

Rolf Tschernig

Risikomanagement für Pensionsfonds

Zeitstruktur des Risikos und ein perfektes Gedächtnis

In einigen industrialisierten Ländern mit kapitalmarktbasieren Rentenverfahren verwalten Pensionsfonds ein Vermögen, dessen Wert größer ist als der Wert der jeweiligen inländischen Produktion von Gütern und Dienstleistungen eines gesamten Kalenderjahres. Es liegt auf der Hand, dass größere Verluste einzelner Pensionsfonds nicht nur deren eigene Existenz gefährden, sondern sogar substantielle volkswirtschaftliche Schäden nach sich ziehen können. Dabei hängt die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten zukünftiger Verluste nicht nur von einer Reihe nicht beeinflussbarer Faktoren ab, sondern auch von der von einem Fondsmangement gewählten Anlagestrategie. Je riskanter eine gewählte Anlagestrategie ist, desto eher kann es zu großen Gewinnen, aber auch zu großen Verlusten kommen. Dies impliziert auch, dass es eine Anlagestrategie gibt, die das Risiko minimiert. Allerdings ändert sich für eine betrachtete Anlagestrategie im Allgemeinen das Risiko in Abhängigkeit von der gewählten Anlagedauer. Da zwischen dem Beginn von individuellen Einzahlungen und dem Beginn der entsprechenden Rentenzahlungen mehrere Jahrzehnte liegen können, muss ein Pensionsfonds die erhaltenen Beiträge im Hinblick auf einen weit in der Zukunft liegenden Rückzahlungstermin investieren. In diesem Beitrag wird aufgezeigt, dass die gegenwärtig in der wissenschaftlichen Literatur diskutierten und in der Praxis angewandten Methoden zur Risikoabschätzung zu einer substantiellen Unterschätzung mittel-

und langfristiger Anlagerisiken führen können und dann entsprechend berechnete risikominimale Anlagestrategien nicht mehr risikominimal sind. Dies ergibt sich, wenn beachtet wird, dass die für die Wahl von Anlagestrategien relevanten Zeitreihen ein beinahe perfektes Gedächtnis aufweisen, d.h. Ereignisse auch in der fernen Vergangenheit einen nicht zu vernachlässigenden Einfluss auf das Eintreten bestimmter Ereignisse in der Gegenwart haben. Können die Anlagemanager von Pensionsfonds aber die risikominimale Anlagestrategie nicht zuverlässig bestimmen, ist es ihnen auch nur schwer möglich, darauf aufbauend eine Anlagestrategie zu wählen, die dem gewünschten Mix zwischen Risiko und erwartetem Ertrag entspricht. Unerwartete Verluste können die Folge sein.

Kapitaldeckungsverfahren und die Bedeutung von Pensionsfonds

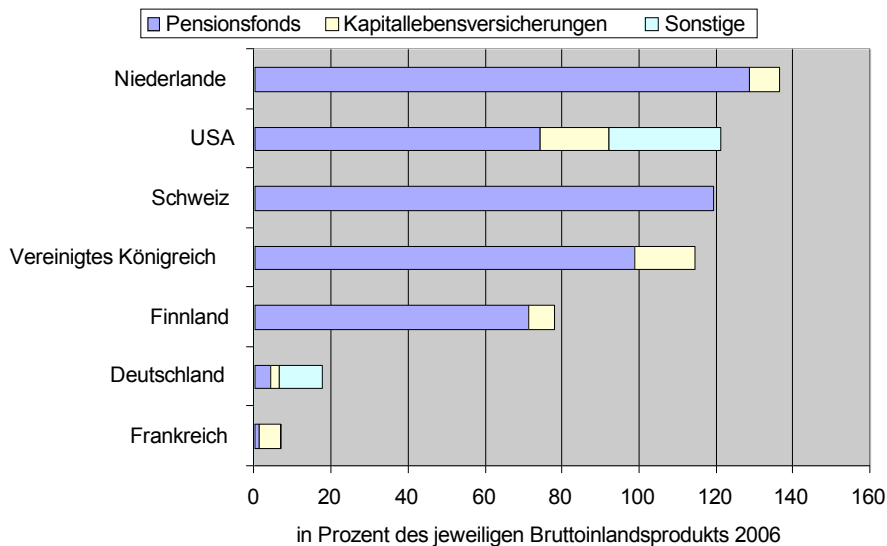
In vielen westlichen Gesellschaften stellt die Zunahme des Durchschnittsalters der Bevölkerung deren Alterssicherungssysteme vor große Herausforderungen. Eine Reaktion der Politik darauf ist die Ergänzung bestehender Umlageverfahren durch private Altersvorsorgeverfahren. In der Bundesrepublik Deutschland geschah dies insbesondere mit Einführung der Riester-Rente Anfang des Jahrtausends. Seitdem werden verschiedene Sparformen zur Altersvorsorge staatlich gefördert. Hierzu gehören die klassische

private Rentenversicherung ebenso wie fondsgebundene Rentenversicherungen oder Fondssparpläne. Den genannten Sparformen ist gemeinsam, dass die jeweiligen Anbieter die Einzahlungen bzw. Beiträge am Kapitalmarkt anlegen und dem Einzahler bei Erreichen eines bestimmten Lebensalters eine lebenslange Rente finanzieren müssen. Eine sichere Rente erfordert daher, dass sich die Anbieter ab dem in der Zukunft liegenden Beginn der Auszahlungen nicht in Liquiditätsschwierigkeiten befinden oder gar inzwischen in Konkurs gegangen sein werden. Deshalb sollten die Anbieter eine vorsichtige Kapitalanlagepolitik betreiben. Andererseits befinden diese sich im Wettbewerb miteinander und versuchen deshalb möglichst hohe Renditen zu erzielen. In jedem Fall unterliegen kapitalmarktbasierende Renten den Risiken auf



Prof. Dr. **Rolf Tschernig**, geb. 1962 in München. 1982–1987 Studium der Volkswirtschaftslehre an der Ludwig-Maximilians-Universität München und an der University of Delaware, USA. 1992 Promotion an der Ludwig-Maximilians-Universität München. 1993 Postdoktorandenstipendiat an der Universität Maastricht, Niederlande. 1994–2001 Wissenschaftlicher Mitarbeiter an der Humboldt-Universität zu Berlin. 1999 Habilitation. 2001–2004 Associate Professor an der Universität Maastricht. Seit 2004 Professor für Ökonometrie an der Universität Regensburg. Mitglied im Center of Finance an der Universität Regensburg.

Forschungsschwerpunkte: Zeitreihenökonometrie, Nichtparametrische Schätzverfahren, Modellselektion, Asset-Liability-Management



[1] Verhältnis von verschiedenen Finanzierungsformen in Pensionsfinanzanlagen zum jährlichen Bruttoinlandsprodukt in 2006

Quelle: OECD: *Pension Markets in Focus: November 2007, Issue 4*, OECD.Stat: <http://stats.oecd.org/wbos/default.aspx>

Kapitalmärkten. Einige Volkswirtschaften, wie beispielsweise die USA, Großbritannien oder die Niederlande haben ein mehr oder weniger rein kapitalmarktbasierendes Rentensystem. Sie sind demnach den Kapitalmarktrisiken naturgemäß in noch weitaus höherem Maße ausgesetzt als Länder mit einem Umlageverfahren, in denen dieses durch staatlich geförderte private Altersvorsorgemaßnahmen ergänzt wird. In jedem Fall müssen die Anbieter derartiger Produkte die Einzahlungen bzw. Beiträge *langfristig* investieren, da zwischen dem Beginn der Einzahlungen und dem Beginn der Rentenzahlungen bis zu 45 Jahre liegen können. Die Zeitspanne zwischen Einzahlung und Auszahlung einer Investition wird als *Anlagehorizont* bezeichnet. Für die Anbieter von kapitalmarktbasierenden Rentenleistungen kommt damit zu den üblichen Kapitalmarktrisiken noch ein langfristiger Anlagehorizont hinzu.

Eine Möglichkeit, für ein Land den Anteil eines Kapitaldeckungsverfahrens und damit dessen volkswirtschaftliche Bedeutung zu veranschaulichen, besteht darin, das Gesamtvolumen an in Altersversicherungssystemen investiertem bzw. angespartem Kapital in Relation zu dem jeweiligen Bruttoinlandsprodukt eines Jahres zu setzen. Dabei gibt das Bruttoinlandsprodukt die jährliche, im Inland erfolgte Produktion von Waren und Dienstleistungen in Marktpreisen an. [1] zeigt die jeweiligen Relationen für einige ausgewählte OECD-Länder. Spitzenreiter sind die Niederlande, die beinahe 140% an der inländischen Jahresproduktion

2006 für zukünftige Pensionszahlungen angespart haben. In Monate umgerechnet erhält man ein Kapitalvolumen, das einer inländischen Produktionsleistung von ungefähr 17 Monaten entspricht, während die entsprechenden Volumina in Frankreich und Deutschland gerade mal ein bzw. zwei Monaten an Produktionsleistung entsprechen. Dies liegt natürlich auch daran, dass in den beiden letztgenannten Ländern das Umlageverfahren dominiert.

Besonders hervorhebenswert ist auch, dass in den Niederlanden, der Schweiz und in Großbritannien allein der Anteil des in Pensionsfonds verwalteten Kapitals mindestens einer Jahresproduktion entspricht. Aufgrund dieser Größenordnungen treffen Fehler der verantwortlichen Manager der Pensionsfonds nicht nur die jeweiligen Einzahler und Kapitalgeber, sondern die gesamte Volkswirtschaft. Allein das von niederländischen Pensionsfonds verwaltete Vermögen beträgt 2006 686 Milliarden Euro. In einigen Ländern spielen auch andere Sparformen eine bedeutende Rolle, wie beispielsweise Kapitallebensversicherungen.

Risikodiversifizierung

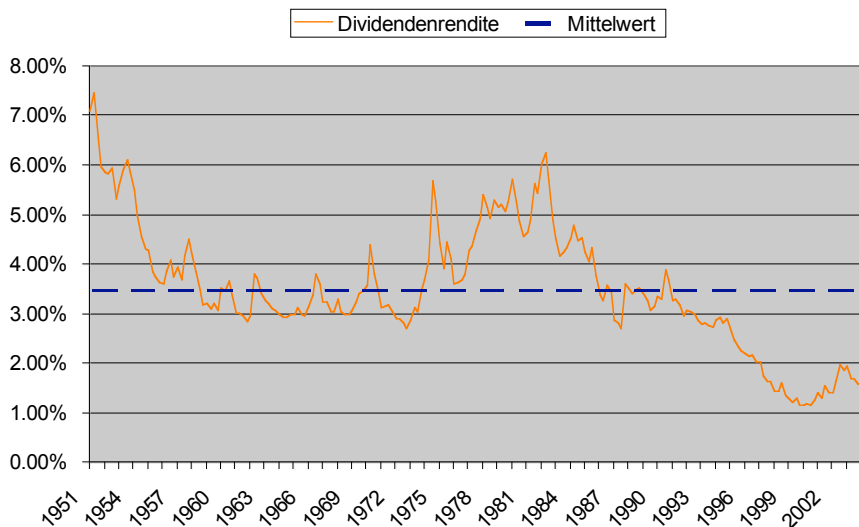
Pensionsfonds investieren die erhaltenen Einzahlungen in ein Bündel unterschiedlicher Anlageformen, z.B. Aktien, festverzinsliche Wertpapiere mit unterschiedlichen Restlaufzeiten oder Immobilien. Ein derartiger Bestand von Investitionen wird als *Portfolio* bezeichnet.

Da die einzelnen Pensionsfonds miteinander um Einzahler konkurrieren, versucht jeder Fonds, durch eine geeignete Zusammensetzung des Portfolios eine hohe Rendite zu erzielen. Für Pensionsfonds gilt jedoch dasselbe wie für Privatanleger: Mit steigender Rendite steigt im Allgemeinen auch das Risiko. Jedoch lässt sich unter bestimmten Bedingungen durch geeignete Portfolioumschichtungen das Risiko reduzieren, ohne dass die Rendite reduziert werden muss. Eine derartige Risikodiversifizierung erfordert in der Praxis, dass die zukünftigen Renditen der in Betracht gezogenen Vermögensklassen und das jeweilige Risiko verlässlich abgeschätzt werden können. Letzteres ist auch notwendig, um zwischen verschiedenen Möglichkeiten von Rendite-Risiko-Kombinationen zu wählen. In diesem Beitrag wird aufgezeigt, welche Schwierigkeiten sich bei der Abschätzung der Risiken für langfristige Anlagehorizonte ergeben, und es werden aktuelle Lösungsansätze dargestellt. Dabei wird deutlich, dass und auf welche Art die Risikodiversifizierung sowohl vom Anlagehorizont als auch von den angewandten Modellen zur Quantifizierung der Risiken abhängt.

Der Einfluss des Anlagehorizonts bei einer Vermögensanlage auf die Portfoliozusammensetzung wurde in der wissenschaftlichen Forschung lange vernachlässigt, obwohl Nobelpreisträger Robert Merton schon 1969 gezeigt hat, dass nur unter bestimmten Voraussetzungen der Anlagehorizont *keine* Auswirkung auf die optimale Zusammensetzung eines Portfolios hat. Eine wesentliche Voraussetzung hierfür ist, dass sich die Änderungen von Renditen einer riskanten Anlageform nicht vorhersagen lassen. Auf Aktien angewandt bedeutet dies, dass die Schwankungen von Aktienrenditen rein zufällig sind und keine systematische Komponente enthalten. In der Wissenschaft wurde diese Anforderung lange Zeit nur vereinzelt in Frage gestellt, denn ihre Verletzung galt als Indiz für einen ineffizienten Finanzmarkt, also einem Finanzmarkt, in dem die Preise nicht die (öffentlich) verfügbare Information widerspiegeln. Allerdings wurde dabei häufig ignoriert, dass unter bestimmten, längerfristig wirkenden Bedingungen der Aktienmarkt auch dann effizient ist, wenn Aktienkurse vorhersagbar sind. Dieser Fall kann beispielsweise eintreten, wenn sich die Risikobereitschaft der Anleger über einen längeren Zeitraum langsam ändert. Vgl. hierzu z.B. Cochrane (2005).

Prognostizierbarkeit von Aktienrenditen

Ob die erwarteten Aktienrenditen jedoch überhaupt im Zeitablauf variieren, ist eine rein empirische Frage und hat im letzten Jahrzehnt große Aufmerksamkeit in der Wissenschaft gefunden. Eine zentrale Bedeutung spielt hierbei der Verlauf der Dividendenrendite. Beispielhaft gibt in [2] die durchgezogene Linie die Dividendenrendite für den amerikanischen Aktienindex S&P 500 vom ersten Quartal 1951 bis zum zweiten Quartal 2004 wieder. Die gestrichelte Linie gibt den



[2] Dividendenrendite des amerikanischen Aktienindex S&P 500, Erstes Quartal 1951 bis zweites Quartal 2004

Datenquelle: siehe Appendix B in Schotman, Tschernig und Budek (2008)

Mittelwert der vierteljährlichen Beobachtungen in Höhe von 3.5% an. Insgesamt existieren drei nennenswerte Perioden mit substantiellen Abweichungen vom berechneten Mittelwert: die frühen 50er, Mitte der 70er bis Mitte der 80er und die Phase seit dem Internetboom Mitte der 90er Jahre.

Auffallend ist, dass den beiden erstgenannten Perioden mit hohen Dividendenrenditen über 5% jeweils Perioden mit Dividendenrenditen um den Mittelwert von 3.5% folgten. Es ist nun interessant zu fragen, auf welche Weise sich die Dividendenrendite wieder in Richtung Mittelwert entwickeln konnte. Eine Möglichkeit war, dass die Dividenden fielen, während die Kurse relativ gleich blieben. Eine zweite Möglichkeit bestand darin, dass die Dividenden relativ konstant blieben, jedoch die Kurse stiegen. Schließlich konnte beides gleichzeitig erfolgen. Eine Reihe von empirischen Untersuchungen kommt zu dem Ergebnis, dass

die jeweiligen Anpassungen insbesondere auf eine Veränderung der Aktienkurse zurückzuführen sei.

Dies hat unmittelbare Konsequenzen für die Prognostizierbarkeit von Aktienkursen, denn eine positive Abweichung der Dividendenrendite vom Mittelwert bedeutet, dass langfristig die Aktienkurse steigen werden, während eine negative Abweichung, wie sie seit Mitte der 90er Jahre zu beobachten ist, langfristig zu einem Fallen der Aktienkurse führen wird. Allerdings bleibt diese Argumentation nur gültig, wenn es zu keinen technischen, organisatorischen oder sonstigen

Änderungen kommt, die eine Änderung der mittleren Dividendenrendite verursachen. Schließt man letzteres aus, dann existieren substantielle empirische Hinweise darauf, dass Aktienkurse langfristig prognostizierbar sind und somit die Portfolioanalyse den Anlagehorizont mitberücksichtigen muss. Dies schien lange Zeit leichter gesagt als getan, denn die Berechnung des optimalen Portfolios unter Berücksichtigung der Unsicherheit erforderte die Lösung hochkomplexer nichtlinearer stochastischer Differenzgleichungen. Erst John Campbell und Luis Viceira fanden geeignete Approximationen der ursprünglichen Gleichungen, die verhältnismäßig leicht lösbar sind und trotzdem keine großen Approximationsfehler verursachen. Ihren Ansatz fassten sie 2002 in einem gemeinsamen Buch zusammen, das die seitdem immense Forschungsaktivität zur langfristigen Portfolioanalyse mit auslöste. Dieser Forschungszweig wird im angel-

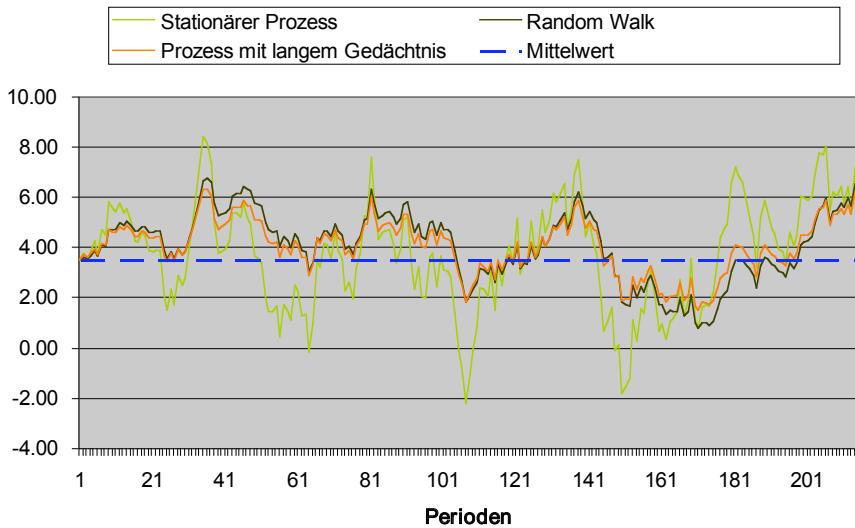
sächsischen Raum als „Strategic Asset Allocation“ bezeichnet.

Allerdings sind die von Campbell und Viceira konzipierten und in einer Vielzahl von internationalen Fachzeitschriften veröffentlichten Portfoliomodelle möglicherweise zu wenig flexibel, um eine sich über die Zeit verändernde Risikostruktur adäquat erfassen zu können. In diesem Fall wären die auf Basis dieser Modelle berechneten langfristig optimalen Portfoliogewichte verzerrt. Da Varianten dieser Modelle bereits in der Praxis eingesetzt werden, können derartige Verzerrungen in Anbetracht der von Pensionsfonds verwalteten enormen Vermögen zu ebensolchen Verlusten führen.

Diese Ursache möglicher Verzerrungen zu beseitigen war und ist Ziel eines Forschungsprojekts, das Peter Schotman, Jan Budek und ich während meiner Tätigkeit an der Universität Maastricht, Niederlande, begannen und dessen erste Ergebnisse im *Journal of Financial Econometrics* dieses Jahr publiziert wurden. Obwohl in diesem Beitrag die Resultate auf eine nichtformale Weise vorgestellt werden, ist es für die Darstellung hilfreich, vorher einige zentrale Konzepte einzuführen. Dazu gehören die verwendete Methodik zur Quantifizierung von Risiko sowie Zufallsprozesse mit Gedächtnis. Vorausgeschickt sei, dass sich in unserer Analyse das Portfolio aus den drei folgenden Vermögensklassen zusammensetzen kann: Aktien, festverzinslichen Wertpapieren mit einem über 10 Jahre festen Zinssatz und kurzfristigen Wertpapieren mit einem über einen 3-Monatszeitraum festgelegten Zinssatz, wobei für letztere so genannte T-Bills betrachtet werden. Eine weitere Aufteilung innerhalb der Anlageklassen findet nicht statt. Es werden jeweils die realen Renditen betrachtet, d.h. die jeweils um die Inflation bereinigten nominalen Renditen bzw. Zinsen. Es wird zugelassen, dass ein Anleger Wertpapiere verkauft, ohne dass diese sich zum Verkaufszeitpunkt in dessen Besitz befinden, wobei er sich gleichzeitig verpflichtet, zu einem zukünftigen Termin die Wertpapiere zu liefern. Man spricht dann von einem Leerverkauf. Es ist deshalb möglich, dass der Anteil einer Vermögensklasse am Gesamtportfolio auch negativ sein kann.

Quantifizierung von Risiko

Eine wesentliche Grundlage zur Quantifizierung von Risiko bilden Daten. Sie erlauben unter bestimmten Annahmen



[3] Realisationen verschiedener Zufallsprozesse
Quelle: Eigene Simulationen

eine Abschätzung des in der Vergangenheit eingegangenen Risikos und, was noch wichtiger ist, unter zusätzlichen Annahmen eine Abschätzung des in zukünftigen Perioden vorliegenden Risikos. Das entsprechende Instrumentarium hierfür liefert die Ökonometrie, eine Kombination aus Ökonomie, Statistik und Wahrscheinlichkeitstheorie.

Um das in der genannten wissenschaftlichen Literatur verwendete Risikokonzept darstellen zu können, ist folgendes Gedankenexperiment hilfreich. Ein Experimentator wirft 300 mal eine Münze, wobei in Abweichung von der üblichen Münzprägung auf der einen Seite die Zahl 1 und auf der anderen Seite die Zahl -1 steht. Fällt die Münze jeweils mit einer Wahrscheinlichkeit von 50% auf eine der beiden Seiten, sollte nach 300 Würfeln im Mittel jede Zahl gleich oft, also ca. 150 mal auftreten und der Mittelwert über alle Würfe nahe $[150 \cdot (-1) + 150 \cdot 1] / 300 = 0.5 \cdot (-1) + 0.5 \cdot 1 = 0$ liegen. Der letztgenannte Wert wird als *Erwartungswert* bezeichnet. Er lässt sich bereits vor Durchführung des Experiments berechnen und kann als Vorhersage des Mittelwerts aufgefasst werden, der sich bei einer tatsächlichen Durchführung des Experiments ergeben könnte. Würde die Zahl 1 mit Wahrscheinlichkeit 80% geworfen werden, wäre der Erwartungswert entsprechend $0.2 \cdot (-1) + 0.8 \cdot 1 = 0.6$.

Natürlich weicht die Zahl eines jeden Wurfs vom Erwartungswert 0 ab. Um das Ausmaß der Abweichungen vom Mittelwert zu quantifizieren, kann man diese Abweichungen wiederum über alle 300 Würfe mitteln. Um zu vermeiden, dass sich positive und negative Abweichungen gegenseitig eliminieren, werden die Ab-

weichungen quadriert. Der hierdurch gewonnene Wert sollte in der Nähe des theoretischen Mittelwerts der quadrierten Abweichungen, also nahe $0.5 \cdot (-1)^2 + 0.5 \cdot 1^2 = 1$, liegen. Dieser Erwartungswert der quadrierten Abweichungen wird als *Varianz* bezeichnet und ist das gängigste Maß für das Risiko in der Statistik und Finanzwirtschaft. Da man die Abweichungen quadriert hat, ist die Einheit der Varianz von der Einheit der Würfe verschieden. Um das Risiko in gleichen Einheiten zu erhalten, zieht man die Quadratwurzel der Varianz. Diese Größe wird als *Standardabweichung* bezeichnet. Da das konkrete Ergebnis einer Durchführung dieses Gedankenexperiments zufällig ist, wird es als Zufallsexperiment bezeichnet.

Zufallsprozesse mit Gedächtnis

Bisher haben wir die zeitliche Komponente des Gedankenexperiments ignoriert. Diese lässt sich jedoch leicht integrieren, indem man sich jetzt vorstellt, dass ein Experimentator fünf Stunden lang jede Minute eine Münze wirft und die jeweilige Zahl notiert wird. Da es sich um ein Experiment über einen Zeitraum hinweg handelt, spricht man auch von einer Realisation eines Zufallsprozesses. Im vorliegenden Beispiel wird davon ausgegangen, dass jede Minute dieselbe Münze verwendet und jeder Wurf unabhängig von allen anderen Würfeln unter identischen Bedingungen durchgeführt wird. Hierdurch bleiben Erwartungswert und Varianz über die Zeit hinweg konstant.

Dies muss keineswegs so sein. Ein Prototyp eines in der Finanzwirtschaft wichti-

gen Zufallsprozesses ergibt sich, indem die Zahlen aller bisher erfolgten Würfe aufsummiert werden. Damit ergeben sich als Möglichkeiten im ersten Wurf -1 oder 1, im zweiten Wurf -2, 0, 2, im dritten Wurf -3, -1, 1, 3 und so weiter. Interessanterweise lässt sich zeigen, dass für jede Periode der Erwartungswert 0 bleibt, allerdings die Varianz in jeder Periode um 1 zunimmt. Assoziiert man die Zahl -1 mit ‚nach links gehen‘ und die Zahl 1 mit ‚nach rechts gehen‘, bildet dieser Zufallsprozess das Verhalten einer Person ab, die die Orientierung verloren hat und nach jedem Schritt aufs Neue entscheidet, ob sie besser links oder rechts gehen sollte, wobei jede Entscheidung unabhängig von allen vorher getroffenen Entscheidungen rein zufällig erfolgt. Deshalb ist dieser Prozess auch als *Zufallsspaziergang* bzw. als *Random Walk* bekannt.

Ein *Random Walk* weist eine weitere Besonderheit auf. Er hat ein perfektes ‚Erinnerungsvermögen‘: Jeder Schritt behält seine Wirkung bei, egal wie lange er in der Vergangenheit zurück liegt. Würde man gedanklich z.B. den Schritt in der ersten Minute von 1 auf -1 verändern, ändert sich damit auch die letzte Position von x auf $x - 2$. Übertragen auf Aktienkurse impliziert dies, dass eine Kursänderung heute alle zukünftigen Kursänderungen beeinflusst bzw. eine Kursänderung heute durch alle vergangenen Kursänderungen geprägt ist. Vergangene Kursänderungen werden also nicht ‚vergessen‘. In der Zeitreihenanalyse wird ein Zufallsprozess mit dieser Eigenschaft deshalb als *Zufallsprozess mit perfektem Gedächtnis* bezeichnet.

Natürlich gibt es auch Zufallsprozesse ohne jegliches Gedächtnis bzw. ‚Erinnerungsvermögen‘. Ein Beispiel haben wir bereits kennen gelernt, nämlich den wiederholten einfachen Münzwurf. Darüber hinaus gibt es Zufallsprozesse, deren Gedächtnisqualität dazwischen liegt. Ist das Gedächtnis eines Zufallsprozesses nicht perfekt, nimmt im vorliegenden Beispiel die Wirkung des ersten Schritts auf die letzte Position umso mehr ab, je mehr Schritte bis zur letzten Position erfolgt sind. Nimmt die Wirkung sehr langsam ab, spricht man von einem *Zufallsprozess mit langem Gedächtnis*. Verliert sich die Wirkung relativ schnell, weist ein Zufallsprozess ein *kurzes Gedächtnis* auf. Eine genauere Spezifikation ist in diesem Beitrag nicht notwendig.

Die Art des Gedächtnisses eines Zufallsprozesses beeinflusst auch direkt die Prognostizierbarkeit des zukünftigen Verlaufs eines Zufallsprozesses. Hat man zum Bei-

spiel beobachtet, dass die ersten beiden Schritte eines Zufallsspaziergängers entsprechend der Zahl 2 beide nach links führten, so kann für den nächsten Schritt vorausgesagt werden, dass entweder die Zahl 3 oder 1 eintreten wird, der Spaziergänger also noch weiter von der Mittellinie oder ihr wieder einen Schritt näher kommen wird. Ausgeschlossen sind hingegen alle Orte auf oder rechts der Mittellinie, die erreicht werden könnten, würde man wieder ganz von vorne beginnen.

Im Gegensatz hierzu lässt sich aus den bereits erfolgten Schritten bei einem Prozess ohne Gedächtnis nicht mehr über die zukünftigen Schritte aussagen als ohne die Kenntnis der vergangenen Schritte. In diesem Fall sagt man, dass keine Prognostizierbarkeit vorliegt.

Die Art des Gedächtnisses beeinflusst jedoch nicht nur die Prognostizierbarkeit, sondern auch die Varianz bzw. das Risiko. So wurde bereits festgestellt, dass beim Random Walk die Varianz über die Zeit hinweg linear ansteigt, während Letztere beim ersten Gedankenexperiment konstant ist.

Wie stark ist nun das Gedächtnis des Zufallsprozesses, der die in [2] dargestellte Dividendenrendite des S&P 500 generiert haben könnte? Campbell und Viceira sind davon ausgegangen, dass ein geeignet gewählter Zufallsprozess mit kurzem Gedächtnis eine passende Approximation darstellt. Eine typische Realisation eines solchen Prozesses für 214 Perioden zeigt die grüne Linie in [3]. Die schwarze Linie in derselben Abbildung zeigt im Gegensatz hierzu einen Verlauf eines Random Walks, also eines Zufallsprozesses mit perfektem Gedächtnis. Und schließlich gibt der Verlauf der orangen Linie die Realisation eines Zufallsprozesses mit langem Gedächtnis wieder. Die blaue, gestrichelte Linie gibt den Erwartungswert aller drei Zufallsprozesse an. Er wurde so gewählt, dass er dem Mittelwert des S&P 500 im Untersuchungszeitraum entspricht. Die jeweiligen Varianzen wurden so bestimmt, dass die durchschnittliche Varianz über die 214 Perioden vergleichbar ist. Alle drei Realisationen beginnen in Periode 1 im Erwartungswert und wurden mit denselben Zufallszahlen erzeugt.

Vergleicht man die drei Zeitpfade, fällt auf, dass die Realisation des Zufallsprozesses mit kurzem Gedächtnis den Erwartungswert häufiger schneidet als die Realisationen der Zufallsprozesse mit langem bzw. perfektem Gedächtnis. Dies gilt nicht nur für die in [3] dargestellten Realisationen, sondern ließe sich auch

beobachten, wenn man wiederholt weitere drei Zeitpfade simulieren würde. Nimmt man die Anzahl der Schnittpunkte der Zeitpfade mit dem Erwartungswert als Kriterium, dann erscheint es in der Tat wahrscheinlicher, dass die U.S.-Dividendenrendite von einem Zufallsprozess mit langem Gedächtnis generiert wurde und nicht von einem Prozess mit kurzem Gedächtnis. Ökonometrische Schätzungen bestätigen diese Vermutung. Als nächstes wird zu prüfen sein, welche Konsequenzen dies für die Risikoberechnung und Portfoliozusammensetzung hat. Dies erfordert jedoch vorher noch einen genaueren Blick auf Prognosen und ihre Prognosefehler.

Prognosen und Prognosefehler

Sind Aktienkurse prognostizierbar, gilt dies auch für Aktienrenditen, denn letztere ergeben sich gerade aus der relativen Kursänderung (inklusive etwaiger Dividendenzahlungen). Im Allgemeinen weicht die sich in der Zukunft realisierende Rendite von der prognostizierten bzw. erwarteten Rendite ab, so dass man folgende Zerlegung erhält,

$$\text{Rendite} = \text{Renditeprognose} + \text{Prognosefehler}$$

wobei die Erwartungen zu Beginn des Anlagezeitraums gebildet werden. Im Folgenden werden die Renditen immer über den gesamten Anlagezeitraum bzw. Anlagehorizont betrachtet.

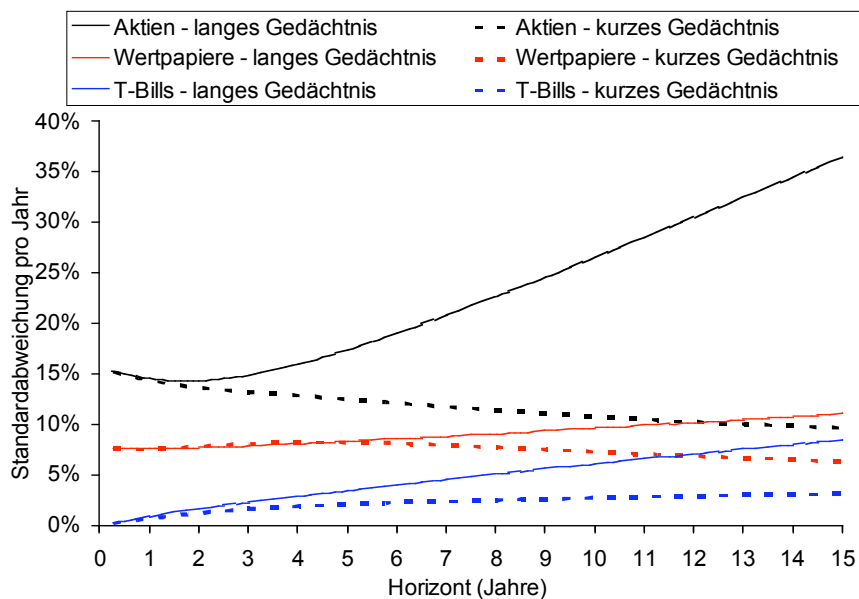
Der Prognosefehler misst, wie weit der ‚Wurf‘ einer Rendite von ihrem prognos-

tizierten Wert abweicht. Ist die Anordnung des Experiments bekannt, lässt sich – wie im Münzwurfexperiment – die Varianz des Prognosefehlers berechnen. Etwas salopp formuliert lässt sich die Anordnung des Experiments als ökonometrisches Modell bezeichnen.

Je nach Art des gewählten ökonometrischen Modells kann sich der Prognosefehler aus einem oder mehreren Fehlerkomponenten zusammensetzen. Im vorliegenden Fall hängt die Zahl der Fehlerkomponenten u.a. vom Prognosehorizont und von der Anzahl an Variablen ab, die für die betrachtete Rendite Vorhersagekraft besitzen. Treten mehrere Fehlerkomponenten auf, dann können sich diese gegenseitig positiv oder negativ beeinflussen. Man spricht dann von positiver oder negativer Korrelation.

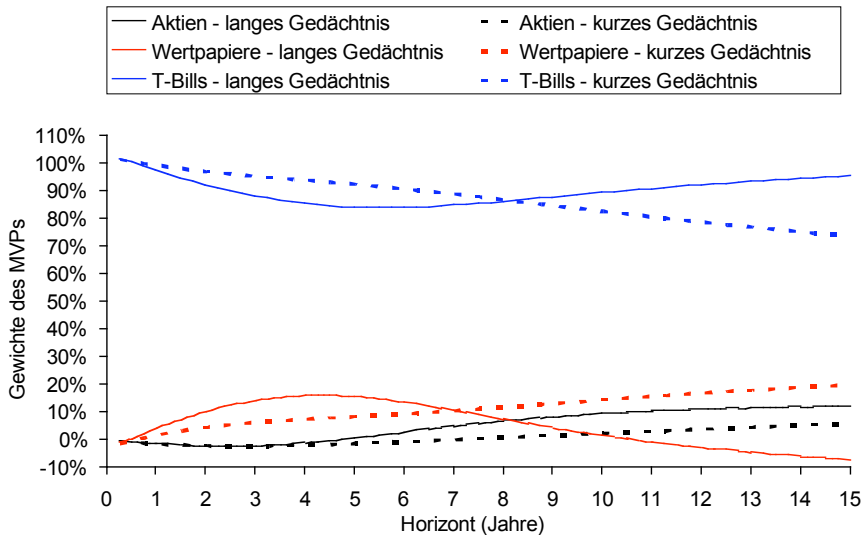
Negative Korrelationen sind günstig für die Varianz des Prognosefehlers, da dann gemäß eines Ergebnisses der Statistik die Varianz der Summe zweier Fehlerkomponenten geringer ist als die Summe der einzelnen Varianzen.

Eine Variante dieser Eigenschaft macht man sich zunutze, um Anlagerisiken zu diversifizieren. Investiert man beispielsweise in ein Portfolio, das zwei Vermögensklassen enthält, deren Prognosefehler gleiche Varianz aufweisen, aber nicht positiv und perfekt korreliert sind, dann ist die Varianz dieses Portfolios geringer als die Varianz eines Portfolios, das lediglich eine der beiden Vermögensklassen enthält. Man kann nun dasjenige Portfolio bestimmen, dessen Varianz am kleinsten ist. Dieses Portfolio wird als das *Minimum-Varianz-Portfolio* bezeichnet.



[4] Zeitstruktur des Risikos

Quelle: Figure 3 in Schotman, Tschernig und Budek (2008)



[5] Gewichte des Minimum-Varianz-Portfolios (MVPs)
 Quelle: Figure 6 in Schotman, Tschernig und Budek (2008)

Eine Reduktion der Portfoliovarianz durch Diversifizierung kann auch eine zeitliche Komponente enthalten. Sind beispielsweise Fehlerkomponenten für die Rendite einer Vermögensklasse über die Zeit hinweg genügend stark negativ korreliert, dann kann es vorkommen, dass deren Prognosevarianz mit dem Anlagehorizont fällt. Als typisches Beispiel gelten Aktienrenditen. Für den betrachteten amerikanischen Aktienindex beträgt die Standardabweichung des Prognosefehlers für einen kurzen Anlagehorizont von einem Vierteljahr 15,3%, fällt aber für einen Zweijahreshorizont auf 14,3%. Folgt man den ökonometrischen Modellen von Campbell und Viceira, so fällt dieser Wert für einen 15-Jahreshorizont weiter auf ca. 10%. Aktien wären also auf lange Sicht um einiges risikoärmer als auf kurze Sicht und würden hierdurch die Möglichkeit einer zeitlichen Diversifizierung gewährleisten.

[4] zeigt die Entwicklung der Varianzen der Prognosefehler für alle drei Vermögensklassen in Abhängigkeit vom Anlagehorizont in Jahren, wobei maximal 15 Jahre betrachtet werden. Für jede Vermögensklasse sind jeweils zwei Kurven eingezeichnet. Die gepunkteten Linien geben jeweils die berechnete Standardabweichung des Prognosefehlers pro Jahr des Prognosefehlers an, wenn für die Dynamik der Fehlerkomponenten ausschließlich Zufallsprozesse mit kurzem Gedächtnis zugelassen werden, so wie dies von Campbell und Viceira vertreten wird. Man sieht, dass für Aktien und für langfristige Wertpapiere die Standardabweichung der Prognose und damit die Prognosevarianz mit dem Anlagehorizont fällt. Da die Prognosevarianz gerade das Risiko

angibt und dieses in Bezug zum Anlagehorizont gesetzt wird, gibt [4] die *Zeitstruktur des Risikos* (Term structure of risk) an.

Die Eigenschaft eines mit steigendem Anlagehorizont geringer werdenden Risikos geht verloren, sobald man unserem Ansatz folgt und zur Modellierung der Dynamik in den Fehlerkomponenten auch Zufallsprozesse mit langem Gedächtnis zulässt. Der Anstieg der Prognosevarianzen mit dem Zeithorizont bei Aktien und langfristigen Wertpapieren ist Folge davon, dass der Einfluss eines Fehlers aufgrund des langen Gedächtnisses nur sehr langsam ‚vergessen‘ wird, so dass eine zeitliche Diversifikation nur für einen begrenzten Zeitraum möglich ist und letztlich wie beim Random Walk die Varianz mit dem Zeithorizont ansteigt. Dies wirkt sich natürlich auf die Zusammensetzung des Minimum-Varianz-Portfolios aus.

Das Minimum-Varianz-Portfolio

Zunächst: Wären für einen bestimmten Anlagehorizont die Korrelationen zwischen den Prognosefehlern für die Renditen der einzelnen Vermögensklassen Eins, würde man klarerweise ausschließlich in die Vermögensklasse mit der geringsten Varianz investieren, da es keine Möglichkeit der Diversifizierung gibt. Dies wäre im vorliegenden Fall ein 100%iges Investment in T-Bills, also kurzfristige Wertpapiere – unabhängig von der Modellierung des Gedächtnisses der zugrunde liegenden Zufallsprozesse. Die Korrelationen sind jedoch von Eins verschieden, so dass eine Diversifizierung

möglich ist. Betrachten wir als Erstes die Minimum-Varianz-Portfolios, die sich ergeben, wenn man Campbell und Viceira folgt und für die Prognosefehlerkomponenten ausschließlich Zufallsprozesse mit kurzem Gedächtnis zulässt. Da, wie aus [4] ersichtlich, für Aktien die Varianz mit dem Anlagehorizont fällt, ist zu vermuten, dass mit einem Ansteigen des Anlagehorizonts auch der Aktienanteil im Portfolio ansteigt. Genau dies zeigt sich in [5], die bis zu einem maximalen Anlagezeitraum von 15 Jahren die jeweiligen Portfolioanteile für Aktien, langfristige Wertpapiere und T-Bills angibt. Die durchgezogenen Linien geben die Portfolioanteile bei Zulassen von Zufallsprozessen mit langem Gedächtnis an, während den gepunkteten Linien eine Beschränkung auf Prozesse mit kurzem Gedächtnis zugrunde liegt. Man sieht in der Tat ein Ansteigen des Aktienanteils von beinahe 0% auf 6% für einen 15-jährigen Zeitraum.

Allerdings erscheint verblüffend, dass auch bei Zulassen von Prozessen mit langem Gedächtnis der Aktienanteil ansteigt, sogar bis auf 12% – obwohl die Varianz des Prognosefehlers bei Aktien so dramatisch ansteigt. Der Grund hierfür liegt darin, dass in die Berechnung der Portfolioanteile die Varianzen aller Vermögensklassen eingehen und zwar teils im Zähler und teils im Nenner, so dass sich die teils beachtlichen Zunahmen der Varianzen gegenseitig eliminieren und letztlich die sich mit dem Anlagehorizont verändernden Korrelationen für die Veränderung der Portfolioanteile relevant sind. Die Wahl der Gedächtnisstärke spielt also keine nennenswerte Rolle für die Diversifizierungsmöglichkeiten von Aktien, obwohl man dies aufgrund des dramatischen Varianzanstiegs vermuten könnte.

Ganz anders verhält es sich für die langfristigen Wertpapiere und die kurzfristigen T-Bills. Betrachtet man in [5] die rote gepunktete und die rote durchgezogene Linie, sollte man ab einem Anlagehorizont von sieben Jahren je nach Gedächtnismodellierung den Anteil langfristiger Wertpapiere am Portfolio auf über 20% steigern oder bis zu 7% leer verkaufen. Entsprechend entgegengesetzt ergeben sich die Portfolioanteile für die geldnahen T-Bills. Auch hier lässt sich das sehr unterschiedliche Verhalten mit der Entwicklung der jeweiligen Korrelationen mit dem Anlagehorizont erklären. Lässt man Zufallsprozesse mit langem Gedächtnis zu, dann kann gezeigt werden, dass auf lange Sicht beide Anlageformen hauptsächlich

durch den kurzfristigen realen Zinssatz dominiert werden, so dass die Korrelation zwischen beiden Vermögensklassen mit steigendem Anlagehorizont gegen den Extremfall von perfekter positiver Korrelation tendiert. Im Fall perfekter positiver Korrelation ist keine Diversifizierung möglich und man wählt die Anlage mit der geringeren Varianz, im vorliegenden Fall also die T-Bills. Aufgrund der nicht ganz perfekten Korrelation tritt dieser Effekt etwas abgeschwächt auf.

Welche Konsequenzen haben diese Ergebnisse für die bereits erwähnten Anbieter von Pensionsleistungen, z.B. Pensionsfonds? Sollten diese ab sofort Aktien und langfristige Wertpapiere mehr oder weniger aus ihren Portfolios verbannen? Natürlich nicht, denn bisher wurden lediglich die Portfoliogewichte berechnet, die die Varianz der Prognosefehler minimieren. Die damit jeweils erzielbaren erwarteten Renditen wurden völlig ignoriert. Unter der Beschränkung auf Zufallsprozesse mit kurzem Gedächtnis zeigen Campbell und Viceira, wie sich Portfoliogewichte berechnen lassen, die

sowohl erwartete Renditen als auch Varianzen berücksichtigen. Möchte man jedoch auch Zufallsprozesse mit langem Gedächtnis zulassen, müssen noch einige Probleme bei der Schätzung der jeweiligen erwarteten Renditen besser gelöst werden. Entsprechende Forschungsarbeiten laufen gegenwärtig.

Unabhängig davon bleibt allerdings festzuhalten, dass das Ausmaß des Gedächtnisses einen wesentlichen Einfluss auf die Portfoliogestaltung hat. Darüber hinaus wird in Schotman, Tschernig und Budek (2008) gezeigt, dass die Zeitstruktur des Risikos für das optimale Portfolio mit zunehmendem Anlagehorizont wesentlich stärker ansteigt, wenn Zufallsprozesse mit langem anstelle von solchen mit kurzem Gedächtnis zugrunde gelegt werden. Dieses Ergebnis ist interessanterweise unabhängig davon, welche Art von Gedächtnis zur Berechnung der optimalen Portfoliogewichte selbst gewählt wurde.

Fazit: Es besteht die Möglichkeit, dass Pensionsfonds und andere Anbieter von kapitalmarktfinanzierten Pensionsleistungen die langfristigen Risiken ihrer Portfolios

substantiell unterschätzen und damit insbesondere in Ländern mit kapitalmarktbasierendem Rentensystem die Renten unsicherer sein können als bisher angenommen.

Literatur

- John Y. Campbell und Luis M. Viceira, *Strategic Asset Allocation: Portfolio Choice for Long-Term Investors*, Oxford, Oxford University Press, 2002.
- John H. Cochrane, *Asset Pricing*, Princeton, Rev. Ed., Princeton University Press, 2005.
- Robert C. Merton, *Lifetime Portfolio Selection Under Uncertainty: The Continuous Time Case*, *Review of Economics and Statistics* 51, 247-57, 1969; neu abgedruckt in: Robert C. Merton, *Continuous Time Finance*, Cambridge, Mass., Blackwell Publishers, 1990.
- Peter Schotman, Rolf Tschernig und Jan Budek, *Long Memory and the Term Structure of Risk*, *Journal of Financial Econometrics*, 2008, advance online publication: doi: 10.1093/jjfinec/nbn010.
- OECD, *Pension Markets in Focus*, November 2007, Issue 4.

Erfolgreich studiert ...gefeiert ...und dann?



! Wir halten den Kontakt untereinander aufrecht

! Wir fördern hervorragende Studenten

! Wir informieren zukünftige Studenten

Werden Sie Mitglied und helfen sie mit, *Ihre* Universität Regensburg dabei zu unterstützen!



ESdUR - Ehemalige Studierende der Universität Regensburg e.V.

Information: <http://www.esdur-alumni.uni-regensburg.de>

Kontakt: Reinhard.Wirth@biologie.uni-regensburg.de