

ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT

FREIBURG IM BREISGAU

*Minimale Geodätische auf Mannigfaltigkeiten  
mit nilpotenter Fundamentalgruppe*

Bernd Eberhard Ammann

Diplomarbeit

vorgelegt bei Herrn Professor Dr. Victor Bangert

im Juni 1994

# Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort</b>	<b>1</b>
<b>I Einführung</b>	<b>3</b>
1. Homotopie und Homologie	3
2. Bedingungen an minimale Geodätische	4
3. Überblick über Ergebnisse dieser Arbeit	7
<b>II Nilpotente Gruppen, Lie-Gruppen und Gitter</b>	<b>11</b>
1. Einführung in die nilpotenten Lie-Gruppen	11
2. Gitter in nilpotenten Lie-Gruppen	16
3. Gitter in den Heisenberg-Gruppen $H_{2n+1}$	22
4. $N$ -Linksinvarianz	24
5. Wachstum in Kommutatorrichtungen	28
6. Polynomiales Wachstum	33
<b>III Der asymptotische Limes</b>	<b>38</b>
1. Lie-Algebren-wertige 1-Formen und Lie-Stammfunktionen	38
2. Der asymptotische Limes	42
3. $C^1$ -exponentielle Konvergenz von Kurven	50
<b>IV Verallgemeinerte Hedlund-Beispiele</b>	<b>55</b>
1. Autobahnmetriken	55
a. Konstruktion der Autobahn	56
b. Konstruktion der Autobahnmetriken	62
c. Die Symbolfolge	65
d. Der Limes des asymptotischen Limes bei Autobahnmetriken	75
e. Homolog minimale Geodätische	76
f. Algebraisierung im Fall beschränkt vieler Wechsel	81
g. Lösungsansätze für das algebraische Problem	83
h. Minimale Geodätische bei freier Fundamentalgruppe	85
2. Minimale Geodätische bei $N$ -Linksinvarianz	87
3. Allgemeine Konstruktion von Hedlund-Beispielen	91

<b>A</b>	<b>Gruppennormen und Längennormen</b>	<b>97</b>
<b>B</b>	<b>Differentialtopologische Hilfsmittel</b>	<b>102</b>
	1. Die starke und die schwache $C^r$ -Topologie	102
	2. Tubenumgebungen	105
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>109</b>

## Vorwort

Im Jahr 1989 untersuchte Professor Victor Bangert in [Bangert] minimale Geodätische auf kompakten riemannschen Mannigfaltigkeiten der Dimension  $m \geq 3$ . Unter anderem zeigte er einen Existenzsatz für minimale Geodätische. Am Ende der Arbeit begründete Bangert, wieso seine Ergebnisse auf dem 3-dimensionalen Torus in einem gewissen Sinne bereits optimal sind. Hierzu wurden Beispiele riemannscher Metriken betrachtet, die Hedlund bereits 1932 in [Hedlund] konstruiert hatte. Anschaulich hat man jedoch den Eindruck, daß der Existenzsatz auf Nilmannigfaltigkeiten, das sind kompakte Quotienten nilpotenter Lie-Gruppen, verschärft werden könnte.

In dieser Arbeit soll gezeigt werden, daß der Existenzsatz auf kompakten Mannigfaltigkeiten mit nilpotenter Fundamentalgruppe, also insbesondere auf Nilmannigfaltigkeiten im gleichen Sinne wie oben optimal ist. Wir werden hierfür die Hedlund-Beispiele verallgemeinern. Auf dem Weg zu dieser Verallgemeinerung ergeben sich einige andere interessante Resultate. In I.3 geben wir einen Überblick über die Ergebnisse dieser Arbeit. Um sie formulieren zu können, werden zuvor die Bangertschen Ergebnisse zusammengefaßt.

Allen, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben, möchte ich an dieser Stelle herzlich danken. Herrn Professor Dr. V. Bangert danke ich für seine sehr gute Betreuung. Bei meinen Besuchen nahm er sich viel Zeit und gab mir viele interessante Anregungen. Die recht freie Aufgabenstellung dieser Diplomarbeit erwies sich zur Lösung des mathematischen Problems als sehr geeignet. Herr Bangert leitete mich hierbei zu den interessanten Fragestellungen und half mir auch, die Ergebnisse in ansprechender Form niederzuschreiben. Danken möchte ich auch Harald Alferi und Achim Hornecker, die als Testleser durch ihre guten Ratschläge sehr zu einer besseren Verständlichkeit der Arbeit beitrugen und viele Schreibfehler fanden. Darüber hinaus war Harald Alferi mir eine große Hilfe für das Einrichten des Textverarbeitungssystems  $\text{\LaTeX}$  auf meinem PC; er half mir bei allen  $\text{\LaTeX}$ -Problemen und paßte seinen Harry-Style an meine Bedürfnisse an.



## KAPITEL I

### *Einführung*

Dieses Kapitel dient vor allem dazu einen Überblick über diese Arbeit zu geben. Es werden deswegen nach Bereitstellung einiger Grundlagen aus der algebraischen Topologie zunächst die Bangerschen Ergebnisse kurz vorgestellt. Mit den so gebildeten Begriffen wird dann bereits in abgeschwächter Form das wichtigste Ergebnis dieser Arbeit, der Existenzsatz für verallgemeinerte Hedlund-Beispiele, formuliert.

Für den Beweis und die genauere Ausformulierung werden Kenntnisse über die nilpotenten Lie-Gruppen benötigt, die in Kapitel II bereitgestellt werden. In Kapitel III wird der Benardete-Mitchellsche asymptotische Limes eingeführt und mit exponentiell konvergierenden Kurven in Verbindung gebracht. Im letzten Kapitel werden dann die verallgemeinerten Hedlund-Beispiele konstruiert.

Unter der „Homologie-Gruppe“ wollen wir in der gesamten Arbeit die erste Homologie-Gruppe verstehen. „Glatt“ benutzen wir synonym zu  $C^\infty$ . Die Zahl Null ist keine natürliche Zahl. Das Einselement einer Gruppe wird mit  $e$  bezeichnet, im Fall einer abelschen Gruppe gelegentlich auch mit  $0$ . Den Gruppenkommutator bezeichnen wir mit  $[g, h]_{Gr}$ , um ihn von dem Kommutator der Lie-Algebren unterscheiden zu können.

#### *1. Homotopie und Homologie*

Im folgenden sei  $X$  ein wegzusammenhängender topologischer Raum,  $x_0$  ein beliebiger Punkt in  $X$ . Wir wollen zunächst den Zusammenhang von der Fundamentalgruppe  $\Pi_1 := \pi_1(X, x_0)$  und der ersten singulären Homologiegruppe über den reellen Zahlen  $H_1(X, \mathbb{R})$  klären.

Die *Hurewicz-Abbildung* sei der Gruppenhomomorphismus

$$\phi_{Hur}: \Pi_1 \rightarrow H_1(X, \mathbb{Z}),$$

der die Homotopieklasse des geschlossenen Wegs  $\alpha$  mit Fußpunkt  $x_0$  auf die Homologieklasse des singulären 1-Simplex  $\alpha$  abbildet. Diese Abbildung ist surjektiv und besitzt als Kern

$$\Pi_1^2 := \langle gg'g^{-1}g'^{-1} \mid g, g' \in \Pi_1 \rangle,$$

die *Kommutatorgruppe* von  $\Pi_1$  ([GreeHarp] II.12 oder [Massey2] Theorem VIII.7.1.).

Wir definieren weiterhin  $\phi_{Hom}: H_1(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(X, \mathbb{R})$  über die Kommutativität des Diagramms

$$\begin{array}{ccc} Z_1(X, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\text{incl}} & Z_1(X, \mathbb{R}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_1(X, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\phi_{Hom}} & H_1(X, \mathbb{R}) \end{array}$$

Hierbei bezeichnet  $Z_1(X, R)$  die singulären Zyklen in  $X$  über dem Ring  $R$ . Das Bild von  $\phi_{Hom}$  nennen wir  $H_1(X, \mathbb{Z})_{\mathbb{R}}$  oder die *ganzen Homologieklassen* in  $H_1(X, \mathbb{R})$ . Es spannt bereits den Vektorraum  $H_1(X, \mathbb{R})$  auf. Der Kern von  $\phi_{Hom}$  ist die Menge aller Elemente  $v \in H_1(X, \mathbb{Z})$  von endlicher Ordnung, d.h. mit  $n \cdot v = 0$  für ein  $n \in \mathbb{N}$ . Des Weiteren kann man die Aussage zeigen, daß  $H_1(X, \mathbb{Z})_{\mathbb{R}}$  diskret in  $H_1(X, \mathbb{R})$  liegt, bzw. die hierzu äquivalente Aussage, daß  $\phi_{Hom}$  sich zu einem Vektorraumisomorphismus von  $H_1(X, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$  nach  $H_1(X, \mathbb{R})$  fortsetzen läßt. Die letztere Aussage ist aber gerade ein Spezialfall des Universellen Koeffiziententheorems ([Massey2] Theorem X.6.2).

Kennt man  $\pi_1(X, x_0)$ , so kennt man also auch  $H_1(X, \mathbb{R})$ . In diesem Sinn enthält also  $\pi_1(X, x_0)$  mehr Information als  $H_1(X, \mathbb{R})$ .

Ist  $\alpha$  ein geschlossener Weg in  $X$ , so sagen wir auch  $\alpha$  repräsentiert  $\phi_{Hur}([\alpha])$  und  $\phi_{Hom} \circ \phi_{Hur}([\alpha])$ .

## 2. Bedingungen an minimale Geodätische

In diesem Abschnitt werden die „minimalen Geodätischen“ definiert und die Ergebnisse von [Bangert] zusammengefaßt. Maßtheoretische Varianten der Beweise dieser Aussagen findet man in [Brodbeck].

In der gesamten Arbeit sei  $(M, \langle, \rangle)$  eine zusammenhängende riemannsche Mannigfaltigkeit mit der universellen Überlagerung  $\tilde{M}$ . Geodätische seien nicht-konstant und nach Bogenlänge parametrisiert, sofern nicht anders angegeben.

In diesem Abschnitt bezeichne das Intervall  $I = [t_1, t_2]$  immer ein beschränktes Intervall. Eine *Geodätische endlicher Länge* sei hinfert immer eine Geodätische  $c: I \rightarrow M$ , eine *Geodätische unendlicher Länge* sei immer vom Typ  $c: \mathbb{R} \rightarrow M$ . Geodätische auf nur einseitig beschränkten Intervallen werden in dieser Arbeit nicht betrachtet. Die Länge einer Kurve  $k$  notieren wir mit  $\mathcal{L}(k)$ .

Eine Geodätische  $c: I \rightarrow M$  heißt *minimal* oder *homotop minimal*, wenn ein Lift  $\tilde{c}$  von  $c$  auf  $\tilde{M}$  erfüllt:

$$\tilde{c} \text{ ist die kürzeste Kurve von } \tilde{c}(t_1) \text{ nach } \tilde{c}(t_2).$$

Äquivalent ist dann

- (1)  $c$  ist minimal.
- (2) Für jede glatte Kurve  $k$  mit  $k(t_i) = c(t_i)$  für  $i = 1, 2$  und mit  $[k^{-1}c] = e \in \pi_1(M, c(t_0))$  gilt  $\mathcal{L}(k) \geq \mathcal{L}(c)$ .

Analog definieren wir: eine Kurve  $c: I \rightarrow M$  heißt *homolog minimal* oder *ganz-homolog minimal*, wenn für jede glatte Kurve  $k$  mit  $k(t_i) = c(t_i)$  für  $i = 1, 2$  und  $\phi_{Hur}([k^{-1}c]) = 0 \in H_1(M, \mathbb{Z})$  gilt  $\mathcal{L}(k) \geq \mathcal{L}(c)$ .

Und: eine Kurve  $c: I \rightarrow M$  ist *reell-homolog minimal*, wenn für jede glatte Kurve  $k$  mit  $k(t_i) = c(t_i)$  und  $\phi_{Hom} \circ \phi_{Hur}([k^{-1}c]) = 0 \in H_1(M, \mathbb{R})$  gilt  $\mathcal{L}(k) \geq \mathcal{L}(c)$ .

Eine Geodätische  $c: \mathbb{R} \rightarrow M$  heißt (*homotop*, (*ganz*-)*homolog*, *reell-homolog*) *minimal* wenn für alle endlichen Intervalle  $I \subset \mathbb{R}$  die Restriktion  $c|_I$  (*homotop*, (*ganz*-)*homolog*, *reell-homolog*) *minimal* ist.

Offensichtlich impliziert „reell-homolog minimal“ auch „ganz-homolog minimal“, und „ganz-homolog minimal“ impliziert „homotop minimal“. Die Mannigfaltigkeit  $M$  sei von nun an kompakt.

Für ein beliebiges  $m_0 \in M$  definieren wir auf den ganzen Homologieklassen in  $H_1(M, \mathbb{R})$  die „stabile Norm“ durch

$$\|v\| := \inf \left\{ \frac{1}{n} \mathcal{L}(c) \mid n \in \mathbb{N} \text{ und } c \text{ ist geschlossene Kurve mit Basispunkt } m_0 \text{ und } \phi_{Hom} \circ \phi_{Hur}([c]) = nv \right\}$$

Man erkennt leicht, daß diese Definition unabhängig von  $m_0$  ist und daß folgende Eigenschaften erfüllt sind:

- (1)  $\|nv\| = |n| \|v\| \quad \forall v \in H_1(M, \mathbb{Z})_{\mathbb{R}}, n \in \mathbb{Z}$
- (2)  $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\| \quad \forall v, w \in H_1(M, \mathbb{Z})_{\mathbb{R}}$

Mit Anwendung A.8 wissen wir weiterhin, daß

- (3)  $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0 \quad \forall v \in H_1(M, \mathbb{Z})_{\mathbb{R}}$ .

Da die ganzen Homologieklassen diskret in  $H_1(M, \mathbb{R})$  liegen und diesen Vektorraum erzeugen, läßt sich  $\| \cdot \|$  eindeutig zu einer Norm auf  $H_1(M, \mathbb{R})$  fortsetzen (zuerst linear auf den rationalen Vielfachen der ganzen Homologieklassen und dann stetig auf ganz  $H_1(M, \mathbb{R})$ ). Diese Norm heißt *stabile Norm*. Wir schreiben in diesem Abschnitt

$$\mathcal{B} := \left\{ v \in H_1(M, \mathbb{R}) \mid \|v\| = 1 \right\}$$

für den Rand des Einheitsballs bezüglich der stabilen Norm. Wir sagen, eine Hyperebene  $H$  in  $H_1(M, \mathbb{R})$  *stützt*  $\mathcal{B}$ , wenn  $\mathcal{B} \cap H \neq \emptyset$  und  $\mathcal{B} - H$  zusammenhängend ist.

Wir wählen nun geschlossene 1-Formen  $\omega^1, \dots, \omega^k$ , so daß deren Kohomologieklassen eine Basis von  $H^1(M, \mathbb{R})$  bilden. Zu der Kurve  $c: [a, b] \rightarrow M$  bestimmen wir den Rotationsvektor  $R(c) \in H_1(M, \mathbb{R})$  wie folgt:

- (1) Wähle ein  $v(c) \in H_1(M, \mathbb{R})$ , so daß  $[\omega^i](v(c)) = \int_c \omega^i \quad \forall i$ .
- (2)  $R(c) = \frac{v(c)}{\|v(c)\|}$ , sofern  $\|v(c)\| \neq 0$ .

Da die  $\omega^i$  geschlossen sind, haben zwei Kurven  $c$  und  $c'$ , die homotop mit festen Endpunkten sind, denselben Rotationsvektor. Der Rotationsvektor hängt jedoch von der Wahl der  $\omega^i$  ab.

Für den Fall, daß  $M$  ein Torus der Dimension  $n$  ist, d.h.  $M = \frac{\mathbb{R}^n}{\mathbb{Z}^n}$ , ergibt sich bezüglich  $\omega^i := dx^i$  für den Rotationsvektor

$$R(c) = \frac{\tilde{c}(b) - \tilde{c}(a)}{\|\tilde{c}(b) - \tilde{c}(a)\|},$$

wobei  $\tilde{c}$  der Lift von  $c$  auf die universelle Überlagerung  $\mathbb{R}^n$  ist.

Die wichtigsten Ergebnisse in [Bangert] sind zwei Sätze, die mit Hilfe des Rotationsvektors Kriterien für die Existenz minimaler Geodätischer ausdrücken. Der erste Satz liefert uns eine notwendige Bedingung für homolog minimale Geodätische.

**Satz 2.1** ([Bangert], Theorem 3.2). *Für jede homolog minimale Geodätische  $c: \mathbb{R} \rightarrow M$  existiert eine Hyperebene  $H \subset H_1(M, \mathbb{R})$ , die  $\mathcal{B}$  stützt und für die gilt: zu jeder Umgebung  $U$  von  $H \cap \mathcal{B}$  gibt es ein  $C > 0$  mit  $R(c|_{[s_0, s_1]}) \in U$  für alle  $s_1 - s_0 > C$ .*

Der zweite Satz bzw. sein Korollar garantiert uns die Existenz von einigen homolog minimalen Geodätischen.

**Satz 2.2** (folgt aus den Theoremen 4.4 und 4.5 in [Bangert]).

*Sei  $H$  Hyperebene  $\subset H_1(M, \mathbb{R})$ , die  $\mathcal{B}$  stützt; dann existiert eine homolog minimale Geodätische  $c: \mathbb{R} \rightarrow M$ , für die gilt: zu jeder Umgebung  $U$  von  $H \cap \mathcal{B}$  gibt es ein  $C > 0$  mit  $R(c|_{[s_0, s_1]}) \in U$  für alle  $s_1 - s_0 > C$ .*

**Korollar 2.3.**  $k := \dim H_1(M, \mathbb{R})$ . *Dann besitzt  $M$  mindestens  $k$  verschiedene homolog minimale Geodätische  $c_1, \dots, c_k: \mathbb{R} \rightarrow M$ , so daß der Limes*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} R(c_i|_{[s, s+t]}) = v_i \quad 1 \leq i \leq k$$

*gleichmäßig in  $s$  existiert und  $v_1, \dots, v_k$  bilden eine Basis von  $H_1(M, \mathbb{R})$ .*

Zwei Geodätische seien hierbei verschieden, wenn sie nicht durch einen Parameterwechsel auseinander hervorgehen.

### 3. Überblick über Ergebnisse dieser Arbeit

Dieser Abschnitt soll dazu dienen, einen kurzen Überblick über diese Arbeit und ihre Ergebnisse zu erhalten. Um ihn kurz zu halten, werden aufwendige Definitionen möglichst vermieden und durch anschauliche Beschreibungen ersetzt. Exakte Definitionen und Beweise folgen dann in den darauffolgenden Kapiteln.

Alle minimalen Geodätischen in diesem Abschnitt seien — sofern nicht anders vermerkt — minimale Geodätische unendlicher Länge. Interpretiert man anschaulich das Korollar 2.3 für den  $m$ -dimensionalen Torus, so weiß man, daß es für jede Dimension mindestens eine minimale Geodätische gibt. Auf kompakten Quotienten nicht-abelscher nilpotenter Lie-Gruppen, den sogenannten Nilmannigfaltigkeiten, ist jedoch die Dimension der Mannigfaltigkeit größer als die Dimension der Homologiegruppe. Man wird nun versuchen, auch für die zusätzlichen Dimensionen minimale Geodätische (unendlicher Länge) zu finden. Hierzu muß man zuerst den Rotationsvektor durch ein höher-dimensionales Objekt ersetzen, das uns mehr Information über die „gemittelte“ Bewegungsrichtung der minimalen Geodätischen liefert. Naheliegender ist es, die homologischen Objekte durch Objekte zu ersetzen, die mehr Information aus der Fundamentalgruppe benutzen. Anschließend wird man minimale Geodätische suchen, die sich im Mittel in eine Richtung bewegen, die zu den bisherigen gemittelten Bewegungsrichtungen komplementär ist.

Das Hauptanliegen dieser Diplomarbeit ist zu zeigen, daß dieses Vorgehen „so“ nicht funktionieren kann. Es ist durchaus möglich den Begriff „Häufungspunkt der Rotationsvektoren“ entsprechend zu verallgemeinern. Mithilfe des asymptotischen Limes von Benardete und Mitchell könnte man einen Richtungsbegriff definieren, der zusätzlich zu der Information des Rotationsvektors oft auch Information über die Ausbreitung in Richtung der Kommutatorgruppe der Fundamentalgruppe liefert. An diesem Begriff kann man oft schon geringe Änderungen der Ausbreitungsrichtung der minimalen Geodätischen feststellen, und die erhaltenen „Richtungen“ sind Elemente einer nilpotenten Lie-Gruppe, die in vielen Fällen eine größere Dimension als  $H_1(M, \mathbb{R})$  hat. Jedoch wird auf allgemeinen riemannschen Mannigfaltigkeiten die Konstruktion von neuen minimalen Geodätischen, die sich asymptotisch in neue „Richtungen“ bewegen, scheitern.

Um dieses Phänomen zu verstehen, möchte ich kurz die minimalen Geodätischen bei linksinvarianter Metrik auf einer einfach zusammenhängenden, nilpotenten Lie-Gruppe  $G$  beschreiben (genaue Ausführung in Abschnitt II.4). Eine Kurve  $c: \mathbb{R} \rightarrow G$  ist genau dann eine minimale Geodätische, wenn es ein  $v$  in der Lie-Algebra von  $G$  gibt, so daß  $v$  senkrecht auf der Lie-Algebra der Kommutatorgruppe von  $G$  steht und

$$c(t) = c(0) \exp tv.$$

Die Tangentialvektoren von minimalen Geodätischen liegen somit also alle auf einer  $\dim G - \dim[G, G]_{Gr}$ -dimensionalen Distribution. Geodätische mit anderen Tangentialvektoren sind nicht minimal — es gibt keine minimalen Geodätischen, die sich in Richtung der Kommutatorgruppe  $[G, G]_{Gr}$  bewegen. Sei nun  $M$  ein kompakter Quotient von  $G$ . Dann gibt es einen (Lie-Gruppen-)Isomorphismus von  $H_1(M, \mathbb{R})$  auf  $\frac{G}{[G, G]_{Gr}}$  (siehe z.B. Abschnitt III.2), u.a. ist also  $\dim H_1(M, \mathbb{R}) = \dim G - \dim[G, G]_{Gr}$ . Das Verhalten der minimalen Geodätischen auf  $G$  bei linksinvarianter Metrik führt nun zu der Vermutung, daß es riemannsche Metriken auf  $M$  gibt, so daß alle minimalen Geodätischen asymptotisch in genau  $\dim H_1(M, \mathbb{R})$  verschiedene „Richtungen“ laufen. Unser Ziel wird es sein, derartige riemannsche Metriken zu konstruieren. Wir nennen diese riemannschen Mannigfaltigkeiten zusammen mit der Auszeichnung eines Richtungsbegriffs „verallgemeinerte Hedlund-Beispiele“.

Der Existenzsatz von verallgemeinerten Hedlund-Beispielen (Theorem IV.3.3) besagt u.a.

**Theorem 3.1** (Existenzsatz von verallgemeinerten Hedlund-Beispielen in der abgeschwächten Version). *Zu jeder endlich erzeugten, nilpotenten Gruppe  $\Gamma$ , gibt es eine kompakte riemannsche Mannigfaltigkeit  $M$  mit*

- (1)  $\pi_1(M) = \Gamma$
- (2) *Es existiert eine Basis  $\mathfrak{B} = \{v_i \mid i \in I\}$  von  $H_1(M, \mathbb{R})$ , so daß für alle minimalen Geodätischen  $c: \mathbb{R} \rightarrow M$  gilt:*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} R(c|_{[s,t]}) = \pm v_i \text{ für ein } v_i \in \mathfrak{B}$$

für alle  $s \in \mathbb{R}$ .

Man beachte hierbei, daß der Limes  $t \rightarrow \infty$  hier nicht gleichmäßig in  $s$  sein muß. Dieses Theorem läßt sich unter Verwendung des „Limes des asymptotischen Limes“ anstelle der „Häufungspunkte des Rotationsvektor“ wesentlich stärker formulieren.

Zur Konstruktion der Hedlund-Beispiele benutzen wir zwei Hilfsmittel. Zuerst konstruieren wir sogenannte Autobahnmetriken. Diese werden auf beliebigen kompakten Mannigfaltigkeiten  $M$  konstruiert, wir werden jedoch für die Konstruktion von Hedlund-Beispielen im wesentlichen nur Autobahnmetriken auf den  $m$ -dimensionalen Tori  $T^m$  mit  $M \geq 3$ , auf einem Quotienten der 3-dimensionalen Heisenberg-Gruppe  $\Gamma_{(1)} \backslash H_3$  und auf  $T^2 \times S^2$  benötigen. Die Mannigfaltigkeiten  $T^m$ ,  $T^2 \times S^2$  und  $\Gamma_{(1)} \backslash H_3$  mit einer Autobahnmetrik sind Hedlund-Beispiele und haben somit die Eigenschaft (2) von Theorem 3.1. Anhand von Mannigfaltigkeiten mit freier Fundamentalgruppe zeigen wir, daß es auch Mannigfaltigkeiten gibt, die zusammen mit ihrer Autobahnmetrik (2) nicht erfüllen (Unterabschnitt IV.1.h). Jedoch können für

allgemeine kompakte Mannigfaltigkeiten mit Autobahnmetriken die ganz-homolog und reell-homolog minimalen Geodätischen sehr genau beschrieben werden (Unterabschnitt IV.1.e).

Das zweite Hilfsmittel sind einige Sätze über  $N$ -linkssymmetrische Metriken auf nilpotenten Lie-Gruppen  $G$ . Unter  $N$ -linksinvarianten Metriken verstehen wir riemannsche Metriken, die unter Linksmultiplikation mit den Elementen des zusammenhängenden Normalteilers  $N$  invariant bleibt. Im Fall, daß  $N$  zudem noch in der Kommutatorgruppe  $[G, G]_{Gr}$  von  $G$  liegt, können wir dann die Suche nach minimalen Geodätischen bezüglich einer  $N$ -linkssymmetrischen Metrik auf die Suche nach minimalen Geodätischen auf der Lie-Gruppe  $\frac{G}{N}$  zurückführen (Abschnitt IV.2).

**Satz IV.2.1.** (Reduktion der Dimension).  $G$  sei eine nilpotente Lie-Gruppe mit zusammenhängendem Normalteiler  $N \subset [G, G]_{Gr}$ . Auf  $G$  sei eine  $N$ -linksinvariante Metrik  $\langle, \rangle_G$  gegeben. Der Quotient  $\frac{G}{N}$  trage die riemannsche Metrik  $\langle, \rangle_{\frac{G}{N}}$ , für die die Standard-Projektion

$$p_{\frac{G}{N}}: G \rightarrow \frac{G}{N}$$

eine riemannsche Submersion ist. Weiterhin fordern wir, daß es für eine beliebige  $G$ -linksinvariante Metrik  $\langle, \rangle_G^l$  Konstanten  $Ko_1, Ko_2 > 0$  gibt, so daß

$$Ko_1 \langle x, x \rangle_G^l \leq \langle x, x \rangle_G \leq Ko_2 \langle x, x \rangle_G^l$$

für alle  $x \in TG$ .

Dann ist  $c: \mathbb{R} \rightarrow G$  genau dann minimale Geodätische, wenn gilt:

- (1)  $\dot{c}(t) \perp \ker T_{c(t)} p_{\frac{G}{N}}$ ,
- (2)  $p_{\frac{G}{N}} \circ c: \mathbb{R} \rightarrow \frac{G}{N}$  ist minimale Geodätische.

Dieser Satz erlaubt uns aus den obigen Hedlund-Beispielen allgemeine Hedlund-Beispiele zu konstruieren. Darüber hinaus könnte man mit diesem Satz aber viele Sätze über minimale Geodätische auf den Tori auf Nilmannigfaltigkeiten hochheben.

Um diese Ergebnisse herzuleiten werden einige Hilfsmittel erarbeitet, die auch für andere Anwendungen interessant sein könnten. Die konstruierten Autobahnmetriken können nicht nur die minimalen Geodätischen unendlicher Länge sondern auch die „genügend langen“ minimalen Geodätischen endlicher Länge recht gut beschreiben. Man kann deswegen für diese riemannschen Mannigfaltigkeiten das Wachstum der Bälle in der universellen Überlagerung kontrollieren. Dieser Gedanke wird jedoch in dieser Diplomarbeit nur ansatzweise ausgeführt.

In Abschnitt II.6 gehen wir noch kurz auf das polynomiale Wachstum von Gruppen ein. Der Wachstumsgrad endlich erzeugter nilpotenter Gruppen wird mit kontinuierlichen Methoden abgeschätzt.

Die Gitter in den Heisenberg-Gruppen klassifizieren wir in Abschnitt II.3. In den Lehrbüchern konnte eine Klassifikation dieser Gitter nicht gefunden werden. Das Resultat erscheint jedoch so einfach, daß es wahrscheinlich bereits veröffentlicht wurde.

## KAPITEL II

# Nilpotente Gruppen, Lie-Gruppen und Gitter

### 1. Einführung in die nilpotenten Lie-Gruppen

Wir wollen in diesem Abschnitt einige Ergebnisse der Theorie der Lie-Gruppen zusammenfassen, die wir in dieser Arbeit öfters benutzen werden. Weitergehende Informationen findet man in [Warner], besonders umfassend ist [Hochsch], speziell im nilpotenten Fall ist auch [CorGreen] zu empfehlen.

In dieser Arbeit seien alle Lie-Gruppen zusammenhängend, sofern nicht ausdrücklich auch nicht zusammenhängende Lie-Gruppen zugelassen sind. Lie-Gruppen bezeichnen wir mit großen lateinischen Buchstaben wie  $G$ ,  $H$ ,  $N$  und  $Z$  und die zugehörigen Lie-Algebren mit den entsprechenden kleinen altdeutschen Buchstaben wie  $\mathfrak{g}$ ,  $\mathfrak{h}$ ,  $\mathfrak{n}$  und  $\mathfrak{z}$ .

Sei  $\phi: G \rightarrow H$  ein *Lie-Gruppen-Homomorphismus*, d.h. ein glatter Gruppen-Homomorphismus, und  $\psi := T_e\phi$  die Tangentialabbildung, so kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{\psi} & \mathfrak{h} \\ \downarrow \text{exp} & & \downarrow \text{exp} \\ G & \xrightarrow{\phi} & H \end{array}$$

([Warner] Theorem 3.14). Ist umgekehrt  $\psi$  ein Lie-Algebren-Homomorphismus und  $G$  einfach zusammenhängend, so gibt es auch genau einen Lie-Gruppen-Homomorphismus  $\phi$ , so daß das Diagramm kommutiert, und es gilt  $T_e\phi = \psi$  ([Warner] Theorem 3.27).

Die Konjugation  $C_g$  mit einem festen Gruppenelement  $g \in G$  ist ein Automorphismus von  $G$  und deswegen ist auch  $\text{Ad}(g) := T_e C_g$  ein Lie-Algebren-Automorphismus von  $\mathfrak{g}$ . Die Abbildung

$$\text{Ad}: G \rightarrow \text{Gl}(\mathfrak{g})$$

ist ebenfalls ein Lie-Gruppen-Homomorphismus und hat als Tangentialabbildung einen Lie-Algebren-Homomorphismus

$$\text{ad}: \mathfrak{g} \rightarrow \text{Lin}(\mathfrak{g}).$$

Nach [Warner] Proposition 3.47 gilt  $\text{ad}(x)(y) = [x, y]$ . Hieraus folgt, daß eine (zusammenhängende) Unter-Lie-Gruppe  $H$  von der (zusammenhängenden) Lie-Gruppe  $G$  genau dann normal (d.h. invariant unter Konjugation) ist, wenn ihre Lie-Algebra  $\mathfrak{h}$  ein Ideal in  $\mathfrak{g}$  (d.h. invariant unter allen  $\text{ad}(x)$  mit  $x \in \mathfrak{g}$ ) ist.

Außerdem folgt aus der Kommutativität des obigen Diagramms und der Formel von exp für lineare Gruppen, daß

$$\text{Ad} \circ \exp x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} (\text{ad}(x))^i$$

gilt.

Die Tangentialabbildung von exp in  $e$  ist die Identität, daher ist exp ein Diffeomorphismus von einer Umgebung  $V$  der Null aus  $\mathfrak{g}$  auf die Umgebung  $\exp(V)$  der Eins von  $G$ .

Die Formel von Baker-Campbell-Hausdorff beschreibt uns die Gruppenmultiplikation in einer Umgebung der Eins in der Karte  $(\exp|_V)^{-1}$ . Hierzu definieren wir zunächst die Lie-Klammer-Potenzreihe  $P$  über der Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$ . Wir setzen für  $x, y \in \mathfrak{g}$ :

$$P(x, y) = \sum_{n>0} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sum_{\substack{p_i+q_i>0 \\ 1 \leq i \leq n}} \frac{(\sum_{i=1}^n (p_i + q_i))^{-1}}{p_1! q_1! \dots p_n! q_n!} f_{(p_i, q_i)}(x, y),$$

wobei

$$f_{(p_i, q_i)}(x, y) := \begin{cases} (\text{ad}(x))^{p_1} (\text{ad}(y))^{q_1} \dots (\text{ad}(x))^{p_n} (y) & \text{für } q_n = 1 \\ (\text{ad}(x))^{p_1} (\text{ad}(y))^{q_1} \dots (\text{ad}(y))^{q_{n-1}} (x) & \text{für } q_n = 0, p_n = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

**Theorem 1.1** (Formel von Baker-Campbell-Hausdorff). *Es gibt eine Umgebung  $U \subset \mathfrak{g}$  der Null, so daß  $P(x, y)$  für alle  $x, y \in U$  konvergiert und es gilt*

$$\exp P(x, y) = \exp x \cdot \exp y.$$

Für den Fall, daß  $G$  eine Unter-Lie-Gruppe von  $\text{Gl}(n, \mathbb{R})$  ist, findet sich ein einfacher Beweis dieses Theorems in [CorGreen] Abschnitt 1.2, der allgemeine Fall wurde in [Hochsch] Kapitel X bewiesen.

Für konkrete Rechnungen ist es oft nützlich, die ersten Terme zu kennen:

$$\begin{aligned} P(x, y) &= x + y + \frac{1}{2}[x, y] + \frac{1}{12}[x, [x, y]] - \frac{1}{12}[y, [x, y]] \\ &\quad - \frac{1}{48}[y, [x, [x, y]]] - \frac{1}{48}[x, [y, [x, y]]] \\ &\quad + \text{Terme in mindestens fünf Kommutatoren} \end{aligned}$$

Für die Gruppe  $G$  (nicht notwendig Lie-Gruppe) definieren wir induktiv die *i-te Kommutatorgruppe*  $G^i$  durch  $G^1 := G$  und  $G^{i+1} := [G^i, G]_{Gr}$ ; hierbei ist die *Kommutatorgruppe*  $[H_1, H_2]_{Gr}$  der Untergruppen  $H_1$  und  $H_2$  diejenige Untergruppe, die von den Elementen der Form  $[h_1, h_2]_{Gr} := h_1 h_2 h_1^{-1} h_2^{-1}$  mit  $h_i \in H_i$  erzeugt wird. Alle  $G^i$  sind zusammenhängende charakteristische Normalteiler von  $G$ , d.h. Normalteiler, die unter Automorphismen von  $G$  auf sich selbst abgebildet werden. Die Folge  $G^1, G^2, G^3, \dots$  heißt *absteigende Zentralreihe* der Gruppe  $G$ . Eine Gruppe  $G$  heißt  $\kappa$ -stufig nilpotent, wenn  $G^{\kappa+1} = \{e\}$  und  $G^\kappa \neq \{e\}$ .

Ist  $G$  eine Lie-Gruppe, so definieren wir analog hierzu für die Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$  die absteigende Zentralreihe durch  $\mathfrak{g}^1 := \mathfrak{g}$  und  $\mathfrak{g}^{i+1} := [\mathfrak{g}^i, \mathfrak{g}]$ . Die Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$  heißt  $\kappa$ -stufig nilpotent, wenn  $\mathfrak{g}^{\kappa+1} = \{0\}$  und  $\mathfrak{g}^\kappa \neq \{0\}$ . In [Hochsch] Theorem XII.3.1 wird gezeigt, daß die Lie-Algebra von  $G^i$  isomorph zu  $\mathfrak{g}^i$  ist. Deswegen ist  $G$  genau dann  $\kappa$ -stufig nilpotent, wenn  $\mathfrak{g}$   $\kappa$ -stufig nilpotent ist. Ferner gilt für alle Lie-Gruppen  $[\mathfrak{g}^i, \mathfrak{g}^j] \subset \mathfrak{g}^{i+j}$  (dies zeigt man induktiv über  $j$  durch Anwendung der Jacobi-Identität).

Äquivalent kann man die Nilpotenz von  $G$  auch über die *aufsteigende Zentralreihe*  $Z_1(G), Z_2(G), \dots$  definieren. Hierbei ist das *i-te Zentrum*  $Z_i(G)$  induktiv definiert durch

$$Z_1(G) := \{g \in G \mid [g, G]_{Gr} = \{e\}\}$$

$$Z_{i+1}(G) := \{g \in G \mid [g, G]_{Gr} \subset Z_i(G)\}$$

$Z_i(G)$  ist eine abgeschlossene Untergruppe. Abgeschlossene Untergruppen sind nach [Hochsch] Theorem VIII 1.1 nicht notwendig zusammenhängende Lie-Gruppen. Die Aussage  $G^i = \{e\}$  ist äquivalent zu  $Z_i(G) = G$ , d.h.  $G^i$  ist genau dann nilpotent mit Stufe  $\leq \kappa$ , wenn  $Z_{\kappa+1}(G) = G$ .

Völlig analog ist auch die aufsteigende Zentralreihe und das *i-te Zentrum* der Lie-Algebra definiert, und die Nilpotenz von  $\mathfrak{g}$  kann analog über die aufsteigende Zentralreihe definiert werden und wiederum ist  $Z_i(\mathfrak{g})$  die Lie-Algebra von  $Z_i(G)$ .

Im Falle der Nilpotenz besitzt die oben definierte Lie-Algebren-Potenzreihe  $P$  nur endlich viele von Null verschiedene Glieder,  $P(x, y)$  konvergiert also für alle  $x, y \in \mathfrak{g}$ .

Wir definieren in diesem Fall auf  $\mathfrak{g}$  eine Multiplikation durch

$$x * y := P(x, y),$$

wodurch wir die Lie-Gruppe  $\tilde{G} := (\mathfrak{g}, *)$  erhalten. Aufgrund der Formel von Baker-Campbell-Hausdorff erhält  $\exp$  in einer Umgebung  $W \subset \mathfrak{g}$  der Null die Multiplikation, d.h.  $\exp(x * y) = (\exp x)(\exp y)$ . Da  $W$  bereits die zusammenhängende Lie-Gruppe  $\tilde{G}$  erzeugt, ist  $\exp$  ein globaler Gruppenhomomorphismus. Aus der Surjektivität von  $T_0 \exp = \text{id}$  folgern wir weiter, daß auch  $\exp(W)$  eine Umgebung von  $e \in G$  ist, also auch das zusammenhängende  $G$  erzeugt, woraus sich die Surjektivität von  $\exp$  ergibt. Aus  $T_0 \exp = \text{id}$  folgt sogar weiter, daß  $\exp$  in einer Umgebung  $U$  der Null ein lokaler Diffeomorphismus ist. Ist  $\tilde{l}_x$  die Linksmultiplikation in  $\mathfrak{g}$  mit  $x$ , so kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{\tilde{l}_x} & \mathfrak{g} \\ \downarrow \exp & & \downarrow \exp \\ G & \xrightarrow{l_{\exp x}} & G \end{array}$$

für beliebiges  $x \in \mathfrak{g}$ . Also ist die Exponentialabbildung auch ein Diffeomorphismus von  $\tilde{l}_x(U)$  auf  $l_{\exp x}(\exp U)$ , somit ist  $\exp$  ein lokaler Diffeomorphismus. Der Kern  $K := \ker \exp$  ist ein diskreter Normalteiler von  $\tilde{G}$ . Für alle  $g \in G$  ist  $l_g(\exp U)$  eine trivialisierende Umgebung von  $g$ , denn wählen wir ein  $x \in \mathfrak{g}$  mit  $\exp x = g$ , so gilt

$$(\exp)^{-1}(l_g(\exp U)) = \bigcup_{k \in K} \tilde{l}_k \circ \tilde{l}_x U$$

Da  $\mathfrak{g}$  einfach zusammenhängend ist, ist  $\exp$  somit die universelle Überlagerung von  $G$ . Für einfach zusammenhängendes  $G$  folgt also  $K = \{0\}$  und somit der folgende Satz.

**Satz 1.2** (z.B. [CorGreen] Theorem 1.2.1). *Die Lie-Gruppen-Exponentialfunktion einer nilpotenten Lie-Gruppe ist eine universelle Überlagerung dieser Gruppe. Insbesondere ist die Exponentialfunktion für eine einfach zusammenhängende, nilpotente Lie-Gruppe ein Diffeomorphismus. Die Formel von Baker-Campbell-Hausdorff gilt für alle Elemente der Lie-Algebra.*

Identifizieren wir  $\mathfrak{g}$  durch Auswählen einer Basis mit dem  $\mathbb{R}^n$  ( $n = \dim G$ ), so liefert  $\log := (\exp)^{-1}$ , die inverse Abbildung der Exponentialabbildung eine für viele Zwecke günstige Karte. U.a. sind die 1-dimensionalen Untergruppen der Gruppe  $G$  in der Karte die Ursprungsgeraden in  $\mathfrak{g}$ . Weiterhin erlaubt uns die Logarithmusfunktion, beliebige reelle Potenzen von Elementen von  $G$  zu bilden. Wir definieren für

$g \in G$  und  $t \in \mathbb{R}$

$$g^t := \exp(t \log(g)).$$

Man sieht sofort, daß für  $n \in \mathbb{N}$  und  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$  gilt:

$$g^n = \underbrace{gg \cdots g}_{n\text{-mal}}$$

$$g^{-n} = \underbrace{g^{-1}g^{-1} \cdots g^{-1}}_{n\text{-mal}}$$

$$g^{t_1+t_2} = g^{t_1}g^{t_2} \quad \text{und} \quad g^{t_1 t_2} = (g^{t_1})^{t_2}$$

Die Formel von Baker-Campbell-Hausdorff besagt, daß für  $x, y \in \mathfrak{g}$

$$[\exp x, \exp y]_{Gr} = \exp([x, y] + \text{höhere Kommutatorterme})$$

gilt, wobei „höhere Kommutatorterme“ ein Element in  $\mathfrak{g}^{i+1}$  für ein  $i$  mit  $[x, y] \in \mathfrak{g}^i$  bedeuten soll. Hieraus folgt induktiv

**Lemma 1.3** (Kommutatorregel). *Sei  $G$  eine nilpotente Lie-Gruppe mit Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$ . Dann gilt für  $x_1, \dots, x_n \in \mathfrak{g}$*

$$[\exp x_1, [\dots [\exp x_{n-1}, \exp x_n]_{Gr}]_{Gr} \dots]_{Gr} = \exp\left([x_1, [\dots [x_{n-1}, x_n]] \dots] + \text{höhere Kommutatorterme}\right).$$

BEISPIEL 1.4. Die Matrizen der Form

$$M(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n, z) := \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n & z \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & 0 & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & b_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

bilden eine  $2n + 1$ -dimensionale Untergruppe und Untermannigfaltigkeit der reellen  $(n + 2) \times (n + 2)$ -Matrizen  $\mathcal{M}(n + 2, \mathbb{R})$ , die  $2n + 1$ -dimensionale Heisenberg-Gruppe

$H_{2n+1}$ . Mit dieser differenzierbaren Struktur und Gruppenstruktur ist  $H_{2n+1}$  eine 2-stufig nilpotente Lie-Gruppe. Die Funktion  $\psi: H_{2n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$ ,  $\psi(M(a_1, \dots, z)) = (a_1, \dots, z)$  bildet die *Komponentenkarte* von  $H_{2n+1}$ . Die Tangentialvektoren  $p_i := \frac{\partial}{\partial a_i}|_e$  und  $q_i := \frac{\partial}{\partial b_i}|_e$  ( $i = 1, \dots, n$ ) und  $\hbar := \frac{\partial}{\partial z}|_e$  bilden eine Basis der Lie-Algebra  $\mathfrak{h}_{2n+1}$ . Diese wird durch die Relationen  $[p_i, q_j] = \delta_{ij}\hbar$  und  $[p_i, p_j] = [q_i, q_j] = [p_i, \hbar] = [q_i, \hbar] = 0$  beschrieben.

Ferner ist die Exponentialabbildung gegeben durch

$$\begin{aligned} & \exp(a_1 p_1 + \dots + a_n p_n + b_1 q_1 + \dots + b_n q_n + c \hbar) \\ &= M(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n, c + \frac{1}{2} a_1 b_1 + \dots + \frac{1}{2} a_n b_n). \end{aligned}$$

Die Logarithmuskarte  $\log$  ist also verschieden von der Komponentenkarte.

Zum Abschluß des Kapitels zitiere ich noch ein Theorem für endlich erzeugte nilpotente Gruppen.

**Theorem 1.5** (K.A.Hirsch, siehe [Baumsl] Theorem 2.1). *Sei  $G$  eine endlich erzeugte nilpotente Gruppe. Dann kann  $G$  als Untergruppe mit endlichem Index in ein direktes Produkt  $D = A \times B$  eingebettet werden, wobei  $A$  eine endliche, nilpotente Gruppe und  $B$  eine torsionsfreie, nilpotente, endlich erzeugte Gruppe ist.*

**Korollar 1.6.** *In einer endlich erzeugten, nilpotenten Gruppe bilden die Torsions-elemente einen endlichen Normalteiler.*

Wir nennen diesen Normalteiler die *Torsionsgruppe* von  $G$ . Aus dem Beweis von obigem Theorem 1.5 im Buch [Baumsl] sieht man sofort den Zusatz:

**Zusatz zu Theorem 1.5.** *Man kann  $B$  so wählen, daß  $B \cong \frac{G}{T}$  ist und die Restriktion der Komponentenprojektion  $A \times B \rightarrow B$  auf  $G$  gleich der kanonischen Quotientenprojektion  $G \rightarrow \frac{G}{T}$  ist.*

## 2. Gitter in nilpotenten Lie-Gruppen

Die Sätze dieses Abschnitts wurden größtenteils bereits von Malcev in [Malcev] bewiesen. Die meisten Ergebnisse werden auch mit zum Teil anderen Methoden in [Raghu] und in [CorGreen] hergeleitet. Da die Beweise jedoch nicht allzusehr zum Verständnis dieser Arbeit dienen, sollen viele Sätze ohne Beweis zitiert werden.

Wir beginnen mit der Existenz von Malcev-Basen. Viele der in diesem Abschnitt dargestellten Sätze folgen dann hieraus. Dennoch kann man diese Sätze nicht als Korollare des Existenzsatzes von Malcev-Basen auffassen, denn die Konstruktion geeigneter Malcev-Basen benötigt einige dieser Sätze.

Einige Aussagen dieses Abschnitts sind in der Literatur in dieser Form nicht zu finden, folgen aber einfach aus ihnen.

In diesem Abschnitt sei  $G$  eine einfach zusammenhängende, nilpotente Lie-Gruppe mit Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$ . Eine Untergruppe ist *diskret*, wenn sie diskret als topologischer Unterraum ist. Eine diskrete Untergruppe  $\Gamma \leq G$  ist abgeschlossen und operiert eigentlich diskontinuierlich auf  $G$  durch Linksmultiplikation. Ist der so gebildete Quotient  $\Gamma \backslash G$  kompakt, so nennen wir  $\Gamma$  eine *kompakte* diskrete Untergruppe von  $G$  oder ein *Gitter* von  $G$ . Eine *Nilmannigfaltigkeit* ist solch ein kompakter Quotient einer nilpotenten Lie-Gruppe. In der Literatur sind die Definitionen von „Gitter“ recht unterschiedlich. Unsere Definition von „Gitter“ entspricht im Falle nilpotenter Lie-Gruppen der Definition von „lattice“ in [Raghu] und der Definition von „uniform discrete subgroup“ in [CorGreen].

**Satz 2.1** (Existenz einer Malcev-Basis, [CorGreen] Theorem 5.1.6). *Sei  $G$  eine  $m$ -dimensionale, einfach zusammenhängende, nilpotente Lie-Gruppe mit Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$  und sei  $\Gamma$  ein Gitter in  $G$ . Dann existiert eine Basis  $e_1, \dots, e_m$  von  $\mathfrak{g}$ , so daß*

- (1) *Für alle  $1 \leq i \leq m$  ist der von  $e_1, \dots, e_i$  erzeugte Vektorraum ein Ideal in  $\mathfrak{g}$ ,*
- (2)

$$\Gamma = \left\{ \exp j_1 e_1 \cdots \exp j_m e_m \mid j_i \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Eine derartige Basis wird in [CorGreen] „starke Malcev-Basis, die stark auf  $\Gamma$  basiert,“ genannt, wir nennen sie kurz *Malcev-Basis* zu dem Gitter  $\Gamma$ . Unter anderem erzeugt  $\log \Gamma$  bereits  $\mathfrak{g}$  als Vektorraum. Es gilt auch die Umkehrung:

**Satz 2.2** ([CorGreen] Corollary 5.4.5). *Wenn  $\Gamma$  eine diskrete Untergruppe einer nilpotenten Lie-Gruppe ist und  $\log \Gamma$  den Vektorraum  $\mathfrak{g}$  erzeugt, dann ist  $\Gamma$  ein Gitter.*

Aus diesen beiden Sätzen und der Kommutatorregel (Lemma 1.3) folgt nun:

**Satz 2.3.** *Sei  $\Gamma$  ein Gitter in der einfach zusammenhängenden, nilpotenten Lie-Gruppe  $G$ , so ist  $\Gamma^k$  auch ein Gitter in  $G^k$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ .*

Hieraus ergibt sich der etwas schwächere Satz:

**Satz 2.4** ([Raghu] Corollary 1 des Theorems 2.3.). *Sei  $\Gamma$  ein Gitter in der einfach zusammenhängenden, nilpotenten Lie-Gruppe  $G$ , so ist  $\Gamma \cap G^k$  auch ein Gitter in  $G^k$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ .*

Er ist zur Konstruktion von neuen Nilmannigfaltigkeiten aus alten sehr nützlich. Weiter zitieren wir noch

**Satz 2.5** ([Raghu] Proposition 2.17). *Sei  $\Gamma$  ein Gitter in der einfach zusammenhängenden, nilpotenten Lie-Gruppe  $G$ , so ist  $\Gamma \cap Z_k(G)$  auch ein Gitter in  $Z_k(G)$ .*

Punkt (1) und (2) des nachfolgenden Lemmas stehen in [CorGreen] Lemma 5.1.4; Punkt (3) ist nirgendwo zu finden, aber einfach zu beweisen.

**Lemma 2.6.** *Sei  $\Gamma$  eine diskrete Untergruppe der nilpotenten, einfach zusammenhängenden Lie-Gruppe  $G$ ,  $H$  ein abgeschlossener Normalteiler von  $G$ . Sei  $\pi: G \rightarrow \frac{G}{H}$  die natürliche Projektion.*

- (1) *Ist  $\Gamma \cap H$  ein Gitter in  $H$  und  $\Gamma$  ein Gitter in  $G$ , so ist auch  $\pi(\Gamma)$  ein Gitter in  $\frac{G}{H}$  und  $\Gamma H$  ist eine abgeschlossene Untergruppe von  $G$ .*
- (2) *Ist  $\Gamma \cap H$  ein Gitter in  $H$  und  $\pi(\Gamma)$  ein Gitter in  $\frac{G}{H}$ , so ist auch  $\Gamma$  ein Gitter in  $G$ .*
- (3) *Ist  $\Gamma$  ein Gitter in  $G$  und  $\pi(\Gamma)$  ein Gitter in  $\frac{G}{H}$ , dann ist auch  $\Gamma \cap H$  ein Gitter in  $H$ .*

BEWEIS VON (3): Wir zeigen die Folgenkompaktheit von  $(\Gamma \cap H) \backslash H$ . Sei  $(g_i)$  eine Folge in  $H$ , dann gibt es aufgrund der Folgenkompaktheit von  $\Gamma \backslash G$  eine Folge  $(\gamma_i)$  in  $\Gamma$ , so daß nach Übergang zu einer Teilfolge  $\gamma_i g_i$  gegen ein  $g_0 \in G$  konvergiert. Nun sind alle  $\pi(\gamma_i g_i)$  in der diskreten und somit abgeschlossenen Untergruppe  $\pi(\Gamma) \subset \frac{G}{H}$ , also auch  $\pi(g_0)$ . Wir können annehmen, daß die  $\gamma_i$  so gewählt wurden, daß  $\pi(g_0) = e$ . Nun gilt für fast alle  $i$ , daß  $\pi(\gamma_i g_i) = e$  und somit  $\gamma_i g_i \in H$ , woraus sich  $\gamma_i \in \Gamma \cap H$  ergibt und somit die Folgenkompaktheit von  $(\Gamma \cap H) \backslash H$ .  $\square$

Aus den Eigenschaften einer gegebenen Lie-Gruppe kann man oft auf Eigenschaften der möglichen Gitter schließen. Eine hinreichende und notwendige Bedingung, welche abstrakten Gruppen als Gitter in nilpotenten, einfach zusammenhängenden Lie-Gruppen vorkommen können, gibt der folgende Satz.

**Satz 2.7** (Satz von Malcev, [Raghu] Theorem 2.18). *Eine Gruppe  $\Gamma$  ist genau dann isomorph zu einem Gitter in einer nilpotenten, einfach zusammenhängenden Lie-Gruppe, wenn gilt:*

- (1)  $\Gamma$  ist endlich erzeugt,
- (2)  $\Gamma$  ist nilpotent,
- (3)  $\Gamma$  ist torsionsfrei.

**Korollar 2.8.** *Untergruppen endlich erzeugter, nilpotenter, torsionsfreier Gruppen sind endlich erzeugt.  $\square$*

Sei nun  $G$  das abelsche direkte Produkt einer endlichen Gruppe  $A$  und einer endlich erzeugten, nilpotenten, torsionsfreien Gruppe  $B$ . Eine Untergruppe  $H$  von  $G$  ist dann auch endlich erzeugt: denn sei  $p$  die Projektion von  $G$  auf  $B$ , dann hat  $p|_H$  ein endlich erzeugtes Bild und einen endlichen Kern, also ist auch  $H$  endlich erzeugt. Mit Theorem 1.5 können wir also das Korollar verallgemeinern:

**Korollar 2.9.** *Untergruppen endlich erzeugter, nilpotenter Gruppen sind endlich erzeugt.  $\square$*

Aus dem nächsten Satz folgt, daß eine nilpotente, einfach zusammenhängende Lie-Gruppe, die eine gegebene Gruppe  $\Gamma$  mit obigen Eigenschaften als Gitter enthält, bis auf Isomorphie bereits eindeutig bestimmt ist.

**Satz 2.10** ([Raghu] Theorem 2.11). *Seien  $G_1$  und  $G_2$  zwei einfach zusammenhängende, nilpotente Lie-Gruppen und  $\Gamma$  ein Gitter in  $G_1$ . Dann läßt sich jeder Gruppen-Homomorphismus  $h: \Gamma \rightarrow G_2$  eindeutig zu einem Lie-Gruppen-Homomorphismus  $\tilde{h}: G_1 \rightarrow G_2$  fortsetzen.*

Eine Einbettung einer torsionsfreien, endlich erzeugten, nilpotenten Gruppe als Gitter in eine einfach zusammenhängende, nilpotente Lie-Gruppe  $G_\Gamma$  ermöglicht nun, für alle  $g \in G_\Gamma$  und alle  $t \in \mathbb{R}$  nach der Formel  $g^t := \exp(t \log(g))$  beliebige Potenzen zu bilden und beliebige Wurzeln zu ziehen.

Schließlich können wir noch die Dimensionen der absteigenden Zentralreihe einer einfach zusammenhängenden,  $\kappa$ -stufig nilpotenten Lie-Gruppe  $G$  durch interne algebraische Eigenschaften eines Gitters  $\Gamma$  ausdrücken:

**Theorem 2.11** (folgt aus [Raghu] Theorem 2.10).

$$\dim G^j = \sum_{i=j}^{\kappa} \text{rang} \frac{\Gamma^i}{\Gamma^{i+1}}.$$

Der folgende Satz besagt, daß es in vielen Lie-Gruppen gar keine Gitter gibt:

**Satz 2.12** ([Raghu] Theorem 2.12). *Sei  $G$  eine einfach zusammenhängende, nilpotente Lie-Gruppe mit Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$ . Dann gibt es in  $G$  genau dann ein Gitter, wenn  $\mathfrak{g}$  eine Basis  $\{e_1, \dots, e_n\}$  besitzt und es rationale Zahlen  $C_{ij}^k$  gibt, so daß*

$$[e_i, e_j] = \sum_{k=1}^n C_{ij}^k e_k \quad \forall i, j.$$

In dieser Arbeit benötigen wir außerdem zwei Hilfssätze, die sich nun einfach beweisen lassen. Wahrscheinlich sind sie Mathematikern, die sich eingehend mit Gittern in nilpotenten Lie-Gruppen bekannt, da jedoch in der Literatur kein Beweis zu finden war, sollen sie hier bewiesen werden.

**Hilfssatz 2.13.** *Sei  $G$  eine nilpotente Lie-Gruppe mit Gitter  $\Gamma$ , ferner  $N$  ein Normalteiler von  $G$  und  $U$  eine Untergruppe von  $G$ , so daß  $\Gamma_N := \Gamma \cap N$  ein Gitter in  $N$  und  $\Gamma_U := \Gamma \cap U$  ein Gitter in  $U$  ist. Dann ist  $\Gamma' := \Gamma \cap U \cap N$  ein Gitter in  $U \cap N$ .*

BEWEIS: Es genügt zu zeigen:  $\Gamma' \backslash (U \cap N)$  ist folgenkompakt. Hierzu nehmen wir eine Folge  $(g_i)$  in  $U \cap N$ . Aufgrund der Folgenkompaktheit von  $\Gamma_U \backslash U$  gibt es nach Übergang zu einer Teilfolge  $\gamma_i \in \Gamma_U$  mit  $\gamma_i g_i \rightarrow g_0$  für ein geeignetes  $g_0 \in U$ .

Sei nun  $\pi: G \rightarrow \frac{G}{N}$  die natürliche Projektion. Mit dem letzten Lemma ist  $\pi(\Gamma)$  eine diskrete Untergruppe von  $\frac{G}{N}$ ; wegen  $g_i \in N$  sind die  $\pi(\gamma_i g_i) \in \pi(\Gamma)$  und somit  $\pi(g_0) \in \pi(\Gamma)$ . Ohne Einschränkung können wir annehmen, daß die  $\gamma_i$  und  $g_0$  so gewählt wurden, daß  $\pi(g_0) = e$ , also  $g_0 \in N$ . Weiterhin sind auch fast alle  $\gamma_i$  in  $N$  und somit in  $\Gamma'$ . Dies impliziert aber gerade die Folgenkompaktheit von  $\Gamma' \backslash (U \cap N)$ .  $\square$

**Hilfssatz 2.14.** *Sei  $G$  eine nilpotente Lie-Gruppe mit Gitter  $\Gamma$ . Sei*

$$h: \Gamma \rightarrow \Gamma'$$

*ein surjektiver Gruppenhomomorphismus auf die Untergruppe  $\Gamma'$  von  $G$ . Wenn  $\frac{\Gamma'}{G^2}$  ein Gitter in  $\frac{G}{G^2}$  ist, so ist auch  $\Gamma'$  ein Gitter in  $G$ . Ferner läßt sich  $h$  zu einem Lie-Gruppen-Automorphismus von  $G$  erweitern, und  $h: \Gamma \rightarrow \Gamma'$  ist ein Isomorphismus.*

BEGRÜNDUNG. Der Gruppenhomomorphismus  $h$  läßt sich zunächst mit Satz 2.10 zu einem Lie-Gruppen-Endomorphismus  $\tilde{h}: G \rightarrow G$  fortsetzen. Dann ist  $H := \log \circ \tilde{h} \circ \exp$  ein Lie-Algebren-Endomorphismus. Wir zeigen:  $H$  und somit  $\tilde{h}$  ist ein Isomorphismus. Aus Dimensionsgründen reicht es hierfür zu zeigen, daß  $H$  surjektiv ist.

Wir definieren für alle  $i \in \mathbb{N}$  die Abbildung  $H_i$  durch die Kommutativität des Diagramms

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g}^i & \xrightarrow{H} & \mathfrak{g}^i \\ \downarrow & & \downarrow \\ \frac{\mathfrak{g}^i}{\mathfrak{g}^{i+1}} & \xrightarrow{H_i} & \frac{\mathfrak{g}^i}{\mathfrak{g}^{i+1}} \end{array}$$

Wir zeigen durch Induktion über  $i$ , daß alle  $H_i$  surjektiv sind. Da  $\frac{\Gamma}{\mathcal{G}^2}$  ein Gitter in  $\frac{G}{\mathcal{G}^2}$  ist, wissen wir bereits, daß  $H_1$  surjektiv ist. Für  $i \geq 2$  ist die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g}^{i-1} \otimes \mathfrak{g} & \rightarrow & \mathfrak{g}^i \\ x \otimes y & \mapsto & [x, y] \end{array}$$

surjektiv. Diese Abbildung steigt gemäß dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g}^{i-1} \otimes \mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathfrak{g}^i \\ \downarrow & & \downarrow \\ \frac{\mathfrak{g}^{i-1}}{\mathfrak{g}^i} \otimes \frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{g}^2} & \xrightarrow{\tau} & \frac{\mathfrak{g}^i}{\mathfrak{g}^{i+1}} \end{array}$$

zu einer surjektiven Abbildung  $\tau$  ab. Da  $H$  ein Lie-Algebren-Homomorphismus ist, kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \frac{\mathfrak{g}^{i-1}}{\mathfrak{g}^i} \otimes \frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{g}^2} & \xrightarrow{H_{i-1} \otimes H_1} & \frac{\mathfrak{g}^{i-1}}{\mathfrak{g}^i} \otimes \frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{g}^2} \\ \downarrow \tau & & \downarrow \tau \\ \frac{\mathfrak{g}^i}{\mathfrak{g}^{i+1}} & \xrightarrow{H_i} & \frac{\mathfrak{g}^i}{\mathfrak{g}^{i+1}} \end{array}$$

Aus der Surjektivität von  $H_{i-1}$  und  $H_1$  (Induktionsvoraussetzung) folgt nun die Surjektivität von  $H_{i-1} \otimes H_1$  und somit mit der Surjektivität von  $\tau$  auch die Surjektivität von  $H_i$ .

Aus der Surjektivität aller  $H_i$  ergibt sich die Surjektivität von  $H$ . □

### 3. Gitter in den Heisenberg-Gruppen $H_{2n+1}$

Um den letzten Abschnitt zu veranschaulichen, sollen hier einige Details über Gitter in den Heisenberg-Gruppen  $H_{2n+1}$  dargestellt werden folgen. Ein Hauptanliegen dieses Abschnitts ist, die Gitter in den Heisenberg-Gruppen zu klassifizieren. In den gängigen Lehrbüchern ist sie nicht zu finden; da sie aber nicht schwer zu zeigen ist, ist anzunehmen, daß diese Klassifikation bereits veröffentlicht wurde. Für konkrete Berechnungen beachte man, daß für 2-stufig nilpotente Lie-Gruppen  $[\exp x, \exp y]_{Gr} = \exp[x, y]$  gilt.

Auf der  $2n + 1$ -dimensionalen Heisenberg-Gruppe  $H_{2n+1}$  definieren wir für alle  $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}$  mit  $m_i$  teilt  $m_{i+1}$  (kurz  $m_i | m_{i+1}$ ) für alle  $i = 1, \dots, n - 1$

$$\Gamma_{(m_1, \dots, m_n)} := \left\{ M(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n, c) \mid a_j \in m_j \mathbb{Z}, b_j \in \mathbb{Z} \text{ und } c \in \mathbb{Z} \right\},$$

wobei  $M(a_1, \dots, c)$  wie in Beispiel 1.4 definiert ist.  $\Gamma_{(m_1, \dots, m_n)}$  ist ein Gitter in  $H_{2n+1}$ . Das Zentrum  $Z := Z_1(H_{2n+1}) = M(0, \dots, 0, \mathbb{R})$  ist zugleich die Kommutatorgruppe von  $H_{2n+1}$ .

**Satz 3.1** (Klassifikation der Gitter in  $H_{2n+1}$ ). *Sei  $\Gamma$  ein Gitter in  $H_{2n+1}$ . Dann gibt es eindeutig bestimmte  $m_1 | \dots | m_n$  und einen Lie-Gruppen-Automorphismus  $A: H_{2n+1} \rightarrow H_{2n+1}$ , so daß  $A(\Gamma_{(m_1, \dots, m_n)}) = \Gamma$ .*

BEWEIS:

Existenz:

Wir werden Erzeuger  $g_1, \dots, g_n, h_1, \dots, h_n, z$  von  $\Gamma$  mit  $z \in Z$  und ganze Zahlen  $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}$  mit  $m_i | m_{i+1}$  und

$$[g_i, h_j]_{Gr} = z^{m_i \delta_{ij}}, \quad [g_i, g_j]_{Gr} = [h_i, h_j]_{Gr} = e$$

konstruieren. Dann ist

$$M(m_1 a_1, \dots, m_n a_n, b_1, \dots, b_n, c) \mapsto z^c \prod_{i=1}^n h_i^{b_i} g_i^{a_i}$$

ein Gruppenepimorphismus von  $\Gamma_{(m_1, \dots, m_n)}$  nach  $\Gamma$ , der sich mit Satz 2.10 zu einem Lie-Gruppen-Epimorphismus fortsetzen läßt, der aus Dimensionsgründen ein Isomorphismus ist.

$\Gamma$  ist nicht abelsch, da sich sonst ein Gruppenhomomorphismus von einem Gitter in einer abelschen Lie-Gruppe mit Satz 2.10 zu einem Lie-Gruppen-Homomorphismus in  $H_{2n+1}$  fortsetzen läßt, der surjektiv ist, weil  $\Gamma$  ein Gitter ist; somit wäre

$H_{2n+1}$  abelsch. Für ein  $g \in \Gamma$  mit  $g \notin Z$  betrachte man die Abbildung

$$k_g := \text{ad}(\log g): \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{z}$$

bzw. das zugehörige  $K_g := \exp \circ k_g \circ \log: G \rightarrow Z$ . Weil  $K_g(\Gamma)$  ein Gitter in  $Z$  ist, folgt mit Lemma 2.6, daß  $\Gamma \cap \ker K_g$  ein Gitter in  $\ker K_g$  ist. Mit Hilfssatz 2.13 folgt weiter, daß für alle  $g, g' \in \Gamma - Z$  auch  $K := \ker K_g \cap \ker K_{g'}$  die Gruppe  $K \cap \Gamma$  als Gitter enthält. Völlig analog zeigt man induktiv, daß entsprechendes für beliebige Schnitte  $K := \bigcap_{g \in I} \ker K_g$  gilt.

Für die Konstruktion wählen wir zunächst einen Erzeuger  $z$  von dem Gitter  $\Gamma \cap Z$  in  $Z$  (Satz 2.4) und dann  $g_1, h_1 \in \Gamma$  mit  $[g_1, h_1]_{Gr} = z^{m_1}$  für ein minimales  $m_1 \in \mathbb{N}$ . Wir setzen  $K_1 := \ker K_{g_1} \cap \ker K_{h_1}$ . Es ist  $\dim K_1 = 2n - 1$ . Im Fall  $n > 1$  wählen wir dann in  $K \cap \Gamma$ , das wiederum nicht abelsch ist, Elemente  $g_2, h_2$  mit  $[g_2, h_2]_{Gr} = z^{m_2}$  für ein minimales  $m_2 \in \mathbb{N}$ , bilden dann das  $(2n - 3)$ -dimensionale  $K_2 := \ker K_{g_1} \cap \ker K_{h_1} \cap \ker K_{g_2} \cap \ker K_{h_2}$ . Durch Induktion, erhält man schließlich  $g_1, \dots, g_n$  und  $h_1, \dots, h_n$ , die  $\Gamma$  erzeugen, und man zeigt leicht die oben angeführten Gruppenkommutatorrelationen.

Zu zeigen bleibt noch  $m_i | m_{i+1}$ . Angenommen  $m_i$  teilt nicht  $m_{i+1}$ , dann wähle man ganze Zahlen  $a$  und  $b$ , so daß  $m' := am_i + bm_{i+1}$  der größte gemeinsame Teiler von  $m_i$  und  $m_{i+1}$  ist. Der Kommutator von  $g'_i := g_i^a g_{i+1}^b$  und  $h'_i := h_i h_{i+1}$  ist  $z^{m'}$ , was der minimalen Wahl von  $m_i$  widerspricht.

#### Eindeutigkeit:

Wir wollen jedem Gitter  $\Gamma \subset H_{2n+1}$  eine endliche abelsche Gruppe zuordnen, deren Isomorphietyp gleich bleibt, wenn  $\Gamma$  durch einen Automorphismus von  $H_{2n+1}$  bewegt wird.

$V := \frac{H_{2n+1}}{Z}$  ist eine abelsche einfach zusammenhängende Lie-Gruppe. Die Gruppe

$$G := \{h \in H_{2n+1} \mid [h, \Gamma]_{Gr} \subset Z \cap \Gamma\}$$

ist abgeschlossen. Nach Theorem VIII 1.1 aus [Hochsch] sind abgeschlossene Untergruppen von Lie-Gruppen ebenfalls (nicht notwendig zusammenhängende) Lie-Gruppen, also ist  $G$  eine (nicht notwendig zusammenhängende) Lie-Gruppe. Offensichtlich sind  $Z$  und  $\Gamma$  in  $G$  enthalten. Die Konjugation mit Elementen der Zusammenhangskomponente von  $e$  in  $G$  läßt das diskrete Gitter  $\Gamma$  elementweise fest. Also kommutiert die Zusammenhangskomponente von  $G$  mit der Gruppe  $H_{2n+1}$  und ist somit gleich dem Zentrum von  $H_{2n+1}$ . Die natürliche Projektion  $p: H_{2n+1} \rightarrow V$  bildet somit  $G$  auf ein Gitter  $p(G)$  in  $V$  ab. Der Quotient  $\frac{p(G)}{p(\Gamma)}$  ist eine endliche abelsche Gruppe.

Für die Gruppen  $\Gamma_{(m_1, \dots, m_n)}$  rechnet man explizit nach, daß

$$p(G) = p \left( \left\{ M(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n, 0) \mid a_j \in \mathbb{Z}, b_j \in \frac{1}{m_j} \mathbb{Z} \right\} \right)$$

gilt. Dann ist

$$\frac{p(G)}{p(\Gamma)} \cong \bigoplus_{i=1}^n \frac{\mathbb{Z}}{m_i \mathbb{Z}} \oplus \frac{\mathbb{Z}}{m_i \mathbb{Z}}.$$

Mit dem Hauptsatz für endlich erzeugte abelsche Gruppen folgt der Satz.  $\square$

**Lemma 3.2.** *Sei  $\Gamma$  ein Gitter in  $H_3$ , dann gibt es einen Lie-Gruppen-Automorphismus  $a: H_3 \rightarrow H_3$ , so daß  $a(\Gamma)$  eine Untergruppe von  $\Gamma_{(1)}$  von endlichem Index ist.*

**BEGRÜNDUNG.** Nach dem vorigen Satz können wir annehmen, daß  $\Gamma = \Gamma_{(i)}$  für ein  $i \in \mathbb{N}$ . Die Abbildung

$$\begin{aligned} a: H_3 &\rightarrow H_3 \\ M(a, b, c) &\mapsto M(ia, b, ic) \end{aligned}$$

ist ein Lie-Gruppen-Automorphismus und bildet  $\Gamma_{(i)}$  auf eine Untergruppe von  $\Gamma_{(1)}$  von Index  $i$  ab.

#### 4. $N$ -Linksinvarianz

Das Verhalten der Geodätischen auf Lie-Gruppen mit linksinvarianter riemannscher Metrik wird oft in der Literatur untersucht. In [Eberlein] (Proposition (3.5)) werden explizite Formeln für die Geodätischen auf 2-stufig nilpotenten Lie-Gruppen mit linksinvarianter Metrik gegeben. Geodätische auf beliebigen Lie-Gruppen mit linksinvarianter Metrik werden auch eingehend im Appendix 2 von [Arnold] behandelt. Wir wollen hingegen in diesem Abschnitt die Situation einer etwas allgemeineren riemannschen Metrik betrachten. Die Metrik sei nicht mehr invariant unter Linksmultiplikation mit allen Lie-Gruppen-Elementen, sondern nur unter Linksmultiplikation mit den Elementen eines zusammenhängenden Normalteilers. Ähnliche Untersuchungen dieser Situation in der Literatur sind mir nicht bekannt. Das Noethersche Theorem liefert in dieser Situation wichtige Erhaltungsgrößen.

In diesem Abschnitt sei  $G$  immer eine einfach zusammenhängende,  $\kappa$ -stufig nilpotente Lie-Gruppe mit Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$ . Wir betrachten eine Klasse von riemannschen

Metriken auf  $G$ , die eine große kontinuierliche Isometriengruppe haben. Wenn diese Metrik zusätzlich durch eine linksinvariante Metrik nach oben abgeschätzt werden kann, so werden wir in Abschnitt IV.2 zeigen, daß man das Problem, die minimalen Geodätischen zu bestimmen, auf ein Problem niedrigerer Dimension reduzieren kann.

Sei  $N \triangleleft G$  eine normale (zusammenhängende) Unter-Lie-Gruppe mit Lie-Algebra  $\mathfrak{n}$ , es gelte also  $[g, N]_{Gr} \subset N$  für alle  $g \in G$ . Die Gruppe  $\Gamma$  sei ein Gitter in  $G$  und  $\Gamma \cap N$  ein Gitter in  $N$ . Die Menge  $\mathfrak{n} = \log N$  ist ein Untervektorraum von  $\mathfrak{g} = \log G$  und deswegen ist  $N$  eine abgeschlossene Teilmenge von  $G$ . Die Quotientengruppe  $\frac{G}{N}$  trägt als homogener Raum eine differenzierbare Struktur (vgl. [Warner] Theorem 3.58). Die Standard-Projektion von  $G$  auf  $\frac{G}{N}$  sei

$$P_{\frac{G}{N}}: G \rightarrow \frac{G}{N}.$$

Weil  $N$  normal ist, ist  $\mathfrak{n}$  invariant unter  $\text{Ad}(g) := T_e(l_g \circ r_{g^{-1}})$  für alle  $g \in G$ . Somit ist  $T_e l_g(\mathfrak{n}) = T_e r_g(\mathfrak{n}) (= \ker T_g P_{\frac{G}{N}})$ .

Eine Metrik  $\langle, \rangle_G$  auf  $G$  nennen wir  $N$ -linksinvariant, wenn sie unter den Diffeomorphismen  $l_N := \{l_n \mid n \in N\}$  invariant bleibt. Der Begriff „linksinvariant“ ist also zu „ $G$ -linksinvariant“ äquivalent. Wenn  $\langle, \rangle_G$  eine  $N$ -linksinvariante riemannsche Metrik ist, gibt es auf  $\frac{G}{N}$  eine riemannsche Metrik  $\langle, \rangle_{\frac{G}{N}}$ , so daß  $P_{\frac{G}{N}}$  eine riemannsche Submersion ist, d.h.

$$\forall x, y \in T_g G, x, y \perp \ker T P_{\frac{G}{N}} \text{ gilt: } \langle P_{\frac{G}{N}}(x), P_{\frac{G}{N}}(y) \rangle_G = \langle x, y \rangle_{\frac{G}{N}}.$$

In diesem Abschnitt trage  $G$  nun immer eine  $N$ -linksinvariante Metrik  $\langle, \rangle_G$  und  $\frac{G}{N}$  die induzierte Metrik  $\langle, \rangle_{\frac{G}{N}}$ .

Geodätische bezüglich  $N$ -linksinvarianten Metriken haben  $\dim N$  unabhängige Erhaltungsgrößen. Für ihre Berechnung benutzen wir das Noethersche Theorem.

**Theorem 4.1** (Noethersches Theorem für den geodätischen Fluß).

Sei  $(M, \langle, \rangle)$  eine riemannsche Mannigfaltigkeit,  $h^s: M \rightarrow M$  eine 1-Parameter-Gruppe von Isometrien und  $c: I \rightarrow M$  eine Geodätische. Dann ist

$$\left\langle \dot{c}(t), \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} h^s(c(t)) \right\rangle$$

konstant in  $t$ .

Einen Beweis dieses Theorems findet man in [Arnold] Abschnitt 4.20.

Für die Anwendung des Noetherschen Theorems setzen wir  $M := G$  mit der gegebenen  $N$ -linksinvarianten Metrik  $\langle \cdot, \cdot \rangle_G$ . Dann ist für jedes  $n \in \mathfrak{n}$

$$\begin{aligned} h^s: G &\rightarrow G \\ g &\mapsto l_{\exp sn}g \end{aligned}$$

eine 1-Parameter-Familie von Isometrien von  $(G, \langle \cdot, \cdot \rangle_G)$ . Wir rechnen nach

$$\left. \frac{\partial}{\partial s} \right|_{s=0} h^s(c(t)) = Tr_{c(t)}(n).$$

Mit dem Noetherschen Theorem erhalten wir für Geodätische  $c$  die Konstanz von

$$\mathcal{P}_n := \langle \dot{c}(t), Tr_{c(t)}(n) \rangle.$$

Diese Erhaltungsgrößen verallgemeinern die Erhaltungsgrößen, die Patrick Eberlein in [Eberlein] (Corollary (3.3)) berechnet. Er berechnet diese Erhaltungsgrößen nur für den Fall  $n \in Z_1(\mathfrak{g})$  für 2-stufig nilpotente Lie-Gruppen  $G$ .

**BEISPIEL 4.2.** Sei  $H_3$  wieder die drei-dimensionale Heisenberg-Gruppe mit den Bezeichnungen aus Beispiel 1.4. Sei  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  die linksinvariante Metrik, für die  $p_1, q_1, \hbar$  eine orthonormale Basis ist. Wir berechnen die Geodätischen durch  $e$  mit Hilfe der Noetherschen Erhaltungsgrößen. Wir schreiben die Geodätische  $c$  in Exponentialkoordinaten

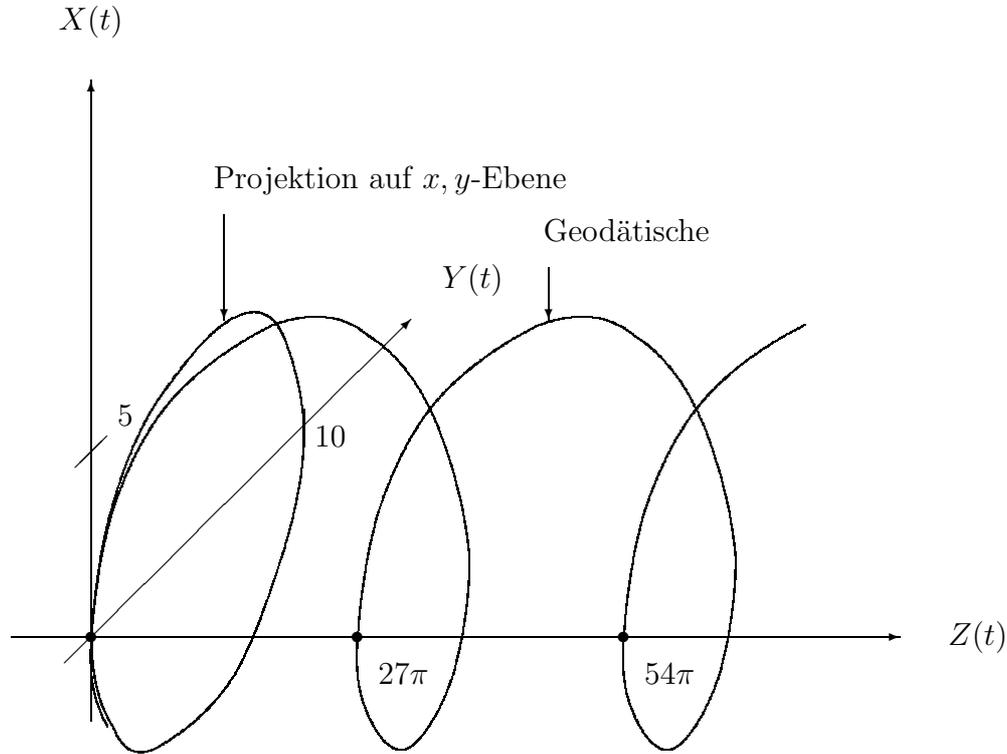
$$c(t) = \exp(X(t)p_1 + Y(t)q_1 + Z(t)\hbar)$$

In diesen Koordinaten können wir unter Benutzung der Formel von Baker-Campbell-Hausdorff (hier  $\exp x \exp y = \exp(x + y + \frac{1}{2}[x, y])$ ) die Erhaltungsgrößen ausdrücken.

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_n &= \langle \dot{c}(t), Tr_{c(t)}(n) \rangle \\ &= \langle Tl_{c(t)^{-1}}\dot{c}(t), \underbrace{Tl_{c(t)^{-1}}Tr_{c(t)}(n)}_{=Ad(c(t)^{-1})} \rangle \\ &= \langle \dot{X}(t)p_1 + \dot{Y}(t)q_1 + \dot{Z}(t)\hbar - \frac{1}{2}X(t)\dot{Y}(t)\hbar + \frac{1}{2}Y(t)\dot{X}(t)\hbar, \\ &\quad Ad(c(t)^{-1})(n) \rangle \end{aligned}$$

Nun ist  $Ad(\exp(x)) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \text{ad}(x)^i = \text{id} + \text{ad}(x)$ .

Abbildung II.1: Eine minimale Geodätische auf  $H_3$  bezüglich der gegebenen Metrik mit  $P_{q_1} = 0$  und  $P_{p_1} = 5P_{\hbar}$



Setzen wir  $n := \hbar$ , so erhalten wir

$$\dot{Z}(t) - \frac{1}{2}X(t)\dot{Y}(t) + \frac{1}{2}Y(t)\dot{X}(t) = \mathcal{P}_{\hbar}$$

und ähnlich für  $n := p_1$  und  $n := q_1$

$$\dot{X}(t) + \mathcal{P}_{\hbar}Y(t) = \mathcal{P}_{p_1}$$

$$\dot{Y}(t) - \mathcal{P}_{\hbar}X(t) = \mathcal{P}_{q_1}.$$

Wir erhalten ein System von Differentialgleichungen für  $X, Y, Z$  mit den Anfangsbedingungen  $X(0) = Y(0) = Z(0) = 0$ . Mit elementaren Methoden erhält man für

$\mathcal{P}_{\hbar} \neq 0$  die Lösung

$$\begin{aligned} X(t) &= -\frac{\mathcal{P}_{q_1}}{\mathcal{P}_{\hbar}}(1 - \cos \mathcal{P}_{\hbar}t) + \frac{\mathcal{P}_{p_1}}{\mathcal{P}_{\hbar}}(\sin \mathcal{P}_{\hbar}t) \\ Y(t) &= \frac{\mathcal{P}_{q_1}}{\mathcal{P}_{\hbar}}(\sin \mathcal{P}_{\hbar}t) + \frac{\mathcal{P}_{p_1}}{\mathcal{P}_{\hbar}}(1 - \cos \mathcal{P}_{\hbar}t) \\ Z(t) &= \mathcal{P}_{\hbar} \left( t + \frac{\mathcal{P}_{q_1}^2 + \mathcal{P}_{p_1}^2}{2\mathcal{P}_{\hbar}^2} \left( t - \frac{1}{\mathcal{P}_{\hbar}} \sin \mathcal{P}_{\hbar}t \right) \right) \end{aligned}$$

und für  $\mathcal{P}_{\hbar} = 0$

$$X(t) = \mathcal{P}_{p_1}t, \quad Y(t) = \mathcal{P}_{q_1}t, \quad Z(t) = 0.$$

Die so erhaltenen Gleichungen sind ein Spezialfall der Gleichungen in Proposition (3.5) in [Eberlein], die Patrick Eberlein ohne die Verwendung der Noetherschen Erhaltungsgrößen, sondern durch elementare Berechnung des Zusammenhangs erhält. Der in [Eberlein] behandelte allgemeinere Fall einer beliebigen 2-stufig nilpotenten Lie-Gruppe mit beliebiger linksinvarianter Metrik kann analog mit den Erhaltungsgrößen gelöst werden.

Im Fall  $\mathcal{P}_{\hbar} = 0$  auf  $H_3$  ist also  $\log \circ c$  eine Gerade in der  $p_1, q_1$ -Ebene. Da die Projektion  $P_{\frac{H_3}{H_3^2}}: H_3 \rightarrow \frac{H_3}{H_3^2}$  eine riemannsche Submersion ist und  $\hbar$  in dessen Kern liegt, kann man leicht zeigen, daß diese Geodätischen minimal sind. In Abschnitt IV.2 werden wir zeigen, daß umgekehrt die Geodätischen mit  $\mathcal{P}_{\hbar} \neq 0$  nicht minimal sind. In diesem Fall bildet  $P_{\frac{H_3}{H_3^2}}$  die Geodätische auf einen Kreis ab.

Man kann sogar zeigen, daß  $c|_{[a,b]}$  genau dann minimal ist, wenn  $P_{\frac{H_3}{H_3^2}} \circ c|_{[a,b]}$  injektiv ist; d.h. sobald mehr als ein Umlauf gemacht wird, verliert die Geodätische ihre Minimalität.

## 5. Wachstum in Kommutatorrichtungen

Wir wollen in diesem Abschnitt das Wachstum der Bälle auf nilpotenten Lie-Gruppen untersuchen. Das Ziel ist zu zeigen, daß ein Ball mit festem Mittelpunkt und wachsendem Radius  $r$  in Kommutatorrichtung schneller als  $r$  wächst, und zwar in  $G^2$ -Richtung quadratisch in  $r$ , in  $G^3$ -Richtung kubisch, u.s.w.. Der vorgestellte Beweis benutzt nur elementare Hilfsmittel.

Die Proposition in [Pansu] (62) macht eine ähnliche Aussage, wird jedoch anders bewiesen. Pansu arbeitet mit Hilfe eines Limesraums im Sinne des Hausdorff-Limes.

Ein wichtiges Korollar der folgenden Ergebnisse ist die Abschätzung des Volumenwachstums. Im Fall, daß die Lie-Gruppe ein Gitter enthält, sind die Volumenwachstumsabschätzungen äquivalent zu gut untersuchten Wachstumsabschätzungen von endlich erzeugten, nilpotenten Gruppen. Letzteres wird im folgenden Abschnitt untersucht.

In diesem Abschnitt sei  $G$  eine  $\kappa$ -stufig nilpotente, einfach zusammenhängende Lie-Gruppe mit einer riemannschen Metrik  $\langle, \rangle$ , die nach oben und unten durch eine linksinvariante Metrik abgeschätzt werden kann, d.h. es gibt Konstanten  $K_{O_1}, K_{O_2} > 0$  und eine linksinvariante Metrik  $\langle, \rangle^l$ , so daß

$$K_{O_1} \langle x, x \rangle^l \leq \langle x, x \rangle \leq K_{O_2} \langle x, x \rangle^l$$

für alle  $x \in TG$ . Beispiele derartiger Metriken  $\langle, \rangle$  sind Metriken, die invariant unter Linksmultiplikation mit einem Gitter sind. Die zu  $\langle, \rangle$  gehörige Abstandsfunktion auf  $G$  nennen wir  $d$ .

Weiter sei  $n_i = \dim \mathfrak{g}^i$ . Man wähle eine Basis  $e_1, \dots, e_{n_1}$  von  $\mathfrak{g}$ , so daß  $e_1, \dots, e_{n_j}$  eine Basis von  $\mathfrak{g}^j$  bildet für  $j = 1, \dots, \kappa$ . Der Grad  $\deg(i)$  sei das größte  $m \in \mathbb{N}$ , so daß  $e_i \in \mathfrak{g}^m$  ist. Wir definieren

$$W_R = \left\{ \sum_{i=1}^{\dim \mathfrak{g}} x_i e_i \mid |x_i| < R^{\deg(i)} \right\} \subset \mathfrak{g}$$

$$B_R = \left\{ g \in G \mid d(g, e) < R \right\}.$$

**Satz 5.1.** *Es gibt Konstanten  $C, C', K > 0$ , so daß gilt*

$$\exp(W_{CR}) \subset B_R \subset \exp(W_{C'R+K}).$$

BEWEIS: Da die Metrik  $\langle, \rangle$  nach oben und unten durch eine linksinvariante Metrik abgeschätzt werden kann, können wir für beide Inklusionen o.B.d.A. annehmen, daß  $\langle, \rangle$  linksinvariant ist. Durch das Gram-Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren kann man auch erreichen, daß die  $e_i$  eine Orthonormalbasis bilden.

Für  $\exp(W_{CR}) \subset B_R$  zeigen wir, daß es ein  $C_0 > 0$  gibt, so daß für alle  $x_i \in W_1 \cap \mathfrak{g}^i$  und für alle  $t \in \mathbb{R}_0^+$  gilt

$$d((\exp tx_1 + t^2 x_2 + \dots + t^k x_k), e) \leq C_0 t.$$

Spezialfall:  $x_2 = \dots = x_\kappa = 0$

$$c : [0, t_0] \rightarrow G, c(t) := \exp tx$$

ist eine Kurve von  $e$  nach  $\exp t_0 x$  der Länge  $t_0 \|x\|$ .

Beweisidee des allgemeinen Falls:

Um ein besseres Verständnis des Beweises zu ermöglichen, beschränken wir uns zunächst auf den Spezialfall, daß  $G = H_3$  ist. Den allgemeinen Fall beweist man ähnlich, die Darstellung ist jedoch formal weniger durchsichtig.

Es gilt für alle  $x, y \in \mathfrak{h}_3$ ,  $t \in \mathbb{R}_0^+$ :

$$\exp t^2[x, y] = \exp[tx, ty] = \left[ \exp tx, \exp ty \right]_{Gr}.$$

Aufgrund der Linksinvarianz der Metrik folgt dann

$$\begin{aligned} d(\exp(t^2[x, y]), e) &= d\left(\left[ \exp tx, \exp ty \right]_{Gr}, e\right) \\ &\leq 2d(\exp tx, e) + 2d(\exp ty, e) \\ &\leq \text{konst} \cdot t \end{aligned}$$

Da die Kommutatorgruppe 1-dimensional ist, folgt obige Abschätzung für diesen Spezialfall.

Allgemeiner Fall:

Man wähle das kleinste  $j \in \{0, \dots, \kappa\}$ , für das es eine Konstante  $C_1 > 0$  gibt, so daß für alle  $(x_1, \dots, x_\kappa) \in (W_1 \cap \mathfrak{g}^1) \times \dots \times (W_1 \cap \mathfrak{g}^\kappa)$  mit  $x_n = 0$  für  $n \leq j$  und für alle  $t \in \mathbb{R}_0^+$  gilt

$$d\left(\exp(tx_1 + t^2x_2 + \dots + t^\kappa x_\kappa), e\right) \leq C_1 t.$$

(Ein derartiges  $j$  existiert, da die Aussage für  $j := \kappa$  trivial ist.)

Wir wollen zeigen, daß  $j = 0$  ist. Hierzu nehmen wir  $j > 0$  an und zeigen, daß die Abschätzung auch für  $j' = j - 1$  gilt.

Seien  $(x_1, \dots, x_\kappa) \in (W_1 \cap \mathfrak{g}^1) \times \dots \times (W_1 \cap \mathfrak{g}^\kappa)$  gegeben mit  $x_n = 0$  für  $n < j$ . Sei  $S_l$  die Menge aller Abbildungen von  $\{1, \dots, l\}$  nach  $\{1, \dots, \dim \mathfrak{g}\}$ . Dann gibt es für jedes  $x_l \in \mathfrak{g}^l$  Koeffizienten  $a_s \in \mathbb{R}$ , so daß

$$x_l = \sum_{s \in S_l} a_s \underbrace{[\dots]_{l-1}}_{l-1} [e_{s(1)}, e_{s(2)}, \dots, e_{s(l)}].$$

Die Mengen  $S_l$  sind für verschiedenes  $l$  verschieden, und wir können jedem Element

$s \in S := \bigcup_{i \geq j} S_l$  die Zahl  $l(s)$  zuordnen mit  $s \in S_{l(s)}$ . Wir erhalten

$$\exp\left(t^j x_j + t^{j+1} x_{j+1} + \dots + t^\kappa x_\kappa\right) = \exp\left(\sum_{s \in S} a_s [\dots [te_{s(1)}, te_{s(2)}], \dots, te_{s(l(s))}]\right).$$

Wir wollen nun die Summe aus der Exponentialfunktion herausziehen. Wir erhalten ein Produkt und Störterme in höherer Kommutatorrichtung: genauer folgt mit der Formel von Baker-Campbell-Hausdorff (ähnlich wie in der Herleitung von Lemma 1.3), daß es  $v_{j+1} \in \mathfrak{g}^{j+1}, \dots, v_\kappa \in \mathfrak{g}^\kappa$  gibt mit

$$\begin{aligned} & \exp\left(\sum_{s \in S} a_s [\dots [te_{s(1)}, te_{s(2)}], \dots, te_{s(l)}]\right) \\ &= \prod_{s \in S} \left[ \dots [\exp(ta_s e_{s(1)}), \exp(te_{s(2)})]_{Gr}, \dots, \exp(te_{s(l(s))}) \right]_{Gr} \\ & \quad \cdot \exp\left(v_{j+1} t^{j+1} + \dots + v_\kappa t^\kappa\right) \end{aligned}$$

Die  $v_i$  sind hierbei „Lie-Klammer-Polynome“ in den Basisvektoren  $e_r$  mit Koeffizienten, die Polynome in den  $a_s$  sind. Da die  $a_s$  von den gegebenen  $x_i$  abhängen, hängen auch die  $v_i$  von den  $x_r$  ab. Es gibt jedoch eine Konstante  $C_2 > 0$ , so daß für alle Tupel

$$(x_j, \dots, x_\kappa) \in (W_1 \cap \mathfrak{g}^j) \times \dots \times (W_1 \cap \mathfrak{g}^\kappa)$$

die Koeffizienten  $a_s$  mit Betrag kleiner  $C_2$  gewählt werden können, also ist die Länge der  $v_i$  durch eine Konstante  $C_3 > 0$  nach oben beschränkt. Somit gibt es aufgrund der Wahl von  $j$  es eine Konstante  $C_4$  mit

$$d\left(\exp\left(v_{j+1} t^{j+1} + \dots + v_\kappa t^\kappa\right), e\right) < C_4 t.$$

Die Störterme bleiben also genügend klein. Um die Länge des obigen Gruppenkommutators abzuschätzen, schreiben wir die Kommutatoren als Produkt aus und nutzen den obigen Spezialfall und erhalten dann, daß

$$\begin{aligned} & d\left(\left[ \dots [\exp(ta_s e_{s(1)}), \exp(te_{s(2)})]_{Gr}, \dots, \exp(te_{s(l(s))}) \right]_{Gr}, e\right) \\ & \leq t^{2^{\kappa-1}} \max\{|a_s|, 1\} \cdot \dim \mathfrak{g} \end{aligned}$$

gilt. Aus der Linksinvarianz der Metrik und der Beschränktheit der  $a_s$  erhalten wir also eine Konstante  $C'_1$ , so daß für alle  $(x_1, \dots, x_\kappa) \in (W_1 \cap \mathfrak{g}^1) \times \dots \times (W_1 \cap \mathfrak{g}^\kappa)$  mit  $x_n = 0$  für  $n \leq j-1$  und für alle  $t \in \mathbb{R}_0^+$  gilt

$$d\left(\exp(tx_1 + t^2 x_2 + \dots + t^\kappa x_\kappa), e\right) \leq C'_1 t.$$

Die Annahme  $j > 0$  ist deswegen zum Widerspruch geführt und wir haben nun  $\exp(W_{CR}) \subset B_R$ .

Die Inklusion  $B_R \subset \exp(W_{C'R+K})$ :

Für diese Inklusion betrachten wir eine nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische mit  $c(0) = e$ . Wir schreiben

$$c(t) = \exp(a_1(t)e_1 + \dots + a_{n_1}(t)e_{n_1}).$$

Durch Induktion über  $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  zeigen wir: für alle  $i \in \{1, \dots, n_1\}$  mit  $i > n_{j+1}$  ( $\Leftrightarrow \deg(i) \leq j$ ) gilt

$$|a_i(t)| \leq C_j t^j + K_j \quad \text{und} \quad |\dot{a}_i(t)| \leq C_j t^{j-1} + K_j$$

für Konstanten  $C_j, K_j > 0$ , die nicht von  $c$  abhängen.

Die Aussage ist trivial für  $j = 0$ , da es keine  $i > n_1$  gibt. Sie gelte nun für ein gegebenes  $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Wir nehmen ein  $i$  mit  $\deg(i) = j + 1$ . Da die Geodätische nach Bogenlänge parametrisiert ist, gilt

$$|\langle T_{c(t)} l_{c(t)^{-1}} \dot{c}(t), e_i \rangle| \leq 1.$$

Nun ist  $[e_r, e_s] \in \mathfrak{g}^{\deg r + \deg s}$ . Mit der Formel von Baker-Campbell-Hausdorff (Theorem 1.1) und der Jacobi-Identität folgt, daß es Koeffizienten  $b_{r_1 \dots r_k}$  gibt, die nur von der Lie-Algebren-Struktur abhängen, so daß

$$\begin{aligned} \langle e_i, T_{c(t)} l_{c(t)^{-1}} \dot{c}(t) \rangle &= \dot{a}_i(t) + \sum_{\substack{r_1, r_2 \\ \deg r_1 + \deg r_2 \leq j+1}} b_{r_1 r_2} \langle [a_{r_1}(t)e_{r_1}, \dot{a}_{r_2}(t)e_{r_2}], e_i \rangle \\ &+ \sum_{\substack{r_1, r_2, r_3 \\ \deg r_1 + \deg r_2 + \deg r_3 \leq j+1}} b_{r_1 r_2 r_3} \langle [a_{r_1}(t)e_{r_1}, [a_{r_2}(t)e_{r_2}, \dot{a}_{r_3}(t)e_{r_3}]], e_i \rangle \\ &+ \dots \end{aligned}$$

gilt. Es folgt aus der Induktionsvoraussetzung, daß

$$\begin{aligned} |\dot{a}_i(t)| &\leq 1 + \sum |b_{r_1 \dots r_k}| |a_{r_1}| \dots |a_{r_{s-1}}| |\dot{a}_{r_s}| \left\| [e_{r_1}, \dots, [e_{r_{s-1}}, e_{r_s}] \dots] \right\| \\ &\leq C_{j+1} t^j + K_{j+1} \end{aligned}$$

für geeignete  $C_{j+1}$  und  $K_{j+1}$ , die nicht von  $c$  abhängen; wir können  $C_{j+1}$  und  $K_{j+1}$  sogar so groß wählen, daß auch  $|a_i(t)| \leq C_{j+1} t^{j+1} + K_{j+1}$ .  $\square$

Aus diesem Satz erhalten wir zwei Korollare

**Korollar 5.2** (Lemma über das Längenwachstum in Kommutatorrichtung). *Die  $\kappa$ -stufig nilpotente Lie-Gruppe  $G$  sei mit einer Metrik versehen, die nach oben und*

unten durch eine linksinvariante Metrik abgeschätzt werden kann. Dann gibt es für alle  $x \in \mathfrak{g}^j$  ein  $C(j, x) \in \mathbb{R}$  mit

$$d(g, g \cdot \exp tx) \leq C(j, x) \cdot t^{(1/j)} \quad \forall g \in G, \quad \forall t \geq 0.$$

□

**Korollar 5.3.** Für eine riemannsche Mannigfaltigkeit, deren Metrik nach oben und unten durch eine linksinvariante Metrik abgeschätzt werden kann, gibt es Konstanten  $K_1, K_2, K_3 > 0$ , so daß für  $p := \sum_{i=1}^{\dim \mathfrak{g}} \deg(i) = \sum_{j=1}^{\kappa} \dim \mathfrak{g}^j$  gilt

$$K_1 R^p \leq \text{vol}(B_R) \leq K_2 R^p + K_3.$$

BEWEIS VON KOROLLAR 5.3: Wir können wieder ohne Einschränkung annehmen, daß die riemannsche Metrik linksinvariant ist. Die Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$  sei mit dem Skalarprodukt von  $T_e G$  versehen. Die Abbildung  $\text{ad}(x)$  zu einem  $x \in \mathfrak{g}$  schreibt sich in der Basis  $e_1, \dots, e_{n_1}$  als eine obere Dreiecksmatrix mit Nullen auf der Diagonalen. Mit der Formel von Baker-Campbell-Hausdorff sieht man nun, daß für jedes  $g \in G$  die lineare Abbildung  $T_g \log \circ T_e l_g \circ T_e \exp$  in der Basis  $e_1, \dots, e_{n_1}$  durch eine obere Dreiecksmatrix mit Nullen auf der Diagonalen dargestellt wird. Also ist die Exponentialabbildung volumenerhaltend. Deswegen wächst  $\text{vol}(B_R)$  wie  $\text{vol}(W_R)$ . □

BEMERKUNG 5.4. Man kann die Korollare noch verbessern: der Beweis von [Pansu] (62) zeigt, daß

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d(g, g \exp tx) t^{-\frac{1}{j}}$$

existiert, und in [Pansu] (51) wird gezeigt, daß auch

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \text{vol}(B_R) R^{-p}$$

immer existiert.

## 6. Polynomiales Wachstum

In diesem Abschnitt betrachten wir das diskrete Analogon des Wachstumsverhaltens im letzten Abschnitt. Wir definieren hierzu zuerst, was polynomiales Gruppenwachstum auf einer endlich erzeugten Gruppe bedeutet, erörtern dann welche Gruppen polynomial wachsen und zeigen den Bezug zum Volumenwachstum auf kompakten Mannigfaltigkeiten auf. Wir nutzen hier die in Anhang A dargestellten Längennormen. Die Ergebnisse findet man in [Gromov1],[Tits] und [Pansu] aus den Jahren

1981 bis 1983. Frühere Veröffentlichungen (von 1968 bis 1971) enthalten nur Teile der Theorie ([Wolf],[Milnor],[Bass]), da Gromovs Methode, den in [Gromov1] konstruierten Limesraum zu betrachten, noch nicht bekannt war. In dieser Arbeit werden wir auch nur die Ergebnisse der früheren Veröffentlichungen beweisen, um die Einführung dieses Limesraums zu vermeiden. Unsere hier dargestellten Beweise arbeiten jedoch mit „kontinuierlichen“ Methoden unter Benutzung der Ergebnisse des letzten Abschnitts, wohingegen die Beweise in den obigen Veröffentlichungen „diskret“ vorgehen. Einen sehr eleganten Beweis, der mit diskreten Methoden arbeitet, findet man im Anhang von J. Tits zu [Gromov1].

Die endlich erzeugte Gruppe  $\Gamma$  sei zunächst mit einer beliebigen Längennorm versehen. Wir definieren

$$B_R := \{\gamma \in \Gamma \mid |\gamma| \leq R\}.$$

DEFINITION 6.1.  $\Gamma$  wächst *polynomial*, wenn es ein Polynom  $P$  gibt, so daß

$$\#B_R \leq P(R).$$

Den minimalen Grad aller derartiger  $P$  nennen wir den *Wachstumsgrad*.

Mit Proposition A.5 sieht man sofort, daß diese Definition nicht von der Wahl der Längennorm abhängt.

Offensichtlich wachsen endlich erzeugte, abelsche Gruppen polynomial. Hingegen wachsen freie Gruppen von Rang  $> 1$  schneller. In der Gruppe  $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ , dem freien Produkt von  $\mathbb{Z}$  und  $\mathbb{Z}$ , gilt bezüglich der Wortlängennorm in bezug auf die Standardgeneratoren

$$\#B_R = 2 \cdot 3^R - 1 \quad \forall R \in \mathbb{N},$$

sie wächst also nicht polynomial.

Man stellt sich nun die Frage, wo der Übergang zwischen polynomialem und nicht polynomialem Wachstum liegt, bzw. welche algebraischen Eigenschaften die polynomial wachsenden Gruppen haben.

Sei  $\Gamma$  die Fundamentalgruppe einer kompakten riemannschen Mannigfaltigkeit  $M$  mit universeller Überlagerung  $\tilde{M}$ . Dann ist  $\Gamma$  endlich erzeugt. Durch Wahl eines Fundamentalbereichs (meßbar, mit endlichem Durchmesser) zeigt man leicht, daß  $\Gamma$  genau dann polynomial mit Wachstumsgrad  $p$  wächst, wenn es auch ein Polynom  $P$  vom Grade  $p$  gibt, so daß das Volumen des Balls um ein  $m_0 \in \tilde{M}$  mit Radius  $R$  um einen festen Punkt durch  $P(R)$  beschränkt ist; man verwende hierzu die von der riemannschen Metrik induzierte Längennorm auf  $\Gamma$  (Beispiel A.3 Punkt 5.) und die Äquivalenz von Längennormen (Proposition A.5).

Ist  $\Gamma$  nun eine torsionsfreie, endlich erzeugte, nilpotente Gruppe, so können wir sie mit Satz 2.7 als Gitter in eine einfach zusammenhängende, nilpotente Lie-Gruppe  $G$  einbetten. Mit Korollar 5.3 erhalten wir also, daß  $\Gamma$  polynomial wächst. Der Grad des Wachstums berechnet sich mit diesem Korollar als  $p := \sum_{j=1}^{\kappa} \dim \mathfrak{g}^j$ .

Dieser läßt sich auch gruppentheoretisch ausdrücken. Die Gruppe  $\Gamma^j$  ist ein Gitter in  $G^j$ . Sei  $r_i$  der Rang der abelschen Gruppe  $\frac{\Gamma^i}{\Gamma^{i+1}}$ . Nach Theorem 2.11 ist dann

$$\dim \mathfrak{g}^j = \dim G^j = \sum_{i=j}^{\kappa} r_i$$

und hieraus folgt

$$p = \sum_{i=1}^{\kappa} i r_i.$$

Alle torsionsfreien, endlich erzeugten, nilpotenten Gruppen wachsen also polynomial.

Es gibt einige einfache Methoden, aus Gruppen mit polynomialem Wachstum neue Gruppen mit polynomialem Wachstum zu erhalten.

#### BEMERKUNGEN 6.2.

- (1) Eine endlich erzeugte Untergruppe einer polynomial wachsenden Gruppe wächst polynomial mit nicht größerem Wachstumsgrad, denn die endlich vielen Erzeuger der Untergruppe können (trivialerweise) zu einem endlichen Erzeugendensystem der ganzen Gruppe ergänzt werden.
- (2) Ein Quotient einer polynomial wachsenden Gruppe wächst polynomial mit nicht größerem Wachstumsgrad.
- (3) Sei  $H$  endlich erzeugt und Untergruppe mit endlichem Index von  $\Gamma$ . Dann ist auch  $\Gamma$  endlich erzeugt. Wenn  $H$  polynomial mit Wachstumsgrad  $p$  wächst, so wächst auch  $\Gamma$  polynomial mit Wachstumsgrad  $p$ . Um dies zu zeigen, betrachtet man eine beliebige Längennorm auf  $\Gamma$ ; die Restriktion auf  $H$  ist eine Längennorm auf  $H$  (Proposition A.6).
- (4) Das direkte Produkt polynomial wachsender Gruppen wächst ebenfalls polynomial. Der Wachstumsgrad des Produkts ist die Summe der Wachstumsgrade der Faktoren.

Wir formulieren nun noch einen Hilfssatz:

**Hilfssatz 6.3** ([Hall] Corollary 7.2.1). *Sei  $\Gamma$  eine Gruppe und  $H$  eine Untergruppe mit endlichem Index.  $\Gamma$  ist genau dann endlich erzeugt, wenn  $H$  endlich erzeugt ist.*

In [Massey1] Section VII.7 wird ein Beweis für den Fall, daß  $\Gamma$  eine freie Gruppe ist, gegeben. Dieser Beweis soll jetzt kurz skizziert werden. Danach wird durch ein kurzes Argument begründet, wieso der Hilfssatz auch für beliebige endlich erzeugte  $\Gamma$  gilt.

BEWEIS: Wenn  $H$  endlich erzeugt ist, so ist natürlich auch  $\Gamma$  endlich erzeugt.

Die Umkehrung zeigen wir zunächst für den Fall, daß  $\Gamma$  eine freie Gruppe ist. Die Gruppe  $\Gamma$  sei also die freie Gruppe von Rang  $n$ . Wir nehmen nun  $n$  Kopien der  $S^1$  und kleben sie in einem Punkt zusammen. Wir erhalten einen kompakten Graphen mit Fundamentalgruppe  $\Gamma$ . Dann ist  $H$  die Fundamentalgruppe einer endlichen Überlagerung von diesem Graphen und somit die Fundamentalgruppe eines kompakten Graphens, also ebenfalls endlich erzeugt.

Sei nun  $\Gamma$  beliebig. Dann gibt es eine endlich erzeugte freie Gruppe  $\Gamma'$  und einen Gruppenepimorphismus  $\pi: \Gamma' \rightarrow \Gamma$ , so daß die kanonischen Erzeuger von  $\Gamma'$  auf ein Erzeugendensystem von  $\Gamma$  abgebildet werden. Die Gruppe  $\pi^{-1}(H)$  hat endlichen Index in  $\Gamma'$  und ist somit endlich erzeugt, also auch  $H$ .  $\square$

Mit diesen Hilfsmitteln zeigen wir den folgenden Satz:

**Satz 6.4** ([Wolf],[Bass]). *Eine endlich erzeugte Gruppe  $\Gamma$  enthalte eine nilpotente Untergruppe  $H$  von endlichem Index. Dann wächst  $\Gamma$  polynomial. Der Wachstumsgrad berechnet sich als  $\sum_i ir_i$ , wobei  $r_i$  der Rang der abelschen Gruppe  $\frac{H^i}{H^{i+1}}$  ist.*

BEWEIS: Wir betten  $H$  mit Theorem 1.5 als Untergruppe von endlichem Index in ein direktes Produkt  $D = A \times B$  ein, wobei  $A$  eine endliche, nilpotente Gruppe und  $B$  eine torsionsfreie, nilpotente, endlich erzeugte Gruppe ist. Weil  $A$  endlich ist, wächst sie polynomial mit Wachstumsgrad 0. Da  $B$  polynomial wächst, wächst auch  $H$  und somit  $\Gamma$  polynomial.

Sei  $T$  die Torsionsgruppe von  $H$ . Dann ist ohne Einschränkung  $B$  der Quotient von  $H$  durch  $T$ , also auch  $B^i$  der Quotient von  $H^i$  durch  $T \cap H^i$ . Dann ist

$$\frac{H^i}{H^{i+1}} \twoheadrightarrow \frac{B^i}{B^{i+1}}$$

ein wohldefinierter surjektiver Homomorphismus abelscher Gruppen und hat nur Torsionselemente im Kern; also gilt

$$\text{rang } \frac{B^i}{B^{i+1}} = \text{rang } \frac{H^i}{H^{i+1}} = r_i.$$

Der Wachstumsgrad von  $\Gamma$  ist nach den obigen Bemerkungen gleich dem Wachstumsgrad von  $B$ , also  $\sum_{i=1}^{\kappa} ir_i$ .  $\square$

Es gilt auch die Umkehrung des obigen Satzes, die wir hier nicht zeigen wollen. Zum Beweis multipliziert Gromov die riemannsche Metrik mit einer Zahl  $\epsilon$  und betrachtet den Hausdorff-Limes für den Grenzübergang  $\epsilon \rightarrow 0$ .

**Satz 6.5** ([Gromov1]). *Eine endlich erzeugte, polynomial wachsende Gruppe  $\Gamma$  enthält eine nilpotente Untergruppe von endlichem Index.*

## Der asymptotische Limes

### 1. Lie-Algebren-wertige 1-Formen und Lie-Stammfunktionen

Die ersten beiden Abschnitte dieses Kapitels beruhen vor allem auf [BeMi]. Für die Definition der äußeren Ableitung benutzen wir die Normierung aus dem Buch [Warner]. Sie unterscheidet sich für  $r$ -Formen um einen Faktor  $r!$  von der Normierung aus [KoNo]. Hieraus resultiert auch eine unterschiedliche Normierung der Krümmungs-2-Form  $\Omega$ .

DEFINITION 1.1. Sei  $G$  eine einfach zusammenhängende, nilpotente Lie-Gruppe mit Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$ . Für jede stückweise glatte Kurve  $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathfrak{g}$  gibt es genau eine Kurve  $k: [a, b] \rightarrow G$  mit  $k(a) = e$  und

$$\dot{k}(t) = T_e l_{k(t)}(\alpha(t)).$$

Wir notieren dann

$$\int_L^b \alpha := k(b).$$

Gegeben sei nun eine  $\mathfrak{g}$ -wertige 1-Form  $\omega$  auf der Mannigfaltigkeit  $M$ , d.h. eine faserweise lineare  $C^\infty$ -Funktion

$$\omega: TM \rightarrow \mathfrak{g}.$$

Zu einer Kurve  $c: [a, b] \rightarrow M$  definieren wir das *Lie-Integral von  $\omega$  längs  $c$*

$$\int_L^b \omega := \int_L^b \omega(\dot{c}).$$

ANMERKUNG 1.2. Wenn  $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathfrak{g}$  sogar glatt ist, so können wir eine  $\mathfrak{g}$ -wertige 1-Form  $\omega_\alpha: T[a, b] \rightarrow \mathfrak{g}$  auf  $[a, b]$  durch

$$\omega_\alpha\left(\lambda \frac{\partial}{\partial t} \Big|_t\right) = \lambda \alpha(t) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

definieren. Wenn wir  $M = [a, b]$  und  $c := \text{id}|_{[a, b]}$  setzen, so gilt  $\omega_\alpha(\dot{c}) = \alpha$  und somit

${}_L\int_a^b \alpha = {}_L\int_c \omega_\alpha$ . Wir wollen im folgenden alle Kurven  $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathfrak{g}$  mit dem zugehörigen  $\omega_\alpha$  identifizieren. Die obige Überlegung zeigt, daß dies konsistent möglich ist.

Seien nun wieder  $M$  und  $c$  beliebig. Naheliegender ist nun die Frage, unter welcher Bedingung das Lie-Integral wegunabhängig ist, also wann

$${}_L\int_c \omega = {}_L\int_{\hat{c}} \omega$$

für zwei beliebige Wege  $c, \hat{c}$  mit gleichen Endpunkten gilt. Wir werden uns auch dafür interessieren, wann das Lie-Integral für alle homotopen Wege gleich ist. Wir betrachten zunächst den Fall, daß  $G$  und somit auch  $\mathfrak{g}$  abelsch ist. In diesem Fall können wir  $G$  als reellen Vektorraum für alle  $g \in G$  mit  $T_g G$  identifizieren, u.a. auch mit  $\mathfrak{g} = T_e G$ . Das Lie-Integral ist gerade das übliche vektorwertige Integral. Der Wert des Integrals ist genau dann wegunabhängig, wenn die zu integrierende Form  $\omega$  exakt ist, d.h. es gibt eine Funktion  $F: M \rightarrow G \cong \mathfrak{g}$  mit  $\omega = dF (= TF)$ . Der Wert hängt genau dann nur von der Homotopieklasse des Weges ab, wenn es lokal um jedes  $m_0 \in M$  ein derartiges  $F$  gibt; dies wiederum gilt genau dann, wenn  $\omega$  geschlossen ist. Im Falle nicht abelscher Lie-Gruppen und -algebren sollen diese Begriffe nun sinnvoll verallgemeinert werden. Die Rolle von „geschlossenen Formen“ werden im nicht-abelschen Fall die „flachen Formen“ spielen.

**DEFINITION 1.3.** Eine  $\mathfrak{g}$ -wertige 1-Form  $\omega$  auf  $M$  heißt *flach*, wenn  $[\omega, \omega] + d\omega = 0$  erfüllt ist. Ein Tupel  $(U, F)$ , bestehend aus einer offenen Teilmenge  $U$  von  $M$  und einer  $C^\infty$ -Funktion

$$F: U \rightarrow G$$

nennen wir (*lokale*) *Lie-Stammfunktion* von  $\omega$  (um  $u \in U$ ), wenn das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & T_q G & \\ T_q F \nearrow & \uparrow T_e l_{F(q)} & \\ T_q U & \xrightarrow{\omega} & T_e G \cong \mathfrak{g} \end{array}$$

für alle  $q \in U$  kommutiert. Ist  $U = M$ , so heißt  $F$  eine *globale Lie-Stammfunktion* von  $\omega$ .

Ist  $U$  zusammenhängend und sind  $(U, F)$  und  $(U, \tilde{F})$  zwei lokale Lie-Stammfunktionen von  $\omega$ , so gilt

$$\tilde{F}(q_0)^{-1} \tilde{F}(q) = F(q_0)^{-1} F(q).$$

Wir bezeichnen mit  $\theta$  die  $\mathfrak{g}$ -wertige 1-Form auf  $G$  mit

$$\theta|_q = T_q l_{q^{-1}};$$

es ist die *kanonische 1-Form auf  $G$  aus [KoNo]*. Dann ist  $(U, F)$  genau dann lokale Lie-Stammfunktion von  $\omega$ , wenn auf  $U$

$$F^*\theta = \omega$$

gilt.

**Proposition 1.4.**  *$\omega$  hat auf der offenen Menge  $U \subset M$  genau dann eine Lie-Stammfunktion, wenn für alle Wege  $c, \tilde{c}$  in  $U$  mit denselben Endpunkten gilt*

$$(1.1) \quad \int_c \omega = \int_{\tilde{c}} \omega.$$

BEWEIS: Wenn  $(U, F)$  eine Lie-Stammfunktion von  $\omega$  ist, so gilt für alle Kurven  $c: [a, b] \rightarrow U$

$$\int_c \omega = (F \circ c(a))^{-1} (F \circ c(b))$$

und somit ist  $\int_c \omega$  in  $U$  wegunabhängig.

Für die andere Richtung des Beweises sei o.B.d.A.  $U$  zusammenhängend. Wir nehmen an, es gelte (1.1) für alle Wege  $c, \tilde{c}$  in  $U$  mit denselben Endpunkten. Man wähle  $m_0 \in U$ . Ist  $c_m$  ein glatter Weg von  $m_0$  nach  $m$ , dann wird durch

$$\begin{array}{l} F: U \rightarrow G \\ m \mapsto \int_{c_m} \omega, \end{array}$$

auf  $U$  eine Lie-Stammfunktion definiert. □

**Folgerung 1.5.**  *$\omega$  hat genau dann eine globale (bzw. lokale) Lie-Stammfunktion, wenn*

$$\int_c \omega = \int_{\hat{c}} \omega$$

*für alle Wege  $c, \hat{c}$  mit denselben Endpunkten gilt (bzw. für alle homotopen Wege  $c, \tilde{c}$  bezüglich fester Endpunkte gilt).*

**Satz 1.6** (im wesentlichen [BeMi] Proposition 3.1). *Die  $\mathfrak{g}$ -wertige 1-Form  $\omega$  besitzt genau dann um jeden Punkt eine lokale Lie-Stammfunktion, wenn  $\omega$  flach ist.*

BEWEIS: „ $\Rightarrow$ “:

Diese Richtung kann elementar gezeigt werden. Wir betrachten zunächst den Spezialfall  $M = G$ ; die 1-Form  $\omega := \theta$  besitzt die globale Lie-Stammfunktion  $\text{id}$ . Mit [Warner] Proposition 2.25 wissen wir, daß für linksinvariante Vektorfelder  $X, Y$  auf  $G$  gilt

$$\begin{aligned} d\theta(X, Y) &= \underbrace{X(\theta(Y))}_0 - \underbrace{Y(\theta(X))}_0 - \theta([X, Y]) \\ &= -[\theta(X), \theta(Y)]. \end{aligned}$$

Somit gilt  $d\theta + [\theta, \theta] = 0$ , d.h.  $\theta$  ist flach.

Seien nun  $M$  und  $\omega$  beliebig und sei  $(U, F)$  eine lokale Lie-Stammfunktion von  $F$ . Dann haben wir

$$d\omega = F^*d\theta = -F^*[\theta, \theta] = -[F^*\theta, F^*\theta] = -[\omega, \omega].$$

„ $\Leftarrow$ “:

Für den Beweis dieser Richtung folge ich im wesentlichen [BeMi] Proposition 3.1. Wir nehmen an, daß  $\omega$  eine flache  $\mathfrak{g}$ -wertige 1-Form ist. Es gibt genau eine Zusammenhangs-1-Form  $\tilde{\omega}$  auf dem trivialen Rechtsprinzipalbüdel  $M \times G \rightarrow M$ , so daß für den Nullschnitt  $\sigma: M \rightarrow M \times G$  gilt  $\omega = \sigma^*\tilde{\omega}$  ([KoNo], Proposition II 1.4, die benötigte Bedingung ist trivial erfüllt, da wir nur eine vorgegebene  $\mathfrak{g}$ -wertige 1-Form haben).

Mit [KoNo] Theorem II 5.2 wissen wir, daß sich die Krümmungs-2-Form als

$$\Omega(X, Y) = d\tilde{\omega}(X, Y) + [\tilde{\omega}(X), \tilde{\omega}(Y)]$$

für  $X, Y \in T_u(M \times G)$ ,  $u \in M \times G$  schreiben läßt. Weil  $\omega$  flach ist, wissen wir, daß  $\sigma^*(\Omega) = 0$  ist, also  $\Omega(X, Y) = 0$  für horizontale  $X, Y$ . In die Definition der Zusammenhangs-2-Form  $\Omega$  ([KoNo] direkt über Theorem 5.2) geht nur der horizontale Anteil, nicht aber der vertikale Anteil von  $X$  und  $Y$  ein, d.h.  $\Omega \equiv 0$ .

Theorem II 9.1 aus [KoNo] besagt nun, daß  $M \times G$  bezüglich  $\tilde{\omega}$  flach ist, d.h. für jedes  $q \in M$  gibt es eine offene Umgebung  $U \subset M$  und eine Funktion  $F: U \rightarrow G$ , so daß für

$$\begin{aligned} P: U \times G &\rightarrow G \\ (u, g) &\mapsto F(u)g \end{aligned}$$

gilt:

$$\tilde{\omega} = P^*\theta$$

und somit haben wir

$$\omega = \sigma^* \tilde{\omega} = (P \circ \sigma)^* \theta = F^* \theta.$$

□

**Korollar 1.7.** *Ist  $M$  einfach zusammenhängend und  $\omega$  flach, dann besitzt  $\omega$  eine globale Lie-Stammfunktion.*

BEMERKUNG 1.8. Ist  $G$  bzw.  $\mathfrak{g}$  abelsch, so gehen die Begriffe „Stammfunktion“, „Integral von Kurven“, „Integral von 1-Formen“, u.s.w. in die gewohnten Begriffe über. Der Begriff „flache 1-Form“ geht in „geschlossene 1-Form“ über.

## 2. Der asymptotische Limes

Das Ziel dieses Abschnitts ist, manchen Kurven eine Invariante zuzuordnen, die mehr Information gibt als die Häufungspunkte des Rotationsvektors. Die zugrunde liegende Idee ist hierbei, die Objekte der Homologietheorie wie z.B. die (erste) Homologiegruppe durch Objekte der Homotopietheorie wie z.B. die Fundamentalgruppe zu ersetzen. Es gibt verschiedene Möglichkeiten, diese Erweiterung vorzunehmen.

Wir wollen uns hierbei auf einen „Richtungsbegriff“ beschränken, der bereits auf „kleine“ Bewegungen in Kommutatorrichtung reagiert. Für seine Definition sind einige Ideen aus [BeMi] sehr fruchtbringend. Obwohl der *asymptotische Limes* von Benardete und Mitchell keine Invariante der Kurve ist, können wir durch einen zweiten Grenzübergang wichtige Eigenschaften der minimalen Geodätischen auf unseren verallgemeinerten Hedlund-Beispielen beschreiben. Der somit erhaltene doppelte Limes ordnet hierbei Kurven Elemente in einer nilpotenten Lie-Gruppe zu. Benardete und Mitchell behandeln jedoch zu einem großen Teil nur den Fall des 2-stufigen asymptotischen Limes, während in dieser Diplomarbeit die Stufe beliebig sein soll.

Für einen etwas modifizierten Richtungsbegriff ließe sich eine zu den in Abschnitt I.2 dargestellten Bangertschen Ergebnissen weitgehend analoge Theorie aufstellen. Die stabile Norm auf der Homologiegruppe geht hierbei in eine Halbnorm auf einer nilpotenten Lie-Algebra über, wobei die Kommutatoralgebra die Menge aller Elemente mit Länge 0 ist; Stützebenen an den Einheitsball ergeben Stützebenen am Einheitszylinder. Die entsprechenden Sätze sind jedoch äquivalent zu den Sätzen in Abschnitt I.2 und geben deswegen keine neue Information über die minimalen Geodätischen. Auf eine genaue Formulierung soll deswegen verzichtet werden. Die im nächsten Kapitel konstruierten Hedlund-Beispiele zeigen auch, daß die Bangertschen Sätze in einem gewissen Sinn optimal sind und deswegen auch keine stärkeren Aussagen erwartet werden können.

Es gäbe aber auch noch andere Möglichkeiten, einen Richtungsbegriff einzuführen, der auch die Bewegung in Kommutatorrichtung mitberücksichtigt. Aus dem Blickwinkel der Ergebnisse von Pansu in [Pansu] erscheint ein weiterer Begriff natürlicher. Hierbei werden die nicht homologischen Richtungsanteile stärker kontrahiert als die homologischen. Er soll jedoch nicht näher untersucht werden, da die verstärkte Kontraktion die für minimale Geodätische interessanten Glieder klein werden läßt.

Wir wollen nun zunächst eine Konstruktion machen, die den in Abschnitt I.1 beschriebenen Übergang von  $\pi_1(M)$  nach  $H_1(M, \mathbb{Z})_{\mathbb{R}}$  verallgemeinert.

Sei  $\Pi := \pi_1(M, m_0)$  die Fundamentalgruppe der kompakten Mannigfaltigkeit  $M$  im Basispunkt  $m_0 \in M$ , und sei  $\sigma \in \mathbb{N}$  fest. Man sieht leicht, daß gilt

$$\left[ \frac{\Pi}{\Pi^{\sigma+1}}, \frac{\Pi^k}{\Pi^{\sigma+1}} \right]_{Gr} = \frac{\Pi^{k+1}}{\Pi^{\sigma+1}};$$

die Gruppe  $H_\sigma := \frac{\Pi}{\Pi^{\sigma+1}}$  ist somit nilpotent der Stufe  $\leq \sigma$ . Da  $\Pi$  die Fundamentalgruppe der kompakten Mannigfaltigkeit  $M$  ist, ist  $\Pi$  und damit auch  $H_\sigma$  endlich erzeugt.

Nach Korollar II.1.6 bilden die Torsionselemente in  $H_\sigma$  einen endlichen Normalteiler  $T_\sigma$ . Das volle Urbild von  $T_\sigma$  in  $\Pi$  nennen wir auch die *Wurzel*  $\sqrt{\Pi^{\sigma+1}}$  von  $\Pi^{\sigma+1}$ . Der Quotient  $\Gamma_\sigma := \frac{H_\sigma}{T_\sigma} = \frac{\Pi}{\sqrt{\Pi^{\sigma+1}}}$  ist somit eine endlich erzeugte, torsionsfreie, nilpotente Gruppe und läßt sich deswegen nach dem Satz von Malcev (II.2.7) als Gitter in eine bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte einfach zusammenhängende, nilpotente Lie-Gruppe  $G_\sigma$  einbetten.

Wir konstruieren nun analog zum Beweis von Theorem 3.1 ( $\Pi_1$  de Rham theorem) in [BeMi] eine Abbildung

$$F_\sigma: M \rightarrow \Gamma_\sigma \backslash G_\sigma.$$

Wir nennen  $F_\sigma$  eine *Richtungsabbildung* der Stufe  $\sigma$ . Man benötigt für die Konstruktion:

**Satz 2.1** ([Whitehe] Theorem V(4.3), Seite 225). *Sei  $K$  ein zusammenhängender CW-Komplex und  $X$  ein zusammenhängender Raum mit  $\pi_i(X, x_0) = 0$  für  $i > 1$ , dann ist  $[f] \mapsto f_\#$  eine wohldefinierte Bijektion von den Homotopieklassen der Abbildungen von  $(K, k_0)$  nach  $(X, x_0)$  auf die Homomorphismen von  $\pi_1(K, k_0)$  nach  $\pi_1(X, x_0)$ .*

Da die universelle Überlagerung einer nilpotenten Lie-Gruppe diffeomorph zum  $\mathbb{R}^n$  ist, liefert uns dieser Satz eine stetige Abbildung  $F_\sigma: M \rightarrow \Gamma_\sigma \backslash G_\sigma$  mit  $F_\sigma(m_0) = \Gamma_\sigma e =: \bar{e}$ , die mit [Hirsch] Chapter 2, Theorem 2.6 oder siehe Satz B.1.4 in dieser Diplomarbeit als  $C^\infty$  angenommen werden kann und die eine Projektion von  $\Pi$  auf

$\Gamma_\sigma = \pi_1(\Gamma_\sigma \setminus G_\sigma, \bar{e})$  mit Kern  $\sqrt{\Pi^{\sigma+1}}$  induziert.  $F_\sigma$  ist bis auf Homotopie eindeutig bestimmt.

Wir wollen die so erhaltenen Begriffe für verschiedene  $\sigma \in \mathbb{N}$  jetzt miteinander vergleichen. Seien hierfür natürliche Zahlen  $\sigma < \tau$  gegeben und zugehörige  $F_\sigma$  und  $F_\tau$  gewählt. Der kanonische Gruppen-Epimorphismus  $\Gamma_\tau \rightarrow \Gamma_\sigma$ , läßt sich eindeutig zu einem Lie-Gruppen-Epimorphismus  $P_{\sigma\tau}: G_\tau \rightarrow G_\sigma$  fortsetzen, der wiederum eine Abbildung

$$p_{\sigma\tau}: \Gamma_\tau \setminus G_\tau \rightarrow \Gamma_\sigma \setminus G_\sigma$$

ergibt. Aufgrund von  $(p_{\sigma\tau} \circ F_\tau)_\# = F_{\sigma\#}$  und obigem Satz sind  $p_{\sigma\tau} \circ F_\tau$  und  $F_\sigma$  homotop. Unter anderem ist auch  $p_{\sigma\tau} \circ F_\tau$  eine Richtungsabbildung der Stufe  $\sigma$ .

Mit den Ergebnissen und Bezeichnungen aus Abschnitt I.1 gibt es kanonische Isomorphismen  $\Gamma_1 \cong H_1(M, \mathbb{Z})_{\mathbb{R}}$  und somit  $G_1 \cong H_1(M, \mathbb{R})$ , und  $F_{1\#}$  entspricht gerade  $\phi_{Hom} \circ \phi_{Hur}$ . Wir wollen hier jedoch  $G_1$  nicht mit  $H_1(M, \mathbb{R})$  identifizieren, da dies im folgenden zu Unklarheiten führen könnte.

Die Abbildung  $F_\sigma$  kann noch (wie oben erwähnt) in der Homotopieklasse frei gewählt werden. Für das Verständnis des asymptotischen Limes ist es nützlich, diese Wahl von  $F_\sigma$  differentiell auszudrücken. Wir werden deswegen jeder  $\sigma$ -stufigen Richtungsabbildung  $F_\sigma$  eine flache  $\mathfrak{g}_\sigma$ -wertige 1-Form zuordnen, die eine „Zusatzbedingung“ erfüllt. Umgekehrt werden wir zu jeder flachen  $\mathfrak{g}_\sigma$ -wertigen 1-Form mit Zusatzbedingung eine  $\sigma$ -stufige Richtungsabbildung  $F_\sigma$  zuordnen. Diese beiden Konstruktionen sind dann in einem gewissen Sinne invers zueinander. Die konkrete Wahl der Abbildung  $F_\sigma$  entspricht also der Vorgabe einer flachen  $\mathfrak{g}_\sigma$ -wertigen 1-Form mit Zusatzbedingung. Die mathematische Ausformulierung der Äquivalenz des differentiellen Zugangs ist formal aufwendig. In [BeMi] wird wohl deswegen auf die differentielle Formulierung in der hier dargestellten Form verzichtet. Da jedoch in dieser Arbeit verdeutlicht werden soll, wie die Richtungsabbildung mit dem Rotationsvektor und den Sätzen in Abschnitt I.2 zusammenhängt, soll dieses Problem nun behandelt werden. Wir benutzen einen Hilfssatz, der sich aus den üblichen Definitionen der algebraischen Topologie trivial ergibt.

**Hilfssatz 2.2.** *Sei  $k := \dim H_1(M, \mathbb{R})$  und seien  $\omega_1, \dots, \omega_k$  geschlossene reellwertige 1-Formen auf  $M$ . Dann sind äquivalent:*

- (1)  $[\omega_1], \dots, [\omega_k]$  bilden eine Basis von  $H^1(M, \mathbb{R})$ ,
- (2) die Abbildung

$$H_1(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^k \quad v \mapsto \begin{pmatrix} [\omega_1](v) \\ \vdots \\ [\omega_k](v) \end{pmatrix}$$

ist ein Vektorraumisomorphismus,

(3)

$$\left\{ \int_{\gamma} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_k \end{pmatrix} \mid \gamma \in \Pi \right\}$$

ist ein Gitter in  $\mathbb{R}^k$ .

Von der Richtungsabbildung zur flachen Form:

Sei  $k := \dim H_1(M, \mathbb{R}) = \dim \mathfrak{g}$ . Wir wählen eine Basis  $\nu_1, \dots, \nu_k$  von  $\mathfrak{g}_1^*$ , dem Dualraum von  $\mathfrak{g}_1 = \frac{\mathfrak{g}_\sigma}{\mathfrak{g}_\sigma^2}$ . Sei eine Richtungsabbildung  $F_\sigma$  fest ausgewählt. Die im letzten Abschnitt definierte kanonische 1-Form  $\theta$  geht auf den Quotienten  $\Gamma_\sigma \backslash G_\sigma$  herunter und ergibt eine Funktion

$$\tilde{\theta}_\sigma: T(\Gamma_\sigma \backslash G_\sigma) \rightarrow \mathfrak{g}_\sigma.$$

Offensichtlich ist dann  $\omega := F_\sigma^* \tilde{\theta}_\sigma$  eine flache  $\mathfrak{g}_\sigma$ -wertige 1-Form auf  $M$ . Ebenso ist

$$(p_{1\sigma} \circ F_\sigma)^* \tilde{\theta}_1 = \tilde{\theta}_1 \circ T p_{1\sigma} \circ T F_\sigma$$

eine flache  $\mathfrak{g}_1$ -wertige 1-Form. Wir setzen

$$\omega_j := \nu_j \circ \tilde{\theta}_1 \circ T p_{1\sigma} \circ T F_\sigma$$

und erhalten somit insgesamt das kommutierende Diagramm

$$\begin{array}{ccc} T(\Gamma_\sigma \backslash G_\sigma) & \xrightarrow{T p_{1\sigma}} & T(\Gamma_1 \backslash G_1) \\ \nearrow T F_\sigma & \downarrow \tilde{\theta}_\sigma & \downarrow \tilde{\theta}_1 \\ T M & \xrightarrow{\omega} & \mathfrak{g}_\sigma & \xrightarrow{T_e P_{1\sigma}} & \mathfrak{g}_1 \\ \searrow \omega_j & & \swarrow \nu_j & & \\ & & \mathbb{R} & & \end{array}$$

Man beachte, daß  $\Gamma_1 \backslash G_1$  ein Torus ist und  $\tilde{\theta}_1$  jeden Tangentialvektor kanonisch in  $T_{\bar{e}}(\Gamma_1 \backslash G_1)$  verschiebt. Da die Abbildung  $p_{1\sigma\#} F_{\sigma\#}: \pi_1(M, m_0) \rightarrow \pi_1(\Gamma_1 \backslash G_1, \bar{e})$  surjektiv ist, ist

$$\left\{ \int_L \int_{\gamma} T_e P_{1\sigma} \circ \omega \mid \gamma \in \Pi \right\}$$

ein Gitter in  $G_1$ . Die  $\nu_1, \dots, \nu_k$  liefern einen Vektorraumisomorphismus von  $G_1 \cong \mathfrak{g}_1$  nach  $\mathbb{R}^k$ . Unter Verwendung von Hilfssatz 2.2 erhalten wir, daß die Kohomologie-

klassen  $[\omega_1], \dots, [\omega_k]$  eine Basis von  $H^1(M, \mathbb{R})$  bilden. Die Eigenschaft, daß die  $[\omega_i]$  eine Basis bilden, ist die oben angesprochene Zusatzbedingung.

Von der flachen Form zur Richtungsabbildung:

Sei andererseits nun eine flache  $\mathfrak{g}_\sigma$ -wertige 1-Form  $\omega$  auf  $M$  gegeben. Dann sind wiederum

$$\omega_j := \nu_j \circ T_e P_{1\sigma} \circ \omega$$

geschlossene  $\mathbb{R}$ -wertige 1-Formen auf  $M$ . Wir fordern jetzt, daß  $[\omega_1], \dots, [\omega_k]$  eine Basis von  $H^1(M, \mathbb{R})$  bilden. Unter Verwendung von Hilfssatz 2.2 und dem Isomorphismus von  $\mathfrak{g}_1$  nach  $\mathbb{R}^k$ , der von den  $\nu_j$  induziert wird, erhalten wir nun umgekehrt zu oben, daß

$$\left\{ \int_L T_e P_{1\sigma} \circ \omega \mid \gamma \in \Pi \right\}$$

ein Gitter in  $G_1 = \frac{G_\sigma}{G_\sigma^2}$  ist.

Die Form  $\omega$  besitzt eine Lie-Stammfunktion, die auf der universellen Überlagerung sogar global definiert werden kann:

$$\tilde{F}: \tilde{M} \rightarrow G_\sigma.$$

Sei nun  $\tilde{m}_0 \in \tilde{M}$  in der Überlagerungsfaser des vorgegebenen Punktes  $m_0$ . Dann kann  $\tilde{F}$  so gewählt werden, daß  $\tilde{F}(\tilde{m}_0) = e$  gilt. Sei  $\Gamma'_\sigma$  das Bild der Faser über  $m_0$  unter  $\tilde{F}$ . Dann ist  $\Gamma'_\sigma$  eine Untergruppe von  $G_\sigma$  und

$$\begin{aligned} \Pi &\rightarrow \Gamma'_\sigma \\ \gamma &\mapsto \tilde{F}(\gamma \cdot \tilde{m}_0) \end{aligned}$$

ist ein Gruppenepimorphismus. Da aber  $G_\sigma$  eine  $\sigma$ -stufig nilpotente Lie-Gruppe ist, liegt  $\sqrt{\Pi^{\sigma+1}}$  in dessen Kern. Wir erhalten einen Gruppenepimorphismus von  $\Gamma_\sigma$  auf  $\Gamma'_\sigma$ . Nun ist

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma'_\sigma}{G_\sigma^2} &= \left\{ P_{1\sigma} \circ \tilde{F}(\gamma \cdot \tilde{m}_0) \mid \gamma \in \Pi \right\} \\ &= \left\{ P_{1\sigma} \circ \left( \int_L \omega \right) \mid \gamma \in \Pi \right\} \\ &= \left\{ \int_L T_e P_{1\sigma} \circ \omega \mid \gamma \in \Pi \right\} \end{aligned}$$

Mit unserer zusätzlichen Forderung ist  $\frac{\Gamma'_\sigma}{G_\sigma^2}$  ein Gitter in  $\frac{G_\sigma}{G_\sigma^2}$ . Nun können wir Hilfssatz II.2.14 anwenden und erhalten einen Automorphismus von  $G_\sigma$ , der  $\Gamma_\sigma$  auf  $\Gamma'_\sigma$  bijektiv abbildet und somit einen Diffeomorphismus  $D: \Gamma_\sigma \backslash G_\sigma \rightarrow \Gamma'_\sigma \backslash G_\sigma$  induziert.

Wir definieren nun  $F_\sigma^\omega$  durch die Kommutativität des Diagramms

$$\begin{array}{ccc} \tilde{M} & \longrightarrow & M \\ \downarrow \tilde{F} & & \downarrow \\ G_\sigma & \longrightarrow & \Gamma'_\sigma \backslash G_\sigma \xrightarrow{D^{-1}} \Gamma_\sigma \backslash G_\sigma \end{array} \quad \begin{array}{c} \searrow F_\sigma^\omega \\ \end{array}$$

Durch unsere Konstruktion haben wir somit eine Abbildung  $F_\sigma^\omega$  erhalten, so daß  $F_\sigma^\omega \#$  die kanonische Projektion  $\Pi \rightarrow \Gamma_\sigma$  ist. Somit erhält man auch zu jeder flachen 1-Form  $\omega$  mit der Zusatzbedingung eine Richtungsabbildung  $F_\sigma^\omega$ .

Die Übergänge sind „invers“:

Setzen wir  $\omega := F_\sigma^* \tilde{\theta}$ , so ist das zugehörige Gitter  $\Gamma'_\sigma$  gleich  $\Gamma_\sigma$ ; wir können also  $D := \text{id}$  wählen. Dann ist das aus  $\omega$  konstruierte  $F_\sigma^\omega$  gleich  $F_\sigma$ .

Beginnen wir mit einer beliebigen flachen  $\mathfrak{g}$ -wertigen 1-Form  $\omega$  mit Zusatzbedingung und konstruieren hieraus  $F_\sigma^\omega$ , so ist

$$\omega = T_{\tilde{e}} D \circ (F_\sigma^* \tilde{\theta}_\sigma).$$

$T_{\tilde{e}} D$  ist als Tangentialabbildung eines Isomorphismus von Nilmannigfaltigkeiten ein Lie-Algebren-Isomorphismus.

### BEMERKUNGEN 2.3.

1. Für  $\sigma = 1$  und torsionsfreies  $H_1(M, \mathbb{Z})$  stimmt nach Identifikation von  $G_1$  mit  $H_1(M, \mathbb{R})$  und von  $\Gamma_1$  mit  $H_1(M, \mathbb{Z})$  die Abbildung  $F_\sigma$  mit der Abbildung auf die Jacobi-Mannigfaltigkeit aus [Gromov2] 4.21 überein.
2. Der Rotationsvektor  $R(c)$  aus Abschnitt I.2 von einer Kurve  $c: [a, b] \rightarrow M$  zu gegebenen  $\omega_1, \dots, \omega_k$  ist gleich

$$R(c) = \frac{\tilde{c}(a)^{-1} \tilde{c}(b)}{\|\tilde{c}(a)^{-1} \tilde{c}(b)\|},$$

wobei  $\tilde{c}$  ein Lift von  $F_1 \circ c$  auf  $G_1 = H_1(M, \mathbb{R})$  und  $F_1$  die zu den  $\omega_j$  gehörige Richtungsabbildung ist.

Für die Definition des asymptotischen Limes wählen wir eine feste Richtungsabbildung für ein festes  $\sigma$ .

Zu einer Kurve  $c: \mathbb{R} \rightarrow M$  nehmen wir nun einen Lift  $\tilde{c}: \mathbb{R} \rightarrow G_\sigma$  von  $F_\sigma \circ c$  und setzen für  $s < t$

$$g_{s,t} := (\tilde{c}(s))^{-1} \tilde{c}(t).$$

Diese Definition ist von der Wahl des Lifts unabhängig.

DEFINITION 2.4. Sei nun  $c: \mathbb{R} \rightarrow M$  eine Kurve. Wir wenden nun für zunächst festes  $s \in \mathbb{R}$  die Benardete-Mitchellsche Definition des asymptotischen Limes aus [BeMi] auf  $g_{s,t}$  an:  $\rho \in G_\sigma$  heißt *asymptotischer Limes* der Stufe  $\sigma$ , wenn

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (\rho^{-(t-s)} g_{s,t})^{\frac{1}{t-s}} = e$$

erfüllt ist.

**Lemma 2.5.** *Seien  $s \in \mathbb{R}$  und die Richtungsabbildung  $F_\sigma$  fest. Wenn ein asymptotischer Limes existiert, so ist er eindeutig.*

Dieses Lemma ist eine Verallgemeinerung von [BeMi] Proposition 4.2. Benardete und Mitchell beweisen es nur für den 2-stufig nilpotenten Fall.

BEWEIS: Wir nehmen an, eine Kurve habe zwei verschiedene asymptotische Limes  $\rho = \exp r$  und  $\hat{\rho} = \exp \hat{r}$ . O.B.d.A.  $s = 0$ . Es ist dann nach der Formel von Baker-Campbell-Hausdorff (Theorem II.1.1)

$$0 = \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{t} (-tr + \log g_{0,t} + Q(tr, \log g_{0,t})) \right)$$

für ein Lie-Klammer-Polynom  $Q(X, Y)$ , in dem jedes Monom sowohl  $X$  als auch  $Y$  enthält. Eine analoge Gleichung gilt auch für  $\hat{r}$  anstelle von  $r$  mit gleichem  $Q(X, Y)$ . Hieraus ergibt sich

$$(2.1) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{t} (-t(r - \hat{r}) + Q(tr, \log g_{0,t}) - Q(t\hat{r}, \log g_{0,t})) \right) = 0.$$

Wir zeigen durch Induktion über  $i = 1, \dots, \sigma + 1$ , daß  $r - \hat{r} \in \mathfrak{g}^i$ . Der Induktionsanfang  $i = 1$  ist trivial.

Für den Schritt von  $i$  auf  $i + 1$  haben wir als Induktionsvoraussetzung, daß  $r - \hat{r} \in \mathfrak{g}^i$ . Da jedes Monom des Lie-Klammer-Polynoms  $Q(X, Y)$  sowohl  $X$  als auch  $Y$  enthält, gilt  $Q(tr, \log g_{0,t}) - Q(t\hat{r}, \log g_{0,t}) \in \mathfrak{g}^{i+1}$ . Mit Gleichung (2.1) folgt daraus  $\lim_{t \rightarrow \infty} TP_{i+1, \sigma}(r - \hat{r}) = 0$ , d.h.  $r - \hat{r} \in \mathfrak{g}^{i+1}$ .  $\square$

Wir schreiben für den asymptotischen Limes  $\rho$  bezüglich der festen  $\sigma$ -stufigen Richtungsabbildung  $F_\sigma$

$$A^{\sigma} \lim_{t \rightarrow +\infty} c|_{[s,t]} := \rho.$$

#### EIGENSCHAFTEN 2.6.

1. Ist  $c$  eine Kurve, so daß  $g_{s,t}$  periodisch ist, also  $g_{s,t+\theta} = \gamma g_{s,t}$ , so ist

$$A^{\sigma} \lim_{t \rightarrow +\infty} c|_{[s,t]} = \gamma^{\frac{1}{\theta}},$$

denn  $\lim_{t \rightarrow +\infty} (\gamma^{-(t-s)} g_{s,t})^{\frac{1}{t-s}} = e$ .

2. Sei  $\tau > \sigma$  und  $F_\tau = p_{\tau\sigma} \circ F_\sigma$ . Falls  $A^\tau \lim_{t \rightarrow +\infty} c|_{[s,t]}$  existiert, dann existiert auch der asymptotische Limes  $A^\sigma \lim_{t \rightarrow +\infty} c|_{[s,t]}$  und es ist  $A^\sigma \lim_{t \rightarrow +\infty} c|_{[s,t]} = P_{\sigma\tau} A^\tau \lim_{t \rightarrow +\infty} c|_{[s,t]}$ .
3. Der asymptotische Limes hängt von  $s$  ab, ist also keine Invariante der Kurve  $c$  (siehe Beispiele 2.7 Punkt 1.). Des weiteren hängt sowohl die Existenz als auch der Wert des asymptotischen Limes von der Parametrisierung der Kurve ab.
4. Geht  $F_\sigma \circ c$  unter Linkstranslation aus  $F_\sigma \circ c'$  hervor, so erhält man für  $c$  und  $c'$  dieselben  $g_{s,t}$ . Deshalb existiert der asymptotische Limes von  $c$  genau dann, wenn der asymptotische Limes von  $c'$  existiert und die Limes sind gleich.
5. Die Definition des asymptotischen Limes der Stufe 1 ist unabhängig von  $F_1$  und  $s$ . Für  $\sigma > 1$  hingegen hängt der asymptotische Limes von  $F_\sigma$  und  $s$  ab (Beispiele 2.7 Punkt 2.).
6. Wenn  $\rho := A^1 \lim_{t \rightarrow +\infty} c|_{[s,t]}$  existiert und  $\rho \neq 0$ , so konvergiert der Rotationsvektor von  $c|_{[s,t]}$  für  $t \rightarrow +\infty$  gegen  $\frac{\rho}{\|\rho\|}$ , wobei  $\|\cdot\|$  die in Abschnitt I.2 definierte stabile Norm ist.

**BEISPIELE 2.7.** Ist  $M = \Gamma \backslash G$  eine Nilmannigfaltigkeit (mit Nilpotenzstufe  $\kappa$ ), so wird durch  $F_\kappa := \text{id}$  eine Richtungsabbildung definiert. Wir nennen sie die *kanonische Richtungsabbildung*. Sofern nicht anders angegeben, sei für Nilmannigfaltigkeiten der asymptotische Limes immer bezüglich der kanonischen Richtungsabbildung definiert.

1. Sei  $\tilde{c}: \mathbb{R} \rightarrow G$  der Lift einer periodischen Kurve auf einer Nilmannigfaltigkeit  $\Gamma \backslash G$ , d.h. es existiert ein  $\theta > 0$  und ein  $\gamma \in \Gamma$ , so daß  $\tilde{c}(t + \theta) = \gamma \tilde{c}(t) \forall t$ .

Wir wählen das  $s$  in der Definition von  $g_{s,t}$  fest. Dann ist  $g_{s,t}$  ebenfalls periodisch, es gilt aber  $g_{s,t+\theta} = \tilde{c}(s)^{-1}\gamma\tilde{c}(s)g_{s,t}$ . Also ist der asymptotische Limes  $(\tilde{c}(s)^{-1}\gamma\tilde{c}(s))^{\frac{1}{\theta}}$ . Um ein konkretes Beispiel anzugeben, definieren wir auf dem kompakten Quotienten der drei-dimensionalen Heisenberg-Gruppe  $\Gamma_{(1)}\backslash H_3$  mit den Bezeichnungen von Beispiel II.1.4 und von Abschnitt II.3 eine Kurve  $c$  durch

$$c(t) := \Gamma_{(1)} \exp \left( tp_1 + \sin(2\pi t) \left( q_1 + \frac{1}{2}t\hbar \right) \right).$$

Dann ist

$$\begin{aligned} g_{s,t} &= \exp \left( -sp_1 - \sin(2\pi s) \left( q_1 + \frac{1}{2}s\hbar \right) \right) \exp \left( tp_1 + \sin(2\pi t) \left( q_1 + \frac{1}{2}t\hbar \right) \right) \\ &= \exp \left( (t-s)p_1 + (\sin 2\pi t - \sin 2\pi s) q_1 + \frac{1}{2}(t-s)(\sin 2\pi t + \sin 2\pi s)\hbar \right) \\ &= \exp \left( (t-s)(p_1 + (\sin 2\pi s)\hbar) \right) \exp \left( (\sin 2\pi t - \sin 2\pi s)q_1 \right) \end{aligned}$$

also

$$\mathop{\text{A}}^{\sigma} \lim_{t \rightarrow +\infty} c|_{[s,t]} = \exp(p_1 + (\sin 2\pi s)\hbar).$$

Benutzt man, daß  $c(t)$  periodisch ist, genauer  $c(t+1) = (\exp p_1)c(t)$ , so folgt dieser asymptotische Limes auch aus der Formel  $(\tilde{c}(s)^{-1}\gamma\tilde{c}(s))^1$ . In diesem Beispiel existiert zwar der asymptotische Limes, er kann jedoch nicht zur Charakterisierung minimaler Geodätischer benutzt werden, da er noch von  $s$  abhängt.

2. Es gibt einen Diffeomorphismus  $D: \Gamma_{(1)}\backslash H_3 \rightarrow \Gamma_{(1)}\backslash H_3$ , der homotop (mit festem Basispunkt  $\Gamma_{(1)}e$ ) zur Identität ist und der die Kurve  $c$  aus 1. auf  $\Gamma_{(1)} \exp tp_1$  abbildet. Bezüglich der Richtungsabbildung  $D \circ F_{\sigma}$  ist

$$\mathop{\text{A}}^{\sigma} \lim_{t \rightarrow +\infty} c|_{[s,t]} = \exp(p_1).$$

Der asymptotische Limes hängt also von der gewählten Richtungsabbildung ab.

### 3. $C^1$ -exponentielle Konvergenz von Kurven

Wir werden in Kapitel IV den asymptotische Limes nur für Kurven berechnen, die sehr schnell gegen wenige ausgewählte Kurven konvergieren. In diesem Abschnitt sollen für diese Berechnung Hilfsmittel bereitgestellt werden. Die Ergebnisse sind abgesehen von der wohl allgemein bekannten Proposition 3.1 eigene Ergebnisse.

Eine Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow V$  in einen endlich-dimensionalen Vektorraum  $V$  konvergiert exponentiell gegen Null, wenn es Konstanten  $t_0 \in \mathbb{R}$  und  $k_1, k_2 \in \mathbb{R}^+$  gibt, so

daß

$$\|f(t)\| \leq k_1 \exp(-k_2 t) \quad \forall t > t_0.$$

Wir schreiben auch

$$f(t) \xrightarrow{(e)} 0.$$

Die Definition ist natürlich unabhängig von der verwendeten Norm auf  $V$ .

Sei  $M$  eine riemannsche Mannigfaltigkeit und  $c_0: \mathbb{R} \rightarrow M$  eine Kurve (mit fester Parametrisierung). Sei  $d$  die von der riemannschen Metrik induzierte Abstandsfunktion. Eine Kurve  $c_1: \mathbb{R} \rightarrow M$  konvergiert exponentiell gegen  $c_0$  oder in Formeln

$$c_1 \xrightarrow{(e)} c_0,$$

wenn es einen orientierungstreuen Parameterwechsel  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gibt, so daß

$$d(c_1 \circ \varphi(t), c_0(t)) \xrightarrow{(e)} 0.$$

**Proposition 3.1.** *Sei  $F: M \rightarrow N$  eine differenzierbare Abbildung zwischen riemannschen Mannigfaltigkeiten. Die Kurve  $c_1: \mathbb{R} \rightarrow M$  konvergiere exponentiell gegen  $c_0: \mathbb{R} \rightarrow M$ . Es gebe ein  $r > 0$  und ein Polynom  $P \in \mathbb{R}[X]$ , so daß für die von den riemannschen Metriken induzierte Norm gelte*

$$(3.1) \quad \|T_q F\| \leq P(t) \quad \forall q \in M \text{ mit } d(q, c_0(t)) < r.$$

Dann konvergiert  $F \circ c_1$  exponentiell gegen  $F \circ c_0$ . □

Gleichung (3.1) ist z.B. erfüllt, wenn  $c_0$  in einem Kompaktum von  $M$  verläuft. Exponentielle Konvergenz derartiger Kurven ist somit unabhängig von der riemannschen Metrik und bleibt unter differenzierbaren Abbildungen erhalten.

Zur Charakterisierung der minimalen Geodätischen auf den Hedlund-Beispielen, die wir konstruieren werden, ist nun ein Lemma recht nützlich. Man beachte, daß für eine  $\kappa$ -stufig nilpotente Lie-Gruppe  $G$  die im letzten Abschnitt definierte Abbildung  $P_{\sigma\kappa}$  gerade die Projektion  $G \rightarrow \frac{G}{G^\sigma} = G_{\sigma+1}$  ist. Die Abbildung  $p_{\sigma\kappa}: \Gamma \backslash G \rightarrow \Gamma_\sigma \backslash G_\sigma$  ist dann eine Richtungsabbildung der Stufe  $\sigma$ .

**Lemma 3.2.** *Sei  $G$  eine  $\kappa$ -stufig nilpotente, einfach zusammenhängende Lie-Gruppe mit Gitter  $\Gamma$ . Die Nilmannigfaltigkeit  $\Gamma \backslash G$  trage eine riemannsche Metrik. Eine Kurve  $k_1: \mathbb{R} \rightarrow \Gamma \backslash G$  konvergiere exponentiell gegen  $k_0(t) := \Gamma g \exp tv$  mit  $g \in G$  und  $v \in \mathfrak{g}$ . Dann gilt bezüglich der Richtungsabbildung  $p_{\sigma\kappa}$*

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} A^s \lim_{t \rightarrow +\infty} (k_1 \circ \varphi)|_{[s,t]} = \exp T_e P_{\sigma\kappa} v,$$

wobei  $\varphi$  ein beliebiger in der Definition der exponentiellen Konvergenz vorkommender Parameterwechsel ist.

BEGRÜNDUNG. O.B.d.A.  $\varphi = \text{id}$ . Wenn  $k_1(t)$  exponentiell gegen  $k_0(t) = \Gamma g \exp tv$  konvergiert, so gibt es einen Lift  $\tilde{k}_1$  auf  $G$  und eine Kurve  $X$  in  $\mathfrak{g}$  mit

$$\tilde{k}_1(t) = g \exp tv \exp X(t) \quad \text{und} \quad \|X(t)\| \xrightarrow{(e)} 0.$$

Wir rechnen

$$\begin{aligned} (\tilde{k}_1(s))^{-1} \tilde{k}_1(t) &= \exp -X(s) \exp((t-s)v) \exp X(t) \\ &= \exp\left((t-s)(v + Q(v, X(s), X(t)))\right) \end{aligned}$$

wobei  $Q(v, X(s), X(t))$  ein Kommutatorpolynom in  $v$ ,  $X(s)$  und  $X(t)$  ist, in dem jedes Monom den Faktor  $X(s)$  oder  $X(t)$  mindestens in „einfacher Potenz“ enthält.

Also somit aufgrund von  $\|X(t)\| \xrightarrow{(e)} 0$

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \mathbb{A}^\kappa \lim_{t \rightarrow +\infty} (k_1 \circ \varphi)|_{[s,t]} = \exp v,$$

woraus sich durch Anwendung von  $P_{\sigma\kappa}$  auf beiden Seiten die Behauptung ergibt.  $\square$

**DEFINITION 3.3.** Wählen wir eine riemannsche Metrik auf dem Tangentialraum  $TM$ , so definieren wir:  $c_1$  konvergiert  $C^1$ -exponentiell gegen  $c_0$ , wenn  $\dot{c}_1(t)$  exponentiell gegen  $\dot{c}_0(t)$  konvergiert.

Ist  $M = G$  eine Lie-Gruppe, dann sei  $\theta$  die in Abschnitt 1 definierte Abbildung  $\theta: TG \rightarrow \mathfrak{g}$  mit  $\theta|_g = T_g l_{g^{-1}}$  und  $p: TG \rightarrow G$  sei die Fußpunktprojektion. Dann ist die Abbildung

$$(\theta, p): TG \rightarrow \mathfrak{g} \times G$$

ein Diffeomorphismus und somit eine Trivialisierung des Tangentialbündels. Die Gruppe  $G$  sei nun mit einer riemannschen Metrik  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  versehen. Dann trägt  $\mathfrak{g} = T_e G$  die von  $\langle \cdot, \cdot \rangle_e$  induzierte riemannsche Metrik. Die Produktmetrik auf  $\mathfrak{g} \times G$  kann durch  $(\theta, p)$  auf  $TG$  zurückgeholt werden. Im folgenden trage  $TG$  immer diese Metrik.

Es gilt dann: eine Kurve  $k_1: \mathbb{R} \rightarrow G$  konvergiert genau dann  $C^1$ -exponentiell gegen  $k_0$ , wenn es einen orientierungstreuen Parameterwechsel  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gibt mit:

- (1)  $d(k_1 \circ \varphi(t), k_0(t)) \xrightarrow{(e)} 0$ ,
- (2)  $(k_1 \circ \varphi)^* \theta - k_0^* \theta \xrightarrow{(e)} 0$ .

Zu einer Fundamentalgruppe  $\Pi$  bestimmen wir wieder wie in Abschnitt 2 die Gruppen  $G_\sigma$ . Sei wieder  $P_{\sigma\tau}: G_\tau \rightarrow G_\sigma$  die Standardprojektion.

**Satz 3.4.** *Für zwei natürliche Zahlen  $\sigma < \tau$  seien zwei glatte Kurven  $k_0, k_1: \mathbb{R} \rightarrow G_\tau$  gegeben. Auf  $G_\tau$  sei eine linksinvariante riemannsche Metrik definiert. Man versehe  $G_\sigma$  mit der riemannschen Submersionsmetrik bezüglich  $P_{\sigma\tau}$ . Die Kurve  $(P_{\sigma\tau} \circ k_1)$  konvergiere  $C^1$ -exponentiell gegen die Kurve  $(P_{\sigma\tau} \circ k_0)$  und es gelte*

$$\dot{k}_i \perp \ker TP_{\sigma\tau} \quad \text{für } i = 1, 2.$$

*Ferner sollen die Koordinaten von  $\log(P_{\sigma\tau} \circ k_0(t))$  höchstens polynomial in  $t$  wachsen. Dann gibt es ein  $g$  in  $G_\tau^{\sigma+1}$ , der  $(\sigma + 1)$ -ten Kommutatorgruppe von  $G_\tau$ , so daß  $k_1(t)$  auch  $C^1$ -exponentiell gegen  $gk_0(t)$  konvergiert.*

**BEMERKUNG.** Wenn  $k_0$  nach Bogenlänge parametrisiert, so ist die Bedingung, daß die Koordinaten von  $\log(P_{\sigma\tau} \circ k_0(t))$  höchstens polynomial in  $t$  wachsen, aufgrund von Satz II.5.1 erfüllt.

Für den Beweis zeigen wir zunächst einen Hilfssatz. Er gilt für beliebige (d.h. nicht notwendig nilpotente) Lie-Gruppen  $G$ . Wir benutzen die adjungierte Abbildung  $\text{Ad}(g): \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ , die durch

$$\text{Ad}(g) := T_{g^{-1}}l_g \circ T_e r_{g^{-1}} = T_g r_{g^{-1}} \circ T_e l_g$$

definiert ist.

**Hilfssatz 3.5.** *Für zwei glatte Kurven  $k_0, k_1: \mathbb{R} \rightarrow G$  gilt:*

$$(k_1 k_0^{-1})^* \theta = \text{Ad}(k_0)(k_1^* \theta - k_0^* \theta).$$

**BEWEIS DES HILFSSATZES:** Durch Differenzieren von  $e = k_0(t)k_0(t)^{-1}$  erhalten wir

$$(3.2) \quad 0 = Tl_{k_0(t)}(\dot{k}_0^{-1})(t) + Tr_{k_0^{-1}(t)}\dot{k}_0(t).$$

Wir rechnen nun

$$\begin{aligned} (k_1 k_0^{-1})^* \theta &= Tl_{k_0 k_1^{-1}} \left( Tl_{k_1}(\dot{k}_0^{-1}) + Tr_{k_0^{-1}}\dot{k}_1 \right) \\ &= -Tr_{k_0^{-1}}\dot{k}_0 + Tl_{k_0 k_1^{-1}} Tr_{k_0^{-1}}\dot{k}_1 \quad \text{nach (3.2)} \\ &= -Tr_{k_0^{-1}} Tl_{k_0} Tl_{k_0^{-1}}\dot{k}_0 + Tr_{k_0^{-1}} Tl_{k_0} Tl_{k_1^{-1}}\dot{k}_1 \\ &= \text{Ad}(k_0)(-k_0^* \theta + k_1^* \theta) \end{aligned}$$

□

BEWEIS DES SATZES: Sei  $\theta_\beta: TG_\beta \rightarrow \mathfrak{g}_\beta$  die Abbildung mit  $\theta_\beta|_g = T_g l_{g^{-1}}$  für alle  $\beta \in \{1, \dots, \tau\}$ . Nach dem Hilfssatz gilt

$$(P_{\sigma\tau} \circ k_1)^* \theta_\sigma - (P_{\sigma\tau} \circ k_0)^* \theta_\sigma = \text{Ad}\left((P_{\sigma\tau} \circ k_0)^{-1}\right) \left((P_{\sigma\tau} \circ k_1) (P_{\sigma\tau} \circ k_0)^{-1}\right)^* \theta_\sigma$$

Man beachte nun, daß die Koordinaten von  $\log(P_{\sigma\tau} \circ k_0(t))$  höchstens polynomial in  $t$  wachsen. Ferner ist  $\text{Ad}(g) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} (\text{ad}(\log g))^i$ . Somit wächst dann auch  $\|\text{Ad}\left((P_{\sigma\tau} \circ k_0(t))^{-1}\right)\|$  höchstens polynomial in  $t$ . Es gilt also

$$(P_{\sigma\tau} \circ k_1)^* \theta_\sigma - (P_{\sigma\tau} \circ k_0)^* \theta_\sigma \xrightarrow{(e)} 0.$$

Da  $\dot{k}_i \perp \ker TP_{\sigma\tau}$ , haben wir auch  $k_i^* \theta \perp \ker TP_{\sigma\tau}$  und somit auch

$$k_1^* \theta_\tau - k_0^* \theta_\tau \xrightarrow{(e)} 0.$$

Mit dem Hilfssatz und dem polynomialen Wachstum von  $\|\text{Ad}(k_0(t))\|$  (Beweis analog) ergibt das

$$(k_1 k_0^{-1})^* \theta_\tau \xrightarrow{(e)} 0.$$

Man zeigt nun durch Induktion über  $\beta = 1, \dots, \tau$ , daß dann auch  $P_{\beta\tau}(k_1 k_0^{-1})$  exponentiell gegen ein Element  $g_\beta$  in  $G_\beta$  konvergiert. Für den Induktionsschritt nutze man die Formel von Baker-Campbell-Hausdorff. □

## KAPITEL IV

### *Verallgemeinerte Hedlund-Beispiele*

Gustav A. Hedlund konstruierte am Ende seines Artikels [Hedlund] riemannsche Metriken auf dem 3-dimensionalen Torus, bezüglich derer es nur wenige minimale Geodätische gibt. Victor Bangert wiederholte diese Konstruktion in einer „axiomatischen“ und deswegen allgemeineren Version. Wir wollen in diesem Kapitel zeigen, daß es auf beliebigen Mannigfaltigkeiten mit nilpotenter Fundamentalgruppe riemannsche Metriken gibt, bezüglich derer die minimalen Geodätischen ähnliche Eigenschaften haben. Derartige Metriken nennen wir verallgemeinerte Hedlund-Metriken. Es sind jedoch keine Verallgemeinerungen in dem Sinne, daß man die von Hedlund konstruierten Beispiele durch unsere Konstruktion erhalten wird.

In einfachen Fällen kann die axiomatische Version von Victor Bangert für die Konstruktion von Hedlund-Metriken ähnlich übertragen werden, die Beweise sind jedoch komplizierter (siehe Abschnitt 1). Diese Metriken sollen im folgenden Autobahnmetriken genannt werden. Der Begriff „Autobahnmetrik“ wurde bereits in [Brodbeck] für eine Metrik mit ähnlichen Eigenschaften benutzt.

In komplizierteren Fällen mußten wir jedoch andere Methoden gebrauchen, um die Existenz von Hedlund-Metriken zu verallgemeinern. Dies wird in den Abschnitten 2 und 3 ausgeführt.

Abgesehen von trivialen Sachverhalten sind alle Ergebnisse dieses Kapitels neu.

#### *1. Autobahnmetriken*

Ziel dieses Abschnitts ist es, sogenannte Autobahnmetriken zu konstruieren und ihre Eigenschaften zu untersuchen. Anschaulich gesprochen sind die Autobahnmetriken, die wir konstruieren werden, riemannsche Metriken auf einer kompakten Mannigfaltigkeit, die in der Umgebung von einer Menge von ausgewählten Wegen (im wesentlichen Erzeugende der Fundamentalgruppe) sehr klein sind im Verhältnis zum Gebiet außerhalb der Umgebung. Eine minimale Geodätische wird nun versuchen, möglichst viel Strecke in diesen Gebieten mit kleiner Metrik zurückzulegen, vergleichbar einem Autofahrer, der auch gerne einen „Umweg“ in Kauf nimmt, um über eine Autobahn sein Ziel in kürzerer Zeit zu erreichen. Wir werden im ersten Unterabschnitt die ausgewählten Wege konstruieren, in deren Umgebung die Metrik klein werden soll.

Im nachfolgenden Unterabschnitt soll dann die Metrik in Abhängigkeit von einigen Parametern bestimmt werden. Ab dem dritten Unterabschnitt werden Sätze hergeleitet, die bei geeigneter Wahl der Parameter für die minimalen Geodätischen gelten.

Die Konstruktion der Autobahnmetriken wurde für beliebige kompakte Mannigfaltigkeiten durchgeführt. Für die Konstruktion der Hedlund-Metriken benötigen wir aber nur

- den Fall des  $m$ -dimensionalen Torus  $T^m$  mit  $m \geq 3$ ,
- den Fall des Produkts des 2-dimensionalen Torus  $T^2$  mit der zwei-dimensionalen Sphäre  $S^2$ ,
- den Fall der Nilmannigfaltigkeit  $\Gamma_{(1)} \backslash H_3$ , einem kompakten Quotienten der dreidimensionalen Heisenberg-Gruppe.

Lesern, die nur an der Konstruktion der Hedlund-Metriken interessiert sind, können deswegen die Konstruktion der „ausgewählten Wege“  $\gamma_i$  und  $\alpha_i$  überspringen und nur die Beispiele 1.2, 1.3 und 1.4 betrachten.

Die allgemeine Konstruktion der Autobahnmetrik liefert noch eine ganze Reihe anderer interessanter Beispiele, z.B. Metriken auf einer beliebigen kompakten Mannigfaltigkeit, für die alle homolog minimalen Geodätischen asymptotisch gegen die ausgewählten Erzeugenden der Fundamentalgruppe konvergieren. Des weiteren verhalten sich bei Autobahnmetriken auf kompakten Mannigfaltigkeiten mit gewissen nilpotenten Fundamentalgruppen die homotop minimalen Geodätischen ähnlich wie die homolog minimalen, während sie sich für freie Fundamentalgruppen asymptotisch wesentlich anders verhalten können.

In diesem Abschnitt sei  $M$  eine zusammenhängende  $m$ -dimensionale Mannigfaltigkeit mit Fundamentalgruppe  $\Pi_1 := \pi_1(M, m_0)$  bezüglich dem Basispunkt  $m_0 \in M$ . Sofern nicht anders vermerkt, sei  $M$  kompakt.  $B_r(p, X)$  sei der offene Ball um  $p$  mit Radius  $r$  in der riemannschen Mannigfaltigkeit  $X$ . Der  $\mathbb{R}^n$  sei immer mit der kanonischen riemannschen Metrik versehen. Wir identifizieren immer  $S^1 = \frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}}$ . Um Verwechslung zwischen der Lie-Gruppen-Exponentialfunktion und der riemannschen Exponentialfunktion zu vermeiden, nennen wir letztere  $\exp^{(R)}$ .

### 1.a. Konstruktion der Autobahn

Als ersten Schritt definieren wir nun die sogenannte Autobahn, d.h. die offene Teilmenge der Mannigfaltigkeit, auf der die Autobahnmetrik, teilweise stark verkürzt ist. Um die Übersicht über diesen Abschnitt zu erleichtern, werden die benutzten

differentialtopologischen Sätze, die zu einem großen Teil aus [Hirsch] stammen, im Anhang 1 zusammengestellt.

Die Fundamentalgruppe  $\Pi_1$  werde von  $g_1, \dots, g_k$  erzeugt. Zu jedem  $g_i$  wählen wir zunächst einen Repräsentanten, d.h. einen geschlossenen Weg  $\bar{\gamma}_i$  mit Basispunkt  $m_0$ , der zur Homotopieklasse  $g_i$  gehört.

Wenden wir die Sätze B.1.4 und B.1.5 auf den Fall an, daß  $M$  unsere gegebene Mannigfaltigkeit und  $N$  die disjunkte Vereinigung von  $k$ -mal die  $S^1$  ist, und nutzen wir, daß die Homotopieklassen offen in  $C_S^r(N, M)$  sind, so erhalten wir hieraus das

**Korollar 1.1.** *Es gibt  $C^\infty$ -Einbettungen  $\gamma_i: S^1 \rightarrow M$ , für  $1 \leq i \leq k$ , die sich gegenseitig nicht schneiden, wobei  $\gamma_i$  homotop zu  $\bar{\gamma}_i$  ist.*

Diese Wahl kann sogar in einer vorgegebenen  $C^0$ -Umgebung der  $\bar{\gamma}_i$  erfolgen. Ohne Einschränkung können wir außerdem annehmen, daß  $m_0$  auf keinem  $\gamma_i$  liegt.

Wir wählen nun eine beliebige Metrik  $\langle, \rangle_1$  auf  $M$ . Für alle genügend kleinen  $r_1 > 0$  wählen wir mit Anhang 2 unter Verwendung der Metrik  $\langle, \rangle_1$  eine  $r_1$ -Tubenumgebung um  $\bigcup_{i=1}^k \gamma_i(S^1)$ . Diese  $r_1$ -Tubenumgebung nennen wir hinfert  $U_{r_1}$ . Wir nennen die Zusammenhangskomponente von  $U_{r_1}$ , die  $\gamma_i$  enthält,  $U_{r_1}(\gamma_i)$ . Es ist gleichzeitig die  $r_1$ -Tubenumgebung von  $\gamma_i$ . Die Bündelprojektion der zugehörigen  $B_{r_1}(0, \mathbb{R}^{n-1})$ -Bündelstruktur sei  $p_i$ , die entsprechende Bündelprojektion auf die Vereinigung  $\bigcup \gamma_i(S^1)$  sei  $p$ . Im folgenden sei ein festes  $r_1$  gewählt, und zwar so klein, daß außerdem noch gilt:

- (1)  $r_1 < \frac{1}{4}$  und  $4r_1 < d(m_0, \gamma_i)$  für alle  $i$ ,
- (2)  $V_{r_1} := B_{r_1}(m_0, (M, \langle, \rangle_1))$  ist auch Tubenumgebung, mit anderen Worten:  $(\exp^{(R)})^{-1}|_{V_{r_1}}$  ist eine normale Kartenumgebung.

Wir gehen nun von der Metrik  $\langle, \rangle_1$  zu einer Metrik  $\langle, \rangle_2$  über, die in einer Umgebung der  $\gamma_i(S^1)$  flach ist. Man bestimme zuerst mit Proposition B.2.3 einen  $B_{r_1}(0, \mathbb{R}^{n-1})$ -Bündelatlas von  $U_{r_1}$ , dessen Kartenwechsel Isometrien des  $\mathbb{R}^{m-1} \times (\bigcup S^1)$  mit der Produktmetrik sind. Dann definieren wir die flache Metrik  $\langle, \rangle^{fl}$  auf  $U_{r_1}$  durch die Forderung, daß die Karten dieses Atlanten Isometrien sind.

Wir wählen nun eine  $C^\infty$ -Funktion  $F: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ , so daß für ein kleines  $\rho > 0$  gilt:

- (1)  $F|_{]-\infty, \rho]} \equiv 0$  und  $F|_{[1-\rho, +\infty[} \equiv 1$ ,
- (2)  $F$  ist monoton wachsend.

(siehe Abbildung IV.3 auf Seite 63). Wir definieren dann für alle  $p \in U_{r_1}$

$$\begin{aligned} \langle, \rangle_{2,p} &= F \left( \frac{2d_1(p, \cup \gamma_i(S^1))}{r_1} - 1 \right) \langle, \rangle_{1,p} \\ &\quad + \left( 1 - F \left( \frac{2d_1(p, \cup \gamma_i(S^1))}{r_1} - 1 \right) \right) \langle, \rangle_p^{fl}, \end{aligned}$$

wobei  $d_1$  die von  $\langle, \rangle_1$  induzierte Abstandsfunktion ist. In allen anderen Punkten sei  $\langle, \rangle_2 := \langle, \rangle_1$ . Die  $r$ -Tubenumgebungen bezüglich  $\langle, \rangle_1$  stimmen nun für alle  $r < \frac{r_1}{2}$  mit denen bezüglich  $\langle, \rangle_2$  überein, ja sogar die  $B_{\frac{r_1}{2}}(0, \mathbb{R}^{n-1})$ -Struktur auf  $U_{\frac{r_1}{2}}$  bleibt erhalten. Zusätzlich ist aber auch  $\langle, \rangle_2$  flach auf  $U_r$  und alle  $\gamma_i$  sind geodätisch. Man beachte außerdem, daß durch unsere Konstruktion jedes  $\gamma_i$  die Länge 1 hat.

Analog kann man die Metrik auf

$$V_r := B_r(m_0, (M, \langle, \rangle))$$

flach machen, deswegen sei o.B.d.A.  $\langle, \rangle_2$  flach auf  $V_r$ . Von nun an sei auch  $r$  fest gewählt.

Als nächsten Schritt sollen nun Wege  $\alpha_i$  für  $i = 1, \dots, k$  konstruiert werden, die den Punkt  $m_0$  mit  $\gamma_i$  auf besonders schöne Art verbinden. Wenn nichts anderes angegeben, haben sämtliche Wege, die in dieser Konstruktion auftauchen, das Parameterintervall  $[0, 1]$ .

Zunächst sei  $\alpha_i^1$  der (stetige) Weg von  $m_0 = \bar{\gamma}_i(0 + \mathbb{Z})$  nach  $\gamma_i(0 + \mathbb{Z})$ , den man aus der Homotopie von  $\bar{\gamma}_i$  nach  $\gamma_i$  erhält. Es ist dann  $g_i = [(\alpha_i^1)^{-1} \gamma_i \alpha_i^1]$ , wobei die Klammer die Homotopieklasse des Weges sei, der zuerst  $\alpha_i^1$ , dann  $\gamma_i$  und schließlich in umgekehrter Richtung  $\alpha_i^1$  durchläuft.

Mit Satz B.1.6 für  $N = [0, 1]$ ,  $N_0 = \{0, 1\}$ , für das gegebene  $M$  und für  $M_0 = \{m_0, \gamma_i(0 + \mathbb{Z})\}$  erhalten wir einen  $C^\infty$ -Weg  $\alpha_i^2$ , der homotop zu  $\alpha_i^1$  ist.

Wir können annehmen, daß die  $\alpha_i^2$  auf  $]0, 1[$  weder  $m_0$  noch die  $\gamma_i$  treffen, denn sonst kann man die  $\alpha_i^2$  mit dem Transversalitätssatz B.1.7 und Proposition B.1.8 (für  $\rho = 0$ ) entsprechend verändern.

Wenn  $N$  die disjunkte Vereinigung von  $k$ -mal das Intervall  $]0, 1[$  ist und  $M' = M - (\{m_0\} \cup \cup \gamma_i(S^1))$ , so fassen wir die  $\alpha_i|_{]0, 1[}$  zu einer Abbildung  $\mathcal{A}: N \rightarrow M'$  zusammen:  $\mathcal{A}$  restringiert auf das  $i$ -te Intervall  $]0, 1[$  sei gleich  $\alpha_i|_{]0, 1[}$ . Diese Abbildung ist eigentlich, d.h. das Urbild kompakter Mengen ist wieder kompakt. Wenden wir für dieses  $N$  und für  $M'$  anstelle von  $M$  den Satz B.1.5 und anschließend Proposition B.1.8 für  $\rho = 0$  an, so erhalten wir immersierte  $C^\infty$ -Kurven  $\alpha_i^3$  mit folgenden Eigenschaften:

- (i)  $\alpha_i^3(0) = m_0$
- (ii)  $\alpha_i^3(1) = \gamma_i(0 + \mathbb{Z})$

- (iii) Die  $(\alpha_i^3)|_{]0,1[}$  scheiden sich nicht selbst und auch nicht gegenseitig und liegen in  $M'$ .
- (iv)  $g_i = [(\alpha_i^3)^{-1}\gamma_i\alpha_i^3]$

Da die Einbettungen offen in  $C_S^\infty(N, M')$  sind (Satz B.1.3), kann man mit dem Transversalitätssatz B.1.7 begründen, daß wir auch noch annehmen können:

- (v) Die  $\alpha_i^3$  sind transversal zu  $\partial U_{\frac{r}{2}}$  und  $\partial V_{\frac{r}{2}}$ .

Wir wissen jedoch nicht, ob die Kurve  $\alpha_i^3$  nach ihrem ersten Verlassen von  $V_{\frac{r}{2}}$  später wieder in  $V_{\frac{r}{2}}$  eintritt. Wir können die  $\alpha_i$  durch eine Homotopie, die den Abstand von  $\alpha_i^3(t)$  zu  $m_0$  ab dem zweiten Eintreten von  $\alpha_i^3$  auf  $> \frac{r}{2}$  vergrößert, in Kurven  $\alpha_i^4$  überführen, die die Eigenschaften (i), (ii), (iv) und (v) von  $\alpha_i^3$  (mit „4“ anstelle von „3“) und zusätzlich (vi) erfüllen:

- (vi) Es gibt  $t_i \in ]0, 1[$  mit  $\alpha_i^4([0, t_i]) \subset V_{\frac{r}{2}}$  und  $\alpha_i^4(]t_i, 1]) \subset M - \overline{V_{\frac{r}{2}}}$ .

Völlig analog erhalten wir dann  $\alpha_i^5$ , das (i), (ii), (iv), (v), (vi) und (vii) erfüllt:

- (vii) Es gibt ein  $s_i \in ]0, 1[$  mit  $\alpha_i^5([0, s_i]) \subset M - \bigcup_j \overline{U_{\frac{r}{2}}(\gamma_j)}$  und  $\alpha_i^5(]s_i, 1]) \subset U_{\frac{r}{2}}(\gamma_i)$ .

Um die Eigenschaft (iii) wiederzubekommen, wenden wir nochmals Satz B.1.5 (für  $M'' := M - \bigcup_j \overline{U_{\frac{r}{2}}(\gamma_j)}$ ) und danach Proposition B.1.8 für ein kleines  $\rho > 0$  an.

Man beachte, daß die Austrittspunkte  $\{\alpha_i^5(t_i) \mid i = 1, \dots, k\}$  aus  $V_{\frac{r}{2}}$  alle verschieden sind. Als nächsten Schritt ersetzen wir noch  $\alpha_i^5|_{]0, t_i]}$  durch die Kürzeste von  $m_0$  nach  $\alpha_i^5(t_i)$  und  $\alpha_i^5|_{]s_i, 1]}$  durch die Kürzeste von  $\alpha_i^5(s_i)$  nach  $\gamma_i(0 + \mathbb{Z})$  und glätten evtl. entstehende Ecken auf  $\partial V_{\frac{r}{2}}$  oder  $\partial U_{\frac{r}{2}}$  durch eine Homotopie auf einer Umgebung um die jeweilige Ecke mit Radius  $< \frac{r}{6}$  weg. Nach eventueller Umparametrisierung von  $\gamma_i$  erhalten wir unsere Kurve  $\alpha_i$ , die zusätzlich zu (i)–(vii) erfüllt:

- (viii) Solange  $\alpha_i$  in  $V_{\frac{r}{3}}$  (bzw.  $U_{\frac{r}{3}}(\gamma_i)$ ) verläuft, ist es eine Geodätische (bzw. Geodätische, die senkrecht auf  $\gamma_i$  ankommt).

Wir wollen  $\alpha_i$  so parametrisieren, daß  $\alpha_i$  auf obigen geodätischen Stücken nach Bogenlänge parametrisiert ist. Dies ist mit dem Parameterintervall  $[0, 1]$  möglich, da  $r < \frac{1}{8}$ .

Nun besitzen mit Lemma B.2.1 auch die  $\alpha_i$  für genügend kleines  $\tilde{r} > 0$  eine  $\tilde{r}$ -Tubenumgebung  $U_{\tilde{r}}(\alpha_i)$ . Die zugehörigen Bündelprojektionen nennen wir  $\tilde{p}_i$ . Da die  $\alpha_i|_{]0, \frac{r}{4}]}$  in der normalen Karte um  $m_0$  in verschiedene Richtungen auseinanderlaufende Strahlen sind, können wir  $\tilde{r}$  sogar so klein wählen, daß

$$U_{\tilde{r}}(\alpha_i) \cap U_{\tilde{r}}(\alpha_{i'}) \subset V_{\frac{r}{4}}.$$

Und weil die  $\alpha_i$  in  $V_{\frac{r}{2}}$  (bzw.  $U_{\frac{r}{2}}$ ) geodätisch (bzw. geodätisch und senkrecht zu  $\gamma_i$ ) verlaufen, gilt für genügend kleines  $\tilde{r}$ , daß wenn der Fußpunkt einer Bündelfaser

nicht in  $V_{\frac{r}{4}}$  (bzw.  $U_{\frac{r}{4}}$ ) liegt, bereits die ganze Faser außerhalb von  $V_{\frac{r}{4}}$  (bzw.  $U_{\frac{r}{4}}$ ) liegt. Außerdem wollen wir annehmen, daß  $\tilde{r} < \frac{r}{4}$ .

Analog zum Übergang von  $\langle, \rangle_1$  nach  $\langle, \rangle_2$  wollen wir die riemannsche Metrik auf einer Tubenumgebung der  $\alpha_i$  flach machen. Über einen Bündelatlas definieren wir mit Proposition B.2.3 wieder eine flache Metrik  $\langle, \rangle^{fla}$  auf  $U_{\tilde{r}}(\alpha_i)$ , so daß die  $\alpha_i$  nach Bogenlänge parametrisiert sind, also u.a. die Länge 1 haben. Diese Metrik kann aufgrund von Zusatz B.2.4 so gewählt werden, daß sie auf  $U_{\frac{r}{4}}$  und  $V_{\frac{r}{4}}$  mit  $\langle, \rangle_2$  übereinstimmt.

Diesmal sei für alle  $p$  in  $U_{\tilde{r}}(\alpha_i)$ :

$$\begin{aligned} \langle, \rangle_p &= F \left( \frac{2d_2(p, \cup \alpha_i([0, 1]))}{\tilde{r}} - 1 \right) \langle, \rangle_{2,p} \\ &+ \left( 1 - F \left( \frac{2d_2(p, \cup \alpha_i([0, 1]))}{\tilde{r}} - 1 \right) \right) \langle, \rangle_p^{fla}, \end{aligned}$$

wobei  $d_2$  die von  $\langle, \rangle_2$  induzierte Abstandsfunktion ist. In allen anderen Punkten sei  $\langle, \rangle := \langle, \rangle_2$ . Wiederum bleibt die  $B_{\frac{\tilde{r}}{2}}(0, \mathbb{R}^{m-1})$ -Bündelstruktur erhalten. Außerdem wird die Metrik in  $U_{\frac{r}{4}}$  und  $V_{\frac{r}{4}}$  nicht verändert. Insgesamt haben also  $\frac{\tilde{r}}{2}$  und  $\langle, \rangle$  wieder alle Eigenschaften von  $\tilde{r}$  und  $\langle, \rangle_2$  und zusätzlich ist  $\langle, \rangle$  flach auf  $U_{\frac{\tilde{r}}{2}}(\cup \alpha_i)$ .

Wir definieren die *Autobahn* als

$$A := V_{\frac{r}{4}} \cup U_{\frac{r}{4}} \cup \bigcup_{i=1}^k U_{\frac{\tilde{r}}{2}}(\alpha_i).$$

BEISPIEL 1.2. Wir wollen ein Beispiel auf dem  $m$ -Torus (mit  $m \geq 3$ ) angeben. Sei  $e_i$  der  $i$ -te Einheitsvektor des  $\mathbb{R}^m$  und  $e_{m+1} := e_1$ . Weiter sei  $P: \mathbb{R}^m \rightarrow M := T^m := \frac{\mathbb{R}^m}{\mathbb{Z}^m}$  die universelle Überlagerung des  $m$ -Torus,  $m_0 := P(0)$  und

$$\begin{aligned} \gamma_i(t + \mathbb{Z}) &:= P \left( \frac{1}{4}e_i + te_{i+1} \right) \\ \alpha_i(t) &:= P \left( \frac{1}{4}te_i \right) \end{aligned}$$

für  $i = 1, \dots, m$ . Als riemannsche Metrik  $\langle, \rangle_1$  bzw.  $\langle, \rangle$  wählen wir die Standardmetrik,  $r$  und  $\tilde{r}$  seien genügend klein gewählt (es reicht z.B.  $r := \frac{1}{40}$  und  $\tilde{r} := \frac{1}{500}$ ). Die Tubenumgebungen sind Zylinder.

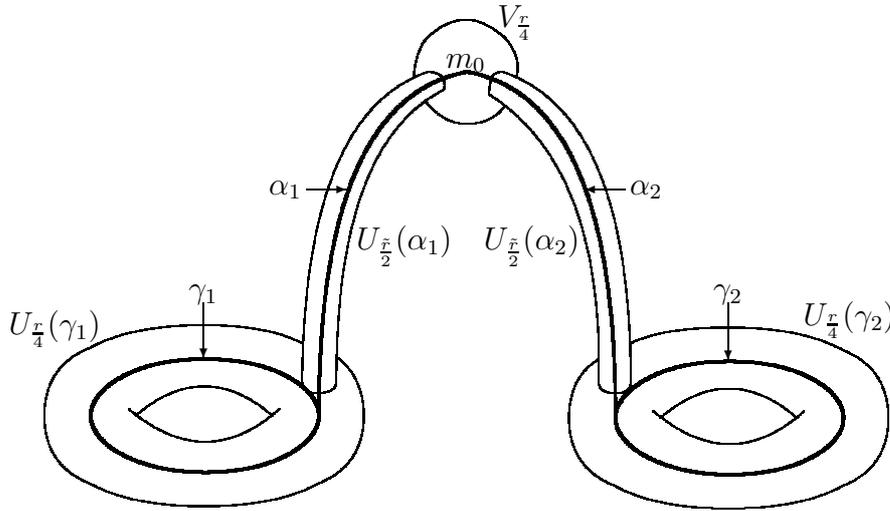


Abbildung IV.1: Eine Autobahn bei zwei Erzeugenden

BEISPIEL 1.3. Sei  $M := T^2 \times S^2$  das Produkt des 2-dimensionalen Torus und der 2-dimensionalen Sphäre. Als riemannsche Metrik  $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$  auf  $M$  wählen wir die Produktmetrik der Standardmetrik von  $T^2$  und der Standardmetrik auf  $S^2$ . Die Projektion  $M \rightarrow T^2$  ist eine Richtungsabbildung. Sei  $P$  wie oben die universelle Überlagerung des 2-Torus. Man wähle drei Punkte  $q, q_1, q_2 \in S^2$ , die nicht auf einem Großkreis liegen. Wir definieren  $m_0 = (P(0), q)$  und

$$\gamma_i(t + \mathbb{Z}) := (P(te_i), q_i) \quad i = 1, 2$$

Als Wege  $\alpha_1, \alpha_2$  wählen wir glatte, Wege, die in der ersten Komponente konstant  $P(0)$  sind und in der zweiten Komponente die (eindeutige) Kürzeste von  $q$  nach  $q_1$  bzw.  $q_2$  sind.

BEISPIEL 1.4. Nun noch ein Beispiel auf der Nilmannigfaltigkeit  $\Gamma_{(1)} \backslash H_3$  mit den Bezeichnungen von Beispiel II.1.4:

Wir setzen  $m_0 := \Gamma_{(1)} \exp(0)$  und wählen  $r$  und  $\tilde{r}$  genügend klein. Ferner

$$\gamma_1(t + \mathbb{Z}) := \Gamma_{(1)} \exp(tp_1 - \frac{1}{4}\tilde{h})$$

$$\gamma_2(t + \mathbb{Z}) := \Gamma_{(1)} \exp(tq_1 + \frac{1}{4}\tilde{h})$$

$$\alpha_1(t) := \Gamma_{(1)} \exp(-\frac{t}{4}\tilde{h})$$

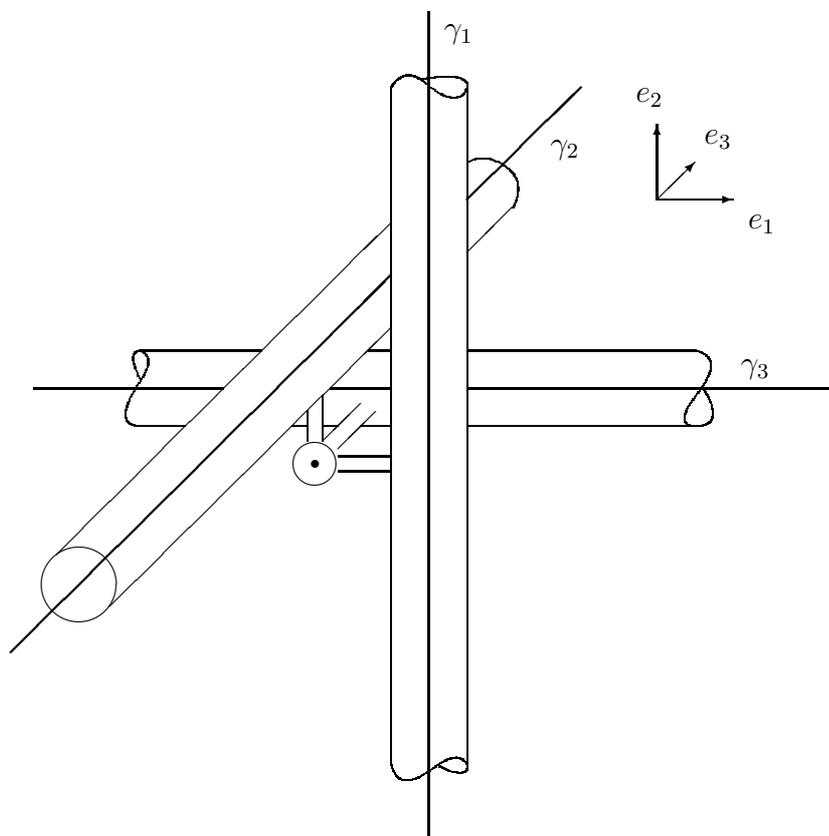


Abbildung IV.2: Die Autobahn auf dem 3-dimensionalen Torus

$$\alpha_2(t) := \Gamma_{(1)} \exp\left(+\frac{t}{4}\hbar\right)$$

Als Metrik  $\langle, \rangle_1$  wählen wir die linksinvariante Metrik, für die  $p_1, q_1, \hbar \in \mathfrak{b}_3$  eine orthonormale Basis ist. Sie wird dann wie im Verlauf dieses Abschnitts zweimal mit Proposition B.2.3 in der Nähe der  $\gamma_i$  und  $\alpha_i$  abgeändert.

### 1.b. Konstruktion der Autobahnmetriken

Wir werden eine riemannsche Metrik auf  $M$  definieren, die auf den Tubenseelen  $\gamma_i$  und  $\alpha_i$  im Verhältnis zu den Werten außerhalb von  $A$  „sehr klein“ ist. Wir werden zeigen, daß eine minimale Geodätische bezüglich dieser Metrik bereits ganz in  $A$  liegt. Dies liegt daran, daß nach Bogenlänge normierte Kurven in der Nähe der  $\gamma_i$  wesentlich schneller vorwärts kommen als außerhalb von  $A$ . Hierzu wollen wir

die riemannsche Metrik  $\langle, \rangle$  aus dem letzten Abschnitt mit einer geeigneten glatten Funktion  $h$  multiplizieren. Die von  $\langle, \rangle$  induzierte Abstandsfunktion nennen wir  $d$ .

Wir wählen eine  $C^\infty$ -Funktion  $f: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow [0, 1]$  mit folgenden Eigenschaften:

- (1) der Träger ist in  $[0, 1[$ ,
- (2)  $f(s) = 1 - s^2$  für  $0 \leq s \leq \frac{1}{2}$ ,
- (3)  $f$  ist monoton fallend, (d.h.  $f(s) \geq f(s')$  für  $s \geq s'$ ).

Weiter benutzen wir die bereits definierte  $C^\infty$ -Funktion  $F: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ , für die für ein kleines  $\rho > 0$  gilt:

- (1)  $F|_{]-\infty, \rho]} \equiv 0$  und  $F|_{[1-\rho, +\infty[} \equiv 1$
- (2)  $F$  ist monoton wachsend

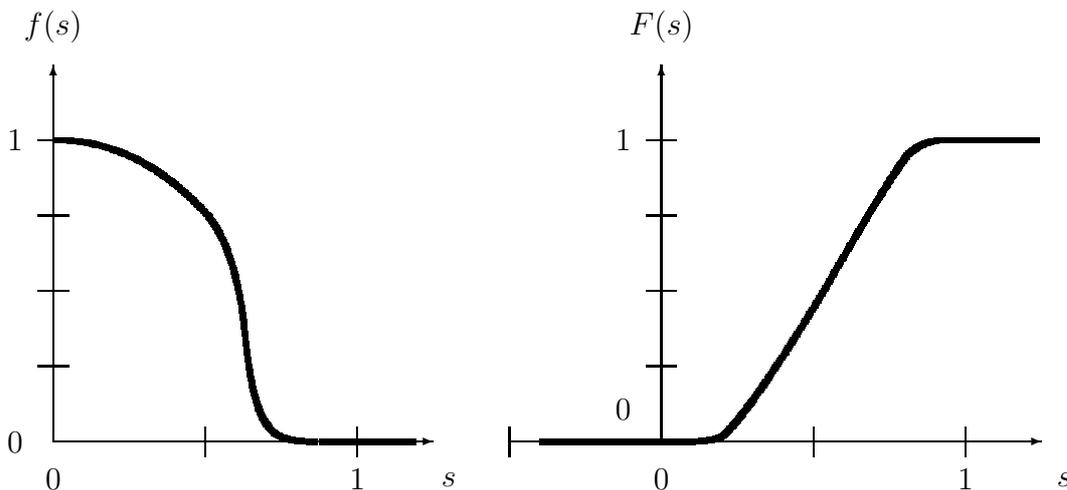


Abbildung IV.3: Die Funktionen  $F$  und  $f$

Wir definieren nun für alle  $\epsilon \in ]0, 1]$ ,  $\delta \in ]0, \frac{\epsilon}{4}]$ ,  $\tilde{\epsilon} \in ]0, 2]$  und  $\tilde{\delta} \in ]0, \frac{\tilde{\epsilon}}{4}]$  mit  $\tilde{\delta} < C'_1 \delta$  für eine noch zu bestimmende positive Konstante  $C'_1$  unsere  $C^\infty$ -Funktion  $h: M \rightarrow ]0, 1]$ . Später wird gezeigt, daß diese vier Parameter  $\epsilon, \delta, \tilde{\epsilon}, \tilde{\delta}$  so gewählt werden können, daß die minimalen Geodätischen immer in der Nähe der  $\gamma_i$  und  $\alpha_i$  bleiben. Die hinreichenden Bedingungen hierfür werden im wesentlichen von der Form

$$C_1 \tilde{\delta} < \delta, \quad C_2 \delta < \tilde{\epsilon}, \quad C_3 \tilde{\epsilon} < \epsilon, \quad C_4 \epsilon < 1$$

für „große“ Konstanten  $C_1, \dots, C_4 > 0$  sein.

Zum besseren Verständnis soll  $h$  zunächst verbal ungefähr beschrieben werden und danach erst durch Formeln exakt angegeben werden. Die Funktion  $h$  wird außerhalb der Autobahn den Wert 1 annehmen. Auf den  $\gamma_i$  ist sie  $\epsilon$ , deswegen ist sie auch in einer Umgebung der  $\gamma_i$  klein. Wir wollen  $h$  jedoch so konstruieren, daß dieser „Verkleinerungseffekt“ nur in den  $\delta$ -Tubenumgebungen der  $\gamma_i$  wirksam ist. Auf  $\alpha_i$  wird  $h$  den Wert  $\frac{\tilde{\epsilon}}{2}$  annehmen, außer in den Punkten, die gleichzeitig in der Nähe von  $\gamma_i$  sind. Auch dieser Verkleinerungseffekt „strahlt“ auf eine Umgebung aus; diesmal nehmen wir an, daß er nur auf der  $\tilde{\delta}$ -Tubenumgebung von  $\alpha_i$  und auf dem  $2\delta$ -Ball um  $m_0$  wirksam ist. Daß der  $\tilde{\epsilon}$ -Verkleinerungseffekt auch auf dem  $2\delta$ -Ball um  $m_0$  auftritt, erscheint zunächst unnatürlich. Es ist jedoch für Differenzierbarkeitsüberlegungen so einfacher.

Die  $\tilde{\epsilon}$ -Verkleinerungszone wird (wie oben angedeutet) so konstruiert, daß sie nicht mit der  $\epsilon$ -Verkleinerungszone zusammenhängt, sondern durch einen schmalen Spalt der Breite  $\delta$  von ihr getrennt ist. Damit soll verhindert werden, daß minimale Geodätische unkontrollierte Wechsel zwischen den Verkleinerungszonen machen.

Für die genaue Definition bestimmen wir zunächst die oben angeführte Konstante  $C'_1$ . Da die  $\alpha_i|_{[0, \frac{1}{4}]}$  in der normalen Karte um  $m_0$  in verschiedene Richtungen auseinanderlaufende Strahlen sind, kann man das  $C'_1 > 0$  so bestimmen, daß der Schnitt  $U_{\tilde{\delta}}(\alpha_i) \cap U_{\tilde{\delta}}(\alpha_{i'}) \subset V_{\frac{\tilde{\delta}}{2}}$  für alle  $i \neq i'$  und  $0 < C'_1 \tilde{\delta} < \delta$ . Außerdem verlangen wir, daß  $C'_1 > 4$ .

Wir definieren

$$h_1(q) := 1 - f\left(\frac{d(q, \cup \gamma_i)}{\delta}\right) \quad \forall q \in M.$$

$h_1$  wird für die  $\epsilon$ -Verkürzung maßgeblich sein, 1 wird keiner Verkürzung entsprechen, 0 maximaler Verkürzung. Wir definieren nun eine Funktion

$$h_2: M \rightarrow \mathbb{R}$$

durch die Forderungen, daß für alle  $q \in U_{\tilde{\delta}}(\alpha_i) - V_{\frac{\tilde{\delta}}{2}}$  gilt

$$h_2(q) := 1 - f\left(\frac{d(q, \alpha_i)}{\tilde{\delta}}\right) F\left(\frac{d(\tilde{p}_i(q), \gamma_i)}{\delta} - 2\right),$$

wobei  $\tilde{p}_i$  die Bündelprojektion auf  $\alpha_i$  ist, und daß für

$$q \notin \bigcup_{i=1}^k (U_{\tilde{\delta}}(\alpha_i) - V_{\frac{\tilde{\delta}}{2}})$$

gilt  $h_2(q) := 1$ . Diese Funktion wird für die  $\tilde{\epsilon}$ -Verkürzung zuständig sein außer nahe

bei  $m_0$ . Die Unstetigkeit auf  $\partial V_{\frac{\delta}{2}}$  ist ohne Auswirkung, da  $h_2$  mit  $h_3$  multipliziert wird und letztere auf  $V_\delta$  verschwindet:

$$h_3(q) := F\left(\frac{2d(q, m_0)}{\delta} - 2\right) \quad \forall q \in M.$$

Das Produkt  $h_2(q)h_3(q)$  regelt die  $\tilde{\epsilon}$ -Verkürzung. Schließlich konstruieren wir hiermit unser

$$h(q) := -1 + \epsilon + (1 - \epsilon)h_1(q) + \frac{\tilde{\epsilon}}{2} + \left(1 - \frac{\tilde{\epsilon}}{2}\right)h_2(q)h_3(q)$$

Offensichtlich ist diese Funktion  $C^\infty$  und  $h(M) \subset [\frac{\tilde{\epsilon}}{2}, 1]$ .

Die *Autobahnmetrik* ist dann

$$\langle, \rangle_A := h\langle, \rangle.$$

Es wird sehr nützlich sein, diese riemannsche Metrik als Funktion in den Parametern  $\epsilon$ ,  $\delta$ ,  $\tilde{\epsilon}$  und  $\tilde{\delta}$  zu betrachten, wobei die anderen gewählten Größen wie z.B. die Autobahn  $A$  und die riemannsche Metrik  $\langle, \rangle$  fest bleiben sollen. Um diese Abhängigkeit zu unterstreichen, schreiben wir auch oft

$$\langle, \rangle_A^{\epsilon, \delta, \tilde{\epsilon}, \tilde{\delta}}.$$

Offensichtlich gilt für alle zulässigen Tupel  $(\epsilon, \delta, \tilde{\epsilon}, \tilde{\delta})$  die Abschätzung

$$\langle, \rangle_A^{\epsilon, \delta, \tilde{\epsilon}, \tilde{\delta}} \leq \langle, \rangle_A^{(1, \frac{\tilde{\delta}}{4}, 2, \frac{\tilde{\delta}}{4})} = \langle, \rangle$$

Deswegen ist  $D := \text{diam}\langle, \rangle$  eine obere Schranke für die Durchmesser aller Metriken  $\langle, \rangle_A^{\epsilon, \delta, \tilde{\epsilon}, \tilde{\delta}}$ .

In den kommenden Abschnitten verstehen wir unter der *Schnellspur*

$$S := V_{\frac{\delta}{2}} \cup U_\delta \cup \bigcup_{i=1}^k U_{\tilde{\delta}}(\alpha_i) \subset A.$$

Außerhalb von  $S$  ist  $h$  konstant eins, also auch  $\langle, \rangle = \langle, \rangle_A$ .

### 1.c. Die Symbolfolge

Im folgenden sei  $c: I \rightarrow M$  mit  $I = [a, b]$  oder  $I = \mathbb{R}$  immer eine nach Bogenlänge parametrisierte homotop minimale Geodätische. Uns interessieren vor allem die Ergebnisse des Falls unendlicher Länge ( $I = \mathbb{R}$ ). Viele Ergebnisse gelten jedoch auch

im Fall endlicher Länge; sie werden uns im Fall, daß  $\Pi_1$  eine freie Gruppe ist, nützlich sein, um Existenzaussagen über minimale Geodätische unendlicher Länge bezüglich einer Autobahnmetrik zu machen. Wir wollen deswegen auch die meisten Aussagen für Geodätische endlicher Länge formulieren.

Zunächst werden wir zeigen, daß  $c$  für geeignete  $\epsilon$ ,  $\delta$ ,  $\tilde{\epsilon}$  und  $\tilde{\delta}$  die Autobahn nie verläßt und sich nur kurzzeitig von der Schnellspur  $S$  entfernt. Für die Beweise werden wir die im Anhang A behandelten Gruppennormen benutzen. Wir definieren auf  $\Pi_1 := \pi_1(M, m_0)$  hierzu folgende Längennormen:  $\|\cdot\|_{\text{Wort}}$  sei die Wortlänge bezüglich des Erzeugendensystems  $\{g_1, \dots, g_k\}$ ,  $\|\cdot\|_{\text{max}}$  sei die durch  $\langle, \rangle$  induzierte Längennorm auf  $\Pi_1$  und  $\|\cdot\|_A$  sei die durch  $\langle, \rangle_A^{(\epsilon, \delta, \tilde{\epsilon}, \tilde{\delta})}$  induzierte Längennorm für gegebenes Tupel  $(\epsilon, \delta, \tilde{\epsilon}, \tilde{\delta})$ . Aus Anhang A wissen wir, daß es eine (von  $\epsilon, \delta, \tilde{\epsilon}, \tilde{\delta}$  unabhängige) Konstante  $C > 0$  gibt mit

$$\|\cdot\|_{\text{Wort}} \leq C \|\cdot\|_{\text{max}}.$$

Durch einfache Abschätzungen erhalten wir ferner

$$\|\cdot\|_A \leq (\epsilon + \tilde{\epsilon} + 6\delta) \|\cdot\|_{\text{Wort}}.$$

**Hilfssatz 1.5.** *Zu jeder Konstanten  $L > 2D$  gibt es ein  $K > 0$ , so daß für alle zulässigen Tupel  $(\epsilon, \delta, \tilde{\epsilon}, \tilde{\delta})$  mit  $\epsilon + \tilde{\epsilon} + 6\delta < K$  gilt:*

*ist  $c: [a, b] \rightarrow M$  eine beliebige nach Bogenlänge parametrisierte homotop minimale Geodätische bezüglich  $\langle, \rangle_A^{\epsilon, \delta, \tilde{\epsilon}, \tilde{\delta}}$  und  $|a - b| > L$ , so ist*

$$c([a, b]) \cap S \neq \emptyset.$$

**BEWEIS:** Wir nehmen an, daß  $c([a, b]) \cap S = \emptyset$ .

Sei  $\tilde{c}$  ein Lift von  $c$  auf die universelle Überlagerung  $\tilde{M}$ , so erhalten wir für geeignete  $\alpha, \alpha' \in \Pi_1$  folgende Abschätzungskette:

$$\begin{aligned} L &= d(\tilde{c}(a), \tilde{c}(a + L)) \\ &\geq -d(\tilde{c}(a), \alpha\tilde{m}_0) - d(\tilde{c}(a + L), \alpha'\tilde{m}_0) + d(\alpha\tilde{m}_0, \alpha'\tilde{m}_0) \\ &\geq -2D + \|\alpha'^{-1}\alpha\|_{\text{max}} \\ &\geq -2D + \frac{1}{C} \|\alpha'^{-1}\alpha\|_{\text{Wort}} \\ &\geq -2D + \frac{1}{C(\epsilon + \tilde{\epsilon} + 6\delta)} \|\alpha'^{-1}\alpha\|_A \\ &\geq -2D + \frac{1}{C(\epsilon + \tilde{\epsilon} + 6\delta)} (L - 2D). \end{aligned}$$

Für  $\epsilon + \tilde{\epsilon} + 6\delta < \frac{1}{C} \frac{L-2D}{L+2D}$  ergibt dies einen Widerspruch.  $\square$

Dieser Hilfssatz garantiert uns, daß eine genügend lange minimale Geodätische nur eine beschränkte Zeit außerhalb von  $S$  verlaufen kann. Unter anderem wird auch eine minimale Geodätische  $c: \mathbb{R} \rightarrow M$  nach jedem Verlassen von  $S$  nach einer Zeit  $< L$  wieder zu  $S$  zurückkehren. Tatsächlich kann man für den Fall, daß eine minimale Geodätische die Schnellspur verläßt und wieder zurückkehrt, eine bessere Schranke angeben:

**Hilfssatz 1.6.** *Zu jeder Konstanten  $L' > 0$  gibt es ein  $K' > 0$ , so daß für alle zulässigen Tupel  $(\epsilon, \delta, \tilde{\epsilon}, \tilde{\delta})$  mit  $\epsilon + \tilde{\epsilon} + 6\delta < K'$  gilt:*

*ist  $c: [a, b] \rightarrow M$  eine beliebige nach Bogenlänge parametrisierte, homotop minimale Geodätische bezüglich  $\langle, \rangle_A^{\epsilon, \delta, \tilde{\epsilon}, \tilde{\delta}}$  mit  $c(a), c(b) \in \bar{S}$ , so ist*

$$c([t, t + L']) \cap S \neq \emptyset$$

*für alle  $t \in [a, b - L']$ .*

BEWEIS: Sei  $L' > 0$  vorgegeben. Setze  $L := 3D$ . Wenn  $K' > 0$  klein genug, so haben alle Punkte  $q, q' \in S$  mit  $d(q, q') \leq L$  bezüglich der Autobahnmetrik den Abstand  $d_A(q, q') < L'$ . Wir nehmen an, daß

$$c([t, t + L']) \cap S = \emptyset$$

für  $t \in [a, b - L']$ . Die Zusammenhangskomponente von  $t$  in der Menge  $c^{-1}(M - S)$  ist ein Intervall, das  $[t_1, t_2]$  heißen möge. Es ist  $c(t_i) \in \partial S$  für  $i = 1, 2$ . Wir können annehmen, daß  $K' < K$  und deswegen ist  $d(c(t_1), c(t_2)) < L$ , also auch

$$d_A(c(t_1), c(t_2)) \leq L',$$

was ein Widerspruch zur Minimalität von  $c$  ist. □

**Folgerung 1.7.** *Es gibt Konstanten  $C_1 \in [C'_1, \infty[$ ,  $C_2 \in [\frac{4}{r}, \infty[$  und  $C_3, C_4 \in [1, \infty[$ , so daß für alle  $(\epsilon, \delta, \tilde{\epsilon}, \tilde{\delta})$  mit*

$$C_1 \tilde{\delta} < \delta, \quad C_2 \delta < \tilde{\epsilon}, \quad C_3 \tilde{\epsilon} < \epsilon, \quad C_4 \epsilon < 1$$

*gilt: alle homotop minimalen Geodätischen  $c: [a, b] \rightarrow M$  mit Endpunkten in  $S$  liegen auf der Autobahn  $A$ . □*

Man kann sich außerdem leicht überlegen, daß die Konstanten der Folgerung so gewählt werden können, daß für alle zulässigen Tupel  $(\epsilon, \delta, \tilde{\epsilon}, \tilde{\delta})$  die Zusammenhangskomponenten des Urbildes von  $\overline{U_\delta}$  unter der universellen Überlagerung von  $A$

folgende Eigenschaft haben: liegen zwei Punkte  $a, b$  in derselben Zusammenhangskomponente, so liegt auch die eindeutig bestimmte Kürzeste bezüglich  $(\tilde{M}, \langle, \rangle_A)$  in dieser Zusammenhangskomponente. (Damit dies funktioniert, wurde die Schnellspur nicht zusammenhängend konstruiert, sondern mit einem „Spalt“ der Breite  $\delta$  zwischen den „Verkürzungszonen“ versehen.)

Hieraus folgt für  $\delta + L' < \tilde{r}$ :

$$c(t) \in \overline{S} \cup V_{\frac{3}{2}\delta+L'} \cup \bigcup_{i=1}^k U_{\delta+L'}(\alpha_i).$$

Im folgenden seien die Konstanten so gewählt, daß immer  $\delta + L' < \tilde{r}$ .

Argumentiert man analog für die  $\alpha_i$ , so zeigt sich, daß die Konstanten so gewählt werden können, daß

$$c(t) \in S_{erw} := \overline{S} \cup V_{\frac{3}{2}\delta+L'} \cup \bigcup_{i=1}^k (U_{\tilde{\delta}+L'}(\alpha_i) \cap U_{3\delta+L'}(\gamma_i))$$

$S_{erw}$  nennen wir die *erweiterte Schnellspur*.

Wir wissen nun, daß minimale Geodätische die  $\delta$ - bzw.  $\tilde{\delta}$ -Tubenumgebung nur kurz verlassen, und wollen nun das Verhalten einer minimalen Geodätischen in einem  $U_\delta(\gamma_i)$  betrachten. Hierzu nutzen wir das Noethersche Theorem. Da die Metrik  $\langle, \rangle$  so konstruiert wurde, daß es einen Bündelatlas auf  $U_\delta(\gamma_i)$  gibt, der nur aus Isometrien besteht, besitzt  $(U_\delta(\gamma_i), \langle, \rangle)$  mehrere 1-Parameter-Familien von lokalen Isometrien. Wir definieren nun explizit einige lokale Isometrien.

Sei  $W \subset \gamma_i(S^1)$  offen und zusammenhängend mit  $\overline{W} \neq \gamma_i(S^1)$ . Dann definieren wir die 1-Parameter-Familie von lokalen Isometrien, die *Längsverschiebungen*,

$$l^s: U_\delta(W) \rightarrow U_\delta(l^s(W)) \subset U_\delta(\gamma_i(S^1))$$

durch die Bedingung, daß

$$l^s(\gamma_i(t + \mathbb{Z})) = \gamma_i(t + s + \mathbb{Z})$$

gilt und daß das Vektorfeld

$$s \mapsto \chi^{-1}(l^s(p))$$

für die in Anhang 2 definierte Funktion  $\chi$  für jedes feste  $p \in U_\delta(W)$  parallel ist.

Eine 1-Parameter-Familie von Rotationen  $R^s$  ( $R^0 = \text{id}$ ) in der Faser über einem Punkt  $\gamma_i(t + \mathbb{Z})$  (d.h. von Isometrien mit Determinante 1, die den Punkt  $\gamma_i(t + \mathbb{Z})$  fest lassen,) läßt sich eindeutig zu einer 1-Parameter-Familie von lokalen Isometrien

von  $U_\delta(W)$  in sich selbst ( $W$  wie oben) fortsetzen, die alle Punkte von  $\gamma_i(S^1)$  fest lassen. Wir schreiben für diese Isometrien

$$r_R^s: U_\delta(W) \rightarrow U_\delta(W).$$

Da die Funktion  $h$  in  $U_\delta(\gamma_i)$  nur von der  $\langle, \rangle$ -Distanz zu  $\gamma_i$  abhängt, sind diese lokalen Isometrien auch lokale Isometrien bezüglich  $\langle, \rangle_A$ .

**Hilfssatz 1.8.** *Sei  $p_i$  die Bündelprojektion von  $U_\delta(\gamma_i)$  auf  $\gamma_i$  und  $I$  eine Zusammenhangskomponente von  $c^{-1}(U_\delta(\gamma_i))$ . Dann ist  $p_i \circ c(t)$  konstant auf  $I$  oder es gibt einen Parameterwechsel  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , so daß*

$$p_i \circ c(t) = \gamma_i(\varphi(t) + \mathbb{Z}) \quad \forall t \in I$$

und  $|\dot{\varphi}(t)|$  ist nach oben und unten durch eine positive Konstante beschränkt.

BEWEIS: Es gibt eine  $C^\infty$ -Funktion  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , die

$$p_i \circ c(t) = \gamma_i(\varphi(t) + \mathbb{Z}) \quad \forall t \in I$$

erfüllt. Mit dem Noetherschen Theorem (hier Theorem II.4.1) erhalten wir, daß folgendes  $\mathcal{P}$  konstant in  $t \in I$  ist:

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &:= \left\langle \dot{c}(t), \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} l^s(c(t)) \right\rangle_A \\ &= h(c(t)) \langle (Tp_i) \circ \dot{c}(t), \dot{\gamma}_i(\varphi(t) + \mathbb{Z}) \rangle \\ &= h(c(t)) \dot{\varphi}(t) \|\dot{\gamma}_i(\varphi(t) + \mathbb{Z})\|^2 \\ &= h(c(t)) \dot{\varphi}(t) \end{aligned}$$

Hieraus folgt der Hilfssatz. □

In der kommenden Überlegung betrachten wir nun das asymptotische Verhalten einer minimalen Geodätischen  $c: \mathbb{R} \rightarrow M$  bezüglich  $\langle, \rangle_A$ , für die es ein  $t_0 \in \mathbb{R}$  mit  $c(t) \in U_\delta(\gamma_i) \forall t \geq t_0$  gibt — die minimale Geodätische  $c$  verläßt den  $\delta$ -Tubus also gar nicht mehr.

**Hilfssatz 1.9.** *Sei  $c: \mathbb{R} \rightarrow M$  eine minimale Geodätische und es gebe ein  $t_0 \in \mathbb{R}$  mit  $c(t) \in U_\delta(\gamma_i) \forall t \geq t_0$ . Dann konvergiert  $c$  sogar  $C^1$ -exponentiell gegen  $\gamma_i$  oder gegen  $\gamma_i^{-1}$  (die rückwärts durchlaufene Kurve  $\gamma_i$ ).*

Die Definition  $C^1$ -exponentieller Konvergenz ist hier von der auf  $TM$  gewählten Metrik unabhängig, da  $\dot{\gamma}_i$  eine kompakte Bahn in  $TM$  hat.

Ein analoger Hilfssatz gilt natürlich auch für das asymptotische Verhalten von  $c$  für  $t \rightarrow -\infty$ .

BEWEIS: Für die von  $\langle, \rangle$  auf  $A$  induzierte Abstandsfunktion schreiben wir wieder  $d$ . Man kann durch elementare Abschätzungen zeigen, daß  $x(t) := d(c(t), \gamma_i) \rightarrow 0$  für  $t \rightarrow \infty$ . Sobald  $x(t) < \frac{\delta}{2}$  (wenn also  $c(t) \in U_{\frac{\delta}{2}}(\gamma_i)$ ), weiß man, daß sich die in der Definition von  $\langle, \rangle_A$  vorkommende Funktion  $f(s)$  wie  $1 - s^2$  verhält. Konkret rechnen wir nach, daß

$$(1.1) \quad h(c(t)) = \epsilon + (1 - \epsilon) \frac{x^2(t)}{\delta^2}.$$

Im Beweis des vorhergehenden Hilfssatzes rechneten wir nach, daß

$$\mathcal{P} := h(c(t)) \langle (Tp_i) \circ \dot{c}(t), \dot{\gamma}_i(\varphi(t) + \mathbf{Z}) \rangle$$

konstant. Da  $c$  nach Bogenlänge parametrisiert, ist

$$1 = \langle \dot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle_A = h(c(t)) \langle \dot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle = h(c(t)) \|\dot{c}(t)\|^2.$$

Für die oben definierten Rotationssymmetrien  $r_R^s$  erhalten wir mit dem Noetherschen Theorem die Erhaltungsgrößen

$$\langle \dot{c}(t), \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} r_R^s(c(t)) \rangle_A = h(c(t)) \langle \dot{c}(t), \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} r_R^s(c(t)) \rangle$$

Für  $t \rightarrow \infty$  gilt  $h(c(t)) \rightarrow \epsilon$  und  $\|\frac{d}{ds} r_R^s(c(t))\| \rightarrow 0$ , also gehen die letzteren Erhaltungsgrößen gegen Null und sind somit gleich Null.

Wir wissen also

$$\begin{aligned} 1 &= h(c(t)) \|\dot{c}(t)\|^2 \\ &= h(c(t)) \left( \dot{x}^2(t) + \|(Tp_i) \circ \dot{c}(t)\|^2 \right) \\ &= h(c(t)) \left( \dot{x}^2(t) + \frac{\mathcal{P}^2}{h(c(t))^2} \right) \end{aligned}$$

für das  $\mathcal{P}$ , das wir mit  $l^s$  erhielten. Dies ergibt

$$(1.2) \quad \dot{x}^2(t) = \frac{1}{h(c(t))} - \frac{\mathcal{P}^2}{h(c(t))^2} \rightarrow \frac{1}{\epsilon} - \frac{\mathcal{P}^2}{\epsilon^2} \text{ für } t \rightarrow \infty$$

und wegen  $x(t) \rightarrow 0$  erhalten wir  $\epsilon = \mathcal{P}^2$ . Wir bekommen aus (1.1) und (1.2) nun die Differentialgleichung

$$|\dot{x}(t)| = \frac{\sqrt{1 - \epsilon} |x(t)|}{\delta h(c(t))}.$$

Es gibt somit Konstanten  $\tau_1, \tau_2 > 0$  mit

$$\tau_2|x(t)| \leq |\dot{x}(t)| \leq \tau_1|x(t)|$$

für alle  $t$ , die größer als ein gewisses  $t_1 > t_0$  sind. Hieraus folgt die exponentielle Konvergenz von  $x(t)$  und von  $\dot{x}(t)$  gegen 0.

Sei der Parameterwechsel  $\varphi$  wie im letzten Hilfssatz definiert. Aufgrund der Erhaltungsgrößen gibt es ein Vektorfeld  $X: \mathbb{R} \rightarrow T^\perp\gamma_i(S^1)$  längs  $\gamma_i$ , das bezüglich  $\langle, \rangle$  normiert und parallel ist und für das gilt

$$c(t) = \exp^{(R)}\left(x(\varphi(t))X(\varphi(t))\right).$$

Hieraus folgt die  $C^1$ -exponentielle Konvergenz von  $c$  gegen  $\gamma_i(\varphi(t) + \mathbb{Z})$  und da  $\dot{\varphi}(t)$  beschränkt ist, ergibt sich hieraus der zu beweisende Hilfssatz.  $\square$

Weiterhin wissen wir auch, daß die Zeit, die eine normierte minimale Geodätische in dem einfach zusammenhängenden *Autobahnkreuz*

$$U_W := V_{\frac{3}{2}\delta+L'} \cup \{q \in M \mid d(q, \bigcup \alpha_i) < \tilde{\delta} + L'\}$$

verbringen kann, durch dessen Durchmesser beschränkt ist. Minimale Geodätische unendlicher Länge müssen deswegen immer wieder eine  $\delta$ -Tubenumgebung eines  $\gamma_i$  durchlaufen. Hierfür benötigt sie mindestens eine Länge von  $\epsilon(1 - 2L' - 2\tilde{\delta})$ .

Wir wollen das Wichtigste zusammenfassen, was wir nun über der Verlauf der minimalen Geodätischen wissen. Hiermit definieren wir dann die „Symbolfolge“  $(g_{j_i}^{n_i})$ . Sie gibt den ungefähren Verlauf einer minimalen Geodätischen an: die Geodätische durchläuft nacheinander die zu den  $g_{j_i}^{n_i}$  gehörigen Schleifen der Autobahn.

**ZUSAMMENFASSUNG UND DEFINITION 1.10.** Zu gegebenem  $L > 2D$  gibt es Konstanten  $C_1 \in [C'_1, \infty[$ ,  $C_2 \in [\frac{4}{r}, \infty[$  und  $C_3, C_4 \in [1, \infty[$ , so daß für alle  $(\epsilon, \delta, \tilde{\epsilon}, \tilde{\delta})$  mit

$$C_1\tilde{\delta} < \delta, \quad C_2\delta < \tilde{\epsilon}, \quad C_3\tilde{\epsilon} < \epsilon, \quad C_4\epsilon < 1$$

die homotop minimalen Geodätischen  $c$  mit Länge  $> L$  bezüglich der Metrik  $\langle, \rangle_A^{\epsilon, \delta, \tilde{\epsilon}, \tilde{\delta}}$  die im folgenden beschriebene Gestalt haben.

A.) Für den Fall einer minimaler Geodätischen unendlicher Länge: Man kann  $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ ,  $j_i \in \{1, \dots, k\}$  und  $n_i \in \{-1, 1\}$  für  $i \in \mathbb{Z}$  finden mit

- (1)  $b_{i-1} \leq a_i < b_i$
- (2)  $c|_{]a_i, b_i[}$  ist Kürzeste in  $(U_\delta(\gamma_{j_i}), \langle, \rangle_A^{\epsilon, \delta, \tilde{\epsilon}, \tilde{\delta}})$

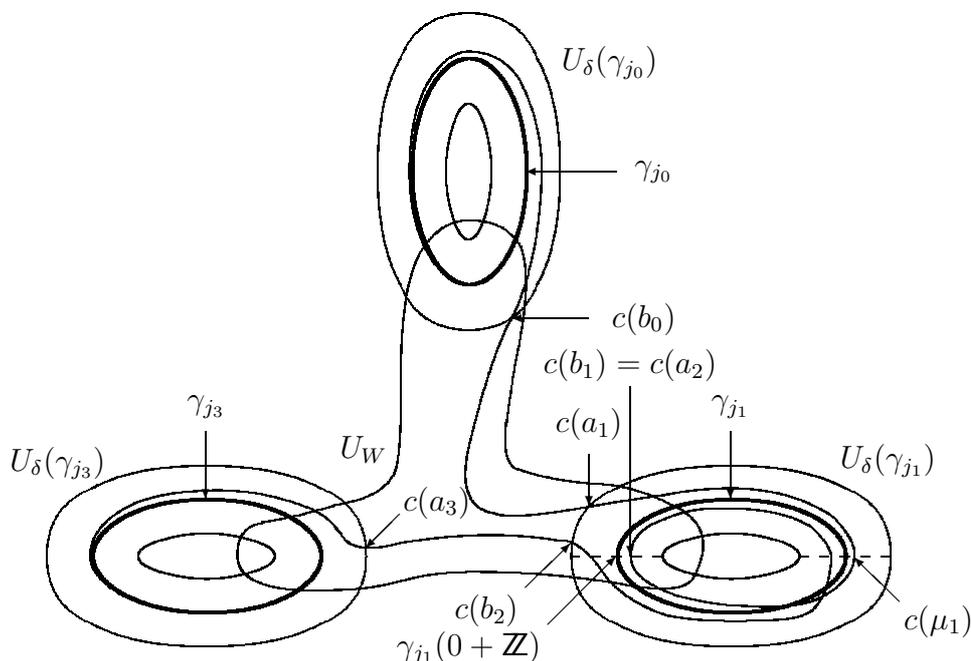


Abbildung IV.4: Eine minimale Geodätische  $c: I \rightarrow \mathbb{R}$  zu der Symbolfolge  $(\dots g_{j_0} g_{j_0} g_{j_0} g_{j_1} g_{j_1} g_{j_3} g_{j_3} g_{j_3} \dots)$

- (3) Wenn  $b_{i-1} < a_i$ , so ist  $c(b_{i-1}) \in \partial U_\delta(\gamma_{j_{i-1}})$  und  $c(a_i) \in \partial U_\delta(\gamma_{j_i})$ , und  $c|_{[b_{i-1}, a_i]}$  ist Kürzeste im Autobahnkreuz  $(U_W, \langle, \rangle_A^{\epsilon, \delta, \bar{\epsilon}, \bar{\delta}})$
- (4) Wenn  $b_{i-1} = a_i$ , so ist  $j_{i-1} = j_i$  und  $p_{j_i} \circ c(a_i) = \gamma_{j_i}(0 + \mathbb{Z})$
- (5) Definieren wir  $\beta$  als Hintereinanderdurchlaufen eines Weges von  $m_0$  nach  $c(a_i)$  in  $U_W$ , dann von  $c|_{]a_i, b_i[}$  und schließlich eines Weges in  $U_W$  von  $c(b_i)$  nach  $m_0$ , so ist  $g_{j_i}^{n_i} = [\beta]$ . Hierbei sind die Klammern  $[\ ]$  die Homotopieklassen in  $M$  mit festem Basispunkt  $m_0$ .

Die  $a_i, b_i, j_i$  und  $g_{j_i}^{n_i}$  sind bis auf gemeinsame Translation der Indizes  $i$  eindeutig bestimmt. Wir wollen nun die eindeutig bestimmte Folge

$$(\dots, g_{j_{-1}}^{n_{-1}}, g_{j_0}^{n_0}, g_{j_1}^{n_1}, \dots)$$

die *Symbolfolge* von  $c$  nennen.

Im Falle  $b_{i-1} < a_i$  nennen wir die Restriktion  $c|_{[b_{i-1}, a_i]}$  *Tubenwechsel*.

B.) Für den Fall einer minimalen Geodätischen  $c: [a, b] \rightarrow M$  der Länge  $> L$ :  
Mit Hilfssatz 1.5 folgt, daß es ein  $t \in [a, b]$  gibt mit  $c(t) \in S$ . Die Konstanten  $C_1, \dots, C_4$  können sogar so gewählt werden, daß es ein  $t$  gibt mit  $c(t) \in U_\delta$ . Sei  $a' := \inf c^{-1}(U_\delta)$  und  $b' := \sup c^{-1}(U_\delta)$ . Es ist  $a' - a < L$  und  $b - b' < L$ . Wir können dann ein  $z \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  und  $a_i, b_i \in \mathbb{R}$  (für  $i = 0, \dots, z$ ) und  $j_i \in \{1, \dots, k\}$  (für  $i = 0, \dots, z$ ) und  $n_i \in \{-1, 1\}$  (für  $i = 1, \dots, z-1$ ) finden, so daß gilt:

- (1)  $a_0 = a'$  und  $b_z = b'$  und  $b_{i-1} \leq a_i < b_i$
- (2)  $c|_{]a_i, b_i[}$  ist Kürzeste in  $(U_\delta(\gamma_{j_i}), \langle, \rangle_A^{\epsilon, \delta, \tilde{\epsilon}, \tilde{\delta}})$  für  $i = 0, \dots, z$ .
- (3) Wenn  $b_{i-1} < a_i$  ( $i = 1, \dots, z$ ), so ist  $c(b_{i-1}) \in \partial U_\delta(\gamma_{j_{i-1}})$  und  $c(a_i) \in \partial U_\delta(\gamma_{j_i})$ ,  
und  $c|_{[b_{i-1}, a_i]}$  ist Kürzeste im Autobahnkreuz  $(U_W, \langle, \rangle_A^{\epsilon, \delta, \tilde{\epsilon}, \tilde{\delta}})$
- (4) Wenn  $b_{i-1} = a_i$ ,  $i = 1, \dots, z$ , so ist  $j_{i-1} = j_i$  und  $p_{j_i} \circ c(a_i) = \gamma_{j_i}(0 + \mathbb{Z})$
- (5) Definieren wir für  $i = 1, \dots, z$  den Weg  $\beta$  als Hintereinanderdurchlaufen eines Weges von  $m_0$  nach  $c(a_i)$  in  $U_W$ , dann von  $c|_{]a_i, b_i[}$  und schließlich eines Weges in  $U_W$  von  $c(b_i)$  nach  $m_0$ , so ist  $[\alpha_{j_i}^{-1} \gamma_{j_i} \alpha_{j_i}]^{n_i} = [\beta]$ .
- (6)  $b_0$  ist das größte Element in  $[a', b']$  mit  $c(]a_0, b_0[) \subset U_\delta(\gamma_{j_0}) - p_{j_0}^{-1}(\gamma_{j_0}(0 + \mathbb{Z}))$   
und  $a_z$  das kleinste Element in  $[a', b']$  mit  $c(]a_z, b_z[) \subset U_\delta(\gamma_{j_z}) - p_{j_z}^{-1}(\gamma_{j_z}(0 + \mathbb{Z}))$

Die Zahl  $z$  sowie die  $a_i, b_i, j_i$  und  $g_{j_i}^{n_i}$  sind hierbei eindeutig bestimmt.

Wir wollen analog zu oben die eindeutig bestimmte Folge

$$(g_{j_1}^{n_1}, g_{j_2}^{n_2}, \dots, g_{j_z}^{n_z})$$

die *Symbolfolge* von  $c$  nennen. Wenn  $b_{i-1} < a_i$  gilt, nennen wir wieder die Restriktion  $c|_{[b_{i-1}, a_i]}$  *Tubenwechsel*.

In beiden Fällen (A. und B.) nennen wir

$$(g_{j_i}^{n_i}, \dots, g_{j_{i'}}^{n_{i'}})$$

mit  $i < i'$  (bzw.  $1 \leq i \leq i' \leq z$ ) ein (*endliches*) *Segment* der Symbolfolge.

#### BEMERKUNGEN 1.11.

1. Die  $n_i$  sind im allgemeinen nicht eindeutig bestimmt. Eine eindeutige Bestimmung ist nicht möglich, wenn  $g_j$  ein Element von  $\Pi_1$  der Ordnung 2 ist.
2. Nach Hilfssatz 1.9 konvergieren minimale Geodätische unendlicher Länge, deren Symbolfolge stationär wird,  $C^1$ -exponentiell gegen das entsprechende  $\gamma_i$ .

3. Die einzigen minimalen Geodätischen unendlicher Länge ohne Tubenwechsel sind die  $\gamma_i$  selbst (bzw. Reparametrisierungen hiervon).
4. Ist  $c$  eine minimale Geodätische unendlicher Länge, so ist die Symbolfolge von  $c|_{[a,b]}$  ein endliches Segment der Symbolfolge von  $c$ . Für  $a \rightarrow -\infty$  (bzw.  $b \rightarrow \infty$ ) wächst sie immer weiter nach links (bzw. nach rechts).

Die nun folgenden Überlegungen formulieren wir nur für minimale Geodätische unendlicher Länge. Es wäre jedoch gut möglich, ähnliche Definitionen für Geodätische endlicher Länge zu machen.

Auf einem Intervall ohne Tubenwechsel bewegt sich eine minimale Geodätische immer auf der  $U_\delta$ -Umgebung eines  $\gamma_j$  und wechselt beim nächsten Tubenwechsel auf eine  $U_\delta$ -Umgebung eines anderen  $\gamma_j$ . Anschaulich hat man den Eindruck, daß für diesen Wechsel immer eine ungefähr gleich große zusätzliche Länge  $c$  notwendig ist. Diese zusätzliche Länge soll nun abgeschätzt werden. Für die Formulierung in der später benötigten Form brauchen wir noch eine Definition. Hierbei sei zu der minimalen Geodätischen  $c$  bezüglich einer Autobahnmetrik wie oben Folgen  $(a_i)$ ,  $(b_i)$ ,  $(n_i)$  und  $(j_i)$  gegeben. Für jedes  $i$  gibt es dann genau ein  $\mu_i \in [a_i, b_i]$  mit  $c(\mu_i) = \gamma_{j_i}(\frac{1}{2} + \mathbb{Z})$ .

Wir zeigen nun:

**Satz 1.12.** *Man kann die Konstanten  $C_1, \dots, C_4$  so wählen, daß für alle zugehörigen Autobahnmetriken gilt: Die minimale Geodätische  $c$  habe  $w$  Tubenwechsel zwischen  $\mu_i$  und  $\mu_{i'}$ . Dann läßt sich die Länge  $\mathcal{L}$  bezüglich der Autobahnmetrik abschätzen:*

$$w(\tilde{\epsilon}(1 - 9\delta - 4L') - 2\epsilon\tilde{\delta}) \leq \mathcal{L}(c|_{[\mu_i, \mu_{i'}]}) - \epsilon(i' - i) \leq w(\tilde{\epsilon} + 6\delta) + 2\delta$$

Wir nennen das Verhältnis der beiden Schranken (bis auf die  $2\delta$ ) das *Schrankenverhältnis*

$$\eta := \frac{\tilde{\epsilon} + 6\delta}{\tilde{\epsilon}(1 - 9\delta - 4L') - 2\epsilon\tilde{\delta}}.$$

Wählt man  $\delta$  und  $\tilde{\delta}$  klein gegenüber  $\tilde{\epsilon}$  und  $\epsilon$ , so ist  $\eta$  nahezu 1.

**BEWEIS:** Die Abschätzung nach oben erhält man, indem wir einen zu  $c|_{[\mu_i, \mu_{i'}]}$  homotopen Weg konstruieren, der höchstens die Länge  $\epsilon(i' - i) + w(\tilde{\epsilon} + 6\delta) + 2\delta$  hat. Man nehme den Weg, der von  $c(\mu_i)$  auf der Kürzesten nach  $p_{j_i}(c(\mu_i))$  geht, dann auf den  $\gamma_i$  und  $\alpha_i$  gemäß der Symbolfolge von  $c$  und schließlich wieder auf der Kürzesten von  $p_{j_{i'}}(c(\mu_{i'}))$  nach  $c(\mu_{i'})$ .

Für die Abschätzung nach unten nutzen wir die Tatsache, daß die Geodätische ganz in der erweiterten Schnellspur  $S_{erw}$  verläuft. Die Länge, die  $c|_{[\mu_i, \mu_{i'}]}$  in  $\bar{S}$  hat, und somit  $\mathcal{L}(c|_{[\mu_i, \mu_{i'}]})$  kann man einfach durch

$$\begin{aligned} & w\left(\tilde{\epsilon}\left(1 - 2\left(\frac{3}{2}\delta + L'\right) - 2(3\delta + L')\right) - 2\epsilon(\tilde{\delta} + L')\right) + \epsilon(i' - i) \\ & = w\left(\tilde{\epsilon}(1 - 9\delta - 4L) - 2\epsilon(\tilde{\delta} + L')\right) + \epsilon(i' - i) \end{aligned}$$

nach unten abschätzen. Bezieht man auch noch die Länge in  $S_{erw} - \bar{S}$  ein, so läßt sich die Abschätzung um  $2w\epsilon L'$  verbessern und wir erhalten die Abschätzung des Satzes.  $\square$

### 1.d. Der Limes des asymptotischen Limes bei Autobahnmetriken

In diesem Unterabschnitt sei  $M$  eine mit einer Autobahnmetrik versehene kompakte Mannigfaltigkeit mit  $\dim M \geq 3$ . Die minimale Geodätische  $c$  habe eine Symbolfolge, die für  $t \rightarrow \infty$  stationär wird, d.h. es gebe ein  $i_0 \in \mathbb{N}$ , einen Erzeuger  $g_{j_\infty}$  und ein  $n_\infty = \pm 1$ , so daß  $g_{j_i}^{n_i} = g_{j_\infty}^{n_\infty}$  für alle  $i > i_0$ . Dann gibt es ein  $t_0 \in \mathbb{R}$ , so daß  $c(t) \in U_\delta(\gamma_i) \forall t \geq t_0$ . Nach Hilfssatz 1.9 konvergiert die Kurve  $c$  dann  $C^1$ -exponentiell gegen  $\gamma_{j_\infty}^{\pm 1}$ . Dieser Exponent ist für  $g_{j_\infty}^2 \neq e$  die Zahl  $n_\infty$ , im Fall  $g_{j_\infty}^2 = e$  können wir o.B.d.A. annehmen, daß der Exponent gleich  $n_\infty$  ist. Da  $M$  und somit das Einheitstangentenbündel über  $M$  kompakt ist, wissen wir mit Proposition III.3.1, daß  $F_\sigma \circ c$  auch  $C^1$ -exponentiell gegen  $F_\sigma \circ (\gamma_i^{n_\infty})$  konvergiert.

Wir wollen nun annehmen,  $F_\sigma$  so gewählt wurde, daß

$$(1.3) \quad F_\sigma \circ \gamma_j(t + \mathbb{Z}) = \Gamma_\sigma a_j \exp(tv_j)$$

für geeignete  $a_j \in G_\sigma$  und  $v_j \in \mathfrak{g}_\sigma$ . Dies ist keine wesentliche Einschränkung:

- In unserem Beispiel einer Autobahnmetrik auf dem  $m$ -Torus mit  $m \geq 3$  erfüllt  $F_1 := \text{id}$  diese Bedingung.
- In unserem Beispiel einer Autobahnmetrik auf  $T^2 \times S^2$  nehme man für  $F_1$  die Projektion auf  $T^2$ . Dieses  $F_1$  erfüllt die Bedingung.
- In unserem Beispiel einer Autobahnmetrik auf  $\Gamma_{(1)} \backslash H_3$  erfüllt  $F_2 := \text{id}$  die Bedingung.
- Allgemein kann man zeigen, daß zu gegebenen geschlossenen Wegen  $\gamma_i$  einer Autobahn die Richtungsabbildung so gewählt werden kann, daß es disjunkte

geschlossene Wege  $\Gamma_\sigma a_j \exp(tv_j)$  gibt, so daß Bedingung (1.3) erfüllt ist. Der Gedankengang soll nur kurz skizziert werden, da diese Tatsache im folgenden nicht mehr benötigt wird. Hierzu betrachten wir die Definition von  $F_\sigma$  in Abschnitt III.2. Zu Beginn dieser Definition wird mit Theorem V(4.3) aus [Whitehe] eine stetige Abbildung  $\bar{F}_\sigma$  konstruiert. Die Konstruktion in [Whitehe] kann aber problemlos so abgewandelt werden, daß  $\bar{F}_\sigma$  die Kurven  $\gamma_j$  wie gewünscht abbildet. Für den Übergang zu der glatten Abbildung  $F_\sigma$  wenden wir dann Satz B.1.6 an, wobei  $N_0$  die Vereinigung der Spuren der  $\gamma_j$  sein möge und  $M_0$  die Vereinigung der Spuren der  $\Gamma_\sigma a_j \exp(tv_j)$ . Durch eine  $C^\infty$ -Homotopie kann  $F_\sigma$  so abgewandelt werden, daß  $F_\sigma(q) = \bar{F}_\sigma(q) \forall q \in N_0$  gilt. Also erfüllt  $F_\sigma$  die Bedingung (1.3).

Mit diesem günstigen  $F_\sigma$  kann man nun Lemma III.3.2 anwenden. Wir erhalten

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \mathbb{A}^\sigma \lim_{t \rightarrow +\infty} (c \circ \varphi)|_{[s,t]} = \exp n_\infty v,$$

wobei  $\varphi$  der Parameterwechsel aus Hilfssatz 1.8 ist.

### 1.e. Homolog minimale Geodätische

Mit den erhaltenen Ergebnissen wollen wir nun auf einer beliebigen kompakten, zusammenhängenden Mannigfaltigkeit mit Dimension mindestens 3 und nicht trivialer Fundamentalgruppe eine riemannsche Metrik mit nur wenigen (ganz-)homolog minimalen Geodätischen von unendlicher Länge konstruieren. Völlig analoge Aussagen gelten wieder für Geodätische mit Länge  $> L > 2D$ , wenn die Konstanten  $C_1, \dots, C_4$  gemäß Hilfssatz 1.5 gewählt sind. Um Fast-Wiederholungen zu vermeiden, wird aber nur der Fall minimaler Geodätischer unendlicher Länge genauer ausgearbeitet. Um die Analogie zu den Fundamentalgruppen deutlicher werden zu lassen, schreiben wir in diesem Abschnitt  $H_1(M, \mathbb{Z})$  auch multiplikativ, obwohl die Gruppe abelsch ist.

Sei zunächst  $G$  eine endlich erzeugte Gruppe und  $\{g_1, \dots, g_k\}$  eine Menge von Erzeugenden von  $G$ . Wir ordnen jeder Wortdarstellung  $g_{j_1}^{n_1} \dots g_{j_l}^{n_l}$  mit  $n_i \in \{-1, 1\}$  ein Paar aus nicht-negativen ganzen Zahlen  $(l, w)$  zu, wobei  $l$  die Wortlänge ist (das neutrale Element hat hierbei per definitionem die Wortlänge 0) und  $w$  die Anzahl der  $q \in \{1, \dots, l-1\}$  mit  $j_q \neq j_{q+1}$  (für  $l \leq 1$  sei  $w = 0$ ). Derartige  $q$  nennen wir von nun an einen *Wechsel* der Wortdarstellung. Wir versehen nun die Paare mit der lexikographischen Ordnung, d.h.

$$(l, w) \leq (l', w') \Leftrightarrow l < l' \text{ oder } (l = l' \text{ und } w \leq w').$$

Wir betrachten nun die Menge aller Wortdarstellungen, die ein festes  $g \in \Gamma$  darstellen. Die Menge der zugeordneten Paare  $(l, w)$  zu den Wortdarstellungen von  $g$

hat ein Minimum  $(l_g, w_g)$ . Eine Wortdarstellung von  $g$  der Länge  $l_g$  und mit  $w_g$  Wechslen nennen wir eine *superminimale Wortdarstellung*. Offensichtlich hat jedes Element mindestens eine superminimale Wortdarstellung. In diesem und in den folgenden Unterabschnitten werden wir nun die Charakterisierung homotop oder homolog minimaler Geodätischer auf das gruppentheoretische Problem zurückführen, superminimale Wortdarstellungen zu finden.

**BEISPIEL 1.13.** Wenn  $G$  abelsch ist, so hat jede superminimale Wortdarstellung eines Elements  $g \neq e$  aus  $G$  die Form

$$\underbrace{g_{j_1}^{n_1} \cdots g_{j_1}^{n_1}}_{s_1\text{-mal}} \underbrace{g_{j_2}^{n_2} \cdots g_{j_2}^{n_2}}_{s_2\text{-mal}} \cdots \underbrace{g_{j_{w+1}}^{n_{w+1}} \cdots g_{j_{w+1}}^{n_{w+1}}}_{s_{w+1}\text{-mal}}$$

mit  $w \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $j_1, \dots, j_{w+1} \in \{1, \dots, k\}$  (mit  $j_i \neq j_{i'}$  für  $i \neq i'$ ),  $n_i \in \{-1, 1\}$  und  $s_i \in \mathbb{N}$ .

Sei nun  $\{g_1, \dots, g_k\}$  ein Erzeugendensystem der Fundamentalgruppe von  $M$ . Wir wählen eine passende Autobahn  $A$  auf  $M$ .

$C_1, C_2, C_3$  und  $C_4$  seien so groß gewählt, daß alle obigen Überlegungen funktionieren und außerdem gilt

$$C_3 > 2k + 3 \quad \text{und} \quad C_2 > 6.$$

Die obigen Konstanten  $C_1, \dots, C_4$  sollen außerdem so gewählt werden, daß das Schrankenverhältnis

$$\eta < 1 + \frac{1}{4(k+1)}.$$

Sei wie in Unterabschnitt 1.c  $(\dots, g_{j_{-1}}^{n_{-1}}, g_{j_0}^{n_0}, g_{j_1}^{n_1}, g_{j_2}^{n_2}, \dots)$  die Symbolfolge von einer homolog minimalen Geodätischen  $c$  bezüglich  $\langle \cdot \rangle_A^{\epsilon, \delta, \bar{\epsilon}, \bar{\delta}}$ . Die Zahlen  $a_i, b_i$  und  $\mu_i$  seien ebenfalls wie dort definiert. In Abschnitt I.1 definierten wir eine Abbildung

$$\phi_{Hur}: \pi_1(M, m_0) \rightarrow H_1(M, \mathbb{Z}).$$

**Satz 1.14.** *Sei  $c: \mathbb{R} \rightarrow M$  eine homolog minimale Geodätische bezüglich der Autobahnmetrik mit den obigen Bezeichnungen. Dann ist*

- (1)  $\phi_{Hur}(g_{j_s}) \neq e$  für alle  $s \in \mathbb{Z}$ .
- (2) Sind  $c|_{[b_{i-1}, a_i]}$  und  $c|_{[b_{i'}, a_{i'+1}]}$  Tubenwechsel mit  $i \leq i'$ . Dann ist das endliche Segment

$$\mathcal{D} := \left( \phi_{Hur}(g_{j_i})^{n_i}, \dots, \phi_{Hur}(g_{j_{i'}})^{n_{i'}} \right)$$

der Symbolfolge eine superminimale Wortdarstellung in der Gruppe  $H_1(M, \mathbb{Z})$  bezüglich des Erzeugendensystems  $(\phi_{Hur}(g_1), \dots, \phi_{Hur}(g_k))$  und

$$\phi_{Hur}(g_{j_{i-1}}) \neq \phi_{Hur}(g_{j_s}) \neq \phi_{Hur}(g_{j_{i'+1}})$$

für alle  $s \in \{i, \dots, i'\}$ .

Im folgenden Beweis sind alle Längen von Kurven Längen bezüglich der Autobahnmetrik  $\langle, \rangle_A^{\epsilon, \delta, \tilde{\epsilon}, \tilde{\delta}}$ .

BEWEIS: „(1)“: Angenommen  $\phi_{Hur}(g_{j_s}) = e$  für ein  $s \in \mathbb{Z}$ . Dann konstruieren wir eine Kurve  $c^\#$ , die der Minimalität von  $c|_{[\mu_{s-1}, \mu_{s+1}]}$  widerspricht. Die Kurve durchlaufe die folgenden Strecken: Zuerst laufe  $c^\#$  auf der Kürzesten von  $c(\mu_{s-1})$  nach  $p_{j_{s-1}}(c(\mu_{s-1})) = \gamma_{j_{s-1}}(\frac{1}{2} + \mathbb{Z})$ , dann auf  $\gamma_{j_{s-1}}$  in der dem Vorzeichen von  $n_{s-1}$  entsprechenden Richtung nach  $\gamma_{j_{s-1}}(0 + \mathbb{Z})$ , dann auf  $\alpha_{s-1}$  nach  $m_0$ ; von dort geht  $c^\#$  entlang  $\alpha_{s+1}$  nach  $\gamma_{j_{s+1}}(0 + \mathbb{Z})$ , dann entlang  $\gamma_{j_{s+1}}$  nach  $\gamma_{j_{s+1}}(\frac{1}{2} + \mathbb{Z})$  in der dem Vorzeichen von  $n_{s+1}$  entsprechenden Richtung und schließlich nach  $c(\mu_{s+1})$ . Dann ist  $c^\#$  ganz-homolog zu  $c|_{[\mu_{s-1}, \mu_{s+1}]}$ .

Die Länge von  $c^\#$  ist  $\leq 2\delta + \epsilon + (\tilde{\epsilon} + 6\delta)$ . Die Länge von  $c|_{[\mu_{s-1}, \mu_{s+1}]}$  hingegen ist  $\geq 2\epsilon$ . Aufgrund der Wahl der Konstanten  $C_1, \dots, C_4$  ergibt sich also ein Widerspruch zur Minimalität von  $c|_{[\mu_{s-1}, \mu_{s+1}]}$ .

„(2)“: Wir nehmen zunächst an, daß  $\mathcal{D}$  nicht superminimal ist. Damit wollen wir eine Kurve  $c^\#$  konstruieren, die der Minimalität von  $c|_{[\mu_{i-1}, \mu_{i'+1}]}$  widerspricht. Hierzu nehmen wir eine superminimale Wortdarstellung  $\mathcal{D}^\#$  von der ganzen Homologieklassen  $\phi_{Hur}(g_i)^{n_i} \cdots \phi_{Hur}(g_{i'})^{n_{i'}}$ . Grob gesprochen sind der Anfang und das Ende von  $c^\#$  gerade die Konstruktion von  $c^\#$  in „(1)“, in der Mitte verläuft das hier konstruierte  $c^\#$  „gemäß“ der Wortdarstellung  $\mathcal{D}^\#$ ; die Konstruktion von  $c^\#$  wird nun genauer ausgeführt.

Wir schreiben

$$\mathcal{D}^\# = (\phi_{Hur}(g_{j_i^\#})^{n_i^\#}, \dots, \phi_{Hur}(g_{j_{i'}^\#})^{n_{i'}^\#}).$$

mit geeignetem  $i^\# \geq i$  und geeigneten  $n_s^\# \in \{-1, 1\}$  und  $j_s^\# \in \{1, \dots, k\}$  für  $i \leq s \leq i^\#$ . Die Kurve  $c^\#$  verlaufe zunächst wie in „(1)“ von  $c(\mu_{j_{i-1}})$  nach  $p_{j_{i-1}}(c(\mu_{j_{i-1}})) = \gamma_{j_{i-1}}(\frac{1}{2} + \mathbb{Z})$ , dann nach  $\gamma_{j_{i-1}}(0 + \mathbb{Z})$  und von dort nach  $m_0$  entlang  $\alpha_{j_{i-1}}$ . Dann aber läuft  $c^\#$  entlang  $\alpha_{j_i^\#}(0 + \mathbb{Z})$  nach  $\gamma_{j_i^\#}(0 + \mathbb{Z})$  und durchläuft anschließend in der dem Vorzeichen von  $n_i^\#$  entsprechenden Richtung die Schleife  $\gamma_{j_i^\#}$ . Ist  $i+1 \leq i^\#$  und  $j_i = j_{i+1}$ , so durchläuft  $c^\#$  gleich nochmals diese Schleife, anschließend für  $i+2$  evtl. nochmals, u.s.w., bis schließlich  $i^\#$  erreicht ist oder ein Wechsel in  $\mathcal{D}^\#$  auftritt,

d.h.  $j_s \neq j_{s+1}$ . Anschließend läuft  $c^\#$  entlang  $\alpha_{j_s^\#}$  zu  $m_0$  zurück. Wenn  $i^\#$  noch nicht erreicht ist, durchläuft  $c^\#$  noch einige weitere  $\alpha_j$  und  $\gamma_j$  auf analoge Art und Weise und kehrt hierbei bei jedem Wechsel in  $\mathcal{D}^\#$  zu  $m_0$  zurück, bis schließlich  $i^\#$  erreicht ist. Zum Schluß geht  $c^\#$  wieder wie in „(1)“ von  $m_0$  nach  $\gamma_{j_{i'+1}}$  ( $0 + \mathbb{Z}$ ), dann nach  $\gamma_{j_{i'+1}}(\frac{1}{2} + \mathbb{Z})$  und letztendlich nach  $c_{[\mu_{i-1}, \mu_{i'+1}]}$ . Die so konstruierte Kurve  $c^\#$  ist ganz-homolog zu  $c_{[\mu_{i-1}, \mu_{i'+1}]}$ . Ihre Länge läßt sich nun mit Satz 1.12 abschätzen, sie ist

$$\leq 2\delta + (l^\# + 1)\epsilon + (w^\# + 2)(\tilde{\epsilon} + 6\delta),$$

wobei  $l^\# = i^\# - i + 1$  die Länge von  $\mathcal{D}^\#$  und  $w^\#$  die Anzahl der Wechsel von  $\mathcal{D}^\#$  ist. Andererseits ist aber auch

$$\mathcal{L}(c_{[\mu_{i-1}, \mu_{i'+1}]}) \geq (l + 1)\epsilon + \frac{w + 2}{\eta}(\tilde{\epsilon} + 6\delta),$$

wobei  $l$  die Länge von  $\mathcal{D}$  und  $w$  die Anzahl der Wechsel von  $\mathcal{D}$  ist. Wir schreiben für die Differenz

$$\Delta := \mathcal{L}(c^\#) - \mathcal{L}(c_{[\mu_{i-1}, \mu_{i'+1}]}) .$$

Im Fall  $l > l^\#$  ist dann

$$\begin{aligned} \Delta &\leq 2\delta + (l^\# - l)\epsilon + (w^\# + 2)(\tilde{\epsilon} + 6\delta) \\ &\leq 2\delta - \epsilon + (k + 1)(\tilde{\epsilon} + 6\delta), \quad \text{da } w^\# \leq k - 1 \\ &\leq -\epsilon + (2k + 3)\tilde{\epsilon} < 0, \quad \text{da } C_3 > 2k + 3 \end{aligned}$$

Im Fall  $l \leq l^\#$  ist wegen der Superminimalität von  $\mathcal{D}^\#$  und der Nicht-Superminimalität von  $\mathcal{D}$  dann  $l = l^\#$  und  $w > w^\#$  und man erhält

$$\begin{aligned} \Delta &\leq 2\delta + (\tilde{\epsilon} + 6\delta) \left( w^\# + 2 - \frac{w + 2}{\eta} \right) \\ &\leq 2\delta + \frac{\tilde{\epsilon} + 6\delta}{\eta} \left( \underbrace{w^\# - w}_{\leq -1} + \underbrace{(\eta - 1)}_{\leq \frac{1}{4(k+1)}} \underbrace{(w^\# + 2)}_{\leq k+1} \right) \\ &\leq 2\delta + \frac{\tilde{\epsilon} + 6\delta}{\eta} \left( -\frac{3}{4} \right) \\ &\leq \frac{\tilde{\epsilon}}{3} - \frac{\tilde{\epsilon}}{2} < 0, \quad \text{da } C_2 \geq 6 \text{ und } \eta \leq \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Wir erhalten also einen Widerspruch;  $\mathcal{D}$  ist somit superminimal.

Zu zeigen bleibt noch

$$\phi_{Hur}(g_{j_{i-1}}) \neq \phi_{Hur}(g_{j_s}) \neq \phi_{Hur}(g_{j_{i'+1}})$$

für alle  $s \in \{i, \dots, i'\}$ . Wir wollen das Gegenteil annehmen, also o.B.d.A.  $\phi_{Hur}(g_{j_s}) = \phi_{Hur}(g_{j_{i-1}})$  für ein  $s$ . Da  $H_1(M, \mathbb{Z})$  abelsch ist, kann man die superminimale Wortdarstellung  $\mathcal{D}$  zu einer superminimalen Wortdarstellung  $\mathcal{D}^\#$  umordnen, die mit  $\phi_{Hur}(g_{j_{i-1}})$  beginnt und dasselbe Element der Homologiegruppe repräsentiert. Konstruiert man wie oben zu  $\mathcal{D}^\#$  eine Kurve  $c^\#$ , so durchläuft  $c^\#$  nach dem ersten Passieren von  $\gamma_{j_{i-1}}(0 + \mathbb{Z})$  zuerst  $\alpha_{j_{i-1}}$  in umgekehrter Richtung wie  $\alpha_{j_{i-1}}$  und dann in gleicher Richtung. Wir erhalten nun aus  $c^\#$  eine Kurve  $c^{\#\#}$ , indem wir dieses Hin- und Herlaufen weglassen. Die Kurve  $c^{\#\#}$  ist homotop zu  $c^\#$ , die Abschätzung der Länge von  $c^{\#\#}$  nach oben kann jedoch um  $\tilde{\epsilon} + 6\delta$  kleiner als diejenige von  $c^\#$  gemacht werden. Völlig analog zu der Abschätzung von  $\Delta$  für den Fall  $l = l^\#$  und  $w = w^\# + 1$  erhält man auch hier einen Widerspruch.  $\square$

Um unsere Aussagen möglichst stark formulieren zu können, zeigen wir noch ein gruppentheoretisches Lemma. Es ist mir nicht bekannt, ob dieses Lemma in der Literatur bereits bewiesen wurde.

**Lemma 1.15.** *Sei  $G$  eine endlich erzeugte Gruppe,  $p$  ein surjektiver Gruppenhomomorphismus auf die abelsche Gruppe  $H$  und seien  $h_1, \dots, h_{k'}$  Erzeuger von  $H$ . Dann kann man Erzeuger  $g_1, \dots, g_k$  von  $G$  mit  $k \geq k'$  so wählen, daß gilt:*

- (1)  $p(g_i) = h_i$  für alle  $1 \leq i \leq k'$ ,
- (2)  $p(g_i) = e$  für alle  $k' + 1 \leq i \leq k$ .

BEWEIS: Zunächst wählen wir  $\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_{k'} \in G$  mit  $p(\bar{g}_i) = h_i$ . Da  $G$  endlich erzeugt ist, kann man diese Erzeuger zu einem Erzeugendensystem  $\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_k$  mit  $k \geq k'$  erweitern. Nun gibt es ganzzahlige Koeffizienten  $a_{ij}$ , so daß

$$p(\bar{g}_j) = \prod_{i=1}^{k'} h_i^{a_{ij}} \quad \forall j = k' + 1, \dots, k.$$

Wir definieren nun  $g_j := \bar{g}_j$  für alle  $j = 1, \dots, k'$  und

$$g_j := \bar{g}_j \bar{g}_1^{-a_{1j}} \cdots \bar{g}_{k'}^{-a_{k'j}} \quad j = k' + 1, \dots, k.$$

Dann erzeugen  $g_1, \dots, g_k$  die Gruppe  $G$ , und (1) und (2) sind offensichtlich erfüllt.  $\square$

**Korollar 1.16.** *Auf jeder kompakten Mannigfaltigkeit gibt es eine Autobahnmetrik, so daß für jede ganz-homolog minimale Geodätische  $c: \mathbb{R} \rightarrow M$  die Anzahl der Tubenwechsel höchstens  $k'$  ist, wobei  $k'$  die minimale Anzahl von Erzeugenden von  $H_1(M, \mathbb{Z})$  ist.*

BEWEIS: Hierfür müssen wir die Erzeugenden der Fundamentalgruppe günstig wählen. Sei also  $h_1, \dots, h_{k'}$  ein Erzeugendensystem der Gruppe  $H_1(M, \mathbb{Z})$ , dann wählen wir mit dem vorangehenden Lemma Erzeuger  $g_1, \dots, g_k$  mit  $\phi_{Hur}(g_i) = h_i$  für  $1 \leq i \leq k'$  und  $\phi_{Hur}(g_i) = e$  für  $k' + 1 \leq i \leq k$ . Das Korollar folgt dann unmittelbar aus dem vorhergehenden Satz.  $\square$

BEISPIEL 1.17. Eine minimale Geodätische auf dem  $m$ -Torus, versehen mit einer geeigneten Autobahnmetrik, hat höchstens  $m$  Tubenwechsel.

BEMERKUNG 1.18. Ganz ähnlich zeigt man auch die Existenz von Autobahnmetriken, so daß für alle reell-homolog minimalen Geodätischen, die Anzahl der Tubenwechsel höchstens  $\dim H_1(M, \mathbb{R})$  ist. Hierzu definieren wir zunächst mit den Bezeichnungen von Abschnitt I.1 die Abbildung

$$H := \phi_{Hom} \circ \phi_{Hur}: \pi_1(M, m_0) \rightarrow H_1(M, \mathbb{R}).$$

Wir setzen  $k'' := \dim H_1(M, \mathbb{R})$ . Mit dem Lemma können wir wieder o.B.d.A. annehmen, daß die  $H(g_1), \dots, H(g_{k''})$  bereits die ganze Gruppe  $H_1(M, \mathbb{Z})_{\mathbb{R}}$  erzeugen und die restlichen Erzeuger von  $\Pi_1$  im Kern von  $H$  liegen. Dann gilt ein zu Satz 1.14 völlig analoger Satz (mit  $H$  anstelle von  $\phi_{Hur}$ ) und somit auch ein analoges Korollar.

### 1.f. Algebraisierung im Fall beschränkt vieler Wechsel

Wir haben nun auf beliebigen kompakten, zusammenhängenden Mannigfaltigkeiten Autobahnmetriken konstruiert, die nur wenige homolog minimale Geodätische haben. Da auf Mannigfaltigkeiten mit abelscher Fundamentalgruppe alle homolog minimalen Geodätischen auch homotop minimal sind, haben wir auf diesen Mannigfaltigkeiten bezüglich einer Autobahnmetrik auch nur wenige homotop minimale Geodätische. Suchen wir jedoch Metriken mit nur wenigen homotop minimalen Geodätischen auf Mannigfaltigkeiten mit nicht-abelscher Fundamentalgruppe, so müssen unsere Methoden abgeändert werden.

In diesem Abschnitt wollen wir deshalb auch die Charakterisierung der homotop minimalen Geodätischen auf ein gruppentheoretisches Superminimierungsproblem zurückführen und somit Eigenschaften der minimalen Geodätischen herleiten. Dies wird jedoch im Rahmen dieser Arbeit leider nur für eine besondere Klasse von Fundamentalgruppen möglich sein. Wir betrachten wiederum nur den Fall  $I = \mathbb{R}$ .

DEFINITION 1.19. Eine endlich erzeugte Gruppe  $\Gamma$  mit gegebener Erzeugendenmenge habe die *Eigenschaft beschränkt vieler Wechsel* oder kurz die *BVW-Eigenschaft*

mit Schranke  $W \in \mathbb{N}$ , wenn jedes Element von  $\Gamma$  eine superminimale Wortdarstellung mit höchstens  $W$  Wechseln hat.

Endlich erzeugte abelsche Gruppen haben z.B. die BVW-Eigenschaft. Freie Gruppen mit Rang  $\geq 2$  haben die BVW-Eigenschaft nicht.

Von nun an sei  $M$  eine kompakte Mannigfaltigkeit mit Fundamentalgruppe  $\Pi_1$ , die bezüglich der Erzeugenden  $g_1, \dots, g_k$  die BVW-Eigenschaft mit Schranke  $W$  habe. Man nehme nun eine zu diesen Erzeugenden passende Autobahn  $A$ . Dann wählen wir für diese Autobahn  $A$  wieder so große Konstanten  $C_1, \dots, C_4$ , so daß alle Überlegungen der Unterabschnitte 1.a bis 1.c funktionieren und

$$C_3 > 2W + 5 \quad \text{und} \quad C_2 > 6$$

und wählen hierzu passende  $\epsilon, \delta, \tilde{\epsilon}, \tilde{\delta}$ .

Die obigen Konstanten  $C_1, \dots, C_4$  können so bestimmt werden, daß zudem gilt

$$\eta < 1 + \frac{1}{4(W+2)}.$$

Schließlich bestimmen wir zu diesen Parametern die zugehörige Autobahnmetrik.

**Satz 1.20.** *Die Fundamentalgruppe  $\Pi_1$  einer kompakten Mannigfaltigkeit habe die BVW-Eigenschaft bezüglich eines festen Erzeugendensystems  $(g_1, \dots, g_k)$ . Wir wählen zu diesem Erzeugendensystem eine Autobahn. Sei  $c$  eine minimale Geodätische unendlicher Länge bezüglich einer Autobahnmetrik, deren Parameter den obigen Schranken genügen. Für gegebene  $i \leq i'$  habe  $c$  Tubenwechsel  $c|_{[b_{i-1}, a_i]}$  und  $c|_{[b_{i'}, a_{i'+1}]}$ . Dann ist das endliche Segment*

$$(g_{j_i}^{n_i}, \dots, g_{j_{i'}}^{n_{i'}})$$

der Symbolfolge eine superminimale Wortdarstellung in der Gruppe  $\Pi_1$ .

Der Beweis ist analog zum ersten Teil des Beweises von Satz 1.14(2), lediglich  $\phi_{H_{ur}}$  ist durch die Identität von  $\Pi_1$  zu ersetzen,  $H_1(M, \mathbb{Z})$  durch  $\pi_1(M, m_0)$  und  $k$  durch  $W + 1$ .

**Korollar 1.21.** *Jede homotop minimale Geodätische bezüglich einer geeigneten Autobahnmetrik auf einer kompakten Mannigfaltigkeit, deren Fundamentalgruppe die BVW-Eigenschaft mit Schranke  $W$  erfüllt, hat höchstens  $W + 2$  Tubenwechsel.*

### 1.g. Lösungsansätze für das algebraische Problem

Um zu wissen, auf welchen Mannigfaltigkeiten es bezüglich einer geeigneten Autobahnmetrik nur wenige homotop minimale Geodätische gibt, ist nun die Frage, welche Fundamentalgruppen die BVW-Eigenschaft haben, von entscheidender Bedeutung. Leider konnte in der Literatur keine Behandlung dieses Problems gefunden werden. In diesem Unterabschnitt wird die BVW-Eigenschaft für Gitter in den Heisenberg-Gruppen bezüglich bestimmter Erzeugender gezeigt. Inwieweit sich diese Resultate verallgemeinern lassen, bleibt offen.

Auf  $H_{2n+1}$  benutzen wir die Bezeichnungen von Beispiel II.1.4 und Abschnitt II.3. U.a. sei  $M(a_1, \dots, c)$  die Umkehrabbildung der Komponentenkarte und für natürliche Zahlen  $m_1 | \dots | m_n$  seien  $\Gamma_{(m_1, \dots, m_n)}$  die dort definierten Gitter in  $H_{2n+1}$ . Wir versehen  $\Gamma_{(m_1, \dots, m_n)}$  mit einer Erzeugendenmenge  $E_n = \{e_1, \dots, e_{2n+1}\}$ ; für  $i \leq n$  sei

$$e_i := \exp m_i p_i = M(0, \dots, 0, \underbrace{m_i}_{i.\text{te Stelle}}, 0, \dots, 0)$$

und für  $n < i \leq 2n$  sei

$$e_i := \exp q_{i-n} = M(0, \dots, 0, \underbrace{1}_{i.\text{te Stelle}}, 0, \dots, 0)$$

und schließlich  $e_{2n+1} := \exp \hbar = M(0, \dots, 0, 1)$ .

**Satz 1.22.**  $\Gamma_{(m_1, \dots, m_n)}$  hat die BVW-Eigenschaft bezüglich der Erzeugendenmenge  $E_n$ .

**Korollar 1.23.** Sei  $\Gamma$  eine endlich erzeugte, torsionsfreie 2-stufig nilpotente Gruppe mit zyklischem Zentrum, dann hat  $\Gamma$  die BVW-Eigenschaft bezüglich einer geeigneten Erzeugendenmenge.

BEWEIS DES KOROLLARS: O.B.d.A. sei  $\Gamma$  nicht abelsch. Mit dem Satz von Malcev (Satz II.2.7) läßt sich  $\Gamma$  in eine einfach zusammenhängende, nilpotente Lie-Gruppe  $G$  einbetten. Das  $Z_1(\Gamma)$  von  $\Gamma$  ist nach Satz II.2.5 ein Gitter im Zentrum  $Z_1(G)$  von  $G$ . Da  $Z_1(\Gamma)$  zyklisch ist, erhalten wir  $Z_1(G) \cong \mathbb{R}$ . Die Lie-Gruppe  $G$  ist 2-stufig nilpotent, da  $\Gamma$  2-stufig nilpotent ist. Man zeigt leicht, daß dann  $G$  isomorph zu der Heisenberg-Gruppe  $H_{2n+1}$  für geeignetes  $n \in \mathbb{N}$  ist. Die Gruppe  $\Gamma$  ist somit nach Satz II.3.1 isomorph zu einem  $\Gamma_{(m_1, \dots, m_n)}$ . Deshalb folgt das Korollar aus dem Satz.  $\square$

Im folgenden benutzen wir folgende Sprechweise: ein Erzeuger  $e \in E_n$  kommt in einer Wortdarstellung *in positiver und negativer Potenz* vor, wenn sowohl  $e_n$  als

auch  $e_n^{-1}$  in dieser Wortdarstellung vorkommt. Für den Beweis des Satzes zeigen wir zunächst, daß es reicht, anstelle von Satz 1.22 den offensichtlich schwächeren Satz 1.22A zu zeigen.

**Satz 1.22A.** *Zu allen natürlichen Zahlen  $n$  und  $m_1 | \dots | m_n$  gibt es ein  $W$ , so daß gilt: jedes Element  $g \in \Gamma_{(m_1, \dots, m_n)}$ , das eine Wortdarstellung minimaler Länge besitzt, in der kein Erzeuger mit positiver und negativer Potenz vorkommt, besitzt auch eine superminimale Wortdarstellung mit höchstens  $W$  Wechseln.*

BEWEIS „1.22A  $\Rightarrow$  1.22“:

Um Verwechslungen zu vermeiden, notieren wir die Erzeuger in  $H_{4n+1}$  in der Art  $\tilde{e}_i$ . Wir definieren einen Lie-Gruppen-Epimorphismus  $P: H_{4n+1} \rightarrow H_{2n+1}$  durch die Forderung, daß die Tangentialabbildung  $T_e P = \log \circ P \circ \exp$  für alle  $i = 1, \dots, n$  den Vektor  $p_i$  auf  $p_i$ ,  $q_i$  auf  $q_i$ ,  $p_{n+i}$  auf  $-p_i$ ,  $q_{n+i}$  auf  $-q_i$  und  $\hbar$  auf  $\hbar$  abbildet. Dann ist

$$P(E_{2n}) = \{e_1, \dots, e_{2n}, -e_1, \dots, -e_{2n}, e_{2n+1}\}$$

also auch

$$P\left(\Gamma_{(m_1, \dots, m_n, m_1, \dots, m_n)}\right) = \Gamma_{(m_1, \dots, m_n)}.$$

Nehmen wir nun eine Wortdarstellung minimaler Länge des festen Elements  $g$  in  $\Gamma_{(m_1, \dots, m_n)}$ . Da  $e_{2n+1}$  im Zentrum von  $\Gamma_{(m_1, \dots, m_n)}$  liegt, kommt dieser Erzeuger in dieser Wortdarstellung nicht in positiver und negativer Potenz vor. Diese Wortdarstellung läßt sich nun zu einer Wortdarstellung minimaler Länge in  $\Gamma_{(m_1, \dots, m_n, m_1, \dots, m_n)}$  liften, in der kein Erzeuger mit positiver und negativer Potenz vorkommt. Mit Satz 1.22A für  $\Gamma_{(m_1, \dots, m_n, m_1, \dots, m_n)}$  erhalten wir eine superminimale Wortdarstellung in  $\Gamma_{(m_1, \dots, m_n, m_1, \dots, m_n)}$  mit höchstens  $W$  Wechseln, die eine superminimale Wortdarstellung mit höchstens  $W$  Wechseln in  $\Gamma_{(m_1, \dots, m_n)}$  ergibt.  $\square$

BEWEIS VON SATZ 1.22A: Ein Element  $g \in \Gamma_{(m_1, \dots, m_n)}$  besitze eine Wortdarstellung minimaler Länge, in der kein Erzeuger in positiver und negativer Potenz vorkommt. Dann läßt sich die Reihenfolge der Erzeuger so vertauschen, daß wir eine Wortdarstellung von  $g$  der Form

$$e_1^{r_{1,1}} e_{n+1}^{r_{1,2}} e_1^{r_{1,3}} e_{n+1}^{r_{1,4}} e_1^{r_{1,5}} e_2^{r_{2,1}} e_{n+2}^{r_{2,2}} e_2^{r_{2,3}} e_{n+2}^{r_{2,4}} e_2^{r_{2,5}} \dots e_n^{r_{n,1}} e_{2n}^{r_{n,2}} e_n^{r_{n,3}} e_{2n}^{r_{n,4}} e_n^{r_{n,5}} e_{2n+1}^{r_{2n+1}}$$

erhalten. Da nur die Reihenfolge der Erzeuger vertauscht wurde, ist dies auch eine Wortdarstellung minimaler Länge. Es gibt somit eine superminimale Wortdarstellung mit höchstens  $5n$  Tubenwechseln.  $\square$

Der Beweis ergibt für Satz 1.22 ein  $W = 10n$ . Eine Reihe anderer endlich erzeugter nilpotenter Gruppen hat die BVW-Eigenschaft. Bei höherer Nilpotenzstufe

nimmt  $W$  jedoch stark zu und es ist uns nicht bekannt, ob alle endlich erzeugten nilpotenten Gruppen die BVW-Eigenschaft haben. Des weiteren ist auch unklar, ob es endlich erzeugte Gruppen gibt, die bezüglich eines Erzeugendensystems die BVW-Eigenschaft haben, aber nicht bezüglich eines anderen Erzeugendensystems.

Umgekehrt sieht man jedoch leicht, daß Gruppen mit BVW-Eigenschaft mit Schranke  $W$  polynomial wachsen, wobei der Wachstumsgrad höchstens  $W + 1$  ist. Somit enthält jede Gruppe mit BVW-Eigenschaft eine endlich erzeugte, nilpotente Untergruppe von endlichem Index (siehe Satz II.6.5).

**VERMUTUNG 1.24.** Alle endlich erzeugten Gruppen  $\Gamma$ , die eine nilpotente Untergruppe von endlichem Index haben, haben die BVW-Eigenschaft bezüglich einer beliebigen Erzeugendenmenge.

### 1.h. Minimale Geodätische bei freier Fundamentalgruppe

In den bisherigen Ergebnissen konnte man die Anzahl der Tubenwechsel einer homolog oder homotop minimalen Geodätischen bezüglich einer „guten“ Autobahnmetrik immer nach oben beschränken. Um zu zeigen, daß eine derartige Schranke nicht für alle homotop minimalen Geodätischen auf einer beliebigen kompakten Mannigfaltigkeit mit Autobahnmetrik möglich ist, betrachten wir nun die homotop minimalen Geodätischen bezüglich einer Autobahnmetrik auf einer kompakten Mannigfaltigkeit  $M$  der Dimension  $\geq 3$  mit freier Fundamentalgruppe  $\Pi_1 = \pi_1(M, m_0)$ . Beispiele derartiger Mannigfaltigkeiten sind  $S^1 \times S^2$  und zusammenhängende Summen hiervon.

$\Pi_1$  sei immer mit einer Erzeugendenmenge  $\{g_i \mid i = 1, \dots, \text{rang}(\Pi_1)\}$  versehen. Wir wählen wiederum eine passende Autobahn und ermitteln hierzu passende Konstanten  $C_1, \dots, C_4$ , so daß  $C_2 > 2$ ,  $C_3 > 10$ ,  $C_4 > 4$  und  $\eta < 1 + \frac{1}{2}$  und erhalten eine Autobahnmetrik  $\langle, \rangle_A$ .

**Hilfssatz 1.25.** Für eine Wortdarstellung  $\mathcal{D}$  in der freien Gruppe  $\Pi_1$  sind äquivalent:

- (1)  $\mathcal{D}$  ist superminimal,
- (2)  $\mathcal{D}$  ist minimal,
- (3) in  $\mathcal{D}$  steht kein Erzeuger neben seinem Inversen.

Der Beweis ist klar.

**Satz 1.26.** *Nehmen wir eine Folge*

$$\mathcal{F} := (\dots, g_{j_{-1}}^{n_{-1}}, g_{j_0}^{n_0}, g_{j_1}^{n_1}, g_{j_2}^{n_2}, \dots)$$

in  $\Pi_1$ , so daß für alle  $i \in \mathbb{Z}$  gilt

- (1)  $n_i \in \{1, -1\}$  und  $j_i \in \{1, \dots, \text{rang}(\Pi_1)\}$ ,
- (2)  $g_{j_i} \neq g_{j_{i+1}}$  oder  $n_i = n_{i+1}$ , d.h. kein Folgenglied steht neben seinem Inversen,

dann gibt es bezüglich  $\langle, \rangle_A$  eine homotop minimale Geodätische unendlicher Länge mit Symbolfolge  $\mathcal{F}$ .

**BEWEIS:** Sei  $\tilde{u}: \tilde{M} \rightarrow M$  die universelle Überlagerung. Dann ist  $\tilde{A} := \tilde{u}^{-1}(A)$  einfach zusammenhängend. Die von  $\langle, \rangle_A$  auf  $\tilde{A}$  induzierte Metrik nennen wir  $d_{\tilde{A}}$ . Sei  $\tilde{m}_0$  ein Element von  $\tilde{u}^{-1}(m_0)$ . Die Fundamentalgruppe  $\Pi_1$  operiert wieder von links auf  $\tilde{u}^{-1}(m_0)$ . Wir setzen nun für  $i \in \mathbb{N}$  induktiv  $m_i := g_{i-1}^{n_{i-1}} m_{i-1}$  und  $m_{-i} := g_{-i}^{-n_{-i}} m_{-i+1}$ .

Die Wortlängennorm (siehe Anhang A) von  $g_{i-1}^{n_{i-1}} g_{i-2}^{n_{i-2}} \dots g_{-i}^{n_{-i}}$  ist gleich  $2i$  und geht somit für  $i \rightarrow \infty$  gegen  $\infty$ . Nach Anhang A geht dann aber auch die von der riemannschen Metrik induzierte Gruppennorm gegen  $\infty$ , also

$$d_{\tilde{A}}(m_{-i}, m_i) \rightarrow \infty \text{ für } i \rightarrow \infty.$$

Mit den Ergebnissen aus 1.c für homotop minimale Geodätische endlicher Länge wissen wir nun, daß ein  $i_0$  existiert, so daß für alle  $i > i_0$  die Kürzeste  $\tilde{c}_i$  von  $m_{-i}$  nach  $m_i$  in  $\tilde{u}^{-1}(A)$  liegt. Ferner ist die Symbolfolge von  $\tilde{u} \circ \tilde{c}_i$  definiert und gleich

$$(g_{-i}^{n_{-i}}, \dots, g_{i-1}^{n_{i-1}}).$$

Zu beachten ist, daß es für  $i < i'$  einen Parameterwechsel  $\varphi$  von  $\tilde{c}_{i'}$  gibt, so daß eine Homotopie  $H: [0, 1] \times [-i, i] \rightarrow \tilde{u}^{-1}(A)$  von  $(\tilde{c}_{i'} \circ \varphi)|_{[-i, i]}$  nach  $\tilde{c}_i$  existiert, für die  $H(s, \pm i) \in \tilde{u}^{-1}(V_\delta)$  gilt.

Man konstruiert nun mit dem Satz von Arzela-Ascoli eine Kurve  $\tilde{c}: \mathbb{R} \rightarrow \tilde{M}$ , so daß für jedes kompakte Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  eine Teilfolge  $\tilde{c}_{i_k}$  existiert, die nach gliedweiser Umparametrisierung und Restriktion auf  $I$  in der  $C^1$ -Topologie gegen  $\tilde{c}|_I$  konvergiert. Die Kurve  $\tilde{u} \circ \tilde{c}$  ist dann eine minimale Geodätische mit den gewünschten Eigenschaften.  $\square$

**Korollar 1.27.** *Wenn  $\Pi_1 \cong \mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}$  von Rang größer 1 ist, dann gibt es (homotop) minimale Geodätische, die für jedes  $i \in \mathbb{Z}$  einen Tubenwechsel  $c|_{[b_{i-1}, a_i]}$  haben.*

## 2. Minimale Geodätische bei $N$ -Linksinvarianz

Das Hauptziel dieser Arbeit ist die Konstruktion von Hedlund-Beispielen, d.h. von riemannschen Metriken auf gegebenen kompakten Mannigfaltigkeiten, für die sich die minimalen Geodätischen nur in wenige Richtungen bewegen. Da wir nicht von allen endlich erzeugten nilpotenten Gruppen wissen, daß sie die BVW-Eigenschaft haben, brauchen wir für diese Konstruktion noch andere Methoden. Die Betrachtung von  $N$ -linksinvarianten Metriken ist hierbei sehr hilfreich. Außerdem liefert dieser Abschnitt eine sehr genaue Beschreibung der minimalen Geodätischen auf Nilmannigfaltigkeiten bezüglich einer Metrik, die auf der universellen Überlagerung  $N$ -linksinvariant ist. Aus der Literatur sind keine ähnlichen Untersuchungen bekannt.

In diesem Abschnitt sei  $G$  immer eine einfach zusammenhängende,  $\kappa$ -stufig nilpotente Lie-Gruppe mit Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$  und  $N \triangleleft G$  eine normale (zusammenhängende) Unter-Lie-Gruppe mit Lie-Algebra  $\mathfrak{n}$ , die außerdem in  $G^2$  liegen soll. Die Gruppe  $G$  trage eine  $N$ -linksinvariante Metrik  $\langle \cdot, \cdot \rangle_G$ .

Die Standard-Projektion von  $G$  auf  $\frac{G}{N}$  sei wie in Abschnitt II.4

$$p_{\frac{G}{N}}: G \rightarrow \frac{G}{N}.$$

Die induzierte Metrik auf  $\frac{G}{N}$  nennen wir wieder  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\frac{G}{N}}$ . „Minimal“ wird wieder äquivalent zu „homotop minimal“ verwendet.

Wir wollen zeigen, daß minimale Geodätische auf  $G$  bis auf Linkstranslation mit Elementen von  $N$  eineindeutig minimalen Geodätischen auf  $\frac{G}{N}$  entsprechen.

**Satz 2.1** (Reduktion der Dimension).  *$G$  sei eine nilpotente Lie-Gruppe mit zusammenhängendem Normalteiler  $N \subset G^2$ . Auf  $G$  sei eine  $N$ -linksinvariante Metrik  $\langle \cdot, \cdot \rangle_G$  gegeben. Der Quotient  $\frac{G}{N}$  trage die riemannsche Metrik  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\frac{G}{N}}$ , für die die Standard-Projektion*

$$p_{\frac{G}{N}}: G \rightarrow \frac{G}{N}$$

*eine riemannsche Submersion ist. Weiterhin fordern wir, daß es für eine beliebige  $G$ -linksinvariante Metrik  $\langle \cdot, \cdot \rangle_G^l$  Konstanten  $Ko_1, Ko_2 > 0$  gibt, so daß*

$$Ko_1 \langle x, x \rangle_G^l \leq \langle x, x \rangle_G \leq Ko_2 \langle x, x \rangle_G^l$$

*für alle  $x \in TG$ .*

*Dann ist  $c: \mathbb{R} \rightarrow G$  genau dann minimale Geodätische, wenn gilt:*

- (1)  $\dot{c}(t) \perp \ker T_{c(t)} p_{\frac{G}{N}}$ ,  
 (2)  $p_{\frac{G}{N}} \circ c: \mathbb{R} \rightarrow \frac{G}{N}$  ist minimale Geodätische.

Der Satz bleibt richtig, wenn man überall Linksinvarianz durch Rechtsinvarianz ersetzt.

BEWEIS VON „ $\Leftarrow$ “: Angenommen,  $c$  wäre nicht minimal, hingegen seien (1) und (2) erfüllt. Dann gibt es eine „Kürzere“  $k: [t_1, t_2] \rightarrow G$  mit  $k(t_i) = c(t_i)$  und  $\mathcal{L}(k) < \mathcal{L}(c)$ . Dann ist aber auch

$$\mathcal{L}(p_{\frac{G}{N}} \circ k) \leq \mathcal{L}(k) < \mathcal{L}(c|_{[t_1, t_2]}) = \mathcal{L}(p_{\frac{G}{N}} \circ c|_{[t_1, t_2]}).$$

Dies ist jedoch ein Widerspruch zu (2).  $\square$

Die Umkehrung ist wesentlich aufwendiger zu zeigen. Wir formulieren Satz 2.1 deswegen zuerst um. Diesen umformulierten Satz beweisen wir danach durch vollständige Induktion. Es sei daran erinnert, daß  $Z_i(G)$  das  $i$ -te Zentrum der Gruppe  $G$  ist.

**Satz 2.1A.**  $G$  sei eine nilpotente Lie-Gruppe mit zusammenhängendem Normalteiler  $N \subset G^2$ . Auf  $G$  sei eine  $N$ -linksinvariante Metrik  $\langle \cdot, \cdot \rangle_G$  gegeben. Der Quotient  $\frac{G}{N \cap Z_i(G)}$  trage die riemannsche Metrik  $\langle \cdot, \cdot \rangle_i$ , für die für jedes  $i \in \mathbb{N}$  die Standard-Projektion

$$p_i: G \rightarrow \frac{G}{N \cap Z_i(G)}$$

eine riemannsche Submersion ist. Weiterhin fordern wir, daß es für eine beliebige  $G$ -linksinvariante Metrik  $\langle \cdot, \cdot \rangle_G^l$  Konstanten  $Ko_1, Ko_2 > 0$  gibt, so daß

$$Ko_1 \langle x, x \rangle_G^l \leq \langle x, x \rangle_G \leq Ko_2 \langle x, x \rangle_G^l$$

für alle  $x \in TG$ .

Dann ist  $c: \mathbb{R} \rightarrow G$  genau dann minimale Geodätische, wenn gilt:

- (1)  $\dot{c}(t) \perp \ker T_{c(t)} p_i$ ,  
 (2)  $p_i \circ c: \mathbb{R} \rightarrow \frac{G}{Z_i(G) \cap N}$  ist minimale Geodätische.

Auch  $N \cap Z_i(G)$  ist ein Normalteiler von  $G$ . Deswegen sind die Projektionen  $p_i$  Gruppenhomomorphismen.

Für  $i > \kappa$  ist Satz 2.1A trivialerweise äquivalent zu Satz 2.1. Wir wollen nun Satz 2.1A beweisen. Der Beweis von „ $\Leftarrow$ “ geht völlig analog zu Satz 2.1.

BEWEIS VON SATZ 2.1A,,  $\Rightarrow$  “:

Induktionsanfang:

Den Induktionsanfang ( $i = 1$ ) wollen wir später zeigen.

Induktionsschritt: (von  $i$  auf  $i + 1$ )

Nach Induktionsvoraussetzung gilt der Satz für  $N' := N \cap Z_i(G)$  anstelle von  $N$ . Wir betrachten nun das kommutierende Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{p_i} & \frac{G}{N \cap Z_i(G)} = \frac{G}{N'} =: G'' \\ & \searrow^{p_{i+1}} & \downarrow pr \\ & & \frac{G}{N \cap Z_{i+1}(G)} \cong \frac{G''}{N''} \end{array}$$

Setzen wir  $G'' := \frac{G}{N \cap Z_i(G)}$  und  $N'' := p_i(N \cap Z_{i+1}(G))$ , so ist  $\frac{G''}{N''}$  kanonisch isomorph zu  $\frac{G}{N \cap Z_{i+1}(G)}$ . Es ist  $N'' \subset Z_1(G'')$  und  $N'' \subset G''^2$ . Ferner ist aufgrund der Kommutativität des Diagramms die Abbildung  $pr: G'' \rightarrow \frac{G''}{N''}$  eine riemannsche Submersion. Die auf  $G'' = \frac{G}{N'}$  von  $\langle, \rangle_G$  induzierte Metrik  $\langle, \rangle_i$  ist nach oben und unten beschränkt durch ein Vielfaches der von  $\langle, \rangle_G^l$  induzierten Metrik auf  $G''$ , welche  $G''$ -linksinvariant ist. Die Metrik  $\langle, \rangle_i$  ist  $\frac{N}{N'}$ -linksinvariant.

Nach Induktionsvoraussetzung können wir also auch den Satz auf die Projektion  $pr: G'' \rightarrow \frac{G''}{N''}$  anwenden. Aufgrund der Kommutativität des Diagramms sieht man dann aber auch, daß der Satz für  $p_{i+1}$  gilt.  $\square$

BEWEIS DES INDUKTIONSANFANGS: Wir können annehmen, daß  $N \subset Z_1(G)$ .

Für (1) werden wir zeigen, daß die aus dem Noetherschen Theorem (Theorem II.4.1) stammenden Erhaltungsgrößen

$$\mathcal{P}_n := \langle \dot{c}(t), Tr_{c(t)}(n) \rangle$$

einer nach Bogenlänge parametrisierten minimalen Geodätischen  $c: \mathbb{R} \rightarrow G$  gleich Null sind. Angenommen  $\mathcal{P}_n \neq 0$  für ein  $n \in \mathfrak{n}$ . Wegen  $N \subset Z_1(G)$ , ist  $n$  Fixpunkt von  $Ad(c(t))$ , also  $Tr_{c(t)}(n) = Tl_{c(t)}(n)$ . Des weiteren gilt  $Ad(\exp tn) = id$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ . Wir schreiben zunächst

$$\dot{c}(t) = \lambda(t)Tl_{c(t)}(n) + s(t)$$

mit einer  $C^\infty$ -Funktion  $\lambda(t)$  und einem  $C^\infty$ -Vektorfeld  $s(t)$  längs  $c(t)$ , das senkrecht auf  $Tl_{c(t)}(n)$  steht. Sei  $\| \cdot \|$  die von  $\langle, \rangle_G$  induzierte Norm. Dann gibt es Konstanten

$Konst_1, Konst_2 > 0$  mit:

$$|\lambda(t)| = \frac{|\langle \dot{c}(t), Tl_{c(t)}(n) \rangle_G|}{\|Tl_{c(t)}(n)\|^2} < Konst_1$$

$$\|\lambda(t)Tl_{c(t)}(n)\| = \frac{|\langle \dot{c}(t), Tl_{c(t)}(n) \rangle_G|}{\|Tl_{c(t)}(n)\|} > Konst_2 > 0$$

Man konstruiere nun  $\tilde{c}(t)$  so, daß  $\tilde{c}(t)c^{-1}(t) \in \exp \mathbb{R}n$  und  $\tilde{c}(0) = c(0)$  und  $\dot{\tilde{c}}(t) \perp Tl_{\tilde{c}(t)}(n)$ . Dann hat  $\dot{\tilde{c}}(t) = Tl_{\tilde{c}(t)c^{-1}(t)}(s(t))$  wegen  $\tilde{c}(t)c^{-1}(t) \in \exp \mathbb{R}n$  die Norm  $\|s(t)\| \leq \sqrt{1 - Konst_2^2}$ . Es gilt für alle  $t \in \mathbb{R}$

$$c(t) = \exp \left( \left( \int_0^t \lambda(t') dt' \right) n \right) \tilde{c}(t),$$

denn die Gleichheit ist offensichtlich für  $t = 0$  und beide Seiten sind Lie-Stammfunktionen von  $\lambda(t)n + \theta(s(t))$ .

Da  $\exp n \in G^2$  gilt und  $\langle, \rangle_G$  durch  $Ko_2 \langle, \rangle_g^l$  beschränkt ist, gilt mit dem Lemma über das Längenwachstum in Kommutatorrichtung (Korollar II.5.2) für die von  $\langle, \rangle_G$  induzierte Abstandsfunktion  $d_G$

$$d_G(\tilde{c}(t), c(t)) = O \left( \sqrt{\int_0^t |\lambda(t')| dt'} \right) = O(\sqrt{t})$$

Also für  $t > 0$

$$\begin{aligned} t = d_G(c(0), \tilde{c}(0)) &\leq d_G(\tilde{c}(0), \tilde{c}(t)) + d_G(\tilde{c}(t), c(t)) \\ &\leq \left( \sqrt{1 - Konst_2^2} \right) t + O(\sqrt{t}), \end{aligned}$$

was einen Widerspruch für große  $t$  erzeugt. Somit folgt (1).

Es bleibt noch (2) zu zeigen. Hierzu nehmen wir an, es gäbe eine minimale nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische  $c$ , so daß  $p_{\frac{G}{N}} \circ c$  keine minimale Geodätische in  $\frac{G}{N}$  ist, d.h. es gibt eine glatte Kurve  $\hat{k}: [t_1, t_2] \rightarrow \frac{G}{N}$  mit  $\hat{k}(t_i) = p_{\frac{G}{N}} \circ c(t_i)$  für  $i = 1, 2$  und

$$\Delta := \mathcal{L}(p_{\frac{G}{N}} \circ c|_{[t_1, t_2]}) - \mathcal{L}(\hat{k}) > 0.$$

$\hat{k}$  besitzt einen Lift  $k$  auf  $G$  mit  $\hat{k} = p_{\frac{G}{N}} \circ k$ ,  $k(t_1) = c(t_1)$  und  $\dot{k}(t) \perp Tl_{k(t)}(\mathfrak{n})$ . Dann ist  $\mathcal{L}(k) = \mathcal{L}(\hat{k})$ . Es findet sich ein  $v \in \mathfrak{n}$ , so daß  $k(t_2) = c(t_2) \exp v$ .

Zu zunächst festem  $\mu > 0$  wollen wir nun  $k$  zu einer stückweise glatten Kurve  $\bar{k}: [t_1, t_2 + \frac{1}{\mu}] \rightarrow G$  fortsetzen durch

$$\begin{aligned}\bar{k}(t) &= k(t) && \text{für } t_1 \leq t \leq t_2 \\ \bar{k}(t) &= c(t) \exp((1 - \mu(t - t_2))v) && \text{für } t_2 \leq t \leq t_2 + \frac{1}{\mu}.\end{aligned}$$

Es ist  $\bar{k}(t_1) = c(t_1)$  und  $\bar{k}(t_2 + \frac{1}{\mu}) = c(t_2 + \frac{1}{\mu})$ . Wir wollen nun zeigen, daß für genügend kleines  $\mu$  die Kurve  $\bar{k}$  kürzer als  $c|_{[t_1, t_2 + \frac{1}{\mu}]}$  ist.

$$\mathcal{L}(\bar{k}) = \mathcal{L}(k) + \int_{t_2}^{t_2 + \frac{1}{\mu}} \|\dot{\bar{k}}(t)\| dt$$

Zur Berechnung des Integrals benutzen wir

$$\dot{\bar{k}}(t) = Tr_{\exp((1-\mu(t-t_2))v)} \dot{c}(t) - \mu Tl_{\bar{k}(t)}v$$

für  $t_2 \leq t \leq t_2 + \frac{1}{\mu}$ . Wegen  $\exp \mathbb{R}v \subset Z_1(G)$  ist

$$Tr_{\exp((1-\mu(t-t_2))v)} \dot{c}(t) = Tl_{\exp((1-\mu(t-t_2))v)} \dot{c}(t)$$

und dies ist wegen (1) orthogonal zu  $Tl_{\bar{k}(t)}v$ . Somit ist für  $t_2 \leq t \leq t_2 + \frac{1}{\mu}$

$$\|\dot{\bar{k}}(t)\| \leq \sqrt{\|\dot{c}(t)\|^2 + \mu^2 \|Tl_{c(t)}v\|^2}$$

Nun ist aber  $\|\dot{c}(t)\| = 1$  und  $\|Tl_{c(t)}v\|^2$  kleiner als eine Konstante  $konst$ , die unabhängig von der Wahl von  $\mu$  ist. Schließlich erhalten wir

$$\mathcal{L}(c|_{[t_1, t_2 + \frac{1}{\mu}]}) - \mathcal{L}(\bar{k}) \geq \Delta + \frac{1}{\mu} (1 - \sqrt{1 + \mu^2 konst}) > 0,$$

wenn  $\mu$  klein genug ist. □

**Folgerung 2.2.**  *$G$  trage eine  $N$ -linksinvariante riemannsche Metrik,  $N \subset G^2$ . Die Menge  $\mathcal{M}$  der Vektoren im Tangentialbündel  $TG$ , deren zugehörige Geodätische minimal ist, liegt auf einer Untermannigfaltigkeit von  $TG$  der Dimension  $2 \dim G - \dim N$ . Unter anderem hat die Menge  $\mathcal{M}$  für  $\dim N \neq 0$  das Maß Null in  $TG$ .*

### 3. Allgemeine Konstruktion von Hedlund-Beispielen

In diesem Abschnitt sollen nun verallgemeinerte Hedlund-Metriken zu beliebigen endlich erzeugten, nilpotenten Gruppen konstruiert werden. Da wir nicht wissen, ob

alle diese Gruppen die BVW-Eigenschaft haben, kann man hierfür nicht einfach eine Autobahnmetrik nehmen.

Der nun folgende Satz liefert uns zunächst Hedlund-Metriken auf Nilmannigfaltigkeiten. Wir erhalten hiermit Hedlund-Metriken zu allen endlich erzeugten, torsionsfreien, nilpotenten Gruppen  $\Gamma \neq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ .

**Satz 3.1.** *Sei  $\Gamma$  eine endlich erzeugte,  $\kappa$ -stufig nilpotente, torsionsfreie Gruppe ungleich  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ . Man brette  $\Gamma$  als Gitter in eine einfach zusammenhängende, nilpotente Lie-Gruppe  $G$  ein. Dann gibt es auf der Nilmannigfaltigkeit  $M = \Gamma \backslash G$  eine riemannsche Metrik  $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$  und eine Menge  $\mathbf{u} = \{v_i \in \mathfrak{g} \mid i = 1, \dots, \dim H_1(M, \mathbb{R})\}$  mit den folgenden Eigenschaften:*

- (i) *für alle (homotop) minimalen Geodätischen  $c: \mathbb{R} \rightarrow M$  existiert ein orientierungstreuer Parameterwechsel  $\varphi$ , ein  $i \in \{1, \dots, \dim H_1(M, \mathbb{R})\}$  und ein  $n \in \{-1, +1\}$ , so daß*

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \mathbb{A}^\kappa \lim_{t \rightarrow +\infty} (c \circ \varphi)|_{[s,t]} = \exp(nv_i)$$

*gilt bezüglich der  $\kappa$ -stufigen Richtungsabbildung id.*

- (ii) *Die  $v_i$  sind linear unabhängige Vektoren in der Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$  und spannen ein Komplement zu  $\mathfrak{g}^2$  auf.*

BEWEIS: Mit dem Satz von Malcev läßt sich die Gruppe  $\Gamma$  als Gitter in eine einfach zusammenhängende, nilpotente Lie-Gruppe  $G$  einbetten. In Konsistenz mit Abschnitt III.2 können wir  $G - I := \frac{G}{G^{i+1}}$  setzen.  $G_i$  ist der „größte“  $\leq i$ -stufig nilpotente Gruppenquotient von  $G$ . Das Bild von  $\Gamma$  in  $G_i = \frac{G}{G^{i+1}}$  nennen wir analog  $\Gamma_i$ .

Wir setzen  $M := \Gamma \backslash G$  und wählen die Richtungsabbildung  $F_\kappa = \text{id}$ . Man beachte, daß  $H_1(M, \mathbb{R})$  kanonisch isomorph zu  $\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{g}^2}$  ist.

Wir unterscheiden nun 3 Fälle:

1.Fall:  $\dim H_1(M, \mathbb{R}) \geq 3$

Sei  $k := \dim H_1(M, \mathbb{R})$ . Nach den Sätzen II.2.4 und II.2.6 ist  $\Gamma_1 = P_{1\kappa}(\Gamma)$  auch ein Gitter in  $G_1 \cong H_1(M, \mathbb{R})$  und somit  $\Gamma_1 \cong \mathbb{Z}^k$ . Man wähle nun Erzeuger  $g_1, \dots, g_k$  von  $\Gamma_1$  und definiere auf dem Torus  $\Gamma_1 \backslash G_1$  passend zu diesen Erzeugern gemäß Beispiel 1.2 und gemäß Unterabschnitt 1.b eine Autobahnmetrik  $\langle \cdot, \cdot \rangle_A^{\epsilon, \delta, \tilde{\epsilon}, \tilde{\delta}}$  mit genügend kleinen Parametern  $\epsilon, \delta, \tilde{\epsilon}, \tilde{\delta}$ .

Man wähle nun eine linksinvariante riemannsche Metrik auf  $G$ . Sie steigt zu einer riemannschen Metrik  $\langle \cdot, \cdot \rangle_l$  auf  $\Gamma \backslash G$  ab. Das Bild der Orthogonalprojektion eines

$v \in TG$  auf  $\ker Tp_{1\kappa}$  bezüglich dieser linksinvarianten Metrik bezeichnen wir mit  $v^\parallel$ . Dann ist durch

$$\langle v, w \rangle_H := \langle Tp_{1\kappa}v, Tp_{1\kappa}w \rangle_A + \langle v^\parallel, w^\parallel \rangle_l$$

eine Metrik (die *Hedlund-Metrik*) definiert und  $p_{1\kappa}$  ist eine riemannsche Submersion von  $(\Gamma \backslash G, \langle, \rangle_H)$  auf  $(\Gamma_1 \backslash G_1, \langle, \rangle_A)$ . Außerdem ist das orthogonale Komplement von  $\ker Tp_{1\kappa}$  bezüglich  $\langle, \rangle_H$  gleich dem orthogonalen Komplement bezüglich  $\langle, \rangle_l$ . Zu jedem  $i \in \{1, \dots, k\}$  gibt es genau einen Vektor  $v_i \in \mathfrak{g}$  aus dem orthogonalen Komplement von  $\ker Tp_{1\kappa}$ , so daß  $Tp_{1\kappa}v_i = \log g_i$ .

Mit den Ergebnissen dieses Kapitels und Satz III.3.4 wissen wir nun, daß jede minimale Geodätische auf  $(M, \langle, \rangle_H)$   $C^1$ -exponentiell gegen eine Kurve der Form  $\Gamma g \exp(tv_i)$  oder  $\Gamma g \exp(-tv_i)$  mit geeignetem  $g \in G$  konvergiert. Mit Lemma III.3.2 folgt hieraus die Behauptung.

### 2.Fall: $\dim H_1(M, \mathbb{R}) = 2$

Wiederum ist  $\Gamma_1 = P_{1\kappa}(\Gamma) \cong H_1(M, \mathbb{Z})_{\mathbb{R}}$  ein Gitter in der Gruppe  $G_1 \cong H_1(M, \mathbb{R})$ , die in diesem Fall zwei-dimensional ist. Wegen  $H_1(M, \mathbb{R}) = H_1(M, \mathbb{Z})_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{R}$  gilt dann  $H_1(M, \mathbb{Z})_{\mathbb{R}} = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ . Da wir den Fall  $\Gamma = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  ausgeschlossen haben, ist  $\Gamma^2 \neq \{e\}$ . Nun ist aber  $G^2$  zusammenhängend und enthält  $\Gamma^2$ , also haben wir  $0 < \dim G^2 = \dim \mathfrak{g}^2$  und wegen der Nilpotenz von  $\mathfrak{g}$  ist dann auch  $0 < \dim \frac{G^2}{G^3} = \dim \frac{\mathfrak{g}^2}{\mathfrak{g}^3}$ .

Die Menge  $G_2^2 \cap P_{2\kappa}(\Gamma)$  ist ein Gitter in der abelschen Lie-Gruppe  $G_2^2 = \frac{G^2}{G^3}$ . Man wähle eine zusammenhängende Unter-Lie-Gruppe  $U$  der Kodimension 1 in  $G_2^2$ , so daß  $U \cap P_{2\kappa}(\Gamma)$  ein Gitter in  $U$  ist. Dann ist  $N := P_{2\kappa}^{-1}(U)$  ein Normalteiler von  $G$  der Kodimension 3, und nach Satz II.2.6 ist  $\Gamma \cap N$  ein Gitter in  $N$ .

Die Gruppe  $\frac{G}{N}$  ist eine nicht-abelsche, einfach zusammenhängende, nilpotente Lie-Gruppe der Dimension 3, also isomorph zu der 3-dimensionalen Heisenberg-Gruppe  $H_3$ . Die Projektion  $P_N: G \rightarrow \frac{G}{N}$  bildet  $\Gamma$  auf ein Gitter ab. Nach Lemma II.3.2 gibt es nun einen Lie-Gruppen-Isomorphismus  $a: \frac{G}{N} = P_N(G) \rightarrow H_3$ , der  $P_N(\Gamma)$  auf eine Untergruppe von  $\Gamma_{(1)}$  von endlichem Index abbildet. Hierbei ist  $\Gamma_{(1)}$  das in Abschnitt II.3 definierte Standardgitter in  $H_3$ .

Man definiere nun eine Autobahn auf  $\Gamma_{(1)} \backslash H_3$  wie in Beispiel 1.4 und eine Autobahnmetrik mit genügend kleinen Parametern  $(\epsilon, \delta, \tilde{\epsilon}, \tilde{\delta})$  gemäß Unterabschnitt 1.b. Diese Metrik heben wir durch  $a$  auf  $P_N(\Gamma) \backslash P_N(G)$  hoch.

Für die Konstruktion der Hedlund-Metrik  $\langle, \rangle_H$  wählen wir wieder auf  $G$  eine linksinvariante Metrik  $\langle, \rangle_l$  und definieren dann die Hedlund-Metrik  $\langle, \rangle_H$  auf  $G$  völlig analog zum 1. Fall. Es gibt nun eindeutig bestimmte  $v_i \in \mathfrak{g}$  aus dem orthogonalen Komplement von  $\ker TP_N$ , so daß  $a(\exp(TP_N v_i)) = g_i$ . Wir erhalten mit den im 1. Fall zitierten Sätzen die Behauptung.

3.Fall:  $\dim H_1(M, \mathbb{R}) = 1$

Wir zeigen zunächst:  $\mathfrak{g}$  ist 1-dimensional. Hierzu wissen wir bereits

$$\dim \frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{g}^2} = \dim H_1(M, \mathbb{R}) = 1.$$

Es reicht also zu zeigen, daß  $\mathfrak{g}^2 = \mathfrak{g}^3$ , denn daraus folgt aufgrund der Nilpotenz  $\mathfrak{g}^2 = \{e\}$ .

Seien  $x_1, x_2 \in \mathfrak{g}$ . Wähle ein  $y \in \mathfrak{g} - \mathfrak{g}^2$ . Dann gibt es  $y_1, y_2 \in \mathbb{R}y$  und  $z_1, z_2 \in \mathfrak{g}^2$  mit

$$x_1 = y_1 + z_1$$

$$x_2 = y_2 + z_2$$

Der Kommutator von  $x_1$  und  $x_2$  ist dann

$$[x_1, x_2] = \underbrace{[y_1, y_2]}_0 + [y_1, z_2] + [y_2, z_1] + [z_1, z_2] \in \mathfrak{g}^3,$$

Wir erhalten  $G \cong \mathbb{R}$  und  $\Gamma \cong \mathbb{Z}$ , also  $M \cong \frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}} = S^1$ . Für die Standardmetrik auf  $\frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}}$  ist der Satz trivial.  $\square$

**Hilfssatz 3.2** ([Massey2] S.114). *Zu jeder endlich präsentierten Gruppe  $\Gamma$  gibt es eine kompakte 4-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Fundamentalgruppe  $\Gamma$ .*

**BEWEIS:** Wir konstruieren eine derartige Mannigfaltigkeit. Seien  $e_1, \dots, e_n$  Erzeuger und  $r_1, \dots, r_l$  Relationen der Gruppe  $\Gamma$ . Man nehme nun als Ausgangsmannigfaltigkeit eine  $S^4$ . Für jeden Erzeuger  $i = 1, \dots, n$  wählen wir einen Punkt auf der  $S^4$  und schneiden einen kleinen Ball um diesen Punkt heraus. An dem entstehenden Rand (diffeomorph zu  $S^3$ ) kleben wir nun einen „Henkel“ an. Ein Henkel ist hierbei die Produktmannigfaltigkeit  $S^3 \times S^1$ , aus der wir einen kleinen 4-Ball herausgeschnitten haben und die wir mit dem dadurch entstandenen Rand  $\cong S^3$  an das Loch in der gelochten  $S^4$  kleben. Nach Glättung erhalten wir eine orientierbare, differenzierbare Mannigfaltigkeit, die nach dem Satz von Van Kampen (in der Version für CW-Komplexe) die Fundamentalgruppe  $\mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}$  hat.

Wir wählen nun zu jeder Relation  $r_i$  einen Weg, dessen Homotopieklasse die Relation  $r_i$  ist. Analog zu der Konstruktion der Wege  $\gamma_i$  zu Beginn dieses Kapitels kann man nun argumentieren, daß wir annehmen können, daß diese Wege sich gegenseitig nicht schneiden sowie selbstschnittfrei und glatt sind. Wir wählen eine beliebige riemannsche Metrik und schneiden disjunkte Tubenumgebungen um die Wege aus. Jede Zusammenhangskomponente des entstehenden Randes ist ein  $S^2$ -Bündel über

$S^1$ , und da die Mannigfaltigkeit orientierbar ist, ist dieses Bündel diffeomorph zu  $S^2 \times S^1$ . Man sieht leicht, daß sich durch dieses Ausschneiden die Fundamentalgruppe nicht ändert.

Entlang jeder Zusammenhangskomponente des Randes klebt man nun  $S^2 \times K^2$  an, wobei  $K^2$  die abgeschlossene 2-dimensionale Kreisscheibe ist, und glättet anschließend. Die so angeklebte Menge ist einfach zusammenhängend. Das Theorem von Van Kampen besagt nun, daß der erhaltene Raum die Fundamentalgruppe  $\Gamma$  hat.  $\square$

Wir können nun unsere Ergebnisse in dem Theorem zusammenfassen:

**Theorem 3.3** (Existenz von verallgemeinerten Hedlund-Beispielen). *Sei  $\Gamma$  eine endlich erzeugte,  $\kappa$ -stufig nilpotente Gruppe. Es gibt dann eine kompakte, riemannsche Mannigfaltigkeit  $(M, \langle, \rangle_H)$  mit Fundamentalgruppe  $\Gamma$  und eine Familie von Richtungsabbildungen  $(F_\sigma)_{\sigma \in \mathbb{N}}$ , so daß gilt:*

- (1)  $F_\sigma: M \rightarrow \Gamma_\sigma \backslash G_\sigma$  ist eine  $\sigma$ -stufige Richtungsabbildung gemäß Abschnitt III.2.
- (2) Es gibt eine Menge  $\mathbf{u}_\sigma = \{v_i^\sigma \in \mathfrak{g} \mid i = 1, \dots, \dim H_1(M, \mathbb{R})\}$  mit den Eigenschaften:
  - (i) für alle (homotop) minimalen Geodätischen  $c: \mathbb{R} \rightarrow M$  existiert ein Orientierungstreuer Parameterwechsel  $\varphi$ , ein  $i \in \{1, \dots, \dim H_1(M, \mathbb{R})\}$  und ein  $n \in \{-1, +1\}$ , so daß

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \mathbf{A}^\sigma \lim_{t \rightarrow +\infty} (c \circ \varphi)|_{[s,t]} = \exp(nv_i^\sigma)$$

bezüglich der Richtungsabbildung  $F_\sigma$ .

- (ii) Die  $v_i^\sigma$  sind linear unabhängige Vektoren in der Lie-Algebra  $\mathfrak{g}_\sigma$  und spannen ein Komplement zu  $\mathfrak{g}_\sigma^2$  auf.

Derartige riemannsche Mannigfaltigkeiten  $(M, \langle, \rangle_H)$  zusammen mit der Familie der Richtungsabbildungen  $(F_\sigma)_{\sigma \in \mathbb{N}}$  nennen wir *verallgemeinerte Hedlund-Beispiele*.

**BEWEIS:** Wir betrachten zunächst den Fall, daß  $\Gamma$  torsionsfrei und ungleich  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  ist. Wir benutzen den letzten Satz. Sei  $M$  die dort definierte Nilmannigfaltigkeit mit der dort definierten Hedlund-Metrik  $\langle, \rangle_H$ . Für  $\sigma \geq \kappa$  ist dann  $F_\sigma := \text{id}$  eine  $\sigma$ -stufige Richtungsabbildung. Für  $\sigma < \kappa$  ist  $F_\sigma := p_{\sigma\kappa}$  eine  $\sigma$ -stufige Richtungsabbildung. Man sieht leicht, daß  $(M, \langle, \rangle_H, (F_\sigma)_{\sigma \in \mathbb{N}})$  ein Hedlund-Beispiel ist.

Für den Fall  $\Gamma = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  nehmen wir eine Autobahnmetrik  $\langle, \rangle_A$  auf  $T^2 \times S^2$  bezüglich der Autobahn in Beispiel 1.3. Für jedes  $\sigma \in \mathbb{N}$  sei die Richtungsabbildung  $F_\sigma$  die Projektion von  $T^2 \times S^2$  auf  $T^2$ .

Sei nun  $\Gamma$  eine beliebige endlich erzeugte, nilpotente Gruppe. Mit Satz II.1.5 betonen wir  $\Gamma$  als Untergruppe von endlichem Index in eine Gruppe  $D = A \times B$  ein, wobei  $A$  endlich und  $B$  der Quotient von  $\Gamma$  durch die Torsionsgruppe ist. Die Gruppe  $B$  ist endlich erzeugt, torsionsfrei und nilpotent. Es gibt also zu ihr ein verallgemeinertes Hedlund-Beispiel  $(M_B, \langle, \rangle_B, (F_\sigma^B)_{\sigma \in N})$ . Wir wählen zu der endlichen Gruppe  $A$  eine kompakte riemannsche Mannigfaltigkeit  $(M_A, \langle, \rangle_A)$  mit Fundamentalgruppe  $A$ . Auf  $M_A$  gibt es dann keine nicht-konstanten minimalen Geodätischen. Man sehe  $M_D := M_A \times M_B$  mit der Produktmetrik, die wir im folgenden  $\langle, \rangle_D$  nennen wollen. Die Hintereinanderausführung von  $F_\sigma^B$  nach der Projektion  $M_D \rightarrow M_B$  ergibt eine Richtungsabbildung  $F_\sigma^D$  auf  $M_D$ . Minimale Geodätische auf  $M_D$  sind konstant auf ihrer  $M_A$ -Komponente und eine minimale Geodätische auf ihrer  $M_B$ -Komponente. Also ist auch  $(M_D, \langle, \rangle_D, (F_\sigma^D)_{\sigma \in N})$  ein Hedlund-Beispiel.

Es gibt nun zu der Untergruppe  $\Gamma \leq D$  eine endliche Überlagerung  $u: M_\Gamma \rightarrow M_D$ . Wir versehen  $M_\Gamma$  mit der gelifteten riemannschen Metrik  $\langle, \rangle_\Gamma$ . Mit dem Zusatz zu Satz II.1.5 sehen wir, daß  $F_\sigma^D \circ u$  eine Richtungsabbildung auf  $M_\Gamma$  definiert. Da  $(M_D, \langle, \rangle_D, (F_\sigma^D)_{\sigma \in N})$  ein verallgemeinertes Hedlund-Beispiel ist, ist auch  $(M_\Gamma, \langle, \rangle_\Gamma, (F_\sigma^D \circ u)_{\sigma \in N})$  ein verallgemeinertes Hedlund-Beispiel.  $\square$

## ANHANG A

### *Gruppennormen und Längennormen*

In diesem Abschnitt wird die in [Pansu] (34) skizzierte Theorie der Normen auf Gruppen genau ausgeführt. Wenn  $\Gamma$  Fundamentalgruppe einer kompakten riemannschen Mannigfaltigkeit ist, findet man die gegenseitige Abschätzbarkeit der Normen auf  $\Gamma$ , die unter Punkt 4. und 5. der folgenden Beispiele aufgeführt sind, auch in [Gromov2] 3.20–3.22 mit anderen Beweisen. Abschließend wollen wir als Anwendung der Längennormen die Wohldefiniertheit der stabilen Norm zeigen.

**DEFINITION A.1.** Eine Funktion  $|\cdot|: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  von der Gruppe  $\Gamma$  in die nicht-negativen reellen Zahlen nennen wir *Gruppennorm*, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

- (1)  $|\gamma| = 0 \Leftrightarrow \gamma = e$  (Positivität),
- (2)  $|\gamma\gamma'| \leq |\gamma| + |\gamma'|$  (Dreiecksungleichung),
- (3)  $|\gamma| = |\gamma^{-1}|$  (Symmetrie).

Ist  $\Gamma$  endlich erzeugt und gilt zusätzlich

- (4)  $\forall r > 0$  gilt  $\{\gamma \in \Gamma \mid |\gamma| < r\}$  ist endlich (Eigentlichkeit),
- (5) für alle  $\theta > 0$  existiert ein  $p \in \mathbb{R}^+$ , so daß sich jedes  $\gamma \in \Gamma$  als Wort  $\prod \gamma_i$  schreiben läßt, wobei  $|\gamma_i| \leq p$  und  $\sum |\gamma_i| \leq (1 + \theta)|\gamma|$ ,

so nennen wir  $|\cdot|$  eine *Längennorm*.

**BEMERKUNG A.2.** Die Definition der Gruppennorm folgt [Gromov2] 3.20, wohingegen die Definition der Längennorm sich an [Pansu] orientiert. In [Pansu] bleibt jedoch etwas unklar, was unter einer Längennorm verstanden werden soll. Unter anderem wird Eigenschaft (4) nicht gefordert. Allein aus den anderen Eigenschaften können aber die benötigten Sätze nicht hergeleitet werden. Ein Gegenbeispiel läßt sich z.B. mit der unten definierten total-diskreten Gruppennorm angeben.

**BEISPIELE A.3.**

1. Eine Norm auf einem  $\mathbb{R}$ -Vektorraum ist auch eine Gruppennorm.

2. Eine Gruppennorm induziert auf jeder Untergruppe eine Gruppennorm, u.a. trägt also jedes Gitter in einem normierten Vektorraum eine induzierte Gruppennorm. Wie man leicht sieht, ist dies eine Längennorm.
3. Die *total-diskrete Gruppennorm*  $|\cdot|$  mit  $|\gamma| = 1 \forall \gamma \neq e$  ist eine Gruppennorm, aber keine Längennorm. Sie hat nicht die Eigenschaft (4).
4. Sei  $S$  eine endlich Menge von Erzeugenden von  $\Gamma$  und  $T := S \cup S^{-1}$ . Jedes Element in  $\Gamma$  läßt sich als Produkt von Elementen aus  $T$  schreiben; die minimale Anzahl der Faktoren, die man benötigt, um das gegebene  $\gamma \in \Gamma - \{e\}$  zu schreiben, heißt die Wortlänge von  $\gamma$  bezüglich der Erzeugendenmenge  $S$ , die wir immer mit  $|\cdot|_S$  bezeichnen werden. Definieren wir außerdem  $|e|_S := 0$ , so erhalten wir eine Längennorm mit  $p = 1$  für alle  $\theta$ .
5. Sei  $M$  eine kompakte riemannsche Mannigfaltigkeit mit Metrik  $\langle, \rangle$  und mit Fundamentalgruppe  $\Gamma$  bezüglich des Basispunkts  $m$ . Dann ist  $\Gamma$  endlich erzeugt. Weiterhin sei  $\tilde{m}$  ein Punkt über  $m$  auf der universelle Überlagerung  $\tilde{M}$  von  $M$ . Wir benutzen für die Multiplikation in der Fundamentalgruppe  $\Gamma$  folgende Konvention: für  $\gamma, \gamma' \in \Gamma$  wird  $\gamma\gamma'$  von einem Weg repräsentiert, der zuerst  $\gamma'$  und dann  $\gamma$  durchläuft. Die Abbildung, die jede Decktransformation  $D$  auf die Homotopieklasse eines Weges mit Lift von  $\tilde{m}$  nach  $D(\tilde{m})$  abbildet, ist ein Gruppenisomorphismus von den Decktransformationen nach  $\Gamma$ . Die Fundamentalgruppe  $\Gamma$  operiert somit von links als Decktransformationen auf  $\tilde{M}$ . Setzen wir

$$|\gamma|_{\langle, \rangle} := d_{\langle, \rangle}(\tilde{m}, \gamma.\tilde{m}),$$

so erhalten wir eine Längennorm auf  $\Gamma$ . Es genügt hierfür zu zeigen, daß die Eigenschaft (5) für  $p = 2(1 + \theta^{-1}) \text{diam}(M, \langle, \rangle)$  erfüllt ist.

Sei also  $\gamma \in \Gamma$  vorgegeben. Man wähle nun ein  $n \in \mathbb{N}$  mit

$$n \geq \frac{\theta|\gamma|}{2 \text{diam}(M, \langle, \rangle)} > n - 1.$$

Für eine Kürzeste  $c: [0, 1] \rightarrow \tilde{M}$  von  $\tilde{m}$  nach  $\gamma.\tilde{m}$  bestimme man für  $i = 0, \dots, n$  Elemente  $\gamma'_i \in \Gamma$  mit

$$d_{\langle, \rangle} \left( \gamma'_i.\tilde{m}, c \left( \frac{i}{n} \right) \right) \text{ minimal, also auch } \leq \text{diam}(M, \langle, \rangle)$$

und setze  $\gamma_i = \gamma'_i(\gamma'_{i-1})^{-1}$  für  $i = 1, \dots, n$ . Offensichtlich gilt

$$\gamma'_0 = e, \quad \gamma'_i = \gamma_i \cdots \gamma_1 \quad \text{und} \quad \gamma = \gamma'_n = \gamma_n \cdots \gamma_1.$$

Sei  $\delta_{ij}$  das Kronecker-Symbol. Damit ist

$$\begin{aligned} |\gamma_i| &\leq \mathcal{L}\left(c|_{\left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right]}\right) + (2 - \delta_{1i} - \delta_{in}) \operatorname{diam}(M, \langle, \rangle) \\ &= \frac{|\gamma|}{n} + (2 - \delta_{1i} - \delta_{in}) \operatorname{diam}(M, \langle, \rangle) \\ &\leq p. \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich zum einen die erste Bedingung für die Eigenschaft (5), zum anderen aber auch

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n |\gamma_j| &\leq |\gamma| + 2(n-1) \operatorname{diam}(M, \langle, \rangle) \\ &\leq (1 + \theta)|\gamma|, \end{aligned}$$

also auch die zweite Bedingung.

Der hier durchgeführte Beweis wurde in [Pansu] (34) skizziert.

ANMERKUNG A.4. Ist  $M$  in der letzten Bemerkung keine riemannsche Mannigfaltigkeit, sondern ein kompakter Längenraum im Sinne von [Gromov2] 1.3 mit endlichem Durchmesser und der Eigenschaft, daß jedes Element der Fundamentalgruppe einen Repräsentanten endlicher Länge hat, so erhält man auch eine Längennorm auf der Fundamentalgruppe von  $M$ . Der Beweis geht völlig analog. Zum Beispiel bekommen wir so Längennormen auf den Fundamentalgruppen von kompakten Räumen mit einer Finsler-Metrik und auf Gittern in nilpotenten Lie-Gruppen mit einer Carnot-Caratheodory-Metrik bezüglich einer linksinvarianten Distribution, die transversal auf dem Kommutator der Lie-Algebra steht.

**Proposition A.5** ([Pansu] (34)). *Zwei Längennormen  $|\cdot|_1$  und  $|\cdot|_2$  auf einer endlich erzeugten Gruppe  $\Gamma$  sind äquivalent, d.h. es gibt Konstanten  $c, C > 0$  mit*

$$c|\gamma|_1 \leq |\gamma|_2 \leq C|\gamma|_1 \quad \forall \gamma \in \Gamma.$$

BEWEIS: Zunächst wollen wir diese Aussage für den Fall  $|\cdot|_1 = |\cdot|_S$  und  $|\cdot|_2 = |\cdot|_{S'}$  für zwei endliche Erzeugendenmengen  $S$  und  $S'$  von  $\Gamma$  zeigen. Definieren wir  $k := \max\{|\gamma|_S \mid \gamma \in S'\} < \infty$ , so gilt  $|\cdot|_S \leq k|\cdot|_{S'}$  (und  $k > 0$  für nicht triviales  $\Gamma$ ); die andere Ungleichung gilt analog.

Für den Beweis der Proposition reicht es nun zu zeigen, daß es für eine beliebige Längennorm  $|\cdot|_1$  eine Menge  $S$  von Erzeugenden gibt, so daß  $|\cdot|_1$  und  $|\cdot|_S$  äquivalent sind. Hierfür wählen wir zu einem  $\theta > 0$  ein  $p$ , so daß für  $|\cdot|_1$  die Eigenschaft (5) einer

Längennorm erfüllt ist. Dann setzen wir  $S := \{\gamma \in \Gamma \mid |\gamma|_1 < p\}$ , das nach Eigenschaft (4) endlich ist. O.E. können wir annehmen, daß  $p$  so groß ist, daß  $S$  die Gruppe  $\Gamma$  erzeugt. Offensichtlich gilt  $|\cdot|_1 \leq p| \cdot|_S$ . Sei ferner  $\kappa := \min\{|\gamma|_1 \mid \gamma \in S - \{e\}\}$ , so erhalten wir mit der Eigenschaft (5) auch  $\kappa| \cdot|_S \leq (1 + \theta)| \cdot|_1$ .  $\square$

**Proposition A.6** (ohne Beweis in [Pansu] (34) erwähnt). *Sei  $N$  eine Untergruppe von  $\Gamma$  mit endlichem Index. Die Gruppe  $\Gamma$  habe die Längennorm  $|\cdot|$ . Dann ist die Restriktion von  $|\cdot|$  auf  $N$  auch eine Längennorm auf  $N$ .*

BEWEIS: Offensichtlich sind die Eigenschaften (1) bis (4) erfüllt. Um (5) zu zeigen, wählen wir Repräsentanten  $h_1, \dots, h_k \in \Gamma$  der Elemente von  $N \setminus \Gamma$ , d.h. der Linksnebenklassen modulo  $N$  und setzen  $s := \max|h_i|$ . Zu gegebenem  $\theta > 0$  bestimme man mit Eigenschaft (5) ein  $p'$  zu  $\theta' := \theta/2$  und setze

$$p_N := \max \left\{ p', \frac{8s(1 + \theta')}{\theta'} \right\}.$$

Sei  $\gamma \in N$  gegeben. Man bestimme nun mit (5) geeignete  $\gamma_1, \dots, \gamma_r \in \Gamma$ , für die

$$\gamma = \prod \gamma_i, \quad |\gamma_i| \leq p_N \quad \text{und} \quad \sum |\gamma_i| \leq (1 + \theta') |\gamma|.$$

O.B.d.A. gibt es kein  $i$  mit  $|\gamma_i| \leq \frac{p_N}{2}$  und  $|\gamma_{i+1}| \leq \frac{p_N}{2}$ , denn sonst fassen wir  $\gamma_i$  und  $\gamma_{i+1}$  zusammen. Wir erhalten also

$$(1 + \theta')|\gamma| \geq \frac{(r - 1)p_N}{4}$$

und daraus

$$\theta' |\gamma| \geq 2s(r - 1).$$

Man wähle nun für jedes  $i = 1, \dots, r - 1$  ein  $\tilde{n}_i \in N$ , so daß der Ausdruck  $|\tilde{n}_i^{-1} \prod_{j=1}^i \gamma_j|$  minimal ist (und somit  $\leq s$ ); weiter setzen wir  $\tilde{n}_0 = e$  und  $\tilde{n}_r = \gamma$ . Wir setzen für  $i = 1, \dots, r$  nun  $n_i := (\tilde{n}_{i-1})^{-1} \tilde{n}_i$  und erhalten somit

$$\gamma = \prod_{i=1}^r \gamma_i = \tilde{n}_r = \prod_{i=1}^r n_i.$$

Weiter gilt

$$|n_i| = |(\tilde{n}_{i-1})^{-1} \tilde{n}_i| \leq \left| \tilde{n}_{i-1}^{-1} \prod_{j=1}^{i-1} \gamma_j \right| + |\gamma_i| + \left| \left( \tilde{n}_{i-1}^{-1} \prod_{j=1}^i \gamma_j \right)^{-1} \right| \leq (2 - \delta_{i0} - \delta_{ir})s + |\gamma_i|$$

Somit haben wir einerseits  $|n_i| \leq p := 2s + p_N$  und andererseits

$$\begin{aligned} \sum |n_i| &\leq 2s(r-1) + \sum |\gamma_i| \\ &\leq \theta'|\gamma| + (1+\theta')|\gamma| \\ &\leq (1+\theta)|\gamma| \end{aligned}$$

Das Produkt  $\prod_{i=1}^r n_i$  ist also die für Eigenschaft (5) benötigte Wortdarstellung von  $\gamma$ .  $\square$

**Proposition A.7** ([Pansu] (34)).  $\Gamma$  trage wie oben eine Längennorm  $|\cdot|$ . Sei  $F$  eine endliche normale Untergruppe von  $\Gamma$ . Dann ist

$$\begin{aligned} \|\cdot\|: \frac{\Gamma}{F} &\rightarrow \mathbb{R}_0^+ \\ \|\gamma F\| &:= \min \{|\gamma f| \mid f \in F\} \end{aligned}$$

eine Längennorm auf  $\frac{\Gamma}{F}$ .

**BEGRÜNDUNG.** Die Eigenschaften (1)–(3) sind offensichtlich, (4) nutzt die Endlichkeit von  $F$ , (5) steigt direkt von  $\Gamma$  auf  $\frac{\Gamma}{F}$  ab.  $\square$

**ANWENDUNG A.8.** Sei  $M$  eine kompakte riemannsche Mannigfaltigkeit,  $m_0$  ein fest gewählter Punkt und  $|\cdot|$  die von der riemannschen Metrik induzierte Längennorm auf  $\pi_1(M, m_0)$ . In Abschnitt 1 definieren wir die ganzen Homologieklassen in  $H_1(M, \mathbb{R})$  als

$$\phi_{Hom} \circ \phi_{Hur}(\pi_1(M, m_0)) = H_1(M, \mathbb{Z})_{\mathbb{R}}.$$

Auf  $H_1(M, \mathbb{Z})_{\mathbb{R}}$  definieren wir nun eine Gruppennorm  $|\cdot|_H$  durch

$$|v|_H := \inf \{|\gamma| \mid \phi_{Hom} \circ \phi_{Hur}(\gamma) = v\}.$$

Sei  $S$  ein Erzeugendensystem von  $\pi_1(M, m_0)$  und  $S' := \phi_{Hom} \circ \phi_{Hur}(S)$ , dann erzeugt  $S'$  auch die Gruppe  $H_1(M, \mathbb{Z})_{\mathbb{R}}$ . Es gibt eine Konstante  $C > 0$ , so daß  $|\cdot| \geq C|\cdot|_S$  und somit auch  $|\cdot|_H \geq C|\cdot|_{S'}$ . Für die in Abschnitt 2 auf den ganzen Homologieklassen  $H_1(M, \mathbb{Z})_{\mathbb{R}}$  definierte die stabile Norm  $\|\cdot\|$  gilt nun

$$\|v\| = \inf_n \left\{ \frac{1}{n} |nv|_H \right\}$$

Man nun sieht leicht, daß

$$\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0 \quad \forall v \in H_1(M, \mathbb{Z})_{\mathbb{R}}.$$

## *Differentialtopologische Hilfsmittel*

Alle Mannigfaltigkeiten in diesem Abschnitt sind Mannigfaltigkeiten ohne Rand, es sei denn es steht ausdrücklich „Mannigfaltigkeit mit Rand“ oder „Mannigfaltigkeit (evtl. mit Rand)“.

### 1. Die starke und die schwache $C^r$ -Topologie

Dieser Abschnitt lehnt sich stark an das Buch [Hirsch] an. Die Definitionen und Sätze wurden größtenteils aus diesem Buch übernommen. Dort findet man auch die zugehörigen Beweise. Um jedoch die starke Konvergenz für unsere Konstruktion voll nutzen zu können, wird zum Schluß noch eine einfache Proposition bewiesen, die ich in der benötigten Form in der Literatur nicht fand.

Im folgenden sei  $C^0(N, M)$  die Menge der stetigen Funktionen und  $C^r(N, M)$  ( $r \in \mathbb{N}$ ) die Menge der  $r$ -fach stetig differenzierbaren Funktionen von der Mannigfaltigkeit  $N$  (mit Rand  $\partial N$ ) in die Mannigfaltigkeit  $M$  (mit Rand  $\partial M$ ). Wir wollen diese Mengen mit der „starken“ und der „schwachen“ Topologie versehen. Hierzu geben wir für jeden Punkt eine Umgebungsbasis an.

**DEFINITION B.1.1** (der schwachen  $C^k$ -Topologie). Sei  $f \in C^r(N, M)$ . Zu jeder Karte  $(\varphi, U)$  von  $N$  und  $(\psi, V)$  von  $M$  und zu jedem kompakten  $K \subset U$  mit  $f(K) \subset V$  und zu jedem  $\epsilon \in ]0, \infty]$  definieren wir

$$\mathcal{N}_W^r(f; (\varphi, U), (\psi, V), K, \epsilon)$$

als die Menge aller  $g \in C^r(N, M)$  mit  $g(K) \subset V$  und

$$\|D^k(\psi f \varphi^{-1})(x) - D^k(\psi g \varphi^{-1})(x)\| < \epsilon$$

für alle  $x \in \varphi(K)$ ,  $k = 0, \dots, r$ . Für jedes  $f$  bildet die Menge aller so definierter  $\mathcal{N}_W^r(f; (\varphi, U), (\psi, V), K, \epsilon)$  eine Subbasis von Umgebungen einer Topologie auf  $C^r(N, M)$ . Diese Topologie heißt die *schwache  $C^r$ -Topologie*. Sie macht  $C^r(N, M)$  zum topologischen Raum  $C_W^r(N, M)$ .

DEFINITION B.1.2 (der starken  $C^r$ -Topologie). Sei  $f \in C^r(N, M)$ . Zu jeder lokal-endlichen Familie  $\Phi = ((\varphi_i, U_i))_{i \in \Lambda}$  von Karten von  $N$ , zu jeder Familie  $\Psi = ((\psi_i, V_i))_{i \in \Lambda}$  von Karten von  $M$ , zu jeder Familie von Kompakta  $K = (K_i)_{i \in \Lambda}$  und zu jeder Familie positiver Zahlen  $\epsilon = (\epsilon_i)_{i \in \Lambda}$ , für die  $K_i \subset U_i$  und  $f(K_i) \subset V_i$  gilt, definieren wir

$$\mathcal{N}_S^r(f; \Phi, \Psi, K, \epsilon)$$

als die Menge aller  $g \in C^r(N, M)$  mit  $g(K_i) \subset V_i$  und

$$\|D^k(\psi_i f \varphi_i^{-1})(x) - D^k(\psi_i g \varphi_i^{-1})(x)\| < \epsilon_i$$

für alle  $i \in \Lambda$ ,  $x \in \varphi(K_i)$ ,  $k = 0, \dots, r$ . Für jedes  $f$  bildet die Menge aller so definierter  $\mathcal{N}_S^r(f; \Phi, \Psi, K, \epsilon)$  eine Subbasis von Umgebungen einer Topologie auf  $C^r(N, M)$ . Diese Topologie heißt die *starke  $C^r$ -Topologie*. Sie macht  $C^r(N, M)$  zum topologischen Raum  $C_S^r(N, M)$ .

Die starke Topologie ist feiner als die schwache Topologie. Wenn  $N$  kompakt ist, stimmen beide Topologien überein.

Eine stetige Funktion  $f: N \rightarrow M$  heißt *eigentlich*, wenn Urbilder kompakter Mengen kompakt sind. Den topologischen Unterraum der eigentlichen Funktionen in  $C_W^r(N, M)$  (bzw.  $C_S^r(N, M)$ ) bezeichnen wir mit  $\text{Prop}_W^r(N, M)$  (bzw.  $\text{Prop}_S^r(N, M)$ ). Wenn  $N$  kompakt gilt

$$\text{Prop}_S^r(N, M) = \text{Prop}_W^r(N, M) = C_S^r(N, M) = C_W^r(N, M).$$

Sind zusätzlich noch Mengen  $N_0 \subset N$  und  $M_0 \subset M$  gegeben, so definieren wir  $C_W^r(N, N_0; M, M_0)$  (bzw.  $C_S^r(N, N_0; M, M_0)$ ) als den Raum der  $C^r$ -Funktionen von  $N$  nach  $M$ , die  $N_0$  in  $M_0$  abbilden, versehen mit der schwachen (bzw. starken) Topologie.

**Satz B.1.3** ([Hirsch] chapter 2, Theorem 1.4). *Seien  $N$  und  $M$  wieder ohne Rand. Die Menge der  $C^r$ -Einbettungen ist offen in  $C_S^r(N, M)$  für  $r \geq 1$ .*

**Satz B.1.4** ([Hirsch] chapter 2, Theorem 2.6.). *Seien  $N$  und  $M$  zwei  $C^s$ -Mannigfaltigkeiten ohne Rand,  $1 \leq s \leq \infty$ . Dann sind die  $s$ -fach stetig differenzierbaren Funktionen von  $N$  nach  $M$  dicht in den stetigen Funktionen von  $N$  nach  $M$  bezüglich der starken  $C^0$ -Topologie.*

**Satz B.1.5** ([Hirsch] chapter 2, Theorem 2.13). *Seien  $N$  und  $M$  zwei  $C^r$ -Mannigfaltigkeiten ohne Rand,  $1 \leq r \leq \infty$ , mit  $\dim M \geq 2 \dim N + 1$ . Wenn  $N$  kompakt,*

dann sind die  $C^r$ -Einbettungen von  $N$  in  $M$  dicht in  $C_S^r(N, M)$ . Wenn  $M$  nicht kompakt ist, sind die Einbettungen dicht in  $\text{Prop}_S^r(N, M)$ .

Wir bezeichnen mit  $C^r(N, N_0; M, M_0)$  die Menge der Funktionen aus  $C^r(N, M)$ , die  $N_0$  in  $M_0$  abbilden. Mit der von der starken Norm induzierten Topologie heißt sie dann  $C_S^r(N, N_0; M, M_0)$ .

**Satz B.1.6** ([Hirsch] chapter 2, Theorem 3.5). *Seien  $N$  und  $M$  zwei  $C^s$ -Mannigfaltigkeiten (evtl. mit Rand),  $1 \leq s \leq \infty$ ;  $N_0$  (bzw.  $M_0$ ) sei eine  $C^s$ -Untermannigfaltigkeit von  $N - \partial N$  oder  $\partial N$  (bzw.  $M - \partial M$  oder  $\partial M$ ). Dann ist  $C^s(N, N_0; M, M_0)$  dicht in  $C_S^r(N, N_0; M, M_0)$ ,  $0 \leq r \leq s$ .*

**Satz B.1.7** ([Hirsch] chapter 3, Theorem 2.1.(a), Transversalitätssatz). *Seien  $N$  und  $M$  zwei  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeiten (ohne Rand) und  $A \subset M$  eine  $C^\infty$ -Untermannigfaltigkeit. Dann sind die Abbildungen von  $N$  nach  $M$ , die transversal zu  $A$  sind, dicht im Raum aller  $C^\infty$ -Funktionen von  $N$  nach  $M$  in der starken (oder schwachen)  $C^\infty$ -Topologie.*

Für die Anwendung des Transversalitätssatzes beachte man, daß zwei Kurven in einer Mannigfaltigkeit der Dimension  $\leq 3$  genau dann transversal sind, wenn sie sich gegenseitig nicht schneiden.

Die folgende Proposition konnte in der Literatur nicht gefunden werden. Um die Begründung anschaulich zu halten, wurde sie nur für  $\dim N = 1$  formuliert. Entsprechende Verallgemeinerungen in höhere Dimensionen sind aber auch problemlos möglich.

**Proposition B.1.8.** *Sei  $k: [-\rho, 1 + \rho] \rightarrow M$  eine  $C^\infty$ -Kurve,  $\rho \geq 0$ . Es gibt dann eine Umgebung  $\mathcal{N}$  von  $k|_{]0,1[}$  in  $C_S^\infty(]0, 1[, M)$ , so daß für alle  $\hat{l} \in \mathcal{N}$  die Kurve*

$$l: [-\rho, 1 + \rho] \rightarrow M$$

$$l|_{]0,1[} := \hat{l}, \quad l|_{[-\rho,0]} := k|_{[-\rho,0]}, \quad l|_{[1,1+\rho]} := k|_{[1,1+\rho]}$$

$C^\infty$  ist.

**BEGRÜNDUNG B.1.9.** Wir wenden die Definition B.1.2 an: Setze für  $i \in \mathbb{N}$  und

$$U_i := ]0, \frac{1}{2i}[ \cup ]1 - \frac{1}{2i}, 1[.$$

Die Familie  $((\text{id}|_{U_i}))_{i \in \mathbb{N}}$  ist eine lokal-endliche Kartenfamilie von  $N$ . Setze weiter

$$K_i := \left[ \frac{1}{8i}, \frac{1}{4i} \right] \cup \left[ 1 - \frac{1}{4i}, 1 - \frac{1}{8i} \right].$$

Wähle eine gemeinsame Umgebung  $V$  von  $k(0)$  und  $k(1)$ , die so klein ist, daß auf ihr eine Karte  $\psi$  definiert werden kann. Es gibt ein  $i_0 \in \mathbb{N}$ , so daß  $k(K_i) \subset V$  für alle  $i \geq i_0$ . Setze nun  $\Lambda := \{i \in \mathbb{N} \mid i \geq i_0\}$  und  $\epsilon_i := \frac{1}{i}$ . Definiere

$$\mathcal{N} := \mathcal{N}_S^\infty \left( k|_{]0,1[}; ((\text{id}|_{U_i}))_{i \in \Lambda}, ((\psi, V))_{i \in \Lambda}, (K_i)_{i \in \Lambda}, (\epsilon_i)_{i \in \Lambda} \right)$$

$\mathcal{N}$  ist eine Umgebung von  $k|_{]0,1[}$  in  $C_S^\infty(]0,1[, M)$  und man sieht sofort, daß für alle  $\hat{l} \in \mathcal{N}$ ,  $r \in \mathbb{N}$  und für  $t_0 \in \{0,1\}$  gilt:

$$\frac{d^r}{dt^r}(\psi \hat{l})(t) \rightarrow \frac{d^r}{dt^r}(\psi k)(t_0) \quad \text{für } t \rightarrow t_0.$$

Die Umgebung  $\mathcal{N}$  leistet also das Gewünschte. □

## 2. Tubenumgebungen

Für die in Kapitel IV.1 konstruierten Autobahnen benötigen wir einige Ergebnisse über die Konstruktion von Tubenumgebungen und Ballbündeln. Das Ziel dieser Konstruktion ist es, Umgebungen von Untermannigfaltigkeiten zu finden, die eine besonders einfache Gestalt haben.

Die Tubenumgebungen sind z.B. in [BröJä] §12 oder [Hirsch] Abschnitt 4.5 dargestellt worden. In dieser Arbeit wurde jedoch ein etwas anderer Zugang gewählt, da dieser Zugang besser zu unserer Situation paßt.

Das Normalenbündel über  $N$  in  $M$  bezeichnen wir hier mit  $T^\perp N$ , die Teilmenge der Vektoren der Länge  $< r$  mit  $T_{(r)}^\perp N$ . Den Ball mit Radius  $r$  um den Punkt  $q$  in der riemannschen Mannigfaltigkeit  $M$  bezeichnen wir mit  $B_r(q, M)$ . Sofern nicht anders angegeben, trage der  $\mathbb{R}^n$  immer die Standardmetrik. Die riemannsche Exponentialfunktion bezeichnen wir wieder mit  $\exp^{(R)}$ .

**Lemma B.2.1.** *Sei  $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle_M)$  eine beliebige (nicht notwendig kompakte)  $m$ -dimensionale riemannsche Mannigfaltigkeit (ohne Rand) und  $N$  eine  $n$ -dimensionale kompakte Untermannigfaltigkeit (evtl. mit Rand). Wir definieren*

$$\begin{aligned}\chi: T^\perp N &\rightarrow M \\ (n_0, v) &\mapsto \exp^{(R)}_{n_0}(v)\end{aligned}$$

Dann gibt es ein  $r > 0$ , für daß  $\chi|_{T^\perp_{(r)}N}$  ein Diffeomorphismus ist.

BEWEIS:  $\|\cdot\|$  sei die zu  $\langle, \rangle_M$  gehörige Norm. Die Tangentialabbildung  $T_{(n,0)}\chi$  im Punkte  $(n, 0) \in N$  ist der kanonische Vektorraumisomorphismus von  $T_{(n,0)}T^\perp N$  nach  $T_n M$  und deswegen invertierbar. Wir finden also zu jedem  $\tilde{n} \in N$  ein  $r_{\tilde{n}} > 0$  und eine Umgebung  $U(\tilde{n}) \subset N$  von  $\tilde{n}$ , so daß  $\chi$  ein Diffeomorphismus von

$$\{v \in T^\perp_{n'} N \mid n' \in U(\tilde{n}), \|v\| < r_{\tilde{n}}\}$$

auf eine Umgebung von  $\tilde{n}$  ist. Nehmen wir eine endliche Teilüberdeckung

$$U_{(n_1)}, \dots, U_{(n_l)}$$

von  $N$  und wählen ein  $r > 0$  mit  $r \leq r_i$  für alle  $i = 1, \dots, l$ ; dann ist  $\chi$  ein lokaler Diffeomorphismus von  $B_r := \{v \in T^\perp N \mid \|v\| < r\}$  auf eine Umgebung von  $N$ .

Zu zeigen bleibt noch, daß für genügend kleines  $r > 0$  außerdem  $\chi|_{B_r}$  injektiv ist. Nehmen wir das Gegenteil an, dann gibt es  $v_i, w_i \in T^\perp N$  mit Fußpunkten  $q_i \neq \tilde{q}_i$ ,  $\exp^{(R)} v_i = \exp^{(R)} w_i$  und  $\max\{\|v_i\|, \|w_i\|\} < \frac{1}{i}$ . Wir können (nach Übergang zu einer Teilfolge) annehmen, daß die  $q_i$  gegen ein  $q$  und die  $\tilde{q}_i$  gegen ein  $\tilde{q}$  konvergieren. Dann erhalten wir

$$d(q, \tilde{q}) \leq d(q, \exp^{(R)} v_i) + d(\tilde{q}, \exp^{(R)} w_i) < \frac{2}{i} + d(q_i, q) + d(\tilde{q}_i, \tilde{q})$$

und somit  $q = \tilde{q}$ . Dies widerspricht der Tatsache, daß  $\chi$  auf  $U_{n_i} \ni q$  injektiv ist.  $\square$

Das Bild des restringierten  $\chi$  wollen wir die  $r$ -Tubenumgebung von  $N$  oder kurz  $U_r(N)$  nennen. Wir nennen  $N$  auch die Seele der Tubenumgebung  $N$ . Wenn  $N$  ohne Rand und kompakt ist, ist es gerade die Menge aller Punkte in  $M$ , deren Abstand zu  $N$  kleiner als  $r$  ist. Offensichtlich ist  $U_{r'}(N) \subset U_r(N)$  für alle  $0 < r' \leq r$ .

Wir wollen die Menge  $U_r(N)$  jedoch nicht als strukturlose Menge betrachten, sondern ihr die Struktur eines riemannschen  $B_r(0, \mathbb{R}^{m-n})$ -Bündels über  $N$  geben.

DEFINITION B.2.2. Unter einem riemannschen  $B_r(0, \mathbb{R}^{m-n})$ -Bündel oder einfach  $r$ -Ball-Bündel über einer Mannigfaltigkeit  $N$  (evtl. mit Rand) verstehen wir ein Tupel  $(T, p, \{\langle, \rangle_{n_0} \mid n_0 \in N\})$ , bestehend aus einer Mannigfaltigkeit  $T$  (evtl. mit Rand), einer surjektiven  $C^\infty$ -Submersion

$$p: T \rightarrow N$$

und einer riemannschen Struktur  $\langle, \rangle_{n_0}$  auf jeder Faser  $p^{-1}(n_0)$ ,  $n_0 \in N$ , so daß es einen sogenannten *Bündelatlant* von  $T$

$$\mathcal{A} = \{(U_{(i)}, \Psi_i) \mid i \in I\}$$

gibt und hierfür gilt:

- (1) Die  $U_{(i)} \subset N$  bilden eine offene Überdeckung von  $N$ .
- (2) Die  $\Psi_i: p^{-1}(U_{(i)}) \rightarrow U_{(i)} \times B_r(0, \mathbb{R}^{m-n})$  sind Diffeomorphismen.
- (3)  $p \circ \Psi_i^{-1}$  ist die kanonische Projektion von  $U_{(i)} \times B_r(0, \mathbb{R}^{m-n})$  auf  $U_{(i)}$ .
- (4)  $\Psi_i|_{p^{-1}(u)}: p^{-1}(u) \rightarrow \{u\} \times B_r(0, \mathbb{R}^{m-n})$  ist eine Isometrie für alle  $u \in U_{(i)}$ .

Für die Definition der riemannschen  $B_r(0, \mathbb{R}^{m-n})$ -Bündelstruktur auf  $U_r(N)$  definieren wir zunächst eine  $B_r(0, \mathbb{R}^{m-n})$ -Bündelstruktur auf  $T_{(r)}^\perp N$ : Die Projektion  $p$  sei hierbei gerade die Fußpunktprojektion. Die Faser über  $n_0 \in N$  ist ein offener Ball des euklidischen Vektorraums  $(T_{n_0}^\perp N, \langle, \rangle_{n_0})$ ; sie möge die riemannsche Struktur tragen, die hiervon induziert wird.  $(T_{(r)}^\perp N, p, \{\langle, \rangle_{n_0} \mid n_0 \in N\})$  ist dann ein  $B_r(0, \mathbb{R}^{m-n})$ -Bündel.

Sei  $\{U_{(i)}\}$  eine Überdeckung von  $N$  mit Kreisscheiben, so können wir für jedes  $i$  auf  $T^\perp U_{(i)}$  durch einen auf  $U_{(i)}$  definierten Orthonormalbasenschnitt eine Vektorbündel-Karte definieren, die faserweise einen Isomorphismus auf den  $\mathbb{R}^{m-n}$  bildet. Die Restriktionen dieser Vektorbündel-Karten auf Vektoren der Länge  $< r$  bilden einen zu  $(T_{(r)}^\perp N, p, \{\langle, \rangle_{n_0} \mid n_0 \in N\})$  gehörigen  $r$ -Ball-Bündelatlant.

Diese riemannsche  $B_r(0, \mathbb{R}^{m-n})$ -Bündelstruktur wird nun durch den Diffeomorphismus  $\chi|_{T_{(r)}^\perp N}$  auf  $U_r(N)$  herübergeholt. Wir nennen diese Struktur die *kanonische  $B_r(0, \mathbb{R}^{m-n})$ -Bündelstruktur* der  $r$ -Tubenumgebung bezüglich  $\langle, \rangle_M$ .

Man wird jedoch leider nicht erwarten können, daß für eine beliebig vorgegebene riemannsche Metrik auf  $M$  die hiermit definierte riemannsche Struktur auf den Fasern eine riemannsche Unterraumstruktur ist. Dies geht jedoch, wenn die riemannsche Metrik auf der Tubenumgebung flach und  $N$  total geodätisch ist.

In Unterabschnitt IV.1.a wollen wir die riemannsche Metrik so verändern, daß sie in einer kleinen Tubenumgebung flach wird. Wir benutzen hierfür:

**Proposition B.2.3.** *Sei  $(M, \langle, \rangle_M)$  eine riemannsche Mannigfaltigkeit (ohne Rand) der Dimension  $m$  und  $N$  eine kompakte Untermannigfaltigkeit von  $M$  (evtl. mit Rand) der Dimension  $n \leq 1$ . Im Fall  $n = 1$  trage  $N$  eine riemannsche Struktur, die jedoch nicht notwendig die von  $\langle, \rangle_M$  induzierte Metrik ist. Der Radius  $r > 0$  sei so klein, daß  $\chi|_{T_{(r)}^\perp N}$  ein Diffeomorphismus ist. Dann hat die  $r$ -Tubenumgebung von*

$N$  einen  $B_r(0, \mathbb{R}^{m-n})$ -Bündelatlas, dessen Kartenwechsel Isometrien des  $\mathbb{R}^{m-n} \times N$  sind.

**Zusatz B.2.4** (nur für den Fall  $\dim N = 1$ ). *Gibt es eine offene Menge  $U \subset N$ , so daß  $(U, \langle, \rangle_N)$  eine (total) geodätische riemannsche Untermannigfaltigkeit und daß  $\langle, \rangle_M$  flach auf den Fasern über  $U$ , so kann der Bündelatlas in der Proposition sogar so gewählt werden, daß die Bündelkarten auf den Fasern über  $U$  isometrisch sind.*

BEGRÜNDUNG. O.B.d.A. sei  $N$  zusammenhängend. Im Fall  $\dim N = 0$  bildet bereits eine Bündelkarte einen Atlas, also ist die Aussage trivial. Im Fall  $\dim N = 1$  ist  $N$  diffeomorph zum Intervall  $[0, 1]$  oder zur  $S^1$ . Für  $N = [0, 1]$  wählen wir einen Orthonormalbasenschnitt von  $T_{(r)}^\perp N$ . Für  $N = S^1$  sei  $(W_{\Psi_1}, W_{\Psi_2})$  eine offene Überdeckung von  $S^1$  mit zusammenhängenden  $W_i$ . Man kann längs  $W_{\Psi_1}$  und  $W_{\Psi_2}$  Orthonormalbasenschnitte wählen, so daß auf  $W_{\Psi_1} \cap W_{\Psi_2}$  die Transformationsmatrix des Basenwechsels lokal konstant ist. (Man wählt sie zunächst nur stetig, kann dann aber mit den Sätzen des vorhergehenden Abschnitts annehmen, daß sie  $C^\infty$  sind.)

Dieser Schnitt auf  $[0, 1]$  bzw. diese beiden Schnitte auf  $S^1$  induzieren nun (wie oben) einen  $r$ -Ballbündelatlas auf  $T_{(r)}^\perp N$ , der durch Transport mit  $\chi$  einen  $r$ -Ballatlas mit den gewünschten Eigenschaften liefert.

Unter den Voraussetzungen im Zusatz kann man die Orthonormalbasenschnitte so wählen, daß sie entlang  $U$  parallel sind. Dann sind die Karten sogar auf den Fasern über  $U$  Isometrien.  $\square$

## Literaturverzeichnis

- [Arnold] V. I. ARNOLD, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer-Verlag, 1987.
- [Bangert] V. BANGERT, Minimal geodesics, *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* **10** (1989), 263–286.
- [Bass] H. BASS, The degree of polynomial growth of finitely generated nilpotent groups. *Proc. London Math. Soc.*, (3) **25** (1972), 603–614.
- [Baumslag] G. BAUMSLAG, *Lecture notes on nilpotent groups*, American Mathematical Society, 1971.
- [BeMi] D. BENARDETE (Tufts University) & J. MITCHELL (Prime Computer), *Asymptotic Homotopy Cycles for flows and  $\Pi_1$  de Rham Theory*, Preprint, August 1990.
- [Brodbeck] D. BRODBECK, *Minimale Maße und die stabile Norm*, Diplomarbeit, Universität Freiburg, Oktober 1992.
- [BröJä] T. BRÖCKER & K. JÄNICH, *Einführung in die Differentialtopologie*, Heidelberger Taschenbücher, Springer-Verlag, 1973.
- [CorGreen] L. CORWIN & F.P. GREENLEAF, *Representation of nilpotent Lie groups and their applications*, Part 1: Basic theory and examples, Cambridge studies in advanced mathematics 18, 1990.
- [Eberlein] P. EBERLEIN, Geometry of 2-step nilpotent groups with a left-invariant metric, preprint, erscheint in *Annales de l'Ecole Normale Supérieure*.
- [GreeHarp] M. J. GREENBERG & J.R. HARPER, *Algebraic Topology*, Benjamin/Cummings Publishing Company, Reading, Massachusetts, 1981.
- [Gromov1] M. GROMOV, Groups of Polynomial Growth and Expanding Maps, *Publ. Math. de l'I.H.E.S.* **53** (1981), 53–78.
- [Gromov2] M. GROMOV, *Structures métriques pour les Variétés Riemanniennes*, herausgegeben von J. Lafontaine & P. Pansu, CEDIC: Paris, 1981.
- [Hall] P. HALL, *The Theory of Groups*, The Macmillan Company, 1959.
- [Hedlund] G. A. HEDLUND, Geodesics on a two-dimensional Riemannian manifold with periodic coefficients, *Ann. of Math.* **33** (1932), 719–739.
- [Hirsch] M.W. HIRSCH, *Differential Topology*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 1976.

- [Hochsch] G. HOCHSCHILD, *The Structure of Lie groups*, San Francisco, Holden-Day, 1965.
- [KoNo] S. KOBAYASHI & K. NOMIZU, *Foundations of Differential Geometry, Volume I*, Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, Number 15, John Wiley & Sons, 1963.
- [Malcev] A. I. MAL'CEV, On a class of homogeneous spaces, *Amer. Math. Soc. Transl.* **39** (1951), 276–307.
- [Massey1] W.S. MASSEY, *Algebraic Topology: An Introduction*, Harcourt, Brace & World, Inc., 1967.
- [Massey2] W.S. MASSEY, *A Basic Course in Algebraic Topology*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 1991.
- [Milnor] J. MILNOR, Growth of finitely generated solvable groups, *J. Diff. Geom.* **2** (1968), 447–449.
- [Pansu] P. PANSU, Croissance des boules et des géodésiques fermées dans les nilvariétés, *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* **3** (1983), 415–445.
- [Raghu] M.S. RAGHUNATHAN, *Discrete Subgroups of Lie Groups*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 68, Springer-Verlag, 1972.
- [Tits] J. TITS, Groupes à croissance polynomiale, *Séminaire Bourbaki*, exposé numéro 572, 1981.
- [Warner] F. W. WARNER, *Foundations of Diff. Manifolds and Lie Groups*, Scott, Foresman and Company, 1971.
- [Whitehe] G. W. WHITEHEAD, *Elements of homotopy theory*, Springer-Verlag, New York, 1978.
- [Wolf] J. A. WOLF, Growth of finitely generated solvable groups and curvature of riemannian manifolds, *J. Diff. Geom.* **2** (1968), 421–446.