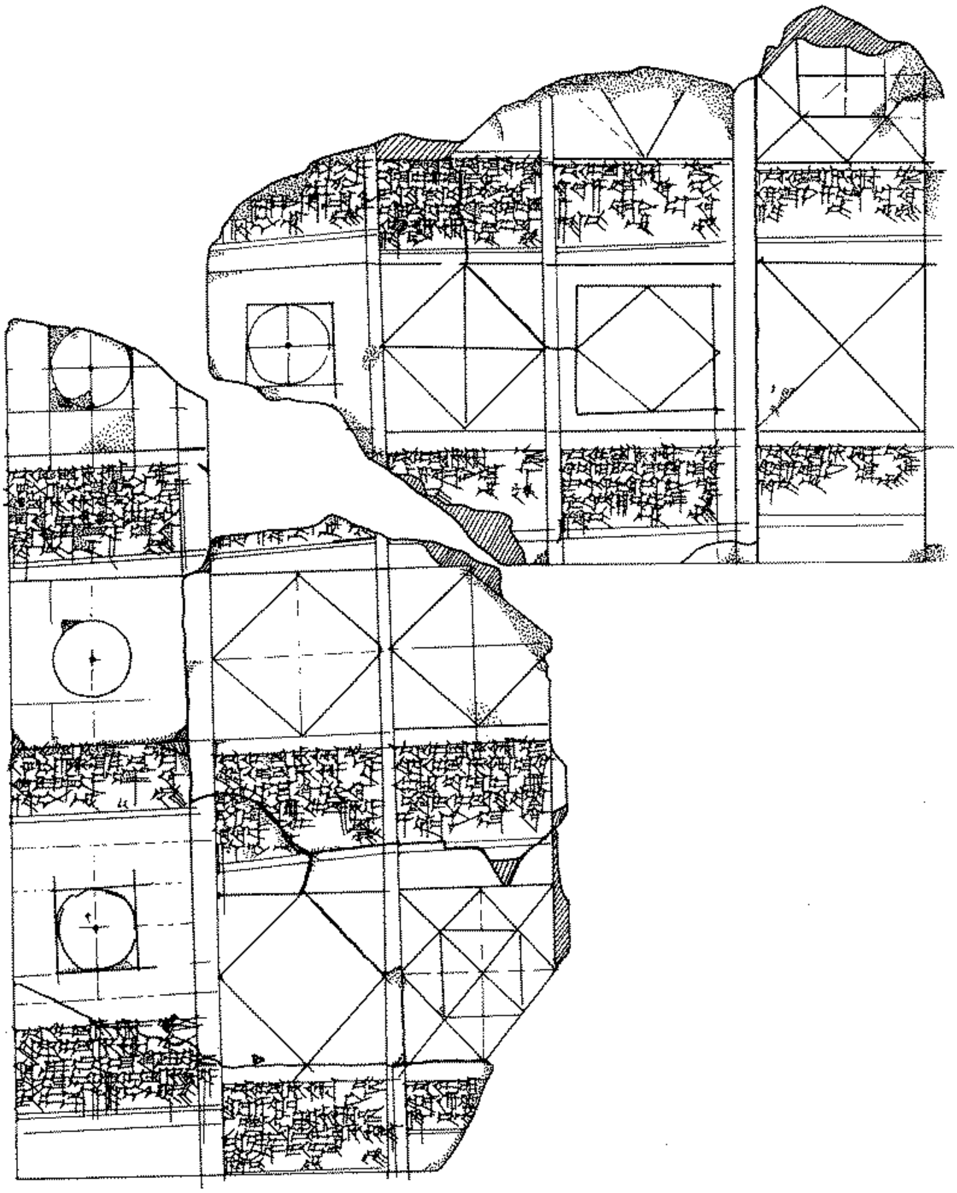
Om lige og krumme kvadrater; BM 15285

Kœre Marinus. Hjertelig tillykke med de I << MU (= 1,20 år) . Du kender sikkert det babylonske sexagesimal system, og det er det passende for dette bidrag.[1] Det skal handle om en gammel babylonsk matematisk tekst, der stammer fra en lertavle, BM 15285, som befinder sig i British museum. Eleanor Robson har behandlet den indgående i sin bog *„Mesopotamian Mathematics, 2100 – 1600 BC"* (Clarendon Press, Oxford 1999), og hun har været så venlig at overlade mig sine fine og præcise tegninger af teksten sammen med følgende hilsen til Dig:

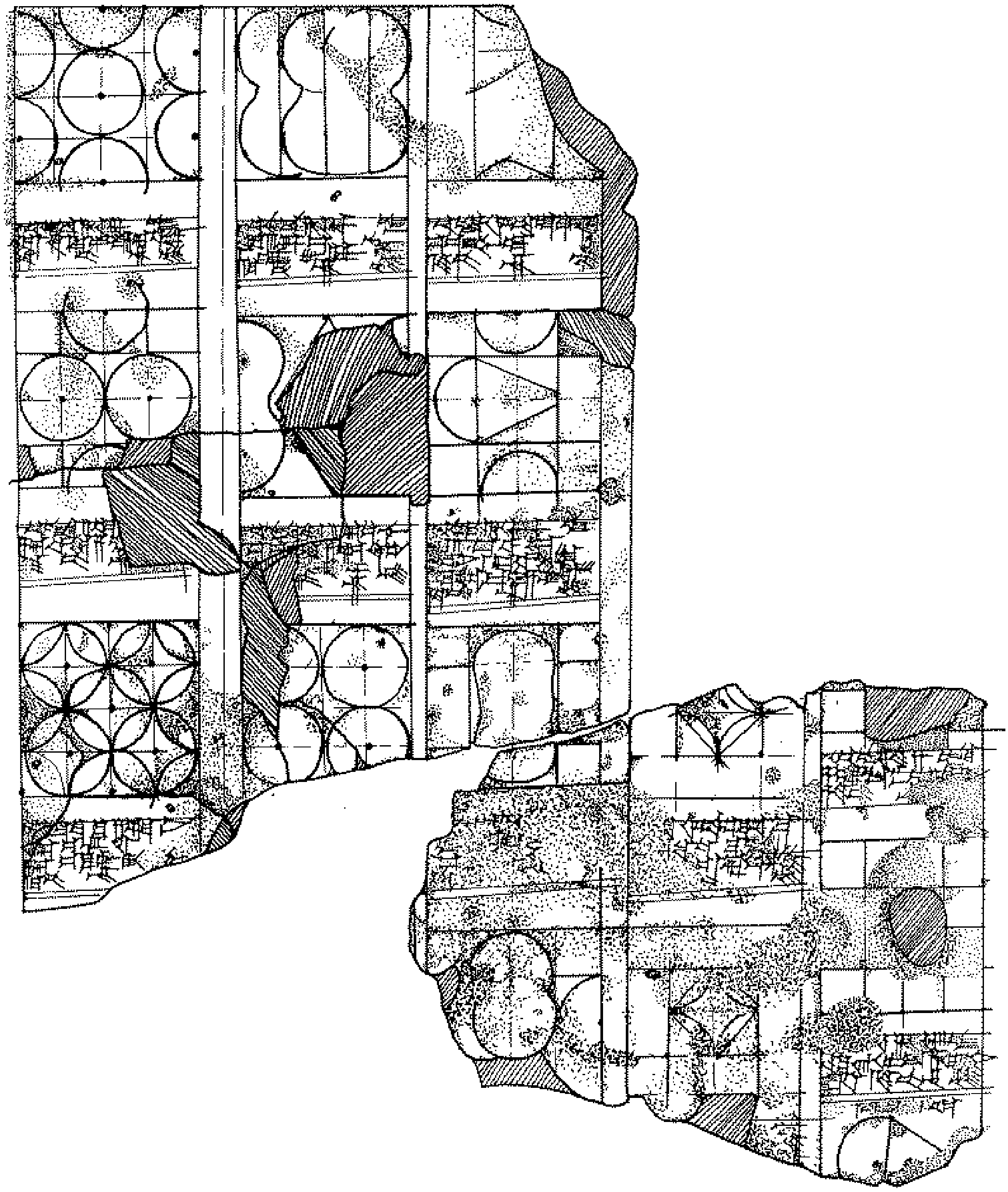
Happy birthday Marinus! With my very best wishes, Eleanor



BM 15285 forsiden

[1] Det Babylonske sexagesimalsystem er et positions talsystem med basis 60. Vi kan finde reminiscens deraf i vor tidsmåling: 1 time = 60 minutter og 1 minut = 60 sekunder. Vi gengiver kileskrifttal ved hjælp af vore arabiske tal: 12; 22,8 betyder $12 + 22 \times 60^{-1} + 8 \times 60^{-2}$ mens vores tal 365 bliver skrevet som 6, 5 = 6x60 + 5.

Her ser du en masse opgaver, der alle har ét tilfælles: der er tegnet et kvadrat som er inddelt i mindre dele og teksten til hver af disse opgaver begynder med at fastslå, at siden af det store kvadrat har længden 1 UŠ – og nu skal man finde arealet af delene. Spørgsmålet er hvordan eleverne mon kunne finde arealerne dengang opgaverne blev stillet – altså i oldbabylonsk tid (~1800 år før Kristi fødsel) ?

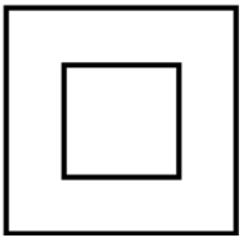


BM 15285 bagsiden

Ovenstående tegninger og teksterne til opgaverne, son jeg gengiver nedenfor i Eleanor Robsons oversættelse stammer fra Appendix 2: BM 15285, side 208 -217 i *„Mesopotamian Mathematics, 2100 – 1600 BC”.* Her findes henvisning til andre publikationer, der har behandlet denne tekst – hver eneste gang ved benyttelse af formler for arealer af geometriske figurer. Jeg vil nu betragte og behandle opgaverne på en helt anden måde; men føst gengive nogle af opgaverne.

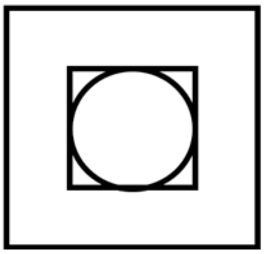
Eleanor Robson præsenterer de geometriske figurer og dermed opgaverne I overensstemmelse med tekstens kolonner. Jeg har overtaget hendes numerering af opgaverne og gengiver nedenfor kun den engelske oversættelse men ikke hendes transliteration af kileskriften til akkadisk:

Kolonne I



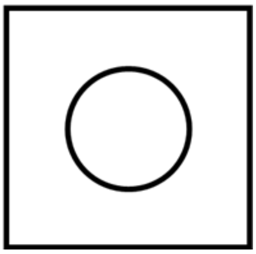
(i)

[The side of the square is 1 UŠ. I made a border each side and I drew a second square. What is its area?]



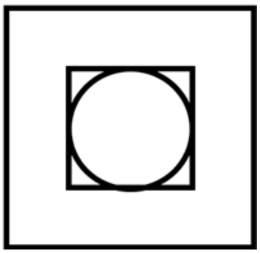
(ii)

The side of the square is 1 UŠ. I made a border each side and I drew a second square. Inside the square I drew a circle. What are their areas?



(iii)

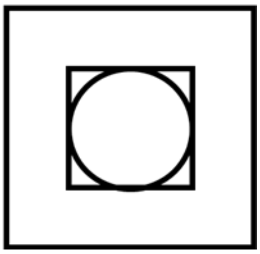
The side of the square is 1 UŠ. I made a border each side and I drew a second square. Inside the square I drew a circle. What is its area?



(iv)

The side of the square is 1 UŠ. Inside it I drew a square and a circle: The circle that I drew touched the square. What are their areas?

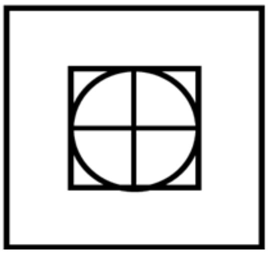
Fra Kolonne II gengiver jeg nedenfor et par af opgaverne:



(v)

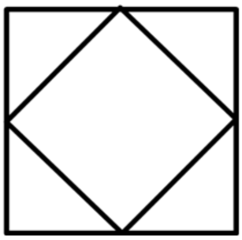
[The side of the square is 1 UŠ.] < I drew> a second [square.
Inside the second square I drew] 4 triangles and 1 circle.]
What are their areas?

Bemœrkt at de fire “trekanter”, der tales om her, har krumme, konkave grundlinier.



(vi)

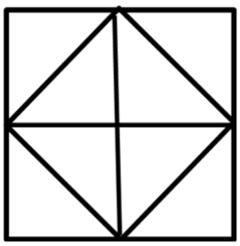
[The side of the square is 1 UŠ. <I drew> a second square.
Inside the second square I drew 4 squares and 1 circle.]
What are their areas?



(vii)

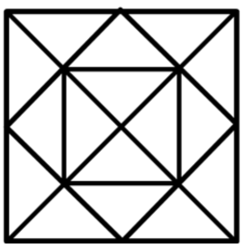
The side of the square is 1 UŠ
Inside it I drew a second square. The squares that I drew touched the outer square.
What is its areas?

Udvalgte opgaver fra Kolonne III



(x)

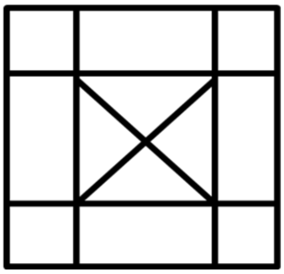
The side of the square is 1 UŠ.
Inside it I drew 8 triangles.
What are their [areas]?



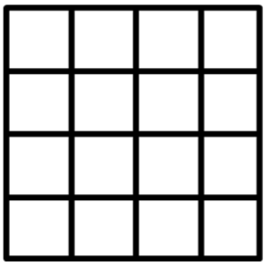
(xii)

The side of the square is 1 UŠ.
Inside it [I drew] 16 triangles.
What are their areas

Fra Kolonne VI gengiver jeg kun 2 opgaver:



(xxiii) *The side of the square is 1 UŠ.*
Inside it are 4 squares, 4 rectangles and 4 triangles.
What are their areas?

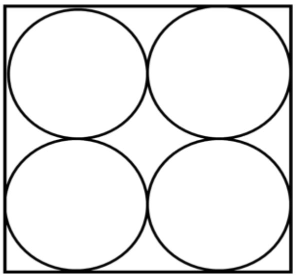


(xxiv*)* *The side of the square is 1 UŠ.*
Inside it I drew 16 squares.
What are their areas?

Senest her, ved betragtning af denne figur må man da komme på en ret nærliggende løsning: Det store kvadrat **K** er i opgave (xxiv) delt i 16 lige store dele. Andre kvadrater er ligeledes delt i lige store dele. Det er tilfældet for kvadratet i opgave (x), det er delt i 8 ligestore dele, og for opgave (xii) der deler kvadratet i 16 kongruente trekanter. Kender man figuren (xxiv) kan man i tankerne tilføje hjælpelinier til figur (i) og derved straks erkende at det lille kvadratet i midten er lig ¼ af det store kvadrat. Det samme kan man umiddelbart se af figur (xxiii). I hver eneste opgave, hvor det store kvadrat er delt ved rette linier, kan man (eventuelt ved hjælp af et par ekstra delelinier) hurtigt overse, hvor mange 16-dele de forskellige delfigurer er sammensat af. Det vil sige, at man meget let kan finde arealerne af delene: blot ved at tælle delene og dividere det store areal med antallet af delene. I opgave (xxiii) skal man for eksempel blot bemærke at rektanglerne er dobbelt så store som trekanterne og de små kvadrater.

I Mesopotamien målte man som regel horisontale afstande in enheder af NINDA = ca. 6 meter. En UŠ er lig med 60 NINDA, hvilket ifølge Neugebauers konvention bliver gengivet som 1, 0 NINDA. Vort kvadrat, **K**, har sidelængden 1, 0 NINDA (= 60 NINDA ~ 360 meter) og et areal på 1, 0, 0 SAR (= 1,0,0 NINDA^2 ~129600 m^2). 1/16 heraf er 3,45 SAR (=225 SAR). Vi har hermed fundet løsningen til opgave (xii) og (xxiv). Jeg formoder at længden 1 UŠ er valgt således at divisioner med 8, 16 og andre potenser af 2 er lette at udføre (se også appendix). Vi kan umiddelbart – blot ved at betragte figurerne - finde størrelsen af de arealer, der bliver spurgt om i opgave (i), (vii), (xxiv) og (x): Kvadratet i figur (i) er lig ¼ af **K** = 15, 0 SAR. Det indre kvadrat i figur (vii) er lig ½ **K** = 30, 0; og hvert at de små kvadrater i (xxiv) er lig med 1/16 **K** = 3,45. I figur (x) er **K** delt i 8 lige store trekanter, således at hver af dem er lig med 1/8 **K** = 7,30. Bemærk, at man ikke behøver at vide, at arealet af en trekant er lig grundlinien l gange ½ h for at løse opgaverne. Arealet af alle geometriske delfigurer, der er fremkommet ved deling af **K** ved rette linier kan findes ved at betragte figuren og derefter dividere **K** med den passende potens af 2.

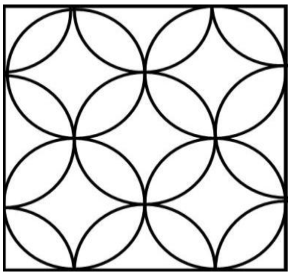
Vi går nu over til at betragte opgaverne på bagsiden af BM 15285.
Spørgsmålet er nu hvordan kan man finde arealerne i de tilfælder hvor cirkelbuer deler kvadratet **K** i mindre dele.



(xxxvi)

Af opgave (xxxvi) er det kun figuren; men ikke teksten der er bevaret. I analogi til de øvrige opgaver kan vi formode, at man også her skulle finde arealerne - af cirklerne, og måske også af "trekanterne" med delvis krumme sider.

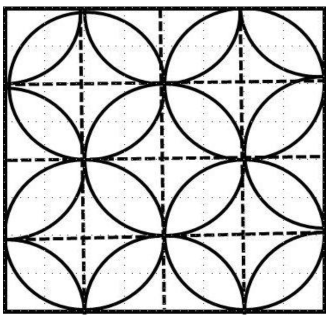
Den "konkave firkant" i midten af **K** blev kaldt et *apsamikkum*. Babylonerne kendte konstanter og formler for at beregne denne figur samt andre delfigurer med krummer sider (Se Eleanor Robson 3. Geometrical Coefficients S. 34 – 56). Kan disse opgaver mon også løses umiddelbart og ved betragtning af figurerne, som de ovenstående opgaver? Det vil jeg argumentere for. Betragter vi nu opgave (xl), der har 5 konkave kvadrater, som er kaldt *apsamikkum* i andre tekster.



(xl)

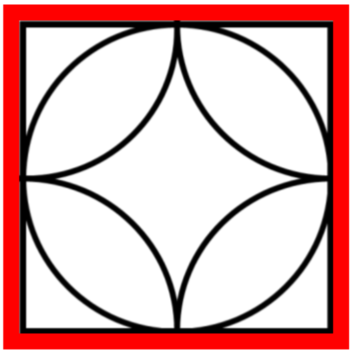
The side of the square is 1 UŠ.
<Inside it are< 4 triangles, 16 barges,
5 concave squares.
What are their areas?

I denne gengivelse af figuren ser man ikke de hjælpelinier, der er ret tydelige I Eleanor Robsons tegning af teksten. Jens Høyrup har argumenteret overbevisende om at der blev benyttet geometriske skitser til at viste eleverne hvordan de kunne udføre forskellige beregninger. (Se hans Algebra på lertavler 1998). Disse skitser var grove og ikke helt prœcise; men de gengav ideen og løsningsvejen fint. Jeg er overbevist om at han har ret, og at de synlige delelinier på tavlen BM 15285 også er vigtige. Derfor gengiver jeg figuren til opgave (xl) på ny, idet jeg tilføjer de synlige delelinier til figuren.



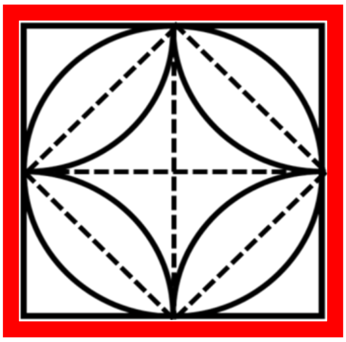
(xl)

De indtegnede hjælpelinier gør det tydeligere, at hvert apsamikkum er sammensat af 4 kongruente „trekanter med krum grundlinie". Nogle sådan blev der spurgt om i opgave (v), så nu vil jeg betragte dem noget nœrmere, og tillader mig at opfinde endnu en opgave. Man kan gennemføre alle argumentere på denne figur; men det er overskueligere på „min" hjælpefigur (ø) :



(ø)

Siden af kvadratet er 1 UŠ. Indeni er der et Konkavt kvadrat (*apsamikkum*), 4 „*små skibe*" og 4 trekanter med konkav grundlinie. Hvor store er deres arealer?

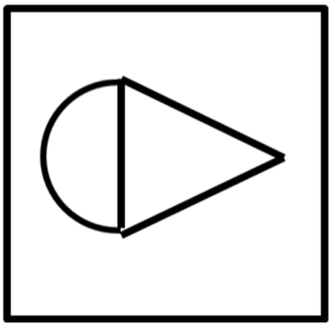


(øø)

Jeg tilføjer nogle hjælpelinier - dog udelukkende sådanne, som man kann finde inddegnet i figurerne på vor tavle BM 15285 **– og påstar, at min figur nu er inddelt i 16 lige store dele**. Ud fra denne antagelse er det meget nemt at løse opgaven og finde arealet af enhver delfigur: Hver af de konkave trekanter har arealet = 1/16 af **K**, og de er lige så store som hvert af de 8 cirkelafsnit over de skrå korder. Cirkelafsnittene taget parvis giver os 4 linseformede flader med areal lig 1/8 **K**. Sådanne linseformede figurer er i andre matematiscke kileskrifter kaldt *"lille skib".* Det konkave kvadrat, *apsammikkum*, har arealet ¼ **K**; mens cirklens areal er lig med 12 x 1/16 **K** = ¾ **K**. Arealet af en cirkel, der er indskrevet i et kvadrat, er efter denne min påstand lig med ¾ af det omsluttende kvadrat. Med denne viden kan vi umiddelbart også løse opgaverne (ii), (iii), (iv) og (v) – blot ved i tankerne at tilføje nogle hjælpelinier – eller ved at have denne figur (øø) i tankerne. At en cirkelflade er lig med ¾ af dens omskrevne kvadrat svarer til at "vores π" blev regnet som 3 af de gamle babylonere. Værdien 3 for „π" kann findes mere eller mindre indirekte i mange matematiske kileskrifttekster. Koefficienten for en cirkel er 0;05. Det betyder at „enhedscirklen" med omkreds 1 har arealet 0;05, og det medfører, at arealet af en cirkel med omkreds O blev udregent som O^2 x 0;05 = $O^2/12$. En anden koefficient angiver diameteren i „enhedscirklen" til at vaere 0;20 altså lig 1/3 af omkredsen. Eleanor Robson (1999. S. 50-56) viser i afsnittet *The concave square and related figures* hvordan arealerne af alle de omtalte delfigurer (konkav trekant, "*lille skib", apsamikkum*) kan udregnes ved hjælp af geometriske koefficienter, der blev ført i lange lister. Bortset fra at Robson fejlagtigt[2] gik ud fra et kvadrat med siden 1, stemmer de resultater hun kom frem til helt overens med hvad vi kan aflæse direkte af vor opfundne figur (øø) . Det samme kan også aflæses af de figurer, der er tegnet på BM 15285: Et „*lille skib"* er dobbelt så stor som en konkav trekant; og det konkave kvadrat er dobbelt så stort som et „*lille skib"*, og halvt så stort som det stiplede kvadratet der står på spisen. Cirklen er 6 gange så stor som et „*lille skib"* og lig ¾ af det omskrevne kvadrat. Jeg vil hermed ikke påstå, at de babylonske geometriske koefficienter er afledt af vor figure i forbindelse med min påstand (selv om det er muligt); men blot henvise til, at det er indbydende og let at aflæse meget mere af (babylonske) figurer, end vi hidtil har gjort. Det er nærliggende at gøre det, og jeg overbevist om at teksten

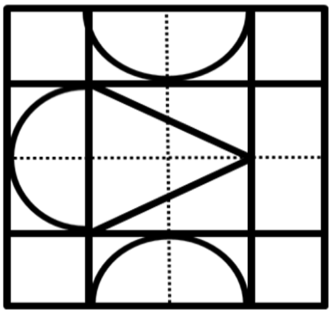
[2] Fejlen er elimineret i Robsons (2008) „The long Career of a Favorite Figure" Festschrift Slotsky, s: 220 -223, hvor Robson gengiver tekster, der regner med *apsammikum* under anvendelse af de relevante koefficienter.

BM 15285 af babylonerne selv også blev brugt til af aflæse størrelsene af de indtegnede arealer. Jeg mener også at have gode argumenter herfor: Betragter vi for eksempel opgave (xxv), som er reproduseret nedenfor:



(xxv) *The … is 1 UŠ. … the width.*

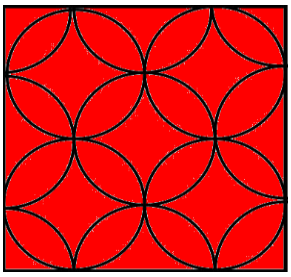
Hvis man betragter denne opgave alene, kann man hverken forstå eller rekonstruere den og da slet ikke finde arealet af den indtegnede figur. Mere indsigt giver det, hvis vi kombinerer opgaven med opgave (xxxi), så det vil vi gøre:



(xxxi) *The side of the square is 1 UŠ. Inside it are 2 semi-circles, 2 triangles, 1 Cone?, 1 rectangle and 4 squares. What are their areas?*

I figur (xxxi) har jeg , med stiplede linier, indtegnet de to hjælpelinier, der tydeligt kan erkendes på Eleanor Robsons tegning (der blev gengivet i begyndelsen af denne artikel). Betrager vi denne figur med kundige øjne, ser vi omgående, at halvkredsen er lig med ¾ af det omskrevne rektangel og at det lille indre kvadrat, k, er delt i trekanter, hvis arealer vi kann aflæse af figuren: k er delt i 2 retvinklede trekanter, der hver er lig ¼ k samt en ligesidet trekant, der er lig ½ k. Vi ved også at k = ¼ **K** og at rektanglet er lig ½ k, og hermed kan alle arealer let udregnes. Lad os blot udregne arealet af delfiguren *Cone?,* der ser ud som en kugle is i et gammeldags kræmmerhus, og som også er tegnet i figur (xxv): Den ligesidede trekant er lig ½ k = ½ x ¼ **K** = 7,30 SAR, og „iskuglen“ = *1 semi-circle* = 1/3 x ½ k = 2,30 SAR.

Kære Marinus, Du har selv i Din instruktive *COLOURED QUADRANGLES* henvist til hvor vigtige og hjælpsomme matematiske figurer kan være. Derfor håber jeg, at Du har haft lidt fornøjelse af „mine babylonske figurer“ og deres betragtning.



(Marinus)
Jeg har nu ladet en af figurerne blive festlig rød. Dette røde kvadrat har siden 16, så nu er Din opgave at finde (eller udregne) Din alder. Den er lig summen af de 5 *apsamikkum*, der er indtegnet i „dit røde Kvadrat“. Hjertelig tillykke med den runde fødselsdag. Med de bedste ønsker for endnu mange sunde, glade og aktive år sender jeg mine kærligste hilsener, Lis Brack-Bernsen.

Literatur:

Jens Høyrup *Algebra på lertavler,* Jysk Centraltrykkeri 1998.

Eleanor Robson - *„Mesopotamian Mathematics, 2100 – 1600 BC"* ,Clarendon Press, Oxford 1999
- „The long Career of a Favorite Figure" in *From the Banks of the Euphrates, studies in honor of Alice Louise Slotsky*, Ed. Micah Ross Eisenbrauns , 2008

Appendix:

Nedenfor gengiver jeg Jens Høyrups argumentation for at kvadratet **K**, der bliver omtalt i opgaverne på BM 15285, har siden 1 UŠ = 1, 0 NNINDA. Indtil da havde alle forskere læst teksten anderledes og regnet med en sidelængde på 1. Jeg takker Jens Høyrup for denne henvisning og for hans hjælp og forbedringsforslag . Argumentationen stammer fra side 157 i Oelsners festskrift:

Assyriologica of Semitica: Festschrift für Joachim Oelsner anlässlich seines 65. Geburtstages am 18. Februar 1997 von Joachim Marzahn, Hans Neumann und Andreas Fuchs (Januar 2001)

BM 15285 is less easily categorized. The text is a catalogue of problems about the inscription of geometrical figures in a square. Problems start 1 UŠ *mi-it-a-ar-tum* (at times written 1 UŠ **íb.si$_8$**). Normally UŠ is read uš, "length", and translated "1 (ist) die Länge. Ein Quadrat" [MKT I, 138], "Un carré: le flanc est 1" [TMB, 53], or "The length of the square is 1" [Robson 1995: 248]. The reference to the "length" of a square is used in the Tell Harmal Compendium (group 7B) and TMS V+VI (group 8B), perhaps also in TMS VIII (group 8A); if the interpretation is correct the expression hence suggests the "northern" orbit. But it hardly is. Robson's translation does not fit the nominative of *mitartum*;[3] Neugebauer and Thureau-Dangin instead read *mitartum*/ **íb.si$_8$** as an indication of the object, which is then in a most unusual second position (which Thureau-Dangin corrects in his translation).[4] A reading of UŠ as the unit 60 **nindan** , and the whole phrase as "1 UŠ [= 1` **nindan**] is the equalside" seems a more likely alternative. This reading, however, has no implications as to the origin of the tablet.)

[3] If we try instead (no obvious choice!) to read *mithartum* as a Gt-verbal adjective (and the whose expression thus as a stative variant of the *imtahhar*-construction), the singular feminine form of *mithartum* does not fit an interpretation of uš neither as a singular (whence masculine), nor as a feminine (whence plural).

[4] In YBC 4662–63, it is true, the object (the ki.lá) was sometimes told after the wage to be paid. But the dimensions of the object still follow its presentation.