

$$\hom_{\mathcal{O}_\mathcal{C}(D_4)}(D_4/\mathfrak{E}, D_4/C_{sr}) \xrightarrow{\cong} \{C_{sr}, rC_{sr}, r^2C_{sr}, r^3C_{sr}\},$$

da $rC_{sr} = sC_{sr}$, $r^2C_{sr} = sr^3C_{sr}$ und $r^3C_{sr} = sr^2C_{sr}$,

$$\hom_{\mathcal{O}_\mathcal{C}(D_4)}(D_4/\mathfrak{E}, D_4/C_{r^2}) \xrightarrow{\cong} \{C_{r^2}, rC_{r^2}, sC_{r^2}, srC_{r^2}\},$$

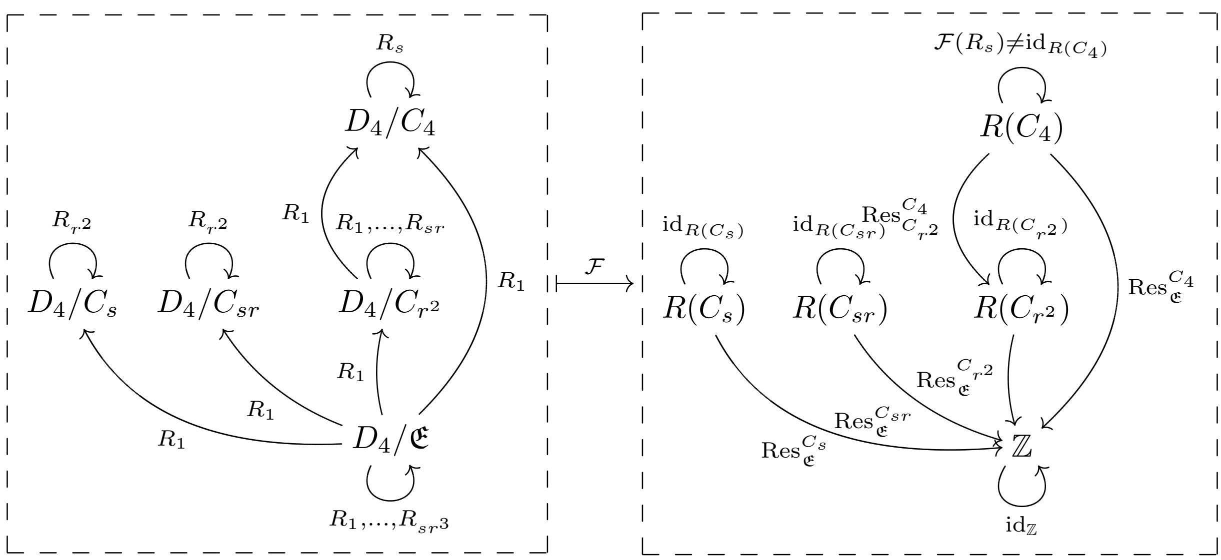
da $rC_{r^2} = r^3C_{r^2}$, $sC_{r^2} = sr^2C_{r^2}$ und $srC_{r^2} = sr^3C_{r^2}$,

$$\hom_{\mathcal{O}_\mathcal{C}(D_4)}(D_4/\mathfrak{E}, D_4/C_4) \xrightarrow{\cong} \{C_4, sC_4\},$$

da $sC_4 = srC_4 = sr^2C_4 = sr^3C_4$,

$$\begin{aligned}
\hom_{\mathcal{O}_\mathcal{C}(D_4)}(D_4/C_s, D_4/C_s) &\xrightarrow{\cong} \{C_s, r^2C_s\},\\
\hom_{\mathcal{O}_\mathcal{C}(D_4)}(D_4/C_{sr}, D_4/C_{sr}) &\xrightarrow{\cong} \{C_{sr}, r^2C_{sr}\},\\
\hom_{\mathcal{O}_\mathcal{C}(D_4)}(D_4/C_{r^2}, D_4/C_{r^2}) &\xrightarrow{\cong} \{C_{r^2}, rC_{r^2}, sC_{r^2}, srC_{r^2}\},\\
\hom_{\mathcal{O}_\mathcal{C}(D_4)}(D_4/C_4, D_4/C_4) &\xrightarrow{\cong} \{C_4, sC_4\},\\
\hom_{\mathcal{O}_\mathcal{C}(D_4)}(D_4/C_{r^2}, D_4/C_4) &\xrightarrow{\cong} \{C_4, sC_4\}.
\end{aligned}$$

Auf ähnlicher Weise wie bei $\mathfrak{S}_3$, für die Morphismen der Kategorie $\mathcal{O}_\mathcal{C}(D_4)$ nur die Erzeuger unter dem Funktor $\mathcal{F}$ aus Lemma 6.2 aufschreiben ergibt



wobei hier $\mathcal{F}(R_s)$ nicht gleich zur Identität ist, sondern vertauscht die Charakteren $\chi_2^{C_4}$ und $\chi_4^{C_4}$ der Untergruppe C_4 mit einander. Also gilt

$$\lim_{\mathcal{O}_\mathcal{C}(D_4)^{op}} R(C) = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} (a+b)\chi \\ a\chi_1^{C_s} + b\chi_2^{C_s} \\ c\chi_1^{C_{sr}} + c'\chi_2^{C_{sr}} \\ d'\chi_1^{C_{r^2}} + d''\chi_2^{C_{r^2}} \\ d\chi_1^{C_4} + e\chi_2^{C_4} + e'\chi_3^{C_4} + e''\chi_4^{C_4} \end{pmatrix}}_{\in \bigoplus_{\mathcal{O}_\mathcal{C}(D_4)} R(C)} \left| \begin{array}{l} e'' = e, \\ d'' = 2e, \\ c' = a+b-c, \\ d' = a+b-2e, \\ e' = a+b-d-2e. \end{array} \right. \right\}$$

mit $a, b, \ldots, e'' \in \mathbb{Z}$, d.h. $y \in \lim_{\mathcal{O}_\mathcal{C}(D_4)^{op}} R(C)$ genau dann gilt, wenn y von der Form

$$y = \begin{pmatrix} (a+b)\chi \\ a\chi_1^{C_s} + b\chi_2^{C_s} \\ c\chi_1^{C_{sr}} + (a+b-c)\chi_2^{C_{sr}} \\ (a+b-2e)\chi_1^{C_{r^2}} + 2e\chi_2^{C_{r^2}} \\ d\chi_1^{C_4} + e\chi_2^{C_4} + (a+b-d-2e)\chi_3^{C_4} + e\chi_4^{C_4} \end{pmatrix}$$

ist.

5 Der $\mathcal{N}$-Isomorphie Index für D_4

Aus § 1 weiss man, dass für die endliche Gruppe D_4 die Inklusion

$$\begin{aligned} \mathrm{Res} : R(D_4) &\hookrightarrow \lim_{\mathcal{O}_\mathcal{C}(D_4)^{op}} R(C), \\ y &\longmapsto (\mathrm{Res}_C^{D_4}(y)) \end{aligned}$$

ein $\mathcal{N}$-Isomorphismus ist. Zur Bestimmung des Indexes betrachtet man die Restriktion irreduzibler Charktere $\psi_1, \ldots, \psi_5$ von D_4 auf den zyklischen Untergruppen wie folgt

$$\begin{aligned} R(D_4) &\overset{\mathrm{Res}}{\hookrightarrow} \lim_{\mathcal{O}_\mathcal{C}(D_4)^{op}} R(C) \hookrightarrow \bigoplus_{\mathcal{O}_\mathcal{C}(D_4)} R(C), \\ \sum_{i=1}^{5} c_i\psi_i &\longmapsto \begin{pmatrix} (c_1+c_2+c_3+c_4+2c_5)\chi \\ (c_1+c_3+c_5)\chi_1^{C_s} + (c_2+c_4+c_5)\chi_2^{C_s} \\ (c_1+c_4+c_5)\chi_1^{C_{sr}} + (c_2+c_3+c_5)\chi_2^{C_{sr}} \\ (c_1+c_2+c_3+c_4)\chi_1^{C_{r^2}} + 2c_5\chi_2^{C_{r^2}} \\ (c_1+c_2)\chi_1^{C_4} + c_5\chi_2^{C_4} + (c_3+c_4)\chi_3^{C_4} + c_5\chi_4^{C_4} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{6.14}$$

Sei jetzt $y \in \lim_{\mathcal{O}_\mathcal{C}(D_4)^{op}} R(C)$ gegeben, etwa

$$y = \begin{pmatrix} (a+b)\chi \\ a\chi_1^{C_s} + b\chi_2^{C_s} \\ c\chi_1^{C_{sr}} + (a+b-c)\chi_2^{C_{sr}} \\ (a+b-2e)\chi_1^{C_{r^2}} + 2e\chi_2^{C_{r^2}} \\ d\chi_1^{C_4} + e\chi_2^{C_4} + (a+b-d-2e)\chi_3^{C_4} + e\chi_4^{C_4} \end{pmatrix}$$

mit $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Die Aufgabe besteht nun darin, für möglichst kleine $n \geq 1$ und $x \in R(D_4)$ die Lösbarkeit von

$$\mathrm{Res}(x) = y^n \tag{6.15}$$

zu überprüfen. Wegen (6.14) ist für $n = 1$ und $x = \sum_{i=1}^{5} c_i \psi_i$ (6.15) äquivalent zum Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix}$$

mit der Determinante gleich 2 und der Lösung

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(c + d - b) \\ \frac{1}{2}(b + d - c) \\ a - e - \frac{1}{2}(c + d - b) \\ \frac{1}{2}(b + c - d) - e \\ e \end{pmatrix},$$

die nicht unbedingt in $\mathbb{Z}^5$ liegt. Also muss der Index grösser oder gleich 2 sein. Betrachtet man also das Quadrat

$$y^2 = \begin{pmatrix} (a_1 + a_2)\chi \\ a_1\chi_1^{C_s} + a_2\chi_2^{C_s} \\ (a_1 + a_2 - a_3)\chi_1^{C_{sr}} + a_3\chi_2^{C_{sr}} \\ (a_1 + a_2 - 2a_4)\chi_1^{C_{r^2}} + 2a_4\chi_2^{C_{r^2}} \\ (a_1 + a_2 - 2a_4 - a_5)\chi_1^{C_4} + a_4\chi_2^{C_4} + a_5\chi_3^{C_4} + a_4\chi_4^{C_4} \end{pmatrix},$$

wobei

$$\begin{aligned} a_1 &= a^2 + b^2, \\ a_2 &= 2ab, \\ a_3 &= 2c(a + b - c), \\ a_4 &= 2e(a + b - 2e), \\ a_5 &= 2e^2 + 2d(a + b - d - 2e) \end{aligned}$$

gilt, so erhält man durch (6.14) das zur (6.15) äquivalente Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix}$$

und die Lösung

$$\begin{pmatrix} a_1 - a_4 - \frac{1}{2}(a_3 + a_5 - a_2) \\ \frac{1}{2}(a_2 + a_3 - a_5) - a_4 \\ \frac{1}{2}(a_3 + a_5 - a_2) \\ \frac{1}{2}(a_2 + a_5 - a_3) \\ a_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^5.$$

Also ist der Index für D_4 gleich 2. Darüber hinaus folgt aus der Lösung für den Fall $n = 1$, dass $R(D_4) = \ker(f)$ gilt, wobei

$$\begin{aligned} f : \lim_{\mathcal{O}_\mathcal{C}(D_4)^{op}} R(C) &\longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \\ y &\longmapsto b + c + d \pmod 2. \end{aligned}$$

6 Die Bestimmung des Spektrums $\operatorname{Spec}(R(C_4))$

Laut [MNN] Proposition 3.27 Seite 21 ist zu einem $\mathcal{N}$-Isomorphismus $f : A \to B$ kommutativer Ringe die Abbildung $\operatorname{Spec}(f)$ ein Homöomorphismus. Also darf man wie für $\mathfrak{S}_3$ das Spektrum $\operatorname{Spec}(D_4)$ durch dem Kolimes $\operatorname{colim}_{\mathcal{O}_\mathcal{C}(D_4)} \operatorname{Spec}(R(C))$ bestimmen. Dazu braucht man die Kenntnis aller Spektren $\operatorname{Spec}(R(C))$ aus dem Kolimes. Zusätzlich zum bereits bekannten Spektrum $\operatorname{Spec}(R(C))$ für C zyklisch von Ordnung zwei, tritt hier ebenfalls das Spektrum $\operatorname{Spec}(R(C_4))$ auf. Daher wird in diesem Abschnitt das Spektrum $\operatorname{Spec}(R(C_4))$ beschrieben.

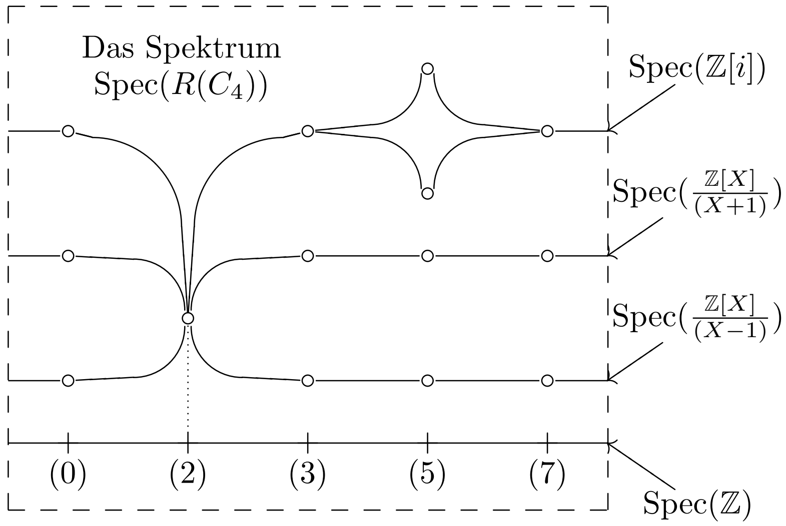
Sei $f_1 := X - 1$, $f_2 := X + 1$ und $f_3 := X^2 + 1$. Dann ist $f_1 f_2 f_3$ die Zerlegung von $X^4 - 1$ in irreduziblen Faktoren in $\mathbb{Z}[X]$. Durch $R(C_4) = \mathbb{Z}[X]/(X^4 - 1)$ lässt sich dessen Spektrum aus den Spektren der Ringe $\mathbb{Z}[X]/(f_1)$, $\mathbb{Z}[X]/(f_2)$ und $\mathbb{Z}[X]/(f_3)$ bzw. ihren Verklebung gemäß

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{Z}[X]/(f_1 f_2 f_3) &\longrightarrow \mathbb{Z}[X]/(f_1) \times \mathbb{Z}[X]/(f_2) \times \mathbb{Z}[X]/(f_3), \\ y \bmod (f_1 f_2 f_3) &\longmapsto (y \bmod (f_1), y \bmod (f_2), y \bmod (f_3)) \end{aligned} \tag{6.16}$$

bestimmen. Es gilt $\mathbb{Z}[X]/(f_1) \cong \mathbb{Z}[X]/(f_2) \cong \mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}[X]/(f_3) \cong \mathbb{Z}[i]$, wobei der Durchschnitt der Spektren von $\mathbb{Z}[X]/(f_1)$ und $\mathbb{Z}[X]/(f_2)$ wegen $\mathbb{Z}[X]/(f_1 f_2) = R(C_2)$ bereits aus § 6 Abschnitt 2 bekannt ist. Aus $f_3 - f_1 f_2 = 2$ folgt $2 \in (f_i, f_3)$ für $i = 1, 2$. Da in $\mathbb{F}_2[X]$, $\bar{f}_3 = X^2 + 1 = (X \pm 1)^2$, d.h. $\bar{f}_3 = \bar{f}_1^2 = \bar{f}_2^2$ gilt, haben die Spektren der Ringe $\mathbb{Z}[X]/(f_1)$ und $\mathbb{Z}[X]/(f_2)$ durch (6.16) sowohl mit einander, als auch mit $\operatorname{Spec}(\mathbb{Z}[X]/(f_3))$ den Punkt (2) gemeinsam. Durch dem Lemma 6.8 weiss man, dass 2 in $\mathbb{Z}[i] \cong \mathbb{Z}[X]/(f_3)$ nicht spaltet, da hier $d_K = -1$ und $-1 \not\equiv 1 \bmod 8$ gilt. Aus der Relation

$$\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$$

für eine gerade Primzahl p erhält man $\left(\frac{-1}{3}\right) = -1$, $\left(\frac{-1}{5}\right) = 1$ und $\left(\frac{-1}{7}\right) = -1$, d.h. aus 3, 5 und 7 nur 5 in $\mathbb{Z}[i]$ spaltet usw. Also sieht das Spektrum des Ringes $R(C_4)$ grafisch wie folgt aus



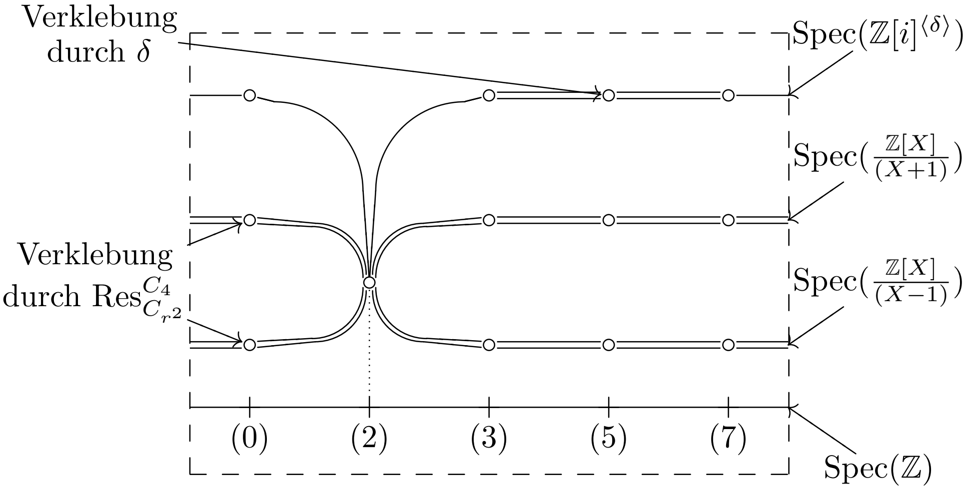
7 Die Bestimmung des Kolimites $\underset{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(D_4)}{\operatorname{colim}} \operatorname{Spec}(R(C))$

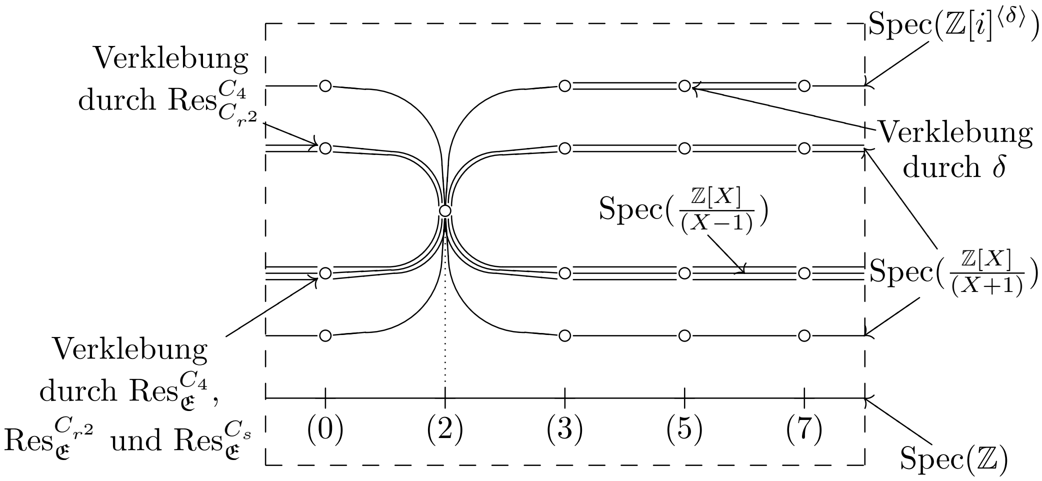
Aus $\mathbb{Z}[X]/(f_3) \cong \mathbb{Z}[i]$ und der Weylgruppe $\langle \delta \rangle$ von C_4, wobei $\delta := \mathcal{F}(R_s)$, erhält man durch die Proposition 6.10, $\operatorname{Spec}(\mathbb{Z}[i])/\langle \delta \rangle \cong \operatorname{Spec}(\mathbb{Z}[i]^{\langle \delta \rangle})$. Da in $\mathbb{Z}[i]$, $\delta(i) = -i$ gilt, ist der Invariantenring $\mathbb{Z}[i]^{\langle \delta \rangle} \cong \mathbb{Z}$. Also folgt $\operatorname{Spec}(\mathbb{Z}[X]/(f_3))/\langle \delta \rangle = \operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$. Damit gilt

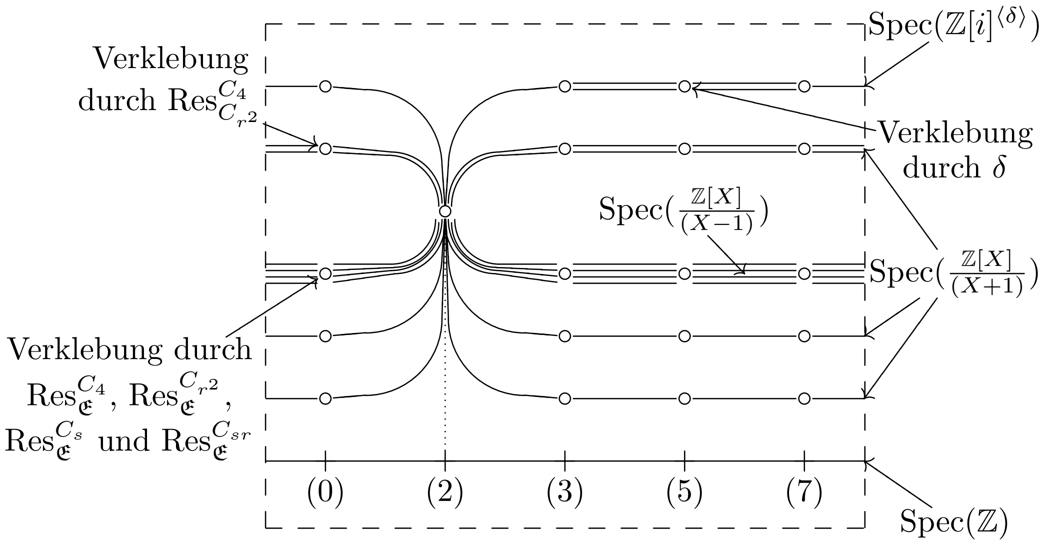
$$
\begin{aligned}
\operatorname{Spec}(R(D_4)) &\approx \underset{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(D_4)}{\operatorname{colim}} \operatorname{Spec}(R(C)) \\
&= \bigcupdot_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(D_4)} \operatorname{Spec}(R(C)) \Big/
\end{aligned}
$$

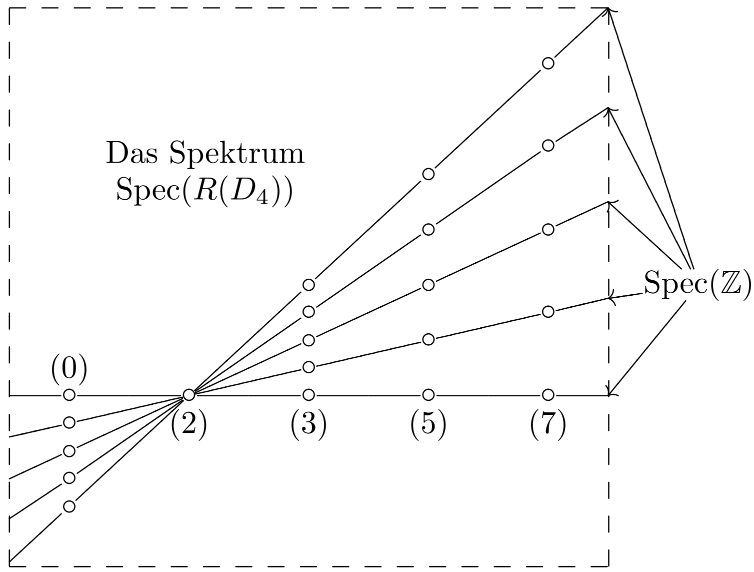
$$
\left(
\begin{array}{l}
\delta : R(C_4) \to R(C_4), \forall \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R(C_4)^{\langle \delta \rangle})) : \operatorname{Spec}(\delta)(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R(C_4)^{\langle \delta \rangle})) \\
\operatorname{Res}^{C_4}_{C_{r^2}} : R(C_4) \to R(C_{r^2}), \forall \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R(C_{r^2})) : \operatorname{Spec}(\operatorname{Res}^{C_4}_{C_{r^2}})(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R(C_4)) \\
\operatorname{Res}^{C_4}_{\mathfrak{E}} : R(C_4) \to \mathbb{Z}, \forall \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(\mathbb{Z}) : \operatorname{Spec}(\operatorname{Res}^{C_4}_{\mathfrak{E}})(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R(C_4)) \\
\operatorname{Res}^{C_s}_{\mathfrak{E}} : R(C_s) \to \mathbb{Z}, \forall \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(\mathbb{Z}) : \operatorname{Spec}(\operatorname{Res}^{C_s}_{\mathfrak{E}})(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R(C_s)) \\
\operatorname{Res}^{C_{sr}}_{\mathfrak{E}} : R(C_{sr}) \to \mathbb{Z}, \forall \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(\mathbb{Z}) : \operatorname{Spec}(\operatorname{Res}^{C_{sr}}_{\mathfrak{E}})(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R(C_{sr})) \\
\operatorname{Res}^{C_{r^2}}_{\mathfrak{E}} : R(C_{r^2}) \to \mathbb{Z}, \forall \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(\mathbb{Z}) : \operatorname{Spec}(\operatorname{Res}^{C_{r^2}}_{\mathfrak{E}})(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R(C_{r^2}))
\end{array}
\right)
$$

Die Verklebungen im Kolimes und das Endergebnis sind in den nächsten Diagrammen schrittweise dargestellt.


Verklebung durch δ
Spec($\mathbb{Z}[i]^{\langle\delta\rangle}$)
Spec($\frac{\mathbb{Z}[X]}{(X+1)}$)
Verklebung durch $\mathrm{Res}^{C_4}_{C_{r^2}}$
Spec($\frac{\mathbb{Z}[X]}{(X-1)}$)
(0) (2) (3) (5) (7)
Spec($\mathbb{Z}$)


Spec($\mathbb{Z}[i]^{\langle\delta\rangle}$)
Verklebung durch $\mathrm{Res}^{C_4}_{C_{r^2}}$
Verklebung durch δ
Spec($\frac{\mathbb{Z}[X]}{(X-1)}$)
Spec($\frac{\mathbb{Z}[X]}{(X+1)}$)
Verklebung durch $\mathrm{Res}^{C_4}_{\mathfrak{E}}$, $\mathrm{Res}^{C_{r^2}}_{\mathfrak{E}}$ und $\mathrm{Res}^{C_s}_{\mathfrak{E}}$
(0) (2) (3) (5) (7)
Spec($\mathbb{Z}$)


Spec($\mathbb{Z}[i]^{\langle\delta\rangle}$)
Verklebung durch $\mathrm{Res}^{C_4}_{C_{r^2}}$
Verklebung durch δ
Spec($\frac{\mathbb{Z}[X]}{(X-1)}$)
Spec($\frac{\mathbb{Z}[X]}{(X+1)}$)
Verklebung durch $\mathrm{Res}^{C_4}_{\mathfrak{E}}$, $\mathrm{Res}^{C_{r^2}}_{\mathfrak{E}}$, $\mathrm{Res}^{C_s}_{\mathfrak{E}}$ und $\mathrm{Res}^{C_{sr}}_{\mathfrak{E}}$
(0) (2) (3) (5) (7)
Spec($\mathbb{Z}$)



8 Die Kategorie $\mathcal{O}_\mathcal{C}(\mathfrak{A}_4)$ und das Limes $\lim\limits_{\mathcal{O}_\mathcal{C}(\mathfrak{A}_4)^{op}} R(C)$

Die sämtlichen Elementen der Gruppe $\mathfrak{A}_4$ sind nur die geraden Permutationen von $\{1, 2, 3, 4\}$. Diese sind die Elementen

1. Ordnung

$$(1).$$

2. Ordnung

$$(12)(34), (13)(24), (14)(23).$$

3. Ordnung

$$\begin{aligned}
&(123), (124), (134), (234),\\
&(132) = (123)^2,\\
&(142) = (124)^2,\\
&(143) = (134)^2,\\
&(243) = (234)^2.
\end{aligned}$$

Also gibt es in $\mathfrak{A}_4$ die zyklischen Untergruppen

$$\begin{aligned}
\mathfrak{E} &= \{(1)\}, & \mathfrak{A}_3 &= \{(1), (123), (132)\},\\
C_2 &= \{(1), (12)(34)\}, & \mathfrak{A}_3' &= \{(1), (124), (142)\},\\
C_2' &= \{(1), (13)(24)\}, & \mathfrak{A}_3'' &= \{(1), (134), (143)\},\\
C_2'' &= \{(1), (14)(23)\}, & \mathfrak{A}_3''' &= \{(1), (234), (243)\}.
\end{aligned}$$

Durch

$$
\begin{aligned}
(234)(12)(34)(243) &= (13)(24),\\
(143)(13)(24)(134) &= (14)(23),\\
(12)(34)(243)(12)(34) &= (134),\\
(13)(24)(134)(13)(24) &= (123),\\
(14)(23)(134)(14)(23) &= (142),\\
(12)(34)(234)(12)(34) &= (143),\\
(14)(23)(143)(14)(23) &= (124),\\
(13)(24)(143)(13)(24) &= (132)
\end{aligned}
$$

erhält man die Konjugationsklassen der Elementen $\{(1)\}$, $\{(12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$, $\{(123), (134), (142), (243)\}$ und $\{(124), (132), (143), (234)\}$. Daher sind die Untergruppen C_2, C_2', C_2'' bzw. $\mathfrak{A}_3$, $\mathfrak{A}_3'$, $\mathfrak{A}_3''$, $\mathfrak{A}_3'''$ zu einander konjugiert. Die Kategorie $\mathcal{O}_\mathcal{C}(\mathfrak{A}_4)$ von $\mathfrak{A}_4$ hat deshalb ein Skeleton bestehend aus den Objekten $\mathfrak{A}_4/\mathfrak{E}$, $\mathfrak{A}_4/C_2$ und $\mathfrak{A}_4/\mathfrak{A}_3$. Für die Morphismenmengen gilt

$$
\begin{aligned}
\hom_{\mathcal{O}_\mathcal{C}(\mathfrak{A}_4)}(\mathfrak{A}_4/\mathfrak{E}, \mathfrak{A}_4/\mathfrak{E}) &= \{R_g \mid g \in \mathfrak{A}_4\},\\
\hom_{\mathcal{O}_\mathcal{C}(\mathfrak{A}_4)}(\mathfrak{A}_4/\mathfrak{E}, \mathfrak{A}_4/C_2) &= \{R_{(1)}, R_{(13)(24)}, R_{(123)}, R_{(132)}, R_{(124)}, R_{(142)}\},\\
\hom_{\mathcal{O}_\mathcal{C}(\mathfrak{A}_4)}(\mathfrak{A}_4/C_2, \mathfrak{A}_4/C_2) &= \{R_{(1)}, R_{(13)(24)}\},\\
\hom_{\mathcal{O}_\mathcal{C}(\mathfrak{A}_4)}(\mathfrak{A}_4/\mathfrak{E}, \mathfrak{A}_4/\mathfrak{A}_3) &= \{R_{(1)}, R_{(12)(34)}, R_{(13)(24)}, R_{(14)(23)}\},\\
\hom_{\mathcal{O}_\mathcal{C}(\mathfrak{A}_4)}(\mathfrak{A}_4/\mathfrak{A}_3, \mathfrak{A}_4/\mathfrak{A}_3) &= \{R_{(1)}\}.
\end{aligned}
$$

Überprüfung durch (6.1) ergibt

$$
\begin{aligned}
\hom_{\mathcal{O}_\mathcal{C}(\mathfrak{A}_4)}(\mathfrak{A}_4/\mathfrak{E}, \mathfrak{A}_4/\mathfrak{E}) &\xrightarrow{\cong} \{g\mathfrak{E} \mid g \in \mathfrak{A}_4\},\\
\hom_{\mathcal{O}_\mathcal{C}(\mathfrak{A}_4)}(\mathfrak{A}_4/C_2, \mathfrak{A}_4/C_2) &\xrightarrow{\cong} \{(1)C_2, (13)(24)C_2\},
\end{aligned}
$$

da $(13)(24)C_2 = (14)(23)C_2$,

$$
\hom_{\mathcal{O}_\mathcal{C}(\mathfrak{A}_4)}(\mathfrak{A}_4/\mathfrak{A}_3, \mathfrak{A}_4/\mathfrak{A}_3) \xrightarrow{\cong} \{(1)\mathfrak{A}_3\},
$$

da $g^{-1}\mathfrak{A}_3 g \subseteq \mathfrak{A}_3$ genau dann gilt, wenn $g \in \mathfrak{A}_3$,

$$
\hom_{\mathcal{O}_\mathcal{C}(\mathfrak{A}_4)}(\mathfrak{A}_4/\mathfrak{E}, \mathfrak{A}_4/C_2) \xrightarrow{\cong} \left\{ \begin{array}{c} (1)C_2, (13)(24)C_2, (123)C_2, \\ (132)C_2, (124)C_2, (142)C_2 \end{array} \right\},
$$

da

$$
\begin{aligned}
(13)(24)C_2 &= (14)(23)C_2,\\
(243)C_2 &= (142)C_2,\\
(134)C_2 &= (123)C_2,\\
(234)C_2 &= (132)C_2,\\
(143)C_2 &= (124)C_2,
\end{aligned}
$$

$$\hom_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\mathfrak{A}_4)}(\mathfrak{A}_4/\mathfrak{E}, \mathfrak{A}_4/\mathfrak{A}_3) \xrightarrow{\cong} \{(1)\mathfrak{A}_3, (12)(34)\mathfrak{A}_3, (13)(24)\mathfrak{A}_3, (14)(23)\mathfrak{A}_3\},$$

da

$$\begin{aligned}(12)(34)\mathfrak{A}_3 &= (143)\mathfrak{A}_3 = (243)\mathfrak{A}_3,\\ (13)(24)\mathfrak{A}_3 &= (142)\mathfrak{A}_3 = (234)\mathfrak{A}_3,\\ (14)(23)\mathfrak{A}_3 &= (124)\mathfrak{A}_3 = (134)\mathfrak{A}_3.\end{aligned}$$

Der einzige nicht triviale Morphismus $R_{(13)(24)}$ von $\mathfrak{A}_4/C_2$ nach sich selbst wird wegen $(13)(24)(12)(34)(13)(24) = (12)(34)$ unter dem Funktor $\mathcal{F}$ aus Lemma 6.2 auf der Identität in $R(C_2)$ abgebildet, d.h. $\mathcal{F}(R_{(13)(24)}) = \mathrm{id}_{R(C_2)}$. Wie für $\mathfrak{S}_3$ nur die Erzeuger der Morphismen von $\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\mathfrak{A}_4)$ unter dem Funktor $\mathcal{F}$ aufschreiben ergibt

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{A}_4/C_2 \arrow[loop above, "R_{(1)}"] & & \mathfrak{A}_4/\mathfrak{A}_3 \arrow[loop above, "R_{(1)}"] \\
& \mathfrak{A}_4/\mathfrak{E} \arrow[ul, bend left, "R_{(1)}"] \arrow[ur, bend right, "R_{(1)}"'] \arrow[loop below, "{R_{(1)},\dots,R_{(243)}}"] &
\end{tikzcd}
\quad \xmapsto{\mathcal{F}} \quad
\begin{tikzcd}
R(C_2) \arrow[loop above, "\mathrm{id}_{R(C_2)}"] \arrow[dr, bend right, "\mathrm{Res}^{C_2}_{\mathfrak{E}}"'] & & R(\mathfrak{A}_3) \arrow[loop above, "\mathrm{id}_{R(\mathfrak{A}_3)}"] \arrow[dl, bend left, "\mathrm{Res}^{\mathfrak{A}_3}_{\mathfrak{E}}"] \\
& \mathbb{Z} \arrow[loop below, "\mathrm{id}_{\mathbb{Z}}"] &
\end{tikzcd}$$

Also gilt

$$\lim_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\mathfrak{A}_4)^{op}} R(C) = \left\{ \begin{pmatrix} a\chi \\ r\chi_1^{C_2} + s\chi_2^{C_2} \\ b\chi_1^{\mathfrak{A}_3} + t\chi_2^{\mathfrak{A}_3} + u\chi_3^{\mathfrak{A}_3} \end{pmatrix} \in \bigoplus_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\mathfrak{A}_4)} R(C) \;\middle|\; \begin{array}{l} a = r + s, \\ b = r + s - t - u. \end{array} \right\}$$

mit $a, \dots, u \in \mathbb{Z}$, d.h. $y \in \lim_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\mathfrak{A}_4)^{op}} R(C)$ genau dann gilt, wenn y von der Form

$$y = \begin{pmatrix} (r+s)\chi \\ r\chi_1^{C_2} + s\chi_2^{C_2} \\ (r+s-t-u)\chi_1^{\mathfrak{A}_3} + t\chi_2^{\mathfrak{A}_3} + u\chi_3^{\mathfrak{A}_3} \end{pmatrix}$$

ist.

Zur Bestimmung des Indexes, d.h die kleinste $n \geq 1$ so, dass für alle $y \in \lim\limits_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\mathfrak{A}_4)^{op}} R(C)$ es ein $x \in R(\mathfrak{A}_4)$ gibt, für welche

$$\mathrm{Res}(x) = y^n \tag{6.17}$$

gilt, betrachtet man wie zuvor die Restriktion irreduzibler Charaktere $\chi_1, \ldots, \chi_4$ von $\mathfrak{A}_4$ auf den zyklischen Untergruppen

$$\begin{aligned} R(\mathfrak{A}_4) &\overset{\mathrm{Res}}{\hookrightarrow} \lim_{\mathcal{O}_C(\mathfrak{A}_4)^{op}} R(C) \hookrightarrow \bigoplus_{\mathcal{O}_C(\mathfrak{A}_4)} R(C), \\ \sum_{i=1}^{4} c_i \chi_i &\longmapsto \begin{pmatrix} (c_1 + c_2 + c_3 + 3c_4)\chi \\ (c_1 + c_2 + c_3 + c_4)\chi_1^{C_2} + 2c_4\chi_2^{C_2} \\ (c_1 + c_4)\chi_1^{\mathfrak{A}_3} + (c_2 + c_4)\chi_2^{\mathfrak{A}_3} + (c_3 + c_4)\chi_3^{\mathfrak{A}_3} \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{6.18}$$

wobei für den Charakteren von $\mathfrak{A}_4$

	(1)	(12)(34)	(123)	(132)
χ_1	1	1	1	1
χ_2	1	1	ζ_3	ζ_3^2
χ_3	1	1	ζ_3^2	ζ_3
χ_4	3	-1	0	0

Die Charaktertafel von $\mathfrak{A}_4$

mit $\zeta_3 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ gilt. Sei also $y \in \lim_{\mathcal{O}_C(\mathfrak{A}_4)^{op}} R(C)$ gegeben, etwa

$$y = \begin{pmatrix} (r+s)\chi \\ r\chi_1^{C_2} + s\chi_2^{C_2} \\ (r+s-t-u)\chi_1^{\mathfrak{A}_3} + t\chi_2^{\mathfrak{A}_3} + u\chi_3^{\mathfrak{A}_3} \end{pmatrix}.$$

Wähle $x = \sum_{i=1}^{4} c_i \chi_i$ so, dass $c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = r$, $2c_4 = s$, $c_2 + c_4 = t$ und $c_3 + c_4 = u$ gilt. Dann ist wegen (6.18) das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \\ u \end{pmatrix}$$

äquivalent zur (6.17) mit der Lösung

$$\begin{pmatrix} r + \frac{1}{2}s - t - u \\ t - \frac{1}{2}s \\ u - \frac{1}{2}s \\ \frac{1}{2}s \end{pmatrix},$$

die nicht unbedingt in $\mathbb{Z}^4$ liegt. Betrachtet man nun das Quadrat

$$y^2 = \begin{pmatrix} (r'+s')\chi \\ r'\chi_1^{C_2} + s'\chi_2^{C_2} \\ (r'+s'-t'-u')\chi_1^{\mathfrak{A}_3} + t'\chi_2^{\mathfrak{A}_3} + u'\chi_3^{\mathfrak{A}_3} \end{pmatrix},$$

wobei

$$\begin{aligned} r' &= r^2 + s^2, \\ s' &= 2rs, \\ t' &= u^2 + 2t(r+s-t-u), \\ u' &= t^2 + 2u(r+s-t-u) \end{aligned}$$

gilt, so erhält man durch dem entsprechenden linearen Gleichungssystem die Lösung in $\mathbb{Z}^4$

$$\begin{pmatrix} r' + \frac{1}{2}s' - t' - u' \\ t' - \frac{1}{2}s' \\ u' - \frac{1}{2}s' \\ \frac{1}{2}s' \end{pmatrix}.$$

Also ist der Index n gleich 2. Darüber hinaus folgt aus der Lösung für den Fall $n = 1$, dass $R(\mathfrak{A}_4) = \ker(f)$ gilt, wobei

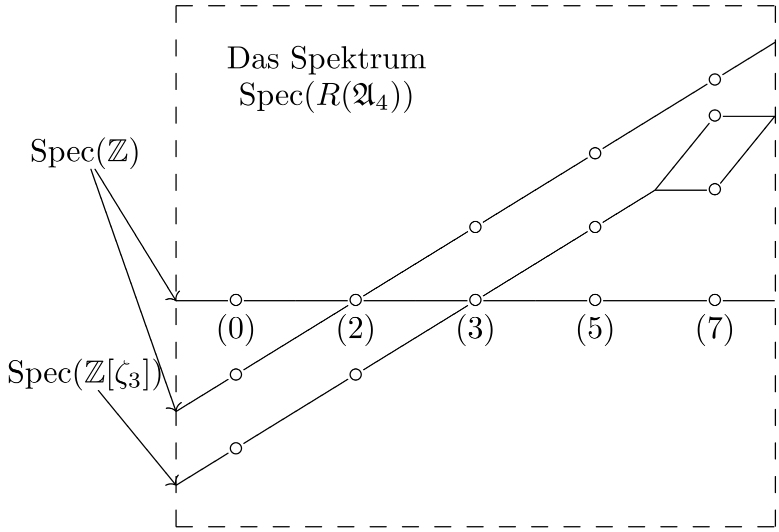
$$\begin{aligned} f : \lim_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\mathfrak{A}_4)^{op}} R(C) &\longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \\ y &\longmapsto s \pmod 2. \end{aligned}$$

10 Das Kolimes $\operatorname*{colim}_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\mathfrak{A}_4)} \operatorname{Spec}(R(C))$

An den Diagrammen von $\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\mathfrak{S}_3)$ und $\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\mathfrak{A}_4)$ ist leicht zu sehen, dass beide Kategorien sich nur durch den Weylgruppen der Untergruppe $\mathfrak{A}_3$ von einander unterscheiden. Diese Gruppe ist nämlich bei der zweiten Kategorie trivial, obwohl sie bei der Ersten gleich C_2 ist. Deshalb fehlt im Kolimes für $\mathfrak{A}_4$ die entsprechende Relation und die grafische Darstellung des Ergebnisses wird einfach aus dem Fall für $\mathfrak{S}_3$ bestimmt.

$$\begin{aligned} \operatorname{Spec}(R(\mathfrak{A}_4)) &\approx \operatorname*{colim}_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\mathfrak{A}_4)} \operatorname{Spec}(R(C)) \\ &= \biguplus_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\mathfrak{A}_4)} \operatorname{Spec}(R(C)) \Big/ \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \operatorname{Res}^{C_2}_{\mathfrak{E}} : R(C_2) \to \mathbb{Z}, \forall \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(\mathbb{Z}) : \operatorname{Spec}(\operatorname{Res}^{C_2}_{\mathfrak{E}})(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R(C_2)) \\ \operatorname{Res}^{\mathfrak{A}_3}_{\mathfrak{E}} : R(\mathfrak{A}_3) \to \mathbb{Z}, \forall \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(\mathbb{Z}) : \operatorname{Spec}(\operatorname{Res}^{\mathfrak{A}_3}_{\mathfrak{E}})(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R(\mathfrak{A}_3)) \end{pmatrix}.$$



Bemerking 6.19. Zugleich ist es ein Beispiel eines Spektrums $\mathrm{Spec}(R(G))$ für G endlich, wobei nicht jeder Zweig des Spektrums gleich $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ ist, sondern enthält es den Zweig $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\zeta_3])$ mit z.B. zwei auf (7) liegenden gespaltenen Primidealen.

Symbolenverzeichnis

Tabellen- und Diagrammverzeichnis

Literatur

[Fausk] Halvard Fausk, Survey on the Burnside ring of compact Lie groups, Journal of Lie Theory 18, 2008, No. 2.

[Greenlees] J.P.C. Greenlees, Spectra for commutative algebraists, verfügbar im Internet unter: `www.math.uic.edu/∼bshipley/greenlees.SpectraMSRI.pdf`.

[HKR] Michael J. Hopkins, Nicholas J. Kuhn, and Douglas C. Ravenel, Generalized group characters and complex oriented cohomology theories, Journal of AMS 2000, Vol. 13 No. 3 553-594.

[Krempa] Jan Krempa, Some examples of reduced rings, Algebra Colloquium 3 (1996), 289-300.

[Lurie] Jacob Lurie, Lectures on Chromatic Homotopy Theory, verfügbar im Internet unter: `www.math.harvard.edu/∼lurie/252x.html`.

[MNN] A. Mathew, N. Naumann & J. Noel, Derived Induction and Restriction Theory, Geom. Topol. 23 (2019) 541-636.

[Webb] Peter Webb, A Guide to Mackey Functors, Handbook of Algebra Volume 2, 2000, Pages 805-836.

[Bourbaki] Nicolas Bourbaki, Elements of Mathematics, Commutative Algebra, Hermann 1972.

[Dieck] Tammo tom Dieck, Transformation Groups, Walter de Gruyter 1987.

[Dieck*] Tammo tom Dieck, Representation theory, Lecture notes Universität Göttingen 2009 verfügbar im Internet unter: `www.uni-math.gwdg.de/tammo/rep.pdf`.

[Fröh. & Tayl.] A. Fröhlich & M.J. Taylor, Algebraic number theory, Cambridge studies in advanced mathematics 27, Cambridge University Press 1991.

[Greenl. and May] J.P.C. Greenlees and J.P. May, Generalized Tate Cohomology, AMS Number 543 1995.

[Hartshorne] Robin Hartshorne, Algebraic geometry, Graduate Texts in Mathematics 52, Springer-Verlag 1977.

[Hatcher] Allen Hatcher, Algebraic Topology, Cambridge University Press 2001.

[Koblitz] Neal Koblitz, p-adic Numbers, p-adic Analysis, and Zeta-Functions, Graduate Texts in Mathematics 58, Springer-Verlag 1977.

[Kochman] Stanley O. Kochman, Bordism, Stable Homotopy and Adams Spectral Sequences, AMS 1996.

[Lang] Serge Lang, Algebra, Graduate Texts in Mathematics 211, Springer-Verlag 2002.

[May] J.P. May, Equivariant Homotopy and Cohomology Theory, NSF 1985.

[Matsumura1] Hideyuki Matsumura, Commutative ring theory, Cambridge University Press 1989.

[Matsumura2] Hideyuki Matsumura, Commutative Algebra, Benjamin/Cummings 1980.

[Neukirch] Jürgen Neukirch, Algebraische Zahlentheorie, Springer-Verlag 1992.

[Neukirch*] Jürgen Neukirch, Klassenkörpertheorie, BI-Hochschulskripten 713/713a^*, Bibliographisches Institut Mannheim 1969.

[Serre1] Jean-Pierre Serre, Linear Representations of Finite Groups, Graduate Texts in Mathematics 42, Springer-Verlag 1977.

[Serre2] Jean-Pierre Serre, Local Fields, Graduate Texts in Mathematics 67, Springer-Verlag 1995.

Sachverzeichnis