

# Geometrische Resonanzen in einem HgTe-basierten dreidimensionalen topologischen Isolator



DISSERTATION  
ZUR ERLANGUNG DES DOKTORGRADES DER NATURWISSENSCHAFTEN  
(DR. RER. NAT.)  
DER FAKULTÄT FÜR PHYSIK  
DER UNIVERSITÄT REGENSBURG

vorgelegt von  
**Hubert Georg Maier**  
aus  
Ziegelhäuser

im Jahr 2022

Promotionsgesuch eingereicht am: 04.07.2022  
Die Arbeit wurde angeleitet von: Prof. Dr. Dieter Weiss

**Prüfungsausschuss:**

Vorsitzender: Prof. Dr. Klaus Richter  
Erstgutachter: Prof. Dr. Dieter Weiss  
Zweitgutachter: Prof. Dr. Dominique Bougeard  
weiterer Prüfer: Prof. Dr. Sergey Ganichev

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung und Motivation</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Theoretische Grundlagen</b>	<b>9</b>
2.1	Transport in zweidimensionalen Systemen . . . . .	9
2.1.1	Klassischer Magnetotransport . . . . .	13
2.1.2	Landau-Quantisierung . . . . .	16
2.1.3	Shubnikov-de Haas-Oszillationen und ganzzahliger Quanten-Hall-Effekt . . . . .	22
2.2	Periodische Modulation in zweidimensionalen Systemen . . . . .	26
2.2.1	Überblick . . . . .	26
2.2.2	Starke zweidimensionale Modulation: Antidot-Gitter . . . . .	27
2.2.2.1	Transport in Antidot-Übergittern . . . . .	28
2.3	Der topologische Isolator . . . . .	33
2.3.1	Topologische Invarianten . . . . .	34
2.3.2	Berry-Phase und Chern-Invariante . . . . .	35
2.3.3	Quanten-Spin-Hall-Effekt und $\mathbb{Z}_2$ -Invariante . . . . .	38
2.3.4	Verallgemeinerung auf drei Dimensionen . . . . .	43
2.3.5	Landau-Quantisierung von Dirac-Fermionen und Oberflächen-Quanten-Hall-Effekt . . . . .	46
2.3.6	Verspanntes HgTe als dreidimensionaler topologischer Isolator . . . . .	48
<b>3</b>	<b>Experimentelle Realisierung und Messtechnik</b>	<b>53</b>
3.1	Verwendetes Materialsystem . . . . .	53
3.2	Probenfertigung . . . . .	55
3.2.1	Probendesign . . . . .	55
3.2.2	Lithographieverfahren . . . . .	58
3.2.3	Ätzverfahren . . . . .	61
3.2.4	Herstellung des lateralen Übergitters . . . . .	65
3.2.5	Strukturierung der Mesa . . . . .	69
3.2.6	Topgate . . . . .	69
3.2.7	Fertigstellung . . . . .	71
3.3	Tiefemperatur Messaufbau . . . . .	73
3.3.1	Tiefemperatur-Magnetsystem . . . . .	73
3.3.2	Messaufbau für die elektrischen Transportuntersuchungen . . . . .	75
<b>4</b>	<b>Messungen und Diskussion</b>	<b>79</b>
4.1	Grundsätzliche Charakterisierung . . . . .	79

4.2	Transport in Antidot-Übergittern . . . . .	84
4.2.1	Antidots in einer einzelnen Oberfläche des topologischen Iso- lators . . . . .	84
4.2.1.1	Erste Charakterisierungen und Prozessoptimierung . . . . .	86
4.2.1.1.1	Strukturierungsparameter . . . . .	86
4.2.1.1.2	Ätztiefe . . . . .	89
4.2.1.2	Quadratisches Antidot-Übergitter . . . . .	90
4.2.1.3	Hexagonales Antidot-Übergitter . . . . .	99
4.2.2	Antidots durch beide Oberflächen . . . . .	113
4.2.3	Ursprung und Form des Potentials . . . . .	123
<b>5</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>129</b>
<b>A</b>	<b>Arbeitsplan</b>	<b>133</b>
<b>B</b>	<b>Symbole und Abkürzungen</b>	<b>139</b>
B.1	Symbole . . . . .	139
B.2	Abkürzungen . . . . .	143
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>151</b>

# 1

## Einleitung und Motivation

Für die moderne Informationsgesellschaft spielt insbesondere der Bereich der Festkörperphysik eine zentrale Rolle. Ein Grundpfeiler für den wissenschaftlichen und technischen Fortschritt ist hierbei die Grundlagenforschung, welche technische Erungenschaften wie den Computer erst möglich machten. In der Grundlagenforschung geht man der Natur der Dinge auf den Grund, um ein tiefer gehendes Verständnis des untersuchten Systems zu erhalten. So wird beispielsweise das Verhalten und die Eigenschaften von Ladungsträgern in neuartigen Materialsystemen untersucht, um Hypothesen überprüfen oder formulieren zu können und ein fundiertes Verständnis des Systems zu erhalten. Eine dieser neuartigen Materialklassen sind topologische Isolatoren (TI), die 2005 von Kane und Mele [1, 2] in zwei Dimensionen (2D) und drei Dimensionen (3D) theoretisch postuliert wurden [3, 4]. Solche topologische Isolatoren besitzen, analog zu einem gewöhnlichem Isolator, eine Bandlücke zwischen Valenz- und Leitungsband. Im Gegensatz zu einem gewöhnlichen Isolator besitzen diese allerdings zusätzliche leitende Zustände an den Rändern (für 2D TI) oder an den Oberflächen (für 3D TI). Für die vorliegende Arbeit sind vor allem die leitenden Zustände an den Oberflächen eines dreidimensionalen topologischen Isolators von Bedeutung. Diese Oberflächenzustände sind dabei durch die Zeitumkehrsymmetrie geschützt und formen ein zweidimensionales System mit linearer Bandstruktur und nicht spinentarteten Zuständen, wobei der Spin dieser Zustände an deren Impuls gekoppelt ist [5]. Ein Ziel der Grundlagenforschung ist es Erkenntnisse über dieses neuartige System zu erlangen, um beispielsweise zu verstehen, wie sich Ladungsträger in den Oberflächenzuständen verhalten. Zu diesem Zweck kann der Ladungstransport in einem dreidimensionalen topologischen Isolator untersucht werden. Obwohl bereits Untersuchungen zum Transport hierzu vorliegen [6], gab es aufgrund der geringen Beweglichkeit von Ladungsträgern in den verbreiteten Materialsystemen für topologische Isolatoren bisher keine Erforschung ballistischer Effekte [7]. Daher war es bislang unbekannt, ob sich Elektronen einzelner Oberflächen durch ein aufgebracht Potential ballistisch beeinflussen lassen und ob sich die Elektronen dabei anders verhalten als in einem konventionellen zweidimensionalen System. Ein solches Potential kann in gewöhnlichen zweidimensionalen Systemen beispielsweise durch lokal geätzte Bereiche erzeugt werden, wobei an diesen die Aufenthaltswahrscheinlichkeit für Elektronen nahezu Null ist. Somit lässt sich durch das Ätzen von vielen periodisch angeordneten Löchern (Antidots) mit ei-

ner Gitterkonstante  $a$  ein künstlicher zweidimensionaler Kristall mit semi-klassischer Elektronendynamik erzeugen.

Der ballistische Transport<sup>1</sup> in derartigen Übergittern wurden bereits umfangreich in GaAs<sup>2</sup>-basierten zweidimensionalen Systemen [8,9] und in den vergangenen Jahren auch in Graphen [10] untersucht. In diesen sogenannten Antidot-Übergittern ist der elektrische Widerstand nicht mehr durch die statistisch verteilten Streuer gegeben, sondern durch das periodisch aufgebrachte repulsive Potential. Der Einfluss des periodischen Übergitters zeigt sich hierbei besonders deutlich, wenn senkrecht zum zweidimensionalen System ein Magnetfeld angelegt wird. In diesem Fall bewegen sich die Elektronen auf Kreisbahnen mit Radius  $R_c$  durch das aufgebrachte Gitter mit Periode  $a$ . Immer dann, wenn der Radius  $R_c$  und die Gitterperiode  $a$  in einem bestimmten Verhältnis zueinander stehen, ergeben sich geometrische Resonanzen und es treten Extrema im Widerstand auf. Diese geometrischen Resonanzen ermöglichen dabei eine direkte Bestimmung des Fermi-Wellenvektors.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der ballistischen Manipulation der Dirac-Fermionen in einem dreidimensionalen topologischen Isolator aus Quecksilbertellurid (HgTe). Aufgrund der hierbei vorliegenden sehr hohen Beweglichkeit von Ladungsträgern [6], eröffnet sich in einem solchen HgTe-basierten System die Möglichkeit für eine umfassende Untersuchung der Zustände eines dreidimensionalen topologischen Isolators unter dem Einfluss von periodischen Potentialen in der Größenordnung von einigen hundert Nanometern. Ein starkes repulsives Potential wurde in dieser Arbeit durch das nasschemische Ätzen von periodisch angeordneten Löchern (Antidots) realisiert. Es wurden dabei Antidot-Gitter untersucht, in denen alle Löcher nur die Oberseite des dreidimensionalen topologischen Isolators anätzen und Antidot-Gitter, in denen die Löcher den dreidimensionalen topologischen Isolator vollständig durchtrennen. Dies ermöglicht die Untersuchung von geometrischen Resonanzen in unterschiedlich strukturierten dreidimensionalen topologischen Isolatoren.

Inhaltlich gliedert sich die vorliegende Arbeit wie folgt:

In Kapitel 2 werden einige theoretische Grundlagen vorgestellt. Hierbei wird zuerst der Transport in zweidimensionalen Systemen erläutert. Anschließend wird der Einfluss eines aufgeprägten periodischen Potentials und insbesondere der Einfluss eines starken zweidimensionalen Potentials betrachtet. Abschließend erfolgt eine Diskussion der theoretischen Grundlagen topologischer Isolatoren, wobei hierbei genauer auf den HgTe-basierten dreidimensionalen topologischen Isolator eingegangen wird.

In Kapitel 3 wird das verwendete Probenmaterial und einzelne Details der Prozessierung, insbesondere die Nanostrukturierung, bis zur fertigen Probe beschrieben.

---

<sup>1</sup>Für den ballistischen Transport muss die aufgeprägte Gitterperiode  $\lambda_F < a < l_e$  einerseits größer als die Fermi-Wellenlänge  $\lambda_F$  (typischerweise  $\approx 50$  nm) und zum anderen deutlich kleiner als die freie Weglänge  $l_e$  von Elektronen im System sein. Sind diese Bedingungen erfüllt, bewegen sich Elektronen, wie harte Billardkugeln, über viele Einheitszellen des aufgebrachten periodischen Gitters.

<sup>2</sup>Galliumarsenid

Anschließend wird der Messaufbau und die Methodik der Transportuntersuchungen vorgestellt.

In Kapitel 4 erfolgt eine ausführliche Diskussion der erhaltenen Messdaten. Hierfür wird zunächst die grundsätzliche elektrische Charakterisierung der Proben beleuchtet. Anschließend erfolgt eine detaillierte Untersuchung des Transports in einem HgTe-basierten dreidimensionalen topologischen Isolator mit aufgeprägten Antidot-Übergittern verschiedener Gitterperiode und Gittergeometrie. Dabei werden Antidot-Übergitter mit verschiedenen Äztiefen betrachtet. Dadurch können Proben gefertigt und untersucht werden, in denen Antidots nur eine einzelne Oberfläche des topologischen Isolators beeinflussen und welche, in denen die Antidots den kompletten dreidimensionalen topologischen Isolator durchtrennen. Abschließend erfolgt eine Diskussion über den Ursprung und die Form des durch den Ätzprozess erhaltenen Potentials.

In Kapitel 5 werden die Ergebnisse der Arbeit zusammengefasst.

Im Anhang A finden sich detaillierte Informationen zur Probenherstellung.



# 2

## Theoretische Grundlagen

Im diesem Kapitel sollen die theoretischen Grundlagen, welche zum Verständnis der Arbeit beitragen, näher diskutiert werden. Hierfür wird zu Beginn auf allgemeine Merkmale zweidimensionaler (2D) Systeme und deren Transporteigenschaften unter dem Einfluss eines zum System senkrechten Magnetfeldes eingegangen. Dabei wird im Speziellen zwischen dem klassischen Transportregime bei niedrigen Magnetfeldern und der quantenmechanischen Betrachtung unter starkem Magnetfeld unterschieden. Anschließend werden die Konsequenzen aufgezeigt, die ein periodisches Störpotential auf den Magnetotransport in einem solchen 2D System hat. Abschließend wird das Konzept topologischer Isolatoren eingeführt und im Speziellen auf den in der Arbeit verwendeten dreidimensionalen topologischen Isolator (3D TI) aus Quecksilbertellurid (HgTe) eingegangen.

### 2.1 Transport in zweidimensionalen Systemen

Die Besonderheit von 2D Systemen ist, dass diese den Transport von Elektronen (2DES<sup>1</sup>) bzw. Löchern (2DHS<sup>2</sup>) auf eine einzige Ebene beschränken. Eine solche Restriktion der freien Bewegung auf zwei Dimensionen kann beispielsweise durch zwei Halbleiter mit unterschiedlichen Bandlücken realisiert werden. An der Grenzfläche dieser Halbleiter-Heterostruktur entsteht dabei ein sogenanntes Einschlusspotential, welches die Bewegung der Ladungsträger in Wachstumsrichtung einschränkt. Die Beschränkung des Freiheitsgrades führt dabei zu einer Diskretisierung der erlaubten Energieniveaus. Durch die quantisierten Energieeigenwerte entstehen nun im Festkörper sogenannte Subbänder. Die Bewegung der Ladungsträger ist dabei in jedem dieser Subbänder auf zwei Dimensionen beschränkt. Ist der entstandene Potentialtopf schmal genug, so sind diese diskreten Subbänder weit genug voneinander entfernt um zu gewährleisten, dass bei tiefen Temperaturen die thermische Energie  $k_B T$ <sup>3</sup> kleiner ist als die Energiedifferenz zwischen zwei Energieniveaus und nur ein einziges Subband - der sogenannte Grundzustand - besetzt wird. Ein solches quantisiertes System erlaubt die Beobachtung interessanter Effekte, wie beispielsweise den

---

<sup>1</sup>Two-Dimensional Electron System

<sup>2</sup>Two-Dimensional Hole System

<sup>3</sup> $k_B$  steht dabei für die Boltzmann-Konstante und  $T$  für die Temperatur

Quanten-Hall-Effekt (QHE), welcher in Kapitel 2.1.3 näher erläutert wird [11]. Detailliertere Ausführungen hierzu und zum Transport in 2D Systemen im Allgemeinen sind in den Referenzen [12–19] zu finden und wurden für die folgenden Abschnitte entsprechend auch daraus entnommen.

Da in der einschlägigen Fachliteratur gewöhnlich ein Elektronensystem betrachtet wird, orientiert sich auch die anschließende Darlegung daran. Die gezeigten Konzepte und Modelle sind allerdings analog auch auf Lochsysteme anwendbar. Im Folgenden wird die Ebene, in welcher der Transport stattfindet und sich die Ladungsträger frei bewegen können, als  $x$ - $y$ -Ebene definiert.

Will man die Gesamtenergie des Systems im Potentialtopf beschreiben, dann setzt sich diese aus dem quantisierten Subbandenergieniveau  $E_i$  in  $z$ -Richtung und der Energiedispersion frei beweglicher Elektronen in  $x$ - und  $y$ -Richtung zusammen. Für den Fall einer parabolischen Energiedispersion in der Ebene ergibt sich somit die Gesamtenergie des Systems zu:

$$E(i, k_x, k_y) = E_i + \frac{\hbar^2}{2m^*} (k_x^2 + k_y^2), \quad i \in \mathbb{N}_0. \quad (2.1)$$

$k_x$  und  $k_y$  stehen dabei für die Komponenten der Wellenzahl in  $x$ - und  $y$ -Richtung und  $\hbar$  bezeichnet das reduzierte Plancksche Wirkungsquantum. Zudem wird in der Energiedispersion die freie Elektronenmasse  $m_e$  durch die effektive Masse  $m^*$  ersetzt, um den Wechselwirkungen des Elektrons mit dem periodischen Kristallgitter Rechnung zu tragen. Im Folgenden wird zudem davon ausgegangen, dass immer nur das unterste Subband mit der niedrigsten Energie  $E_{i=0}$  besetzt ist, weshalb man dann von einem zweidimensionalen Elektronengas (2DEG<sup>4</sup>) sprechen kann.

Will man nun die Anzahl der bis zu einer Energie  $E$  besetzten Zustände wissen, betrachtet man zunächst ein System mit der Länge  $L_x$  und der Breite  $L_y$ . Wird dieses System mit den Abmessungen  $L_x$  bzw.  $L_y$  in  $x$ - und  $y$ -Richtung periodisch fortgesetzt, müssen die Randbedingungen<sup>5</sup>

$$\Psi(0) = \Psi(L_x) \quad \text{und} \quad \left. \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right|_{x=L_x} \quad (2.2)$$

erfüllt sein, um die Wellenfunktion  $\Psi$  stetig fortführen zu können. Diese periodischen Randbedingungen führen dazu, dass sich eine diskrete Anzahl erlaubter Werte in  $k_x$  und  $k_y$  ergeben, welche sich auf einem Punktraster im  $\mathbf{k}$ -Raum anordnen. Die Abstände zwischen den einzelnen Zuständen sind dabei durch die physikalischen Abmessungen gegeben und betragen

$$\Delta k_x = \frac{2\pi}{L_x} \quad \text{und} \quad \Delta k_y = \frac{2\pi}{L_y}. \quad (2.3)$$

Mit der Probenfläche von  $F = L_x \cdot L_y$  besetzt ein Zustand im  $\mathbf{k}$ -Raum folglich genau einen Bereich von

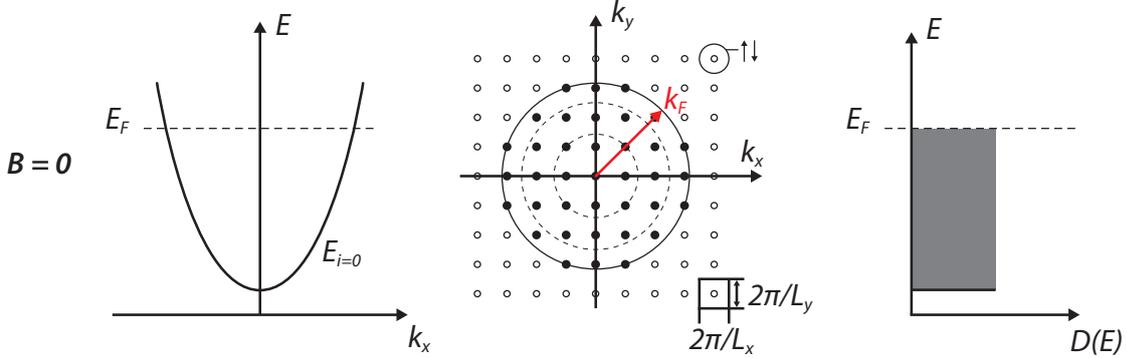
$$\frac{2\pi}{L_x} \cdot \frac{2\pi}{L_y} = \frac{4\pi^2}{F}. \quad (2.4)$$

<sup>4</sup>Two-Dimensional Electron Gas

<sup>5</sup>Hier nur für die  $x$ -Richtung dargestellt. Die Darstellung für die  $y$ -Richtung ist analog dazu.

## 2.1 Transport in zweidimensionalen Systemen

Um daraus die gesamte Anzahl an besetzten Zuständen unterhalb einer Energie  $E$  zu erhalten, müssen nur die einzelnen Zustände im  $\mathbf{k}$ -Raum innerhalb eines Kreises mit Radius  $k$  abgezählt werden (siehe Abbildung 2.1).



**Abbildung 2.1** (Links) Dargestellt ist hier die Dispersionsrelation des untersten Subbandes bei  $B = 0$  für ein freies Elektronengas in zwei Dimensionen. Dabei sind für  $T = 0$  nur Zustände unterhalb der Fermi-Energie  $E_F$  besetzt. (Mitte) Unter periodischen Randbedingungen nehmen die Zustände im  $\mathbf{k}$ -Raum, abhängig von den Dimensionen der Probe  $L_x$  und  $L_y$ , gleich verteilte Werte in  $k_x$  und  $k_y$  an. Dabei sind nur Zustände innerhalb des Fermi-Kreises mit Radius  $k_F$  besetzt. Somit trennt der Fermi-Kreis die besetzten ( $\bullet$ ) von den unbesetzten ( $\circ$ ) Zuständen. Hier dargestellt für spinentartete Zustände, in denen ein Zustand sowohl von Spin-up- ( $\uparrow$ ) als auch von Spin-down-Elektronen ( $\downarrow$ ) besetzt ist. (Rechts) Im untersten Subband nimmt die Zustandsdichte dabei einen konstanten Wert von  $D(E) = g_s m^* / (2\pi \hbar^2)$  an. Nach [20].

Die Wellenzahl  $k$  ist dabei über den Zusammenhang  $k^2 = \frac{2m^*}{\hbar^2}(E - E_{i=0})$  mit der Energie verknüpft. Die Gesamtzahl der Zustände innerhalb der Kreisfläche  $\pi k^2$  ergibt sich folglich zu:

$$N_T(E) = g_s \cdot \frac{\pi k^2}{4\pi^2/F} = F \cdot \frac{g_s k^2}{4\pi} = F \cdot \frac{g_s m^*}{2\pi \hbar^2} (E - E_{i=0}). \quad (2.5)$$

Da die einzelnen Zustände im spinentarteten Fall mit zwei Elektronen (Spin-up  $\uparrow$ , Spin-down  $\downarrow$ ) und im Fall aufgehobener Spinentartung jeweils nur mit einem Elektron gefüllt sind, muss hier ein Spinentartungsfaktor  $g_s$  eingeführt werden, welcher beide Fälle voneinander unterscheidet. So ist im Fall von Spinentartung  $g_s = 2$  und im Fall aufgehobener Spinentartung  $g_s = 1$ .

Aus Gleichung 2.5 ergibt sich folglich die flächennormierte Zustandsdichte für das unterste Subband des Systems zu:

$$\begin{aligned} D(E) &= \frac{1}{F} \frac{dN_T(E)}{dE} = \frac{g_s m^*}{2\pi \hbar^2}, \quad E > E_{i=0} \\ &= 0, \quad E < E_{i=0}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Sind mehr als nur das unterste Subband besetzt, dann setzt sich die gesamte Zustandsdichte aus einer Reihe von Stufenfunktionen zusammen. Somit ist die gesamte Zustandsdichte bei einer bestimmten Energie ein Produkt aus dem Ergebnis von Gleichung 2.6 und der Anzahl an besetzten Subbändern.

Die Wahrscheinlichkeit, mit welcher Zustände einer Energie  $E$  bei einer bestimmten Temperatur  $T$  besetzt sind, wird dabei durch eine Besetzungsfunktion definiert. Diese ist im Fall der hier vorliegenden Fermionen durch die Fermi-Funktion  $f(E)$  gegeben. Dadurch lässt sich zusammen mit der Zustandsdichte aus Gleichung 2.6 die Ladungsträgerdichte  $n_s$  des Systems bestimmen:

$$n_s = \int D(E)f(E)dE. \quad (2.7)$$

Diese Gleichung lässt sich für  $T = 0 K$  weiter vereinfachen, da unter dieser Bedingung die Fermi-Funktion zu einer Stufenfunktion<sup>6</sup>  $\Theta(x)$  wird:

$$n_s = \int D(E)\Theta(E_F - E)dE. \quad (2.8)$$

In diesem Fall sind alle Zustände von  $E_{i=0}$ <sup>7</sup> bis zur Fermi-Energie  $E_F$  gefüllt und das Integral ergibt:

$$n_s = \frac{g_s m^*}{2\pi\hbar^2}(E_F - E_{i=0}). \quad (2.9)$$

Zum Ladungstransport tragen dabei ausschließlich Ladungsträger mit einer Energie nahe der Fermi-Energie bei. Möchte man die Wellenzahl dieser Ladungsträger, auch Fermi-Wellenzahl oder Fermi-Wellenvektor  $k_F$  genannt, in Abhängigkeit der Ladungsträgerdichte  $n_s$  darstellen, so ergibt sich mit der Beziehung  $(E_F - E_{i=0}) = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m^*}$  die Wellenzahl zu:

$$k_F = \sqrt{\frac{4\pi n_s}{g_s}}. \quad (2.10)$$

---

<sup>6</sup> $\Theta(x) = 0$  für  $x < 0$  und  $\Theta(x) = 1$  für  $x > 0$

<sup>7</sup>Für die nachfolgenden Kapitel wird der Energienullpunkt auf  $E_{i=0}$  gesetzt.

### 2.1.1 Klassischer Magnetotransport

Nachdem die Grundlagen zweidimensionaler Systeme aufgezeigt wurden, stellt sich die Frage wie ein solches System auf elektrische und magnetische Felder reagiert. Dafür sollen im Folgenden zunächst die Auswirkungen eines elektrischen Feldes  $\mathbf{E}$  auf den Transport von Ladungsträgern betrachtet werden. Bei niedrigen Magnetfeldern  $B$  kann ein solches System gut durch das klassische Drude-Modell beschrieben werden. In diesem Modell wird davon ausgegangen, dass sich Elektronen in einem Metall mit Hilfe der kinetischen Gastheorie beschreiben lassen. Ersetzt man dabei in der Gastheorie die Maxwell-Boltzmann Verteilung durch die schon im vorherigen Abschnitt erwähnte Fermi-Dirac Verteilung  $f(E)$  und nutzt als freie Elektronenmasse die effektive Masse<sup>8</sup>  $m^*$ , so lassen sich mit diesem klassischen Modell eine Reihe an Experimenten erklären [13].

Elektronen in einem solchen freien Elektronengas verhalten sich dabei wie harte Billardkugeln, welche sich ohne Krafteinwirkung<sup>9</sup> geradlinig und ungerichtet bewegen. Liegt ein elektrisches Feld  $\mathbf{E}$  an, so werden die Elektronen entlang des Feldes beschleunigt und dabei durch Stöße mit Störstellen im Kristallgitter nach einer konstanten mittleren Relaxationszeit  $\tau$  abgebremst. Daraus ergibt sich für ein ideales Elektronengas anhand der Newtonschen Gleichung die Bewegungsgleichung zu:

$$m^* \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} - \frac{m^*}{\tau} \vec{v}_D. \quad (2.11)$$

Hierbei ist  $e$  die Elementarladung<sup>10</sup>,  $\vec{v}$  die Elektronengeschwindigkeit und  $\vec{v}_D$  die sogenannte Driftgeschwindigkeit. Stöße mit Defekten im Kristallgitter werden hierbei durch den Reibungsterm  $m^* \vec{v}_D / \tau$  berücksichtigt. Im stationären Fall ( $d\vec{v}/dt = 0$ ) ist der Strom durch die Probe konstant und es ergibt sich aus Gleichung 2.11 die konstante Driftgeschwindigkeit  $\vec{v}_D$  zu:

$$\vec{v}_D = -\frac{e\tau}{m^*} \vec{E} = -\mu \vec{E}. \quad (2.12)$$

Die Beweglichkeit  $\mu = e\tau/m^*$  wird hier als Proportionalitätskonstante zwischen Driftgeschwindigkeit  $\vec{v}_D$  und elektrischem Feld  $\mathbf{E}$  eingeführt. [13, 17, 18]

Die Stromdichte  $\vec{j}$  ergibt sich dabei mit der Ladungsträgerdichte  $n_s$  zu:

$$\vec{j} = -n_s e \vec{v}_D = n_s e \mu \vec{E}. \quad (2.13)$$

Für die elektrische Leitfähigkeit  $\sigma$  folgt daraus

$$\sigma = \frac{j}{E} = n_s e \mu = \frac{ne^2\tau}{m^*} = \frac{ne^2 l_e}{m^* v_F}. \quad (2.14)$$

<sup>8</sup>Im Gegensatz zur freien Elektronenmasse wird bei der effektiven Elektronenmasse auch die Wechselwirkung mit dem Gitterpotential berücksichtigt.

<sup>9</sup> $\mathbf{E} = 0$  und  $B = 0$

<sup>10</sup>Da es sich um Elektronen handelt, wird hier als Ladung  $-e$  verwendet.

$l_e$  ist hier die mittlere freie Weglänge, die ein Teilchen im Mittel bis zum Stoß zurücklegt. Diese ist gegeben durch:

$$l_e = v_F \tau = \frac{\hbar k_F}{m^*} \tau = \frac{\hbar \mu}{e} \sqrt{\frac{4\pi n_s}{g_s}}. \quad (2.15)$$

$v_F$  ist dabei die Fermi-Geschwindigkeit:

$$v_F = \frac{\hbar k_F}{m^*}. \quad (2.16)$$

[13, 17]

Bei Transportmessungen spricht man vom Magnetotransport, wenn zusätzlich zum elektrischen Feld  $\vec{E}$  ein magnetisches Feld  $B$  angelegt wird.

Hierfür muss neben der Kraft des elektrischen Feldes  $\vec{F}_E = -e\vec{E}$  auch die magnetische Komponente  $\vec{F}_M = -e\vec{v}_D \times \vec{B}$  berücksichtigt werden. Die Summe aus beiden Kräften bildet die Lorentzkraft  $\vec{F}_L = -e(\vec{E} + \vec{v}_D \times \vec{B})$ . Die Bewegungsgleichung ergibt sich damit zu:

$$m^* \frac{d\vec{v}}{dt} = -e(\vec{E} + \vec{v}_D \times \vec{B}) - m^* \frac{\vec{v}_D}{\tau}. \quad (2.17)$$

[13, 17]

Im Folgenden wird davon ausgegangen, dass das Magnetfeld in  $z$ -Richtung, also senkrecht zum zweidimensionalen Elektronengas, orientiert ist. Dies führt dazu, dass sich Elektronen innerhalb eines homogenen 2DEGs mit isotroper Energiedispersion auf Kreisbahnen mit der konstanten Zyklotronfrequenz:

$$\omega_c = \frac{eB}{m^*} \quad (2.18)$$

bewegen. Der Radius dieser Kreisbahnen, der sogenannte Zyklotronradius  $R_c$ , eines Elektrons mit der Energie  $E_F$  ist dabei gegeben durch:

$$R_c = \frac{v_F}{\omega_c} = l_B^2 k_F = \frac{\hbar k_F}{eB}. \quad (2.19)$$

$l_B$  ist hier die magnetische Länge:

$$l_B = \sqrt{\frac{\hbar}{eB}}. \quad (2.20)$$

[16, 17, 21]

Ist der Strom  $I$  in  $x$ -Richtung angelegt, dann sorgt die Lorentzkraft entsprechend dafür, dass Elektronen in  $y$ -Richtung abgelenkt werden. Dadurch baut sich ein elektrisches Feld  $E_y$  in  $y$ -Richtung auf, das der Lorentzkraft entgegenwirkt. Die Leitfähigkeit  $\sigma$  ist dann kein Skalar mehr, sondern muss als zweidimensionaler Tensor betrachtet werden. Die Stromdichte  $\vec{j}$  ergibt sich damit entsprechend zu:

$$\vec{j} = \begin{pmatrix} j_x \\ j_y \end{pmatrix} = \sigma \vec{E} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

## 2.1 Transport in zweidimensionalen Systemen

Durch Invertierung erhält man daraus den Widerstandstensor  $\rho$ :

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{xx} & \rho_{xy} \\ \rho_{yx} & \rho_{yy} \end{pmatrix} = \sigma^{-1} = \frac{1}{\sigma_{xx}\sigma_{yy} - \sigma_{xy}\sigma_{yx}} \begin{pmatrix} \sigma_{yy} & -\sigma_{xy} \\ -\sigma_{yx} & \sigma_{xx} \end{pmatrix}, \quad (2.22)$$

durch welchen sich die umgekehrte Beziehung  $\vec{E} = \rho \vec{j}$  ergibt.

Ist das System isotrop, so gilt nach der Onsager-Relation  $\sigma_{xx} = \sigma_{yy}$  und  $\sigma_{xy} = -\sigma_{yx}$ . Der Leitfähigkeits- und Widerstandstensor ergibt sich damit zu:

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ -\sigma_{xy} & \sigma_{xx} \end{pmatrix}, \quad \rho = \frac{1}{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{xy}^2} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & -\sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{xx} \end{pmatrix}. \quad (2.23)$$

Die einzelnen Komponenten des Widerstandstensors lassen sich dabei aus der Bewegungsgleichung 2.17 im stationären Fall mit  $d\vec{v}/dt = 0$  bestimmen zu:

$$\rho_{xx} = \rho_{yy} = \frac{m^*}{n_s e^2 \tau} = \frac{1}{n_s e \mu} = \text{const.} = \rho_0 \quad (2.24)$$

$$\rho_{xy} = -\rho_{yx} = -\frac{B}{n_s e} = R_0 \propto -B. \quad (2.25)$$

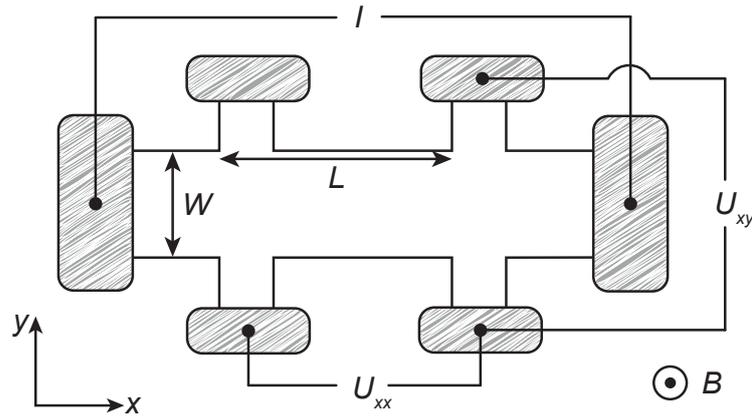
Der Drude-Magnetowiderstand  $\rho_0$  zeigt hierbei keinerlei Abhängigkeit vom Magnetfeld und entspricht zudem dem Schichtwiderstand  $\rho_{\square}$ . Der Drude-Hall-Widerstand  $R_0$  wächst hingegen linear mit dem Magnetfeld  $B$  an. [13, 20]

Um nun die einzelnen Komponenten des Widerstandstensors im Experiment zu messen, wird das 2DEG typischerweise in die Form einer sogenannten Hall-Bar gebracht (siehe Abbildung 2.2). Die Hall-Bar besitzt dabei eine Breite  $W$  und eine Länge  $L$  zwischen den Längsspannungsabgriffen. Schickt man in dieser Geometrie einen Strom  $I$  durch die Probe, so lassen sich damit sowohl die Längsspannung  $U_{xx}$  als auch die Hall-Spannung  $U_{xy}$  messen. Aus den daraus bestimmten Widerständen  $R_{xx}$  und  $R_{xy}$  lassen sich schließlich die geometrieunabhängigen Komponenten des spezifischen Widerstandstensors berechnen:

$$\rho_{xx} = \frac{R_{xx}}{L/W} = \frac{U_{xx}}{I} \frac{W}{L} \quad (\text{Längswiderstand}) \quad (2.26)$$

$$\rho_{xy} = R_{xy} = \frac{U_{xy}}{I} \quad (\text{Hallwiderstand}). \quad (2.27)$$

Dadurch bieten Magnetotransportmessungen eine einfache Möglichkeit die für das



**Abbildung 2.2** Schematische Darstellung der Probengeometrie einer Hall-Bar. Die schraffierten Flächen in der Abbildung symbolisieren die ohmschen Kontakte zum 2DEG. Zur Durchführung von Transportmessungen wird ein konstanter Strom  $I$  durch die Hall-Bar geleitet und in einem Teilstück der Länge  $L$  und Breite  $W$  wird dabei sowohl die Längsspannung  $U_{xx}$  parallel zum Stromfluss als auch die Hall-Spannung  $U_{xy}$  senkrecht dazu gemessen. Dargestellt ist hier ein Magnetfeld  $B$  senkrecht zum 2DEG. Nach [22].

System charakteristischen Materialgrößen  $n_s$  und  $\mu$  direkt aus dem Experiment zu bestimmen:

$$n_s = \frac{dB}{dU_{xy}} \cdot \frac{I}{e} = (\text{Steigung der Hall-Gerade} \cdot e)^{-1} \quad (2.28)$$

$$\mu = \frac{I}{n_s e U_{xx}} \cdot \frac{L}{W} = \frac{\text{Steigung der Hall-Gerade}}{\text{Nullfeldwiderstand}^{11}} \cdot \frac{L}{W}. \quad (2.29)$$

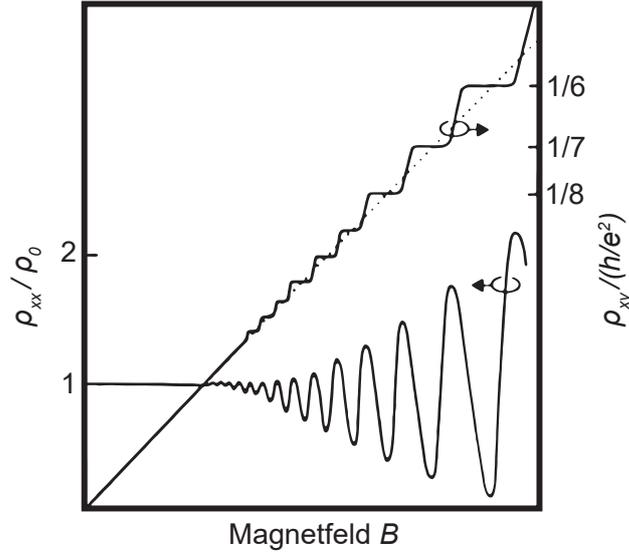
Da der Drude-Magnetowiderstand aus Gleichung 2.24 unabhängig vom Magnetfeld ist, kann im Experiment die Beweglichkeit  $\mu$  mit Hilfe des Schichtwiderstands bei  $B = 0$  bestimmt werden. [13, 15, 20, 21]

### 2.1.2 Landau-Quantisierung

Im Bereich kleiner Magnetfelder ( $\omega_c \tau = \mu B < 1$ ) ist die Landau-Quantisierung noch vernachlässigbar und das System kann gut mit dem Drude-Modell beschrieben werden. Sind die Magnetfelder allerdings groß genug ( $\omega_c \tau \gg 1$ ), so können Elektronen eine Kreisbahn mehrfach vollenden bis sie gestreut werden und es entstehen Abweichungen vom klassischen Drude-Modell (siehe Abbildung 2.3). [13]

Dabei wird im Längswiderstand ein oszillierendes Verhalten beobachtet und im Hall-Widerstand sind charakteristische Stufen beobachtbar, welche klassisch nicht mehr

<sup>11</sup> $\rho_{\square} = \rho_{xx}(B = 0)$



**Abbildung 2.3** Längs- und Hall-Widerstand als Funktion des Magnetfeldes in einem 2DEG. Im Bereich kleiner Magnetfelder ( $\omega_c\tau < 1$ ) lässt sich das Verhalten klassisch mit dem Drude-Modell beschreiben. Hier nimmt der Längswiderstand einen konstanten Wert  $\rho_0$  an und der Hall-Widerstand steigt linear mit dem Magnetfeld an. Sind die Magnetfelder allerdings groß genug, sodass Landau-Niveaus aufgelöst werden können ( $\omega_c\tau \gg 1$ ), dann verliert das klassische Modell seine Gültigkeit und es treten Shubnikov-de Haas-Oszillationen im Längswiderstand und Quanten-Hall-Plateaus im Hall-Widerstand auf. Nach [23].

erklärbar sind. Aus diesem Grund ist im Folgenden eine quantenmechanische Betrachtung des Systems notwendig.

Dazu löst man die zeitunabhängige Schrödingergleichung:

$$H\Psi(x,y) = E\Psi(x,y). \quad (2.30)$$

Ist an das 2DEG auch ein Magnetfeld angelegt, so muss im Hamiltonoperator  $H$  neben dem kanonischen Impulsoperator  $\vec{p}$  zudem das Vektorpotential  $\vec{A}$  berücksichtigt werden:

$$H = \frac{1}{2m^*}(\vec{p} + e\vec{A})^2. \quad (2.31)$$

Wird der Hamiltonoperator nun in die Gleichung 2.30 eingesetzt, ergibt sich:

$$\frac{1}{2m^*}(\vec{p} + e\vec{A})^2\Psi(x,y) = E\Psi(x,y). \quad (2.32)$$

Ist das Magnetfeld ausschließlich in  $z$ -Richtung angelegt, so ergibt sich mit  $\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = (0, 0, B)$  in Landau-Eichung das Vektorpotential zu  $\vec{A} = (-By, 0, 0)$  und man erhält:

$$\frac{1}{2m^*}[(p_x + eBy)^2 + p_y^2]\Psi(x,y) = E\Psi(x,y). \quad (2.33)$$

[13, 15, 17]

Wird der Hamiltonoperator in die Form eines harmonischen Oszillators gebracht, ergeben sich die Energieniveaus der Landau-Quantisierung, die identisch sind zu den Eigenenergien des harmonischen Oszillators. Das Energiespektrum der Elektronen nimmt somit im starkem Magnetfeld vollständig diskretisierte Eigenenergien  $E_n$ , die sogenannten Landau-Niveaus, an:

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega_c, \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (2.34)$$

Die dazugehörige Wellenfunktion

$$\Psi_{n,k}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{L_x}} e^{ik_x x} \phi_n(y - y_0) = |n,k\rangle \quad (2.35)$$

besteht dabei aus einem Normierungsfaktor, einer ebenen Welle  $e^{ik_x x}$  in  $x$ -Richtung und einer harmonischen Oszillatorfunktion  $\phi_n(y - y_0)$ . Die Funktionen des harmonischen Oszillators sind dabei auf der  $y$ -Achse vom Nullpunkt verschoben und auf der Zentrumsordinate  $y_0 = -\hbar k_x / eB = -l_B^2 k_x$  zentriert.  $l_B$  ist hierbei die magnetische Länge. [11, 13, 15, 24]

Die Wellenfunktion hat dabei eine, durch die magnetische Länge und die in Gleichung 2.34 eingeführte Landau-Quantenzahl  $n$  bestimmte, räumliche Ausdehnung in  $y$ -Richtung von:

$$R_n = l_B \sqrt{2n + 1} \approx R_c. \quad (2.36)$$

Dieser Radius  $R_n$  ist dabei vergleichbar mit der Größe des klassischen Zyklotronradius  $R_c$  aus Gleichung 2.19. [13]

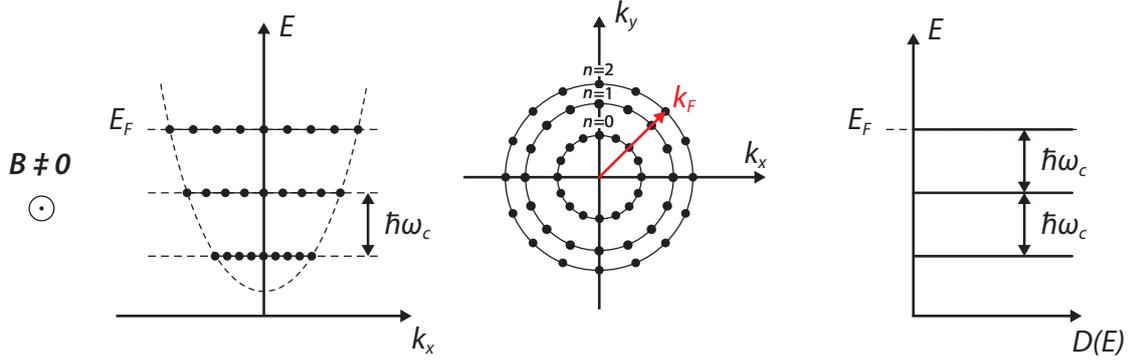
Aus Gleichung 2.34 ist ersichtlich, dass die kontinuierliche Energiedispersion mit konstanter Zustandsdichte aus Abbildung 2.1 bei Anlegen eines Magnetfeldes in eine Sequenz aus  $\delta$ -Peaks mit einem äquidistanten Abstand von  $\hbar\omega_c$  übergeht (siehe Abbildung 2.4).

Da die Gesamtzahl an Zuständen bei dieser Kondensation erhalten bleibt, müssen die im  $\mathbf{k}$ -Raum gleichmäßig verteilten Zustände bei  $B = 0$  im Magnetfeld auf den konzentrischen Kreisen (Landau-Niveaus) Platz finden. Die einzelnen Landau-Niveaus  $E_n$  sind dabei unabhängig von der Zentrumsordinate  $y_0$ , und entsprechend hoch entartet. Diese Entartung der Landau-Niveaus  $n_L$  ist gegeben durch die Anzahl an Zuständen bei  $B = 0$  zwischen benachbarten Kreisen. Somit ergibt sich die Entartung der Landau-Niveaus pro Flächeneinheit zu:

$$n_L = g_s \frac{eB}{h}. \quad (2.37)$$

Da die Entartung der Landau-Niveaus  $n_L$  unabhängig von der Landau-Quantenzahl  $n$  ist, besitzt jedes Landau-Niveau die gleiche Anzahl an Zuständen, wobei  $n_L$  linear mit dem Magnetfeld  $B$  skaliert.

## 2.1 Transport in zweidimensionalen Systemen



**Abbildung 2.4** (Links) Die Dispersionsrelation des untersten Subbandes nimmt im Magnetfeld diskrete Energieniveaus an. (Mitte) Die Zustände kondensieren dabei im  $\mathbf{k}$ -Raum auf konzentrischen Kreisen. (Rechts) Die konstante Zustandsdichte spaltet sich im Magnetfeld in äquidistante, diskrete Landau-Niveaus mit einem Abstand von  $\hbar\omega_c$  auf. Nach [20].

Damit lässt sich die Zustandsdichte des Systems als eine Serie aus Delta-Funktionen beschreiben:

$$D(E) = n_L \sum_{n=0}^{\infty} \delta(E - E_n) . \quad (2.38)$$

Ist die Ladungsträgerdichte des Systems  $n_s$  bekannt, so lässt sich damit bestimmen wie viele der einzelnen Landau-Niveaus besetzt sind. Diese Anzahl an besetzten Landau-Niveaus wird auch als Füllfaktor  $\nu \in \mathbb{N}^+$  bezeichnet:

$$\nu = \frac{n_s}{n_L} = \frac{n_s \hbar}{g_s e B} . \quad (2.39)$$

Hier ist ersichtlich, dass der Füllfaktor und somit die Anzahl an besetzten Niveaus mit steigendem Magnetfeld aufgrund steigender Entartung der einzelnen Landau-Niveaus (Gleichung 2.37) abnimmt.

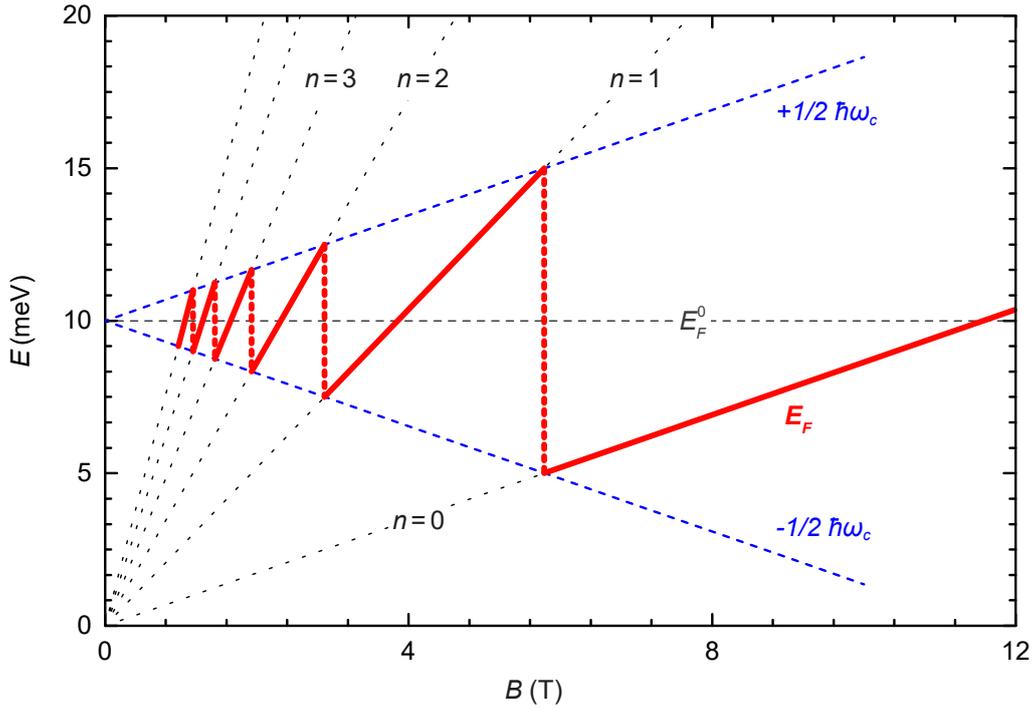
Dies hat zur Folge, dass die Fermi-Energie  $E_F$  bei steigendem Magnetfeld  $B$  zunächst einem Landau-Niveau folgt. Sind bei weiterer Magnetfelderhöhung in den darunter liegenden Niveaus aufgrund der steigenden Entartung genug Zustände vorhanden, um dieses Landau-Niveau vollständig zu entleeren, so springt  $E_F$  in das nächstniedrigere Landau-Niveau (siehe Abbildung 2.5). Diese bei Magnetfeldänderung auftretenden Oszillation der Fermi-Energie  $E_F$  sind dabei  $1/B$  periodisch. Die  $1/B$ -Periodizität ergibt sich mit Hilfe der Gleichung 2.39 zu:

$$\Delta \left( \frac{1}{B} \right) = g_s \frac{e}{\hbar n_s} . \quad (2.40)$$

[13–15, 18, 21]

Bei höheren Magnetfeldern wird nun zudem die bereits in der Gleichung 2.37 enthaltene Spinentartung<sup>12</sup> der Landau-Niveaus in spinentarteten Systemen aufgehoben.

<sup>12</sup> in Form des Spinentartungsfaktors  $g_s$



**Abbildung 2.5** Energieniveaus der Elektronen (bei  $T = 0$ ) in Abhängigkeit vom Magnetfeld bei konstanter Ladungsträgerdichte und vernachlässigter Spinaufspaltung.

Die einzelnen Landau-Niveaus  $E_n$  aus Gleichung 2.34 sind hier bis  $n = 5$  als gestrichelte Geraden eingezeichnet. Die Fermi-Energie ohne angelegtes Magnetfeld hat hierbei einen konstanten Wert von  $E_F^0$ . Wird ein Magnetfeld angelegt, so zeigt die Fermi-Energie  $E_F$  (rot) hingegen ein oszillierendes Verhalten. Dabei folgt die Fermi-Energie bei steigendem Magnetfeld so lange dem jeweils obersten Landau-Niveau bis dieses vollständig entleert ist und in das darunter liegende Niveau springt. Die Höhe dieser Sprünge ist dabei, wie in Gleichung 2.34 gezeigt, durch  $\hbar\omega_c$  gegeben. Die Sprünge weisen zudem ein  $1/B$  periodisches Verhalten auf. Nach [23].

Dies geschieht durch den sogenannten Zeeman-Effekt. Dieser sorgt dafür, dass sich die einzelnen Landau-Niveaus in jeweils zwei spinpolarisierte Niveaus mit einem relativen Abstand von  $g^*\mu_B B$  zueinander aufspalten (siehe Abbildung 2.6 rechts). Folglich muss das Energiespektrum aus Gleichung 2.34 hierfür um den Energieterm der Zeeman-Aufspaltung erweitert werden:

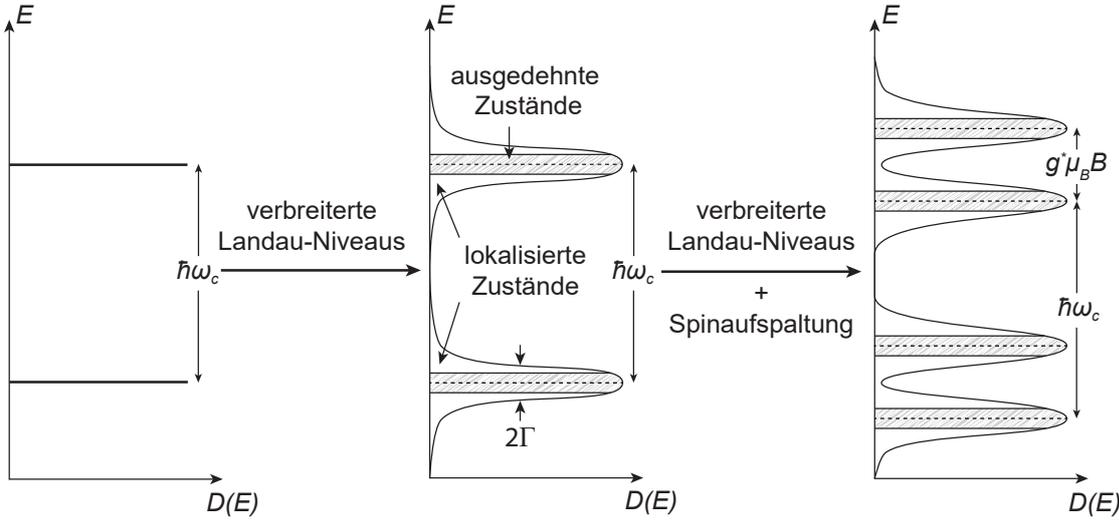
$$E_{n,s} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega_c + sg^*\mu_B B, \quad s = \pm\frac{1}{2}. \quad (2.41)$$

Dabei ist  $s$  die Spinquantenzahl,  $\mu_B = e\hbar/2m_e$  das Bohr'sche Magneton und  $g^*$  der effektive Landé-Faktor. [13]

Bisher wurden Landau-Niveaus als  $\delta$ -förmige Peaks mit verschwindender Breite angenommen. Dies ist allerdings nur für ideale Systeme ohne Streuung zutreffend. Da in realen Systemen immer Streuprozesse an Störstellen im Kristall oder an Phononen

## 2.1 Transport in zweidimensionalen Systemen

stattfinden, kommt es zu einer Verbreiterung der  $\delta$ -förmigen Peaks. Dadurch entstehen verbreiterte Landau-Niveaus mit *ausgedehnten* und *lokalisierten* Zuständen. Die *ausgedehnten* Zustände in der Mitte des Peaks sind hierbei nicht ortsgebunden und können infolgedessen beim Anlegen einer extern Spannung den Strom transportieren. Im Gegensatz dazu sind die *lokalisierten* Zustände auf einen bestimmten Raumbereich von Störstellen eingeschränkt und können bei angelegter Spannung entsprechend nicht zum Stromtransport beitragen. Insgesamt werden die Landau-Niveaus so auf eine Breite von  $2\Gamma$  aufgeweitet (siehe Abbildung 2.6).



**Abbildung 2.6** Zustandsdichte eines zweidimensionalen Systems im Magnetfeld. (Links) Im idealisierten Fall besteht die Zustandsdichte aus  $\delta$ -förmigen Peaks mit einem konstanten Abstand von  $\hbar\omega_c$  zueinander. (Mitte) In Realität sind die Landau-Niveaus aufgrund von Streueffekten auf eine Breite von  $2\Gamma$  verbreitert. Hierbei existieren ausgedehnte Zustände für den Stromtransport und lokalisierte Zustände, welche nicht mehr zum Ladungsträgertransport beitragen. (Rechts) Bei höheren Magnetfeldern spalten sich zudem die einzelnen streuverbreiterten Landau-Niveaus in zwei spinpolarisierte Niveaus auf. Nach [22].

Für eine Abschätzung der Größe der Streuverbreiterung  $\Gamma$  existieren mehrere Näherungen. Häufig wird hierfür, aufgrund der einfachen Handhabbarkeit, die selbstkonsistente Born'sche Näherung (SCBA<sup>13</sup>) verwendet. In dieser Näherung ergeben sich für die Zustandsdichte verbreiterte Landau-Niveaus in Form von Halbellipsen mit einer Breite von  $2\Gamma$ . Die Verbreiterung  $\Gamma$  ergibt sich dabei in Zusammenhang mit der Streuzeit der Elektronen  $\tau = \mu m^*/e$  aus Abschnitt 2.1.1 zu:

$$\Gamma = \hbar \sqrt{\frac{2\omega_c}{\pi\tau}} \propto \sqrt{B}. \quad (2.42)$$

Für die Gültigkeit dieser selbstkonsistenten Born'schen Näherung sind sowohl eine hohe Störstellendichte als auch kurzreichweitige Streupotentiale ( $\delta$ -Streuer) erforder-

<sup>13</sup>Self-Consistent Born Approximation

derlich. Da diese Kriterien nicht immer erfüllt sind, ist diese Näherung allerdings nur für qualitative Aussagen geeignet. [12, 13, 17]

Die Verbreiterung der Landau-Niveaus hat die Implikation, dass die konstante Zustandsdichte von  $B = 0$  bei Magnetfelderhöhung zunächst erst in eine oszillierende Funktion übergeht, da die einzelnen verbreiterten Niveaus überlappen. Ist die Größe der Energieseparation einzelner Landau-Niveaus schließlich größer als die Verbreiterung der Niveaus ( $\hbar\omega_c > 2\Gamma$ ), so geht auch die Zustandsdichte in eine Reihe streuverbreiteter Landau-Niveaus über. Dementsprechend ergeben sich Bedingungen, um die Landau-Quantisierung überhaupt erst im Experiment auflösen zu können:

$$\omega_c\tau = \mu B \gg 1, \quad (2.43)$$

$$k_B T < \hbar\omega_c. \quad (2.44)$$

Die Bedingung in Gleichung 2.43 besagt dabei, dass ein Elektron erst mehrere Zyklotronumläufe ( $\omega_c\tau$ ) bis zur Streuung durchlaufen muss, damit die Landau-Quantisierung aufgelöst werden kann. Neben diesem Kriterium ist auch die Temperatur ein entscheidender Faktor für die Auflösbarkeit einzelner Landau-Niveaus. So muss die thermische Energie  $k_B T$  kleiner sein als die Energieseparation  $\hbar\omega_c$  (bei vernachlässigter Spinaufspaltung). [13–15, 17]

### 2.1.3 Shubnikov-de Haas-Oszillationen und ganzzahliger Quanten-Hall-Effekt

Das Auftreten der Landau-Quantisierung wird, wie bereits in Abbildung 2.3 gezeigt, in den Magnetotransportmessungen im Längs- und Hall-Widerstand in Form von Shubnikov-de Haas<sup>14</sup>-Oszillationen und Quanten-Hall-Plateaus sichtbar. Diese beiden Effekte lassen sich allerdings nicht alleine durch die im vorherigen Abschnitt erläuterte Formation einzelner streuverbreiteter Landau-Niveaus erklären. Deshalb wird zur Erklärung dieser Effekte das sogenannte Randkanalmodell eingeführt. In diesem Modell werden nun auch Randeffekte mit berücksichtigt, welche bisher vernachlässigt wurden. Da man für Transportmessungen meist eine Hall-Bar-Geometrie (Abbildung 2.2) betrachtet, welche deutlich länger als breit ist, wird im Folgenden die Länge weiterhin als unbegrenzt angenommen. Die Breite in  $y$ -Richtung wird hingegen als endlich angesehen. Liegt die Fermi-Energie genau zwischen zwei verbreiterten Landau-Niveaus, so befinden sich Elektronen im Inneren des Systems bei klassischer Betrachtung auf lokalisierten geschlossenen Zyklotronbahnen und tragen entsprechend nicht zum Ladungsträgertransport bei. An den Randbereichen ist die Ausführung einer vollständigen Zyklotronbahn allerdings nicht mehr möglich, sodass Elektronen an den Rändern reflektiert werden und dort sogenannte *skipping orbits* (siehe Abbildung 2.7(a)) entstehen. In Folge dessen sind Ladungsträger am Rand der Probe nicht mehr lokalisiert und es bilden sich dort chirale Randkanäle, welche

---

<sup>14</sup>SdH

## 2.1 Transport in zweidimensionalen Systemen

den Strom entlang des Randes je nur in eine Richtung leiten.

Für eine genauere Beschreibung der beiden Effekte wird im Folgenden eine semiklassische Diskussion für das Randkanalmodell durchgeführt. Hierzu wird der Hamiltonoperator aus Gleichung 2.31 um das Randpotential  $U(y)$  erweitert. Damit ergeben sich die Energieeigenwerte des Systems<sup>15</sup> mittels der zugehörigen Eigenfunktionen  $|n,k\rangle$  in störungstheoretischer Rechnung erster Ordnung zu:

$$E_n \approx (n + \frac{1}{2})\hbar\omega_c + \langle n,k|U(y)|n,k\rangle . \quad (2.45)$$

Das Randpotential sorgt hierbei für ein nach oben Biegen der Landau-Niveaus in den Randbereichen (siehe Abbildung 2.7(c)) und entsprechend auch für eine Aufhebung der Entartung einzelner Niveaus in diesen Bereichen. Somit existieren unabhängig von der Position der Landau-Niveaus immer Zustände, welche die Fermi-Energie schneiden. Da zum Stromfluss nur die Zustände in der Nähe der Fermi-Kante beitragen, entstehen an den Schnittpunkten der Fermi-Energie mit den Landau-Niveaus an den Randbereichen eindimensionale Randkanäle (siehe Abbildung 2.7(b) und (c)). Diese sind vor allem dann von besonderer Bedeutung, wenn die Fermi-Energie zwischen zwei Landau-Niveaus sitzt, da in diesem Fall der Stromtransport ausschließlich durch Randkanäle getragen wird. Die Gruppengeschwindigkeit der Elektronen ergibt sich dabei zu [15]:

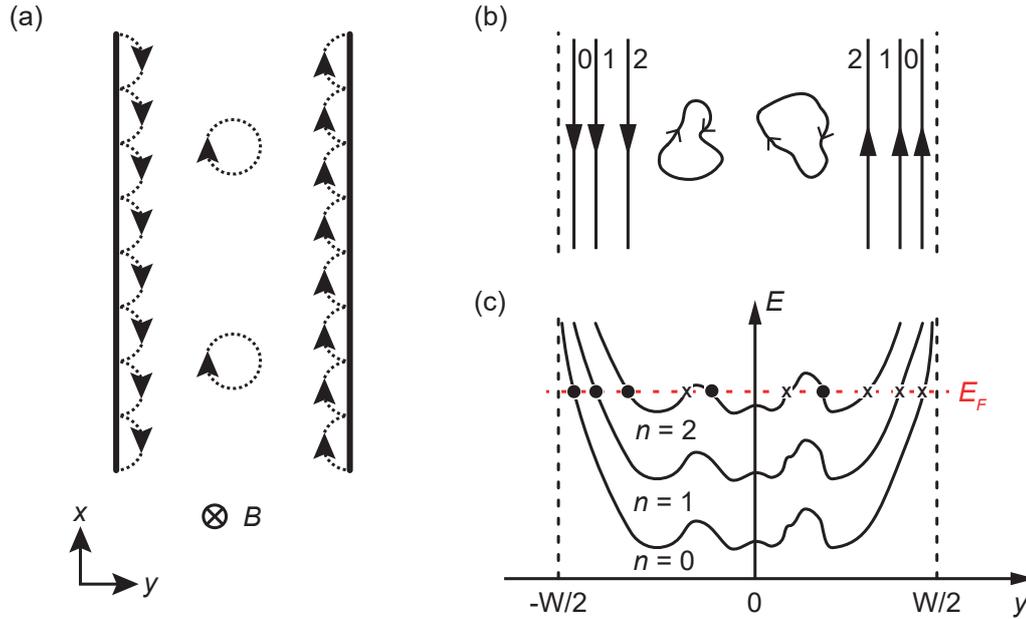
$$\nu(n,k) = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial E}{\partial k} = \frac{1}{eB} \frac{\partial U(y)}{\partial y} . \quad (2.46)$$

Im Inneren der Probe fließt aufgrund von  $\partial U(y)/\partial y = 0$  kein Strom. An den Randbereichen ergeben sich hingegen Randkanäle, welche aufgrund des Vorzeichenwechsels von  $\partial U(y)/\partial y$  auf gegenüberliegenden Seiten den Strom in unterschiedliche Richtungen transportieren. Somit sind die Randkanäle, welche den Strom in verschiedene Richtungen tragen, räumlich voneinander getrennt.

Befindet sich die Fermi-Energie zwischen zwei Landau-Niveaus, dann kann ein Elektron aufgrund der räumlichen Trennung nicht in einen gegenüber liegenden Randkanal gestreut werden und der Längswiderstand wird minimal.

Liegt die Fermi-Energie hingegen direkt auf einem Landau-Niveau, dann existieren auch Zustände im Inneren der Probe, die zum Stromtransport beitragen können. Entsprechend ist in diesem Fall die räumliche Trennung entgegengesetzter Randkanäle nicht mehr gegeben. Dadurch treten vermehrt Streuereignisse auf, weshalb der Längswiderstand jedes Mal beim Durchqueren eines Landau-Niveaus ein Widerstandsmaximum durchläuft. Da zudem bei steigendem Magnetfeld die Entartung der einzelnen Landau-Niveaus zunimmt (siehe Gleichung 2.37), stehen demnach bei Magnetfelderhöhung immer mehr Zustände für die Streuung zur Verfügung. Somit steigt die Streuwahrscheinlichkeit und entsprechend auch der Widerstand einzelner Maxima mit dem Magnetfeld. [15, 20] Dadurch ergeben sich Oszillationen im Längswiderstand. Diese Shubnikov-de Haas-Oszillationen besitzen dabei eine, zu

<sup>15</sup>Hier im Fall von vernachlässigter Spinaufspaltung gezeigt.



**Abbildung 2.7** Das Randkanalmodell.

(a) Anschauliches klassisches Modell. Klassisch bilden Elektronen im Magnetfeld  $B$  innerhalb der Probe geschlossene Kreisbahnen, die nicht zum Transport beitragen. Am Rand der Probe entstehen hingegen leitende Kanäle in Form von sogenannten *skipping orbits*. (b) und (c) zeigen das semi-klassische Modell in einer Hall-Bar der Breite  $W$ . (b) zeigt die chiralen eindimensionalen Randkanäle, die den Strom an gegenüberliegenden Seiten in die entgegengesetzte Richtung transportieren. In diesen Randkanälen wird der Strom widerstandsfrei transportiert, da Ladungsträger dort nur in eine Richtung gestreut werden können. Im Inneren der Probe existieren dabei die lokalisierten Zustände, welche die Maxima und Minima des Potentials aus (c) umkreisen. (c) zeigt die streuverbreiterten Landau-Niveaus, welche unter dem Einfluss eines Randpotentials  $U(y)$  an den Probenrändern nach oben gebogen werden. Bei vernachlässigter Spinaufspaltung haben diese einzelnen Niveaus einen energetischen Abstand von  $\hbar\omega_c$  zueinander. Da zum Stromfluss nur Zustände in der Nähe der Fermi-Kante beitragen, entstehen an den Schnittpunkten der Fermi-Energie mit den Landau-Niveaus an den Randbereichen in diesem Fall drei eindimensionale Randkanäle. Die eingezeichneten Punkte (●) und Kreuze (×) sollen hier, die in (b) dargestellte Bewegungsrichtung verdeutlichen. Nach [25].

Gleichung 2.40 identische,  $1/B$ -Periodizität. Anhand dieser lässt sich bei Kenntnis der Magnetfeldwerte  $B_1$  und  $B_2$  zweier aufeinander folgender SdH-Minima die Ladungsträgerdichte  $n_s$  aus dem Experiment bestimmen [15]:

$$n_s = \frac{g_s e}{h} \frac{1}{\frac{1}{B_1} - \frac{1}{B_2}} = \frac{g_s e}{h} \frac{1}{\Delta \frac{1}{B}}. \quad (2.47)$$

Um mit dem Randkanalmodell auch die waagrechten Plateaus im Hall-Widerstand an den Magnetfeldpositionen der Shubnikov-de Haas-Minima erklären zu können, wird im Folgenden kurz auf den Landauer-Büttiker-Formalismus eingegangen. Die-

## 2.1 Transport in zweidimensionalen Systemen

ser beschreibt den Ladungsträgertransport in einzelnen Randkanälen [17]. Bei aufgehobener Spinentartung ergibt sich mit diesem ein Leitwert pro Kanal von:

$$G_0 = \frac{e^2}{h} . \quad (2.48)$$

Wie in Abbildung 2.7(c) zu sehen, liefert jedes besetzte Landau-Niveau einen weiteren Randkanal. Somit ergibt sich der Gesamtleitwert und auch die Leitfähigkeit<sup>16</sup>  $\sigma_{xy}$  aus dem Leitwert eines einzelnen Kanals und der Anzahl an besetzten Landau-Niveaus  $\nu$ :

$$G = \sigma_{xy} = \nu \frac{e^2}{h} . \quad (2.49)$$

Durch Invertierung erhält man daraus den Hall-Widerstand:

$$R_{xy} = \frac{1}{\nu} \frac{h}{e^2} = \frac{1}{\nu} R_K . \quad (2.50)$$

Der Hall-Widerstand ist somit in ganzzahlige Bruchteile der Klitzing-Konstante  $R_K = \frac{h}{e^2}$  quantisiert und dadurch alleine durch Naturkonstanten bestimmt. Der Hall-Widerstand nimmt hier jedes Mal einen konstanten Wert an, sobald sich die Fermi-Energie zwischen zwei Landau-Niveaus befindet, da sich unter dieser Bedingung der Füllfaktor  $\nu$  nicht ändert. Fällt die Fermi-Energie bei steigendem Magnetfeld genau mit dem nächsttieferen Landau-Niveau zusammen, so verringert sich nach Gleichung 2.39 der Füllfaktor und der Hall-Widerstand steigt auf das nächste Quanten-Hall-Plateau an. [15, 17–20] Ist der Magnetfeldwert  $B_i$  in der Mitte eines Hall-Plateaus und der dazugehörige Hall-Widerstand  $R_{xy(i)}$  bekannt, so lässt sich daraus mit Hilfe der Gleichungen 2.39 und 2.50 auch die Ladungsträgerdichte  $n_s$  bestimmen:

$$n_s = \frac{\nu e B}{h} = \frac{R_K}{R_{xy(i)}} \frac{e B_i}{h} . \quad (2.51)$$

---

<sup>16</sup>Leitwert und Leitfähigkeit sind in diesem Fall äquivalent, wie es auch aus Gleichung 2.27 ersichtlich ist.

## 2.2 Periodische Modulation in zweidimensionalen Systemen

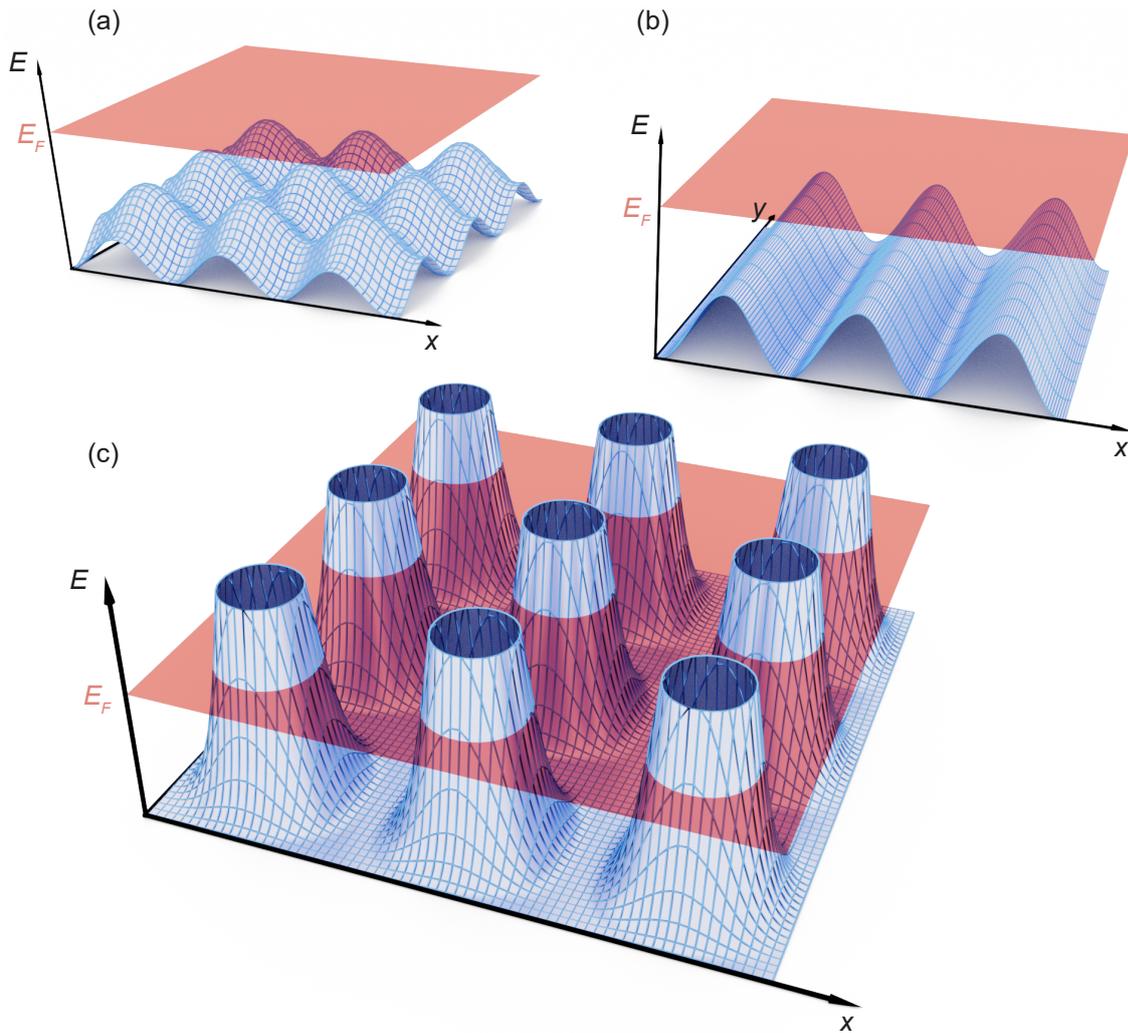
Nachdem im vorangegangenen Kapitel die Grundlagen für den Transport in zweidimensionalen Systemen beleuchtet wurden, widmet sich dieses Kapitel den Einflüssen, die eine periodische Modulation des Potentials innerhalb eines solchen zweidimensionalen Systems mit sich bringt. Dabei wird kurz auf verschiedene Potentialformen und anschließend im Detail auf die für diese Arbeit relevante starke zweidimensionale Potentialmodulation in sogenannten Antidot-Übergittern eingegangen. Eine ausgiebigere Beschreibung hierzu findet sich in [8, 9, 13, 26–30], an welcher sich auch die nachfolgenden Abschnitte orientieren.

### 2.2.1 Überblick

In einem zweidimensionalen System lassen sich sowohl eindimensionale als auch zweidimensionale Potentialmodulationen erzeugen. Die Modulation kann dabei anhand der Amplitude klassifiziert werden. Ist die Modulationsamplitude  $V_0 \ll E_F$  wesentlich kleiner als die Fermi-Energie  $E_F$ , so bezeichnet man das Potential als *schwach*. Ragt die Amplitude  $V_0 > E_F$  hingegen über die Fermi-Energie hinaus, so nennt man es *stark*. Damit ergeben sich typische Modulationsarten wie die schwache eindimensionale, die schwache zweidimensionale sowie die starke zweidimensionale Potentialmodulation, welche in Abbildung 2.8 dargestellt sind.

Um eine derartige Modulation experimentell zu realisieren, bringt man typischerweise künstlich erzeugte periodische Strukturen auf das zweidimensionale System auf. Solche Strukturen werden auch als laterale Übergitter bezeichnet. Diese erlauben es, je nach verwendetem Gittermaterial, im System das Magnetfeld oder das elektrische Feld lokal zu variieren. So ergibt sich durch Aufbringen von ferromagnetischen Übergittern eine magnetische Modulation im Potential [31]. Häufiger als eine magnetische Modulation wird im Experiment jedoch die elektrostatische Modulation verwendet. [32] Hierzu wird ein strukturiertes metallisches Gate aufgebracht, welches durch Anlegen einer Gate-Spannung die Ladungsträgerdichte im System lokal verändert.

Durch diese Strukturierung ergeben sich in Magnetotransportexperimenten charakteristische Effekte, sogenannte *Kommutabilitäts-Effekte*. Diese beruhen auf dem Zusammenspiel aus der Gitterperiode  $a$  des aufgeprägten Potentials und der Größe des Zyklotronradius  $R_c$  von Elektronen im Magnetfeld. Die Effekte treten dabei immer dann auf, sobald zwischen  $a$  und  $R_c$  ein bestimmtes Zahlenverhältnis herrscht bzw. beide Werte *kommensurabel* sind. Die genaue Korrelation zwischen  $a$  und  $R_c$  ist dabei abhängig von der Art der Modulation und unterscheidet somit die verschiedenen Modulationsarten. Wie dieser Zusammenhang und die dadurch beobachteten Effekte für eine starke zweidimensionale Potentialmodulation im Detail aussehen, soll im nachfolgenden Abschnitt näher dargelegt werden. [13, 24]



**Abbildung 2.8** Modulationspotential in  $x$ - und  $y$ -Richtung des zweidimensionalen Systems für verschiedene Modulationsarten.

Die rote Fläche zeigt die energetische Position der Fermi-Energie  $E_F$ . Die Modulationsstärke ergibt sich aus der Lage der Fermi-Energie im Vergleich zur Potentialamplitude. Das Modulationspotential ist hier für ein (a) schwaches zweidimensionales, (b) schwaches eindimensionales und (c) starkes zweidimensionales Potential gezeigt. Da für den Fall (c) der starken Modulation das Potential weit über die Fermi-Energie hinausragen würde, ist dieses hier in der Abbildung nach oben hin abgeschnitten dargestellt. Nach [13].

### 2.2.2 Starke zweidimensionale Modulation: Antidot-Gitter

Für die Realisierung einer starken zweidimensionalen Potentialmodulation existieren verschiedene Ansätze. Eine Möglichkeit ist das bereits beschriebene Aufbringen eines strukturierten metallischen Gates [33]. Des Weiteren lässt sich ein solches Potential auch durch Ätzen von periodisch angeordneten Löchern in das zweidimensionale System erzeugen [8]. Das sich daraus ergebende System ist damit geometrisch kom-

plementär zu einer Anordnung aus Quantenpunkten. Folglich wird in diesem System einer dieser Potentialhügel für 2D Elektronen entsprechend als Antidot (Anti-Dot) bezeichnet. [27, 33] Das starke abstoßende Potential eines solchen Antidot-Gitters wird typischerweise durch ein Potential der Form

$$V(x,y) = V_0[\cos(\frac{\pi}{a}x)\cos(\frac{\pi}{a}y)]^{2\beta} \quad (2.52)$$

beschrieben. [9, 13, 34]

Der Vorfaktor  $V_0$  beschreibt dabei die Höhe und  $a$  die Periode des Potentials. Der Parameter  $\beta$  kontrolliert die Steilheit eines Potentials und gibt somit an, ob das Antidot-Potential hart oder weich ist. Das in Abbildung 2.8(c) gezeigte Potential ist beispielsweise für einen Wert von  $\beta = 2$  geplottet. In einem solchen Potential verschwindet die Elektronendichte in den Bereichen, in denen das Potential die Fermi-Energie durchbricht. Folglich werden Elektronen in diesen Regionen an den scheibenförmigen Potentialen abgestoßen. Systeme mit derartigen lateralen Übergittern erlauben somit die Untersuchung von Transporteigenschaften, die mit natürlichen Kristallen experimentell nicht zugänglich sind. [13, 27, 28]

### 2.2.2.1 Transport in Antidot-Übergittern

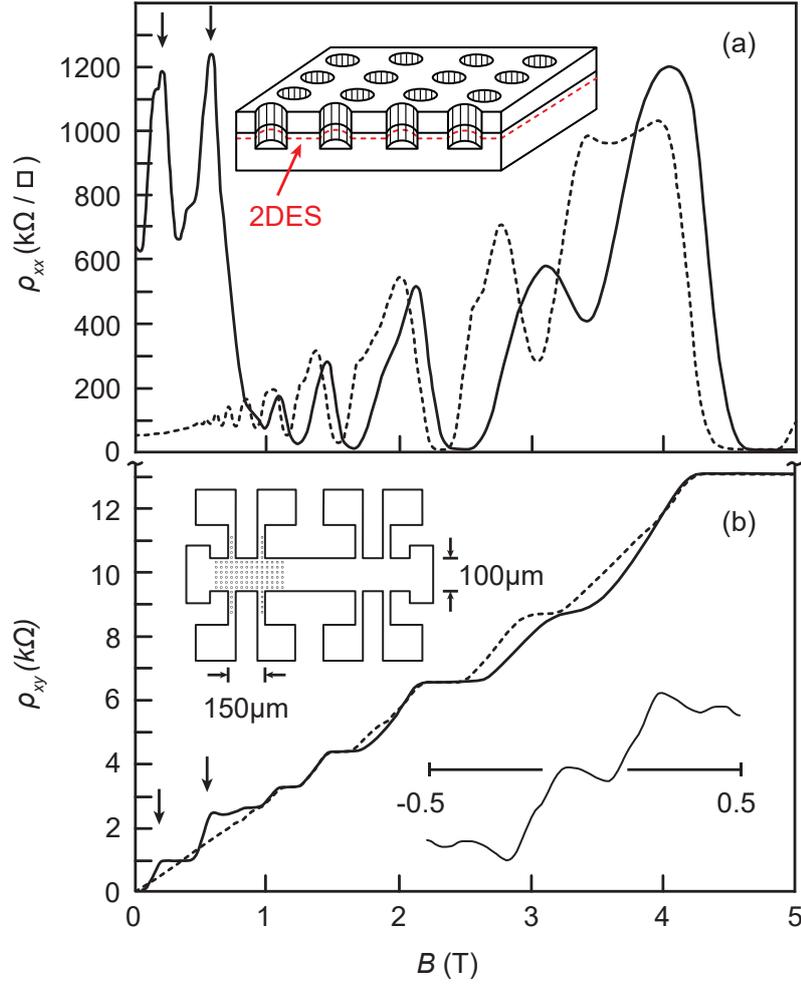
Betrachtet man den Transport von Elektronen in einem zweidimensionalen System ist dieser, wie bereits in Abschnitt 2.1.1 beschrieben, durch die Streuung an Verunreinigungen bestimmt. Bringt man auf ein solches System ein periodisches Antidot-Übergitter aus starken Streuern auf, ergibt sich ein vom unstrukturierten System abweichendes Bild. Dies wird besonders dann bemerkbar, wenn sich das zweidimensionale System in einem dazu senkrecht angelegten Magnetfeld befindet. In diesem Fall bewegen sich die Elektronen auf Kreisbahnen mit dem Radius  $R_c$  aus Gleichung 2.19 durch die periodische Anordnung aus künstlich aufgebrachten Streuern. Dadurch sind im Transport Kommensurabilitäts-Effekte [8] beobachtbar, welche in manchen Experimenten von zusätzlichen Quantenoszillationen [35, 36] überlagert sein können.

Damit sich im Experiment die in Abbildung 2.9 dargestellten Kommensurabilitäts-Effekte zeigen, muss die aufgeprägte Gitterperiode  $\lambda_F < a < l_e$  allerdings zum einen größer als die Fermi-Wellenlänge<sup>17</sup>  $\lambda_F = \frac{2\pi}{k_F}$  [37] und zum anderen deutlich kleiner als die freie Weglänge  $l_e$  von Elektronen im System sein. Unter diesen Voraussetzungen können sich Elektronen, wie Kugeln, über viele Einheitszellen des Antidot-Gitters ballistisch bewegen, ehe sie an den statistisch verteilten Verunreinigungen gestreut werden.

Betrachtet man die von D. Weiss *et al.* [8] im Experiment beobachtbaren charakteristischen Merkmale im Längs- und Hall-Widerstand aus Abbildung 2.9, so zei-

<sup>17</sup>Die Fermi-Wellenlänge  $\lambda_F = 2\pi/k_F$  eines nicht spinentarteten Systems befindet sich in der Größenordnung von  $\lambda_F \approx 32 - 79 \text{ nm}$  für Ladungsträgerdichten im Bereich von  $n_s = 0.5 - 3 \cdot 10^{15} \text{ m}^{-2}$ .

## 2.2 Periodische Modulation in zweidimensionalen Systemen



**Abbildung 2.9** Magnetotransportmessungen von D. Weiss *et al.* [8] in einer GaAs-AlGaAs-Heterostruktur bei einer Temperatur von  $T = 1.5$  K.

(a) Längswiderstand  $\rho_{xx}$  und (b) Hall-Widerstand  $\rho_{xy}$  im mit einer Periode von  $a = 300$  nm strukturierten (durchgehende Linie) und im unstrukturierten Bereich (gestrichelte Linie). Die Pfeile markieren die Maxima in  $\rho_{xx}$  bzw. die Stufen in  $\rho_{xy}$  bei  $R_c \approx 0.5a$  bzw.  $1.5a$ . Das Insert (nach [27]) in (a) zeigt ein schematisches Bild des in das 2DES geätzten quadratischen Antidot-Gitters. Der effektive Antidot-Durchmesser  $d = d_{lith} + 2 \cdot l_{depl}$  setzt sich dabei aus dem in der Abbildung sichtbaren lithographischen Loch-Durchmesser  $d_{lith}$  und der Breite  $l_{depl}$  der, durch das Ätzen verursachten, Verarmungszone um jedes Loch herum zusammen. Das Insert in (b) zeigt oben die Probengeometrie mit Antidot- und Referenzbereich und unten eine vergrößerte Ansicht der negativen Hall-Steigung um  $B = 0$  im strukturierten Bereich. Die Unterschiede zwischen dem strukturierten und dem Referenzbereich finden sich im Bereich kleiner Magnetfelder (mit  $2R_c > a - d$ ). [26] Für größere Magnetfelder sind hier in beiden Bereichen, die für ein 2DES typischen, Shubnikov-de Haas-Oszillationen bzw. Quanten-Hall-Plateaus zu sehen. Nach [8].

gen sich bei höheren Magnetfeldwerten<sup>18</sup> nur geringe Unterschiede zwischen dem

<sup>18</sup>Ab welchen die Zyklotrondurchmesser kleiner werden als  $a - d$ , also den Bereich zwischen Antidots mit einem effektiven Antidot-Durchmesser von  $d$ .

Antidot- und dem Referenzbereich. Dies deutet darauf hin, dass die hohe intrinsische Beweglichkeit des zweidimensionalen Systems trotz der kleinen aufgeprägten Antidot-Periode nahezu unverändert bleibt. Im Gegensatz dazu ist die Beweglichkeit bei  $B = 0$  durch die spiegelnde Reflexion der Elektronen an den Antidots bestimmt und die zugehörige freie Weglänge  $l_e$  im System wird vergleichbar mit der Größe der Gitterperiode  $a$ . [27, 30] Im Bereich um  $B = 0$  können Antidot-Gitter mit großen Loch-Durchmessern zudem eine Unterdrückung oder sogar einen Vorzeichenwechsel des Hall-Widerstands mit sich bringen, was auch als Quenching des Hall-Effekts<sup>19</sup> bezeichnet wird. [13, 38]

Jeder Peak in  $\rho_{xx}$ , der bei kleinen Magnetfeldern im strukturierten Bereich auftritt, kann dabei einer kommensurablen Kreisbahn, welche geometrisch eine bestimmte Anzahl an Antidots umschließt, zugeordnet werden. Das Auftreten der Widerstandsmaxima an diesen Positionen lässt sich mit einem einfachen semi-klassischen Modell<sup>20</sup>, dem sogenannten Pinball-Modell, beschreiben. Dieses Modell geht von der Annahme aus, dass die, an eine bestimmte Anzahl an Antidots, gepinnten kommensurablen Kreisbahnen im Potential lokalisiert sind und entsprechend nicht mehr am Transport teilnehmen. Das abstoßende Potential der Antidots sorgt hierbei dafür, dass Elektronen trotz eines angelegten elektrischen Feldes auf der gepinnten Bahn gehalten werden [27]. Folglich verringert sich die am Transport beteiligte Elektronendichte, wodurch sich im Drude-Modell nach den Gleichungen 2.24 und 2.25 sowohl  $\rho_{xx}$  als auch  $\rho_{xy}$  erhöht. Dadurch lassen sich die Peaks in  $\rho_{xx}$  und die Stufen in  $\rho_{xy}$  erklären. Dabei zeigt sich, dass der sogenannte fundamentale Antidot-Peak, bei welchem die Elektronenbahn genau einen einzelnen Antidot umschließt, am stärksten ausgeprägt ist, da dieser die kürzeste Kreisbahnlänge aufweist und am wenigsten von den Details des Potentials abhängt. Dieser wird durch die Kommensurabilitäts-Bedingung

$$2R_c = 2\frac{\hbar k_F}{eB} = a \quad (2.53)$$

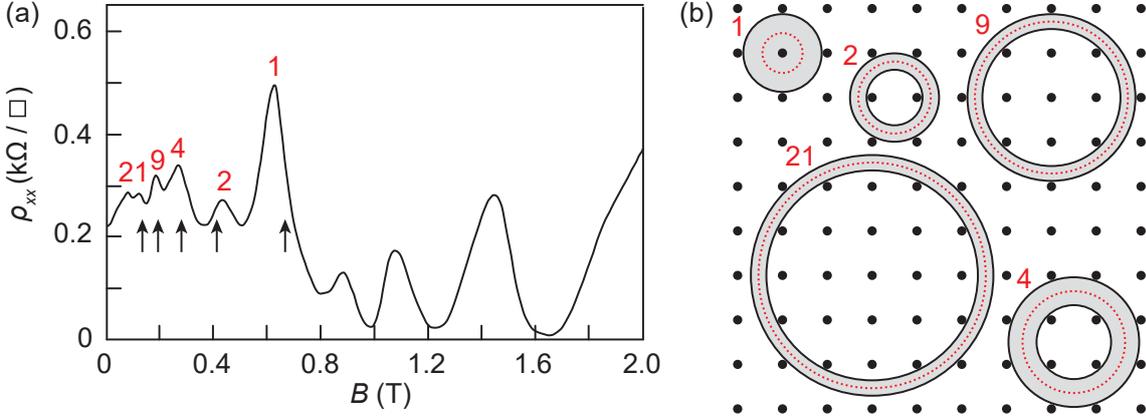
beschrieben. Die genaue Anzahl der im Experiment zusätzlich sichtbaren Peaks korreliert dabei stark mit dem Verhältnis  $d/a$  aus effektivem Antidot-Durchmesser  $d$  zu aufgeprägter Periode  $a$ . Ist dieses Verhältnis  $d/a$  klein, so ist das Gitter durchlässiger und es sind mehr Peaks in  $\rho_{xx}$  sichtbar. Dies ist in Abbildung 2.10(a) für ein kleines Verhältnis  $d/a$  in einem quadratischen Gitter dargestellt. Hierbei sind Peaks zu erkennen, welche einer kommensurablen Bahn um 1, 2, 4, 9 oder sogar 21 Antidots zugeordnet werden können. Aus der Geometrie (Abbildung 2.10(b)) lässt sich für jede kommensurable Bahn ein vom Antidot-Durchmesser unabhängiger mittlerer Zyklotronradius  $\hat{R}_c$  finden. Der mittlere Zyklotronradius ergibt sich dabei aus dem Mittel-

<sup>19</sup>Das Quenching des Hall-Effekts tritt gewöhnlich in Gittern mit großem Loch-Durchmesser und weichem Antidot-Potential auf. Dort wird der Hall-Widerstand unterdrückt, da das Magnetfeld zu gering ist, um Elektronen aus dem Antidot-Gitter in die Hall-Potentialsonden zu streuen. Zudem streuen chaotische Trajektorien die Elektronen bevorzugt in die umgekehrte Richtung, wodurch der Hall-Effekt ein anderes Vorzeichen erhält. [26, 29, 38]

<sup>20</sup>Eine schwache Temperaturabhängigkeit der beobachtbaren Antidot-Peaks bis hin zu  $T \approx 50$  K deutet dabei auf einen semi-klassischen Ursprung der Effekte hin [8, 29].

## 2.2 Periodische Modulation in zweidimensionalen Systemen

wert zwischen den maximal und minimal möglichen Kreisbahnen um eine bestimmte Anzahl an Antidots. Daraus ergeben sich die Kommensurabilitäts-Bedingungen für Maxima in einem quadratischen Gitter um 1, 2, 4, 9 und 21 Antidots zu  $\hat{R}_{c,1} = 0.5a$ ,  $\hat{R}_{c,2} = 0.8a$ ,  $\hat{R}_{c,4} = 1.14a$ ,  $\hat{R}_{c,9} = 1.7a$  und  $\hat{R}_{c,21} = 2.53a$ . [8, 13, 26, 30, 39]



**Abbildung 2.10** Kommensurabilitäts-Peaks von D. Weiss *et al.* [8] in einer GaAs-AlGaAs-Heterostruktur bei einer Temperatur von  $T = 1.5$  K und einem kleinen Verhältnis  $d/a$  des quadratischen Antidot-Gitters mit  $a = 300$  nm.

(a) Die Pfeile markieren die kommensurablen Bahnen bei  $\hat{R}_{c,1} = 0,5a$ ,  $\hat{R}_{c,2} = 0.8a$ ,  $\hat{R}_{c,4} = 1.14a$ ,  $\hat{R}_{c,9} = 1.7a$  und  $\hat{R}_{c,21} = 2.53a$ . (b) Schematisches Bild eines quadratischen Antidot-Gitters. Geometrisch mögliche Kreisbahnen um 1, 2, 4, 9 und 21 Antidots sind grau markiert. Die mittlere Kreisbahn (rot gestrichelt) ergibt sich als Mittelwert zwischen minimalen und maximalen geometrisch möglichen Bahnen. Anhand der Breite der möglichen Bahnen wird deutlich, wieso bei großem  $d/a$  zunächst nur Peaks um 1 und 4 Antidots sichtbar sind und wieso einzelne Peaks unterschiedlich stark ausgeprägt sind. Nach [8].

Von kreisförmigen Zyklotronbahnen kann allerdings nur in einem harten Antidot-Potential ausgegangen werden, also wenn für die Verarmungslänge  $l_{depl}$  um die mit dem Durchmesser  $d_{lith}$  geätzten Antidots der Zusammenhang  $l_{depl} \ll a - d_{lith}$  gilt. In einem solchen Potential treten Abweichungen von den Kreisbahnen nur in unmittelbarer Nähe zu einzelnen Antidots auf. Somit liefert das Pinball-Modell unter der Voraussetzung eines sehr steilen Antidot-Potentials eine gute Näherung zur Beschreibung der auftretenden Effekte. [13]

Wird das Potential allerdings weicher, so treten zunehmend Abweichungen vom Pinball-Modell auf. So führt das weiche Antidot-Potential, wie von Fleischmann *et al.* [9] gezeigt, zu einer Deformation der klassischen Zyklotronbahn. Der freie Zyklotronorbit wird dabei durch das weiche Potential verformt und es entstehen kommensurable, aber nicht mehr kreisförmige, Bahnen. Dies sorgt für eine Verschiebung der Widerstands-Peaks um mehrere Antidots im Vergleich zu den ungestörten kommensurablen Orbits im Pinball-Modell. So lässt sich im Modell von Fleischmann *et al.* [9] nun auch der Peak um vier Antidots bei  $R_c = 1.5a$  in Abbildung 2.9(a) erklären. Im Pinball-Modell sollte das Maximum des Peaks um vier Antidots theoretisch bei

$R_c = 1.14a$  liegen, da eine Bahn bei  $R_c = 1.5a$  nicht kommensurabel mit dem Gitter ist. Das weiche Antidot-Potential sorgt hierbei allerdings für eine Verschiebung des Maximums hin zu  $R_c = 1.5a$ .

Zudem zeigte Fleischmann *et al.* [9], dass den größten Beitrag für die Widerstands-Peaks nicht die reinen gepinnten Orbits liefern, sondern vor allem chaotische Bahnen, welche sich bei kommensurablen Magnetfeldwerten ähnlich zu den gepinnten Bahnen lange Zeit um die Antidots bewegen. Da die Bewegung der chaotischen Bahnen allerdings stark von den regulären Trajektorien beeinflusst wird, ist die vereinfachte Betrachtung mit Bahnen um die Antidots dennoch gerechtfertigt. [8, 9, 13, 26, 29, 30, 39]

## 2.3 Der topologische Isolator

Da alle im Rahmen der Arbeit durchgeführten Transportmessungen im System eines topologischen Isolators stattfinden, soll im Folgenden kurz auf die Besonderheiten und theoretischen Konzepte eines solchen Systems eingegangen werden. Eine ausführliche Beschreibung hierzu findet sich in der Literatur [4, 37, 40–49], an welcher sich auch die nachfolgenden Darstellungen orientieren.

In Kürze lässt sich ein topologischer Isolator vereinfacht als ein System beschreiben, welches in der Bandlücke im Inneren des Volumenmaterials isolierend ist und an den Grenzflächen zu einem gewöhnlichen Isolator dissipationslos leitende Zustände aufweist. Diese manifestieren sich in zwei Dimensionen als Randzustände und in drei Dimensionen als Oberflächenzustände, welche spinpolarisierte zweidimensionale Dirac-Fermionen tragen. Der Ursprung dieser Zustände ist dabei auf eine Kombination aus Spin-Bahn-Kopplung und Zeitumkehrsymmetrie zurückzuführen. [40]

Doch wie lassen sich überhaupt gewöhnliche von topologischen Isolatoren unterscheiden? Um dieser Frage auf den Grund zu gehen, muss zunächst geklärt werden auf welche Art sich Ordnungszustände und Phasenübergänge klassifizieren lassen. So wurde bis zur Entdeckung des ganzzahligen Quanten-Hall-Effekts davon ausgegangen, dass sich alle Zustände und Phasenübergänge allein durch spontan gebrochene Symmetrien charakterisieren lassen [37]. Da der für den Quanten-Hall-Effekt verantwortliche Quantenzustand allerdings nicht mehr durch eine solche Symmetriebrechung klassifiziert werden kann, wurde hierfür eine abweichende Klassifizierung basierend auf dem Konzept der topologischen Ordnung eingeführt. Diese definiert eine topologische Phase so, dass bestimmte fundamentale physikalische Eigenschaften, wie beispielsweise der quantisierte Hall-Leitwert (Gleichung 2.49) im Quanten-Hall-Effekt auch bei kontinuierlicher Veränderung von Materialparametern erhalten bleibt, solange es dabei zu keinem topologischem Phasenübergang kommt. Somit lassen sich mit Hilfe einer globalen Größe die fundamentalen Eigenschaften eines Systems beschreiben. Diese Größe wird auch als *topologische Invariante* bezeichnet. [37, 40, 50]

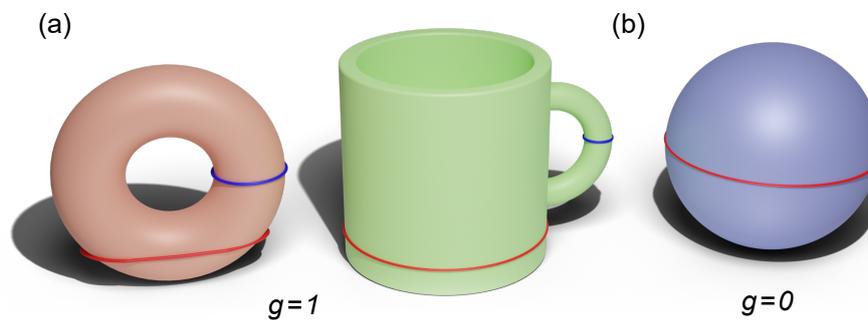
Diese topologischen Invarianten, hier in Form der sogenannten Chern-Invariante und den  $\mathbb{Z}_2$ -Invarianten, erlauben es, verschiedene Zustände zu klassifizieren. So lässt die Chern-Invariante eine Differenzierung zwischen einem trivialen Isolator und dem Quanten-Hall-Zustand zu. Die  $\mathbb{Z}_2$ -Invariante hingegen lässt es zu, einen trivialen von einem nicht-trivialen Isolator zu unterscheiden. So gibt es in zwei Dimensionen genau eine einzige  $\mathbb{Z}_2$ -Invariante, welche es erlaubt einen trivialen Isolator von einem zweidimensionalen topologischen Isolator (2D TI) zu differenzieren. Für den dreidimensionalen Fall existieren hingegen vier  $\mathbb{Z}_2$ -Invarianten, mit denen es möglich ist, einen trivialen Isolator von einem dreidimensionalen topologischen Isolator (3D TI) zu unterscheiden. [4, 40, 44]

In den nachfolgenden Abschnitten sollen zunächst die bereits erwähnten topologischen Invarianten näher erläutert werden. Anschließend folgt eine Diskussion des

dreidimensionalen topologischen Isolators gefolgt von der experimentellen Realisierung eines solchen Systems auf Basis von Quecksilbertellurid (HgTe).

### 2.3.1 Topologische Invarianten

Wie der Name bereits vermuten lässt, basieren topologische Invarianten auf dem mathematischen Feld der Topologie. Dieses beschäftigt sich mit geometrischen Eigenschaften, welche unter stetiger Verformung erhalten bleiben. So sind zwei verschiedene geometrische Körper genau dann topologisch äquivalent, wenn beide durch den gleichen topologischen Index klassifiziert werden können. Um dies zu veranschaulichen, betrachten wir im Folgenden die zweidimensionalen Oberflächen von geometrischen Formen im dreidimensionalen Raum. [37, 41] Ein typisches Beispiel für die topologische Äquivalenz ist hier der Torus, welcher unter stetiger Verformung in eine Tasse mit Henkel geformt werden kann. Die topologische Eigenschaft, die hierbei erhalten bleibt, ist, dass sich auf den Oberflächen beider Objekte geschlossene Kurven finden lassen, die entweder durch ein Loch gehen oder welche, die dies eben nicht tun (siehe dazu Abbildung 2.11(a)). Besitzt nun allerdings ein Körper kein Loch oder eine andere Anzahl an Löchern, so ist dieser nicht mehr topologisch äquivalent zum Torus. Somit ist eine Kugel nicht topologisch äquivalent zu einem Torus, da an der Oberfläche einer Kugel keine geschlossenen Pfade existieren, die durch ein Loch hindurch führen würden (Abbildung 2.11(b)). Infolgedessen besitzt



**Abbildung 2.11** Oberflächen verschiedener Körper im dreidimensionalen Raum.

(a) Der Torus (links) und die Tasse (rechts) besitzen beide jeweils geschlossene Pfade durch ein Loch (blau) und Pfade, die nicht durch ein Loch gehen (rot). Daher können beide durch die gleiche topologische Invariante  $g = 1$  charakterisiert werden und sind entsprechend topologisch äquivalent. (b) In einer Kugel existieren allerdings nur noch Pfade, die nicht durch ein Loch gehen. Somit ist die topologische Äquivalenz zum Torus nicht mehr gegeben und die Kugel besitzt eine andere topologische Invariante  $g = 0$ .

eine Kugel eine andere topologische Invariante als der Torus. Die Invariante ist dabei eine ganze Zahl, da es keinen stetigen Übergang zwischen den Oberflächen beider Objekte gibt. Eine intuitive topologische Invariante, welche beide Körper voneinan-

### 2.3 Der topologische Isolator

der unterscheidet, ist das Geschlecht  $g$  der Fläche. Diese entspricht im Prinzip der Anzahl an Löchern im Objekt und ist gegeben durch:

$$g = \frac{1}{2}(2 - \chi) . \quad (2.54)$$

$\chi$  ist dabei eine weitere topologische Invariante, die sogenannte Euler-Charakteristik. Diese ist gegeben durch das Gauß-Bonnet-Theorem. In diesem wird die sogenannte Gaußsche Krümmung  $G$  über die komplette Oberfläche  $S$  mit dem Oberflächenelement  $dA$  integriert:

$$\chi = \frac{1}{2\pi} \int_S G dA . \quad (2.55)$$

Das bedeutet, dass die Gesamtkrümmung bei Verformung (in einen anderen topologisch äquivalenten Körper) konstant bleibt. [37, 41]

#### 2.3.2 Berry-Phase und Chern-Invariante

Will man das Konzept der topologischen Invarianten auf einen kristallinen Festkörper anwenden, muss man zunächst darauf eingehen, wie elektronische Energiezustände in einem derartigen System bestimmt werden. So hat der Verbund mehrerer Atome in einem solchen Kristall zur Folge, dass sich die diskreten Energieniveaus einzelner Atome im Gitter zu sogenannten Energiebändern vernetzen. Die Translationsymmetrie in einem Kristall erlaubt es nun die Zustände in der 1. Brillouin-Zone durch den Kristallimpuls  $\vec{k}$  und den Bandindex  $m \in \mathbb{N}$  des Energiebandes zu beschreiben. Dafür nutzt man Bloch-Wellen  $\Psi_{m,\vec{k}}(\vec{r})$ , welche die Eigenfunktionen eines Hamiltonoperators  $H(\vec{r})$  sind:

$$\Psi_{m,\vec{k}}(\vec{r}) = e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} u_{m,\vec{k}}(\vec{r}) . \quad (2.56)$$

$\vec{r}$  beschreibt hier die räumliche Koordinate und  $u_{m,\vec{k}}(\vec{r})$  eine gitterperiodische Funktion. Nutzt man die Brillouin-Zone als Parameterraum für den Hamiltonoperator  $H(\vec{k})$ , so lässt sich mit den zugehörigen Eigenzuständen  $|u_m(\vec{k})\rangle$  die Schrödingergleichung hierfür umformulieren:

$$H(\vec{k}) |u_m(\vec{k})\rangle = E_m(\vec{k}) |u_m(\vec{k})\rangle . \quad (2.57)$$

Hierbei ergeben sich zu jedem  $\vec{k}$  eine Vielzahl unabhängiger Energieeigenwerte  $E_m(\vec{k})$ . Diese Energiebänder sind jeweils durch verbotene Bereiche, sogenannte Bandlücken, voneinander getrennt und formen kollektiv die Bandstruktur. [23, 37, 40, 51] Die Bandstruktur ermöglicht nun eine Einteilung des Kristalls in Metalle, Halbleiter und Isolatoren. Betrachten wir dabei nur Halbleiter und Isolatoren, so liegt in beiden Fällen eine Bandlücke zwischen dem höchsten vollständig mit Elektronen besetzten Valenzband und dem energetisch darüber liegenden unbesetzten Leitungsband vor. Obwohl sich beide durch die Größe der Bandlücke unterscheiden lassen<sup>21</sup>, können

<sup>21</sup>Die Bandlücke eines Isolators ist im Allgemeinen wesentlich größer als die eines Halbleiters.

diese trotzdem der selben Phase zugeordnet werden. So ist es möglich den Hamiltonoperator eines Isolators kontinuierlich<sup>22</sup> in den eines Halbleiters zu transformieren, ohne dass sich während der Transformation der Bänder die Bandlücke schließt. Beide Systeme sind daher topologisch äquivalent. Entsprechend handelt es sich hierbei um das selbe Vorgehen wie bei der stetigen Verformung geometrischer Objekte aus dem vorangegangenen Abschnitt, nur dass in diesem Fall die Bandlücke die Funktion des Lochs einnimmt. Dieses Konzept erlaubt es daher verschiedene isolierende Phasen durch topologische Invarianten von topologisch unterschiedlichen Hamiltonoperatoren zu klassifizieren. [37, 40]

Eine topologische Invariante für eine solche Klassifizierung ist die sogenannte Chern-Zahl  $c$ . Diese kann über eine geometrische Phase, die sogenannte Berry-Phase  $\gamma_m$ , beschrieben werden. Die Phase entsteht dabei in der Wellenfunktion zwischen Anfangs- und Endzustand beim adiabatischen Durchlauf eines geschlossenen Pfades  $\Gamma$  im Parameterraum und ist nur von der Geometrie des Phasenraumes abhängig. Mit Hilfe des Berry-Potentials  $\mathcal{A}_m = i \langle u_m(\vec{k}) | \nabla_{\vec{k}} | u_m(\vec{k}) \rangle$  ergibt sich die Berry-Phase zu:

$$\gamma_m = \oint_{\Gamma} \mathcal{A}_m(\vec{k}) \cdot d\vec{k} = \int_S \mathcal{F}_m(\vec{k}) \cdot \vec{n} d^2\vec{k} . \quad (2.58)$$

Mit dem Satz von Stokes kann hierbei das Linienintegral in ein Oberflächenintegral über die vom Pfad  $\Gamma$  eingeschlossene Oberfläche  $S$  umgewandelt werden.  $\vec{n}$  ist hier der Normalenvektor auf der Oberfläche und  $\mathcal{F}_m = \nabla_{\vec{k}} \times \mathcal{A}_m$  die sogenannte Berry-Krümmung des  $m$ -ten Bandes. [37] Über das Chern-Theorem ergibt sich daraus die Chern-Zahl des  $m$ -ten Bandes durch Integration über die gesamte Brillouin-Zone (BZ), welche eine geschlossene Fläche darstellt, zu:

$$c_m = \frac{1}{2\pi} \int_{BZ} \mathcal{F}_m(\vec{k}) \cdot \vec{n} d^2\vec{k} \quad (2.59)$$

Diese Gleichung weist dabei Ähnlichkeiten zur Klassifizierung geometrischer Körper in Gleichung 2.55 auf.

Aus den einzelnen Chern-Zahlen  $c_m$  lässt sich nun die Gesamt-Chern-Zahl  $c$  als Summe über alle besetzten Bänder bilden:

$$c = \sum_{m=1}^N c_m . \quad (2.60)$$

Die Gesamt-Chern-Zahl  $c$  kann dabei als topologische Invariante zur Klassifizierung unterschiedlicher Bandstrukturen verwendet werden. [37]

Nach dieser Klassifikation sind alle trivialen Isolatoren, wie beispielsweise auch das Vakuum<sup>23</sup>, topologisch äquivalent zueinander und durch eine Gesamt-Chern-Zahl von  $c = 0$  bestimmt. Allerdings sind nicht alle Zustände, die eine Bandlücke aufweisen, topologisch äquivalent zueinander. So existieren auch Phasen mit  $c \neq 0$ .

<sup>22</sup>nach dem Prinzip der adiabatischen Kontinuität

<sup>23</sup>Hier existiert eine Energielücke für die Paarbildung im Vakuum [40].

### 2.3 Der topologische Isolator

Ein Beispiel hierfür ist der in Abschnitt 2.1.3 diskutierte ganzzahlige Quanten-Hall-Zustand. Befindet sich dort die Fermi-Energie zwischen zwei diskreten Landau-Niveaus, so sind nun, wie auch in einem gewöhnlichen Isolator, die besetzten von den unbesetzten Zuständen durch eine Energielücke getrennt. Im Gegensatz zu einem trivialen Isolator (Abbildung 2.12(a)) im starken senkrechten Magnetfeld führt im Quanten-Hall-Zustand (Abbildung 2.12(b)) das Anlegen eines elektrischen Feldes zu einer quantisierten Hall-Leitfähigkeit. Die Hall-Leitfähigkeit lässt sich durch eine von Thouless, Kohmoto, Nightingale und den Nijs [52, 53] eingeführte ganzzahlige topologische Invariante ausdrücken, die in Gleichung 2.49 bereits als Füllfaktor  $\nu$  bezeichnet wurde. Beschreibt man die Quanten-Hall-Leitfähigkeit nun mit der Berry-Krümmung  $\mathcal{F}_{x,y}(\vec{k})$  über alle gefüllten Bänder, so ergibt sich diese zu [43]:

$$\sigma_{xy} = \frac{e^2}{h} \frac{1}{2\pi} \int_{BZ} \mathcal{F}_{x,y}(\vec{k}) dk_x dk_y = \nu \frac{e^2}{h} = c \frac{e^2}{h} . \quad (2.61)$$

Aus dem Vergleich mit Gleichung 2.59 wird deutlich, dass der Füllfaktor  $\nu$  genau der Gesamt-Chern-Zahl  $c$  entspricht. [37, 40] Aus Gleichung 2.61 wird zudem deutlich, dass ein trivialer Isolator eine Gesamt-Chern-Zahl von  $c = 0$  haben muss, da für diesen die Leitfähigkeit verschwindet. [44] Da es sich bei der Gesamt-Chern-Zahl  $c$  aufgrund der topologischen Natur um eine ganze Zahl handelt, ist es nicht möglich diese topologische Invariante kontinuierlich zu ändern. Dies spiegelt sich im Experiment in der Stabilität der quantisierten Plateaus bei kontinuierlicher Veränderung des Hamiltonoperators<sup>24</sup> wider. Da die Gesamt-Chern-Zahl  $c$  zudem äquivalent zum Füllfaktor  $\nu$  ist, wird deutlich, dass jedes einzelne quantisierte Plateau einer anderen topologischen Phase zugeordnet werden kann.

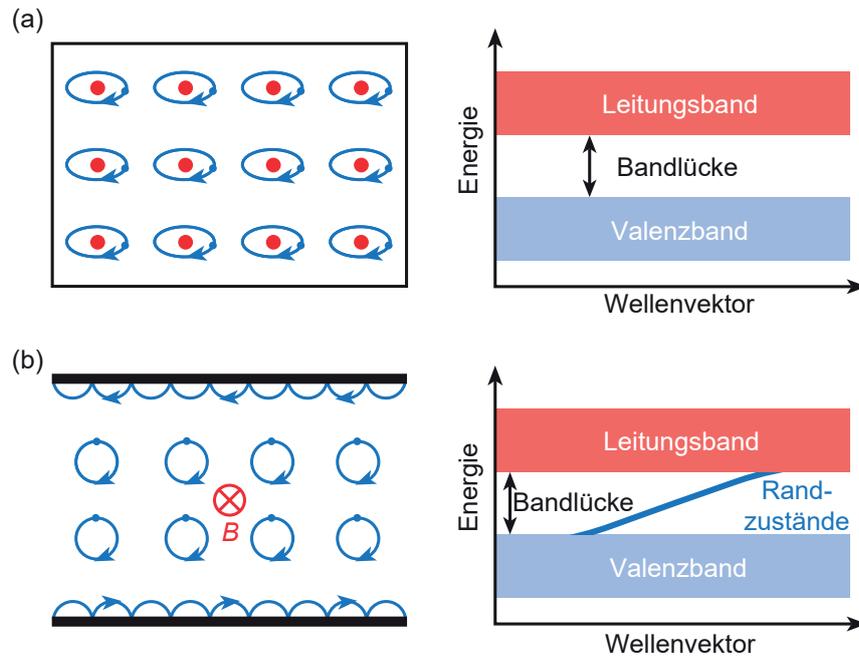
Betrachtet man die Grenzfläche zwischen einem System im Quanten-Hall-Zustand mit  $c = 1$  und einem trivialen Isolator mit  $c = 0$ , so muss sich irgendwo auf der Phasengrenze zwischen den beiden die topologische Invariante ändern. Da die Änderung der topologischen Phase zu einem Schließen der Bandlücke führt, entstehen an den Grenzflächen des Quanten-Hall-Zustands zum trivialen Isolator die bereits in Abschnitt 2.1.3 beschriebenen leitenden chiralen Randkanäle. [40]

Der Zusammenhang zwischen der Zahl an Randkanälen und dem Unterschied der topologischen Invariante an der Grenzfläche wird dabei mit dem Prinzip der Korrespondenz von Volumenmaterial und Oberfläche (auch *bulk-boundary correspondence*) beschrieben. [41] So ist die Differenz  $N_R - N_L$  der Anzahl an Randkanälen, die sich an der Grenzfläche nach rechts ( $N_R$ ) und nach links ( $N_L$ ) bewegen, gleich der Differenz der Chern-Zahlen  $\Delta c$  an der Phasengrenze [40, 41]:

$$N_R - N_L = \Delta c . \quad (2.62)$$

---

<sup>24</sup>wie beispielsweise der Verwendung eines anderen Materialsystems



**Abbildung 2.12** Isolierende Phasen.

(a) Im trivialen Isolator bewegen sich lokalisierte Elektronen in geschlossenen Kreisbahnen um die positiv geladenen Atomrümpfe. Die vollständig besetzten Zustände im Valenzband sind dabei durch eine Energielücke von den unbesetzten Zuständen im Leitungsband getrennt. (b) Im 2D Quanten-Hall-Zustand bewegen sich die Elektronen im starken senkrechten Magnetfeld aufgrund der Lorentzkraft auf Kreisbahnen und sind folglich im Inneren lokalisiert. Die daraus folgende Quantisierung in Landau-Niveaus führt zu einem isolierenden Zustand im Inneren des Systems (solange die Fermi-Energie zwischen zwei Landau-Niveaus liegt). Am Probenrand wird diese kreisförmige Bewegung unterbrochen und es entstehen dort chirale leitende Randzustände in Form von *skipping orbits*. Nach [54].

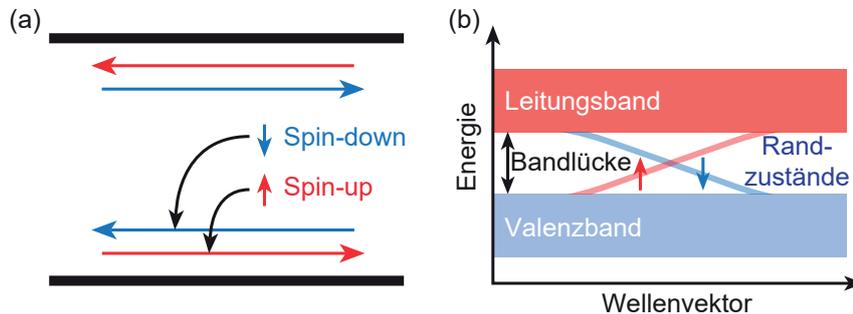
### 2.3.3 Quanten-Spin-Hall-Effekt und $\mathbb{Z}_2$ -Invariante

Wie bereits beschrieben tritt der Quanten-Hall-Zustand in zweidimensionalen Systemen nur bei Anlegen eines starken externen Magnetfelds auf, welches zudem für einen Bruch der Zeitumkehrsymmetrie  $\mathcal{T}$  sorgt. Der Quanten-Hall-Zustand liegt somit nur in Systemen mit gebrochener Zeitumkehrsymmetrie vor. [41, 44, 55]

Allerdings existieren auch topologische Randzustände, welche die Zeitumkehrsymmetrie nicht brechen. Damit ein zeitumkehrinvariantes System ohne das Anlegen eines externen Magnetfeldes topologische Zustände ausbilden kann, benötigt dieses allerdings eine starke Spin-Bahn-Wechselwirkung. Zudem ist hierbei das Auftreten einer Bandinversion essentiell für das Entstehen der nicht-trivialen topologischen Zustände (siehe hierzu Abschnitt 2.3.6). [41, 56] Durch die Spin-Bahn-Wechselwirkung zeichnen sich die in diesem System entstehenden Randzustände dadurch aus, dass diese im Gegensatz zum Quanten-Hall-Zustand spinpolarisiert sind und paarweise auftreten. So befinden sich am Rand der Probe immer zwei Randkanäle mit jeweils

### 2.3 Der topologische Isolator

einem Kanal für Spin-up- und einem für Spin-down-Elektronen, wobei die beiden Spinarten in jeweils entgegengesetzte Richtungen propagieren (siehe dazu Abbildung 2.13(a)). Genau dieser Zusammenhang zwischen Spin und Impuls der Teilchen



**Abbildung 2.13** Der Quanten-Spin-Hall-Effekt-Zustand oder auch zweidimensionaler topologischer Isolator.

Im Gegensatz zu einem Quanten-Hall System ist hier für die Ausbildung von Randzuständen kein externes Magnetfeld nötig. Die Rolle des externen Magnetfeldes übernimmt im Quanten-Spin-Hall-Zustand die starke Spin-Bahn-Wechselwirkung. (a) Schematisches Modell der spinpolarisierten Randkanäle, die sich bei entgegengesetzter Spinpolarisation in die entgegengesetzte Richtung bewegen. Da die beiden Spinausrichtungen in entgegengesetzte Richtungen propagieren, fließt effektiv kein elektrischer Strom, sondern nur ein reiner Spin-Strom. Da hier im Gegensatz zum normalen Quanten-Hall-Effekt der Spin-Strom die Funktion des elektrischen Stroms übernimmt, wird ein System mit derartigen Randmoden als Quanten-Spin-Hall System bezeichnet. [37] (b) Schematische Bandstruktur am Rand des Quanten-Spin-Hall-Zustandes. Hierbei wird die Energielücke im Inneren der Probe an den Randbereichen über die leitenden spinpolarisierten Randzustände geschlossen. Nach [54].

wird auch als *Spin-Momentum Locking* bezeichnet und die hier zugehörigen Spin gefilterten Randzustände werden *helikal* genannt. Da hierbei Rückstreuung zwischen einzelnen Randkanälen nur durch Störstellen<sup>25</sup> möglich ist, welche bei der Streuung daran auch den Spin umdreht und die Zeitumkehrsymmetrie bricht, spricht man in einem solchen System auch vom topologischen Schutz der Randzustände durch die Zeitumkehrsymmetrie. Dieser neue topologische Zustand in zweidimensionalen Systemen wird als Quanten-Spin-Hall Isolator oder auch als 2D topologischer Isolator bezeichnet. [40, 41, 44] Will man dieses zeitungkehrinvariante System wie im vorherigen Kapitel durch eine topologische Invariante klassifizieren, dann zeigt sich, dass die zuvor verwendete Chern-Zahl hierfür nicht mehr geeignet ist. So besitzt in einem zeitungkehrinvarianten System sowohl der 2D topologische Isolator ( $c = 0$ ) als auch der triviale Isolator ( $c = 0$ ) die selbe Chern-Zahl, weshalb sich beide Zustände nicht durch diese topologische Invariante differenzieren lassen. [1, 40]

Um beide Zustände nun voneinander unterscheiden zu können, benötigt man eine zusätzliche topologische Invariante für ein solches zeitungkehrsymmetrisches System.

<sup>25</sup>wie beispielsweise einer magnetischen Verunreinigung

Hierfür wird die sogenannte  $\mathbb{Z}_2$ -Invariante  $\nu$  verwendet<sup>26</sup>, welche die Werte  $\nu = 0$  (für den trivialen Isolator) und  $\nu = 1$  (für den nicht-trivialen Fall) annehmen kann. [44] Zur Beschreibung dieser Invarianten und der zugehörigen neuen topologischen Klasse wird im Folgenden genauer auf die Zeitumkehrsymmetrie für Spin- $1/2$  Teilchen<sup>27</sup> eingegangen.

Die Zeitumkehr, welche einer Transformation, die den Zeitpfeil umkehrt, entspricht, wird dabei durch den anti-unitären Operator  $\Theta : t \mapsto -t$  beschrieben. Für Teilchen mit Spin ist dieser gegeben durch:

$$\Theta = e^{\frac{i\pi S_y}{\hbar}} K. \quad (2.63)$$

Hierbei ist  $S_y$  der Spinoperator<sup>28</sup>, welcher für die Umkehr der Spin-Richtung sorgt, und  $K$  der Operator der komplexen Konjugation, welcher für die Impulskehr sorgt. [37, 40, 43] Für Spin- $1/2$  Teilchen ergibt sich dieser anti-unitäre Zeitumkehroperator zu  $\Theta^2 = -1$ . Ist der Hamiltonoperator  $H$  des Systems auch zeitumkehrinvariant, dann muss dieser die Bedingung

$$\Theta H(\vec{k}) \Theta^{-1} = H(-\vec{k}) \quad (2.64)$$

erfüllen. [40, 44] So ist mit einem zeitumkehrinvarianten Hamiltonoperator der Erwartungswert der Energie für den ursprünglichen Zustand und den zeitumgekehrten Zustand identisch. Hieraus folgt für Spin- $1/2$  Teilchen das Kramers-Theorem, welches besagt, dass alle Eigenzustände eines solchen zeitumkehrinvarianten Hamiltonoperators mindestens zweifach entartete Energiezustände besitzen müssen. [37, 44] Ein Paar von Randzuständen mit der gleichen Energie, entgegengesetztem Impuls und umgekehrtem Spin bildet dabei ein entartetes Kramers-Paar, wobei die beiden Bänder eines Kramers-Paars jeweils durch die Zeitumkehroperation miteinander verknüpft sind. Da das Kramers-Theorem allerdings nur an speziellen zeitumkehrsymmetrischen Punkten (Kramers-Punkte) gilt, an denen auch Gleichung 2.64 erfüllt ist, liegt im  $\mathbf{k}$ -Raum nur an diesen speziellen Punkten eine zweifache Entartung vor. In zwei Dimensionen gibt es in der 2D Brillouinzone genau vier solcher Kramers-Punkte<sup>29</sup> bei  $\vec{k} = \Gamma_i$  mit  $i = \{1, 2, 3, 4\}$ . [3, 40, 43] An allen anderen Orten im  $\mathbf{k}$ -Raum führt die starke Spin-Bahn-Wechselwirkung in einem 2D topologischen Isolator zu einer Aufhebung der Spin-Entartung zwischen den Spin-up- und den Spin-down-Zuständen. [40, 44] Abbildung 2.14 zeigt hierbei den Verlauf der Bandstruktur für Randzustände zwischen zwei Kramers-Punkten (bei  $k_x = 0 = \Lambda_a$  und  $k_x = \pi/a = \Lambda_b$ )<sup>30</sup>. Hierbei ist es nur nötig die Hälfte der Brillouinzone zu zeigen, da die andere Hälfte aufgrund der Zeitumkehrsymmetrie ein genaues Spiegelbild hiervon

<sup>26</sup>Diese sollte hier nicht mit dem ähnlich aussehenden Symbol des Füllfaktors  $\nu$  verwechselt werden.

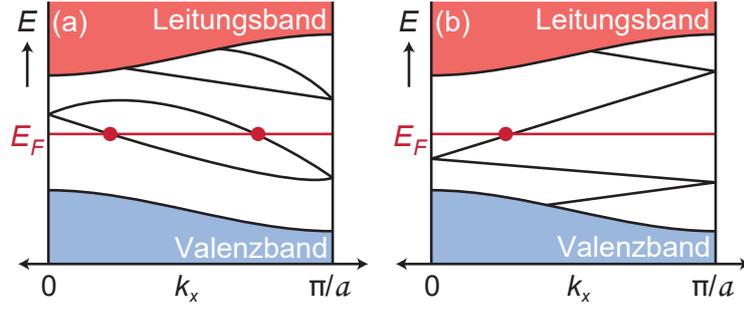
<sup>27</sup>Also fermionische Systeme wie beispielsweise Elektronen

<sup>28</sup>Unter der Annahme, dass der Spin die  $y$ -Achse als Rotationsachse verwendet

<sup>29</sup>bei  $(k_x, k_y) = \Gamma_{1,2,3,4} = (0, 0), (0, \pi/a), (\pi/a, 0), (\pi/a, \pi/a)$  mit der Gitterperiode  $a$

<sup>30</sup>Hierbei werden jeweils zwei der vier zeitumkehrsymmetrischen Punkte  $\Gamma_{1,2,3,4}$  auf einen Randpunkt  $\Lambda_a$  bei  $k_x = 0$  (also  $(0, 0)$  und  $(0, \pi/a)$ ) bzw.  $\Lambda_b$  bei  $k_x = \pi/a$  (also  $(\pi/a, 0)$  und  $(\pi/a, \pi/a)$ ) projiziert [44].

### 2.3 Der topologische Isolator



**Abbildung 2.14** Dispersionsrelation am Rand eines zeitumkehrinvarianten 2D Isolators zwischen den zwei zeitumkehrinvarianten Kramers-Punkten bei  $k_x = 0$  und  $k_x = \pi/a$ . In Rot und Blau sind das Leitungs- und das Valenzband im Inneren des 2D Systems dargestellt. Die Randzustände innerhalb der Bandlücke sind hier in Schwarz gezeigt. Die Energiebänder der Randzustände kommen dabei in zeitumgekehrten Paaren, die sich an den beiden Kramers-Punkten schneiden und dort zweifach entartet sind. Diese Paare können sich auf den zeitumkehrinvarianten Punkten auf zwei verschiedene Arten schneiden: (a) Die beiden Bänder können sich immer paarweise mit dem selben Partner verbinden. Somit existiert eine gerade Anzahl an Schnittpunkten der Bänder mit der Fermi-Energie  $E_F$ . In diesem Fall ist es allerdings immer möglich Energiebereiche innerhalb der Bandlücke zu finden, in denen sich die Fermie-Energie mit keinem Energieband der Randzustände schneidet. Da die Randzustände somit nur einen Teil der Bandlücke abdecken, ist das System trivial. Für einen solchen trivialen Isolator ist die  $\mathbb{Z}_2$ -Invariante gleich  $\nu = 0$ . [44] (b) Die Randzustände tauschen an den zeitumkehrsymmetrischen Kramers-Punkten ihren jeweiligen Partner. Somit gibt es eine ungerade Zahl an Schittpunkten der Bänder mit der Fermi-Energie. Nur in diesem Fall existieren überall innerhalb der Bandlücke topologisch geschützte Randzustände und das System ist nicht-trivial mit  $\nu = 1$ . [40, 44] Nach [40].

darstellt. [40, 41, 44] Betrachtet man die Bänder innerhalb der Brillouinzone, dann kann sich ein Paar von Bändern an den zeitumkehrsymmetrischen Punkten auf zwei unterschiedliche Arten miteinander schneiden. In Abbildung 2.14(a) schneiden sie sich jeweils paarweise an den Kramers-Punkten und besitzen eine gerade Anzahl an Schnittpunkten mit der Fermi-Energie  $E_F$ . In diesem Fall gibt es auch Bereiche innerhalb der Bandlücke, in denen auch keine Randzustände existieren, weshalb es sich hier um ein triviales System handelt. In Abbildung 2.14(b) wechseln die Randmoden an den entarteten Kramers-Punkten jeweils ihren Partner. Hierbei findet sich im gesamten Bereich der Bandlücke immer eine ungerade Anzahl an Schnittpunkten der Randzustände mit der Fermi-Energie. Nur eine so geartete Dispersionsrelation führt zu topologisch geschützten Randzuständen mit einer  $\mathbb{Z}_2$ -Invarianten von  $\nu = 1$ . [40, 44]

Eine ausführlichere mathematische Herleitung dieser  $\mathbb{Z}_2$ -Invarianten  $\nu$  findet sich in den Referenzen [1, 40, 41, 43, 44, 57] und soll im Folgenden nur kurz angeführt werden. Die Beschreibung der  $\mathbb{Z}_2$ -Invarianten beruht dabei auf der Änderung der Zeitumkehr

Polarisation<sup>31</sup>, welche das Vorhandensein oder Fehlen einer Kramers-Entartung auf einer Oberfläche bestimmt. [3,4] Um nun daraus auf die Invariante zu kommen, wird zunächst eine unitäre Matrix

$$w_{mn}(\vec{k}) = \langle u_m(-\vec{k}) | \Theta | u_n(\vec{k}) \rangle \quad (2.65)$$

aus den besetzten Bloch-Eigenzuständen (die auch bereits in Gleichung 2.57 verwendet wurden) definiert. Diese Matrix erzeugt dabei einen Zusammenhang zwischen den zeitumgekehrten Eigenzuständen bei  $\vec{k}$  mit den Zuständen bei  $-\vec{k}$ . [43, 44, 57] Innerhalb dieser Matrix sind aufgrund der Zeitumkehrsymmetrie mit  $\Theta^2 = -1$  und der Orthogonalität der Zustände nur die Matrixelemente, welche nicht auf deren Diagonale liegen, von Null verschieden. [44] Nur wenn  $\vec{k} = \Gamma_i$  an einem der vier zeitumkehrsymmetrischen Kramers-Punkten  $\Gamma_i$  liegt, decken sich  $\vec{k}$  und  $-\vec{k}$  und die Matrix wird antisymmetrisch ( $w_{mn} = -w_{nm}$ ). [3, 40] Eine solche antisymmetrische Matrix lässt sich durch eine pfaffsche Determinante  $\text{Pf}[w(\Gamma_i)]$  charakterisieren, für welche der quadratische Zusammenhang  $[\text{Pf}[w(\Gamma_i)]]^2 = \text{Det}[w(\Gamma_i)]$  mit der Determinante besteht. Daraus lässt sich der Faktor  $\delta_i$ :

$$\delta_i = \frac{\sqrt{\text{Det}[w(\Gamma_i)]}}{\text{Pf}[w(\Gamma_i)]} = \pm 1 \quad (2.66)$$

für jeden der vier Kramers-Punkte bestimmen, wobei  $\delta_i$  aufgrund des quadratischen Zusammenhangs der pfaffschen Determinante mit der Determinante nur die Werte 1 und  $-1$  annehmen kann. Daraus lässt sich nun die Zeitumkehr Polarisation für jeden der beiden projizierten Punkte ( $\Lambda_a$  und  $\Lambda_b$ ) aus dem Produkt der zwei bei der Projektion zusammengehörigen  $\delta_i$  ermitteln. Die Änderung der Zeitumkehr Polarisation zwischen  $\Lambda_a$  und  $\Lambda_b$  (welche auch die topologische Invariante definiert) wird durch das Produkt über alle vier  $\delta_i$ , für welche alle  $\Gamma_i$  in einer Ebene liegen, bestimmt. [4, 44] Somit lässt sich schließlich die  $\mathbb{Z}_2$ -Invariante  $\nu$  mit der Gleichung

$$(-1)^\nu = \prod_{i=1}^4 \delta_i \quad (2.67)$$

ermitteln. [40, 57]  $\nu$  ist folglich eine ganze Zahl Modulo 2, also genau 0 oder 1. Dadurch lassen sich in einem zeitumkehrinvarianten System die zwei Zustände, topologisch trivial ( $\nu = 0$ ) und topologisch nicht-trivial ( $\nu = 1$ ), eindeutig voneinander unterscheiden. [45] Auch hier kann nach der bulk-boundary correspondence nur durch die Kenntnis der topologischen Invariante im Inneren des Systems auf die Existenz von topologischen Randzuständen an der Grenzfläche zwischen Systemen mit verschiedener topologischer Invariante geschlossen werden. [40]

<sup>31</sup>Diese beruht auf der Ladungspolarisation in einem zeitumkehrinvarianten System, welche sich aus der Summe des Berry-Potentials über die Brillouinzone ergibt. Die Änderung dieser Ladungspolarisation über die komplette Brillouinzone ergibt dann den Hall-Leitwert. Wegen der Zeitumkehrinvarianz reicht es dabei, nur die Hälfte der Brillouinzone zu betrachten. Siehe hierzu Referenz [43].

### 2.3.4 Verallgemeinerung auf drei Dimensionen

Das im vorangegangenen Abschnitt beschriebene Bild des Quanten-Spin-Hall Isolators bzw. des 2D topologischen Isolators kann auch auf drei Dimensionen verallgemeinert werden.<sup>32</sup> Dazu werden in drei Dimensionen statt der vier zeitumkehrinvarianten Punkte der zweidimensionalen Brillouinzone die acht zeitumkehrinvarianten Punkte<sup>33</sup>  $\Gamma_i$  mit  $i = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$  der dreidimensionalen Brillouinzone verwendet. [43]  $\Gamma_{i=n_1n_2n_3} = (n_1\vec{b}_1 + n_2\vec{b}_2 + n_3\vec{b}_3)/2$  kann dabei auch durch die primitiven reziproken Gittervektoren  $\vec{b}_{1,2,3}$  ausgedrückt werden. [3] In einem rechteckigen Gitter liegen diese acht Punkte somit genau auf den Kanten der dreidimensionalen Brillouinzone.

Im zweidimensionalen Fall wurden jeweils zwei zeitumkehrinvariante Punkte  $\Gamma_i$  der zweidimensionalen Brillouinzone auf einen Punkt am Rand  $\Lambda_a$  projiziert, um daraus die Zeitumkehr Polarisation zu bestimmen. Im dreidimensionalen Fall lässt sich ein analoges Vorgehen hierzu finden. Dazu werden immer jeweils zwei der acht zeitumkehrinvarianten Punkte ( $\Gamma_{i_{a1}}$  und  $\Gamma_{i_{a2}}$ ) in der dreidimensionalen Brillouinzone an einen Punkt  $\Lambda_a$  auf der Oberflächenbrillouinzone projiziert. Somit gibt es an der Oberfläche genau vier solcher zeitumkehrsymmetrischen Punkte  $\Lambda_{j=a,b,c,d}$ . Die Zeitumkehr Polarisation  $\pi_j$  zu jedem dieser projizierten Punkte an der Oberfläche ergibt sich dabei, wie auch im zweidimensionalen Fall, durch Multiplikation der beiden hierzu zugehörigen Faktoren  $\delta_i$  aus Gleichung 2.66 zu:

$$\pi(\Lambda_{j=a,b,c,d}) = \pi_j = \delta_{i_{j1}}\delta_{i_{j2}} = \pm 1 . \quad (2.68)$$

Auch hier ist die reine Größe der Zeitumkehr Polarisation nicht bedeutend, da diese bei einer Eichtransformation nicht invariant bleibt. Allerdings ist auch wieder die Änderung der Zeitumkehr Polarisation eichinvariant und bestimmt, wie auch im zweidimensionalen Fall, eine  $\mathbb{Z}_2$ -Invariante. [3, 44] Da es in der dreidimensionalen Brillouinzone sechs Oberflächen gibt, die alle die Symmetrie einer 2D Brillouinzone besitzen, kann jeder dieser Oberflächen eine  $\mathbb{Z}_2$ -Invariante zugeordnet werden, wobei nicht alle voneinander unabhängig sind. So zeigt sich, dass in drei Dimensionen nur vier  $\mathbb{Z}_2$ -Invarianten unabhängig voneinander bestimmt werden können. [42] Diese vier Invarianten zur Charakterisierung des 3D Systems besitzen typischerweise die Schreibweise  $\nu_0; (\nu_1\nu_2\nu_3)$ . Die erste Invariante  $\nu_0$  (starke  $\mathbb{Z}_2$ -Invariante) ergibt sich aus dem Produkt der  $\delta_i$  über alle acht zeitumkehrsymmetrischen Punkte<sup>34</sup> und ist daher einzigartig für ein 3D System:

$$(-1)^{\nu_0} = \prod_{i=1}^8 \delta_i . \quad (2.69)$$

<sup>32</sup>Detaillierte Beschreibungen hierzu finden sich in den Referenzen [3, 40, 42–44].

<sup>33</sup>bei  $(k_x, k_y, k_z) = \Gamma_{1,2,3,4,5,6,7,8} = (0, 0, 0), (0, 0, \pi), (0, \pi, 0), (0, \pi, \pi), (\pi, 0, 0), (\pi, 0, \pi), (\pi, \pi, 0), (\pi, \pi, \pi)$

<sup>34</sup>also folglich aus der Änderung der Zeitumkehr Polarisation, welche sich aus dem Produkt aller Polarisationen  $\pi_a\pi_b\pi_c\pi_d$  ergibt.

Die anderen drei Invarianten  $\nu_1$ ,  $\nu_2$  und  $\nu_3$  (schwache  $\mathbb{Z}_2$ -Invarianten) sind 2D  $\mathbb{Z}_2$ -Invarianten und ergeben sich, analog zum 2D Fall, aus dem Produkt von jeweils vier  $\delta_i$ , für welche alle  $\Gamma_i$  in der gleichen Ebene (hier bei  $n_k = 1$ ) liegen:

$$(-1)^{\nu_{k=1,2,3}} = \prod_{n_k=1; n_j \neq k=0,1} \delta_{n_1 n_2 n_3} . \quad (2.70)$$

[3, 4, 42, 44, 58]

Nun ist es möglich, verschiedene topologische Phasen in einem 3D System mit Hilfe dieser vier Invarianten zu klassifizieren. Die 3D Invariante  $\nu_0$  ist dabei die allgemeinere Invariante, welche aufzeigt, ob alle möglichen Oberflächen Oberflächenzustände aufweisen oder nicht. So ergibt sich nur für  $\nu_0 = 1$  ein starker dreidimensionaler topologischer Isolator mit einer ungeraden Anzahl an leitenden topologisch geschützten Oberflächenzuständen an allen Oberflächen. Die Bezeichnung stark resultiert aus der Tatsache, dass alle Oberflächenzustände in diesem System, ähnlich wie im zweidimensionalen Fall, topologisch geschützt sind. Ist die Invariante allerdings  $\nu_0 = 0$ , so ist das System, abhängig von den drei schwachen Invarianten ( $\nu_1 \nu_2 \nu_3$ ) entweder ein trivialer Isolator (0; (000)) oder ein schwacher topologischer Isolator (sobald mindestens einer der drei schwachen Invarianten  $\nu_{k=1,2,3} = 1$  ist). [3, 44] Dieser topologische Isolator wird dabei als schwach bezeichnet, da die Oberflächenzustände, anders als bei  $\nu_0 = 1$ , sensibel auf Störeinflüsse sind. So kann ein Störpotential in einem schwachen topologischen Isolator dazu führen, dass sich dieser topologisch nicht mehr von einem trivialen Isolator unterscheiden lässt, da sich zwischen den Oberflächenzuständen eine Bandlücke öffnen kann. [3, 4, 40, 44] Die Besonderheit eines schwachen dreidimensionalen topologischen Isolators ist zudem, dass dieser nicht an allen Oberflächen topologische Oberflächenzustände besitzt. Dies wird deutlich, wenn man den einfachsten Weg betrachtet, einen solchen schwachen dreidimensionalen topologischen Isolator zu erzeugen. So lässt sich ein schwacher 3D topologischer Isolator als Stapel von einzelnen übereinander gelegten zweidimensionalen topologischen Isolatoren konstruieren, wobei die drei schwachen Invarianten ( $\nu_1 \nu_2 \nu_3$ ) hier als Miller Indizes verstanden werden können, welche die Orientierung der Schichten beschreibt. Folglich ist ersichtlich, dass in diesem System die beiden Oberflächen in Stapelrichtung topologisch trivial sind, wohingegen alle vier Seitenflächen senkrecht dazu topologisch nicht-trivial sind. [40, 44]

Im Folgenden betrachtet man die Oberflächenzustände eines 3D topologischen Isolators in der Oberflächenbrillouinzone. Hierbei sind die Oberflächenzustände an den zeitumkehrsymmetrischen Punkten  $\Lambda_{j=a,b,c,d}$ , wie auch im zweidimensionalen Fall, Kramers-Entartet, wohingegen die Entartung überall sonst aufgrund der Spin-Bahn-Wechselwirkung aufgehoben ist. Somit existieren an all diesen Punkten zweidimensionale Dirac-Punkte (siehe Abbildung 2.15(c)) in der Oberflächenbandstruktur. Die nicht-triviale Topologie eines solchen Systems wird dabei durch die Art und Weise bestimmt, wie sich die einzelnen Dirac-Punkte von verschiedenen  $\Lambda_{j=a,b,c,d}$  miteinander verbinden. [4] Dies kann dabei entweder aussehen wie in Abbildung 2.14(a), wenn die Zeitumkehr Polarisation  $\pi_j$  an beiden Punkten gleich ist, oder wie in

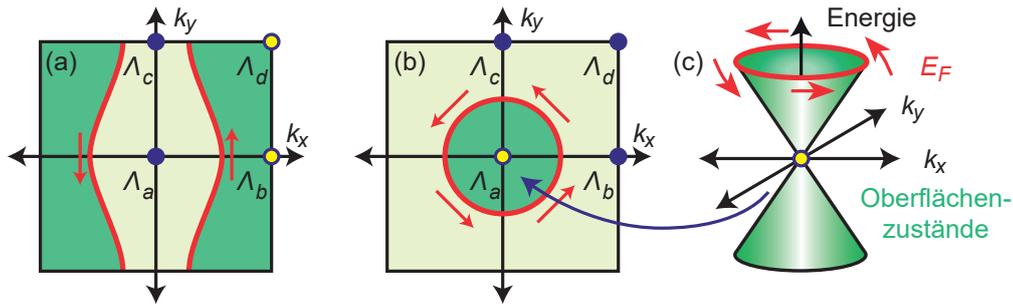
### 2.3 Der topologische Isolator

2.14(b), wenn  $\pi_j$  an beiden Punkten verschieden ist. [3] Somit gibt es hier, wie auch im 2D Fall, nur auf einem Pfad zwischen zwei Punkten  $\Lambda_{j=a,b,c,d}$  mit verschiedenen  $\pi_j$  topologisch geschützte spinpolarisierte Oberflächenzustände, welche die Fermi-Energie schneiden. [44] Dies ist in Abbildung 2.15 für einen schwachen (a) und einen starken dreidimensionalen Isolator (b) dargestellt. Im Fall des schwachen dreidimensionalen topologischen Isolators gibt es allerdings immer Oberflächen, in denen alle  $\pi_{j=a,b,c,d}$  das gleiche Vorzeichen besitzen und somit dort keine Oberflächenzustände existieren, welche die Fermi-Energie schneiden. An den anderen Oberflächen finden sich hingegen solche Oberflächenzustände. Wie eine mögliche Fermi-Fläche an der Oberflächenbrillouinzone eines, aus 2D topologischen Isolatoren in  $y$ -Richtung gestapelten, schwachen 3D topologischen Isolators aussieht, ist in Abbildung 2.15(a) dargestellt. Hierbei ändert sich auf den Pfaden von  $\Lambda_a$  nach  $\Lambda_b$  und von  $\Lambda_c$  nach  $\Lambda_d$  jeweils der Wert von  $\pi_{j=a,b,c,d}$ . Dies sorgt dafür, dass entlang dieses Pfades eine Dispersionsrelation nach Abbildung 2.14(b) vorliegt und dort folglich ein spinpolarisierter Oberflächenzustand die Fermi-Energie schneiden muss. An Pfaden, in denen sich die Zeitumkehr Polarisation nicht ändert, liegt eine Dispersionsrelation nach Abbildung 2.14(b) vor, und es existieren dort keine solchen Oberflächenzustände, welche die Fermi-Energie schneiden. Betrachtet man die daraus resultierende Fermi-Fläche auf einer projizierten Oberflächenbrillouinzone, so zeigt sich, dass in diesem Fall genau zwei, also eine gerade Anzahl, an Dirac-Punkten von der Fermi-Fläche eingeschlossen ist. [4] Hierbei wurde von Fu und Kane [3, 4] angenommen, dass die Kegel der Dirac-Punkte an den zwei von der Fermi-Fläche eingeschlossenen Punkten bei einem Störpotential aneinander koppeln können. Dies könnte zum Entstehen einer Lücke innerhalb der Oberflächenzustände führen, wodurch diese Phase in diesem Fall äquivalent zu einem trivialen Isolator wäre.<sup>35</sup> [44] Im Gegensatz zum schwachen 3D TI werden im starken 3D topologischen Isolator an allen Oberflächen eine ungerade Anzahl an Dirac-Punkten von der Fermi-Fläche eingeschlossen. In Abbildung 2.15(b) ist der einfachste Fall hierfür mit nur einem einzigen eingeschlossenen Dirac-Punkt in der Oberflächenbrillouinzone dargestellt. Im Gegensatz zu einem gewöhnlichen zweidimensionalen Elektronengas (siehe Abschnitt 2.1) sind die Dirac-förmigen Oberflächenzustände nicht spinentartet und die Spin-Richtung der einzelnen Zustände ist an deren Impuls gekoppelt (siehe Abbildung 2.15(c)). [40, 44]

Da im Rahmen dieser Arbeit ausschließlich mit einem 3D topologischen Isolator mit  $\nu_0 = 1$  gearbeitet wurde, ist in den nachfolgenden Ausführungen immer implizit der starke 3D topologische Isolator gemeint.

---

<sup>35</sup>In den letzten Jahren zeigt sich allerdings, dass Oberflächenzustände in einem solchen System, entgegen der ursprünglichen Annahme, dennoch robust gegenüber Verunreinigungen sind, welche die Zeitumkehrsymmetrie nicht brechen. Somit sind diese Zustände, wie auch die Zustände eines starken topologischen Isolators, topologisch geschützt. Daher unterscheidet sich ein schwacher von einem starken topologischen Isolator hauptsächlich durch die Anisotropie der Oberflächenzustände. Siehe hierzu [59] oder auch [44] und die Referenzen darin.



**Abbildung 2.15** In  $k_z$ -Richtung projizierte Oberflächen Brillouinzone eines schwachen (a) und eines starken (b) 3D topologischen Isolators.

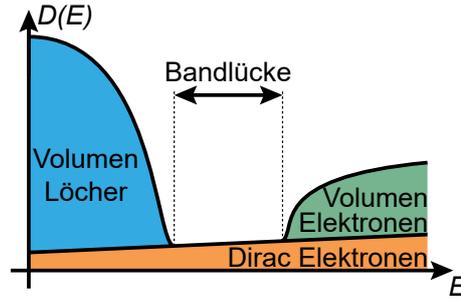
Die projizierten zeitumkehrsymmetrischen Punkte  $\Lambda_{j=a,b,c,d}$  sind dabei je nach Wert der  $\pi_{j=a,b,c,d}$  entweder lila ( $\pi_{j=a,b,c,d} = +1$ ) oder gelb ( $\pi_{j=a,b,c,d} = -1$ ). An allen Pfaden, auf denen sich die Zeitumkehr Polarisation  $\pi_{j=a,b,c,d}$  ändert, existieren Oberflächenzustände, welche die Fermi-Energie  $E_F$  schneiden. Die daraus resultierenden Fermi-Flächen der Oberflächenzustände an der Oberflächen Brillouinzone sind dabei in Rot eingezeichnet, wobei die besetzten Zustände dunkelgrün eingefärbt sind. Rote Pfeile markieren die Spin-Richtung, welche hier aufgrund der Spin-Bahn-Wechselwirkung an den Impuls gekoppelt ist, wodurch der Spin um die Fermi-Fläche rotiert. (a) In einem schwachen 3D topologischen Isolator umschließt der Fermi-Kreis in der Oberflächen Brillouinzone immer eine gerade Anzahl von Dirac-Punkten an den nicht-trivialen Oberflächen. In einem starken 3D topologischen Isolator existiert hingegen immer eine ungerade Anzahl von Dirac-Punkten an allen Oberflächen. Der einfachste Fall eines starken 3D topologischen Isolators, in dem die Fermi-Fläche nur einen einzigen Dirac-Punkt an der Oberfläche umschließt, ist in (b) dargestellt. In (c) wird gezeigt, wie die Dispersionsrelation an einem solchen Punkt durch einen Dirac-Kegel gegeben ist. Die rote Markierung zeigt dabei den Schnitt durch den Kegel bei der Fermi-Energie  $E_F$ . [40, 44] Nach [4, 40, 44, 54].

### 2.3.5 Landau-Quantisierung von Dirac-Fermionen und Oberflächen-Quanten-Hall-Effekt

Betrachtet man einen starken dreidimensionalen topologischen Isolator, wie auch das in dieser Arbeit verwendete System (siehe Kapitel 3.1), so besteht dieser aus Volumenzuständen (im Valenz- und Leitungsband) sowie zweidimensionalen Oberflächenzuständen, welche sich über die gesamte Bandstruktur hinweg ausdehnen. Dies ist in Abbildung 2.16 für den Fall eines aus HgTe bestehenden 3D topologischen Isolators dargestellt.

Befindet sich die Fermi-Energie in der Bandlücke, so tragen ausschließlich die Oberflächenzustände mit einem 2D Dirac-Punkt in der Oberflächenbandstruktur zum Stromtransport bei. Da in den Ausführungen zum Transport aus Abschnitt 2.1 allerdings immer von einer parabolischen Energiedispersion ausgegangen wurde, soll im Folgenden kurz auf die Auswirkung einer anderen Dispersion, wie hier der linearen Energiedispersion von Dirac-Fermionen, eingegangen werden. Betrachtet man

### 2.3 Der topologische Isolator



**Abbildung 2.16** Zustandsdichte einzelner Ladungsträgerarten in einem aus HgTe bestehenden 3D topologischen Isolator.

Je nach Fermi-Energie liegen unterschiedliche Ladungsträger im System vor. So existieren über den die gesamte Bandstruktur hinweg Dirac-Oberflächenzustände, wobei nur im Bereich der Bandlücke ausschließlich diese Zustände vorliegen. Liegt die Fermi-Energie nicht in der Bandlücke, so existieren im Leitungsband bzw. Valenzband neben den Dirac-Fermionen an der Oberfläche auch Elektronen bzw. Löcher im Volumenmaterial. Nach [6].

nun Dirac-Fermionen im Magnetfeld, so ergeben sich die Energieniveaus aus der Landau-Quantisierung dieser zu:

$$E_n = \text{sgn}(n)v_F\sqrt{2eB\hbar|n|}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (2.71)$$

Dabei bezeichnet  $\text{sgn}(n)$  die Signumfunktion der Landau-Quantenzahl  $n$ . [45, 60] Hierbei zeigt sich, dass der Abstand einzelner Landau-Niveaus zueinander im Gegensatz zu Gleichung 2.34 nicht unabhängig von der Fermi-Energie einen konstanten Wert  $\hbar\omega_c$  annimmt, sondern sich mit  $\sqrt{|n|}$  ändert. Zudem existiert in diesem Fall ein nulltes Landau-Niveau bei  $n = 0$  und entsprechend einer Energie von  $E_0 = 0$  am Dirac-Punkt. Da hier der Landau-Niveau Index  $n$  sowohl positiv als auch negativ sein kann, sind die weiteren Niveaus mit der wurzelförmigen Abhängigkeit symmetrisch um den Dirac-Punkt angeordnet. Liegt eine solche Landau-Quantisierung vor, ergibt sich eine halbzahlig quantisierte Hall-Leitfähigkeit von:

$$\sigma_{xy} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{e^2}{h} = \nu \frac{e^2}{h}. \quad (2.72)$$

Somit ist der Füllfaktor  $\nu$  im Fall von Dirac-Fermionen gegeben durch  $\nu = n + \frac{1}{2}$ . [40, 42]

In einem 3D topologischen Isolator manifestiert sich dies im sogenannten Oberflächen-Quanten-Hall-Effekt. So besitzt dort jede, senkrecht zum Magnetfeld liegende, Oberfläche mit einem einzigen Dirac-Kegel in der Bandstruktur eine solche halbzahlige Hall-Leitfähigkeit an der Oberfläche. Da allerdings im 3D topologischen Isolator alle Oberflächen miteinander verbunden sind, werden im Transportexperiment immer die beiden senkrecht zum Magnetfeld stehenden Oberflächen parallel zueinander gemessen. Entsprechend misst man im Experiment immer die gesamte Hall-Leitfähigkeit

$\sigma_{xy}^{gesamt}$ , welche sich aus den Beiträgen der oberen Oberfläche  $\sigma_{top}$  und denen der unteren Oberfläche  $\sigma_{bot}$  zusammensetzt:

$$\sigma_{xy}^{gesamt} = \sigma_{top} + \sigma_{bot} = (\nu_{top} + \nu_{bot}) \frac{e^2}{h} = \left( (n_{top} + \frac{1}{2}) + (n_{top} + \frac{1}{2}) \right) \frac{e^2}{h}. \quad (2.73)$$

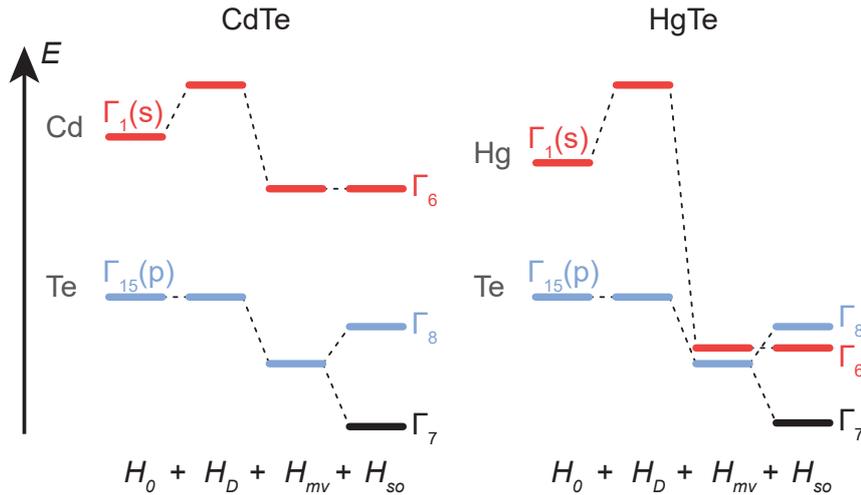
Somit addieren sich die halbzahligen Füllfaktoren der beiden Oberflächen  $\nu_{top}$  und  $\nu_{bot}$  zu einem ganzzahligen Gesamt-Füllfaktor auf. Folglich ist es im Experiment nicht möglich, die halbzahlige Hall-Leitfähigkeit nur einer einzelnen Oberfläche direkt zu beobachten. Indirekt äußert sich die halbzahlige Hall-Leitfähigkeit allerdings durch das reine Auftreten von ausschließlich ungeraden Gesamt-Füllfaktoren, falls die obere und untere Oberfläche jeweils den gleichen Füllfaktor  $\nu_{top} = \nu_{bot}$  besitzen. Teilt man diesen Gesamt-Füllfaktor durch zwei, dann zeigt sich die halbzahlige Hall-Leitfähigkeit. Hat man jedoch unterschiedliche Füllfaktoren an der oberen und unteren Oberfläche, so treten zudem auch gerade Füllfaktoren auf. [4, 40, 42, 43, 46, 48, 49, 61, 62]

### 2.3.6 Verspanntes HgTe als dreidimensionaler topologischer Isolator

Nachdem in den bisherigen Ausführungen das theoretische Konzept eines topologischen Isolators betrachtet wurde, soll nun auf die experimentelle Realisierung eines dreidimensionalen topologischen Isolators auf Basis von HgTe eingegangen werden. So ist hierbei, wie bereits in Abschnitt 2.3.3 beschrieben, das Auftreten einer Bandinversion essentiell für die Entstehung von nicht-trivialen Randzuständen. Wie eine solche Bandinversion im Vergleich zur Bänder-Anordnung eines typischen Halbleiters bzw. eines trivialen Isolators entstehen kann, soll im Folgenden anhand der beiden II-VI-Verbindungen HgTe und CdTe dargestellt werden.

Beide besitzen eine Zinkblende-Struktur mit einer ähnlichen Gitterperiode von  $a_{HgTe} = 6.46 \text{ \AA}$  und  $a_{CdTe} = 6.48 \text{ \AA}$ . [63] Einzelne Bänder in der Nähe der Fermi-Energie innerhalb dieser Heterostrukturen sind dabei, je nachdem wie die Atomorbitale geformt sind, entweder s- oder p-artig und bilden entsprechend der energetischen Position die Valenzbandkante oder das Leitungsband. Diese s-artigen Elektronen stammen bei II-VI-Verbindungen vom Metall (hier Hg oder Cd) und die p-artigen Elektronen vom Chalkogen (hier Te). [40, 41, 63, 64] Will man nun die genaue Bänder-Anordnung von CdTe und HgTe betrachten, so müssen bei Halbleitern aus schweren Elementen mit hoher Kernladungszahl zusätzlich relativistische Effekte berücksichtigt werden. Die Größe, der sich daraus ergebenden Korrekturterme für die Bandstruktur, steigt dabei mit der Ordnungszahl, da sich durch die erhöhte Ladung Elektronen schneller auf den einzelnen Bahnen bewegen. [63] Somit weisen schwere Atome wie Hg, Cd und Te große Korrekturterme auf. Wie sich diese Korrekturterme auf die Bandstruktur in der Nähe des  $\Gamma$ -Punktes von CdTe und HgTe auswirken, ist in Abbildung 2.17 gezeigt. So gibt es hier drei Korrekturterme ( $H_D$ ,  $H_{mv}$  und  $H_{so}$ ), die zum ursprünglichen Hamiltonian  $H_0$  addiert werden. Der Darwin-Term

### 2.3 Der topologische Isolator



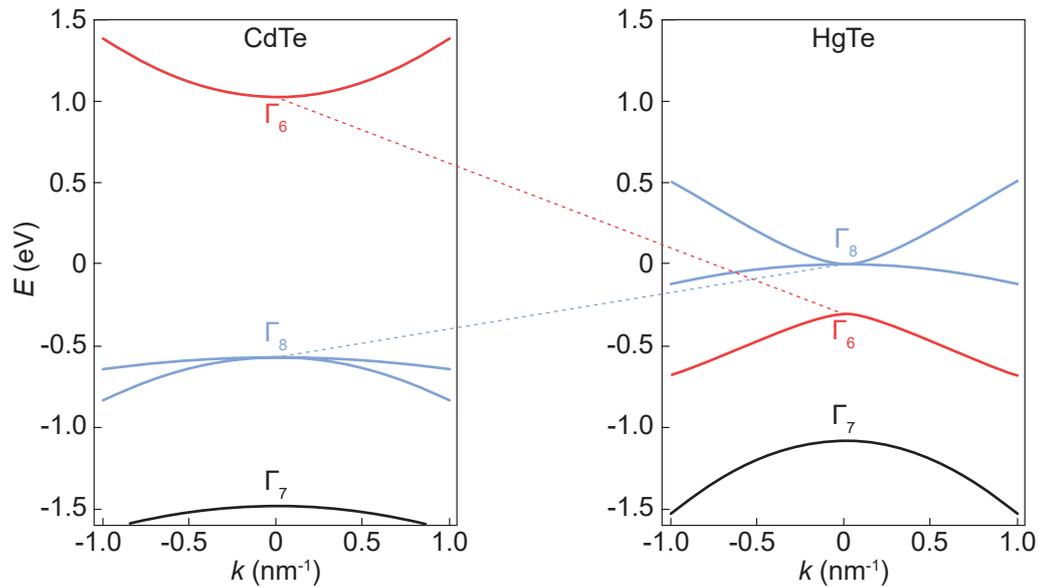
**Abbildung 2.17** Schematische Darstellung der Energieniveaus in CdTe (links) und HgTe (rechts) am  $\Gamma$ -Punkt.

Mit dem ursprünglichen Hamiltonoperator  $H_0$  ergibt sich für beide Verbindungen eine ähnlich große Energielücke zwischen den s-artigen Bändern aus dem Cadmium bzw. Quecksilber und den p-artigen Bändern aus dem Tellur. [64] Durch die hohen Massen der einzelnen Atome in diesen Verbindungen müssen zusätzlich die Korrekturterme  $H_D$ ,  $H_{mv}$  und  $H_{so}$  für die Bandstruktur berücksichtigt werden. Somit ergibt sich nach Einbeziehung der zusätzlichen Terme nur für HgTe eine Inversion der ursprünglichen Bandordnung. Nach [41, 63].

$H_D$  bestimmt dabei die zusätzliche Energie aus der Wechselwirkung von s-artigen Elektronen mit dem Atomkern, da dieser Korrekturterm für p-Elektronen in der Regel Null ist. Der sogenannte *mass-velocity* Term  $H_{mv}$  beschreibt die relativistische Korrektur des Operators der kinetischen Energie und sorgt typischerweise für eine größere Änderung der Energieniveaus von s-artigen Elektronen. Aufgrund des Unterschieds in atomarer Masse und Kernladungszahl zwischen Cd und Hg ergeben sich hierbei durch diesen Korrekturterm große Unterschiede für CdTe und HgTe. So ist dieser Term für HgTe bereits groß genug, dass das vom Quecksilber stammende s-artige Band fast auf das Energieniveau der p-artigen Zustände aus dem Tellur herabgesetzt wird. Im Gegensatz zu  $H_D$  und  $H_{mv}$ , welche hier einzelne Energieniveaus nur verschieben, kann der Term  $H_{so}$  für die Spin-Bahn-Wechselwirkung auch entartete Energieniveaus voneinander aufspalten. Dies ist hier allerdings nur für die p-artigen Bänder möglich, wodurch sich für beide Verbindungen eine Aufspaltung der p-artigen Zustände aus dem Tellur einstellt. [41, 64] Folglich ergibt sich aus dem Zusammenspiel aller Korrekturterme für HgTe eine Inversion<sup>36</sup> der Bandstruktur. Im Gegensatz dazu besitzt CdTe auch nach Anwendung der Korrekturen immer noch die „normale“ Bandanordnung von typischen Halbleitern mit dem s-artigen  $\Gamma_6$  Band oberhalb des p-artigen  $\Gamma_8$  Bandes. [43]

<sup>36</sup>Die Inversion der Bänder in HgTe tritt allerdings erst ab einer kritischen Schichtdicke von ca.  $d_c = 6.3 - 6.6$  nm auf. Ist die Dicke geringer, so besitzt das HgTe eine nicht invertierte Bandstruktur. [65–67]

Die gesamte daraus folgende Bandstruktur im Inneren von CdTe und HgTe in der Nähe des  $\Gamma$ -Punktes ist in Abbildung 2.18 dargestellt.



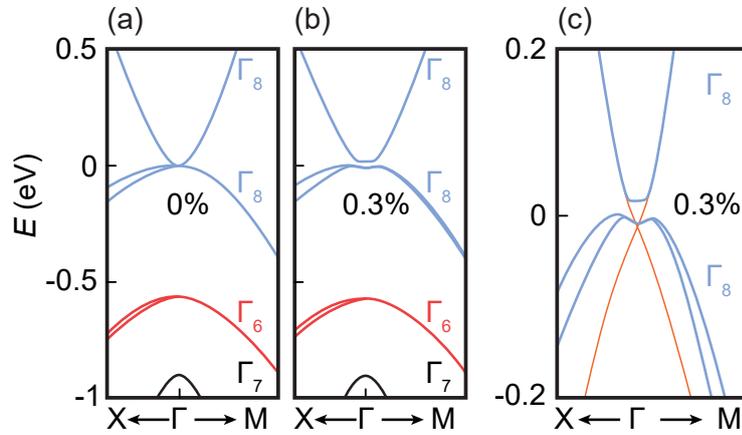
**Abbildung 2.18** Schematische Darstellung der Bandstruktur von CdTe und HgTe in der Nähe des  $\Gamma$ -Punktes. Durch die Inversion der Bänder liegt im Gegensatz zu CdTe in HgTe das p-artige  $\Gamma_8$  Band energetisch oberhalb des  $\Gamma_6$  Bandes. Bringt man ein System mit invertierter Bandordnung in Kontakt mit einem, welches die „normale“ Bandanordnung eines typischen Halbleiters oder Isolators aufweist, wie beispielsweise CdTe oder auch das Vakuum, so muss sich an der Grenzfläche die Bandlücke schließen und es bilden sich dort die topologisch geschützten Oberflächenzustände. [42] Dies ist in der Abbildung durch die rot und blau gestrichelte Linie dargestellt. Nach [43].

Dieses Bild lässt eine anschauliche Erklärung für die Entstehung der Oberflächenzustände zu. Verbindet man ein System mit invertierter Bandordnung mit einem trivialen Halbleiter oder Isolator, so müssen die einzelnen Bänder beider Materialien an der Grenzfläche ineinander überführt werden. Da hierbei allerdings s- und p-artige Orbitale aus Symmetriegründen nicht ineinander umgewandelt werden können, müssen sich diese Bänder zwangsläufig an der Grenzfläche zu einem trivialen Halbleiter oder Isolator kreuzen. Die sich daraus ergebenden topologischen Oberflächenzustände schließen die Bandlücke an der Grenzfläche, indem sie die Bänder in CdTe mit denen in HgTe verbinden. Diese Oberflächenzustände sind in Abbildung 2.18 durch die gestrichelten Linien illustriert. [42, 68]

Durch die Inversion besitzt HgTe allerdings aufgrund der kubischen Symmetrie des Zinkblende-Gitters keine Bandlücke, wie in Abbildung 2.18 ersichtlich, und ist folglich ein Halbmetall. [4, 40–42, 69] Um nun im Magnetotransportexperiment nur die topologischen Oberflächenzustände untersuchen zu können, ohne dass dabei zusätzliche Zustände aus dem Inneren des HgTe auftreten, ist es nötig eine Bandlücke im System zu öffnen. Die Energielücke kann hierfür auf zwei verschiedene Arten entste-

### 2.3 Der topologische Isolator

hen. Die erste Möglichkeit eine Bandlücke zu öffnen ist es das HgTe räumlich in einem  $\text{Cd}_x\text{Hg}_{1-x}\text{Te}/\text{HgTe}/\text{Cd}_x\text{Hg}_{1-x}\text{Te}$ -Quantentopf auf zwei Dimensionen zu beschränken. Dabei ergibt sich nur für Quantentöpfe, die eine kritische HgTe-Schichtdicke<sup>36</sup> überschreiten, ein zweidimensionaler topologischer Isolator mit invertierter Bandstruktur. [41, 43, 65] Auf diese Art wurde 2007 in einem HgTe-Quantentopf auch der erste zweidimensionale topologische Isolator experimentell realisiert [66]. Die zweite Möglichkeit ist es die kubische Symmetrie des Kristalls zu brechen, um eine Bandlücke zu öffnen und so einen dreidimensionalen topologischen Isolator<sup>37</sup> zu formen. Dies geschieht, indem man eine HgTe-Schicht auf ein Substrat mit leicht unterschiedlicher Gitterkonstante aufwächst. So erhält man durch das Aufwachsen auf ein CdTe-Substrat eine Gitterverspannung von 0.3%. [4, 41, 69, 73] Daraus ergibt sich eine Energielücke zwischen den entarteten  $\Gamma_8$  Leichtloch- und Schwerlochbändern (siehe Abbildung 2.19). Die Größe dieser Energielücke direkt am  $\Gamma$ -Punkt bewegt sich dabei im Wertebereich von etwa 15 – 25 meV. [6, 69, 74]



**Abbildung 2.19** Bandstruktur im Inneren von HgTe bei verschiedenen Gitterverspannungen.

(a) Ohne Gitterverspannung (0%) sind das Valenz- und Leitungsband am  $\Gamma$ -Punkt entartet. (b) Besitzt die Schicht eine Gitterverspannung (hier 0.3%), so wird die Entartung der p-artigen  $\Gamma_8$ -Bänder aufgehoben und das System besitzt eine Bandlücke. (c) Innerhalb der Bandlücke finden sich ausschließlich die topologischen Oberflächenzustände (orange). Der Dirac-Punkt dieser Oberflächenzustände sitzt dabei unterhalb der Valenzbandkante und ist somit in Transportexperimenten nicht direkt zugänglich. Nach [69].

Da eine Gitterverspannung mit zunehmender Schichtdicke relaxiert, lassen sich völlig verspannte Schichten für eine Verspannung von 0.3% nur bis hin zu einer kritischen Schichtdicke von ca. 200 nm realisieren. [61]

<sup>37</sup>Das System geht dabei ab einer HgTe-Schichtdicke von ca. 20 nm von einem zweidimensionalen in ein dreidimensionales Verhalten über [70, 71]. Um allerdings ein Überlappen der Wellenfunktionen von oberer und unterer Oberfläche des dreidimensionalen topologischen Isolators zu vermeiden, sollte die Schichtdicke nicht kleiner als 50 nm sein [72].

Wie in Abbildung 2.19(c) erkennbar, sind die topologischen Oberflächenzustände über die gesamte Bandstruktur des verspannten HgTe hinweg vorhanden. Im Gegensatz zu den spinaufgespaltenen linearen Oberflächenzuständen besitzen die Zustände aus dem Inneren des HgTe eine gewöhnliche parabolische Energiedispersion mit spinentarteten Zuständen. Entsprechend können in diesem System je nach Position der Fermi-Energie neben den Dirac-artigen Oberflächenzuständen zusätzlich Elektronen oder Löcher aus dem Inneren des HgTe vorhanden sein. [72, 75]

# 3

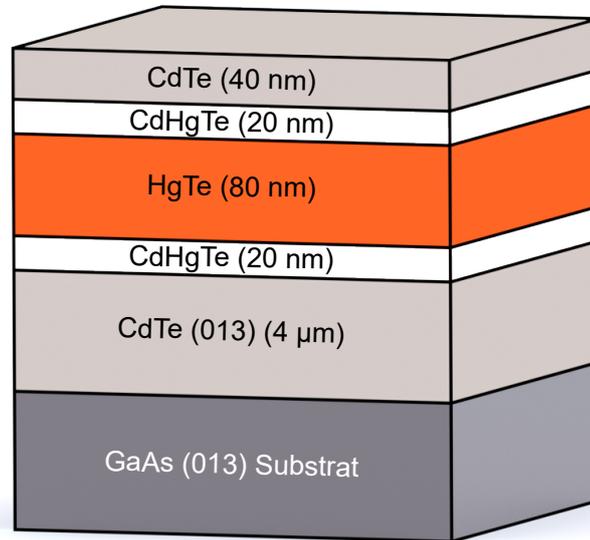
## Experimentelle Realisierung und Messtechnik

Da in dieser Arbeit die Effekte eines Antidot-Übergitters in einem dreidimensionalen topologischen Isolator untersucht werden, soll im Nachfolgenden das grundsätzliche Vorgehen für die experimentelle Realisierung einer hierfür geeigneten Probe vorgestellt werden. Dazu wird zunächst auf das verwendete Materialsystem, das Probendesign und die einzelnen Prozessschritte zur Fertigung einer Probe eingegangen. Anschließend wird der Tieftemperaturmessplatz für die Erzeugung der nötigen Temperaturen und Magnetfelder vorgestellt und abschließend die verwendete Messtechnik inklusive des Messaufbaus beschrieben.

### 3.1 Verwendetes Materialsystem

Der in dieser Arbeit verwendete HgTe-basierte dreidimensionale topologische Isolator ist von einem Wafer mit der Nummer 140826, welcher im A. V. Rzhanov Institut für Halbleiterphysik in Novosibirsk (Russland) gewachsen wurde. Als Substrat dient GaAs mit einer Kristallorientierung von (013), auf welches mittels Molekularstrahlepitaxie eine 4  $\mu\text{m}$  dicke (013) CdTe-Pufferschicht aufgebracht wurde. Durch die Dicke dieser Schicht wird das CdTe vollständig relaxiert, besitzt also oben die Gitterkonstante eines CdTe-Volumenmaterials und kann folglich für das darauffolgende Wachstum als virtuelles Substrat verwendet werden. Um die Defektdichte aufgrund der Gitterfehlanpassung zwischen CdTe und HgTe zu minimieren, werden die beiden Schichten durch eine 20 nm dicke  $\text{Cd}_{0.7}\text{Hg}_{0.3}\text{Te}$ -Pufferschicht voneinander getrennt. Dadurch wird sowohl die Beweglichkeit in der nachfolgenden 80 nm dicken HgTe-Schicht auf etwa  $40 \text{ m}^2 \text{ V}^{-1}\text{s}^{-1}$  erhöht als auch die Defektkonzentration im Inneren dieser reduziert. [6] Diese Erhöhung der Beweglichkeit und insbesondere die daraus resultierende hohe mittlere freie Weglänge (siehe Gleichung 2.15) sind gute Voraussetzungen für die Beobachtung ballistischer Effekte in einem starken Antidot-Potential. Für die Dicke der HgTe-Schicht wurden dabei 80 nm gewählt, da bei dieser Schichtdicke, wie in Abschnitt 2.3.6 ersichtlich, eine vollständige Verspannung gewährleistet ist und sich folglich eine Bandlücke im HgTe öffnet. Zudem vermeidet man ab einer Dicke von 50 nm eine Überlagerung der Wellenfunktionen

von oberen und unteren Oberflächenzuständen des dreidimensionalen topologischen Isolators. [72] Oberhalb des HgTe befinden sich eine 20 nm dicke  $\text{Cd}_{0.7}\text{Hg}_{0.3}\text{Te}$  und eine 40 nm dicke CdTe Deckschicht. Der schematische und aus illustrativen Gründen nicht maßstabgetreue Schichtaufbau des Wafers ist in Abbildung 3.1 dargestellt. Eine ausführlichere Beschreibung des verwendeten Wafers findet sich in [72, 75].



**Abbildung 3.1** Nicht maßstabgetreuer Querschnitt des verwendeten Wafers. Der Wafer besteht aus einer 80 nm dicken HgTe-Schicht zwischen zwei  $\text{Cd}_{0.7}\text{Hg}_{0.3}\text{Te}$ -Pufferschichten und einer CdTe-Deckschicht. Das darunterliegende virtuelle (013) CdTe-Substrat wurde dabei auf einem (013) GaAs-Substrat gewachsen.

Aufgrund der geringen Wachstumstemperaturen des epitaktisch gewachsenen HgTe von 180 °C, sollte während der Probenpräparation bei einzelnen Prozessschritten eine maximale Temperatur von 100 °C nicht überschritten werden. Nutzt man höhere Temperaturen, so kann dies zu einer Verschlechterung der Probenqualität führen, da Interdiffusionseffekte von einzelnen Elementen innerhalb der Heterostruktur auftreten. [76] Aus diesem Grund wurden im Rahmen der Arbeit alle Fabrikationsprozesse auf eine Temperatur von maximal 80 °C limitiert.

Bei der Probenherstellung muss neben der Temperatursensibilität der Heterostruktur auch auf die Empfindlichkeit der Oberfläche des Wafers gegenüber mechanischen Belastungen geachtet werden. [71, 77]

## 3.2 Probenfertigung

Nachfolgend soll erläutert werden, wie aus einem blanken ca.  $4 \times 3.5$  mm großen Probenstück des oben beschriebenen Materialsystems eine zur Untersuchung von Übergitter-Effekten geeignete Probe hergestellt wird. Die meisten Arbeitsschritte hierfür wurden in einem Reinraum der Klasse 10000 bei konstanter Luftfeuchtigkeit und Temperatur durchgeführt. Die Ausführungen sollen dabei einen kurzen Überblick liefern und beruhen auf allgemeinen Erkenntnissen und Erfahrungswerten der Halbleiter-Prozesstechnik. Ein umfassenderer Einblick in diese Prozesstechniken findet sich beispielsweise in [78–80]. Eine detailliertere Rezeptliste mit den verwendeten Parametern für einzelne Prozessschritte findet sich in Anhang A.

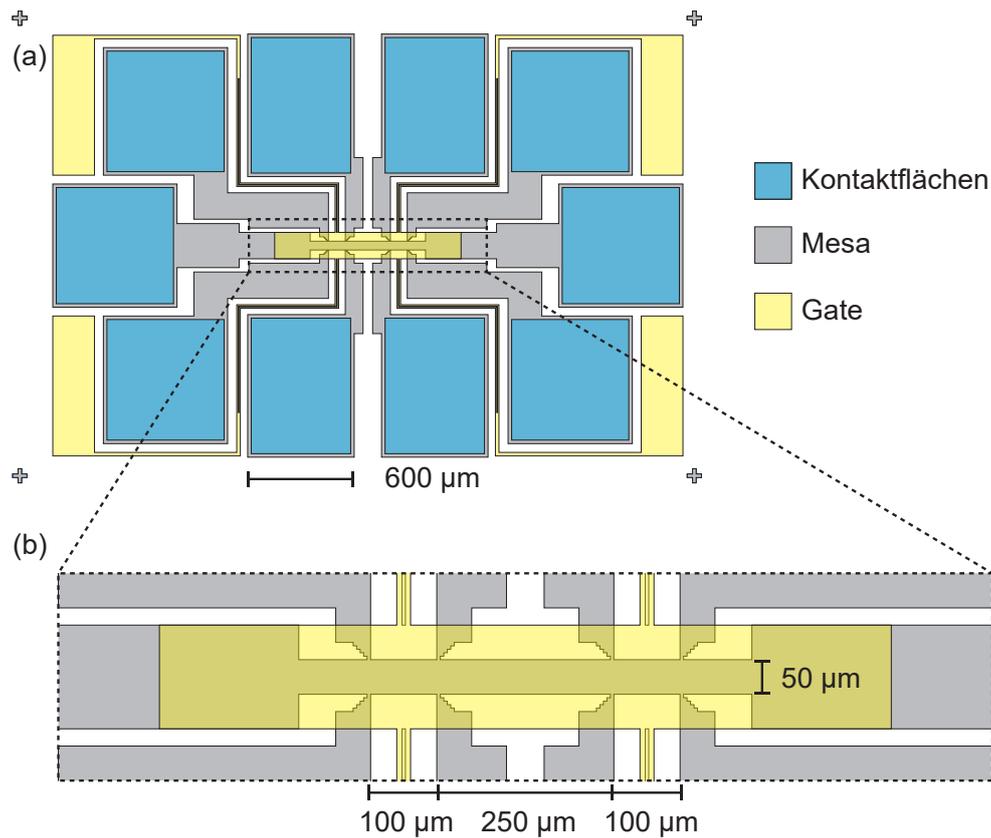
### 3.2.1 Probendesign

Um im Experiment den Längs- und Hall-Widerstand einer Probe zu messen, werden hier, wie in Abschnitt 2.1.1 erläutert, definierte Strompfade mit Spannungsabgriffen benötigt. Dies geschieht, indem eine sogenannte Mesa auf der Probe definiert wird, welche die Form der stromleitenden Schicht auf der Probe vorgibt. Das Design der verwendeten Mesa orientiert sich dabei an der einer typischen Hall-Bar und ist in Abbildung 3.2 dargestellt. Dieses unterscheidet sich von der bereits in Abbildung 2.2 gezeigten Hall-Bar im Wesentlichen durch zusätzliche Spannungsabgriffe, welche es erlauben sowohl die Längs- als auch die Hall-Spannung für einzelne Segmente innerhalb der Hall-Bar separat messen zu können. Dadurch ist es beispielsweise möglich in einer einzelnen Hall-Bar den Magnetotransport von unterschiedlich strukturierten Segmenten direkt miteinander vergleichen zu können. Um dabei in jedem der drei Segmente im Experiment die Ladungsträgerdichte verändern zu können, befindet sich oberhalb der Hall-Bar ein, durch einen Isolator von der Mesa elektrisch getrenntes, Topgate.

Ein auffälliges Merkmal des Mesadesigns sind die sehr großen Kontaktfelder. Diese sind im Layout zwingend erforderlich, da nur verhältnismäßig große Kontaktflächen eine Kontaktierung mit der Hand erlauben. Wie dies genau vonstatten geht wird in einem späteren Arbeitsschritt (siehe Abschnitt 3.2.7) genauer beschrieben.

Neben der in Abbildung 3.2(b) dargestellten Hall-Bar wurden noch weitere, in der Abbildung 3.3 dargestellte, Hall-Bar-Layouts verwendet. Jedes dieser Layouts besitzt dabei eine Hall-Bar-Breite von  $50 \mu\text{m}$  und unterscheidet sich im Wesentlichen durch die Position und Anzahl der Spannungsabgriffe. So besitzen alle Designs aus Abbildung 3.3 jeweils mehrere Hall-Bar-Segmente mit einem gleich großen Abstand zwischen den Spannungsabgriffen von  $100 \mu\text{m}$ . Dies erlaubt einen direkten Vergleich von mehreren Segmenten mit gleich großer Fläche.

Wie in Abbildung 3.3(a) dargestellt, lässt sich so ein mit Antidots strukturiertes Segment direkt mit einem unstrukturierten Referenz-Segment vergleichen. Damit im Experiment zusätzlich die Möglichkeit besteht, mittels Kapazitätsmessungen die Ladungsträgerdichte an der Oberseite des dreidimensionalen topologischen Isolators

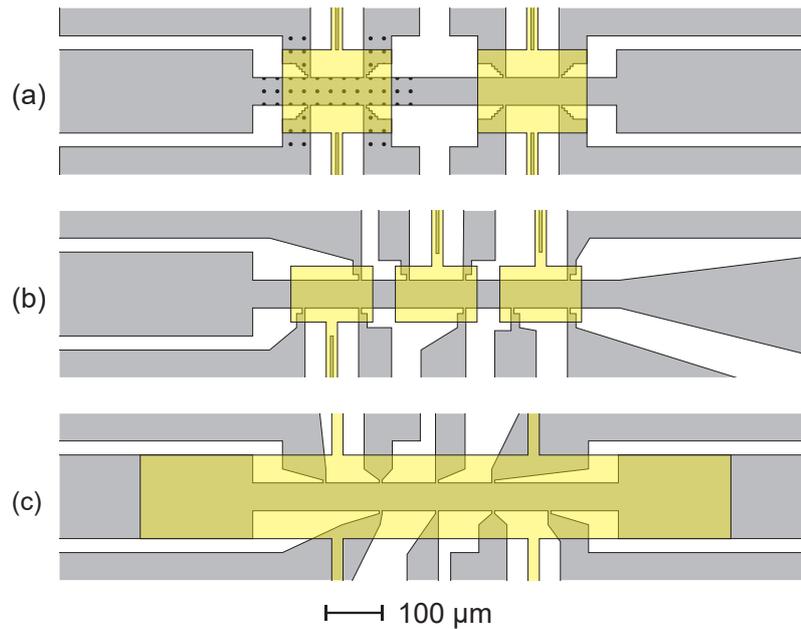


**Abbildung 3.2** Design einer verwendeten Mesa mit Hall-Bar-Geometrie.

(a) Die Mesa (grau) besitzt sehr große Kontaktflächen (blau) für eine spätere Kontaktierung und ein globales Topgate (gelb) über die gesamte Hall-Bar. (b) Vergrößerte Ansicht der für eine Messung relevanten Hall-Bar innerhalb der Mesa. Die Hall-Bar besitzt eine Breite von 50 µm und seitliche Spannungsabgriffe, die jeweils direkt an der Hall-Bar eine Breite von 5 µm besitzen. Die vielen Spannungsabgriffe definieren in diesem Layout Hall-Bar-Segmente mit 100 µm, 250 µm und 100 µm.

von den einzelnen Bereichen getrennt voneinander ermitteln zu können, besitzen einige Layouts separate Topgate-Felder, die sich jeweils nur auf ein Hall-Bar-Segment beschränken.

Auf welche Art eine derartige Mesa und die Nanostrukturierung der Antidots experimentell realisiert werden kann, wird im Folgenden beschrieben.



**Abbildung 3.3** Weitere verwendete Hall-Bar-Layouts.

Wie bereits zuvor besitzt auch hier jede Hall-Bar eine Breite von  $50\ \mu\text{m}$ . Die einzelnen Layouts unterscheiden sich durch die Anzahl an  $100\ \mu\text{m}$  langen Segmenten und dem Design der Topgates. (a) Hall-Bar-Layout aus Abbildung 3.2 mit strukturiertem Antidot-Segment und einem unstrukturierten Referenz-Segment. Jeder dieser beiden Bereiche besitzt dabei ein individuelles Topgate. (b) Layout mit drei Segmenten und separierten Topgates. (c) Design mit vier gleich großen Hall-Bar-Bereichen und globalem Topgate.

### 3.2.2 Lithographieverfahren

Will man eine Struktur auf ein Probenstück transferieren nutzt man typischerweise die Technik der Lithographie (siehe [78, 79]), welche auch in dieser Arbeit ihre Anwendung findet. Dabei unterscheidet man zwischen der optischen und der Elektronenstrahl-Lithographie. Beide Verfahren beruhen auf einem ähnlichen Prinzip und unterscheiden sich vor allem durch die Art der Strahlung (UV-Strahlung bzw. Elektronenstrahlung). Jedes Verfahren besitzt dabei seine eigenen Vor- und Nachteile.

So bietet die optische Lithographie den Vorteil, dass weitreichende Flächen der Probe gleichzeitig durch eine photolithographische Maske belichtet werden können, was eine beträchtliche Zeitersparnis im Vergleich zur sequenziellen Belichtung durch einen Elektronenstrahl mit sich bringt. Allerdings sind die erreichbaren Strukturgrößen durch die optische Lithographie aufgrund von Beugungseffekten an dieser Maske auf die Größenordnung der Wellenlänge des verwendeten UV-Lichts limitiert. Möchte man kleinere Strukturen realisieren, nutzt man typischerweise die Elektronenstrahl-Lithographie. Wegen der sehr viel kleineren Wellenlänge der Elektronen ist die Auflösung hierbei durch andere Effekte wie der Streuung von Elektronen im Lack beschränkt. So lassen sich mit dieser Technik Strukturen in der Größenordnung von ca. 10 nm realisieren. [78] Neben der kleineren realisierbaren Strukturgröße bietet die Elektronenstrahl-Lithographie noch den Vorteil einer hohen Flexibilität bei der Strukturierung. So kann der computergesteuerte Elektronenstrahl direkt einzelne Teilbereiche der Probe belichten, ohne dass, wie in der optischen Lithographie üblich, für jedes neue Design eine weitere photolithographische Maske für die Belichtung angefertigt werden muss.

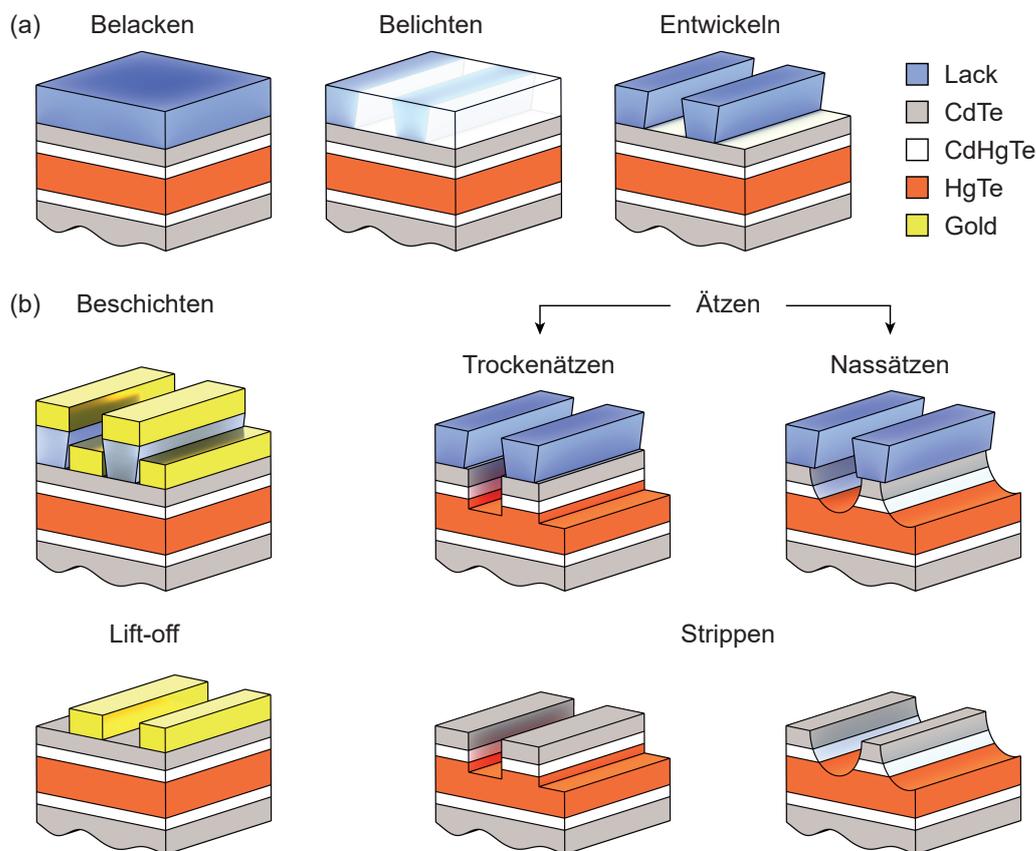
Aus diesen Gründen wird in dieser Arbeit die optische Lithographie für große gleichbleibende Strukturen (Mesa, Kontakflächen und das Gate) verwendet, wohingegen die Elektronenstrahl-Lithographie für die variierende Nanostrukturierung (Antidots) verwendet wird. Das generelle Prinzip für die Strukturierung durch einen Lithographie-Prozess ist allerdings für beide Lithographie-Arten ähnlich und wird im Folgenden kurz zusammengefasst.

Grundsätzlich wird hierfür zunächst mit einem Rotationsbeschichter (Spincoater) ein optischer Photolack oder ein elektronenstrahlempfindlicher Lack gleichmäßig auf die Probe aufgebracht und auf einer 80 °C warmen Heizplatte getrocknet. Belichtet man diesen Lack, so dient bei der optischen Lithographie eine Strukturvorlage (photolithographische Maske), die in direktem Kontakt mit dem Lack ist, dazu, dass nur bestimmte Bereiche des Lackes mit UV-Licht bestrahlt werden können und der Lack unter den Schattenbereichen der Maske unbelichtet bleibt. Dieses Verfahren wird auch als Kontaktbelichtung bezeichnet. Im Gegensatz dazu ist für die Elektronenstrahl-Lithographie keine optische Maske nötig, da der Elektronenstrahl nur bestimmte Bereiche des Lackes belichtet. Die Belichtung sorgt nun im Lack dafür, dass sich dessen Löslichkeit in einem hierzu geeigneten Entwickler ändert. Dabei lassen sich zwei Lack-Arten voneinander unterscheiden. So werden bei einem sogenannten Negativlack nur die unbelichteten Stellen vom Entwickler gelöst, wo-

### 3.2 Probenfertigung

hingegen bei einem Positivlack die belichteten Bereiche löslich sind. Dieser ganze Lithographie-Prozess ist in Abbildung 3.4(a) für einen Positivlack schematisch dargestellt. Da in dieser Arbeit ausschließlich ein Positivlack verwendet wurde, ist im Folgenden immer implizit ein Positivlack gemeint.

Die aus dem lithographischen Prozess entstandene Lackstruktur ist allerdings in den meisten Fällen, wie auch in dieser Arbeit, nicht das gewünschte Endergebnis eines Strukturierungsprozesses. So fungiert die Lackmaske hier nur als Zwischenschritt für die tatsächliche Strukturierung der Probe. Denn der eigentliche Strukturübertrag auf die Probe geschieht entweder durch Materialablagerung (Beschichten) oder Materialabtrag (Ätzen), wie es in Abbildung 3.4(b) dargestellt ist.



**Abbildung 3.4** Lithographieprozess und Strukturübertragung.

In der Illustration sind für die Probe jeweils nur die oberen Schichten des Wafers aus Abbildung 3.1 dargestellt. (a) Grundprinzip des Lithographie-Prozesses. (Links) Belacken der Probe mit Positivlack. (Mitte) Belichtung des Lackes an bestimmten Bereichen. (Rechts) Durch die Belichtung ändert sich die Löslichkeit des Lackes, wodurch durch einen abschließenden Entwicklungsschritt die bestrahlten Bereiche entfernt werden. (b) Überblick über einige Strukturierungsprozesse. Der Strukturübertrag geschieht dabei je nach Verwendungszweck durch einen Beschichtungsschritt (Kontaktfelder, Gate) oder einen Ätzschritt (Mesa, Kontaktpads, Antidots).

Im ersten Fall nutzt man die Lithographie dafür, eine Metallisierung auf bestimmte Probenbereiche aufzubringen. Dazu wird die entwickelte Probe mit verdampftem Material (hier Gold) beschichtet, welches sich sowohl auf der Lackoberseite als auch an den durch das Entwickeln freigelegten Stellen der Probe anlagert. Hierbei ist es von Vorteil, wenn das Lackprofil durch das Lithographieverfahren bereits einen Unterschnitt (Undercut) aufweist (siehe Abbildung 3.4(a)). Durch den Unterschnitt und ein gerichtetes Aufdampfverfahren wird erreicht, dass kein Material an den Lackflanken angelagert wird. Dies gewährleistet, dass es keine Verbindung des verdampften Materials zwischen zwei, durch eine Lackschicht voneinander getrennten, beschichteten Bereichen gibt. Somit kann im Anschluss durch die sogenannte *Lift-off-Technik* der beschichtete Lack mit einem Lösungsmittel (Aceton) entfernt werden, wodurch die Metallisierung nur noch an den gewünschten Stellen zurück bleibt.

Für den Strukturübertrag durch Ätzen wird hingegen ausgenutzt, dass der Lack widerstandsfähig gegenüber dem abtragenden Prozess ist, wodurch die mit Lack bedeckten Bereiche vor dem Ätzprozess geschützt sind. Der anschließende Materialabtrag lässt sich durch verschiedene Ätzverfahren verwirklichen. Diese lassen sich in zwei Klassen einteilen, die sogenannten Trocken- und Nassätzverfahren. Beide Verfahren unterscheiden sich dabei durch die Art des Materialabtrags. So geschieht der Materialabtrag im Fall des Trockenätzens durch eine Materialübertragung von der Oberfläche in die Gasphase. Dabei wird das Material an der Oberfläche durch einen physikalischen Prozess oder eine chemische Umwandlung in Einzelteile zer schlagen, welche anschließend durch Desorption von der Oberfläche in die bewegliche Gasphase gelangen. Im Gegensatz dazu geschieht der Materialabtrag in einem Nassätzprozess durch die Wechselwirkung des flüssigen Ätzmediums mit dem Material. Hierbei werden die aus der Wechselwirkung entstandenen Reaktionsprodukte direkt in der Ätzlösung gelöst und durch diese abgetragen [80]. Das entstehende Ätzprofil an den ungeschützten Bereichen hängt dabei vom verwendeten Ätzprozess ab. So erhält man durch einen Trockenätzprozess (wie dem Ionenstrahlätzen) ein anisotropes Ätzprofil mit sehr steilen Ätzflanken, wohingegen nasschemische Ätzprozesse meist isotrop verlaufen und entsprechend in alle Raumdimensionen die gleiche Ätzrate aufweisen. Dadurch führt ein nasschemischer Ätzprozess zwangsläufig immer zu zusätzlichen Unterätzungen unterhalb der mit Lack geschützten Bereiche. Hat man die gewünschte Ätztiefe erreicht, ist der Strukturierungsprozess beendet und der verbleibende Lack kann abschließend durch ein geeignetes Lösungsmittel (Aceton) von der Probenoberfläche entfernt werden. Dieser letzte Schritt wird auch als *Strippen* bezeichnet.

### 3.2.3 Ätzverfahren

Wie bereits im vorherigen Abschnitt angesprochen, existieren für den Strukturübertrag sowohl Trocken- als auch Nassätzverfahren. Dabei sind aus rein geometrischer Sicht Trockenätzverfahren, wie das rein physikalische Ionenätzen (IBE<sup>1</sup>) oder das physikalisch-chemische reaktive Ionenätzen (RIE<sup>2</sup>), für Nanostrukturen prädestiniert, da diese je nach physikalischem Anteil ein sehr anisotropes Ätzprofil aufweisen und eine hohe Kontrollierbarkeit der Ätzrate mit sich bringen. Allerdings besitzen Trockenätzverfahren nicht nur Vorteile. So führen Trockenätzverfahren neben einer rauen Oberfläche unter anderem zur Bildung von Defekten und Polymerablagerungen an der Oberfläche [81, 82]. Wegen der hohen Kontrollierbarkeit des Trockenätzprozesses wurde dieser dennoch für die ersten Experimente<sup>3</sup> von S. Weishäupl und J. Ziegler an verspanntem HgTe für die Strukturierung verwendet [77, 83]. Die negativen Effekte des Trockenätzprozesses zeigten sich dabei vor allem bei Nanostrukturen, wie Nanodrähten [77], durch eine deutlich verringerte Beweglichkeit [71].

Um eine Verschlechterung der Probenqualität durch Trockenätzverfahren zu umgehen, wurde zusammen mit J. Ziegler (siehe [71]) ein reproduzierbarer Nassätzprozess mit guter Kontrollierbarkeit für Nanostrukturen entwickelt. Die ermittelten Parameter für den Ätzprozess wurden durch eine später durchgeführte umfassendere Untersuchung durch M. Pleyer [84] als bestmögliche Variablen verifiziert.

Die Ausgangslösung für den Ätzprozess entstammt dabei auf einer für HgTe-Heterostrukturen verwendeten Lösung von S. Weishäupl [77] auf Basis von Brom (Br<sub>2</sub>) und Ethylenglycol (C<sub>2</sub>H<sub>6</sub>O<sub>2</sub>). Da diese Lösung allerdings zu hohe Ätzraten, eine schlechte Reproduzierbarkeit und eine inhomogene Ätzrate über die gesamte Probe hinweg aufwies, war dieses Rezept nicht ideal für eine kontrollierte Herstellung von Nanostrukturen [71, 77].

Aus diesem Grund wurde zunächst für eine bessere Kontrolle der Ätztiefe die Bromkonzentration in der Lösung stark verringert. Die Zugabe von Wasser (H<sub>2</sub>O) zur Ätzlösung führte zudem sowohl zu einer Verringerung der Rauigkeit geätzter Flächen als auch zu glatten Ätzflanken ohne sichtbare Unterätzungen einzelner Schichten.

Da neben der eigentlichen Ätzlösung auch die Temperatur eine entscheidende Rolle für die Geschwindigkeit von chemischen Prozessen besitzt [80], ist es sinnvoll für die Reproduzierbarkeit eines Ätzprozesses die Temperatur für jeden Prozess auf einem gleichbleibenden konstanten Wert zu halten. Deshalb wurde die Temperatur der Lösung für den Ätzprozess konstant auf 0 °C gehalten. Dies wurde zu Beginn der Arbeit durch ein Becherglas in einem Eisbad realisiert und später durch einen praktikableren Aufbau mit einem doppelwandigen Becherglas, welches durch eine Kühlflüssigkeit und einen Umlaufkühler<sup>4</sup> auf eine zuvor definierte Temperatur gere-

---

<sup>1</sup>Ion Beam Etching

<sup>2</sup>Reactive Ion Etching

<sup>3</sup>in dieser Arbeitsgruppe

<sup>4</sup>Der verwendete *Lauda MC250* besitzt laut Herstellerangaben einen Arbeitsbereich von -10 °C bis 40 °C und kann die eingestellte Temperatur auf eine Genauigkeit von ±0,5 °C konstant halten.

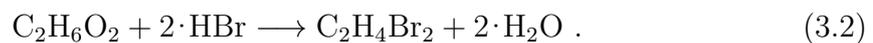
gelt werden kann. Bei einer Temperatur von 0 °C zeigten sich sowohl bei der Ätzrate als auch beim resultierenden Ätzprofil über einen Zeitraum von 30 Minuten nur relativ geringe Abweichungen, was gute Voraussetzungen für eine hohe Reproduzierbarkeit darstellt [84].

Um mögliche Temperaturgradienten innerhalb der Lösung zu vermeiden, wird die Lösung sowohl während des Abkühlprozesses als auch während des Ätzvorgangs kontinuierlich mit einer Rührfrequenz von 300 Umdrehungen pro Minute gerührt. Dies geschieht durch ein in der Lösung befindliches Magnetrührstäbchen, welches durch einen unterhalb des Becherglases befindlichen Magnetrührer angetrieben wird.

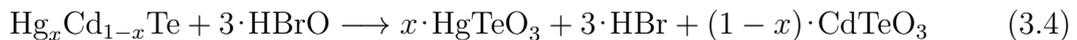
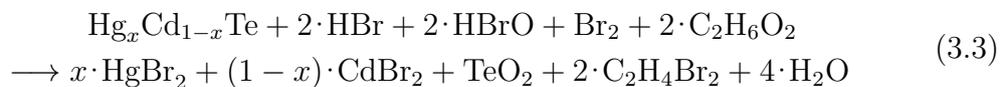
Da es sich bei Brom um einen flüchtigen Stoff handelt, werden die verwendeten 0.1 ml Brom erst kurz vor dem eigentlichen Ätzprozess zur temperierten Lösung aus 100 ml Ethylenglycol und 25 ml Wasser hinzugegeben. Dies soll mögliche Abweichungen der Brom Konzentration in der Lösung durch unterschiedliche Ausgangstemperaturen und Abkühlzeiten vermeiden.

Zudem wurde angenommen, dass während des Ätzprozesses ein gleichmäßiger Fluss der Ätzlösung über die gesamte Probenoberfläche hinweg die Homogenität der Ätzrate erhöhen sollte. Aus diesem Grund wurde die Probe während des Ätzprozesses mit einem speziell angefertigtem Klemmprobenhalter senkrecht zur Bewegung der Flüssigkeit ausgerichtet, sodass die Ätzlösung immer frontal auf die Oberfläche trifft. Dieser gesamte Aufbau des verwendeten nasschemischen Ätzprozesses ist schematisch in Abbildung 3.5 für die ermittelten optimalen Parameter dargestellt.

Wie der Ätzprozess der verwendeten Lösung im Detail vonstatten geht soll im Folgenden anhand von Reaktionsgleichungen verdeutlicht werden. So ergeben sich bereits zwischen den einzelnen Komponenten (Brom  $\text{Br}_2$ , Ethylenglycol  $\text{C}_2\text{H}_6\text{O}_2$  und Wasser  $\text{H}_2\text{O}$ ) innerhalb der Lösung die beiden Reaktionsgleichungen:



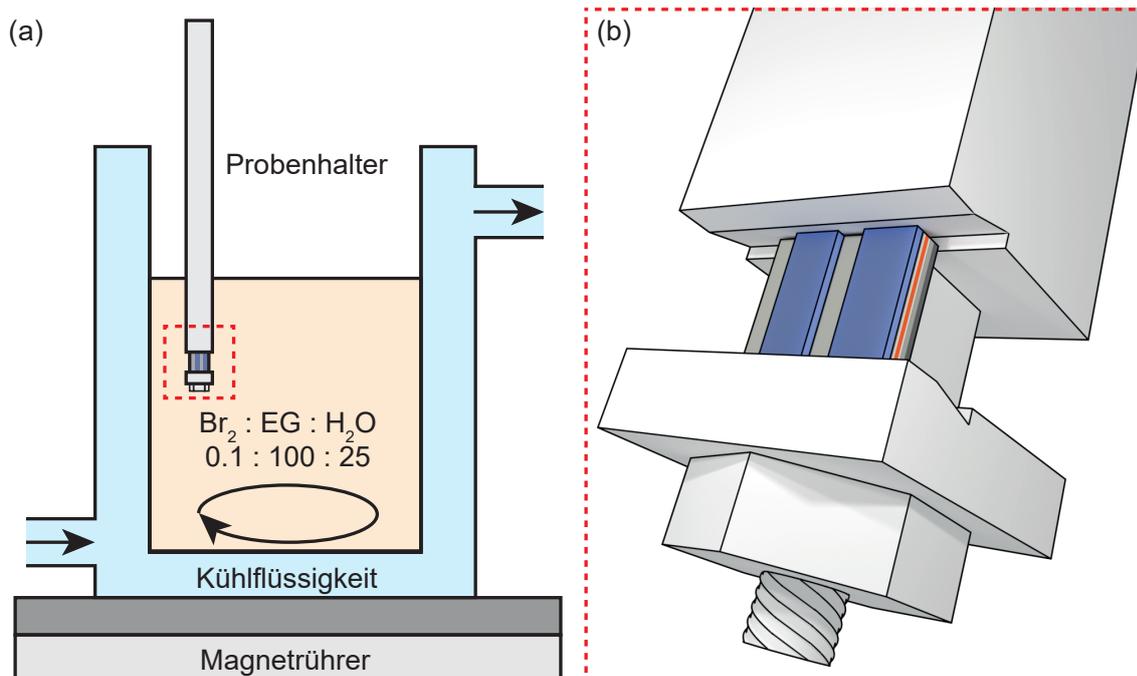
Hierbei beeinflusst das Ethylenglycol zum einen die Viskosität und kontrolliert zum anderen die Verfügbarkeit von freien Bromwasserstoffmolekülen HBr in der Lösung [81]. Auf welche Art diese Ätzlösung das vorhandene Materialsystem zersetzt, soll hier durch die zwei Reaktionsgleichungen



am Beispiel von  $\text{Hg}_x\text{Cd}_{1-x}\text{Te}$  mit  $x \in ]0,1[_{\mathbb{Q}}$  deutlich werden. Die dabei entstehenden Reaktionsprodukte werden letztendlich in HBr gelöst und von der Oberfläche abtransportiert [81].

Ätzprozesse mit dem beschriebenen Verfahren lassen nun sehr reproduzierbare Ergebnisse zu, besitzen aber auch einige Eigenheiten. So zeigt sowohl das Profil der

### 3.2 Probenfertigung



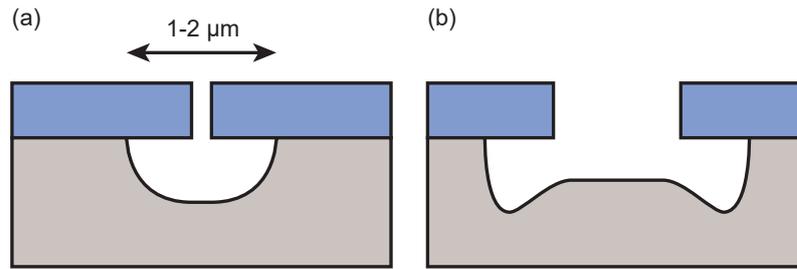
**Abbildung 3.5** Schematische Abbildung des verwendeten Aufbaus für den nasschemischen Ätzprozess.

(a) Die verwendete Lösung aus 0.1 ml Brom, 100 ml Ethylenglycol (EG) und 25 ml Wasser befindet sich in einem doppelwandigen Becherglas. Eine Kühlflüssigkeit strömt dabei über die Öffnungen des Becherglases durch einen Umlaufkühler, welcher die Kühlflüssigkeit und folglich auch die Lösung innerhalb des Becherglases auf 0 °C temperiert. Während des Ätzprozesses wird die Flüssigkeit durch ein Magnetrührstäbchen innerhalb der Lösung verrührt. Das Rührstäbchen wird hierbei durch den unterhalb des Becherglases stehenden Magnetprüher mit einer Rotationsfrequenz von 300 Umdrehungen pro Minute angetrieben. Für den eigentlichen Ätzprozess wird die zu ätzende Probe in einen speziell angefertigten Klemmprobenhalter gespannt und innerhalb der Lösung senkrecht zur Rotationsbewegung der Flüssigkeit ausgerichtet. (b) Die vergrößerte Ansicht des Probenhalters zeigt, wie der Klemmmechanismus eine mit Lack strukturierte Probe (siehe Abbildung 3.4(a)) befestigt.

geätzten Flächen als auch die Ätzrate eine gewisse Abhängigkeit von der Strukturgröße. Für Strukturgrößen unterhalb von 1-2 µm erhält man das für einen isotropen Ätzprozess erwartete Ätzprofil aus Abbildung 3.6(a). Sind die Strukturen allerdings größer, so bilden sich an den Randbereichen die in Abbildung 3.6(b) dargestellten Ätzgräben aus. Die Ätzgräben an den Rändern können dabei deutlich tiefer sein als die durchschnittliche Ätztiefe in der Mitte einer Struktur. Die tiefsten Stellen einer quadratischen Struktur finden sich hierbei jeweils an den vier Eckpunkten. Untersuchungen<sup>5</sup> von M. Pleyer [84] zeigten, dass der Unterschied der Ätztiefe zwischen tiefster Stelle und der Mitte mit steigender Strukturgröße zunimmt.

Neben der Form des Ätzprofils zeigte auch die maximale Ätzrate an der tiefsten

<sup>5</sup>an quadratischen Strukturen mit verschiedenen Seitenlängen



**Abbildung 3.6** Schematische Darstellung der Abhängigkeit des Ätzprofils von der Strukturgröße.

Wie in jedem nasschemischen Ätzprozess findet auch hier eine Unterätzung des Materials (grau) unterhalb der Lackmaske (blau) statt. (a) Sind die geätzten Strukturen kleiner als  $1\text{-}2\ \mu\text{m}$ , so ergibt sich das für einen isotropen Ätzprozess erwartete Ätzprofil. (b) Sind die Strukturabmessungen allerdings größer, formen sich an den Randbereichen tiefe Ätzgräben.

Stelle eine gewisse Abhängigkeit von der Strukturgröße. So ergab sich die größte Ätzrate bei quadratischen Strukturen mit einer Seitenlänge von  $1\ \mu\text{m}$ . Werden die Strukturen kleiner, nimmt auch die beobachtete Ätzrate ab. Für größere Strukturen zeigt sich zunächst eine Abnahme der maximalen Ätzrate, bis sich diese ab einer Seitenlänge von ca.  $3\ \mu\text{m}$  stabilisiert [84].

Zusammenfassend zeigt sich, dass die Verwendung von großen Strukturgrößen aufgrund der inhomogenen Ätzrate und der Ausbildung von Ätzgräben<sup>6</sup> für eine genaue Prozesskontrolle zur Erzeugung von Nanostrukturen ungeeignet sind. Für sehr große Strukturen wie einer Mesa ist allerdings weder eine homogene Ätzrate noch eine exakte Kenntnis der Ätzrate erforderlich. So muss hierbei nur die minimal beobachtete Ätztiefe an den Ätzgräben tief genug sein, um die leitenden Schichten zu durchtrennen. Auch spielen laterale Unterätzungen bei einer Größe der Strompfade von mehreren Mikrometern in der verwendeten Mesa keine bedeutende Rolle.

Für die genaue Prozesskontrolle und eine sehr gut reproduzierbare Fabrikation von Nanostrukturen, sollten allerdings Strukturen mit einer Strukturgröße unterhalb von  $1\text{-}2\ \mu\text{m}$  verwendet werden. Diese weisen eine gleichbleibende Ätzrate auf, wodurch sich sowohl die Ätztiefe als auch der Grad der Unterätzung sehr gut abschätzen lässt. Kleine Strukturen weisen jedoch eine geometrieabhängige Ätzrate auf, die sowohl von der Größe als auch von der Umgebung abhängt [80, 84]. Daher ist es sinnvoll die genaue Ätztiefe für eine gewünschte Struktur, wie einem Array aus Punkten, vor der eigentlichen Probenpräparation in einem Ätztest zu bestimmen. Die daraus ermittelte Ätzrate ist bei gleich bleibender Geometrie bei verschiedenen Ätzdurchläufen sehr gut reproduzierbar.

<sup>6</sup>Ätzgräben können bei großen Strukturen (wie einer Hall-Bar), je nach Neigung der Probe in der Ätzlösung, unterschiedliche Ätztiefen an gegenüberliegenden Ätzgräben aufweisen.

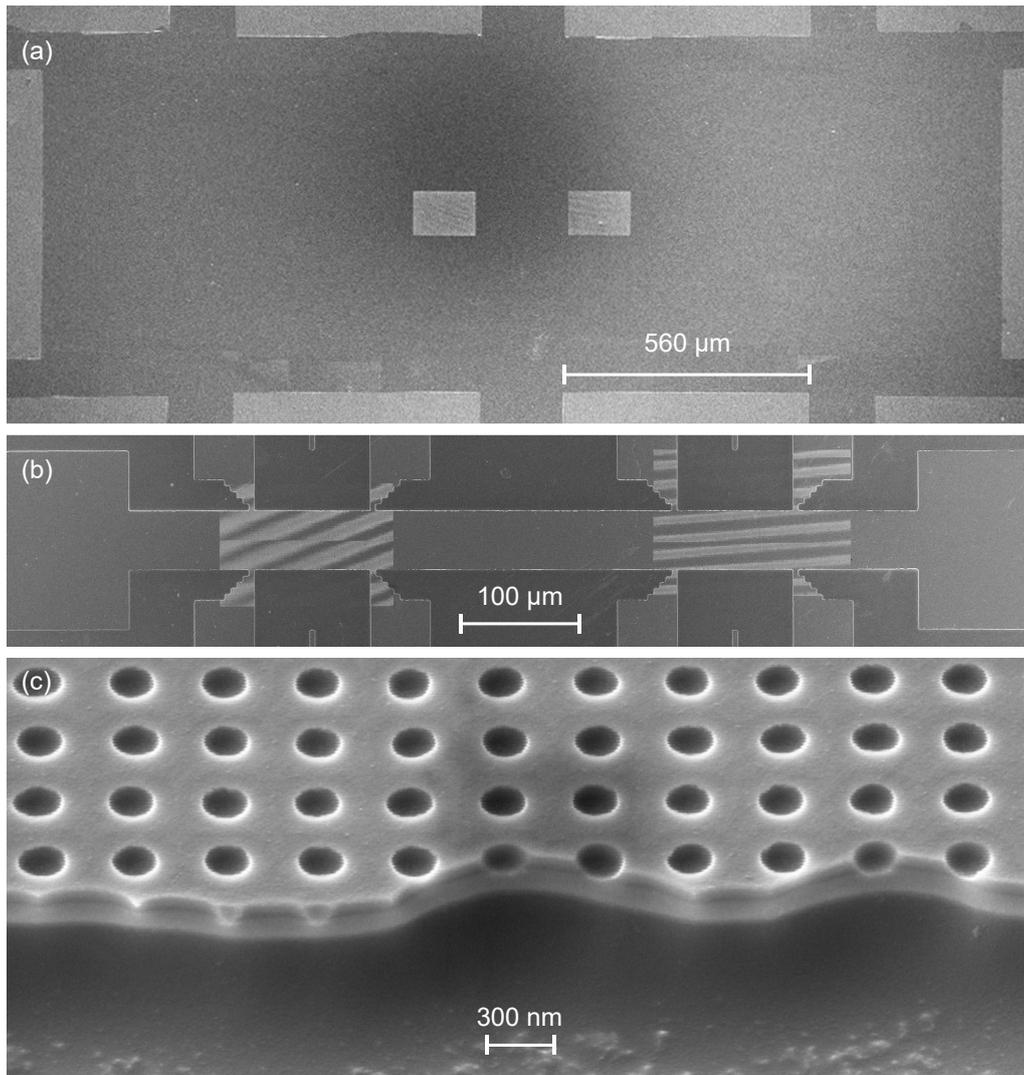
### 3.2.4 Herstellung des lateralen Übergitters

Wie in Abschnitt 3.2.1 angesprochen, werden in der Arbeit bestimmte Segmente einer Hall-Bar mit einem lateralen Antidot-Übergitter strukturiert. Diese Strukturierung erfolgt dabei mittels Elektronenstrahl-Lithographie. Hierzu wird der verwendete strahlungsempfindliche 950k4% PMMA<sup>7</sup>-Lack durch ein *Carl Zeiss Auriga* Rasterelektronenmikroskop (REM) mit einer Energie von 3kV oder 30kV an den gewünschten Bereichen belichtet. Um dabei nach dem Entwickeln ein möglichst homogenes Punktgitter aus Löchern im Lack mit gleichbleibendem Durchmesser zu erzeugen, sollte der Lack an den belichteten Stellen eine gleichbleibende Dicke aufweisen. Würde die Nanostrukturierung erst nach dem Ätzen der Mesa erfolgen, führt die Topographie der Probenoberfläche zwangsläufig zu Inhomogenitäten in der Lack-schicht. Dies ist vor allem an den Rändern der Mesa der Fall, wodurch die Löcher in diesen Bereichen einen anderen Durchmesser aufweisen würden. Somit ist eine Homogenität des Punktgitters auf der gesamten Hall-Bar nur dann gewährleistet, wenn die Nanostrukturierung vor der Erzeugung der Mesa erfolgt<sup>8</sup>. Dazu ist es von Vorteil einige Marker vor der Nanostrukturierung auf der Probe aufzubringen, da die geätzten Antidotfelder bei der optischen Lithographie unter dem optischen Mikroskop nur sehr schwer zu erkennen sind. Als Marker fungieren hierbei die in Abbildung 3.2(a) eingezeichneten Kontaktflächen. Diese werden mittels optischer Lithographie auf die unstrukturierte Probe aufgebracht und mit dem beschriebenen Ätzverfahren (Abschnitt 3.2.3) für 50 Sekunden geätzt. Dieser Prozess resultiert in einer Ätztiefe von ca. 50-70 nm, was in etwa der Dicke der beiden Deckschichten entspricht und entsprechend eine später durchgeführte Kontaktierung der HgTe-Schicht verbessern sollte. Diese Kontaktpads erlauben es nun sowohl das Antidot-Gitter als auch die später aufgebraachte Mesa korrekt zueinander positionieren zu können. Die geätzten Kontaktflächen und die daran ausgerichteten Antidot-Felder sind in Abbildung 3.7(a) dargestellt. Wie in Abbildung 3.7(b) ersichtlich, werden die Antidot-Felder dabei deutlich größer geschrieben, als für die einzelnen Bereiche auf der geätzten Hall-Bar nötig wäre. Dieses Vorgehen gewährleistet, dass die Strukturierung (trotz möglicher Ausrichtungsfehler bei der Elektronenstrahl-Lithographie oder vor allem bei der optischen Lithographie der Mesa) stets an den gewünschten Hall-Bar-Segmenten vorzufinden ist. Abbildung 3.7(c) illustriert die durch den beschriebenen Prozessablauf erzeugte hohe Homogenität des erzeugten Antidot-Gitters innerhalb des Messbereiches.

---

<sup>7</sup>Polymethylmethacrylat

<sup>8</sup>Der nasschemische Ätzprozess führt bei den geschriebenen Antidot-Arrays zudem zu marginal größeren und entsprechend auch tieferen Antidots an den Randbereichen eines Arrays. Im Inneren eines solchen Antidot-Feldes ergeben sich allerdings gleichbleibende Durchmesser und konstante Ätztiefen. Somit führt der beschriebene Prozessierungsablauf zudem dazu, dass nur Antidots mit einheitlichen Abmessungen Teil des Messbereiches sind.



**Abbildung 3.7** REM-Aufnahmen nach dem Ätzen einzelner Strukturen.

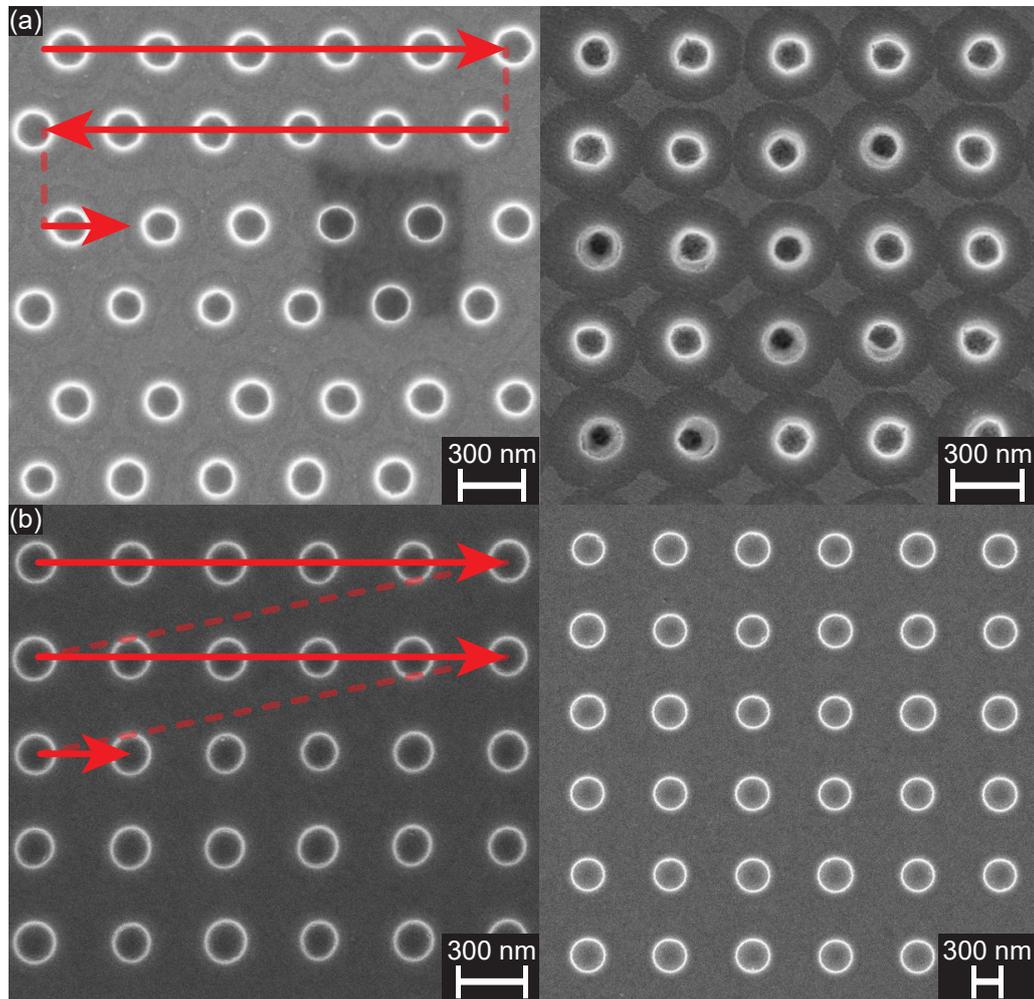
(a) Die an den Randbereichen der Abbildung sichtbaren Kontaktfelder werden für die korrekte Positionierung der beiden ca.  $140 \times 100 \mu\text{m}$  großen Antidot-Felder verwendet. (b) Vergrößerte Aufnahme nach dem Ätzen der Mesa. Die Kontaktfelder wurden hierbei dazu verwendet die Mesa korrekt auszurichten, damit die Antidot-Felder<sup>9</sup> an den gewünschten Positionen innerhalb der beiden Hall-Bar-Segmente zu finden sind. (c) REM-Aufnahme unter einem Neigungswinkel von  $50^\circ$ . Die seitliche Aufnahme zeigt eine vergrößerte Ansicht der Ätzflanke am Rand eines strukturierten Hall-Bar-Segments. Das dargestellte Antidot-Feld mit  $a = 400 \text{ nm}$  besitzt dabei eine sehr gute Homogenität bis hin zu den Randbereichen der Hall-Bar.

<sup>9</sup>Bei dem sichtbaren Muster in (b) innerhalb der Antidot-Felder handelt es sich um ein optisches Artefakt, das durch das periodische Antidot-Gitter und dem Abrastern des Elektronenmikroskops verursacht wird.

### 3.2 Probenfertigung

Für die Realisierung von Antidot-Gittern mit Hilfe der Elektronenstrahl-Lithographie bietet die verwendete Steuersoftware von Nanonic mehrere Möglichkeiten, um ein quadratisches Punktgitter zu erzeugen. So lässt sich ein solches Punktgitter beispielsweise durch das Schreiben einer Fläche realisieren. Dies liegt daran, dass ein Rasterelektronenmikroskop, wie der Name bereits vermuten lässt, die Oberfläche durch eine Punkt für Punkt Belichtung mit jeweils gleicher Punktbelichtungs-dosis mäanderförmig abrastert. Die Steuersoftware bietet dabei die Möglichkeit den Abstand bzw. die Periode  $a$  der einzelnen Punkte im quadratischen Gitter durch ein sogenanntes *Pixelspacing* einzustellen. Die Belichtungs-dosis eines einzelnen Punktes wird dabei indirekt durch die Flächendosis angegeben. Neben der Belichtung einer Fläche lässt sich ein derartiges Punktgitter allerdings auch durch ein Array aus einzelnen Punkten realisieren. Dabei wird jeder Punkt des Arrays mit der gleichen Punktdosis belichtet. Im Gegensatz zur Flächenbelichtung kann es dabei allerdings in der Software aufgrund der sehr großen Anzahl an Punkten zu Verzögerungen im Programm kommen. Die Belichtung durch ein Array bietet allerdings einige Vorteile. So lassen sich damit neben quadratischen Gittern auch andere Gitter, wie beispielsweise hexagonale Gitter, erzeugen. Zudem bietet die Software andere Optionen für das Abrastern eines Arrays als für Flächen. So lassen sich Flächen nur mäanderförmig abrastern wohingegen es bei Arrays neben dieser Option zudem die Möglichkeit gibt die Punkte immer von der gleichen Seite beginnend (in der Software als *uni-directional* bezeichnet) abzurastern. Hierbei stellte sich heraus, dass ein mäanderförmiges Abrastern immer zu einem Versatz aufeinander folgender Punktzeilen führt. Dieser Versatz scheint dabei, wie in Abbildung 3.8(a) dargestellt, je nach Größe des geschriebenen Punkt-Feldes verschiedenen stark ausgeprägt zu sein. Rastert man das Punkt-Array hingegen immer von der gleichen Seite beginnend ab, so lässt sich unabhängig von der Größe des Feldes kein Versatz beobachten. Dies ist in Abbildung 3.8(b) für zwei verschiedene Gitterperioden dargestellt. Folglich ist nur diese Methode geeignet, um ein exaktes Abbild des gewünschten Gitters zu realisieren.

Für die Realisierung des Lochgitters wird auch hier der in Abschnitt 3.2.3 beschriebene Ätzprozess verwendet. Details hierzu wie die Ätzzeit und weitere Prozessparameter finden sich in Anhang A.



**Abbildung 3.8** REM-Aufnahmen von quadratischen Punktgittern, welche durch die Steuerungssoftware mäanderförmig oder von der selben Seite beginnend abgerastert werden. (a) Beim mäanderförmigen Abrastern ergibt sich immer ein Versatz zweier aufeinanderfolgender Zeilen. Dies ist hier für ein Gitter mit einer Periode von  $a = 400$  nm dargestellt. Der Versatz ist im linken Bild eines  $800 \times 120 \mu\text{m}$  großen Arrays sehr stark ausgeprägt. Für das rechts dargestellte kleinere Feld von  $250 \times 120 \mu\text{m}$ , ergab sich hingegen ein kleinerer Versatz. (b) Für das gleichlaufende Abrastern eines Punktgitter ergibt sich hingegen unabhängig von der Gittergröße kein sichtbarer Versatz. Dies ist links für ein Gitter mit  $a = 400$  nm und rechts für ein Gitter mit  $a = 800$  nm dargestellt.

### 3.2.5 Strukturierung der Mesa

Für die Erzeugung definierter Strompfade wird die Probe in die Form einer, in Abschnitt 3.2.1 gezeigten, Mesa gebracht. Dies geschieht mittels optischer Lithographie. Dabei wird die Mesa mit Hilfe der geätzten Kontaktflächen korrekt an den geätzten Antidot-Feldern positioniert und anschließend die Bereiche außerhalb der Mesa geätzt. Damit der Strom dabei auch tatsächlich nur durch die Mesa fließt, muss das Material so tief geätzt werden, dass die leitende HgTe-Schicht an allen Mesakanten durchtrennt ist. Wie aus Abbildung 3.1 ersichtlich, muss somit überall um die Mesa herum eine Ätztiefe von mindestens 140 nm (40 nm CdTe + 20 nm CdHgTe + 80 nm HgTe) überschritten werden. Dies geschieht durch einen 8 Minuten langen Ätzprozess mit dem in Abschnitt 3.2.3 beschriebenen Verfahren. Hieraus ergeben sich an allen Mesakanten Ätztiefen von einigen 100 nm, wodurch die Mindestätztiefe überall zuverlässig überschritten wird. Ein auf diese Weise strukturiertes und geätztes Probenstück ist in Abbildung 3.9 dargestellt. In der vergrößerten Ansicht einer Ätzflanke sind dabei sowohl die Steilheit des Ätzprofils als auch einzelne Schichten innerhalb des verwendeten Wafers erkennbar. Dieser Umstand erlaubt es nur durch eine seitliche Betrachtung einer Probe sowohl das Ätzprofil eines Antidots sichtbar zu machen als auch die Eindringtiefe eines Antidots in die HgTe-Schicht zu visualisieren.

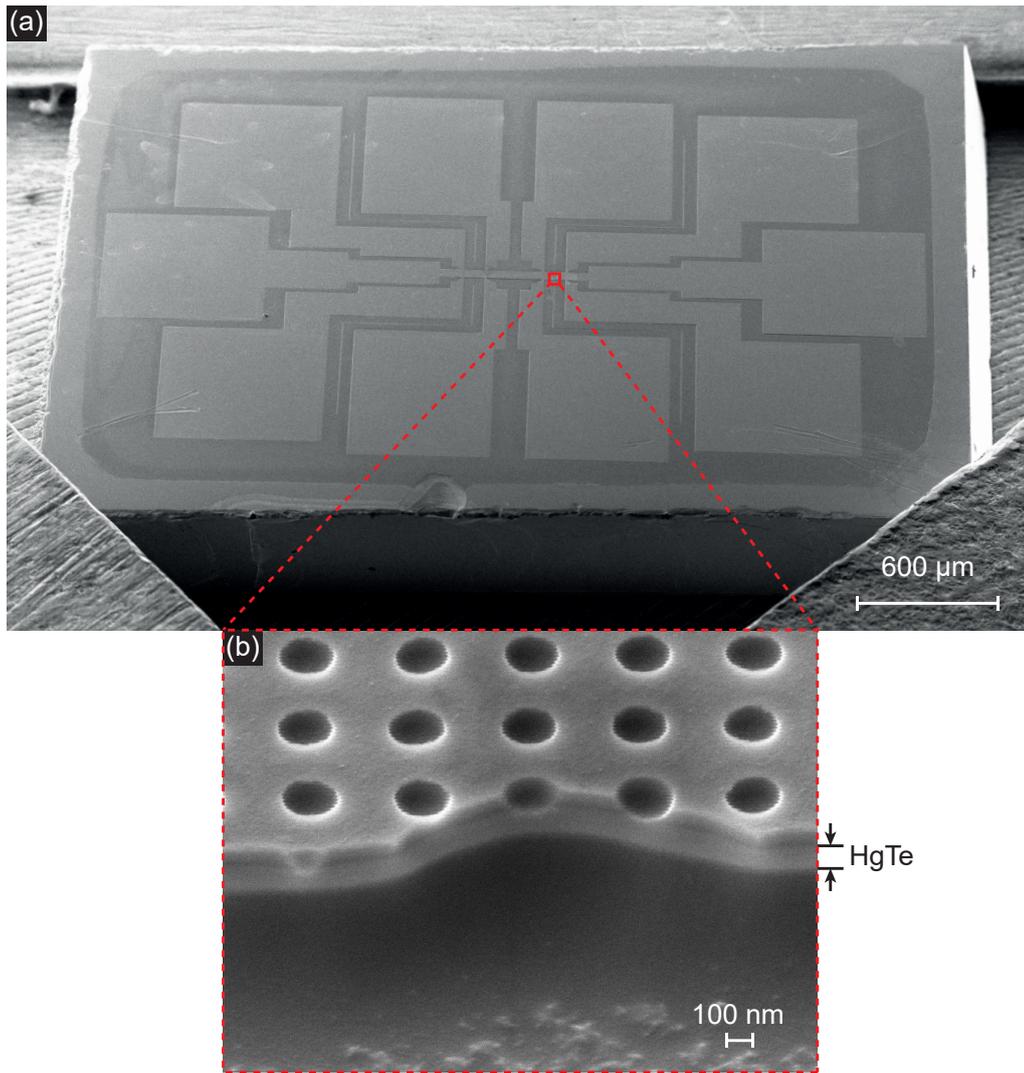
### 3.2.6 Topgate

Nach dem Ätzen der Mesa soll nun auf die Oberseite der Hall-Bar eine Gate-Elektrode (Topgate) aufgebracht werden. Das genaue Layout des Topgates ist dabei je nach Probe, wie in Abschnitt 3.2.1 beschrieben, verschieden. Unabhängig vom Layout erlaubt ein solches Topgate durch Anlegen einer Gate-Spannung die Ladungsträgerdichte und somit auch die Fermi-Energie im darunter liegenden Hall-Bar-Segment zu verändern. Dies ermöglicht es die Fermi-Energie im verwendeten dreidimensionalen topologischen Isolators vom Valenzband über die Bandlücke hinweg bis hin in das Leitungsband zu schieben und Transportmessungen in diesen Bereichen durchzuführen.

Bei der Realisierung eines Topgates ist es allerdings immer nötig, dass das Gate vom leitenden Kanal der Mesa elektrisch getrennt ist. Dies geschieht durch das Aufbringen einer Isolatorschicht. Diese besteht in dieser Arbeit aus den zwei Dielektrika Siliziumdioxid ( $\text{SiO}_2$ ) und Aluminiumoxid ( $\text{Al}_2\text{O}_3$ ). Hierbei werden zunächst 30 nm Siliziumdioxid mittels plasmaunterstützter chemischer Gasphasenabscheidung (PECVD<sup>10</sup>) ganzflächig auf die Probe aufgebracht. Dieser Prozessschritt erfolgt durch eine *Plasmalab 80 Plus* Anlage von *Oxford Instruments*. Die dabei erzeugte Schicht dient als Keimschicht, welche dafür sorgt, dass die darauf aufgebraute 100 nm dicke Aluminiumoxid-Schicht besser an der Oberfläche anwächst und

---

<sup>10</sup>Plasma Enhanced Chemical Vapor Deposition



**Abbildung 3.9** REM-Aufnahmen einer strukturierten Probe auf einem Klemmhalter unter einem Betrachtungswinkel von  $50^\circ$ .

(a) Seitliche Aufnahme einer geätzten Mesa auf einem rechteckigen Probenstück. (b) Vergrößerte Ansicht des mit Antidots strukturierten Hall-Bar-Segments. Der sich durch den Ätzprozess ergebende Schnitt durch die Probe erlaubt es in dieser Perspektive einzelne Schichten des verwendeten Wafers anhand der verschiedenen Graustufen voneinander unterscheiden zu können. Dadurch ist es auf einfache Weise möglich die 80 nm dicke HgTe-Schicht an der Ätzkante zu lokalisieren.

dort eine homogene Schicht bildet. Das Aluminiumoxid wird durch eine Atomlagenabscheidung (ALD<sup>11</sup>) mittels einer *Savannah 100* von *Cambridge NanoTech Inc.* ganzflächig auf die Siliziumoxid-Keimschicht aufgewachsen. Die Prozesstemperatur ist hierbei für beide Abscheidungsverfahren aufgrund der Temperaturempfindlichkeit des verwendeten Materials auf  $80^\circ\text{C}$  limitiert.

<sup>11</sup>Atomic Layer Deposition

Nach dem Aufbringen des Isolators erfolgt die Metallisierung des Topgates. In diesem Arbeitsschritt wird mittels optischer Lithographie (siehe hierzu Abschnitt 3.2.2) und thermischer Beschichtung (durch eine *Univex 450* von *Leybold*) eine metallische Gold-Elektrode aufgebracht. Hierbei wird zu Beginn des Beschichtungsprozesses zunächst die Oberfläche unterhalb des Gates durch 20 sekündiges Vorsputtern mit Argonplasma aufgeraut, was die Adhäsion der darauf folgenden Schichten erhöht. Auf diesen aufgerauten Isolator wird anschließend ein Haftvermittler aus 10 nm Titan (Ti) oder Chrom (Cr) aufgebracht, der die Haftung an der Grenzfläche zwischen dem Isolator und der anschließend aufgetragenen 100 nm dicken Gold-Schicht verbessert. Nach der Beschichtung wird durch einen Lift-off-Prozess abschließend der Photolack und die darauf befindliche überschüssige Metallisierung entfernt. Hierbei zeigt die Verwendung von Chrom als Haftvermittler eine deutlich erhöhte Haftung im Vergleich zur Nutzung von Titan.

### 3.2.7 Fertigstellung

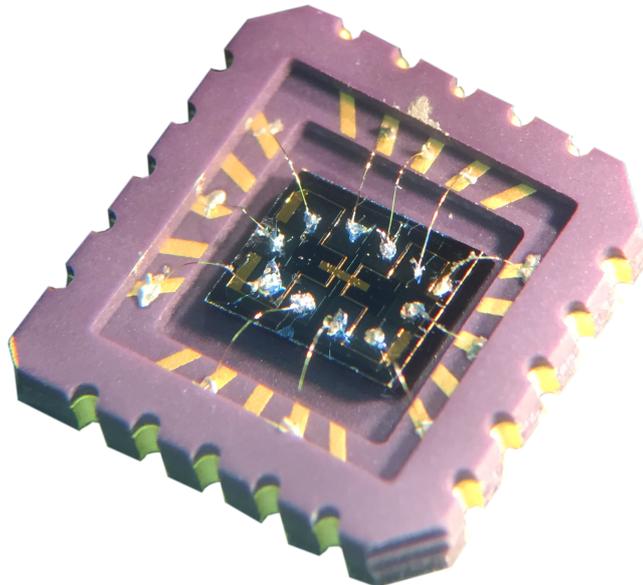
Nachdem die Strukturierung der Probe abgeschlossen ist, wird das fertige Probenstück mit PMMA in einen zwanzig-poligen Chipcarrier eingeklebt. Dieser Chipcarrier fungiert als Schnittstelle zwischen dem individuellen Probendesign und dem standardisierten Messaufbau. Hierfür ist es nötig einen elektrischen Kontakt zwischen den Kontaktfeldern der Mesa und denen des Chipcarriers herzustellen. Dies geschieht typischerweise durch eine Ultraschallschweißtechnik, dem Ultraschall-Wedge-Bonden (siehe hierzu beispielsweise [78]). In der Regel wird dabei ein Gold-Draht auf der einen Seite mit den Kontakten des Chipcarriers und auf der anderen Seite mit den Gold-Kontaktfeldern auf der Mesa verschweißt. Diese Gold-Kontaktfelder werden dabei direkt vor dem Aufbringen des Isolators mittels optischer Lithographie und thermischer Beschichtung etwas versetzt zu den bereits geätzten Kontaktfeldern auf der Mesa aufgebracht. Da mehrere Versuche<sup>12</sup> den Gold-Draht direkt auf die Mesa-Kontakte zu bonden aufgrund von Haftungsproblemen erfolglos verliefen, wurde die Kontaktierung auf eine andere Art vorgenommen. So wird für Proben, bei denen der Isolator ganzflächig aufgebracht wurde, mit einer Pinzette der Isolator auf den Gold-Kontakten an einigen Stellen abgekratzt. Anschließend wird der Bond-Draht durch einen ersten Bond auf dem Chipcarrier befestigt und ein zweiter Bond auf den angekratzten Bereich gesetzt. Dadurch ist der Gold-Draht korrekt positioniert, besitzt allerdings durch die schlechte Haftung keinen direkten Kontakt zum Mesa-Kontaktfeld. Die eigentliche Kontaktierung erfolgt per Hand entweder durch ein Festkleben mit leitenden zwei-komponentigen Silber-Epoxid-Klebstoff oder mit

---

<sup>12</sup>Wird dabei mittels optischer Lithographie auf den Gold-Kontaktflächen kein Isolator abgeschieden, reißen beim Ultraschall-Bonden die Kontaktflächen unterhalb des fest-geschweißten Drahtes ab. Im Gegensatz dazu führt eine flächige Bedeckung des Isolators, auch nach einem Ätzschritt, der den Isolator oberhalb der Gold-Kontakte entfernt, dazu, dass der Gold-Draht beim Bonden nicht mehr an den freigelegten Gold-Kontaktflächen haftet.

Indium, das mit einem schmalen LötKolben aufgelötet wird<sup>13</sup>. Da sich allerdings bei der Verwendung des silberhaltigen Klebers zeigte, dass einige der angeklebten Drähte nach längerer Lagerung keinen Kontakt mehr aufweisen, ist eine Kontaktierung mit Indium zu bevorzugen. Die Verwendung von Indium bietet zudem den Vorteil, dass auch direkt auf einen angekratzten Mesakontakt gelötet werden kann, ohne dabei in einem zusätzlichen Prozessschritt ein Gold-Kontaktfeld aufbringen zu müssen. Eine auf diese Weise in einem Chipcarrier kontaktierte Probe ist in Abbildung 3.10 dargestellt.

Sind alle Kontakte der Hall-Bar und das Topgate mit dem Chipcarrier verbunden, ist eine Probe in der Handhabung besonders anfällig gegenüber elektrostatischen Entladungen. Dies kann sogar dazu führen, dass bei einer Entladung der Isolator unter dem Gate beschädigt wird und die betroffenen Strukturen dadurch unbrauchbar werden. Bei sachgemäßer Handhabung und regelmäßiger Erdung treten jedoch bei den verwendeten Proben nie Probleme dieser Art auf.



**Abbildung 3.10** Direkt mit Indium kontaktierte Probe mit Hall-Bar-Struktur und Topgate in einem 20-Pin Chipcarrier. In der dargestellten Probe wurden die gebondeten Chipcarrierkontakte zusätzlich mit zwei-komponentigem Silber-Epoxid befestigt, um einen festen Kontakt trotz möglicher mechanischer oder thermischer Belastungen auf den verschweißten Gold-Draht sicher zu stellen.

---

<sup>13</sup>Für Details hierzu siehe Anhang A

## 3.3 Tieftemperatur Messaufbau

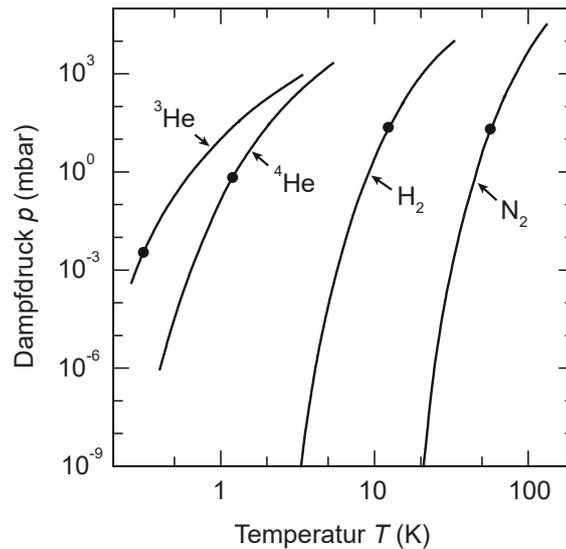
Nachdem eine Probe im Chipcarrier kontaktiert wurde, können an dieser Magneto-transportmessungen durchgeführt werden. Hierzu wird allerdings Messtechnik, wie ein Tieftemperatur-Magnetsystem<sup>14</sup> und Messelektronik, benötigt. Auf die Funktionsweise dieser Messtechnik und den verwendeten Messaufbau soll deshalb nachfolgend kurz eingegangen werden.

### 3.3.1 Tieftemperatur-Magnetsystem

Die Temperatur stellt eine der grundlegenden Einflussgrößen in einem durchgeführten Experiment dar. Deshalb ist eine genaue Kontrolle und Kenntnis dieser Größe für viele Messungen essentiell. Die Durchführung der Experimente bei sehr tiefen Temperaturen ist meist von Vorteil, da viele Effekte erst bei tiefen Temperaturen beobachtet werden können. So sind beispielsweise einzelne Landau-Niveaus, und damit auch der Quanten-Hall-Effekt, erst dann sichtbar, wenn die thermische Energie  $k_B T$  kleiner wird als der Abstand  $\hbar\omega_c$  zwischen den einzelnen Niveaus. Für die Erzeugung derartig tiefer Temperaturen kommt in der vorliegenden Arbeit ein kommerzielles Kryostatensystem vom Typ *Teslatron* der Firma *Oxford Technologies* zum Einsatz. Bei diesem System handelt es sich um einen <sup>4</sup>He-Badkryostaten, welcher im Inneren des <sup>4</sup>He-Bades einen thermisch isolierten Einsatz für die Temperaturkontrolle, ein sogenanntes *Variable Temperature Inset* (VTI), besitzt. Die zu messende Probe wird dabei über einen Probenstab in das VTI eingeführt. Das VTI ist nur über ein Nadelventil mit dem <sup>4</sup>He-Reservoir verbunden und kann darüber mit flüssigem <sup>4</sup>He befüllt werden. Durch die thermische Entkopplung des VTI ist es möglich, in diesem eine beliebige stabile Temperatur einzustellen ohne dabei das Reservoir außerhalb des VTI zu beeinflussen. Ist das VTI mit flüssigem <sup>4</sup>He geflutet, ergibt sich bei Normaldruck eine Siedetemperatur des Heliums von 4.2 K. Betrachtet man Abbildung 3.11, zeigt sich der Zusammenhang des Dampfdruckes verschiedener Flüssigkeiten mit der Temperatur. Aus dieser lässt sich erkennen, dass sich die Temperatur durch eine Reduktion des Dampfdruckes oberhalb der Flüssigkeit verringern lässt. Somit ist es möglich die Temperatur im VTI durch Abpumpen des Heliumdampfes noch weiter zu erniedrigen. Da die abnehmende Temperatur allerdings mit einer Reduktion des <sup>4</sup>He-Dampfdruckes (siehe Abbildung 3.11) und entsprechend auch mit einer verringerten Kühlleistung<sup>15</sup> einhergeht, stellt sich immer ein thermodynamisches Gleichgewicht zwischen Wärmeeintrag und Kühlleistung ein. Hierdurch ist die erreichbare Tiefsttemperatur im verwendeten System auf ca. 1.5 K limitiert. Wie aus Abbildung 3.11 ersichtlich, würde die Verwendung einer anderen Flüssigkeit, wie <sup>3</sup>He, zu einer geringeren Tiefsttemperatur führen. Da allerdings der zu untersuchende Kommensurabilitäts-Effekt und Shubnikov-de Haas-Oszillationen erst bei deutlich höheren Temperaturen zu verschwinden beginnen, ist die im <sup>4</sup>He-System erreichbare

<sup>14</sup>Ein tiefer gehender Einblick in diese Thematik findet sich in den Referenzen [85–87].

<sup>15</sup>bei gleich bleibender Pumpleistung



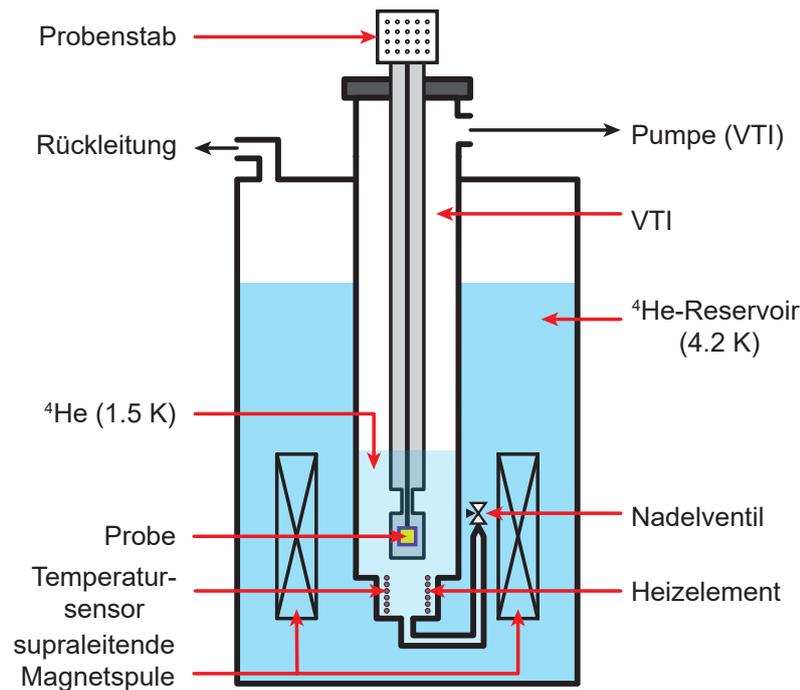
**Abbildung 3.11** Dampfdruckkurven als Funktion der Temperatur.

Dargestellt sind hierbei die gewöhnlich in der Kryotechnik verwendeten Flüssigkeiten. Die auf den einzelnen Dampfdruckkurven eingezeichneten Punkte (●) kennzeichnen dabei jeweils die in der Praxis typischerweise mit moderatem Aufwand erreichbaren Basistemperaturen. Nach [86].

Basistemperatur von 1.5 K für das Experiment ausreichend. Zudem ist es im verwendeten  $^4\text{He}$ -System auch möglich, Temperaturen oberhalb von 4.2 K zu erzeugen. Hierfür ist im VTI ein Heizelement verbaut. Dabei wird das VTI allerdings nicht mit Helium geflutet, sondern mit dem Nadelventil ein konstanter  $^4\text{He}$ -Fluss eingestellt. Das Helium wird dort direkt mit dem Heizelement verdampft und abschließend wird das gasförmige Helium abgepumpt. Ein am System angeschlossener Regelkreis und ein in das VTI verbauter Temperatursensor erlauben es somit jede beliebige stabile Temperatur zwischen 1.5 K und 200 K im VTI einzustellen.

Neben der Temperatursteuerung besitzt das verwendete System eine supraleitende Magnetspule, mit welcher es möglich ist, an der Probe ein Magnetfeld von bis zu 14 T anzulegen. Eine schematische Darstellung eines solchen  $^4\text{He}$ -Verdampferkryostaten mit einem integrierten VTI und einem supraleitenden Magnetsystem ist in Abbildung 3.12 dargestellt. Die Steuerung von Magnetfeldstärke, Temperatur und einzelner, im nächsten Abschnitt näher diskutierter, Messgeräte erfolgt hierbei immer nach Vorgabe eines Perl-Skripts in der Lab::Measurement Umgebung [88] über einen Steuercomputer. Neben der Gerätesteuerung übernimmt dieser Computer auch die Aufzeichnung der Messdaten.

Bis auf Testmessungen bei Raumtemperatur zur Kontrolle der Kontaktqualität und des Topgate-Isolators wurden alle im Rahmen der Arbeit durchgeführten Messungen in einem Tieftemperatur-Magnetsystem durchgeführt.



**Abbildung 3.12** Schematischer Aufbau eines  $^4\text{He}$ -Kryostaten. Der Kryostat besteht aus einer nach außen hin vakuumisolierten Hauptkammer, welche mit einem flüssigem  $^4\text{He}$ -Reservoir befüllt ist und über eine Rückleitung auf Normaldruck gehalten wird. In dieser Kammer findet sich sowohl eine supraleitende Magnetspule als auch ein thermisch isolierter Bereich (VTI), der nur über ein Nadelventil mit der Hauptkammer verbunden ist. Dieses VTI besitzt ein Heizelement, einen Temperatursensor und eine Öffnung, um den Druck in der Kammer durch Abpumpen zu verringern. Die zu messende Probe wird in dieses VTI mit einem Probenstab eingeführt. Dieser besitzt neben den Messleitungen für alle Kontakte des verbauten 20-Pin Chipcarriers auch einen Temperatursensor in der Nähe der Probe, welcher es erlaubt während einer Magnetotransportmessung immer die aktuelle Proben temperatur aufzuzeichnen.

#### 3.3.2 Messaufbau für die elektrischen Transportuntersuchungen

Möchte man Transportmessungen durchführen, so lässt sich der Spannungsabfall zwischen zwei Kontakten sowohl in Zwei- als auch in Vierpunkt-Geometrie bestimmen. In der Zweipunkt-Messung wird eine konstante Spannung an zwei Probenkontakte angelegt und der resultierende Strom gemessen. Verhält sich die Probe ohmsch, kann aus angelegter Spannung und gemessenem Strom nach dem ohmschen Gesetz der Zweipunkt-Widerstand bestimmt werden. Dieser setzt sich in diesem Fall aus den beiden Kontaktwiderständen, dem Probenwiderstand und dem Widerstand der Messleitungen zusammen. Will man jedoch nur den Probenwiderstand alleine messen, ist es nötig die Zweipunkt-Geometrie zu einer Vierpunkt-Geometrie zu erweitern. Hierfür werden zwei zusätzliche Kontakte zu den beiden stromführenden Kontakten der Zweipunkt-Geometrie angebracht. Damit die angeschlossene Spannungs-

quelle dabei einen möglichst konstanten Strom liefern kann, wird ein Vorwiderstand vor die Probe geschaltet. Dieser sollte deutlich hochohmiger gewählt werden als der Probenwiderstand, um auch bei kleinen Variationen des Probenwiderstandes einen konstanten Strom zu garantieren. Fließt nun Strom, so erlauben es die beiden in der Vierpunkt-Geometrie zusätzlich angebrachten Kontakte nur den tatsächlichen Spannungsabfall, der über dem Proben-Teilstück zwischen den beiden Kontaktzuleitungen abfällt, zu bestimmen.

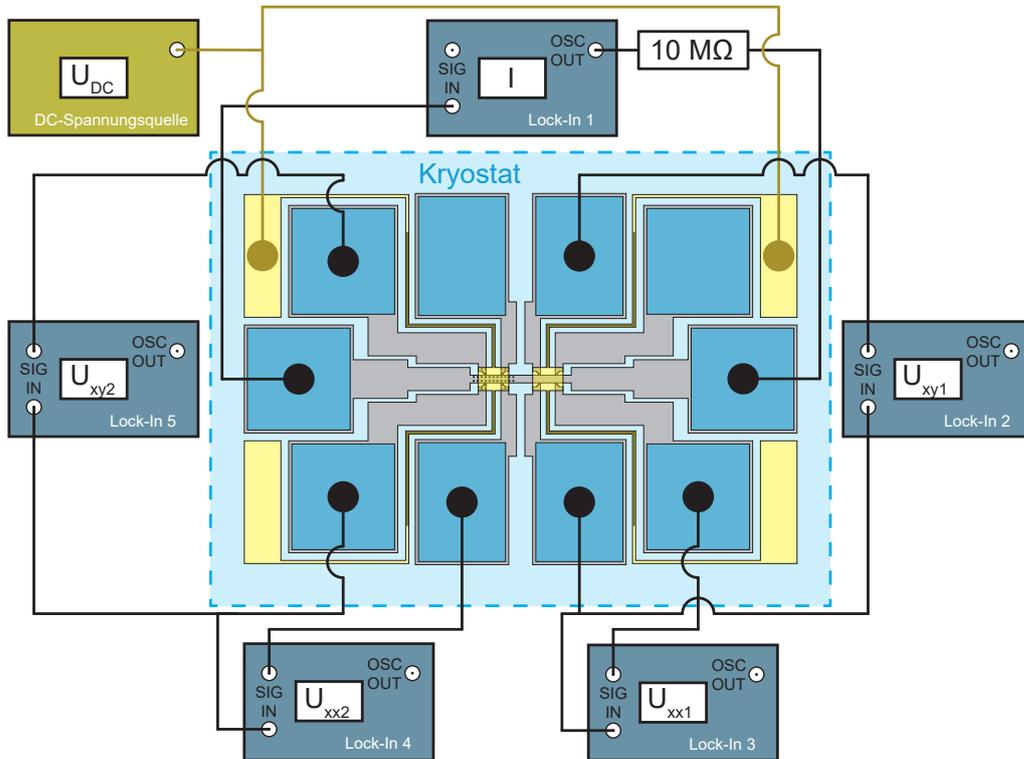
Aus diesem Grund wurden die Messungen in dieser Arbeit stets in Vierpunkt-Geometrie durchgeführt. Die einzelnen Transportmessungen wurden dabei durch eine Wechselstrommessung realisiert, da ein AC<sup>16</sup>-Messaufbau den Vorteil bietet die Messsignale mit einem sogenannten Lock-In-Verstärker detektieren zu können. Bei diesem handelt es sich um einen sehr schmalbandigen Verstärker, der mit einem zusätzlichen Oszillatorkanal ausgestattet ist. Die Verwendung derartiger Verstärker erlaubt es, Messsignale möglichst rauschfrei detektieren zu können. Hierfür kommen im verwendeten Messaufbau mehrere Lock-In-Verstärker (*Signal Recovery DSP 7265*) zum Einsatz. So wird ein Verstärker verwendet, um mit dem eingebauten Oszillatorkanal einen Wechselstrom mit konstanter Amplitude, definierter Frequenz und bekannter Phasenlage durch den Strompfad der Hall-Bar zu leiten. Ein Vorwiderstand mit einer Größe von 10 M $\Omega$  soll hierbei für einen möglichst konstanten Strom von 50 nA sorgen. Informationen über die Frequenz und Phasenlage des eingespeisten Wechselstroms werden dabei über ein Triggersignal an alle zusätzlichen Lock-In-Verstärker, welche für die Messung des Spannungsabfalls eingesetzt werden, weitergegeben. Dieses Vorgehen erlaubt es, ausschließlich Signale mit der Quellfrequenz zu detektieren und Signale mit anderen Frequenzen, wie beispielsweise Rauschen, herauszufiltern [79]. Finden sich im Experiment allerdings Störsignale mit einer ähnlichen Frequenz oder einem Vielfachen der Quellfrequenz, so kann sich dies auch negativ auf das Messsignal auswirken. Aus diesem Grund sollte für die Messung die Frequenz des Referenzsignals so gewählt werden, dass diese möglichst nicht mit unvermeidbaren Frequenzen, wie beispielsweise der Netzfrequenz von 50 Hz oder deren Vielfachen, übereinstimmt. Entsprechend wurden die Messungen stets mit einer Referenzfrequenz von 13 Hz durchgeführt. Um Rauschen im Messsignal zusätzlich zu verringern, wurde für die Messung eine lange Integrationszeit von 1 s gewählt.

Der prinzipielle Aufbau für eine auf diese Art durchgeführte Transportmessung ist in Abbildung 3.13 am Beispiel einer Hall-Bar mit zwei Messbereichen dargestellt. In diesem Aufbau findet sich neben dem bereits beschriebenen AC-Stromkreis auch eine Gleichspannungsquelle (*Yokogawa 7651*). Diese DC<sup>17</sup>-Spannungsquelle wird genutzt, um am Topgate oberhalb einzelner Hall-Bar-Segmente eine konstante Gate-Spannung anlegen zu können. Die Steuerung und Datenerfassung der einzelnen Messgeräte geschieht hier, wie bereits in Abschnitt 3.3.1 beschrieben, durch einen Steuercomputer.

---

<sup>16</sup>Alternating Current

<sup>17</sup>Direct Current



**Abbildung 3.13** Eingesetzter Messaufbau für eine Hall-Bar mit zwei Segmenten. Die Messleitungen im Probenstab erlauben es die Probe mit den einzelnen Messgeräten außerhalb des Kryostaten zu verbinden. Der Oszillorausgang (OSC OUT) von Lock-In 1 dient hierbei als Stromquelle, welche durch einen Vorwiderstand von  $10\text{ M}\Omega$  einen konstanten Strom von  $50\text{ nA}$  mit einer Frequenz von  $13\text{ Hz}$  durch die Probe leitet. Über die Signaleingänge (SIG IN) der anderen Lock-In-Verstärker können die abgefallene Längsspannung  $U_{xx}$  (Lock-In 3 und 4) und die Hall-Spannung  $U_{xy}$  (Lock-In 2 und 5) an den einzelnen Bereichen der Hall-Bar separat detektiert werden. Eine Gleichspannungsquelle liefert dabei für beide Bereiche eine konstante Gate-Spannung  $V_g$  (mit  $V_g = U_{DC}$ ).



# 4

## Messungen und Diskussion

Der im vorangegangenen Abschnitt beschriebene Messaufbau erlaubt es, verschiedene Proben durch Magnetotransportmessungen zu charakterisieren und den Einfluss eines Antidot-Übergitters auf die topologischen Oberflächenzustände des HgTe-basierten dreidimensionalen topologischen Isolators zu untersuchen.

Für eine korrekte Interpretation der Messergebnisse von strukturierten Proben ist es hierbei elementar zunächst die Transportcharakteristiken des unstrukturierten Systems zu kennen. So ist der Transport in einem dreidimensionalen topologischen Isolator, wie bereits in Abschnitt 2.3.5 erläutert, je nach Lage der Fermi-Energie entweder ausschließlich durch Dirac-Fermionen an den Oberflächen gegeben oder durch Dirac-Fermionen und zusätzlichen Zuständen im Volumenmaterial. Trotz der Komplexität dieses Systems lassen sich aus den Transportmessung eine Vielzahl an Parametern, wie beispielsweise die Gesamtladungsträgerdichte  $n_s^{ges}$  des Systems oder auch die Ladungsträgerdichte  $n_s^{top}$  der Dirac-Fermionen, welche nur an der oberen Oberfläche sitzen, bestimmen.

Wie diese Auswertung vonstatten geht wird im folgenden Abschnitt kurz beschrieben bevor anschließend die durchgeführten Transportmessungen an mit Antidots strukturierten Proben vorgestellt und diskutiert werden.

### 4.1 Grundsätzliche Charakterisierung

Der folgende Abschnitt soll einen kurzen Überblick über die Auswertung und Interpretation von Transportmessungen in (013)-orientierten<sup>1</sup> HgTe-basierten dreidimensionalen topologischen Isolatoren geben. Tiefer gehende Ausführungen hierzu finden sich beispielsweise in [6, 71, 89–91], an welchen sich auch der nachfolgende Überblick orientiert.

Man erhält bereits einen ersten Einblick in das System, indem man den Schichtwiderstand  $\rho_{\square} = \rho_{xx}(B = 0)$  in Abhängigkeit der Topgate-Spannung ermittelt. Eine derartige Messung ist in Abbildung 4.1(a) als rote Kurve dargestellt. Die Messkurve zeigt dabei einen für das System typischen Verlauf und ein ausgeprägtes Maximum nahe  $V_g \approx 1$  V. Der Spannungswert des Widerstandsmaximums befindet sich nahe des sogenannten Ladungsneutralitätspunktes, an welchem der in Abbildung 4.1(a)

---

<sup>1</sup>GaAs Substrat

als blaue Kurve dargestellte Hall-Widerstand  $\rho_{xy}(B = 1 \text{ T})$  das Vorzeichen wechselt. An diesem Punkt ist die Anzahl an Löchern und Elektronen, die sich im System an der Fermi-Energie befinden, miteinander vergleichbar was sich in einem hohen Schichtwiderstand äußert.

Neben der Lage des Ladungsneutralitätspunktes lässt sich aus der Messkurve von  $\rho_{xx}(B = 0)$  zudem bereits grob der Bereich der Bandlücke zwischen Valenzband (VB) und Leitungsband (LB) abschätzen. So nimmt der Widerstand rechts vom Ladungsneutralitätspunkt ab dem Eintritt der Fermi-Energie in die Bandlücke stark ab, da in diesem Bereich der Transport nur durch Oberflächenzustände gegeben ist. Tritt die Fermi-Energie anschließend von der Bandlücke in das Leitungsband, so nehmen neben den Dirac-Elektronen in den Oberflächenzuständen nun auch Elektronen aus dem Volumenmaterial<sup>2</sup> am Transport teil, was sich in der Kurve in einer Erhöhung des Widerstandes äußert. [6]

Nach dieser ersten Charakterisierung ist für eine genaue Abschätzung der Lage von Valenz- und Leitungsband allerdings eine Auswertung von Magnetotransportmessungen nötig. Diese wurden im Rahmen der Arbeit stets in einem Magnetfeldbereich von  $-2$  bis  $10 \text{ T}$  durchgeführt. Die Messungen zeigen dabei bei hohen Feldern den typischen Quanten-Hall-Effekt mit Shubnikov-de Haas-Oszillationen<sup>3</sup> im Längswiderstand und Quanten-Hall-Plateaus im Hall-Widerstand. Eine Auswertung dieser Messungen erlaubt es, nicht nur den Gate-Spannungsbereich der Bandlücke abzuschätzen, sondern auch Aussagen über die Gesamtladungsträgerdichte<sup>4</sup>  $n_s^{ges}$  des Systems und über die Ladungsträgerdichten  $n_s^{top}$  bzw.  $n_s^{bot}$  der Dirac-Elektronen an der oberen bzw. unteren Oberfläche für eine bestimmte Topgate-Spannung zu treffen. Die Gesamtladungsträgerdichte in Abhängigkeit der Topgate-Spannung lässt sich hierbei auf mehrere Arten bestimmen. Betritt man mit der Fermi-Energie das Valenzband, so finden sich im System sowohl Elektronen als auch Löcher, was sich im Transport in einer nichtlinearen Hall-Gerade um  $B = 0$  und einem starken positiven Magnetowiderstand im Längswiderstand äußert. In diesem Fall lässt sich die Gesamtladungsträgerdichte der Elektronen  $n_s^{ges}$  und Löcher  $p_s^{ges}$  über das zwei-Ladungsträger Drude-Modell (siehe hierzu [6, 89]) bestimmen. Dies erlaubt es durch eine lineare Extrapolation von  $p_s^{ges}$  die Position der Valenzbandkante am Schnittpunkt mit der Spannungsachse bei  $p_s^{ges} = 0$  zu bestimmen. Oberhalb dieser Spannung betritt man die Bandlücke und im System befinden sich nur noch eine Art von Ladungsträgern (Elektronen). In diesem Fall ist der Hall-Widerstand im Bereich

<sup>2</sup>Es wird angenommen, dass Elektronen aus dem Volumenmaterial am Beginn des Leitungsbandes eine deutlich geringere Leitfähigkeit im Vergleich zu Dirac-Elektronen in der Oberfläche besitzen [6].

<sup>3</sup>Im Gegensatz zu einem normalen zweidimensionalen Elektronengas gehen im dreidimensionalen topologischen Isolator die Minima der Shubnikov-de Haas-Oszillationen nicht auf Null. Dies liegt daran, dass in einem dreidimensionalen topologischen Isolator nicht alle Oberflächen senkrecht zum Magnetfeld stehen. So führen die parallel zum Magnetfeld stehenden Seitenflächen zu einer Parallelleitung und entsprechend zu einem endlichen Widerstand der Minima. [6]

<sup>4</sup>Die Gesamtladungsträgerdichte setzt sich, wie in Abbildung 2.16 ersichtlich, je nach Lage der Fermi-Energie nur aus Oberflächenzuständen  $n_s^{top} + n_s^{bot}$  ( $E_F$  in der Bandlücke) oder aus Volumenzuständen  $n_s^{bulk}$  und Oberflächenzuständen ( $E_F$  im Valenz- oder Leitungsband) zusammen.

## 4.1 Grundsätzliche Charakterisierung

kleiner Magnetfelder wieder linear und die Gesamtladungsträgerdichte lässt sich, wie im klassischen Drude-Modell, aus der Hall-Steigung nach Gleichung 2.28 ermitteln. Alternativ kann die Gesamtladungsträgerdichte hierbei auch aus den Quanten-Hall-Plateaus im Hall-Widerstand bei hohen Magnetfeldern mit Hilfe von Gleichung 2.51 bestimmt werden.

Neben dem Hall-Widerstand lässt sich eine Ladungsträgerdichte auch aus der  $1/B$ -Periodizität der Shubnikov-de Haas-Oszillationen im Längswiderstand mit Hilfe von Gleichung 2.47 und einem Spinentartungsfaktor von  $g_s = 1$  errechnen. Hierbei ergeben sich zwei verschiedene Ladungsträgerdichten für niedrige und hohe Magnetfelder<sup>5</sup>. Dies lässt sich gut in einer  $1/B$ -Auftragung der Magnetfeldpositionen der Shubnikov-de Haas-Minima gegen den zugehörigen Füllfaktor als eine Steigungsänderung hin zu hohen Magnetfeldern erkennen (siehe hierzu [6]). Die Ladungsträgerdichte aus den Shubnikov-de Haas-Oszillationen bei hohen Magnetfeldern reflektiert dabei wieder die Gesamtladungsträgerdichte des Systems  $n_s^{ges}$ . Im Gegensatz dazu werden bei kleinen Magnetfeldern zuerst die Oszillationen aus der Oberfläche mit der höheren Ladungsträgerdichte und größerer Beweglichkeit aufgelöst, da diese entsprechend auch eine höhere Leitfähigkeit und geringere Verbreiterung einzelner Landau-Niveaus aufweist. Diese Oberfläche ist bei der Verwendung eines Topgates die obere Oberfläche. Dies liegt daran, dass eine angelegte Topgate-Spannung vor allem Zustände an der oberen Oberfläche beeinflusst. Somit reflektieren die Shubnikov-de Haas-Oszillationen im kleinen Magnetfeldbereich die Ladungsträgerdichte  $n_s^{top}$  der oberen Oberfläche. [6, 75]

Die Eigenschaft, dass Niedrigfeld-Shubnikov-de Haas-Oszillationen die Ladungsträgerdichte  $n_s^{top}$  widerspiegeln, wurde durch eine Evaluation von Oszillationen in der Magnetokapazität<sup>6</sup> bestätigt (siehe hierzu [72, 75]).

Trägt man die nun bekannten Ladungsträgerdichten gegen die Topgate-Spannung auf, so ergibt sich für die Gesamtladungsträgerdichte  $n_s^{ges}$  ein linearer Zusammenhang und somit eine konstante Füllrate  $dn_s^{ges}/dV_g$ , welche nur durch die Kapazität  $C_{ges}$  des Isolatorsystems zwischen Topgate und der HgTe-Schicht gegeben ist:

$$\frac{dn_s^{ges}}{dV_g} = \frac{dn_s^{top}}{dV_g} + \frac{dn_s^{bulk}}{dV_g} + \frac{dn_s^{bot}}{dV_g} = \frac{C_{ges}}{e} \sim \text{const.} \quad (4.1)$$

Im Gegensatz zur Gesamtladungsträgerdichte existiert in der Ladungsträgerdichte  $n_s^{top}$  der oberen Oberfläche ein Spannungswert, ab welchem sich die Füllrate von  $n_s^{top}$  ändert. Dies liegt daran, dass beim Eintritt der Fermi-Energie in das Leitungsband nicht mehr nur die Oberflächenzustände, sondern auch leitende Zustände aus dem

<sup>5</sup>In beiden Fällen kann dabei von spinaufgespaltenen Landau-Niveaus ( $g_s = 1$ ) ausgegangen werden.

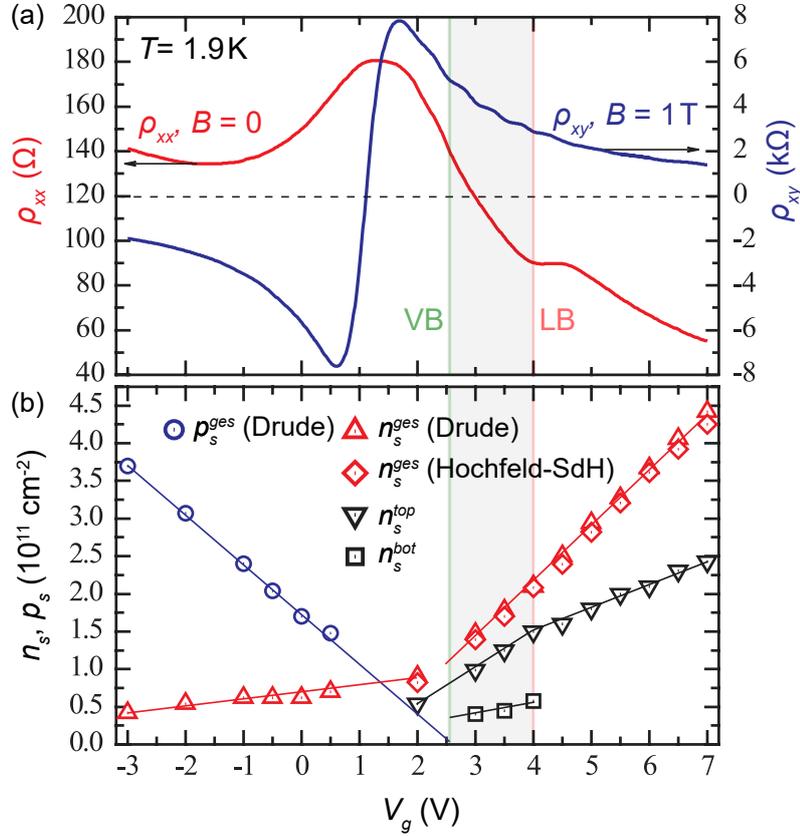
<sup>6</sup>Oszillationen in der Magnetokapazität bei der Verwendung eines Topgates reflektieren dabei primär die Zustandsdichte an der oberen Oberfläche, da diese das elektrische Feld des Topgates für darunterliegende Schichten zu einem Großteil abschirmt. Die Ladungsträgerdichte  $n_s^{top}$  lässt sich auch hier aus der  $1/B$ -Periodizität dieser Oszillationen mit Hilfe von Gleichung 2.47 und  $g_s = 1$  errechnen.

Inneren der Probe (Bulk) aufgefüllt werden. So führt durch die konstante Füllrate der Gesamtladungsträgerdichte ein nicht verschwindender Anteil  $dn_s^{bulk}/dV_g \neq 0$  nach Gleichung 4.1 dazu, dass die Füllrate von  $n_s^{top}$  sinken muss. Folglich deutet die Änderung der Steigung von  $n_s^{top}$  (siehe Abbildung 4.1(b) bei etwa  $V_g = 4$  V) auf den Übergang in das Leitungsband hin. [6, 89]

Durch die in Abbildung 4.1(b) dargestellte Auftragung all dieser Ladungsträgerdichten gegen die Topgate-Spannung kann nun die Position der Valenz- und Leitungsbandkante und entsprechend auch der Gate-Spannungsbereich der Bandlücke abgeschätzt werden. Befindet sich die Fermi-Energie dabei innerhalb der Bandlücke, ist es zudem möglich aus  $n_s^{ges}$  und  $n_s^{top}$  die Ladungsträgerdichte an der unteren Oberfläche  $n_s^{bot}$  zu bestimmen. Dies liegt daran, dass sich innerhalb der Bandlücke die ermittelte Gesamtladungsträgerdichte  $n_s^{ges} = n_s^{top} + n_s^{bot}$  nur aus den Ladungsträgerdichten der beiden Oberflächen senkrecht zum Magnetfeld zusammensetzt. Befindet sich die Fermi-Energie im Leitungsband, ist diese Aufspaltung nicht mehr möglich, da auch Zustände aus dem Inneren der Probe zur Gesamtladungsträgerdichte beitragen. Die Zustände aus dem Inneren<sup>7</sup> der Probe sind dabei durch das Topgate jeweils an der Oberseite des dreidimensionalen Systems angesiedelt, wo diese im Valenz- bzw. Leitungsband ein konventionelles zweidimensionales Loch- bzw. Elektronengas bilden [91]. Befindet man sich im Valenzband, so sind im vorliegenden Materialsystem (auch bei höheren negativen Gate-Spannungen) im Transport keine Signaturen von Dirac-Löchern sichtbar [91].

---

<sup>7</sup>Zustände aus dem Inneren der Probe (Bulk) sind im Gegensatz zu Oberflächenzuständen bei niedrigen Magnetfeldern spinentartet [91].



**Abbildung 4.1** Charakterisierung einer Probe bei  $T = 1.9$  K.

(a) Schichtwiderstand  $\rho_{xx}$  bei  $B = 0$  (links) und Hall-Widerstand  $\rho_{xy}$  bei  $B = 1$  T (rechts) als Funktion der Topgate-Spannung  $V_g$ . Linien kennzeichnen hier die ungefähre Position des Beginns von Valenzband (VB) und Leitungsband (LB). Der Spannungsbereich zwischen beiden, die Bandlücke, ist dabei grau hervorgehoben. (b) Ladungsträgerdichten von Elektronen ( $n_s$ ) und Löchern ( $p_s$ ) als Funktion der Topgate-Spannung. Die Gesamtladungsträgerdichte  $n_s^{ges}$  von Elektronen wurde dabei aus dem Drude-Modell und aus Hochfeld-Shubnikov-de Haas-Oszillationen bestimmt. Für die Gesamtlöcherdichte  $p_s^{ges}$  wurde hier das zwei-Ladungsträger Drude-Modell verwendet. Die Elektronendichte der oberen Oberflächenzustände  $n_s^{top}$  ist aus Niedrigfeld-Shubnikov-de Haas-Oszillationen ermittelt. Unterhalb der Leitungsbandkante kann die Ladungsträgerdichte  $n_s^{bot}$  der Elektronen an der unteren Oberfläche durch  $n_s^{bot} = n_s^{ges} - n_s^{top}$  berechnet werden. Nach [6].

## 4.2 Transport in Antidot-Übergittern

Nachdem im vorangegangenen Abschnitt beschrieben wurde, wie sich Transportmessungen im vorliegenden System auswerten lassen, widmet sich dieses Kapitel dem Einfluss eines Antidot-Übergitters auf den Transport in topologischen Oberflächenzuständen. Hierbei wurde versucht durch einen Ätzschritt ein starkes Antidot-Potential in der oberen Oberfläche des dreidimensionalen topologischen Isolators zu erzeugen. Untersucht wurden dabei sowohl quadratische als auch hexagonale Antidot-Übergitter mit verschiedener Periodizität. Anschließend wurde untersucht wie sich ein System verhält, in dem die komplette HgTe-Schicht durch einen Ätzschritt periodisch entfernt wird. Abschließend folgt eine Diskussion über den Ursprung und die Form des starken Potentials, welches durch das Anätzen der HgTe-Schicht in der oberen Oberfläche entsteht.

Einige Ergebnisse dieses Kapitels (vor allem Abschnitt 4.2.1.2) wurden in [7] veröffentlicht.

### 4.2.1 Antidots in einer einzelnen Oberfläche des topologischen Isolators

Um im System ein starkes Antidot-Potential nur in der oberen Oberfläche des dreidimensionalen topologischen Isolators zu erzeugen, wurden durch einen Ätzschritt die beiden Deckschichten<sup>8</sup> entfernt und einige Nanometer tief in die HgTe-Schicht hinein geätzt. Abbildung 4.2 zeigt ein schematisches Bild und eine Rasterelektronenmikroskop-Aufnahme einer derartig geätzten Struktur.

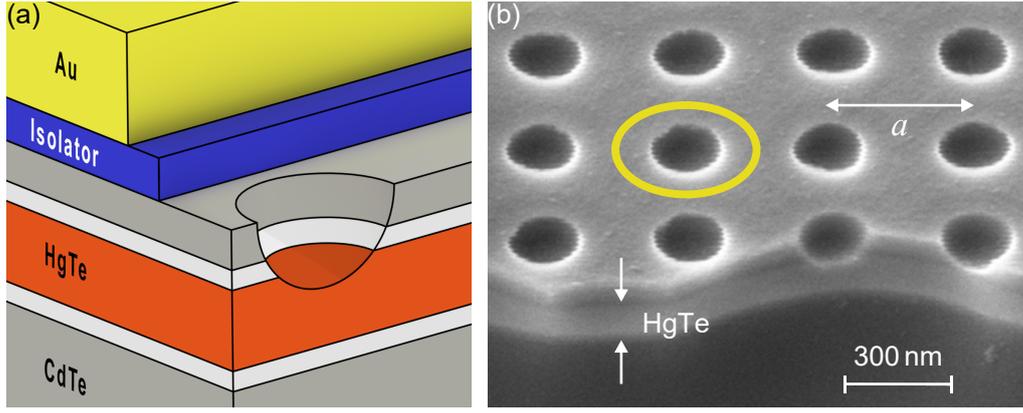
Das Ätzen der Antidots führt zu einer periodischen Verformung der oberen Oberfläche des dreidimensionalen topologischen Isolators. Hierbei könnte man davon ausgehen, dass sich dadurch kein Potential ergibt, da das Anätzen der Oberfläche nur die Grenzfläche zwischen dem dreidimensionalen topologischen Isolator (HgTe) und dem trivialen Isolator<sup>9</sup> verschiebt, ohne dabei Bereiche frei von Elektronen, wie in einem konventionellen 2DES-basierten Antidot-Gitter üblich, hervorzurufen. Messungen derartiger Geometrien mit quadratischen Antidot-Gittern, wie in Abbildung 4.3 für eine Periode von  $a = 800$  nm dargestellt, zeigen allerdings starke Ähnlichkeiten zu den bereits in Kapitel 2.2.2.1 vorgestellten geometrischen Resonanzen in GaAs-basierten 2DES. So zeigen die nur oberseitig angeätzten Strukturen deutlich ausgeprägte Widerstands-Peaks im Bereich kleiner Magnetfelder gefolgt von Shubnikov-de Haas-Oszillationen bei höheren Magnetfeldwerten. Möchte man nun die Position dieser Peaks nach dem Pinball-Modell aus Abschnitt 2.2.2.1 einzelnen kommensurablen Bahnen um eine bestimmte Anzahl an Antidots zuordnen, ist es nötig, die zugehörige Ladungsträgerdichte zu kennen. Geht man davon aus,

---

<sup>8</sup>40 nm CdTe und 20 nm CdHgTe

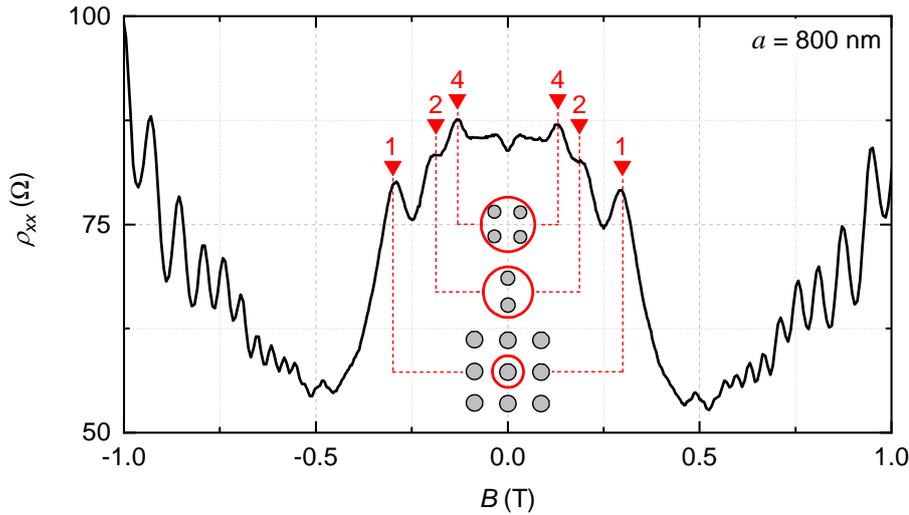
<sup>9</sup>wie beispielsweise auch Vakuum

## 4.2 Transport in Antidot-Übergittern



**Abbildung 4.2** Probendesign.

(a) Schematisches Bild des in Abschnitt 3.1 beschriebenen Schichtaufbaus mit einem leicht in die HgTe-Schicht geätzten Antidot. Auf der gesamten Struktur findet sich das in Kapitel 3.2.6 beschriebene Isolatorsystem und das metallische Gold-Topgate. (b) REM-Aufnahme eines derartigen Antidot-Gitters mit einer Periode von  $a \approx 400$  nm unter einem Betrachtungswinkel von  $50^\circ$ . Durch den unterschiedlichen Kontrast zwischen einzelnen Schichten lässt sich auch hier die 80 nm dicke HgTe-Schicht erkennen. Nach [7].



**Abbildung 4.3** Magnetowiderstand bei  $T \approx 1.4$  K in einem oberseitig angeätzten quadratischen Antidot-Gitter mit  $a = 800$  nm bei einer Topgate-Spannung von  $V_g = 3$  V. Die eingezeichneten Pfeile markieren die berechneten Peak-Positionen für Zyklotronbahnen um 1, 2 und 4 Antidots bei  $\hat{R}_{c,1} = 0.5a$ ,  $\hat{R}_{c,2} = 0.8a$  und  $\hat{R}_{c,4} = 1.14a$ . Für die Berechnung wurde die Ladungsträgerdichte  $n_s^{top} \approx 2.6 \times 10^{15} \text{ m}^{-2}$  aus Niedrigfeld-Shubnikov-de Haas-Oszillationen verwendet.

dass das durch den Ätzzvorgang erzeugte Potential nur die obere Oberfläche des dreidimensionalen topologischen Isolatoren beeinflusst, wird hierfür entsprechend die

Ladungsträgerdichte<sup>10</sup>  $n_s^{top}$  verwendet. Durch Umformung von Gleichung 2.53 lässt sich somit beispielsweise für den Fall von nicht spinentarteten Oberflächenzuständen (mit  $k_F = \sqrt{4\pi n_s^{top}}$ ) die Peak-Position für den fundamentalen Antidot-Peak mit

$$B_1 = \frac{\hbar k_F}{(0.5a)e} \quad (4.2)$$

berechnen. Weitere Peak-Positionen um zwei oder vier Antidots finden sich entsprechend bei

$$B_2 = \frac{\hbar k_F}{(0.8a)e} \quad \text{und} \quad B_4 = \frac{\hbar k_F}{(1.14a)e}. \quad (4.3)$$

Die gute Übereinstimmung der Peak-Positionen mit dem Pinball-Modell liefert bereits ein Indiz für das Vorliegen eines harten bzw. steilen Antidot-Potentials in der oberen Oberfläche des dreidimensionalen topologischen Isolators, da bei einem weichen Potential zunehmend Abweichungen von den erwarteten Positionen auftreten würden.

#### 4.2.1.1 Erste Charakterisierungen und Prozessoptimierung

Bevor eine detailliertere Auswertung der auftretenden Peaks in den Abschnitten 4.2.1.2 und 4.2.1.3 erfolgt, werden im Folgenden zunächst einige Prozessoptimierungen bei der Probenpräparation vorgestellt, die sich aus der Analyse der Transportmessungen ergaben.

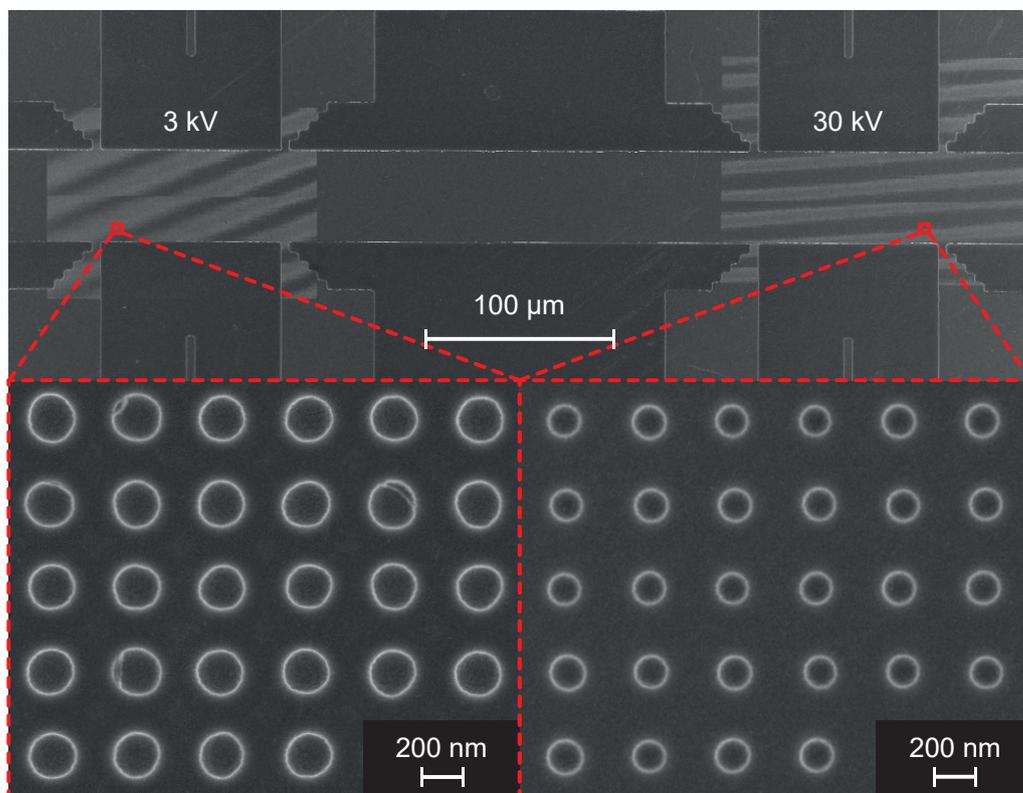
##### 4.2.1.1.1 Strukturierungsparameter

Ein essentieller Bestandteil bei der Strukturierung der Antidot-Übergitter ist die bereits in Abschnitt 3.2.4 beschriebene Elektronenstrahl-Lithographie. Für diese wurden am verwendeten Materialsystem in vorangegangenen Arbeiten [71, 77, 83] am Lehrstuhl Weiss stets hohe Beschleunigungsspannungen vermieden. Dies liegt daran, dass Elektronen mit einer höheren Energie tiefer ins Material eindringen und dort gestreut werden, was nach [71, 77] möglicherweise zu einer Schädigung der Materialqualität aufgrund von Heizeffekten führen könnte. Aus diesem Grund wurden auch in dieser Arbeit erste Untersuchungen mit Antidot-Übergittern gemacht, die mit einer geringen Beschleunigungsspannung von 3 kV fabriziert wurden. Die Verwendung geringer Beschleunigungsspannungen bietet dabei allerdings nicht nur Vorteile. So ist der im Lack auftretende Streuwinkel von eintreffenden Elektronen abhängig von der Energie der Elektronen, wodurch eine Erhöhung der Beschleunigungsspannungen mit einer verringerten Verbreiterung der belichteten Bereiche einhergeht [92–94].

<sup>10</sup>Die Ladungsträgerdichte  $n_s^{top}$  der oberen Oberfläche lässt sich sowohl aus der Periodizität von Oszillationen der Magnetokapazität oder der Periodizität von Niedrigfeld-Shubnikov-de Haas-Oszillationen bestimmen. Siehe hierzu Abschnitt 4.1.

## 4.2 Transport in Antidot-Übergittern

Dies resultiert in einem reduzierten Durchmesser einzelner Lack-Antidots und entsprechend nach dem Ätzvorgang in einem kleineren Antidot-Durchmesser. Dadurch lässt sich ein geringeres Verhältnis  $d/a$  von Durchmesser zu Antidot-Periode erzeugen, was, wie in Abschnitt 2.2.2.1 beschrieben, Vorteile für die Beobachtung von Peaks um mehrere Antidots bringt. Zudem sind Peaks für kleinere  $d/a$  weniger stark verbreitert [95], was eine spätere Auswertung der genauen Peak-Positionen vereinfacht. Aus diesen Gründen wurden auch Übergitter untersucht, die mit 30 kV, der maximalen Beschleunigungsspannung des verwendeten Elektronenmikroskops, fabriziert wurden. Um dabei zu überprüfen, ob die hohe Beschleunigungsspannung einen negativen Effekt auf die Probenqualität besitzt, wurde eine Hall-Bar mit zwei Segmenten untersucht. Diese ist in Abbildung 4.4 dargestellt und erlaubt es, ein 3 kV<sup>11</sup> Antidot-Übergitter direkt mit einem 30 kV<sup>12</sup> Antidot-Übergitter vergleichen zu können. Wie aus der Abbildung ersichtlich besitzen die 30 kV Antidots, wie er-



**Abbildung 4.4** REM-Aufnahme einer strukturierten Hall-Bar mit einem 3 kV und einem 30 kV Antidot-Übergitter mit einer Periode von  $a \approx 408$  nm.

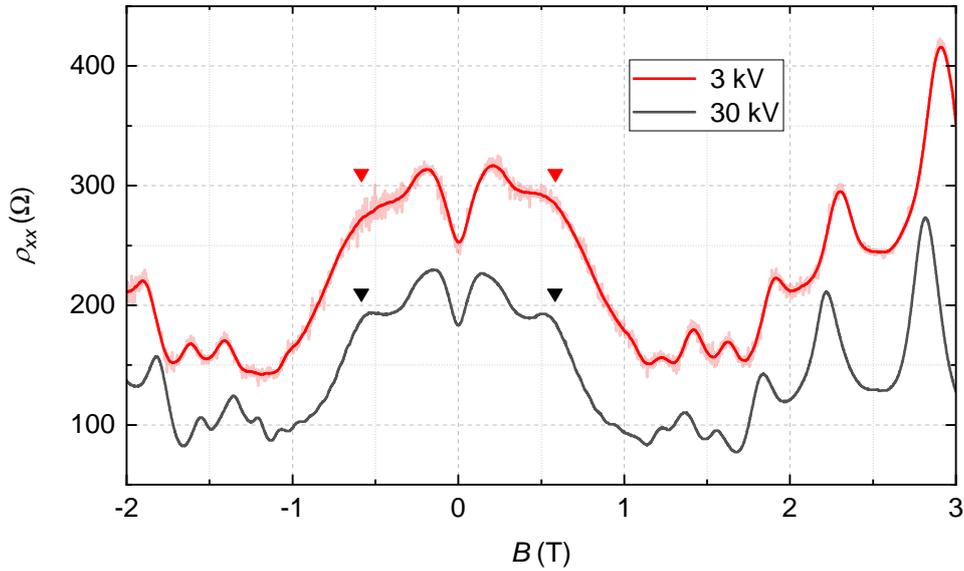
Links: 3 kV Antidots besitzen einen Durchmesser von  $d \approx 220$  nm und eine Tiefe von etwa 83 nm. Rechts: 30 kV Antidots besitzen einen Durchmesser von  $d \approx 170$  nm und eine Tiefe von etwa 74 nm.

wartet, einen deutlich verringerten Durchmesser (trotz erhöhter Ätzzeit) im Ver-

<sup>11</sup>Belichtungs-dosis 3 fC, Ätzzeit: 5 s.

<sup>12</sup>Belichtungs-dosis 7 fC, Ätzzeit: 10 s.

gleich zur Strukturierung mit einer geringen Beschleunigungsspannung von 3 kV. Eine Magnetotransport-Messung beider Messbereiche ist in Abbildung 4.5 dargestellt.



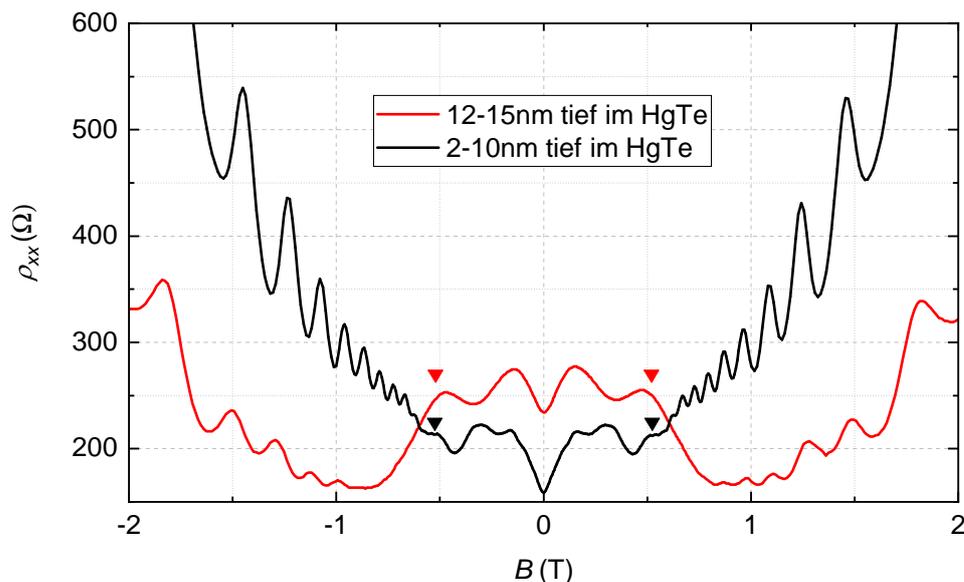
**Abbildung 4.5** Magnetowiderstand der 3 kV und 30 kV Antidot-Übergitter mit einer Periode von  $a = 408$  nm bei  $T \approx 1.4$  K und einer Topgate-Spannung von  $V_g = 3$  V. Die eingezeichneten Pfeile markieren die theoretisch erwarteten Positionen der fundamentalen Antidot-Peaks für die geglättete Messkurve<sup>13</sup> des 3 kV-Messbereichs (rot) und für die Originalkurve des 30 kV-Bereichs (schwarz). Für beide Messbereiche ergibt sich aus den Niedrigfeld-Shubnikov-de Haas-Oszillationen eine ähnliche Ladungsträgerdichte von etwa  $n_s^{top} \approx 2.6 \times 10^{15} \text{ m}^{-2}$ .

Aus der Messung zeigt sich, dass die verwendete Beschleunigungsspannung bei der Fabrikation der Übergitter kaum einen Einfluss auf die Ladungsträgerdichte besitzt. Zudem führt eine Erhöhung der Beschleunigungsspannung, aufgrund des verringerten Durchmessers eines Antidots, erwartungsgemäß zu einer Verringerung des Schichtwiderstands der Probe. Neben dem verringertem Schichtwiderstand besitzen die Messungen aus dem 30 kV-Messbereich zudem definierter ausgeprägte Peaks. Somit scheint eine hohe Beschleunigungsspannungen keinen offensichtlichen negativen Einfluss auf die Probenqualität zu haben. Wegen der Vorteile bei der Verwendung von hohen Beschleunigungsspannungen wurde deshalb bei der Elektronenstrahl-Lithographie für alle weiteren Proben stets eine Spannung von 30 kV verwendet.

<sup>13</sup>Die Originalkurve (transparent im Hintergrund) des 3 kV-Bereichs wurde mit dem gleitenden Durchschnitt geglättet. Das Rauschen in der Originalkurve ist hierbei wahrscheinlich durch den verwendeten Lock-In-Verstärker bedingt, weshalb nur die Messdaten des 3 kV-Bereichs ein derartiges Rauschen aufweisen.

## 4.2.1.1.2 Ätztiefe

Wie bereits in Abschnitt 4.2.1 erläutert, ist die in dieser Arbeit verwendete Herangehensweise zur Erzeugung des starken Antidot-Potentials das Anätzen der HgTe-Schicht. Hierfür wurde stets versucht einige Nanometer tief in die HgTe-Schicht zu ätzen, wobei die genaue Ätztiefe immer mit einem Rasterkraftmikroskop (AFM<sup>14</sup>) ermittelt wurde. Dabei zeigte sich bei der Auswertung verschiedener Proben im Transportexperiment, dass es nicht ausreicht nur wenige Nanometer tief in die HgTe-Schicht hinein zu ätzen. Dies ist in Abbildung 4.6 für zwei Proben mit einem quadratischen  $a \approx 408$  nm Antidot-Gitter und verschiedener Ätztiefe dargestellt.



**Abbildung 4.6** Transportmessungen von  $a = 408$  nm Antidot-Gittern mit verschiedener Antidot-Tiefe.

Beide Messungen entstammen von unterschiedlichen Proben, die sich durch die Ätztiefe voneinander unterscheiden. Für beide Proben ergibt sich bei einer Topgate-Spannung von  $V_g = 2.4$  V aus den Niedrigfeld-Shubnikov-de Haas-Oszillationen eine ähnliche Ladungsträgerdichte von etwa  $n_s^{top} \approx 2.1 \times 10^{15} \text{ m}^{-2}$ . Mit dieser Ladungsträgerdichte lassen sich die theoretischen Positionen der fundamentalen Antidot-Peaks für beide Proben bestimmen (eingezeichnete Dreiecke). Für eine Ätztiefe von über 72 nm (12 nm im HgTe) zeigen sich im Experiment deutlich ausgeprägte Peaks. Ist die Ätztiefe allerdings geringer, so ist der fundamentale Antidot-Peak hingegen kaum noch erkennbar.

Aus den Messkurven lässt sich erkennen, dass bei einer geringen Ätztiefe von etwa 2-10 nm im HgTe der fundamentale Antidot-Peak, welcher typischerweise am deutlichsten ausgeprägt ist, nur sehr schwach in der Transportkurve sichtbar ist. Erst bei Antidot-Gittern mit einer Ätztiefe ab etwa 12 nm im HgTe zeigen sich deutlich

<sup>14</sup>Atomic Force Microscope

ausgeprägte Kommensurabilitäts-Peaks, was auf das Vorhandensein eines starken Antidot-Potentials hindeutet. Daraus lässt sich schließen, dass die Ätztiefe einen entscheidenden Einfluss auf die Stärke des erzeugten Potentials besitzt. So zeigte sich in der Arbeit von F. Giesel [96] am selben Materialsystem, dass bereits das Anätzen der oberen CdTe-Deckschicht in einem schwachen Potential resultiert und die Ätztiefe mit der Potentialstärke korreliert.

Um im Folgenden den Einfluss eines starken Antidot-Potentials auf die Oberflächenzustände detaillierter untersuchen zu können, wurde nach diesen Erkenntnissen für weitere Proben stets versucht eine Antidot-Tiefe von über 12 nm im HgTe zu erreichen.

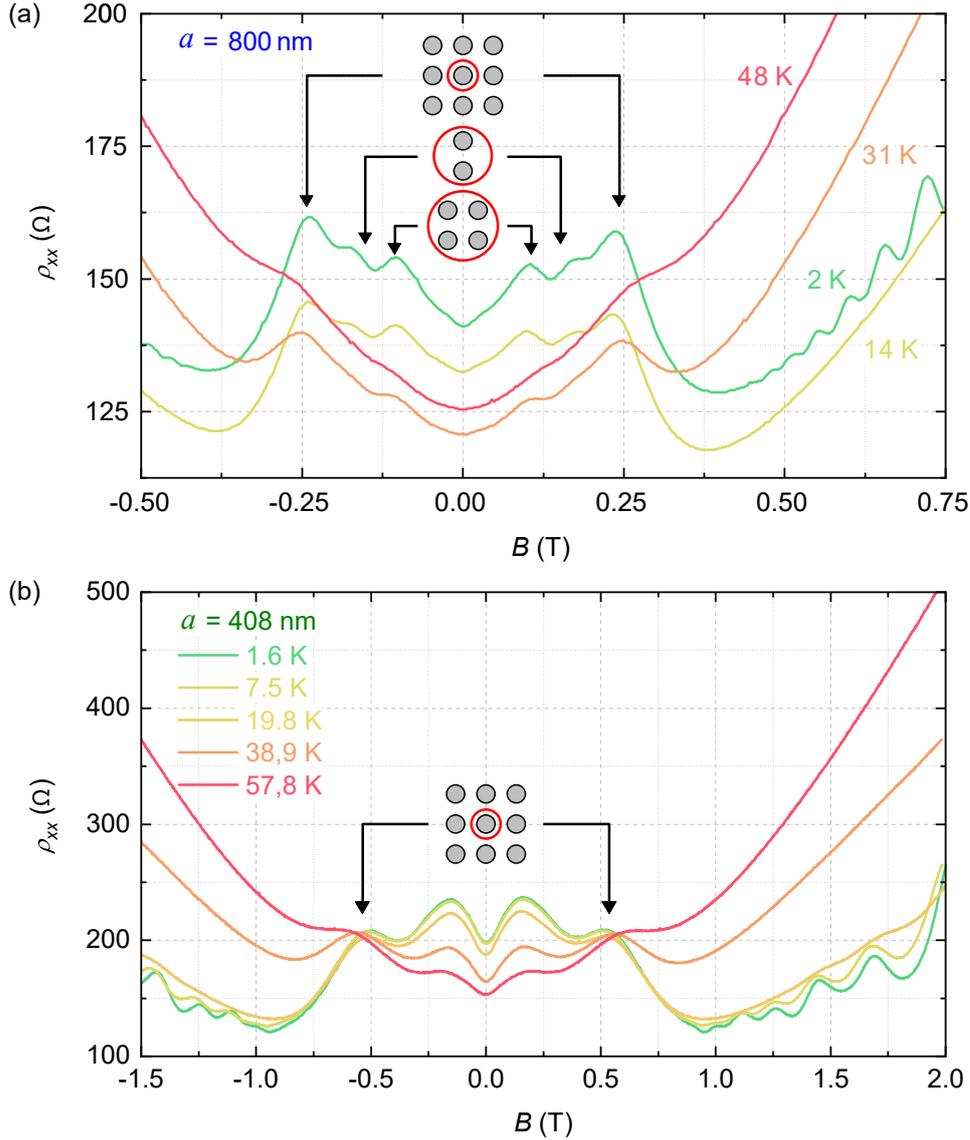
#### 4.2.1.2 Quadratisches Antidot-Übergitter

Nach der vorangegangenen grundlegenden Betrachtung der erzeugten quadratischen Antidot-Übergitter erfolgt in diesem Kapitel eine weitaus detailliertere Analyse der beobachteten Peaks in Proben mit Gitterperioden von  $a = 408$  nm,  $a = 600$  nm und  $a = 800$  nm. Die in diesem Abschnitt gezeigten Ergebnisse wurden bereits zu einem Großteil in [7] veröffentlicht und sind daraus entnommen.

Hierbei wird zunächst auf die Temperaturabhängigkeit der beobachteten Peaks eingegangen. Besitzt das System eine endliche Temperatur, so führt dies im Allgemeinen zu einem Ausschmieren der scharfen Fermi-Kante über einen Energiebereich von  $\approx k_B T$  [37]. Dies hat zur Folge, dass Quantisierungseffekte, wie Shubnikov-de Haas-Oszillationen, nur dann im Experiment beobachtbar sind solange die thermische Streuverbreiterung kleiner ist als der Abstand zwischen zwei Landau-Niveaus (siehe Gleichung 2.44). Beruht ein beobachteter Effekt allerdings auf klassischen kommensurablen Bahnen, so ergibt sich durch die thermische Verschmierung der Fermi-Kante nur eine geringe Temperaturabhängigkeit [8,97]. Dies lässt sich gut an den in Abbildung 4.7 dargestellten Transportmessungen für Übergitter mit  $a = 800$  nm (a) und  $a = 408$  nm (b) erkennen. So klingen Shubnikov-de Haas-Oszillationen mit steigender Temperatur zunehmend ab und sind ab etwa 14 K weitestgehend verschwunden wohingegen Widerstands-Peaks bis hin zu  $\approx 50$  K gut sichtbar bleiben. Daraus lässt sich schließen, dass die beobachteten Peaks auch hier einen semi-klassischen Ursprung durch kommensurable Bahnen besitzen.

Der Magnetotransport in einem solchen System aus Antidots ermöglicht nun, wie in Gleichung 4.2 erkennbar, eine direkte Bestimmung des Fermi-Wellenvektors  $k_F$ . Hierzu ist es nötig den Magnetfeldwert, an dem ein Widerstands-Peak auftritt, zu kennen. Um daraus einen Zusammenhang zwischen dem Fermi-Wellenvektor und der Ladungsträgerdichte herzustellen zu können, muss die Ladungsträgerdichte  $n_s^{top}$  der strukturierten Oberfläche bekannt sein. Diese lässt sich, wie bereits in Abschnitt 4.1 beschrieben, sowohl aus der Periodizität von Niedrigfeld-Shubnikov-de Haas-Oszillationen als auch aus der Periodizität von Oszillationen der Magnetkapazität bestimmen [75]. Für die anschließende Auswertung wurde die Ladungsträ-

## 4.2 Transport in Antidot-Übergittern



**Abbildung 4.7** Temperaturabhängigkeit der Transportkurven.

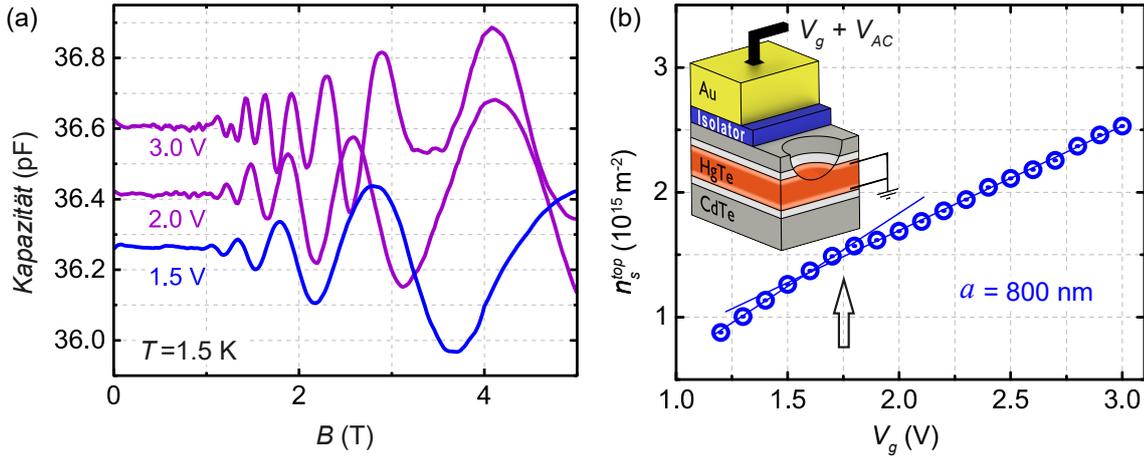
(a) Längswiderstand  $\rho_{xx}(B)$  der 800 nm Antidot-Probe bei verschiedenen Temperaturen und einer Ladungsträgerdichte von  $n_s^{top} \approx 1.7 \times 10^{15} \text{ m}^{-2}$ . Hierbei treten deutlich ausgeprägte Widerstands-Peaks auf, die sich kommensurablen Bahnen um 1, 2 und 4 Antidots zuordnen lassen. Eingezeichnete Pfeile markieren dabei die, nach Gleichung 4.2 und 4.3, berechneten theoretischen Positionen dieser Widerstandsmaxima. Nach [7]. (b) Längswiderstand  $\rho_{xx}(B)$  der 408 nm Antidot-Probe bei verschiedenen Temperaturen und einer Ladungsträgerdichte von  $n_s^{top} \approx 2.2 \times 10^{15} \text{ m}^{-2}$ . Auch hier tritt ein deutlich ausgeprägtes Widerstandsmaximum auf, welches sich einer kommensurablen Bahn um einen Antidot zuordnen lässt. Die eingezeichneten Pfeile markieren hier die nach Gleichung 4.2 ermittelte Position des fundamentalen Antidot-Peaks. Im Vergleich zu Shubnikov-de Haas-Oszillationen weisen die beobachteten Widerstands-Peaks in beiden Fällen eine deutlich verringerte Temperaturabhängigkeit auf.

gerdichte  $n_s^{top}$  primär durch Magnetokapazitäts-Oszillationen ermittelt. Die Kapazität wird dabei bestimmt, indem man eine AC-Spannung zusätzlich zur angelegten DC-Topgate-Spannung anlegt und den gemessenen Wechselstrom phasensensitiv detektiert [75]. Dies ist schematisch im Insert aus Abbildung 4.8(b) dargestellt. Im Experiment wurde hierfür eine Andeen-Hagerling (AH) 2700A Kapazitätsbrücke<sup>15</sup> verwendet, an welcher für die Messung eine AC-Spannung von 0.01 V mit einer Frequenz von 50 Hz eingestellt wurde. Auf diese Art gemessene Kapazitätsoszillationen sind in Abbildung 4.8(a) für eine Probe mit  $a = 800$  nm bei verschiedenen Gate-Spannungen gezeigt. Kapazitätsmessungen sind dabei nur auf einen mit einem Topgate bedeckten Bereich der Hall-Bar beschränkt. Separierte Topgates im Proben-Design aus Abschnitt 3.2.1 bieten somit die Möglichkeit die Kapazität einzelner Bereiche getrennt voneinander bestimmen zu können. Um die Ladungsträgerdichte an der Oberseite eines strukturierten Hall-Bar-Segments ermitteln zu können ist es jedoch wichtig, dass der gesamte Bereich unterhalb des Topgates strukturiert ist (wie bereits in Abbildung 3.3(a) dargestellt). Ermittelt man bei der  $a = 800$  nm Probe aus der Periodizität der Magnetokapazität die Ladungsträgerdichte<sup>16</sup>, ergibt sich der in Abbildung 4.8(b) abgebildete Verlauf. Dieser zeigt auch hier den, für die Ladungsträgerdichte  $n_s^{top}$  einer einzelnen topologischen Oberfläche typischen, Knick am Übergang der Fermi-Energie in das Leitungsband (in diesem Fall bei etwa  $V_g = 1.75$  V). Mit Hilfe der Kapazitätsmessung und der Magnetotransportmessungen lässt sich nun, wie auch in Abschnitt 4.1 beschrieben, ein vollständiges Bild über die einzelnen Ladungsträgerdichten im System ausarbeiten. Dies ist in Abbildung 4.9 am Beispiel der  $a = 800$  nm Probe für einige Ladungsträgerdichten dargestellt. Hierbei ist die Gesamtladungsträgerdichte von Elektronen ( $n_s^{ges}$ ) und Löchern ( $p_s^{ges}$ ) neben der Ladungsträgerdichte von Elektronen an der oberen Oberfläche ( $n_s^{top}$ ) eingetragen. Durch eine lineare Interpolation der Lochdichte hin zu  $p_s^{ges} = 0$ , kann der Topgate-Spannungswert ermittelt werden, ab dem die Fermi-Energie das Valenzband betritt. Insgesamt kann dadurch abgeschätzt werden, dass sich die Fermi-Energie in dieser Probe für Gate-Spannungswerte zwischen  $V_g = 1.2$  V und 1.75 V in der Bandlücke befindet (grau markierter Bereich in Abbildung 4.9).

Mit diesen Erkenntnissen lässt sich überprüfen, wie sich der fundamentale Antidot-Peak in einzelnen Bereichen (Valenzband, Bandlücke und Leitungsband) der Bandstruktur (schematisch in Abbildung 4.10(a) abgebildet) mit der Topgate-Spannung entwickelt. Dies ist in Abbildung 4.10(b) beispielhaft anhand der  $a = 800$  nm Probe dargestellt. Für jede Kurve ist der mittels  $n_s^{top}$  berechnete Magnetfeldwert  $B_1$  des fundamentalen Antidot-Peaks (siehe Gleichung 4.2) eingezeichnet. Für den Gate-Spannungsbereich innerhalb der Bandlücke (dunkelblaue Kurven), in der der Transport nur durch Oberflächenzustände gegeben ist, lässt sich der fundamentale Antidot-Peak sehr gut durch den berechneten Wert  $B_1(n_s^{top})$  beschreiben. Betritt die Fermi-Energie das Leitungsband (violette Kurven), so sind nun neben den Oberflächen-

<sup>15</sup>Für Details zur Andeen-Hagerling (AH) 2700A Kapazitätsbrücke und den Messaufbau siehe [90].

<sup>16</sup>siehe hierzu Kapitel 4.1



**Abbildung 4.8** Magnetkapazitäts-Oszillationen und die daraus berechnete Ladungsträgerdichte am Beispiel der  $a = 800$  nm Probe.

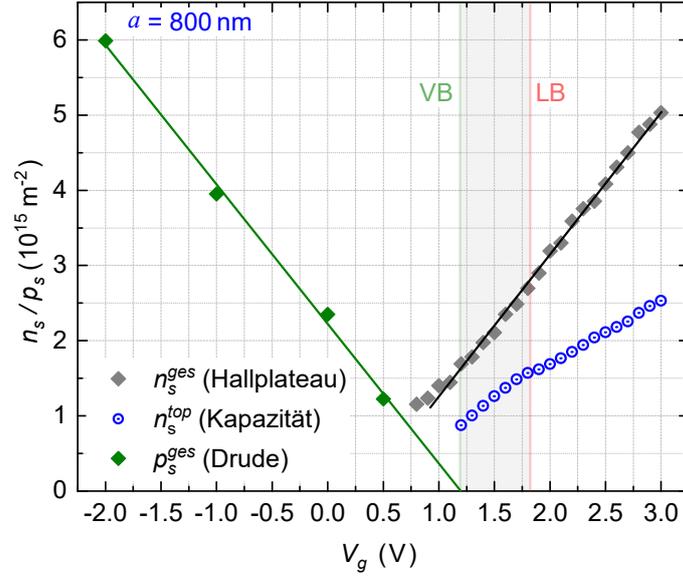
(a) Die dargestellten  $1/B$ -periodischen Oszillationen<sup>17</sup> der Magnetkapazität reflektieren die Landau-Quantisierung der Dirac-Elektronen an der oberen Oberfläche. Diese sind für Topgate-Spannungen in der Bandlücke (blau) und im Leitungsband (lila) bei einer Temperatur von  $T \approx 1.5$  K dargestellt. (b) Aus diesen Oszillationen ergibt sich die Ladungsträgerdichte der oberen Oberfläche mittels Gleichung 2.47 zu  $n_s^{top} = e/(2\pi\hbar\Delta(1/B))$  (hier mit blauen Punkten dargestellt). Der eingezeichnete Pfeil markiert die Gate-Spannung ( $V_g \approx 1.75$  V) am Übergang der Fermi-Energie in das Leitungsband, an der sich die Füllrate  $dn_s^{top}/dV_g$  ändert. So ändert sich die Füllrate von  $1.22 \times 10^{15} \text{ m}^{-2}\text{V}^{-1}$  bei  $V_g < 1.75$  V zu  $0.87 \times 10^{15} \text{ m}^{-2}\text{V}^{-1}$  für  $V_g > 1.75$  V.

Insert: Schematischer Aufbau der Kapazitätsmessung. Hierbei wird der, für die Variation der Fermi-Energie benötigten, DC-Topgate-Spannung ein kleines AC-Signal überlagert und der resultierende AC-Strom phasensensitiv gemessen. Nach [7].

zuständen auch Volumenzustände am Transport beteiligt. Trotz dem Vorliegen weiterer Zustände bleibt der fundamentale Antidot-Peak immer noch sehr gut mit  $B_1(n_s^{top})$  beschreibbar. Dies deutet darauf hin, dass die auftretenden geometrischen Resonanzen tatsächlich nur von einer einzelnen Oberfläche (der oberen Oberfläche) stammen und Volumenzustände nicht daran beteiligt sind. Geht man mit der Fermi-Energie in das Valenzband (hellblaue Kurven), dann zeigt sich, dass die Antidot-Peaks mit abnehmender Topgate-Spannung zunehmend verschwinden. Unterhalb einer Spannung von etwa  $V_g = 1$  V, also nahe des Ladungsneutralitätspunktes (siehe Abbildung 4.11(a)), sind Antidot-Peaks bereits kaum mehr sichtbar. Somit scheinen die geometrischen Resonanzen durch das starke Antidot-Potential auch im Valenzband nur von Elektronen aus der oberen Oberfläche zu stammen.

Für den Vergleich verschiedener Perioden ist in Abbildung 4.11(a) der Schichtwiderstand  $\rho_{\square} = \rho_{xx}(B = 0)$  als Funktion der Gate-Spannung für einen unstrukturierten Referenzbereich und für die drei untersuchten Perioden dargestellt. Die Maxima von

<sup>17</sup>Die abgebildeten Kurven wurden mit Hilfe des gleitenden Durchschnitts geglättet: 8 Punkte bei  $V_g = 1.5$  V, 7 Punkte bei  $V_g = 2$  V und 5 Punkte bei  $V_g = 3$  V.



**Abbildung 4.9** Ladungsträgerdichten von Elektronen ( $n_s$ ) und Löchern ( $p_s$ ) in der  $a = 800$  nm Probe als Funktion der Topgate-Spannung.

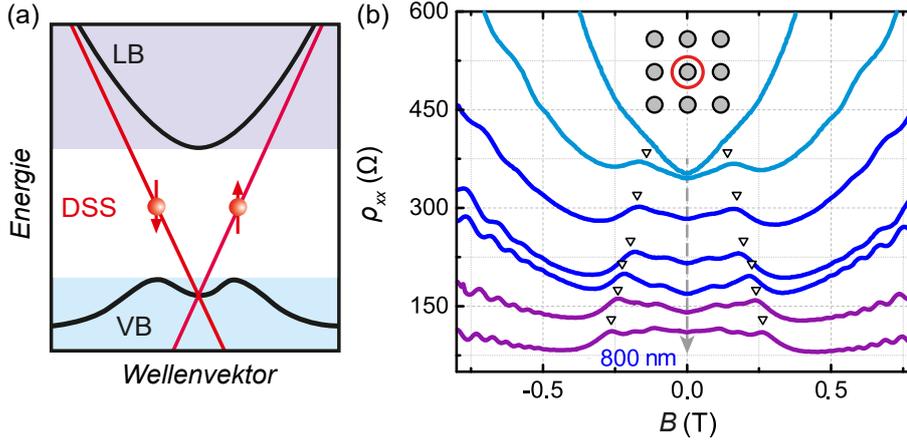
Die Gesamtladungsträgerdichte  $n_s^{ges}$  von Elektronen im System wurde hierbei über Quanten-Hall-Plateaus berechnet (siehe Abschnitt 4.1). Der Eintritt der Fermi-Energie in das Valenzband (VB) wird über die lineare Extrapolation der Gesamtlochdichte  $p_s^{ges}$  (mittels zwei-Ladungsträger Drude-Modell bestimmt) hin zu  $p_s^{ges} = 0$  ermittelt. Der Übergang in das Leitungsband geht mit einer Steigungsänderung der Ladungsträgerdichte der oberen Oberfläche  $n_s^{top}$  (aus Magnetokapazitäts-Oszillationen bestimmt) einher. Der dadurch erhaltene Spannungsbereich der Bandlücke zwischen Valenz- und Leitungsband ist hier in Grau hervorgehoben.

$\rho_{\square}$  zwischen  $V_g \approx 0.5$  V und 1 V reflektieren dabei, wie in Abschnitt 4.1 beschrieben, den Ladungsneutralitätspunkt. Dieser befindet sich, wie in der schematischen Bandstruktur aus Abbildung 4.10(a) dargestellt, geringfügig im Valenzband und verdeutlicht in etwa bis zu welcher Gate-Spannung Antidot-Peaks im Experiment beobachtbar sind.

Wie die Position des fundamentalen Antidot-Peaks mit der Periode zusammenhängt, ist in Abbildung 4.11(b) für die drei untersuchten Perioden bei konstanter Ladungsträgerdichte  $n_s^{top}$  dargestellt.

In der Abbildung ist wieder die berechnete Position  $B_1$  des fundamentalen Peaks für jede Periode eingezeichnet, welche auch hier sehr gut mit der experimentellen Position des fundamentalen Maximums übereinstimmt. Zudem ist die berechnete Position von Kreisbahnen um zwei ( $B_2$ ) und um vier ( $B_4$ ) Antidots für die  $a = 600$  nm und  $a = 800$  nm Probe eingezeichnet. Für all diese Berechnungen wurde stets von einem nicht spinentarteten Fermi-Wellenvektor mit  $k_F = \sqrt{4\pi n_s^{top}}$ , wie im Insert aus Abbildung 4.12 veranschaulicht, ausgegangen. Dies führt zusammen mit der sehr guten Übereinstimmung der gemessenen und berechneten Antidot-Positionen

## 4.2 Transport in Antidot-Übergittern



**Abbildung 4.10** Schematische Bandstruktur und Magnetowiderstand der  $a = 800$  nm Probe in Abhängigkeit der Gate-Spannung.

(a) Schema der vorliegenden Bandstruktur mit farbig markierten Bereichen für das Valenzband (VB), das Leitungsband (LB) und die Bandlücke mit eingezeichneten Dirac-Oberflächenzuständen (DSS<sup>18</sup>) (b) Längswiderstand  $\rho_{xx}(B)$  in Abhängigkeit des Magnetfeldes bei verschiedenen Gate-Spannungen  $V_g = 0.8, 1, 1.2, 1.4, 1.7, 2, 2.4$  V (von oben nach unten). Die Richtung steigender Fermi-Energie ist hierbei durch einen gestrichelten Pfeil (grau) verdeutlicht. Für jede einzelne Kurve wurde mittels  $n_s^{top}$  die theoretische Magnetfeldposition des fundamentalen Antidot-Peaks, welcher zu einer Zyklotronbahn um einen einzelnen Antidot (im Insert rot abgebildet) gehört, ermittelt. Die berechneten Peak-Positionen sind hier durch Pfeile markiert. Nach [7].

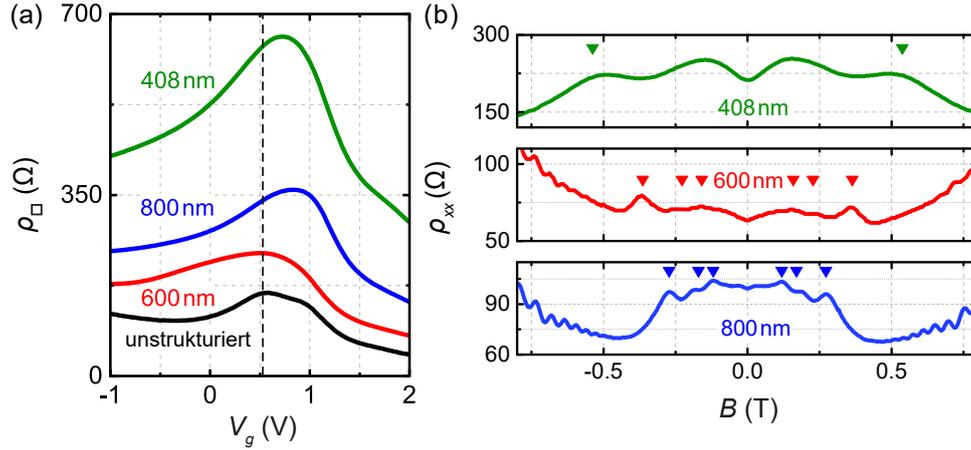
zu der Annahme, dass die beobachteten geometrischen Resonanzen nur von helikalen Dirac-Oberflächenzuständen stammen und es zudem ermöglichen, nur eine einzelne topologische Oberfläche zu untersuchen.

Die Annahme, dass die beobachteten geometrischen Resonanzen nur für eine einzelne topologische Oberfläche sensitiv sind, kann durch Abbildung 4.12 noch weiter verdeutlicht werden. Hierfür wird durch Umformung von Gleichung 4.2 aus der experimentellen Magnetfeldposition  $B_1$  des fundamentalen Antidot-Peaks die dazu zugehörige Ladungsträgerdichte mit

$$n_s^{top} = \frac{(eaB_1)^2}{16\pi\hbar^2} \quad (4.4)$$

berechnet. Dadurch ergeben sich die, in Abbildung 4.12(a) als rote Kreise eingezeichneten, Datenpunkte für die  $a = 800$  nm Probe. Diese Daten ähneln dabei stark den bereits in Abbildung 4.8(b) dargestellten Datenpunkten aus der Kapazitätsmessung, die in Abbildung 4.12(a) als blaue Kreise eingezeichnet sind. So besitzt in Analogie zu den Kapazitätsdaten auch der Verlauf der berechneten Ladungsträgerdichte aus dem Antidot-Peak bei einer Gate-Spannung von etwa  $V_g = 1.75$  V eine Änderung der Steigung. Diese Änderung des Füllfaktors  $dn_s/dV_g$  in den Antidot-Daten im Vergleich zum konstanten Füllfaktor der Gesamtladungsträgerdichte der

<sup>18</sup>Dirac Surface States



**Abbildung 4.11** Schichtwiderstand und Magnetowiderstand von drei Antidot-Übergittern.

(a) Schichtwiderstand  $\rho_{\square} = \rho_{xx}(B = 0)$  als Funktion der Topgate-Spannung. Abgebildet sind hierbei ein unstrukturierter Referenzbereich und drei Antidot-Übergitter mit  $a = 408, 600$  und  $800$  nm. Der Ladungsneutralitätspunkt des Referenzbereichs ist dabei durch eine gestrichelte Linie hervorgehoben. (b) Magnetowiderstand  $\rho_{xx}(B)$  der drei untersuchten Perioden<sup>19</sup>. Für die bessere Vergleichbarkeit wurde mit der Gate-Spannung die Ladungsträgerdichte für alle Proben auf  $n_s^{top} \approx 2.2 \times 10^{15} \text{ m}^{-2}$  angeglichen. Pfeile markieren hier die berechnete Position des fundamentalen Antidot-Peaks bei  $B_1$ . Für die 600 nm und 800 nm Proben wurden zudem die berechneten Positionen für  $B_2$  und  $B_4$  markiert. Nach [7].

$a = 800$  nm Probe (siehe oberen Insert aus Abbildung 4.12(a)) ist ein deutliches Anzeichen dafür, dass die beobachteten geometrischen Resonanzen tatsächlich nur von Zuständen einer einzelnen topologischen Oberfläche stammen.

Um zu überprüfen, ob dies für alle untersuchten Perioden gleichermaßen gilt, wurde eine Auftragung der Proben über den gesamten Ladungsträgerdichtebereich, in dem Antidot-Peaks im Experiment sichtbar sind, angefertigt. Dies ist in Abbildung 4.12(b) gezeigt. Hierbei wurde für jede Periode für eine bestimmte Gate-Spannung  $V_g$  aus dem Längswiderstand  $\rho_{xx}$  der Magnetfeldwert  $B_1$  der fundamentalen Antidot-Resonanz gegen die, aus den Magnetkapazitäts-Oszillationen bestimmte, Ladungsträgerdichte  $n_s^{top}(V_g)$  aufgetragen. Die daraus für jede Periode erhaltenen Datenpunkte (farbige Dreiecke) werden dabei mit dem theoretisch erwarteten Wert von  $B_1(n_s)$  (durchgezogene farbige Linien) aus Gleichung 4.2 verglichen. Für die beiden Perioden 600 nm und 800 nm zeigt sich unter der Annahme, dass die geometrischen Resonanzen nur von Ladungsträgern  $n_s^{top}$  der oberen Oberfläche stammen, eine sehr gute Übereinstimmung der experimentellen Daten mit der theoretischen Erwartung. Im Fall der  $a = 408$  nm Probe zeigt sich hingegen eine gewisse Diskrepanz von etwa

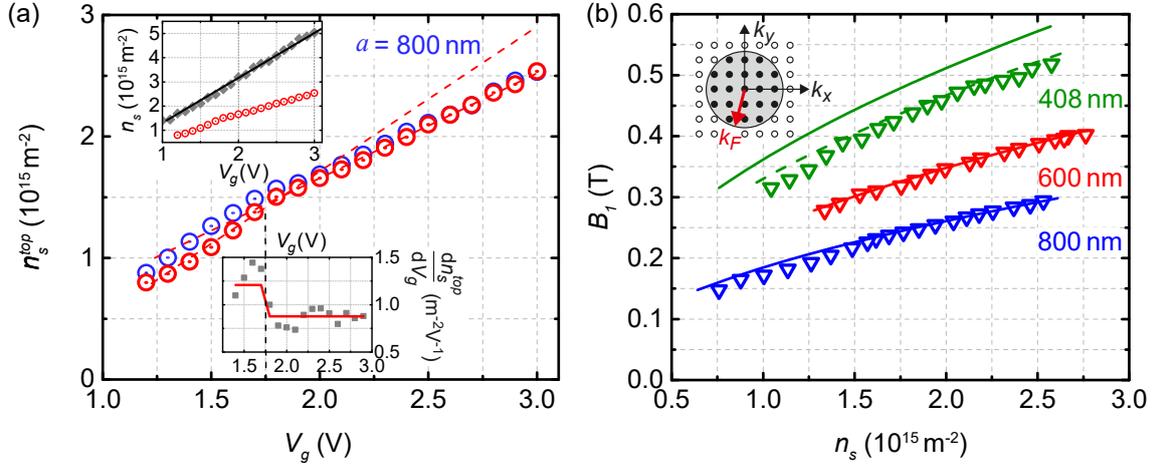
<sup>19</sup>Typischerweise steigt der Schichtwiderstand einer Probe mit sinkender Antidot-Periode (unter sonst gleichen Bedingungen). Der verringerte Schichtwiderstand der 600 nm Probe wird dabei einer verlängerten Exposition von  $80^\circ\text{C}$  während des Isolatorwachstums zugeschrieben.

## 4.2 Transport in Antidot-Übergittern

10% zum theoretisch erwarteten Verlauf. Diese beruht darauf, dass in dieser Probe nicht der komplette Bereich unterhalb des Topgates mit Antidots strukturiert ist, sondern hier nur ein Anteil von etwa 18%<sup>20</sup>. Entsprechend ist die aus den Kapazitätsmessungen erhaltene Ladungsträgerdichte ein Durchschnittswert, der durch den großen Anteil eines unstrukturierten Bereichs etwas höher ist als die Ladungsträgerdichte in einem reinen Antidot-Gitter. Nimmt man nun eine um etwa 20% reduzierte Ladungsträgerdichte in den strukturierten im Vergleich zu unstrukturierten Bereichen an, was ein plausibler Wert für das vorliegende System ist, so ergibt sich ein neuer theoretischer Verlauf ( $B_1(n_s \cdot 1.2)$ ) mit einer angepassten Ladungsträgerdichte (grün gestrichelte Kurve), der auch hier sehr gut mit den experimentellen Daten übereinstimmt.

---

<sup>20</sup>Die Probe besitzt das in Abbildung 3.2 dargestellte Probendesign mit globalem Topgate und strukturierten Flächen nur im Bereich der beiden 100  $\mu\text{m}$  Hall-Bar-Segmente.

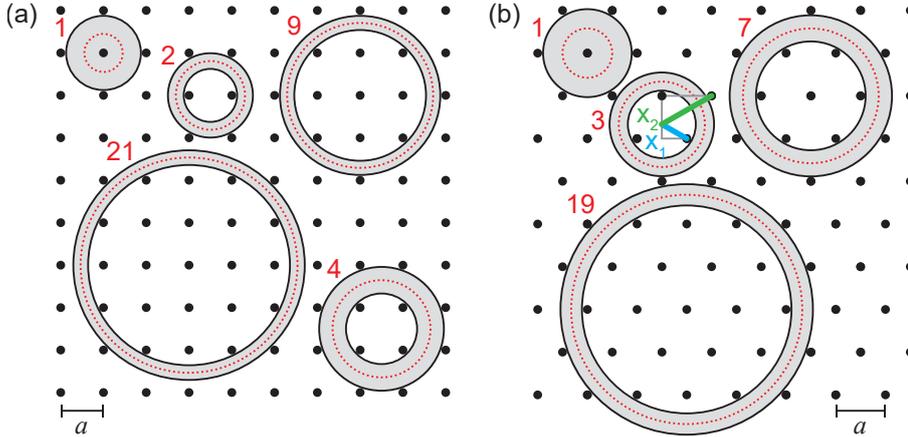


**Abbildung 4.12** Auswertung der geometrischen Resonanzen.

(a) Aus der im Experiment beobachteten Position des fundamentalen Antidot-Peaks bei  $B_1$  lässt sich mit Gleichung 4.4 ein Wert für die zugehörige Ladungsträgerdichte  $n_s^{\text{top}}$  berechnen. Diese ist hier durch rote Kreise illustriert und zeigt bei etwa  $V_g = 1.75$  V (gestrichelte Linie) eine Steigungsänderung. Die Steigungsänderung ist im unteren Insert noch einmal verdeutlicht. Hierbei zeigen die grauen Punkte jeweils die durchschnittliche Steigung dreier aufeinander folgender Punkte. Die rote durchgezogene Kurve im Insert zeigt dabei den besten Fit, welcher auch im Hauptgraphen für Werte oberhalb und unterhalb von  $V_g = 1.75$  V durch die rot gestrichelten Linien dargestellt ist. Hierbei ergibt sich für die Bandlücke eine Füllrate von  $1.21 \times 10^{15} \text{ m}^{-2} \text{ V}^{-1}$  und für eine Fermi-Energie im Leitungsband eine Füllrate von  $0.84 \times 10^{15} \text{ m}^{-2} \text{ V}^{-1}$ . Diese Werte sind sehr ähnlich zu denen, die aus Magnetokapazitäts-Oszillationen bestimmt wurden und hier in Blau eingezeichnet sind. Der obere Insert zeigt den erhaltenen Verlauf im Vergleich zur, bereits in Abbildung 4.9 gezeigten, Gesamtladungsträgerdichte (grau) mit konstanter Füllrate. (b) Magnetfeldposition  $B_1$  des fundamentalen Antidot-Peaks in Abhängigkeit der experimentell zu dieser Gate-Spannung bestimmten Ladungsträgerdichte (aus Magnetokapazitäts-Oszillationen). Die durchgezogene Linie zeigt zum Vergleich den, mittels Gleichung 4.2 bestimmten, erwarteten Magnetfeldwert  $B_1(n_s)$ . Da für die  $a = 408$  nm Probe nicht der gesamte Bereich unterhalb des Gates mit Antidots strukturiert ist, ist hier durch eine gestrichelte Linie der berechnete Verlauf von  $B_1(n_s)$  mit angepasster Ladungsträgerdichte dargestellt. Das Insert zeigt ein schematisches Bild des vorliegenden  $\mathbf{k}$ -Raums, in welchem die besetzten Zustände (schwarze Punkte) innerhalb des Fermi-Kreises mit Radius  $k_F$  liegen. Die einzelnen Zustände sind dabei nicht spinentartet. Nach [7].

### 4.2.1.3 Hexagonales Antidot-Übergitter

Um die im vorherigen Abschnitt beschriebenen Ergebnisse zu verallgemeinern, erfolgt hier eine Untersuchung der geometrischen Resonanzen in einem anderen Gitter. Hierfür wird im Folgenden ein hexagonales Übergitter untersucht, da für dieses andere Kommensurabilitätsbedingungen gelten als im quadratischen Gitter. Dies ist in Abbildung 4.13 anhand von Kreisbahnen im Gitter veranschaulicht.



**Abbildung 4.13** Kommensurable Bahnen im quadratischen und hexagonalen Antidot-Gitter.

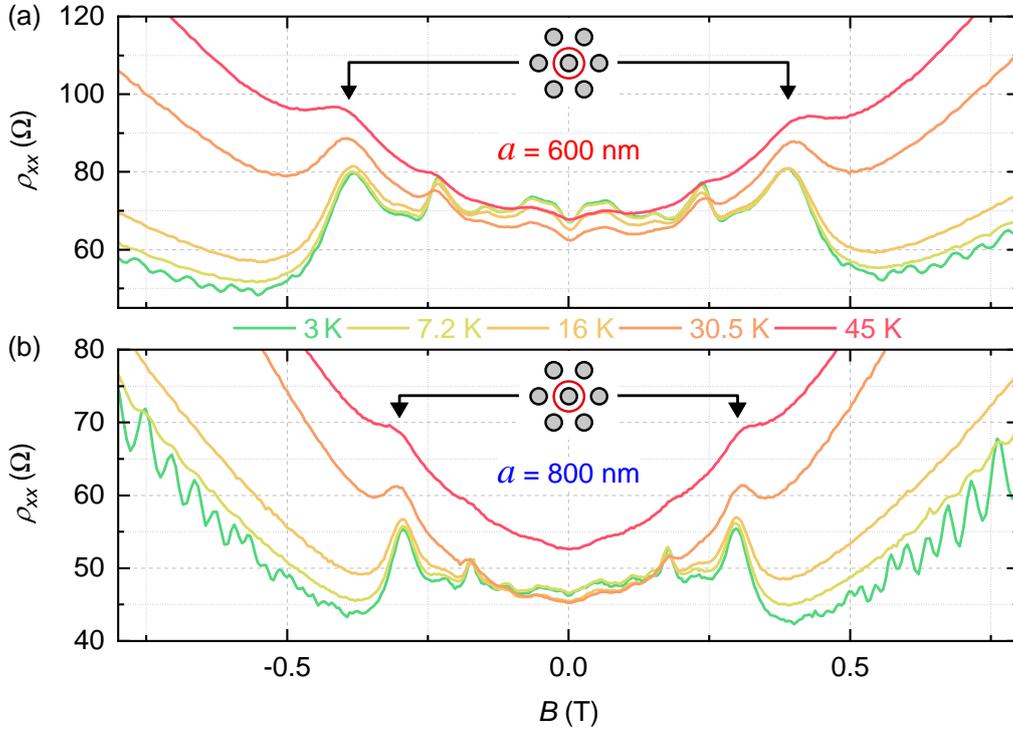
(a) Im quadratischen Gitter sind beispielsweise Kreisbahnen um 1, 2, 4, 9 und 21 Antidots geometrisch möglich. Die Kommensurabilitäts-Bedingungen ergeben sich dabei, wie in Abschnitt 2.2.2.1 beschrieben, aus der mittleren Kreisbahn (rot gestrichelt). Hierbei ergeben sich im quadratischen Gitter für die einzelnen kommensurablen Bahnen zu:  $\hat{R}_{c,1} = 0.5a$ ,  $\hat{R}_{c,2} = 0.8a$ ,  $\hat{R}_{c,4} = 1.14a$ ,  $\hat{R}_{c,9} = 1.7a$  und  $\hat{R}_{c,21} = 2.53a$  [8]. (b) Im hexagonalen Gitter sind hingegen unter anderem Kreisbahnen um 1, 3, 7 und 19 Antidots möglich. Auch hier lässt sich die Kommensurabilitäts-Bedingung<sup>21</sup> aus dem Mittelwert (rot gestrichelte Bahn) zwischen minimal und maximal erlaubter Bahn um eine bestimmte Anzahl an Antidots bestimmen. Nur die Bahn um einen Antidot ist dabei bei gleicher Periode  $a$  identisch zur Bahn im quadratischen Gitter. Somit ergeben sich die Kommensurabilitäts-Bedingungen im hexagonalen Gitter zu:  $\hat{R}_{c,1}^{hex} = 0.5a$ ,  $\hat{R}_{c,3}^{hex} = 0.87a$ ,  $\hat{R}_{c,7}^{hex} = 1.37a$ ,  $\hat{R}_{c,7}^{hex} = 1.37a$  [29] und  $\hat{R}_{c,19}^{hex} = 2.32a$ .

So sind im hexagonalen Gitter beispielsweise Kreisbahnen um 3 oder 7 Antidots realisierbar, welche in einem quadratischen Gitter geometrisch nicht möglich sind. Wie sich der Wechsel auf ein hexagonales Gitter mit anderen Kommensurabilitäts-

<sup>21</sup>Die Bestimmung der Kommensurabilitäts-Bedingung ist in der Abbildung am Beispiel der Bahn um 3 Antidots dargestellt: Der minimale Radius ergibt sich dabei aus  $r_{min} = x_1 + d/2$ , wobei  $d$  der Durchmesser eines Antidots ist und  $x_1 = a/(2 \cdot \cos(30^\circ))$ . Der maximale Radius ist  $r_{max} = x_2 - d/2$  mit  $x_2 = a/\cos(30^\circ)$ . Als mittlerer Radius ergibt sich dadurch  $\hat{R}_{c,3} = (r_{min} + r_{max})/2 = (1.5/(2 \cdot \cos(30^\circ)))a \approx 0.87a$ . Hierbei lässt sich auch erkennen, dass die Bedingungen immer unabhängig vom Antidot-Durchmesser sind.

Bedingungen nun im untersuchten Materialsystem im Detail äußert wird nachfolgend an einer Probe mit einem  $a = 600$  nm und  $a = 800$  nm Bereich<sup>22</sup> untersucht.

Hierfür wird zunächst wieder auf die Temperaturabhängigkeit der auftretenden Peaks eingegangen. Diese ist in Abbildung 4.14 für den  $a = 600$  nm und  $a = 800$  nm Bereich einer Probe dargestellt. Beide Bereiche weisen deutlich ausgeprägte Wi-



**Abbildung 4.14** Temperaturabhängigkeit der Transportkurven im hexagonalen Gitter. (a) Längswiderstand  $\rho_{xx}(B)$  im 600 nm Bereich bei verschiedenen Temperaturen und einer Ladungsträgerdichte von  $n_s^{top} \approx 2.52 \times 10^{15} \text{ m}^{-2}$ . (b) Längswiderstand  $\rho_{xx}(B)$  im 800 nm Bereich bei einer Ladungsträgerdichte von  $n_s^{top} \approx 2.65 \times 10^{15} \text{ m}^{-2}$ .

Mit Hilfe dieser Ladungsträgerdichten und Gleichung 4.2 ist für beide Bereiche mit Pfeilen die theoretisch erwartete Position des fundamentalen Antidot-Peaks eingezeichnet. Diese stimmt auch im hexagonalen Gitter gut mit den experimentell beobachteten Peaks überein. Im Gegensatz zu Shubnikov-de Haas-Oszillationen zeigen auch die im hexagonalen Übergitter auftretenden Widerstands-Peaks eine stark verringerte Temperatursensibilität und sind selbst bei erhöhten Temperaturen von 45 K noch sichtbar.

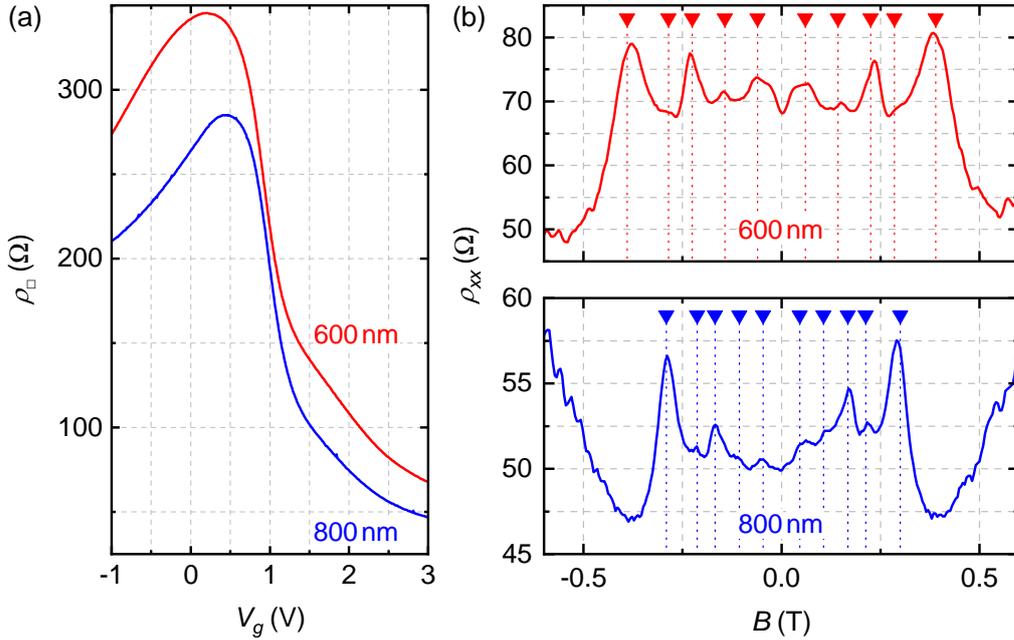
derstandsmaxima im kleinen Magnetfeldbereich auf. Dabei lässt sich der fundamentale Peak um einen Antidot gut mit der aus Kapazitätsmessungen bestimmten Ladungsträgerdichte  $n_s^{top}$  und einem nicht spinentarteten Fermi-Wellenvektor mit  $k_F = \sqrt{4\pi n_s^{top}}$  beschreiben. Wie bereits im quadratischen Gitter beobachtet, zeigen auch die hier auftretenden Peaks nur eine geringe Temperaturabhängigkeit. Dies

<sup>22</sup>Jeder Bereich besitzt dabei ein separates Topgate, um damit die Ladungsträgerdichte  $n_s^{top}$  über Magnetokapazitäts-Oszillationen bestimmen zu können.

## 4.2 Transport in Antidot-Übergittern

lässt wiederum den Rückschluss zu, dass auch die Peaks im hexagonalen Gitter einen semi-klassischen Ursprung durch kommensurable Bahnen besitzen.

Für einen weiteren Vergleich der beiden hexagonalen Gitter ist in Abbildung 4.15(a) der Schichtwiderstand  $\rho_{\square} = \rho_{xx}(B = 0)$  als Funktion der Gate-Spannung und in (b) die Position der einzelnen Peaks im Magnetowiderstand bei konstanter Ladungsträgerdichte dargestellt. Hierbei zeigen sich Widerstands-Peaks für kommensurable Bahnen, die in einem quadratischen Gitter verboten wären. Die gute Übereinstimmung der berechneten Peak-Positionen um einen und mehrere Antidots mit den experimentell beobachteten Peaks für beide Gitterperioden bestärkt die Annahme, dass das aufgebraachte Potential auch unabhängig von der Geometrie des Gitters die Manipulation der ballistischen Dirac-Fermionen erlaubt.



**Abbildung 4.15** Schichtwiderstand und Magnetowiderstand in hexagonalen Antidot-Übergittern.

(a) Schichtwiderstand  $\rho_{\square} = \rho_{xx}(B = 0)$  als Funktion der Topgate-Spannung. Abgebildet ist hierbei der Verlauf im  $a = 600$  nm und  $a = 800$  nm Bereich einer Probe. (b) Magnetowiderstand  $\rho_{xx}(B)$  beider Bereiche bei einer angeglichenen Ladungsträgerdichte von  $n_s^{top} \approx 2.5 \times 10^{15} \text{ m}^{-2}$ . Die für beide Perioden eingezeichneten Pfeile markieren hier von außen nach innen die mit  $n_s^{top}$  berechneten Peak-Positionen, die Kreisbahnen um 1, 2, 3, 7 und 37 ( $\hat{R}_{c,37}^{hex} = 3.23a$ ) Antidots zugeordnet werden können. Im Experiment ist hierbei auch ein Peak beobachtbar, der einer geometrisch möglichen Bahn um 2 Antidots zugeordnet werden kann. Die Komensurabilitäts-Bedingung  $\hat{R}_{c,2}^{hex} = 0.68a$  unterscheidet sich dabei durch das andere Gitter bedingt leicht von der in einem quadratischen Gitter beobachtbaren Bedingung  $\hat{R}_{c,2} = 0.8a$ .

Um zu überprüfen, ob die geometrischen Resonanzen auch im hexagonalen Gitter in den einzelnen Bereichen der Bandstruktur gut mit den theoretisch erwarteten

Positionen  $B_1(n_s^{top})$  übereinstimmen, muss zunächst der Bereich der Bandlücke abgeschätzt werden. Dies geschieht analog zu Abschnitt 4.2.1.2 durch eine Auftragung der einzelnen Ladungsträgerdichten. Die Ergebnisse hierzu sind in Abbildung 4.16(a) exemplarisch für den  $a = 800$  nm Bereich dargestellt. Dabei lässt sich die Gate-Spannung, in der sich die Fermi-Energie in der Bandlücke befindet, auf einen Bereich von etwa  $V_g = 1.1$  V bis 1.6 V einschränken.

Vergleicht man die in Abbildung 4.16(a) dargestellten Datenpunkte von  $n_s^{top}$  (Kapazität) mit der aus dem fundamentalen Antidot-Peak berechneten Ladungsträgerdichte  $n_s^{top}(B_1)$  (siehe Gleichung 4.4), so weisen auch im hexagonalen Gitter die Ladungsträgerdichten aus beiden Methoden sehr starke Ähnlichkeiten zueinander auf. Dies ist in Abbildung 4.16(b) veranschaulicht. Die Steigungsänderung der Ladungsträgerdichte  $n_s^{top}(B_1)$  am Übergang von der Bandlücke in das Leitungsband bei etwa  $V_g = 1.6$  V ist auch hier wieder ein Anzeichen dafür, dass die beobachteten geometrischen Resonanzen nur von den Zuständen der oberen topologischen Oberfläche stammen.

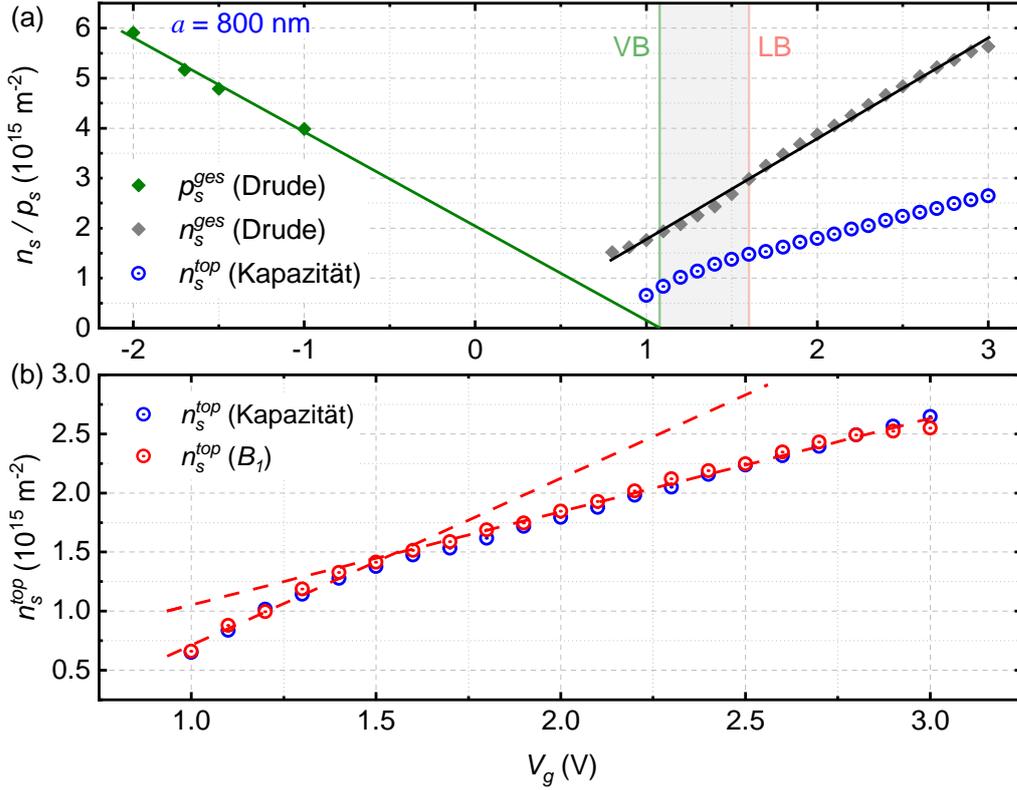
Da nun die Valenzband- und Leitungsbandkante bekannt sind, lässt sich untersuchen, wie sich die geometrischen Resonanzen in den einzelnen Bereichen der Bandstruktur entwickeln. Dies ist in Abbildung 4.17(a) für einige Gate-Spannungen im  $a = 800$  nm Bereich dargestellt. Dabei ist für jede Kurve der mittels  $n_s^{top}$  (Kapazität) berechnete Magnetfeldwert  $B_1$  des fundamentalen Antidot-Peaks (siehe Gleichung 4.2) mit Dreiecken eingezeichnet. Befindet man sich in der Bandlücke (dunkelblaue Kurven), ist der Transport nur durch Oberflächenzustände gegeben. In diesem Bereich zeigt sich eine gute Übereinstimmung der berechneten Peak-Position  $B_1(n_s^{top}(\text{Kapazität}))$  mit dem experimentell beobachteten Maximum. Dieser Einklang bleibt auch beim Übergang der Fermi-Energie in das Leitungsband (violette Kurven) bestehen, obwohl in diesem Bereich zusätzlich Volumenzustände am Transport beteiligt sind. Daraus lässt sich schließen, dass die geometrischen Resonanzen auch im hexagonalen Gitter nur von einer einzelnen Oberfläche stammen. Betritt man mit der Fermi-Energie das Valenzband (hellblaue Kurven), so beginnen die Antidot-Peaks mit abnehmender Gate-Spannung zunehmend zu verschwinden.

Ein detaillierterer Überblick über die Evolution der auftretenden geometrischen Resonanzen ist in Abbildung 4.17(b) durch einen Farbplot<sup>23</sup> dargestellt.

Trägt man die zweite Ableitung  $d\rho_{xx}(B)/dB^2$  des Längswiderstands farbcodiert in ein  $B$ - $V_g$ -Diagramm ein, so ergibt sich ein flächiges Farbmuster. Die Verwendung der zweiten Ableitung macht hierbei einzelne Extrema der Widerstandskurven deutlich sichtbar. So finden sich Maxima, wie Kommensurabilitäts-Peaks, innerhalb der Bereiche mit negativem Vorzeichen (hier in Blau dargestellt). Eine derartige Darstellung der Messdaten bietet nun eine Möglichkeit, die Abhängigkeit der Kommensurabilitäts-Effekte von der Gate-Spannung direkt sichtbar zu machen.

<sup>23</sup>Der dargestellte Farbplot und der Farbplot aus Abbildung 4.18(b) besitzen verschiedene Spannungsaufösungen über den abgebildeten Spannungsbereich: von 3 V bis 2.48 V in 0.02 V Schritten, von 2.45 V bis 0.3 V in 0.05 V Schritten und von = 0.3 V bis -2 V in 0.1 V Schritten.

## 4.2 Transport in Antidot-Übergittern



**Abbildung 4.16** Ladungsträgerdichten im  $a = 800$  nm Bereich der Probe als Funktion der Topgate-Spannung.

(a) Die Gesamtladungsträgerdichte  $n_s^{ges}$  von Elektronen im System wurde hierbei über die Steigung des Hall-Widerstands bestimmt (siehe Abschnitt 4.1). Der Eintritt der Fermi-Energie in das Valenzband (VB) wird über die lineare Extrapolation der Gesamtlochdichte  $p_s^{ges}$  (mittels zwei-Ladungsträger Drude-Modell bestimmt) hin zu  $p_s^{ges} = 0$  ermittelt. Der Übergang in das Leitungsband (LB) geht mit einer Steigungsänderung der Ladungsträgerdichte der oberen Oberfläche  $n_s^{top}$  (aus Magnetokapazitäts-Oszillationen bestimmt) einher. Der dadurch erhaltene Spannungsbereich der Bandlücke zwischen Valenz- und Leitungsband ist hier in Grau hervorgehoben. (b) Aus der Position des fundamentalen Antidot-Peaks bei  $B_1$  lässt sich mittels Gleichung 4.4 ein Wert für die hier zugehörige Ladungsträgerdichte  $n_s^{top}$  berechnen. Die daraus berechnete Ladungsträgerdichte ist hier durch rote Kreise illustriert, wobei die gestrichelten linearen Fits die unterschiedlichen Füllraten in der Bandlücke und im Leitungsband verdeutlichen. Vergleicht man die Werte  $n_s^{top}(B_1)$  mit der aus Magnetokapazitäts-Oszillationen bestimmten Ladungsträgerdichte  $n_s^{top}(Kapazität)$  (blaue Kreise), so zeigt sich auch für das quadratische Antidot-Gitter eine gute Übereinstimmung beider Werte.

Gestrichelte Linien zeigen hier die mittels  $n_s^{top}(Kapazität)$  berechneten theoretisch erwarteten Peak-Positionen für Kreisbahnen um 1, 2, 3, 7 und 37 Antidots (von außen nach innen). Hierbei zeigt sich sowohl für die fundamentalen Antidot-Peaks als auch für Peaks um mehrere Antidots, die charakteristisch für das hexagonale Gitter sind, eine gute Übereinstimmung mit dem theoretischen Modell. Erwar-

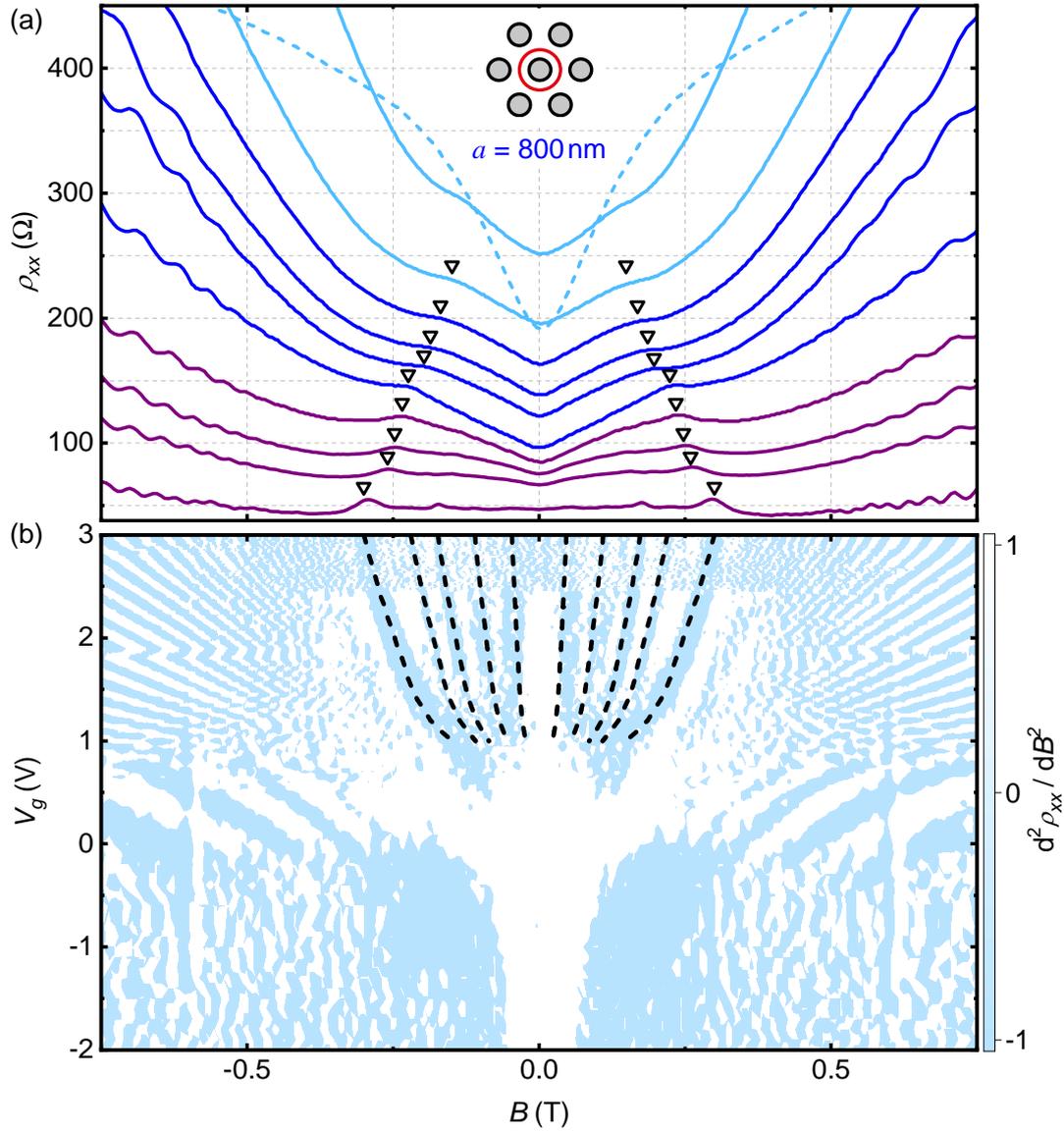
tungsgemäß deckt hierbei die stabilste geometrische Resonanz um einen Antidot den größten Gate-Spannungsbereich ab. So beginnt der fundamentale Antidot-Peak erst ab dem Eintritt der Fermi-Energie in das Valenzband zunehmend zu verschwinden bis er unterhalb einer Spannung von etwa  $V_g = 0.5$  V, nahe des Ladungsneutralitätspunktes (siehe Abbildung 4.15(a)), nicht mehr sichtbar ist. Tiefer im Valenzband (auch bei höheren negativen Gate-Spannungen) sind im Experiment keine Kommensurabilitäts-Peaks mehr beobachtbar. Dies deutet darauf hin, dass auch im Valenzband die Kommensurabilitäts-Effekte im starken Potential nur durch Oberflächenzustände an der Oberseite zustande kommen, da im Valenzband die Anzahl an Dirac-Elektronen zunehmend abnimmt und das System nach Ziegler *et al.* [91] auch bei höheren negativen Gate-Spannungen nicht in den Bereich von Dirac-Löchern gebracht werden kann. Das im Valenzband entstehende zweidimensionale Lochgas im Bulk scheint dabei (ähnlich wie Volumenzustände im Leitungsband) nicht an den beobachteten Kommensurabilitäts-Peaks beteiligt zu sein<sup>24</sup>.

Der Vergleich der beobachteten geometrischen Resonanzen mit dem theoretischen Modell lässt sich auch im  $a = 600$  nm Bereich der Probe durchführen. Dies ist in Abbildung 4.18 anhand der Entwicklung der geometrischen Resonanzen mit der Gate-Spannung gezeigt. Analog zum  $a = 800$  nm Bereich lassen sich im  $a = 600$  nm Bereich die Kommensurabilitäts-Peaks gut mit dem theoretischen Modell unter Verwendung von  $n_s^{top}$  (Kapazität) beschreiben. Dabei sind die auftretenden Kommensurabilitäts-Peaks vom Leitungsband über die Bandlücke bis hin zum Ladungsneutralitätspunkt, welcher sich innerhalb des Valenzbandes befindet, beobachtbar. Tiefer im Valenzband zeigen sich im Experiment auch hier keine Kommensurabilitäts-Peaks mehr.

Die gute Übereinstimmung der Beobachtungen mit dem theoretischen Modell kann für beide Gitterperioden anhand des fundamentalen Antidot-Peaks übersichtlich in einem Diagramm veranschaulicht werden. Hierbei wird überprüft, ob die Peak-Position der beobachteten fundamentalen Antidot-Resonanz auch eine durch die Kommensurabilitäts-Bedingung (Gleichung 4.2) erwartete Abhängigkeit von der Ladungsträgerdichte  $n_s^{top}$  besitzt. Dazu wird für jede Gate-Spannung  $V_g$  aus dem Längswiderstand  $\rho_{xx}$  der Magnetfeldwert  $B_1$  der fundamentalen Antidot-Resonanz gegen die, aus den Magnetokapazitäts-Oszillationen ermittelte, Ladungsträgerdichte  $n_s^{top}(V_g)$  aufgetragen und mit dem theoretisch erwarteten Wert von  $B_1(n_s)$  aus Gleichung 4.2 verglichen. Dies ist in Abbildung 4.19 sowohl für den  $a = 800$  nm als auch für den  $a = 600$  nm Bereich der Probe dargestellt.

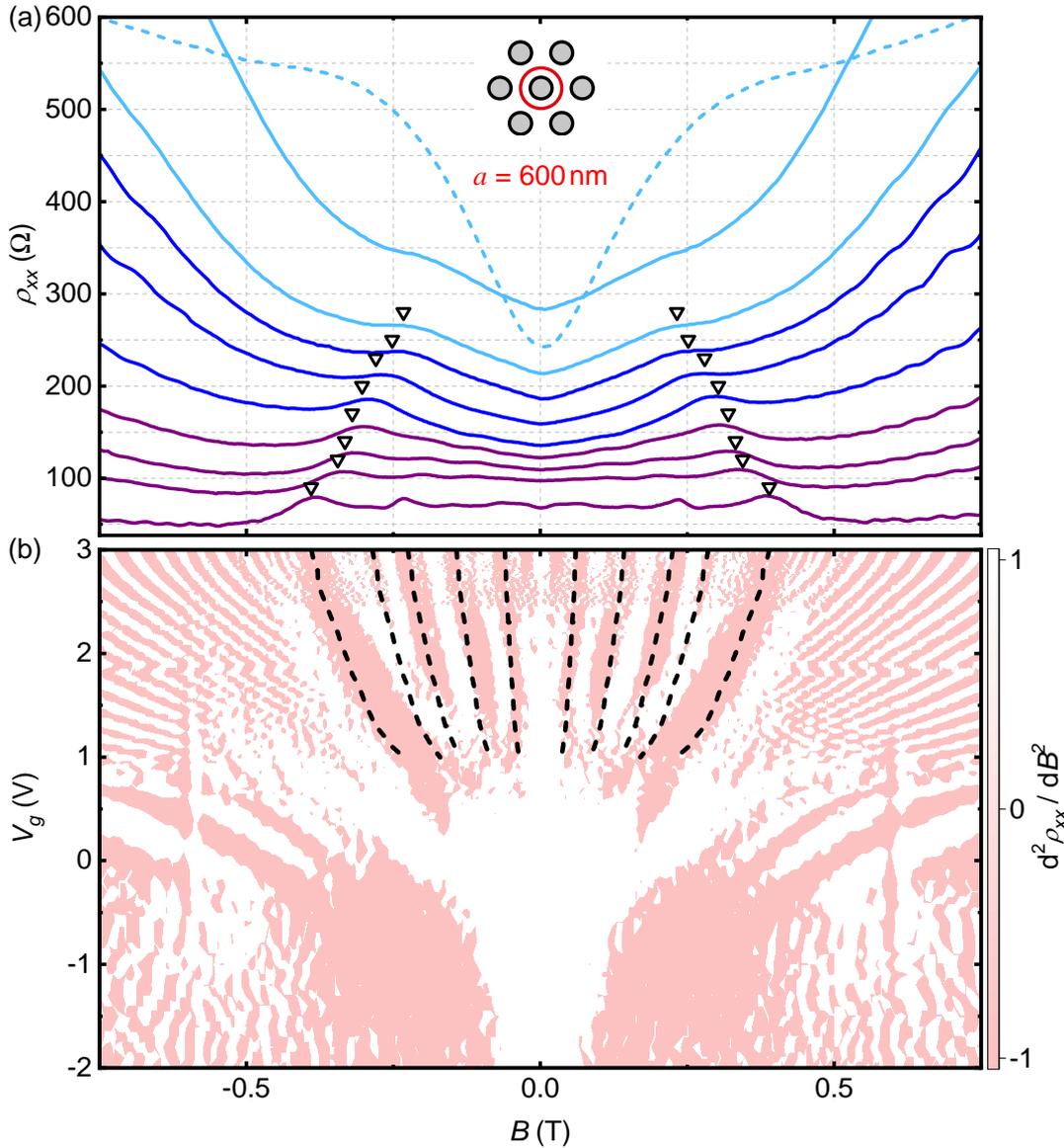
---

<sup>24</sup>Eine Ursache hierfür könnte möglicherweise eine Verringerung der Beweglichkeit von Volumenzuständen durch den Ätzprozess sein.



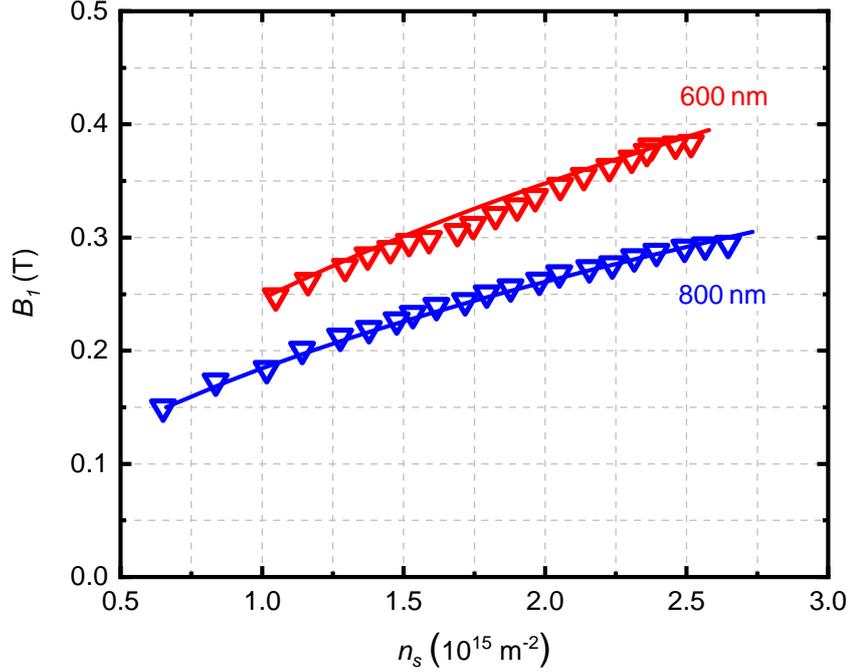
**Abbildung 4.17** Transportkurven des  $a = 800$  nm Bereichs bei verschiedenen Topgate-Spannungen.

(a) Längswiderstand  $\rho_{xx}(B)$  in Abhängigkeit des Magnetfeldes bei den Gate-Spannungen  $V_g = 0.8, 1, 1.1, 1.2, 1.3, 1.6, 1.8, 2, 2.2, 3$  V (von oben nach unten) und bei  $V_g = -1.5$  V (gestrichelte Linie). Die einzelnen Messungen lassen sich dabei dem Valenzband (hellblaue Kurven), der Bandlücke (dunkelblaue Kurven) und dem Leitungsband (violette Kurven) zuordnen. Schwarze Dreiecke markieren die für jede Kurve mittels  $B_1(n_s^{top})$  berechneten Positionen des fundamentalen Antidot-Peaks. (b) Zweite Ableitung  $d\rho_{xx}(B)/dB^2$  des Längswiderstands farbcodiert in einem  $B$ - $V_g$ -Diagramm. Gestrichelte Linien zeigen hier die mittels  $n_s^{top}$  berechneten theoretisch erwarteten Peak-Positionen für Kreisbahnen um 1, 2, 3, 7 und 37 Antidots (von außen nach innen). Hierbei zeigt sich eine gute Übereinstimmung mit dem theoretischen Modell sowohl für die fundamentalen Antidot-Peaks als auch für Peaks um mehrere Antidots. Ab dem Eintritt der Fermi-Energie in das Valenzband scheinen Antidot-Peaks auch hier zunehmend zu verschwinden, bis sie unterhalb einer Spannung von etwa  $V_g = 0.5$  V, nahe des Ladungsneutralitätspunktes, nicht mehr sichtbar sind.



**Abbildung 4.18** Transportkurven des  $a = 600$  nm Bereichs bei verschiedenen Topgate-Spannungen.

(a) Längswiderstand  $\rho_{xx}(B)$  in Abhängigkeit des Magnetfeldes bei den Gate-Spannungen  $V_g = 0.8, 1, 1.1, 1.3, 1.6, 1.8, 2, 2.2, 3$  V (von oben nach unten) und bei  $V_g = -1.5$  V (gestrichelte Linie). Die einzelnen Messungen lassen sich dabei dem Valenzband (hellblaue Kurven), der Bandlücke (dunkelblaue Kurven) und dem Leitungsband (violette Kurven) zuordnen. Schwarze Dreiecke markieren die für jede Kurve mittels  $B_1(n_s^{top})$  berechneten Positionen des fundamentalen Antidot-Peaks. (b) Zweite Ableitung  $d\rho_{xx}(B)/dB^2$  des Längswiderstands farbcodiert in einem  $B$ - $V_g$ -Diagramm. Gestrichelte Linien zeigen die mittels  $n_s^{top}$  berechneten theoretisch erwarteten Peak-Positionen für Kreisbahnen um 1, 2, 3, 7 und 37 Antidots (von außen nach innen). Hierbei zeigt sich eine gute Übereinstimmung mit dem theoretischen Modell sowohl für die fundamentalen Antidot-Peaks als auch für Peaks um mehrere Antidots. Ab dem Eintritt der Fermi-Energie in das Valenzband scheinen Antidot-Peaks auch hier zunehmend zu verschwinden bis sie unterhalb einer Spannung von etwa  $V_g = 0.25$  V, nahe des Ladungsneutralitätspunktes, nicht mehr sichtbar sind.



**Abbildung 4.19** Magnetfeldposition  $B_1$  des fundamentalen Antidot-Peaks als Funktion der Ladungsträgerdichte.

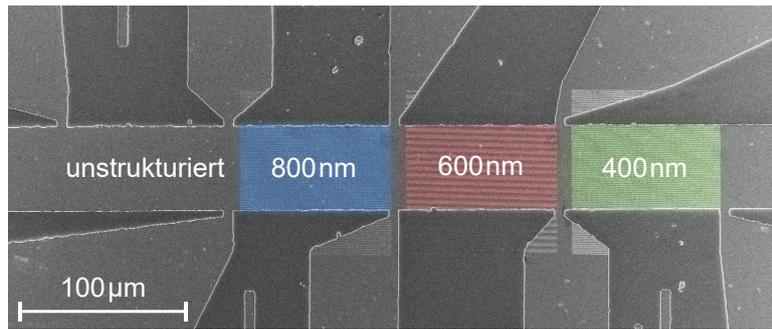
Farbige Dreiecke zeigen den bei einer Topgate-Spannung experimentell bestimmten Magnetfeldwert  $B_1$  in Abhängigkeit der aus Magnetokapazitäts-Oszillationen ermittelten Ladungsträgerdichte der oberen Oberfläche. Die erhaltenen Messpunkte stimmen dabei im gesamten Bereich unter Annahme von nicht spinentarteten Zuständen auch im hexagonalen Gitter gut mit den aus Gleichung 4.2 bestimmten erwarteten Magnetfeldwerten  $B_1(n_s)$  (durchgezogene Linie) überein.

Die Reproduzierbarkeit dieser Daten wird in diesem Abschnitt abschließend verkürzt anhand einer weiteren Probe gezeigt. Diese besitzt das in Abbildung 4.20 dargestellte Hall-Bar-Layout mit globalem Topgate. Durch diese Geometrie kann nun der Längswiderstand von hexagonalen Gittern mit  $a = 400 \text{ nm}$ ,  $a = 600 \text{ nm}$  und  $a = 800 \text{ nm}$  direkt mit einem unstrukturierten Referenzbereich verglichen werden. Der Widerstand  $\rho_{xx}(B = 0) = \rho_{\square}$  ist für den magnetfeldfreien Fall als Funktion der Gate-Spannung in Abbildung 4.21(a) dargestellt. Hierbei zeigt sich erwartungsgemäß eine Erhöhung des Schichtwiderstands mit abnehmender Gitterperiode.

Betrachtet man den magnetfeldabhängigen Längswiderstand  $\rho_{xx}(B)$ , können in den strukturierten Bereichen im Gegensatz zum Referenzbereich bei kleinen Magnetfeldern zusätzliche Kommensurabilitäts-Peaks beobachtet werden. Dies ist in Abbildung 4.21(b) dargestellt.

Für eine bessere Vergleichbarkeit der Kurven wurde über die Gate-Spannung jeder Bereich auf eine Ladungsträgerdichte von  $n_s^{top} \approx 2.35 \times 10^{15} \text{ m}^{-2}$  angepasst<sup>25</sup>. Bei

<sup>25</sup>Wegen dem globalem Topgate wird hier die Ladungsträgerdichte  $n_s^{top}$  aus Niedrigfeld-Shubnikov-de Haas-Oszillationen bestimmt.



**Abbildung 4.20** REM-Aufnahme des hier verwendeten Hall-Bar-Layouts. Hierbei findet die in Abbildung 3.3(c) dargestellte Geometrie Verwendung. In dieser Hall-Bar kann der Längswiderstand des unstrukturierten Bereiches und der hier farblich markierten strukturierten Bereiche mit Perioden von  $a = 800$  nm,  $a = 600$  nm und  $a = 400$  nm gemessen werden. Dies ermöglicht einen direkten Vergleich der einzelnen Bereiche, da jeder Längsspannungsabschnitt bis auf die unterschiedliche Gitterperiode den selben Prozessparametern bei der Fabrikation ausgesetzt wurde.

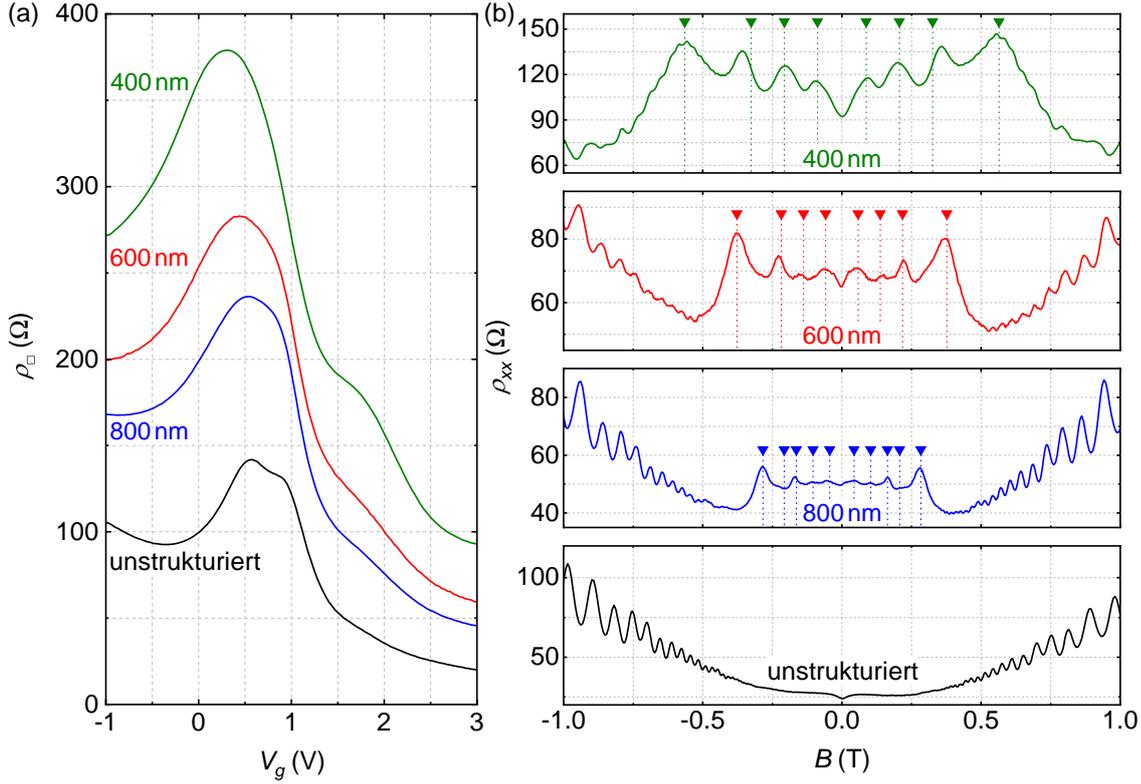
gleichbleibender Ladungsträgerdichte sinkt nach Gleichung 4.2 mit steigender Gitterperiode die Magnetfeldposition des fundamentalen Antidot-Peaks. Die Position der mittels  $n_s^{top}$  berechneten Magnetfeldwerte einzelner geometrischer Resonanzen zeigen hierbei für alle drei Gitterperioden eine gute Übereinstimmung mit den experimentell beobachteten Widerstands-Peaks.

Die Entwicklung dieser Peaks mit der Gate-Spannung ist in Abbildung 4.22 durch eine farbcodierte Auftragung der zweiten Ableitung  $d\rho_{xx}(B)/dB^2$  des Längswiderstands veranschaulicht<sup>26</sup>. Für jede Gitterperiode stimmen dabei die experimentell beobachteten Kommensurabilitäts-Peaks um einen und mehrere Antidots gut mit dem mittels  $n_s^{top}$  berechneten theoretischen Verlauf der einzelnen geometrischen Resonanzen überein. Auch hier verschwindet bei allen Gitterperioden der fundamentale Antidot-Peak mit sinkender Gate-Spannung zunehmend, bis er etwa unterhalb des jeweiligen Ladungsneutralitätspunktes (siehe Abbildung 4.21(a)) nicht mehr sicht-

<sup>26</sup>Der dargestellte Farbplot besitzt verschiedene Spannungsaufösungen über den abgebildeten Spannungsbereich: von 3 V bis 1 V in 0.1 V Schritten, von 0.8 V bis 0.4 V in 0.1 V Schritten und einen Wert bei 0 V.

Durch die geringere Auflösung und die Interpolationsmethode des verwendeten Analyseprogramms (Origin) zur Erzeugung des Farbplots, zeigen die Shubnikov-de Haas-Oszillationen in diesem Fall bei den hier dargestellten niedrigen Magnetfeldwerten nicht den typischen Landau-Fächer, der in den deutlich höher aufgelösten Plots aus Abbildungen 4.17(b) und 4.18(b) sichtbar ist. Der Verlauf der hier relevanten Kommensurabilitäts-Peaks ist allerdings gut sichtbar. Im  $a = 400$  nm Bereich ist der fundamentale Antidot-Peak bereits von Shubnikov-de Haas-Oszillationen überlagert. Aus diesem Grund wurden die Widerstandskurven aus diesem Bereich vor der Ableitung geglättet, um die fundamentalen Antidot-Peaks im Farbplot besser sichtbar zu machen.

Aufgrund eines erhöhten Rauschens der Kurven bei kleineren Gate-Spannungen, wurden die Kurven im Farbplot für  $V_g \leq 1.3$  V ( $a = 600$  nm Bereich) und für  $V_g \leq 1.2$  V ( $a = 800$  nm Bereich) geglättet.



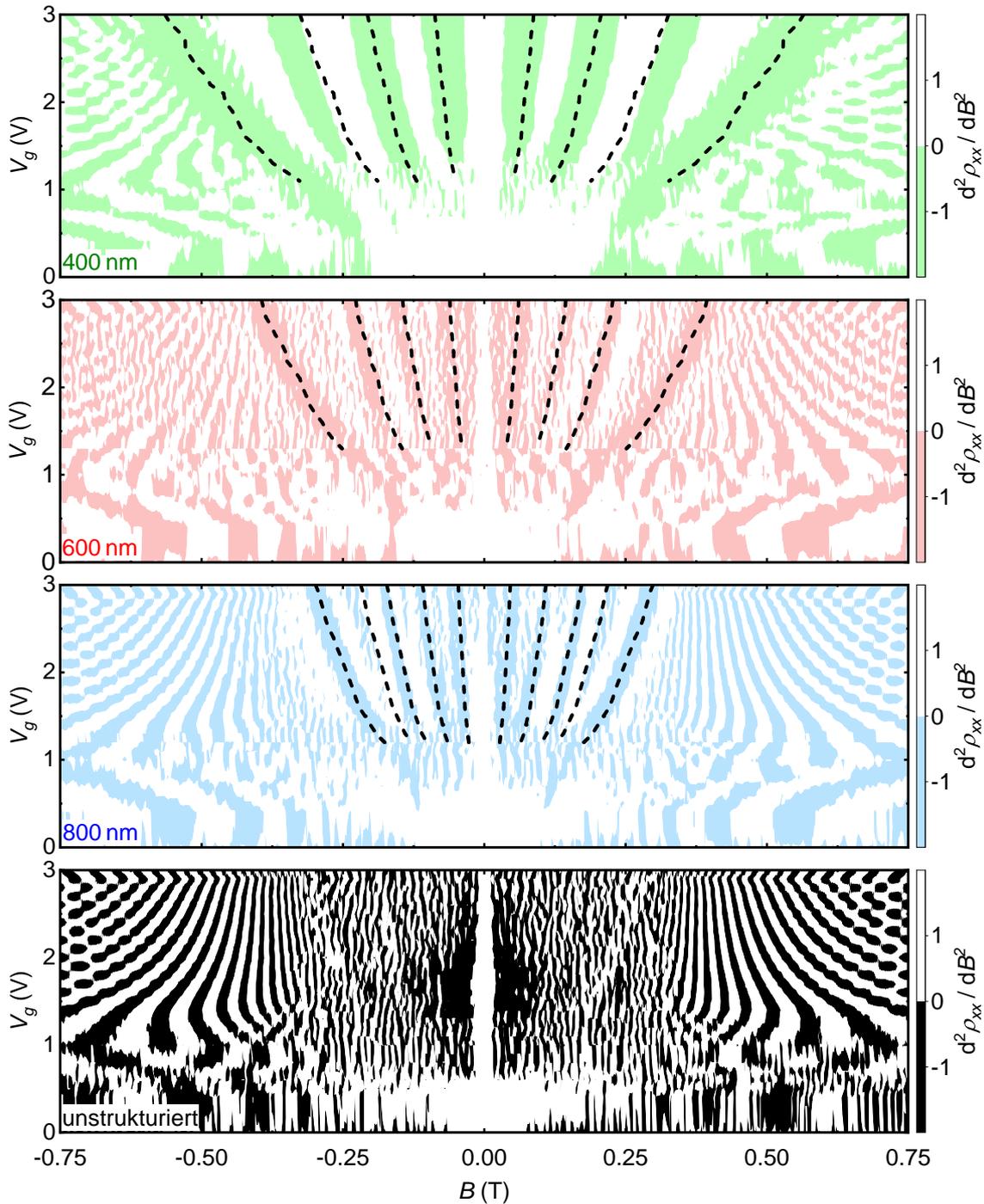
**Abbildung 4.21** Schicht- und Magnetowiderstand in einer Hall-Bar mit verschiedenen hexagonalen Antidot-Gittern und einem Referenzbereich.

(a) Schichtwiderstand  $\rho_{\square} = \rho_{xx}(B = 0)$  des  $a = 400$  nm,  $a = 600$  nm,  $a = 800$  nm und des Referenzbereichs als Funktion der Topgate-Spannung. (b) Magnetowiderstand  $\rho_{xx}(B)$  der einzelnen Hall-Bar-Abschnitte bei einer angelegten Ladungsträgerdichte von  $n_s^{top} \approx 2.35 \times 10^{15} \text{ m}^{-2}$ . Aus dieser Ladungsträgerdichte sind für jede Periode die theoretisch erwarteten Positionen von geometrischen Resonanzen, die einer Kreisbahn um eine bestimmte Anzahl an Antidots zugeordnet werden können, berechnet und mit Pfeilen markiert. Dies ist für Resonanzen um 1, 3, 7 und 37 Antidots ( $a = 400$  nm und  $a = 600$  nm) und um 1, 2, 3, 7, 37 Antidots ( $a = 800$  nm) dargestellt.

bar ist. Tiefer im Valenzband (bei höheren negativen Gate-Spannungen) sind auch hier bei jeder Gitterperiode keine Kommensurabilitäts-Peaks mehr beobachtbar.

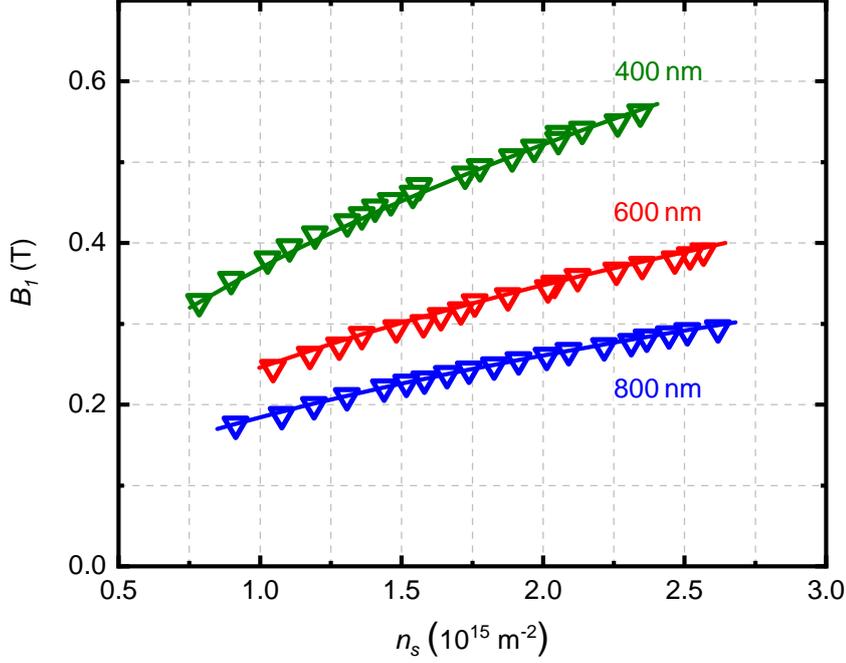
Mit dem experimentell beobachteten fundamentalen Antidot-Peak und der zugehörigen Ladungsträgerdichte  $n_s^{top}$  kann nun die gute Übereinstimmung mit dem theoretischen Modell für alle untersuchten Gitterperioden übersichtlich in Abbildung 4.23 visualisiert werden.

Zusammenfassend zeigen die beobachteten geometrischen Resonanzen, dass durch das oberseitige Anätzen der Oberfläche eines dreidimensionalen topologischen Isolators ein starkes Modulationspotential erzeugt wird. Die Magnetfeldpositionen der auftretenden Kommensurabilitäts-Peaks stimmen dabei über die gesamte Bandstruktur unabhängig von Gitterperiode und Gittergeometrie sehr gut mit den be-



**Abbildung 4.22** Zweite Ableitung des Längswiderstands farbcodiert in einem  $B$ - $V_g$ -Diagramm.

Dies ermöglicht eine übersichtliche Darstellung von Maxima (farbig) und Minima (weiß) des Längswiderstands. Gestrichelte Linien zeigen hierbei die mittels  $n_s^{top}$  berechneten theoretisch erwarteten Peak-Positionen (von außen nach innen) für Kreisbahnen um 1, 3, 7 und 37 Antidots (für  $a = 400$  nm und  $a = 600$  nm) und um 1, 2, 3, 7 und 37 Antidots (für  $a = 800$  nm). Im unstrukturierten Bereich zeigen sich erwartungsgemäß keine zusätzlichen Widerstands-Peaks bei kleinen Magnetfeldern.



**Abbildung 4.23** Magnetfeldposition  $B_1$  des fundamentalen Antidot-Peaks für alle drei Gitterperioden als Funktion der Ladungsträgerdichte.

Der bei einer bestimmten Topgate-Spannung beobachtete Magnetfeldwert  $B_1$  wird hier in Abhängigkeit der zu dieser Gate-Spannung bestimmten Ladungsträgerdichte  $n_s^{top}$  (Niedrigfeld-Shubnikov-de Haas-Oszillationen) in Form von farbigen Dreiecken dargestellt. Die durchgezogene Linie zeigt die aus Gleichung 4.2 bestimmten theoretisch erwarteten Magnetfeldwerte  $B_1(n_s)$ .

rechneten<sup>27</sup> Peak-Positionen für geometrische Resonanzen um einen oder mehrere Antidots überein. Dies deutet darauf hin, dass die beobachteten Kommensurabilitäts-Effekte nur von den Zuständen einer einzelnen topologischen Oberfläche entstammen. Somit ermöglicht das aufgebrachte Übergitter die Manipulation von ballistischen Dirac-Fermionen in einem dreidimensionalen topologischen Isolator. Im Gegensatz zu Untersuchungen von Altmann *et al.* [98] an dreidimensionalen topologischen Isolatoren mit schwacher eindimensionaler Potentialmodulation zeigen die im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Experimente in einem starken zweidimensionalen Antidot-Potential keine Kommensurabilitäts-Effekte im Valenzband (bei negativen Gate-Spannungen). Entsprechend scheinen das im Valenzband entstehende zweidimensionale Lochgas im Bulk keine beobachtbaren Kommensurabilitäts-Peaks hervorzurufen und die Effekte im starken Potential nur durch Oberflächenzustände zu kommen.

Da die beobachteten geometrischen Resonanzen nur durch Zustände der oberen Oberfläche entstehen, kann der Magnetfeldwert einzelner geometrischer Resonanzen

<sup>27</sup>Unter der Annahme eines nicht spinentarteten Fermi-Wellenvektors  $k_F = \sqrt{4\pi n_s^{top}}$  und der Verwendung der Ladungsträgerdichte der oberen Oberfläche  $n_s^{top}$

verwendet werden, um über die zugehörige Kommensurabilitäts-Bedingung direkt die Ladungsträgerdichte dieser Oberfläche zu bestimmen. Im Vergleich zur Bestimmung von  $n_s^{top}$  aus Niedrigfeld-Shubnikov-de Haas-Oszillationen oder aus Oszillationen der Magnetokapazität bietet die Berechnung der Ladungsträgerdichte aus dem Kommensurabilitäts-Peak den Vorteil, dass sich durch die Temperaturstabilität von geometrischen Resonanzen auch eine Ladungsträgerdichte bei höheren Temperaturen, in denen Quantenoszillationen bereits ausgeschmiert sind, bestimmen lässt. Aus den Kommensurabilitäts-Peaks lässt sich allerdings nicht nur die Ladungsträgerdichte ermitteln. So können Kommensurabilitäts-Effekte, wie in [13, 98] gezeigt, im Gegensatz zum Drude-Modell<sup>28</sup> auch dazu verwendet werden, die freie Weglänge und die Beweglichkeit einer einzelnen topologischen Oberfläche abzuschätzen. So kann im Antidot-Übergitter ein Kommensurabilitäts-Peak um eine bestimmte Anzahl an Antidots nur dann aufgelöst werden, wenn ein Elektron die zugehörige Zyklotronbahn mindestens einmal durchlaufen kann. Die minimale intrinsische mittlere freie Weglänge der oberen Oberfläche ergibt sich folglich aus der größten Zyklotronbahn  $R_c$ , welche noch zu einem sichtbaren Kommensurabilitäts-Peak führt. Die mittlere freie Weglänge  $l_e = 2\pi R_c$  entspricht dann mindestens dem Umfang dieser Zyklotronbahn. Aus dieser minimalen mittleren freien Weglänge lässt sich anschließend mit Hilfe der Ladungsträgerdichte  $n_s^{top}$  durch Umformung der Gleichung 2.15 die Beweglichkeit  $\mu = \frac{l_e e}{\hbar} \sqrt{\frac{g_s}{4\pi n_s}}$  abschätzen, welche die obere Oberfläche mindestens besitzen muss<sup>29</sup>.

<sup>28</sup>Im Drude-Modell wird die Beweglichkeit und entsprechend auch die freie Weglänge (Gleichungen 2.15) aus dem Schichtwiderstand (siehe Gleichung 2.24) bestimmt. Da sich der Schichtwiderstand in einem dreidimensionalen topologischen Isolator allerdings aus den Widerständen aller Leitungskanäle (Oberflächenzustände und Zustände im Volumenmaterial) zusammensetzt, ergibt sich für das verwendete System mit dem Drude-Modell für die Beweglichkeit und die mittlere freie Weglänge immer nur ein Mittelwert über alle Leitungskanäle.

<sup>29</sup>Dies soll an dieser Stelle kurz am Beispiel der Daten aus Abbildung 4.21(b) berechnet werden. Hierbei ist für alle Perioden ein Peak für eine maximale Zyklotronbahn  $\hat{R}_{c,37}^{he,x} = 3.23a$  sichtbar. Daraus ergeben sich für die vorliegende Ladungsträgerdichte von  $n_s^{top} \approx 2.35 \times 10^{15} \text{ m}^{-2}$  die minimalen Werte für  $l_e$  und  $\mu$  in der oberen Oberfläche zu:

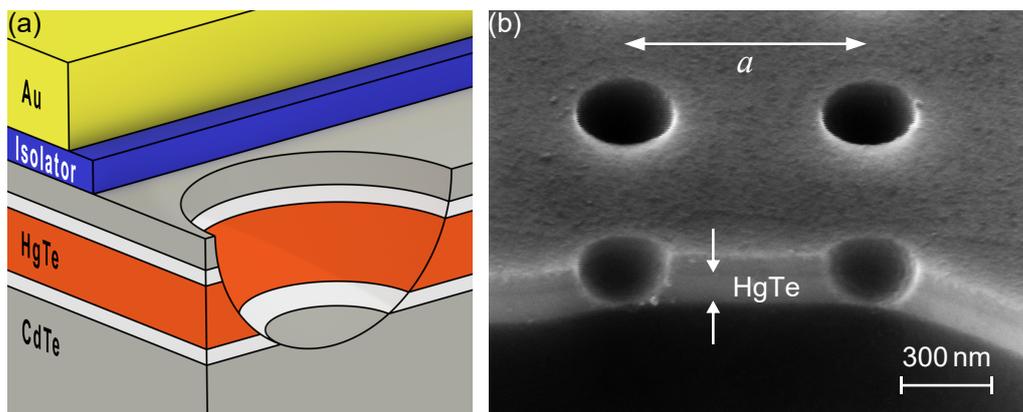
$$a = 400 \text{ nm: } l_e \approx 1.3 \text{ } \mu\text{m}, \mu \approx 11.4 \text{ m}^2/(\text{Vs})$$

$$a = 600 \text{ nm: } l_e \approx 1.9 \text{ } \mu\text{m}, \mu \approx 17.1 \text{ m}^2/(\text{Vs})$$

$$a = 800 \text{ nm: } l_e \approx 2.6 \text{ } \mu\text{m}, \mu \approx 22.8 \text{ m}^2/(\text{Vs}).$$

### 4.2.2 Antidots durch beide Oberflächen

Bisherige Betrachtungen beschränkten sich auf Systeme, in denen sich die Strukturierung nur auf die obere Oberfläche des dreidimensionalen topologischen Isolators beschränkte. Nun stellt sich die Frage, welchen Effekt das periodische Durchtrennen des kompletten dreidimensionalen topologischen Isolators hat. Dazu müssen in einem Ätzschritt die beiden Deckschichten und die HgTe-Schicht vollständig entfernt werden. Entsprechend ist es im verwendeten Materialsystem nötig, dass erzeugte Antidots mindestens eine Tiefe von 140 nm erreichen. Dies ist in Abbildung 4.24 schematisch (a) und Anhand einer Rasterelektronenmikroskop Aufnahme eines quadratischen  $a = 800$  nm Antidot-Gitters (b) gezeigt.

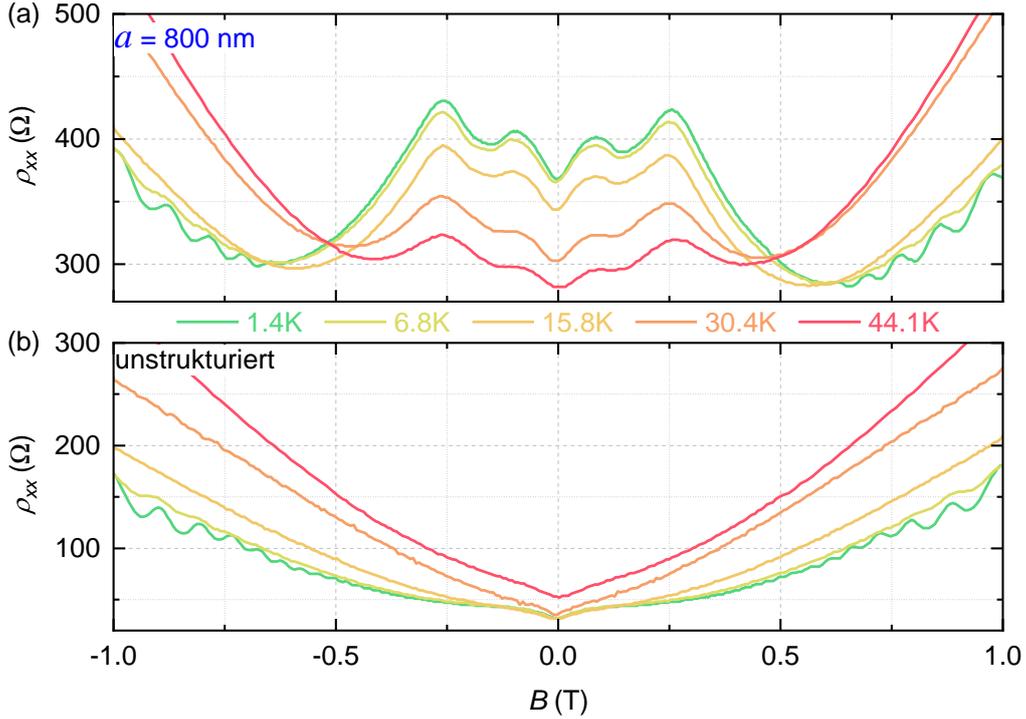


**Abbildung 4.24** Probendesign.

(a) Schematisches Bild des in Abschnitt 3.1 beschriebenen Schichtaufbaus mit einem durch die ganze HgTe-Schicht geätzten Antidots. Auf der gesamten Struktur findet sich das in 3.2.6 beschriebene Isolatorsystem und das metallische Gold-Topgate. (b) REM-Aufnahme eines vollständig durchätzten quadratischen Antidot-Gitters mit einer Antidot-Tiefe von 150 nm und einer Periode von  $a = 800$  nm unter einem Betrachtungswinkel von  $50^\circ$ . Durch den unterschiedlichen Kontrast zwischen den einzelnen Schichten lässt sich hier die periodisch durchtrennte 80 nm dicke HgTe-Schicht erkennen.

Die detaillierte Untersuchung der vollständig durchätzten Antidots ist im Folgenden anhand einer Probe mit dem in Abbildung 3.2 dargestellten Probendesign mit zwei  $100 \mu\text{m}$  Hall-Bar-Segmenten und einem globalen Topgate gezeigt<sup>30</sup>. Dies ermöglicht es einen unstrukturierten Referenzbereich direkt mit dem in Abbildung 4.24(b) dargestellten quadratischen Antidot-Übergitter vergleichen zu können. Magnetotransportmessungen bei verschiedenen Temperaturen (Abbildung 4.25) zeigen auch hier das Auftreten zusätzlicher Widerstands-Peaks im strukturierten Bereich. Wegen der geringen Temperaturabhängigkeit der beobachtbaren Peaks, kann auch hier ein Ursprung durch kommensurable Bahnen vermutet werden. Allerdings ist

<sup>30</sup>Die Ladungsträgerdichte  $n_s^{top}$  der oberen Oberfläche wird hierbei aus Niedrigfeld-Shubnikov-de Haas-Oszillationen bestimmt.



**Abbildung 4.25** Temperaturabhängigkeit der Transportkurven bei konstanter Gate-Spannung.

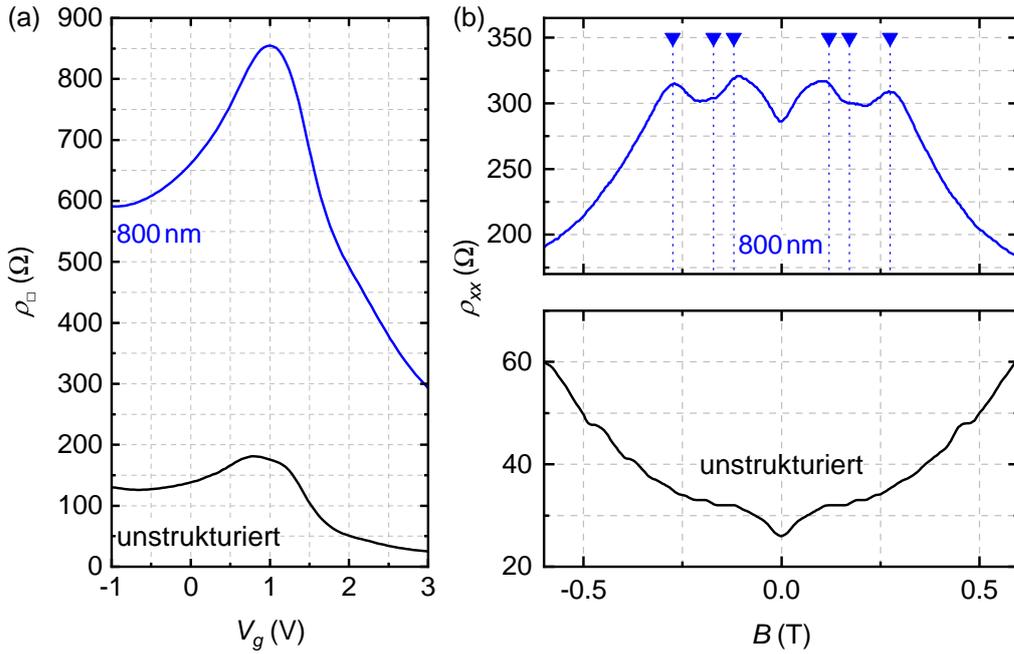
(a) Längswiderstand  $\rho_{xx}(B)$  im strukturierten Bereich mit einem quadratischen  $a = 800$  nm Antidot-Übergitter bei einer Ladungsträgerdichte von  $n_s^{top} \approx 1.79 \times 10^{15} \text{ m}^{-2}$ .  
 (b) Längswiderstand  $\rho_{xx}(B)$  im Referenzbereich bei einer Ladungsträgerdichte von  $n_s^{top} \approx 1.95 \times 10^{15} \text{ m}^{-2}$ . Im Kontrast zum Referenzbereich treten im strukturierten Bereich temperaturstabile Widerstands-Peaks auf.

dieser Ursprung bei vollständig durchätzten Antidots im Gegensatz zu nur oberseitig angeätzten Antidots nicht unerwartet. So ist bei einem vollständig durchätzten Antidot-Übergitter die gesamte leitende Schicht periodisch durchtrennt, wodurch tatsächlich auch, wie in konventionellen 2DES-basierten Antidot-Gittern üblich, Bereiche frei von Elektronen existieren. Anders als im konventionellen 2DES-basierten Antidot-Gitter besteht das hier untersuchte System allerdings aus einer Parallelschaltung von zweidimensionalen Oberflächenzuständen (an der Ober- und Unterseite) und zusätzlichen Volumenzuständen (im Valenz- und Leitungsband). Dies impliziert die Vermutung, dass die hier beobachteten Widerstands-Peaks eine Superposition aus den geometrischen Resonanzen der verschiedenen Zustände innerhalb des dreidimensionalen topologischen Isolators sein könnten.

Durch das vollständige Durchätzen des gesamten topologischen Isolators steigt auch der in Abbildung 4.26(a) dargestellte Schichtwiderstand  $\rho_{\square} = \rho_{xx}(B = 0)$  im strukturierten Bereich erheblich. Dieser ist dabei erwartungsgemäß deutlich höher als der Schichtwiderstand einer nur oberseitig angeätzten Probe mit dem gleichen Gitter und der selben Gitterperiode (siehe Abbildung 4.11(a)).

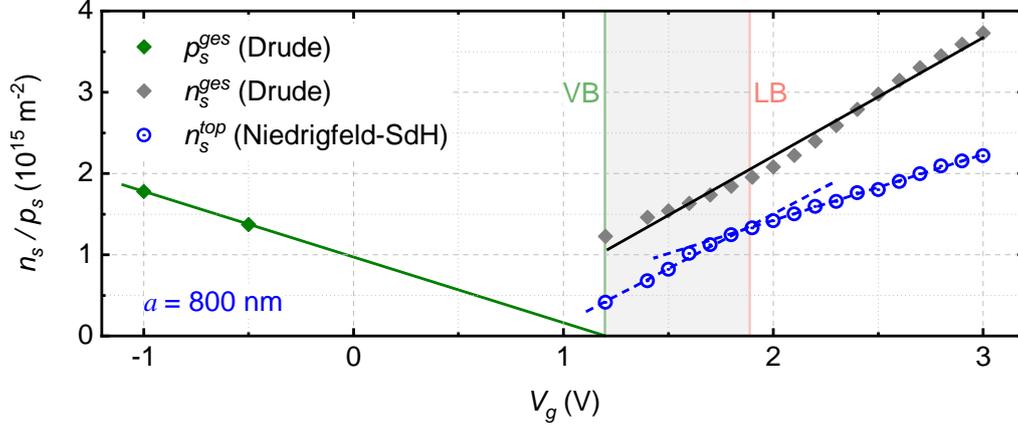
## 4.2 Transport in Antidot-Übergittern

Betrachtet man nun den in Abbildung 4.26(b) dargestellten Magnetowiderstand im Bereich des durchgeätzten Antidot-Übergitters, so kann auch hier die Peak-Position mit dem theoretischen Modell verglichen werden. Dabei zeigt sich bereits eine gute Übereinstimmung mit den berechneten Peak-Positionen um einen und mehrere Antidots, wenn für die Berechnung die Ladungsträgerdichte  $n_s^{top}$  der oberen Oberfläche verwendet wird. Ob für die beobachtbaren Widerstands-Peaks im vollständig durchgeätzten Antidot-Gitter tatsächlich auch nur die Zustände in der oberen Oberfläche einen Einfluss haben oder ob hier auch andere Zustände eine Rolle spielen, soll im Folgenden näher diskutiert werden.



**Abbildung 4.26** Schichtwiderstand und Magnetowiderstand. (a) Schichtwiderstand  $\rho_{\square} = \rho_{xx}(B = 0)$  als Funktion der Topgate-Spannung. Abgebildet ist hierbei der Verlauf im  $a = 800$  nm und im unstrukturierten Bereich. (b) Magnetowiderstand  $\rho_{xx}(B)$  beider Bereiche bei einer angeglichenen Ladungsträgerdichte von  $n_s^{top} \approx 2.2 \times 10^{15} \text{ m}^{-2}$ . Die für  $a = 800$  nm eingezeichneten Pfeile markieren hier von außen nach innen die mit  $n_s^{top}$  berechneten Peak-Positionen, die Kreisbahnen um 1, 2 und 4 Antidots zugeordnet werden können. Im Vergleich zu den Daten aus Abbildung 4.11(b) der nur oberseitig angeätzten  $a = 800$  nm Probe, sind Antidot-Peaks bei der selben Ladungsträgerdichte hier etwas breiter und Peaks um mehrere Antidots weniger gut erkennbar. Dies liegt möglicherweise an den unterschiedlich großen Antidot-Durchmessern der durchgeätzten ( $d \approx 315$  nm) und nur oberseitig angeätzten ( $d \approx 170$  nm) Probe. So führt, wie in Abschnitt 2.2.2.1 beschrieben, ein größeres Verhältnis  $d/a$  von Durchmesser zu Antidot-Periode zu einem schlechter durchlässigen Antidot-Gitter, wodurch sich im Transport weniger Peaks beobachten lassen. Zudem führt das größere Verhältnis von  $d/a$  zu einer erhöhten Verbreiterung der Peaks [95].

Dazu ist es zunächst nötig, den Bereich der Bandlücke abzuschätzen. Hierfür werden analog zu Abschnitt 4.2.1.2 die einzelnen Ladungsträgerdichten im System gegen die angelegte Topgate-Spannung aufgetragen. Dies ist in Abbildung 4.27 für den strukturierten Bereich dargestellt. Hierbei kann die Topgate-Spannung, in welcher sich die Fermi-Energie innerhalb der Bandlücke befindet auf einen Spannungsbereich von etwa  $V_g = 1.2$  V bis 1.9 V eingeschränkt werden.

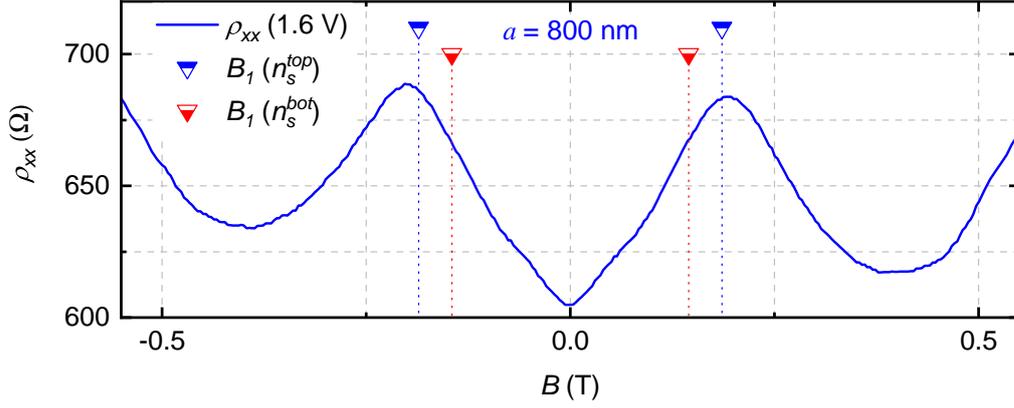


**Abbildung 4.27** Ladungsträgerdichten im strukturierten Bereich als Funktion der Topgate-Spannung.

Die aufgetragene Gesamtladungsträgerdichte  $n_s^{ges}$  der Elektronen im System wurde über die Steigung des Hall-Widerstands bestimmt (siehe hierzu Abschnitt 4.1). Der Übergang der Fermi-Energie in das Valenzband (VB) wird über die lineare Extrapolation der Gesamtlochdichte  $p_s^{ges}$  (mittels zwei-Ladungsträger Drude-Modell bestimmt) hin zu  $p_s^{ges} = 0$  ermittelt und befindet sich hier bei etwa  $V_g = 1.2$  V. Der Eintritt der Fermi-Energie in das Leitungsband (LB) bei etwa  $V_g = 1.9$  V geht hier mit der Steigungsänderung der Ladungsträgerdichte der oberen Oberfläche  $n_s^{top}$  (aus Niedrigfeld-Shubnikov-de Haas-Oszillationen bestimmt) einher. Der Bereich der Bandlücke zwischen Valenz- und Leitungsband ist hier in Grau hervorgehoben.

Befindet sich die Fermi-Energie in der Bandlücke, so ist der Transport nur durch Oberflächenzustände gegeben und es lassen sich alle Ladungsträgerdichten der am Transport teilnehmenden Zustände bestimmen. Liegt nun eine Superposition von Antidot-Peaks aus den einzelnen Oberflächen vor, kann dies innerhalb der Bandlücke mit Hilfe der beiden Ladungsträgerdichten  $n_s^{top}$  und  $n_s^{bot} = n_s^{ges} - n_s^{top}$  überprüft werden. Hierfür ist in Abbildung 4.28 der Magnetowiderstand für eine Gate-Spannung von  $V_g = 1.6$  V dargestellt. Da der fundamentale Antidot-Peak typischerweise am deutlichsten ausgeprägt ist, sollte dieser auch bei einer Superposition der Widerstands-Peaks am besten sichtbar sein. Aus diesem Grund sind in die abgebildete Transportmessung nur die nach Gleichung 4.2 berechneten Positionen der zu den beiden Oberflächen zugehörigen fundamentalen Antidot-Peaks  $B_1(n_s^{top})$  und  $B_1(n_s^{bot})$  eingezeichnet.

## 4.2 Transport in Antidot-Übergittern



**Abbildung 4.28** Magnetowiderstand für eine Topgate-Spannung innerhalb der Bandlücke.

Für die hier dargestellte Gate-Spannung von  $V_g = 1.6 \text{ V}$  wurden die beiden Ladungsträgerdichten  $n_s^{top} \approx 1.01 \times 10^{15} \text{ m}^{-2}$  und  $n_s^{bot} \approx 6.17 \times 10^{14} \text{ m}^{-2}$  bestimmt. Mit Hilfe dieser beiden Ladungsträgerdichten kann nun die theoretisch erwartete Peak-Position  $B_1(n_s)$  des fundamentalen Antidot-Peaks sowohl für die obere als auch für die untere Oberfläche des dreidimensionalen topologischen Isolators ermittelt werden.  $B_1(n_s^{top})$  ist dabei durch blaue Pfeile und  $B_1(n_s^{bot})$  durch rote Pfeile markiert.

Beim Vergleich der theoretisch erwarteten Position mit den experimentell beobachteten Peaks zeigt sich bei der Verwendung der Ladungsträgerdichte  $n_s^{top}$  eine gute Übereinstimmung. Nutzt man hingegen für die Berechnung die Ladungsträgerdichte  $n_s^{bot}$ , so findet sich an der Position  $B_1(n_s^{bot})$  im Experiment kein Widerstands-Peak. Dies deutet darauf hin, dass selbst für Proben mit vollständig durchätzten Antidots nur die obere Oberfläche für die beobachteten geometrischen Resonanzen verantwortlich ist. Ursächlich könnte hierfür die Tatsache sein, dass das Topgate vor allem die Zustände an der oberen Oberfläche beeinflusst und diese Zustände das elektrische Feld des Gates für die darunter liegenden Schichten zu einem Großteil abschirmt. Dadurch ergibt sich für die unterste Schicht eine geringere Ladungsträgerdichte und Beweglichkeit<sup>31</sup>, was nach Gleichung 2.24 zu einem höheren Schichtwiderstand führt. Nehmen nun, wie in Abbildung 4.28 vermutet, sowohl die obere als auch die untere Oberfläche am Transport teil, so findet in der vorliegenden Parallelschaltung der beiden Schichtwiderstände der Ladungstransport aufgrund des geringeren Widerstands hauptsächlich in der oberen Oberfläche statt. Dies könnte möglicherweise dazu führen, dass im vollständig durchätzten Antidot-Gitter die beobachteten Widerstands-Peaks, wie in Abbildung 4.28 sichtbar, vor allem durch die Zustände der oberen Oberfläche bestimmt sind, ohne dabei Signaturen für Kommensurabilitäts-Effekte aus der unteren Oberfläche zu zeigen.

Ob sich die im Experiment beobachteten Kommensurabilitäts-Peaks im vollständig durchätzten Antidot-Gitter auch in anderen Bereichen der Bandstruktur nur

<sup>31</sup>In zweidimensionalen Systemen kann aus der Ladungsträgerdichte die Beweglichkeit auf  $\mu \approx n_s^{3/2}$  [16] abgeschätzt werden.

durch die Zustände der oberen Oberfläche beschreiben lassen, soll im Folgenden überprüft werden. Hierzu sind in Abbildung 4.29(a) die Transportkurven für einige Gate-Spannungen dargestellt und dabei für jede Kurve mit Dreiecken die Positionen der theoretisch erwarteten Magnetfeldwerte  $B_1(n_s^{top})$  des fundamentalen Antidot-Peaks eingezeichnet. In der Bandlücke (dunkelblaue Kurven) kann die Position der Peaks gut mit der Ladungsträgerdichte der oberen Oberfläche beschrieben werden. Obwohl beim Übergang der Fermi-Energie in das Leitungsband neben den Oberflächenzuständen auch Volumenzustände am Transport teilnehmen, besteht im Leitungsband (violette Kurven) eine gute Übereinstimmung mit  $B_1(n_s^{top})$ . Dies deutet darauf hin, dass im vollständig durchätzten Antidot-Gitter weder Volumenzustände noch Oberflächenzustände der unteren Oberfläche einen erkennbaren Einfluss auf die beobachteten geometrischen Resonanzen besitzen. Auch hier beginnen die Antidot-Peaks im Valenzband (hellblaue Kurven) mit abnehmender Gate-Spannung nach und nach zu verschwinden.

Analog zum vorangegangenen Kapitel, kann die Evolution der Widerstands-Peaks mit der Gate-Spannung in Abbildung 4.29(b) durch eine farbige Auftragung<sup>32</sup> der zweiten Ableitung  $d\rho_{xx}(B)/dB^2$  im Detail sichtbar gemacht werden. Maxima, wie Kommensurabilitäts-Peaks, befinden sich innerhalb der Bereiche mit negativem Vorzeichen  $d\rho_{xx}(B)/dB^2 < 0$  (blau). Die mit der Ladungsträgerdichte  $n_s^{top}$  berechneten theoretisch erwarteten Peak-Positionen für Kreisbahnen um 1, 2 und 4 Antidots (von außen nach innen) sind hierbei durch gestrichelten Linien markiert und zeigen auch hier eine gute Übereinstimmung mit dem Experiment.

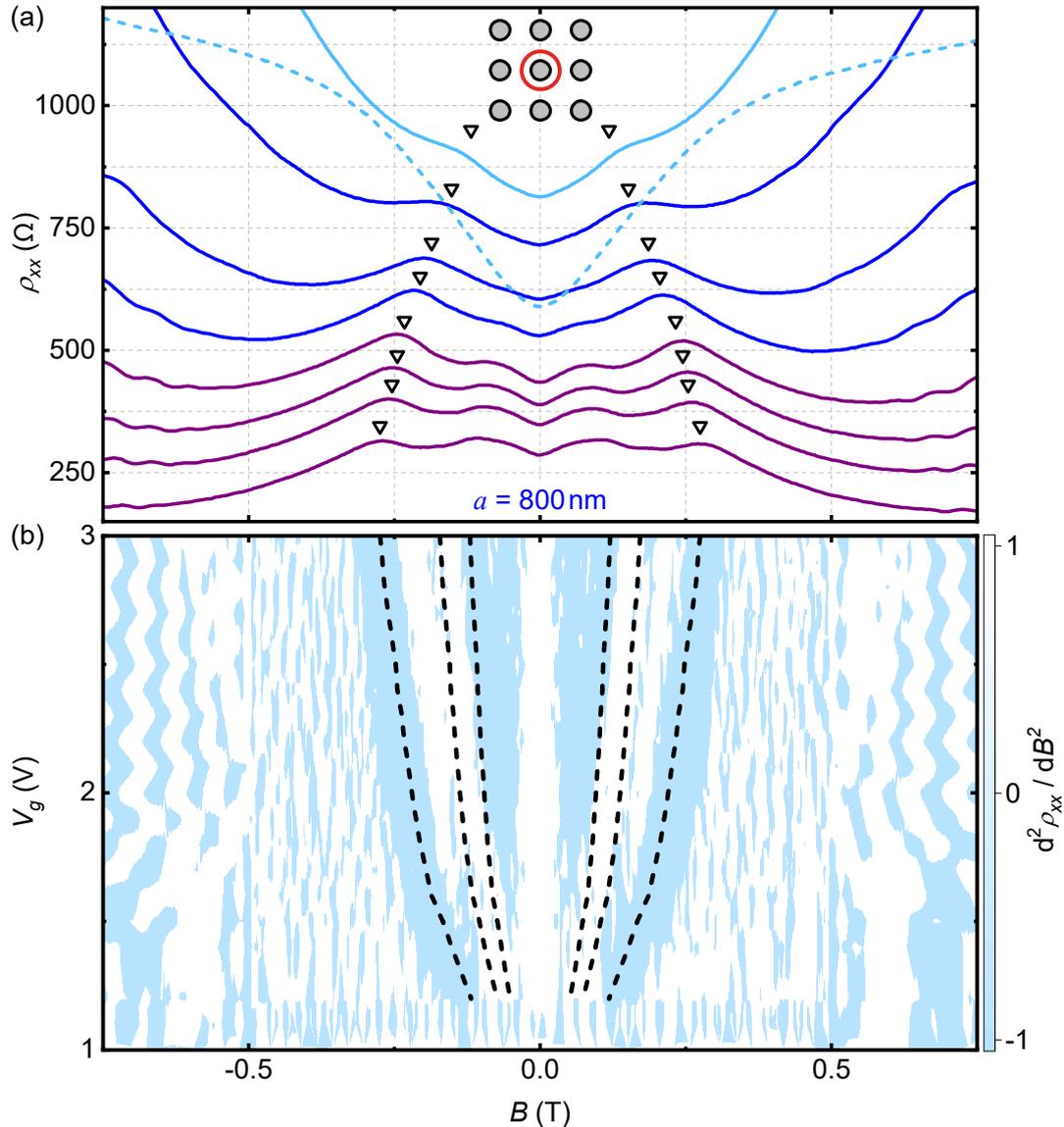
Diese gute Übereinstimmung mit dem theoretischen Modell unter Verwendung von  $n_s^{top}$  kann in Abbildung 4.30 vereinfacht über die Magnetfeld-Position des fundamentalen Antidot-Peaks dargestellt werden. Hierzu wird für eine Gate-Spannung aus dem Längswiderstand die Ladungsträgerdichte  $n_s^{top}$  (Niedrigfeld-SdH) bestimmt, gegen den bei der selben Gate-Spannung beobachteten Magnetfeldwert  $B_1$  aufgetragen (Dreiecke) und mit der Kommensurabilitäts-Bedingung  $B_1(n_s)$  (durchgezogene Linie) verglichen.

Da aus dem Magnetfeldwert des fundamentalen Antidot-Peaks mit Hilfe von Gleichung 4.4 auch direkt eine Ladungsträgerdichte  $n_s^{top}(B_1)$  bestimmt werden kann, lassen sich auch diese Werte mit  $n_s^{top}$  (Niedrigfeld-SdH) vergleichen. Dies ist in Abbildung 4.31 dargestellt. Hierbei weisen die Datenpunkte aus beiden Methoden starke Ähnlichkeiten zueinander auf. So zeigt auch die Ladungsträgerdichte  $n_s^{top}(B_1)$  eine Steigungsänderung am Übergang von der Bandlücke in das Leitungsband bei etwa  $V_g = 1.9$  V. Die Beobachtung der Steigungsänderung in  $n_s^{top}(B_1)$  ist wieder ein Indiz dafür, dass die Kommensurabilitäts-Effekte in diesem System nur von Zuständen einer einzelnen Oberfläche stammen.

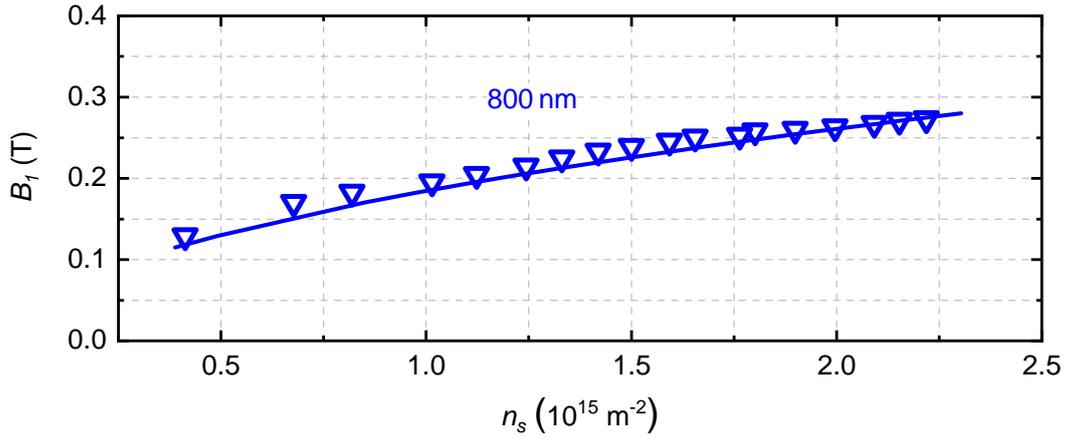
Insgesamt zeigen die Daten aus dem vollständig durchätzten Antidot-Gitter, dass die beobachteten Widerstands-Peaks wahrscheinlich nur durch nicht spinentartete

---

<sup>32</sup>Der dargestellte Farbplot besitzt eine Spannungsaufösungen von 0.1 V mit einem fehlenden Wert bei  $V_g = 1.3$  V.

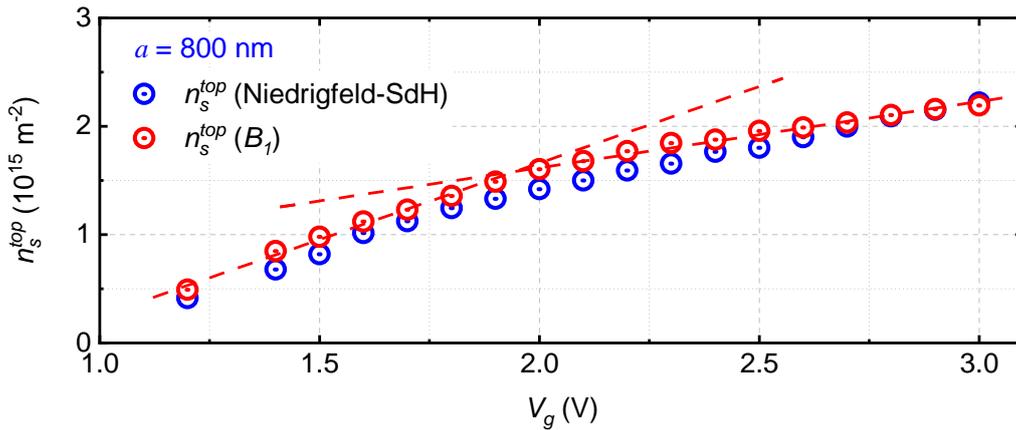


**Abbildung 4.29** Magnetotransportkurven bei verschiedenen Topgate-Spannungen. (a) Längswiderstand  $\rho_{xx}(B)$  als Funktion des Magnetfeldes bei den Gate-Spannungen  $V_g = 1.2, 1.4, 1.6, 1.8, 2.2, 2.4, 2.6, 3$  V (von oben nach unten) und bei  $V_g = -1$  V (gestrichelte Linie). Die Kurven lassen sich dem Valenzband (hellblaue Kurven), der Bandlücke (dunkelblaue Kurven) und dem Leitungsband (violette Kurven) zuordnen. Schwarze Dreiecke markieren die für jede Kurve mittels  $B_1(n_s^{top})$  berechneten Positionen des fundamentalen Antidot-Peaks. (b) Zweite Ableitung  $d\rho_{xx}(B)/dB^2$  des Längswiderstands farbcodiert in einem  $B$ - $V_g$ -Diagramm. Für eine bessere Sichtbarkeit wurden die Kurven vor der Ableitung geglättet. Gestrichelte Linien zeigen die mittels  $n_s^{top}$  berechneten theoretisch erwarteten Peak-Positionen für Kreisbahnen um 1, 2 und 4 Antidots (von außen nach innen). Hierbei zeigt sich eine gute Übereinstimmung mit dem theoretischen Modell bei der Verwendung der Ladungsträgerdichte der oberen Oberfläche. Ab dem Eintritt der Fermi-Energie in das Valenzband scheinen Antidot-Peaks auch hier zunehmend zu verschwinden.



**Abbildung 4.30** Magnetfeld-Wert  $B_1$  des fundamentalen Antidot-Peaks in Abhängigkeit der Ladungsträgerdichte.

Dreiecke markieren die bei einer bestimmten Topgate-Spannung experimentell ermittelten Werte für  $B_1$  als Funktion der hierbei zugehörigen Ladungsträgerdichte  $n_s^{top}$  (Niedrigfeld-SdH). Im Vergleich dazu zeigt die durchgehende Linie den theoretisch erwarteten Verlauf von  $B_1(n_s)$  (Gleichung 4.2) unter der Annahme eines nicht spinentarteten Systems.



**Abbildung 4.31** Ladungsträgerdichten im  $a = 800$  nm Bereich der Probe als Funktion der Topgate-Spannung.

Die experimentell beobachtete Magnetfeldposition  $B_1$  des fundamentalen Antidot-Peaks kann mit Gleichung 4.4 einer Ladungsträgerdichte  $n_s^{top}(B_1)$  zugeordnet werden, welche hier durch rote Kreise illustriert ist. Die erhaltenen Werte sind dabei ähnlich zu den bereits in Abbildung 4.27 gezeigten Daten für die Ladungsträgerdichte  $n_s^{top}$  (Niedrigfeld-SdH) der oberen Oberfläche (blaue Kreise) und weisen ebenfalls eine Steigungsänderung bei einer Gate-Spannung von etwa  $V_g = 1.9$  V auf.

Zustände aus der oberen Oberfläche beeinflusst werden und sowohl Volumen- als auch Oberflächenzustände der unteren Oberfläche hierbei keinen signifikanten Einfluss besitzen.

## 4.2 Transport in Antidot-Übergittern

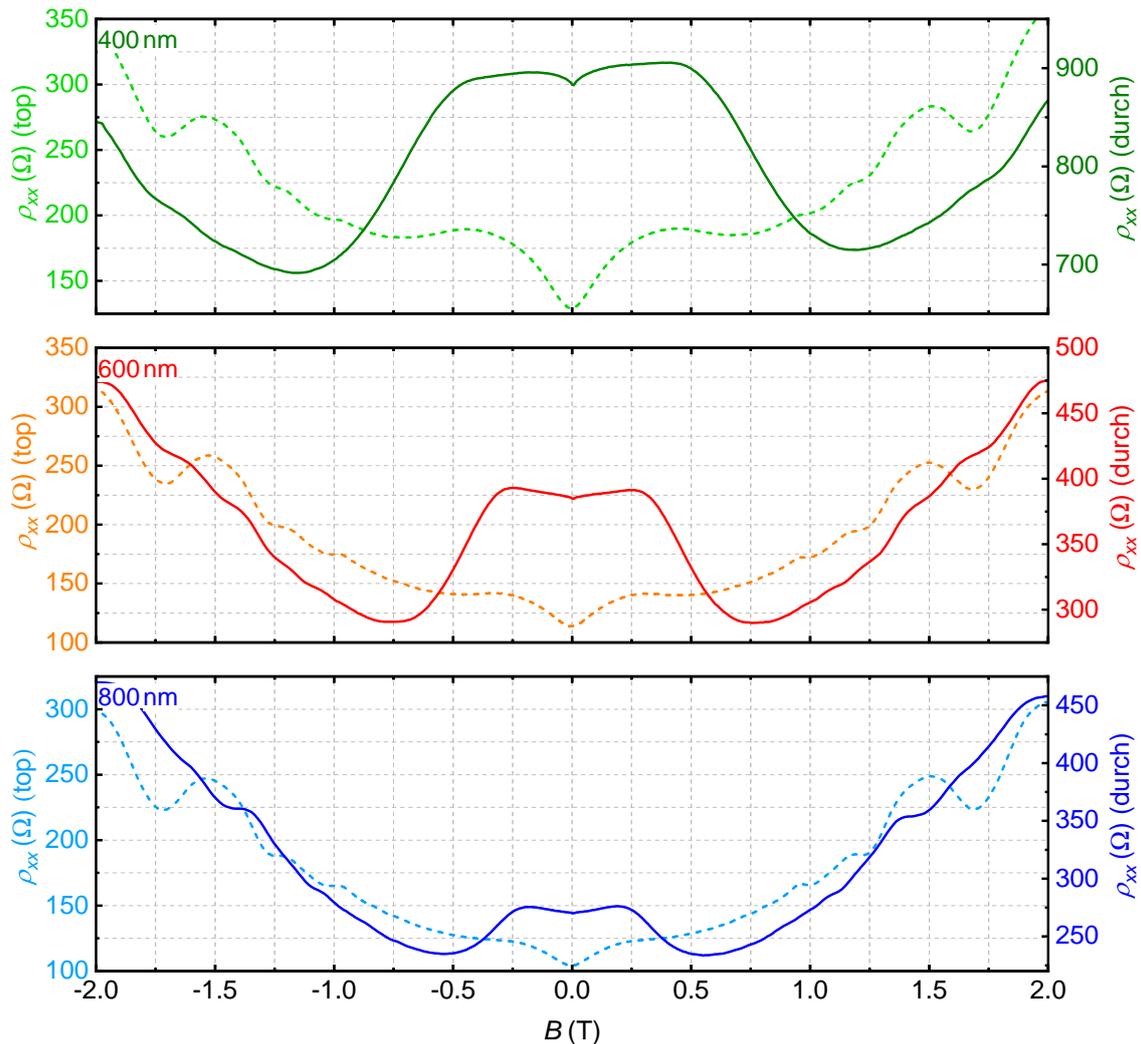
Die Annahme, dass in einem dreidimensionalen topologischen Isolator geometrische Resonanzen aus der Oberfläche mit der geringeren Ladungsträgerdichte und Beweglichkeit keinen deutlich ausgeprägten Effekt auf den Längswiderstand des Systems besitzt, wird im Folgenden anhand einiger rudimentärer Untersuchungen überprüft. Hierfür wurde ein n-dotierter Wafer mit der Nummer 190301 (ebenfalls im A. V. Rzhanov Institut für Halbleiterphysik in Novosibirsk (Russland) gewachsen) verwendet<sup>33</sup>. Im Gegensatz zum bisher verwendeten Wafer (140826) befindet sich die Fermi-Energie in diesem n-dotierten Wafer oberhalb des Valenzbandes. In einem derartigen Wafer sollte es möglich sein Antidot-Peaks bereits mit einem vereinfachten Proben-design ohne zusätzlich aufgebrachtes Topgate beobachten zu können. So wurden aus diesem Materialsystem zwei Proben (ohne zusätzliches Topgate) mit dem in Abbildung 3.3(b) dargestellten Hall-Bar-Layout angefertigt. Beide Proben besitzen drei, mit hexagonalen Antidot-Übergittern ( $a = 400$  nm,  $a = 600$  nm und  $a = 800$  nm) strukturierte, Messbereiche, wobei sich die Proben nur durch die Ätztiefe der Antidots ( $\approx 85$  nm und  $\approx 155$  nm) unterscheiden. Somit kann der Transport in nur oberseitig angeätzten Antidot-Übergittern mit dem Transport in vollständig durchätzten Antidot-Gittern verglichen werden. Das Ätzen der Antidots geht dabei mit einer Verringerung der Ladungsträgerdichte und Beweglichkeit in den betroffenen Oberflächen einher. Dadurch kann im Fall der nur oberseitig angeätzten Antidots ein System erzeugt werden, in welchem der Widerstand der unteren unstrukturierten Oberfläche geringer ist als der Widerstand der strukturierten oberen Oberfläche<sup>34</sup>. Wie stark dabei der Einfluss der strukturierten Oberfläche auf den Längswiderstand ist, zeigt sich in Abbildung 4.32. So scheint auch hier im Transport die Oberfläche mit dem geringsten Widerstand zu dominieren und es sind keine deutlich sichtbaren Kommensurabilitäts-Effekte erkennbar. Im Gegensatz dazu zeigt die Probe mit vollständig durchätzten Antidots erwartungsgemäß deutlich ausgeprägte geometrische Resonanzen im Längswiderstand.

Diese rudimentären Messungen in einem dotierten Wafer bestätigen somit die Annahme, dass beim Transport in einem dreidimensionalen topologischen Isolator ballistische Effekte aus der Oberfläche mit geringerem Widerstand stark dominieren. Zudem zeigt sich, dass die nur oberseitig angeätzten Übergitter kein starkes Antidot-Potential in der unstrukturierten unteren Oberfläche des dreidimensionalen topologischen Isolators erzeugen.

---

<sup>33</sup>Dieser Wafer besitzt eine Schichtabfolge (von unten nach oben): (013) GaAs-Substrat (400  $\mu$ m), ZnTe (30 nm), CdTe (5 – 6  $\mu$ m), Cd<sub>0,68</sub>Hg<sub>0,32</sub>Te (20 nm), HgTe (80 nm), Cd<sub>0,6</sub>Hg<sub>0,4</sub>Te (20 nm) und CdTe (40 nm). Symmetrisch um die HgTe-Schicht befindet sich in einem Abstand von 10 nm eine Indium-Dotierung innerhalb der CdHgTe-Schichten.

<sup>34</sup>Dies ist im zuvor verwendeten undotierten Wafer (140826) nicht möglich, da die Zustände dort ohne angelegte Gate-Spannung im Valenzband sitzen [71] und der Wafer kein Backgate besitzt. Dadurch ist in diesem System durch das Topgate die Ladungsträgerdichte von Elektronen auf der unteren Oberfläche immer geringer als die an der oberen Oberfläche.



**Abbildung 4.32** Magnetowiderstand verschiedener hexagonaler Antidot-Übergitter in zwei Proben aus dem dotierten Wafer.

Der Längswiderstand  $\rho_{xx}(\Omega)$ (top) der nur oberseitig angeätzten Probe ist jeweils durch eine gestrichelte Linie dargestellt und der Längswiderstand  $\rho_{xx}(\Omega)$ (durch) der Probe mit vollständig durchätzten Antidots ist mit einer durchgezogenen Linie gezeigt. Im Kontrast zu den vollständig durchätzten Antidot-Gittern mit ausgeprägten Antidot-Peaks zeigt sich in den nur oberseitig strukturierten Proben aufgrund des geringeren Widerstandes in der unteren unstrukturierten Oberfläche kaum ein Effekt des Potentials im Längswiderstand. Dies deutet darauf hin, dass das oberseitige Anätzen tatsächlich nur in der durchätzten Oberfläche ein starkes Potential erzeugt.

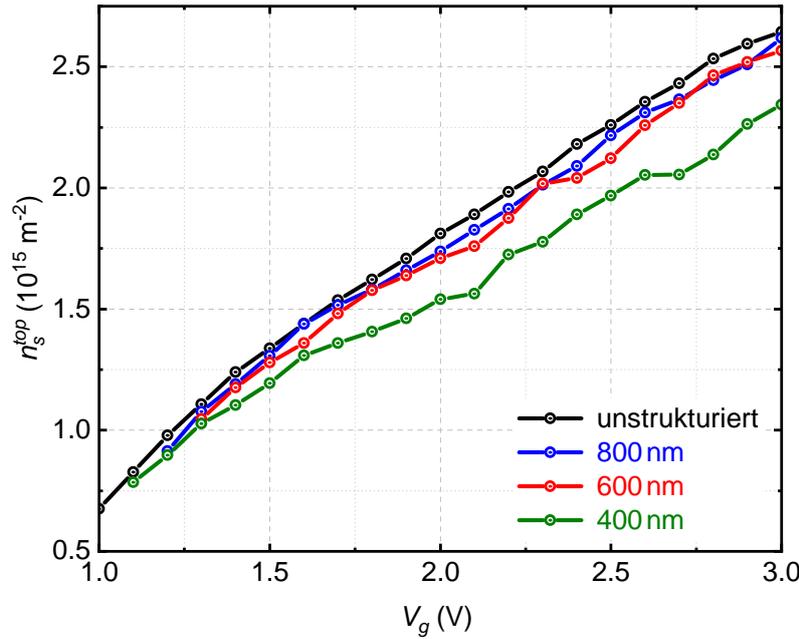
### 4.2.3 Ursprung und Form des Potentials

Nachdem in den vorangegangenen Kapiteln bereits ausführlich auf den Einfluss der geätzten Antidot-Übergitter auf den Magnetotransport im dreidimensionalen topologischen Isolator eingegangen wurde, soll abschließend eine kurze Diskussion über den möglichen Ursprung und die potentielle Form des erzeugten Antidot-Potentials folgen.

Diese Diskussion beschränkt sich dabei auf den Ursprung des Potentials in nur oberseitig angeätzten Antidot-Übergittern. Das liegt daran, dass sich das starke Potential in den vollständig durchätzten Antidot-Übergittern, analog zu Antidots in konventionellen 2DES, bereits aus dem periodischen Durchtrennen der leitenden Schicht ergibt, wodurch im System Bereiche frei von Elektronen vorliegen. Im Gegensatz dazu wird die leitende Schicht in oberseitig angeätzten Antidots nicht vollständig durchtrennt. So wird in diesem System durch den Ätzvorgang lediglich die Grenzfläche zwischen dem dreidimensionalen topologischen Isolator (HgTe) und dem trivialen Isolator lokal tiefer in die HgTe-Schicht verschoben. Obwohl die Oberflächenzustände robust gegen eine solche nicht-magnetische Verformungen sein sollten, deuten die Experimente aus Abschnitt 4.2.1 sehr deutlich das Vorhandensein eines repulsiven Potentials an den einzelnen Antidots an. Ursächlich für das Potential ist hierbei möglicherweise ein elektrostatisches Potential. So könnte das periodische Entfernen der Deckschichten an den Positionen der Antidots zu einer lokalen p-Dotierung führen, welche eine Potentialbarriere zwischen den geätzten und den ungeätzten Bereichen der Oberfläche hervorruft. Zudem besteht auch die Möglichkeit, dass das Ätzen der Löcher zu einer Veränderung der Verspannung innerhalb der HgTe-Schicht führt. Diese Verspannungsänderung kann dabei, ähnlich wie in der Untersuchung von strukturellen Deformationen (in Form einer welligen Verbiegung) in  $\text{Bi}_2\text{Te}_3$  beobachtet [99], ein periodisches Potential erzeugen und möglicherweise im hier untersuchten System einen Beitrag zum beobachteten Antidot-Potential leisten.

Die Vermutung, dass das Potential durch eine lokale p-Dotierung an den Antidots entsteht, wurde in [7] durch eine Verschiebung der in Abbildung 4.11(a) dargestellten Ladungsneutralitätspunkte begründet. So sind dort die Ladungsneutralitätspunkte der strukturierten Proben im Vergleich zur unstrukturierten Probe zu höheren Gate-Spannungen verschoben. Bei dieser Betrachtung der Schichtwiderstände ist allerdings zu beachten, dass die Messkurven der einzelnen Perioden von verschiedenen Proben stammen, die zu unterschiedlichen Zeitpunkten hergestellt wurden.

Nachfolgende Untersuchungen an Proben mit mehreren Perioden in der selben Hall-Bar zeigen dabei jedoch reproduzierbar ein anderes Bild. So ist beispielsweise in Abbildung 4.21(a) zu erkennen, dass der Ladungsneutralitätspunkt mit steigender Strukturierungsdichte hin zu kleineren Gate-Spannungen verschoben wird. Berechnet man allerdings für jede Periode die zu einer Gate-Spannung gehörige Ladungsträgerdichte der oberen Oberfläche  $n_s^{top}$ , zeigt sich mit steigender Strukturierungsdichte eine verringerte Ladungsträgerdichte. Dies ist in Abbildung 4.33 dargestellt.



**Abbildung 4.33**  $n_s^{\text{top}}$  der einzelnen Messbereiche der Hall-Bar (Abbildung 4.20) als Funktion der Gate-Spannung.

Die Messbereiche zeigen eine sinkende Ladungsträgerdichte in der oberen Oberfläche mit steigender Strukturierungsdichte der hexagonalen Antidot-Übergitter.

Daraus lässt sich schließen, dass der Ätzzvorgang in der durchätzten Oberfläche zu einer Verringerung der zugehörigen Ladungsträgerdichte führt. Da diese Reduktion mit kleiner werdender Gitterperiode ansteigt, deutet dies eine lokale p-Dotierung in den Bereichen der Antidots in der strukturierten Oberfläche an.

Ist das System vollständig durchätzt zeigt sich diese lokale p-Dotierung auch im Schichtwiderstand, der den Widerstand des gesamten Systems abbildet. So ist in Abbildung 4.26(a) der Ladungsneutralitätspunkt des vollständig durchätzten Antidot-Gitters im Vergleich zum Referenzbereich zu höheren Gate-Spannungen verschoben.

Obwohl insgesamt ein detailliertes mikroskopisches Bild vom Ursprung des starken Antidot-Potentials bisher noch unbekannt ist, lässt sich aus den Experimenten darauf schließen, dass das repulsive Potential möglicherweise durch eine lokale p-Dotierung in der strukturierten Oberfläche an den Positionen der Antidots entsteht.

Rückschlüsse auf die dabei vorliegende Potentialform liefern die Magnetfeld-Positionen der einzelnen Widerstands-Peaks. So zeigt sich bereits in den vorangegangenen Abschnitten das Vorhandensein eines starken Potentials<sup>35</sup> durch die gute Übereinstimmung der Peak-Positionen mit den Kommensurabilitäts-Bedingungen aus dem Pinball-Modell. Dieses Modell geht, wie in Abschnitt 2.2.2.1 beschrieben, von einem

<sup>35</sup>Würde das Übergitter ein schwaches Potential verursachen, so gelten für Maxima der Peaks die Kommensurabilitäts-Bedingungen  $2R_c = (\lambda + 0.25)$  mit  $\lambda \in \mathbb{N}^+$  [13]. Diese Kommensurabilitäts-Bedingungen stimmen allerdings nicht mit den beobachteten Positionen der Widerstands-Peaks überein.

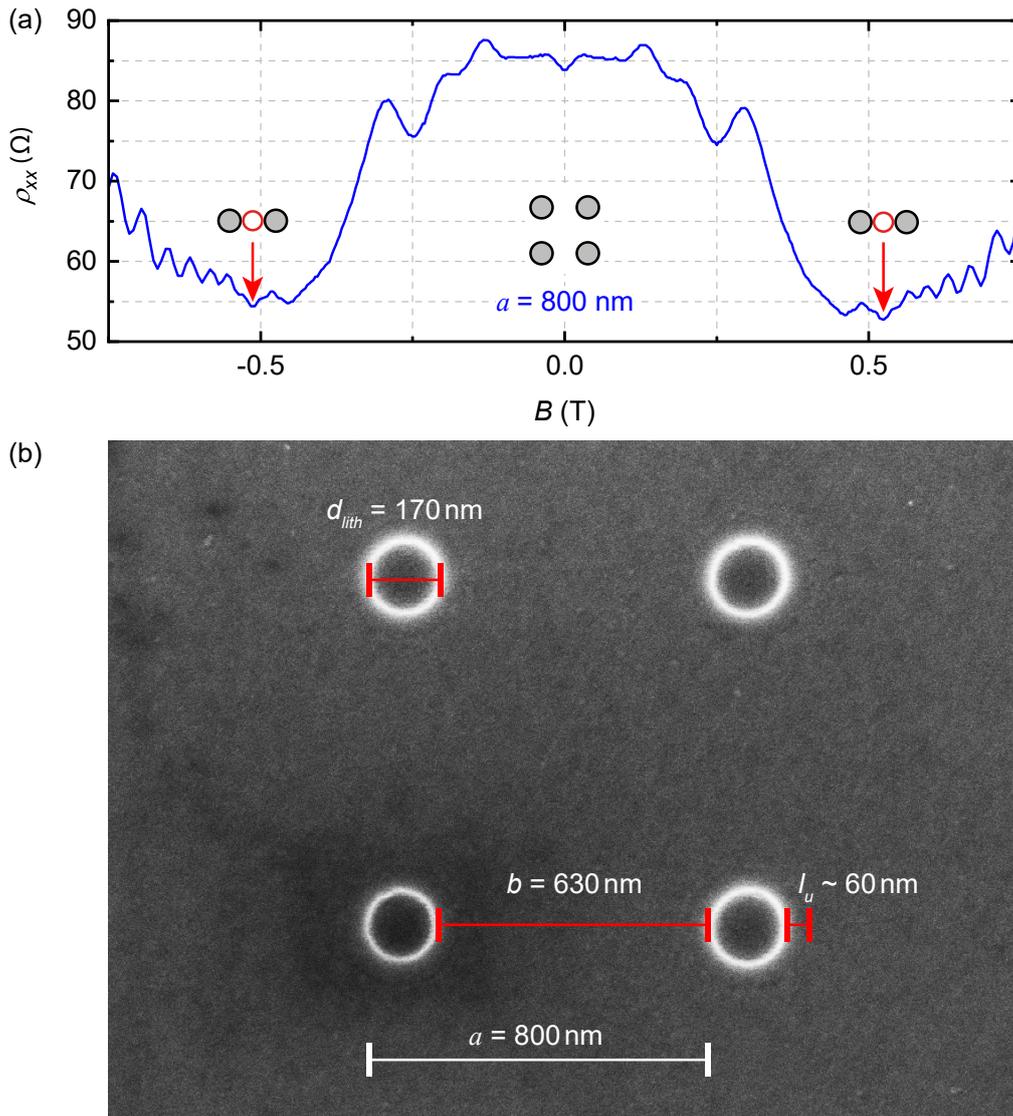
sehr steilen Potential mit spiegelnder Reflexion der Elektronen an einzelnen Antidots aus. Abweichungen vom Pinball-Modell treten dabei auf, wenn das Potential weniger steil abfällt. Dies führt vor allem bei Kreisbahnen um mehrere Antidots zu einer Deformation der klassischen Zyklotronbahnen. Im Experiment äußert sich das in einer Verschiebung der nach dem Pinball-Modell erwarteten Peak-Position, wobei dieser Effekt bei größeren Perioden typischerweise kleiner ist. Besonders ausgeprägt ist dies bei einer Bahn um zwei Antidots, wie in Fleischmann *et al.* [9] gezeigt.

Bei näherer Betrachtung der in dieser Arbeit durchgeführten Messungen zeigt sich auch hier eine gewisse Verschiebung der Peak-Position für eine Bahn um zwei Antidots hin zu höheren Magnetfeldwerten. Dies ist in den oberseitig angeätzten Proben sowohl im quadratischen (Abbildung 4.11(b) für  $a = 600$  nm und  $a = 800$  nm) als auch im hexagonalen Übergitter (für  $a = 800$  nm in Abbildung<sup>36</sup> 4.21(b) und im zugehörigen Farbplot in Abbildung 4.22) sichtbar. Auch die vollständig durchätzte Probe (Abbildung 4.26(b)) zeigt ein ähnliches Verhalten. Die experimentell beobachteten Peak-Positionen zeigen dadurch starke Ähnlichkeiten zu geometrischen Resonanzen, die in GaAs-basierten 2DES [8] beobachtet wurden. Dies deutet darauf hin, dass das Ätzen der Antidots auch im dreidimensionalen topologischen Isolator in den Oberflächenzuständen ein weiches Antidot-Potential erzeugt, welches, ähnlich zu den Experimenten von Weiss *et al.* [8], in unmittelbarer Nähe der geätzten Antidots stark ansteigt und zwischen den Antidots einen endlichen Potentialgradienten aufweist [7].

Die Breite dieser Verarmungszone um einzelne Antidots wird nun, analog zu Experimenten von Eroms *et al.* [100] in einem InAs/GaSb 2DES, mit Hilfe einer Transportmessung abgeschätzt. So zeigen sich vereinzelt auch in den hier durchgeführten Messungen, wie beispielsweise in Abbildung 4.34(a)<sup>37</sup>, Merkmale weiterer Maxima bei Magnetfeldwerten oberhalb des fundamentalen Antidot-Peaks. Diese zusätzlichen Widerstand-Peaks lassen sich nach [100] rosettenförmigen Bahnen zuschreiben, die mehrmals an dem selben Antidot reflektiert werden und diesen dadurch umlaufen. Ausgeprägte SdH-Oszillationen zeigen sich dabei erst, wenn sich die Zyklotronbahnen wieder frei durch das Antidot-Gitter bewegen können. Dies ist der Fall, sobald eine Zyklotronbahn genau zwischen zwei Antidots passt. Daraus ergibt sich die Bedingung  $2R_c = b$ , wobei  $b$ , wie in Abbildung 4.34(b) dargestellt, den Abstand zwischen zwei Antidots beschreibt. Die Magnetfeldposition, an dem diese Bedingung erfüllt ist, ist in Abbildung 4.34(b) durch rote Pfeile markiert. Aus dem experimentell erhaltenen Magnetfeldwert  $B_{exp} \approx 0.52$  T und der zugehörigen Ladungsträgerdichte  $n_s^{top}$  kann der effektive Abstand  $b_{eff} \approx 457.6$  nm zwischen zwei Antidots ermittelt werden. Aus  $b - b_{eff} = 2 \cdot l_{depl}$  kann nun die Verarmungszone auf  $l_{depl} \approx 86$  nm abgeschätzt werden, wodurch sich ein effektiver Antidot-Durchmesser von  $d = d_{lith} + 2 \cdot l_{depl} \approx 342$  nm ergibt. Die ermittelte Verarmungszone  $l_{depl} \approx 86$  nm besitzt dabei eine ähnliche Größenordnung wie der  $\approx 2 - 3$  nm tief unterätzte Be-

<sup>36</sup>Für das  $a = 400$  nm und  $a = 600$  nm Gitter zeigt sich eine Verschiebung von der erwarteten Peak-Position der Resonanz um 3 Antidots, welche vor allem für die kleinere Gitterperiode deutlich sichtbar ist.

<sup>37</sup>Hierbei handelt es sich um die bereits in Abbildung 4.3 dargestellte Messung.



**Abbildung 4.34** Magnetowiderstand und REM-Aufnahme eines oberseitig angeätzten quadratischen Antidot-Gitters mit  $a = 800$  nm. (a) Magnetowiderstand bei  $T \approx 1.4$  K und einer Ladungsträgerdichte von  $n_s^{top} \approx 2.6 \times 10^{15} \text{ m}^{-2}$ . Rote Pfeile markieren den Magnetfeldwert  $B_{exp} \approx 0.52$  T, an welchem die Zyklotronbahn (rot) mit Radius  $R_c$  genau zwischen zwei Antidots passt ( $2R_c = b$ ). (b) REM-Aufnahme des quadratischen Antidot-Gitters mit  $a = 800$  nm, einem lithographischen Loch-Durchmesser  $d_{depl} = 170$  nm und einem Abstand von  $b = 630$  nm zwischen zwei Antidots. Durch das nasschemische Ätzen besitzt jeder Antidot außerhalb des lithographischen Loch-Durchmessers einen gewissen Bereich mit geringer Unterätzung (Ätztiefe  $\approx 2 - 3$  nm). Dies ist vor allem in Abbildung 3.8(a) besonders deutlich sichtbar. In der hier dargestellten REM-Aufnahme ist der unterätzte Bereich nur schwach sichtbar und besitzt eine Größe von etwa  $l_u \approx 60$  nm.

reich  $l_u \approx 60$  nm um die Antidots. Wie von F. Giesel [96] am selben Materialsystem gezeigt, resultiert bereits das reine Anätzen der oberen CdTe-Deckschicht in einem

## 4.2 *Transport in Antidot-Übergittern*

schwachen Potential. Daher lässt sich annehmen, dass der unterätzte Bereich um die Antidots zu einem Aufweichen an den Randbereichen des sonst steilen Antidot-Potentials führt.

Somit besitzt das entstandene Antidot-Potential in etwa den Durchmesser der geätzten Löcher und einem abnehmenden Potentialgradienten in der Größenordnung von einigen zehn Nanometern um die Antidots.



# 5

## Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurde der Einfluss eines starken periodischen Potentials auf den Transport in den Oberflächenzuständen eines HgTe-basierten dreidimensionalen topologischen Isolators untersucht. Zur Erzeugung dieses Potentials wurde im Rahmen der Arbeit ein Prozessablauf entwickelt, der es ermöglicht, in einem nasschemischen Ätzschritt reproduzierbar Antidots mit gewünschter Ätztiefe, Periode und Gittergeometrie herzustellen. Ein aufgebracht Topgate erlaubt es dabei die Fermi-Energie vom Valenzband über die Bandlücke in das Leitungsband zu schieben, um den Transport in den einzelnen Bereichen der Bandstruktur zu untersuchen.

Erste Messungen wurden an quadratischen und hexagonalen Antidot-Übergittern durchgeführt, in denen einzelne Antidots nur wenige Nanometer tief in die obere Oberfläche des dreidimensionalen topologischen Isolators geätzt wurden. Durch dieses Anätzen verschiebt sich lokal die Grenzfläche zwischen dem dreidimensionalen topologischen Isolator (HgTe) und dem trivialen Isolator. Obwohl sich durch eine derartige Verschiebung keine Bereiche frei von Elektronen ergeben, wie in einem konventionellen 2DES-basierten Antidot-Gitter [8] üblich, zeigen die Experimente in einem solchen System deutlich ausgeprägte Widerstands-Peaks. Die schwache Temperaturabhängigkeit der beobachteten Peaks deutet hierbei bereits den semi-klassischen Ursprung durch kommensurable Bahnen an [8, 29]. Nimmt man an, dass die Komensurabilitäts-Peaks nur aus der strukturierten oberen Oberfläche  $n_s^{top}$  mit einem nicht spinentarteten Fermi-Wellenvektor  $k_F = \sqrt{4\pi n_s^{top}}$  stammen, zeigt sich unabhängig von der Gitterperiode und Gittergeometrie eine gute Übereinstimmung mit dem Pinball-Modell [8], was auf ein starkes Antidot-Potential hindeutet. Diese Übereinstimmung der geometrischen Resonanzen um einen oder mehrere Antidots zeigt sich über einen großen Teil der Bandstruktur, bis Antidot-Peaks ab dem Eintritt der Fermi-Energie in das Valenzband zunehmend verschwinden. Dies verdeutlicht, dass die beobachteten Komensurabilitäts-Effekte ausschließlich von den Zuständen einer einzelnen topologischen Oberfläche entstammen. Da die geometrischen Resonanzen dabei nur von den Zuständen der strukturierten oberen Oberfläche resultieren, kann hier der Magnetfeldwert einer geometrischen Resonanz verwendet werden, um über die zugehörige Komensurabilitäts-Bedingung direkt die Ladungsträgerdichte dieser Oberfläche zu bestimmen. Durch die schwache Temperaturabhängigkeit der Widerstands-Peaks bietet dieses Verfahren die Möglichkeit, die Ladungsträgerdichte der strukturierten Oberfläche auch bei erhöhten Tempera-

turen, in denen Quantenoszillationen (wie Shubnikov-de Haas-Oszillationen) bereits ausgeschmiert sind, zu bestimmen. Neben der Ladungsträgerdichte kann aus den Kommensurabilitäts-Peaks zudem im Gegensatz zur Auswertung mit dem Drude-Modell, welches in einem dreidimensionalen System eine mittlere freie Weglänge und Beweglichkeit für das gesamte System liefert, auch die freie Weglänge und die Beweglichkeit einer einzelnen topologischen Oberfläche abgeschätzt werden. Dies liegt daran, dass in einem Antidot-Übergitter eine geometrische Resonanz um eine bestimmte Anzahl an Antidots nur dann aufgelöst wird, wenn die zugehörige Zyklotronbahn mindestens einmal durchlaufen werden kann ohne dabei gestreut zu werden [13].

In weiteren Untersuchungen wurde durch einen Ätzschritt die gesamte leitende Schicht (hier die HgTe-Schicht) des dreidimensionalen topologischen Isolators periodisch durchtrennt. Dadurch entstehen tatsächlich auch, wie in konventionellen 2DES-basierten Antidot-Gittern üblich, Bereiche frei von Elektronen. Im Gegensatz zu einem solchen konventionellen Antidot-System besteht der hier untersuchte dreidimensionale topologische Isolator allerdings aus einer Parallelschaltung von zweidimensionalen Oberflächenzuständen (an der Ober- und Unterseite) und zusätzlichen Volumenzuständen (im Valenz- und Leitungsband), wodurch man im Transport möglicherweise eine Superposition aus den geometrischen Resonanzen der verschiedenen Zustände erwarten könnte. Messungen am vollständig durchätzten Antidot-Gitter zeigen jedoch, dass die beobachteten Widerstands-Peaks wahrscheinlich nur durch nicht spinentartete Zustände aus der oberen Oberfläche beeinflusst werden und sowohl Volumen- als auch Oberflächenzustände der unteren Oberfläche hierbei keinen signifikanten Einfluss besitzen. Dies liegt möglicherweise daran, dass das verwendete Topgate vor allem die Zustände an der oberen Oberfläche beeinflusst und diese das elektrische Feld des Gates für die darunter liegenden Schichten zu einem großen Teil abschirmt. Daher besitzt die obere Oberfläche bei einer angelegten positiven Topgate-Spannung einen geringeren Schichtwiderstand, wodurch der Ladungstransport in einer Parallelschaltung der einzelnen Schichten primär in der oberen Oberfläche stattfindet.

Dass der Ladungstransport primär in der Schicht mit dem geringsten Widerstand stattfindet, zeigt sich auch bei der Verwendung eines n-dotierten HgTe-basierten dreidimensionalen topologischen Isolators<sup>1</sup>. Hier befindet sich die Fermi-Energie des unstrukturierten Systems bereits oberhalb des Valenzbandes, wodurch es auch möglich sein sollte, ohne ein zusätzlich aufgebrachtes Topgate Kommensurabilitäts-Peaks in einem Antidot-Übergitter beobachten zu können. In den Messungen zeigen sich allerdings nur in den vollständig durchätzten Antidot-Gittern ausgeprägte Kommensurabilitäts-Peaks, wohingegen sich in den nur oberseitig angeätzten Antidot-Übergittern kaum ein Effekt des Antidot-Potentials im Längswiderstand zeigt. Dies deutet darauf hin, dass das oberseitige Anätzen tatsächlich nur in der durchätzten Oberfläche ein starkes Potential erzeugt und in der untersuchten Probe

---

<sup>1</sup>Dieser besitzt eine symmetrische Indium-Dotierung oberhalb und unterhalb der HgTe-Schicht.

im Transport die unstrukturierte untere Oberfläche (mit dem geringeren Schichtwiderstand) dominiert.

Abschließend erfolge ein Diskurs über den Ursprung und die Form des erzeugten starken Antidot-Potentials. Dabei wird angenommen, dass das periodische Entfernen der Deckschichten an den Positionen der Antidots möglicherweise zu einer lokalen p-Dotierung führt, wodurch eine elektrostatische Potentialbarriere zwischen den geätzten und ungeätzten Bereichen der Oberfläche entsteht. Aufgrund der Ähnlichkeiten der beobachteten Widerstandspeaks zu geometrischen Resonanzen in GaAs-basierten 2DES [8, 9] lässt sich darauf schließen, dass durch den Ätzprozess ein weiches Antidot-Potential entsteht, welches in der Nähe der geätzten Löcher stark ansteigt und zwischen den Löchern einen endlichen Potentialgradienten aufweist. Somit besitzt das entstandene Antidot-Potential in etwa den Durchmesser des geätzten Lochs und einen abnehmenden Potentialgradienten von einigen zehn Nanometern um das Loch herum [7].

Insgesamt bietet die vorliegende Arbeit eine Grundlage für die Fabrikation von Systemen, welche die ballistische Manipulation von Dirac-Fermionen im Nanometerbereich auf einzelnen Oberflächen eines HgTe-basierten dreidimensionalen topologischen Isolators erlauben. Geometrische Resonanzen im Antidot-Übergitter ermöglichen hierbei eine direkte Bestimmung des Fermi-Wellenvektors  $k_F$ . Der erhaltene Fermi-Wellenvektor steht dabei im Einklang mit nicht spinentarteten Dirac-Oberflächenzuständen, die im  $\mathbf{k}$ -Raum nur einfach besetzt sind [7].





# Arbeitsplan

## Grundmaterial vorbereiten

### Standardreinigung

Prozessschritt	Parameter
Acetonbad	1 min (bei starken Verunreinigungen gegebenenfalls einige Sekunden in ein Ultraschallbad legen bis alle Rückstände entfernt sind)
Acetonbad	1 min
Isopropanolbad	1 min
Trocknen	Mit N <sub>2</sub>

### Wafer brechen

Prozessschritt	Parameter
Schutzlack	S1813 auf Waferstück aufbringen Spin-Coating 1000 rpm / 1000 rpm/s / 60s Ausbacken bei 80 °C und 5 min
Wafer vereinzeln	Mit einem Diamantritzer anritzen und in 4 × 3.5 mm große Probenstücke brechen Abschließende Standardreinigung und optische Kontrolle mit einem Lichtmikroskop

## Anätzen der Kontaktflächen

Prozessschritt	Parameter
Belacken	Standardreinigung S1813, Spin-Coating 6000 rpm / 6000 rpm/s / 60 s Ausbacken bei 80 °C für 5 min
Belichten	<i>Novo</i> -Maske 75 s mit einem <i>Carl Süss MBJ3</i> Mask Aligner bei 275 W
Entwickeln	30 s <i>Microposit MF-26A</i> 30 s Reinstwasser und trocknen mit N <sub>2</sub> Optische Kontrolle mit einem Lichtmikroskop
nasschemisches Ätzen	Ethylenglycol : H <sub>2</sub> O : Br <sub>2</sub> = 100 : 25 : 0.1 bei 0 °C für etwa 50 s, Rührfisch: 300 rpm, Ätzstopp 5 s in Reinstwasser und trocknen mit N <sub>2</sub> Abschließende Standardreinigung, optische Kontrolle mit einem Lichtmikroskop und Überprüfung der Ätztiefe mit einem Oberflächenprofilometer ( <i>Broker Dek-takXT</i> )

## Nanostrukturierung

Prozessschritt	Parameter
Belacken	Standardreinigung PMMA 950k4%, Spin-Coating in zwei direkt aufeinanderfolgenden Schritten bei 3000 rpm / 4000 rpm/s / 5 s und 8000 rpm / 1000 rpm/s / 30 s Ausbacken bei 80 °C für 30 min
Belichten	EHT: 30 kV, Blende: 20 µm, Punktdosis 12 fC
Entwickeln	90 s MIBK : Isopropanol = 1 : 3 30 s Isopropanol und trocknen mit N <sub>2</sub>

Prozessschritt	Parameter
nasschemisches Ätzen	<p>Ethylenglycol : H<sub>2</sub>O : Br<sub>2</sub> = 100 : 25 : 0.1 bei 0 °C, Rührfisch: 300 rpm, Ätzstopp 5 s in Reinstwasser und trocknen mit N<sub>2</sub></p> <p>Je nach Gitterperiode der Antidots 12 - 15 s für eine Äztiefe von etwa 80 nm und 2 - 2:20 min für eine Äztiefe von etwa 150 nm</p> <p>Abschließende Standardreinigung, Kontrolle mit dem REM und Bestimmung der Äztiefe im AFM</p>

## Mesa

Prozessschritt	Parameter
Belacken	<p>Standardreinigung</p> <p>S1813, Spin-Coating 6000 rpm / 6000 rpm/s / 60 s</p> <p>Ausbacken bei 80 °C für 5 min</p>
Belichten	<p><i>Novo</i>-Maske 75 s mit einem <i>Carl Süss MBJ3</i> Mask Aligner bei 275 W</p>
Entwickeln	<p>30 s <i>Microposit MF-26A</i></p> <p>30 s Reinstwasser und trocknen mit N<sub>2</sub></p> <p>Optische Kontrolle mit einem Lichtmikroskop</p>
nasschemisches Ätzen	<p>Ethylenglycol : H<sub>2</sub>O : Br<sub>2</sub> = 100 : 25 : 0.1 bei 0 °C für etwa 8 min mit gelegentlichem Schütteln (etwa alle 30 s), Rührfisch: 300 rpm, Ätzstopp 5 s in Reinstwasser und trocknen mit N<sub>2</sub></p> <p>Diese Ätzzeit resultiert in einer Äztiefe von mindestens 300 nm in allen Bereichen der Mesa</p> <p>Abschließende Standardreinigung, optische Kontrolle mit einem Lichtmikroskop und Überprüfung der Äztiefe mit einem Oberflächenprofilometer (<i>Broker Dek-takXT</i>)</p>

**Goldkontakte**

Prozessschritt	Parameter
Belacken	Standardreinigung S1813, Spin-Coating 6000 rpm / 6000 rpm/s / 60 s Ausbacken bei 80 °C für 5 min
Belichten	<i>Novo</i> -Maske 75 s mit einem <i>Carl Süss MBJ3</i> Mask Aligner bei 275 W
Entwickeln	30 s <i>Microposit MF-26A</i> 30 s Reinstwasser und trocknen mit N <sub>2</sub> Optische Kontrolle mit einem Lichtmikroskop
thermisches Aufdampfen	Chrom: 10 nm Gold: 100 nm Abschließender Lift-off und optische Kontrolle mit einem Lichtmikroskop

**Isolatorschicht**

Prozessschritt	Parameter
Reinigung	Standardreinigung
PECVD	30 nm SiO <sub>2</sub> bei 80 °C, 3 x 15 s mit SiH <sub>4</sub> (170 sccm) und N <sub>2</sub> O (710 sccm) bei 150 W
ALD	100 nm Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> bei 80 °C, 0.015 s Puls, 66 s Spülen, 1200 Zyklen

## Topgate

Prozessschritt	Parameter
Belacken	Standardreinigung S1813, Spin-Coating 6000 rpm / 6000 rpm/s / 60 s Ausbacken bei 80 °C für 5 min
Belichten	<i>Novo</i> -Maske 75 s mit einem <i>Carl Süss MBJ3</i> Mask Aligner bei 275 W
Entwickeln	30 s <i>Microposit MF-26A</i> 30 s Reinstwasser und trocknen mit N <sub>2</sub> Optische Kontrolle mit einem Lichtmikroskop
thermisches Aufdampfen	Sputterätzen (Ar-Ionen), 2 kV, 30 mA, 30 s Chrom: 10 nm Gold: 100 nm Abschließender Lift-off und optische Kontrolle mit einem Lichtmikroskop

## Fertigstellung

Prozessschritt	Parameter
Vorbereitung	Standardreinigung des Chipcarriers Probe mit PMMA in den Chipcarrier einkleben Isolator an einigen Stellen oberhalb der Kontaktpads mit einer Pinzette entfernen
Bonden	1. Bond auf den Chipcarrier setzen und 2. Bond lose auf dem Kontaktpad platzieren
Kontaktierung	Festkleben des losen Gold-Drahtes mit zwei-komponentigen Silber-Epoxid ( <i>EpoTek EE129-4</i> im Verhältnis 1 : 1), ausbacken bei 80 °C für 2 h

<b>Prozessschritt</b>	<b>Parameter</b>
Kontaktierung (bevorzugte Methode)	Alternativ: Festlöten des losen Gold-Drahtes mit Indium LötKolben: 7 V und 0.9 A
Lagerung	ESD-sichere Probenschachtel

# B

## Symbole und Abkürzungen

### B.1 Symbole

$a$	Gitterperiode des lateralen Übergitters
$\vec{A}$	Vektorpotential
$dA$	Oberflächenelement
$\mathcal{A}_m$	Berry-Potential
$\vec{b}_{1,2,3}$	primitive reziproke Gittervektoren
$b$	Abstand zwischen zwei Antidots
$b_{eff}$	effektiver Abstand zwischen zwei Antidot-Potentialen
$B$	Magnetfeld
$B_1$	Magnetfeldposition des fundamentalen Antidot-Peaks
$\beta$	Parameter für die Steilheit des Antidot-Potentials
$c$	Gesamt-Chern-Zahl
$C$	elektrische Kapazität
$\gamma_m$	Berry-Phase
$d$	effektiver Antidot-Durchmesser
$d_{depl}$	Breite der Verarmungszone
$d_{lith}$	lithographischer Loch-Durchmesser
$D(E)$	Zustandsdichte
$\delta$	Deltafunktion
$\delta_i$	Faktor zur Ermittlung der $\mathbb{Z}_2$ -Invariante
$e$	Elementarladung
$E, E_n, E_{n,s}$	Energie, Landau-Energieniveau, Landau-Energieniveau mit Spinaufspaltung
$\vec{E}, E, E_x, E_y$	elektrisches Feld
$E_F = (\hbar k_F)^2 / (2m^*)$	Fermi-Energie

$E_i$	Subbandenergieniveau
$f(E)$	Fermi-Funktion
$F = L_x \cdot L_y$	Probenfläche
$\vec{F}_E$	Kraft des elektrischen Feldes
$\vec{F}_L$	Lorentzkraft
$\vec{F}_M$	Kraft des magnetischen Feldes
$\mathcal{F}_m$	Berry-Krümmung
$g$	Geschlecht einer Fläche
$g^*$	effektiver Landé-Faktor
$G$	Leitwert, Gaußsche Krümmung
$g_s$	Spinrentartungsfaktor
$\Gamma$	Pfad
$\Gamma = \hbar\sqrt{2\omega_c/(\pi\tau)}$	Streuverbreiterung der Landau-Niveaus in der SCBA-Näherung
$\Gamma_i$	Kramers-Punkte
$H$	Hamiltonoperator
$H_D, H_{mv}, H_{so}$	zusätzliche Korrekturterme zum ursprünglichen Hamiltonian $H_0$
$h, \hbar$	plank'sches Wirkungsquantum und reduziertes plank'sches Wirkungsquantum $\hbar = h/2\pi$
$i$	Index
$I$	elektrischer Strom
$\vec{j}, \hat{j}, \hat{j}_x, \hat{j}_y$	Stromdichte
$k, k_x, k_y$	Wellenzahlen
$\vec{k}$	Wellenvektor
$k_B$	Boltzmann-Konstante
$k_F = \sqrt{4\pi n_s/g_s}$	Fermi-Wellenzahl
$L, L_x, L_y$	Probenlängen
$L/W$	Verhältnis der Länge zur Breite in der Hall-Bar-Geometrie
$l_B = \sqrt{\hbar/(eB)}$	magnetische Länge
$l_e = \mu\hbar\sqrt{4\pi n_s/g_s}/e$	mittlere freie Weglänge
$l_u$	unterstützter Bereich um einen Antidot

## B.1 Symbole

$\lambda$	Oszillationsindex der Kommensurabilitäts-Oszillationen
$\lambda_F = 2\pi/k_F$	Fermi-Wellenlänge
$\Lambda_{j=a,b,c,d}$	Projektion zweier zeitumkehrsymmetrischer Punkte
$m$	Bandindex
$m_e$	Ruhemasse des Elektrons
$m^*$	effektive Masse
$\mu$	Beweglichkeit
$\mu_B = e\hbar/2m_e$	Bohr'sches Magneton
$n$	Landau-Quantenzahl
$\vec{n}$	Normalenvektor
$n_L$	Entartung der Landau-Niveaus
$n_s$	Ladungsträgerdichte von Elektronen
$n_s^{bot}$	Ladungsträgerdichte von Elektronen an der unteren Oberfläche
$n_s^{bulk}$	Ladungsträgerdichte von Elektronen in den Volumenzuständen
$n_s^{ges}$	Gesamtladungsträgerdichte von Elektronen
$n_s^{top}$	Ladungsträgerdichte von Elektronen an der oberen Oberfläche
$\nu$	Füllfaktor
$\nu$	$\mathbb{Z}_2$ -Invariante
$\nu_0$	starke $\mathbb{Z}_2$ -Invariante
$\nu_{k=1,2,3}$	schwache $\mathbb{Z}_2$ -Invarianten
$\omega_c = eB/m^*$	Zyklotronfrequenz
$\vec{p}, p_x, p_y$	kanonischer Impulsoperator
$p_s$	Ladungsträgerdichte von Löchern
$p_s^{ges}$	Gesamtladungsträgerdichte von Löchern
$\pi_j$	Zeitumkehr Polarisation
$\Psi$	Wellenfunktion
$Q$	Ladung
$R_c = l_B^2 k_F = \hbar k_F / (eB)$	klassischer Zyklotronradius
$\hat{R}_c$	mittlerer Zyklotronradius
$R_K = h/e^2$	Klitzing-Konstante

$R_{xx} = U_{xx}/I$	Längswiderstand
$R_{xy} = U_{xy}/I$	Hall-Widerstand
$\rho_{\square} = \rho_{xx}(B = 0)$	Schichtwiderstand
$\rho, \rho_{xx}, \rho_{yy}, \rho_{xy}, \rho_{yx}$	Widerstandstensor und Komponenten des Widerstandstensors
$\rho_0 = 1/(n_s e \mu)$	Drude-Magnetowiderstand
$R_0 = B/(en_s)$	Drude-Hall-Widerstand
$\rho_{xx} = R_{xx}/(L/W)$	geometrieunabhängiger Längswiderstand
$\rho_{xy} = R_{xy}/(L/W)$	geometrieunabhängiger Hall-Widerstand
$s$	Spinquantenzahl
$S$	Oberfläche
$S_y$	Spinoperator
$\sigma, \sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}, \sigma_{yx}$	Leitfähigkeitstensor und Komponenten des Leitfähigkeitstensors
$\text{sgn}(n)$	Signumfunktion
$t$	Zeit
$T$	Temperatur
$\tau = \mu m^*/e$	Streuzeit
$\mathcal{T}$	Zeitumkehrsymmetrie
$\Theta(x)$	Stufenfunktion
$\Theta : t \mapsto -t$	anti-unitärer Operator
$U$	Spannung
$U(y)$	Randpotential
$U_{DC}$	Gleichspannung
$U_{xx}, U_{xy}$	Längs- und Hall-Spannung
$V_0$	Amplitude des Modulationspotentials
$V_{AC}$	Wechselspannung
$V_g$	Topgate-Spannung
$V(x,y)$	Modulationspotential
$\vec{v}, \vec{v}_D$	Geschwindigkeit, Driftgeschwindigkeit
$v_F = \hbar k_F/m^*$	Fermi-Geschwindigkeit
$\chi$	Euler-Charakteristik

## B.2 Abkürzungen

2D	zweidimensional
2DEG	zweidimensionales Elektronengas
2DES	zweidimensionales Elektronen System
2DHS	zweidimensionales Loch System
2D TI	zweidimensionaler topologischer Isolator
3D	dreidimensional
3D TI	dreidimensionaler topologischer Isolator
AC	Wechselstrom
AFM	Atomic Force Microscope - Rasterkraftmikroskop
ALD	Atomic Layer Deposition - Atomlagenabscheidung
Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	Aluminiumoxid
Ar	Argon
Bi <sub>2</sub> Te <sub>3</sub>	Bismuttellurid
Br	Brom
BZ	Brillouin-Zone
Cd	Cadmium
CdHgTe	Cadmiumquecksilbertellurid
CdTe	Cadmiumtellurid
Cr	Chrom
C <sub>2</sub> H <sub>6</sub> O <sub>2</sub>	Ethylenglycol
DC	Gleichstrom
DSS	Dirac Surface States - Dirac-Oberflächenzustände
EG	Ethylenglycol
EHT	Electron High Tension - Beschleunigungsspannung der Elektronen
ESD	Electrostatic Discharge - Elektrostatische Entladung
GaAs	Galliumarsenid
H <sub>2</sub> O	Wasser
<sup>4</sup> He	Helium-4
HBr	Bromwasserstoff
Hg	Quecksilber

HgTe	Quecksilbertellurid
IBE	Ion Beam Etching - physikalisches Ionenätzen
LB	Leitungsband
MIBK	Methylisobutylketon
N <sub>2</sub>	Stickstoff
N <sub>2</sub> O	Distickstoffmonoxid
PECVD	Plasma Enhanced Chemical Vapor Deposition - Plasmaunterstützte chemische Gasphasenabscheidung
PMMA	Polymethylmethacrylat
QHE	Quanten-Hall-Effekt
REM	Rasterelektronenmikroskop
RIE	Reactive Ion Etching - physikalisch-chemisches reaktives Ionenätzen
SCBA	Self-Consistent Born Approximation - selbstkonsistente Born'sche Näherung
SdH	Shubnikov-de Haas
Si	Silizium
SiH <sub>4</sub>	Monosilan
SiO <sub>2</sub>	Siliziumdioxid
Te	Tellur
Ti	Titan
UV	Ultraviolett
VB	Valenzband
VTI	Variable Temperature Insert - thermisch isolierten Einsatz im Kryostaten für die Temperaturkontrolle
ZnTe	Zinktellurid

# Literaturverzeichnis

- [1] C. L. Kane und E. J. Mele: *Z<sub>2</sub> topological order and the quantum spin Hall effect*. Physical Review Letters, 95(14):146802, 2005.
- [2] C. L. Kane und E. J. Mele: *Quantum Spin Hall Effect in Graphene*. Physical Review Letters, 95(22):226801, 2005.
- [3] L. Fu, C. L. Kane und E. J. Mele: *Topological insulators in three dimensions*. Physical Review Letters, 98(10):106803, 2007.
- [4] L. Fu und C. L. Kane: *Topological insulators with inversion symmetry*. Physical Review B, 76(4), 2007.
- [5] M. Z. Hasan und J. E. Moore: *Three-Dimensional Topological Insulators*. Annual Review of Condensed Matter Physics, 2(1):55–78, 2011.
- [6] D. A. Kozlov, Z. D. Kvon, E. B. Olshanetsky, N. N. Mikhailov, S. A. Dvoretzky und D. Weiss: *Transport properties of a 3D topological insulator based on a strained high-mobility HgTe film*. Physical Review Letters, 112(19):196801, 2014.
- [7] H. Maier, J. Ziegler, R. Fischer, D. A. Kozlov, Z. D. Kvon, N. Mikhailov, S. A. Dvoretzky und D. Weiss: *Ballistic geometric resistance resonances in a single surface of a topological insulator*. Nature Communications, 8(1):2023, 2017.
- [8] D. Weiss, M. Roukes, A. Menschig, P. Grambow, K. von Klitzing und G. Weimann: *Electron pinball and commensurate orbits in a periodic array of scatterers*. Physical Review Letters, 66(21):2790–2793, 1991.
- [9] R. Fleischmann, T. Geisel und R. Ketzmerick: *Magnetoresistance due to chaos and nonlinear resonances in lateral surface superlattices*. Physical Review Letters, 68(9):1367–1370, 1992.
- [10] A. Sandner, T. Preis, C. Schell, P. Giudici, K. Watanabe, T. Taniguchi, D. Weiss und J. Eroms: *Ballistic Transport in Graphene Antidot Lattices*. Nano letters, 15(12):8402–8406, 2015.
- [11] K. von Klitzing: *The quantized Hall effect*. Reviews of Modern Physics, 58(3):519–531, 1986.
- [12] T. Ando, A. B. Fowler und F. Stern: *Electronic properties of two-dimensional systems*. Reviews of Modern Physics, 54(2):437–672, 1982.
- [13] D. Weiss: *Kommensurabilitätseffekte in lateralen Übergittern*. Habilitationsschrift, Universität Stuttgart, Stuttgart, 1992.
- [14] J. J. Harris, J. A. Pals und R. Woltjer: *Electronic transport in low-dimensional structures*. Reports on Progress in Physics, 52(10):1217–1266, 1989.

- [15] S. Datta: *Electronic Transport in Mesoscopic Systems*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [16] J. H. Davies: *The physics of low-dimensional semiconductors: An introduction*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 6. print Auflage, 2006.
- [17] R. Gross und A. Marx: *Festkörperphysik*. Mathematik, Physik 10-2012. Oldenbourg Wissenschaftsverlag Verlag, München, 2012.
- [18] H. Ibach und H. Lüth: *Solid-State Physics*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2009.
- [19] T. Ihn: *Semiconductor nanostructures: Quantum states and electronic transport*. Oxford Univ. Press, Oxford, überarbeitete Auflage, 2013.
- [20] D. Vogel: *Anomaler Hall-Effekt und Metall-Isolator-Übergang in zweidimensionalen InAs:Mn-Lochsystemen*. Dissertation, Universität Regensburg, Regensburg, 2016.
- [21] W. Breuer: *Magnetotransport-Messungen an lateral modulierten zweidimensionalen Elektronengasen*. Dissertation, Universität Regensburg, Regensburg, 2003.
- [22] H. Maier: *Transport in kurzperiodigen lateralen Übergittern*. Masterarbeit, Universität Regensburg, Regensburg, 2014.
- [23] D. Weiss: *Halbleiterphysik*. Vorlesungsskript, Universität Regensburg, Regensburg, 2013.
- [24] C. Mitzkus: *Transportuntersuchungen an dichtemodulierten zweidimensionalen Elektronensystemen*. Dissertation, Universität Regensburg, Regensburg, 2006.
- [25] C. W. J. Beenakker und H. van Houten: *Quantum Transport in Semiconductor Nanostructures*. Solid State Physics, 44:1–228, 1991.
- [26] D. Weiss und K. Richter: *Antidot-Übergitter: Flippern mit Elektronen*. Physik Journal, 51(3):171–176, 1995.
- [27] D. Weiss (Herausgeber): *Lateral superlattices: Magnetoresistance, hall effect and commensurate orbits*, Band 31 der Reihe *Festkörperprobleme*. Vieweg, Braunschweig, 1991.
- [28] D. Weiss, K. Richter und J. Eroms: *Classical and Quantum Transport in Antidot Arrays*. In: J. P. Bird (Herausgeber): *Electron Transport in Quantum Dots*, Seiten 159–208. Springer US, Boston, MA, 2003.
- [29] D. Weiss, K. Richter, E. Vasiliadou und G. Lütjering: *Magnetotransport in antidot arrays*. Surface Science, 305(1-3):408–418, 1994.
- [30] D. Weiss, G. Lütjering und K. Richter: *Chaotic electron motion in macroscopic and mesoscopic antidot lattices*. Chaos, Solitons & Fractals, 8(7-8):1337–1357, 1997.

- [31] P. D. Ye, D. Weiss, R. R. Gerhardts, M. Seeger, K. von Klitzing, K. Eberl und H. Nickel: *Electrons in a periodic magnetic field induced by a regular array of micromagnets*. Physical Review Letters, 74(15):3013–3016, 1995.
- [32] J. Schluck: *Classical electron magnetotransport in controlled potential landscapes*. Dissertation, Universität Düsseldorf, Düsseldorf, 2018.
- [33] A. Lorke, J. P. Kotthaus und K. Ploog: *Magnetotransport in two-dimensional lateral superlattices*. Physical Review B, 44(7):3447–3450, 1991.
- [34] S. Uryu und T. Ando: *Analysis of antidot lattices with periodic orbit theory*. Physica B: Condensed Matter, 227(1-4):138–140, 1996.
- [35] F. Nihey und K. Nakamura: *Aharonov-Bohm effect in antidot structures*. Physica B: Condensed Matter, 184(1-4):398–402, 1993.
- [36] D. Weiss, K. Richter, A. Menschig, R. Bergmann, H. Schweizer, K. von Klitzing und G. Weimann: *Quantized periodic orbits in large antidot arrays*. Physical Review Letters, 70(26):4118–4121, 1993.
- [37] R. Gross, A. Marx, D. Einzel und S. Geprägs: *Festkörperphysik: Aufgaben und Lösungen*. De Gruyter Studium. De Gruyter, Berlin and Boston, 2. Auflage Auflage, 2018.
- [38] J. Eroms: *Kommensurabilitätseffekte in InAs-Heterostrukturen*. Diplomarbeit, Universität Regensburg, Regensburg, 1998.
- [39] J. Eroms: *Transport in niederdimensionalen Supraleiter-Halbleiter-Strukturen*. Dissertation, Universität Regensburg, Regensburg, 2002.
- [40] M. Z. Hasan und C. L. Kane: *Colloquium: Topological insulators*. Reviews of Modern Physics, 82(4):3045–3067, 2010.
- [41] M. Franz, L. Molenkamp und M. L. Cohen (Herausgeber): *Topological insulators*, Band 6 der Reihe *Contemporary concepts of condensed matter science*. Elsevier, Amsterdam, 1. Edition. Auflage, 2013.
- [42] Y. Ando: *Topological Insulator Materials*. Journal of the Physical Society of Japan, 82(10):102001, 2013.
- [43] B. A. Bernevig und T. L. Hughes: *Topological insulators and topological superconductors*. Princeton University Press, Princeton, 2013.
- [44] C. Pauly: *Strong and Weak Topology Probed by Surface Science: Topological Insulator Properties of Phase Change Alloys and Heavy Metal Graphene*. MatWerk. Springer Fachmedien Wiesbaden, Wiesbaden, 1. Edition. Auflage, 2015.
- [45] S.-Q. Shen: *Topological Insulators*, Band 174. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2012.
- [46] D. Culcer, A. Cem Keser, Y. Li und G. Tkachov: *Transport in two-dimensional topological materials: recent developments in experiment and theory*. 2D Materials, 7(2):022007, 2020.

- [47] X.-L. Qi und S.-C. Zhang: *Topological insulators and superconductors*. Reviews of Modern Physics, 83(4):1057–1110, 2011.
- [48] E. J. König, P. M. Ostrovsky, I. V. Protopopov, I. V. Gornyi, I. S. Burmistrov und A. D. Mirlin: *Half-integer quantum Hall effect of disordered Dirac fermions at a topological insulator surface*. Physical Review B, 90(16), 2014.
- [49] J. H. Bardarson und J. E. Moore: *Quantum interference and Aharonov-Bohm oscillations in topological insulators*. Reports on Progress in Physics, 76(5):056501, 2013.
- [50] X. Zhang, M. Xiao, Y. Cheng, M.-H. Lu und J. Christensen: *Topological sound*. Communications Physics, 1(1):38, 2018.
- [51] J. K. Asbóth, L. Oroszlány und A. Pályi: *A Short Course on Topological Insulators: Band-structure topology and edge states in one and two dimensions*. 0075-8450, 919, 2016.
- [52] D. J. Thouless, M. Kohmoto, M. P. Nightingale und M. den Nijs: *Quantized Hall Conductance in a Two-Dimensional Periodic Potential*. Physical Review Letters, 49(6):405–408, 1982.
- [53] Q. Niu, D. J. Thouless und Y.-S. Wu: *Quantized Hall conductance as a topological invariant*. Physical Review. B, Condensed Matter, 31(6):3372–3377, 1985.
- [54] C. Kane und J. Moore: *Topological insulators*. Physics World, 24(02):32–36, 2011.
- [55] J. E. Moore: *The birth of topological insulators*. Nature, 464(7286):194–198, 2010.
- [56] Z. Zhu, Y. Cheng und U. Schwingenschlögl: *Band inversion mechanism in topological insulators: A guideline for materials design*. Physical Review B, 85(23), 2012.
- [57] L. Fu und C. L. Kane: *Time reversal polarization and a  $Z_2$  adiabatic spin pump*. Physical Review B, 74(19):305, 2006.
- [58] R. M. Kaufmann, D. Li und B. Wehefritz-Kaufmann: *Notes on topological insulators*. Reviews in Mathematical Physics, 28(10):1630003, 2016.
- [59] Z. Ringel, Y. E. Kraus und A. Stern: *Strong side of weak topological insulators*. Physical Review B, 86(4):467, 2012.
- [60] C. Brüne, C. X. Liu, E. G. Novik, E. M. Hankiewicz, H. Buhmann, Y. L. Chen, X. L. Qi, Z. X. Shen, S. C. Zhang und L. W. Molenkamp: *Quantum Hall Effect from the Topological Surface States of Strained Bulk HgTe*. Physical Review Letters, 106(12), 2011.
- [61] C. Brune, C. X. Liu, E. G. Novik, E. M. Hankiewicz, H. Buhmann, Y. L. Chen, X. L. Qi, Z. X. Shen, S. C. Zhang und L. W. Molenkamp: *Quantum*

- Hall effect from the topological surface states of strained bulk HgTe.* Physical Review Letters, 106(12):126803, 2011.
- [62] Y. Xu, I. Miotkowski, C. Liu, J. Tian, H. Nam, N. Alidoust, J. Hu, C.-K. Shih, M. Z. Hasan und Y. P. Chen: *Observation of topological surface state quantum Hall effect in an intrinsic three-dimensional topological insulator.* Nature Physics, 10(12):956–963, 2014.
- [63] J. Chu und A. Sher: *Physics and properties of Narrow gap semiconductors.* Microdevices. Springer, New York, NY, 2008.
- [64] N. N. Berchenko und M. V. Pashkovskii: *Mercury telluride—a zero-gap semiconductor.* Soviet Physics Uspekhi, 19(6):462–480, 1976.
- [65] B. A. Bernevig, T. L. Hughes und S. Zhang: *Quantum spin Hall effect and topological phase transition in HgTe quantum wells.* Science (New York, N.Y.), 314(5806):1757–1761, 2006.
- [66] M. König, S. Wiedmann, C. Brune, A. Roth, H. Buhmann, L. W. Molenkamp, X.-L. Qi und S.-C. Zhang: *Quantum spin hall insulator state in HgTe quantum wells.* Science (New York, N.Y.), 318(5851):766–770, 2007.
- [67] D. A. Kozlov, Z. D. Kvon, N. N. Mikhailov und S. A. Dvoretzky: *Weak localization of Dirac fermions in HgTe quantum wells.* JETP Letters, 96(11):730–734, 2013.
- [68] R. Kozlovsky: *Magnetotransport in 3D Topological Insulator Nanowires.* Dissertation, Universität Regensburg, Regensburg, 2020.
- [69] S.-C. Wu, B. Yan und C. Felser: *Ab initio study of topological surface states of strained HgTe.* EPL (Europhysics Letters), 107(5):57006, 2014.
- [70] Z. D. Kvon, E. B. Olshanetsky, D. A. Kozlov, E. Novik, N. N. Mikhailov und S. A. Dvoretzky: *Two-dimensional semimetal in HgTe-based quantum wells.* Low Temperature Physics, 37(3):202–209, 2011.
- [71] J. Ziegler: *Quantum transport in HgTe topological insulator nanostructures.* Dissertation, Universität Regensburg, Regensburg, 2018.
- [72] D. A. Kozlov, D. Bauer, J. Ziegler, R. Fischer, M. L. Savchenko, Z. D. Kvon, N. N. Mikhailov, S. A. Dvoretzky und D. Weiss: *Supplemental Material: Probing Quantum Capacitance in a 3D Topological Insulator.* Physical Review Letters, 116(16):166802, 2016.
- [73] X. Dai, T. L. Hughes, X.-L. Qi, Z. Fang und S.-C. Zhang: *Helical edge and surface states in HgTe quantum wells and bulk insulators.* Physical Review B, 77(12), 2008.
- [74] C. Brüne, C. Thienel, M. Stuiber, J. Böttcher, H. Buhmann, E. G. Novik, C.-X. Liu, E. M. Hankiewicz und L. W. Molenkamp: *Dirac-Screening Stabilized Surface-State Transport in a Topological Insulator.* Physical Review X, 4(4), 2014.

- [75] D. A. Kozlov, D. Bauer, J. Ziegler, R. Fischer, M. L. Savchenko, Z. D. Kvon, N. N. Mikhailov, S. A. Dvoretzky und D. Weiss: *Probing Quantum Capacitance in a 3D Topological Insulator*. Physical Review Letters, 116(16):166802, 2016.
- [76] V. Daumer, I. Golombek, M. Gbordzoe, E. G. Novik, V. Hock, C. R. Becker, H. Buhmann und L. W. Molenkamp: *Quasiballistic transport in HgTe quantum-well nanostructures*. Applied Physics Letters, 83(7):1376–1378, 2003.
- [77] S. Weishäupl: *Quanteninterferenzeffekte in topologischen Isolatoren und magnetischen Halbleitern*. Dissertation, Universität Regensburg, Regensburg, 2014.
- [78] F. Völklein und T. Zetterer: *Praxiswissen Mikrosystemtechnik: Grundlagen - Technologien - Anwendungen*. Elektrotechnik. Vieweg+Teubner Verlag / GWV Fachverlage GmbH Wiesbaden, Wiesbaden, 2. vollständig überarbeitete und erweiterte Auflage. Auflage, 2006.
- [79] T. Heinzel: *Mesoscopic Electronics in Solid State Nanostructures*. Wiley-VCH, Hoboken, 2008.
- [80] M. Köhler: *Ätzverfahren für die Mikrotechnik*. Wiley-VCH, Weinheim, 1998.
- [81] V. Srivastav, R. Pal, B. L. Sharma, A. Naik, D. S. Rawal, V. Gopal und H. P. Vyas: *Etching of mesa structures in HgCdTe*. Journal of Electronic Materials, 34(11):1440–1445, 2005.
- [82] V. Srivastav, R. Pal und H. P. Vyas: *Overview of etching technologies used for HgCdTe*. Opto-Electronics Review, 13(3), 197-211, 2005.
- [83] J. Ziegler: *Transport in HgTe-based 2D topological insulators*. Masterarbeit, Universität Regensburg, Regensburg, 2013.
- [84] M. Pleyer: *Untersuchung des nasschemischen Ätzprozesses von Nanostrukturen in HgTe*. Bachelorarbeit, Universität Regensburg, Regensburg, 2016.
- [85] F. Pobell: *Matter and Methods at Low Temperatures*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 3. Edition. Auflage, 2007.
- [86] C. Enss und S. Hunklinger: *Low-temperature physics: Case histories drawn from the proceedings of the Institution of Mechanical Engineers and from the authors own experience*. Springer, Berlin, 2005.
- [87] N. H. Balshaw: *Practical cryogenics: An introduction to laboratory cryogenics*. Oxford Instruments, Scientific Research Division, Eynsham, 1996.
- [88] S. Reinhardt, C. Butschkow, S. Geissler, A. Dirnaichner, F. Olbrich, C. E. Lane, D. Schröer und A. K. Hüttel: *Lab.: Measurement - A portable and extensible framework for controlling lab equipment and conducting measurements*. Computer Physics Communications, 234:216–222, 2019.
- [89] D. A. Kozlov, Z. D. Kvon, E. B. Olshanetsky, N. N. Mikhailov, S. A. Dvoretzky und D. Weiss: *Supplementary Material for "Transport properties of a 3D*

- topological insulator based on a strained high-mobility HgTe film*". Physical Review Letters, 112(19):196801, 2014.
- [90] R. Fischer: *Magnetocapacitance and transport measurements on HgTe-based 2D and 3D topological insulators*. Masterarbeit, Universität Regensburg, Regensburg, 2016.
- [91] J. Ziegler, D. A. Kozlov, N. N. Mikhailov, S. Dvoretzky und D. Weiss: *Quantum Hall effect and Landau levels in the three-dimensional topological insulator HgTe*. Physical Review Research, 2(3), 2020.
- [92] S. M. Geißler: *Transportuntersuchungen an ferromagnetischen (Ga,Mn)As-Nanokontakten*. Dissertation, Universität Regensburg, Regensburg, 2013.
- [93] A. Iankilevitch: *Transportuntersuchungen an magnetischen und nicht-magnetischen II-VI-Heterostrukturen*. Dissertation, Universität Regensburg, Regensburg, 2017.
- [94] G. Owen: *Methods for proximity effect correction in electron lithography*. Journal of Vacuum Science & Technology B: Microelectronics and Nanometer Structures, 8(6):1889, 1990.
- [95] T. Ando, S. Uryu und S. Ishizaka: *Chaos and Quantum Transport in Antidot Lattices*. Japanese Journal of Applied Physics, 38(Part 1, No. 1B):308–314, 1999.
- [96] F. Giesl: *Weiss-Oszillationen in einer einzelnen Oberfläche eines HgTe-basierten dreidimensionalen topologischen Isolators*. Masterarbeit, Universität Regensburg, Regensburg, 2017.
- [97] J. Heremans, B. K. Fuller, C. M. Thrush und V. Bayot: *Temperature dependence of the magnetoresistance of  $In_xGa_{1-x}As$  antidot lattices*. Physical Review. B, Condensed Matter, 54(4):2685–2690, 1996.
- [98] A. Altmann: *Weiss-Oszillationen in dem dreidimensionalen topologischen Isolator HgTe*. Masterarbeit, Universität Regensburg, Regensburg, 2021.
- [99] Y. Okada, W. Zhou, D. Walkup, C. Dhital, S. D. Wilson und V. Madhavan: *Ripple-modulated electronic structure of a 3D topological insulator*. Nature Communications, 3:1158, 2012.
- [100] J. Eroms, M. Zitzlsperger, D. Weiss, J. H. Smet, C. Albrecht, R. Fleischmann, M. Behet, J. de Boeck und G. Borghs: *Magnetotransport in large diameter InAs/GaSb antidot lattices*. Physica B: Condensed Matter, 256-258:409–412, 1998.



# Vielen Dank

Die vorliegende Arbeit wurde erst durch die Unterstützung und Hilfe möglich, die mir von vielen Seiten entgegengebracht worden ist. Daher möchte ich all denen danken, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben.

- Herrn Prof. Dr. Dieter Weiss möchte ich meinen herzlichen Dank für seine Betreuung und sein stetiges Interesse am Fortschritt der Arbeit aussprechen. Auch möchte ich mich dafür bedanken, dass er in fachlichen Diskussionen jederzeit wertvolle Ratschläge und Verbesserungsvorschläge für mich bereit hatte. Durch Ihn erhielt ich zudem die Möglichkeit zur Teilnahme an vielen interessanten Workshops und Konferenzen. Ganz besonders möchte ich Ihn für die vielfältige Unterstützung und das jederzeit spürbare Vertrauen danken, ohne das ein Gelingen der Arbeit sicher nicht möglich gewesen wäre.
- Dr. Johannes Ziegler, Ralf Fischer, Albert Koop und allen anderen aktuellen und ehemaligen Mitgliedern der Topo-Gruppe. In der Gruppe konnten in der Diskussion stets viele fachliche Themen geklärt und einige Prozesse optimiert werden.
- Dr. Dmitry Kozlov für die aufschlussreichen Diskussionen und Ratschläge beim Messaufbau. Zudem möchte ich Ihn für die stetige Versorgung mit HgTe-Wafern danken.
- PD. Dr. Jonathan Eroms möchte ich dafür danken, dass Er bei Schwierigkeiten immer ein offenes Ohr und auch bei komplizierten Problemen stets wertvolle Ratschläge parat hatte.
- Dr. Andreas K. Hüttel, Dr. Stefan Geißler, Christian Butschkow, Dr. Alexei Ivankilevitch und allen Entwicklern des Lab.:Measurement-Projekts möchte ich meinen ganz besonderen Dank aussprechen, denn ohne eine Automatisierung der Messdatenerfassung wäre die Arbeit in dieser Form nicht möglich gewesen.
- Ein besonderer Dank gilt Dr. Johannes Ziegler, Dr. Robin Huber, Dr. Tobias Völkl, Dr. Tobias Preis und Sofia Franke für die Entwirrung einzelner Details und das standhafte Korrekturlesen meiner eingestreuten oder fehlenden Kommata und sonstiger Verbrechen an der Grammatik.
- Claudia Moser und Elke Haushalter, möchte ich für die immer hilfsbereite und freundliche Atmosphäre und die stetige Unterstützung bei jeglichen organisatorischen und bürokratischen Belangen danken. Zudem möchte ich Ihnen für die gute Organisation sämtlicher Weihnachtsfeiern und Sommerausflüge danken.
- Allen aktuellen und ehemaligen Technikern am Lehrstuhl: Uli Gürster, Florian Birkner, Daniel Pahl, Michael Weigl, Thomas Haller and Cornelia Linz

danke ich für die Instandhaltung aller Geräte und jeglicher Unterstützung bei technischen Fragen und Problemen im Reinraum und Chemielabor.

- Beim gesamten Lehrstuhl möchte ich mich für die unvergessliche Zeit und die herzliche Aufnahme bedanken. An dieser Stelle möchte ich mich auch bei allen Personen bedanken, die ich hier nicht explizit erwähnt wurden, welche mir bei der ein oder anderen Angelegenheit geholfen haben. Insbesondere möchte ich Dr. Robin Huber, Dr. Johannes Ziegler, Dr. Tobias Preis, Dr. Tobias Völkl, Tobias Rockinger, Sofia Franke, Albert Koop und Franz Eberle für die zahlreichen aufklärenden Gespräche über fachliche wie auch nicht-physikalische Themen danken.
- Ich danke allen Insassen der ehemaligen Bürogemeinschaft 8.1.25/26 und der späteren Büro-Gang für den abwechslungsreichen Büroalltag. Gemeinsam konnten wir unsere Fähigkeiten am Topcon ausbauen und jeden Tag den *Held der Arbeit* feiern.
- Außerdem danke ich allen meinen Freunden für die zahlreichen außeruniversitären Aktivitäten. Ein Dank geht dabei an meine langjährigen Schulfreunde (Die Boys) mit denen auch trotz ändernder äußerer Umstände stets regelmäßige online und offline Meetings möglich waren. Weiter möchte ich meinen vielen Freunden und Kollegen aus dem Hochschulsport für den sportlichen Ausgleich danken.
- Abschließend möchte ich meiner Familie danken. Ein besonderer Dank geht dabei an Martin und Michaela für die stetige Unterstützung und die Ratschläge in sämtlichen Lebenslagen.